UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

El estudio de la tasa de cambio en el entendimiento de la derivada

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICA)

PRESENTA

ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER

MÉXICO, D.F

JUNIO, 2008

A mis padres:
Jesús y María.
Por caminar siempre conmigo,
especialmente en los momentos
más difíciles y por ser la luz que
iluminan mi voluntad y perseverancia
en mi vida.

A mi Director de tesis:

Dr. Michael Barot Schlatter.

Por el empeño que realizó para

la terminación de este trabajo

Con respeto y gratitud a quíenes

culminarón a mi meta profesional:

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

Dr. Ernesto Rosales González.

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña.

M. en C. Juan Manuel Rodríguez Chávez.

ENSEÑANZA Y ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS.

Yo aprendí a asociar las matemáticas,
ya sea las de ayer o las de hoy,
no unicamente con definiciones y
teoremas, algorítmos y demostraciones.
Menos aún con montones de fórmulas,
sino también con las mentes creativas de personas reales.
A mi me fue enseñado a cuestionar, no únicamente por sus logros,
sino por sus intentos y por su forma en que ellos pensaban
y aún por los errores que ellos cometieron.

L. C. YOUNG.

LA BELLEZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Donde quiera que haya números, hay belleza.

PROCLUS.

CARACTER FORMATIVO DE LAS MATEMÁTICAS.

Las matemáticas son la ciencia que nos presentan,
la mejor oportunidad para observar el funcionamiento,
de la mente y tienen la ventaja de que por medio de
su cultivo nosotros podemos adquirir el hábito de un
razonamiento metódico que puede ser aplicado posteriormente,
al estudio de otros temas y puede guiarnos en los
propósitos de nuestra vida.

MARIE. JEAN. CONDORCET.

OTRO ASPECTO.

Si Newton y Leibniz hubiera pensado
que las funciones contínuas no tiene
necesariamente una derivada
-y este es le caso general-
El cálculo diferencial
nunca hubiera sido creado.

EMILE. PICARD.

Índice general

Introducción.

El trabajo que se desarrolla en esta tesis, (cuyo título es “ **El estudio de la tasa de cambio en el entendimiento de la derivada.**”), es una secuencia didáctica que podrá utilizar el docente para introducir a los alumnos al concepto de derivada

Es el resultado de lo aprendido en la Maestra en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), campo de conocimiento Matemáticas, se articularon las tres líneas de acción de la maestría en el proceso de enseñaza y aprendizaje de la matemática en el nivel medio superior:

Línea disciplinaria.

En esta propuesta se presentan las ideas fundamentales en forma significativa con un empleo mínimo del formalismo matemático, se pretenderá que en el Cálculo Diferencial se desarrollen modelos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar cambios, por lo que se asume a la razón de cambio como uno de sus conceptos fundamentales. Se parte de las razones de cambio obtenidas del estudio de un fenómeno de la vida diaria ¿Cómo se desarrolla una población en el tiempo? y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite.

A partir de la consideración de las dimensiones intuitivas y visuales de la Matemática, algunos investigadores utilizan la computadora como herramienta en la enseñanza de los conceptos de Cálculo (Tall, 1986; Balderas, 1992; Galindo, 1993; Chávez y Hitt, 1993). De hecho en la secuencia didáctica que se implementó en las prácticas docentes se hizo uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC); se probó la secuencia didáctica mediante una presentación guiada en Power Point y la información de cada sesión estaba disponible en una bitácora en la red (blog). De esta manera el alumno tenía a su disposición el material, de modo tal que lo podía consultar tantas veces como lo necesite.

Línea psicopedagógica didáctica

Antes de inclinarse por cualquier enfoque psicopedagógico es necesario asumir el marco general en el que se circunscribe y para ello también es necesario contestar lo siguietne ¿para qué enseñar Cálculo y, por tanto, el concepto de derivada?

Las respuestas a estas preguntas, dependerán de las posiciones que se adopten sobre cuestiones más generales del estilo ¿por qué enseñar Matemáticas?. Campostrous y Rizo (1993) analizan cuatro posibles respuestas: por ser necesario para la vida, por ser necesario para la ciencia y la técnica, por desarrollar el pensamiento lógico y por ser parte inalienable de la cultura. Desde el punto de vista oficial, el cálculo en el bachillerato cumple una función propedéutica, es decir, se enseña a los adolescentes para preparlos para estudios universitarios de cierta especialización y en los estudios universitarios se espera puedan aplicarlo en las ciencias, en la ingenería o en la economía.

Si uno de los objetivos principales de la enseñanza del Cálculo tiene que ver con su carácter utilitario (entendido en su relación con la resolución de problemas de aplicación), entonces no tiene sentido enfatizar tanto sobre sus estructuras abstractas como se concibe en el enfoque formal. Tampoco contribuye al logro de este objetivo el enfoque algebraico en el que se exagera la atención dedicada al dominio de los algorítmos.

Desde nuestro punto de vista, la Enseñanza del Cálculo Diferencial debería plantearse como objetivo primario, la comprensión de sus conceptos básicos a partir del desarrollo de las ideas de la variación y las aproximaciones sucesivas. Para contribuir al logro de este propósito se siguió lo esencial de su génesis histórica.

Línea socio-ética-educativa

La práctica docente transmite valores[1], a través de las normas concretas[2].

Entre las normas que rodean la vida escolar están: Los procesos de interacción entre docentes y

[1] Los valores se refieren a los modos de comportamiento deseable, basado en usos, costumbres y genéricos universales, que el sujeto va construyendo a lo largo de su desarrollo, a partir de la interaccin social, expresaba en decisiones y acciones[22].

[2] Las normas concretas, es el conjunto de prescripciones de carácter obligatorio y general, cuya trasgresión conlleva a consecuencias de diversos tipos, que abarca desde hacer notar el incumplimiento, hasta la sanción. (Usos y costumbres, [22]

alumnos, las relaciones entre los alumnos, las relaciones entre maestros y directivos, intercambio entre padres de familia y maestros, la presentación de contenidos curriculares, las llamadas de atención a los alumnos, la forma de dirigirse a ellos, la forma de abordar y solucionar los conflictos, los juicios de valor que los docentes expresan.

También será necesario manifestar que la asignatura de psicopedagogía del aprendizaje aportó elementos fundamentales para entender aspectos relacionados con los alumnos y poder hacer una mejor planeación de la secuencia didáctica, de acuerdo al nivel cognitivo de los alumnos y de los contenidos a desarrollar. En ese sentido se fortaleció nuestra práctica docente durante las presentaciones realizadas en la Escuela Nacional Preparatoria.

El objetivo de este trabajo es apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes y profesores de bachillerato. Plantea que los estudiantes dispongan de un recurso que apoye sus esfuerzos en el estudio, repaso y realización de actividades para introducir la materia de Matemáticas VI, en particular el tema de la derivada y que los profesores de la materia cuenten con una herramienta auxiliar en la orientación de contenidos y actividades, así como en el diseño, elaboración y aplicación de materiales de estudio y de instrumentos de evaluación.

El trabajo de tesis consta de cinco capítulos y nueve apndices:

En el capítulo 1, se inicia con la propuesta didáctica. Se explica en primer lugar lo que es la enseñanza directa, continuando con tres tópicos: antecedentes, aspectos pisopedagógicos del pensamiento matemático y el aspecto didáctico sobre el pensamiento matemático.

En el capítulo 2, se desarrolla de manera detallada la secuencia didáctica. En esta primera etapa se trata de ordenar las ideas, de preguntarse a sí mismo ¿Hacia dónde se quiere ir?, o lo que es lo mismo ¿se tiene un idea del problema?, aquí es conveniente volverse a preguntar ¿tengo los medios para ir?, es decir, ¿se tiene alguna propuesta de solución? y ¿se tiene los medios para probar las soluciones que se proponen?.

Con esta idea se habla del planteamiento del problema y la exposición de la propuesta didáctica, sin olvidar que el docente deberá tener un conocimiento profundo del tema que abarque la propuesta, de este modo asesorá a los alumnos de la mejor manera.

Se continua con el capítulo 3, se desarrolla la secuencia didáctica, que consta de 10 sesiones de clases. Serán una de las posibles soluciones que el docente puede elegir de toda una infinitad, para introducir el concepto de derivada. Para cada una de las sesiones se mencionan los objetivos generales (para el alumno) y se desarrolla cada sesión (sugerencia para el docente)

Y en el capítulo 4, se realiza una sistematización de la práctica docente. Esta consta de cuatro apartados, en el primero se describe el centro de práctica, (ENP 1 "Gabino Barreda ", UNAM) donde se experimentó la secuencia didáctica; el segundo la población escolar (Grupo 605, Turno matutino). En el tercero y el cuarto apartado se desarrolla lo que hizo la prácticante y lo que hicieron los alumnos, respectivamente.

Finalmente el capítulo 5 conclusiones, se incluye un resumen, un análisis de la propuesta y una reflexión.

Y por último el apéndice A, que constan de planeación, ejemplos, ejercicios, tablas, actividades, lecturas, conceptos, evaluación, encuestas, formatos y material fotográfico.

Finalmente, se puede afirmar que el diseño del material, las formas de explicar, el tipo de preguntas, las clases de problemas y ejercicios y las actividades propuestas promueven situaciones que favorecen la habilitación de los estudiantes, en participaciones individuales y grupales, con actitudes de observación, de búsqueda, de razonamiento ordenado y justificado, dentro de la metodología que propone el Plan de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria.

Por lo comentado se desprende que el presente trabajo es de utilidad tanto para los alumnos como para los profesores que participan en el curso de Matemticas IV, en particular en el estudio de la unidad tres "la derivada", en el actual Plan de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria.

Capítulo 1

Enseñanza directa

Antes de empezar a desarrollar éste capítulo, debemos de tener claro lo que es la enseñanza directa.

En el caso de la Escuela Nacional Preparatoria llegamos a emplear el modelo de enseñanza directa, para cumplir ciertos objetivos del proceso de enseñanza y aprendizaje.

"El modelo de enseñanza directa es una estrategía centrada en el docente. Utiliza la explicación y la modelización y enseña conceptos y habilidades combinando la práctica y la retroalimentación".

Aquí el docente tiene que identificar las metas.

Este modelo transcurre en cuatro etapas, las cuales son: En la *introducción*, el docente revisa con los estudiantes lo aprendido previamente, comparte las metas del aprendizaje y provee razones sobre el valor de aprender el nuevo contenido. Durante la etapa de *presentación*, el docente explica el nuevo concepto o provee un modelo para la habilidad. En la *práctica guiada* el docente brinda a los alumnos oportunidades para prácticar destreza o categorizar ejemplos del nuevo concepto. Finalmente durante la *práctica indepediente*, se les pide a los estudiantes que practiquen la habilidad o el concepto por si mismo, lo que estimula la transferencia de información[19].

En esta sección vamos a ver los siguientes tópicos.

1.1 Antecedentes

1.2 Aspectos psicopedagógicos del pensamiento matemático.

1.3 Aspecto didáctico sobre el pensamiento matemático.

1.1. Antecedentes.

En febrero del 2004, dentro del Sistema de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México, se inicia la Maestria en Docencia para la Educación Media Superior, MADEMS, teniendo como objetivo general formar profesores con bases sólidas y multidisciplinarias para que puedan ejercer su labor de acuerdo a las necesidades de la educación en dicho nivel.

La estructura de esta Maestría proporciona a los estudiantes elementos conceptuales y metodológicos en sus tres líneas de formación: socio-ético educativa, psicopedagógico-didáctico y disciplinaria; permitiendo de ésta manera un ejercicio docente adecuado al objetivo de formar alumnos en el nivel Medio Superior de manera integral y atender la necesidad de adecuar el proceso educativo al momento actual de la sociedad.

Como parte de la segunda generación, con este trabajo se aplicarán los conocimientos adquiridos en dicha Maestría. Así, tomando en cuenta las características de la Tesis en la MADEMS, se aporta un material con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza de los alumnos, integrando las diferentes líneas de formación estudiadas.

La educación matemática. ENP

La Universidad Nacional Autónoma de México, a través de sus dos subsistemas Colegio de Ciencias y Humanidades, CCH y Escuela Nacional Preparatoria, ENP, es la encargada de atender la demanda de la Enseñanza Media Superior.

Los objetivos particulares de estos dos subsistemas son:

ENP: Educar hombres y mujeres comprometidas con la sociedad, mediante una formación integral que les permita adquirir los conocimientos, destrezas y habilidades necesarias para su éxito en estudios superiores, así como, para enfrentar los retos de la vida de manera positiva y responsable. [7]

CCH: Dotar al alumno de una cultura integral básica que al mismo tiempo que forme individuos críticos creativos y útiles a su medio ambiente natural y social, lo habilite para seguir estudios superiores. [5]

De acuerdo a lo anterior, nuestro trabajo va en el sentido de aumentar la calidad de materiales de información para profesores y alumnos, incidiendo sobre los programas de estudios de Matemáticas VI de la ENP en sexto año y enfocándose hacia el aspecto conceptual de la derivada.

Consideraciones generales

La Escuela Nacional Preparatoria establece diversas acciones fundamentales en su Plan de Desa rrollo Académico, entre las que se encuentra la revisión permanente de su currículo educativo, finalidad que se ha visto concretada en su Plan y programas de estudio: el ciclo de Iniciación Universitaria el 26 de junio y el 18 de noviembre de 1996, el correspondiente al ciclo que comprende 4to , 5to y 6to año de Preparatoria.

La modificacin del Plan de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria, se fundamenta por:

1.- Fortalecer y potenciar el perfil del egresado, de acuerdo a la demanda de estudios superiores, entre ellos está los de cada facultad, escuela y carrera, en términos de valores y actitudes que suponen una formación social y humanística básica (científica, lingüística, histórica, económica, política y estética)

2.- La metodología de la enseñanza es:

- Centrada en el alumno, más que en el maestro o en los programas.
- Contenidos basados en desarrollo de habilidades y competencias de manera que doten al alumno con herramientas que promuevan el autoaprendizaje.
- Las estrategias didácticas promueven al alumno(a):
  - Indagar
  - Organizar información
  - Interpretar y aplicar esta información en las soluciones de problemas, ya sean disciplinarios o de la realidad circundante; esto es, el aprendizaje sistemático, explícito y práctico.
  - Construir el conocimiento, mediante:
    - La identificación de nociones básicas, a fin de privilegiar lo formativo sobre lo informativo.
    - El trabajo en el aula, para promover la reflexión y la síntesis colectiva e individual.
    - El Diseño de actividades de clase que desarrollen el dominio de los lenguajes básicos para el autoaprendizaje y el progreso intelectual del alumno.

3.- La metodología en los programas, que buscan enfatizar lo básico, afirmar lo formativo sobre lo informativo y dirigir el aprendizaje hacia su integración en productos concretos construidos.

El cumplimiento de lo anterior, ya fuera en contenidos o en metodología, especialmente si se tiene en cuenta que el diagnóstico, exige en el ámbito nacional el fortalecimiento del dominio de las Matemáticas y del Español para la formación de ciudadanos críticos.

De esta manera se propuso incrementar el número de horas semanales en las materias de Lengua española (de 3 a 5 horas en cuarto año), Literatura Universal (se impartía en sexto con 2 horas, pasa a quinto año con 3 horas) y Matemáticas (de 3 a 5 horas en todos los grados); dicho aumento de horas se justifica por la necesidad de contar con espacios de tiempo adecuado para la ejercitación práctica en el salón de clase y el aprendizaje sistemático de formas de trabajo que incrementen la competencia del alumno para la construcción del conocimiento y la de los docentes hacia una enseñanza no-verbalista, ni solamente expositiva, sino aquella que incentivice la abstracción a fin de facilitar el razonamiento, desarrolle la argumentacin̈ e inicie la prueba.

Entre las principales requerimientos de la actualización del Plan de estudio es, la evaluación y el seguimiento permanente, la interpretación interinstitucional de resultados, la formación continua de profesores y un trabajo interdisciplinario creciente que, a su vez, requiere de la búsqueda de condiciones que fortalezcan el trabajo colegiado. Por lo tanto, la revisión y actualización de la Escuela Nacional Preparatoria debe considerarse como un proyecto permanente.

El bachillerato de la Escuela Nacional Preparatoria es un bachillerato cuya formación se define entorno a tres grandes ejes:

1. Núcleo básico
2. Núcleo formativo-cultural
3. Núcleo propedéutico

Estos núcleos de asignaturas se desarrollan a través de tres etapas:

I. Introducción (4to año):

   Se establecen las bases cognitivas sobre las que habrá de construirse el perfil del egresado, principalmente los lenguajes básicos del aprendizaje: español, matemáticas, lengua extranjera e informática. Esto es, las competencias para la comunicación y la organización de información y el análisis, obteniendo un grado fundamental o básico.

II. Profundización (5to año):

Esta es la etapa de preparación para el ingreso al grado propedéutico; se espera que en ella el alumno haya madurado sus estructuras cognitivas para iniciar el conocimiento básico, principalmente descriptivo, al de comprensión, análisis y explicación interpretativa de los fenómenos en estudio. Obteniendo también una perspectiva más clara de su elección profesional ya que la materia de Orientación educativa centra sus esfuerzos y contenidos, en este año, hacia esta meta.

III. Orientación o Propedéutica (6to año):

Aparecen asignaturas de los tres núcleos:

Básico: Matemáticas VI (Cálculo diferencial e integral) y Literatura mexicana e iberoame ricana.

Formativo-cultural: Derecho, Psicología y Lengua extranjera.

Propedéutico: Tres asignaturas para la formación básica más general para los grupos de carrera que se clasifican de acuerdo al área de formación.

Esperando perfeccionar el perfil del egreso del bachillerato en su conjunto.

Son cuatro los campos de conocimiento en los que se inscriben todas las asignaturas del Plan de estudio:

a) Matemáticas

b) Ciencias Naturales

c) Histórico-social

d) Lenguaje, comunicación y cultura.

Asignatura: Matemáticas VI. área II.

Año: Sexto año de la Escuela Nacional Preparatoria, equivalente a quinto y sexto semestre del CCH.

Objetivo general:

Iniciar a los alumnos en el conocimiento, la comprensión y las aplicaciones del cálculo diferencial e integral, así adquirirán la preparación matemática básica para acceder al estudio de una licenciatura en el área de las Ciencias: Fsica-Matemáticas, Ingenieras, Químicas, Biológicas y de la salud.

Fomentar en los educandos su capacidad de razonamiento lógico, su espíritu crítico y su deseo de investigar y adquirir nuevos conocimientos para plantear, resolver e interpretar numerosos problemas de aplicación en la misma Matemática, en la Física, en la Química y en otras disciplinas.

Los cambios propuestos contribuirán al desarrollo del perfil del alumno a través de los siguientes aspectos:

- Capacidad del alumno para aplicar lo que ha aprendido durante el curso en el planteamiento y resolución de problemas de ésta y otras disciplinas.
- Reconocimiento de aspectos matemáticos que se relacionan entre sí, logrando un aprendizaje significativo.
- Importancia de las matemáticas, su relación con otras ciencias, con los avances científicos y tecnológicos y con la sociedad.
- Habilidad del alumno para la búsqueda, organización y aplicación de la información que obtiene en el análisis de problemas de la realidad.
- Capacidad del alumno de aplicar las técnicas de estudio de las matemáticas en otras disciplinas.
- Capacidad del alumno de aplicar los conocimientos matemáticos en actividades cotidianas para mejorar su calidad de vida y la de los demás.
- Aplicación de las matemáticas en el análisis de problemas ambientales que ayuden al educando a la mejor comprensión de éstos, que lo conducirán a actuar de una manera sana y productiva.
- Reafirmar el interés del alumno por la asignatura.
- Incrementar la participación de los alumnos en concursos de matemáticas, que fomenten su superación académica.

Objetivo específicos:

El curso de matemáticas VI, área II está planeado para impartirse con cinco horas de clase a la semana. Está estructurado en seis unidades:

> **Primera Unidad:** *Funciones,* se reafirma y profundiza los conocimientos adquiridos en Matemáticas IV y Matemáticas V. Se introduce el carácter de una función creciente, decreciente, continua y discontinua

Segunda Unidad: *Límite de una función.* En esta unidad se definirá el concepto de límite de funciones algebraicas y trascendentales, se calcularán límites de funciones cuando la variable independiente tiende a una constante, a cero, a más infinito y a menos infinito.

Tercera Unidad:*La derivada.* Se estudiará el significado de la derivada en diferentes contextos, obteniendo la derivada de funciones algebraicas y no algebraicas, explícitas, implícitas, funciones de funciones, usando las tablas para derivar, se calcularán las derivadas sucesivas de una función, finalmente se abordará el concepto de máximo y mínimo de una función, así como los puntos de inflexión y la concavidad.

Cuarta Unidad: *Aplicación de la derivada.* En esta unidad se consideran problemas de aplicaciones a la Física, a la Química, a la Economía y otras disciplinas, cuya solución implique el uso de la derivada.

Quinta Unidad: *La integral.* Se abordará los conceptos: de integral definida e indefinida. Se calcularán integrales propuestas, aplicando los métodos de integración: por partes, por sustitución, por cambio de variable y por fracciones racionales, así como alguno de los métodos de integración numérica.

Sexta Unidad: *Aplicaciones de las integrales.* En esta unidad se resolverán problemas de aplicaciones a otras disciplinas en términos de una integral.

El enfoque de este trabajo, es de acuerdo a los objetivos de la ENP, lugar donde se llevaron a cabo las prácticas docentes I, II y III; debe ser tal que se proporcionen contenidos conceptuales, actitudinales y procedimentales, así como el propedéutico hacia una licenciatura del área 2.

El propósito de la enseñanza de la derivada en el plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria.

Tomando en consideración el objetivo general (sección 1.1) de matemáticas VI y en específico la tercera unidad podemos decir que, el alumno debe de ser capaz de derivar una función y resolver los problemas planteados como una razón de cambo o derivada, relacionados con su entorno.

La tercera unidad, *"derivada"* consta de 30 horas, cuyo contenido es el siguiente:

1.- Incrementos.

2.- Definición de derivada y son notaciones.

3.- Obtención de la derivada a partir de la definición.

4.- Teoremas de derivación.

5.- Derivada de una función de funciones.

6.- Tablas de formulas derivación.

7.- Derivada de una función explícita.

8.- Derivadas sucesivas de una función.

9.- Interpretación geométrica y física.

10.- Ecuación de la tangente y de la normal a una curva.

11.- Cálculo de velocidad y aceleración.

12.- Máximos y mínimos relativos de una función.

13.- Puntos de inflexión y de concavidad de una curva.

Estrategías didácticas

Entre las estrategicas didácticas (actividades de aprendizaje) sugeridas en el plan de estudios podemos mencionar las siguientes:

- El profesor, a partir de determinados problemas de la realidad y de otras disciplinas, discutirá con el grupo la utilidad y la importancia del concepto derivada en el Cálculo diferencial e integral, en las Matemáticas.
- El alumno en forma individual o por equipo, bajo la asesoría de su profesor y en el aula:
  - Calculará el incremento de una función para un incremento dado de la variable.
  - Calculará la derivada de funciones como: $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = x^2 - 2$; $f(x) = \frac{x+1}{x}$
  - Usará las tablas para derivar cualquier función.
  - Determinará los puntos máximos, mínimos y de inflexión: $f(x) = x^5 - 5x^3$, indicando en donde la función es creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
  - Se apoyará con material audiovisual y *software* educativo referente a la unidad.

1.2. Aspecto psicopedagógico del pensamiento matemático

Las matemáticas al igual que la música son importantes en sí mismas. Esto, por supuesto sin negar la utilidad de las matemáticas en la ciencia pura y aplicada, de hecho nunca ha sido tan útil como en la actualidad.

¿Qué son las matemáticas?

No es posible plasmar en una definición una respuesta satisfactoria a ésta pregunta. Todos los intentos en esa dirección siempre se diluyen en la ambigüedad y la confusión. Algo que se puede hacer es expresar algunas vivencias experimentadas por profesionales de la matemática.

Desde luego, lo que se expresará a continuación es en gran medida subjetivo. Se trata de puntos de vista, creencias, sentimientos, con respecto a la matemática.

"Las matemáticas son un lenguaje cuyo propósito, en su disciplina, es facilitar el planteó y solución de problemas" (Berlanga, Bosch, [26])

"Las matemáticas son aquel tema que nada tienen que ver con observación, nada con experimentación, nada con la inducción, nada con causalidad." (Thomas Henry Huxley, [20]).

"Es difícil dar una idea de la vasta extensión de las matemáticas modernas. La palabra "extensión"no es la adecuada; quiero significar una extensión que está llena de hermosos detalles, no una extensión uniforme, como una llanura desnuda, sino una región de un hermoso país, vista primero a distancia, pero que merece ser recorrida de un extremo al otro y estudiada hasta en sus menores detalles, en sus valles, sus cursos de agua, sus peñascos, sus bosques y sus flores." (Arthur Cayley. [8]).

"La matemática como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplátiva y el deseo de perfección estética" (¿Qué es la matemática?, Courant. [24]).

"Las matemáticas son la única ciencia que nunca ha perdido y siempre gana" (Jean Le Rond D'Alembert. Mathematics as a cultural activity. The mathematical Intelligencer. [20],17p)

"Las matemáticas son enteramente libres en su desarrollo, sus conceptos, introducidos por medio de definiciones precisas, son restringidos unicamente por la necesidad de no ser contradictorios y coordinarse con conceptos previos. La esencia de las matemáticas yace en su libertad " (George Cantor, Mathematicas Thought from ancienct to modern times. M. Kline, [20], 15p)

"Las matemáticas son la ciencia que nos presentan la mejor oportunidad para observar el funcionamiento de la mente y tienen la ventaja de que por medio de su cultivo nosotros podemos adquirir el habito de un razonamiento metodico que puede ser aplicado posteriormente al estudio de otros temas y puede guirarnos en los propositos de nuestra vida." (Marie Jean Condorcet, Mathematical Intelligencer, [20],39p)

" Las matemáticas vistas correctamente, no solo poseen certeza, sino tambien una belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de la escultura, sin ninguna petición a las partes más debiles de nuestra naturaleza, sin los trucos de la pintura o la música, aunque sublimemente pura y capaz de una estricta perfección, como aquella, que unicamente el arte superior puede mostrar" (Bertrand Russell, [20], 27p)

¿Existen diferencias entre las matemáticas puras y aplicadas?

Peter Hilton [25]) menciona que: "Los matemáticos aplicados encuentran a menudo piezas de matemáticas, desarrollan el instrumento (modelo científico-matemático que necesitan para la expresión de su problema científico). Se construye primero un modelo científico de la situación real que se estudia. Si el problema requiere de un modelo físico (no necesariamente observado, sino postulado) y leyes físicas (leyes de conservación de energía). Entonces se construye un modelo matemático para razonar el modelo científico (por ejemplo, una ecuación diferencial tal como la de **Navier-Stokes**, o un álgebra de Lie de dimensión infinita. Se hacen cálculos, basados en experimentos, en casos especiales y se retroalimenta la información en el modelo matemático para formular hipótesis y conjeturas. Por supuesto, se puede regresar al mundo real en algún punto del proceso y decidir modificar tanto el modelo científico como el matemático. También se puede hacer un modelo matemático del modelo matemático. Lo anterior se puede aplicar a la matemática pura. El problema viene del interior de las matemáticas. Para resolver podría necesitar o desear generalizar el problema para poder aplicar una teoría ya existente o para tener un marco teórico dentro del cual desarrollar una solución. Se puede también realizar experimentos, en el sentido de considerar casos especiales obtenidos al especificar ciertas variables o al simplificar el modelo (sin deformarlo)".

Por lo anterior, no hay diferencia entre matemáticas puras y aplicadas hay solo una matemática. Por supuesto existe la diferencia en cuanto a si el origen del problema científico es de las matemáticas mismas o del mundo real. El matemático aplicado cuando batalla con una ecuación diferencial está comportándose como un matemático puro. Podría argumentar que el matemático puro tiene oportunidades de aplicaciones que trascienden a las de un matemático aplicado. Podemos aplicar matemáticas para resolver problemas de física. Sin embargo, dentro de las matemáticas, es claro de que se puede aplicar, por ejemplo, el álgebra para resolver un problema de geometría o aplicar geometría para resolver un problema de álgebra (P. Hilton, [25]).

Lo anterior, muestra a grandes rasgos lo difícil que es decir que son las matemáticas.

¿Qué entendemos por pensamiento matemático?

Cuando hablamos del pensamiento humano, del razonamiento, de la memoria, de las abstracciones o de procesos mentales, dirigimos nuestra mirada hacia la psicología y el estudio de funciones mentales. **¿De que se podría tratar entonces el pensamiento matemático?** Sabemos por ejemplo que la psicología se ocupa de entender cómo aprende la gente y de cómo realizan diversas tareas y cómo se desempeña en su actividad.

Los investigadores sobre el pensamiento matemático se ocupan de entender cómo interpretan las personas un contenido específico, matemático. Se interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos matemáticos.

Cantoral (en el libro Desarrollo del pensamiento matemático, [14], 7-9 pág), describe diferentes formas de interpretar el proceso de desarrollo del pensamiento matemático; por un lado como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre el proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otro lado, se entiende como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas.

De ésta última perspectiva, el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana.

De esto se entiende que el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otro procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis.

Aspecto psicológico del pensamiento matemático

Debemos de interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática. Del mismo modo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos.

Hace algún tiempo, destacados matemáticos como Hadamard, Poincaré, Polya y Freundenthal, se interesaron por explorar la psicología de razonamiento matemático y lo hicieron mediante estudios de tipo instrospectivo al analizar su propia actividad personal. (Desarrollo del pensamiento matemático, página 19, [14]). Del mismo modo, la obra de Piaget tuvo una influencia considerable sobre el esclarecimiento del pensamiento humano; más específicamente, sus estudios sobre la construcción de la noción de número, de las representaciones geométricas, del razonamiento proporcional y del pensamiento probabilístico, ha tenido una fuerte influencia en el entendimiento de las nociones matemáticas (Cantoral [14], Manual del docente [31]).

El pensamiento matemático opera sobre una red compleja de conceptos, unos avanzados y otros más elementales; quizá por ello los estudiantes pueden tener dificultad en la comprensión de algunos conceptos matemáticos, como por ejemplo las ecuaciones diferenciales, las integrales, las funciones y las variables.

En contraste a una enseñanza tradicional que permite al alumno a digerir pensamientos matemáticos acabados, la resolución de problemas (matemáticos) permite al alumno establecer conjeturas, demostrarlas o encontrar un contraejemplo y hasta generalizar si es posible a otra dimensión diferente a la que se ha trabajado.

Factores como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación y los aspectos linguísticos desempeñan un papel fundamental durante el proceso de la conformación de las ideas matemáticas entre los estudiantes.

Alguna interrogantes son de suma importancia para la educación: ¿Cómo puede estimularse a los alumnos para que tengan iniciativa y se hagan responsables de su propio proceso de aprendizaje (conceptos matemáticos)? El éxito del maestro depende, en gran medida, de su habilidad para motivar a los estudiantes, lo cual no es bajar el nivel de aprendizaje o de enseñanza. Sin descartar que influye el ambito social-cultural en el que se desenvuelve el alumno.

Nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes del bachillerato (adolescentes) operan con las fórmulas, cómo entienden los conceptos que encierran las formulas, cómo construyen y comparten signficados relativos a algunos conceptos matemáticos. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza (maestro expone y alumno aprende).

Es muy distinto enseñar al adolescente que a los alumnos de otras edades, pues poseen características propias. El paso de la niñez a la juventud en una sociedad se considera traumático. El adolescente es caprichoso y díscolo, estrechamente unido a sus compañeros y complacientes con ellos, pero rebelde con los adultos, grandes en las ideas, pero pequeño en la persistencia y analítico hasta la tortura en lo que se refiere a sus derechos en el seno de la familia y a su posición frente al sexo opuesto (Manual del docente, página 68 [31]). El alumno no adquiere rasgos, destreza o concepto alguno, sino lo que es capaz de asimilar en su pensamiento

Aspecto pedagógico del pensamiento matemático.

Las matemáticas no son triviales y algunas personas se les dificultan más que a otras, pero lo cierto es que todo el mundo puede comprenderlas y disfrutarlas. Sin embargo, para esto hace falta que nos demos cuenta de que lo principal en las matemáticas es entender que es imposible plantear o resolver un problema cuando no entendemos de qué se trata. Cuándo nos damos cuenta de esto, entender se puede volver un vicio pues entender es una de las cosas que nos puede producir placer o satisfacción y ésto sucede porque no es fácil y requiere esfuerzo de nuestra parte.

Enseñanza del pensamiento matemático.

Debido a las diferencias entre docentes, ciertos elementos de uno o de varios métodos pueden ser eficaces en manos de un maestro, pero de valor dudoso en los otros. También hay que tener en cuenta las diferencias en el nivel de capacidades de los alumnos para decidir que técnicas se usarán. Los estudiantes cambian de clase a clase y de año en año. El mismo docente sufre cambios.

No hay un método para enseñar matemáticas, así como tampoco hay ninguno que resulte siempre igualmente eficaz para un mismo maestro en todas las situaciones educativas que se le presenten.

La enseñanza de las matemáticas por medio de resolución de problemas, constituye en herramientas y recursos para el desarrollo del pensamiento, la independencia y las capacidades creadoras.

Sin embargo, el uso de problemas por métodos conductistas, no ha provocado como tal un cambio en la formación de los alumnos ya que en general se usan de forma mecánica y rigida. No se aprovechan los aspectos docentes-cognitivos presentes. Se hacen un manejo estático, rígido sólo en el ámbito propio de la situación planteada. Se trabaja más en cuánto a la orientación sobre la base del contenido y no del pensamiento (Manual del docente, [31]).

Por un lado no descartamos que está enseñanza rinda frutos, pues nos negariamos a nosotros mismos, como parte de ese proceso; lo que está en juego es quizás el contexto y época en que fuimos educados. Por otro lado habrá estudiantes que no logren asimilar los conceptos, pero lo que si es seguro es que éstos serán minoría. El extremo será no buscar nuevas posibilidades y negarse a aprender con ellos.

Aprendizaje de las matemáticas

Los docentes no deben suponer que los estudiantes de edad parecida, inteligencia similar o que simplemente cursan el mismo grado, sean semejantes en su aprendizaje. Su actitud hacia lo que aprenden es tan personal como sus rostros. Los caminos que siguen para resolver problemas son tan propios como personales.

El docente que no tiene en cuenta las diferencias individuales que hay entre sus alumnos no puede promover eficazamente en ellos un desarrollo del pensamiento matemático. El aprendizaje de las personas crece a medida que van madurando. Los docentes necesitan saber los aspectos y factores que influyen en dicho proceso (Ver sección 1.2).

Cantoral, menciona que la resolución de problemas se sugiere como medio para el aprendizaje de las matemáticas, incluye adquirir un dominio de las matemáticas, hacer conjeturas y probarlas, es decir, hacer matemáticas en vez de solo aprender el producto del pensamiento matemático. Y si además de esto consideramos que el conocimiento no se transmite sino que es construido, entonces la manera idónea de llevarlo a cabo es mediante la resolución de problemas no rutinarios. El estudiante al resolver un problema, intencionalmente busca los significados de las ideas matemáticas y discute el sentido de las soluciones.

La relación de mediación (enseñanza-aprendizaje) se da a partir de dos preguntas ¿Qué deben de aprender los alumnos? y ¿cómo van a aprender? Para el nivel educativo que nos ocupa, tenemos contestada de alguna manera, la primera pregunta, ya que la UNAM a través de los Consejos Académicos del Bachillerato (CAB) señala los contenidos fundamentales a través del Núcleo de Conocimientos y Formación Básica. Para la segunda pregunta se explicará a lo largo de éste trabajo.

Evaluación del pensamiento matemático

La manera de constatar que los diferentes tipos de contenidos han sido asimilados por los alumnos, a través de las diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje y medir el progreso de la enseñanza eficaz del maestro, es realizando una evaluación.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Matemática Escolar del Consejo Nacional de Profesores de Matemática norteamericano (National Coucil of Teachers of Mathematics, NCTM), se define evaluación como " el proceso de recolección de evidencias con respecto al conocimiento del estudiante sobre matemáticas, su capacidad para utilizarlas y su disposición hacia ellas y el proceso de hacer inferencias a partir de tales evidencias para una variedad de propósitos "(NCTM, 1995).

La evaluación ha producido en varias ocasiones efectos negativos en la enseñanza, ya que muchas veces ella se ha convertido en un fin en sí mismo y no en un medio para indicarnos el nivel de aprendizaje que los alumnos tienen. Lo anterior ha distorsionado su función y en algunas ocasiones se confunden sus finalidades al utilizarse, por algunos, como herramienta para controlar o a veces hasta para chantajear a los estudiantes y es un poder que en manos de autoridades y docentes inescrupulosos pueder ser perjudicial.

Para darnos cuenta de lo positivo que tiene la evaluación en nuestras aulas, se necesita en primer lugar tener una idea clara de ¿Por qué se hace la evaluación?, ¿Qué es lo que estamos evaluando? y ¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?.

¿Por qué se hace la evaluación?

Nuestra respuesta debe tomar en cuenta tres partes, **para un estudiante**, es una oportunidad de mostrar su entendimiento y sus habilidades matemáticas. Además, es una conversación con el profesor sobre qué se ha aprendido y qué cosas permanecen oscuras, y sobre qué elementos fueron de utilidad y cuáles no en el aprendizaje del estudiantes; **para un profesor**, es un proceso en el cual reunimos evidencias, hacemos inferencias, llegamos a conclusiones y actuamos según dichas conclusiones (Principios orientadores de la evaluación constructiva, [16]); y **para los directivos y para los de la institución**, Es uno de los principales instrumentos que ellos disponen para conseguir las finalidades institucionales, que muchas veces se pierden entre tanto burocratismo y actividades sin sentido. También ayuda a verificar la calidad de la institución educativa (Función y ventajas de la evaluación, página 15, [15]).

¿Qué es lo que estamos evaluando?

Sabemos que en un clase de más de treinta alumnos, cada uno terminará una actividad con un entendimiento distinto. Es este aprendizaje el que queremos revelar a través de nuestra evaluación. Sabemos lo que enseñamos. Lo que no sabemos es qué aprendió cada alumno. Una evaluación efectiva revela las diferencias entre lo que se enseña y lo que se aprende.

Hemos tendido a etiquetar como "evaluación"solamente a un cierto subconjunto de nuestra forma de recabar información e intercambiarla. La evaluación es el intercambio de información con relación al aprendizaje del alumno, un profesor que observa a un alumno trabajando, que lleva a cabo discusiones en clase, que platica con sus alumnos sobre su desempeño, está evaluando. (evaluación observativa, 25p, [16]). La asignación de calificación no es evaluación; es una manera de codififcar la información sobre la evaluación. Como profesores, estamos evaluando todo el tiempo

De acuerdo con el momento en que se realice la evalución, ésta puede ser: **inicial**, la cual permite conocer el nivel de preparación, madurez, interés, necesidades, aptitudes, etcétera de los alumnos para adoptar los recursos y las estrategias para el logro de los objetivos; **continua**, que permite analizar los cambios de conducta de los alumnos con base en las experiencias de aprendizaje y la relación con las actividades, capacidades, habilidades, actitudes y conocimiento, mediante evaluaciones parciales, para planear nuevas actividades de reforzamiento que enriquezcan y faciliten la práctica docente del maestro y la participación consciente el alumno; y **final**, que permite saber la conducta del alumno al finalizar el curso. Se considera como la concentración de las evaluaciones continuas y la integración de los contenidos de apredizaje que han sido trabajados a través del curso (Evaluación educativa, [30]).

De esta manera el profesor mide el progreso, establece las bases de la nueva enseñanza, decide las bases de la labor complementaria necesaria y evalua su propia enseñanza (Evaluación en el aula, [21]).

¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?

La evaluación establece los términos de contrato didáctico. El término contrato didáctico se refiere al entendimiento compartido por los dos partidos participantes (profesor y alumno) en la transacción de aprendizaje sobre lo que constituye el éxito en el aprendizaje y en la educación (modelando una buena práctica matemática educativa, 23p [16]).

La evaluación constructiva debe incorporar una gama de tareas para cumplir con nuestras obligaciones del contrato didáctico. La clave del contrato es la siguiente, es responsabilidad del estudiante exhibir las matemáticas que ha entendido y es responsabilidad del profesor proporcionar la oportunidad y los medios para que se dé dicha exhibición (vigilancia de la buena práctica, 31p [16]).

Las funciones de la evaluación son la retroalimentación, refuerzo, tratamiento necesaria para remedir la falla, métodos adecuados que convenga seguir y suministrar información para poder revisar la totalidad del programa de estudio. La escuela moderna se interesa en evaluar la comprensión, el conocimiento, la aparición, la destreza, la capacidad y el aprovechamiento. Para ello, el maestro tiene que observar al alumno en el salón de clase, en diversas actividades y aplicar pruebas. La evaluación no debe hacerse con base en un solo tipo de instrumento (funciones y medios de la evaluación, [21]).

Para evaluar se necesita establecer criterios y aplicar instrumentos de medida a la calidad de los procesos y productos educativos y su impacto en el rendimiento escolar, para ayudar al mejoramiento de la enseñanza-aprendizaje.

Berline, 1987 (citado por Diaz Barriga y Hernández, 1998) clasifica los intrumentos de evaluación en términos del grado de formalidad y estructuración con la que se hacen las evaluaciones. Este autor cataloga a los instrumentos como de tipo: informal (observación y exploración), semiformal (ejercicios, tareas y ensayos) y formales (pruebas objetivas, mapas conceptuales, pruebas de ejecución, listas cotejables y portafolios), más detalles ver manual del docente, [31].

Cualidades que debe tener todo instrumento de evaluación: validez, confiabilidad, representatividad, poder discriminativo y factilibidad (evaluación de los aprendizajes escolares, 21p [15]).

Cuando apreciemos conscientemente todas las formas de evaluación, tendremos muchas más probabilidad de transmitir a los estudiantes que lo que importa es qué y cómo están aprendiendo.

1.3. Aspecto didáctico sobre el pensamiento matemático

La relación didáctica la establecen el profesor y los alumnos, proveyéndose de los medios adecuados para lograr un buen aprendizaje de los temas impartidos. Teniendo el profesor el compromiso fundamental de mantenerse actualizado en la asignatura que imparte y el dominio de la materia. Esto es indispensable para alcanzar el éxito en cualquiera de las tareas de la enseñanza y aprendizaje.

La didáctica debe considerar cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Decir que se deje a los estudiantes solos y que ellos construirán sus conocimiento, o ponerlos en grupos y dejar que se comuniquen al estar resolviendo problemas, no ayuda mucho. Debemos de tener presente que las matemáticas que se les quiere enseñar han requerido de miles de años del estudio de sobresalientes matemáticos. Desde el punto de vista didáctico, en el proceso de enseñanza de los conceptos matemáticos el profesor los debe presentar primero en un contexto para que los investiguen los alumnos, el contexto debe de ser conocido y con significado para los alumnos, permitiéndoles resolver problemas. El trabajo del profesor es proponer una situación de aprendizaje mediante la cual los estudiantes deben buscar una solución, no una respuesta que sea solamente para complacer al maestro. Para que el problema promueva el aprendizaje de ideas matemáticas efectivas, los estudiantes deben asimilar el problema como "su problema".

La didáctica es la mejor forma de organizar los contenidos y llevarlos a cabo en el aula. El profesor debe junto con los alumnos desarrollarlos de la manera más idónea, de modo tal que rinda frutos positvos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Ante ésta situación es necesario realizar una planeación didáctica adecuada con base en una autoevaluación de nuestra práctica a través de video-filmaciones e integración de un trabajo colaborativo con profesores.

Nuestra planeación didáctica sobre el tema de la derivada está conformado por dos partes; la primera es sobre el análisis de datos y construcción de un modelo matemático (modelo exponencial); y la segunda es dar el modelo logístico, como una mejora del modelo anterior.

Capítulo 2

Propuesta didáctica

El objetivo de este capítulo es desarrollar de manera detallada la secuencia didáctica, que muestra, una de las tantas soluciones para que el alumno logre entender el concepto de la derivada.

El capítulo 2 consta de tres partes, que son las siguientes:

La primera parte **Planteamiento del problema**, se trata de ordenar las ideas, de preguntarse a sí mismo ¿Hacia dónde se quiere ir?, o lo que es lo mismo ¿se tiene un idea del problema?, aquí es conveniente volverse a preguntar ¿tengo los medios para ir?, es decir, ¿se tiene alguna propuesta de solución? y ¿se tiene los medios para probar las soluciones que se proponen?.

La segunda parte **Exposición de la propuesta didáctica**, es una de tantas alternativas para dar solución al problema expuesto en la primera parte de este capítulo. La propuesta se realiza por medio de una secuencia didáctica, que logra a que el alumno comprenda y aplique a lo largo de su futuro académico.

Y la tercera parte **Conocimientos matemáticos del profesor**, propone algunos referentes necesarios sobre la formación de los profesores, para que puedan llevar a cabo en sus clases la secuencia didáctica presentada en el capítulo 3.

2.1. Planteamiento del problema.

Antes de definir nuestro problema, debemos de tener claro lo que es un problema.

Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro *How to solve it* en 1945. Sin embargo, en su libro *Mathematical Discovery* (Polya, 1961), se vio obligado a proporcionar una definición. Pero no para empezar su disertación, sino después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas:

"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata ".

Teniendo en cuenta lo anterior, empezemos a plantear nuestro problema de investigación:

A lo largo de la historia, algunos investigadores de la matemática se han preocupado por dar una fundamentación y generalización de conceptos matemáticos. Ha ocasionado una sofistificación y abstracción de ideas menos intuitivas y haciendo referencia a aplicaciones de rigor matemático, más difícil de entender y de aprender.

La mayoría de los alumnos no alcanzan a tener un verdadero significado de las matemáticas, por eso es un reto pedagógico mayor del docente, la manera de transmitir el conocimiento a los alumnos o la forma de enseñarlo en el aula, de modo que ellos logren comprender y ser capaces de aplicar los conceptos matemáticos en una determinada situación. Entre el problema que podemos mencionar esta el siguiente:

¿Por qué los alumnos no logran comprender ni aplicar las "conceptos básicas"del cálculo diferencial?

Como "conceptos básicas", entendamos conceptos de límite y la derivada como límite de pendientes, que se esconden debajo de una capa de formalismo y de deltas-épsilon.

Las causas de dicho problema pueden ser:

- No pasar por etapas naturales de desarrollo conceptual (desarrollo basado en diferencias).
- Enseñar ideas matemáticas abstractas, como es el límite, convergencia, continuidad y diferenciabilidad en el tema de cálculo diferencial.

La introducción del tema debe ser intuitiva, razonable, haciendo referencia a aplicaciones, pero no con necesidad de rigor matemático. La necesidad de un mayor formalismo sigue en forma natural para facilitar la solución de más problemas.

La enseñanza del Cálculo, se debe orientar en la génesis que tuvo lugar en la historía de esta ciencia matemática.

Historia del cálculo diferencial(siglos: XVI-XIX)

Primeros razonamientos carácter infinitesimal

Se inició con el problema de las tangentes, al principio sólo se podía determinar para ciertas curvas, entre los matemáticos que podemos nombrar al respecto están:

Pierre de Fermat: Alrededor de 1630 y 1640, el método que empleó fue analítico:

> Cálculo de tangente, sea una curva definida por la función y = f(x) y se trata de encontrar la tangente en el punto de la curva (a,f(a)).

Barrow: Se enfocó más a lo geométrico, que a lo analítico, su método fue:

> Cálculo de tangentes, el cual se basaba en un triángulo característico (triángulo rectángulo, con hipotenusa, secante de la gráfica de la función y las longitudes de los catetos son muy pequeñas).

Precursores del cálculo. Siglos XVI y XVII

Durante el siglo XVI

En este siglo, el razonamiento matemático, consiste en consideraciones empíricas, es decir, son motivadas por la física; todavia faltaba un lenguaje lógico y notaciones adecuadas, para representar los razonamientos. El desarrollo del cálculo en este siglo, se presentan los siguientes problemas: Máximos, mínimos, tangentes (geométrico) y la cuadratura del círculo (cálculo de áreas), retomando ideas del método de Arquímedes (consideró el área como suma de segmentos).

El método de Arquímedes (290, a.c) trata del problema de cálculo de áreas, es una mezcla de cantidades infinitesimal (es un número que no es cero, pero es tan pequeño como se desea) y de mecánica. Si el método no hubiera estado perdido durante tanto tiempo, probablemente el desarrollo del cálculo infinitesimal se hubiera producido antes.

Primera mitad del siglo XVII

Durante este periódo, no existían profesores de matemáticas, en comparación con los profesores de la actualidad. Las personas que desarrollaban la matemática eran profesionistas como: Juristas, teólogos, arquitectos, diplomáticos, entre otros, que durante su tiempo libre se ocupaban en investigar matemáticas, por lo que solían reunirse con un grupo de trabajo "*científicos-aislados*". Los descubrimientos se daban a conocer por medio de cartas a otros amigos, conocidos y científicos, que tuvieran interés sobre el tema.

Segunda mitad del siglo XVII

Las primeras academias científicas: Royal Society de Londres, Académie des Sciences de Paris, Academias de Berlín y San Petersburgo, editaron las primeras revistas científicas.

Los problemas que se presentaban en este siglo, eran acerca de problemas de nacionalidad (obras de matemáticos los criticaban de excelentes o decepcionantes, dependiendo de su nacionalidad) y disputas patrióticas.

Fundadores del cálculo. Siglo XVIII

Entre los principales fundadores del cálculo, se pueden mencionar a Isaac Newton (inglés, nació en Grantham, Lincolnshire en 1642 y murió en 1727, hijo de un labrador, acomodado, de pequeño jugaba con juguetes mecánicos) y Gottfried W Leibniz, (alemán 1646-1716, precoz, de familia erudita, desde muy pequeño ya dominaba: idiomas, filosofía, teología, matemáticas y derecho).

La prioridad de la invención del cálculo tiene un carácter anecdótico.

Isaac Newton: En su obra: "Principia"1670-80 y publicación: 1687. Desarrolló el cálculo infinitesimal con contenidos geométricos excesivos, lo cual le resto importancia a sus métodos.

Gottfried W Leibniz : El desarrollo de su obra fue en 1680 y su publicación en 1684. Desarrollo el cálculo de manera algebraica y simbólica. Incrementó una nueva herramienta: Notación

La controversia entre Newton y Leibniz.

La disputa dió origen a una guerra entre matemáticos ingleses, seguidores y defensores de Newton como inventor del cálculo y los matemáticos del continente, que apoyaban a Leibniz.

La relación entre Newton y Leibniz, era buena. Newton, en su obra "Principia", reconoce que Leibniz está en posesión de un método de cálculo. Durante varios años se intercambiaron cartas sobre problemas matemáticos de interés para ambos, las cartas se enviaban a través de H.Oldenburg (testigo), en ese momento era secretario de Royal Society de Londres.

En 1676, Leibniz comentaba a Newton sobre los métodos de cálculo para resolver problemas inversos de tangente, mientras tanto Newton le envió dos epístolas, en la primera se trataba del teorema binomial y de series, y en la segunda la envió por medio de anagramas (baccda), evitando así entrar de nuevo en polémica, (anteriormente estuvo en polémica con el ingles Robert Hooke (sobre la teoría de la luz), razón por la cual se agudizó su desconfianza. Dicho anagrama presentaba errores en la transmisión, por lo que tardó en llegar a Leibniz más de medio año. Éste último le respondió por medio de una carta, explicándole las ideas sobre el cálculo "problemas de tangentes, se pueden reducir a los problemas de cuadraturas".

¿Cómo se generó la polémica sobre la prioridad?

Wallis le dijo a Newton, "Que en Holanda, el cálculo que se usaba era atribuido a Leibniz". Por lo que a finales del siglo XVII, empezaron a circular rumores que acusaban a Leibniz de haber plagiado el "método de Newton". Esto se debió a que los trabajos de Leibniz y Bernoulli, mostraban las posibilidades que el cálculo tenía, como herramientas para la investigación científica, al mismo tiempo apareció en el continente el primer libro sobre el cálculo diferencial de Leibniz: "Analyse des Infiniment petits"del marqués de LHopital.

La primera aparición impresa que recoge los rumores de plagio se presenta en un libro de un suizo, Fatio de Duillier, afincado en Inglaterra, amigo de Newton, el cual había intercambiado cartas con Leibniz, a través de Huygens. La controversia quedaba oficialmente abierta.

La Royal Society decide nombrar una comisión para estudiar el problema.
En el informe de la comisión, aunque no acusaban a Leibniz de plagio, sí sembraban suficientes dudas como para desprender esa opinión. Leibniz solicitaba a la Royal Society reconocieran la independencia en el desarrollo de su método.

La situación se acabó con una guerra entre matemáticos ingleses y los del continente, derrotados al final los primeros. Al comienzo del siglo XIX, un grupo encabezado por Charles Babbage propone adoptar la notación de Leibniz, de esta manera marcó de forma simbólica el fin de la controversia sobre la prioridad.

Fundamentación del cálculo.

Se inició con las matemáticas de la Revolución Francesa, cuyo iniciador fue, Joseph Luis Lagrange, con su artículo "Theórie des Fonctions anaytiques" en 1797, el cual desarrollaba la idea de definir la derivada de una función f en el punto x, como un cociente. Hasta el siglo XIX se realiza una fundamentación rigurosa de la derivada, empezaron a definir con rigor, el concepto de límite, como soporte a la definición de derivada. En 1817 Cauchy y Bolzano, definieron la derivada de una función $f(x)$ como la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, cuando Δx se aproxima a cero.

Notación del cálculo

La notación del cálculo fue también objeto de polémica entre Newton y Leibniz. De hecho, los ingleses utilizaron una notación distinta a la del resto del continente hasta bien entrado el siglo XIX. Newton, en Inglaterra, investigó sobre la fluxión de la fluente, es decir, la derivada de una variable con respecto al tiempo, tenía su propia notación, la fluente (magnitud fluyente) la denotaba por x o por $f(x)$ y para la fluxión (razón de cambio-derivada) $\dot{x}$ o $f(\dot{x})$. Y en Alemania manejaban la notación de Leibniz, es decir, la diferencial de una variable con respecto a otro variable, consistía en escribir lo siguiente: $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{df(x)}{dx}$

Leibniz, introduce dicha notación, sin antes haber descubierto las reglas de derivación. Después de la polémica entre Newton y Leibniz, en Inglaterra se adoptó la notación de Leibniz, ya que era más explícito lo que se deseaba calcular.

Entre los matemáticos que fundamentaron el cálculo, se encuentran Lagrange y Cauchy, que usaban su propia notación, y' ó $f'(x)$, y $D_x y$ ó $D_x f(x)$, respectivamente.

Regresando a nuestro problema de investigación, nos preguntamos:

¿Por qué no dejar que estas mismas ideas sirvan también a nuestro estudiantes para generar su concepción de las partes centrales del cálculo diferencial?

Con ésto no se pretende dar en clase un tratamiento paralelo a la historia, sino rescatar los métodos intuitivos y darles una fundamentación.

Las fases para el desarrollo del problema de investigación son las siguientes:

1.- Introducir primero la diferencial como un concepto básico (fundamentada en un problema específico).

2.- Surgen los procesos de aproximación de limite (introducción a la derivada).

3.- El concepto de límite aparece posteriormente como una formalización de las conceptos previos.

Con esto pretendemos que el alumno maneje los conceptos de: aproximaciones, tendencias y conozca la razón (como cociente y como operador) e ideas intuitivas del operador.

2.2. Exposición de la propuesta didáctica.

Se presentan ideas para introducir el concepto de derivada en forma significativa; con un empleo mínimo de formalismo matemático al principio. El concepto fundamental: "la determinación de cambios de una magnitud que depende de una segunda magnitud en relación a los cambios de esta última"se deduce paso a paso. De la creciente precisión del concepto de razón de cambio sigue en forma natural la necesidad de más formalismo matemático, como la notación y el cociente diferencial.

Parece ser entonces que el concepto fundamental del cálculo diferencial está presente en la vida diaria y que muchas personas efectúan operaciones intelectuales de acuerdo a este concepto sin poder darle un nombre explícito. Éste concepto fundamental es la razón de cambio y su determinación. Como los alumnos viven en un mundo físico, biológico, económico, político y social que está caracterizado por cambios continuos, es muy útil describir y cuantificar estos cambios y variaciones a través de modelos matemáticos. Como ejemplo se puede ver como cambia la población en el tiempo.

La propuesta didáctica que se desarrolla en éste trabajo, es por medio de una <u>secuencia</u> <u>didáctica</u> <u>de</u> <u>un</u> <u>tema</u>. Pretende que el alumno de bachillerato, en particular el que cursa el área II de la ENP, tenga la posibilidad de una comprensión auténtica y con esto la aplicación creativa, a lo que Freundentrhal (1963, [3]) llama matematizar. Esta tendencia intenta solucionar un problema más profundo, el de dar significado a los contenidos aprendidos (Wenseburger, 1986).

Por medio de una situación de la realidad, se pretende dar una de tantas soluciones al problema de investigación (que el alumno logre comprender y aplicar a lo largo de su futuro académico, los conceptos básicos del cálculo diferencial). La motivación principal es planteandonos la siguiente pregunta:

¿Como se desarrolla una población en el tiempo?,

Lo cual se expone, en dos partes:

1. Análizar los datos del INEGI, para llevarlos al mundo de los símbolos, posibilitando el trato matemático.

   Primeramente se identifica el problema en contexto general, despúes se esquematiza, se formula y visualiza el problema de varias maneras, de modo que se descubra relaciones y singularidades, logrando con esto tranferir el problema real a uno matemático.

Lo anterior nos conduce a la construcción de un modelo matemático, modelo de Malthus: $P(t) = P(0)(tasa + 1)^t$, donde el tiempo en nuestro caso es por año y la tasa es constante; en la segunda parte, dicho modelo tiene que ver con la solución del modelo de malthus: $P(t) = P(0)e^{tln(tasa+1)}$. Detras del modelo, se encuentra el concepto clave: Razón promedio de cambio.

Una vez establecido las hipótesis y suposiciones del modelo matemático, el siguiente paso es comparar los datos obtenidos del modelo y los datos reales, de tal manera que empezemos a criticar al modelo, ¿qué tan semejante son los datos obtenidos mediante el modelo y los datos obtenidos de la realidad?, ¿en qué casos es posible?, y ¿porqué?.

Finalmente todo esto nos conduce a mejorar el modelo, es decir, en la necesidad de un nuevo modelo, un poco más acorde a las circunstancias de la vida.

2. Representar una situación real, mediante una fórmula, esto quiere decir, dar el modelo: Modelo de Verhulst (Modelo de Malthus + correccion), dando lugar a estudiarlo en tres etapas:
   a) Necesidad de formular un concepto matemático nuevo: La razón de cambio instantánea, que dicho de otro modo, es la derivada.
   b) Hablar del modelo de Malthus.
   c) Hacer una pequeña corrección al modelo de Malthus.

   Logrando con esto refinar y ajustar el modelo más a la realidad, esto no lleva a combinar e integrar modelos; lo mismo que se hizo en la primera parte, se establece las suposiciones e hipótesis que sustentan al modelo de Verhulst, el último paso es comparar los datos obtenidos del modelo con los de la realidad, quiere decir, simular la solución del modelo.

   En esta segunda parte, es indipensable discutir el concepto de ecuación diferencial y los mecanismos (o las herramientas) para obtener su solución. Entendiendo como herramientas los diferentes softwares para encontrar la solución, no necesariamente algebraica, pero si geométrica.

Todo lo anterior se logra con la aportación y disponibilidad, tanto del profesor como de los alumnos, teniendo como apoyo los recursos materiales.

Lo anterior lo abordamos a lo largo de 10 sesiones de 50 minutos (500 minutos) cada una. Cada sesión el alumno junto con el profesor, realiza diversas actividades en clase o extra clase (secuencia didáctica), ya sea para complementar o reafirmar lo visto en la sesión.

2.3. Conocimientos matemáticos del profesor

Ésta sección tiene como propósito central proponer algunos referentes necesarios sobre la formación de los profesores de bachillerato con énfasis en matemáticas, para que puedan llevar a cabo en sus clases la secuencia didáctica presentada en el capítulo 3.

En la década de los años 80 se inicia el paradigma donde las preguntas centrales sobre la formación del profesor se refieren a:

¿Qué conocimiento es esencial para enseñar determinadas áreas, en nuestro caso las matemáticas?

Antes de dar respuesta a ésta pregunta, debemos de ubicarnos en los temas que se abordan en la secuencia didáctica presentada en el capítulo 3.

Es fundamental que el profesor tenga conocimientos amplios sobre la definición y la clasificación de las ecuaciones diferenciales.

Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una **ecuación diferencial**. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su **tipo** (ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales, por su **orden** (el orden de la ecuación diferencial, es el de la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial) y por su **linealidad** (lineal o no lineal).

Se puede consultar los libros "Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones"de Braun, [13] y "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado "de Dennis. G. Zill, [17].

Para la sesión 3.1, es necesario que el profesor tenga conocimientos amplios sobre el crecimiento de las poblaciones, tipos de poblaciones (especies que originan generaciones discretas y generaciones traslapadas, (capítulo 2, parte II [34] y [18]) para que pueda distinguir entre los dos tipos de modelos matemáticos (discreto y continuo) que se mencionan en la sesión.

Posteriormente para dar inicio a la sesión 3.6, es indispensable tener nociones de límite, (capítulo 1 [27]) de éste modo se le hará más entendible la analogía que se presenta en dicha sesión.

Al llegar a la sesión 3.7, es necesario e indispensable poseer conocimientos amplios sobre ecuaciones diferenciales ordinarias problema de valor inicial y solución particular [13], [17], de ésto modo podrá continuar con la sesión 3.8.

Para la sesión 3.8, es importante que conozca de manera global algunos métodos para resolver las ecuaciones diferenciales [13], [28], para así dar mayor explicación a los alumnos sobre las diversas maneras de resolver o aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

El paradigma central de las herramientas es la visualización de conceptos en pro del desarrollo intuitivo y la comprensión de dichos conceptos, lo cual concuerda con los planteamientos de los siguientes autores [23]:

Bishop, 1989. El poder generar y manipular imágenes en la computadora estimula las habilidades de visualización mental e incluso la comprensión de ideas algebraicas. Se deben enfatizar las representaciones visuales en todos los aspectos de las matemáticas escolares.

Espinosa, 1996. La visualización de conceptos es de suma importancia ya que contribuye de manera directa en la adquisición de conocimientos.

La enseñanza moderna de las matemáticas, plantea un aprendizaje experimental, en el que el desarrollo de la intuición del estudiante para entender las características de los conceptos que analiza y mantener una visión general del problema, constituyen los objetivos centrales de ese aprendizaje. Para lograr este objetivo, resulta fundamental la visualización gráfica de los conceptos que se pretenden utilizar o analizar, así como de los procesos de transformación a los que dichos conceptos son sometidos

Por lo tanto para la sesión 3.8, es necesario que el profesor conozca y maneje algún software para graficar [4], [29] (por ejemplo, mathematica, maple, derive, matlab), ya que hará uso del mismo, al momento de realizar la simulación del modelo de Verhulst y presentarla hacia los alumnos.

Actualmente, en el plano internacional, existe un consenso para señalar que el profesor de matemáticas sí bien requiere de un conocimiento profundo y sólido de la Matemática, este conocimiento no es suficiente para poder enseñarla; es necesario además, que el futuro profesor posea una serie de conocimientos y experiencias en torno a cuestiones especificas relacionadas con el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación de los conocimientos matemáticos en la escuela.

Capítulo 3

Sesiones

En esta sección se verán:

- Objetivos generales de cada sesión (para el alumno).
- Desarrollo de cada sesión (sugerencia para el docente).

Cada una de las experiencias de aprendizaje dentro del salón de clase tendrán un doble propósito: Aprender a crear y fomentar un ambiente de trabajo y aprender matemáticas.

El ambiente estará dirigido a promover la independencia del alumno y la responsabilidad que se debe tener en el propio aprendizaje. Esto se instrumentará a través de:

- Un hoja inicial, que contendrá los objetivos, temas que se abordarán en las sesiones de clase, bibliografía, manera de evaluar y de calificar a los alumnos (ver anexo A.1).
- Una presentación guiada en Power Point, que apoyará las sesiones dentro del salón de clase.
- Un pagina en internet ([2]), que promoverá la participación en internet fuera de clase.
- El trabajo individual, en hojas de actividades, de modo que el alumno aprenderá, repasará, reafirmará e identificará los temas de la clase (ver anexo A.5).
- La discusión en clase: En éste momento se considerarán los posibles desarrollos de las soluciones, las extensiones y la formulación de situaciones nuevas.
- La autoevaluación del trabajo del alumno: El alumno al final de cada clase tendrá la obligación de autoevaluarse (última pregunta de las hojas de actividades).

Los recursos didácticos se podrán consultar en los anexos.

3.1. Sesión 1: Discusión del modelo matemático.

Objetivos generales

El alumno:

1. Conocerá los factores que intervienen en el cambio de la población, en particular para la República Mexicana durante los años de 1921 a 2005.

2. Identificará los factores anteriores. El alumno se dará cuenta de la necesidad de hacer un modelo matemático para predecir la población en el futuro o reconstruir datos del pasado.

3. Conocerá el significado del concepto (modelo matemático), los diversos tipos de modelos matemáticos y los pasos que intervienen en un modelo matemático.

Desarrollo

Se tomará como base los datos de natalidad, mortalidad y población de la Republica Mexicana (registro del Censo, INEGI: [10]), se quiere saber *¿cuánta población hubo en el pasado?* y *¿cuánta habrá en el futuro?*

La población de la República Mexicana:

Los datos de la población (Censo del INEGI) los verán en la tabla A.1 (apéndice A.4) y la gráfica A.1 correspondiente a dichos datos (apéndice A.4)

Por medio de una actividad guiada (ver actividad de la sesión3.1 del apéndice A.5). Se preguntará a los alumnos:

¿Por qué cambia la población?

Se tratará de fomentar una discusión sobre los factores que influyen en el cambio de la población. Se espera que los alumnos consideren diversos factores sociales, políticos, económicos, etcétera. De esta manera los alumnos deberán llegar a la abstraccón de los conceptos de natalidad y mortalidad y podran vislumbrar el efecto si una es mayor que otra. En particular el alumno deberá formalizar frases como: " si la natalidad es mayor que la mortalidad, la población crecerá".

Predicción de la población.

Con base en una discusión grupal sobre la natalidad y la mortalidad, los alumnos podrán contestar afirmativamente lo siguiente: *¿Es posible reconstruir datos de la población en el pasado y predecir* *la población en el futuro?*, lo que los conducirá a ver la necesidad de construir un modelo matemático.

El profesor establecerá la siguiente definición:

Definición No. 3.1. *Un modelo matemático es la descripción de una situación real de manera idealizada, expresada mediante simbología matemática.*

Se discutirán los siguientes dos tipos de modelos matemáticos [34]:

Discreto: Análisis cualitativo del fenónemo, durante intervalos de tiempo de igual longitud.

Continuo: Análisis cualitativo del fenónemo, durante intervalos de tiempo muy pequeños.

Y se explicará que ambos tipos de modelos, tienen el mismo objetivo: Entender el fenómeno, sus causas y predecir comportamiento a futuro.

Se les mencionarán algunos ejempos: La velocidad, la aceleración y el tamaño de la población. Podrán consultar más ejemplos en la sesión 3.10. Éste trabajo, se enfocará en el tercer ejemplo.

Se aclarará que en las siguientes sesiones, se construirá un modelo matemático que a los alumnos les ayudará a saber el tamaño de la población. En particular para la República Mexicana.

El profesor propondrá el siguiente proceso para elaborar un modelo matemático.

1. Analizar un problema de mundo real: La población de la Republica Mexicana.
2. Idenficar variables: Dependientes e independientes.
3. Establecer hipótesis simples para tratarlas de manera matemática.
4. Comparar datos obtenidos con los datos reales.

A partir de estas consideraciones, los alumnos podrán averiguar *¿cuantos fuimos en el pasado?* y predecir *¿cuantos seremos en el futuro?*. En las sesiones que siguen se elaborará un modelo matemático.

3.2. Sesión 2: Razón de cambio.

Objetivos generales

El alumno:

1. Responderá la siguiente pregunta: ¿Por cuánto aumentó la población durante de un cierto año?, por ejemplo en 1995. 2000 y 2004.

2. Aprenderá el concepto de cambio de la población durante un intervalo de tiempo (ver definición 3.2).

3. Explicará con qué rapidez está cambiando la población, en un cierto intervalo de tiempo.

4. Conocerá la definición formal de la razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo (ver definición 3.3).

Desarrollo

Los alumnos sabrán que los factores que influyen en el cambio de la población son los nacimientos y muertes. El profesor enunciará la siguiente actividad (ver actividad de la sesión 3.2 en el apéndice A.5):

¿Cómo cambia la población en diferentes años?

ó

¿Cuánta población aumentó durante un año específico?

Se considerará un caso particular (ver ejemplo A.1 del anexo, con datos de nacimientos y muertes anuales de la República Mexicana). Por medio de ejercicios (ver anexo), se espera que el alumno defina el cambio de la población. Finalmente el profesor formalizará el concepto de cambio de la población.

Definición No. 3.2. *El cambio de la población durante un intervalo de tiempo es:*

Número de nacimientos durante un intervalo de tiempo − Número de muertes durante un intervalo de tiempo

Es decir,

$$\Delta P(t) = N(t) - M(t)$$

donde

$t =$ *Intervalo de tiempo.*

$\Delta P(t) =$ *Cambio de la población durante un intervalo de tiempo.*

$N(t) =$ *Número de nacimientos durante un intervalo de tiempo.*

$M(t) =$ *Número de muertes durante un intervalo de tiempo.*

Los alumnos considerarán los datos de nacimientos y de muertes de cierto intervalo de tiempo, entonces podrán saber el cambio de la población en ese intervalo de tiempo.

Una vez que el alumno conozca el cambio de la población, se espera que conteste *¿Con qué rapidez?* o *¿A qué razón está cambiando la población?*. Se dará cuenta que necesita conocer: el intervalo de tiempo y que éste es de un año.

Se continuará con el ejemplo (A.1). El profesor definirá la razón de cambio promedio de la población durante un intervalo de tiempo de la siguiente manera:

Definición No. 3.3. *La razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo es:*

$$\frac{\textit{Cambio durante un intervalo de tiempo}}{\textit{Intervalo de tiempo determinado}}$$

Es decir,

$$RPC(t) = \frac{\Delta P(t)}{\Delta t}$$

donde

$t =$ *Tiempo actual.*

$RPC(t) =$ *Razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo.*

$\Delta P(t) =$ *Cambio de la población durante un intervalo de tiempo.*

$\Delta t =$ *Intervalo de tiempo.*

3.3. Sesión 3: Tasa de cambio de la población.

Objetivos generales

El alumno, al conocer la población del año anterior y el cambio de la población anual:

1. Podrá predecir la población durante un intervalo de tiempo.
2. Definirá la población durante un intervalo de tiempo (ver definición 3.4).
3. Tendrá las herramientas, para contestar lo siguiente: ¿Es posible predecir la población de un año determinado, sin conocer la población del año anterior? y ¿Por qué?.
4. Aprenderá la definición de la tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo (ver definición 3.5).

Desarrollo

Los alumnos sabrán que el cambio de la población en un intervalo de tiempo es la diferencia entre la nacimientos y muertes durante un intervalo de tiempo. Tendrán los datos de la población en un cierto intervalo. Con esos datos el profesor planteará la siguiente pregunta:

¿Podemos predecir la población para los siguientes años?

Se hará notar que todos los datos de la población se tomarán del censo del INEGI, [10].

Por medio de dos ejercicios (ver ejercicio A.1 y A.2 en el anexo), que se resolverán en clase, se esperará que el alumno calcule la población para cada año.

Población del año actual = Población del año anterior + Cambio de la población del año actual.

Se considerará cualquier intervalo de tiempo. Se obtendrá la siguiente definición:

Definición No. 3.4. *La población durante un intervalo de tiempo, se obtiene de la siguiente manera:* ***Población al inicio del intervalo de tiempo. + Cambio de la población al final del intervalo de tiempo.***
Es decir,

$$P(t) = P(t - \Delta t) + \Delta P(t)$$

Donde

$t =$ *Tiempo en años.*

$P(t-\Delta t) =$ *Población al inicio el intervalo de tiempo.*

$P(t) =$ *Población durante el intervalo de tiempo.*

$\Delta P(t) =$ *Cambio de la población al final del intervalo de tiempo.*

El profesor preguntará a los alumnos lo siguiente:

¿Es posible predecir la población durante un intervalo de tiempo determinado, sin conocer la población del intervalo de tiempo anterior?

Para contestar lo anterior, primero se verá un caso particular cuando el intervalo de tiempo es un año. El profesor explicará los ejemplos (A.3) y (A.4). Llegará a concluir que para calcular la población del año anterior será útil:

La tasa de cambio de la población durante un año.

Y para conocer la población durante cualquier intervalo de tiempo, será útil la tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo especificado. Eso será posible con la siguiente definición:

Definición No. 3.5. *La tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo se calcula de la siguiente manera:*

$$\frac{\textit{Razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo}}{\textit{Población al inicio del intervalo de tiempo.}}$$

Es decir,

$$tasa(t) = \frac{RPC(t)}{P(t-\Delta t)}$$

Donde

$tasa(t) =$ *tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo.*

$RPC(t) =$ *Razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo.*

$P(t-\Delta t) =$ *Población al inicio del intervalo de tiempo.*

Para reafirmar el tema, los alumnos realizarán la actividad de la sesión 3.3 que se encuentra en el apéndice A.5.

La siguiente sesión el alumno aprenderá la forma de utilizar la tasa, para predecir la población.

3.4. Sesión 4: ¿Cómo se desarrolla la población en el tiempo?

Objetivos generales

El alumno:

1. Obtendrá la ecuación del cambio de la población durante un año como la diferencia de la población durante un año menos la población al inicio del año (ver expresión 3.1).
2. Formulará la tasa de cambio de la población durante un año.
3. Reconocerá que el cambio de la población al inicio del año es la tasa de cambio por la población al inicio del año (ver expresión 3.2).
4. Conocerá la definición formal de la población en el año t (ver definición 3.6).
5. Finalmente obtendrá de manera formal la manera de calcular la población en el año t (ver definición 3.7).

Desarrollo

Se considera en ésta sesión el intervalo de tiempo de un año y la tasa de cambio de la población constante.

Por un lado el profesor tomará la población durante un intervalo de tiempo (definición 3.4). Despejará el cambio de la población después del año:

$$\Delta P(t) = P(t) - P(t-1) \tag{3.1}$$

Por otro lado el profesor tomará en cuenta la tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo (definición 3.5) y la razón de cambio de la población durante un intervalo de tiempo (definición 3.3). Se sustituirá la expresión de la definición 3.3 en la expresión de la definición 3.5 y se obtendrá lo siguiente: $tasa = \frac{\Delta P(t)}{P(t-1)}$. De esa expresión se despejará el cambio de la población después el año. Se obtendrá la siguiente expresión.

$$\Delta P(t) = tasa \times P(t-1) \tag{3.2}$$

Se igualará la expresión 3.1 con 3.2 y usando un poco de algebra se llegará a la siguiente expresión: $P(t) = P(t-1)(tasa+1)$. Se considerará la tasa de cambio de la población constante. El alumno podrá calcular la población anual, con solo conocer la población del año anterior y la tasa. El profesor establecerá la siguiente definición:

Definición No. 3.6. *La población en el año t se obtiene de la siguiente manera:*

La población en el año (t-1) $\times$ ***[Tasa de cambio de la población anual +1]***

Es decir,

$$P(t) = P(t-1)[tasa + 1]$$

donde

$t =$ *Tiempo en años.*

$P(t) =$ *Población durante en año* t.

$P(t-1) =$ *Población durante en año* $t-1$.

$tasa =$ *Tasa de cambio de la población anual. (constante)*

Los alumnos calcularán un cierto número de tasa de cambio de la población para diferentes años y obtendrán el promedio de dichas tasas (ver actividad de la sesión 3.4 en el apéndice A.5). Los alumnos tomarán en cuenta el valor de la $tasa$ constante para todos los años, la población inicial $P(0)$, cuando $t = 0$ y utilizarán la defininción 3.6. Obtendrán lo siguiente: En $t = 1$ $P(1) = P(0)[tasa + 1]$, en $t = 2$ $P(2) = P(0)[tasa + 1]^2$, en $t = 3$ $P(3) = P(0)[tasa + 1]^3$ y así sucesivamente. Por lo tanto en t años fue o será: $P(t) = P(0)[tasa + 1]^t$.
El profesor dará a conocer a los alumnos el concepto de la población en el año t.

Definición No. 3.7. *La población en el año t se obtiene de la siguiente manera:*

Población inicial $\times$ ***[Tasa de cambio de la población anual +1]*** ^{t}

Es decir,

$$P(t) = P(0)[tasa + 1]^t$$

donde

$t =$ *Tiempo en años.*

$P(t) =$ *Población durante l año* t.

$P(0) =$ *Población inicial.(t=0)*

$tasa =$ *Tasa de cambio de la población anual.(constante)*

Para reafirmar el tema, el alumno realizará la actividad de la sesión 3.4 del apéndice A.5.

3.5. Sesión 5: Deficiencia del modelo de población.

Objetivos generales

El alumno:

1. Reconocerá que el modelo para predecir la población es una función exponencial.
2. Tendrá las herramientas matemática, para contestar los siguiente: ¿Es posible que la población crezca y crezca de manera indefinida? y ¿Por qué?
3. Conocerá algunos fenómenos que se comportan como el modelo exponencial: Colonia de bacterias, crecimiento de celulas, interés simple y compuesto (inversiones).
4. Conocerá el modelo exponencial: Modelo de Malthus (ver defininción 3.8).
5. Establecerá algunas hipótesis y suposiciones del modelo de Malthus discreto.

Desarrollo

El alumno sabrá que la población en t años se calcula de la siguiente manera:

$$P(t) = P(0)(tasa + 1)^t \tag{3.3}$$

donde $P(0)$ = población inicial y $tasa$ =Tasa de cambio de la población anual del año inicial (permanecerá constante).

Se considerará $P(0) = 81,249,654$ y $tasa = 0.02784$. La función (3.3) resultará ser la siguiente:

$$P(t) = 81,249,654(0{,}02784 + 1)^t \tag{3.4}$$

Por medio de la actividad guiada de la sesión 3.5 del apéndice A.5, los alumnos realizarán la gráfica asociada a la función (3.4), lo que los conducirá a decir que la función es de tipo exponencial: $P(t) = Ca^t$, con parámetros: $C = P(0)$, $a = tasa + 1$ y $Exponente = t$.

Los alumnos deberán tomar en cuenta las siguientes propiedades: $e^{\ln(t)} = t$ y $e^{\ln(t)^k} = e^{k\ln(t)}$, aplicarlas a la función (3.3) y con manipulaciones algebraicas llegarán al modelo exponencial siguiente: $P(t) = P(0)e^{t\ln(tasa+1)}$, donde la base $= e$ y el exponente $= t\ln(tasa + 1)$

Se considerará intervalos de tiempo de igual longitud (años). El modelo se llamará: **Modelo de Malthus**. A continuación se definirá el anterior modelo.

Definición No. 3.8. *El modelo de Malthus es:*

El modelo exponencial.

Es decir,

$$P(t) = P(0)e^{t\ln(tasa+1)}$$

donde

$t =$ *Tiempo.*

$P(t) =$ *Población en el tiempo t.*

$P(0) =$ *Población inicial. ($t = 0$).*

$\ln =$ *Logaritmo natural.*

$tasa =$ *Tasa de cambio de la población (permanece constante).*

Se esperará que los alumnos reconozcan los parámetros independientes y dependientes. Se hará notar a los alumnos que conforme aumenta el tiempo, la población a futuro aumenta indefinidamente. Este fenónemo se deberá a que se considera una tasa constante que depende sólo de la natalidad y mortalidad. Se mencionarán algunos fenómenos que presentan comportarmiento parecidos al modelo exponencial: Colonia de bacterias, crecimiento de celulas, interés simple y compuesto (inversiones). Para más detalle, ver lectura " Ejemplos de fenómenos" en el apéndice A.6.

Se mencionarán las hipótesis y suposiciones que sustentan al modelo de Malhus

Hipótesis del modelo de Malthus:

- La tasa de cambio de la población será constante.

Suposiciones del modelo de Malthus:

1. El medio y los alimentos son inagotable, es decir, el tamaño del medio y la cantidad de recursos alimenticios no son factores que limiten el crecimiento de la población.

2. La población se encuentra aislada, esto significa que no se consideran interacciones con otras poblaciones.

3. La población es homogénea, es decir, todos los individuos tienen las mismas probabilidades de reproducción, muerte, etcétera.

4. El medio es homogéneo, es decir, la distribución de alimento es uniforme.

3.6. Sesión 6: Necesidad de un nuevo modelo.

Objetivos generales

El alumno:

1. Reconocerá que al suprimir una suposición del modelo exponencial, surge un nuevo modelo: Por ejemplo el Modelo logístico.

2. Junto con el profesor, realizarán la siguiente analogía: Cambio de la población y la velocidad de un automóvil, que le ayudará al alumno a entender el concepto de razón de cambio instantánea (ver apéndice, cuadro A.2).

3. Con ayuda del profesor, establecerán la definición de la derivada de una función, con respecto al tiempo (ver definición 3.9).

Desarrollo

Por medio de la actividad guidada de la sesión 3.6 del apéndice A.5, se espera que los alumnos concluyan que el modelo de Malthus (definición 3.8) no es realista para periodos de tiempo largos. En algún momento no será suficiente el alimento, el hogar, el trabajo y muchos más factores.

Se mencionará que prescindir de una o más suposiciones del modelo exponencial, implicaría un modelo más cercano a la realidad, pero a un costo matemático más grande, eso es un modelo matemático más complicado. Se eliminará la suposición (1) del modelo exponencial: medio y alimento será inagotable. Eso dará por resultado la tasa de cambio por unidad de tiempo no constante (Modelo de Verhulst).

Se empezará por definir el concepto de la derivada de la función $P(t)$, con respecto a t.

El alumno deberá de recordar como se construyó el modelo exponencial (sesiones 3.1 y 3.2), en particular la razón de cambio de la población.

Se explicará el concepto de razón de cambio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños (idea intuitiva de límite). Enseguida se hará notar a los alumnos que el concepto de razón de cambio de la población en intervalos de tiempo cada vez más pequeños es útil para el modelo, no para la realidad.

A continuación se realizará la analogía entre la razón de cambio de la población en intervalos de tiempo cada vez más pequeños y la velocidad instantánea de un objeto en movimiento (lo que marca el velocímeto). El alumno completará la hoja de actividad de la analogía (ver apéndice A.2)

Se concluirá que la razón de cambio de la población en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, un semestre, una semana, un día, una hora, un segundo, etcétera. El intervalo de tiempo se acercará a cero o tenderá a cero (idea intuitiva de límite), será lo mismo que la razón de cambio instantánea de la población.

Finalmente, se establecerá la definición de la derivada de una función con respecto a t.

Definición No. 3.9. *La derivada de la función $P(t)$ con respecto a t, se define como:*

La razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños.

Es decir,

$$\frac{dP(t)}{dt} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

donde

$t =$ *Tiempo continuo.*
$\Delta t =$ *Intervalo de tiempo.*
$P(t) =$ *Población en el tiempo t.*
$\frac{dP(t)}{dt} =$ *Derivada de la función $P(t)$, con respecto a t.*
$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} =$ *Razón de cambio de la población.*

Finalmente, el alumno leerá la lectura sobre "Historia del cálculo" en el apéndice A.6 y después realizará la actividad de la sesión 3.6 del apéndice A.5. Con ésta actividad se familiarizará con el momento histórico del concepto de la derivada.

3.7. Sesión 7: ¿Qué es una ecuación diferencial?.

Objetivos generales

El alumno:

1. Conocerá los parámetros de algunas ecuaciones diferenciales.
2. Verá ejemplos de ecuaciones diferenciales, en particular el modelo de Malthus.
3. Se dará cuenta que el modelo de Malthus es un caso particular del modelo de Verhuslt (ver definición 3.10).

Desarrollo

En esta sesión se considerarán sólo ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Por comodidad, a este tipo de ecuaciones las llamaremos simplemente ecuaciones diferenciales.

El profesor dará a conocer algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales (ver ejemplos A.5 - A.8). Más ejemplos se verán en la sesión 3.10.

A continuación se mencionarán algunos parámetros que contienen las ecuaciones diferenciales:

Una ecuación diferencial es una herramienta para elaborar modelos matemáticos y puede tener los siguientes parámetros:

- Función desconocida de una o varias variables: La incógnita.
- Una o más de sus derivadas de la función desconocida: primera, segunda, tercera, etcétera.
- Variable: t,x,s, etcétera.

donde

la incógnita puede ser: P(t), y(t), f(x), g(s), etcétera.

la primera, segunda, tercera derivada de la función desconocida pueden ser: $\frac{dP(t)}{dt}$, $\frac{d^2y(t)}{dt}$, $\frac{d^3f(x)}{dx}$, respectivamente.

Se considerará la ecuación diferencial del modelo logístico de Verhuslt (ejemplo A.6):

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t).$$

Se empezará con un caso particular: $\mu = 0$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) \tag{3.5}$$

La ecuación (3.5) es el modelo exponencial de Malthus (ver ejemplo A.5)

Con base en una discusión grupal, el profesor preguntará lo siguiente ¿Es posible encontrar el valor de la constante λ?. Los alumnos podrán contestar afirmativamente y encontrarán el valor de λ.

Se utilizará el modelo exponencial (definición 3.8):

$$P(t) = P(0)e^{t\ln(tasa+1)} \tag{3.6}$$

junto con las reglas de derivación. Se podrá encontrar el valor de λ de la expresión (3.5) Se supondrá que el tiempo es continuo en la expresión (3.6) y se aplicará en ambos lados la derivada. El resultado será el siguiente: $\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\ln(tasa+1)$. Se considerará $\lambda = \ln(tasa+1)$, lo que resultará ser la ecuación (3.5).

El profesor hará notar que un ejemplo de ecuación diferencial es $\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$, con $\lambda = \ln(tasa+1)$, dicho de otra manera $P(t) = P(0)^{t\ln(tasa+1)}$, es una solución de $\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$ (modelo exponencial). Más detalles en la sesión 3.8.

Finalmente el profesor establecerá la definición del modelo de Malthus.

Definición No. 3.10. *El modelo de Malthus es:*

Un caso particular del modelo de Verhuslt

Es decir,

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

donde
$t =$ *Tiempo.*
$\frac{dP(t)}{dt} =$ *Derivada de la función $P(t)$, con respecto a t.*
$\lambda =$ *Constante* $= \ln(tasa+1)$
$P(t) =$ *Población en el tiempo.*

El alumno conocerá “ la reseña histórica de Malhus” (ver apéndice A.6) y realizará la actividad de la sesión 3.7 del apéndice A.5), relacionada con dicha reseña.

3.8. Sesión 8: Solución de una ecuación diferencial.

Objetivos generales

El alumno:

1. Conocerá las condiciones para que una función sea solución de una ecuación diferencial.

2. Aprenderá los siguientes conceptos: Problema de valor inicial y solución particular.

3. Encontrará la solución del modelo de Malthus.

4. Conocerá las herramientas y métodos matemáticas para resolver las ecuaciones diferenciales.

Desarrollo

El profesor enunciará la siguiente actividad:

¿Cuándo una función es solución de una ecuación diferencial?.

Se mencionará que una función es solución de una ecuación diferencial cuando la función y sus derivadas cumplen la relación dada por la ecuación. Se verán algunos ejemplos de soluciones. (ver anexo A.2, ejemplo A.9)

Solución general de la ecuación diferencial.

Con base en los ejemplos anteriores, se hará notar que una ecuación diferencial no tiene una única solución, sino una familia infinita de soluciones. Esta familia de soluciones que dependen de una constante, se le llamará solución general de la ecuación diferencial.

El profesor mencionará el siguiente ejemplo:

La solución general de la ecuación diferencial $\frac{dP(t)}{dt} = sen(t)$ será $f(t) = -cos(t) + constante$. Para cada valor de la constante, se obtendrá una solución particular. Por ejemplo $-cos(t)$ y $cos(t)+1$ serán dos soluciones particulares de la ecuación diferencial $\frac{dP(t)}{dt} = sen(t)$

Se mencionarán que en los procesos experimentales, una ecuación diferencial se le puede añadir algunas condiciones, llamadas condiciones iniciales. A continuación se explicará el porque el nombre de condiciones iniciales. Finalmente se expresará en notación matemática.

Con base en lo anterior, el profesor enseñará un nuevo concepto problema de valor inicial. Se mencionará la forma de resolver un problema de valor inicial. Finalmente se hará notar que la solución de este problema sí es única. (Teorema de existencia y unicidad)

El profesor dará a conocer a los alumnos la solución general $P(t) = Ce^{\lambda t}$ con $\lambda = \ell n(tasa + 1)$ del modelo de Malthus (ver definiciíon 3.10) y la solución particular $P(t) = P(0)e^{\lambda t}$, que satisface $P(0) = 81,249,654$ (condición inicial), con $\lambda = \ell n(tasa + 1)$

Se mencionará que al terminar la asignatura de matemáticas VI, los alumnos serán capaces de resolver la ecuación diferencial del modelo de Malthus.

A continuación se hará la siguiente pregunta:

¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales?.

El profesor platicará que es un problema difícil y demasiado complicado, al que se dedican con esfuerzo un buen número de matemáticos, que tratan resolver ecuaciones diferenciales (encontrar integrales elementales) y que en muchas ocasiones basta con conocer las propiedades de las soluciones de la ecuación y lo que siempre se podrá hacer son simulaciones. (aproximaciones a la solución)

Se mencionarán algunos métodos numéricos[13]: Euler, mejorado de euler, taylor, runge-kutta, transformación de la laplace; y con ayuda de algún tipo de software[1], mathematica, matlab, mathcad, maple, simulink, mathcad, entre otros; se podrán resolver o hacer simulaciones de las ecuaciones diferenciales.

[1] Software para el estudio de sistemas dinámicos, consultar [35].

3.9. Sesión 9: Mejorar el modelo de Malthus.

Objetivos generales

El alumno:

1. Conocerá formalmente el modelo de Verhuslt (ver definición 3.11).

2. Junto con el profesor establecerán las hipótesis y suposiciones del modelo de Verhuslt.

3. Observará una simulación del modelo de Verhuslt.

Desarrollo

El profesor, realizará un breve repaso del modelo de Malthus. (definición 3.10). A continuación se construirá el factor de corrección del modelo de Malthus, de modo que se asemeje más a la realidad.

Con base en lo anterior, se definirá formalmente el modelo de Verhuslt.

Definición No. 3.11. *El modelo de Verhuslt es:*

Modelo de Malthus+ Correccion.

Es decir.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$$

donde

$t =$ *Tiempo.*
$\frac{dP(t)}{dt} =$ *Derivada de la función* $P(t)$*, con respecto a* t*.*
$\lambda =$ *Constante* $= \ln(tasa + 1)$
$P(t) =$ *Población en el tiempo.*
$\mu = \frac{Capacidad\, máxima\, de\, poblaciíon}{\lambda}$
$P^2(t) =$ *Población en el tiempo al cuadrado.*

Se mencionarán las hipótesis y suposiciones que sustentan el modelo de Verhuslt (333p, [34]).

Hipótesis del modelo de Malthus:

- La tasa de cambio de la población no será constante.

Suposiciones del modelo de Verhuslt:

1. El medio y los alimentos son finitos, es decir, la existencia de una población máxima (capacidad máxima de población) que el medio puede alimentar.

2. La población se encuentra aislada, esto significa que no se consideran interacciones con otras poblaciones.

3. La población es homogénea, es decir, todos los individuos tienen las mismas probabilidades de reproducción, muerte, etcétera.

4. El medio es homogéneo, es decir, la distribución de alimento es uniforme.

El alumno se familiarizará con el modelo de Verhuslt, realizando la actividad de la sesión 3.9 del apéndice A.5, relacionada con la reseña histórica de Verhuslt (ver lectura en el apéndice A.6).

Se tomará en cuenta la definición de la derivada de una función (definición 3.9) y manipulaciones algebraicas, para que el profesor llegue a la ecuación $lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t)} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$ el modelo de Verhuslt.

El profesor explicará que al tomar diferentes valores de Δt, se llega a diferentes aproximaciones en la solución del modelo de Verhuslt.

Finalmente, el profesor mostrará por medio de gráficas, diferentes aproximación en la solución del modelo de Verhuslt (ver actividad de la sesión 3.9 en el apéndice A.5).

3.10. Sesión 10: ¿Por qué es indispensable estudiar las ecuaciones diferenciales?

Objetivos generales

El alumno

1. Se dará cuenta de la utilidad de las ecuaciones diferenciales.
2. Conocerá ejemplos de ecuaciones diferenciales.
3. Se dará cuenta de la necesidad del concepto de derivada, para entender mejor las ecuaciones diferenciales.

Desarrollo

Por medio de una actividad (ver actividad de la sesión 3.10 en el apéndice A.5), el alumno se dará cuenta de la utilidad de las ecuaciones diferenciales.

El alumno se dará cuenta de la necesidad de aprender el concepto de derivada, para entender con más detalle las ecuaciones diferenciales.

Para dar cierre a las sesiones, el profesor mostrará un mapa conceptual (ver mapa conceptual en el apéndice A.1), de todos los temas que fueron desarrollados durante las sesiones ante grupo.

Capítulo 4

Experimentación de la propuesta

En este capítulo se realiza una sistematización de la práctica docente, es decir, describir, ordenar y reflexionar analíticamente el desarrollo de un monitoreo de la secuencia didáctica desarrollada en el capítulo 3. Se pretende responder las siguientes preguntas: ¿Qué se hizo?, ¡Cómo?, ¿Por qué?, ¿Cuál fue la relación del profesor con los alumnos?, ¿Qué procesos fueron generados en la práctica docente? y ¿Qué contradicciones influenciaron la práctica docente o fueron generados por ésta y cómo se resolvieron?.

El primer aspecto que se debe considerar en el monitoreo de la secuencia didáctica con alumnos de bachillerato, es la descripción del centro de práctica. El relato breve, pero completo, del tipo de trabajo que se realizó, es indispensable para la comprensión de la sistematización de la práctica docente. Este relato contempla los siguientes aspectos:

- Periódo durante el cual tuvo lugar.
- Personas que participaron.
- Caracterización del lugar en el cual se desarrollo la experiencia.
- Objetivo del trabajo.
- Actividades que se realizaron. (maestro y alumnos)
- Evaluación general de la experiencia.

4.1. Descripción del centro de prácticas.

La Universidad Nacional Autónoma de México, cuenta con nueve planteles de la Escuela Nacional Preparatoria y cinco del Colegio de Ciencias y Humanidades, en los que se imparte educación a nivel bachillerato.

Los planteles de la Escuela Nacional Preparatoria están ubicados en diferentes zonas del área metropolitana; dichos planteles tienen una matrícula de poco mas de 48,000 alumnos.

Para la planeación del proyecto de tesis, tomamos como base el Plan de estudio (1996) de la Escuela Nacional Preparatoria y el actual programa de la ENP de la asignatura de Matemticas VI, área II.

Centro de prácticas.

El trabajo de tesis consta de:

1. Material fotográfico. (ver apéndice A.11)
2. Observación del campo y
3. Revisión documental.

Todo esto con la finalidad de resolver las siguientes inquietudes:

- ¿Con qué instalaciones cuenta el centro de prácticas?.
- ¿Se cuenta con el centro de cómputo para la enseñanza de la materia de matemáticas en el plantel?.
- ¿Cómo es el aula de clases? y
- ¿Qué tipo de mobiliario está en el aula?.

Las sesiones correspondientes a la asignatura de matemáticas VI, área II, las llevamos acabo en el plantel No.1 de la Escuela Nacional Preparatoria, turno matutino.

Ubicación geográfica.

La ENP 1, se encuentra ubicada en la delegación Xochimilco. Cuya dirección es: Av. Las Torres y Prolongación, Aldama S/N Tepepan Xochimilco, C.P. 16020, México, D.F.

Consta de: tres edificios (A, B, C), un auditorio, un gimnasio, una biblioteca, un centro de cómputo y mediateca. (ver apéndice A.11.)

Las sesiones que se llevaron a cabo fue en el **edifico B, segundo piso.**, salón **B208**, con capacidad de 60 alumnos (30 mesa-bancos- parejas)

Son 5 filas (De derecha a izquierda): 2 de ellas con 5 mesa-bancos; las siguientes 2 con 7 y la última fila con 6 mesa-bancos: Mesas (color negro el tablero y el resto amarillo); sillas (respaldo y asiento de color negro y el resto amarillo; escritorio (tablero color negro y resto amarillo); 3 pizarrones, 2 blancos (ubicados en la parte de adelante y a mano izquierda del salón) y 1 verde (ubicado en la parte de atrás); pared y piso color beige; puerta (color café con una pequeña ventana).

4.2. Población escolar.

La experimentación de la propuesta de la secuencia didáctica consta de material fotográfico (ver apéndice A.11) y observación del campo. Todo esto con la finalidad de resolver la siguiente inquietud, descripción de la población escolar en la que se realizó la secuencia didáctica.

El grupo 605 con el que trabajamos, corresponde a 6to año área II, de la ENP 1, acargo de la profesora de carrera: Ma. Margarita Sánchez Flores.

En la práctica docente I y II, se llevo a cabo una versión preliminar de la secuencia didáctica y en la práctica docente III (18 de octubre del 2006 al 26 de octubre del 2006) fue el espacio donde se probó la versión final de la secuencia didáctica.

A los alumnos, se les pidió que llenaran la primera parte de la hoja de evalución[1], que corresponde a la situación social del alumno.

De los 53 alumnos inscritos, la maestra titular del grupo, sugirio elegir a los alumnos que iban a las carreras de química, biología y genómicas, dando un total de 33, ya que el tema se apegaba más hacia dichas carreras. Dicha división se hizó con la finalidad de obtener el interés y la motivación hacia el tema impartido.

De los 33 alumnos, sólo acudieron 28 a la mayoria de la sesiones, se les proporcionó su número de lista, para que lo escribieran en los ejercicios en clase y tareas. Y así tener un mayor control en asistencia y participacin. El resto, 20 alumnos tomaron la clase de forma no presencial, consultando el sitio web [10].

Los 53 alumnos fueron sometidos a la encuesta; $\frac{2}{3}$ del grupo son mujeres y $\frac{1}{3}$ son hombres. Las edades oscilan entre 16 años y 18 años, para ser más precisos 9 % de los alumnos tienen 18 años, 85 % tienen 17 años cumplidos y 6 % tienen 16 años de edad. Más detalle del nivel social de los alumnos, consultar el apéndice A.9.

[1] ver hoja de evaluación, en anexo A.8.

4.3. Actividades que se realizaron

Una vez planeada las actividades (apéndice A.1) de la secuencia didáctica, fue cuidadosamente analizada con ayuda de las aportaciones del tutor Michael Barot. S. (IMATE), profesora y supervisora de práctica docente Margarita Sanchéz Flores (ENP1). Se desarrolló cada una de las sesiones de la secuencia didáctica desarrollada en el capítulo 3, se describió el centro de práctica en la sección 4.1 y la población escolar en la sección 4.2.

En ésta sección se especificará los objetivos de la práctica docente en relación a la secuencia didáctica y se describirá las actividades del profesor y de los alumnos.

Objetivos del trabajo

La secuencia de los contenidos que se llevó a cabo en la práctica docente, fue para motivar al alumno a aprender el concepto matemático fundamental del cálculo diferencial: la derivada. Se dió un tratamineto paralelo a la historia, rescando los métodos intuitivos y posteriormente se dió una fundamentación.

Se partió de un fenómeno de la vida. La motivación principal fue mediante el planteamiento de la siguiente pregunta: **¿Cómo se desarrolla una población en el tiempo?**.

Metodología

Se expuso en dos partes:

1. Se analizó los datos del INEGI, se llevarón al mundo de los símbolos, es decir al lenguaje algebraico, posibilitando de ésta manera el trato matemático.

   Primeramente se identificó el problema en contexto general, despúes se esquematizó, se formuló y visualizó el problema de varias maneras, de modo que se descubrierán relaciones y singularidades, se logró con esto tranferir el problema real a un problema matemático.

   Lo anterior nos condujo a la construcción de un modelo matemático: (Modelo de Malthus: $P(t) = P(0)(tasa + 1)^t$). A continuación, se vió que dicho modelo se puede expresar como $P(t) = P(0)e^{tln(tasa+1)}$. Detras de éste modelo, se encuentró el concepto clave: Razón de cambio.

Una vez establecido las hipótesis y suposiciones del modelo matemático, el siguiente paso fué comparar los datos obtenidos del modelo y los datos reales, de tal manera que se empezó a criticar al modelo, ¿qué tan semejante a la realidad era?, ¿en qué casos erá posible dicho comportamiento?, y ¿porqué?.

Finalmente todo esto nos condujo a mejorar el modelo, enseguida se propuso un nuevo modelo, un poco más acorde a las circunstancias de la vida.

2. Se representó una situación real, mediante una formula, se analizó el modelo: Modelo de Verhulst (Modelo de Malthus + correccion), dando lugar a estudiarlo en tres vertientes:

    a) Surgió la necesidad de formular un concepto matemático nuevo: La razón de cambio instantánea, que dicho de otro modo, la derivada.

    b) Se habló del modelo de Malthus y la derivada.

    c) Se hizó una pequeña corrección al modelo de Malthus.

    Se logró con esto refinar y ajustar el modelo más a la realidad, esto no llevó a combinar e integrar modelos, lo mismo que se hizo en la primera parte. Se estableció las suposiciones e hipótesis que sustentaban al modelo de Verhulst, el último paso fué comparar los datos obtenidos del modelo con los de la realidad, simulando de ésa manera la solución del modelo.

    En ésta segunda parte, fué indipensable discutir el concepto de ecuación diferencial y los mecanismos (o las herramientas) para obtener su solución. Entendiendo como herramientas los diferentes softwares para encontrar la solución, no necesariamente algebraica, pero si geométrica.

Pertinencia de la estructura y secuenciación del contenido temático.

El cálculo diferencial es una materia tradicional en los planes de estudio de matemáticas VI, área II, de la ENP. Generaciones de alumnos pasaron por un curso de Cálculo sin realmente entender el significado y la utilidad de esta rama de las matemáticas, ésto se debe sobre todo a la manera abstracta y formal, en la cual se presenta normalmente la materia.

En la presentación de la secuencia didáctica, se introdujó el concepto de derivada por medio de una acercamiento intuitivo a los conceptos fundamentales de una matemática de cambios (la determinación de cambios de una magnitud que depende de una segunda magnitud en relación con los cambios de esta última). De ésta manera se dedujó paso a paso el concepto de derivada, es decir, a través del problema de determinar razones de cambio instantáneas. Razón por la cual no se introdujó el concepto de derivada a través de límites y una definición formal.

Concretamente en la vida diaria se determinan razones de cambio de procesos, pero no se maneja en forma de un método matemático abstracto. Se quizó enseñar la determinación de razones de cambio como una idea fundamental de cálculo diferencial.

Para lograr un aprendizaje de claro entendimiento, fue necesario referirse a las experiencias de la vida diaria (presentación ¿Por qué cambia de la población?) y superar éstas a través del desarrollo de aptitudes matemáticas.

Con ésto se siguió el camino histórico que tomó el Calculo diferencial: primero se desarrolló una noción intuitiva de la razón de cambio, de la derivada o de la fluxión como lo llamó Newton. Mucho después se formalizó y se preciso lo que es un límite.

Una vez que los alumnos llegaron al formalismo matemático, como la notación funcional y el cociente diferencial, se identificó algunos parámetros que forman las "ecuaciones diferenciales", de esta manera se llegó a un modelo matemático continuo: Modelo de Malthus, caso particular del modelo de Verhulst.

Se vio la necesidad de dar más ejemplos de ecuaciones diferenciales, de modo tal que el alumno se diera cuenta que conforme más compleja sean las ecuaciones diferenciales más se asemeja a la realidad y pueden estudiar un poco con más detalle los fenómenos que nos rodean en nuestra vida. Esto dió pauta para hacer notar notar al alumno que es indispensable el concepto de derivada, para entender las ecuaciones diferenciales y por ende los fenómenos que nos rodean.

Se proporcionó a los alumnos tres lecturas: Orígenes del calculo diferencial, vida y obra de Malthus y de Verhulst, de manera que ubicaran en la historia las matemáticas.

Para simular la solución de una ecuación diferencial, se realizó usando un software (excel), para que los alumnos se dieran cuenta de la construcción geométrica de la solución.

Lo que hizo el maestro

En cada sesión, el maestro saludó al grupo y brevemente indicó el tema, objetivos, actividades, problemas y ejercicios a realizar durante la sesión.

En la primera sesión el maestro, escribió en el pizarrón su nombre, la manera de localizarlo y el horario de atención.

Después se proporcionó a los alumnos en hojas el temario "modelo matemático" (ver temario en el apéndice A.1), donde se especificaban los objetivos del curso y los temas a tratar. Explicó brevemente como se relaciona este curso con otros cursos de matemáticas y en otras disciplinas. Es una buena manera de estimular el interés de los estudiantes, presentándoles en la primera clase algunos de los problemas que no pueden hacer, pero que podrán resolver al final del curso, teniendo efecto de crear un interés inmediato en el curso.

Se especificó la forma de evaluar el aprendizaje: 85 % de actividades y ejercicios para casa (tareas), 5 % de formulario (acordeón), tomando en cuenta los siguientes criterios, la presentación limpia, números y letras legibles, usar pluma o lápiz y secuencia matemáticamente correcta; sin olvidar 5 % de asistencia y 5 % de participación activa (ejercicios en clase) y consultar el blog.

Se dió una breve explicación de los criterios acerca de las tareas, los exámenes y las calificaciones, puesto que los estudiantes tienen derecho a saber cómo van a ser evaluado su trabajo.

Por útlimo se escribió en el pizarrón la bibliografía.

Al final de la última sesión se entregó a los alumnos la hoja de evaluación (ver apéndice A.8), que contenía las calificaciones obtenidas a lo largo de todo tema.

Las estrategias que llevó a cabo el maestro durante las diez sesiones fueron:

- Enunciar los objetivos.
- Guiar el tema por medio de una presentación en Power Point.
- Preguntar sobre fenómenos que se presentan en clase.
- Realizar preguntas orales e inducirlos a los alumnos a contestar.
- Hacer preguntas dirigidas de modo que resuelva el problema planteado.
- Preguntas al finalizar cada presentación.
- Repartir sobres con papelitos de colores, para definiciones.
- Hacer un formulario con hojas colores (Se contruyó una o dos definiciones por clase).
- Consultar el blog [2].

- Representar visualmente objetos o situaciones sobre un subtema específico: Población de la República Mexicana, ejemplos de fenómenos que crecen en forma exponencial (los intereses, reproducción de células, reacciones químicas, fisiológicas y físicos).
- Hacer preguntas sobre lo que sucede en periodos (tiempo) cada vez más pequeños, de modo que lleguen al concepto de razón de cambio instantánea.
- Representar visualmente conceptos, explicaciones o patrones de información (cuadros sinópticos de una analogía del cambio de la población en intervalos cada vez más pequeños y lo que marca el velocímetro.
- Invitar a los alumnos a realizar actividades complementarias para cada sesión.
- Aclarar dudas, ya sea explicando de otra manera, recordando algunos temas previos o pidiendo a sus compañeros que le explicaran (se puede coraborar con las opiniones de la encuesta, prácticante, pregunta 10 y 11. Apéndice A.9).
- Representar por medio de esquemas de conocimiento que indiquen conceptos, proposiciones y explicaciones: Red conceptual de los contenidos de cada sesión.
- Enfatizar conceptos claves, principios y argumento central mediante cuadros sinópticos (ver apéndice 5).

En cada una de las diez sesiones se empleó diferente material didáctico: plumones, pizarrón, computadora, cañón, hoja de posibles preguntas y acordeón. Para complementar lo anterior, ver anexo A (encuesta sobre, cómo observaste el material didáctico empleado en cada tema)[2].

Al final de la última sesión, se les aplicó dos encuestas a cada alumno. La primera fue para saber su opinión sobre el impacto que tuvo el tema en su formación académica (ver apéndice A.9) y la segunda sobre la forma en que fueron evaluados (ver apéndice A.9).

Descripción de las actividades.

El maestro en cada sesión entregó a los alumnos fotocopias de la hoja de actividades (ver apéndice A.5) relacionada con el tema de la sesión. El maestro explicó en qué consistía la actividad. En algunas ocasiones lo resolvían junto con el maestro y en otras lo resolvían al final de la explicación para reafirmar el tema. Mientras los alumnos trabajaban, el maestro se acercó a cada uno de ellos para hacerles preguntas sobre el procedimiento que seguián o los cálculos que hacían para completar

[2]Material didáctico, ver apéndice A.9.

cada actividad. Después de un periodo de aproximadamente 10 a 15 minutos, el maestro pidió a los alumnos que dijeran las respuestas de los ejercicios. Por último recogía la hoja de actividad.

Al terminar cada sesión, repartió sobres con papelitos de colores, para que el alumno escribiera en cada papelito las definiciones, vistas en cada clase. Al final de cada sesión, el maestro mostraba el acordeón (papelitos de colores) de las definiciones que tenía que llegar a construir (actividad extraclase) cada alumno con su respectivo sobre. Al final de cada sesión se hízo un breve resumen de los temas visto en la clase, usando un mapa conceptual (ver apéndice A.1).

No se implementarón técnicas para propiciar un ambiente de trabajo en grupo, debido a que el material proporcionado fué utilizado de manera individual, sin embargo en clase no se impidió que el alumno intercambiará comentarios con sus compañeros. A la vez se fomentó la libertad, justicia, solidaridad, respeto, esfuerzo, esperanza, fortaleza y la confianza. Una frase diferente aparecía en la esquina inferior derecha de cada actividad y tarea (pregunta 15, de la encuesta del practicante, ver apéndice A.9).

En algunas sesiones hubo la necesidad de demostrar algún procedimiento, por ejemplo: en la segunda sesión, (razón de cambio), se realizó por medio de una presentación guiada; en la tercera sesión se utilizo una hoja de ejercicio individual y la presentación guiada para definir la tasa de cambio. Para llegar al concepto de derivada de una función, se empleó una tabla en donde el alumno tenía que completar y encontrar la analogía entre el cambio de una población en intervalos de tiempo muy pequeños y lo que marca el velocímetro, para llegar a la razón instantánea de cambio de una población.

Para que el alumno entendiera la definición de la derivada, como limite infinitesimal, se anunciarón proposiciones que indicaran eventos concretos semejantes mutuamente (de uno conocido a otro desconocido). En éste caso el evento conocido fue lo que marca el velocímetro y el desconocido la razón de cambio instantánea. Con esto se formuló la primera analogía de modo que el alumno entendiera el concepto de razón de cambio instantánea. A continuación se realizó la segunda analogía, el evento conocido fue la razón de cambio instantánea y el desconocido la derivada.

El razonamiento por analogía, se considera un proceso de aprendizaje constructivo y dinámico para la adquisición de nuevos conocimientos.

El alumno fue capaz de escribir los tres conceptos equivalentes: Lo que marca el velocímetro, la razón de cambio instantánea y la derivada. De ésta manera se construyó la definición de la derivada.

Se prosiguió con ejemplos, de manera que el alumno llegara a deducir el concepto de ecuación diferencial y de la solución de la ecuación diferencial.

Sabiendo lo anterior, se definió el modelo de Verhulst continuo, como una corrección del modelo de Malthus. Se describió la hipótesis y las suposiciones que sustentan el modelo. De ésta forma se trató de hacer notar al alumno la importancia del concepto de la derivada, para entender mejor los diversos fenómenos que nos rodean; en nuestro caso ¿cómo crece una población, en el tiempo? y al mismo tiempo el ¿por qué es indispensable estudiar las ecuaciones diferenciales? (resultados de los alumnos, ver apéndice A.9). Finalmente en la cuarta sesión, se logró mostrar la solución del modelo de Malthus.

Ésto ayudó a que alumnos se dieran cuenta de todo el trabajo que está detrás de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, en particular del modelo de Malthus y Verhulst.

En cada sesión se construyó tanto la definición como el acordeón. De esta manera para el alumno fué más fácil recordar las definiciones y tenerlas a la mano en cualquier momento que las necesitaba. Ésto ayudó a propiciar en el alumno, un aprendizaje memorístico.

Capacidades para generar curiosidad en los alumnos de bachillerato y dar respuesta a sus preguntas y necesidades.

En primer lugar es indispensable escuchar a los alumnos, sin interpretar la pregunta antes de que esté completamente formulada, de este modo se da confianza a los alumnos. Así ellos solos, harán sus propios comentarios del tema y no tendrán miedo a preguntar y a cuestinonarr sobre la reacción de la maestra hacia ellos.

Al momento en que se llegó a mencionar el teorema de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales; se aclaró que las actividades de los científicos, investigadores, matemáticos, entre otros es desarrollar un sustento matemático, para luego ocupar dichos resultados en diversas áreas (biólogos, químicos, ciencias geonómicas, etcétera), por eso es necesario que lo conozcan aunque no se dediquen a eso, ya que lo van a ocupar en un momento dado de su vida académica.

De esta manera se generó curiosidad, al grado en que preguntaron quién había demostrado el teorema de existencia y unicidad y cuánto tiempo tardaron de demostrarlo. Se comentó a los alumnos que tardó varios años y paso tiempo para que lo aprobaran en la comunidad científica.

Se trató de motivar al alumno, haciendo la clase amena, interesante, entretenida, didáctica, mostrándome amigable, dándoles confianza, diciéndoles que ellos podían, apoyándolos en las dudas que tenían del tema y les preguntaba. Se puede complementar con la encuesta que se realizó a los alumnos (ver apéndice A.9, preguntas 9 y 16).

Es necesario analizar lo anterior junto con la percepción que tienen los alumnos hacia las matemáticas[3]. No es suficiente motivarlos, sino también tomar en cuenta los cambios, físicos, emocionales y sociales del propio adolescente. Dichos cambios influyen positivamente o negativamente en su rendimiento académico (ver apéndice A.9).

Técnicas de evaluación utilizadas para evaluar el aprendizaje de los alumnos

Se aplicó dos tipos de evaluación:

- Auto-evaluación: Realizada propiamente por el alumno, mediante una pregunta que se les hizo al final de cada actividad.

  La pregunta fué ¿Cómo comprendiste el tema?, Muy bien (MB), bien (B), regular (R) y no comprendi (NC). Los resultados obtenidos se pueden consultar en el apéndice A.8.

- Evaluación: Realizada mediante las actividades, tareas, acordeón, participación y asistencia. Se aplicó de manera procedimental (diariamente mediante ejercicios, tareas, acordeón, partipación y asistencia) y sumativa (el promedio de la evaluación procedimental)

Los resultados de la evaluación se pueden consultar en el apéndice A.8.

Alonso, Gil y Martínez (1995), [11], cométan que evaluar no es calificar. Pienso que es un punto importante que permite al maestro de alguna manera poder llegar en tiempo y forma de un punto A a un punto B en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Así como señala Gimeno Sacristán [33]: *Cualquier proceso didáctico, intencionalmente guiado conlleva una revisión de las consecuencias, una evaluación del mismo. La evaluación sirve para pensar y planificar la práctica didáctica.*

[3]Aspecto cultural de las matemáticas, ver apéndice A.9.

Lo que hicieron los alumnos

Los alumnos realizaron una serie de actividades dentro y fuera de la clase (ver apéndice A.3, A.4, A.6 y A.5). Las preguntas claves sobre el tema fueron:

1. ¿Qué puedes decir del modelo y de los datos del INEGI? (pregunta 1.1 de la actividad de la sesión 3.3).

2. ¿Existen fenómenos que se comporten como el modelo exponencial? (pregunta 1.3 de la actividad de sesión 3.3).

3. ¿Por qué crece una población en forma exponencial? (pregunta 5.2 de la actividad de la sesión 3.4).

4. ¿Qué puedes decir de una población a futuro? (pregunta 6 de la actividad de la sesión 3.4).

5. ¿El modelo exponencial es realista? (pregunta 8 de la actividad de la sesión 3.4).

6. ¿Las ecuaciones son útiles para la vida? (pregunta 1 de la actividad de la sesión 3.10).

7. ¿Seremos capaces de predecir lo que sucederá a futuro? (pregunta 2 de la actividad de la sesión 3.10).

8. Qué tema o concepto que se necesita para entender mejor las ecuaciones diferenciales? (pregunta 3 de la actividad de la sesión 3.10).

9. ¿Cuál es la diferencia entre modelar un fenómeno por medio de una función o utilizando una ecuación diferencia? (pregunta 4 de la actividad de la sesión 3.10).

10. ¿La ecuación diferencial será útil para tu futuro académico? (pregunta 5 de la actividad de la sesión 3.10).

Los resultados obtenidos se pueden consultar en el apéndice A.9.

Cada alumno en la primera sesión tenía una hoja del temario, la cual específicaba, los temas que se abordaron en las sesiones, objetivos, criterios y técninas de evaluación y en la última sesión se le entregó su hoja de evaluación, en donde llegó a conocer las calificaciones obtenidas en cada instrumento de evaluación y su calificación final.

En cada una de las sesiones el alumno empleó diferente material didáctico: copia del programa del tema, hoja de trabajo individual, hoja del crucigrama, hoja de lecturas, hoja de evaluación individual.

Las estrategías empleadas por el alumno fueron:

- Hacer preguntas constantemente.
- Realizar actividades y ejercicios en clase o extra clase.
- Recircular la información: Elaborar formulario (acordeón de definiciones, ver apéndice: Actividades durante las 10 sesiones A.5).
- Hacer anotaciones y formular preguntas.
- Consultar el blog.

Los alumnos que por alguna razón no hayan asitido en alguna clase, tenian la alternativa de ponerse al corriente, mediante la consulta de la bitácora en la red (blog).

Un blog o bitácora, como se le conoce en español, es una página en Internet, generalmente personal, en la que el usuario puede hacer publicaciones diarias, con un orden cronológico de archivos y la posibilidad de insertar un sistema de comentarios para que los lectores puedan participar.

Cada alumno escribió sus comentarios y dudas sobre el tema en el blog y el maestro dió respuesta ya sea por el mismo medio o en clase, de forma que fue posible establecer una comunicación horizontal (maestro-alumno, alumno-alumno y alumno-maestro).

Así cada alumno tuvo la oportunidad de intercambiar la información académica. El sitio se convirtió de cierta manera como un foro de discusión[4]

La participación del alumno en el blog, contó para la evaluación. Al menos el alumno podía hacer un comentario cada día.

Descripción de las actividades.

En la primera sesión, el alumno vio el tema: Discusión del modelo matemático. En esta parte se dierón a conocer los datos de natalidad, mortalidad y población de la República mexicana de 1921 a 2005, de manera que el alumno fuera capaz de contestar la pregunta: ¿Por qué cambia una población?, además ¿Si era posible predecir una población a futuro? y ¿De qué manera?.

[4] El alumno y el maestro deben de tener una cultura sobre el uso de las nueva tecnologías (blog).

Fue sorprendente las alternativas que propusierón los alumnos. Por ejemplo crece una población porque nacen más, por falta de conciencia, de información y decrece debido a más muertes (las personas mayores son más), mayor número de enfermedades, mayor difusión de anticonceptivos, información sobre sexualidad, planificación familiar y mayor conciencia a procrear.

Finalmente el alumno vio la necesidad de construir o emplear un modelo matemático para saber ¿Cuánta población de la República mexicana hubo y cuánta habrá en el futuro?.

El alumno trató de establecer la hipótesis y suposiciones del modelo matemático (modelo de Malthus) con ayuda del maestro, comparó los datos obtenidos del modelo con los datos reales. De esta manera se condujo a criticar el modelo y el alumno vio la necesidad de mejorar el modelo y más semejante a los factores que intervienen en la realidad

A continuación se discutió el concepto de ecuación diferencial. El alumno entedió el concepto de la derivada, por medio de una fenómeno de la realidad.

El alumno tuvo la necesidad de formular un concepto matemático nuevo, la razón de cambio instantáneo (utilizando una analogía).

Se continuó con un modelo matemático mas acorde a la realidad, modelo de Verhulst. El alumno tenía en su manos la lectura sobre la vida y obra Verhulst, entonces los alumnos formularon sus propias preguntas de la vida y obra de Verhulst. De este modo se promovió la lectura, subrayó lo relevante y finalmente redactó preguntas de la lectura con sus propias palabras.

Por último el alumno comparó gráficamente los datos obtenidos del modelo con los datos de la realidad (ver actividad de la sesión 3.9 en el apéndice A.5). De ésta manera el alumno visualizó las gráficas con más detalle. Llegó a entender porque se obtiene en un primer intervalo una función exponencial y después el comportamiento de la gráfica es asintótico. El alumno se dió cuenta que la población tiene un tope, llamado en ecología capacidad de carga.

Al terminar con la teoría, los alumnos realizaron diversas actividades (ver apéndice A.5), donde tenían que utilizar los conceptos dados en las sesiones, algunas veces las terminaban de tarea. Ésto lo podemos completar con las opiniones (ver apéndice A.9); que dieron los alumnos. Respondieron de que sí se guió en los ejercicios y las actividades durante la clase.

Al final de la tercera sesión los alumnos realizaron un cuadro (ver apéndice A.5) que constó de tres columnas. En la primera columna escribieron lo que sabían sobre el tema, en la segunda columna lo que sabián hasta éstos momentos del tema y en la tercera columna lo que les gustaría saber sobre el tema.

El alumno construyó un formulario en forma de acordeón. (Ver actividad durante las 10 sesiones en el apéndice A.5) Cada definición la escribían en una papel (7cm X 11cm) de color diferente. Al final de las diez sesiones el alumno tenía la obligación de unir las 10 definiciones (10 papeles de color diferente cada uno) en orden en que se fueron dadas en clase y entregar el acordeón con un papel de color diferente que contenía: el tema principal, la materia, nombre del alumno y grupo.

Algunos alumnos no formulaban preguntas sobre dudas de los temas, a pesar de darles confianza, se debió a su propio carácter, algunos de ellos son tímidos, miedosos, penosos o muestran desinterés por el tema, hecho que pude confirmar con las respuestas de la pregunta 17 de la encuesta sobre la maestra practicante. (Ver apéndice A.9)

Capítulo 5

Conclusión.

5.1. Resumen.

Los propósitos de diseñar y probar en el bachillerato actividades de aprendizaje y enseñanza de una manera integral a partir de una planeación didáctica sobre el concepto de derivada, mediante una secuencia didáctica "el estudio de la tasa de cambio en el entendimiento de la derivada"fueron hechos realidad y se partió de la pregunta ¿Cómo se desarrolla una población en el tiempo?. Se introdujo la derivada como razón de cambio instantánea, mediante el uso de las tecnologías de la información y comunicación.

La metodología de enseñanza fué:

1. La planeación didáctica sobre la derivada, ayudó a responder las preguntas básicas del proceso de enseñanza y aprendizaje sobre él: ¿cómo? y ¿para qué? enseñar el concepto de derivada.

2. Las fases en las que se desarrolló la secuencia didáctica son: Introducir primero la diferencial como un concepto básico (fundamentada en un problema específico), surgir los procesos de derivación y aparecer el concepto de límite posteriormente como una formalización de las ideas previas.

3. Por medio de una situación de la realidad, se dió una de tantas soluciones al problema de investigación (qué el alumno logre comprender y aplicar a lo largo de su futuro académico, las ideas básicas del cálculo diferencial), por lo que la motivación principal fue planteandonos la siguiente pregunta: ¿Como se desarrolla una población en el tiempo?.

4. La secuencia didáctica se desarrolló en dos partes: Primero se analizarón los datos del INEGI, se llevaron al mundo de los símbolos, de esta manera se posibilitó el trato matemático y segundo se representó una situación real, mediante una fórmula, es decir, el modelo de Verhulst (Modelo de Malthus con una correccion).

5. El modelo de Verhulst se estudió en tres etapas: Primera etapa necesidad de formular el concepto matemático: la razón de cambio instantánea, segunda etapa hablar del modelo de Malthus y tercera etapa hacer una pequeña corrección al modelo de Malthus (modelo de Verhulst).

6. El empleo de la história del cálculo diferencial, nos creó el puente de enlace hacia el origen del concepto de derivada, pues sitúa las condiciones e ideales que dieron lugar a estos descubrimientos a través de una lectura guiada y una actividad (crucigrama).

7. El diseño y la implementación del material didáctico para la construcción de los dos modelos matemáticos (Malthus y Verhulst), ayudaron a comprender los conceptos centrales del cálculo diferencial, pues los conceptos científicos según Vigotsky crece hacia abajo, hacia lo cotidiano, hacia el dominio de la experiencia, adquiriendo sentido y significado.

8. El uso de tecnologías de información y comunicación (computadora y bitácora en la red), como herramienta para intercambiar experiencias en el grupo, ayudaron al proceso de enseñanza y aprendizaje

9. El empleo de analogías en la definición de derivada, fué también un enlace entre el conocimiento del alumno y los conceptos científicos, el uso de éste recurso debe hacerse con mucho cuidado. Es necesario que el profesor conozca ideas previas del alumno.

10. Adoptar una postura constructivista significa modificar los modelos en que hemos aprendido y hacer de nuestra práctica educativa un proceso de formación, y no sólo de información para nuestros alumnos.

11. Con ésto se pretendió que el alumno manipulára los conceptos de: aproximaciones, tendencias y conozca la razón (como cociente y como operador) e ideas intuitivas del operador.

12. Todo lo anterior se logró con la aportación y disponibilidad, tanto del profesor como de los alumnos, teniendo como apoyo las tecnologías de la información y comunicación.

5.2. Análisis de la propuesta.

La secuencia didáctica permitió conceptuar a la didáctica como una ciencia que al tener como objeto de estudio los procesos de enseñanza y aprendizaje, ofrece una fundamentación teórica a la práctica docente y propiciando a la vez su análisis y reflexión.

No se pretendió dar en clase un tratamiento paralelo a la historia, sino rescatar los métodos intuitivos y darles una fundamentación. De este modo el alumno captó lo esencial del cálculo diferencial, el concepto de derivada.

Por medio de las actividades los alumnos con ayuda del maestro construyeron dos modelos matemáticos. (Modelo de Maltus y de Verhuslt)

Mediante las actividades que realizaron los alumnos, se dieron cuente de la utilidad de las matemáticas en la vida. De este modo contribuir, a que los alumnos no les tengan temor a las matemáticas, tratando de fomentar interés y actitud positiva hacia las matemáticas.

Fue de gran utilidad hacer saber a los alumnos, que ellos también pueden investigar sobre algún tema de matemáticas sin ser matemáticos[1].

Para tratar de evitar un mal uso de la regla de tres como parte de la instrucción se sugiere revisar antes el concepto de propocionalidad, para que los alumnos puedan decidir en qué situaciones si se puede ser empleada la regla de tres y en cuales no. Ayudaría a entender el significado el modelo de Malthus (el crecimiento de una población es proporcional a la población).

El estudio de tasa de cambio, se centró en tasas con dominios cuyas cantidades son discretas, quedaría por experimentar con tasas que no involucren el tiempo y con tasas negativas e interpretarlo conceptualmente en el modelo matemático de Malthus.

Parece que existe en los alumnos, la creencia de que para que una respuesta sea completa necesita haber cálculos y persisten en creer que las respuestas conceptuales cualitativas no tienen lugar. Por lo que se debe enfatizar dentro de los procesos de enseñanza que hay soluciones cualitativas conceptuales que no requieren de cálculos.

[1] Es uno de los estándares de una educación matemática de alta calidad, [6].

En la conducción de la clase, el maestro debe estar atento a los alumnos, de modo que no caigan en el tipo de participación que bloquea la transferencia de conceptos, si no lograr un cambio en el tipo de participación. Al parecer toma tiempo de instrucción, pero se considera que es un tiempo bien empleado.

Antes de iniciar la sesión 3.3, es recomendable emplear en la instrucción las representaciones gráficas de tasa de cambio positivas (la función crece) y negativas (la función decrece), de este modo ayudaría al alumno a entender en la sesión 3.5, la relación de la tasa de cambio con el cambio de una población en el tiempo.

Da lugar lo anterior, a mencionar y a entender fenómenos que tienen tasas negativas, como sucede en la desintegración de algún átomo, en la antigüedad de un fósil o en el decrecimiento de la población.

Las palabras "instante" y "momento" en el diccionario se encuentran definidas como un periódo de tiempo y en el lenguaje cotidiano se emplean de la manera siguiente "en un momento lo atiendo" o "en un instante regreso". Pero cuando se mencionó la velocidad o flujo se usó la palabra en el siguiente sentido, ha pasado un período de tiempo. Por lo que es necesario que el profesor, acláre dicho concepto al inicio de la sesión 3.6, para evitar confusión del concepto "instante".

En la sesión 3.9, se mostró a los alumnos en un mismo plano tres gráficas, la gráfica del modelo de Verhuslt, la gráfica del modelo de Malthus y la gráfica obtenida por medio de los datos del INEGI, de manera estática (usando excel). Se mencionaron características comunes que tenian las tres gráficas.

Los ejercicios y actividades de la sesión 3.9 y en la sesión 3.10, permitieron al alumno hacer reflexionar los conceptos adquiridos en cada una de las sesiones anteriores. Lo que se planteó para la instrucción y lo que resultó de ésta, son en algunos casos diferentes (como se observa en los resultados de las actividades). La intención fué reflexionar a los alumnos sobre algunas relaciones cualitativas de los modelos matemáticos.

Durante las diez sesiones se utilizó la computadora como herramienta de enseñanza, no como objeto de estudio. Las tecnologías de información y comunicación (TIC), son herramientas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se sugirió enfatizar el uso de la representación gráfica en la instrucción, ya que permite el razonamiento de los alumnos. Permite de esta manera un mejor entendimiento del comportamiento del modelo de Verhulst.

Se consideró pertinente que el alumno construya un formulario (usando diferentes colores para cada definición o fórmula). Esto ayudó al alumno a recordar lo visto en clase y tenerlo presente a diario.

Para los alumnos fue interesante y un poco novedoso el uso del blog (bitácora en la red). Un poco novedoso, debido a que en sus clases de idiomas ya conocian su uso y nuevo en la clase de matemáticas.

El papel y lápiz fue el medio inerte usado en las actividades.

Con respecto a lo anterior, hizó falta que:

- El alumno, construyera el modelo de Verhulst, usando algunos datos de la población del INEGI (no se realizó por falta de tiempo).

- La construcción de los modelos fuera dinámica, usando de un software (mathematica, derive, matlab, maple, etcétera), de modo que la gráfica resultante estuviera animada (faltó conocimiento de software, por parte del docente).

  De este modo el alumno podría ver el recorrido de la gráfica. La construcción la podría hacer sólo el profesor y que los alumnos sólo vieran o la realizaran los propios alumnos en el aula o en su casa.

  Lo último involucraría que el alumno tuviera conocimientos previos del software a utilizar o que hubierá una sesión (manejo del software) previa a la construcción de la gráfica.

- Con respecto al blog, faltó mayor interacción entre el docente-alumnos, alumno-alumno y alumnos-docente, ya que sólo se utilizó para consulta de notas (notas de clase).

  Se sugiere planear actividades relacionadas al uso del blog, de modo que se abra una nueva puerta de comunicación entre los involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Entre las opciones de los alumnos, se puden mencionar la siguientes:

1. Tener una graficadora o computadora personal y utilizarla para realizar la gráfica del modelo de Malthus y el modelo de Verhuslt.

2. Pasar los datos de la población de la forma tabular a la forma algebraica, por medio de regresión lineal y finalmente graficar dichos valores usando una computadora.

En cualquiera de los dos opciones, es indispensable que el docente y los alumnos tengan un conocimiento básico de usar una computadora o graficadora. Si usan una computadora, es necesario que conozcan y manejen un software especial para hacer gráficas.

Si se opta por la segunda opción, existe un requerimiento extra. El docente como los alumnos, en primer lugar conozcan el concepto de regresión lineal y en segundo lugar sepan manipular los datos (uso de mínimos cuadrados), para hacer una regresión lineal.

Ésto da pauta, que el docente diseñe nuevas actividades para el alumno y para el propio docente, que involucren el uso de graficadoras o computadoras.

Con todo los pormenores, el alumno llegó a entender el concepto de derivada, más que hacer cálculos mecánicos (utilizando reglas de derivación sin sentido). Se dió cuenta de todo los conceptos que sustentan, fundamentan y repercuten con el concepto de derivada.

5.3. Reflexión.

En el proceso de la práctica docente, especialmente en práctica docente II y III, fué necesario entender y comprender la importancia que tiene el proceso de investigación y la docencia, ya que es fundamental en toda actividad de enseñanza y aprendizaje.

Es necesario diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje en los alumnos acordes a su nivel cognitivo y a su contexto; en donde la evaluación del curso o tema contemple diversas habilidades que puede desarrollar el alumno y no sea un solo instrumento de evaluación el que certifique sus aprendizaje.

Cada grupo, cada generación tiene sus propias características y por lo tanto como docente debemos ir a la par de éstas características y modificar la forma de transmitir el conocimiento, apoyandonos por la nueva tecnología de nuestros días.

Las nuevas generaciones poseen computadoras, laptos, celular con internet y se encuentran más inmersos por los medios de comunicación, por lo anterior es más fácil que el estudiante se distraiga y estudie menos. Debido a ésto es necesario buscar estrategias didácticas que utilicen esas nuevas tecnologías.

Un alumno motivado es un alumno con futuro profesional y exitoso, la motivación empieza en el seno familiar y continúa en la escuela, por tal motivo como docentes debemos de iniciar nuestros cursos con una buena motivación y reflexión del tema central del curso, relacionar este tema con el entorno social del estudiante.

Los alumnos viven en un mundo físico, biológico, económico, político y social que está caracterizado por cambios continuos, es útil describir y cuantificar éstos cambios y variaciones a travéz de las matemáticas (modelos matemáticos), para entender y comprender mejor lo que sucede en la realidad.

Un ejemplo de ello, fue lo que se vió en el desarrollo de la secuencia didáctica, con la pregunta clave ¿Cómo se desarrolla una población en el tiempo?.

Facilitó al alumno entender el concepto de derivada, mediante un problema de la vida ¿Cómo cambia una población en el tiempo? y al mismo tiempo se introdujo al alumno al cálculo, mediante la génesis que tuvo lugar en la história, es decir, los alumnos construyeron el concepto matemático la derivada y posteriormente lo formalizaron, haciendo uso intuitivo de límite.

El conocimiento del cálculo es requerimiento para poder desarrollar muchas actividades en nuestra sociedad, pero es necesario un aprendizaje más conceptual del mismo, un conocimiento que el alumno pueda usar en sus actividades como estudiante y en un futuro en sus actividades profesionales o científicas.

De esta manera ayudó a los alumnos a entender el concepto de derivada, para que más adelante lo puedan usar en las diferentes disciplinas que estudien y no necesariamente deben de ser matemáticos.

Es bien sabido que las matemáticas no son del agrado de la mayoria de los estudiantes, debido a que en ésta existe disciplina, ejercitación, abtracción y rigor, palabras que no existen en su diccionario. Sin embargo si ha éste tipo de alumnos se les induce al buen entendimiento de las matemáticas apoyandolos con material didáctico adecuado e induciéndolos hacia la solución de los problemas con un algorítmo adecuado y un razonamiento claro. El alumno empezará ha comprender las regularidades de su entorno social y reflexionará sobre la herramienta matemática que se le proporciona.

Finalmente los conocimientos matemáticos pueden contribuir a que los alumnos sean ciudadanos responsables, valoren la ciencia como parte de su cultura y no sólo desde el punto de vista utilitário y permitiéndoles opinar con fundamentos sobre diferentes aspectos en su vida diaria. Pero sobre todo proporcionándoles la oportunidad de adquirir un conocimiento que, a diferencia del cotidiano, les permita trascender la inmediatez, es decir el aquí y el ahora de sus acciones.

Por último se que el pensamiento matemático no tiene fin y que llegar a el no es fácil, pero a través de la constancia, disciplina y dedicación se llega ha abrir una puerta que conduce hacia el camino de la gran ciencia LAS MATEMÁTICAS.

Apéndice A

Apéndice

En esta sección se verán los siguientes apéndices:

A.1 Planeación de la secuencia didáctica.

A.2 Ejemplos que se llevaron a cabo en el salón de clase.

A.3 Ejercicios que se resolvieron en clase.

A.4 Tablas y gráficas que presentaron durante las sesiones de clase.

A.5 Actividades que se desarrollaron durante las sesiones de clase.

A.6 Lecturas sobre fenómenos en donde se observa la derivada, la história del cálculo, la reseña histórica de Malthus, la reseña histórica de Verhulst

A.7 Conceptos claves de la secuencia didáctica.

A.8 Evaluación y calificación de los alumnos.

A.9 Resultados de la encuesta de los alumnos sobre el aspecto social del alumno, interéses hacia las matemá'ticas, evaluación del tema, evaluación del materialla didáctico y la evaluación de la practicante.

A.10 Formato de las encuestas: Material didáctico, tema y practicante.

A.1. Planeación.

Esta sección consta de:

1. Un esquema de planeación de las actividades de la secuencia didáctica.

   Este esquema se realizó por cada una de las sesiones de clase.

   Contiene los siguientes datos:

   - Subtema.
   - Objetivo temático.
   - Estrategias:
     - Enseñanza.
     - Aprendizaje.

     Cada una contiene tipo y actividad.
   - Procedimiento:
     - Instrucción.
     - Conceptos claves.
   - Material de apoyo:
     - Docente.
     - Alumno.
   - Evaluación:
     - Tipo.
     - Técnica.
     - Instrumento.

2. El temario que se les proporcionó a los alumnos el primer dia de clases.

   Consta de objetivos, temas de cada una de las sesiones, bibliografía, criterios de evaluación de la secuencia didáctica.

3. Un mapa conceptual que ayudó a encuadrar las secuencia didáctica.

   Éste mapa se les dió a los alumnos en la última sesión.

Esquema de planeación.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA 1 "Gabino Barreda"
MADEMS: PRACTICA DOCENTE III
ALUMNA: ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA
ESQUEMA DE PLANEACIÓN POR SESIÓN

1era sesión (50 min): Tolerancia 5 min

#	Subtema	Objetivo temático	Estrategias: Enseñanza: Tipo	Estrategias: Enseñanza: Actividad	Estrategias: Aprendizaje: Tipo	Estrategias: Aprendizaje: Actividad	Procedimiento: Instrucción	Procedimiento: Conceptos Claves	Material de apoyo: Docente	Material de apoyo: Alumno	Evaluación: Tipo	Evaluación: Técnica	Evaluación: Instrumento
1													
Apertura	Introducción del tema.	Conocer los temas, los objetivos y la forma de trabajar durante las sesiones.	Organización anticipada. Objetivos.	- Repartir hoja del temario. - Aclara dudas del temario y en su caso, acuerda con los alumnos modificaciones en cuanto a los tiempos de trabajo.	Recepción y declarativo. Esquema.	- Recibe el material de los temas, objetivos, criterios de evaluación. - Hace pregunta sobre las dudas que surgen del temario.	El docente reparte la hoja del temario y expone en forma "general", los principios básicos que sustenta el tema y la estructura del mismo. Los alumnos preguntaran dudas.		Hoja del temario.	Hoja del temario.	Diagnóstica.	Informal.	- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre la hoja del temario.
	Situación social del alumno.	Conocer el nivel social del alumno.	Organización anticipada. Cuestionario.	- Repartir hoja de evaluación del alumno. - Explica la actividad. - Aclara dudas.	Declarativo. Cuestionario.	- Recibe el material para la evaluación. - Escucha la explicación de la actividad. -Expone sus dudas. - Contesta la actividad.	El docente reparte la hoja de evaluación. Los alumnos preguntaran dudas. Finalmente contestan la hoja de evaluación.		Hoja de evaluación.	Hoja de evaluación. Lápiz.	Diagnóstico.	Semiformal.	Participación individual y asistencia. Comentarios sobre la hoja de evaluación.

Continuación del esquema de planeación.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA 1 "Gabino Barreda"
MADEMS: PRACTICA DOCENTE III
ALUMNA: ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA
ESQUEMA DE PLANEACIÓN POR SESIÓN

#	Subtema	Objetivo temático	Estrategias				Procedimiento.		Material de apoyo		Evaluación.		
			Enseñanza		Aprendizaje		Instrucción	Conceptos Claves			Tipo	Técnica	Instrumento
1			Tipo	Actividad	Tipo	Actividad			Docente	Alumno			
Desarrollo.	a) La población de la República Mexicana. Censo del INEGI (1921 al 2005)	Conocer el número de nacimientos, muertes y población de la República por medio de tablas de datos y gráficas.	Presentación.	- Presentación en Power Point. - Explicar de donde se obtuvieron los datos de la población. - Aclara dudas.		- Observa la presentación. - Hace pregunta sobre las dudas del subtema. - Expone sus dudas.	El docente explica el tema, haciendo uso de la tecnología: Power point y blogs. Los alumnos preguntaran dudas y consultaran el blog.	Población.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.			- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..
	b) ¿Por qué cambia la población?	Conocer los factores involucrados en el cambio de la población.	Presentación.	- Presentación en Power Point. -Hace preguntas del: ¿por que cambia la población? - Aclara dudas.		- Observa la presentación - Contestan la pregunta planteada en clase. -Expone sus dudas.	El docente explica con el tema, haciendo uso de la tecnología: Power point y blogs. Los alumnos tratarán de contestar la pregunta planteada en clase, a su vez preguntaran dudas y consultaran el blog.	Natalidad. Mortalidad.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.			- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..

Continuación del esquema de planeación.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA 1 "Gabino Barreda"
MADEMS: PRACTICA DOCENTE III
ALUMNA: ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA
ESQUEMA DE PLANEACIÓN POR SESIÓN

#	Subtema	Objetivo temático	Estrategias				Procedimiento.		Material de apoyo		Evaluación.		
			Enseñanza		Aprendizaje		Instrucción	Conceptos Claves			Tipo	Técnica	Instrumento
1			Tipo	Actividad	Tipo	Actividad			Docente	Alumno			
Desarrollo.	c) Predicción de la población: En el pasado y futuro.	Tratar de predecir la población teniendo sólo el número de nacimientos y muertes de cada año.	Presentación	- Presentación en Power Point. - Hacer preguntas sobre el subtema. - Aclara dudas.		- Observa la presentación. - Contestan la pregunta planteada en clase. - Expone sus dudas.	El docente hace las siguientes preguntas: ¿Cuántos individuos hubo ...? y ¿Cuántas individuos habrá ... ? hacia el grupo. Los alumnos contestan preguntas en forma oral.	Población: Pasado. Futuro.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.			- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..
	d) Necesidad de un modelo matemático.	Tendrán la necesidad de usar un modelo matemático para poder predecir la población.	Presentación.	- Presentación en Power Point. - Aclarar dudas.		- Observa la presentación -Expone sus dudas.	El docente explica la necesidad de utilizar un modelo matemático. Los alumnos preguntaran dudas.	Modelo.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.			- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..

Continuación del esquema de planeación.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA 1 "Gabino Barreda"
MADEMS: PRACTICA DOCENTE III
ALUMNA: ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA
ESQUEMA DE PLANEACIÓN POR SESIÓN

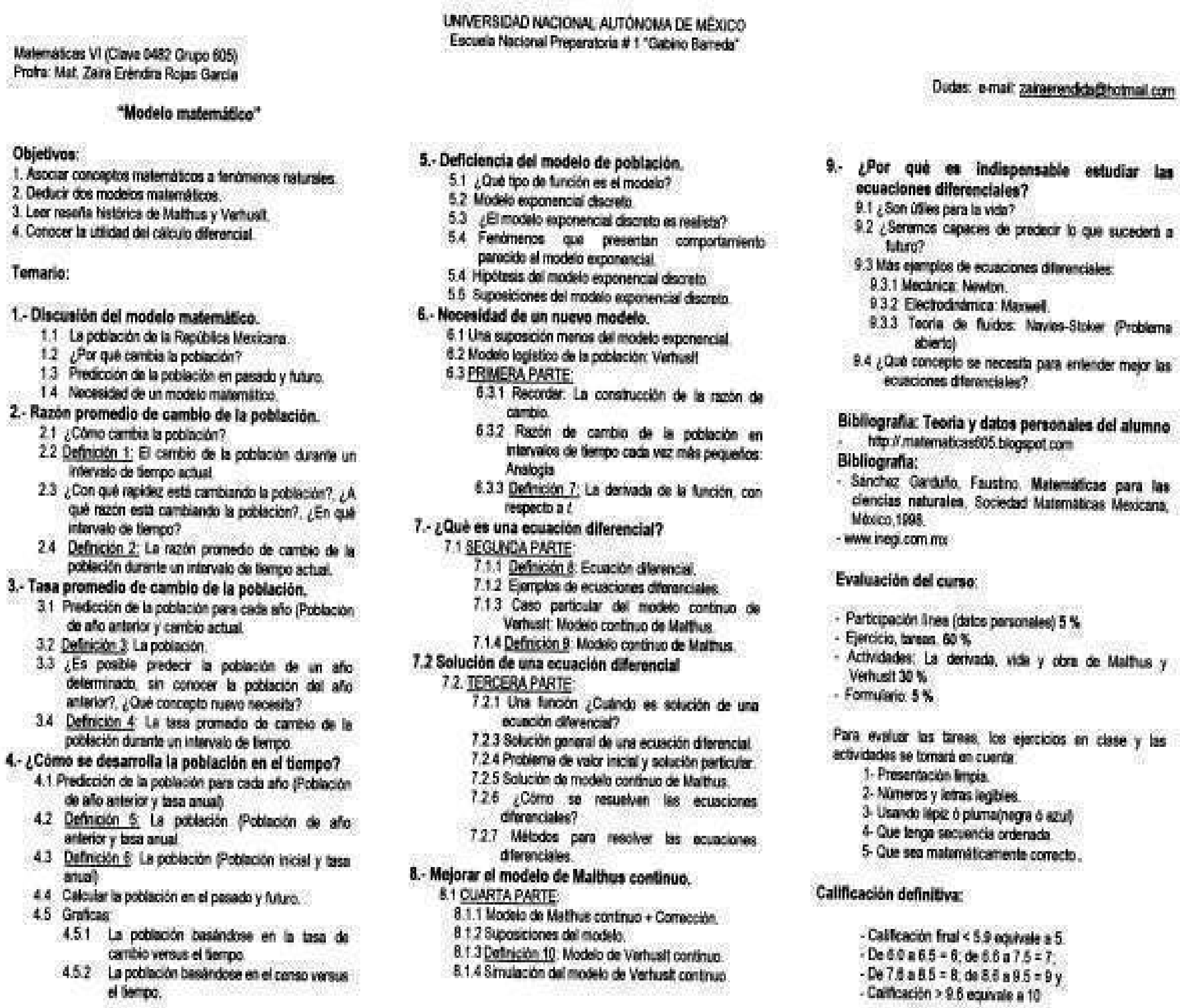
#	Subtema	Objetivo temático	Estrategias				Procedimiento.		Material de apoyo		Evaluación.		
			Enseñanza		Aprendizaje		Instrucción	Conceptos Claves	Docente	Alumno	Tipo	Técnica	Instrumento
1			Tipo	Actividad	Tipo	Actividad							
Desarrollo.	d) Necesidad de un modelo matemático.	Aprender el objetivo, la definición, los tipos y ejemplos de un modelo matemático.	Presentación.	- Presentación en Power Point.		- Observa la presentación.	El docente explica el tema, haciendo uso de la tecnología: Power point y blogs. Los alumnos preguntaran dudas y consultaran el blog.	Modelo matemático: Objetivo. Definición. Tipos. Discreto. Continuo. Ejemplos.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.	Formativa.	Informal.	- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..
		Conocer el proceso para elaborar un modelo matemático.	Presentación.	- Presentación en Power Point.		- Observa la presentación.	El docente explica el tema, haciendo uso de la tecnología: Power point y blogs. Los alumnos preguntaran dudas y consultaran el blog.	Proceso para elaborar un modelo matemático: Analizar un problema real. Identificar parámetros: Variables. Constantes. Establecer hipótesis. Comparar datos obtenidos y reales.	Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.	Formativa.	Informal.	- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre el tema..

Continuación del esquema de planeación.

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA 1 "Gabino Barreda"
MADEMS PRACTICA DOCENTE III
ALUMNA: ZAIRA ERÉNDIRA ROJAS GARCÍA
ESQUEMA DE PLANEACIÓN POR SESIÓN

#	Subtema	Objetivo temático	Estrategias				Procedimiento.		Material de apoyo		Evaluación.		
			Enseñanza		Aprendizaje		Instrucción	Conceptos Claves	Docente	Alumno	Tipo	Técnica	Instrumento
1			Tipo	Actividad	Tipo	Actividad							
Cierre	Retroalimentación y autoevaluación.	Integrar los conocimientos vistos en clase. Establecer cómo se ha venido aprendiendo hasta estos momentos.	Organizadores previos. Ejercicio.	- Repartir hoja de evaluación del alumno. - Explica la actividad. -Aclara dudas.	Significativo y actitudinal. Ejercicio.	- Recibe el material para la evaluación. - Escucha la explicación de la actividad. - Expone sus dudas. - Contesta la actividad.	El docente reparte la hoja de evaluación. El docente explica la actividad. Los alumnos preguntaran dudas. Finalmente contestan la hoja de evaluación y se autoevaluarán.		Pizarrón. Plumones. Hoja de ejercicio. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Hoja de ejercicios. Blog.	Formativa.	Formales. Pruebas objetiva.	- Ejercicio 1: Opción múltiple. Preguntas abiertas. Jerarquizados. Participación individual. Comentarios sobre el tema.
	Cierre de sesión.	Concluir con los contenidos de la sesión..	Significativo. Mapa conceptual.	Promueve las participaciones. Participa en la elaboración de la cración final que concluya la sesión. Presentación en Power point.	Significativo y declarativo. Conclusión.	Comenta sobre los conceptos visto en la sesión. Participa en la integración de la cración final.	El docente escucha y complementa las ideas de los alumno por medio de un mapa conceptual.		Computadora. Cañón. Presentación. Pizarrón. Plumones. Blog.	Cuaderno. Lápiz. Blog.	Formativa.	Informal.	- Participación individual y grupal. - Comentarios sobre la el tema se la sesión.

Temario.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Escuela Nacional Preparatoria # 1 "Gabino Barreda"

Matemáticas VI (Clave 0482 Grupo 605)
Profra: Mat. Zaira Eréndira Rojas García

Dudas: e-mail: zairaerendida@hotmail.com

"Modelo matemático"

Objetivos:

1. Asociar conceptos matemáticos a fenómenos naturales.
2. Deducir dos modelos matemáticos.
3. Leer reseña histórica de Malthus y Verhulst.
4. Conocer la utilidad del cálculo diferencial.

Temario:

1.- Discusión del modelo matemático.
- 1.1 La población de la República Mexicana.
- 1.2 ¿Por qué cambia la población?
- 1.3 Predicción de la población en pasado y futuro.
- 1.4 Necesidad de un modelo matemático.

2.- Razón promedio de cambio de la población.
- 2.1 ¿Cómo cambia la población?
- 2.2 Definición 1: El cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual.
- 2.3 ¿Con qué rapidez está cambiando la población?, ¿A qué razón está cambiando la población?, ¿En qué intervalo de tiempo?
- 2.4 Definición 2: La razón promedio de cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual.

3.- Tasa promedio de cambio de la población.
- 3.1 Predicción de la población para cada año (Población de año anterior y cambio actual.
- 3.2 Definición 3: La población.
- 3.3 ¿Es posible predecir la población de un año determinado, sin conocer la población del año anterior?, ¿Qué concepto nuevo necesita?
- 3.4 Definición 4: La tasa promedio de cambio de la población durante un intervalo de tiempo.

4.- ¿Cómo se desarrolla la población en el tiempo?
- 4.1 Predicción de la población para cada año (Población de año anterior y tasa anual)
- 4.2 Definición 5: La población (Población de año anterior y tasa anual.
- 4.3 Definición 6: La población (Población inicial y tasa anual)
- 4.4 Calcular la población en el pasado y futuro.
- 4.5 Graficas:
  - 4.5.1 La población basándose en la tasa de cambio versus el tiempo.
  - 4.5.2 La población basándose en el censo versus el tiempo.

5.- Deficiencia del modelo de población.
- 5.1 ¿Qué tipo de función es el modelo?
- 5.2 Modelo exponencial discreto.
- 5.3 ¿El modelo exponencial discreto es realista?
- 5.4 Fenómenos que presentan comportamiento parecido al modelo exponencial.
- 5.4 Hipótesis del modelo exponencial discreto.
- 5.5 Suposiciones del modelo exponencial discreto.

6.- Necesidad de un nuevo modelo.
- 6.1 Una suposición menos del modelo exponencial.
- 6.2 Modelo logístico de la población: Verhulst
- 6.3 PRIMERA PARTE:
  - 6.3.1 Recordar: La construcción de la razón de cambio.
  - 6.3.2 Razón de cambio de la población en intervalos de tiempo cada vez más pequeños: Analogía
  - 6.3.3 Definición 7: La derivada de la función, con respecto a t.

7.- ¿Qué es una ecuación diferencial?
- 7.1 SEGUNDA PARTE:
  - 7.1.1 Definición 8: Ecuación diferencial.
  - 7.1.2 Ejemplos de ecuaciones diferenciales.
  - 7.1.3 Caso particular del modelo continuo de Verhulst: Modelo continuo de Malthus.
  - 7.1.4 Definición 9: Modelo continuo de Malthus.

7.2 Solución de una ecuación diferencial
- 7.2. TERCERA PARTE:
  - 7.2.1 Una función ¿Cuándo es solución de una ecuación diferencial?
  - 7.2.3 Solución general de una ecuación diferencial.
  - 7.2.4 Problema de valor inicial y solución particular.
  - 7.2.5 Solución de modelo continuo de Malthus.
  - 7.2.6 ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales?
  - 7.2.7 Métodos para resolver las ecuaciones diferenciales.

8.- Mejorar el modelo de Malthus continuo.
- 8.1 CUARTA PARTE:
  - 8.1.1 Modelo de Malthus continuo + Corrección.
  - 8.1.2 Suposiciones del modelo.
  - 8.1.3 Definición 10: Modelo de Verhulst continuo.
  - 8.1.4 Simulación del modelo de Verhulst continuo.

9.- ¿Por qué es indispensable estudiar las ecuaciones diferenciales?
- 9.1 ¿Son útiles para la vida?
- 9.2 ¿Seremos capaces de predecir lo que sucederá a futuro?
- 9.3 Más ejemplos de ecuaciones diferenciales:
  - 9.3.1 Mecánica: Newton.
  - 9.3.2 Electrodinámica: Maxwell.
  - 9.3.3 Teoría de fluidos: Navies-Stoker (Problema abierto)
- 9.4 ¿Qué concepto se necesita para entender mejor las ecuaciones diferenciales?

Bibliografía: Teoría y datos personales del alumno
- http://matematicas605.blogspot.com

Bibliografía:
- Sánchez Garduño, Faustino, **Matemáticas para las ciencias naturales**, Sociedad Matemática Mexicana, México,1998.
- www.inegi.com.mx

Evaluación del curso:

- Participación línea (datos personales) 5 %
- Ejercicio, tareas. 60 %
- Actividades: La derivada, vida y obra de Malthus y Verhulst 30 %
- Formulario. 5 %

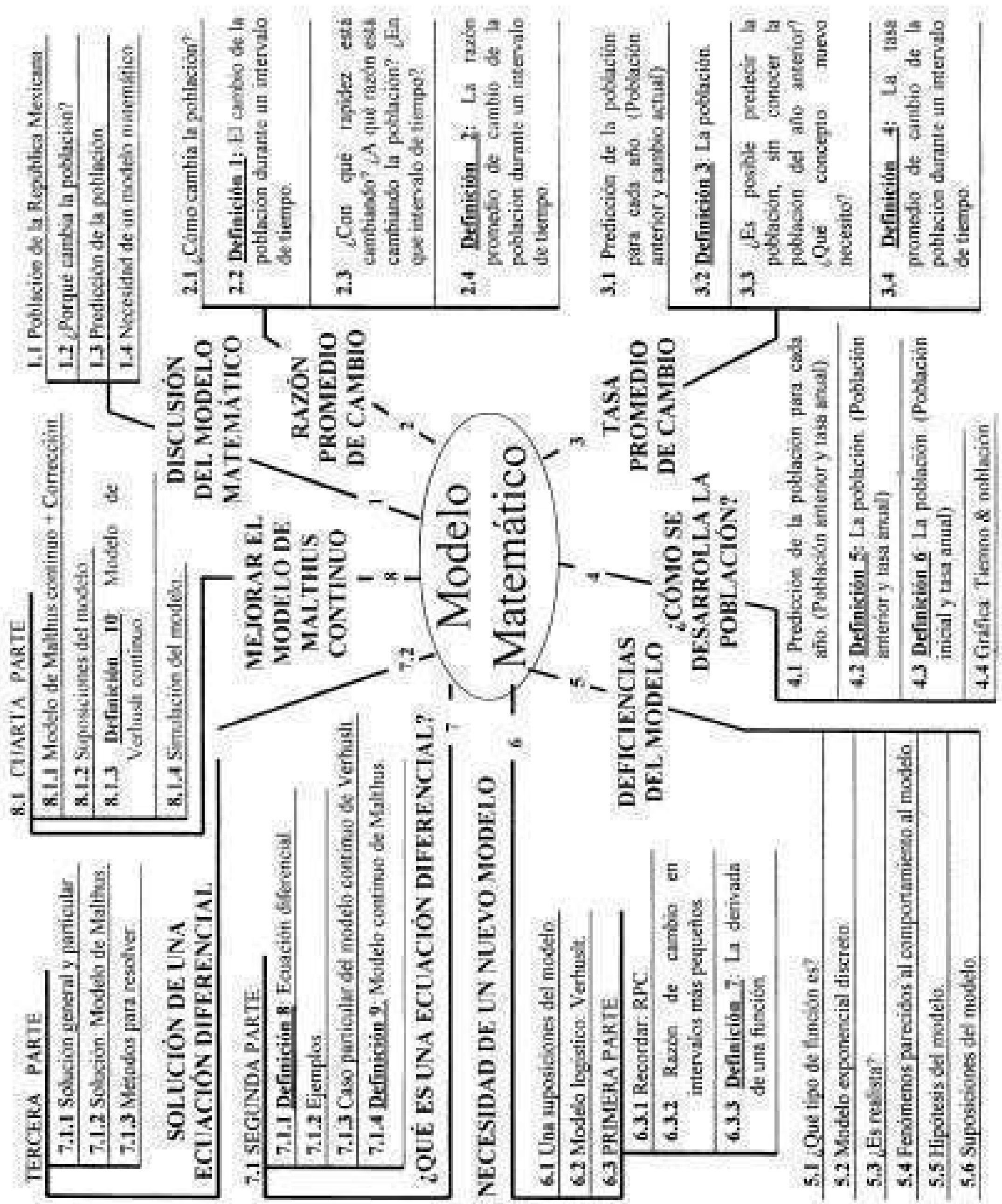
Para evaluar las tareas, los ejercicios en clase y las actividades se tomará en cuenta:

1- Presentación limpia.
2- Números y letras legibles.
3- Usando lápiz ó pluma(negra ó azul)
4- Que tenga secuencia ordenada.
5- Que sea matemáticamente correcto.

Calificación definitiva:

- Calificación final < 5.9 equivale a 5.
- De 6.0 a 6.5 = 6; de 6.6 a 7.5 = 7;
- De 7.6 a 8.5 = 8; de 8.6 a 9.5 = 9 y
- Calificación > 9.6 equivale a 10

Mapa conceptual.



A.2. Ejemplos.

En ésta parte se muestra una serie de ejemplos propuestos para algunas de las sesiones de clase: sesión 3.1, 3.3, 3.7, 3.8 y 3.10

Ejemplos de la sesión 3.1.

Ejemplo No. A.1. *El número de nacimientos es* $(2,735,312)$ *y el número de muertos es* $(422,803)$ *durante el año 1990 de la Republica Mexicana (Censo, INEGI [10]). El cambio de población es la diferencia entre los nacimientos y los muertos durante el año* 1990 *es* $(2,312,509)$.

Con ayuda de lo anterior el alumno será capaz de saber: *¿Cuánta población aumentó durante un año(intervalo de tiempo) específico?*. Dicha cantidad será el cambio de la población durante un intervalo de tiempo.

Ejemplo No. A.2. *Continuando con el ejemplo (A.1), tenems que la población aumenta* $2,312,509$ *durante el año* 1990, *se puede reescribir de la siguiente manera:* $\frac{2,312,509}{1}$ *esta cantidad es la razón en la que esta cambiando la población durante un año específco.* (1990).

Se puede concluir que, la razón en la que esta cambiando la población durante el año 1990 es $\frac{2,735,312-422,803}{1}$, es decir, *número de nacimientos durante el año* 1990 $-$ *número de muertes durante el año* 1990, *entre un año.*

Ejemplos de la sesión 3.3.

Ejemplo No. A.3. *Tomando como base los ejemplos (A.1) y (A.2), tenemos* $\Delta P(1990) = 2,312,509$ *y* $RPC(1990) = \Delta P(1990)$. *¿Se puede calcular la tasa de cambio de la población durante el año* 1990, *sin conocer la población anterior?*

Sabemos que la tasa de cambio de la población es el cociente de la razón de cambio de la población durante un año entre la población del año anterior. Como no conocemos la población anterior, entonces no podemos conocer la tasa de cambio de la población durante el año 1990.

Ejemplo No. A.4. *Por el ejercicio (A.1), sabemos que* $P(1990) = 81,249,654$, $\Delta P(1991) = 2,387,589$ *y* $RPC(1991) = 2,387,589$. *¿Podemos saber la tasa de cambio de la población durante el año* 1991*?*

Si es posible conocer la tasa de cambio de la población durante el año 1991. Realizamos la división de la razón de cambio durante el año 1991 entre la población durante el año 1990, nos da la tasa de cambio de la poblacón durante el año 1991. La tasa de cambio durante el año 1991 es $\frac{2,387,589}{81,249,654} = 0.02886$.

Ejemplos de la sesión 3.7.

Ejemplo No. A.5. *Modelo exponencial continuo (Modelo de Malthus continuo 1766-1834,[35])*

Consideramos cierta especie que no tiene enemigos y cuenta con una base alimenticia abundante. El crecimiento de la población siempre está limitado por diversos factores: los enemigos, la base alimenticia, las epidemias. Para estudiar la multiplicación de bacterias, este modelo resulta muy adecuado. A continuación se muestra el modelo que Malthus, propuesto en el siglo XVIII.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

donde

$\frac{dP(t)}{dt}$ = Razón de cambio instantánea de la población por unidad de tiempo.
t = tiempo.
$P(t)$ = Población.
λ = Constante, indice de cambio de la población.

Ejemplo No. A.6. *Modelo logístico continuo (Modelo de Verhuslt continuo 1804-1849, [35])*

En éste ejemplo se intenta precisar el modelo A.5, hacerlo más real restringiendo el crecimiento exponencial de la población. Si la población vive en un territorio limitado, obligatoriamente aumentará la competencia por el espacio vital. Además, los contactos entre individuos conducen a la propagación de enfermedades. Todo esto hace que la razón de crecimiento disminuya cuando la población crece. En el modelo supondremos que esta disminución es proporcional al número de encuentros entre los individuos.

La ecuación diferencial del modelo logísitico es la siguiente:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$$

donde

$\frac{dP(t)}{dt}$ = Razón de cambio instantánea de la población por unidad de tiempo.
$P(t)$ = Población.
λ =Constante, índice de cambio de la población.
μ = Coeficiente que describe la disminución de la población.

Ejemplo No. A.7. *Modelo depredador-presa. Volterra (1860-1940, [35])*

En el año 1931 Vito Volterra propuso el modelo depredador-presa. Suponemos que en cierto territorio cerrado viven dos especies: las presas, vegetarianos que se alimentan del pasto que abunda en el territorio y los depredadores que las cazan. Se puede tomar en calidad de par depredador-presa al lobo y a la oveja, al lucio y al carasio, al lince y a la liebre.

En lo siguiente, denotaremos con $D(t)(P(t))$ al tamao de la población de depredadores (presa) al tiempo t.

Si no hubiera depredadores, las presas se multiplicarian ilimitadamente y el tamaño de su población se podría describir mediante la ecuación de Malthus (ejemplo A.5). Si hubiera presas, los depredadores moririan poco a poco por falta de alimento $\frac{dD(t)}{dt} = -\alpha D(t)$, donde $\alpha > 0$.

Sin embargo, los encuentros con los depredadores limitan el crecimiento de la población de presas. La frecuencia de estos encuentros es proporcional tanto al número de presas como al número de depredadores, es decir, propocional a $D(t)P(t)$. Por eso la razón de cambio instantánea de la población de presas se puede escribir mediante la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu D(t)P(t)$, donde $\mu > 0$.

Análogamente, el encuentro de un depredador con una presa aumenta la probabilidad de supervivencia del depredador, es decir, favorece el crecimiento de la población de depredadores $\frac{dD(t)}{dt} = -\alpha D(t) + \beta P(t)D(t)$, donde $\beta > 0$.

Por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu D(t)P(t)$$
$$\frac{dD(t)}{dt} = -\alpha D(t) + \beta P(t)D(t)$$

donde

$P(t) =$ Presa.

$D(t) =$ Depredador.

$\frac{dP(t)}{dt}$ =Razón de cambio instantánea de la presa por unidad de tiempo.

$\frac{dD(t)}{dt}$ =Razón de cambio instantánea del depredador por unidad de tiempo.

λ =Índice de crecimiento de la presa.

μ =Índice de mortalidad de la población de presas debido a los encuentros con depredadores.

$\alpha =$ Índice de mortalidad de los depredadores.

$\beta =$ Es un coeficiente que depende de cuán frecuentemente el encuentro de un depredador con una presa termina en banquete.

Ejemplo No. A.8. *Modelo básico de difusión de una epidemia. W.D. Kermack, Mc. Kendrick. (1920, [1])*

Los primeros estudios de epidemias a través de modelos matemáticos fuerón durante el siglo XVII, cuando el matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) evaluo las ventajas de un programa de vacunación contra la viruela. Unos años mas tarde Kermack y Mc. Kendrick, establecio un principio conocido como el *Umbral*[1], este principio es básico para el curso que habra de tomar una enfermedad en sus inicios.

El problema de una epidemia esta caracterizado por las siguiente fases: un grupo de infectados se introducen a una comunidad de individuos susceptibles a la enfermedad. Esta comienza a propagar de los infectados a los susceptibles. Los infecciosos dejan de serlo debido a que se recuperan o se mueren, en tanto que el número de individuos aun no afectados por la enfermedad va disminuyendo. Finalmente, después de un intervalo de tiempo, la epidemia cesa. Cabe decir que la epidemia se detuvo por falta de susceptibles o por otros factores, tales como la disminución en la tasa de transmisión por las medidas de prevención adoptadas, la recuperación de infectados o la mortalidad.

El desarrollo de las enfermedades dentro de una población, puede ser estudiado a partir del modelo de Kermack y Kendrick. A continuación se muestra dicho modelo:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -rS(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = rS(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

donde

$S(t) =$ Población susceptible a la enfermedad. (individuos propensos a adquirir la infección)
$I(t) =$ Población infecciosa. (Individuos que padecen la enfermedad y pueden transmitirla)
$R(t) =$ Población retirada. (Individuos que se recuperan de la enfermedad)
$\frac{dS(t)}{dt}$ =Razón de cambio instantánea de la población susceptible por unidad de tiempo.
$\frac{dI(t)}{dt}$ =Razón de cambio instantánea de población infectada por unidad de tiempo.
$\frac{dR(t)}{dt}$ =Razón de cambio instantánea de la población retirada por unidad de tiempo.
$r, \gamma =$ Constantes.

[1] El cual establece que para que se de un brote epidemico, el número de infecciosos en dicha población, debe sobrepasar cierta cantidad umbral. Mas detalles consultar [9]

Ejemplos de la sesión 3.8.

Ejemplo No. A.9. *Dada una familia de funciones, encontrar su ecuación diferencial asociada a cada función.*

Función	*Ecuación diferencial*
$f(x) = -cos(t) + 5$ $f(x) = -cos(t) + 10$ $f(x) = -cos(t) - 2$ $f(x) = -cos(t) - 5$	$\frac{dP(t)}{dt} = sen(t)$
$P(t) = 5e^{\lambda t}$ $P(t) = 9e^{\lambda t}$ $P(t) = -100e^{\lambda t}$	$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$

La familia de funciones (primera columna) son ejemplos de soluciones de la ecuación diferencial. (segunda columna)

Ejemplos de la sesión 3.10.

Ejemplo No. A.10. *Pricipio fundamental del mecánica clásica*[2] *(Newton, 1642-1727, [12]).*

El físico y matemático inglés Isacc Newton (1642-1727) con base a sus observaciones y las de otros científicos, formuló tres principios que son fundamentales para contestar lo siguiente: ¿Qué es lo que produce un movimiento?. ¿Es necesario algo específico para que se conserve?, ¿Cuáles son las causas de las variaciones observadas en un movimiento? y para resolución de otros problemas relacionados con los movimientos y que reciben el nombre de “ Leyes del movimiento”.

Estos principipios constituyen los pilares de la Mecánica y fueron enunciados en la obra de Newton titulada *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* publicados en 1686. Se conocen también como primera, segunda y tercera leyes de Newton, de acuerdo el orden en que aparecieron en la obra citada.

Primera ley de Newton (ley de la inercia, de Galileo): En ausencia de la acción de fuerza, un cuerpo en reposo continuará en reposo, y uno en movimiento se moverá en línea recta y con velocidad constante.

[2]El problema central de la mecánica clásica es éste: (1) Se tiene un cuerpo con caracteristicas (masa, volumen, carga eléctrica, etc), lo se coloca (2) en una posición conocida y con una velocidad inicial también conocida, en un entorno del cual se tiene la descripción completa. (3) ¿Cuál es el movimiento siguiente qu tendrá el cuerpo?. [32]

Segunda ley de Newton (ley de la fuerza): La aceleración que un cuerpo adquiere es directamente proporcional a la resultante de las fuerzas que actúan en él, y tiene la misma dirección y el mismo sentido que dicha resultante.

La segunda ley es una de las leyes básica de la mecánica; se utiliza en el análisis de los movimientos próximos a la superficie de la tierra y también en el estudio de los cuerpos celestes. El mismo Newton la aplicó al estudiar los movimientos de los planetas.

Tercera ley de Newton (ley de la acción y la reacción): Cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, éste reacciona sobre A con una fuerza de la misma magnitud, misma dirección y de sentido contrario.

A.3. Ejercicios.

En ésta sección se muestras algunos ejercicios resueltos, que se aplicaron durante las sesión 3.3.

Ejercicios para la sesión 3.3

Ejercicio No. A.1. *Tenemos el número de nacimientos y el número de muertos durante* 1900*:* $\Delta N(1990) = 2,735,312$*,* $\Delta M(1990) = 422,803$*.*
Por el ejemplo (A.1) sabemos que la población durante 1990 *es* $\Delta P(1900) = 2,312,509$ *y por los datos del INEGI la población durante* 1990 *es* $P(1990) = 81,249,654$*.*
El número de nacimientos durante 1991 *es* $\Delta N(1991) = 2,756,447$*, el número de muertos durante* 1991 *es* $\Delta M(1991) = 411,131$*.*
La diferencia de ambas resulta ser el cambio de la población durante 1991*.* $\Delta P(1991) = 2,345,316$*.*
Queremos saber ¿Cuánta población hubo durante 1991*?.*

Respuesta:

Sumamos la población durante 1990 más el cambio de la población durante 1991, nos da como resultado la población durante 1991. En notación es $P(1990) + \Delta P(1991) = P(1991)$ y la población durante 1991 fue $P(1991) = 83,549,970$.

Ejercicio No. A.2. *La población durante* 1999 *fue de* 102,289,672 *y durante el año* 2000 *nacieron* 2,789,339 *y murieron* 437,667*. ¿Cuánta población hubo durante* 2000*?*

Respuesta:

Primero calculamos el cambio de la población durante 2000: $2,789,339 - 437,667 = 2,351,672$.
Segundo sumamos la población durante 1999 más el cambio de la población durante 2000:
$102,289,672 + 2,351,672 = 104,641,344$.

La población durante 2000 fue: $P(2000) = P(1999) + \Delta P(2000)$.

A.4. Tablas y gráficas.

En ésta sección se muestra las tablas y la gráfica que se aplicó en la sesión 3.1 y la sesión 3.6.

Tabla de la sesión 3.1

Años	Población
1921	14,300,000
1930	16,600,000
1940	19,700,000
1950	25,791,017
1960	34,923,129
1970	48,225,528
1980	81,249,654
1995	91,158,290
2000	97,483,412
2005	103,263,388

Cuadro A.1: Población de la Republica Mexicana

Tabla de la sesión 3.6

Conceptos claves	Análogia entre dos fenómenos	
	Cambio de la población	Velocidad de un automovil
Tiempo	$t, t + \Delta t$	$t, t + \Delta t$
Función	Población: P(t)	Distancia: D(t)
Cambio	En la población: $P(t + \Delta t) - P(t)$	En la distancia: $D(t + \Delta t) - D(t)$
Razón promedio de cambio	En la población: $\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	En la distancia: $\frac{D(t+\Delta t)-D(t)}{\Delta t}$
Razón promedio de cambio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños	Razón de cambio instantánea de la población: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	Lo que marca el velocímetro: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{D(t+\Delta t)-D(t)}{\Delta t}$
Definición	La razón de cambio instantánea de la población es lo mismo que calcular la derivada de la función P(t), con respecto al tiempo t.	Lo que marca el velocímetro es lo mismo que calcular la derivada de la función D(t), con respecto al tiempo t

Cuadro A.2: Analogía entre el cambio de la población y la velocidad de un automóvil

Gráfica de la sesión 3.1

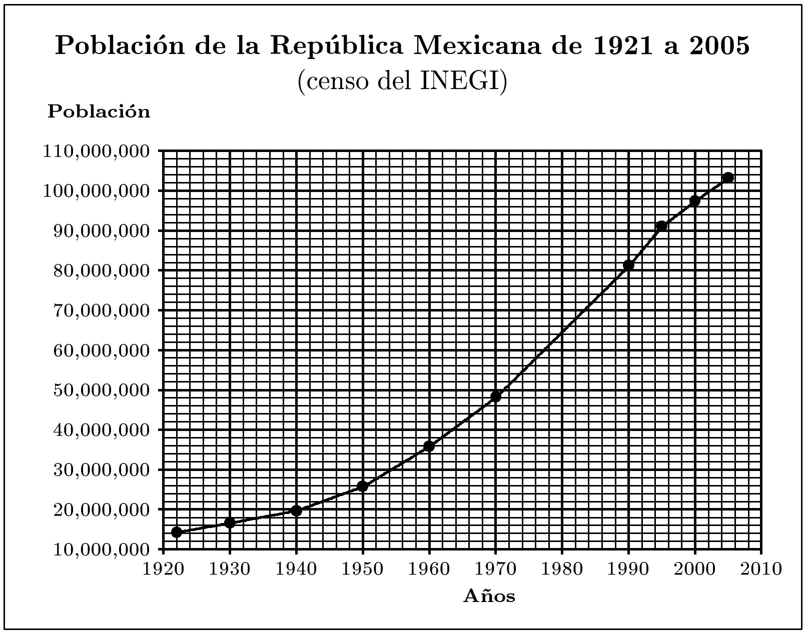


Figura A.1: Población de la República Mexicana

A.5. Actividades.

Ésta sección consta de hojas de trabajo para las actividades con los alumnos. La hoja de trabajo contiene las siguientes partes:

Encabezado, consta del título de la actividad, el nombre la profesora, la materia, el grupo, la fecha de realización, el nombre del alumno, el número de lista, el número de aciertos, calificación e instrucciones.

Desarrollo, consta de los apartados que debe hacer el alumno para completar la hoja de trabajo.

Cierre, consta de una autoevaluación que realiza el alumno al finalizar la sesión.

Pie de página, consta de una frase que hace alución a algún valor que rodea la vida escolar (libertad, justicia, solidaridad, respeto, honestidad, fortaleza y confianza).

- Actividad de la sesión 3.1.

  Consta del ejercicio 1, cuyo título es **¿Por qué crece una población?**, el cual contiene 6 apartados:

  Datos de la población y su gráfica del censo del INEGI, datos del número de nacimientos y su gráfica del censo del INEGI, datos del número de muertos y su gráfica del censo del INEGI, predicción de la población, necesidad de un modelo matemático y proceso para elaborar un modelo matemático.

- Actividad de la sesión 3.2.

  Consta del ejercicio 2 y el ejercicio 3.

  El ejercicio 2, cuyo título es **El cambio de una población y la razón de cambio de una población**, el cual contiene de 5 apartados:

  Datos del número de nacimientos, muertes, ¿cómo cambia una población?, gráfica del tiempo versus el cambio de una población, ¿a qué razón está cambiando una población? y completar cuatro enunciados referentes a los anteriores apartados.

  El ejercicio 3, cuyo título es **tasa de cambio de una población**, contiene 6 apartados:

  Tomando en cuenta los datos de la población de la República Mexicana del censo del INEGI y el cambio de la población que se calculó en la sesión anterior, completar la tabla con la población del año que se indique, de acuerdo con la tabla del apartado anterior se contesta la siguiente pregunta ¿de qué manera se puede predecir la población anual?, preguntas referentes a la tabla del primer apartado, calcular la tasa de cambio, definición de la tasa de cambio y escribir el significado de cada una de las componentes de cada fórmula que aparece en cada inciso.

- Actividad de la sesión 3.3.

  Consta del ejercicio 4, cuyo título es **¿Cómo se desarrolla una población en el tiempo?**, el cual contiene 2 apartados:

  Tomando en cuenta la fórmula de la población (modelo de malthus) vista en la sesión anterior, calcular la población para diferentes años y tomando como base el inciso anterior relaciona las dos columnas y contesta las preguntas.

- Actividad de la sesión 3.4.

  Consta de la tarea 1, cuyo título es **Deficiencias del modelo**, el cual contiene 9 preguntas, que se relacionan con lo visto en las sesiones anteriores.

- Actividad de la sesión 3.5.

  Consta de la actividad 1, cuyo título es **Necesidad de un modelo (primera parte)**, el cual contiene una tabla, que consiste en completar los espacios en blanco, de modo tal que se realize una analogía entre el cambio de la población y la velocidad de un automóvil.

- Actividad de la sesión 3.6.

  Consta de la segunda parte de la actividad 1, el cual contiene un crucigrama de la lectura cuyo título es **Historia del cálculo. Siglo XVI-XIX**.

- Actividad de la sesión 3.7.

  Consta de la actividad 2, cuyo título es **Modelo de Malthus**, el cual contiene 10 preguntas relacionadas con la lectura que lleva el título es el mismo de la actividad.

- Actividad de la sesión 3.9.

  Consta de la actividad 3, cuyo título es **Modelo de Verhulst**, el cual contiene 5 preguntas que el alumno debe formular en base a la lectura la reseña histórica del modelo de Verhulst.

- Actividad de la sesión 3.10.

  Consta del ejercicio 5, cuyo título es **¿Por qué es indispensable estudiar las ecuaciones diferenciales**, el cual contiene 5 preguntas que el alumno contestará con su propia experiencia que tuvo durante las sesiones.

- Actividad durante las 10 sesiones.

  Durante las 10 sesiones el alumno contruyó un acordeón, que contiene las definiciones de la secuencia didáctica.

Actividad de la sesión 3.1

Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 1
"¿Por qué crece la población? ¿Qué es un modelo?"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 18/octubre/2006
No. Lista: 3 Aciertos: 14 Calif: 8.75
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi
Apellido paterno Apellido materno Nombres

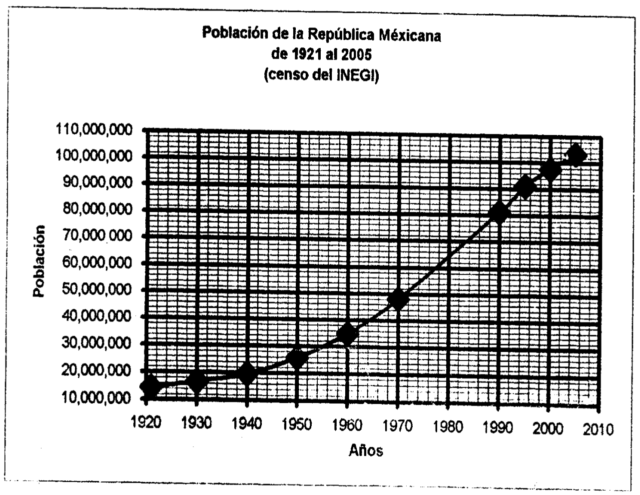
Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra o azul.

1.- Tomando en cuenta los datos de la población y la gráfica del censo del INEGI[1]

Tabla 1

Años	1921	1930	1940	1950	1960	1970	1990	1995	2000	2005
Población	14,300,000	16,600,000	19,700,000	25,791,017	34,923,129	48,225,528	81,249,654	91,158,290	97,483,412	103,263,388



Grafica 1

(1 pto) Escribe en el paréntesis, la letra que complete el enunciado correctamente.

En una población nacen y crecen, dando por resultado: (a)

a) Cambio de la población.
b) Decrece y crece la población.
c) Decrecimiento de la población.

[1] www.inegi.com.mx

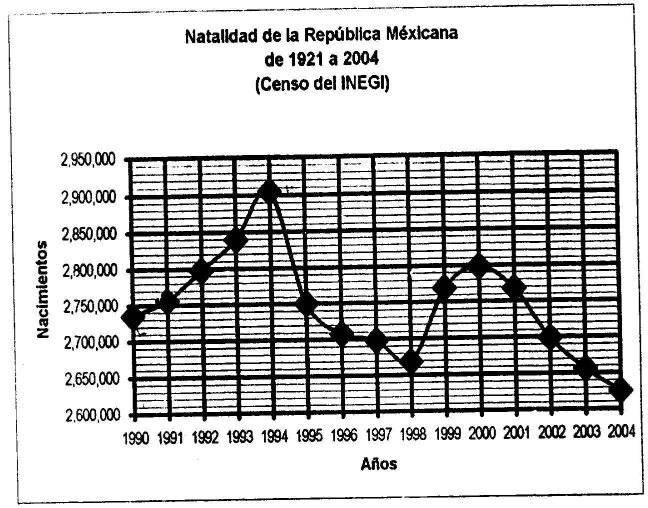
Continuación de la actividad de la sesión 3.1

Continuación: ¿Por qué crece la población? ¿Qué es un modelo?

2.- Dados los datos de natalidad de la República Mexicana y la gráfica correspondiente (censo del INEGI)

Tabla 2

Años	Natalidad
1990	2,735,312
1991	2,756,447
1992	2,797,397
1993	2,839,686
1994	2,904,389
1995	2,750,444
1996	2,707,718
1997	2,698,425
1998	2,668,428
1999	2,769,089
2000	2,798,339
2001	2,767,610
2002	2,699,084
2003	2,655,894
2004	2,625,056



Grafica 2

2P

(4 ptos) Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿En que intervalos, la gráfica de natalidad es creciente?

(1990 – 1994), (1998 – 2000)

b) ¿En que intervalo, la gráfica de natalidad es decreciente?

(1994 – 1998), (2000 – 2004)

c) ¿Qué relación existe entre la natalidad y el intervalo donde la gráfica es decreciente?

Que la Población crecio en los Primeros años donde las tenia informacion de Planificacion. En el segundo interv crecio la Poblacion Pero no mucho.

d) ¿Qué relación existe entre la natalidad y el intervalo donde la gráfica es creciente?

Que en ese intervalo se empezo a dar lo de la Informacion de Precervativos y Planificación.

Continuación de la actividad de la sesión 3.1

Continuación: ¿Por qué crece la población? ¿Qué es un modelo?

3.- Dados los datos de mortalidad de la República Mexicana y la gráfica correspondiente (censo del INEGI)

Tabla 3

Años	Mortalidad
1990	422,803
1991	411,131
1992	409,814
1993	416,335
1994	419,074
1995	430,278
1996	436,321
1997	440,437
1998	444,665
1999	443,950
2000	437,667
2001	443,127
2002	459,687
2003	472,140
2004	473,417

Grafica 3

(4 ptos) Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿En que intervalos, la gráfica de mortalidad es creciente?

(1992-1999), (2000-2004)

b) ¿En que intervalo, la gráfica de mortalidad es decreciente?

(1990-1992), (1999-2000)

c) ¿Qué relación existe entre la mortalidad y el intervalo donde la gráfica es decreciente?

Que al haber tantos nacimientos, el número de Personas que mueren es menor.

d) ¿Qué relación existe entre la mortalidad y el intervalo donde la gráfica es creciente?

Que al no haber tantos nacimientos solo quedan las personas de la tercera edad y son los que más mueren

Continuación de la actividad de la sesión 3.1

Continuación: ¿Por qué crece la población? ¿Qué es un modelo?

2p

4.- **(2 ptos)** Predicción de la población.

Tacha la respuesta correcta y a continuación explica ¿porqué?

a) ¿Es posible saber, cuál fue la población en: 1890, 1900, 1910 y 1988 ?, Si sólo conoces la información anterior. (X) (NO)

¿Por qué? Porque conociendo los datos anteriores se puede hacer un modelo matematico y hacer una aproximación.

b) ¿Es posible saber, cuál será la población en: 2010, 2020 y 2030?, Si sólo tienes la información de las tres tablas anteriores?. (X) (NO)

¿Por qué? Porque con los datos anteriores podemo hacer una aproximacion estadistica.

1p

5.- **(1 pto)** Necesidad de usar un modelo matemático.

Lee con mucho cuidado lo que se pide en la siguiente pregunta:

¿Para ti que significa la palabra modelo matemático?

Es la idealización de una situación real expresada en terminos matematicos.

1

4p

6.- **(4 ptos)** Proceso para elaborar un modelo matemático:

Ordena cronológicamente los siguientes pasos para la elaboración de un modelo matemático. Asigna a partir del 1 el primer paso y así sucesivamente.

(3) Establecer hipótesis simples, para estudiarlo de manera matemática.

(1) Analizar un problema del mundo real.

(4) Comparar datos obtenidos con datos reales.

(2) Identificar variables: independientes y dependientes.

7.- Autoevaluación.

Subraya tú respuesta, con toda honestidad, ¿Cómo comprendiste el tema visto?

(4) Muy bien.
(3) bien.
(2) Regular.
(1) No comprendí.

Calificación = $\frac{\#\,\text{aciertos} \times 10}{16} = \frac{14 \times 10}{16} = 8.75$

Libertad:

"La verdadera libertad consiste en el dominio absoluto de si mismo"

Michel de Montaigne.

Actividad de la sesión 3.2

Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 2
"El cambio de la población y la razón de cambio de la población"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI
Grupo: 605
Fecha: 19/octubre/2006
No. Lista: 3 Aciertos: 14.9 Calif: 9.31
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi Victoria
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

2P

1.- **(2 pto)** Tomando en cuenta los datos de la población del censo del INEGI[1]:

Completa la tabla

Años	Natalidad	Mortalidad	¿Cómo cambia la población?
1990	2,735,312	422,803	2,312,509
1991	2,756,447	411,131	2,345,316
1992	2,797,397	409,814	2,387,583
1993	2,839,686	416,335	2,423,351
1994	2,904,389	419,074	2,485,315
1995	2,750,444	430,278	2,320,166
1996	2,707,718	436,321	2,271,397
1997	2,698,425	440,437	2,257,988
1998	2,668,428	444,665	2,223,763
1999	2,769,089	443,950	2,325,139
2000	2,798,339	437,667	2,360,672
2001	2,767,610	443,127	2,324,483
2002	2,699,084	459,687	2,239,397
2003	2,655,894	472,140	2,183,754
2004	2,625,056	473,417	2,151,639

Tabla 1

1P

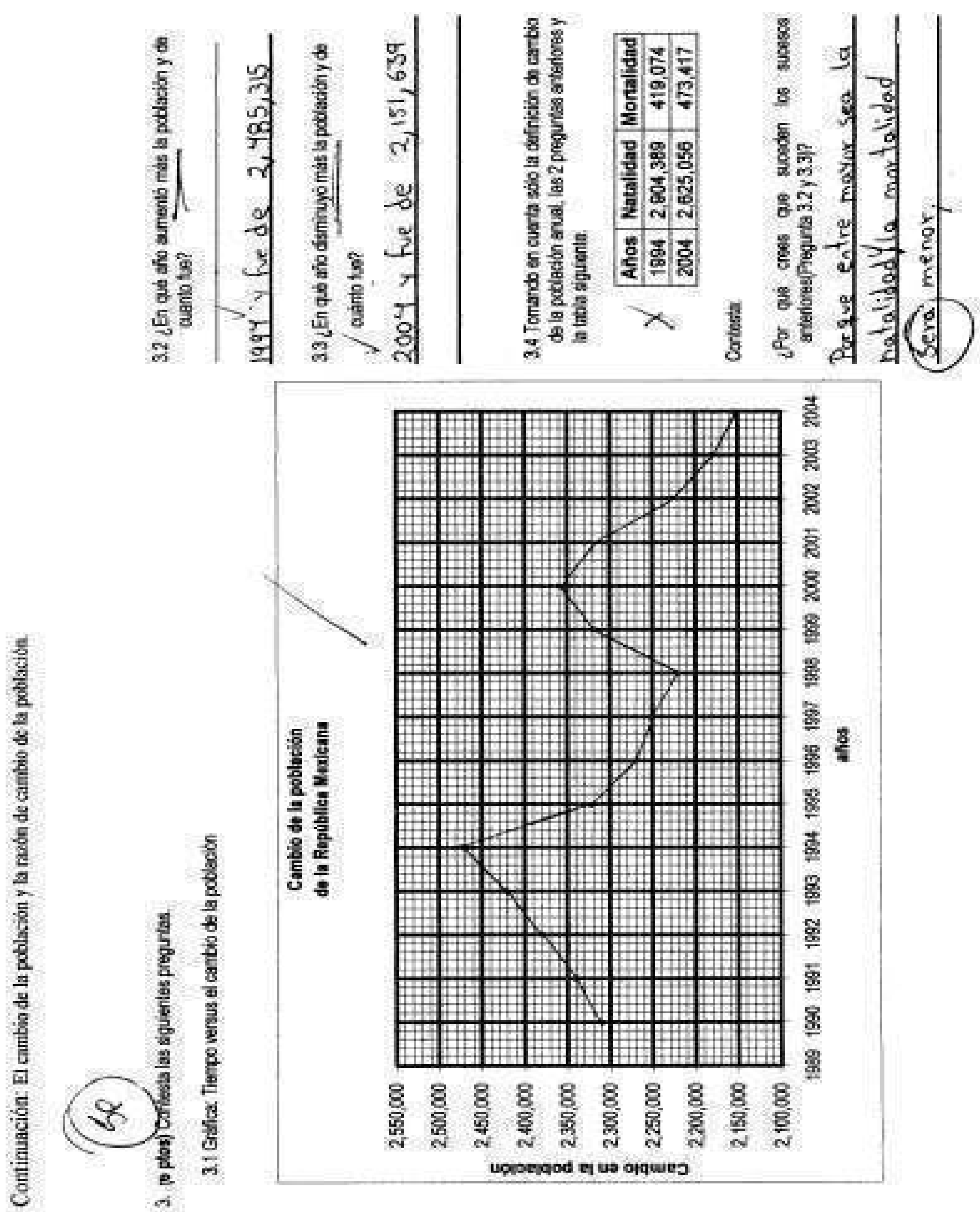
2.- **(1 ptos)** De acuerdo a la tabla 1, contesta lo siguiente.
Subraya la respuesta correcta:

¿Cómo cambia la población?

a) Natalidad + Mortalidad
b) Natalidad – Mortalidad
c) Mortalidad – Natalidad

[1] www.inegi.com.mx

Continuación de la actividad de la sesión 3.2



Continuación: El cambio de la población y la razón de cambio de la población.

3. (6 ptos) Contesta las siguientes preguntas.

3.1 Gráfica: Tiempo versus el cambio de la población

3.2 ¿En qué año aumentó más la población y de cuanto fue?

1994 y fue de 2,485,315

3.3 ¿En qué año disminuyó más la población y de cuánto fue?

2004 y fue de 2,151,639

3.4 Tomando en cuenta sólo la definición de cambio de la población anual, las 2 preguntas anteriores y la tabla siguiente:

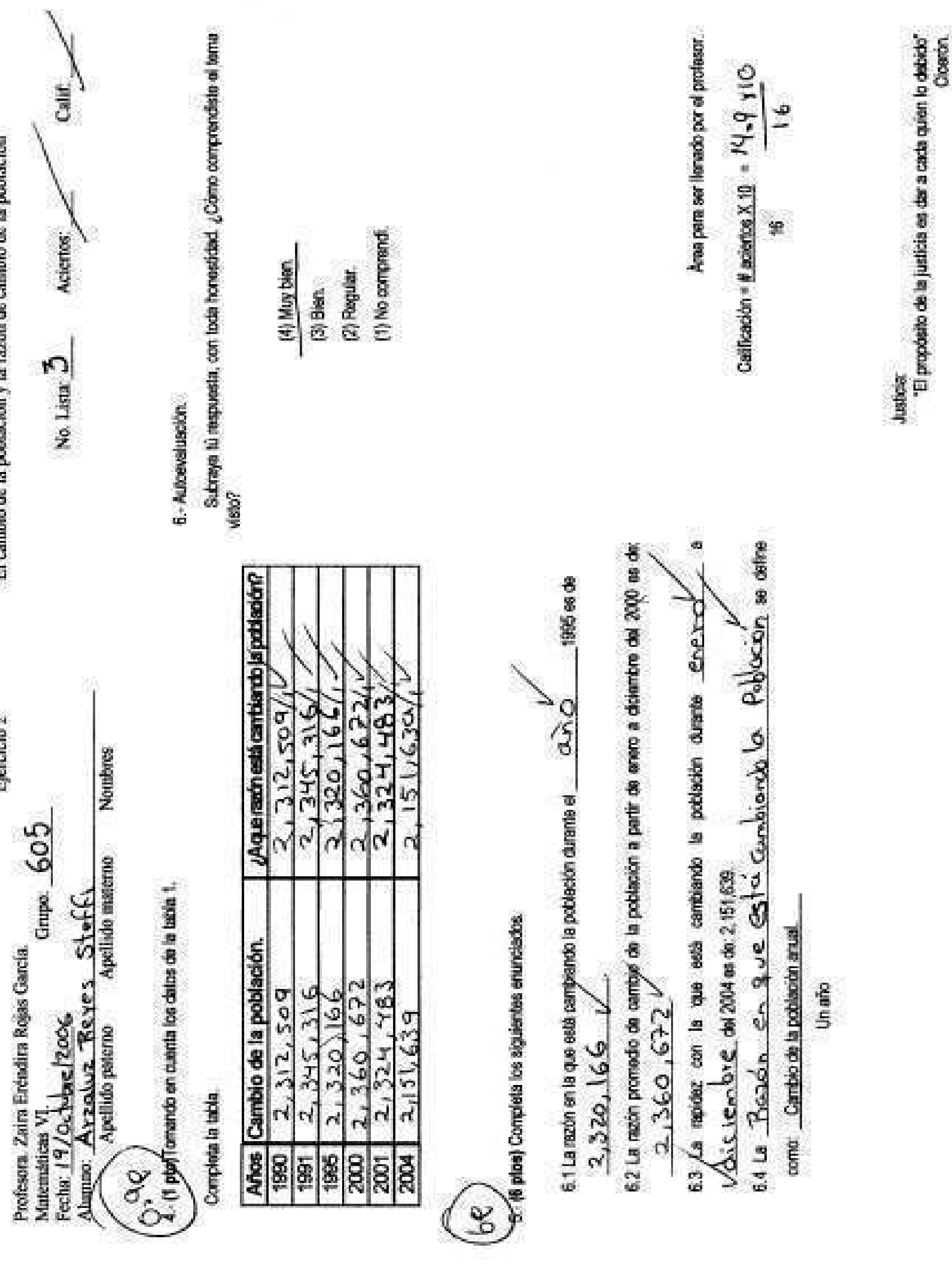
Años	Natalidad	Mortalidad
1994	2,904,389	419,074
2004	2,625,056	473,417

Contesta:

¿Por qué crees que suceden los sucesos anteriores(Pregunta 3.2 y 3.3)?

Porque entre mayor sea la natalidad y la mortalidad Sera menor.

Continuación de la actividad de la sesión 3.2



Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 2 "El cambio de la población y la razón de cambio de la población"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 19/Octubre/2006 No. Lista: 3 Aciertos: Calif:
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi
Apellido paterno Apellido materno Nombres

0.9e

4.- (1 pto) Tomando en cuenta los datos de la tabla 1.

Completa la tabla.

Años	Cambio de la población.	¿A que razón está cambiando la población?
1990	2,312,509	2,312,509/1
1991	2,345,316	2,345,316/1
1995	2,320,166	2,320,166/1
2000	2,360,672	2,360,672/1
2001	2,324,483	2,324,483/1
2004	2,151,639	2,151,639/1

6e

5.- (6 ptos) Completa los siguientes enunciados.

6.1 La razón en la que está cambiando la población durante el año 1995 es de 2,320,166.

6.2 La razón promedio de cambio de la población a partir de enero a diciembre del 2000 es de: 2,360,672

6.3 La rapidez con la que está cambiando la población durante enero a diciembre del 2004 es de: 2,151,639.

6.4 La Razón en que está cambiando la Población se define como: $\dfrac{\text{Cambio de la población anual.}}{\text{Un año}}$

6.- Autoevaluación.

Subraya tú respuesta, con toda honestidad. ¿Cómo comprendiste el tema visto?

(4) Muy bien.
(3) Bien.
(2) Regular.
(1) No comprendí.

Área para ser llenado por el profesor.

Calificación = $\dfrac{\text{\# aciertos X 10}}{16} = \dfrac{14.9 \times 10}{16}$

Justicia:
"El propósito de la justicia es dar a cada quien lo debido"
Cicerón.

Actividad de la sesión 3.3

Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 3 "Tasa de cambio de la población"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI Grupo: 605
Fecha: 19/Octubre/2006 No. Lista: 3 Aciertos: 14.9 Calif: 9.31
Alumno: Arzalue Reyes Steffi
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

1.5 p

1.- **(2 pto)** Tomando en cuenta los datos de la población de la República Mexicana, del censo del INEGI[1] y el cambio de la población que calculaste en la sesión anterior.

Completa la tabla

año actual	Población. año anterior.	Natalidad año actual.	Mortalidad año actual.	Cambio año actual.	Población año actual.
1990		2,735,312	422,803	2,312,509	81,249,654
1991	81,249,654	2,756,447	411,131	2,345,319	83,594,973
1992	83,594,973	2,797,397	409,814	2,387,583	85,982,556
1993	85,982,556	2,839,686	416,335	2,423,351	88,405,907
1994	88,405,907	2,904,389	419,074	2,485,315	90,891,222
1995	90,891,2[illegible]	2,750,444	430,278	2,320,166	93,211,388

Tabla 1

1 p

2.- **(1 pto)** De acuerdo a la tabla 1, contesta lo siguiente.
Subraya la respuesta correcta.

2.1 La población del año actual, se puede predecir de la siguiente manera:

a) Población del año anterior + Natalidad del año actual.
b) Población del año anterior + Mortalidad del año actual.
c) Población del año anterior + Natalidad del año actual – Mortalidad del año actual.
d) Ninguno de los tres incisos anteriores.

4.5 p

3.- **(5 ptos)** Contesta las siguientes preguntas.

3.1 El cambio de la población durante un intervalo de tiempo determinado, se denota: $\Delta P = \Delta N(t) - \Delta M(t)$

3.2 Supongamos que la población en 1999 fue de 102,289,672 y durante el 2000, nacieron 2,789,339 y murieron 437,667, entonces población en dicho año es: 104,641,344

Escribe lo que hiciste para llegar al resultado.
Se toma la poblacion de 1999 y se le suma el cambio actual de la natalidad menos la mortalidad del año 2000

3.3 ¿Es posible predecir la población en 2000 sin conocer la población de 1999? Sí

3.4 Si tu respuesta anterior es afirmativa. ¿Qué concepto nuevo necesita saber? Tasa de cambio del año actual de la población

1/2

[1] www.inegi.com.mx

Continuación de la actividad de la sesión 3.3

Continuación. Tasa de cambio de la población.

1.9P

4.- **(2 ptos)** Tomando como base los datos obtenidos en la tabla 1 y la definición de tasa de cambio del año actual.

Completa la tabla. Para el valor de la tasa, toma 5 cifras significativas después del punto decimal.

año	Población año anterior	Cambio anual	Razón de cambio anual	Tasa de cambio anual
1990		2,312,509	2,312,509	No se puede
1991	81,249,854	2,345,318	2,345,316	0.02886
1992	83,594,9??	2,387,583	2,387,583	0.02856
1993	85,987,???	2,423,351	2,423,351	0.02818
1994	88,405,967	2,486,315	2,485,315	0.02811
1995	90,891,219	2,330,166	2,330,166	0.02552

Tabla 2

1P

5.- **(1 pto)** Escribe en el paréntesis, la letra o letras que complete el enunciado correctamente.

La tasa de cambio anual se obtiene realizando: (b)

a) $\dfrac{\text{Cambio de la población anual}}{\text{Población anterior}}$

b) $\dfrac{\text{Razón de cambio anual}}{\text{Población anterior}}$

c) $\dfrac{\text{Cambio de la población anual}}{\text{Un año X Población anterior}}$

d) $\dfrac{\text{Razón de cambio anual}}{\text{Un año X Población anterior}}$

5P

6.- **(5 ptos)** De acuerdo a las definiciones vistas en clase, escribe el significado de cada una de las componentes de cada formula.

6.1 Si $P(t+\Delta t) = P(t) + \Delta P(t+\Delta t)$, entonces

$P(t) =$ Población durante un intervalo de tiempo anterior

$P(t+\Delta t) =$ Población durante un intervalo de tiempo actual

$\Delta P(t+\Delta t) =$ Cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual

6.2 Si $Tasa = \dfrac{RPC}{P(t)}$, entonces

$Tasa =$ Tasa promedio de cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual

$RPC =$ Razón promedio de cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual

7.- Autoevaluación.

Subraya tú respuesta, con toda honestidad. ¿Cómo comprendiste el tema visto?

(4) Muy bien.
(3) Bien.
(2) Regular
(1) No comprendí.

Área para ser llenado por el profesor.

Calificación = $\dfrac{\text{\# aciertos X 10}}{16}$ = $\dfrac{14\ 0.\text{v}\ \text{u}}{10}$

Solidaridad:

"Llevadera es la labor cuando muchos comparten la fatiga"

Homero.

Actividad de la sesión 3.4

Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 4
"¿Cómo se desarrolla la población en el tiempo?"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 25/octubre/2006
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi
Apellido paterno Apellido materno Nombres

No. Lista: 3 Aciertos: 15.44 Calif: 8.57

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

1.- **(3 pto)** Tomando en cuenta la formula de población vista en clase y lo siguientes datos:
En 1990, $t = 0$, entonces $P(0) = 81{,}249{,}654$ y $tasa = 0.02784$

2.14

Completa la tabla.

Años	t	Población INEGI	Formula $P(0)^*(\text{Tasa}+1)^t$	Población Modelo
1920	-70		81,249,654*(0.02784+1)^-70	11,885,993
1921	-71	14,300,000	81,249,654*(0.02784+1)^-69	11,564,049
1930	-60	16,600,000	81,249,654*(0.02784+1)^-60	15,641,940
1940	-50	19,700,000	81,249,654*(0.02784+1)^-50	20,584,758
1950	-40	25,791,017	81,249,654*(0.02784+1)^-40	27,089,495
1960	-30	34,923,129	81,249,654*(0.02784+1)^-30	35,649,315
1970	-20	48,225,528	81,249,654*(0.02784+1)^-20	46,914,946
1987	-3		81,249,654*(0.02784+1)^-3	74,824,698
1988	-2		81,249,654*(0.02784+1)^-2	76,907,818
1988	-1		81,249,654*(0.02784+1)^-1	79,048,932
1990	0	81,249,654	81,249,654*(0.02784+1)^0	81,249,654
1991	1		81,249,654*(0.02784+1)^1	83,511,644
1992	2		81,249,654*(0.02784+1)^2	85,836,609
1993	3		81,249,654*(0.02784+1)^3	88,226,300
1995	4		81,249,654*(0.02784+1)^4	90,682,519
1995	5	91,158,290	81,249,654*(0.02784+1)^5	93,207,121
2000	10	97,483,412	81,249,654*(0.02784+1)^10	106,924,362
2005	15	103,263,388	81,249,654*(0.02784+1)^15	122,660,362
2010	20		81,249,654*(0.02784+1)^20	140,712,221
2030	40		81,249,654*(0.02784+1)^40	243,692,474
2060	70		81,249,654*(0.02784+1)^70	555,402,160
2070	80		81,249,654*(0.02784+1)^80	730,909,998

-69

7/8 14/18 14/15

2.- **(4 ptos)** Tomando en cuenta la tabla 1.

4.8

Relaciona las dos columnas, escribiendo la letra que corresponde a la respuesta correcta en el paréntesis.

La población anual en el pasado:

1920	(i)	a)	140,712,221
1940	(g)	b)	730,907,998
1950	(e)	c)	61,739,963
1980	(c)	d)	555,402,106

La población anual en el futuro:

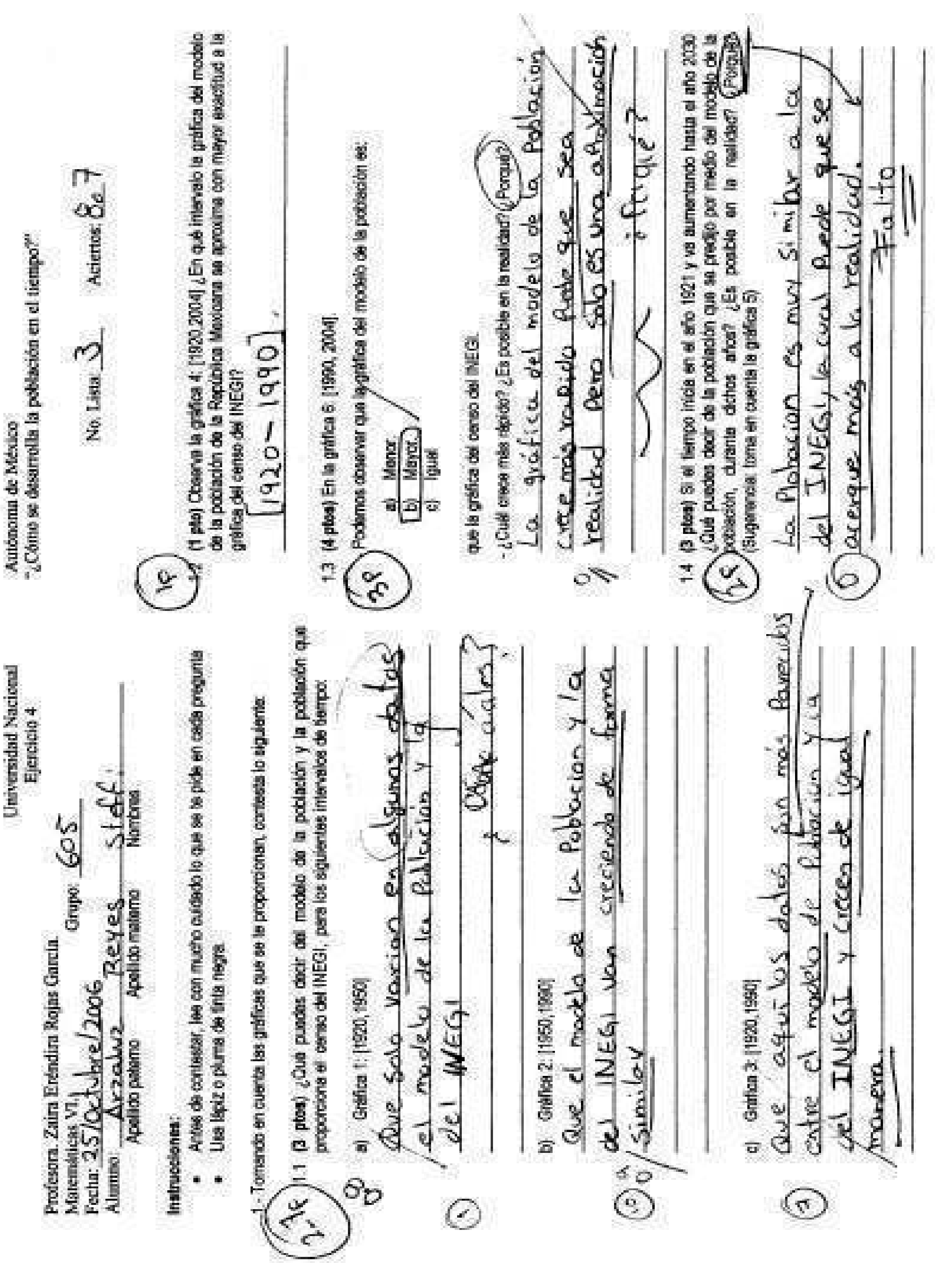
2010	(a)	e)	27,089,496
2030	(h)	f)	34,923,129
2060	(d)	g)	20,584,758
2070	(b)	h)	243,692,474
		i)	11,885,993

Área para ser llenada por el profesor.

Calificación = $\frac{\#\ \text{aciertos} \times 10}{18}$ = $\frac{15.44}{18}$

Respeto:
"Nadie es lo suficientemente pequeño o pobre para ser ignorado"
Henry Miller.

Continuación de la actividad de la sesión 3.4



Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 4 "¿Cómo se desarrolla la población en el tiempo?"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 25/Octubre/2006 No. Lista: 3 Aciertos: 8.7
Alumno: Arzaluz Reyes Steff.
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

1.- Tomando en cuenta las gráficas que se te proporcionan, contesta lo siguiente:

2.7p 1.1 **(3 ptos)** ¿Qué puedes decir del modelo de la población y la población que proporciona el censo del INEGI, para los siguientes intervalos de tiempo:

0.8 a) Gráfica 1: [1920,1950]

Que solo varian en algunas datos el modelo de la Población y la del INEGI

¿Cuáles datos?

1 b) Gráfica 2: [1950,1990]

Que el modelo de la Poblacion y la del INEGI van creciendo de forma similar

0.9

1 c) Gráfica 3: [1920,1990]

Que aquí los datos son más Parecidos entre el modelo de Población y la del INEGI y crecen de igual manera.

1p 1.2 **(1 pto)** Observa la gráfica 4: [1920,2004] ¿En qué intervalo la gráfica del modelo de la población de la República Mexicana se aproxima con mayor exactitud a la gráfica del censo del INEGI?

[1920 – 1990].

1.3 **(4 ptos)** En la gráfica 6: [1990, 2004].

3p Podemos observar que la gráfica del modelo de la población es:

a) Menor.
b) Mayor.
c) Igual

que la gráfica del censo del INEGI.

- ¿Cuál crece más rápido? ¿Es posible en la realidad? ¿Porqué?

La gráfica del modelo de la Población crece más rapido Puede que sea realidad Pero solo es una aProXimación

¿Porqué?

0

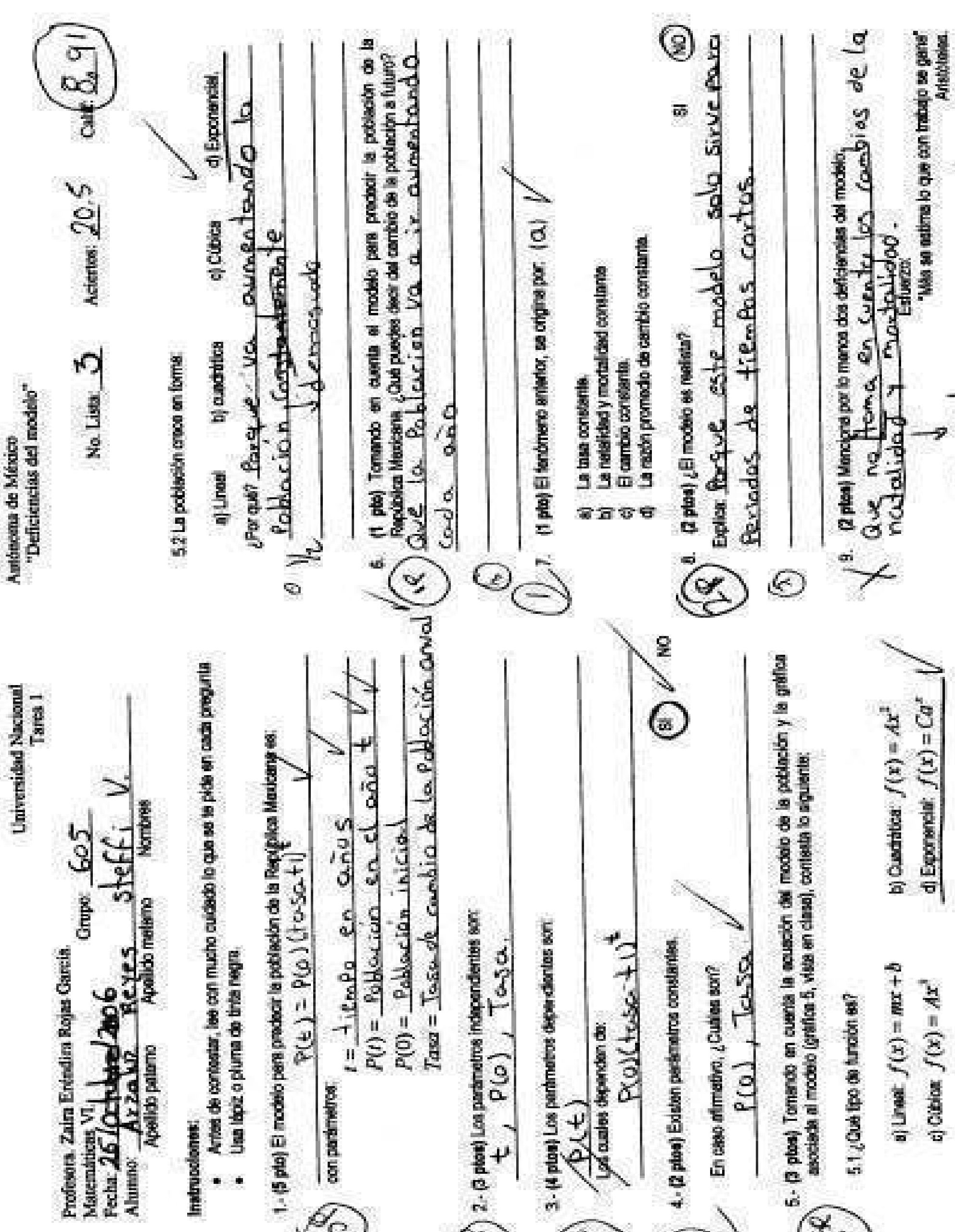
2p 1.4 **(3 ptos)** Si el tiempo inicia en el año 1921 y va aumentando hasta el año 2030 ¿Qué puedes decir de la población que se predijo por medio del modelo de la población, durante dichos años? ¿Es posible en la realidad? ¿Porqué? (Sugerencia: toma en cuenta la gráfica 5)

La Plobacion es muy similar a la del INEGI, la cual Puede que se acerque más a la realidad.

0

Falto

Actividad de la sesión 3.5



Universidad Nacional Autónoma de México
Tarea 1 "Deficiencias del modelo"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 26/octubre/2006 No. Lista: 3 Aciertos: 20.5 Calif: 8.91
Alumno: Arzaluz Reyes steffi V.
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

5P 1.- **(5 pts)** El modelo para predecir la población de la República Mexicana es: $P(t) = P(0)(tasa + 1)^t$

con parámetros:

$t =$ tiempo en años
$P(t) =$ Población en el año t
$P(0) =$ Población inicial
$Tasa =$ Tasa de cambio de la población anual

3P 2.- **(3 ptos)** Los parámetros independientes son: t, P(0), Tasa.

4P 3.- **(4 ptos)** Los parámetros dependientes son: P(t)
Los cuales dependen de: $P(0)(tasa + 1)^t$

2 4.- **(2 ptos)** Existen parámetros constantes. SI NO
En caso afirmativo, ¿Cuáles son? P(0), Tasa

2.5P 5.- **(3 ptos)** Tomando en cuenta la ecuación del modelo de la población y la gráfica asociada al modelo (gráfica 5, vista en clase), contesta lo siguiente:

5.1 ¿Qué tipo de función es?

a) Lineal: $f(x) = mx + b$ b) Cuadrática: $f(x) = Ax^2$
c) Cúbica: $f(x) = Ax^3$ d) Exponencial: $f(x) = Ca^x$

5.2 La población crece en forma:

a) Lineal b) cuadrática c) Cúbica d) Exponencial.

¿Por qué? Porque va aumentando la población ~~constantemente~~ demasiado

0 ½

1P 6. **(1 pto)** Tomando en cuenta el modelo para predecir la población de la República Mexicana, ¿Qué puedes decir del cambio de la población a futuro? Que la Población va a ir aumentando cada año

1 7. **(1 pto)** El fenómeno anterior, se origina por: (a)

a) La tasa constante.
b) La natalidad y mortalidad constante
c) El cambio constante.
d) La razón promedio de cambio constante.

2P 8. **(2 ptos)** ¿El modelo es realista? SI NO
Explica: Porque este modelo solo sirve para Periodos de tiempos cortos.

9. **(2 ptos)** Menciona por lo menos dos deficiencias del modelo. Que no toma en cuenta los cambios de la natalidad y mortalidad.

De ésta manera se contruye el modelo

Esfuerzo:
"Más se estima lo que con trabajo se gana"
Aristóteles.

Actividad de la sesión 3.6

Universidad Nacional Autónoma de México
Actividad 1 "Necesidad de un nuevo modelo" (Primera parte)

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 25/octubre/2006
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi V.
Apellido paterno Apellido materno Nombres

No. Lista: 3 Aciertos: 28.75 Calif: 9.58

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

1.- **(11 pts)** Realiza la siguiente analogía, completando la tabla.

11p

Fenómenos:	Cambio de la población	Velocidad de un automóvil
Tiempo	t, $t+\Delta t$	t, $t+\Delta t$
Función:	Población: $P(t)$	Distancia: $D(t)$
Cambio:	En la población: $P(t+\Delta t)-P(t)$	En la distancia: $D(t+\Delta t)-D(t)$
Razón de cambio de t a $t+\Delta t$:	En la población: $\dfrac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	En la distancia: $\dfrac{D(t+\Delta t)-D(t)}{\Delta t}$
Razón de cambio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños:	Razón de cambio instantánea de la población: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	Velocidad que muestra el velocímetro: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta D(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{D(t+\Delta t)-D(t)}{\Delta t}$
Conclusión:	La razón de cambio instantánea de la Población es lo mismo que calcular la derivada de la función $P(t)$, con respecto al tiempo t	La Velocidad que muestra el velocímetro es lo mismo que calcular la derivada de la función $D(t)$, con respecto al tiempo t.

Continuación de la actividad de la sesión 3.6

Continuación: Necesidad de un nuevo modelo

4.75 p

3 p

2.- **(3 ptos) Completa el siguiente concepto:**

La derivada de la función $P(t)$, con respecto al tiempo t es equivalente a:

1.- A la razón de cambio instantánea de la Población

2.- La velocidad del velocímetro

3.- Razón de cambio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños

1 p

3.- **(1 pto)** Completa la siguiente definición:

La derivada de $P(t)$ con respecto al t, se define de la siguiente manera:

La razón de cambio instantánea de la Población.

4.- **(5 ptos)** Escribe en notación la anterior definición:

La notación es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

2/4

donde

$t =$ Tiempo continuo

$\Delta t =$ Intervalo de tiempo

$P(t) =$ Población en el tiempo

$\frac{dP(t)}{dt} =$ Derivada de la función $P(t)$ con respecto a t

$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} =$ Razón de cambio de la Población anual.

5.- Autoevaluación.

Subraya tú respuesta, con toda honestidad. ¿Cómo comprendiste el tema visto?

(4) Muy bien.
(3) Bien.
<u>(2) Regular</u>
(1) No comprendí.

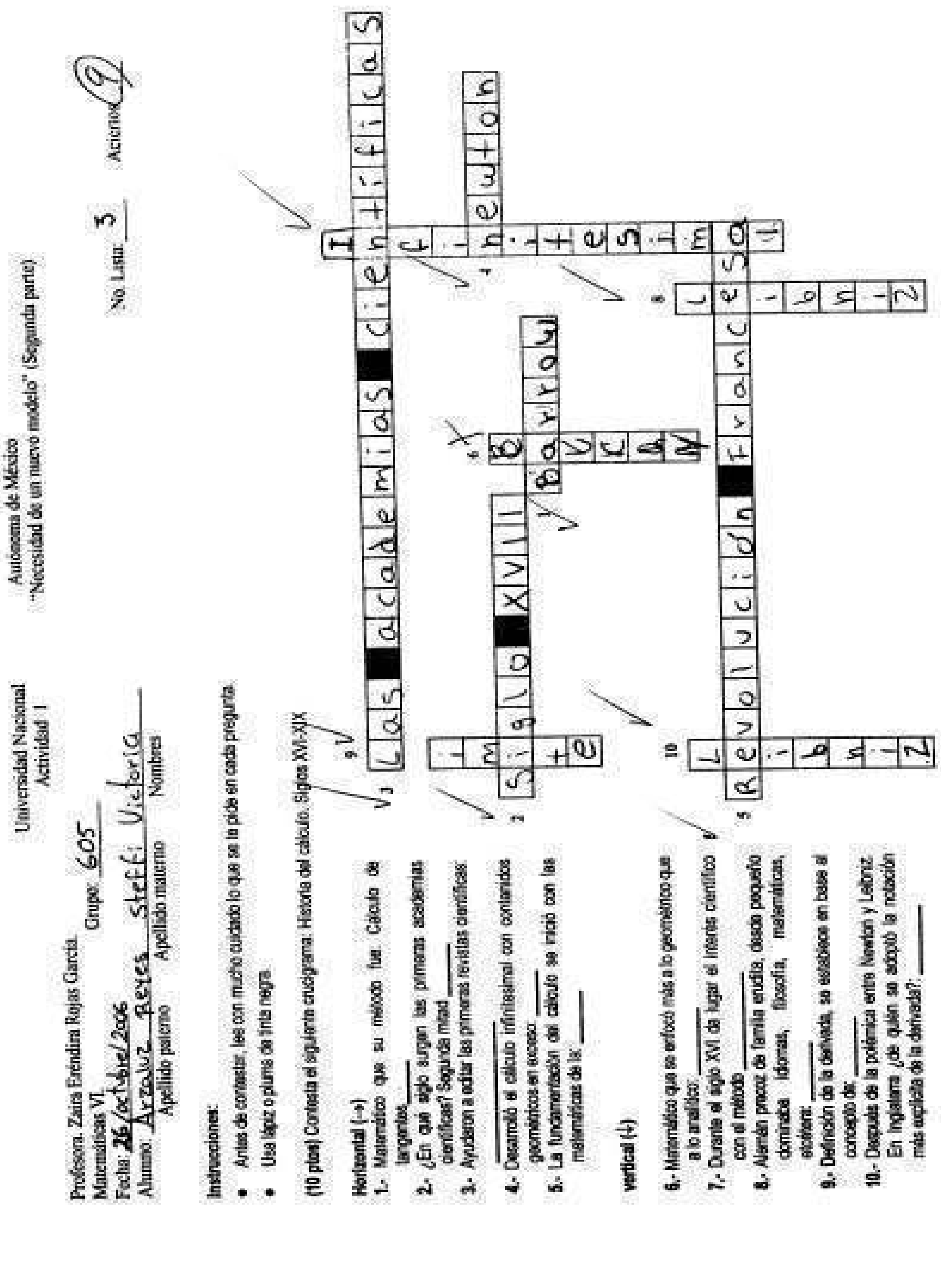
Área para ser llenado por el profesor.

Calificación = $\frac{\text{\# aciertos X 10}}{30}$ = $\frac{28.75 \times 10}{30}$ = 9.58

Honestidad:

" La mentira es como una bola de nieve; cuantas más vueltas da, mayor se hace "
Martín Lutero.

Continuación de la actividad de la sesión 3.6



Universidad Nacional Autónoma de México
Actividad 1 "Necesidad de un nuevo modelo" (Segunda parte)

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 26/octubre/2006 No. Lista: 3 Aciertos 9
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi Victoria
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta.
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

(10 ptos) Contesta el siguiente crucigrama: Historia del cálculo. Siglos XVI-XIX

Horizontal (→)

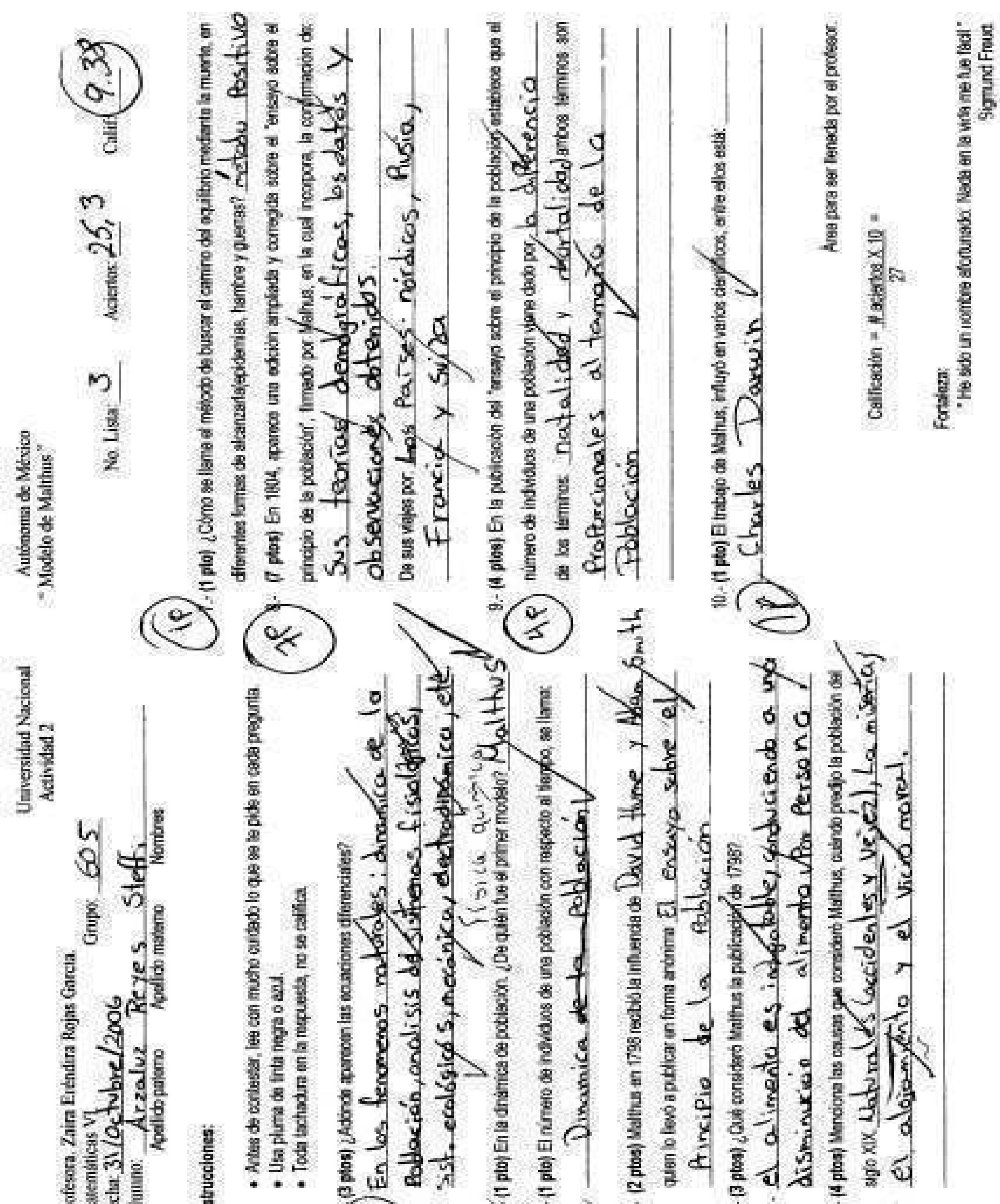
1.- Matemático que su método fue: Cálculo de tangentes_____
2.- ¿En qué siglo surgen las primeras academias científicas? Segunda mitad _____
3.- Ayudaron a editar las primeras revistas científicas: _____
4.- Desarrolló el cálculo infinitesimal con contenidos geométricos en exceso: _____
5.- La fundamentación del cálculo se inició con las matemáticas de la: _____

vertical (↓)

6.- Matemático que se enfocó más a lo geométrico que a lo analítico: _____
7.- Durante el siglo XVI da lugar el interés científico con el método _____
8.- Alemán precoz de familia erudita, desde pequeño dominaba idiomas, filosofía, matemáticas, etcétera: _____
9.- Definición de la derivada, se establece en base al concepto de: _____
10.- Después de la polémica entre Newton y Leibniz. En Inglaterra ¿de quién se adoptó la notación más explícita de la derivada?: _____

1 Barrow
2 Siglo XVII
3 Las academias científicas
4 newton
5 Revolución Francesa
6 Bacan
7 Infinitesimal
8 Leibniz
9 limite
10 Leibniz

Actividad de la sesión 3.7



Universidad Nacional Autónoma de México
Actividad 2 "Modelo de Malthus"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI Grupo: 605
Fecha: 31/octubre/2006
Alumno: Arzaluz Reyes Steffi
Apellido paterno Apellido materno Nombres

No. Lista: 3 Aciertos: 25,3 Calif. 9.38

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta.
- Usa pluma de tinta negra o azul.
- Toda tachadura en la respuesta, no se califica.

7/3P 1.- **(3 ptos)** ¿Adónde aparecen las ecuaciones diferenciales? En los fenomenos naturales: dinamica de la Poblacion, analisis de sistemas fisologicos, sist. ecologicos, mecanica, electrodinamica, etc. fisica quimica

1P 2.- **(1 pto)** En la dinámica de población. ¿De quién fue el primer modelo? Malthus

1P 3.- **(1 pto)** El número de individuos de una población con respecto al tiempo, se llama: Dinamica ~~de la~~ poblacion

2P 4.- **(2 ptos)** Malthus en 1798 recibió la influencia de David Hume y Adam Smith quien lo llevó a publicar en forma anónima El ensayo sobre el Principio de la Poblacion

3P 5.- **(3 ptos)** ¿Qué consideró Malthus la publicación de 1798? el alimento es inagotable, conduciendo a una disminucion del alimento por persona

4P 6.- **(4 ptos)** Menciona las causas que consideró Malthus, cuándo predijo la población del siglo XIX. Naturales (accidentes y vejez), La miseria, el alojamiento y el vicio moral.

1P 7.- **(1 pto)** ¿Cómo se llama el método de buscar el camino del equilibrio mediante la muerte, en diferentes formas de alcanzarla (epidemias, hambre y guerras? método Positivo

7P 8.- **(7 ptos)** En 1804, aparece una edición ampliada y corregida sobre el "ensayo sobre el principio de la población", firmado por Malthus, en la cual incorpora, la confirmación de: Sus teorias demográficas, los datos y observaciones obtenidos. De sus viajes por Los Paises nórdicos, Rusia, Francia y Suiza

4P 9.- **(4 ptos)** En la publicación del "ensayo sobre el principio de la población" establece que el número de individuos de una población viene dado por la diferencia de los términos: natalidad y mortalidad ambos términos son Proporcionales al tamaño de la Poblacion

1P 10.- **(1 pto)** El trabajo de Malthus, influyó en varios científicos, entre ellos está: Charles Darwin

Área para ser llenada por el profesor.

Calificación = # aciertos X 10 / 27 =

Fortaleza:
" He sido un hombre afortunado. Nada en la vida me fue fácil "
Sigmund Freud

Actividad de la sesión 3.9

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "
Actividad 3 "Modelo de Verhulst"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 31/Octubre/2006
Alumno: Arzaluz Reyes Steff. Victoria
Apellido paterno Apellido materno Nombres

No. Lista: 3 Aciertos: 9 Calif.: 9.0

2R 1.- ¿Quién perfecciono un modelo más realista para predecir las poblaciones en pequeños países?

R= El demógrafo belga Pierre Francois Verhulst.

2R 2.- ¿Para qué sirvio el modelo construido por Verhulst?

R= Fue para describir el crecimiento continuo de una población de Estados Unidos en el que se suponia que el efecto limitante del ambiente no entraba en juego, la expansión inicial sería exponencial

2R 3.- ¿Como le llamo Alfred J. Lotka a la nueva ecuación que obtuvo en 1925?

R= "Ley del crecimiento poblacional"

2R 4.- Anota el modelo de Verhulst, indicando cada una de sus variables.

$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$ donde: t = tiempo $P(t)$ = Población en el tiempo t.

$\frac{dP(t)}{dt}$ = razón de cambio instantaneo de la Población λ, μ = constantes

1R 5.- ¿Qué Pronostican las Poblaciones con el modelo maltusiano y cual seria en el modelo de Verhulst?

1/2 R= El modelo maltusiano Pronosticaba en las Poblaciones un crecimiento ~~limitado~~. El modelo de Verhulst describe el crecimiento de la Población de una manera más Precisa.

Continuación de la actividad de la sesión 3.9

Simulación del modelo de Verhulst: Modelo de Malthus + Corrección.

Modelo de Malthus.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

Corrección.

$$-\mu P^2(t)$$

Parámetros:

$$\frac{dP(t)}{dt} =$$ **Razón de cambio instantánea.**

$$\lambda = \ln(tasa + 1)$$

$$\mu = \frac{K}{\lambda}$$

Constantes.

Modelo de Verhulst.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$$

Simulación.

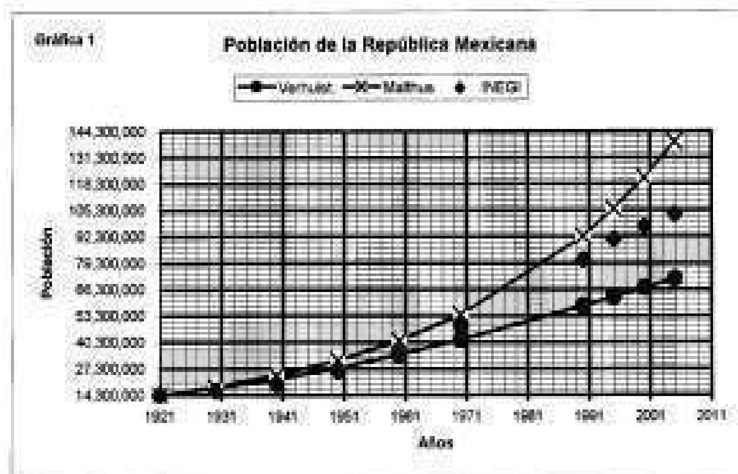
$$P(t+\Delta t) = \left[\lambda P(t) - \mu P^2(t)\right]\Delta t + P(t)$$

Parámetros	Malthus.	Verhulst
K =		130,000,000
P(0) =	14,300,000	14,300,000
λ =	0.02746	0.02746
μ =	0.00000	0.000000000211
Δt =	1.000000	1.00000

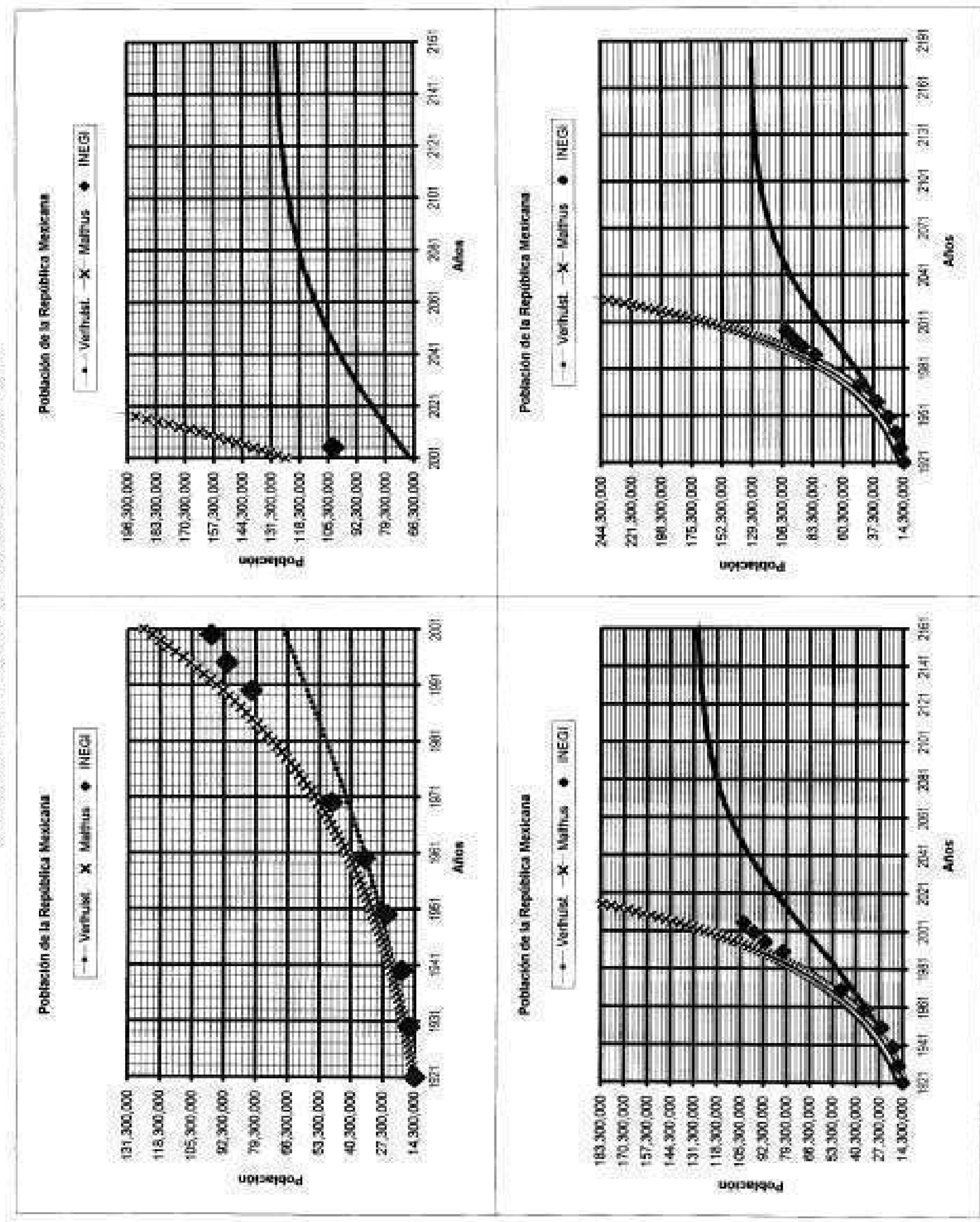
Significado:

K = Capacidad máxima de población
P(0) = Población inicial = Población de 1921
λ = ln (0.02784 + 1)
μ = K / λ.
Δt = Intervalo de tiempo.

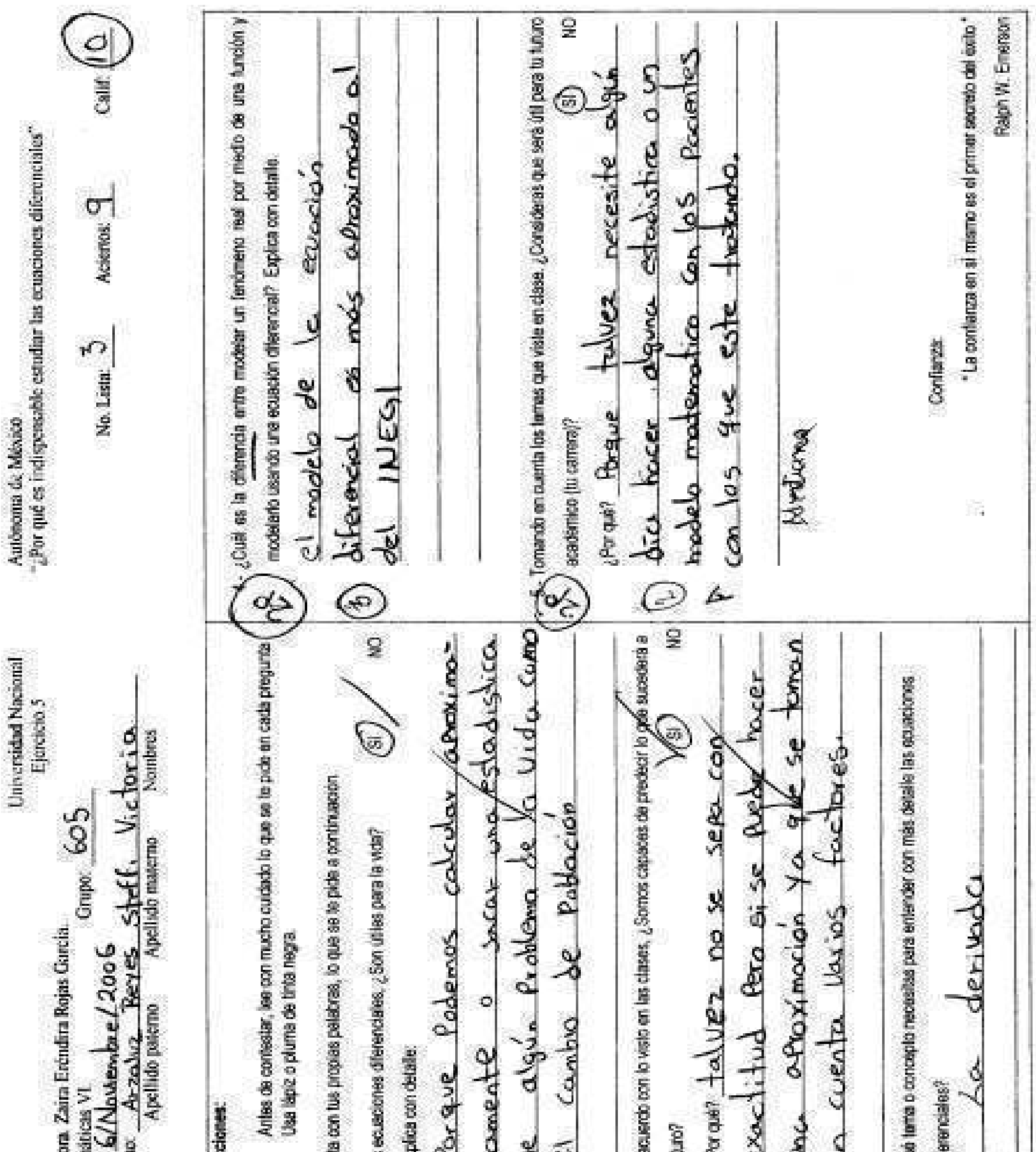
Años	Población		
	INEGI	Malthus	Verhulst.
1921	14,300,000	14,300,000	14,300,000
1930	16,600,000	16,246,136	17,722,570
1940	19,700,000	23,926,706	22,311,812
1950	25,791,017	31,369,679	27,801,465
1960	34,923,129	41,130,124	34,221,173
1970	48,225,538	53,927,116	41,532,071
1980	81,249,654	92,704,655	58,239,635
1995	91,158,290	106,151,256	62,673,546
2000	97,483,412	121,546,262	67,134,024
2005	103,263,388	139,176,550	71,576,338
2010		159,366,081	75,965,428
2020		208,950,333	84,413,883
2030		273,961,947	92,211,538
2040		359,200,902	99,172,875
2050		470,960,618	105,204,480
2060		617,492,615	110,296,031
2070		809,615,740	114,499,927
2080		1,061,514,966	117,907,766
2090		1,391,788,658	120,628,267
2100		1,824,821,628	122,776,790
2110		2,392,586,468	124,455,390



Continuación de la actividad de la sesión 3.9



Actividad de la sesión 3.10



Universidad Nacional Autónoma de México
Ejercicio 5
"¿Por qué es indispensable estudiar las ecuaciones diferenciales"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: 605
Fecha: 6/Noviembre/2006
Alumno: Arzaluz Reyes Steff. Victoria
Apellido paterno Apellido materno Nombres

No. Lista: 3 Aciertos: 9 Calif: 10

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta
- Usa lápiz o pluma de tinta negra.

Contesta con tus propias palabras, lo que se te pide a continuación

2P 1.- Las ecuaciones diferenciales, ¿Son útiles para la vida? SI NO

Explica con detalle:

Porque Podemos calcular aproximadamente o sacar una estadistica de algún Problema de la vida como el cambio de Población

1

2P 2.- De acuerdo con lo visto en las clases, ¿Somos capaces de predecir lo que sucederá a futuro? SI NO

¿Por qué? talvez no se sepa con exactitud pero si se puede hacer una aproximación ya que se toman en cuenta varios factores.

2

1P 3.- ¿Qué tema o concepto necesitas para entender con más detalle las ecuaciones diferenciales?

1 La derivada

2P 4.- ¿Cuál es la diferencia entre modelar un fenómeno real por medio de una función y modelarlo usando una ecuación diferencial? Explica con detalle.

el modelo de la ecuación diferencial es más aproximado al del INEGI

3

2P 5.- Tomando en cuenta los temas que viste en clase, ¿Consideras que será útil para tu futuro académico (tu carrera)? SI NO

¿Por qué? Porque talvez necesite algún día hacer alguna estadistica o un modelo matematico con los Pacientes con los que este tratando.

2

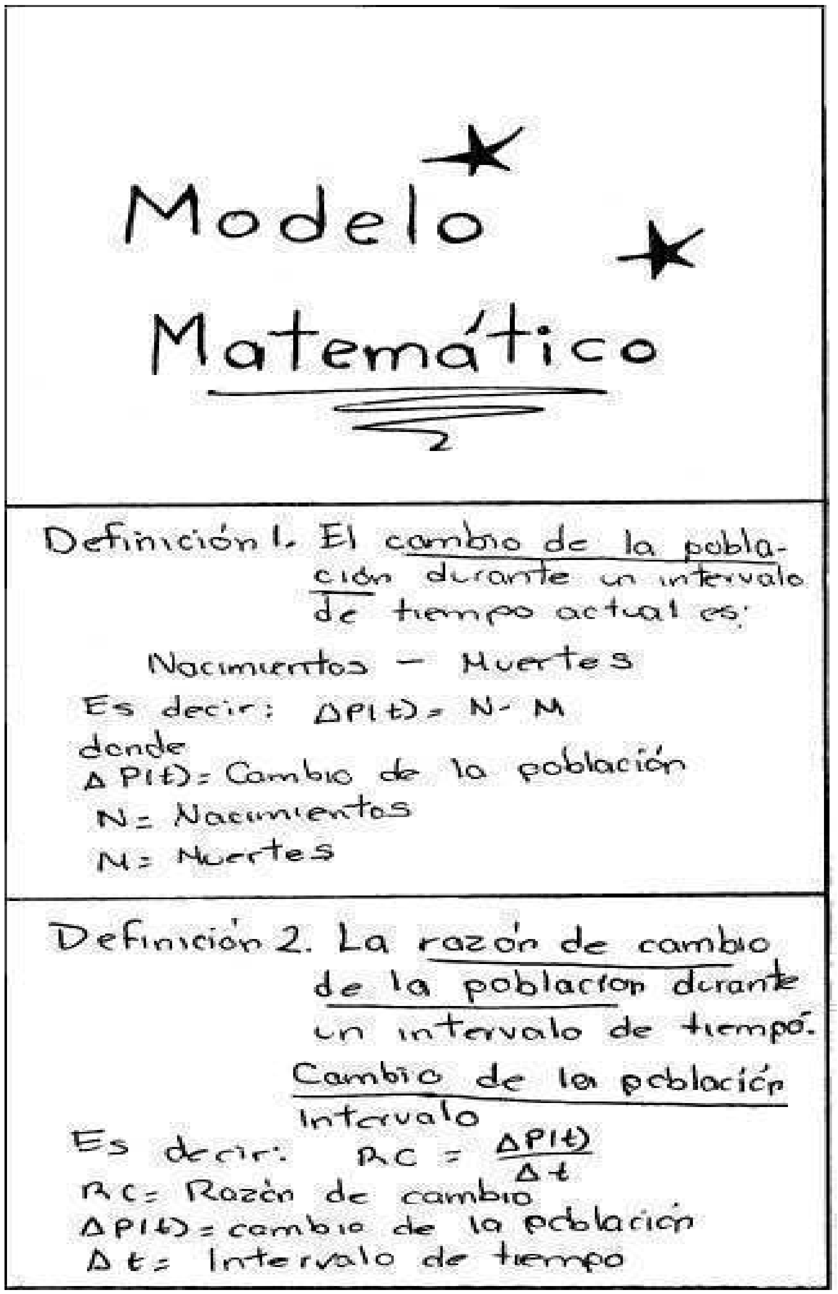
A

Medicina

Confianza:

"La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito"
Ralph W. Emerson

Actividad durante las 10 sesiones: Acordeón.



Modelo Matemático

Definición 1. El cambio de la población durante un intervalo de tiempo actual es:

Nacimientos − Muertes

Es decir: $\Delta P(t) = N - M$

donde

$\Delta P(t)$ = Cambio de la población

N = Nacimientos

M = Muertes

Definición 2. La razón de cambio de la poblacion durante un intervalo de tiempó.

$$\frac{\text{Cambio de la población}}{\text{Intervalo}}$$

Es decir: $RC = \dfrac{\Delta P(t)}{\Delta t}$

RC = Razón de cambio

$\Delta P(t)$ = cambio de la población

Δt = Intervalo de tiempo

Continuación del acordeón

Definición 3. La población durante un intervalo de tiempo:

Población anterior + Cambio de la población

$$P(t+\Delta t) = P(t) + \Delta P(t+\Delta t)$$

$P(t+\Delta t)$ = Población durante un intervalo de tiempo. $(t+\Delta t)$

$P(t)$: Población durante un intervalo de tiempo (t)

$\Delta P(t+\Delta t)$ = Cambio de la población

Definición 4. La tasa de cambio de la población durante un intervalo de tiempo.

$$\frac{\text{Razón de cambio}}{\text{Población anterior}}$$

$$\text{Tasa} = \frac{RC}{P(t)}$$

RC = Razón de cambio

$P(t)$ = Población durante un intervalo de tiempo.

Definición 5. La población en el año t.

$$\text{Población año } t-1 \times \left(\text{Tasa de cambio anual} + 1 \right)$$

Es decir. $P(t) = P(t-1)(\text{Tasa}+1)$

$P(t)$ = Población en el año t

$P(t-1)$ = Población en el año $t-1$

tasa = tasa de cambio anual.

Continuación del acordeón.

Definición 6. La población en el año t.

$$\text{Población inicial} \times \left(\begin{matrix}\text{Tasa de} \\ \text{cambio} \\ \text{anual}\end{matrix} + 1\right)^t$$

Es decir: $P(t) = P(0)(\text{Tasa}+1)^t$

$P(t)$ = Población en el año t.

$P(0)$ = Población inicial.

tasa = tasa de cambio anual

t = tiempo en años.

Definición 7. La derivada de la función $P(t)$ con respecto a t.

Es decir

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

t = tiempo

Δt = Intervalo de tiempo

$P(t)$ = Población

Continuación del acordeón.

Definición 8. Ecuación diferencial

Es una herramienta para elaborar modelos matemáticos

Parámetros
- Función desconocida { Incógnita $P(t), y(t), F(x)$
- Derivadas { 1era, 2da, etc
- variables t, x, s { Valores reales

Definición 9. El modelo de Malthus

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

donde

t = tiempo

$\frac{dP(t)}{dt}$ = derivada de la función $P(t)$ con respecto a t

λ = constante $= \ln(\text{tasa} + 1)$

$P(t)$ = Población.

Definición 10. El modelo de Verhulst.

Modelo de Malthus + Corrección

Es decir. $$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$$

$\frac{dP(t)}{dt}$ = Razón de cambio instantánea

$P(t)$ = Población

λ, μ = constantes.

A.6. Lecturas.

Ésta sección consta de 4 lecturas, que se desarrollaron durante las sesiones de clase:

- Lectura de la sesión 3.5.

  Cuyo título es **Ejemplos de fenómenos**.

  Contiene los siguientes apartados:

  - Reacciones químicas.
  - Procesos oscilatorios en la química.

- Lectura de la sesión 3.6.

  Cuyo título es **Historia del cálculo**.

  Contiene los siguientes apartados:

  - Primeros razonamientos " carácter infinitesimal".
  - Precursores del cálculo.
  - Fundadores del cálculo.
  - La controversia entre Newton y Leibniz.
  - Fundamentación del cálculo.
  - Notación del cálculo.

- Lectura de la sesión 3.7.

  Cuyo título es **Reseña histórica de Malthus**.

- Lectura de la sesión 3.9.

  Cuyo título es **Reseña histórica de Verhulst**.

Lectura de la sesión 3.5

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria. # 1 "Gabino Barreda"
Ejemplos: Ecuaciones diferenciales.

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.

Matemáticas VI-II Grupo: 605

Reacciones químicas[1].

Las ecuaciones químicas muestran cómo se forma una sustancia(producto) a partir de otras sustancias(reactantes). Por ejemplo, la ecuación

$$2H_2 + 0_2 \rightarrow 2H_2 0$$

Muestra que el resultado de la reacción entre dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno es la obtención de dos moléculas de agua.

La forma general de la ecuación química es

$$aA + bB + cC + \ldots \rightarrow mM + nN + p.$$

Donde A, B, C, . . . son reactantes; M, N, P, . . . son las sustancias que se obtienen como resultado de la reacción química; las constantes a, b, c, . . . , m, n, p, son enteros positivos que indican las concentraciones(número de moléculas) de las sustancias que intervienen en la reacción.

La magnitud que caracteriza el curso de una reacción con el tiempo se llama **velocidad de reacción**. Las concentraciones de los reactantes se miden en moles por unidad de volumen.

Una de las leyes fundamentales de la teoría de las velocidades de las reacciones químicas es la **ley de acción de masas, según la cual la velocidad de una reacción química que transcurre a temperatura constante, es proporcional al producto de las concentraciones de las sustancias que intervienen en la reacción en el instante dado.**

Ejemplo[*]:

Veamos cómo utilizar la ley de acción en la resolución de un problema concreto de una reacción química. El resultado de la reacción de 10 litros de la sustancia A con 20 litros de la sustancia B es una nueva sustancia C. Supongamos que A, B y C son líquidos, que la temperatura durante la reacción permanece constante y que la reacción de dos volúmenes de la sustancia A con un volumen de la sustancia B produce tres volúmenes de la sustancia C. Determinar la cantidad de sustancia C en un instante arbitrario t sabiendo que durante 20 minutos se forman 6 litros.

Solución.

Representamos con $X(t)$ el volumen(en litros) de la sustancia C obtenida hasta el instante t(horas). De las condiciones del problema se deduce que, al llegar al instante t, han reaccionado $\frac{2X(t)}{3}$ litros de la sustancia A y $\frac{X(t)}{3}$ litros de la sustancia B o, lo que es equivalente, aún quedan $10 - \frac{2X(t)}{3}$ litros de A y $20 - \frac{X(t)}{3}$ litros de B.

Conforme a la ley de acción de masas, la ecuación diferencial que representa lo anterior es:

$$\frac{dX(t)}{dt} = K\left(10 - \frac{2X(t)}{3}\right)\left(20 - \frac{X(t)}{3}\right)$$

Procesos oscilatorios en la química[2].

En 1910, Alfred J. Lotka estudió la siguiente cadena de reacciones químicas[3]:

$$A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} Y \xrightarrow{k_2} B$$

Las moléculas de las sustancias A, de las cuales hay una cantidad suficiente, se transforman con una velocidad constante k_0 en moléculas de la sustancia X. La sustancia X se transforma en la sustancia Y con una velocidad tanto mayor cuanto mayores son las concentraciones de X e Y. Las sustancias Y se desintegra irreversiblemente, transformándose en B. Para el análisis de esta reacción química utilizamos la ley de acción de masas.

Denotemos mediante $X(t)$, $Y(t)$, $b(t)$ las concentraciones de las sustancias X, Y, B, obtenemos las siguientes ecuaciones cinéticas:

$$\frac{dX(t)}{dt} = k_0 - k_1 X(t)Y(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = k_1 X(t)Y(t) - k_2 Y(t)$$

$$\frac{db(t)}{dt} = k_2 Y(t)$$

En 1925, Lotka estudió una cadena más de reacciones químicas[4]:

$$A + X \xrightarrow{k_1} 2X$$

$$X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y$$

$$Y \xrightarrow{k_3} B$$

Y le corresponde el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de depredar-presa.(Volterra)

$$\frac{dX(t)}{dt} = k_1 aX(t) - k_2 X(t)Y(t)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = k_2 X(t)Y(t) - k_3 Y(t)$$

Observaciones:

1.- Volterra tomó como base las ecuaciones de Lotka para elaborar su modelo ecológico[5].

2.- Debido a que el mismo sistema de ecuaciones diferenciales describe tanto procesos químicos como procesos ecológicos, frecuentemente en la literatura se denomina sistema de Volterra-Lotka.

---

[1] Ver libro: V, V Amelkin, Ecuaciones diferenciales en la práctica, Serie de divulgación científica matemática, URSS. Páginas31-34

[2] Ver libro: Iu Iu Tarasiévich. Simulación matemática y computacional Curso introductorio, URSS, paginas: 71-76.

[3] Oscilaciones amortiguadas.

[4] Oscilaciones no-amortiguadas.

[5] Modelo depredador-presa.

Continuación de la lectura de la sesión 3.5

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria. # 1 "Gabino Barreda"
Ejemplos: Modelo exponencial (Malthus)

Profesora: Zaira Eréndira Rojas García.

Matemáticas VI-II Grupo: 605

Una colonia de bacterias y un modelo matemático[1]

Lo que tienes que saber

Aquí tienes a un matemático:

Leonhard Euler (1707-1783):

Pero te diré que ha sido el matemático más prolífico de la historia. Tiene en su haber más de 75 libros de matemáticas (más de 45.000 páginas de puro ingenio). Su historia es tan asombrosa que resulta difícil imaginar que se puede sentir con una mente tan preclara en el terreno matemático. Si alguna vez te preguntan qué matemático ha introducido un determinado símbolo o ha descubierto tal o cual cosa, te recomiendo que si no estás seguro (y quieres dejarte guiar por el cálculo de probabilidades) digas que fue Euler. Tendrás un alto porcentaje a tu favor de haber acertado. Entre sus hallazgos figura un número que nos va a salir en el problema siguiente y que nos volverá a aparecer en muchas ocasiones: e. *No te preocupes, tengo intención de dedicarte una página a este número mágico.*

PROBLEMA:

Población de Bacterias: un laboratorio farmacéutico está desarrollando una nueva fórmula. Para ello, están utilizando bacterias. Han determinado que las bacterias que se utilizarán se reproducen por bipartición cada 10 minutos. Se inicia un campo de cultivo con una bacteria a las 14:00 horas. A las 14:10 existen 2 bacterias, a las 14:20 hay 4... Por observación en el microscopio, se concluyó que a las 18:50 horas en punto, el campo tiene llena la mitad de su capacidad. ¿A qué hora se llenará el campo de cultivo si se inició como se ha dicho a las 14:00 horas?. ¿Cuántas bacterias habrá cuando el campo de cultivo esté lleno?

¿Sabrías encontrar un modelo matemático que se aproxime(ajuste) al crecimiento de esta colonia de bacterias?

ANÁLISIS DEL PROBLEMA

Antes de empezar con el problema, como con cualquier problema con el que te tropieces, léelo y reléelo varias veces. Tienes que empaparte del problema y "verlo" claramente o por lo menos, todo lo claramente que un análisis previo te posibilite.
Cuando me enfrenté a este problema por primera vez, cometí el error de querer ponerme a realizar operaciones tan rápidamente, que no me di cuenta de lo obvia que es la primera pregunta. Para dar su respuesta sólo hay que tener claro el problema y no es necesaria ninguna operación... Ahora que tienes tiempo: ¿te atreves con la primera pregunta?.

DATOS:

1.- Cada 10 minutos el número de bacterias se duplica
2.- La hora de comienzo del cultivo son las 14:00. A las 18:50 ya está llena la mitad del campo de cultivo (estos dos primeros datos te pueden dar la primera respuesta).
3.- En total son 4 horas 50 minutos lo que tarda en llenarse la mitad del campo de cultivo. Si en cada hora hay 6 intervalos de 10 minutos, en las 4 horas 50 minutos hay un total de 6x4+5=29 intervalos de 10 minutos.

Vamos a ver primero como evoluciona la colonia de bacterias en los 29 intervalos de 10 minutos
(es decir, hasta que se llena la mitad del campo de cultivo)
Como ves arriba, he definido una sucesión de números en la que cada término es igual al doble del anterior con P(0) = 1
Aquí tienes el nº de bacterias desde el comienzo (t = 0) hasta el final (las 18:50 cuando t = 29)

Como se ve, a las 18:50 hay 536.870.912 (quinientos treinta y seis millones ochocientas setenta mil novecientas doce bacterias), que es justamente la mitad de las bacterias que caben en el campo de cultivo.

¡¡¡ Como la población se duplicará en los 10 minutos siguientes, a las 19:00 horas, se habrá llenado el campo de cultivo !!!

El número de bacterias a las 19:00 horas será el doble del número que hay a las 18:50

Esta es la parte fácil, ¿y el modelo matemático que explique este crecimiento?

¿ Dónde andará el número e?

Para ello nos fijamos en la sucesión obtenida antes: 1,2,4,8,16,32... Como ves es una **progresión geométrica** en la que:

$$a_1 = 1$$
$$razón = 2$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Ahora es fácil ponerse a encontrar un modelo matemático que se adapte a este crecimiento tan desmesurado.

$$P(t) = P(0)2^{t-1}$$
ó
$$P(t) = P(0)e^{(t-1)\ln(2)}$$

Ten en cuenta que cuando se produce un crecimiento tan grande, seguramente, el modelo que mejor se ajuste a estos datos, será una función exponencial.

Ya tenemos un modelo exponencial.
(y apareció el número e)

[1] Más detalle consultar la pagina: http://www.omerique.net/calcumat/progresiones.htm

Lectura de la sesión 3.6

Historia del cálculo (siglos: XVI-XIX)

Primeros razonamientos "carácter infinitesimal"

Se inicio con el problema de las tangentes, al principio sólo se podía determinar para ciertas curvas, entre los matemáticos que podemos nombrar están:

- *Pierre de Fermat*: Alrededor de 1630 y 1640, el método que empleo fue el siguiente: Sea una curva definida por la función y = f(x); se trata de encontrar la tangente en el punto de la curva (a,f(a)).
- *Barrow*: Se enfoco más a lo geométrico, que a lo analítico, su método fue: Cálculo de tangentes, el cual se basaba en un triángulo característico (triángulo rectángulo, con hipotenusa un segmento de recta tangente y las longitudes de los catetos son muy pequeñas).

Precursores del cálculo. Siglos XVI y XVII

Durante el siglo XVI

En este siglo está presente el razonamiento matemático, el cual consiste en consideraciones empíricas, es decir, son motivadas físicamente; por lo que falta un lenguaje lógico (notaciones) adecuado para representar los razonamientos. El interés científico durante este siglo, es el desarrollo del cálculo, entre los cuales se encuentran: los problemas de máximos, de mínimos, de tangente (geométrico) y la cuadratura (cálculo de áreas), por lo que da lugar al método infinitesimal, posteriormente se explicará con más detalle.

Primera mitad del siglo XVII

Durante este periodo, no existían profesores de matemáticos, en comparación con la actualidad los profesores estaban alejados del ámbito universitario, entre las profesiones que abundaban estaban: Juristas, teólogos, arquitectos, diplomáticos, etc. Durante su tiempo libre se ocupaban en investigar matemáticas, por lo que solían reunirse con un grupo de trabajo "científicos-aislados". Para la publicación de un artículo (tema científico), no existía mucha la divulgación (falta de revistas especializas), por lo que los descubrimientos se daban a conocer por medio de cartas a otros amigos, conocidos y científicos, que tuvieran interés sobre el tema

Segunda mitad del siglo XVII

Surgen las primeras academias científicas: Royal Society de Londres, Académie des Sciences de París, Academias de Berlín y San Petersburgo, esto ayudo a editar las primeras revistas científicas.

Los problemas que se presentaban en este siglo, eran a cerca de problemas de nacionalidad (obras de matemáticos los criticaban de excelentes, decepcionantes, dependiendo de su nacionalidad) y disputas patrióticas.

Fundadores del cálculo. XVIII,

Entre los principales fundadores del cálculo, se pueden mencionar a Isaac Newton (ingles, nació en Grantham, Lincolnshire en 1642 y murió en 1727, hijo de un labrador, acomodado, de pequeño jugaba con juguetes mecánicos) y Gottfried W Leibniz, (alemán 1646-1716, precoz, de familia erudita, desde muy pequeño ya dominaba: idiomas, filosofía, teología, matemáticas y derecho), sin olvidar de Barrow, maestro de Newton. Barrow (forma geométrica en determinadas curvas), basándose en cantidades infinitesimales (longitudes muy pequeñas)

La controversia entre Newton y Leibniz.

La prioridad de la invención del cálculo tiene un carácter anecdótico.

Isaac Newton	Gottfried W Leibniz
En su obra: "Principia" 1670-80 y publicación: 1687.	El desarrollo de su obra fue en 1680 y su publicación en 1684.
Desarrollo el cálculo infinitesimal con contenidos geométricos excesivos, lo cual le resto importancia a sus métodos	Desarrollo el cálculo de manera algebraica y simbólica. Incremento una nueva herramienta: Notación

La disputa dio origen a una guerra entre matemáticos ingleses, seguidores y defensores de Newton como inventor del cálculo y los matemáticos del continente, que apoyaban a Leibniz

La relación entre Newton y Leibniz, era buena. Newton, en su obra "Principia", reconoce que Leibniz está en posesión de un método de cálculo. Durante varios años se intercambiaron cartas sobre problemas matemáticos de interés para ambos, las cartas se enviaban a través de H.Oldenburg (testigo), en ese momento era secretario de Royal Society de Londres.

En 1676, Leibniz comentaba a Newton sobre los métodos de cálculo para resolver problemas inversos de tangente, mientras tanto Newton le envió dos epístolas "prior" y "posterior", la primera se trataba del teorema binomial y de series, y en la segunda la envió por medio de anagramas (baccda), evitando así encontrarse de nuevo en polémica, (anteriormente estuvo en polémica con el ingles Robert Hoocke" sobre la teoría de la luz), razón por la cual se agudizo su desconfianza. Dicho anagrama presentaba errores en la transmisión, por lo que tardo en llegar a Leibniz más de medio año. Este último le respondió por medio de una carta, explicándole las ideas sobre el cálculo "problemas de tangentes, se pueden reducir a los problemas de cuadraturas"

¿Cómo se generó la polémica sobre la prioridad?

Wallis le dijo a Newton, "Que en Holanda, el cálculo que se usaban era atribuido a Leibniz". Por lo que a finales del siglo XVII, empezaron a circular rumores que acusaban a Leibniz de haber plagiado el "método de Newton", esto se debió a que los trabajos de Leibniz y Bernoulli, mostraban las posibilidades que el cálculo tenía, como herramientas para la investigación científica, al mismo tiempo apareció en el continente el primer libro sobre el cálculo diferencial de Leibniz.

Continuación de la lectura de la sesión 3.6

"Analyse des Infiniment petits del marqués de L'Hopital".

La primera aparición impresa que recoge los rumores de plagio se presenta en un libro de un suizo Fatio de Duillier, afincado en Inglaterra, amigo de Newton, el cual había intercambiado cartas con Leibniz, a través de Huygens. Al parecer no quedó contento con el trato que Leibniz. La controversia quedaba oficialmente abierta.

El siguiente paso en la controversia lo da Leibniz, en la reseña que del tratado (De quadratura curvocum) de Newton aparece en las Actas Eruditotum. Más grave fue el siguiente ataque a Leibniz. Aparece en un párrafo de un artículo de un tal John Keill, profesor de astronomía de Oxford, publicado en 1708 en las Philosophical Transactions, la revista de la Royal Society de Londres (precedida por Newton) la cual movió a Leibniz (miembro de dicha sociedad) a escribir una carta de protesta contra ésta, ahora si directa la acusación de plagio. Precisamente, en esta carta cita la famosa publicación "Principia", donde Newton reconocía el desarrollo independiente del método de cálculo de Leibniz.

La Royal Society decide nombrar una comisión para estudiar le problema. Esta comisión estaba formada por ingleses, amigos de Newton (entre ellos el astrónomo Edmond Halley, que había pagado la publicación de la primera edición de los "Principia"), dos miembros no ingleses: el ministro de Prusia en Inglaterra y el matemático francés, refugiado en Inglaterra y gran amigo de Newton, A, de Moivre.

El informe de la comisión, aunque no acusaban a Leibniz de plagio, si sembraba suficientes dudas como para desprender esa opinión. Leibniz siempre había reconocido la prioridad de la invención por parte de Newton, y simplemente solicitaba que éste y la Royal Society reconocieran la independencia en el desarrollo de su método. Por otro lado, la Royal Society publica un conjunto de cartas, donde de manera sutil se acusaba a Leibniz de haber visto los apuntes de Newton en sus visitas a Londres, o de haber leído algunas cartas.

La controversia no se detuvo ni siquiera con la muerte de Leibniz. El mismo Newton en la tercera edición de su "Principia", algunos años después de la muerte de aquél, suprime la parte donde reconocía la existencia del cálculo de Leibniz. La situación se acabo con una guerra entre matemáticos ingleses y los del continente, derrotados al final los primeros. Al comienzo del siglo XIX, un grupo encabezado por Charles Babbage propone adoptar la notación de Leibniz, con lo que reconoce la superioridad de la matemática hecha en el continente y para marcar de forma simbólica el fin de la controversia sobre la prioridad.

Fundamentación del cálculo.
Se inicio con las matemáticas de la Revolución Francesa, cuyo iniciador fue, Joseph Luis Lagrange, con su artículo "Theórie des Fonctions anaytiques" en 1797, el cual desarrollaba la idea de definir la derivada de una función f en el punto x, como un cociente. Hasta el siglo XIX se realiza una fundamentación rigurosa de la derivada, empezaron a definir con rigor, el concepto de límite, como soporte a la definición de derivada. En 1817 Cauchy y Bolzano, definieron la derivada de una función f(x) como la cantidad f'(x) que se aproxima al cociente: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero.

En el primer cuarto del siglo XIX, se implemento en Inglaterra la notación de Leibniz.

Notación del cálculo
La notación del cálculo fue también objeto de polémica entre Newton y Leibniz. De hecho, los ingleses utilizaron una notación distinta a la del resto del continente hasta bien entrado el siglo XIX. Como ya dijimos, Newton, en Inglaterra, investigo sobre la fluxión de la fluente, es decir, la derivada de una variable con respecto al tiempo, tenía su propia notación, para la fluente la denotaba por x o por $f(x)$ y para la fluxión x' o $f'(x)$. Por otro lado en Alemania manejaban la notación de Leibniz, es decir, la diferencial de una variable en el cálculo, la cual consistía en escribir lo siguiente: $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{df(x)}{dx}$.

Leibniz, introduce dicha notación, sin antes haber descubierto las reglas. Después de la polémica entre Newton y Leibniz, en Inglaterra se adopto la notación de Leibniz, ya que era más explicito lo que se deseaba calcular.

Entre los matemáticos que fundamentaron el cálculo, se encuentra Lagrange y Cauchy, usaban su propia notación, y' ó $f'(x)$, y $D_x y$ ó $D_x f(x)$, respectivamente.

Escuela Nacional Preparatoria 1
"Gabino Barreda"

Matemáticas VI

Historia del Cálculo
Siglos XVI-XIX

" La Derivada "

Profra. Zaira Eréndira Rojas García

25 - octubre - 2006

Lectura de la sesión 3.7

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "
Actividad 2 "Modelo de Malthus"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García. Matemáticas VI-II Grupo: 605

Malthus y las ecuaciones diferenciales.

Las **ecuaciones diferenciales** aparecen frecuentemente en muchos fenómenos naturales: dinámica de población, en el análisis de sistemas fisiológicos, de sistemas ecológicos, mecánica, electrodinámica, física, química y muchos más.

No se sabe con certeza **¿cuándo?** y **¿dónde?** se formuló el **primer modelo matemático** de un fenómeno natural, pero en la **dinámica de población** el primer modelo se debe a Thomas R. **Malthus**[1], quien en 1798 publicó "Ensayo sobre el Principio de la Población"[2].

Dinámica de población.

Una **población** está formada por un conjunto de individuos de la misma especie y que tienen una historia en común. La palabra "**dinámica**" se refiere al número de individuos de una población con respecto al tiempo.

Biografía de Malthus, Thomas Robert (1766-1834)

Economista, clérigo y demógrafo británico, nacido en Rookery. Completó sus estudios en el Jesus College de Cambridge. Se graduó en filosofía y teología, fue ordenado pastor anglicano y estuvo al frente de la parroquia de Albury. En 1793 fue designado miembro del equipo de dirección del Jesus College, puesto al que tuvo que renunciar en 1804 al contraer matrimonio. En la Compañía de las Indias Orientales fundó en Haileybury una nueva institución universitaria, allí ejerció Malthus como profesor de economía desde 1805 hasta su muerte.

En 1798, influido por las tesis de Adam Smith y David Hume, publicó de forma anónima su célebre *Ensayo sobre el principio de la población*[3], consideró que el alimento es inagotable, conduciendo a una disminución del alimento por persona. Él incluso predijo la población del siglo XIX, consideró solamente causas naturales (accidentes y vejez), la miseria (guerras, pestilencia, hambre) el alojamiento y el vicio moral (infanticidios, asesinatos, abortos y homosexualidad), dando como resultado el crecimiento excesivo de la población[4]. Su método positivo había de buscar el camino del equilibrio mediante la muerte, con sus diferentes formas de alcanzarla como son: las epidemias, el hambre y las guerras.

Para Malthus, el alimento más barato debía ser el pan, pues sacia el apetito sin aportar demasiados nutrientes al organismo(de los marginados). Malthus observó que mucha gente falsificó su teoría y tomó dolores de cabeza para precisar que él no acaba de predecir la catástrofe futura, sino miró su principio de la población como una explicación del pasado y la situación actual de la humanidad, así como una predicción de nuestro futuro.

Además, muchos han discutido que Malthus no reconoció completamente la capacidad humana de aumentar nuestro suministro de alimento.

Sin embargo, dada la polémica suscitada por la obra, en 1804 aparecería una edición ampliada y corregida, esta vez firmada por el autor. En ella incorporó, como confirmación de sus teorías demográficas, los datos y observaciones obtenidos durante sus viajes por Rusia, los países nórdicos, Francia y Suiza.

En la publicación del citado *Ensayo sobre el principio de población*[5] establece que el cambio en el tamaño de una población(**número de individuos de una población**) viene dado por la **diferencia los nacimientos**(natalidad) y **las muertes**(mortalidad), y ambos **son proporcionales al tamaño de la población**. Dicho cambio en la población(continuo), se representa de la siguiente manera:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

con parámetros:

$t = tiempo.$

$P(t) =$ Población en el tiempo t.

$\frac{dP(t)}{dt} =$ Razón de cambio instantánea de la población.

λ = *ln(Tasa+1)* =Constante.

Y la solución de la ecuación diferencial (solución del modelo de Malthus continuo), es

$$P(t) = P(0)e^{\lambda t}, \text{ con } \lambda = \ln(Tasa+1) = \text{Constante}.$$

Su trabajo influyó en muchos otros científicos, entre ellos esta Charles Darwin.

[1] Ver libro: Sánchez Garduño, Faustino. Matemáticas para las ciencias naturales, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1998.

[2] Este principio de la población fue basado en la idea que la población crece de manera geométrica (es decir, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc) mientras el alimento crece de manera aritmética (es decir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc)

[3] Teoría que argumenta que la población crece más rápido que los recursos, conduciendo progresivamente a un crecimiento de la clase social más baja(proletarios)

[4] Ver catástrofe de Maltusiana: http://en.wikipedia.org/wiki/Malthusian_catastrophe

[5] Más detalle: http://en.wikipedia.org/wiki/An_Essay_on_the_Principle_of_Population

Lectura de la sesión 3.9

Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "
Actividad 3 "Modelo de Verhulst"

Profesora. Zaira Eréndira Rojas García.
Matemáticas VI. Grupo: ________
Fecha: ______________ No. Lista: ____ Aciertos: ____ Calif: ____
Alumno: ____
Apellido paterno Apellido materno Nombres

Ecuación logística

El modelo de crecimiento exponencial no es siempre realista, se vuelve impráctico cuando el entorno comienza a interferir en la población (enfermedades, clima, inmigración, emigración, guerras, etcétera) Desde este punto de vista, la ecuación logística es importante, ya que toma en cuenta algunos efectos del entorno sobre la población.

Un modelo más realista para predecir las poblaciones en pequeños países fue perfeccionado por el demógrafo belga Pierre Francois Verhulst, después de haber leído el "Ensayo sobre el principio de población" de Thomas Malthus.

Biografía de Verhulst Pierre Francois.

Verhulst nació en Bruselas en 1804. Su principal interés fue la demografía, también estudió sociología. El término logístico fue introducido en 1838, por el demógrafo belga en el segundo de sus trabajos sobre poblaciones: "**Recherche mathématiques sur loi d'accroissement de la population**"[1]. El modelo construido por Verhulst fue para describir el crecimiento continuo de una población de Estados Unidos en el que suponía que el efecto limitante del ambiente no entraba en juego inmediatamente y que en un país no colonizado, la expansión inicial sería exponencial[2]. El padre del modelo logístico en su versión continua, muere en 1849.

En el segundo de sus trabajos de Verhulst sobre poblaciones, usó los datos de la población de Estados Unidos de 1970 a 1840 para predecir la población norteamericana a partir de 1930 (bajo la hipótesis de que la población seguiría satisfaciendo la ecuación logística). Su trabajo fue completamente olvidado hasta 1920, cuando R. Pearl y L. J. Reed publicaron una serie de artículos sobre crecimiento de poblaciones, en los que utilizaban la misma ecuación que Verhulst, también llamada "Ecuación Verhulst-Pearl. Tras descubrir el trabajo de Verhulst, Pearl y Reed[3] adoptaron también el nombre de ecuación logística. Alfred J. Lotka obtuvo de nuevo la ecuación en 1925, llamándola "**Ley del crecimiento poblacional**"

La ecuación logística o modelo de Verhulst se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta le decrecimiento de la población con el término $-P^2(t)$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P^2(t)$$

donde t = tiempo.

$P(t)$ = población en el tiempo t.

$\frac{dP(t)}{dt}$ = razón de cambio instantáneo de la población.

λ, μ = constantes.

Esta ecuación logística o sigmoidal ha desempeñado un papel central en el desarrollo de la ecología, pues es la base para los modelos matemáticos de competencia interespecífica, depredación y parasitismo. Se aplica a poblaciones en los que los nacimientos y las muertes ocurren de manera continua, y no en pasos de tiempo discretos. Ha demostrado ser bastante certera para describir poblaciones de protozoos, bacterias, insectos de las frutas, insectos acuáticos y animales que viven en espacios limitados.

De esta forma, en contraste con el modelo maltusiano, las poblaciones pronosticadas deben presentar un crecimiento limitado, es decir, no crecerán más allá de cierta cantidad. Este crecimiento inhibido podría ser causado por depredadores, superpoblación, competencia por el alimento, polución, planificación familiar, etcétera".
Aunque la ecuación parece no ajustarse muy bien a las poblaciones reales, es un modelo útil para analizar el crecimiento bajo recursos limitados.

Actividad 3.
Instrucciones.

1.- Elabora de la lectura anterior 5 preguntas con sus respectivas respuestas, pueden ser elaboradas: Opción múltiple, complementación, relación de columnas, preguntas abiertas, respuesta breve, falso y verdadero.

2.- Entregar en una hoja tamaño carta, con los datos que aparecen en el encabezado de la lectura.

[1] Ley de crecimiento población, que aparece en la revista. Volumen 18, número 1, publicado en 1845
[2] En 1920 Pearl y Reed redescubrieron la curva logística en sus estudios sobre la población de los Estados Unidos.
[3] Pearl y Reed utilizaron la ecuación logística para predecir el crecimiento futuro de la población de Estados Unidos basándose en los datos censales desde 1790 hasta 1920. Su ecuación habría predicho unos 185 millones de personas en los Estados Unidos en el año 2,000, que es una subestimación del tamaño real de la población (unos 260 millones de personas).

A.7. Conceptos.

Ésta sección consta de algunas preguntas y respuestas de los ejercicios realizados por los alumnos en las hojas de trabajo de las sesiones 3.1, 3.3 y 3.4 y 3.10

Hoja de trabajo de la sesión 3.1

El ejercicio 1, consta de tres preguntas:

Primera pregunta. **¿Qué puedes decir de los datos obtenidos de la población en el modelo y los datos que se tienen registrados en el INEGI?.**

Podemos rescatar lo siguiente: 38 % dijeron que varian en algunos datos, el 17 % comentarón que son diferentes las gráficas, el 15 % observaron que durante 1920 y 1936 los datos del modelo son menores que los datos propocionados por el INEGI y durante 1940-1950 se observó lo contrario, el 13 % escribieron que no observaban ninguna diferencia, son similares las gráficas y durante 1920 la población obtenida por medio del modelo es menor que la población obtenida durante 1950, seguido con el 9 % dijeron que durante 1950 es menor la población en el INEGI que la del modelo y el 8 % opinaron que existe poca diferencia ambas gráficas aumentan, pero más notorio durante 1920.

Segunda pregunta **¿Qué puedes decir de los datos obtenidos de la población en el modelo de Malthus (durante 1950 y 1990) y los datos que se tienen registrados en el INEGI?,**

Podemos rescatar lo siguiente: 58 % sin diferencia durante el año 1950 y durante el año 1990 mayor población, el 19 % observaron menor diferencia durante el año de 1960, el 12 % opinan que varian en algunos datos, el 8 % ambas gráficas aumentan y 4 % no contestó.

Tercera pregunta **¿Qué puedes decir de los datos obtenidos de la población en el modelo de Malthus(durante 1990 y 2000) y los datos que se tienen registrados en el INEGI?,**

Podemos rescatar lo siguiente: 78 % sin diferencia, salvo durante el año 1990, el 58 % sin diferencia durante el año 1950 y durante el año 1990 mayor población, el 12 % dijeron que varian en algunos datos, con el mismo porcentaje opinaron que ambas gráficas aumentan rapidamente, el 8 % no contesto y finalmente el 4 % observaron que varia la población muy poco al principio.

Hoja de trabajo de la sesión 3.3

Para la gráfica de las actividades de la sesión 3.3 se les preguntó a los alumnos, **¿Es posible los datos obtenidos de la población a partir del modelo para la realidad? y ¿Por qué?,** las respuestas son las siguientes:

¿Es posible los datos obtenidos de la población a partir del modelo para la realidad?						
Gráfica	SI				NO	
¿Por qué?	Estimación (Fórmula)	Predicción correcta	Tasa natalidad	Mayor permanente	Sin contestar	Diferentes factores
%	34.62 %	11.54 %	3.85 %	7.69 %	26.92 %	15.38 %

¿Es posible los datos obtenidos de la población a partir del modelo para la realidad?						
Gráfica	SI		NO			
¿Por qué?	Va creciendo	Tasa constante	Sin contestar	Una aproximación	Diferentes factores	Referencia del modelo
%	19.23 %	11.54 %	30.77 %	23.08 %	11.54 %	3.85 %

Hoja de trabajo de la sesión 3.4

Las preguntas claves de la tarea son las siguientes:

Primera pregunta **¿Por qué crece la poblaci de manera exponencial?**,

Las respuesta de los alumnos las observamos en la siguiente tabla:

¿Por qué crece la población de manera exponencial?			
Cada día crece y crece	Por la representación gráfica	A corto plazo es realista	Justificación erronea.
42.86 %	25.57 %	7.14 %	21.43 %

La segunda pregunta: **¿Qué puedes decir de la población a futuro?** y

Las respuesta las podemos observar en la siguiente tabla.

¿Qué puedes decir de la población a futuro?					
Población aumentará	Es una predicción	Mayor a la realidad	Aumentaá sin considerar factores	Debería de variar por la mortalidad	Justificación errónea
50 %	18 %	11 %	10 %	7 %	4 %

La tercera pregunta: **¿El modelo exponencial es realista?.**

La mayoria de los alumnos contestaron afirmativamente y las razones las exponenemos en la siguiente tabla:

El modelo exponencial si es realista debido a						
No toma encuenta factores	Mortalidad diferente a la natalidad	La población es constante	Es una aproximación	No toma encuenta necesidades humanas	Funciona a corto plazo	Justificación erronea
35.71 %	17.86 %	14.29 %	10.72 %	3.57 %	7.14 %	10.71 %

Hoja de trabajo de la sesión 3.10

El ejercicio 5, consta de cinco preguntas:

La primera pregunta **¿Las ecuaciones diferenciales son útiles para la vida? y ¿Por qué?**

Las razones por las que los alumnos contestarón afirmativamente son:

¿Las ecuaciones diferenciales son útiles para la vida?					
¿Por qué?	SI				
	Comparar y describir fenḿenos naturales	Saber fenómenos	Predecir fenómenos	Predecir población	Calcular aproximaciones
%	22.3 %	14.5 %	11.2 %	11.2 %	11.2 %

¿Las ecuaciones diferenciales son útiles para la vida?				
¿Por qué?	SI			
	Comprender, analizar y predecir fenḿenos naturales	Depende de la carrera	Planificar fenómenos	En química es fundamental
%	7.4 %	3.7 %	3.7 %	3.7 %

Sólo 3.7 % contesto que no son útiles para la vida y lo argumentarón diciendo que nadie se pregunta por la población.

Con ésto nos damos cuenta que no entendierón el concepto de ecuación diferencial.

El resto de los alumnos, 7.4 % no contesto la pregunta, tal vez no sabian el concepto o la finalidad de las ecuaciones diferenciales.

La segunda preguntar **¿Seremos capaces de predecir lo que sucederá a futuro? y ¿Por qué?**. La mayoría contesto afirmativamente y las razones se muestran en la siguiente tabla:

¿Seremos capaces de predecir lo que sucederá a futuro y ¿Por qué?						
	SI					
¿Por qué?	Usando modelos	Una aproximación	Calculando la tasa	Conocemos una ecuación	Crear ecuaciones	Conociendo el entorno
%	25.1 %	21.4 %	14.3 %	14.3 %	10.7 %	7.2 %

El resto de los alumnos, se divide en 3.5 % que contesto que no eran capaces de predecir lo que suceda en el futuro, la razón fue no es posible saber con exactitud, por lo complejo de los fenómenos y 3.5 % no contesto la pregunta.

La tercera pregunta, **¿Cuál es el tema o el concepto que se necesita para entender mejor las ecuaciones diferenciales?**.

Obtuvimos cuatro vertientes. El 50 %, dijo la derivada, continuando con 22 % derivada e integrales, el 14 % significado preciso de las ecuaciones diferenciales y finalmente el 7 % con el tema de modelos matemáticos. El resto 3.5 % de los alumnos no contestaron la pregunta.

La cuarta pregunta **¿Cuál es la diferencia entre modelar un fenómeno por medio de una función o utilizando una ecuación diferencial?**.

Las diferencias que obtuvimos fueron: El 64.29 % mencionó que una función es para periodos cortos y una ecuación diferencial para instantes, considerando factores en un instante; el 3.57 % comento que las ecuaciones diferenciales es más aproximado a la realidad que las funciones. Entre los porcentajes anteriores 17.86 % la justificación fue incorrecta y el resto 10.71 % no contesto.

La quinta pregunta, **¿Consideras que sea útil las ecuaciones diferenciales para tú futuro académico?.**

Los alumnos que continuaran con las carreras de química, biología y genómicas, contestarón afirmativamente. Las razones se describen a continuación:

Para la carrera de química, el 7.14 % comento que en la vida diaria se usarán, con el mismo porcentaje dijerón que son bases para la carrera y finalmente el 3.57 % para saber la reacción de un producto.

Para todos los alumno de la carrera de biología, el 14.26 % coincidio en decir que la población es útil para la conservación de las especies.

Para la carrera de genómicas, 7.14 % mencionó son bases para la carrera y el 3.57 % comento que todo el conocimiento es útil

El resto de los alumno que pretenden ir a las carreras de medicina, psicología y odontología contestarón algunos afirmativamente y otros negativamente. Las razones de cada carrera son las siguientes:

Las razones de los alumnos de la carrera de medicina que contestarón afirmativamente son: El 3.57 % para tener una idea de lo que acontece en la población, con el mismo porcentaje dijeron nos servirán para saber como se comportan los pacientes en cierta enfermedad, continuando con el mismo porcentaje, comentarón que les ayudaría para saber la dosis del medicamento de acuerdo a la enfermedad, finalmente el 10.71 % le servirán para calcular a futuro la natalidad, las epidemias y cantidad de medicamento para la población futura.

Y la razón de los alumnos que van a estudiar medicina, consideran que las ecuaciones diferenciales no son útiles para su futuro académicos, ya que no van a requerir eso tipos de calculos.

Para los alumnos de psicología que contestaron afirmativamente, las razones que expresaron son: el 7.14 % comentaron que son importantes para saber el número de personas con cierto comportamiento y el 3.57 % se limitarón decir que de algo les serviran. El resto de los alumnos de psicología contesto negativamente y lo justificaron diciendo que no requieren ese tipo de calculos su carrera.

El 7.14 % de los alumnos de la carrera de odontología. Una mitad contestarón afirmativamente, diciendo que todo conocimiento es útil y la segunda mitad negativamente, comentarón que no necesitan el estudio de la población para su carrera.

El resto de los alumnos no contesto la pregunta. La justificación que dieron fue que no estaban seguros de la elección de la carrera.

A.8. Evaluación

La evaluación es un factor pedagógico fundamental. La evaluación llega a ser la herramienta eficaz para el logro de los objetivos del curso. En el capítulo 3, se explicó la propuesta didáctica y se mencionó los objetivos del tema de manera explícita.

En ésta sección se desarrollara los logros de los objetivos alcanzados de la propuesta didáctica que dieron lugar al finalizar la práctica docentes III. Como propósito primordial es medir qué tanto el alumno logró llevar a cabo los objetivos.

A continuación se anexa lo siguiente:

1. Hoja de evaluación del alumno.

   La hoja de evaluación del alumno, consta de:

   <u>Encabezado</u>, contiene el nombre de la profesora, foto del alumno, materia, grupo, tema de la secuencia didáctica, nombre del alumno, número de lista y calificación.

   <u>Parte A</u>, contiene 5 preguntas referentes al aspecto social del alumno.

   <u>Parte B</u>, contiene los temas de cada una de las sesiones, los intrumentos de evaluación, la ponderación y la calificación en porcentaje de cada uno de los intrumentos de evaluación.

   <u>Parte C</u>, contiene la ponderación de la participación en porcentaje del alumno.

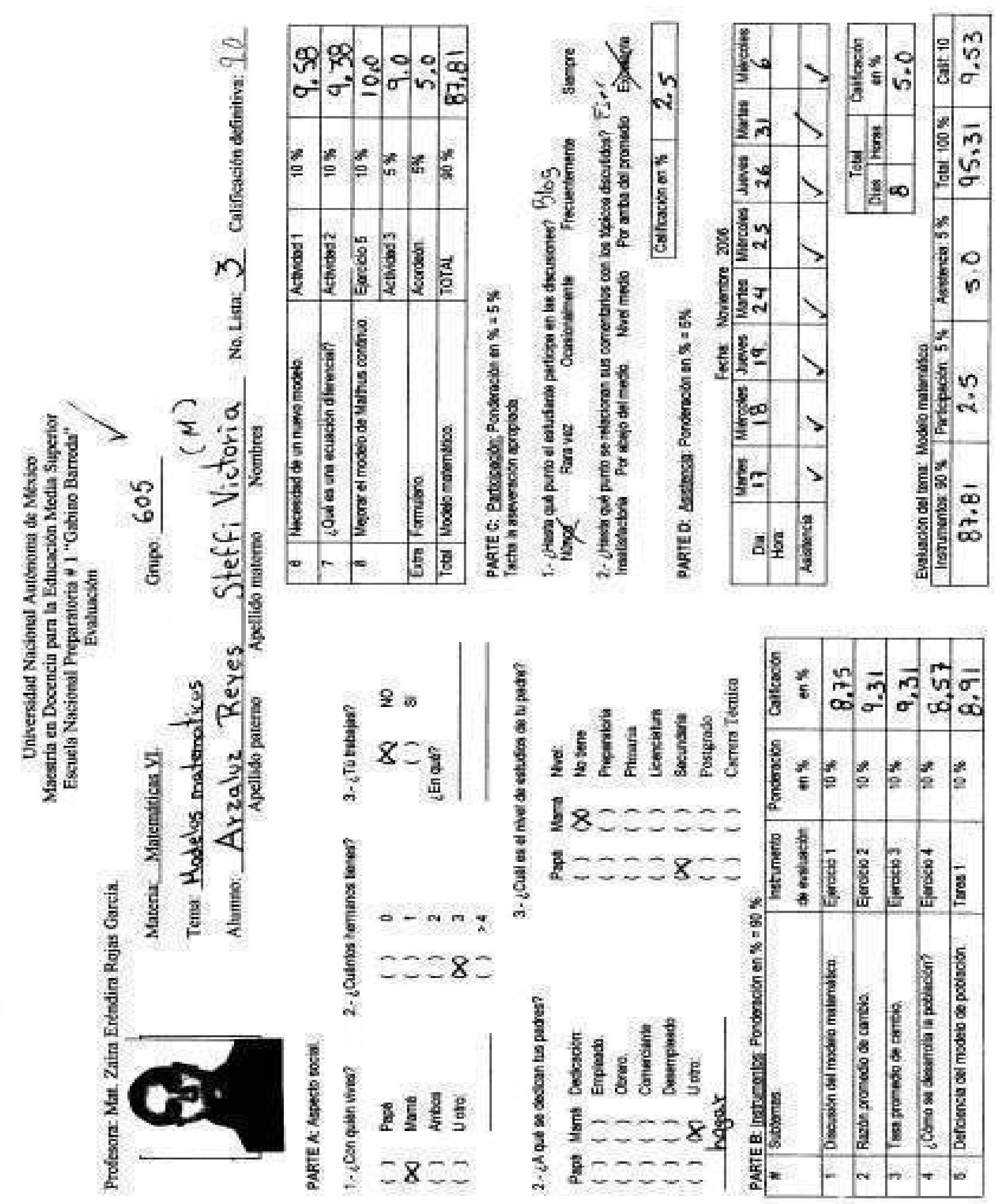
   <u>Parte D</u>, contiene la ponderación de la asistencia en porcentaje del alumno.

   <u>Final</u>, contiene en porcentaje cada una de las partes que compone la evaluación del alumno.

2. Calificaciones de los alumnos.

   En ésta parte se desglosa cada uno de los aspectos a considerar en la evaluación de los alumnos del grupo en el que se llevó a cabo la secuencia didáctica.

Hoja de evaluación del alumno.



Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
Escuela Nacional Preparatoria # 1 "Gabino Barreda"
Evaluación

Profesora: Mat. Zaira Eréndira Rojas García.

Materia: Matemáticas VI. Grupo: 605

Tema: Modelos matemáticos (M)

Alumno: Arzaluz Reyes Steffi Victoria No. Lista: 3 Calificación definitiva: 9.0

Apellido paterno Apellido materno Nombres

PARTE A: Aspecto social.

1.- ¿Con quién vives? ( ) Papá (X) Mamá ( ) Ambos ( ) U otro:

2.- ¿Cuántos hermanos tienes? ( ) 0 ( ) 1 ( ) 2 (X) 3 ( ) >4

3.- ¿Tú trabajas? (X) NO ( ) SI ¿En qué?

2.- ¿A qué se dedican tus padres?

Papá	Mamá	Dedicación:
( )	( )	Empleado.
( )	( )	Obrero.
( )	( )	Comerciante
( )	( )	Desempleado
( )	(X)	U otro: hogar

3.- ¿Cuál es el nivel de estudios de tu padre?

Papá	Mamá	Nivel:
( )	(X)	No tiene
( )	( )	Preparatoria
( )	( )	Primaria
( )	( )	Licenciatura
(X)	( )	Secundaria
( )	( )	Postgrado
( )	( )	Carrera Técnica

PARTE B: Instrumentos: Ponderación en % = 90 %

#	Subtemas	Instrumento de evaluación	Ponderación en %	Calificación en %
1	Discusión del modelo matemático.	Ejercicio 1	10 %	8.75
2	Razón promedio de cambio.	Ejercicio 2	10 %	9.31
3	Tasa promedio de cambio.	Ejercicio 3	10 %	9.31
4	¿Cómo se desarrolla la población?	Ejercicio 4	10 %	8.57
5	Deficiencia del modelo de población.	Tarea 1	10 %	8.91
6	Necesidad de un nuevo modelo.	Actividad 1	10 %	9.58
7	¿Qué es una ecuación diferencial?	Actividad 2	10 %	9.38
8	Mejorar el modelo de Malthus continuo.	Ejercicio 5	10 %	10.0
		Actividad 3	5 %	9.0
Extra	Formulario.	Acordeón	5%	5.0
Total	Modelo matemático.	TOTAL	90 %	87.81

PARTE C: Participación: Ponderación en % = 5 %
Tacha la aseveración apropiada.

1.- ¿Hasta qué punto el estudiante participa en las discusiones? Blog
Nunca Rara vez Ocasionalmente Frecuentemente Siempre

2.- ¿Hasta qué punto se relacionan sus comentarios con los tópicos discutidos? Foro
Insatisfactoria Por abajo del medio Nivel medio Por arriba del promedio Excelente

Calificación en %	2.5

PARTE D: Asistencia: Ponderación en % = 5%

Fecha: Noviembre 2006

Día	Martes 17	Miércoles 18	Jueves 19	Martes 24	Miércoles 25	Jueves 26	Martes 31	Miércoles 6
Hora								
Asistencia	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Total Días	Total Horas	Calificación en %
8		5.0

Evaluación del tema: Modelo matemático

Instrumentos: 90 %	Participación: 5 %	Asistencia: 5 %	Total: 100 %	Calif: 10
87.81	2.5	5.0	95.31	9.53

Calificaciones de los alumnos

En ésta sección se va a mostrar las calificaciones obtenidas por los alumnos en cada uno de los aspectos que se evaluaron, usando diferentes instrumentos (Instr) de evaluación (ejercicios. actividades, tarea, formulario), participación (Part) de manera activa en el desarrollo del concepto de la derivada y la asistencia (Asis). Lo cual forma parte de la evaluacin formativa.

Ejercicios.
A continuacin se muestran las calificaciones obtenidas en los cinco ejercicios realizados durante las sesiones: Discusión del modelo matemático (sesión 3.1), Razón de cambio (sesión 3.2), tasa de cambio (sesión 3.3), ¿cómo se desarrolla una población? (sesión 3.4) y mejorar el modelo de Malthus (sesión 3.8). Cada ejercicio tiene una ponderación del 10 %, la cual forma parte de la evaluación sumativa.

Tareas
En la sesión 3.5, no se realizaron ningún ejercicio en clase. Los alumnos tuvieron una actividad para casa (tarea sobre la deficiencia del modelo de población), con un valor del 10 %.

Actividades
En la sesión 3.6,3.7 y 3.9, los alumnos realizaron una actividad en cada sesión. Para la actividad 1 (necesidad de un nuevo modelo) y 2 (¿Qué es una ecuación diferencial?). La ponderación fue del 10 % para cada una; y para la actividad 3 (mejorar el modelo de Malthus) fue del 5 %. Éstas actividades ayudaron a los alumnos a reafimar lo visto en clase.

Acordeon
Los alumnos construyerón durante las10 sesiones un formulario en forma de acordeón, cuyo valor fue de 5 %.

Participación
La participación en clase y fuera de clase, fue fundamental para la evaluación del alumno.
Para la participación en fuera de clase, el alumno tenia la responsabilidad de consultar la página del curso [10] y realizar algún comentario de los temas. Y para la participación en clase, se tomó en cuenta la manera de contestar en los ejercicios realizados en clase y los comentarios pertinentes sobre los tópicos desarrollados en cada sesión. En ésta parte ayudó al docente a observar como los alumno llegaban a comprender cada uno de los temas durante las 10 sesiones.

Asistencia
Finalmente la asistencia era necesaria e indispensable para que el alumno realizará los ejercicios en clase, las actividades, tareas, formularios y participaciones.

A continuación se muestra las calificaciones del grupo en la que se realizó la práctica docente.

Calificaciones del grupo 605						
#	Nombre del alumno	Aspectos a evaluar.				
		Instr.	Part.	Asis.	Total	Calif.
		90 %	5 %	5 %	100 %	10
2	Aparicio Martnez Diana	62.26	2.20	3.75	68.2	6.82
3	Arzaluz Reyes Steffi Victoria	87.81	2.50	5.00	95.3	9.53
4	Becerril Parra Vania	83.76	2.50	5.00	91.3	9.13
6	Carvente Garca Roberto Dassaevt	83.00	2.50	5.00	90.5	9.05
7	Castillo Yaez Emmanuel	62.73	2.00	3.75	68.5	6.85
10	Domnguez Vzquez Pamela	59.75	2.00	4.68	66.4	6.64
11	Espinosa Flix Jacqueline	9.25	1.00	0.62	10.9	1.09
15	Garca Meza paulina	34.80	2.00	3.75	40.6	4.06
20	Incln Figueroa Norma	80.12	2.00	4.37	86.5	8.65
21	Jurez Nuez Cristina	83.82	5.00	5.00	93.8	9.38
22	Jurado Hernndez Ariadna Vianey	80.08	2.50	5.00	87.6	8.76
23	Lagard Reyes sergio	86.18	2.50	5.00	93.7	9.37
24	Lpez Vega Diana Laura	84.00	5.00	5.00	94.0	9.40
25	Luna Martnez Oscar	41.41	1.50	2.81	45.7	4.57
26	Mercado Alquicira Carmen	84.44	2.50	5.00	91.9	9.19
29	Medrano Hernndez Samantha	90.09	2.50	5.00	97.6	9.76
30	Meja Caballero Mara Alejandra	80.04	2.00	4.37	86.4	8.64
32	Mendoza Montes Jess Omar	54.23	1.50	3.75	59.5	5.95
33	Meza Reres Mitzi Yael	88.27	2.50	5.00	95.8	9.58
34	Mondragn Varela Hctor	77.09	2.50	5.00	84.6	8.46
35	Morales Jurez Oscar Enrique	89.05	5.00	5.00	99.1	9.91
45	Puentes Gonzlez Anakaren	76.75	2.00	4.37	83.1	8.31
47	Ramrez Ayala Grisel	68.55	2.00	4.37	74.9	7.49
48	Ramrez Chavarra Pamela Josefina	79.55	2.50	5.00	87.1	8.71
49	Ramos Martnez Lordes	84.66	2.50	5.00	92.2	9.22
53	Reynada Nava Diana Yzalia	85.32	2.50	5.00	92.8	9.28
54	Ramrez Navarro Rogelio	10.00	1.00	1.25	12.3	1.23
55	Rodrguez Garca Nadia Andrea	89.02	2.50	5.00	96.5	9.65
56	Roque Gutirrez David	80.55	2.50	5.00	88.1	8.81
61	Vzquez Ramrez Alberto	28.57	1.00	1.87	31.4	3.14
62	Villarruel Vzquez Ricardo Emmanuel	88.44	2.50	5.00	95.9	9.59
63	Villavicencio Becerril Lucero Haide	31.15	1.00	2.50	34.7	3.47
64	Yez Velsquez Stefanny Ayde	80.45	4.50	3.75	88.7	8.87
TOTAL		69.8	2.43	4.24	76.53	7.65

A.9. Encuestas.

Con el propósito de darle mayor validez y objetividad a nuestra propuesta didáctica, se solicitó la valiosa opinión de todos los alumnos del grupo en el que se realizó la práctica docente, por medio de 5 encuestas.

1. Nivel social del alumno.

   Resultados sobre el nivel social del alumno. Las preguntas las podemos ver en el apéndice A.8.

2. Interés hacia las matemáticas.

   Resultados que obtuvimos en la encuesta sobre el interés hacia las matemáticas (ver apéndice A.10). Incluye las actividades que realizan los alumnos en su tiempo libre, el tiempo que dedican a esas actividades, el tiempo al estudio, materias que dedican más tiempo, habilidad para las matemáticas, el gusto por las matemáticas, la aptitud hacia las matemáticas, la actitud de los profesores hacia los alumnos en la clase de matemáticas y lo que sienten los alumnos al estar en la clase de matemáticas.

3. Evaluación del tema.

   Resultaddos de las opiniones de los alumnos acerca del impacto que tuvo el tema tratado durante las sesiones. La encuesta la podemos consultar en el apendice A.10.

4. Evaluación del material didáctico.

   Resultados que obtuvimos en la encuesta sobre la evaluación del material didáctico (ver apéndice A.10). Consta de dos partes. La parte A, fue para recabar información acerca de cómo observaron los alumnos el material didáctico, empleado en cada clase, con respecto a la cantidad y a la calidad. La parte B, fue con respecto a las indicaciones de los ejercicios, las actividades y tareas.

5. Evaluación de la practicante.

   Resultados que obtuvimos de los alumnos sobre la profesora practicante durante las sesiones. La encuesta sobre la evaluación de la practicante la podemos consultar en el apéndice A.10.

Aspecto social

La situación social del alumno es un factor importante para el desenvolvimiento en las clases. A continuación se muestra el aspecto social que rodea a cada alumno en el que se llevó la práctica docente.

Aspecto social							
#	Nombre del alumno	Sexo	Edad	Aspectos			
				Viven con	# de H.	Se dedica	
						Papá	Mamá
2	Aparico Martínez Diana	F	17	M	3	E	E
3	Arzaluz Reyes Steffi Victoria	F	17	M	3	O	O
4	Becerril Parra Vania	F	17	A	4	C	E
6	Carvente García Roberto Dassaevt	M	17	A	2	O	O
7	Castillo Yañez Emmanuel	M	17	A	3	C	C
10	Domínguez Vázquez Pamela	F	17	A	2	C	C
11	Espinosa Félix Jacqueline	F	17	A	2	C	C
15	García Meza paulina	F	17	A	2	C	C
20	Inclán Figueroa Norma	F	18	A	1	E	S/T
21	Juárez Nuñez Cristina	F	17	A	4	E	O
22	Jurado Hernández Ariadna Vianey	F	17	A	2	O	C
23	Lagard Reyes sergio	M	17	A	1	E	E
24	López Vega Diana Laura	F	17	A	1	E	O
25	Luna Martínez Oscar	F	17	A	1	E	O
26	Mercado Alquicira Carmen	F	17	M	1	- -	E
29	Medrano Hernández Samantha	F	17	A	1	E	S/T
30	Mejía Caballero María Alejandra	F	17	A	2	C	C
32	Mendoza Montes Jesús Omar	M	18	O	3	C	O
33	Meza Reres Mitzi Yael	M	17	A	2	O	O
34	Mondragón Varela Héctor	M	17	A	1	E	E
35	Morales Juárez Oscar Enrique	M	17	A	2	E	O
45	Puentes González Anakaren	F	16	A	2	E	E
47	Ramírez Ayala Grisel	F	17	A	2	O	O
48	Ramírez Chavarría Pamela Josefina	F	16	A	1	E	E
49	Ramos Martínez Lordes	F	17	M	1	E	E
53	Reynada Nava Diana Yzalia	F	17	O	0	- -	- -
54	Ramírez Navarro Rogelio	M	17	- -	- -	- -	- -
55	Rodríguez García Nadia Andrea	F	17	M	2	E	E
56	Roque Gutiérrez David	M	18	- -	- -	- -	- -
61	Vázquez Ramírez Alberto	M	17	A	1	E	C
62	Villarruel Vázquez Ricardo Emmanuel	M	17	A	1	E	E
63	Villavicencio Becerril Lucero Haide	F	17	A	0	E	E
64	Yáñez Velásquez Stefanny Ayde	F	17	A	1	E	O

Continuación del aspecto social							
#	Nombre del alumno	Aspectos					
		Continuar con estudios de	Se dedica		Nivel de estudios		
			Papá	Mamá	Papá	Mamá
2	Aparico Martínez Diana	Medicina	E	E	Tec	Prepa
3	Arzaluz Reyes Steffi Victoria	Psicología	O	O	Sec	N/T
4	Becerril Parra Vania	Psicología	C	E	Lic	Lic
6	Carvente García Roberto Dassaevt	Q Alimentos	O	O	Lic	Lic
7	Castillo Yañez Emmanuel	Psicología	C	C	Tec	Tec
10	Domínguez Vázquez Pamela	Medicina	C	C	Prepa	Prepa
11	Espinosa Félix Jacqueline	Psicología	C	C	Pos	- -
15	García Meza paulina	Psicología	C	C	- -	- -
20	Inclán Figueroa Norma	Medicina	E	S/T	Lic	Tec
21	Juárez Nuñez Cristina	Biología	E	O	Prim	Prim
22	Jurado Hernández Ariadna Vianey	Odontología	O	C	Prepa	Sec
23	Lagard Reyes sergio	Medicina	E	E	Lic	Pos
24	López Vega Diana Laura	Biología	E	O	Sec	Prepa
25	Luna Martínez Oscar	Veterinaria	E	O	Sec	- -
26	Mercado Alquicira Carmen	- -	- -	E	Lic	Lic
29	Medrano Hernández Samantha	Medicina	E	S/T	Pos	Pos
30	Mejía Caballero María Alejandra	Q Alimentos	C	C	Lic	Lic
32	Mendoza Montes Jesús Omar	Química	C	O	Sec	Sec
33	Meza Reres Mitzi Yael	Psicología	O	O	Prim	Tec
34	Mondragón Varela Héctor	QFB	E	E	Prepa	Lic
35	Morales Juárez Oscar Enrique	Biología	E	O	Sec	Sec
45	Puentes González Anakaren	Genómicas	E	E	Lic	Lic
47	Ramírez Ayala Grisel	- -	O	O	Sec	Sec
48	Ramírez Chavarría Pamela Josefina	Química	E	E	Lic	Lic
49	Ramos Martínez Lordes	Genómicas	E	E	- -	Tec
53	Reynada Nava Diana Yzalia	Biología	- -	E	Lic	Lic
54	Ramírez Navarro Rogelio	- -	- -	- -	- -	- -
55	Rodríguez García Nadia Andrea	Genómicas	E	E	Pos	Lic
56	Roque Gutiérrez David	QFB	- -	- -	- -	- -
61	Vázquez Ramírez Alberto	- -	E	C	Prepa	Prepa
62	Villarruel Vázquez Ricardo Emmanuel	Medicina	E	E	Lic	Lic
63	Villavicencio Becerril Lucero Haide	Química	E	E	Lic	Lic
64	Yáñez Velásquez Stefanny Ayde	Medicina	E	O	Lic	Prepa

Interés hacia las matemáticas

Los resultados que obtuvimos con respecto los intereses que manifiestan los alumnos hacia las matemáticas son los siguientes:

Las actividades que realizan los alumnos en su tiempo libre son diversas. La mayoría contesto más de una actividad. Las 5 actividades más mencionadas son: Hacer deporte con 27 menciones, navegar por Internet 25 menciones, escuchar música 14 menciones, leer con 10 menciones y ver televisión con 9 menciones.

Al cuestionar a los alumnos ¿cuántas horas le dedican a ésas actividades?. 17 estudiantes contestaron que le invierten más de 2 horas, 14 alumnos contestaron que le dedican más de 4 horas y únicamente 2 contestaron que le destinan menos de una hora al día.

Para comparar las horas que le invierten al estudio de sus materias se hizo la siguiente pregunta, ¿cuánto tiempo le destinan al estudio de las materias escolares?. 17 alumnos contestaron que le dedican más de 2 horas, 14 estudiantes asignan más de 4 horas y 2 alumnos confesaron que únicamente le destinan menos de una hora a esta actividad.

Las materias que le destinan más tiempo de estudio son: Matemáticas con 23 menciones, Biología con 22 menciones, Química con 18 menciones y Física con 15 menciones. Al preguntarle el ¿por qué?. Los alumnos contestaron que el principal motivo es por la cantidad de tarea con el 67 % de las menciones. Otro motivo es por la dificultad de la materia con un 21 % de las respuestas obtenidas y el 8 % de los alumnos respondió porque les gusta.

Al cuestionar ¿cuál es la habilidad para las matemáticas?. Considerando que el número 1 indica que el estudiante cuenta con poca habilidad y el número 5 el estudiante tiene demasiada habilidad para la materia.

Las respuestas son las siguientes: $\frac{3}{33}$ calificaron su habilidad con 1. $\frac{6}{33}$ mencionaron que su habilidad es 2. $\frac{19}{33}$ respondieron que su habilidad es 3. $\frac{4}{33}$ refieren que su habilidad es 4 y solamente $\frac{1}{33}$ contestó que su habilidad es de 5 para las matemáticas.

Cuando se indagó ¿cuánto es su gusto para las matemáticas?. Considerando que número 1 no le agradan las matemáticas y número 5 les agrada las matemáticas.

El resultado fue el siguiente: $\frac{1}{33}$ mencionó que su gusto por la materia es 1, $\frac{12}{33}$ respondieron que su gusto por las matemáticas es 2, $\frac{10}{33}$ refirió que su gusto por las matemáticas es 3, $\frac{7}{33}$ contestó que su gusto por las matemáticas es 4, $\frac{3}{33}$ calificaron que su gusto por las matemáticas es 5.

Cuando se cuestionó ¿cuál es la aptitud de los alumnos para las matemáticas?. Considerando que número 1 tienen mucha aptitud para las matemáticas y número 5 no tienen aptitud para las matemáticas.

Las respuestas fueron las siguientes: $\frac{2}{33}$ opinaron que su aptitud es 1, $\frac{9}{33}$ mencionaron que su aptitud es 2, $\frac{15}{33}$ contesto que su aptitud es 3, $\frac{6}{33}$ refiere que su actitud es 4, $\frac{1}{33}$ alumnos mencionó que su actitud es 5.

Al indagar como califican al profesor de matemáticas. El 54 % mencionó que su maestro es paciente, el 23 % piensa que su maestro no sabe explicar y el 17 % piensa que su maestro es inexperto.

Al cuestionarles a los estudiantes si el profesor de matemáticas aclara las dudas que surgen durante la clase de matemáticas. 26 de 33 alumnos respondieron que si aclaran sus dudas y 7 de 33 alumnos mencionaron que no se les aclaran sus dudas.

Para conocer ¿cuál es la actitud del maestro de matemáticas para con los alumnos?. El 49 % de los estudiantes respondió que su actitud es de respeto ante el grupo, el 36 % coincide que la actitud del profesor es de amabilidad y el 19 % refiere que la actitud del maestro, ante el grupo es de sencillez.

Para conocer que sienten cuando se encuentran en la clase de matemáticas. El 56 % respondió que siente aburrimiento, el 23 % contestó que siente indiferencia y el 24 % respondió que sienten nerviosismo ante la materia de matemáticas.

Evaluación del tema

Los alumnos lo consideraron el tema impartido en la clase de matemáticas de la siguiente manera:

El 23.33 % fue interesante, 20 % fue complicado. Hubo un empate entre difícil y demasiado trabajo, con un 8.89 % cada uno, 4.44 % expresaron que fueron demasiadas reglas y otro empate entre fácil y como un juego con un 2.22 %.

Evaluación del material didáctico

Se les pregunto a los alumnos, ¿cómo observaron el material didáctico empleado en cada una de las sesiones?, en relación con la cantidad y calidad de los mismos.
A continuación se muestra la concentración de los datos obtenidos:

Observaciones de los alumnos							
Material didáctico		Cantidad			Calidad		
		Bueno	Regular	Malo	Suficiente	Regular	Escaso
Temario.		27	1	0	26	1	1
Ejercicios.		19	9	0	24	4	0
Actividades		19	8	1	23	4	1
Tareas		19	9	0	22	4	2
Presentacin en Power Point	Temas	26	2	0	26	2	0
	Ejemplos	19	9	0	19	9	0
	Definiciones	26	2	0	25	3	0
	Desarrollo	20	8	0	21	6	1
Mapa mental		10	9	9	9	11	8
Gráficas-excel		24	3	1	24	4	0
Ejemplos	Malthus	21	6	1	20	6	2
	Verhulst	23	2	3	19	6	2
	ED	17	8	3	18	7	3
Lecturas	La derivada	17	9	2	17	6	5
	Malthus	20	8	0	20	8	0
	Verhulst	21	7	0	20	8	0
Formularios		26	1	1	24	3	1
Blog		21	4	3	19	6	3

Evaluación del practicante

Dicha información se puede colaborar con las opiniones de las preguntas 10 y 11 de la encuesta sobre la evaluación del practicante. El 89.29 % de los alumnos respondieron que se les aclaró las dudas y 10.71 % de los alumnos que mencionaron que no se les aclararon las dudas.

La aclaración de las dudas fue calificada por el 7.14 % de los alumnos como excelente, se debió a: que la explicación fue con clama y sin desesperación de manera constante, para ver si alguien más tenia dudas y volver a explicar.

El 82.14 % calificó como buena y al indagar el ¿por qué?. Las respuestas más comunes fueron:

- Porque nos resolvía la duda.
- Respuesta clara y respetuosa.
- Usando ejemplos distintos a los de la clase.
- Respondía inmediatamente.
- Porque explicaba bien el tema.
- Un poco rápida la explicación.
- No muy buena explicación.

El 3.57 % de los alumnos mencionó que la aclaración de las dudas fue regular y 3.57 % fue mala. Los motivos son los siguientes:

- Porque a veces me hacía bolas.
- No entendía la explicación.

Finalmente el 3.57 % de los jóvenes no contesto nada.

Al final de la última sesión, se les pregunto a cada alumno la forma de evaluar. Las respuestas fueron:

- 89 % dijeron con actividades en clase.
- 79 % con ejercicios para casa.
- 57 % entregando un formulario.
- 25 % con asistencia.
- 18 % con participaciones
- 11 % no respondió.

A.10. Formatos

En esta sección incluimos los formatos de las encuestas que se les aplicó al grupo, en el que se llevó a cabo la secuencia didáctica.

Los formatos son los siguientes:

1. Interés hacia las matemáticas.

   Consta de once preguntas que incluyen las actividades que realizan los alumnos en su tiempo libre, el tiempo que dedican a esas actividades, el tiempo al estudio, materias que dedican más tiempo, habilidad para las matemáticas, el gusto por las matemáticas, la aptitud hacia las matemáticas, la actitud de los profesores hacia los alumnos en la clase de matemáticas y lo que sienten los alumnos al estar en la clase de matemáticas.

2. Evaluación del tema.

   La hoja de evaluación del tema, consta de 10 preguntas. Con éstas preguntas intentamos recabar las opiniones de los alumnos acerca del impacto que tuvo el tema tratado durante las sesiones.

3. Evaluación del material didáctico.

   La hoja de evaluación del material didáctico, consta de dos partes. La parte A, fue para recabar información acerca de cómo observaron los alumnos el material didáctico, empleado en cada clase, con respecto a la cantidad y a la calidad. La parte B, fue con respecto a las indicaciones de los ejercicios, las actividades y tareas.

4. Evaluación de la practicante.

   La evaluación de la practicante, consta de 17 preguntas. Este cuestionario intenta recabar la opinión de los alumnos sobre la profesora practicante durante las sesiones.

Interés hacia las matemáticas.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
Escuela Nacional Preparatoria

Instrucciones :
*Subraya o tacha tu respuesta.
*Debes contestar todas las preguntas con veracidad.
*Puedes elegir más de una opción.

Sexo: X M
Edad: 18

1.- ¿Con quién vives?
Papá
Mamá
Ambos
U otro______

2.- ¿A qué se dedican tus padres?
Empleado
Obrero
Comerciantes
Desempleado
U otro______

3.- ¿Cuál es el nivel de estudios de tu padre?
No tiene
Primaria
Secundaria
Carrera Técnica
Preparatoria
Licenciatura
Posgrado

4.- ¿Cuál es el nivel de estudios de tu madre?
No tiene
Primaria
Secundaria
Carrera Técnica
Preparatoria
Licenciatura
Posgrado

5.- ¿Tú trabajas?
No Si
¿En qué?______

6.- ¿Cuántos hermanos tienes? 0

7¿Qué actividades realizas en tu tiempo libre?
Hago deporte / Leo libros / Escucho música
Navego en la Internet / Juego con video juegos
Veo la Televisión / Voy al cine / Voy con amigos
U otra______

8.- Cuánto tiempo le dedicas a ésa o ésas actividades?
- Menos de una hora
- Más de dos horas
- Más de cuatro horas

9.-¿Cuánto Tiempo le dedicas al estudio?
- Menos de una hora
- Más de dos horas
- Más de cuatro horas.

10.-¿ A que materias le dedicas más tiempo?
Matemáticas, Química, literatura.
¿Por qué?
Porque a veces no entiendo los temas y tengo que repasar con ayuda de los libros.

11.- Cuál es tu habilidad para las matemáticas? Considerando que 1 es que, no eres hábil y que 5 es que eres demasiado hábil para la materia mencionada.
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

12.- ¿Cuál es tu gusto para las matemáticas? Considerando que 1 es que, no te gustan y que 5 es que te gusta dicha materia.
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

13.- ¿Cuál es tu aptitud para las matemáticas? Considerando que 1 es que, no tienes aptitud y que 5 es que tienes mucha aptitud en dicha materia.
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

14.- Tu maestro de matemáticas es:
No tiene paciencia
No sabe explicar
Resuelve dudas
Es enojón
Es indiferente
Es excelente
Es paciente
Es paciente
Es barco
Es bueno
Inexperto

15.- ¿Consideras que el maestro prepara su clase al impartir la materia de matemáticas?
SI NO

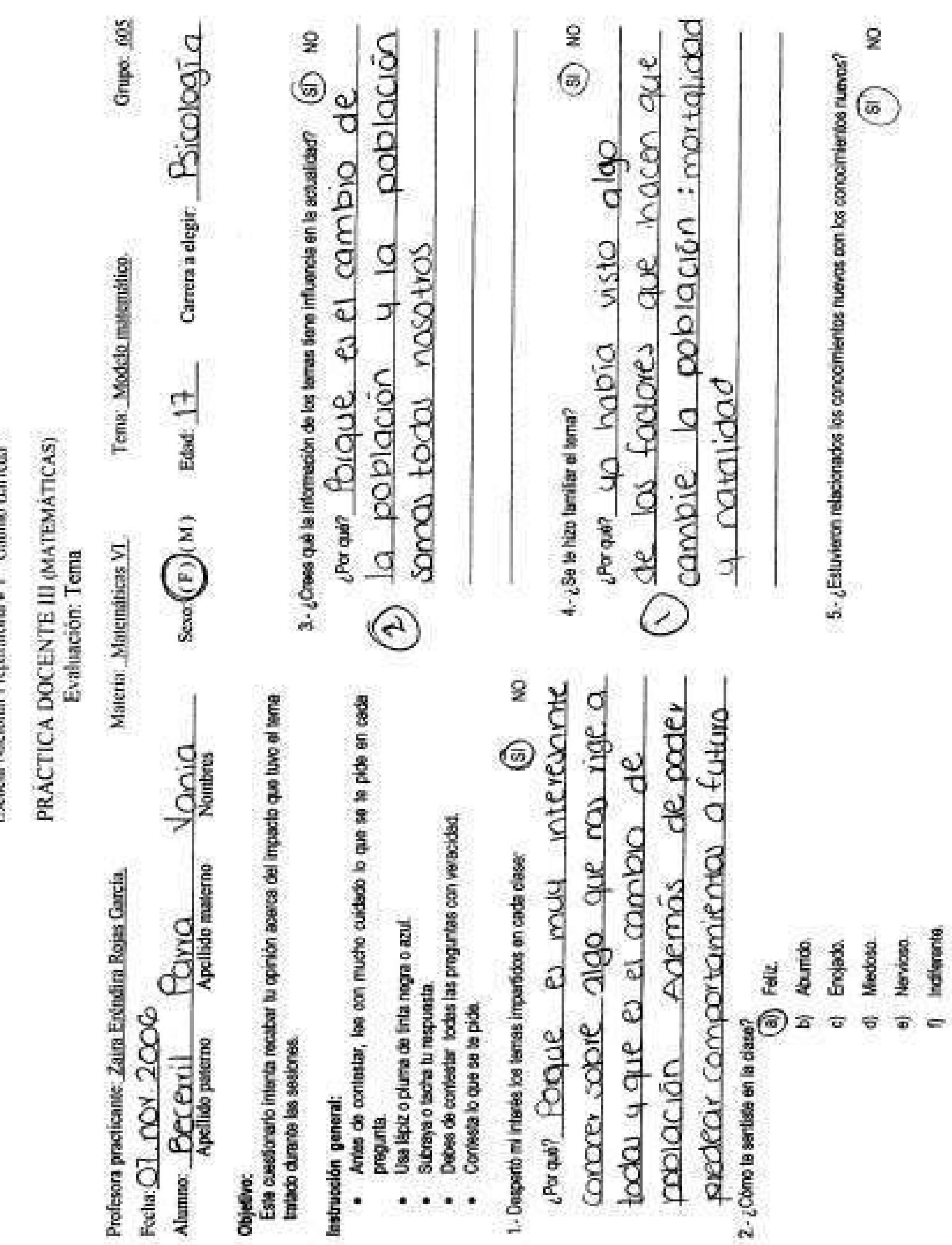
16 ¿Qué sientes cuando estás en la clase de matemáticas?
Felicidad
Indiferencia
Aburrimiento
Enojo
Miedo
Nerviosismo

17.- ¿Cómo se dirige hacia ti el profesor de matemáticas?
Con respeto.
Con groserías
De manera intransigente
Con indiferencia
Con sencillez
Con Amabilidad

18.- ¿Consideras que el maestro prepara su clase al impartir la materia de matemáticas?
SI NO

19.- ¿El profesor aclara tus dudas durante la clase de matemáticas?
SI NO

Evaluación del tema.



Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Docencia para la Enseñanza Media Superior
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "

PRÁCTICA DOCENTE III (MATEMÁTICAS)
Evaluación: Tema

Profesora practicante: Zaira Eréndira Rojas García. Materia: Matemáticas VI Tema: Modelo matemático. Grupo: 605

Fecha: 07 nov 2006

Alumno: Becerril (Apellido paterno) Parra (Apellido materno) Vania (Nombres) Sexo: (F) (M) Edad: 17 Carrera a elegir: Psicología

Objetivo:
Este cuestionario intenta recabar tu opinión acerca del impacto que tuvo el tema tratado durante las sesiones.

Instrucción general:
- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta.
- Usa lápiz o pluma de tinta negra o azul.
- Subraya o tacha tu respuesta.
- Debes de contestar todas las preguntas con veracidad.
- Contesta lo que se te pide.

1.- Despertó mi interés los temas impartidos en cada clase: SI NO
¿Por qué? Porque es muy interesante conocer sobre algo que nos rige a todas y que es el cambio de población. Además de poder predecir comportamientos a futuro

2.- ¿Cómo te sentiste en la clase?
a) Feliz.
b) Aburrido.
c) Enojado.
d) Miedoso.
e) Nervioso.
f) Indiferente.

3.- ¿Crees qué la información de los temas tiene influencia en la actualidad? SI NO
¿Por qué? Porque es el cambio de la población y la población somos todas nosotros
2

4.- ¿Se te hizo familiar el tema? SI NO
¿Por qué? ya había visto algo de los factores que hacen que cambie la población: mortalidad y natalidad
1

5.- ¿Estuvieron relacionados los conocimientos nuevos con los conocimientos nuevos? SI NO

Continuación de la evaluación del tema.

Continuación: Evaluación del tema

6.- ¿Los temas se relacionan con otras asignaturas que ya cursé o curso actualmente?
Con geografía en la mortalidad y natalidad , Materia ya cursada. y también con historia.

7.- En mi carrera: Psicología
¿Serán útiles los temas? Sí NO
¿Por qué? ? porque la estadística es una asignatura que se imparte en psicología. Que es el calculo de la población con relación a ciertos fenómenos útil en la vida. Nos sirve para saber muchos fenómenos.

8.- El tema: Modelo matemático. ¿Cómo lo consideras?

a) Interesante.
b) Complicado.
c) Divertido.
d) Aburrido.
e) Fácil.
f) Difícil.
g) Como un juego.
h) Demasiado trabajo.
i) Demasiadas reglas.

¿Por qué? porque es un tema

9.- Comenta brevemente ¿Cómo te parecieron los temas vistos en las clases?
Me gustaron porque el trabajar con presentaciones power point hace más representativo el tema

21

10.- ¿Qué ocurrió con tu actitud hacia el tema: Modelo matemático durante las clases?

a) Permaneció en agrado.
b) Permaneció en desagrado.
c) Cambio de agrado a desagrado.
d) Cambio de desagrado a agrado.

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Evaluación del material didáctico.

(24)

Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Docencia para la Enseñanza Media Superior
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "

PRÁCTICA DOCENTE III (MATEMÁTICAS)
Evaluación: Material didáctico

Profesora practicante: Zaira Eréndira Rojas García. Materia: Matemáticas VI. Tema: Modelo matemático. **Grupo:** 605

Fecha: 07-Nov-06

Alumno: López (Apellido paterno) Vega (Apellido materno) Diana Laura (Nombres) Sexo: (X) (M) Edad: 17 **Carrera a elegir:** Biología

Objetivo:

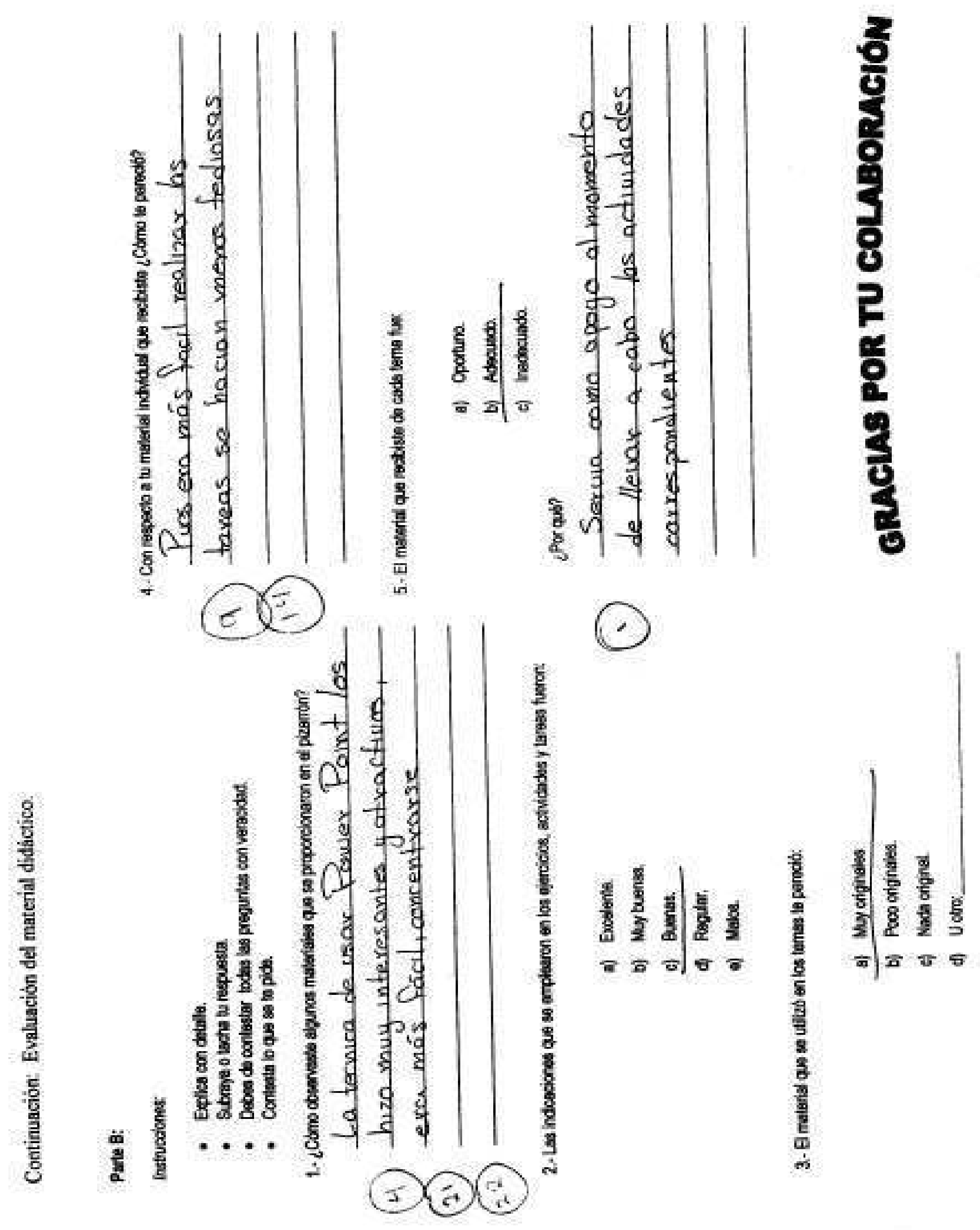
Este cuestionario intenta recabar tu opinión acerca del material didáctico utilizado durante las sesiones.

Parte A: Para cada aseveración tienes que decir *¿cómo observaste el material didáctico empleado en cada clase?*

Señala tu respuesta marcando con una X la casilla correspondiente de acuerdo a tu consideración.

Material didáctico.		**Cantidad**			**Calidad**		
		Bueno	**Regular**	**Malo**	**Suficiente**	**Regular**	**Escaso**
1.- Temario.		X			X		
2.- Ejercicios.		X			X		
3.- Actividades.		X			X		
4.- Tareas.			X		X		
5.- Presentación en Power Point.	4.1 Temas abordar.		X		X		
	4.2 Ejemplos.		X		X		
	4.3 Definiciones.	X			X		
	4.4 Desarrollo del tema.	X			X		
6.- Laminas. (Conclusión: Mapa mental)			X		X		
7.- Presentación en Excel. (Gráficas)		X			X		
8.- Ejemplos.	7.1 Modelo exponencial.	X			X		
	7.2 Modelo: Verhulst.	X				X	
	7.3 Ecuaciones diferenciales.	X			X		
9.- Lecturas.	9.1 La derivada.	X			X		
	9.2 Malthus.	X			X		
	9.3 Verhulst.	X			X		
10.- Formularios.		X			X		
11.- Blog.		X			X		

Continuación de la evaluación del material didáctico.



Continuación: Evaluación del material didáctico.

Parte B:

Instrucciones:

- Explica con detalle.
- Subraya o tacha tu respuesta.
- Debes de contestar todas las preguntas con veracidad.
- Contesta lo que se te pide.

1.- ¿Cómo observaste algunos materiales que se proporcionaron en el pizarrón?

La tecnica de usar Power Point los hizo muy interesantes y atractivos, era más fácil concentrarse

4 21 22

2.- Las indicaciones que se emplearon en los ejercicios, actividades y tareas fueron:

a) Excelente.
b) Muy buenas.
c) Buenas.
d) Regular.
e) Malos.

3.- El material que se utilizó en los temas te pareció:

a) Muy originales.
b) Poco originales.
c) Nada original.
d) U otro:

4.- Con respecto a tu material individual que recibiste ¿Cómo te pareció?

Pues era más facil realizar las tareas se hacian menos tediosas

9 14

5.- El material que recibiste de cada tema fue:

a) Oportuno.
b) Adecuado.
c) Inadecuado.

¿Por qué?

Servia como apoyo al momento de llevar a cabo las actividades correspondientes

1

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Evaluación de la practicante.

Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Docencia para la Enseñanza Media Superior
Escuela Nacional Preparatoria # 1 " Gabino Barreda "

PRÁCTICA DOCENTE III (MATEMÁTICAS)
Evaluación: Practicante.

Profesora practicante: Zaira Eréndira Rojas García. Materia: Matemáticas VI. Tema: Modelo matemático. Grupo: 605

Fecha: 7-Nov-06

Objetivo:

Este cuestionario intenta recabar tu opinión sobre la profesora practicante durante las sesiones.

Instrucciones:

- Antes de contestar, lee con mucho cuidado lo que se te pide en cada pregunta.
- Usa lápiz o pluma de tinta negra o azul.
- Contesta lo que se te pide.
- Debes de contestar todas las preguntas con veracidad.

1.- ¿La maestra expuso los temas a tratar antes de iniciar la clase? SI NO

2.- ¿Terminó de exponer el tema de la clase? SI NO

3.- El tiempo empleado para cada subtema (8) fue:

a) Excesivo.
b) Adecuado.
c) Insuficiente.

¿Por qué? pues vimos de forma muy clara cada tema y no hubo necesidad de utilizar más de lo debido

4.- ¿Tu maestra utilizó bien el material didáctico? SI NO

5.- ¿En cuáles implementos de trabajo hubo dificultad?

a) Pizarrón.
b) Computadora.
c) Laminas.
d) Ninguno.

¿Por qué? Materiales fueron suficientes y entendibles

6.- ¿La maestra guió los ejercicios y las actividades de la clase? SI NO

7.- ¿La maestra indicó que yo consultara en el blog? SI NO

8.- ¿La maestra aplicó ejercicios sobre el tema? SI NO

9.- ¿Los ejemplos de los temas fueron relacionados con la vida cotidiana? SI NO

10.- ¿Aclaró mis dudas? SI NO

Continuación de la evaluación de la practicante.

Continuación: Evaluación de la profesora practicante.

11.- Señala ¿Cómo fue la aclaración de la duda?

a) Excelente.
b) Buena.
c) Regular.
d) Mala.
e) Pésima.

¿Por qué? pues se detenía si teníamos alguna duda y volvía a explicar el tema por si alguien más tenía dudas

2

12.- Escribe ¿cuáles fueron los puntos a evaluar de los temas?

Tarea: 10%; participación y asistencia 10% ejercicio en clase 50%, Actividades 25% y formulario 5%.

13.- La actitud habitual frente al grupo fue:

a) Entusiasta.
b) Desanimada.
c) Cordial.
d) Indiferente.
e) Hostil.

14.- ¿Cómo se dirigió hacia ti, la maestra?

a) Con respeto.
b) Con groserías.
c) De manera intransigente.
d) Con indiferencia.
e) Con sencillez.
f) Con amabilidad.

15.- ¿La maestra, fomentó la libertad, justicia, solidaridad, respeto, esfuerzo, esperanza, fortaleza, confianza? SI NO

16.- Motivó mi interés por la clase? SI NO

¿Por qué? ? nos demostraba cuan interesantes son estos temas para la vida cotidiana

17.- No pregunté alguna duda que yo tenía por:

a) Pena.
b) Miedo.
c) Desinterés.
f) Otra.

¿Por qué? ? no tuve dudas

A.11. Material fotográfico

La Escuela Nacional Preparatoria No. 1. (Ubicada en Av. Las Torres y Prolongación Aldama S/N Tepepan Xochimilco, CP. 16020, México, D. F.

El auditorio. (Ubicado en la entrada principal de la ENP 1)

El gimnasio. (Ubicado en la parte posterior de la ENP 1, a mano derecha)

La biblioteca. (Ubicada a lado izquierdo del gimnasio)

El centro de cómputo. (Ubicado en el primer piso del edificio B)

La mediateca. (Ubicada entre el edificio C y el edificio B, en el segundo piso)

Salón B208 (Edificio B, segundo piso)

Alumnos del grupo 605 de la ENP 1.

Bibliografía

[1] http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-05-/ezaun.pdf.

[2] http://matematicas605.blogspot.com.

[3] http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm.

[4] http://personal5.iddeo.es/ztt/zip/descarga/ndex.htm.

[5] http://www.cch.unam.mx.

[6] http://www.eduteka.org/principiosmath.php.

[7] http://www.enp.unam.mx.

[8] http://www.nacho.unicauca.edu.co/matemas/0401misinvmat/misinvmat.htm.

[9] http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol001/p_aguilar.ps.

[10] www.inegi.com.mx.

[11] D. Gil y J. Martinez Torregrosa Alonso, M. *Concepción docentes sobre la evaluación en la enseñanza de las ciencias.* Alambique, México, 1995. num 4.

[12] Alverenga. and Máximo. *Física General con experimentos sencillos.* tercera edición. KARLA, México, 1990. 125-204.

[13] M. Braun. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* séptima edición. Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

[14] Farfán R. Cantoral Ricardo. *Desarrollo del pensamiento matemático.* Trillas, Mxico, DF, 2003. 17-20.

[15] Guzmán Jesus Carlos. *Técnicas de evaluación en la educación. Unidad I y II. Manual para evaluar los aprendizajes escolares.* 1er edición. Programa de material didáctico, Facultad de psicologa, UNAM, 2003.

[16] Clark David. *Evaluación constructiva en matemáticas.* 1er edición. Grupo editorial iberoamerica, México, 2002.

[17] G. Zill Dennis. *Ecuaciones. Diferenciales con aplicaciones de modelación.* séptima edición. Thomson, 2000.

[18] E.Batschelet. *Matemticas bsicas para biocentficos.*

[19] Kauchak. Eggen Paúl. y Donald P. *Estrategías docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habiliadades del pensamiento.* FCE. Argentina, 1999.

[20] Ortiz Fernandez Eloisa. *Reflexiones acerca de la actividad matemática,.* México, 1994. 15,17.

[21] García González Enrique. *Evaluación en el aula.* 3era edición. Trillas, México, 1990. 7, 16-18, 77.

[22] Carvajal Patricia Fierro, Cecilia. *Mirar la prctica docente desde los valores,.* tercera edición. Gedisa, México, 2005. 25-114.

[23] Nava Rodríguez José Antonio Gutiérrez Flores Javier. *Experiencia en el Uso de Software Educativo para Matemticas a Nivel Bachillerato.* 1er edición. Encuentro de cómputo en la educación. Congreso general de cómputo., computo.98@mx, 1998.

[24] Courant Richard. Robbins Herbert. *¡Qué es la matemática.* Talleres estudiantiles Ciencias. UNAM. Aguilar, México, 1990. 3.

[25] Peter Hilton. La componente matemática de una buena educación. *Dedicado al DR. Heinz Gotze.* 1-8.

[26] Berlanga Ricardo. Carlos Bosh. Rivaud Juan José. *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Ciencia para todos. Fondo de Cultura Económica, México, 2005. 7-9.

[27] Edwards Larson, Hostetler. *Cálculo diferencia e integral.* séptima edición. McGraw-Hill, Interamericana., México, DF., 2005. 40-90.

[28] Lovelock David Lomen, David. *Ecuaciones diferenciales a travs de grficas, modelos y datos.*

[29] M. Dellnitz M. Golubitsky. *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales con uso de matlab.* THOMSON PARANINFO, S.A., 2002.

[30] Lopéz Torres Marcos. *Evaluación Educativa.* 1er edición. Trillas, México, 1990. 9-21.

[31] Villegas Octavio. *Enciclopedia práctica del docente. (Manual del docente).* Cultural, S. A, Madrid, 2002. 62,268-290.

[32] Krane Resnick, Halliday. *Física.* Cuarta edición, Volumen 1. CECSA, México, 1995. Cap 5.

[33] J. Gimena Sacristán. *El curriculo: una reflexión sobre la práctica.* Morata, S. A, España, 1989.

[34] Faustino. Sánchez Garduño. *Matemáticas para las ciencias naturales.* Sociedad Matemáticas Mexicana. México, 1998. 253–277.

[35] Iu. Iú. Tarasiévich. *Simulación matemática y computacional. Modelos diferenciales. Modelos determinísticos y estocásticos.* Cursos introductorio. URSS, Moscú, 2004. 50-68.