



**“UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO”**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN**

***“PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE BASADAS EN LA DISTRIBUCIÓN  
EMPÍRICA”***

**TESINA QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**“LICENCIADO EN ACTUARÍA”**

**PRESENTA**

**AURORA ADRIANA LUNA VELASCO**

**ASESOR: ACT. MAHIL HERRERA MALDONADO**

**MAYO 2008**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Dios, mi Creador, Salvador y Señor  
a El sea la Honra y la Gloria.*

*“Porque Jehová da la sabiduría,  
Y de su boca viene el conocimiento y la inteligencia”*

*A mis padres, Mine y Javier,  
Gracias por su incansable amor y constante dedicación,  
gracias por ser un gran ejemplo siempre .*

*A mis hermanas Diana y Givi  
Gracias por su amor, su compañía, su paciencia,  
ha sido increíble compartir la vida con ustedes.*

*A mi familia gracias por su apoyo  
incondicional en todo momento.*

*A mis amigos,  
Gracias porque “ En todo tiempo ama el amigo  
y es como un hermano en tiempo de angustia.”*

*A Mahil, mi estimado profesor  
Gracias por el tiempo que invertiste en nosotros,  
por tu soporte para la realización y conclusión de este trabajo.*

# ÍNDICE

<a href="#">Introducción</a>	1
1. <a href="#">Pruebas de Hipótesis</a>	3
1.1. <a href="#">Definición de Prueba de Hipótesis</a>	5
1.2. <a href="#">Pruebas de Bondad de Ajuste</a>	12
2. <a href="#">Distribución Empírica</a>	13
2.1. <a href="#">Definición</a>	13
2.2. <a href="#">Propiedades</a>	13
2.3. <a href="#">Ejemplo de Función de Distribución Empírica</a>	16
2.4. <a href="#">Ventajas</a>	18
2.5. <a href="#">Desventajas</a>	19
3. <a href="#">Pruebas de Bondad de Ajuste basadas en la Distribución Empírica</a>	20
3.1. <a href="#">Conceptos Básicos</a>	21
3.2. <a href="#">Kolmogorov – Smirnov</a>	23
3.2.1. <a href="#">Estadístico de Prueba</a>	24
3.2.2. <a href="#">Prueba</a>	24
3.2.3. <a href="#">Metodología</a>	25
3.2.4. <a href="#">Tablas</a>	29
3.2.5. <a href="#">Características</a>	30
3.3. <a href="#">Anderson – Darling</a>	31
3.3.1. <a href="#">Estadístico de Prueba</a>	31
3.3.2. <a href="#">Tablas</a>	36
3.3.3. <a href="#">Características</a>	36

3.4.	<a href="#">Cramér – Von Mises</a>	.	.	.	.	.	.	38
3.4.1.	<a href="#">Estadístico de Prueba</a>	.	.	.	.	.	.	38
3.4.2.	<a href="#">Características</a>	.	.	.	.	.	.	39
3.5.	<a href="#">Kuiper y Watson</a>	.	.	.	.	.	.	41
3.5.1.	<a href="#">Estadístico de Prueba</a>	.	.	.	.	.	.	41
3.5.2.	<a href="#">Características</a>	.	.	.	.	.	.	44
3.6.	<a href="#">Análisis Gráfico</a>	.	.	.	.	.	.	45
3.6.1.	<a href="#">Introducción</a>	.	.	.	.	.	.	45
3.6.2.	<a href="#">Características</a>	.	.	.	.	.	.	45
3.6.3.	<a href="#">Graficación de la Distribución Empírica.</a>	.	.	.	.	.	.	47
3.6.4.	<a href="#">Gráficas de Probabilidad (P-P)</a>	.	.	.	.	.	.	50
4.	<a href="#">Aplicaciones y Ejemplos</a>	.	.	.	.	.	.	53
4.1.	<a href="#">Kolmogorov-Smirnov</a>	.	.	.	.	.	.	53
4.2.	<a href="#">Anderson-Darlinng.</a>	.	.	.	.	.	.	59
4.3.	<a href="#">Cramer-Von Mises.</a>	.	.	.	.	.	.	64
5.	<a href="#">Conclusiones</a>	.	.	.	.	.	.	66
	<a href="#">Apéndice A</a>	.	.	.	.	.	.	72
	<a href="#">Apéndice B</a>	.	.	.	.	.	.	73
	<a href="#">Bibliografía</a>	.	.	.	.	.	.	74
	<a href="#">Tablas</a>	.	.	.	.	.	.	76

## **Introducción**

Cuando se tiene un conjunto de datos es de vital importancia saber de que distribución proceden, o que distribución se asemejan, esto con el fin de poder presentar resultados veraces en la tarea que se realice.

Por ejemplo cuando se desea realizar pronósticos, es necesario conocer el comportamiento de la variable sobre la cual desea realizar pronósticos, para así aplicar el método adecuado de predicción, esto se realiza por la vía de la Estadística Paramétrica o No Paramétrica.

El objetivo del presente trabajo es mostrar la recopilación de las principales pruebas de bondad de ajuste que se basan en la distribución empírica y como se emplean.

Las pruebas de bondad de ajuste basadas en la distribución empírica son muy útiles ya que se pueden aplicar no importando de qué distribución procedan los datos a examinar.

Primeramente, se presenta un breve recordatorio de Pruebas de Hipótesis, las partes que las conforman, el procedimiento para realizar una prueba de hipótesis, así como un ejemplo. También se introducirá a las pruebas de bondad de ajuste y se explicará en que consisten.

El siguiente capítulo es la presentación formal de la Distribución Empírica, sus propiedades y las ventajas y desventajas de uso.

El capítulo tres es donde se desarrollan las pruebas de bondad de ajuste, como son la de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Cramer-Von Mises, Kuiper y Watson. Se desarrolla cada prueba presentando el estadístico de prueba, las tablas necesarios y como aplicar la prueba.

Inmediatamente después se encuentran algunos ejemplos y aplicaciones de las pruebas. Se incluye también algunos ejemplos en los que se aplican las diferentes pruebas y se hacen sus respectivas comparaciones para ver cual se aplica mejor y bajo que circunstancias.

Finalmente se presentan las conclusiones del presente trabajo, así como algunas de las sugerencias que dan los diferentes autores de las pruebas.

# 1. Pruebas de Hipótesis

La inferencia estadística está relacionada con los métodos para obtener conclusiones o generalizaciones acerca de una población. Estas conclusiones pueden estar relacionadas con la forma de la distribución de una variable aleatoria, ó con los valores de uno o varios parámetros de la misma.

El campo de la inferencia estadística se divide en dos:

- **Estimación de los parámetros** de una distribución, se trata de elegir el valor de un parámetro de la población. A su vez se divide en dos áreas:
  - Estimación Puntual, que consiste en obtener números que sean los que mejor representan a los valores verdaderos de los parámetros de interés.
  - Estimación por Intervalos, consiste en la obtención de un intervalo dentro del cual estará el valor del parámetro estimado con una cierta probabilidad.
- **Pruebas de Hipótesis**, en las que se trata de decidir entre aceptar o rechazar un valor especificado (por ejemplo, si la marca M es mejor que la P). Que a su vez se dividen en:
  - Pruebas de Hipótesis sobre parámetros, para determinar si un parámetro de una distribución toma o no un determinado valor.
  - Pruebas de Bondad de Ajuste, para definir si un conjunto de datos se puede modelar mediante una determinada distribución.

En este capítulo presentaran las definiciones básicas y necesarias para el desarrollo de las Pruebas de Hipótesis, así como definiciones formales para su mejor entendimiento.

Las Pruebas de Hipótesis se encuentran en diversas circunstancias de nuestra vida cotidiana por ejemplo: Una persona es arrestada y se le acusa de cometer algún crimen. Inicialmente, esta persona es considerada inocente. Usando los datos o evidencia disponible el fiscal debe demostrar que sin duda razonable, la persona en efecto cometió el crimen. En el sistema judicial, como lo ilustra este ejemplo, parte de supuestos, se examinan los datos y con base en esos datos, se toma una decisión, la de encontrar la persona culpable o no. A este proceso de decidir si el supuesto inicial, es cierto hasta que no se demuestre lo contrario se conoce como Prueba de Hipótesis.

## **1.1. Definición de Pruebas de Hipótesis**

**Definición.** La *hipótesis estadística* ( $H$ ) es una suposición acerca de la distribución  $f(x, \theta)$  de una o más variables aleatorias.

Si la hipótesis estadística especifica completamente a la distribución, entonces se llama *hipótesis simple*; sí no es así, entonces se llama *hipótesis compuesta*.

Generalmente la distribución de un parámetro desconocido  $\theta$  y la hipótesis se

---

relaciona con este parámetro; en otros casos, se desconoce la forma de la distribución.

**Definición.** Cuando en la hipótesis estadística, el parámetro de la distribución se desconoce se dice que es una *hipótesis simple*.

**Definición.** Si en la hipótesis estadística se desconoce la forma de la distribución se llama *hipótesis compuesta*, la cual se relaciona con una distribución específica  $f(x, \theta)$ .

Ejemplo:

Hipótesis simples:  $\mu = 10$ ,  $\sigma^2 = 37$ ,  $\theta = 0.02$

Hipótesis compuesta:  $\mu \neq 30$ ,  $\mu < 25$ ,  $\sigma^2 > 120$

La prueba de hipótesis es un procedimiento estadístico que comienza con una suposición que se hace con respecto a un parámetro de población, luego se recolectan datos de muestra, se producen estadísticas de muestra y se usa esta información para decidir qué tan probable es que sean correctas nuestras suposiciones acerca del parámetro o de la población en estudio.

**Definición.** La *Hipótesis Nula*  $H_0$  es el supuesto del cual se parte sobre el comportamiento de la población se conoce como la hipótesis nula. Representa la hipótesis que mantendremos cierta a no ser que los datos indiquen su falsedad.

**Definición.** La *Hipótesis Alternativa*  $H_a$  ó  $H_1$  es aquella hipótesis contra la cual

queremos contrastar la hipótesis nula. Está hipótesis puede ser simple o compuesta.

Así que si queremos probar que los productos defectuosos de una línea de producción A son menores que la de otra línea B, la hipótesis nula será que “no hay diferencia entre los dos procesos”, esto es  $\theta_A - \theta_B = 0$ , mientras que la hipótesis alternativa puede ser que los productos defectuosos de la línea A tiene una fracción defectuosa menor, es decir:

$$H_0 : \theta_A - \theta_B = 0$$

$$H_1 : \theta_A - \theta_B < 0$$

**Definición.** Una *prueba de hipótesis H* es una regla o procedimiento que conduce a una decisión si se rechaza o no *H* con base en los resultados de una muestra.

**Definición.** Sea  $C_\gamma$  un subconjunto del espacio muestral, formado por todas aquellas muestras que cumplen con la prueba  $\gamma$  tal que nos lleve a rechazar *H*; a  $C_\gamma$  es llamada *región crítica de la prueba*.

Luego de diseñar la prueba, se debe basarse en los resultados observados para tomar una decisión sobre su hipótesis. Esta decisión puede ser la de rechazar la hipótesis nula a favor de la alternativa si los datos que obtuvo contradicen en gran medida la hipótesis nula.

Idealmente la decisión tomada debe reflejar y ser congruente con la realidad poblacional desconocida. Sin embargo, esto no siempre ocurre, pues existe siempre la posibilidad de cometer algún tipo de error estadístico.

**Definición.** *Error Tipo I* es rechazar  $H_0$  cuando es verdadera.

**Definición.** La *probabilidad de cometer Error Tipo I* se denota usualmente por la letra griega alfa  $\alpha$ .

$$P(\text{Rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera}) = P(\text{Error Tipo I}) = \alpha$$

En el caso en que la hipótesis nula no sea cierta, en algunos casos los datos pueden llevarnos a no rechazarla, llevándonos a cometer otro tipo de error.

**Definición.** Aceptar  $H_0$  cuando es falso es llamado *Error Tipo II*.

**Definición.** La *probabilidad de cometer el Error Tipo II* se denota por la letra griega  $\beta$ .

$$P(\text{Aceptar } H_0 \text{ siendo falsa}) = P(\text{Error Tipo II}) = \beta$$

**Definición.** La *Potencia de la Prueba*, se denota por  $\Pi_\gamma$ , representa la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa, es decir mide la probabilidad de rechazar hipótesis falsas.

$$\text{La Potencia de la prueba es: } \Pi_\gamma(\theta) = 1 - \beta(\theta)$$

La Potencia de la Prueba es una medida muy descriptiva y concisa de la sensibilidad de una prueba estadística para detectar cambios que tan diferente es la verdadera población del la hipótesis supuesta.

El máximo valor que la Potencia de la Prueba es  $\Pi_\gamma(\theta) = 1$ , y el mínimo  $\Pi_\gamma(\theta) = 0$ .

Idealmente queremos pruebas más potentes, por lo que buscamos que  $\Pi_{\gamma}(\theta)$  sea lo más cercano a 1, ya que esto nos indica que en lugar de cometer un error, acertamos.

El gráfico de  $\Pi_{\gamma}(\theta) = 1 - \beta(\theta)$  se conoce como función de potencia de la prueba de hipótesis.

Una vez especificado el valor de  $\alpha$ , el de  $\beta$  queda fijado para cualquier tamaño de muestra determinado. Ahora bien dado un valor fijo de  $\alpha$ , la probabilidad de cometer un Error de tipo II disminuirá a medida que aumente el tamaño muestral.

Existe un equilibrio entre los dos tipos de errores, la probabilidad de cometer un tipo de error puede reducirse sólo si deseamos incrementar la probabilidad de cometer el otro.

Los valores para el nivel de significancia de una prueba de uso más común en la literatura científica son .01, .05 y .10. El nivel de significancia es en ocasiones presentado como un por ciento, tal como 1%, 5% o 10%. Esto quiere decir que se está dispuesto a permitir una probabilidad de .01, .05, o .10 de cometer un error tipo I: rechazar la hipótesis nula cuando es cierta.

El valor de la significancia es seleccionado en una de varias formas antes de comenzar a hacer el experimento o estudio. El valor de  $\alpha$  puede estar dictado por el uso y costumbre de la disciplina, por ejemplo, de los artículos que se publican en revistas científicas. Otra forma de seleccionarlo es que sencillamente sea impuesto por la persona o compañía para la cual se está haciendo el trabajo.

Finalmente, puede ser seleccionado tomando en cuenta el costo de cometer un error tipo I. Mientras más alto el costo de este tipo de error, más pequeña debe ser la probabilidad  $\alpha$  de cometer error tipo I. El valor usual de  $\alpha$  en las ciencias naturales y sociales es de .05.

Una prueba es ideal si:

- $\Pi_\gamma(\theta) = 0$  cuando  $\theta \in H_0$ , entonces  $\alpha = 1$
- $\Pi_\gamma(\theta) = 1$  cuando  $\theta \in H_1$ , entonces  $\alpha = 0$

Sin embargo, si  $\alpha = 0$ , no se puede tomar la decisión de rechazar la hipótesis nula.

Siempre que se tome la decisión de rechazar la hipótesis nula, ya que la decisión se basa en una muestra y no en la población, existe la posibilidad de cometer un error tipo I.

		Estado de la realidad	
		$H_0$ es cierta	$H_0$ es falsa
Decisión tomada	Rechazar $H_0$	<b>Error tipo I: <math>\alpha</math></b>	Decisión correcta
	No rechazar $H_0$	Decisión correcta	<b>Error tipo II: <math>\beta</math></b>

**Tabla 1.1 Resumen de los tipos de error estadístico**

**Definición.** Sea  $\gamma$  la prueba de hipótesis  $H_0 : \theta \in \Theta_0$ , donde  $\Theta_0 \subset \Theta$ , es decir  $\Theta_0$  es un subconjunto del espacio parametral  $\Theta$ . El *tamaño de la prueba o nivel de significancia* de  $\gamma$ , se define como:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \pi_\lambda(\theta),$$

En otras palabras podemos decir que el nivel de significancia es la máxima probabilidad de rechazar  $H_0$  siendo cierta.

**Definición.** *La región de rechazo o región crítica, es un conjunto de valores del estadístico para la cual se rechaza la hipótesis nula.*

Es decir el espacio muestral para nuestro estadístico de prueba esta dividido en dos regiones; una región (la región crítica) nos llevará a rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , la otra no. Entonces, si observamos que el valor del estadístico de prueba es parte de la región crítica concluimos que *rechazamos  $H_0$* , en caso contrario entonces *no rechazamos  $H_0$* .

## **1.2. Pruebas de Bondad de Ajuste**

Existen otros tipos de pruebas en los que se desconoce por completo la forma de la distribución, entonces la hipótesis se relaciona con una distribución específica que podamos asignarle al conjunto de datos de la muestra, a este tipo de pruebas se les conoce como Pruebas No Paramétricas.

Las ventajas de las Pruebas No Paramétricas se pueden usar mejor con muestras pequeñas, con datos cualitativos, aunque generalmente son menos potentes que las Paramétricas y llevan una mayor probabilidad de no rechazar la hipótesis nula (incurriendo en un error tipo II).

Dentro del conjunto de las Pruebas No Paramétricas destacan las "Pruebas de Bondad de Ajuste" que son pruebas estadísticas que tratan de verificar si el conjunto de datos se puede ajustar o afirmar que proviene de una determinada distribución.

## 2. Distribución Empírica

Se hace uso de distribuciones empíricas no paramétricas para modelar precios y rendimientos. Las distribuciones empíricas permiten captar en el modelo las correlaciones esenciales existentes entre precios y rendimientos, sin necesidad de imponer estructuras adicionales o efectuar complicados procedimientos de estimación. Adicionalmente, simplifican las integraciones numéricas que deben ser efectuadas para estimar la distribución de los ingresos brutos del productor.

Cuando la distribución de una variable del modelo no se puede clasificar como ninguna de las distribuciones conocidas y no es posible representarla por ninguna expresión determinada, se usa una distribución empírica.

### 2.1. Definición

Los métodos de inferencia estadística están basados en el supuesto (muchas veces implícito) de que una distribución uniforme discreta de valores observados aleatoriamente es asintóticamente la misma que la distribución que genera el proceso generador de datos.

Pero a menudo la distribución de una variable del modelo no se puede clasificar como ninguna de las distribuciones conocidas y no es posible representarla por ninguna expresión determinada, es por eso que se usa una distribución empírica.

**Definición.** La *función de distribución empírica (FDE)* es la función de distribución de probabilidad acumulada que concentra la probabilidad  $\frac{1}{n}$  en cada  $n$  números de la

muestra.

Para el caso univariado, Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con realizaciones  $x_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n \in N$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$$

Donde  $I$  es la función indicadora.

Una distribución empírica es, simplemente, una serie de datos disponible que es tratada como si proviniera de una distribución conjunta del tipo uniforme.

Para estudiar la distribución empírica, la primera etapa consiste en ordenar los datos en orden creciente.

**Definición.** Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una muestra. Llamamos *estadígrafos de orden* de la muestra, a los valores  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  iguales a los  $x_i$  puestos en orden creciente:

$$x_{(i)} = \min_{i=1, \dots, n} \{x_i\} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} \{x_i\}$$

## 2.2. Propiedades

- a.  $F_n$  es creciente de 0 hasta 1.

b. La función de densidad de la distribución empírica es:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$$

c.  $F_n$  es una función escalonada con saltos en los distintos valores de  $X$ .

d. Estimador Insesgado y Mínima Varianza

Sea  $x$ , probaremos que  $F_n(x)$  es un estimador insesgado.

$$\begin{aligned} E(F_n(x)) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x)}(X_i)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(I_{(-\infty, x)}(X_i)) \\ &= \Pr(X \leq x) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Similarmente, encontramos que

$$V(F_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n};$$

Como  $F_n(x)$  es una función de orden estadístico, los cuales forman un

---

estadístico completamente suficiente para  $F$ , no hay otro estimador insesgado para  $F(x)$  con menor varianza.

- e. La media de la muestra es la esperanza de su distribución empírica.
- f. Para el caso discreto, la moda de la distribución empírica es el valor que tiene la frecuencia más alta.

### **2.3. Ejemplo de Función de Distribución Empírica**

Para construir una función de distribución:

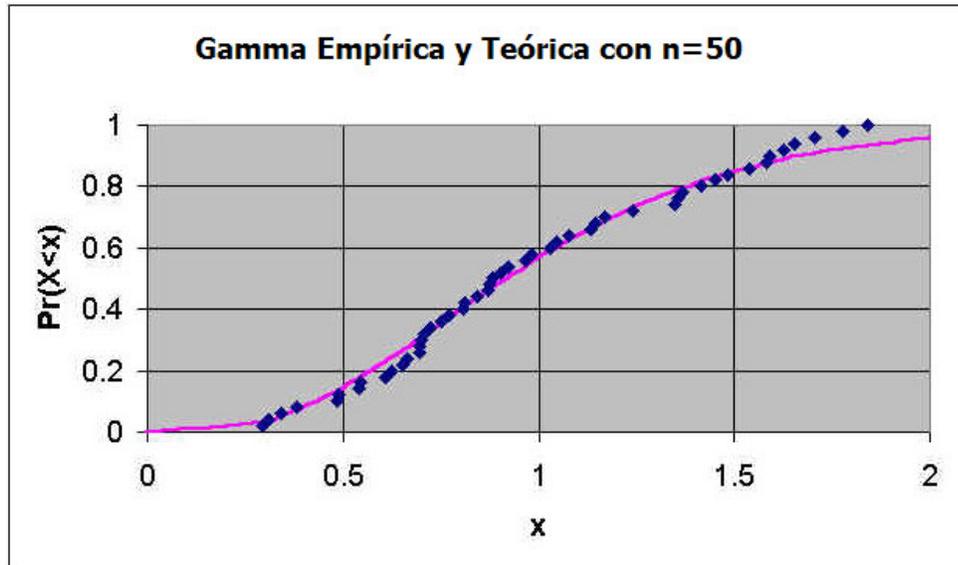
- Tomamos observaciones del proceso que deseamos analizar, para este ejemplo  $n = 50$ .
- Ponemos las observaciones en la primera columna.
- Obtenemos los estadígrafos de orden.
- En la siguiente columna, se calcula  $\frac{1}{n}$  para cada estadígrafo de orden, empezando por  $\frac{1}{n}$  para la línea 1,  $\frac{2}{n}$  en la línea 2, y así sucesivamente. (Esto es la probabilidad de que el siguiente valor sea menor o igual que el valor actual).
- Para comparar con una distribución teórica, escribimos los valores en la

columna 3

$X$	Distribución Empírica	Distribución Teórica
0		0
0.29	0.02	0.03
0.31	0.04	0.04
0.34	0.06	0.05
0.38	0.08	0.07
0.49	0.1	0.13
0.49	0.12	0.13
0.54	0.14	0.17
0.55	0.16	0.18

Tabla 2.1 Extracto de 9 de las 50 observaciones,  
que se cree provienen de una  $Gamma(4, \frac{1}{4})$ .

La gráfica queda como se muestra a continuación



Gráfica 2.1 Función Empírica y Teórica de una Gamma

Nótese que la función de distribución empírica no tiene líneas que conecten entre sí los datos, mientras que la curva de la distribución teórica no tiene puntos.

## 2.4. Ventajas

- Las distribuciones empíricas nos dan pruebas más poderosas para  $H_0$  que la  $\chi^2$ .
- Las distribuciones empíricas permiten captar las *correlaciones esenciales* sin necesidad de imponer estructuras adicionales o efectuar complicados procedimientos de estimación.
- Como no se impone ninguna forma paramétrica a la distribución empírica, ninguna restricción, explícita o implícita, debe imponerse sobre los momentos de la distribución conjunta para que el modelo resulte parsimonioso y estable.

- Simplifican las integraciones numéricas.

## **2.5. Desventajas**

- Los estadísticos de la distribución empírica no están bien adaptados para las distribuciones discretas, ni tampoco para el caso en el que los parámetros deben ser estimados de la muestra.
- Los estadísticos de prueba son más complicados de calcular comparados con los de la  $\chi^2$ .

### **3. Pruebas de Bondad de Ajuste basadas en la Distribución Empírica**

Las pruebas de bondad de ajuste basadas en la distribución empírica se realizan mediante diferentes estadísticos, se dividen en dos clases, los estadísticos superiores y los estadísticos cuadráticos.

Entre los estadísticos supremos está el propuesto por Kolmogorov-Smirnov (1933) que es el más conocido dentro de las pruebas de bondad de ajuste basadas en la distribución empírica. Dentro de esta misma clasificación se encuentra también el propuesto por Kuiper (1960), el cual es útil para observaciones periódicas y circulares.

Los estadísticos cuadráticos son una segunda clase de medida de discrepancia son modificaciones y casos especiales dados por la familia de Cramer-Von Mises

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x)\}^2 \psi(x) dF(x)$$

En esta categoría se encuentran el estadístico de Cramer-Von Mises, el estadístico de Anderson-Darling (1954) y el estadístico de Watson, el cual es una modificación del de Cramer-Von Mises planteado originalmente para resolver los problemas relacionados el círculo.

#### **3.1. Conceptos básicos**

La hipótesis que usaremos para nuestras pruebas es sea  $H_0$  la hipótesis nula y  $H_1$  la hipótesis alternativa

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ para todas las } x \text{ desde } -\infty \text{ a } \infty .$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ para al menos un valor de } x .$$

El procedimiento que se puede usar para realizar las pruebas de bondad de ajuste basadas en la distribución empírica consiste en:

- 1.- Ordenar los datos recolectados en forma ascendente, los datos consisten en una muestra aleatoria de tamaño  $n$ ,  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ .
- 2.- Calcular  $Z_i = F(X_i; \theta)$ , donde  $i = 1, \dots, n$
- 3.- Se plantea la hipótesis:

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ para todas las } x \text{ desde } -\infty \text{ a } \infty .$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ para al menos un valor de } x .$$

- 4.- Construimos nuestro Estadístico de Prueba, el cual dependerá de que prueba se desea realizar.

5.- Modificamos el estadístico de prueba como en la Tabla 1, la cual se muestra más adelante. Usando las modificaciones pertinentes para las colas superiores.

6.- Comparamos el estadístico de prueba con la línea apropiado de los puntos porcentuales. Si el estadístico excede el valor en las colas superiores dado para el nivel  $\alpha$ , entonces se rechaza  $H_0$  para el nivel de confianza  $\alpha$ .

## **3.2. Kolmogorov – Smirnov**

La prueba de Kolmogorov-Smirnov, desarrollada en 1930 por Andrei Nikolaevich Kolmogorov y Nikolai Vasilvevich Smirnov, permite hacer la comparación de una distribución de frecuencias con alguna otra distribución conocida (continua unidimensional), como lo es la distribución normal o la distribución Weibull.

Es usada para determinar si una muestra proviene de una población con una distribución específica.

Para el caso univariado la distribución empírica se denota,

Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con realizaciones  $x_i \in R, i = 1, \dots, n \in N$

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$$

Donde  $I$  es la función indicadora.

Está es una función de pasos en la que se incrementa en  $\frac{1}{n}$  el valor de cada dato ordenado.

### **3.2.1. Estadístico de Prueba**

---

El estadístico de prueba es:

$$D = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F_n(x) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F_n(x) \right)$$

Donde  $F$  es la distribución teórica acumulada de la distribución que se está probando, la cual debe ser una distribución continua y completamente especificada.

### **3.2.2. Prueba**

Nuestro objetivo al tomar una muestra es extraer alguna conclusión o inferencia sobre una población. En nuestro interés es conocer acerca de los parámetros que caracterizan la población en estudio.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov es un procedimiento estadístico que comienza con una suposición que se hace con respecto a un parámetro de población, luego se recolectan datos de muestra, se producen estadísticas de muestra y se usa esta información para decidir qué tan probable es que sean correctas nuestras suposiciones acerca del parámetro de población en estudio.

### **3.2.3. Metodología**

---

En la prueba de Kolmogorov-Smirnov (K-S) nos interesa la mayor desviación entre la

función de distribución teórica y la empírica, es decir entre  $F_0(x)$  y  $S_n(x)$ , para todo el rango de valores de  $x$ . Bajo la hipótesis nula se espera que estas desviaciones sean pequeñas y estén dentro de los límites de errores aleatorios.

Por lo tanto, en la prueba K-S se calcula la mayor desviación existente entre  $F_0(x)$  y  $S_n(x)$ , denotada por  $D_{\max}(x)$  y está dada por

$$D_{\max}(x) = \max|F_0(x) - S_n(x)|$$

La distribución de  $D_{\max}(x)$  es conocida y depende del número de observaciones  $n$ . Se acepta la hipótesis nula de que no existe diferencia significativa entre las distribuciones teóricas y empíricas si el valor de  $D_{\max}(x)$  es menor o igual que el valor crítico  $D_{\max}(a, n)$ .

Cuando se tiene una muestra es grande lo que se procede a hacer es organizar la muestra en una distribución de frecuencia, en intervalos de clase.

Cuando la muestra es pequeña y/o los valores no se van a organizar en intervalos de clase el procedimiento es similar, sólo que se van a "ordenar los valores de la muestra" en forma ascendente, de menor a mayor".

Con base en la distribución observada de frecuencia, se calcula la distribución acumulativa  $S_n(x_i) = \frac{m_i}{n}$ , siendo  $x_i$  el límite superior del intervalo de clase, y  $m_i$  el número de valores de la muestra, menores o iguales que  $x_i$ .

$S_n(x_i)$  corresponde simplemente a la frecuencia relativa acumulada hasta el

intervalo  $i$ .

Cuando la muestra es pequeña y/o los valores no se van a organizar en intervalos de clase se calculan las funciones de distribución teórica y empírica para cada valor de la muestra.

Después se calcula la función de distribución teórica  $F_0(x_i)$ .

Para cada intervalo de clase se calcula la diferencia entre  $F_0(x_i)$  y  $S_n(x)$ , y se busca la máxima

$$D_{\max} = \max |F_0(x_i) - S_n(x_i)|, i = 1, 2, \dots, k.$$

Se busca en la tabla el valor crítico  $D_{\max}(a, n)$  con el nivel de significancia  $\alpha$ . Si el valor observado  $D_{\max}(x)$  es menor o igual que el valor crítico, entonces se acepta la hipótesis nula de que no existen diferencias significativas entre la distribución teórica y la distribución dada por los resultados muestrales, es decir, que los valores generados siguen la distribución que se había supuesto.

### **Ejemplo 3.2.1**

Se obtuvo una muestra aleatoria de tamaño 10:

$$x_1 = 0.621, x_2 = 0.503, x_3 = 0.203, x_4 = 0.477, x_5 = 0.710, \\ x_6 = 0.581, x_7 = 0.329, x_8 = 0.480, x_9 = 0.554, x_{10} = 0.382$$

La hipótesis nula es que la función de distribución es una distribución uniforme

---

$$F(x) = \frac{x-1}{b-a}$$

Formalmente, nuestras hipótesis quedan definidas:

$$H_0 : F(x) = F^*(x) \text{ para todas las } x \text{ desde } -\infty \text{ a } \infty.$$

$$H_1 : F(x) \neq F^*(x) \text{ para al menos un valor de } x.$$

Donde  $F(x)$  es la función de distribución desconocida perteneciente a las  $x_i$ 's y  $F^*(x)$  esta dada por la distribución de arriba.

La prueba de Kolmogorov es usada para pruebas de bondad de ajuste. La región crítica de tamaño  $\alpha = 0.05$  corresponde a los valores de  $T$  mayores que 0.95 del cuantil 0.409, obtenido de la tabla para  $n = 10$ .

El valor de  $T$  se obtiene de graficar la función de distribución empírica  $S(x)$  en la parte superior de la distribución  $F^*(x)$ , como se muestra en la Figura 1. La mayor distancia entre las 2 gráficas es 0.290, la cual ocurre cuando  $x = 0.710$  porque  $S(0.710) = 1.0$  y  $F^*(0.710) = 0.710$ , esto es:

$$\begin{aligned} T &= \sup |F^*(x) - S(x)| \\ &= |F^*(0.710) - S(x)| \\ &= 0.290 \end{aligned}$$

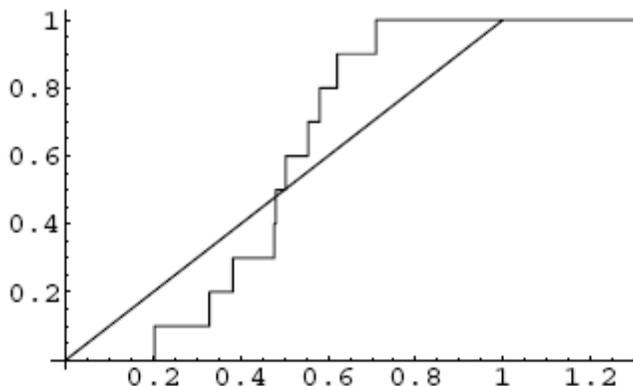


Figura 3.2.1

n	p=0.80	p=0.90	p=0.95	p=0.98	p=0.99
1	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
2	0.684	0.776	0.842	0.900	0.929
3	0.565	0.636	0.708	0.785	0.829
4	0.493	0.565	0.624	0.689	0.734
5	0.447	0.509	0.563	0.627	0.669
6	0.410	0.468	0.519	0.577	0.617
7	0.381	0.436	0.483	0.538	0.576
8	0.358	0.410	0.454	0.507	0.542
9	0.339	0.387	0.430	0.480	0.513
10	0.323	0.369	<b>0.409</b>	0.457	0.489

Tabla 3.2.1 Tabla de Kolmogorov-Smirnov

Observamos que  $T = 0.490$  es menor que 0.409, entonces no se rechaza la hipótesis nula. El  $p$ -value es mayor que 0.20 como se puede ver en la tabla.

### **3.2.4. Tablas**

Hay muchos tipos de las tablas de K-S y de sus regiones críticas, es importante que las formulaciones alternativas sean equivalentes, pero es necesario asegurarse que el estadístico de prueba este siendo calculado en una forma consistente con la forma en que se tabularon los valores críticos.

### **3.2.5. Características**

Una de las características de la prueba de K-S es que no depende de la distribución acumulada que se está probando.

También la prueba K-S tiene limitaciones como que solo se puede aplicar a distribuciones continuas. Así mismo tiende a ser más sensible cerca del centro de la distribución que en las colas.

Pero su limitación más seria es que la distribución debe especificarla completamente. Esto es, que si la locación (un parámetro que mueve la gráfica hacia la derecha o izquierda en el eje horizontal), escala (alarga la gráfica) y si la forma de los parámetros son estimados de los datos, la región crítica de la K-S no es válida. Típicamente deben ser determinados por simulación. De ahí que han surgido más pruebas como las que se comentaran posteriormente.

### **3.3. Anderson-Darling**

La prueba de Anderson-Darling fue desarrollada por Theodore Wilbur Anderson, Jr. y Donald A. Darling en 1952, es usada para probar si una muestra de datos proviene de una población con una distribución específica. Es una modificación de la prueba de Kolmogorov- Smirnov pero da más peso a las colas.

La prueba K-S no depende de la distribución, en el sentido que los valores críticos no dependen de la distribución específica que se está probando. La prueba de Anderson-Darling si hace uso de los valores críticos de cada distribución.

La prueba de Anderson-Darling es una alternativa a las pruebas de bondad de ajuste como lo son chi-cuadrada y la de Kolmogorov-Smirnov.

#### **3.3.1. Estadístico de Prueba**

El estadístico de prueba de Anderson-Darling es denotado por la letra  $A$  y se define:

$$A^2 = -N - S$$

Donde:

$N$  es el tamaño de la muestra.

$Y_i$  son los datos ordenados

$F$  es la función de distribución acumulada de la distribución específica y

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(2i-1)}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$$

Para las distribuciones, normal y lognormal, se construye el estadístico de prueba y nos queda:

$$A^2 = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i-1) [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$$

Donde  $N$  es el tamaño de la muestra.

Para muestras pequeñas se puede usar la siguiente fórmula:

$$A_m^2 = A^2 \left( 1 + \frac{0.75}{N} + \frac{2.25}{N^2} \right)$$

Una vez que se obtuvo el estadístico  $A^2$  se comprara con el valor crítico apropiado de la tabla correspondiente.

$\alpha$	0.1	0.05	0.025	0.01
----------	-----	------	-------	------

$A_{crit}^2$	0.631	0.752	0.873	1.035
--------------	-------	-------	-------	-------

**Tabla 3.3.1 Extracto de la tabla de valores para el estadístico de Anderson-Darling**

Otra familia de distribuciones populares para la prueba de Anderson-Darling incluye a la Weibull para distribuciones mínimas, y la Gumbel para distribuciones de máxima. La Gumbel variable  $X$ , y la Weibull variable  $Y$  están relacionadas por  $X = \ln\left[\frac{1}{y}\right]$ .

Una distribución Weibull con el parámetro forma igual a 1 produce una distribución exponencial como caso especial.

Para la distribución Weibull y la Gumbel, el estadístico de prueba,  $A^2$  se calcula de la misma forma:

$$A^2 = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i-1) [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$$

El mismo estadístico de prueba que para la normal excepto por la  $F(Y_i)$  que es la función de distribución acumulada en consideración. Para la Weibull es:

$$F(Y_i) = 1 - \exp\left(-\frac{x_i}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta$$

Donde  $\eta, \beta$ , son los parámetros de escala y forma.

Así mismo el estadístico,  $A^2$  para muestras pequeñas de la Weibull es:

$$A_m^2 = A^2 \left(1 + \frac{0.2}{N}\right)$$

Después se compara con el valor crítico apropiado de la tabla que a continuación se muestra.

$\alpha$	0.1	0.05	0.025	0.01
$A_{crit}^2$	0.637	0.757	0.877	1.038

**Tabla 3.3.2 Extracto de la tabla de valores críticos  
para el estadístico de Anderson-Darling**

Nota:

Si  $s = 0$  o algún  $P_i = (0,1)$  entonces  $A^2$  no puede ser calculada y es indefinida.

### **Aplicación de la Prueba**

1. Asumimos que nuestros datos tienen una distribución específica.
2. Ordenamos los datos  $X$  de mayor a menor.

3. La media  $\bar{X}$  y la desviación estándar,  $s$ , se calculan tomando valores de a muestra  $X$ , y se estandarizan los valores de  $X$

$$Y_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

4. Construimos  $H_0$ : los datos provienen de una distribución específica.
5.  $H_1$ : los datos no provienen de una distribución específica.
6. Usando la función de distribución acumulada de la distribución asumida, calculamos nuestro estadístico de prueba  $A^2$

$$A^2 = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i - 1)(\ln F(Y_i) + \ln(1 + F(Y_{N+1-i})))$$

Cuando la muestra es menor a 25, se hace un ajuste del estadístico de prueba:

$$A^{2*} = A^2 \left( 1 + \frac{0.75}{N} + \frac{2.25}{N^2} \right)$$

7. El valor crítico correspondiente a un  $\alpha = 5\%$  es 0.752.
8. Si  $A^2$  excede de 0.752 entonces la hipótesis de normalidad se rechaza con un nivel del 5% de confianza.

### **3.3.2. Tablas**

Actualmente hay disponibles tablas para la normal, lognormal, exponencial, weibull, valore extremo tipo I y las distribuciones logísticas.

Usualmente esta prueba se aplica haciendo uso de algún software estadístico que arroja los valores críticos más relevantes, para así poder hacer la evaluación correspondiente.

### **3.3.3. Características**

La prueba de Anderson-Darling puede ser usada con muestras pequeñas  $n \leq 25$ . En muestras de tamaño muy grande donde se desea probar pertenecen a cierta distribución, es posible que se rechace la hipótesis únicamente en pequeñas imperfecciones, pero para datos industriales con muestras de más de 200 datos la prueba de Anderson-Darling nos arroja resultados satisfactorios.

La prueba de Anderson-Darling al hacer uso de los valores críticos dependiendo de la distribución nos permite tener más sensibilidad en la prueba.

La desventaja de esta prueba es que los valores críticos deben ser calculados para cada distribución.

El estadístico propuesto por Anderson-Darling, es un estadístico cuadrático de bondad de ajuste basado en la distribución empírica. Por ser de distribución

asintótica puede ser usado para probar importantes distribuciones y cuando los parámetros son desconocidos se pueden ser estimados. Además un estadístico cuadrático puede ser fácilmente adaptado para que solo los puntos asintóticos sean necesarios para los propósitos de la prueba. Así mismo un estadístico cuadrático tiene la ventaja de ser fácil de calcular y posee todas las propiedades de potencia.

## 3.4. Cramer-Von Mises

La prueba de Cramer-Von Mises constituye una de las pruebas de bondad de ajuste derivadas de la prueba de Kolmogorov-Smirnov que ofrece la estadística no paramétrica y que permite al investigador ajustar o no un grupo de datos aleatorios a una distribución continua, permitiendo mediante el estadístico correspondiente calcular el valor que luego será comparado con el valor tabulado a fin de tomar la decisión respectiva.

Aunque esta prueba es una modificación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov resulta ser bastante más compleja de calcular.

### 3.4.1. Estadístico de prueba

El estadístico de Cramer-Von Mises se clasifica entre los estadísticos cuadráticos y proviene de una amplia clase de medidas de discrepancia que están dadas por la familia de Cramer-Von Mises

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x)\}^2 \psi(x) dF(x)$$

Donde  $\psi(x)$  es una función conveniente para denotar los pesos de las diferencias cuadráticas  $\{F_n(x) - F(x)\}^2$ .

Cuando la función  $\psi(x) = 1$  es estadístico es el estadístico de Cramer-Von Mises,

generalmente denotado por  $W^2$ .

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x) - F(x)\}^2 dF(x)$$

Para facilitar el cálculo del estadístico, hacemos uso de la Transformada de la Integral de Probabilidad  $Z = F(x)$ , donde  $F(x)$  es la distribución verdadera de  $X$ , la nueva variable aleatoria  $Z$  es una uniforme entre  $(0,1)$ . Entonces  $Z$  tiene una distribución  $F^*(z) = z$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una muestra de  $n$  que nos da valores de  $Z_i = F(X_i)$ , donde  $i = 1, \dots, n$  y sea  $F_n^*(z)$  la función de distribución Empírica de los valores de  $Z_i$

El estadístico de Cramer-Von Mises se calcula de la comparación entre la función de Distribución Empírica de  $F_n^*(z)$  y la distribución uniforme de  $Z$ .

Se puede ver fácilmente que para los valores de  $z$  y  $x$  que se relacionan mediante  $z = F(x)$ , las diferencias verticales correspondientes en el diagrama de la función de distribución Empírica para  $X$  y  $Z$  son iguales, esto es

$$F_n(x) - F(x) = F_n^*(z) - F^*(z) = F_n^*(z) - z_i$$

Consecuentemente el estadístico de Cramer-Von Mises obtenido de la comparación de  $Z_i$  y la distribución uniforme tomará los mismo valores que si fueran calculados de la comparación entre la función de distribución Empírica de  $X_i$  y  $F(x)$ .

De ahí que podemos denotar el estadístico de Cramer-Von Mises en términos de  $Z$ ,

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ Z_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

Los valores de  $Z$  están en orden ascendente  $Z_{(1)} < Z_{(2)} < \dots < Z_{(n)}$ .

### **3.4.2. Características**

La prueba de Cramer-con Mises tiene las mismas aplicaciones que la prueba de Kolmogorov-Smirnov. La diferencia entre estas dos pruebas reside en el hecho de que la prueba de Kolmogorov-Smirnov solamente mide la diferencia máxima entre la distribución empírica y la distribución de ajuste en consideración, mientras que el estadístico de prueba de Cramer-Von Mises considera todos los datos de la muestra, puesto que considera la diferencia de las diferencias.

La prueba de Kolmogorov-Smirnov es mucho más sensible que la de Cramer-Von Mises a la existencia de puntos divergentes en una muestra. En general se considera que la prueba de Cramer-con Mises es una prueba más potente sin embargo este hecho no se ha demostrado teóricamente.

## **3.5. Kuiper y Watson**

El estadístico de Kuiper dentro de las pruebas de bondad de ajuste basadas en la distribución empírica se clasifica dentro de la clase de los estadísticos supremos, al igual que el estadístico de Kolmogorov-Smirnov.

Mientras que el estadístico de Watson pertenece a los cuadráticos y es una modificación del estadístico de Cramer-Von Mises.

Ambos son útiles para observaciones cíclicas.

### **3.5.1. Estadístico de Prueba**

El estadístico de Kuiper se denota por la letra  $V$  y es

$$V = D^+ + D^-$$

Donde  $D^+$  y  $D^-$ , son respectivamente la diferencia vertical más grande cuando  $F_n(x)$  es mayor que  $F(x)$  y la diferencia vertical más cuando  $F_n(x)$  es menor que  $F(x)$ ; formalmente se denotan

$$D^+ = \sup_x \{F_n(x) - F(x)\}$$

$$D^- = \sup_x \{F(x) - F_n(x)\}$$

El estadístico de Watson, se denota por la letra  $U^2$  y se define

$$U^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F_n(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] dF(x) \right\}^2 dF(x)$$

Usando la Transformada de la Integral de Probabilidad  $Z = F(x)$ , donde  $F(x)$  es la distribución verdadera de  $X$ , la nueva variable aleatoria  $Z$  es una uniforme entre  $(0,1)$ . Entonces  $Z$  tiene una distribución  $F^*(z) = z$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una muestra de  $n$  que nos da valores de  $Z_i = F(X_i)$ , donde  $i = 1, \dots, n$  y sea  $F_n^*(z)$  la función de distribución Empírica de los valores de  $Z_i$

Los estadístico se calculan de la comparación entre la función de Distribución Empírica de  $F_n^*(z)$  y la distribución uniforme de  $Z$ .

Se puede ver fácilmente que para los valores de  $z$  y  $x$  que se relacionan mediante  $z = F(x)$ , las diferencias verticales correspondientes en el diagrama de la función de distribución Empírica para  $X$  y  $Z$  son iguales, esto es

$$F_n(x) - F(x) = F_n^*(z) - F^*(z) = F_n^*(z) - z_i$$

Consecuentemente los estadísticos de Kuiper y de Watson obtenidos de la comparación de  $Z_i$  y la distribución uniforme tomará los mismo valores que si fueran calculados de la comparación entre la función de distribución Empírica de  $X_i$  y

---

$F(x)$ .

De ahí que podemos denotar el estadístico de Kuiper en términos de  $Z$ ,

$$V = D^+ + D^- = \max_i \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\} + \max_i \left\{ z_{(i)} - \frac{(1-i)}{n} \right\}$$

Y el estadístico de Watson, lo reescribimos como

$$\begin{aligned} U^2 &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(2\pi jx) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \text{sen}(2\pi jx) \right)^2 \\ &= \sum_{j=2}^x * \frac{(z_{nj}^{*2} + z_{nj}^2)}{j^2 \pi^2} \end{aligned}$$

Si

$$S_{j=} \sum_{j=1}^{\infty} \cos(\pi j x_i) \quad \text{y} \quad T_{j=} \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}(\pi j x_i)$$

Entonces

$$R_j^2 = S_j^2 + T_j^2$$

Y finalmente

$$U^2 = \frac{2}{n\pi} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{R_j^2}{j^2}$$

### 3.5.2. Características

Estos estimadores fueron propuestos porque al tener observaciones que pertenecen a puntos de un círculo y los estadísticos de Kolmogorov, Cramer-Von

---

Mises y Anderson-Darling toman diferentes valores dependiendo del origen que se elija.

En estas prueba si la distribución esta definida en un dominio periódico los valores no cambian ya que los estadístico de Kuiper y de Watson no depende del la elección del origen.

## **3.6. Análisis Gráfico**

### **3.6.1. Introducción**

Son técnicas menos formales que las técnicas numéricas que se presentaron anteriormente pero son grandes ayudas en entender las relaciones numerosas presentes en datos, pueden ser usadas:

1. Como técnica exploratoria
2. En conjunto con técnicas numéricas formales

Frecuentemente muestran las características de los datos, los cuales son totalmente inesperados antes del análisis. Sin embargo el uso único de gráficos puede conducir a las conclusiones erróneas y el uso de técnicas numéricas es esencial para evitar esto.

### **3.6.2. Características**

El uso de la gráfica de la función de Distribución Empírica no depende de ningún supuesto referente a la distribución y tiene algunas ventajas definidas sobre otros dispositivos estadísticos, como por ejemplo:

1. Es invariante bajo transformaciones monótonas con respecto a los cuantiles. Sin embargo, su aspecto puede cambiar.
2. Su complejidad es independiente del número de observaciones.

3. Es una fuente inmediata y directa de información con respecto a la forma o a la distribución subyacente (ej. en oblicuidad y bimodalidad.)

4. Es un indicador eficaz de particularidades (ej. outliers)

5. Provee la información robusta sobre la localización y la dispersión.

6. No implica dificultades como las que se presentan al agrupar por ejemplo, en un histograma.

Sin embargo pueden ser sensibles a los datos que ocurren aleatoriamente y la total confianza en ellos puede conducir a las conclusiones falsas. Esto ocurre especialmente si el tamaño de muestra es pequeño.

La función de Distribución Empírica es una herramienta estándar que se encuentra en diferentes paquetes computacionales tales como el paquete estadístico para las ciencias sociales (SPSS), el sistema del análisis estadístico (SAS), y los programas de computadora biomédicos (BMDP).

### **3.6.3. Graficación de la Distribución Empírica**

La gráfica de la función de Distribución Empírica se hace en el papel de gráfico

aritmético, donde  $\frac{i}{n}$  se traza en las ordenadas contra el valor  $i$ -ésimo de la muestra,

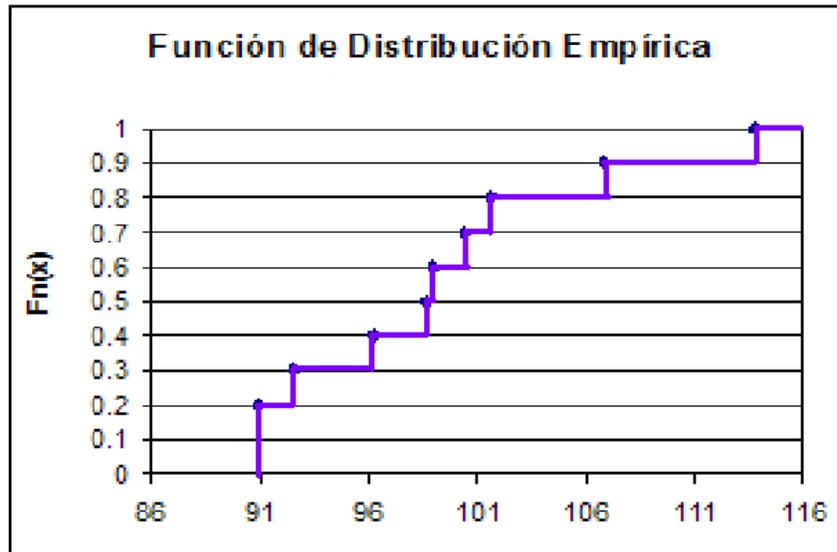
$X_{(i)}$  en las abscisas.

**Ejemplo 3.6.3.1.**

Tomamos valores ordenados de las primeras diez observaciones, estos con sus valores de la función de Distribución Empírica son:

Observaciones		
ordenadas		$F_n(x) = \frac{i}{n}$
Número(i)	Valor	
1	84.27	0.1
2	90.87	0.2
3	92.55	0.3
4	96.20	0.4
5	98.70	0.5
6	98.98	0.6
7	100.42	0.7
8	101.58	0.8
9	106.82	0.9
10	113.75	1.0

Y si los graficamos obtenemos una distribución escalonada, lo cual es muy común cuando la muestra es pequeña.



### Ejemplo 3.6.3.2

Si el conjunto de datos consiste en datos agrupados y la variable es continua, entonces la función de Distribución Empírica se define para que los pasos ocurran en los límites verdaderos de la clase mayor.

Por ejemplo, si es la tabla de la frecuencia:

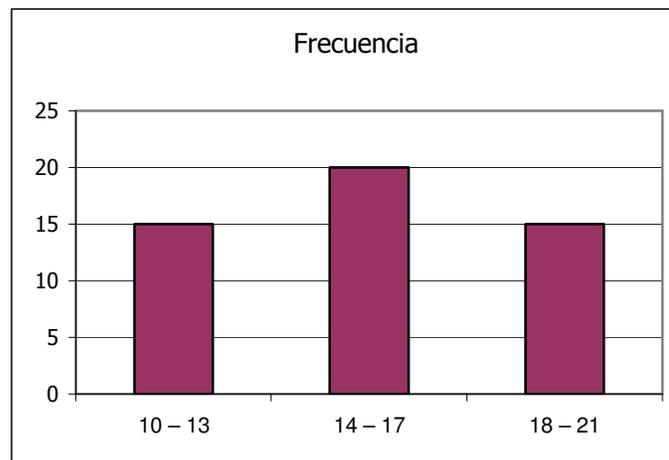
<u>Clases</u>	<u>Frecuencia</u>
10 – 13	15
14 – 17	20
18 – 21	15

Y una observación se clasifica en la primera clase y está en el intervalo  $9.5 < x \leq 13.5$ , entonces la función de Distribución Empírica se define como:

$X$	$F_n(x)$
13.5	0.30
17.5	0.70
21.5	1.00

Se hace semejantemente para las otras clases.

Al graficar obtenemos un histograma ya que nuestros datos están agrupados.



### **3.6.4. Gráficas de Probabilidad (P-P)**

Un diagrama de probabilidad es un diagrama que ofrece la oportunidad para determinar si un conjunto de datos se desvía de una línea recta y si es una línea recta, dentro del

error de muestreo, entonces la distribución supuesta es la distribución verdadera.

La línea recta resulta de transformar la escala vertical la gráfica de la función de la Distribución Empírica a una escala en la que se produce exactamente una línea recta si la distribución supuesta es trazada en el gráfico.

El principio detrás de esta transformación es simple y es como se presenta a continuación. Supongamos que la distribución verdadera que se considera depende del parámetro de locación  $\mu$  y del de escala  $\sigma$  ( $\mu$  y  $\sigma$  no necesariamente tiene que representar la media y la varianza respectivamente).

Entonces la función de Distribución Empírica de tal distribución se puede escribir como

$$F(x) = G\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = G(z)$$

Donde

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ se refiere a la variable estandarizada y}$$

$G(\cdot)$  es la función de Distribución Empírica de la variable aleatoria estandarizada  $Z$ .

La gráfica la función de Distribución Empírica se basa en graficar  $F(x)$  en  $x$ . Para muestras de datos  $F(x)$  es substituido por  $F_n(x)$  y los valores trazados de  $x$  son los valores observados de la variable aleatoria  $X$ .

Ahora si la gráfica era uno de  $z$  en  $x$  (o equivalente  $G^{-1}(F(x))$  en  $x$  donde  $G^{-1}(\cdot)$  es la transformación inversa que transforma a  $F(x)$  en el valor estandarizado de  $z$ , en donde la gráfica que resultará es una línea recta

$$z = G^{-1}(F(x)) = \frac{x - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}x$$

O en términos de  $x$  en  $z$ ,  $x = \mu + z\sigma$

Una gráfica de probabilidad es la gráfica de

$$z = G^{-1}(F_n(x)) \text{ en } x$$

Donde  $x$  representa los valores observados de la v.a.  $X$ .

Con observaciones ordenadas  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , la gráfica de probabilidad se puede también describir como la gráfica de

$$z_i = G^{-1}(F_n(x_{(i)})) \text{ en } x_{(i)}$$

Para graficar la probabilidad de la función de Distribución Empírica  $F_n(x)$  generalmente es mejor definida como

$$F_n(x_{(i)}) = P_i = \frac{i-0.5}{n} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Donde  $c = 0.5$

Puesto que  $F$  es la función de distribución acumulada verdadero, la gráfica de probabilidad debe ser aproximadamente una línea recta. De hecho existe una convergencia fuerte a una línea recta para las muestras grandes.

## 4. Aplicaciones y Ejemplos

### 4.1. Kolmogorov-Smirnov

Una vez que se presento formalmente la prueba, a continuación se presentan algunos ejemplos de cómo aplicar la prueba.

Para los siguientes ejemplos usaremos la tabla 1 para obtener los valores críticos.

Tabla 1. Puntos porcentuales del extremo superior para D modificada						
	Forma modificada de $D$	Area del extremo superior				
		0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
$F(y)$ especificada	$(D)(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n})$	1.138	1.224	1.358	1.480	1.626
$F(y)$ normal $\mu$ y $\sigma^2$ desconocidas	$(D)(\sqrt{n} - 0.01 + 0.85/\sqrt{n})$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035
$F(y)$ exponencial $\theta$ desconocida	$(D - 0.2/n)(\sqrt{n} + 0.26 + 0.5/\sqrt{n})$	0.926	0.990	1.094	1.190	1.308

### Ejemplo 1

Considere que las diez observaciones siguientes, son una muestra aleatoria de una distribución continua.

0.406, 2.343, 0.538, 5.088, 5.587, 2.563, 0.023, 3.334, 3.491, 1.267

Probar la hipótesis de que esos datos provienen de una distribución exponencial con media 2, en nivel de significación 0.05.

Solución

Se ordenan las diez observaciones y entonces se calcula, para cada  $y_{(i)}$ , el valor de  $F(y_i)$ , donde  $H_0$  establece que  $F(y_i)$  es exponencial con  $\theta = 2$ . Por tanto, si  $Y \sim \exp(\theta)$  su función de distribución es:

$$F(y) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) \right] I_{(0, \infty)}(y).$$

Como  $\theta = 2$  entonces  $F(y) = (1 - e^{-\frac{y}{2}}) I_{(0, \infty)}(y)$ .

En la tabla 2 se dan los datos ordenados y cálculos pertinentes.

---

Tabla 2. Datos y cálculos para el ejemplo 1						
$i$	$y_{(i)}$	$F(y_i)$	$i/n$	$(i-1)/n$	$(i/n)-F(y_i)$	$F(y_i)-(i-1)/n$
1	0.023	0.0114	0.1	0	0.0886	0.0114
2	0.406	0.1838	0.2	0.1	0.0162	0.0838
3	0.538	0.2359	0.3	0.2	0.0641	0.0359
4	1.267	0.4693	0.4	0.3	-0.0693	0.1693
5	2.343	0.6901	0.5	0.4	-0.1901	0.2901
6	2.563	0.7224	0.6	0.5	-0.1224	0.2224
7	3.334	0.8112	0.7	0.6	-0.1112	0.2112
8	3.491	0.8254	0.8	0.7	-0.0254	0.1254
9	5.088	0.9214	0.9	0.8	-0.0214	0.1214
10	5.587	0.9388	1.0	0.9	0.0612	0.0388

$D^+$  es el valor máximo en la columna 6 y  $D^-$  el máximo en la columna 7, entonces  $D^+ = 0.0886$  y  $D^- = 0.2901$ , lo cual resulta  $D = 0.2001$ . Para determinar el valor crítico a partir de la tabla 1, se necesita calcular

$$(D) \left( \sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right) = (0.2901)(3.317) = 0.9623$$

En el nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , la región de rechazo comienza en 1.358. Como  $0.9623 < 1.358$  no se rechaza la  $H_0$ , es decir, los datos se ajustan a una distribución exponencial con  $\theta = 2$ .

**Nota :**

Obsérvese que el tamaño de muestra es  $n = 10$ , en general, en una prueba de bondad de ajuste las muestras cuyo tamaño es menor que 20 no permiten discriminar entre distintas distribuciones, esto es, pueden considerarse varios valores de parámetros en la hipótesis nula tampoco se rechazaría.

En nuestro ejemplo anterior note que se dice que no se puede rechazar el modelo exponencial  $\theta = 2$  como modelo posible para esos datos. Esto no significa que el

modelo exponencial  $\theta = 2$  sea el mejor modelo para los datos, ya que muchas otras hipótesis con diferentes valores de nulas tampoco se podrían rechazar, incluso hasta una diferente a la exponencial

## **Ejemplo 2**

Se tomaron mediciones del flujo de agua en el suelo, en centímetros por día, en 20 parcelas experimentales de un campo. Se midió el flujo en un perfil de drenaje del suelo en el que se habían establecido condiciones de régimen permanente de flujo del agua del suelo. La teoría y la evidencia empírica sugieren que las mediciones deben de ajustarse a una distribución normal logarítmica. Los datos anotados como  $y_i$  en la Tabla 3 son logaritmos de las mediciones reales. Probar la hipótesis de que las  $y_i$  provienen de una distribución normal. Usar  $\alpha = 0.05$ .

Solución

En este caso, la idea básica de la prueba Kolmogorov-Smirnov es transformar los datos observados en nuevas observaciones que parezcan como variaciones de la Normal Estándar, en caso de ser verdad la  $H_0$ .

Si la variable aleatoria  $Y$  tiene distribución Normal con promedio  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces  $\frac{Y - \mu}{\sigma}$  tiene una distribución Normal Estándar.

Como  $\mu$  y  $\sigma$  se desconocen, se estimarán mediante  $\bar{y}$  y  $s$ , respectivamente.

*Pruebas de bondad de ajuste basada en la Distribución Empírica*

---

A continuación se transformará cada valor de  $y_i$  a uno  $u_i$ , donde  $u_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s}$  y se prueba para ver si las  $u_i$  se ajustan a una distribución Normal Estándar.

Los valores  $F(u_i)$  de la Tabla 3 provienen de probabilidades acumuladas bajo una curva Normal Estándar ( $Z$ ), y se pueden obtener de una tabla de la función de distribución de  $Z$ .

<b>Tabla 3. Datos y cálculos para el ejemplo 2</b>						
$i$	$Y_{(i)}$	$u_i = \frac{y_{(i)} - \bar{y}}{s}$	$i/n$	$F(u_i)$	$(i/n) - F(u_i)$	$F(u_i) - (i-1)/n$
1	0.3780	-2.0224	0.05	0.0216	0.0284	0.0216
2	0.5090	-1.5215	0.10	0.0641	0.0359	0.0141
3	0.6230	-1.0856	0.15	0.1388	0.0112	0.0388
4	0.6860	-0.8448	0.20	0.1991	0.0009	0.0491
5	0.7350	-0.6574	0.25	0.2555	-0.0055	0.0555
6	0.7520	-0.5924	0.30	0.2768	0.0232	0.0268
7	0.7580	-0.5695	0.35	0.2845	0.0655	-0.0155
8	0.8690	-0.1451	0.40	0.4423	-0.0423	0.0923
9	0.8890	-0.0686	0.45	0.4726	-0.0226	0.0726
10	0.8890	-0.0686	0.50	0.4726	0.0274	0.0226
11	0.8990	-0.0304	0.55	0.4879	0.0621	-0.0121
12	0.9370	0.1149	0.60	0.5457	0.0543	-0.0043
13	0.9820	0.2869	0.65	0.6129	0.0371	0.0129
14	1.0220	0.4399	0.70	0.67	0.0300	0.0200
15	1.0370	0.4972	0.75	0.6905	0.0595	-0.0095
16	1.0880	0.6922	0.80	0.7556	0.0444	0.0056
17	1.1230	0.8260	0.85	0.7956	0.0544	-0.0044
18	1.2060	1.1434	0.90	0.8736	0.0264	0.0236
19	1.3340	1.6328	0.95	0.9487	0.0013	0.0487
20	1.4230	1.9730	1.00	0.9758	0.0242	0.0258

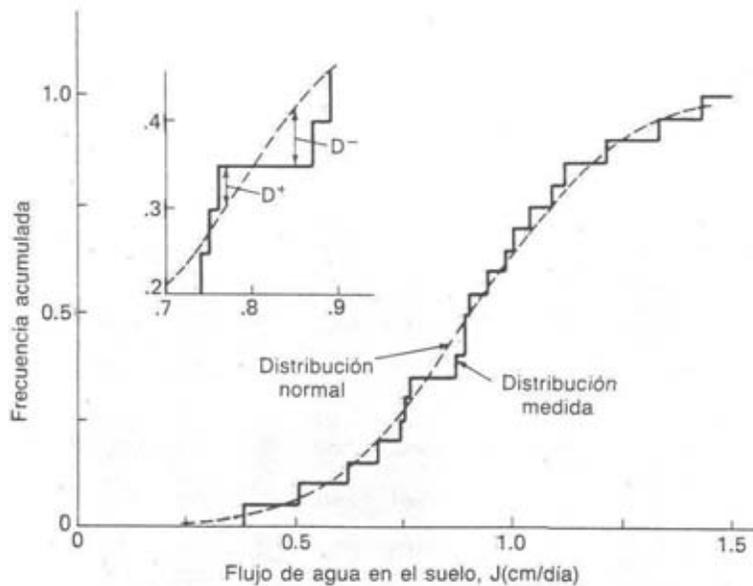
Según la Tabla 3,  $D = 0.0923$ . Mediante la Tabla 1, se encuentra que la  $D$  modificada es

$$(D) \left( \sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}} \right) = (0.0923)(4.6522) = 0.4294$$

De la tabla 1, el valor crítico en el nivel de significancia de 5% es 0.895; por lo tanto, como  $0.4294 < 0.895$  no se rechaza la hipótesis nula.

Los datos parecen ajustarse a una distribución Normal. En la siguiente figura se comparan en forma gráfica  $F_n(u)$  y  $F(u)$ . La figura es una gráfica de la función de distribución empírica para  $n = 20$  mediciones de flujo de agua en el suelo, y de una función de distribución Normal.

En el recuadro se muestran las medidas estadísticas  $D^-$  y  $D^+$ .



## 4.2. Anderson-Darling

### Ejemplo 3

Ahora desarrollaremos un ejemplo para probar una Weibull usando la prueba de Anderson-Darling.

Los datos consisten en seis observaciones provenientes de la misma población de una Weibull con parámetros  $(\alpha = 10, \beta = 2)$ . Sin embargo para efectos de este ejemplo tomaremos los parámetros como desconocidos y se estimaran de los datos.

En la columna  $Y_{(i)}$  tenemos las observaciones

Tabla 4 . Datos para el ejemplo 3			
$i$	$y_{(i)}$	N	6
		Media	7.22
1	11.72	Mediana	7.80
2	10.43	Desv. Est.	3.86
3	8.02	Varianza	14.90
4	7.58	Mínimo	1.43
5	1.43	Máximo	11.72
6	4.12	Q1	3.44

Obtenemos de los estadísticos descriptivos, Después usando métodos gráficos obtenemos estimadores puntuales para los parámetros de la Weibull, los cuales son  $(\alpha = 8.7, \beta = 1.3)$ .

La hipótesis nula es

$$H_0 : \text{Weibull}(\alpha = 8.7, \beta = 1.3)$$

Definimos nuestro estadístico de Anderson-Darling, considerando que queremos ver si los datos provienen de una Weibull, el cual es

$$A_n^2 = \left[ \sum_i \frac{1-2i}{n} \{ \ln(1 - \exp(-Z_i)) - Z_{(n+1-i)} \} - n \right]$$

Y el estadístico ajustado es

$$A_n^{2*} = \left( 1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}} \right) A_n^2$$

Donde  $Z_{(i)} = \left[ \frac{x_{(i)}}{\theta^*} \right]^{\beta^*}$

Y  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  son los parámetros de la Weibull denotando la estimación correspondiente.

El nivel de significancia o *p-value* se usa ahora para probar la hipótesis. Si el *p-value* < 0.05, entonces se rechaza la hipótesis con una confianza del 95%.

El nivel de significancia lo calculamos:

$$p - value = \frac{1}{\{1 + \exp[-0.1 + 1.24 \ln(A_n^{2*}) + 4.48 A_n^{2*}]\}}$$

Para poder llevar a cabo la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling, primero obtenemos las probabilidades correspondientes de una Weibull bajo la hipótesis nula  $H_0$  supuesta.

Por ejemplo para el primer punto

$$\begin{aligned} P_{\alpha=8.7, \beta=1.3}(1.43) &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right\} \\ &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1.43}{8.7}\right)^{1.3}\right\} = 1 - 0.909 = 0.091 \end{aligned}$$

Se procede a calcular el estadístico, a continuación se muestra una tabla con algunos paso intermedios

Tabla 4 . Datos y cálculos para el ejemplo 3							
$i$	$y_{(i)}$	$z_{(i)}$	Prob Weibull	$\exp(z_i)$	$\ln(1 - \exp(z_{(i)}))$	$Z_{n-i} + 1$	$i$ -ésimo término

5	1.4298	0.0956	0.091176	0.908824	-2.394964	1.473360	0.64472
6	4.1154	0.37789	0.314692	0.685308	-1.156161	1.265670	1.21092
4	7.5778	0.83566	0.566413	0.433587	-0.568432	0.899670	1.22342
3	8.0204	0.89967	0.593296	0.406704	-0.522062	0.835660	1.58401
2	10.4286	1.26567	0.717949	0.282051	-0.331357	0.377890	1.06387
1	11.7216	1.47336	0.770846	0.229154	-0.260267	0.095600	0.65242

Finalmente los valores para el estadístico de Anderson-Darling son  $A_n^2 = 0.3794$  y  $A_n^{2*} = 0.4104$ . El  $p$ -value, la probabilidad de rechazar erróneamente la distribución Weibull (8.7,1.3) errónea con estos resultados, es de  $p$ -value = 0.3466 (mucho más grande que el error  $\alpha = 0.05$ ).

Como

$$p\text{-value} = 0.3466 > \alpha = 0.05$$

Entonces, se acepta la hipótesis nula, los datos se distribuyen como una Weibull( $\alpha = 8.7, \beta = 1.3$ ). Por lo tanto el estadístico de Anderson-Darling fue capaz de reconocer que los datos provenían de una distribución Weibull como efectivamente es.

### 4.3. Cramer Von-Mises

#### Ejemplo 4

Con el fin de ilustrar la aplicación de a prueba de Cramer-Von Mises compararemos una muestra aleatoria de tamaño 8 provenientes de una  $N \sim (3,9)$ .

Realizamos nuestra tabla, donde ordenamos nuestros valores, planteamos nuestras hipótesis, después construimos el estadístico de prueba.

Rechazamos  $H_0$  si  $T > W_{1-\alpha}$  donde  $\alpha$  es el nivel de significancia y  $W_{1-\alpha}$  se obtiene de los valores tabulados para el estadístico.

En Microsoft Excel podemos generar los valores acumulados de la distribución conocida, que en este caso se asumió normal.

Nuestros valores tabulados quedan de la siguiente forma:

HOJA DE CALCULO PARA EL USO DE LA PRUEBA DE CRAMMER VON MISSES						
Media:3		Varianza:9			Desviacion:3	
i	$X^{(i)}$	$Z(X^{(i)})$	$F(Z(X^{(i)}))$	$((2i-1)/2n)$	$F(Z(X^{(i)}))-((2i-1)/2n)$	$(F(Z(X^{(i)}))-((2i-1)/2n))^2$
1	-1,30	-1,433	0,075881345	0,0625	0,013381345	0,00017906
2	0,40	-0,867	0,193062292	0,1875	0,005562292	3,09391E-05
3	0,80	-0,733	0,231677501	0,3125	-0,080822499	0,006532276
4	1,70	-0,433	0,332386342	0,4375	-0,105113658	0,011048881
5	2,80	-0,067	0,473423466	0,5625	-0,089076534	0,007934629
6	3,30	0,100	0,539827896	0,6875	-0,147672104	0,02180705
7	4,20	0,400	0,655421697	0,8125	-0,157078303	0,024673593
8	5,60	0,867	0,806937708	0,9375	-0,130562292	0,017046512

Tabla 5 para el ejemplo 4

Obtenemos que  $T = 0.089252942$  por lo que para un  $\alpha = 0,05$  no se rechaza la hipótesis nula, lo mismo para sucede cuando  $\alpha = 0,01$

## Ejemplo 5

Ahora probemos con otra normal con parámetros  $N \sim (12,10)$ . Nuestros valores tabulados quedan como se muestra:

HOJA DE CALCULO PARA EL USO DE LA PRUEBA DE CRAMMER VON MISSES					
Media:12		Varianza:10		Desviacion: 3,16227766	
$X^{(i)}$	$Z(X^{(i)})$	$F(Z(X^{(i)}))$	$((2i-1)/2n)$	$F(Z(X^{(i)})) - ((2i-1)/2n)$	$(F(Z(X^{(i)})) - ((2i-1)/2n))^2$
-1,30	-4,206	0,000013015	0,0625	-0,062486985	0,003904623
0,40	-3,668	0,000122144	0,1875	-0,187377856	0,035110461
0,80	-3,542	0,000198782	0,3125	-0,312301218	0,097532051
1,70	-3,257	0,000562754	0,4375	-0,436937246	0,190914157
2,80	-2,909	0,001811289	0,5625	-0,560688711	0,314371831
3,30	-2,751	0,002969092	0,6875	-0,684530908	0,468582565
4,20	-2,467	0,006820585	0,8125	-0,805679415	0,649119319
5,60	-2,024	0,021492328	0,9375	-0,916007672	0,839070054

Tabla 5 para el ejemplo 4

Obtenemos que  $T = 2.598605061$  por lo que para un  $\alpha = 0,05$  se rechaza la hipótesis nula, lo mismo cuando  $\alpha = 0,01$

## 5. Conclusiones

Para las pruebas de bondad de ajuste a la distribución empírica usamos finalmente estimadores que dependen de la variable aleatoria  $Z$  la cual se distribuye como  $U(0,1)$ .

De ahí se concluimos:

- Los estadísticos basados en la Distribución Empírica son mucho más poderosos que la Chi-Cuadrada de Pearson, esto se puede explicar mediante el hecho que para usar la Chi-Cuadrada los datos tienen que estar agrupados, resultando esto en pérdida de información, especialmente en las muestras pequeñas.
- Los estadísticos más conocidos son los de Kolmogorov-Smirnov, pero la mayoría de las veces es mucho menos potente que los estadísticos cuadráticos como son los de Anderson-Darling y Cramer-Von Mises.
- Los estadísticos  $D^+$  y  $D^-$  son más potentes en detectar si el conjunto de  $Z$  tiende o no a estar cerca de  $0$  y  $1$ , respectivamente.
- $A^2$ ,  $W^2$  y  $D$  detectan alguna de las dos alternativas, ya sea que el conjunto de  $Z$  tienda a estar cerca de  $0$  o de  $1$ .
- Los estadísticos de Kuiper y Watson son más potentes para detectar grupos en el conjunto de  $Z$  alrededor de algún punto, o una división en dos grupos, como puede ser cerca de  $0$  o de  $1$ .

- En términos de las observaciones originales  $X$ , los estadísticos detectaran un error en la media de  $F(x;\theta)$ , mientras que el estadístico  $U^2, V$  detectarán el error en la varianza.
- El estadístico de Anderson-Darling generalmente se comporta similarmente al de Cramer-Von Mises, pero se encuentra dentro de lo más potentes cuando la prueba  $F(x;\theta)$  parte de una distribución cierta en las colas, especialmente cuando parece que hay muchos valores atípicos de  $X$  para  $F(x;\theta)$  específica.
- En el trabajo de pruebas de bondad de ajuste cuando se parte de las colas es muy importante que se pueda detectar, es por eso que el estadístico recomendado es el de Anderson-Darling
- Una notable limitación de la prueba del Anderson-Darling es que, junto con la prueba de Kolmogorov-Smirnov, están limitada a las distribuciones continuas. Si los datos se ajustan a una distribución discreta, como lo es la distribución binomial, otra prueba de bondad de ajuste como la Chi-Cuadrada debe ser utilizada.

Existen software, como lo es SPSS que proporciona la prueba de bondad de ajuste para la distribución normal, exponencial, Poisson, Uniforme empleando la prueba de Kolmogorov-Smirnov, con parámetros desconocidos, así también se puede hacer en S-PLUS para una o dos muestras.

En las gráficas de probabilidad (P-P) se gráfica:

$$z_i = G^{-1}(F_n(X_{(i)})) = G^{-1}(P_i) \text{ en } X_{(i)}$$

Donde  $G^{-1}(\cdot)$  es la transformación inversa de la distribución estandarizada de la población (distribución supuesta) en consideración.

Para  $F_n(x_{(i)})$  recomendamos

$$F_n(x_{(i)}) = p_i = \frac{i - 0.5}{n}$$

A continuación se presenta una tabla con fórmulas para gráficas para algunas Familias de Distribuciones

Distribución	Función de distribución acumulada F(x)	Eje Horizontal	Eje Vertical $z_i$
Uniforme	$\frac{x - \mu}{\sigma}$ para $\mu \leq x \leq \mu + \sigma$	$X_{(i)}$	$P_i = \frac{i - .5}{n}$

Normal	$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$	$X_{(i)}$	$z = \text{sign}(F_n(x) - .5)(1.238t(1 + 0.0262t))$ $t = \{\ln[4F_n(x)(1 - F_n(x))]\}^{1/2}$ $\text{sign}(F_n(x) - .5) = \begin{cases} +1 & \text{si } F_n(x) - .5 > 0 \\ -1 & \text{si } F_n(x) - .5 < 0 \end{cases}$
Weibull	$1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\Phi}\right)^k\right)$	$\ln(T_{(i)})$	$\ln(-\ln(1 - P_i))$
Valor Extremo	$1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)$	$X_{(i)}$	$\ln(-\ln(1 - P_i))$
Logístico	$\left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x - \mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right\}\right]^{-1}$	$X_{(i)}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln(P_i(1 - p_i))$
Exponencial	$1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$	$X_{(i)}$	$-\ln(1 - P_i)$

Una vez que se trazaron los puntos la tarea principal es juzgar si la forma de datos trazados asemeja a una línea recta. Si no lo hacen, la tarea es entonces decidir cuáles son las características de la distribución subyacente o de los datos que causan la no linealidad.

Para algunas pruebas como se mostró es difícil encontrar las tablas de los valores tabulados del estadístico, en especial para la de Anderson-Darling, lo que ha motivado a que se hagan diferentes aproximaciones de lo estadísticos para hacer más fácil su cálculo.

Microsoft Excel, puede ser una poderosa herramienta para la aplicación de la prueba de Cramer-von Mises y en general para las pruebas no paramétricas del tipo Kolmogorov-Smirnov, hecho este evidenciados en las distintas comparaciones que se hicieron con los datos empíricos, mostrándose el carácter útil y amigable del Excel como herramienta

para el ajuste desde las perspectivas de distintas distribuciones constituye esta prueba de ajuste una herramienta de la cual se puede hacer uso desde la perspectiva de los paradigmas emergentes en ciencias sociales, pues permite trabajar con muestras pequeñas y libres de distribución, complementándose con el dinamismo que le imprime el uso de Microsoft Excel en la búsqueda de una distribución teórica que se ajuste a los datos.

Es conveniente igualmente resaltar el hecho de que si bien en el presente trabajo se hicieron aplicaciones con distribuciones normales, se puede sin ningún tipo de limitaciones comparar con otras funciones continuas contenidas en este programa entre otras, la del tipo Exponencial, tipo Weibull, tipo Gamma, tipo Beta. En el contexto de las referencias teóricas de la prueba y de las funciones con las cuales trabaja el Excel, lo cual daría al investigador toda una amplia gama de posibilidades para ajustar un grupo de datos empíricos.

Pero para una mayor precisión actualmente se han diseñado diversos software estadísticos que contienen pruebas no Paramétricas.

Algunos como SPSS, SAS y hasta en Microsoft Excel es común encontrar la prueba de Kolmogorov-Smirnov ya que dentro de las pruebas de bondad de ajuste para la distribución empírica es la más conocida y usada aunque no siempre es la más adecuada.

En programas estadísticos como Easy Fit, se puede aplicar la prueba de Anderson-Darling arrojando el valor del estadístico.

Las pruebas de Watson y Kuiper son las más difíciles de encontrar en los programas estadísticos, ya que al hacer referencia a datos circulares no es común que se incluyan.

A pesar de esto la prueba de Kuiper se puede usar con mayor facilidad ya que construir el estadístico depende del estadístico de Kolmogorov-Smirnov. Mientras que para la prueba de Watson hay varias aproximaciones que facilitan su cálculo sin embargo no es muy usado ya que es más compleja de calcular.

## APENDICE A

Tabla con estimadores los estimadores modificados para su manejo más fácil, así como los niveles de significancia.

TABLE 4.2 Modifications and Percentage Points for EDF Statistics for Testing a Completely Specified Distribution (Case 0; Section 4.4)

Statistic T	Modified form T*	Significance level $\alpha$							
		.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.001
Upper tail percentage points									
$D^+$ ( $D^-$ )	$D^+(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n})$	0.828	0.973	1.073	1.224	1.358	1.518	1.628	1.859
D	$D(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n})$	1.019	1.138	1.224	1.358	1.480	1.628	1.731	1.950
V	$V(\sqrt{n} + 0.155 + 0.24/\sqrt{n})$	1.420	1.537	1.620	1.747	1.862	2.001	2.098	2.303
$W^2$	$(W^2 - 0.4/n + 0.6/n^2)(1.0 + 1.0/n)$	0.209	0.284	0.347	0.461	0.581	0.743	0.869	1.167
$U^2$	$(U^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1.0 + 0.8/n)$	0.105	0.131	0.152	0.187	0.222	0.268	0.304	0.385
$A^2$	For all $n \geq 5$	1.248	1.610	1.933	2.492	3.070	3.857	4.500	6.000
Lower tail percentage points									
D	$D(\sqrt{n} + 0.275 - 0.04/\sqrt{n})$	-	0.610	0.571	0.520	0.481	0.441	-	-
V	$V(\sqrt{n} + 0.41 - 0.26/\sqrt{n})$	-	0.976	0.928	0.861	0.810	0.755	-	-
$W^2$	$(W^2 - 0.03/n)(1.0 + 0.05/n)$	-	0.054	0.046	0.037	0.030	0.025	-	-
$U^2$	$(U^2 - 0.02/n)(1 + 0.35/n)$	-	0.038	0.033	0.028	0.024	0.020	-	-
$A^2$	For all $n \geq 5$	-	0.399	0.346	0.283	0.217	0.201	-	-

Adapted from Stephens (1970), with permission of the Royal Statistical Society.

## APENDICE B

**Tabla 2: Para la prueba de Kolmogorov-Smirnov**

(Si el radio calculado es mas grande que el valor que se muestra, entonces se rechaza la hipotesis nula al nivel de confianza requerido.)

TAMANO DE LA MUESTRA (N)	NIVEL DE SIGNIFICANCIA PARA $D = \text{MAXIMUM} [ F_0(X) - S_n(X) ]$				
	0.2	0.15	0.1	0.05	0.01
1	0.9	0.925	0.95	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.51	0.565	0.669
6	0.41	0.436	0.47	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.36	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.41	0.49
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.45
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.25	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.2	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
OVER 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

## **BIBLOGRAFÍA**

1. Anderson, T.W. and Darling. D. A. (1952) Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 193-212.
2. Blom J. R., Rosenblatt J.I. *Probability & Statistics*, W.B. Saunders Co., (1972).
3. D'Angostino, R.B. Ed and Stephens, M. A. Ed (1986). Goodness of fit techniques. *M. Dekker*, 68, 7-60 y 97-104.
4. Gentle, J.E., *Elements of Computational Statistics* (2002).
5. M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, 2, Charles W. Griffin and Co. Ltd (1961).
6. \_\_\_\_\_ and M. Knott, Components of Cramer-Von Mises Statistics, 1, *Journal of the Royal Statistics Society, Ser B. 34 No, 2 (1979), 290-307*
7. Mood A. M. and Graybill A. F. (1963), *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw Hill.
8. Siegel Sidney y Castellan John N.(1995). *Estadística No paramétrica*, 4, editorial Trillas, 437.
9. Stephens, M. A. (1970) Use of the Kolmogorov-Smirnov, Crámer-von Mises and related statistics without extensive tables. *J. Roy Statist. Soc.*, B 32, 115-122

10. Stephens, M. A. (1974b). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistic Assoc.*, 4, 357-369.
  
11. "An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, 52, 3 and 4, pages 591-611

## TABLAS

TABLE 4.6 Upper-Tail Asymptotic Percentage Points for Tests for Normality with  $\mu$  Unknown (Section 4.8.1, Case 1) or  $\sigma^2$  Unknown (Section 4.8.1, Case 2)

Statistic	Significance level $\alpha$							
	.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0025
W <sup>2</sup> Case 1	.094	.117	.134	.165	.197	.238	.270	.302
W <sup>2</sup> Case 2	.190	.263	.327	.442	.562	.725	.851	.978
U <sup>2</sup> Case 1	.088	.110	.127	.157	.187	.228	.259	.291
U <sup>2</sup> Case 2	.085	.105	.122	.151	.180	.221	.252	.284
A <sup>2</sup> Case 1	.644	.782	.894	1.087	1.285	1.551	1.756	1.964
A <sup>2</sup> Case 2	1.072	1.430	1.743	2.308	2.898	3.702	4.324	4.954

Adapted from Stephens (1974b), with permission of the American Statistical Association.

TABLE 4.7 Modifications and Percentage Points for a Test for Normality with  $\mu$  and  $\sigma^2$  Unknown (Section 4.8.1, Case 3)

Statistic	Modified statistic	Significance level $\alpha$							
		.50	.25	.15	.10	.05	.025	.01	.005
<u>Upper tail</u>									
D	$D(\sqrt{n} - 0.01 + 0.85/\sqrt{n})$	-	0.775	0.819	0.895	0.995	1.035		
V	$V(\sqrt{n} + 0.05 + 0.82/\sqrt{n})$	-	1.320	1.386	1.489	1.585	1.693		
W <sup>2</sup>	$W^2(1.0 + 0.5/n)$	.051	.074	.091	.104	.126	.148	.179	.201
U <sup>2</sup>	$U^2(1.0 + 0.5/n)$	.048	.070	.085	.096	.117	.136	.164	.183
A <sup>2</sup>	$A^2(1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$	.341	.470	.561	.631	.752	.873	1.035	1.159
<u>Lower tail</u>									
W <sup>2</sup>	$W^2(1.0 + 0.5/n)$	.051	.036	.029	.026	.022	.019	.017	
U <sup>2</sup>	$U^2(1.0 + 0.5/n)$	.048	.033	.027	.025	.021	.018	.016	
A <sup>2</sup>	$A^2(1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$	.341	.249	.226	.188	.160	.139	.119	

Adapted, with additions, from Table 54 of Pearson and Hartley (1972) and from Stephens (1974b), with permission of the Biometrika Trustees and of the American Statistical Association.

*Pruebas de bondad de ajuste basada en la Distribución Empírica*

**TABLE 4.9 Formulas for Significance Levels, Tests for Normality with Parameters Unknown (Case 3, Section 4.8.2)<sup>a</sup>**

	Statistic		
	W <sup>2</sup> , Case 3	U <sup>2</sup> , Case 3	A <sup>2</sup> , Case 3
$z < z_1$	$\log q = -13.953 + 775.5z - 12542.61z^2$	$\log q = -13.642 + 766.31z - 12432.74z^2$	$\log q = -13.436 + 101.14z - 223.73z^2$
$z_1$	0.0275	0.0262	0.200
$z_1 < z < z_2$	$\log q = -5.903 + 179.546z - 1515.29z^2$	$\log q = -6.3328 + 214.57z - 2022.28z^2$	$\log q = -8.318 + 42.796z - 59.938z^2$
$z_2$	0.051	0.048	0.340
$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.886 - 31.62z + 10.897z^2$	$\log p = 0.8510 - 32.006z - 3.45z^2$	$\log p = 0.9177 - 4.279z - 1.38z^2$
$z_3$	0.092	0.094	0.600
$z > z_3$	$\log p = 1.111 - 34.242z + 12.832z^2$	$\log p = 1.325 - 38.918z + 16.45z^2$	$\log p = 1.2937 - 5.709z + 0.0186z^2$

<sup>a</sup>Suppose  $z$  is a modified value of W<sup>2</sup>, U<sup>2</sup> or A<sup>2</sup> (see Table 4.7). For a given  $z$ , find the interval in which  $z$  lies. The formula gives the value of  $\log q$  ( $q$  = lower tail significance level) or  $\log p$  ( $p$  = upper tail significance level).

**TABLE 4.8 Constants for Calculating the Significance Level of a Value of A<sup>2</sup> in a Test for Normality with Parameters Unknown (Case 3, Section 4.8.2)**

q	$b_0$	$b_1$	Asymptotic percentage point $a_\infty$
.05	-.512	2.10	.1674
.10	-.552	1.25	.1938
.15	-.608	1.07	.2147
.20	-.643	.93	.2333
.25	-.707	1.03	.2509
.30	-.735	1.02	.2681
.35	-.772	1.04	.2853
.40	-.770	.90	.3030
.45	-.778	.80	.3213
.50	-.779	.67	.3405
.55	-.803	.70	.3612
.60	-.818	.58	.3836
.65	-.818	.42	.4085
.70	-.801	.12	.4367
.75	-.800	-.09	.4695
.80	-.756	-.39	.5091
.85	-.749	-.59	.5597
.90	-.750	-.80	.6305
.95	-.795	-.89	.7514
.975	-.881	-.94	.8728
.99	-1.013	-.93	1.0348
.995	-1.063	-1.34	1.1578

Adapted from Pettitt (1977a), with permission of the author and of the Royal Statistical Society.

TABLE 4.10 Upper Tail Percentage Points for Statistics  $W^2$  and  $A^2$  for a Test for Normality (Parameters Unknown) with Complete or Type 2 Right-Censored Data (Section 4.8.4).  $p = r/n$  is the censoring ratio.

Statistic	n	Significance level $\alpha$						
		0.5	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
$W^2$	20	0.001	0.002	0.004	0.006	0.010	0.016	0.024
	40	0.002	0.004	0.006	0.008	0.013	0.021	0.041
	60	0.002	0.004	0.006	0.008	0.014	0.021	0.039
	80	0.001	0.004	0.006	0.008	0.013	0.021	0.035
	100	0.001	0.004	0.006	0.008	0.013	0.020	0.032
	$\infty$	0.000	0.004	0.006	0.008	0.009	0.017	0.020
$p = 0.2$	10	0.007	0.011	0.014	0.017	0.028	0.041	0.057
	20	0.009	0.014	0.019	0.024	0.037	0.055	0.090
	40	0.009	0.015	0.020	0.026	0.038	0.057	0.089
	60	0.010	0.015	0.021	0.026	0.036	0.052	0.077
	80	0.010	0.016	0.021	0.026	0.036	0.049	0.073
	100	0.010	0.016	0.021	0.026	0.035	0.047	0.071
$p = 0.4$	$\infty$	0.009	0.019	0.021	0.026	0.034	0.038	0.066
	10	0.017	0.026	0.033	0.040	0.054	0.075	0.109
	20	0.019	0.029	0.037	0.044	0.060	0.080	0.113
	40	0.020	0.031	0.040	0.047	0.061	0.077	0.106
	60	0.020	0.031	0.040	0.047	0.060	0.077	0.105
	80	0.021	0.032	0.040	0.048	0.061	0.077	0.103
$p = 0.6$	100	0.021	0.032	0.040	0.048	0.061	0.076	0.101
	$\infty$	0.025	0.032	0.044	0.052	0.064	0.074	0.092
	10	0.030	0.044	0.054	0.062	0.078	0.094	0.115
	20	0.032	0.046	0.057	0.067	0.083	0.100	0.122
	40	0.033	0.049	0.060	0.070	0.084	0.101	0.124
	60	0.033	0.049	0.060	0.070	0.086	0.103	0.125
$p = 0.8$	80	0.034	0.050	0.061	0.071	0.087	0.105	0.127
	100	0.035	0.050	0.062	0.072	0.089	0.106	0.129
	$\infty$	0.039	0.051	0.069	0.080	0.098	0.114	0.140
	10	0.037	0.054	0.066	0.076	0.093	0.110	0.137
	20	0.039	0.056	0.069	0.079	0.097	0.113	0.137
	40	0.040	0.058	0.072	0.082	0.099	0.116	0.142
$p = 0.9$	60	0.040	0.058	0.072	0.082	0.100	0.118	0.141
	80	0.041	0.059	0.073	0.084	0.102	0.120	0.144
	100	0.042	0.060	0.074	0.085	0.103	0.122	0.146
	$\infty$	0.045	0.067	0.082	0.094	0.114	0.135	0.163

(continued)

*Pruebas de bondad de ajuste basada en la Distribución Empírica*

TABLE 4.10 (continued)

Statistic	n	Significance level $\alpha$							
		0.5	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	
W <sup>2</sup>	10	0.042	0.061	0.074	0.084	0.103	0.122	0.145	
	20	0.043	0.062	0.076	0.087	0.106	0.124	0.147	
	40	0.044	0.064	0.078	0.089	0.108	0.126	0.154	
	60	0.044	0.064	0.078	0.089	0.109	0.128	0.152	
	80	0.045	0.065	0.079	0.090	0.110	0.130	0.154	
	100	0.045	0.066	0.080	0.091	0.112	0.132	0.156	
	$\infty$	0.049	0.072	0.087	0.099	0.120	0.142	0.172	
	p = 0.95	10	0.049	0.070	0.086	0.098	0.119	0.141	0.167
20		0.049	0.071	0.087	0.100	0.121	0.142	0.171	
40		0.050	0.073	0.088	0.101	0.122	0.141	0.169	
60		0.050	0.073	0.088	0.101	0.123	0.144	0.171	
80		0.050	0.073	0.089	0.101	0.124	0.146	0.173	
100		0.050	0.073	0.089	0.102	0.125	0.146	0.174	
$\infty$		0.051	0.074	0.091	0.104	0.126	0.148	0.179	
A <sup>2</sup>		20	0.015	0.043	0.054	0.061	0.092	0.131	0.182
	40	0.028	0.053	0.067	0.079	0.112	0.158	0.253	
	60	0.035	0.053	0.069	0.084	0.114	0.160	0.246	
	80	0.036	0.056	0.073	0.087	0.116	0.159	0.236	
	100	0.036	0.059	0.075	0.089	0.119	0.158	0.228	
	$\infty$	0.030	0.077	0.094	0.099	0.133	0.149	0.185	
	p = 0.2	10	0.063	0.090	0.108	0.121	0.172	0.236	0.319
		20	0.072	0.107	0.135	0.162	0.220	0.297	0.439
40		0.078	0.117	0.150	0.177	0.236	0.316	0.433	
60		0.079	0.119	0.148	0.174	0.228	0.299	0.410	
80		0.082	0.121	0.153	0.178	0.229	0.292	0.395	
100		0.085	0.123	0.157	0.182	0.231	0.288	0.385	
$\infty$		0.106	0.134	0.190	0.215	0.250	0.279	0.340	
p = 0.4		10	0.111	0.158	0.198	0.233	0.304	0.405	0.592
	20	0.122	0.178	0.222	0.259	0.339	0.437	0.607	
	40	0.130	0.191	0.238	0.278	0.348	0.430	0.570	
	60	0.132	0.193	0.239	0.275	0.348	0.430	0.557	
	80	0.134	0.196	0.241	0.278	0.350	0.429	0.548	
	100	0.136	0.198	0.244	0.280	0.351	0.429	0.541	
	$\infty$	0.151	0.212	0.261	0.300	0.359	0.426	0.512	

(continued)

TABLE 4.10 (continued)

Statistic	n	Significance level $\alpha$						
		0.50	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
A <sup>2</sup>	10	0.172	0.246	0.302	0.352	0.440	0.542	0.698
	20	0.185	0.267	.330	0.380	0.473	0.574	0.743
	40	0.197	0.282	0.344	0.394	0.478	0.575	0.711
	60	0.197	0.284	0.345	0.396	0.482	0.574	0.705
	80	0.200	0.288	0.349	0.401	0.489	0.580	0.707
	100	0.202	0.291	0.353	0.405	0.494	0.585	0.709
	$\infty$	0.220	0.311	0.380	0.432	0.528	0.619	0.732
p = 0.8	10	0.214	0.303	0.368	0.425	0.530	0.642	0.825
	20	0.229	0.326	0.397	0.453	0.549	0.654	0.807
	40	0.242	0.342	0.414	0.473	0.566	0.669	0.814
	60	0.243	0.343	0.415	0.472	0.571	0.675	0.805
	80	0.245	0.348	0.420	0.478	0.579	0.683	0.811
	100	0.248	0.352	0.425	0.483	0.585	0.689	0.818
	$\infty$	0.265	0.380	0.456	0.517	0.623	0.729	0.871
p = 0.9	10	0.243	0.344	0.414	0.474	0.584	0.696	0.840
	20	0.257	0.366	0.440	0.500	0.600	0.708	0.853
	40	0.273	0.382	0.456	0.519	0.624	0.721	0.865
	60	0.272	0.383	0.459	0.520	0.626	0.733	0.874
	80	0.276	0.388	0.465	0.528	0.633	0.744	0.885
	100	0.279	0.392	0.470	0.534	0.640	0.753	0.893
	$\infty$	0.301	0.420	0.502	0.580	0.686	0.802	0.942
p = 0.95	10	0.309	0.425	0.511	0.578	0.700	0.818	0.964
	20	0.323	0.446	0.530	0.601	0.714	0.831	0.993
	40	0.330	0.456	0.541	0.611	0.723	0.833	0.981
	60	0.331	0.458	0.545	0.614	0.734	0.847	0.993
	80	0.333	0.460	0.548	0.616	0.740	0.853	1.000
	100	0.334	0.461	0.550	0.618	0.742	0.857	1.005
	$\infty$	0.341	0.470	0.561	0.631	0.752	0.873	1.035

Some asymptotic points taken from Pettitt (1976), with permission of the author and of the Biometrika Trustees.

Pruebas de bondad de ajuste basada en la Distribución Empírica

TABLE 4.11 Modifications and Percentage Points for EDF Tests for Exponentiality, Case 2: Origin Known, Scale Unknown (Section 4.9.3)

Upper tail		Significance level $\alpha$								
Statistic T	Modified form T*	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0025
D	$(D - 0.2/n)(\sqrt{n} + 0.26 + 0.5/\sqrt{n})$			.926	.995	1.094	1.184	1.298		
V	$(V - 0.2/n)(\sqrt{n} + 0.24 + 0.35/\sqrt{n})$			1.445	1.527	1.655	1.774	1.910		
W <sup>2</sup>	$W^2(1.0 + 0.16/n)$	.116	.130	.148	.175	.222	.271	.338	.390	.442
U <sup>2</sup>	$U^2(1.0 + 0.16/n)$	.090	.099	.112	.129	.159	.189	.230	.261	.293
A <sup>2</sup>	$A^2(1.0 + 0.6/n)$	.736	.816	.916	1.062	1.321	1.591	1.959	2.244	2.534

Lower tail		Significance level $\alpha$							
		.01	.025	.05	.10	.15	.20	.25	.50
W <sup>2</sup>	Asymptotic percentage points.	.0192	.0233	.0276	.0338	.039	.044	.048	.074
U <sup>2</sup>		.0172	.0207	.0243	.0293	.0339	.0373	.0409	.0601
A <sup>2</sup>		.150	.178	.208	.219	.280	.312	.342	.502

Adapted from Table 54 of Pearson and Hartley (1972) and from Stephens (1974b), with permission of the *Biometrika* Trustees and of the American Statistical Association.

TABLE 4.12 Formulas for Significance Levels, Tests for Exponentiality, Case 2: Origin Known, Scale Unknown (Section 4.9.3)<sup>a</sup>

	Statistic		
	W <sup>2</sup>	U <sup>2</sup>	A <sup>2</sup>
$z < z_1$	$\log q = -11.334 + 459.098z - 5652.12z^2$	$\log q = -11.703 + 542.5z - 7574.59z^2$	$\log q = -12.2204 + 67.459z - 110.3z^2$
$z_1$	0.035	0.029	0.260
$z_1 < z < z_2$	$\log q = -5.779 + 132.89z - 866.58z^2$	$\log q = -6.3288 + 178.1z - 1399.49z^2$	$\log q = -6.1327 + 20.218z - 18.663z^2$
$z_2$	0.074	0.062	0.510
$z_2 < z < z_3$	$\log p = 0.586 - 17.87z + 7.417z^2$	$\log p = 0.8071 - 25.166z + 8.44z^2$	$\log p = 0.9209 - 3.353z + 0.300z^2$
$z_3$	0.160	0.120	0.950
$z > z_3$	$\log p = 0.447 - 16.592z + 4.849z^2$	$\log p = 0.7663 - 24.359z + 4.539z^2$	$\log p = 0.731 - 3.009z + 0.15z^2$

<sup>a</sup>Suppose  $z$  is a modified value of  $W^2$ ,  $U^2$ , or  $A^2$  (See Table 4.11). For a given  $z$ , find the interval in which  $z$  lies. The formula gives the value of  $\log q$  ( $q$  = lower tail significance level) or  $\log p$  ( $p$  = upper tail significance level).

TABLE 4.14 Modifications and Upper Tail Percentage Points for a Test for Exponentiality, Case 3: Origin and Scale Unknown (Section 4.9.4)

Statistic	Modification	Significance level					
		.25	.15	.10	.05	.025	.01
$W^2$	$W^2(1+2.8/n-3/n^2)$	.116	.148	.175	.222	.271	.338
$U^2$	$U^2(1+2.3/n-3/n^2)$	.090	.112	.129	.159	.189	.230
$A^2$	$A^2(1+5.4/n-11/n^2)$	.736	.916	1.062	1.321	1.591	1.959

TABLE 4.15 Upper Tail Percentage Points for  $\sqrt{n}D^+$ ,  $\sqrt{n}D^-$ ,  $\sqrt{n}D$ ,  $\sqrt{n}V$ ,  $W^2$ ,  $U^2$ , and  $A^2$ , for a Test of Exponentiality, Case 3. Origin and Scale Unknown (Section 4.9.4)

n	Upper tail significance level $\alpha$					
	.25	.15	.10	.05	.025	.01
Statistic $\sqrt{n}D^+$						
5	.491	.569	.639	.743	.825	.917
10	.580	.674	.745	.851	.952	1.038
15	.610	.700	.768	.872	.978	1.077
20	.624	.716	.785	.894	.995	1.108
25	.635	.725	.799	.909	1.010	1.125
50	.660	.758	.832	.943	1.051	1.163
100	.682	.778	.853	.967	1.074	1.189
$\infty$	.723	.820	.886	.996	1.094	1.211
Statistic $\sqrt{n}D^-$						
5	.627	.705	.753	.821	.891	.955
10	.671	.761	.825	.916	.993	1.089
15	.688	.783	.842	.933	1.022	1.111
20	.696	.791	.855	.949	1.041	1.132
25	.702	.795	.860	.958	1.052	1.149
50	.710	.807	.874	.976	1.072	1.178
100	.717	.814	.879	.984	1.089	1.192
$\infty$	.723	.820	.886	.996	1.094	1.211
Statistic $\sqrt{n}D$						
5	.683	.749	.793	.865	.921	.992
10	.753	.833	.889	.977	1.048	1.119
15	.771	.865	.912	1.002	1.079	1.163
20	.786	.872	.927	1.021	1.099	1.198
25	.792	.878	.936	1.033	1.115	1.215
50	.813	.879	.960	1.061	1.149	1.257
100	.824	.911	.972	1.072	1.171	1.278
$\infty$	.840	.927	.995	1.094	1.184	1.298
Statistic $\sqrt{n}V$						
5	1.098	1.186	1.234	1.314	1.400	1.494
10	1.194	1.294	1.363	1.461	1.556	1.662
15	1.225	1.325	1.392	1.504	1.596	1.701
20	1.245	1.346	1.419	1.536	1.635	1.769

(continued)

TABLE 4.15 (continued)

n	Upper tail significance level $\alpha$					
	.25	.15	.10	.05	.025	.01
Statistic $\sqrt{n}V$ , continued						
25	1.260	1.366	1.438	1.559	1.658	1.796
50	1.292	1.400	1.481	1.600	1.701	1.847
100	1.310	1.419	1.502	1.647	1.740	1.897
$\infty$	1.334	1.445	1.527	1.655	1.774	1.910
Statistic $W^2$						
5	.083	.102	.117	.141	.166	.197
10	.097	.122	.142	.176	.211	.259
15	.103	.130	.151	.188	.229	.281
20	.106	.133	.157	.195	.237	.293
25	.107	.135	.160	.199	.247	.301
50	.111	.141	.166	.209	.256	.319
100	.113	.144	.170	.215	.263	.328
$\infty$	.116	.148	.175	.222	.271	.338
Statistic $U^2$						
5	.068	.083	.093	.113	.131	.153
10	.075	.094	.108	.131	.155	.187
15	.080	.099	.114	.139	.165	.200
20	.082	.102	.117	.143	.170	.207
25	.083	.104	.119	.146	.173	.212
50	.087	.108	.124	.152	.180	.223
100	.089	.110	.126	.155	.184	.229
$\infty$	.090	.112	.129	.159	.189	.230
Statistic $A^2$						
5	.460	.555	.621	.725	.848	.989
10	.545	.660	.747	.920	1.068	1.352
15	.575	.720	.816	1.009	1.198	1.495
20	.608	.757	.861	1.062	1.267	1.580
25	.625	.784	.890	1.097	1.317	1.635
50	.680	.838	.965	1.197	1.440	1.775
100	.710	.875	1.008	1.250	1.510	1.855
$\infty$	.736	.916	1.062	1.321	1.591	1.959

TABLE 4.16 Upper Tail Percentage Points for Statistics  $W^2$  and  $A^2$  for a Test for Exponentiality with Unknown Scale Parameter and Known Origin, for Complete or Right-Censored Data of Type 2 (Section 4.9.5)  
 $p = r/n$  is the censoring ratio.

Statistic	n	Significance level $\alpha$							
		0.50	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	
$W^2$	20	0.005	0.009	0.012	0.014	0.018	0.021	0.025	
	40	0.005	0.008	0.011	0.013	0.017	0.020	0.025	
	p = 0.2	60	0.005	0.008	0.011	0.013	0.017	0.020	0.026
		80	0.005	0.008	0.011	0.013	0.017	0.020	0.026
	100	0.005	0.008	0.011	0.013	0.017	0.020	0.026	
	$\infty$	0.005	0.008	0.011	0.013	0.016	0.021	0.026	
	p = 0.4	10	0.019	0.030	0.038	0.045	0.055	0.066	0.079
		20	0.017	0.028	0.037	0.044	0.056	0.068	0.083
		40	0.017	0.028	0.036	0.044	0.056	0.068	0.084
		60	0.017	0.028	0.036	0.044	0.056	0.068	0.085
80		0.017	0.028	0.036	0.044	0.056	0.069	0.086	
100		0.017	0.027	0.036	0.043	0.056	0.069	0.086	
p = 0.6	$\infty$	0.017	0.027	0.036	0.043	0.056	0.070	0.087	
	10	0.036	0.056	0.072	0.084	0.104	0.124	0.149	
	20	0.035	0.055	0.071	0.084	0.106	0.131	0.161	
	40	0.035	0.055	0.072	0.085	0.109	0.132	0.161	
	60	0.034	0.056	0.072	0.085	0.109	0.133	0.164	
	80	0.034	0.056	0.072	0.085	0.109	0.134	0.166	
	100	0.034	0.056	0.072	0.086	0.109	0.134	0.167	
	$\infty$	0.034	0.058	0.072	0.086	0.110	0.136	0.171	
p = 0.8	10	0.055	0.086	0.107	0.126	0.156	0.187	0.229	
	20	0.055	0.086	0.110	0.130	0.167	0.203	0.253	
	40	0.055	0.087	0.111	0.131	0.167	0.203	0.253	
	60	0.055	0.087	0.112	0.132	0.168	0.205	0.256	
	80	0.055	0.087	0.112	0.132	0.169	0.206	0.257	
	100	0.055	0.087	0.112	0.132	0.169	0.206	0.258	
	$\infty$	0.055	0.087	0.113	0.133	0.170	0.209	0.261	
p = 0.9	10	0.065	0.100	0.126	0.147	0.182	0.219	0.265	
	20	0.065	0.102	0.132	0.155	0.194	0.238	0.289	
	40	0.064	0.102	0.129	0.152	0.193	0.229	0.290	
	60	0.064	0.101	0.130	0.153	0.195	0.234	0.294	
	80	0.065	0.101	0.131	0.154	0.196	0.236	0.297	
	100	0.065	0.101	0.131	0.155	0.196	0.238	0.298	
	$\infty$	0.065	0.101	0.132	0.156	0.199	0.243	0.303	

(continued)

*Pruebas de bondad de ajuste basada en la Distribución Empírica*

TABLE 4.16 (continued)

Statistic	n	Significance level $\alpha$						
		0.50	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
$W^2$	10	0.070	0.109	0.136	0.160	0.200	0.239	0.292
	20	0.070	0.110	0.142	0.166	0.209	0.251	0.313
	40	0.069	0.108	0.138	0.161	0.205	0.246	0.304
	60	0.069	0.108	0.139	0.163	0.207	0.250	0.313
	80	0.069	0.108	0.139	0.164	0.208	0.252	0.318
	100	0.070	0.108	0.140	0.164	0.209	0.254	0.321
	$\infty$	0.070	0.109	0.141	0.166	0.212	0.259	0.333
$p = 0.95$	10	0.075	0.116	0.147	0.171	0.216	0.259	0.319
	20	0.073	0.115	0.148	0.175	0.221	0.265	0.328
	40	0.074	0.115	0.147	0.172	0.218	0.267	0.331
	60	0.074	0.115	0.147	0.173	0.219	0.267	0.334
	80	0.074	0.115	0.147	0.173	0.220	0.268	0.336
	100	0.074	0.115	0.147	0.173	0.220	0.268	0.337
	$\infty$	0.074	0.116	0.148	0.175	0.222	0.271	0.338
$p = 1.0$	20	0.080	0.127	0.161	0.188	0.232	0.271	0.325
	40	0.078	0.126	0.161	0.189	0.241	0.292	0.355
	60	0.077	0.126	0.164	0.192	0.244	0.300	0.373
	80	0.077	0.126	0.164	0.194	0.249	0.306	0.385
	100	0.078	0.126	0.163	0.195	0.252	0.311	0.394
	$\infty$	0.078	0.128	0.161	0.200	0.274	0.336	0.438
	$A^2$	10	0.158	0.248	0.312	0.363	0.445	0.528
20		0.157	0.248	0.319	0.379	0.477	0.582	0.719
40		0.157	0.250	0.322	0.382	0.485	0.584	0.736
60		0.156	0.251	0.324	0.382	0.493	0.605	0.753
80		0.156	0.252	0.326	0.385	0.496	0.611	0.762
100		0.157	0.252	0.326	0.388	0.497	0.614	0.767
$\infty$		0.158	0.255	0.330	0.407	0.501	0.614	0.788
$p = 0.4$	10	0.243	0.373	0.474	0.549	0.684	0.835	1.058
	20	0.241	0.375	0.482	0.568	0.721	0.875	1.104
	40	0.243	0.385	0.492	0.580	0.733	0.892	1.126
	60	0.244	0.382	0.491	0.580	0.730	0.892	1.126
	80	0.244	0.382	0.491	0.580	0.731	0.894	1.128
	100	0.244	0.383	0.492	0.581	0.733	0.897	1.130
	$\infty$	0.244	0.390	0.494	0.584	0.746	0.914	1.145

(continued)

TABLE 4.16 (continued)

Statistic	n	Significance level $\alpha$						
		0.50	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
$A^2$	10	0.337	0.510	0.636	0.740	0.929	1.130	1.434
	20	0.337	0.518	0.662	0.773	0.979	1.195	1.512
	40	0.344	0.529	0.669	0.782	0.985	1.186	1.465
	60	0.341	0.527	0.670	0.782	0.989	1.207	1.516
	80	0.341	0.530	0.670	0.783	0.991	1.214	1.529
	100	0.341	0.532	0.671	0.785	0.993	1.218	1.533
	$\infty$	0.345	0.549	0.675	0.793	1.003	1.222	1.521
$p = 0.8$	10	0.391	0.580	0.732	0.852	1.059	1.289	1.584
	20	0.396	0.611	0.768	0.894	1.117	1.360	1.706
	40	0.399	0.608	0.771	0.893	1.117	1.330	1.633
	60	0.398	0.609	0.766	0.897	1.127	1.367	1.699
	80	0.398	0.612	0.766	0.900	1.132	1.380	1.720
	100	0.399	0.615	0.768	0.902	1.135	1.386	1.728
	$\infty$	0.407	0.630	0.781	0.914	1.149	1.394	1.729
$p = 0.9$	10	0.433	0.653	0.800	0.928	1.176	1.422	1.738
	20	0.431	0.657	0.822	0.959	1.205	1.466	1.811
	40	0.437	0.657	0.824	0.958	1.195	1.432	1.779
	60	0.434	0.654	0.824	0.959	1.202	1.447	1.803
	80	0.434	0.657	0.827	0.962	1.208	1.456	1.812
	100	0.435	0.660	0.830	0.965	1.212	1.462	1.817
	$\infty$	0.444	0.680	0.850	0.983	1.232	1.490	1.830
$p = 0.95$	10	0.485	0.746	0.886	1.017	1.278	1.524	1.894
	20	0.488	0.723	0.904	1.052	1.315	1.570	1.924
	40	0.494	0.732	0.907	1.049	1.299	1.565	1.933
	60	0.491	0.728	0.905	1.051	1.303	1.570	1.964
	80	0.491	0.728	0.906	1.053	1.306	1.574	1.971
	100	0.492	0.729	0.907	1.054	1.308	1.576	1.973
	$\infty$	0.496	0.736	0.916	1.062	1.321	1.591	1.959
$p = 1.0$	10	0.485	0.746	0.886	1.017	1.278	1.524	1.894
	20	0.488	0.723	0.904	1.052	1.315	1.570	1.924
	40	0.494	0.732	0.907	1.049	1.299	1.565	1.933
	60	0.491	0.728	0.905	1.051	1.303	1.570	1.964
	80	0.491	0.728	0.906	1.053	1.306	1.574	1.971
	100	0.492	0.729	0.907	1.054	1.308	1.576	1.973
	$\infty$	0.496	0.736	0.916	1.062	1.321	1.591	1.959

Some asymptotic points taken, from Pettitt (1977b), with permission of the author and of the Biometrika Trustees.

TABLE 4.17 Modifications and Upper Tail Percentage Points for Statistics  $W^2$ ,  $U^2$ , and  $A^2$  for the Extreme-Value or Weibull Distributions (Sections 4.10, 4.11)

Statistic	Modification	Significance level $\alpha$				
		.25	.10	.05	.025	.01
<b><math>W^2</math></b>						
Case 1	$W^2(1 + 0.16/n)$	.116	.175	.222	.271	.338
Case 2	None	.186	.320	.431	.547	.705
Case 3	$W^2(1 + 0.2/\sqrt{n})$	.073	.102	.124	.146	.175
<b><math>U^2</math></b>						
Case 1	$U^2(1 + 0.16/n)$	.090	.129	.159	.189	.230
Case 2	$U^2(1 + 0.15/\sqrt{n})$	.086	.123	.152	.181	.220
Case 3	$U^2(1 + 0.2/\sqrt{n})$	.070	.097	.117	.138	.165
<b><math>A^2</math></b>						
Case 1	$A^2(1 + 0.3/n)$	.736	1.062	1.321	1.591	1.959
Case 2	None	1.060	1.725	2.277	2.854	3.640
Case 3	$A^2(1 + 0.2/\sqrt{n})$	.474	.637	.757	.877	1.038

Taken from Stephens (1977), with permission of the Biometrika Trustees.

TABLE 4.18 Upper Tail Percentage Points for Statistics  $\sqrt{n}D^+$ ,  $\sqrt{n}D^-$ ,  $\sqrt{n}D$ , and  $\sqrt{n}V$ , for Tests for the Extreme-Value or Weibull Distributions (Sections 4.10, 4.11)

Statistic	n	Significance level $\alpha$			
		.10	.05	.025	.01
$\sqrt{n}D^+$ Case 1	10	.872	.969	1.061	1.152
	20	.878	.979	1.068	1.176
	50	.882	.987	1.070	1.193
	$\infty$	.886	.996	1.094	1.211
$\sqrt{n}D^-$ Case 1	10	.773	.883	.987	1.103
	20	.810	.921	1.013	1.142
	50	.840	.950	1.031	1.171
	$\infty$	.886	.996	1.094	1.211
$\sqrt{n}D$ Case 1	10	.934	1.026	1.113	1.206
	20	.954	1.049	1.134	1.239
	50	.970	1.067	1.148	1.263
	$\infty$	.995	1.094	1.184	1.298
$\sqrt{n}V$ Case 1	10	1.43	1.55	1.65	1.77
	20	1.46	1.58	1.69	1.81
	50	1.48	1.59	1.72	1.84
	$\infty$	1.53	1.65	1.77	1.91
$\sqrt{n}D^+$ Case 2	10	.99	1.14	1.27	1.42
	20	1.00	1.15	1.28	1.43
	50	1.01	1.17	1.29	1.44
	$\infty$	1.02	1.17	1.30	1.46
$\sqrt{n}D^-$ Case 2	10	1.01	1.16	1.28	1.41
	20	1.01	1.15	1.28	1.43
	50	1.00	1.14	1.29	1.45
	$\infty$	1.02	1.17	1.30	1.46

(continued)

TABLE 4.18 (continued)

Statistic	n	Significance level $\alpha$			
		.10	.05	.025	.01
$\sqrt{n}D$	10	1.14	1.27	1.39	1.52
Case 2	20	1.15	1.28	1.40	1.53
	50	1.16	1.29	1.41	1.53
	$\infty$	1.16	1.29	1.42	1.53
$\sqrt{n}V$	10	1.39	1.49	1.60	1.72
Case 2	20	1.42	1.54	1.64	1.76
	50	1.45	1.56	1.67	1.79
	$\infty$	1.46	1.58	1.69	1.81
$\sqrt{n}D^+$	10	.685	.755	.842	.897
Case 3	20	.710	.780	.859	.926
	50	.727	.796	.870	.940
	$\infty$	.734	.808	.877	.957
$\sqrt{n}D^-$	10	.700	.766	.814	.892
Case 3	20	.715	.785	.843	.926
	50	.724	.796	.860	.944
	$\infty$	.733	.808	.877	.957
$\sqrt{n}D$	10	.760	.819	.880	.944
Case 3	20	.779	.843	.907	.973
	50	.790	.856	.922	.988
	$\infty$	.803	.874	.939	1.007
$\sqrt{n}V$	10	1.287	1.381	1.459	1.535
Case 3	20	1.323	1.428	1.509	1.600
	50	1.344	1.453	1.538	1.639
	$\infty$	1.372	1.477	1.557	1.671

Taken from Chandra, Singpurwalla, and Stephens (1981), with permission of the authors and of the American Statistical Association.  
The table for  $\sqrt{n}D$ , Case 2, has been corrected.

TABLE 4.19 Upper Tail Asymptotic Percentage Points for  $W^2$ ,  $U^2$ , and  $A^2$  in Tests for the Gamma Distribution (Section 4.12)<sup>a</sup>

Statistic	m	Significance level $\alpha$				
		.10	.05	.025	.01	
$W^2$	1	.175	.222	.271	.338	
	2	.156	.195	.234	.288	
	3	.149	.185	.222	.271	
	4	.146	.180	.215	.262	
	5	.144	.177	.211	.257	
	6	.142	.175	.209	.254	
	8	.140	.173	.205	.250	
	10	.139	.171	.204	.247	
	12	.138	.170	.202	.245	
	15	.138	.169	.201	.244	
	20	.137	.169	.200	.243	
	$\infty$	.135	.165	.196	.237	
	$U^2$	1	.129	.159	.189	.230
		2	.129	.158	.188	.228
3		.128	.158	.187	.227	
4		.128	.158	.187	.227	
5		.128	.158	.187	.227	
6		.128	.157	.187	.227	
8		.128	.157	.187	.227	
10		.128	.157	.187	.227	
12		.128	.157	.187	.227	
15		.128	.157	.187	.227	
20		.128	.157	.187	.227	
$\infty$		.128	.157	.187	.227	
$A^2$		1	1.062	1.321	1.591	1.959
		2	.989	1.213	1.441	1.751
	3	.959	1.172	1.389	1.683	
	4	.944	1.151	1.362	1.648	
	5	.935	1.139	1.346	1.627	
	6	.928	1.130	1.335	1.612	
	8	.919	1.120	1.322	1.595	
	10	.915	1.113	1.314	1.583	
	12	.911	1.110	1.310	1.578	
	15	.908	1.106	1.304	1.570	
	20	.905	1.101	1.298	1.562	
	$\infty$	.893	1.087	1.281	1.551	

<sup>a</sup>Parameters: location  $\alpha$  known; scale  $\beta$  unknown; shape  $m$  known.

TABLE 4.20 Upper Tail Asymptotic Percentage Points for  $W^2$ ,  $U^2$ , and  $A^2$  in Tests for the Gamma Distribution (Section 4.12)<sup>a</sup>

Statistic	m	Significance level $\alpha$					
		.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	1	.103	.150	.186	.223	.273	.311
	2	.099	.143	.176	.210	.256	.291
	3	.097	.140	.172	.205	.250	.283
	4	.096	.138	.171	.203	.247	.280
	5	.096	.138	.169	.202	.245	.278
	6	.095	.137	.169	.201	.244	.276
	8	.095	.136	.168	.200	.242	.275
	10	.095	.136	.167	.199	.241	.274
	12	.095	.136	.167	.199	.241	.273
	15	.094	.135	.167	.198	.240	.272
	20	.094	.135	.166	.198	.240	.272
	$\infty$	.094	.134	.165	.197	.238	.270
$U^2$	1	.090	.129	.159	.189	.230	.262
	2	.089	.128	.158	.189	.229	.261
	3	.089	.128	.158	.188	.229	.260
	4	.089	.128	.158	.188	.229	.260
	5	.089	.128	.158	.188	.229	.260
	6	.089	.128	.158	.188	.228	.260
	8	.089	.128	.157	.188	.228	.260
	10	.089	.128	.157	.188	.228	.260
	12	.089	.128	.157	.188	.228	.260
	15	.089	.128	.157	.188	.228	.260
	20	.089	.127	.157	.187	.228	.260
	$\infty$	.090	.127	.157	.187	.228	.259
$A^2$	1	.680	.956	1.170	1.390	1.687	1.916
	2	.661	.926	1.130	1.338	1.619	1.836
	3	.655	.915	1.115	1.320	1.596	1.809
	4	.651	.909	1.108	1.310	1.584	1.795
	5	.649	.906	1.103	1.305	1.577	1.787
	6	.648	.904	1.101	1.301	1.572	1.781
	8	.646	.901	1.097	1.297	1.567	1.775
	10	.645	.899	1.095	1.294	1.563	1.771
	12	.644	.898	1.094	1.293	1.561	1.768
	15	.644	.897	1.092	1.291	1.559	1.766
	20	.643	.896	1.091	1.289	1.557	1.763
	$\infty$	.644	.894	1.087	1.285	1.551	1.756

<sup>a</sup>Parameters: location  $\alpha$  known; scale  $\beta$  known; shape  $m$  unknown.

TABLE 4.21 Upper Tail Asymptotic Percentage Points for  $W^2$ ,  $U^2$ , and  $A^2$  in Tests for the Gamma Distribution (Section 4.12)<sup>a</sup>

Statistic	m	Significance level $\alpha$					
		.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	1	.079	.111	.136	.162	.196	.222
	2	.076	.107	.131	.155	.187	.211
	3	.075	.106	.129	.153	.184	.208
	4	.075	.105	.128	.152	.183	.207
	5	.075	.105	.128	.151	.182	.206
	6	.075	.105	.128	.151	.181	.205
	8	.074	.104	.127	.150	.181	.204
	10	.074	.104	.127	.150	.180	.204
	12	.074	.104	.127	.150	.180	.203
	15	.074	.104	.127	.149	.180	.203
	20	.074	.104	.126	.149	.180	.203
	$\infty$	.074	.104	.126	.148	.178	.201
	$U^2$	1	.071	.098	.119	.141	.169
2		.070	.097	.118	.139	.166	.187
3		.070	.097	.118	.138	.165	.186
4		.070	.097	.117	.138	.165	.186
5		.069	.097	.117	.138	.165	.185
6		.069	.097	.117	.138	.165	.185
8		.069	.096	.117	.137	.164	.185
10		.069	.096	.117	.137	.164	.185
12		.069	.096	.117	.137	.164	.185
15		.069	.096	.117	.137	.164	.185
20		.069	.096	.117	.137	.164	.185
$\infty$		.069	.096	.117	.136	.164	.183
$A^2$		1	.486	.657	.786	.917	1.092
	2	.477	.643	.768	.894	1.062	1.190
	3	.475	.639	.762	.886	1.052	1.178
	4	.473	.637	.759	.883	1.048	1.173
	5	.472	.635	.758	.881	1.045	1.170
	6	.472	.635	.757	.880	1.043	1.168
	8	.471	.634	.755	.878	1.041	1.165
	10	.471	.633	.754	.877	1.040	1.164
	12	.471	.633	.754	.876	1.039	1.163
	15	.470	.632	.754	.876	1.038	1.162
	20	.470	.632	.753	.875	1.037	1.161
	$\infty$	.470	.631	.752	.873	1.035	1.159

<sup>a</sup>Parameters: location  $\alpha$  known; scale  $\beta$  unknown; shape  $m$  unknown.

TABLE 4.22 Modifications and Upper Tail Percentage Points for  $W^2$ ,  $U^2$ ,  $A^2$  in Tests for the Logistic Distribution (Section 4.13)<sup>a</sup>

Statistic	Modification	Significance level $\alpha$					
		.25	.10	.05	.025	.01	.005
$W^2$	Case 1 $(1.9nW^2 - 0.15)/(1.9n - 1.0)$	.083	.119	.148	.177	.218	.249
	Case 2 $(0.95nW^2 - 0.45)/(0.95n - 1.0)$	.184	.323	.438	.558	.721	.847
	Case 3 $(nW^2 - 0.08)/(n - 1.0)$	.060	.081	.098	.114	.136	.152
$U^2$	Case 2 $(1.6nU^2 - 0.16)/(1.6n - 1.0)$	.080	.116	.145	.174	.214	.246
$A^2$	Case 1 $A^2 + 0.15/n$	.615	.857	1.046	1.241	1.505	1.710
	Case 2 $(0.6nA^2 - 1.8)/(0.6n - 1.0)$	1.043	1.725	2.290	2.880	3.685	4.308
	Case 3 $A^2(1.0 + 0.25/n)$	.426	.563	.660	.769	.906	1.010

<sup>a</sup>For  $U^2$  Cases 1 and 3 use modifications and percentage points for  $W^2$  Cases 1 and 3, respectively (see Section 4.13). Taken from Stephens (1979), with permission of the Biometrika Trustees.

TABLE 4.23 Upper Tail Percentage Points for Statistics  $D^+\sqrt{n}$ ,  $D\sqrt{n}$ , and  $V\sqrt{n}$ , for Tests for the Logistic Distribution (Section 4.14)

Case	n	Significance level $\alpha$			
		0.10	0.05	0.025	0.01
Statistic $D^+\sqrt{n}$					
1	5	0.702	0.758	0.805	0.854
	10	0.730	0.792	0.846	0.913
	20	0.744	0.809	0.867	0.944
	50	0.752	0.819	0.880	0.962
	$\infty$	0.757	0.826	0.888	0.974
2	5	0.971	1.120	1.239	1.380
	10	0.990	1.143	1.268	1.423
	20	0.999	1.150	1.282	1.444
	50	1.005	1.161	1.290	1.456
	$\infty$	1.009	1.166	1.297	1.464
3	5	0.603	0.650	0.690	0.735
	10	0.636	0.687	0.736	0.789
	20	0.653	0.705	0.758	0.816
	50	0.663	0.716	0.773	0.832
	$\infty$	0.669	0.723	0.781	0.842
Statistic $D\sqrt{n}$					
1	5	0.736	0.791	0.845	0.883
	10	0.777	0.837	0.895	0.953
	20	0.800	0.865	0.926	0.997
	50	0.808	0.874	0.937	1.011
	$\infty$	0.816	0.883	0.947	1.025
2	5	1.108	1.236	1.349	1.474
	10	1.148	1.274	1.388	1.521
	20	1.167	1.294	1.406	1.545
	50	1.179	1.305	1.419	1.559
	$\infty$	1.187	1.313	1.427	1.568
3	5	0.643	0.679	0.723	0.751
	10	0.679	0.730	0.774	0.823
	20	0.698	0.755	0.800	0.854
	50	0.708	0.770	0.817	0.873
	$\infty$	0.715	0.780	0.827	0.886

(continued)

TABLE 4.23 (continued)

Case	n	Significance level $\alpha$			
		0.10	0.05	0.025	0.01
Statistic $V\sqrt{n}$					
1	5	1.369	1.471	1.580	1.658
	10	1.410	1.520	1.630	1.741
	20	1.433	1.550	1.659	1.790
	50	1.447	1.564	1.675	1.815
	$\infty$	1.454	1.574	1.685	1.832
2	5	1.314	1.432	1.547	1.674
	10	1.372	1.483	1.587	1.711
	20	1.400	1.510	1.607	1.730
	50	1.417	1.525	1.619	1.741
	$\infty$	1.429	1.535	1.627	1.748
3	5	1.170	1.246	1.299	1.373
	10	1.230	1.311	1.381	1.466
	20	1.260	1.344	1.422	1.514
	50	1.277	1.364	1.448	1.542
	$\infty$	1.289	1.376	1.463	1.560

Taken from Stephens (1979), with permission of the Biometrika Trustees.

TABLE 4.24 Upper Tail Percentage Points for  $W^2$  and  $A^2$  for Tests for the Cauchy Distribution (Section 4.14)

n	Significance level $\alpha$					
	.25	.15	.10	.05	.025	.01
Case 1. Statistic $W^2$						
5	.208	.382	.667	1.26	1.51	1.61
8	.227	.480	.870	1.68	2.30	2.55
10	.227	.460	.840	1.80	2.60	3.10
12	.220	.430	.770	1.76	2.85	3.65
15	.205	.372	.670	1.59	2.88	4.23
20	.189	.315	.520	1.25	2.65	4.80
25	.175	.275	.420	.870	2.10	4.70
30	.166	.250	.360	.710	1.60	4.10
40	.153	.220	.290	.510	1.50	3.05
50	.145	.200	.260	.400	.70	2.05
100	.130	.170	.210	.270	.35	.60
$\infty$	.115	.146	.173	.216	.260	.319
Case 1. Statistic $A^2$						
5	1.19	2.22	3.83	8.00	12.75	17.980
8	1.33	2.62	4.7	10.0	17.4	25.0
10	1.34	2.52	4.5	10.6	18.2	29.0
12	1.31	2.42	4.1	9.9	18.8	32.0
15	1.30	2.15	3.5	8.2	17.2	31.2
20	1.17	1.86	2.8	6.5	14.4	27.5
25	1.12	1.68	2.3	4.7	10.8	23.0
30	1.08	1.55	2.1	3.8	8.2	20.0
40	1.02	1.38	1.8	2.9	5.2	15.5
50	.970	1.29	1.6	2.4	3.8	10
100	.890	1.16	1.4	1.8	2.2	3.5
$\infty$	.834	1.02	1.219	1.519	1.812	2.212

TABLE 4.25. Upper Tail Percentage Points for  $W^2$  and  $A^2$  for Tests for the Cauchy Distribution (Section 4.14)

n	Significance level $\alpha$					
	.25	.15	.10	.05	.025	.01
Case 2. Statistic $W^2$						
5	.199	.236	.261	.338	.437	.590
8	.211	.273	.321	.389	.463	.564
10	.212	.279	.332	.414	.501	.626
12	.212	.281	.337	.433	.525	.661
15	.206	.279	.339	.444	.537	.684
20	.199	.273	.333	.442	.547	.698
25	.194	.268	.328	.437	.551	.704
30	.189	.265	.326	.435	.553	.708
40	.185	.260	.323	.434	.555	.712
50	.183	.258	.321	.433	.557	.714
100	.179	.254	.319	.432	.559	.715
$\infty$	.176	.250	.316	.131	.560	.714
Case 2. Statistic $A^2$						
5	.974	1.131	1.239	1.59	2.08	2.84
8	1.085	1.360	1.560	1.88	2.18	2.55
10	1.110	1.414	1.653	2.04	2.38	2.89
12	1.117	1.443	1.710	2.14	2.55	3.15
15	1.117	1.449	1.728	2.22	2.65	3.31
20	1.101	1.444	1.728	2.24	2.73	3.44
25	1.083	1.432	1.727	2.25	2.77	3.50
30	1.064	1.422	1.724	2.25	2.80	3.53
40	1.051	1.41	1.723	2.26	2.82	3.56
50	1.045	1.405	1.722	2.27	2.83	3.59
100	1.038	1.40	1.718	2.28	2.86	3.64
$\infty$	1.034	1.409	1.716	2.283	2.872	3.677

TABLE 4.26 Upper Tail Percentage Points for  $W^2$  and  $A^2$  for Tests for the Cauchy Distribution (Section 4.14)

n	Significance level $\alpha$					
	.25	.15	.10	.05	.025	.01
Case 3. Statistic $W^2$						
5	.167	.242	.305	.393	.445	.481
8	.192	.315	.441	.703	.940	1.13
10	.197	.331	.481	.833	1.201	1.571
12	.194	.329	.487	.896	1.391	1.901
15	.185	.317	.472	.904	1.54	2.33
20	.169	.281	.419	.835	1.63	2.96
25	.154	.253	.366	.726	1.47	3.08
30	.143	.225	.319	.615	1.25	2.90
40	.126	.195	.263	.460	.850	2.17
50	.117	.175	.235	.381	.642	1.56
60	.1097	.160	.211	.330	.508	1.07
100	.098	.135	.174	.2378	.331	.544
$\infty$	.080	.108	.130	.170	.212	.270
Case 3. Statistic $A^2$						
5	.835	1.14	1.40	1.77	2.00	2.16
8	.992	1.52	2.06	3.20	4.27	5.24
10	1.04	1.63	2.27	3.77	5.58	7.50
12	1.04	1.65	2.33	4.14	6.43	9.51
15	1.02	1.61	2.28	4.25	7.20	11.50
20	.975	1.51	2.13	4.05	7.58	14.57
25	.914	1.40	1.94	3.57	6.91	14.96
30	.875	1.30	1.76	3.09	5.86	13.80
40	.812	1.16	1.53	2.48	4.23	10.20
50	.774	1.08	1.41	2.14	3.37	7.49
60	.743	1.02	1.30	1.92	2.76	5.32
100	.689	.927	1.14	1.52	2.05	3.30
$\infty$	.615	.780	.949	1.225	1.52	1.90

TABLE 4.27 Upper Tail Percentage Points for  $U^2$  for Tests of the von Mises Distribution (Section 4.15)

True shape $\kappa$	Significance level $\alpha$							
	0.500	0.250	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
Case 1								
0.0	0.047	0.071	0.089	0.105	0.133	0.163	0.204	0.235
0.50	0.048	0.072	0.091	0.107	0.135	0.165	0.205	0.237
1.00	0.051	0.076	0.095	0.111	0.139	0.169	0.209	0.241
1.50	0.053	0.080	0.099	0.115	0.144	0.173	0.214	0.245
2.00	0.055	0.082	0.102	0.119	0.147	0.177	0.217	0.248
2.50	0.056	0.084	0.104	0.121	0.150	0.180	0.220	0.251
3.00	0.057	0.085	0.106	0.122	0.152	0.181	0.222	0.253
3.50	0.058	0.086	0.107	0.123	0.153	0.182	0.223	0.254
4.00	0.058	0.086	0.107	0.124	0.153	0.183	0.224	0.255
10.00	0.059	0.088	0.109	0.126	0.155	0.186	0.227	0.258
$\infty$	0.059	0.089	0.110	0.127	0.157	0.187	0.228	0.259
Case 2								
0.0	0.047	0.071	0.089	0.105	0.133	0.163	0.204	0.235
0.50	0.048	0.072	0.091	0.107	0.135	0.165	0.205	0.237
1.00	0.051	0.076	0.095	0.111	0.139	0.169	0.209	0.241
1.50	0.053	0.080	0.100	0.116	0.144	0.174	0.214	0.245
2.00	0.055	0.082	0.103	0.119	0.148	0.177	0.218	0.249
2.50	0.056	0.084	0.105	0.121	0.150	0.180	0.220	0.251
3.00	0.057	0.085	0.105	0.122	0.151	0.181	0.221	0.252
3.50	0.057	0.085	0.106	0.122	0.151	0.181	0.221	0.253
4.00	0.057	0.085	0.106	0.122	0.151	0.181	0.221	0.253
10.00	0.057	0.085	0.105	0.122	0.151	0.180	0.221	0.252
$\infty$	0.057	0.085	0.105	0.122	0.151	0.180	0.221	0.252
Case 3								
0.0	0.030	0.040	0.046	0.052	0.061	0.069	0.081	0.090
0.50	0.031	0.042	0.050	0.056	0.065	0.077	0.090	0.100
1.00	0.035	0.049	0.059	0.066	0.079	0.092	0.110	0.122
1.50	0.039	0.056	0.067	0.077	0.092	0.108	0.128	0.144
2.00	0.043	0.061	0.074	0.084	0.101	0.119	0.142	0.159
2.50	0.045	0.064	0.078	0.089	0.107	0.125	0.150	0.168
3.00	0.046	0.066	0.080	0.091	0.110	0.129	0.154	0.173
3.50	0.047	0.067	0.081	0.093	0.112	0.131	0.157	0.176
4.00	0.047	0.067	0.082	0.093	0.113	0.132	0.158	0.178
10.00	0.048	0.068	0.083	0.095	0.115	0.135	0.162	0.182
$\infty$	0.048	0.069	0.084	0.096	0.117	0.137	0.164	0.184

Taken from Lockhart and Stephens (1985c), with permission of the Biometrika Trustees.