



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

***“El problema isoperimétrico:
enfoques y soluciones”***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA :

RITA XOCHITL VÁZQUEZ PADILLA



DIRECTOR DE TESIS: DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

MÉXICO, D.F.

JUNIO, 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

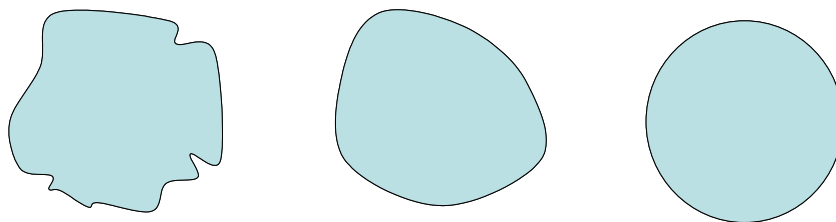
Índice

1	Introducción	1
2	Desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2	5
2.1	Planteamiento del problema	5
2.2	Prueba usando la desigualdad de Wirtinger	8
3	Desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^n	13
3.1	Prueba usando el área de Minkowski	14
3.2	Constantes isoperimétricas	20
3.3	Teorema de Federer-Fleming	23
3.4	Demostración de la DIC por M.Gromov	30
3.5	Demostración de Berger	34
3.6	DIC como problema de tipo Neumann	36
4	Desarrollos recientes	43
4.1	Curvatura constante	43
4.2	Curvatura no necesariamente constante	48

Capítulo 1

Introducción

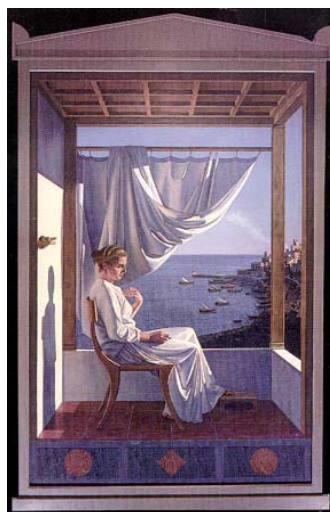
En este trabajo hemos estudiado una aproximación al problema isoperimétrico, tema que se investiga desde los comienzos de la matemática y que en la actualidad tiene aplicaciones en distintas áreas: geometría diferencial, geometría discreta y convexa, probabilidad, espacios de Banach, ecuaciones diferenciales parciales, entre otros. El problema isoperimétrico en su versión más simple (la del plano cartesiano) consiste en encontrar, de entre las curvas con perímetro fijo, aquella que encierra la mayor área.



Dominios con la misma área y distinto perímetro

Por su formulación en apariencia simple, no es de sorprender que éste sea uno de los problemas matemáticos más antiguos: en la Eneida, Virgilio relata la historia de la princesa Dido quien al escapar de su hermano, llega a la costa del actual Golfo de Túnez, que era gobernada por el rey Japon. Ella le ofrece todas las posesiones que lleva consigo a cambio de una porción de tierra sobre la costa, donde fundaría una nueva ciudad. El trato se cierra: el rey le cede toda la tierra que pueda encerrar con una piel de buey. Y la princesa, geómetra indiscutible, corta la piel en delgadísimas tiras que ata por sus extremos, y delimita con ellas un semicírculo usando la costa como

diámetro. El resultado es un terreno mucho más grande de lo que el rey hubiera imaginado: sobre esta tierra fué fundada la ciudad de Cartago.



Dido, reina de Cartago.

Con esta historia como fondo, traemos a la luz el problema matemático: casi de manera natural, la sospecha es que la solución al problema isoperimétrico sea el círculo. Esto se expresa de manera analítica a través de la desigualdad:

$$L^2 \geq 4\pi A, \quad (1.1)$$

donde L denota el perímetro de cualquier una curva que encierre un área A . La igualdad se da si y sólo si la curva es un círculo. Un hecho en apariencia simple, y sin embargo, su demostración requirió del desarrollo de muchos resultados en diversas áreas de la matemática: los griegos habían abordado el problema desde la geometría euclidiana, con pruebas "visuales", pero que ahora resultarían incompletas. Steiner, en 1841 publica la primera prueba basada únicamente en argumentos de geometría euclidiana, abordando el problema desde la siguiente perspectiva: mostrar que cualquier figura cuyo perímetro no sea un círculo puede ser transformada en una región con el mismo perímetro y mayor área. A pesar de su elegancia la prueba tenía algunas deficiencias. Entonces Wierstrass -quizá el matemático más fuerte de la época- desarrolló las matemáticas necesarias para formalizar las lagunas en la prueba de Steiner, y se le atribuye la primera demostración rigurosa de la desigualdad en \mathbb{R}^2 .

La desigualdad (1.1) es una formulación analítica del problema isoperimétrico y se le conoce como la **desigualdad isoperimétrica clásica**. Al generalizar a \mathbb{R}^n hay una natural analogía: de los abiertos acotados cuya frontera es una superficie suave de área fija, los que tienen el volumen máximo son las bolas. Los desarrollos recientes (a partir de los 60's) consideran el problema isoperimétrico en variedades riemannianas, usando distintas métricas y variando las hipótesis sobre la curvatura y las características de la frontera.

Una de las aproximaciones al estudio de la desigualdad es generar desigualdades "exactas", en el sentido de encontrar constantes c estrictamente positivas para las cuales $L^2 - 4\pi A > c > 0$, al introducir otros parámetros además de A y L (y sus correspondientes generalizaciones). De forma general, este planteamiento se conoce como la teoría de constantes isoperimétricas.

Es importante distinguir el estudio de la desigualdad isoperimétrica de la solución de los llamados problemas isoperimétricos, que son esencialmente, problemas variacionales sujetos a ciertas restricciones y de los cuales, el problema en cuestión es un caso particular que consiste en maximizar el funcional de área encerrada por una curva sujeta a la restricción de perímetro. Los argumentos del cálculo variacional son herramientas útiles para probar la desigualdad isoperimétrica y sus generalizaciones. Lo que es de notar es que la desigualdad se puede con herramientas de otras ramas de las matemáticas, y constituye en sí misma, una fuente importante de desarrollos teóricos.

Lo que haremos aquí es explorar la desigualdad isoperimétrica desde el punto de vista analítico: comenzamos con el caso de la prueba para curvas en \mathbb{R}^2 y luego veremos su generalización a abiertos en \mathbb{R}^n , analizando diferentes demostraciones que hacen patente la variedad de técnicas desde las cuales puede abordarse: la geometría diferencial, el análisis, y las ecuaciones diferenciales. El estudio de estas técnicas pretende ser un primer paso para abordar el problema en un contexto más general. Finalmente, haremos un breve recuento de algunos de los resultados recientes sobre el problema isoperimétrico en variedades riemannianas, clasificándolos de acuerdo a las hipótesis sobre la curvatura.

Consideramos que la aportación de este trabajo es ofrecer un primer panorama sobre el tema de la desigualdad isoperimétrica como una de las aproximaciones al problema isoperimétrico, que actualmente es tan extenso

y diversificado que puede resultar confuso para quien requiere una referencia rápida. Por otro lado, es un primer paso para desarrollar posteriormente un estudio más profundo de las desigualdades isoperimétricas en variedades generales.

Vale la pena mencionar que la teoría sobre el problema isoperimétrico tiene actualmente aplicaciones importantes en diversas áreas dentro y fuera de las matemáticas: geometría diferencial, geometría discreta y convexa, probabilidad, espacios de Banach, ecuaciones diferenciales parciales; en física matemática se encuentra el problema de superficies mínimas y existen importantes aplicaciones en la teoría de control.

Capítulo 2

Desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2

2.1 Planteamiento del problema

Para comenzar con un planteamiento simple del problema, tomemos un número positivo fijo v y pensemos en todos los dominios contenidos en el plano euclidiano con área v (en esta sección, un dominio será un abierto, conexo y acotado por una curva diferenciable).

¿Cuál de los abiertos de esta colección tiene el menor perímetro?

Cuando el área está fija, al dominio que minimiza el perímetro se le llama **dominio isoperimétrico**. Análogamente podemos plantear el problema fijando el perímetro: en este caso, una solución al problema será un dominio que haga máxima el área.

La formulación del problema isoperimétrico también puede hacerse de forma analítica. El caso del plano nos ayuda de nuevo a ilustrar la idea: dado que para el disco se tiene la igualdad

$$\frac{\text{Área}}{(\text{Perímetro})^2} = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$$

entonces

$$4\pi \cdot \text{Área} = (\text{Perímetro})^2.$$

Como mostraremos en la siguiente sección, cualquier otro dominio D con área A y acotado por una curva γ de longitud L deberá satisfacer la

desigualdad

$$L^2 \geq 4\pi A \Leftrightarrow \frac{L}{\sqrt{A}} \geq 2\sqrt{\pi}. \quad (2.1)$$

La desigualdad anterior permite formular el problema en forma analítica: cualquier dominio D satisface (2.1) y la igualdad se da si y sólo si D es un disco.

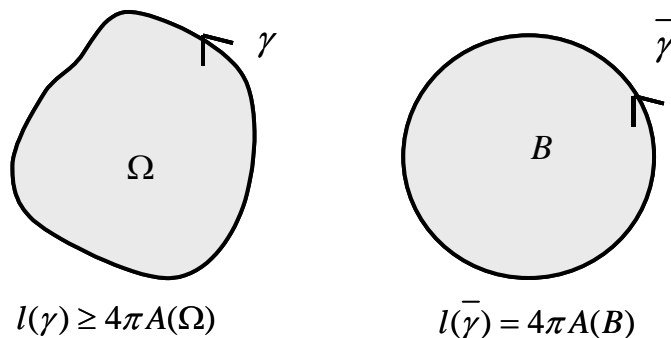


Fig.1. El dominio isoperimétrico en el plano.

Para el caso general (dimensión n) la desigualdad se plantea como:

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{S}^{n-1})}{V(\mathbb{B}^n)^{1-\frac{1}{n}}}, \quad (2.2)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio con frontera suave de volumen igual al de la bola unitaria de \mathbb{R}^n y donde A y V denotan $n-1$ y n medidas de Lebesgue, respectivamente. De nuevo, la idea es mostrar que para cualquier dominio Ω se satisface (2.2) y la igualdad se cumple si y sólo si $\Omega = \mathbb{B}^n$. A (2.2) se le conoce como **desigualdad isoperimétrica clásica (DIC)**.

Para abreviar denotaremos $c_{n-1} = A(\mathbb{S}^{n-1})$ y $\omega_n = V(\mathbb{B}^n)$, y a la constante $c_{n-1}\omega_n^{1/n-1}$ en (2.2) la llamaremos **constante isoperimétrica**. En el caso euclidiano, esta constante es exacta en el sentido de que caracteriza a los dominios isoperimétricos (bolas). Cuando la variedad cambia, el cálculo de constantes isoperimétricas se vuelve complicado y en algunos casos representan sólo cotas inferiores del cociente $A(\partial\Omega)V(\Omega)^{\frac{1}{n}-1}$.

Comenzaremos con una demostración de la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2 . Es de notar el uso de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética en esta demostración, que como veremos, será fundamental en las demostraciones del caso general que haremos en el capítulo 3.

Teorema 1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo y acotado con frontera suave por partes, denotemos A su área y L su perímetro. Entonces, $L^2 \geq 4\pi A$.

Demostración.

Podemos elegir un par de rectas paralelas L y L' fuera de Ω y aproximarlas a la frontera de Ω hasta llegar a un primer punto de tangencia (ó más de uno).

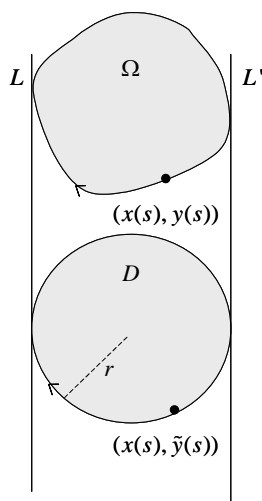


Fig.2. Construcción para la DIC en \mathbb{R}^2 .

Tomemos un disco $D(O, r)$ que no interseque a $\overline{\Omega}$ y que sea tangente a L y L' (ver la figura anterior). Si parametrizamos a $\partial\Omega$ por longitud de arco con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$, y a la frontera del círculo con $\tilde{\gamma}(t) = (x(s), \tilde{y}(s))$, (obsérvese que la abscisa es igual en ambas curvas) entonces por el Teorema de Stokes, $A(\Omega) = \int_0^L x(s)y'(s)ds$, en tanto que

$$A(D) = - \int_0^L \tilde{y}(s)x'(s)ds = \pi r^2,$$

luego

$$\begin{aligned} A(\Omega) + \pi r^2 &= \int_0^L (xy' - \tilde{y}x') ds = \int_0^L \langle (x, \tilde{y}), (y', -x') \rangle ds \\ &\leq \int_0^L \|(x, \tilde{y})\| \|(y', x')\| ds = \int_0^L r \|(y', x')\| ds = Lr, \end{aligned}$$

por lo tanto $A + \pi r^2 \leq Lr$, y aplicando la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\sqrt{\pi r} &\leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2} \\ \implies 4\pi A &\leq L^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En este caso, probar que la igualdad se da si y sólo si el dominio Ω es un círculo no se desprende directamente de lo que se hizo para probar la igualdad. Puede usarse por ejemplo, un argumento de simetrización (ver [4]). La siguiente demostración es diferente: veremos que los argumentos de la desigualdad son suficientes para caracterizar la igualdad.

2.2 Prueba usando la desigualdad de Wirtinger

Existen varias demostraciones de la desigualdad isoperimétrica en el plano a partir de otras desigualdades conocidas. Entre ellas, se encuentra la desigualdad de Wirtinger que básicamente, acota la norma L^2 de una función por la norma L^2 de su derivada. En un contexto más general, se le conoce también como la desigualdad de Poincaré.

Teorema 2 *Desigualdad de Wirtinger.*

Sea $f(\theta)$ una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ por tramos, de periodo 2π . Sea \bar{f} el valor promedio dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta.$$

Entonces,

$$\int_0^{2\pi} (f - \bar{f})^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta.$$

La igualdad se da si y sólo si

$$f(\theta) = \bar{f} + a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta,$$

para algunas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración.

La demostración hace uso de las series de Fourier: se expresa f como

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta\},$$

donde $a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta$, $b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} m\theta$. De aquí, $a_0 = 2\bar{f}$.

Dos resultados clásicos en el Análisis de Fourier son las desigualdades de Parseval y de Bessel, que en este caso llevan a las siguientes ecuaciones:

$$\int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2), \quad (2.3)$$

$$\int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta \geq \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2). \quad (2.4)$$

Restando, se puede acotar:

$$\int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta - \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 d\theta \geq \pi \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) (a_k^2 + b_k^2) \geq 0, \quad (2.5)$$

(en el segundo término se recorre un índice que no altera la desigualdad porque $k \geq 1$ y tenemos por tanto dos factores positivos).

Entonces,

$$\int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta \geq \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 d\theta.$$

Para la igualdad, se debe tener igualdad en (2.5), lo que lleva a $a_k = b_k = 0$ (pues $k \geq 2$), luego $f(\theta)$ toma la forma

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + a \cos \theta + b \sin \theta,$$

y como $\bar{f} = \frac{1}{2}a_0$, se concluye la prueba de la primera desigualdad. ■

Para establecer la desigualdad isoperimétrica, sea Ω un dominio en el plano cuya frontera es una curva simple γ , parametrizada por longitud de arco por $(x(s), y(s))$, donde x, y son funciones periódicas de periodo L y de clase C^1 por trozos, y tales que satisfacen

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Convertimos x, y a funciones de periodo 2π con el siguiente cambio de variable:

$$f(\theta) = x\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right), \quad g(\theta) = y\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right).$$

Derivando f y g respecto a θ y usando 2.6 podemos ver que:

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}, \quad (2.7)$$

y el cálculo del área de Ω se puede obtener aplicando el Teorema de Green a f y g mediante

$$2A(\Omega) = 2 \int_{\gamma} f dg = 2 \int_0^{2\pi} f(\theta) g'(\theta) d\theta.$$

Observemos que $\int_0^{2\pi} g'(\theta) d\theta = 0$ por ser g periódica. Entonces podemos reescribir

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) g'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f}) g'(\theta) d\theta.$$

Con algunos cálculos sencillos obtenemos

$$2A(\Omega) = \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 + (g'(\theta))^2 - (f - \bar{f} - g'(\theta))^2 d\theta,$$

el lado derecho se acota superiormente con $\int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 + (g'(\theta))^2 d\theta$, aplicando al primer término la desigualdad de Bessel y notando que el tercer término es menor o igual a cero. Finalmente,

$$2A(\Omega) \leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 + (g'(\theta))^2 d\theta = \frac{L^2}{2\pi}.$$

La igualdad se da si se tiene igualdad en la desigualdad de Wirtinger, y si el término $(f - \bar{f} - g')^2$ se anula. Esto es, si

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= f(\theta) - \bar{f}, \\ f(\theta) &= \bar{f} + a \cos \theta + b \sin \theta, \text{ para algunas } a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como $g'(\theta) = f(\theta) - \bar{f} = a \cos \theta + b \sin \theta$, se tendrá que $g(\theta) = a \sin \theta - b \cos \theta + k$, donde k es una constante tal que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \bar{g}$, luego $k = \bar{g}$, de modo que $g(\theta) = \bar{g} + a \sin \theta - b \cos \theta$.

Ahora,

$$\begin{aligned} (f(\theta) - \bar{f})^2 + (g(\theta) - \bar{g})^2 &= (a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (a \sin \theta - b \cos \theta)^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por otro lado, un cálculo parecido muestra que

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2 = a^2 + b^2 = \frac{L^2}{4\pi}, \tag{2.9}$$

y finalmente, igualando 2.8 y 2.9 tenemos

$$(f(\theta) - \bar{f})^2 + (g(\theta) - \bar{g})^2 = \frac{L^2}{4\pi},$$

luego $(f(\theta), g(\theta))$ describe un círculo de centro en (\bar{f}, \bar{g}) y radio $\frac{L}{2\pi}$. ■

Hemos analizado dos demostraciones de la desigualdad en el plano, ambas a partir de argumentos analíticos. Nos parece importante mencionar también los enfoques basados únicamente en geometría euclidiana: a partir de ellos se han desarrollado demostraciones que hacen uso de propiedades como la simetría o la convexidad y que dan pie, en algunos casos, a los resultados sobre el problema isoperimétrico en otro tipo de variedades. En el artículo de A. Siegel ([19]) por ejemplo, encontramos una prueba a partir de

argumentos de disección basada en las ideas que utilizó Steiner en 1841. El enfoque de Steiner consistió en caracterizar las regiones que no tienen área máxima para un perímetro dado. El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que las regiones isoperimétricas en el plano deban ser convexas: si se tiene una región F no convexa es posible incrementar su área sin modificar el perímetro, como en la figura siguiente.

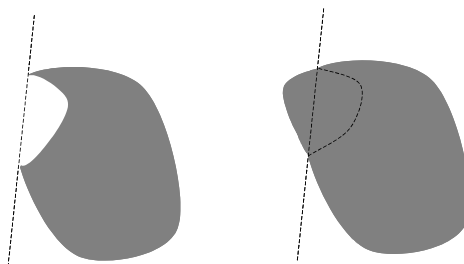


Fig.3. La región no convexa tiene menor área e igual perímetro.

Al reflejar la parte de la frontera que se ve como una depresión en la línea de soporte obtenemos una figura convexa, con el mismo perímetro y mayor área. Como se verá en el capítulo 3, esta idea se retoma para establecer un resultado en dimensión n (simetrización de Hsiang).

Capítulo 3

Desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^n

En este capítulo analizaremos algunas pruebas de la desigualdad isoperimétrica clásica (DIC) en espacios euclidianos. En todas se usa la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^n x_i, \text{ para } x_i \geq 0,$$

aunque en distintos contextos: teoría geométrica de la medida (usando el área de Minkowski, por ejemplo) y ecuaciones diferenciales parciales (como problema tipo Neumann).

Establezcamos primero la notación.

A partir de ahora, llamaremos **dominio** a un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y simplemente conexo, con cerradura compacta y tal que su frontera $\partial\Omega$ sea una subvariedad (de dimensión $n - 1$) de clase C^1 . Denotaremos con A una $(n - 1)$ medida y V una n medida sobre \mathbb{R}^n (las medidas de Lebesgue usuales), y representaremos con $A(\partial\Omega)$ al **área** de la frontera de Ω , y con $V(\Omega)$ al **volumen** de Ω . En particular, si $\Omega = \mathbb{B}^n$, denotamos $V(\mathbb{B}^n) = \omega_n$ y $A(\partial\mathbb{B}^n) = A(\mathbb{S}^{n-1}) = c_n$.

Teorema 3 (*Desigualdad isoperimétrica clásica*) *Para todo dominio Ω tal que $V(\Omega) = \omega_n$ se cumple*

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{c_{n-1}}{\omega_n^{1-\frac{1}{n}}}. \quad (3.1)$$

En lo que sigue requeriremos un cálculo explícito de $\omega_n = V(\mathbb{B}^n)$. Si $d\mu_{n-1}$ denota la medida riemanniana de \mathbb{S}^{n-1} , con la notación anterior, representamos $A(\partial\mathbb{B}^n) = A(\mathbb{S}^{n-1})$ mediante:

$$A(\mathbb{S}^{n-1}) := c_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\mu_{n-1}.$$

El siguiente lema puede encontrarse en los textos estándar de análisis, por ejemplo [3].

Lema 4 *El volumen de \mathbb{B}^{n+1} es igual a $\omega_{n+1} = \frac{1}{n+1}c_n$.*

Observación 5 *A partir de ahora denotaremos para una función $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la norma L^p de f mediante:*

$$\|f\|_p = \left\{ \int_M |f|^p dV \right\}^{1/p}.$$

Para un campo vectorial X sobre M , también escribiremos

$$\|X\|_p = \left\{ \int_M |X|^p dV \right\}^{1/p}, \text{ donde } |X| = \|X(x)\|.$$

También nos referiremos al:

Teorema 6 (Gauss) *Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ una 3-subvariedad compacta con frontera $S = \partial R$. Demos a S la orientación normal exterior y denotemos \vec{N} el campo normal exterior unitario a lo largo de S . Para \vec{F} un campo de clase C^∞ en una vecindad de R se tiene $\int_M \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int_{\partial M} \langle \vec{F} |_{S}, \vec{N} \rangle dA$.*

3.1 Prueba usando el área de Minkowski

En subvariedades de \mathbb{R}^n el problema isoperimétrico para conjuntos compactos arbitrarios puede tener distintos tratamientos de acuerdo a las características de la frontera ([1, Capítulo 3]).

1. Si ∂K es vista como subconjunto de \mathbb{R}^n , independientemente del compacto K , podemos utilizar la $n - 1$ medida riemanniana de una hipersuperficie C^1 de \mathbb{R}^n . La definición enfatiza a ∂K y no a K .

2. Podemos definir un funcional ∂K en el conjunto de compactos de \mathbb{R}^n , que asigna a cada compacto un número, el área de ∂K . Aquí la definición enfatiza a K . En este caso están por ejemplo, el área de Minkowski (que definimos más adelante) y el perímetro.

En esta demostración usamos el área de Minkowski. Cabe decir que esta forma de definir el área de la frontera resulta además una buena herramienta para desarrollar argumentos de simetrización, como la simetrización de Steiner (ver [1, sección 3.3]). Para establecer la DIC usaremos la desigualdad de Minkowski para cuerpos convexos (compactos, convexos con interior no vacío). En adelante, medible se referirá a Lebesgue medible, con la medida V_n en \mathbb{R}^n .

Para $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, definimos la región

$$[K]_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq h\}.$$

Notemos que para $n = 1$ y $K = \{x\}$, el volumen de $[K]_h$ es $V([K]_h) = 2h$.

Definición 7 Con la notación anterior definimos el área de Minkowski de K como el límite

$$\text{Mink}(K) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{V([K]_h) - V(K)}{h}, \text{ cuando éste exista.}$$

En el ejemplo para $n = 1$, aún cuando $V(\{x\}) = 0$, el área de Minkowski es igual a 2. En general, si K es la unión finita de intervalos ajenos,

$$\text{Mink}(K) = 2 + 2(\text{card}\{\text{componentes de } \mathbb{R} \setminus K\} - 2).$$

Observación 8 Si K es un compacto con $\partial K \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\text{Mink}(K) = A(\partial K) = \int_{\partial K} dA. \quad (3.2)$$

Para probar la DIC, primero establecemos una consecuencia de la desigualdad media geométrica-media aritmética para conjuntos medibles que se conoce como el Teorema de Brunn-Minkowski.

La desigualdad de Brunn-Minkowski tiene versiones en diversos espacios (esferas, espacio hiperbólico). Para el espacio euclidiano, uno de los planteamientos usuales es el siguiente:

Teorema 9 Si X, Y son subconjuntos de \mathbb{R}^n convexos y medibles, entonces

$$V(X + Y)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n}.$$

Demostración.

Supongamos primero que $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $X = \prod_{j=1}^n A_j$ donde $A_j \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de longitud α_j ; al conjunto X le llamaremos "caja". Análogamente, sea $Y = \prod_{j=1}^n B_j$ otra caja, con B_j intervalo de longitud β_j para cada j y de modo que $X \cap Y = \emptyset$. Entonces, $V(X) = \prod_{j=1}^n \alpha_j$, y $V(Y) = \prod_{j=1}^n \beta_j$.

Definamos ahora la suma $X + Y$ del siguiente modo: traslademos Y a modo de hacer coincidir un vértice con el origen, es decir, bajo la traslación $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ donde y_i es el extremo izquierdo del intervalo B_i , renombramos a este conjunto con \tilde{Y} .

Definamos $X + Y = \{x + \tilde{y} : x \in X, \tilde{y} \in \tilde{Y}\}$. Geométricamente lo que estamos haciendo es pegarle a X una semifranja que se obtiene recorriendo Y sobre la frontera de X .

Podemos dar un ejemplo muy sencillo de la desigualdad en el plano y que ilustra la construcción del conjunto $X + Y$. Digamos que X representa el cuadrado de lado L con centro en el origen y Y es la bola de radio ϵ centrada en O . Entonces $X + Y$ se obtiene haciendo recorrer al centro de la bola, por la frontera de X :

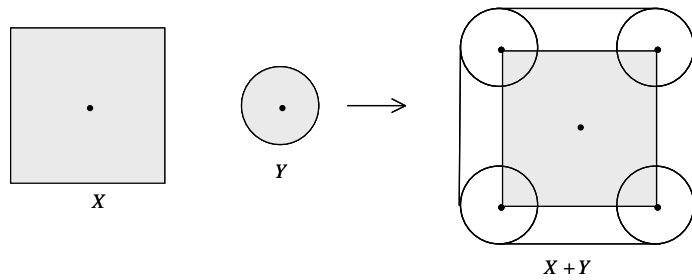


Fig.4. Suma vectorial de dos conjuntos.

Como

$$\begin{aligned}
 V(X + Y) &= V(x) + V(Y) + 4L\epsilon \\
 &\geq V(x) + V(Y) + 2\sqrt{\pi}L\epsilon \\
 &= V(X) + 2\sqrt{V(X)V(Y)} + V(Y) \\
 &= \left(\sqrt{V(X)} + \sqrt{V(Y)}\right)^2,
 \end{aligned}$$

entonces

$$V(X + Y)^{1/2} \geq V(X)^{1/2} + V(Y)^{1/2}.$$

Regresemos al caso general. Se quiere ver que

$$V(X + Y) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j).$$

Esto es cierto porque si x_j denota la proyección de \mathbb{R}^n en la recta $\{x_i = 0\}$ para $i \neq j$, entonces $x_j(X + Y) = A_j + B_j$, luego $V(x_j(X + Y)) = \alpha_j + \beta_j$ por ser X y Y conjuntos ajenos, y finalmente, $V(X + Y) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)$.

Para demostrar la desigualdad del teorema aplicamos la desigualdad media geométrica al producto $\prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}$:

$$\left(\prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}.$$

Haciendo lo mismo con el producto $\prod_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}$ y sumando ambas desigualdades, tenemos:

$$\left(\prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}\right)^{1/n} + \left(\prod_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} + \frac{\beta_j}{\alpha_j + \beta_j} = 1,$$

luego

$$\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j\right)^{1/n} + \left(\prod_{j=1}^n \beta_j\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)\right)^{1/n},$$

de donde $V(X)^{1/n} + V(Y)^{1/n} \leq V(X + Y)^{1/n}$.

Si en vez de cajas cada conjunto es la unión de un número finito de cajas, podemos proceder por inducción. Supongamos que tanto X como Y

son cada uno, la unión de un número finito de cajas que no se intersecan (excepto quizás en la frontera) y de forma que en total, suman $k - 1$ cajas, y supongamos que la desigualdad es válida en este caso.

Si ahora $X \cup Y$ está formado por k cajas, con $k \geq 2$, entonces alguno de los dos (digamos X) está formado por 2 o más cajas. Entonces, podemos separar a \mathbb{R}^n con un hiperplano P de modo que $\mathbb{R}^n = H^+ \cup H^-$ sea la unión de dos subespacios cerrados y tales que cada caja queda completamente contenida en H^+ ó en H^- asegurando que ambos contienen al menos una caja.

Ahora traslademos Y de forma que P divida a Y en la unión $Y = Y^+ \cup Y^-$ y de forma tal que las razones $V(X^+)/V(X)$ y $V(Y^+)/V(Y)$ sean iguales. En este caso, se tiene

$$V(X^-)/V(X) = V(Y^-)/V(Y).$$

Lo que necesitamos ahora es aplicar la hipótesis de inducción a los conjuntos $X^+ \cup Y^+$, y $X^- \cup Y^-$. Esto es posible porque X^+ tiene menos de n cajas (el número de cajas de X) y Y^+ tiene menos de $k - 1 - n$ cajas, luego la unión tiene menos de $k - 1$ cajas.

Entonces, como la desigualdad se cumple para $X^+ \cup Y^+$ y $X^- \cup Y^-$ tenemos:

$$\begin{aligned} V(X + Y) &\geq V(X^+ + Y^+) + V(X^- + Y^-) \\ &\geq \left\{ V(X^+)^{\frac{1}{n}} + V(Y^+)^{\frac{1}{n}} \right\}^n + \left\{ V(X^-)^{\frac{1}{n}} + V(Y^-)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\ &= V(X^+) \left\{ 1 + \left(\frac{V(Y)}{V(X)} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n + V(X^-) \left\{ 1 + \left(\frac{V(Y)}{V(X)} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\ &= \frac{V(X^+) + V(X^-)}{V(X)} \left\{ V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}} \right\}^n \\ &= \left\{ V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}} \right\}^n. \end{aligned}$$

■

La idea para conjuntos medibles arbitrarios es aproximar a cada uno mediante uniones de cajas que no se traslapen.

Una nota final sobre la desigualdad de Brunn-Minkowski: una forma más general es

$$V((1 - \lambda)X + \lambda Y)^{1/n} \geq (1 - \lambda)V(X)^{1/n} + \lambda V(Y)^{1/n},$$

donde X, Y son cuerpos convexos en \mathbb{R}^n y $0 < \lambda < 1$.

Se sabe que la desigualdad anterior fué descubierta por Brunn en 1887. Minkowski notó un error en la prueba, que luego fué corregido por Brunn. Finalmente, ambos establecieron que la igualdad se da si y sólo si K y L son homotéticos (iguales bajo traslaciones y dilataciones). La prueba se puede encontrar en el trabajo de Osserman [15]. En [14], Gardner enfatiza la importancia de esta desigualdad y hace un mapa de las asombrosas relaciones que existen entre ella y diversas aplicaciones de la matemática y la física.

El resultado principal de esta sección está en el siguiente corolario: la clave es relacionar el volumen de una franja alrededor de la frontera de X de radio ϵ con $\epsilon\omega_n$.

Corolario 10 (DIC usando el área de Minkowski) Sea X medible. Entonces

- i) $V([X]_\epsilon)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + \epsilon\omega_n^{1/n}$,
- ii) $Mink(X) \geq n\omega_n^{1/n}V(X)^{1-1/n} = \frac{A(\mathbb{S}^{n-1})}{V(\mathbb{B}^n)^{1-1/n}}V(X)^{1-1/n}$.

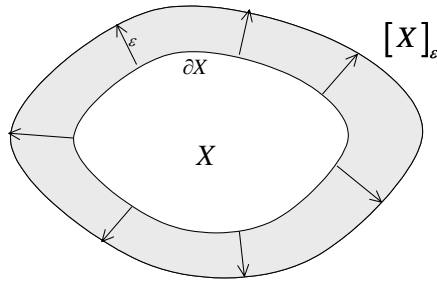


Fig.5. El conjunto $[X]_\epsilon$

Demostración.

Por el teorema 9 se cumple:

$$\begin{aligned} V([X]_\epsilon)^{1/n} &= V(X + \epsilon\mathbb{B}^n)^{1/n} \geq V(X)^{1/n} + V(\epsilon\mathbb{B}^n)^{1/n} \\ &= V(X)^{1/n} + \epsilon\omega_n^{1/n}, \end{aligned}$$

por lo tanto, $V([X]_\epsilon) \geq \left(V(X)^{1/n} + \epsilon\omega_n^{1/n}\right)^n$.

Para probar ii) observemos los primeros dos términos en el desarrollo del siguiente binomio:

$$\left(V(X)^{1/n} + \epsilon\omega_n^{1/n}\right)^n = V(X) + n \left(V(X)^{1/n}\right)^{n-1} \epsilon\omega_n^{1/n} + h(\epsilon, V(X), \omega_n),$$

donde h representa una suma de términos que contienen cada uno un factor ϵ^j , $j \geq 2$, entonces:

$$V([X]_\epsilon) - V(X) \geq n \left(V(X)^{1/n} \right)^{n-1} \epsilon \omega_n^{1/n} + h(\epsilon, V(X), \omega_n).$$

Al tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$Mink(X) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V([X]_\epsilon) - V(X)}{\epsilon} \geq nV(X)^{\frac{n-1}{n}} \omega_n^{1/n}.$$

Si X es un compacto con frontera suave entonces por 3.2 la desigualdad se convierte en:

$$\frac{A(\partial X)}{V(X)^{1-1/n}} \geq n\omega_n^{1/n}.$$

El lado derecho es igual a

$$n\omega_n^{1/n} = \frac{n\omega_n}{\omega_n^{1-1/n}} = \frac{nV(\mathbb{B}^n)}{\omega_n^{1-1/n}},$$

y por el lema 4,

$$\frac{nV(\mathbb{B}^n)}{\omega_n^{1-1/n}} = \frac{A(\partial \mathbb{B}^n)}{\omega_n^{1-1/n}} = \frac{A(\mathbb{S}^{n-1})}{V(\mathbb{B}^n)^{1-1/n}},$$

de donde se concluye la desigualdad. ■

3.2 Constantes isoperimétricas

Al considerar los cocientes $\frac{A(\partial \Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}}$ sobre los dominios Ω del mismo volumen, el problema isoperimétrico consiste en encontrar el ínfimo de estos cocientes; si éste existe, al número $\inf_{\Omega} \frac{A(\partial \Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}}$ le llamamos **constante isoperimétrica** para $V(\Omega)$. Como hemos visto en el caso de \mathbb{R}^n la constante isoperimétrica es igual a $\frac{c_{n-1}}{\omega_n^{1-\frac{1}{n}}}$ cuando Ω es un abierto de volumen ω_n . y frontera de clase C^1 . En variedades generales el cálculo de constantes isoperimétricas se complica y en muchos casos, lo que se tiene son aproximaciones de estas constantes. En esta sección definiremos una constante equivalente (la constante de Sobolev) que permite establecer la desigualdad isoperimétrica en términos de expresiones integrales.

Definición 11 Sea M^n una subvariedad de \mathbb{R}^n y $\Omega \subset M^n$ un dominio (abierto, conexo) con cerradura compacta y frontera de clase C^1 .

La n -**constante isoperimétrica** de M se define como

$$I_n(M) = \inf_{\Omega} \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}}$$

Observación 12 Si M es compacta entonces $I_n(M) = 0$.

Lo anterior es claro al tomar Ω igual al complemento en M de una bola cerrada de radio pequeño, para la cual $A(\partial\Omega) \rightarrow 0$ (en este caso, $M \setminus \Omega$ es abierto, conexo y con cerradura compacta); se tiene $V(\Omega) \rightarrow V(M)$, luego $I_n(M)$ tiende a cero.

Definición 13 La **constante de Cheeger** es

$$I(M) = \inf_{\Omega} \left\{ \frac{\text{Area}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(\Omega)} \right\}$$

El primer resultado importante de esta sección muestra que la constante isoperimétrica no cambia si extendemos la definición al conjunto de abiertos que son la unión finita de componentes conexas. Esto se establece en el siguiente:

Teorema 14 Para $\Omega \subset M^n$ tal que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$ donde cada Ω_i es un dominio con frontera suave tenemos:

$$V(\Omega)^{1-1/n} I_n(M) \leq A(\Omega). \quad (3.3)$$

Demostración.

Supongamos que $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ es la unión de n componentes conexas, con $\Gamma_j = \partial\Omega_j$. Para $k = 1$, Ω es conexo y no hay nada que probar. Supongamos que la desigualdad (3.3) se cumple para $k \leq k_0$ y veamos que es cierto para $k_0 + 1$ componentes. Sea $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{k_0+1} \Gamma_j$. Si Ω es conexo la desigualdad es cierta. Si no, partimos en $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y renumeramos de modo que $\partial\Omega_1 = \bigcup_{j=1}^l \Gamma_j$, $\partial\Omega_2 = \bigcup_{j=l+1}^{k_0+1} \Gamma_j$. Entonces

$$A(\partial\Omega) = A(\partial\Omega_1) + A(\partial\Omega_2) \quad (3.4)$$

$$\geq I_n(M) \left\{ V(\Omega_1)^{1-1/n} + V(\Omega_2)^{1-1/n} \right\} \quad (3.5)$$

$$\geq I_n(M) \{V(\Omega_1) + V(\Omega_2)\}^{1-1/n} \quad (3.6)$$

$$= I_n(M) V(\Omega)^{1-1/n}. \quad (3.7)$$

luego $A(\partial\Omega) \geq I_n(M)V(\Omega)^{1-1/n}$. Obtuvimos la desigualdad (3.6) aplicando la desigualdad de Minkowski. ■

Así, el teorema nos permite considerar de aquí en adelante que Ω es conexo.

Para cerrar esta sección, observaremos que la desigualdad estricta en

$$A(\partial\Omega) \geq I_n(M)V(\Omega)^{n/(n-1)}$$

es cierta para dominios "con hoyos" (dominios múltiplemente conexos). Para ello, consideremos en la figura a $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ donde $\Omega_i \subset M$ es un dominio simplemente conexo y con frontera suave.

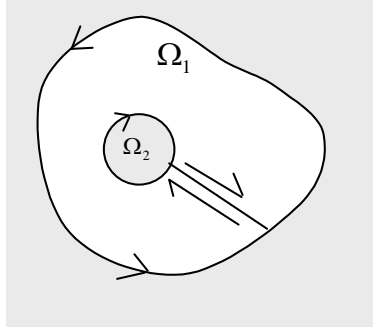


Fig.6. Extensión a dominios múltiplemente conexo.

Entonces,

$$A(\partial\Omega) = A(\partial\Omega_1) + A(\partial\Omega_2)$$

Por hipótesis, para cada i ,

$$A(\partial\Omega_i) \geq I_n(M)V(\Omega_i)^{n/(n-1)},$$

luego:

$$\begin{aligned} A(\partial\Omega) &\geq I_n(M)(V(\Omega_1)^{n/(n-1)} + V(\Omega_2)^{n/(n-1)}) \\ &\geq I_n(M)V(\Omega_1)^{n/(n-1)} \\ &\geq I_n(M)(V(\Omega_1)^{n/(n-1)} - V(\Omega_2)^{n/(n-1)}) \\ &= I_n(M)V(\Omega)^{n/(n-1)}, \end{aligned}$$

con lo que se prueba la desigualdad para $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$.

El argumento anterior se extiende fácilmente si Ω es de la forma $\Omega = \Omega_1 \setminus (\Omega_2 \cup \Omega_2 \cdots \Omega_k)$, i.e., un dominio con k hoyos.

3.3 Teorema de Federer-Fleming

H. Federer y W. Fleming fueron dos de los fundadores de la teoría geométrica de la medida, una rama relativamente reciente de las matemáticas y que extiende la geometría diferencial para trabajar con aplicaciones que no son necesariamente suaves.

Esta teoría ha sido fundamental para resolver problemas relacionados con superficies mínimas, entre los que se encuentra el problema de la burbuja doble que fue demostrado en el año 2000, por Hutchings, Morgan, Ritoré y Ros. Ver ([20]).

En esta sección veremos una demostración de la desigualdad isoperimétrica clásica basada en una versión débil del teorema de Federer-Fleming. En el teorema se define una constante de Sobolev y se establece la igualdad entre esta y la constante isoperimétrica. Será necesario usar la fórmula de coarea, para funciones suaves en abiertos de \mathbb{R}^n . La fórmula de coarea general de la teoría geométrica de la medida se discute en el texto de Federer ([18]) o bien, en ([20]).

Para $n > 1$, la n -constante de Sobolev de \mathbb{R}^n es

$$S_n = \inf_f \left\{ \frac{\|\text{grad } f\|_1}{\|f\|_{\frac{n}{n-1}}} \right\}$$

donde $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (la familia de funciones en M , de clase C^∞ y con soporte compacto).

El siguiente teorema establece la relación entre la constante isoperimétrica y la de Sobolev. En adelante, I_n denota la constante isoperimétrica de \mathbb{R}^n .

Teorema 15 (*Federer-Fleming*) Para $n > 1$, se tiene $I_n = S_n$.

Para la demostración usaremos dos resultados: una versión del Teorema de Cavalieri y de la fórmula de coarea en \mathbb{R}^n . En la demostración de ésta última usaremos el siguiente resultado:

Observación 16 Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $|\text{grad } |\phi|| = \text{grad } |\phi|$ salvo en un conjunto de medida cero.

Para justificar lo anterior podemos analizar los siguientes casos: primero, en el abierto $\{\phi > 0\}$ tenemos $|\phi| = \phi$, y en el abierto $\{\phi < 0\}$ tenemos $|\phi| = -\phi$ y también se cumple. En el segundo caso, $\{\phi = 0\} \cap \{\text{grad } \phi \neq 0\}$ es una $n - 1$ subvariedad de M , luego el conjunto tiene volumen igual a cero- y podemos obviar estos puntos. Finalmente, consideremos el conjunto $\{\phi = 0\} \cap \{\text{grad } \phi = 0\}$. Para $\epsilon > 0$ consideremos $\phi_\epsilon = \sqrt{\phi^2 + \epsilon^2}$. Entonces $\phi_\epsilon \rightarrow |\phi|$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ mientras que $\text{grad } \phi_\epsilon \rightarrow \pm \text{grad } \phi$. Cuando $\phi = 0$ entonces $\text{grad } \phi_\epsilon = 0$, luego $\text{grad } \phi_\epsilon \rightarrow \text{grad } \phi$ cuando $\phi = 0, \text{grad } \phi = 0$. Integrando por partes vemos que ϕ_ϵ converge a la derivada débil de $|\phi|$, que es $\text{grad } |\phi|$ (ver [9]).

Dada $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación suave, decimos que el punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de ϕ si la derivada de ϕ (vista como transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m) tiene rango menor a m . Si p es un punto crítico de ϕ , entonces decimos que $\phi(p)$ es un valor crítico. Un valor que no es crítico, es un valor regular. En funciones $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, un valor crítico es un punto en la imagen del conjunto $\{p \in \overline{\Omega} : df(p) = 0\}$.

Teorema 17 (Fórmula de Coarea) Sea $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ con $f|_{\partial\Omega} = 0$. Para cualquier valor regular t de $|f|$, sea $\Gamma(t) = |f|^{-1}[t]$, $A(t) = A(\Gamma(t))$, donde A denota la $n - 1$ medida riemanniana en $\Gamma(t)$. Entonces,

$$dV|_{\Gamma(t)} = \frac{dA_t dt}{|\text{grad } f|}$$

Demostración.

Por el Teorema de Sard [13] el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero. Denotemos R_f el conjunto de valores regulares de f . Tenemos que R_f es abierto en \mathbb{R} y que para cada $t \in R_f$ el conjunto $f^{-1}[t] \cap \Omega$ es una $(n - 1)$ subvariedad compacta de M . Tomemos $(a, b) \subset R_f$ y $c \in (a, b)$. Sea ϕ_{t-c} el flujo determinado por el campo $\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|^2}$ restringido a $f^{-1}[(a, b)]$. Entonces, $\Phi(p, t) = \phi_{t-c}(p)$ define un difeomorfismo entre $f^{-1}[c] \times (a, b)$ y $f^{-1}(a, b)$. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\Phi(p, t)) &= \text{grad } f|_{\phi_{t-c}(p)} \cdot \frac{d}{dt}(\phi_{t-c}(p)) \\ &= \text{grad } f \cdot \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|^2} \Big|_{\phi_{t-c}(p)} = 1 \end{aligned}$$

se tiene: $f(\Phi(p, t)) = t + cte$ pero como $\Phi(p, c) = c$, entonces $f(\Phi(p, t)) = t$ para todo $(p, t) \in f^{-1}(c) \times (a, b)$. Aún más,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| = \left| \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|^2} \right| = \frac{1}{|\text{grad } f|}$$

entonces $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ es paralelo a $\text{grad } f$ y como $\Gamma(t) = f^{-1}[t]$ es una superficie de nivel de f entonces $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ es ortogonal a $\Gamma(t)$.

Como $\Phi(p, t)$ es un difeomorfismo, podemos tomar coordenadas locales (p, t) en $f^{-1}(a, b)$, para $p \in \Gamma(t)$. Por la relación de ortogonalidad anterior, la matriz de la métrica es:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \text{métrica en } \Gamma(t) & * \\ 0 & \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|^2 \end{pmatrix}$$

entonces, la forma de volumen dV está definida localmente por

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dt \\ &= \left| \frac{1}{\text{grad } f} \right| dA_t \wedge dt \end{aligned}$$

es decir,

$$dV = \frac{dA_t \wedge dt}{|\text{grad } f|}$$

con lo que queda demostrado el teorema 17. ■

Corolario 18 *La fórmula de coarea implica:*

$$\int_M |\text{grad } f| dV = \int_0^\infty A(t) dt. \quad (3.8)$$

Para la demostración del teorema de Federer-Fleming usaremos el siguiente resultado de teoría de la medida:

Teorema 19 (Principio de Cavalieri) *Sean f una función no negativa y medible, ν una medida sobre $[0, \infty)$, $\phi(t) = \nu([0, t]) < +\infty$ la integral indefinida asociada a ν y μ una medida sobre Ω . Entonces*

$$\int_\Omega \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) d\nu(t)$$

En particular para $d\nu(t) = pt^{p-1}dt$, $p > 0$ tenemos:

$$\int_{\Omega} f^p d\mu = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \int_{\Omega} \mathcal{I}_{\{f>t\}} d\mu dt \quad (3.9)$$

donde $\mathcal{I}_{\{f>t\}}$ denota la función indicadora en $\{x \in \bar{\Omega} : f(x) > t\}$.

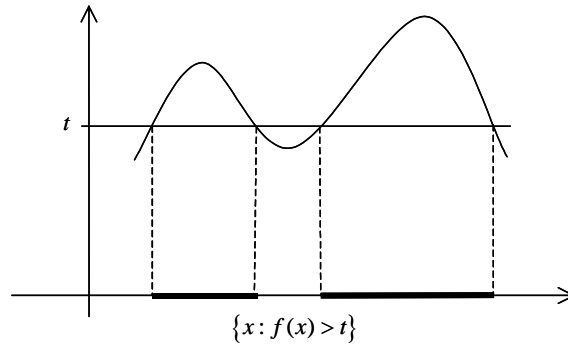


Fig.7. El principio de Cavalieri.

Con la notación anterior podemos escribir

$$V(t) = \int_{\Omega} \mathcal{I}_{\{f>t\}} d\mu$$

Demostración de 15.

Primero probaremos la desigualdad $I_n \geq S_n$, utilizando una función de Lipschitz. Para $\epsilon > 0$ pequeño, construiremos una función $f_{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$f_{\epsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 1 - \frac{1}{\epsilon}d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in M \setminus \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus \Omega, \quad d(x, \partial\Omega) > \epsilon \end{cases}$$

f_{ϵ} es una función de Lipschitz y mediante un argumento de análisis se puede ver que si bien $f_{\epsilon} \notin C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ existe una familia de funciones $\phi_{\epsilon,j} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|\phi_{\epsilon,j} - f_{\epsilon}\|_{\frac{n}{n-1}} \rightarrow 0, y \|\text{grad } \phi_{\epsilon,j} - \text{grad } f_{\epsilon}\|_1 \rightarrow 0,$$

Entonces podemos escribir:

$$S_n \leq \frac{\|\text{grad } f_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_{\frac{n}{n-1}}}$$

En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, f_ϵ es la función indicadora en Ω . Por tanto, $V(\Omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M |f_\epsilon| dV$ dado que $V(\Omega) = \int_\Omega dV$. Por otro lado,

$$|\text{grad } f_\epsilon| = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{si } x \in M \setminus \overline{\Omega}, d(x, \partial\Omega) < \epsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.10)$$

Para mostrarlo tomamos γ una geodésica con $\gamma(0) = x$, $\gamma(t_0) \in \partial\Omega$ y γ parametrizada por longitud de arco. Entonces $d(\gamma(t), \partial\Omega) = |t - t_0|$, y

$$\begin{aligned} (\text{grad } f_\epsilon)(x) &= \frac{d}{dt}(f_\epsilon \circ \gamma) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{1}{\epsilon}|t - t_0|\right) = -\frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

de donde $|\text{grad } f_\epsilon| = \frac{1}{\epsilon}$ en el caso que se pide.

Con lo anterior podemos caracterizar el área de $\partial\Omega$ usando f_ϵ :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M |\text{grad } f_\epsilon| dV &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} V\{x \notin \Omega : d(x, \partial\Omega) < \epsilon\} \\ &= A(\partial\Omega) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_M \|f_\epsilon\|_{\frac{n}{n-1}} dV &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_M |f_\epsilon|^{\frac{n}{n-1}} dV \right\}^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left\{ \int_\Omega dV \right\}^{\frac{n-1}{n}} = V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_M |\text{grad } f_\epsilon| dV}{\int_M \|f_\epsilon\|_{\frac{n}{n-1}} dV} = \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\text{grad } f_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_{\frac{n}{n-1}}},$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} \inf_{f \in C_C^\infty(M)} \left\{ \frac{\|\text{grad } f\|_1}{\|f\|_{\frac{n}{n-1}}} \right\} &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\text{grad } f_\epsilon\|_1}{\|f_\epsilon\|_{\frac{n}{n-1}}} = \\ &= \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \implies S_n \leq \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Para probar $I_n \leq S_n$ mostraremos que:

$$\int_M |\text{grad } f| dV \geq I_n(M) \left\{ \int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} dV \right\}^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{para toda } f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.11)$$

Si en (3.9) hacemos $p = \frac{n}{n-1}$, $f = |f|$ y $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n}{n-1}} d\mu &= \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}_{\{|f|>t\}} d\mu dt \\ &= \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Denotemos $\Omega(t) = \{x : |f|(x) > t\}$ y sea $V(t) = V(\Omega(t))$ su volumen. Primero observemos que $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$, así que $\frac{A(\Gamma(t))}{V(t)^{1-\frac{1}{n}}} \geq I_n$. Entonces también es cierto que

$$\int_0^\infty A(t) dt := \int_0^\infty A(\Gamma(t)) dt \geq I_n \int_0^\infty V(t)^{1-\frac{1}{n}} dt \quad (3.13)$$

Usando la fórmula de coarea (3.8) podemos reescribir la desigualdad que queremos probar (3.11) como:

$$\int_M |\text{grad } f| dV = \int_0^\infty A(t) dt \geq I_n \left\{ \int_M |f|^{\frac{n}{n-1}} dV \right\}^{\frac{n-1}{n}}$$

Usando el principio de Cavalieri 3.12, podemos escribir la desigualdad anterior como

$$\int_0^\infty A(t) dt \geq I_n \left\{ \frac{n}{n-1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt \right\}^{\frac{n-1}{n}}, \quad (3.14)$$

dado 3.13, y luego de hacer algunas simplificaciones sencillas, sólo nos resta probar que:

$$\int_0^{\infty} V(t)^{1-1/n} dt \geq \left(\frac{n}{n-1} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Para ello, sean $F(s) = \int_0^s V(t)^{1-1/n} dt$, y $G(s) = \frac{n}{n-1} \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt$. Como F y G coinciden para $t = 0$, si probamos que $F'(s) \geq G'(s)$ para toda $s > 0$, terminamos. El siguiente cálculo es resultado de derivar G , simplificar y usar el hecho general de que $\frac{d}{ds} \int_0^s \phi(t) dt = \phi(s)$:

$$G'(s) = \left(\frac{n}{n-1} \right)^{-1/n} s^{\frac{1}{n-1}} V(s) \left(\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt \right)^{-1/n}. \quad (3.15)$$

Por otro lado, $F'(s) = V(s)^{1-1/n}$. Además, si $t \leq t'$ entonces $\Omega(t') \subset \Omega(t) \Rightarrow V(t) \geq V(t')$, y V es decreciente. Esto implica, para $t \in [0, s]$:

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{n-1}} V(t) &\geq t^{\frac{1}{n-1}} V(s) \Leftrightarrow \\ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt &\geq \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(s) dt = V(s) \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} dt \Leftrightarrow \\ \left(\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt \right)^{-1/n} &\leq \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} dt \right\}^{-1/n} V(s)^{-1/n}. \end{aligned}$$

lo anterior justifica la siguiente desigualdad:

$$V(s) \left(\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} V(t) dt \right)^{-1/n} \leq \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} dt \right\}^{-1/n} V(s)^{1-1/n},$$

entonces, de (3.15)

$$\begin{aligned} G'(s) &\leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^{-1/n} s^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} dt \right)^{-1/n} V(s)^{1-1/n} \\ &= V(s)^{1-1/n} = F'(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Conviene mencionar que pueden definirse otras constantes de Sobolev en las cuales la desigualdad que mostraremos es estricta. Por ejemplo, en [17] se establece una desigualdad isoperimétrica usando la desigualdad de Sobolev de tipo L^2 dada por $\|\text{grad } \phi\|_2 \geq ((n-2)/2(n-1))I_n \|\phi\|_{2n/(n-2)}$.

3.4 Demostración de la DIC por M.Gromov

La igualdad entre las constantes I_n y S_n permite formular la desigualdad isoperimétrica a partir del gradiente de f . Por la definición de S_n , la DIC se cumple si y sólo si

$$\|\text{grad} f\|_1 \geq n\omega_n^{1/n} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \quad (3.16)$$

para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Equivalentemente, si:

Teorema 20 Para toda $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se verifica:

$$\int |\text{grad } f| dV \geq n\omega_n^{1/n} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \quad (3.17)$$

Demostración.

Lo que haremos será construir un difeomorfismo entre el cubo unitario $C^n = [0, 1]^n$ en \mathbb{R}^n y la bola unitaria \mathbb{B}^n . Para ello, definimos primero una función auxiliar η que básicamente, mide la proporción entre el volumen de una sección de Ω y una parte de esta sección. Tomemos una función no negativa $\mu \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ y las funciones $u_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ y $\eta_j : \mathbb{R}^n \rightarrow C^n$ dadas por:

$$u_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, r_j, r_{j+1}, \dots, r_n) dr_{j+1} \cdots dr_n dr_j$$

$$\eta_j(x) = \frac{1}{u_j} \int_{-\infty}^{x_j} \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, r_j, r_{j+1}, \dots, r_n) dr_{j+1} \cdots dr_n dr_j$$

El factor $\frac{1}{u_j}$ normaliza la integral, de ahí que η tome valores en C^n . La convergencia de la integral de u_j se garantiza porque μ tiene soporte compacto; finalmente, para $j = n$, definamos $u_n = \mu(x)$ y notemos que para $j = 1$ tenemos $u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dV$. Para ilustrar la función η , veamos el caso $n = 3$.

A partir del cálculo $u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} I_\Omega dV = V(\Omega)$ deducimos que

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \frac{1}{u_1} \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} I_\Omega dr_2 dr_3 \right) dr_1 \\ &= \frac{V(x \in \Omega \cap \{r : r_1 < x_1\})}{V(\Omega)}\end{aligned}$$

(Nota: denotamos con V una n medida o $n-1$ medida indistintamente); esto es, η_1 es la razón entre el volumen de la región de Ω acotada por el plano $r_1 = x_1$, y el volumen total. De forma análoga, tenemos que

$$u_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I_\Omega(x_1, r_2, r_3) dr_3 \right) dr_2$$

representa el volumen de la región $\{x_1 = r_1\} \cap \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para obtener η_2 integramos desde $r_2 = -\infty$ hasta x_2 :

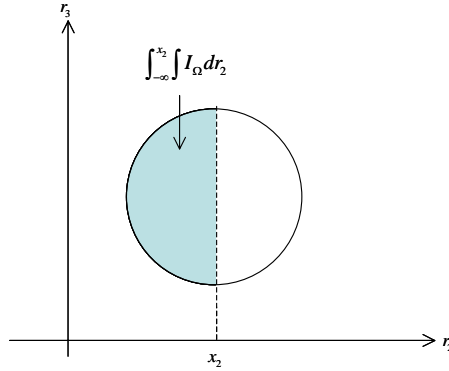


Fig.8. Ejemplo de η_2 en \mathbb{R}^3 .

Así,

$$\eta_2(x) = \frac{V(\Omega \cap \{x_1 = r_1, r_2 < x_2\})}{V(\Omega \cap \{r_1 = x_1\})}$$

En el caso general, se tiene

$$\begin{aligned}u_j(x) &= V(\Omega \cap \{r : x_1 = r_1, \dots, x_{j-1} = r_{j-1}\}) \\ \eta_j(x) &= \frac{V(\Omega \cap \{r : x_1 = r_1, \dots, x_{j-1} = r_{j-1}, r_j < x_j\})}{V(\Omega \cap \{r : x_1 = r_1, \dots, x_{j-1} = r_{j-1}\})}\end{aligned}$$

Si restringimos cada u_j a Ω , la función $u = (u_1, \dots, u_n)$ permite definir un difeomorfismo entre Ω y C^n .

Observación 21 $\det J_\eta = \frac{u_n}{u_1}$.

Para demostrar **21**, lo primero es observar que η_j es función de x_1, \dots, x_j . Así, las parciales $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}$ son cero para $i > j$. Entonces la matriz jacobiana J_η es triangular inferior y se tiene

$$\det J_\eta = \prod_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} &= \frac{1}{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-\infty}^{x_j} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, r_j, r_{j+1}, \dots, r_n) dr_{j+1} \cdots dr_n \right) dr_j \\ &\Rightarrow \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} = \frac{1}{u_j} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-j+1}} \mu(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, r_{j+1}, \dots, r_n) dr_{j+2} \cdots dr_n \cdot dr_{j+1} \right) \end{aligned}$$

La integral en la última expresión es igual a u_{j+1} de modo que $\frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} = \frac{u_{j+1}}{u_j}$. En el producto $\prod_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j}$ se cancelan los términos de enmedio y finalmente:

$$\det J_\eta(x) = \prod_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j(x)}{\partial x_j} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{u_{j+1}}{u_j}(x) = \frac{u_n}{u_1}(x) \quad (3.18)$$

■

Ahora analicemos el caso particular $\Omega = \mathbb{B}^n$; a la función $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ correspondiente la denotaremos $\Phi : \mathbb{B}^n \rightarrow C^n$. Esta función es el difeomorfismo que buscamos:

Observación 22 La aplicación $\Phi|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \rightarrow C^n$ es un difeomorfismo.

En efecto, por (3.18) tenemos

$$J_\Phi(x) = \frac{I_{\mathbb{B}^n}}{\int_{\mathbb{R}^n} I_{\mathbb{B}^n} dV} = \frac{1}{V(\mathbb{B}^n)} = \omega_n^{-1} \neq 0$$

Si $\Phi_j(x) = \Phi_j(\tilde{x})$ para $x \neq \tilde{x}$ entonces existe un punto α entre x y \tilde{x} para el cual $\frac{\partial \Phi_j(\alpha)}{\partial x_j} = 0$, que implica $\det J_\phi(a) = 0$ lo que contradice el cálculo anterior. Entonces, Φ es inyectiva.

Como el cociente que define cada η_i representa la proporción entre el volumen de la región en Ω dada por $r_j < x_j$ y Ω , entonces al variar r_j continuamente desde la intersección con $\partial\Omega$ hasta x_j , el cociente varía continuamente desde 0 hasta 1, por lo que cada Φ_j define una biyección entre $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ y $[0, 1]$, luego Φ es un difeomorfismo. ■

Regresando al caso general para $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no negativa definida sobre Ω , sea $\zeta := \Phi^{-1} \circ \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{B}^n$.

Entonces, por (3.18),

$$\det J_\zeta(x) = (\det \Phi)^{-1} (\det \eta) = \omega_n \mu(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu dV \right)^{-1}$$

Por otro lado, $\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} = 0$ si $i > j$, entonces $\det J_\zeta(x) = \prod_{j=1}^n \frac{\partial \zeta_j(x)}{\partial x_j}$. Aplicando la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética al producto anterior:

$$\left(\prod_{j=1}^n \frac{\partial \zeta_j(x)}{\partial x_j} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} = \frac{1}{n} \operatorname{div} \zeta$$

de donde

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu dV \right)^{-1} \omega_n \mu(x) &\leq \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{div} \zeta \right\}^n (x) & (3.19) \\ \Leftrightarrow \mu^{1/n} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu dV \right)^{1/n} \omega_n^{-1/n} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{div} \zeta \right\} (x) \end{aligned}$$

Para demostrar la desigualdad original (3.17) sustituimos $\mu := f^{\frac{n}{n-1}} = f f^{\frac{1}{n-1}} = f \mu^{\frac{1}{n}}$. Entonces

$$\mu = f(x) \mu(x)^{1/n} \quad (3.20)$$

$$\leq \left(n \omega_n^{1/n} \right)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu dV \right)^{1/n} (f \operatorname{div} \zeta) (x) \quad (3.21)$$

Usaremos la definición $\|f\|_n = \left(\int |f|^n \right)^{1/n}$ y el siguiente resultado de análisis vectorial: si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\operatorname{div}(F \cdot f) = \langle \operatorname{grad} f, F \rangle + f \operatorname{div} F$. Así, (3.20) se convierte en:

$$\mu \leq \frac{\|f\|_{n/(n-1)}^{1/(n-1)}}{n\omega^{1/n}} \{\operatorname{div} f \zeta - \langle \operatorname{grad} f, \zeta \rangle\} (x)$$

Integrando sobre \mathbb{R}^n tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} &\leq -\frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \operatorname{grad} f, \zeta \rangle dV \\ &\leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\operatorname{grad} f\| dV \end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple, pues $\zeta \in \mathbb{B}^n$ implica que:

$$\langle \operatorname{grad} f, \zeta \rangle \leq |\langle \operatorname{grad} f, \zeta \rangle| = \|\operatorname{grad} f\| \|\zeta\| |\cos \theta| \leq \|\operatorname{grad} f\|$$

Esto prueba la desigualdad (3.17). \blacksquare

3.5 Demostración de Berger

En esta demostración se aborda la desigualdad isoperimétrica desde un punto de vista más geométrico. Al igual que en las anteriores se utiliza la desigualdad MG-MA. La ventaja de este enfoque es que la caracterización de la igualdad se desprende de los argumentos usados para la desigualdad, como se puede ver en [5] y [4].

Sea $\{e_i\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n , $\{x_i\}$ un sistema de coordenadas y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $V(\Omega) = \omega_n$.

Para $m \in \Omega$ sea $H_1(m) = x_1^{-1}(x_1(m))$ el hiperplano paralelo a $x_1 = 0$ que contiene a m . Este plano divide a Ω en dos subconjuntos Ω_1 y Ω_2 . Tomemos ahora en \mathbb{B}^n el hiperplano \tilde{H}_1 paralelo a H_1 tal que divida a la bola en dos subconjuntos con volúmenes $V(\Omega_1), V(\Omega_2)$.

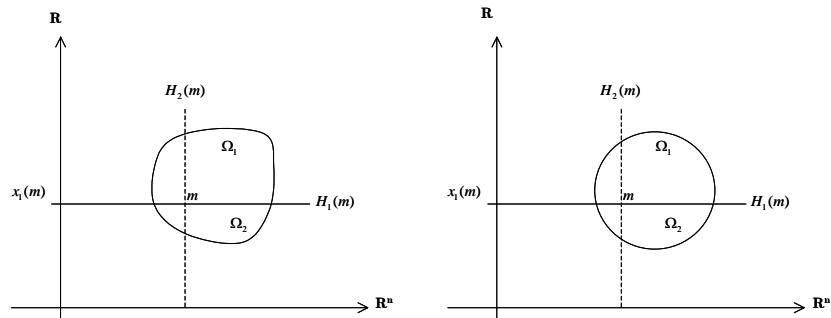


Fig.9. Construcción de $H_2(m)$.

Ahora, sea $H_2(m)$ el hiperespacio afín paralelo a la intersección $x_1 = x_2 = 0$. Como $H_2(m)$ divide a Ω en otros dos subconjuntos, hacemos la misma construcción para obtener $\tilde{H}_2(m)$ que divida a la bola en volúmenes iguales a los que se obtuvieron con $H_2(m)$. De esta manera, construimos una sucesión de hiperespacios que contienen a m hasta llegar a H_{n-1} y \tilde{H}_{n-1} un par de rectas paralelas a la dirección $x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0$. Finalmente, al hacer $x_{n-1} = 0$ llegamos a $m \in \Omega$ y a $\tilde{m} \in \mathbb{B}^n$. Así definimos la función

$$\begin{aligned} f &: \Omega \longrightarrow \mathbb{B}^n \\ &: m \longmapsto \tilde{m} = f(m) \end{aligned}$$

El jacobiano de f es de la forma:

$$J_f(m) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1(m) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(m) \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, y como por construcción f preserva el volumen, tenemos $J_f(m) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(m) = 1$. (Notar que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ para $i > j$).

Tomemos ν un vector normal a $\partial\Omega$. Por el teorema de Gauss,

$$\int_{\partial\Omega} \langle f(h), \nu(h) \rangle dA = \int_{\Omega} \operatorname{div} f dV := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i dV$$

y por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética

$$1 = \prod \lambda_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum \lambda_i \right)^n$$

luego $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq n$. También, para $h \in \partial\Omega$,

$$|\langle f(h), \nu(h) \rangle| = \|f\| |\cos \theta| \leq 1.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
V(\mathbb{B}^n) &= V(\Omega) = \int_{\Omega} dV \leq \int_{\Omega} n dV \\
&\leq \int_{\Omega} \operatorname{div} f dV = \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle dA \\
&\leq \int_{\partial\Omega} \langle f, \nu \rangle dA \leq \int_{\partial\Omega} |\langle f, \nu \rangle| dA \\
&\leq \int_{\partial\Omega} dA = A(\partial\Omega) \leq nA(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

luego $nV(\partial\Omega) \geq V(\mathbb{B}^n)$ y por el lema 4 concluimos que $V(\partial\Omega) \geq V(\mathbb{S}^{n-1})$.

En la siguiente sección abordaremos la DIC con un enfoque de ecuaciones diferenciales parciales.

3.6 DIC como problema de tipo Neumann

Dadas Ω una región en \mathbb{R}^n y funciones $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotemos con $\frac{\partial}{\partial\nu}$ el operador derivada en una dirección normal a $\partial\Omega$ (lo llamaremos la **derivada normal**). Un problema de tipo Neumann consiste en encontrar una función $u : \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga las dos ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = f \quad \text{sobre } \partial\Omega, \text{ y} \tag{3.22}$$

$$\nabla^2 u = g \quad \text{en } \Omega \tag{3.23}$$

donde ∇^2 representa el operador laplaciano de u .
Integrando en 3.22,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} dA = \int_{\partial\Omega} f dA$$

Usando la igualdad $\nabla^2 u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ y el teorema de Stokes, las condiciones del problema se traducen en:

$$\int_{\Omega} g dV = \int_{\Omega} \nabla^2 u dV = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) dV = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} u) \cdot \nu dA$$

Notemos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$. Luego, por la ecuación 3.23, u es solución al problema si se cumple:

$$\int_{\partial\Omega} f \, dA = \int_{\Omega} g \, dV \quad (3.24)$$

En lo que sigue se dará una demostración de la desigualdad isoperimétrica basada en la existencia de la solución de un problema de tipo Neumann particular: si f es igual a una función constante y $g = 1$ en Ω entonces $\int_{\Omega} \nabla^2 u \, dV = \int_{\Omega} dV = V(\Omega)$, luego la condición (3.24) es:

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} \nabla^2 u \, dV = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dA = c \int_{\partial\Omega} dA = cA(\partial\Omega) \quad (3.25)$$

de donde $c = \frac{V(\Omega)}{A(\partial\Omega)}$.

En lo que sigue, necesitaremos ver que el conjunto de contacto inferior de la gráfica de u (que definimos a continuación y que en términos simples, podemos pensar como el conjunto de "mínimos absolutos" de u) contiene a la bola unitaria de \mathbb{R}^n ; esto trae a flote a ω_n . Luego estableceremos una serie de desigualdades con integrales en las que involucramos la constante anterior c para concluir la DIC.

Conjunto de contacto inferior.

Para visualizar este concepto tomemos $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto interior tal que la gráfica de u esté por arriba de la tangente en x_0 . Entonces, para todo $x_0 \in (a, b)$ se tiene la desigualdad

$$u(x) \geq u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) \quad (3.26)$$

Al conjunto S de todos los puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que (3.26) es cierto para todo $x \in [a, b]$ le llamaremos el **conjunto de contacto inferior** de f .

Consideremos ahora una línea recta con pendiente m que quede por debajo de la gráfica de u . Movamos esta línea en forma paralela. Eventualmente, la recta tocará la gráfica de u . La abscisa del primer punto de contacto estará en (a, b) , o será igual a uno de los extremos. Supongamos que queda en el interior, como en la figura:

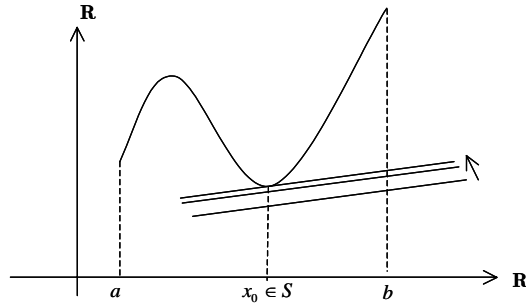


Fig.10. Un punto en el conjunto de contacto inferior.

Entonces si u es C^1 , se tiene

$$g(x) = u(x) - u(x_0) - m(x - x_0) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

y $g(x)$ alcanza el mínimo en x_0 . Luego $g'(x_0) = 0$, $u'(x_0) = m$ y $x_0 \in S$. Notemos además que si u es de clase C^2 entonces

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{3}u''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x, x_0^2)$$

de donde $f''(x_0) \geq 0$ y esto sucede para todos los puntos de S . Con esto es claro que si el primer punto de contacto está en el interior entonces la recta tiene que ser tangente y la pendiente m pertenecerá a $u'(S)$. La extensión a \mathbb{R}^n conserva esta propiedad:

Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^n y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . El conjunto de contacto inferior es:

$$S = \{x_0 \in \Omega : u(x_0) + (\text{grad } u)(x_0) \cdot (x - x_0) \leq u(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}\}$$

y se cumple que si $x_0 \in S$ entonces $\text{Hess } u(x_0) = D^2u(x_0)$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva (para todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tienen $y^T D^2u(x_0)y \geq 0$).

Tomamos un hiperplano exterior a Ω y lo movemos paralelamente. Entonces, si el primer punto de contacto es un punto interior de Ω , el plano se hace tangente en ese punto.

Regresemos al planteamiento tipo Neumann. Para ello, sea u la solución al problema para $f = 1$ y $g = A(\partial\Omega)/V(\Omega)$. Tomemos un plano $z = mx + c$

por debajo de la gráfica de u . Sea x_0 un primer punto de contacto. Si x_0 está en el interior de S entonces, por un argumento similar, el plano tiene que ser tangente a la gráfica de u , y en ese caso $m \in (\text{grad } u)(S)$.

Por otro lado, supongamos que $x_0 \in \partial\Omega$. Entonces

$$g(x) := u(x) - u(x_0) - m \cdot (x - x_0) \geq 0 \quad (3.27)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ y como $g(x_0) = 0$, el mínimo se alcanza en la frontera. Si esto sucede, en la dirección del normal $N(x_0)$ y en una vecindad $V_{x_0} \cap \Omega$ es estrictamente decreciente, luego

$$(\text{grad } g)(x_0) \cdot N(x_0) < 0$$

De (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{grad } g &= \text{grad } u - m \\ \Rightarrow \text{grad } g \cdot N &= \text{grad } u \cdot N - m \cdot N < 0 \\ \Rightarrow \text{grad } u \cdot N &< m \cdot N \end{aligned}$$

Por la última hipótesis ($f = 1, g = A/V$) tenemos

$$\text{grad } u(x_0) \cdot N(x_0) = \frac{\partial u}{\partial N}(x_0) = 1$$

Entonces $m \cdot N \geq 1$. Como

$$m \cdot N = \|m\| \|N\| \cos \alpha = \|m\| \cos \alpha \leq \|m\|$$

y $|\cos \alpha| \leq 1$ entonces

$$1 \leq |m \cdot N| \leq \|m\| |\cos \alpha| \leq \|m\|$$

concluimos que $\|m\| \geq 1$. Luego, si $\|m\| \leq 1$ entonces el plano $z = mx + k$ interseca a la gráfica de u como un plano tangente en un punto interior únicamente, y entonces $m \in (\text{grad } u)(S)$. Así probamos el siguiente

Lema 23 *Sea $\mathbb{B}^n(0)$ la bola unitaria de \mathbb{R}^n con centro en el origen, y $u : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Entonces,*

$$\mathbb{B}^n \subseteq (\text{grad } u)(S)$$

donde S es el conjunto de contacto inferior de la gráfica de u .

El lema anterior justifica la siguiente desigualdad:

$$\omega_n = V(\mathbb{B}^n) \leq V(\text{grad } u(S)) = \int_{\text{grad } u(S)} dV$$

Es fácil ver que $\det(\text{Hess } u) = J_{\text{grad } u}$. Aplicando el teorema de cambio de variable a $\text{grad } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (considerando que posiblemente no sea difeomorfismo) tenemos la desigualdad:

$$\int_{\text{grad } u(S)} dV \leq \int_S |\det(\text{Hess}(u))| dV$$

Así, la traza $\text{tr}(\text{Hess}(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla^2 u$. Como $\nabla^2 u = 1$, tenemos:

$$\frac{V(\Omega)}{n^n} \geq \frac{V(S)}{n^n} = \int_S \left[\frac{\nabla^2 u}{n} \right]^n dV = \int_S \left[\frac{\text{tr}(\text{Hess}(u))}{n} \right]^n dV$$

Por la desigualdad MG-MA,

$$\frac{1}{n} \text{tr}(\text{Hess}(u)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geq \left[\prod_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right]^{1/n}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_S \left[\frac{\text{tr}(\text{Hess}(u))}{n} \right]^n dV &\geq \int_S \left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) dV \\ &= \int_S |\det(\text{Hess}(u))| dV \geq V[(\text{grad } u)(S)] \end{aligned}$$

Hemos probado que $\frac{V(\Omega)}{n^n} \geq V[(\text{grad } u)(\Gamma^+)]$ entonces, por el lema anterior tendremos

$$V[(\text{grad } u)(\Gamma^+)] \geq V(\mathbb{B}^n(c)) = c^n \omega_n$$

luego $\frac{V(\Omega)}{n^n} \geq c^n \omega_n$. Vimos que la constante c en el planteamiento inicial es igual a $\frac{V(\Omega)}{A(\partial\Omega)}$, luego

$$\frac{V(\Omega)}{n^n} \geq \left(\frac{V(\Omega)}{A(\partial\Omega)} \right)^n \omega_n \Rightarrow \frac{V(\Omega)^{1/n}}{n} \geq \frac{V(\Omega)}{A(\partial\Omega)} \omega_n^{1/n}$$

y finalmente $\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-1/n}} \geq n\omega_n^{1/n}$, que es la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^n .

■

En este capítulo hicimos notar la variedad de técnicas con las que puede abordarse la desigualdad isoperimétrica en espacios euclidianos. Estos enfoques han sido punto de partida para investigar los casos más generales, algunos de los cuales exploraremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Desarrollos recientes

En este capítulo revisaremos un breve recuento de algunos resultados recientes en variedades riemannianas generales; en algunos casos la demostración se bosqueja o se da una referencia del artículo en el que ésta se desarrolla.

Un posible panorama para abordar el problema isoperimétrico en el contexto general puede establecerse a través de la curvatura. Así, consideramos las siguientes vertientes:

- Variedades con curvatura constante.
- Variedades con curvatura no necesariamente constante.

4.1 Curvatura constante

Analizar el grupo de simetría de una variedad M es de utilidad para analizar la simetría de los dominios isoperimétricos. Este tipo de argumentos se conocen como **simetrizaciones**. La simetrización de Schwarz y la de Steiner son algunas de las más conocidas. En el artículo de A. Ros ([2]) se propone una simetrización distinta (la simetrización de Hsiang) que permite describir las hipersuperficies isoperimétricas en \mathbb{R}^n , la semiesfera y las regiones comprendidas entre dos hiperplanos paralelos (slabs). Antes de exponer estos resultados mencionaremos un teorema de existencia que resume lo que se sabe hasta ahora del problema isoperimétrico en variedades compactas. Se debe a Almgren y puede encontrarse en ([10]).

Teorema 24 (*Existencia y regularidad para variedades compactas*)

Si M^n es compacta, entonces, para todo t , $0 < t < V(M)$, existe una región compacta $\Omega \subset M$ cuya frontera $\Sigma \subset \partial M$ tiene área mínima, dentro del conjunto de regiones de volumen t . Excepto por un conjunto singular cerrado de dimensión Hausdorff menor o igual a $n - 8$, la frontera Σ de cualquier región que minimice el área es una hipersuperficie suave encajada con curvatura media constante y, si $\partial M \cap \Sigma \neq \emptyset$, entonces ∂M y Σ se intersecan ortogonalmente.

Los siguientes resultados pueden encontrarse en ([2]). En el primero se asume la existencia de dominios isoperimétricos (del teorema anterior) y luego se bosqueja la demostración usando la simetrización de Hsiang.

Teorema 25 *Las hipersuperficies isoperimétricas en \mathbb{R}^n son esferas.***Esbozo de la demostración.**

Sea Ω un dominio isoperimétrico en \mathbb{R}^n con $\partial\Omega = \Sigma$. Un resultado conocido es que el conjunto regular (que denotamos R_Σ) es conexo (ver [2], sección 2.1). Tomemos ahora $P \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano tal que los conjuntos $\Omega^+ = \Omega \cap P^+$ y $\Omega^- = \Omega \cap P^-$ (donde P^+ y P^- denotan los semiespacios definidos por P) tengan el mismo volumen. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A(\Sigma \cap P^+) \leq A(\Sigma \cap P^-)$.

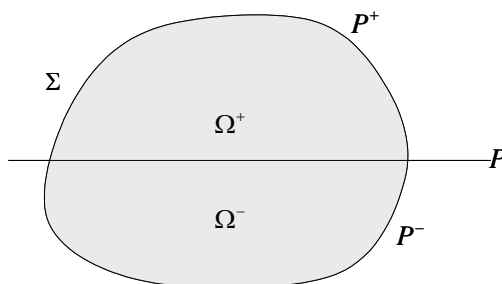


Fig.11. Simetrización de Hsiang.

Si s es la reflexión con respecto a P , entonces $\Omega' := s(\Omega^+) \cup \Omega^+$ también es un dominio isoperimétrico (dado que encierran el mismo volumen); en particular

$$A(\Sigma \cap P^+) = A(\Sigma \cap P^-)$$

Además, la frontera $\Sigma' = \partial\Omega'$ satisface las condiciones de regularidad del teorema. Si $R(\Sigma) \cap P = \emptyset$ (es decir, si la intersección ocurre sólo en puntos

singulares) entonces $R_{\Sigma'}$ sería disconexo, pero esto contradice lo establecido arriba. Entonces $R(\Sigma) \cap P \neq \emptyset$. Se deduce luego que $R(\Sigma) = R(\Sigma')$ que a su vez, implica $\Sigma = \Sigma'$ (usando la propiedad de continuación única, ver [11]). Entonces Ω es simétrica con respecto a P .

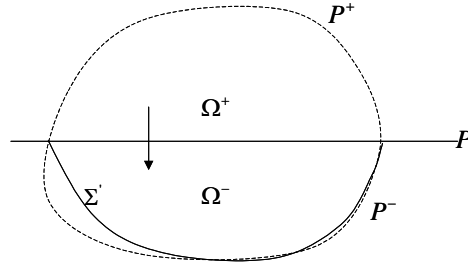


Fig.12. Construcción de un conjunto simétrico.

Como cada familia de hiperplanos paralelos en \mathbb{R}^n contiene un hiperplano P que biseca el volumen de Ω , se concluye que Ω es una bola.

Este argumento puede adaptarse para concluir los siguientes:

Teorema 26 *Las hipersuperficies isoperimétricas en un semiespacio son semiesferas.*

Teorema 27 *En $M = \mathbb{R}^n \times [0, 1]$, (slab), las hipersuperficies isométricas son semiesferas y cilindros. Para $n \geq 10$, y para ciertos valores intermedios del volumen ($t \in (0, V(M))$) las soluciones son los onduloideos.*

(Para el segundo teorema, ver [12]). En ambos casos, se recurre a una consecuencia de la simetrización de Hsiang: cualquier superficie isoperimétrica en estas variedades tiene un eje de revolución.

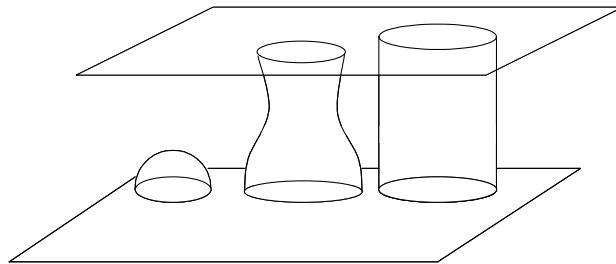


Fig.13. Posibles soluciones para el problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$.

Una herramienta útil en el estudio de algunos de estos casos es el **perfil isoperimétrico**, que es un enfoque funcional para definir las constantes isoperimétricas. En la definición suponemos de nuevo que Ω es una subvariedad de M^n (dominio, como en la introducción del capítulo 1).

Definición 28 *El perfil isoperimétrico $v \mapsto I_M(v)$ de M , definido para todo $v \in (0, V(M)]$ (admitiendo que $V(M)$ pueda ser infinito), está dado por:*

$$I_M(v) = \inf_{\Omega} \{A(\partial\Omega) : V(\Omega) = v, \Omega \subset M\}$$

donde Ω varía en el conjunto de subvariedades abiertas, compactas de M con frontera suave.

En particular, D puede tener un número finito de componentes conexas.

Naturalmente el objetivo es conocer explícitamente la función $I_M(v)$, o bien saber si dado v , existe una región Ω de volumen v y tal que $A(\partial\Omega) = I_M(v)$. En este caso, determinar la unicidad de la solución.

Una versión más débil del problema es proponer una cota inferior $\phi(v)$ para $I_M(v)$, esto es, una **desigualdad isoperimétrica** de la forma

$$A(\partial\Omega) \geq \phi(V(D))$$

para todas las regiones D relativamente compactas con frontera suave.

Como hemos visto, en el caso euclidiano tenemos una solución completa del problema: los discos de volumen v son los únicos minimizadores del área de la frontera y el perfil isoperimétrico $I_M(v)$ está dado explícitamente por:

$$I_{\mathbb{R}^n}(v) = n\omega^{1/n}v^{1-1/n}$$

Este concepto se utiliza para demostrar el siguiente resultado en variedades de Cartan-Hadamard (variedades con curvatura seccional constante y acotada por una constante no positiva). La prueba se encuentra en el artículo de M. Ritoré ([7]). En él se presenta la conjetura -conocida como de Cartan Hadamard- que básicamente, compara el área de la frontera de un dominio cualquiera con la correspondiente área en el dominio isoperimétrico contenido en el espacio modelo \mathbb{M}_c^n , la n -variedad simplemente conexa de curvatura seccional constante igual a c .

Una de las razones por las que se pensó que la conjetura es cierta es que se cumple para bolas geodésicas (la prueba se basa en teoremas clásicos de comparación).

De esta conjetura se tienen demostraciones parciales para ciertas dimensiones y ciertos valores de la curvatura; por ejemplo, Kleiner la probó usando un argumento que sólo sirve para dimensión 3. En el artículo de Ritoré se ve primero que si dicho argumento es válido en cualquier dimensión entonces la conjetura también lo es. Luego se presenta la prueba de Kleiner de ese argumento, y se muestra que es válido en dimensión n .

Conjetura 29 *Sea M^n una variedad completa y simplemente conexa, con curvaturas seccionales que satisfacen la desigualdad $K_{\text{sec}} \leq c \leq 0$ para alguna constante $c \leq 0$. Entonces,*

$$\text{area}(\partial\Omega) \geq I_C(\text{vol}\Omega)$$

donde $I_C(\text{vol}\Omega)$ es el perfil isoperimétrico para $\text{vol}\Omega$ en el espacio \mathbb{M}_c^n de curvatura constante igual a c y Ω es un dominio cualquiera con frontera suave.

Si la igualdad se cumple entonces Ω es isométrico a la bola (geodésica) de volumen $\text{vol}\Omega$ en \mathbb{M}_c^n .

Esta conjetura fue probada por Weil para $n = 2$ y $c \leq 0$; por C. Croke para $n = 4$ y $c = 0$ y finalmente por Kleiner para $n = 3$ y $c \leq 0$. La prueba de Kleiner se basa en el siguiente resultado:

Proposición 30 *Sea M^3 una variedad completa y simplemente conexa, con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una constante $c \leq 0$. Sea Ω un compacto con frontera Σ . Entonces*

$$\max_{\Sigma} H_{\Sigma} \geq H_C(\text{area}\Sigma)$$

Como no podemos asegurar la existencia de dominios isoperimétricos en variedades no compactas, trabajaremos a partir de aquí con bolas geodésicas en la variedad.

Idea de la demostración de 29. Se toma una bola geodésica B que contenga al dominio $\Omega \subset M$. Se sabe que el perfil isoperimétrico I_B es una función continua (ver [2])

Sea Ω_v un dominio isoperimétrico en B de volumen $v = \text{vol}\Omega$, y sea H_v la curvatura media (que es constante) de la parte regular de $\Sigma_v = \partial\Omega_v$ en el interior de B .

Si la proposición (30) es cierta para cualquier dimensión, entonces $H_v \geq H_c(\text{área}\Sigma_v)$, y la igualdad se alcanza para una bola geodésica de área igual al área Σ_v en un espacio de curvatura constante c .

Luego se considera una deformación Ω_V con soporte en la parte regular de Σ_v en el interior de B parametrizada con respecto al volumen, (esto es considerar una deformación normal uN , donde $u \geq 0$). Entonces para $\Delta V < 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{I_B(v + \Delta V) - I_B(v)}{\Delta V} &\geq \frac{\text{área}\partial\Omega_{v+\Delta V} - \text{área}\Sigma_v}{\Delta V} \geq (nH_v + \varepsilon(\Delta V)) \\ &\geq (nH_c(I_B(v)) + \varepsilon(\Delta V)) > 0, \end{aligned}$$

lo que implica que I_B es estrictamente monótona y entonces suave casi donde quiera. Aún más, si I_B es suave en v , entonces

$$I'_B(v) \geq nH_c(\text{área}\Sigma_v). \quad (4.1)$$

Para finalizar la demostración, se traslada el perfil M_c^3 a la izquierda y a la derecha y se obtiene así una foliación del semiplano superior de \mathbb{R}^2 , y la desigualdad 4.1 es inmediata ya que la función I_B atraviesa esta foliación transversalmente, por lo que el perfil está arriba de M_c^3 , dado que $I_B(0) = I_c(0) = 0$.

Esta desigualdad es válida en $I_B(v) \geq I_c(v)$ luego tenemos la desigualdad en los perfiles para cualquier $V \in (0, v)$, por lo que I_B es suave, la desigualdad (8) es válida para cualquier valor $V \in (0, v)$ y entonces Ω es isométrica a una bola de volumen v en el espacio M_c^3 .

4.2 Curvatura no necesariamente constante

El teorema siguiente resume algunos resultados que se han encontrado en superficies. Se encuentra en ([6]).

Dada M una 2-variedad de clase C^2 con una métrica riemanniana $d\mu$ de clase C^2 , decimos que M es una superficie generalizada si dM sólo se degenera en puntos aislados (singularidades).

Teorema 31 *Sea M una superficie generalizada, D un dominio simplemente conexo en M con área A y acotado por una curva Γ (de clase C^1 por*

tramos), de longitud L . Sea K la curvatura gaussiana y k_0 un número real cualquiera. Supongamos que en una vecindad de un punto singular K está acotada superiormente. Entonces

$$L^2 \geq 4\pi A \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_D (K - k_0)^+ d\mu - \frac{k_0 A}{4\pi} \right\} \quad (4.2)$$

La igualdad se da si y sólo si $K \equiv k_0$ en D y D es un disco geodésico.

Observemos que para $K = k_0 = 0$ tenemos la desigualdad isoperimétrica clásica: $L^2 \geq 4\pi A$.

Para $K = k_0$ las pruebas se deben a Bernstein y Schmidt ($k_0 > 0$ y $k_0 < 0$, respectivamente). El caso $K \leq 0, k_0 = 0$ es de Fiala y la generalización para K arbitraria y $k_0 = 0$ se debe a Huber.

Por ejemplo, para $M = \mathbb{S}^2$, (4.2) se traduce en

$$L^2 \geq 4\pi A \left(1 - \frac{A}{4\pi r^2} \right)$$

La desigualdad anterior se debe a Bernstein (1905) y la demostración se basa en el hecho de que cualquier dominio con perímetro menor o igual a 2π está contenido en una semiesfera.

Para dimensiones mayores que 2, tenemos resultados como los siguientes: (ver [8]):

1. (C. Croke, 1984) Sea M es una variedad riemanniana de dimensión 4 con frontera suave, con cerradura compacta. Supongamos que M tiene curvatura seccional no positiva y que toda geodésica en M minimiza la distancia desde su punto inicial hasta que toca la frontera. Entonces

$$\frac{A(\partial M)}{V(M)^{3/4}} \geq \frac{A(\mathbb{S}^3)}{V(\mathbb{B}^4)^{3/4}},$$

con igualdad si y sólo si M es isométrica a un disco en \mathbb{R}^n .

2. (B. Kleiner, 1992) Sea M una 3- variedad riemanniana completa y simplemente conexa, con curvatura seccional menor o igual a una constante $\kappa \leq 0$, y sea $\Omega \subset M$ un dominio y $\mathbf{B}_\kappa(\Omega)$ el disco en el espacio modelo de curvatura seccional constante κ , y del mismo volumen que Ω . Entonces

$$A(\partial\Omega) \geq A(\partial(\mathbf{B}_\kappa(\Omega)))$$

con igualdad si y sólo si Ω es isométrico a $\mathbf{B}_\kappa(\Omega)$.

En [7] se mencionan las siguientes conjeturas:

1. Las regiones isoperimétricas en el toro $T^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ son del tipo (Bola en T^m) $\times T^{n-m}$
2. Las regiones isoperimétricas en el espacio proyectivo $P^n = S^n/\pm$ son vecindades tubulares de subvariedades lineales.
3. En el espacio hiperbólico, los dominios isoperimétricos son bolas geodésicas.

Conclusión

En este trabajo hemos analizado el problema isoperimétrico desde varias perspectivas, desde su formulación más simple hasta los desarrollos más recientes. Algunos de los argumentos desarrollados en el caso del espacio euclidiano tienen una generalización natural, por lo menos en el caso de las variedades con curvatura seccional constante. Al final del trabajo hemos mostrado algunas interesantes líneas de investigación que podrían desarrollarse en un trabajo posterior.

Bibliografía

- [1] Chavel, I. *Isoperimetric inequalities. Differential Geometric and Analytic Perspectives*. Cambridge University Press.(2001)
- [2] Ros, A. *The isoperimetric problem*. Lecture series at the Clay Mathematics Institute Summer School on the Global Theory of Minimal Surfaces, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, California.(2001)
- [3] Courant, R. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. México, Limusa.(1993)
- [4] Chavel, I. *Riemannian Geometry: A modern introduction*. Cambridge University Press.(1993)
- [5] Berger, M., Gostiaux, B. *Differential Geometry: Curves and Surfaces*. New York, Springer Verlag.(1988)
- [6] Barbosa M., Do Carmo, M. *A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces*. Math.Z. **162**, (1978), 245-261.
- [7] Ritoré, M. *Optimal isoperimetric inequalities for three-dimensional Cartan-Hadamard manifolds*. Global theory of minimal surfaces, Clay Math. Proc., 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005), 395-404.
- [8] Chavel, I. *Topics in isoperimetric inequalities*. Contemporary Mathematics. **387**, (2005), 89-109.
- [9] Gâteaux, R. *Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques*. CR Acad.Sci.Paris, I Máth, **157**, (1913), 325-327.
- [10] Almgren, F.J. *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem AMS 4. **165-199**, (1976)

- [11] Aronszajn, N. *A unique continuation theorem for solutions of elliptical partial differential equations or inequalities of second order.* J.Math Pures Appl. **36**, (1957), 235-249
- [12] Pedrosa, M., Ritoré, R. *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems.* Indiana Univ. Math. J. **48**, (1999), 1357-1394
- [13] Guillemin, V. *Topología Diferencial.* 2003, México. Sociedad Matemática Mexicana, **20**.
- [14] Gardner, R. *The Brunn Minkowski Inequality,* Bull. AMS. **39**, (2002), 355-405
- [15] Osserman, R. *The isoperimetric inequality,* Bull.AMS. **84**, (1978), 1182-1238
- [16] Treibergs A. *Inequalities that imply the isoperimetric inequality.* University of Utah, (2002), 11-14
- [17] Coulhon, T. Ledoux, M. *Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformations de Riesz: un contre-exemple.* Ark. Mat. **32**, (1994), 63-77
- [18] Federer, H. *Geometric Measure Theory.* Springer Verlag. (1969)
- [19] Siegel, A. *A historical review of the isoperimetric theorem in 2-D, and its place in elementary plane geometry.* Courant Institute of Mathematical Sciences, NY University.
- [20] Morgan, F. *Geometric Measure Theory.* Academic Press. (2000).