



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**APAREAMIENTO EN UN GAS FERMIÓNICO
UNIDIMENSIONAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

FÍS. RAFAEL MENDOZA PÉREZ

DIRECTORES DE TESIS: DR. MÍGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA
DR. MAURICIO FORTES BESPROSVANI

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. MANUEL DE LLANO DE
LA GARZA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Un hombre no está hecho para el fracaso.
Un hombre puede ser destruido pero no derrotado.

Ernest Hemingway

A mis padres y mis hermanos

Agradecimientos

A los Drs. Miguel Ángel Solís, Mauricio Fortes y Manuel de Llano, por sus enseñanzas y por hacerme sentir parte del grupo de trabajo.

A Maricela Ramírez Saldaña, mi compañera de vida, por todo.

A Marco, Julio e Iván, mis amigos.

A mis sinodales, los Drs. Carlos Villarreal, Matías Moreno y Chumín Wang, por sus comentarios y sugerencias, que mejoraron esta tesis.

Al Posgrado en Ciencias Físicas y al Instituto de Física, por proporcionarme las condiciones para formarme como científico.

Índice general

Resumen	II
Lista de variables y parámetros usados	III
Índice de Figuras	IV
1. <i>Introducción</i>	1
2. <i>Apareamientos de Cooper y de BCS</i>	4
2.1. El problema de Cooper en una dimensión	8
2.2. El problema de BCS unidimensional	10
3. <i>Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ-atractivo</i>	11
3.1. Dos partículas en el vacío	12
3.2. Potencial de interacción de tipo δ -atractivo	13
3.3. Relación de dispersión de pares de Cooper	14
3.4. Estudio gráfico cualitativo de la energía de amarre	16
3.5. Pares de fermiones con $\tilde{K} = 0$	19
3.6. Pares de fermiones acoplados débilmente	20
3.6.1. Dos casos límite de interés	24
3.7. Energía de excitación para cualquier acoplamiento	24
4. <i>Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito</i>	27
4.1. La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink	28
4.2. Análisis gráfico de la energía de amarre	33
4.3. Movimiento de los pares de fermiones	35
4.3.1. Análisis geométrico de los modos de excitación	35
4.3.2. Velocidad de las cuasipartículas	37
5. <i>Conclusiones</i>	40
A. <i>Polos y regiones de integración</i>	42
A.1. Polos de los problemas de Cooper y de BCS	43
A.2. Región de integración del potencial delta atractivo	44
Referencias	47

Resumen



Se analiza el apareamiento en un gas de fermiones en una dimensión a través de un conjunto de ecuaciones adimensionales, con el fin de determinar su energía de excitación a temperatura absoluta cero. Se supone que los electrones que forman pares de Cooper interactúan a través de un potencial de alcance variable tipo Schmitt-Rink y que el momento de su centro de masa $\hbar K$ puede ser diferente de cero. Además de las soluciones exactas, calculadas numéricamente, se obtienen expresiones analíticas de la energía de excitación del par en potencias de K en los siguientes casos: a) Acoplamiento débil, para el potencial delta y b) cuando los momentos son mayores a $2k_F$ para cualquier acoplamiento y alcance efectivo.

Destaca la presencia de dos modos de excitación del par. Para momentos pequeños domina el tipo fonónico (relación energía-momento lineal) que coexiste con un modo tipo rotónico para momentos mayores a $2k_F$. Se observa que conforme aumenta el alcance del potencial (a una energía de interacción fija) se privilegia una relación de dispersión cuadrática y se disminuye la energía de amarre de un par con $K = 0$.

Lista de variables y parámetros usados

\mathbf{K}	Vector de onda del momento del centro de masa del par
\mathbf{k}	Vector de onda relativo del par
k_F	Magnitud del vector de onda de Fermi
E_F	Energía de Fermi
B	Energía de amarre de dos partículas en el vacío
Δ_K	Energía de amarre de un par de fermiones con momento K
v_F	Velocidad de Fermi
λ	Constante de acoplamiento
$\tilde{A} \equiv A/(E_F, k_F)$	Variable adimensional referida a E_F (o a k_F)
$\beta_K^2 \equiv \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 \equiv -\alpha_K^2$	Parámetro de integración
κ_f	Valor de \tilde{K} en donde ocurre la ruptura del par en la rama fonónica
κ_r	Valor de \tilde{K} en donde ocurre la ruptura del par en la rama rotónica
\tilde{K}_c	Valor de \tilde{K} donde $\beta_K = 0$
$\tilde{B}_1 = \pi^2/2$	Cota superior del acoplamiento débil (potencial delta)
$\tilde{B}_2 = 2\pi^2$	Cota inferior del acoplamiento fuerte (potencial delta)
ε_K	Energía de excitación (referida a E_F)
s	Potencia de \tilde{K} en la parte fonónica de la energía de excitación
$\tilde{k}_0 \equiv k_0/k_F$	Variable asociada al inverso del alcance del potencial
v	Velocidad de grupo de los pares de fermiones

Índice de figuras

2.1.	<i>La región sombreada representa el área (en el espacio k bidimensional) de traslape de los cintas circulares alrededor de E_F y con espesor $\hbar\omega_D$, que es donde tiene lugar la interacción entre los fermiones, para el problema de Cooper. \mathbf{K} es el vector del centro de masa del par.</i>	7
2.2.	<i>Representación de las regiones de integración para los problemas de Cooper y de BCS en el espacio de energía.</i>	8
3.1.	<i>Curvas de nivel de las Ecs. (3.14)-(3.17) como función de $\tilde{\Delta}_K$. Apreciamos los límites de los regímenes de acoplamiento y el valor (cualitativo) de $\tilde{\Delta}_{K_c}$; es decir, la abcisa de las puntas de las flechas en donde se intersectan las curvas negras, azules y horizontales, en el régimen de cruzamiento. Es en estas flechas donde tiene que pasarse de la Ec. (3.16) a la Ec. (3.17).</i>	17
3.2.	<i>Energía de amarre Δ_0/E_F de pares con momento del centro de masa igual a cero; la curva gruesa representa el valor numérico y la curva delgada el valor aproximado como se menciona en el texto. Se muestra claramente que la aproximación deja de ser buena si B/E_F crece. Observamos que dicha magnitud es mayor a dos si $\tilde{B} > \tilde{B}_1 \approx 4.9$, ocasionando que el polinomio $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ sea positivo a partir de este punto.</i>	22
3.3.	<i>Curvas de $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para el potencial delta atractivo. Mostramos nuestra aproximación a segundo orden (curvas segmentadas) y el resultado exacto (sólidas) para diversos valores de B/E_F. También se muestra la excelente concordancia entre estas curvas cuando dicha variable es pequeña. Destaca la presencia de dos modos de excitación a partir de \tilde{B}_1: uno cuasilineal (tipo fonónico) y otro cuadrático (tipo rotónico).</i>	25
4.1.	<i>Gráfica de $k_0 K_0(k_0 x)$, que es la transformada de Fourier de g_k. K_0 es la función modificada de Bessel de segundo tipo ($n=0$) y es asintótica en $x=0$.</i>	29
4.2.	<i>Gráfica de $k_0 e^{-k_0 x }$, la cual es la transformada de Fourier de g_k^2.</i>	29
4.3.	<i>$\tilde{\Delta}_0$ como función de \tilde{k}_0 para $\tilde{B} = 40$. $\tilde{\Delta}_{0\delta}$ es el valor del potencial delta.</i>	32
4.4.	<i>Energías de excitación $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para $\tilde{B} = 1$.</i>	34
4.5.	<i>Energías de excitación $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para $\tilde{B} = 40$.</i>	34
4.6.	<i>Región de integración para $\tilde{K} < 2$.</i>	36
4.7.	<i>Región de integración para $\tilde{K} > 2$.</i>	36
4.8.	<i>Energía de excitación para $\tilde{B} = 40$ y $\tilde{k}_0 = 10$.</i>	38
4.9.	<i>Velocidad de grupo de los pares para $\tilde{B} = 40$ y $\tilde{k}_0 = 10$.</i>	38

Capítulo 1

Introducción



En la historia de la ciencia, el fenómeno de la superconductividad ha destacado tanto por la belleza de sus propiedades físicas (extraordinarias), como por ser generador de conocimiento. Las primeras han cambiado irreversiblemente nuestra visión de la materia. Desde su descubrimiento en 1911 por K. Onnes [1] nos han sorprendido e impresionado los rasgos esenciales de un material superconductor: Resistencia eléctrica cero y diamagnetismo perfecto. Estas cualidades han motivado la búsqueda de sistemas físicos que posean temperaturas críticas cada vez mayores, animados por el deseo de encontrar materiales superconductores a temperatura ambiente.

La superconductividad ha motivado numerosas teorías y modelos para su entendimiento, entre ellos destacan las teorías fenomenológicas de los hermanos London [2] y de Ginzburg-Landau [3], así como los trabajos de Schafroth [4] y Blatt [5], quienes intentaron dar una explicación de la superconductividad en términos de una condensación tipo Bose-Einstein. Sin embargo, la teoría BCS ha proporcionado un sólido formalismo que ha explicado muy bien gran cantidad de hechos experimentales en los materiales superconductores convencionales. El éxito de esta teoría ha sido tal que se ha aplicado a otras áreas de la física y se ha convertido en el punto de partida de esquemas más generales (se reducen a ésta como un caso límite). Esto llevó incluso a pensar que la descripción completa de los superconductores estaría próxima.

El gran descubrimiento llegó en 1986 con la superconductividad de alta temperatura crítica en el cuprato BaLaCuO con una T_c de 35 K [6] y que a la fecha ha alcanzado los 164 K [7]. A pesar de la gran cantidad de trabajos publicados, la teoría BCS no describe adecuadamente las propiedades de estos materiales, y aún no se cuenta con una teoría microscópica que prediga la superconductividad a alta temperatura [8, 9].

En la teoría BCS de la superconductividad es fundamental el concepto de *pares de Cooper* (estados ligados integrados por dos electrones). En 1956 Cooper descubrió que dos electrones pueden formar un estado ligado por arriba del mar de Fermi, aún cuando la interacción atractiva (que es producto de la interacción electrón-fonón en el material) entre ellos sea muy débil.

Actualmente parece haber un consenso entre la comunidad científica, se acepta que el mecanismo esencial en el fenómeno de la superconductividad es la formación de estados ligados de dos partículas. Por esta razón, es importante entender el apareamiento fermiónico.

En este trabajo se pretenden entender las características físicas de un gas de fermiones inmerso en una red cristalina en una dimensión. Supondremos la existencia de una in-

1. *Introducción*

teracción atractiva neta entre las partículas del gas y que éstas se unen en pares cuyo espín total es igual a cero. Inicialmente tomaremos como base para el estudio de dicha interacción, dos problemas de naturaleza muy distinta: El problema de Cooper y la interacción de dos partículas en el vacío a través de un potencial delta atractivo unidimensional.

Este modelo es una primera aproximación en la descripción y comprensión del apareamiento de electrones (o huecos) en los materiales superconductores, que es el problema fundamental que motiva esta investigación. En él se ignora la presencia de pares de huecos y fermiones desapareados, los cuales desempeñan un papel clave en los modelos que intentan explicar la superconductividad de alta T_c [10, 11]. Mostraremos que a pesar de la sencillez de este modelo, es posible extraer una gran cantidad de información física, la cual puede servir como referencia para modelos más realistas [12] de este fenómeno y complemento de los resultados obtenidos en la resolución del mismo problema en dos y tres dimensiones.

Con el propósito de mejorar la comprensión del problema y de alcanzar resultados más generales, introduciremos el potencial de Schmitt-Rink (SR), el cual se reduce al potencial delta como un caso límite. A pesar de ello, capitalizaremos todas las enseñanzas y procedimientos impartidos por este último, para la resolución del nuevo y más complejo enfoque.

Es oportuno mencionar que esta investigación completa una trilogía iniciada en dos y tres dimensiones [15, 16] y [20, 23] para el mismo problema.

En esta tesis comenzaremos revisando los pilares que la sustentan: El apareamiento de Cooper (capítulo 2) y la ecuación de Schrödinger de dos partículas en el vacío que interactúan mediante un potencial delta-atractivo (capítulo 3). Posteriormente, en el capítulo 4 haremos una generalización, supondremos que ahora el potencial es el de SR (alcance distinto de cero) y estudiaremos el efecto físico de introducir el alcance en nuestro modelo, posteriormente examinaremos el movimiento de los pares de Cooper. En el capítulo 5 mostramos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Apareamientos de Cooper y de BCS

2. Apareamientos de Cooper y de BCS



Comenzaremos haciendo una descripción aplicable a cualquier dimensión d de los modelos de interacción de Cooper y de BCS, posteriormente se particularizará a una dimensión en las siguientes subsecciones.

Consideremos un par de fermiones de masa m con momentos $\hbar\mathbf{k}_1$ y $\hbar\mathbf{k}_2$, cuyo momento del centro de masa es $\hbar\mathbf{K}$; dichas partículas están inmersas en un fondo de $N - 2$ fermiones con los que no interactúan y que se hallan sobre una superficie de Fermi esférica (*en el espacio k*). La energía total E_K del par se calcula como sigue.

Sean $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{R} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$, las coordenadas relativas y del centro de masa (CM), respectivamente. Los vectores de onda asociados son

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (2.1)$$

Los correspondientes operadores de energía cinética quedan

$$\hat{T}_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2, \quad \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = \hat{T}_r + \hat{T}_R = -\frac{\hbar^2}{m}\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{4m}\nabla_R^2, \quad (2.2)$$

de tal manera que la ecuación de eigenvalores resulta

$$(\hat{T}_r + \hat{T}_R + \hat{V}_K)\Psi_K = E_K\Psi_K \quad (2.3)$$

donde

$$\Psi_K = \psi(\mathbf{r})\Phi_K(\mathbf{R}), \quad (2.4)$$

es la función de onda del par, dada como el producto de la parte relativa $\psi(\mathbf{r})$ y del centro de masa

$$\Phi_K(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}. \quad (2.5)$$

Además

$$\hat{V}_K\Psi_K = \int d\mathbf{r}' V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\Phi_K(\mathbf{R}) \quad (2.6)$$

donde $V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es el potencial de interacción, que en general es no local. Combinando las ecuaciones (2.2)-(2.6) se obtiene

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \frac{\hbar^2 K^2}{4m} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} - E_K e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 0 \quad (2.7)$$

2. Apareamientos de Cooper y de BCS

en donde hemos usado la transformada de Fourier de $\psi(\mathbf{r})$, es decir,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.8)$$

con $C_{\mathbf{k}} \equiv \langle \mathbf{k} | \psi \rangle$. Si multiplicamos la Ec. (2.7) por $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ e integramos sobre \mathbf{r} recordando que $\int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = L^d \delta_{\mathbf{q},0}$ ($\delta_{\mathbf{q},0}$ es la delta de Dirac) con L^d el volumen del sistema en d dimensiones, y cancelamos el término $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}$, se llega a la ecuación

$$\left[\frac{\hbar^2 k'^2}{m} + \frac{\hbar^2 K^2}{4m} - E_K \right] C_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K C_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.9)$$

donde

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K \equiv \frac{1}{L^d} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}. \quad (2.10)$$

El problema de Cooper reside en la condición [13]

$$C_{\mathbf{k}} = 0 \quad \forall k_1, k_2 < k_F \text{ o bien, } |\mathbf{k} \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}| < k_F \quad (2.11)$$

la cual hace énfasis en la naturaleza del problema: Los electrones del par están inmersos en un medio de $N - 2$ fermiones que satisfacen el principio de exclusión de Pauli y están encima del nivel de Fermi.

El modelo de interacción de Cooper tiene la siguiente forma

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K = \begin{cases} -V & \text{si } k_F < |\mathbf{k} \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}|, |\mathbf{k}' \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}| < \sqrt{k_F^2 + k_D^2} \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases} \quad (2.12)$$

con $V > 0$ la intensidad de la interacción y k_D el máximo momento que los fermiones pueden intercambiar durante la interacción. Es necesario destacar que dicha interacción sólo ocurre si $0 \leq K \leq 2\sqrt{k_F^2 + k_D^2}$, es decir, dos fermiones interactúan con el potencial atractivo $-V$ si el extremo del vector de onda relativo está en el volumen traslapado (*en el espacio k*) de las capas esféricas de radio E_F y grosor $\hbar\omega_D$ ($\hbar\omega_D$ la máxima energía del fonón que pueden intercambiar con la red), tal como se muestra en la Fig. 2.1. Ahora, incluyendo la Ec. (2.12) en la Ec. (2.9) se llega a que

$$\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{m} + \frac{\hbar^2 K^2}{4m} - E_K \right) C_{\mathbf{k}} = V \sum_{\mathbf{k}'}' C_{\mathbf{k}'} = -A_K. \quad (2.13)$$

El símbolo prima sobre la suma indica la restricción sobre \mathbf{k} señalada en la Ec. (2.12). Resolviendo la ecuación previa para $C_{\mathbf{k}}$ (por el modelo (2.12) $C_{\mathbf{k}}$ sólo depende de $|\mathbf{k}| \equiv k$) resulta

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{-A_K}{\hbar^2 k^2/m + \hbar^2 K^2/4m - E_K}. \quad (2.14)$$

2. Apareamientos de Cooper y de BCS

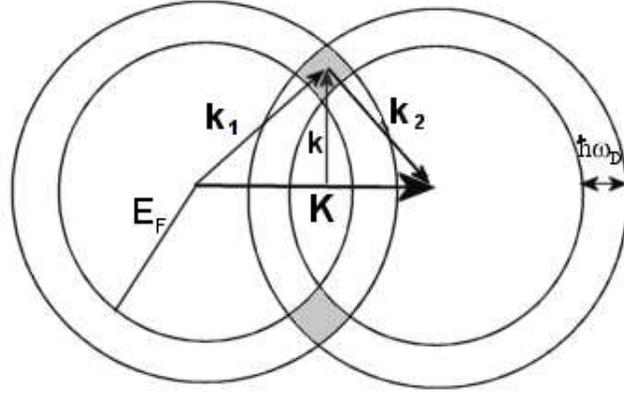


Figura 2.1: La región sombreada representa el área (en el espacio k bidimensional) de traslape de las cintas circulares alrededor de E_F y con espesor $\hbar\omega_D$, que es donde tiene lugar la interacción entre los fermiones, para el problema de Cooper. \mathbf{K} es el vector del centro de masa del par.

Si multiplicamos la expresión anterior por $V\theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K)$ y sumamos sobre \mathbf{k} teniendo en cuenta la restricción impuesta sobre ella, se obtiene

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\hbar^2 k^2/m + \hbar^2 K^2/4m + \Delta_K - 2E_F}. \quad (2.15)$$

En esta última ecuación $E_K \equiv 2E_F - \Delta_K$ es la energía total del par; Δ_K es la energía de amarre. Es oportuno destacar que Δ_K es una cantidad positiva, pues es la energía de un par de Cooper con respecto a la energía de Fermi. Considerando el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$ número de fermiones y $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ volumen del sistema con N/\mathcal{V} constante), la Ec. (2.15) se escribe para d dimensiones y $N \rightarrow \infty$ de la siguiente forma:

$$1 = V \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int' \frac{d\mathbf{k}}{\hbar^2(k^2 - k_F^2)/m + \Delta_K + \hbar^2 K^2/4m} \quad (2.16)$$

Nuevamente, la integral primada denota las restricciones impuestas por la Ec. (2.12). El cálculo de la energía de amarre en dos y tres dimensiones puede verse en la referencia [15]. A continuación se realiza un análisis para un sistema unidimensional.

2. Apareamientos de Cooper y de BCS

2.1 El problema de Cooper en una dimensión

2.1. El problema de Cooper en una dimensión

En el caso presente, las restricciones en \mathbf{k} están descritas por

$$k_F < \left| k \pm \frac{1}{2}K \right| < k_F + k_D. \quad (2.17)$$

Comenzaremos con el caso $K = 0$, entonces la condición se satisface si $k \in [-k_F, -k_F - k_D] \cup [k_F, k_F + k_D]$. Además

$$E_F + \hbar\omega_D = \frac{\hbar^2(k_F + k_D)^2}{2m}. \quad (2.18)$$

Esto implica que

$$k_D = k_F \left(\sqrt{1 + \nu} - 1 \right). \quad (2.19)$$

Aquí $\nu = \hbar\omega_D/E_F \ll 1$. Así las cosas, la integral inmersa en la Ec. (2.16), (considerando que el integrando es una función par), es

$$1 = 2V \left(\frac{L}{2\pi} \right) \int_{k_F}^{k_F+k_D} \frac{dk}{\hbar^2 k^2/m - 2E_F + \Delta_0}. \quad (2.20)$$

Esta expresión es equivalente a

$$1 = V \int_{E_F}^{E_F+\hbar\omega_D} \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{2\epsilon - 2E_F + \Delta_0} \quad (2.21)$$

en la cual se ha hecho el cambio de variable $\epsilon = \hbar^2 k^2/2m$ y donde

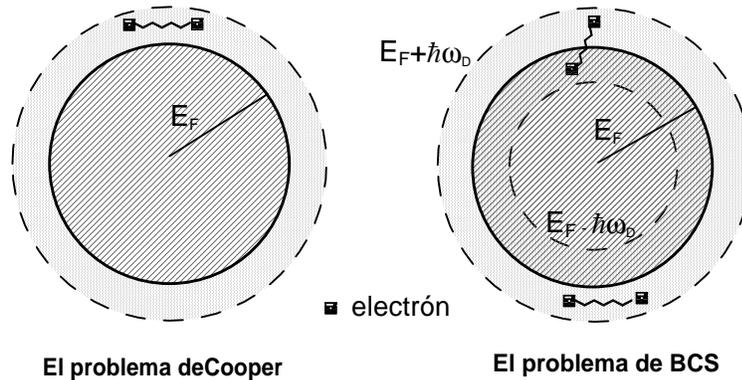


Figura 2.2: Representación de las regiones de integración para los problemas de Cooper y de BCS en el espacio de energía.

2. Apareamientos de Cooper y de BCS

2.1 El problema de Cooper en una dimensión

$$g(\epsilon) = \frac{mL}{\pi} \frac{\epsilon^{-1/2}}{\sqrt{2m\hbar^2}} \quad (2.22)$$

es la densidad de estados unidimensional. En la Fig. 2.2 puede verse la región de integración que en una dimensión se reduce a dos intervalos. Si ahora dividimos todas las energías por E_F (expresiones con tilde) se tiene

$$\frac{2}{\lambda} = \int_1^{1+\nu} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - 1 + \tilde{\Delta}_0/2} \quad (2.23)$$

donde hemos usado que $E_F \gg \hbar\omega_D$ para aproximar $g(\epsilon) \approx g(E_F) = \text{constante}$, y definimos $\lambda \equiv g(E_F)V$ que resulta ser una constante de acoplamiento adimensional. Esta integral carece de polos (ver Apéndice A.1) por lo que se obtiene

$$\frac{2}{\lambda} = \ln \left(\frac{\nu + \tilde{\Delta}_0/2}{\tilde{\Delta}_0/2} \right). \quad (2.24)$$

Luego de algunas manipulaciones algebraicas sencillas y de regresar a las variables sin tilde se llega a lo siguiente

$$\Delta_0 = \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/\lambda} - 1}. \quad (2.25)$$

De esta forma, hemos conseguido a una expresión exacta y sencilla para Δ_0 . Si el acoplamiento es débil obtenemos

$$\Delta_0 = \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/\lambda} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-2/\lambda} \quad (2.26)$$

límite que concuerda con el resultado en dos y tres dimensiones [15] para acoplamiento débil.

Con el fin de ilustrar la manera de abordar el problema del apareamiento cuando $K \neq 0$ y menor que $2k_F$, extenderemos el problema de Cooper usando esta suposición. En este caso la restricción (2.17), (considerando sólo la parte positiva por su simetría y porque el integrando de (2.16) es par) se satisface si $k \in [k_F + K/2, k_F + k_D - K/2]$, con ello la Ec. (2.20) toma la forma más general

$$\frac{1}{\lambda} = \int_{1+\tilde{K}/2}^{\sqrt{1+\nu}-\tilde{K}/2} \frac{d\xi}{\xi^2 - 1 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4}. \quad (2.27)$$

donde $\tilde{K} \equiv K/k_F$, $\xi \equiv k/k_F$ y $\alpha_K \equiv (1 - \tilde{\Delta}_K/2 - \tilde{K}^2/4)^{1/2}$. El cálculo de esta integral es inmediato (no existen polos), el resultado es

$$\frac{2}{\lambda} \alpha_K = \ln \left[\left(\frac{\sqrt{1+\nu} - \tilde{K}/2 - \alpha_K}{\sqrt{1+\nu} - \tilde{K}/2 + \alpha_K} \right) \left(\frac{1 + \tilde{K}/2 + \alpha_K}{1 + \tilde{K}/2 - \alpha_K} \right) \right]. \quad (2.28)$$

2. Apareamientos de Cooper y de BCS

2.2 El problema de BCS unidimensional

Es necesario mencionar que para obtener el resultado anterior se supuso que $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 < 0$ y que $K \in [0, k_D]$. Puede demostrarse que además se necesita considerar los intervalos en donde $K \in [2k_F, 2k_F + k_D]$ y $K \in [2k_F + k_D, 2k_F + 2k_D]$, que darán como resultado ecuaciones de pares de Cooper distintas a (2.28), en las que existen modos de excitación *distintos* que dependen del valor de K [16].

De esas ecuaciones de pares de Cooper se obtienen las relaciones de dispersión. Hasta ahora, nos hemos limitado a calcular el caso $K = 0$ solamente y faltaría determinar Δ_K . Este análisis se realizará, en el siguiente capítulo, para un gas de fermiones que interactúan a través de un potencial delta-atractivo unidimensional.

2.2. El problema de BCS unidimensional

En el caso precedente nos restringimos a pares de fermiones cuya energía se encontraba en el intervalo $[E_F, E_F + \hbar\omega_D]$, si ahora lo expandimos a los valores $[E_F - \hbar\omega_D, E_F + \hbar\omega_D]$; es decir, tomamos en cuenta una franja de energía que al sumarle $\hbar\omega_D$ es mayor o igual a E_F , la Ec. (2.23) sufre la modificación ($K = 0$):

$$1 = \lambda \int_{1-\nu}^{1+\nu} \frac{d\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - 1 + \tilde{\Delta}_0/2}. \quad (2.29)$$

A diferencia del caso precedente, ahora existe un polo en este intervalo de energía, lo que complica la integración. El resultado es (consultar Apéndice A.1)

$$\frac{2}{\lambda} = \ln \frac{1 + \nu - \tilde{\epsilon}_r}{\tilde{\epsilon}_r - 1 + \nu}, \quad (2.30)$$

donde $\tilde{\epsilon}_r$ es el polo en cuestión. Despejando $\tilde{\Delta}_0$ de esta ecuación y regresando nuevamente a las variables físicas, se llega a que:

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \tanh\left(\frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda} \quad (2.31)$$

Este es un valor análogo a los resultados en dos y tres dimensiones. Hacemos notar la diferencia entre el valor de Δ_0 de la Ec. (2.26) para el caso de Cooper y la Ec. (2.31) de BCS, que difieren por un factor de dos en el argumento de la exponencial.

Faltaría ver el caso $K \neq 0$ que presenta un polo adicional, lo cual implica una mayor dificultad en la integración de la Ec. (2.29). Como nuestro propósito es ilustrar con estos ejemplos la metodología a usar en los capítulos siguientes, omitiremos este cálculo.

Capítulo 3

*Gas de fermiones interactuando
a través de un potencial
 δ -atractivo*

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.1 Dos partículas en el vacío



En la teoría BCS [17] el apareamiento fermiónico se realiza a través de los fonones de la red, por lo que la energía transferida entre ellos no puede ser mayor a $\hbar\omega_D$ con ω_D la frecuencia de Debye de la red. Esta restricción nos conduce a una cota superior en la temperatura crítica T_c , que se puede predecir a partir de la teoría BCS. Con los superconductores de alta temperatura crítica dicha cota ha sido superada [6, 7] llevándonos a revisar y replantear las causas del apareamiento y, en particular, el potencial de interacción de los fermiones. Aquí retomamos dos potenciales que, no obstante su sencillez, son capaces de reproducir las bondades de cualquier potencial en el límite de baja densidad para alcance finito o cero.

3.1. Dos partículas en el vacío

En esta sección calcularemos la energía de amarre de dos partículas en el vacío que interactúan a través de un potencial delta-atractivo, que posteriormente será utilizada en el texto. Supongamos que el sistema está integrado por dos fermiones de masa m en el sistema de referencia del centro de masa, que interactúan a través del potencial $V(\mathbf{r}) = -v_0\delta(\mathbf{r})$, $V = v_0/L > 0$ con \mathbf{r} el vector de las coordenadas relativas. De esta manera la interacción interfermiónica es $V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ y produce $V_{k,k'}^K = v_0/L$ en (2.10). Con esto, la Ec. (2.9) cambia y su nueva forma es

$$\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{m} - E\right) C_{k'} + V \sum_k C_k = 0. \quad (3.1)$$

Luego de algunos procedimientos análogos a los realizados en el capítulo anterior y considerando un potencial delta unidimensional se produce la siguiente ecuación

$$1 = V \sum_k \frac{1}{\hbar^2 k^2/m - E}. \quad (3.2)$$

En este caso no hay restricción en los valores de k . Recordemos que el valor de la energía del único estado ligado para un par de partículas que interactúan por medio de un potencial delta-atractivo [18] está dado por

$$E = -\frac{mv_0^2}{4\hbar^2}. \quad (3.3)$$

Aclaremos que nuestro sistema físico lo integran dos fermiones de masa m , razón por la cual aparece el factor cuatro en el denominador. Si consideramos el límite termodinámico e introducimos la variable $B = -E = |E|$, la energía de amarre de dos partículas ligadas en el vacío, la ecuación se transforma en

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.2 Potencial de interacción de tipo δ -atractivo

$$1 = V \left(\frac{L}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\hbar^2 k^2/m + B}. \quad (3.4)$$

Es conveniente introducir en este punto una conexión entre la variable $\tilde{B} \equiv B/E_F$ y el parámetro de acoplamiento λ (ambas son variables adimensionales), esta última está dada por la próxima relación

$$\lambda = \frac{v_0}{\pi \hbar v_F}. \quad (3.5)$$

Con estas igualdades, la energía de interacción \tilde{B} queda:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\tilde{B}}}{\pi}. \quad (3.6)$$

Esta ecuación permite identificar rápidamente la dependencia de la energía de amarre en términos de la constante de acoplamiento λ , variable más usada en la literatura acerca del tema. Con esta relación expresaremos las cantidades de interés físico en términos de B , en sustitución del parámetro fenomenológico V .

3.2. Potencial de interacción de tipo δ -atractivo

Mediante este modelo de interacción podemos estudiar el problema de la acumulación por pares en un gas de electrones, tal como puede verse en [14] y en [20] (para $K = 0$ en ambos estudios); en estos trabajos también se examina la evolución entre un régimen donde los pares están débilmente ligados y altamente traslapados, al régimen en el cual se hayan fuertemente ligados y bien separados entre sí. A continuación trataremos dicho problema para un sistema unidimensional con $K \neq 0$.

Comenzaremos notando que en la Ec. (2.16) (de pares de Cooper) está inmersa la intensidad de la interacción V , que puede ser sustituida por la energía positiva B . Con lo anterior, tomamos como un punto de comparación la energía del único estado ligado de un par de partículas en el vacío, cuya relación explícita es

$$B = \frac{mV^2 L^2}{4\hbar^2}. \quad (3.7)$$

Con ello, construimos la ecuación de pares de Cooper

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\hbar^2 k^2/m + B} = \int' \frac{dk}{\hbar^2 k^2/m + \Delta_K - 2E_F + \hbar^2 K^2/4m} \quad (3.8)$$

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.3 Relación de dispersión de pares de Cooper

De este modo, B funciona como una energía de referencia. En el problema bidimensional, esta sustitución permitía eliminar una divergencia en la región ultravioleta [21, 23] y [8]. En el caso 1D que nos ocupa, no existen divergencias en la ecuación previa, por lo cual, la eliminación de V por B es una reparametrización que no introduce ningún efecto físico.

Conviene destacar que la prima sobre el lado derecho de la integral (3.8) representa el efecto de la interacción de tipo delta-atractivo, que a diferencia de la Ec. (2.16) en donde la integración debe ser consistente con la condición (2.12) donde la integración se da en el intervalo $[k_F, k_F + k_D]$ para los momentos de los fermiones, ahora la integral contempla todos los momentos que cumplen con

$$k_F < |k \pm \frac{K}{2}|. \quad (3.9)$$

Es decir, la interacción es atractiva para todos los momentos que están sobre una superficie de Fermi y que se extienden hasta el infinito, en el espacio de momentos. En esta interacción participa de manera destacada el vector de onda del centro de masa, como veremos a continuación.

3.3. Relación de dispersión de pares de Cooper

Nuestro objetivo es determinar una relación de dispersión de pares de Cooper para cualquier acoplamiento con $K \neq 0$ e inferir su comportamiento, tal como se ha hecho en dos dimensiones [23]. Antes de emprender tal fin es necesario introducir las siguientes variables adimensionales: $\tilde{K} \equiv K/k_F$, $\xi \equiv k/k_F$, $\tilde{B} \equiv B/E_F$ y $\tilde{\Delta}_K \equiv \Delta_K/E_F$ donde k_F es el momento de Fermi y $E_F \equiv \hbar^2 k_F^2/2m$ es la energía de Fermi. Además $\xi_0 \equiv 1 + \tilde{K}/2$ y $\xi'_0 \equiv \tilde{K}/2 - 1$.

La forma de la Ec. (3.8) en términos de estas variables es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int' \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1}. \quad (3.10)$$

Teniendo presente la restricción (3.9), el intervalo de integración del miembro derecho lleva a dos expresiones distintas dependiendo si \tilde{K} es mayor o menor a dos. En este último caso debe tomarse en consideración el signo de la expresión $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ porque conduce a dos integrales *distintas* de la Ec. (3.10).

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.3 Relación de dispersión de pares de Cooper

Si definimos $\alpha_K^2 \equiv 1 - \tilde{\Delta}_K/2 - \tilde{K}^2/4 \equiv -\beta_K^2$, usamos la simetría de (3.10) y suponemos que $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 > 0$, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2}. \quad (3.11)$$

Si $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 < 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 - \alpha_K^2}. \quad (3.12)$$

En el caso $\tilde{K} > 2$ no hay dificultades, debido a que β_K siempre es positiva, el resultado y (3.10) se convierte en

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_0^{\xi'_0} \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2} + \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2}. \quad (3.13)$$

Las integrales (3.11) y (3.12) son elementales, para su determinación tiene que saberse el signo del término $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$; a su vez, $\tilde{\Delta}_K$ es una función (desconocida) de \tilde{K} y \tilde{B} , por lo que dicha tarea no es inmediata. En la siguiente sección se realizará un análisis geométrico detallado de este problema. Las integrales (3.11) y (3.12) son explícitamente

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = -\frac{1}{2\alpha_K} \ln \left(\frac{\xi_0 - \alpha_K}{\xi_0 + \alpha_K} \right) \quad \text{cuando } 0 < \tilde{B} < \frac{\pi^2}{2} \quad (3.14)$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\beta_K} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\xi_0}{\beta_K} \right) \right] \quad \text{si } 2\pi^2 < \tilde{B} < \infty. \quad (3.15)$$

En el intervalo $\pi^2/2 < \tilde{B} < 2\pi^2$, la forma es

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\beta_K} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\xi_0}{\beta_K} \right) \right] \quad \text{si } 0 < \tilde{K} < \tilde{K}_c \quad (3.16)$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = -\frac{1}{2\alpha_K} \ln \left(\frac{\xi_0 - \alpha_K}{\xi_0 + \alpha_K} \right) \quad \text{cuando } \tilde{K}_c < \tilde{K} < 2. \quad (3.17)$$

Aquí se ha introducido $\tilde{K}_c \in [0, 2]$, que satisface la siguiente ecuación

$$\tilde{\Delta}_{K_c}/2 + \tilde{K}_c^2/4 - 1 = 0. \quad (3.18)$$

Finalmente, si $\tilde{K} > 2$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\beta_K} \left[\arctan \left(\frac{\xi'_0}{\beta_K} \right) + \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\xi_0}{\beta_K} \right) \right]. \quad (3.19)$$

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.4 Estudio gráfico cualitativo de la energía de amarre

Como deseamos conocer $\tilde{\Delta}_K$ analíticamente, proponemos una expresión para la energía de amarre de la forma

$$\tilde{\Delta}_K = \tilde{\Delta}_0(\tilde{B}) + \tilde{\Delta}_1(\tilde{B})\tilde{K} + \tilde{\Delta}_2(\tilde{B})\tilde{K}^2 + \dots \quad (3.20)$$

Reconocemos en la concreción de tal objetivo la presencia de ecuaciones trascendentales, Ecs. (3.14)-(3.19); sin embargo, podemos extraer características físicas interesantes en diversos casos límite, tales como los acoplamientos débil y fuerte, y resolver el caso general numéricamente.

3.4. Estudio gráfico cualitativo de la energía de amarre

El problema central de esta sección consiste en determinar las condiciones bajo las cuales podemos calcular $\tilde{\Delta}_K$, ya sea en forma analítica o numérica. Posteriormente podrán valorarse las ventajas de detenernos a escudriñar dichas condiciones, en especial con el empleo de potenciales más generales y complicados, tal como el de SR.

Es indispensable saber, en primer lugar, si hay solución a nuestro planteamiento, es decir, si existe $\tilde{\Delta}_K$ dado un valor de \tilde{B} . Para dilucidar tal cuestión, es necesario examinar la geometría de las ecuaciones (3.14)-(3.17). Observamos que el miembro izquierdo de tales ecuaciones es idéntico y sólo depende de \tilde{B} . En el miembro derecho notamos una dependencia de $\tilde{\Delta}_K$ (que depende a su vez de \tilde{K} y \tilde{B}) y \tilde{K} . Nuestra variable independiente es esta última, si elegimos un valor de la misma, obtendremos diversas curvas al graficarlas como función de $\tilde{\Delta}_K$; \tilde{B} es una medida de la magnitud de la interacción, su gráfica es una línea horizontal que al intersectarse con las curvas anteriores, mostrará si existe solución, es decir, $\tilde{\Delta}_K$ y su valor (aproximado).

La Fig. 3.1 muestra las ideas expuestas. Es pertinente aclarar que cuando se inició el análisis, no se conocían los límites del problema, es decir, se trabajó con las Ecs (A.10) y (A.11) directamente. Las líneas horizontales son los valores de $\tilde{B} = \pi^2/2$ y $\tilde{B} = 2\pi^2$ (analizados más adelante) y representan el miembro izquierdo de las Ecs. (3.14)-(3.17). Las diversas curvas en color negro se generaron a partir del miembro derecho de las Ecs. (3.14) y (3.17) y están asociadas a distintos valores de \tilde{K} . En forma análoga, las curvas en azul corresponden a los miembros derechos de (3.15) y (3.16) para varias \tilde{K} .

En la gráfica se distinguen tres secciones bien diferenciadas, en las cuales apreciamos las siguientes características

a) Región de *acoplamiento débil*, en donde sólo hay intersecciones entre líneas horizontales y curvas en negro. Aquí $0 < \tilde{B} < \pi^2/2$ y $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ es menor a cero,

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.4 Estudio gráfico cualitativo de la energía de amarre

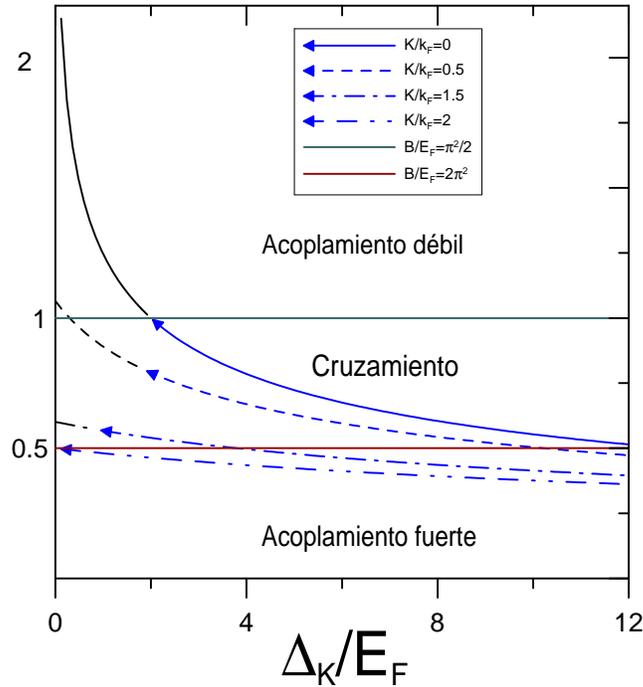


Figura 3.1: Curvas de nivel de las Ecs. (3.14)-(3.17) como función de $\tilde{\Delta}_K$. Apreciamos los límites de los regímenes de acoplamiento y el valor (cualitativo) de $\tilde{\Delta}_{K_c}$; es decir, la abscisa de las puntas de las flechas en donde se intersectan las curvas negras, azules y horizontales, en el régimen de cruzamiento. Es en estas flechas donde tiene que pasarse de la Ec. (3.16) a la Ec. (3.17).

por lo que conduce al resultado (3.14).

b) Zona de *cruzamiento*, en donde puede haber intersecciones entre líneas horizontales y los dos tipos de curvas. Las puntas de las flechas marcan el punto en el cual se unen las curvas de las expresiones (3.16) y (3.17) para un valor dado de \tilde{K} . Las abscisa de estos puntas son los valores de $\tilde{\Delta}_{K_c}$. Este elusivo valor y su curva correspondiente \tilde{K}_c complican el cálculo de $\tilde{\Delta}_K$. En esta zona $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ cambia de signo y además cumple la Ec. (3.18). Por ejemplo, para $\tilde{K} = \tilde{K}_c = 0$, $\tilde{\Delta}_{K_c} = 2$. Si $\tilde{K} = \tilde{K}_c = 2$, $\tilde{\Delta}_{K_c} = 0$. Observamos que conforme $\tilde{K}_c \rightarrow 0$, $\tilde{\Delta}_{K_c} \rightarrow 2$; $\tilde{K}_c \rightarrow 2$, $\tilde{\Delta}_{K_c} \rightarrow 0$ y además $0 < \tilde{K}_c, \tilde{\Delta}_{K_c} < 2$, como se ilustra en la gráfica. Para concluir, basta decir que al elegir un valor de $\pi^2/2 < \tilde{B} < 2\pi^2$ y tener un valor aproximado de $\tilde{\Delta}_{K_c}$ (dado por este tipo de gráfica) tenemos que debemos recurrir a las Ecs. (3.16) y (3.17).

c) Región de *acoplamiento fuerte*, en donde únicamente hay intersecciones entre curvas azules y rectas horizontales. Aquí $\tilde{B} > 2\pi^2$ y se extiende al infinito, en esta región $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ es mayor a cero.

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.4 Estudio gráfico cualitativo de la energía de amarre

Cabe mencionar que la definición de las tres regiones de la Fig. 3.1 estuvo sustentada por las características geométricas de las Ecs. (3.14)-(3.17). Dichas definiciones, intuitivas en principio, serán formalizadas en las próximas secciones, en donde se verá que están estrechamente vinculadas con las características físicas de $\tilde{\Delta}_K$. Empezaremos por determinar el origen de los puntos frontera entre las regiones, es decir, los valores de $\tilde{B} = \pi^2/2$ y $\tilde{B} = 2\pi^2$ que generan las dos rectas horizontales de la Fig. 3.1. Si sustituimos $\tilde{K} = 0$ en la Ec. (3.16) tenemos

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}_0/2 - 1}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}_0/2 - 1}} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Si tomamos el límite $\tilde{\Delta}_0 \rightarrow 2$, entonces hallamos el valor $\tilde{B} \geq \tilde{B}_1 \equiv \pi^2/2 \approx 4.9$. Análogamente, si sustituimos $\tilde{K} = 2$ en (3.16) y hacemos $\tilde{\Delta}_{K=2} \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}_{K=2}/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{\Delta}_{K=2}/2}} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Encontramos que $\tilde{B} = \tilde{B}_2 \equiv 2\pi^2 \approx 19.74$. Estos resultados aportan solidez al análisis geométrico (intuitivo) anterior. \tilde{B}_1 y \tilde{B}_2 son valores de la magnitud de la interacción que nos permiten caracterizar tres regiones de acoplamiento.

Resumimos el modo de aproximar $\tilde{\Delta}_K$ como un desarrollo en potencias de \tilde{K} (con $\tilde{K} \in [0, 2]$). Se elige un valor de \tilde{B} , en los acoplamientos débil y fuerte se recurre a la Ecs. (3.14) y (3.15). En el cruzamiento se identifica el punto de intersección de las tres funciones (curvas azul y negra y la recta), con ello se tendrá una estimación de $\tilde{\Delta}_{K_c}$ (abscisa) y \tilde{K}_c .

La continuidad de las Ecs. (3.16) y (3.17) en \tilde{K}_c , cuando $\tilde{B}_1 < \tilde{B} < \tilde{B}_2$ (régimen de cruzamiento) es diáfana y se sigue de la igualdad

$$\frac{1}{2ia} \ln \left(\frac{x - ia}{x + ia} \right) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}.$$

Sólo resta verificar la continuidad de las relaciones en $\tilde{K} = 2$ si $\tilde{B} > \tilde{B}_2$ (acoplamiento fuerte), la cual es inmediata; únicamente hay que introducir $\tilde{K} = 2$ en las Ecs. (3.16) y (3.19). En el acoplamiento débil y en el régimen de cruzamiento el par se rompe antes de $\tilde{K} = 2$.

Los aspectos geométricos descritos permiten, por una parte, identificar (al menos intuitivamente) rasgos relevantes en la forma de $\tilde{\Delta}_K$; por otra, servir como referencia para

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.5 Pares de fermiones con $\tilde{K} = 0$

el cálculo de la solución en sus dos vertientes: numérica y analítica.

Antes de concluir esta sección, podemos mencionar la valiosa información física que proporcionó este análisis (demostrado a lo largo de esta investigación), a saber:

- Existe $\tilde{\Delta}_K$ para cualquier valor de \tilde{B} ; es decir, tenemos un sistema ligado para cualquier intensidad del potencial.
- $\tilde{\Delta}_0$ aumenta conforme lo hace \tilde{B} .
- Una estimación del valor de \tilde{K} en el que se rompe el par.
- Los límites naturales de los tres regímenes. Es débil si $\tilde{B} \in [0, \pi^2/2]$, fuerte en $[\pi^2/2, \infty)$ y el cruzamiento de ambos está en $[\pi^2/2, 2\pi^2)$.

Armados con este sencillo (aunque didáctico) estudio gráfico, seremos capaces de ubicar los límites y directrices en la determinación numérica de $\tilde{\Delta}_K(\tilde{B})$. Este esquema sirvió como base en la resolución del mismo problema con el potencial de SR; se ha omitido el análisis correspondiente por la complejidad del mismo, pues se agrega un nuevo parámetro: el alcance del potencial. Basta mencionar que se realizó un procedimiento completamente análogo, que dependía de los valores asignados a los parámetros.

3.5. Pares de fermiones con $\tilde{K} = 0$

A partir del estudio gráfico expuesto en la sección previa, obtenemos valiosa información física (listado anterior). Probaremos estos rasgos en el transcurso del texto; empezaremos por la primera proposición. Cabe mencionar que este ejemplo ilustrará la forma de calcular $\tilde{\Delta}_K$. Sabemos que $\tilde{\Delta}_0$ es un caso muy especial; los dos fermiones maximizan su energía de amarre cuando el momento de su centro de masa es cero, además de ser el único caso examinado por Cooper [13].

El punto de partida es la Ec. (3.10) escrita para $\tilde{K} = 0$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{\Delta}_0/2 - 1} \quad (3.23)$$

O bien

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \tilde{\Delta}_0/2}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{\Delta}_0/2}}{1 + \sqrt{1 - \tilde{\Delta}_0/2}} \right). \quad (3.24)$$

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.6 Pares de fermiones acoplados débilmente

Si hacemos $\lambda \rightarrow 0$ entonces $\tilde{\Delta}_0 \rightarrow 0$. Esto significa que cuando la interacción entre los fermiones es débil, también lo es su energía de amarre. Ahora supongamos una interacción fuerte entre éstos, de la Ec. (3.15) a considerar es

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}_0/2 - 1}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}_0/2 - 1}} \right) \right]. \quad (3.25)$$

En este caso conforme $\lambda \rightarrow \infty$, $\tilde{\Delta}_0 \rightarrow \infty$. Lo anterior sienta en bases más sólidas una idea intuitiva: *Entre mayor sea la intensidad de interacción de las partículas, el par estará más fuertemente ligado*. Con los resultados precedentes se nos ha revelado el comportamiento de $\tilde{\Delta}_0$ en sus extremos; no obstante, es posible averiguar el valor de \tilde{B} para el cual $\tilde{\Delta}_0 = 2$ ($\tilde{K}_c = 0$), importante porque a partir de este punto el polinomio $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ es positivo. Así las cosas la integral (3.23) se convierte en

$$\frac{1}{\lambda} = \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} = 1. \quad (3.26)$$

Esto implica $\lambda = 1$, o bien, $\tilde{B} = \pi^2/2$. Antes de continuar la discusión del caso general ($\tilde{K} \neq 0$) es conveniente aclarar los límites de los acoplamientos. Si bien es cierto que los valores experimentales muestran que en 3D $0.1 < \lambda < 0.5$ [26], denominaremos acoplamiento débil a la región donde $\lambda \in [0, 1]$ ($\tilde{B} \in [0, \pi^2/2)$), acoplamiento fuerte si $\lambda \in [2, \infty)$ ($\tilde{B} \in [2\pi^2, \infty)$) y el cruzamiento de ambas estará en el intervalo $\lambda \in (1, 2)$ $\tilde{B} \in (\pi^2/2, 2\pi^2)$.

3.6. Pares de fermiones acoplados débilmente

Iniciaremos nuestro análisis dando por sentado que $\tilde{\Delta}_K$, \tilde{B} y \tilde{K} son cantidades mucho menores a uno, lo que significa en términos físicos que Δ_K y B son muy pequeñas comparadas con E_F y K es muy pequeño comparada con k_F , o bien, que $E_F \rightarrow \infty$ y $k_F \rightarrow \infty$. Comenzamos por escribir la Ec. (3.14) en una manera totalmente equivalente

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}\sqrt{1-\frac{\tilde{K}^2}{4}-\frac{\tilde{\Delta}_K}{2}}} = \frac{1 + \frac{\tilde{K}}{2} - \sqrt{1 - \frac{\tilde{K}^2}{4} - \frac{\tilde{\Delta}_K}{2}}}{1 + \frac{\tilde{K}}{2} + \sqrt{1 - \frac{\tilde{K}^2}{4} - \frac{\tilde{\Delta}_K}{2}}}. \quad (3.27)$$

El primer procedimiento para determinar los primeros términos de la serie (3.20) consiste en hacer $\tilde{K} = 0$ en la ecuación anterior, que contiene el resultado *exacto*; así las cosas, tenemos

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.6 Pares de fermiones acoplados débilmente

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}\sqrt{1-\frac{\tilde{\Delta}_0}{2}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\tilde{\Delta}_0}{2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\tilde{\Delta}_0}{2}}}. \quad (3.28)$$

Reconocemos que $\tilde{\Delta}_0 \ll 1$, por lo cual se puede hacer la aproximación (ampliamente utilizada en este análisis): $(1-x)^{1/2} \approx 1 - x/2 - x^2/8 + \dots$ si $x \ll 1$. Si además suponemos que $\tilde{\Delta}_0 \ll \tilde{B}$, podemos hallar el valor de $\tilde{\Delta}_0(\tilde{B})$ a través de:

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}_0}{4}\right)}{1 + \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}_0}{4}\right)} \quad (3.29)$$

Notamos un cambio sustancial para nuestro problema: *La Ec. (3.27) deja de ser trascendente y con ello podemos especificar la forma de la Ec. (3.20)*. En particular, luego de algunos breves cálculos obtenemos el primer coeficiente del desarrollo

$$\tilde{\Delta}_0(\tilde{B}) = \frac{8e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}}}{1 + e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}}}. \quad (3.30)$$

La Fig. 3.2 proporciona un punto de comparación para $\tilde{\Delta}_0(\tilde{B})$ entre el resultado exacto y el calculado a través del método descrito anteriormente. Observamos una buena concordancia entre las curvas si \tilde{B} es cercana a cero; posteriormente hay una discrepancia que se acentúa conforme \tilde{B} aumenta y la aproximación deja de tener sentido. Es conveniente destacar que tanto las soluciones numérica y analítica demuestran que dada \tilde{B} siempre existe $\tilde{\Delta}_0$. Además observamos un rasgo anticipado en la sección anterior: $\tilde{\Delta}_0(\tilde{B})$ es una función creciente no acotada.

Ahora podemos seguir adelante con nuestro procedimiento y calcular la expansión de $\tilde{\Delta}_K$ a orden lineal alrededor de $\tilde{K} = 0$, es decir

$$\tilde{\Delta}_K(\tilde{B}) = \tilde{\Delta}_0(\tilde{B}) + \tilde{\Delta}_1(\tilde{B})\tilde{K} \quad (3.31)$$

$\tilde{\Delta}_1(\tilde{B})$ es el coeficiente a determinar. Destacamos que si usamos $x = \tilde{\Delta}_K/2 \ll 1$, la Ec. (3.27) se aproxima por

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}\sqrt{1-x}} = \frac{1 + \frac{\tilde{K}}{2} - \sqrt{1-x}}{1 + \frac{\tilde{K}}{2} + \sqrt{1-x}} \quad (3.32)$$

que a su vez se aproxima ($x \ll 1$ y $\tilde{\Delta}_K \ll \tilde{B}$) por

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.6 Pares de fermiones acoplados débilmente

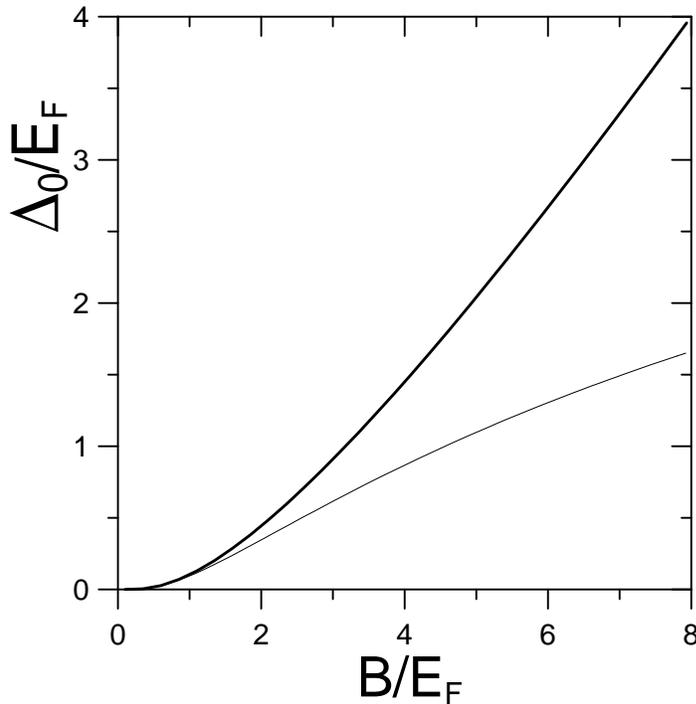


Figura 3.2: Energía de amarre Δ_0/E_F de pares con momento del centro de masa igual a cero; la curva gruesa representa el valor numérico y la curva delgada el valor aproximado como se menciona en el texto. Se muestra claramente que la aproximación deja de ser buena si B/E_F crece. Observamos que dicha magnitud es mayor a dos si $\tilde{B} > \tilde{B}_1 \approx 4.9$, ocasionando que el polinomio $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$ sea positivo a partir de este punto.

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}} = \frac{1 + \frac{\tilde{K}}{2} - (1 - \frac{x}{2})}{1 + \frac{\tilde{K}}{2} + (1 - \frac{x}{2})}. \quad (3.33)$$

Con este proceso podemos averiguar la forma explícita del coeficiente del segundo término del desarrollo (3.20)

$$\tilde{\Delta}_1(\tilde{B}) = -2 \tanh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}}\right). \quad (3.34)$$

Si incluimos los coeficientes calculados en la expresión (3.31) de $\tilde{\Delta}_K$ y volvemos a las variables sin tilde, tenemos como resultado a orden lineal:

$$\Delta_K = \tilde{\Delta}_0(\tilde{B})E_F - \tanh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}}\right)\hbar v_F K + O(\tilde{K}^2) \quad (3.35)$$

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.6 Pares de fermiones acoplados débilmente

Para calcular el coeficiente del término cuadrático ahora usamos $x = \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 \ll 1$, y repetimos los procedimientos anteriores (los cálculos son más elaborados) sin olvidar que $\tilde{\Delta}_0 \ll 1$. Finalmente

$$\tilde{\Delta}_2(\tilde{B}) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \left[\tanh \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}} \right) \right]^2}{1 + 2e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}}}} \right]^2. \quad (3.36)$$

Este coeficiente puede aproximarse por

$$\tilde{\Delta}_2(\tilde{B}) = -\frac{1}{2} \left[1 + \left[\tanh \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}} \right) \right]^2 \right]. \quad (3.37)$$

Siguiendo este método es posible calcular los coeficientes del desarrollo al orden que se desee, sin embargo, para extraer la esencia de las características físicas del problema bajo el régimen de acoplamiento débil, bastará el desarrollo hasta segundo grado

$$\tilde{\Delta}_K(\tilde{B}) = \tilde{\Delta}_0(\tilde{B}) - 2 \tanh \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}} \right) \tilde{K} - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\tanh \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\tilde{B}}} \right) \right)^2 \right] \tilde{K}^2 + \dots \quad (3.38)$$

O bien, en términos de las variables físicas

$$\Delta_K(B) = \Delta_0(B) - \tanh \left(\pi \sqrt{\frac{E_F}{2B}} \right) \hbar v_F K - \left[1 + \left(\tanh \left(\pi \sqrt{\frac{E_F}{2B}} \right) \right)^2 \right] \frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \dots \quad (3.39)$$

con $\Delta_0(B) \simeq 8E_F e^{-\pi\sqrt{2E_F/B}}$. Hacemos notar que en las series (3.38) y (3.39), los términos lineal y cuadrático son negativos, lo cual implica que al aumentar \tilde{K} disminuye la energía de amarre, lo cual implica la existencia de un valor de \tilde{K} en el cual se lleva a cabo la ruptura del par ($\tilde{\Delta}_K = 0$) y que además, va incrementándose conforme lo hace \tilde{B} . Definimos κ al valor de \tilde{K} en el cual ocurre la ruptura.

A fin de proporcionar mayor completitud, escribimos el desarrollo en términos del parámetro de acoplamiento λ

$$\Delta_K(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - \tanh \left(\frac{1}{\lambda} \right) \hbar v_F K - \left[1 + \left(\tanh \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^2 \right] \frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \dots \quad (3.40)$$

con $\Delta_0(\lambda) \simeq 8E_F e^{-2/\lambda}$. La Tabla 3.1 muestra explícitamente algunos valores de \tilde{B} y λ , que serán empleados en las secciones posteriores

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.7 Energía de excitación para cualquier acoplamiento

\tilde{B}	0.1	1	4	$\pi^2/2$	10	$2\pi^2$	20	40
λ	0.14	0.45	0.90	1	1.42	2	2.01	2.85

Tabla 3.1: Valores de \tilde{B} y de los correspondientes valores de la constante de acoplamiento λ .

3.6.1. Dos casos límite de interés

Mostraremos a continuación dos casos límite que nos ilustrarán la consistencia de las ecuaciones involucradas en el problema. Daremos comienzo con la Ec. (3.39). Si en ella $B \rightarrow 0$, tenemos

$$\Delta_K(B \rightarrow 0) = -\hbar v_F K + O(K^2). \quad (3.41)$$

que físicamente significa que la energía de amarre de nuestro sistema es una serie dominada por el término lineal si el acoplamiento es débil.

El segundo caso se deriva de la Ec. (3.27) escrita mediante variables físicas para $K = 0$

$$e^{-\pi\sqrt{\frac{2}{B}}\sqrt{E_F - \frac{\Delta_0}{2}}} = \frac{E_F - \sqrt{E_F}\sqrt{E_F - \frac{\Delta_0}{2}}}{E_F + \sqrt{E_F}\sqrt{E_F - \frac{\Delta_0}{2}}}. \quad (3.42)$$

Si ahora consideramos $E_F \rightarrow 0$, es decir, el límite de dos partículas en el vacío, la ecuación queda

$$e^{-i\pi\sqrt{\frac{\Delta_0}{B}}} = -1 \quad (3.43)$$

la cual es la muy célebre fórmula de Euler. La igualdad se satisface si $\Delta_0 = B$. Recordando la Ec. (3.3), la energía de amarre está dada por

$$\Delta_0 = \frac{mv_0^2}{4\hbar^2} \quad (3.44)$$

que es el eigenvalor de la energía para dos partículas que interactúan por medio de un potencial delta, es decir, cuando el mar de Fermi desaparece ($E_F = 0$) recobramos al par de partículas en el vacío interaccionando a través del potencial delta-atractivo.

3.7. Energía de excitación para cualquier acoplamiento

Ahora estamos en posición de confrontar la Ec. (3.38) con el resultado exacto para cualquier tipo de acoplamiento. Antes de ello conviene introducir la energía (positiva) de excitación $\varepsilon_K \equiv \Delta_0 - \Delta_K$. La Fig. 3.3 muestra a $\tilde{\varepsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ como función de \tilde{K} en un

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.7 Energía de excitación para cualquier acoplamiento

amplio rango de valores de \tilde{B} . Esta imagen incluye la aproximación a segundo orden en \tilde{K} (curvas segmentadas) obtenida por medio del método antes explicado y el resultado exacto, conseguido por métodos numéricos (curvas continuas).

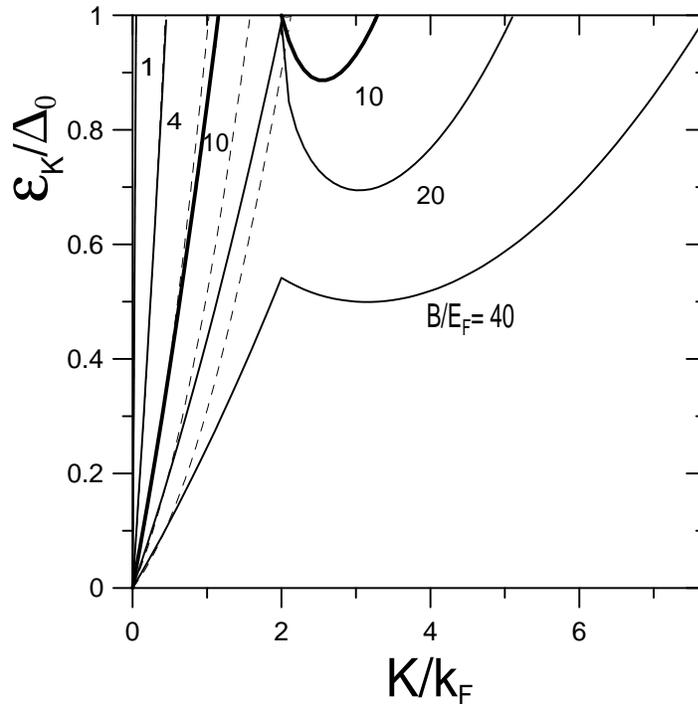


Figura 3.3: Curvas de $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para el potencial delta atractivo. Mostramos nuestra aproximación a segundo orden (curvas segmentadas) y el resultado exacto (sólidas) para diversos valores de B/E_F . También se muestra la excelente concordancia entre estas curvas cuando dicha variable es pequeña. Destaca la presencia de dos modos de excitación a partir de \tilde{B}_1 : uno cuasilíneo (tipo fonónico) y otro cuadrático (tipo rotónico).

En esta misma figura destaca la concordancia entre la aproximación de segundo orden y el resultado exacto siempre que \tilde{B} sea pequeña. La diferencia entre ellos comienza a manifestarse conforme elevamos este parámetro, al rebasar el punto $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \equiv \pi/2$ el resultado (3.38) queda muy por debajo del exacto, situación que habíamos previsto porque la energía de amarre aumenta al hacerlo \tilde{B} .

Es necesario recalcar que esencialmente hemos determinado exactamente la forma de $\tilde{\epsilon}_K$ para todo tipo de acoplamiento (numéricamente). Estas gráficas exhiben dos comportamientos distintos. El primero es cuasilíneo (tipo fonónico), el segundo es cuadrático (tipo rotónico), que no se presenta si $\tilde{B} < \tilde{B}_1$. Llamamos de ese modo a los dos tipos de excitación por conservar la analogía con la relación de dispersión del He II. En dicha

3. Gas de fermiones interactuando a través de un potencial δ -atractivo

3.7 Energía de excitación para cualquier acoplamiento

relación de dispersión se presenta un modo fonónico para momentos pequeños, posteriormente hay un valor mínimo en cuya vecindad puede representarse por el espectro rotónico de Landau [19]. Es relevante destacar la transición *suavizada* entre los modos de excitación de la curva.

Identificamos la presencia del modo rotónico (no descrita por la serie (3.38)), con la aparición de valles en las gráficas a partir de \tilde{B}_1 . Este aspecto se destaca con la gráfica de $\tilde{B} = 10$, en donde apreciamos claramente las dos partes, entre ellas media un intervalo de momentos en donde no existe el par ($\tilde{\Delta}_K = 0 \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_K/\tilde{\Delta}_0 = 1$). Aquí conviene hacer unas definiciones. Denominaremos κ_f al valor de \tilde{K} en el que ocurre la ruptura del par en la rama tipo fonónica y κ_r al punto de ruptura de la rama tipo rotónica.

La información física (abundante) no se agota, la Fig. 3.3 muestra que κ_f desaparece en \tilde{B}_2 y que κ_r aumenta conformen \tilde{B} lo hace. Así, $\kappa_f \in [0, 2]$ y $\kappa_r \in [2, \infty)$. La situación física es la siguiente: Al aumentar la energía de interacción entre los fermiones, también lo hace la energía de amarre del par de Cooper, por lo tanto, es necesario contar con un momento del centro de masa alto para desintegrar al sistema.

Hay otra característica física destacada: *Existen tres regiones bien diferenciadas en el gas de fermiones*. La curva correspondiente a $\tilde{B} = 10$ puede auxiliarnos en la interpretación de la coexistencia de los modos de excitación. Existen pares de fermiones que vibran en un modo tipo fonónico (relación de dispersión cuasilínea) que tiene lugar en el intervalo $\tilde{K} \in [0, 2]$. Algunos otros con momentos grandes ($\tilde{K} > 2$) tienen un modo tipo rotónico y finalmente, también hay fermiones desapareados entre ambos modos.

Es oportuno mencionar que este tipo de comportamiento lo presenta el problema (original) de Cooper con $K \neq 0$ en una dimensión [16], en el cual se distinguen dos modos de excitación diferentes y donde además la variable K no es continua (presenta dos intervalos disconexos) e influye directamente en dichos modos.

Regresando a nuestro problema, observamos que las curvas manifiestan un comportamiento cuadrático cuando $\tilde{K} \rightarrow \infty$, que en términos físicos significa el dominio de la energía cinética sobre la energía de amarre.

Cabe mencionar que, la estructura de la energía de excitación es novedosa (hasta cierto punto inesperada por el cambio tan abrupto entre un modo y otro) y tiene cierta semejanza con las reportadas en la literatura [14], [16] y [20, 25] en dos y tres dimensiones y acrecienta el interés por este problema. Con esta motivación en el siguiente capítulo, haremos una generalización sobre el tipo de potencial, en donde se incluyan los resultados obtenidos hasta ahora y se enriquezca con otros, con la finalidad de mejorar la descripción del problema.

Capítulo 4

*Fermiones interactuando con un
potencial de alcance finito*

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.1 La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink



El problema que motiva este trabajo es la comprensión del fenómeno de apareamiento de fermiones en un material superconductor, para tal objetivo realizamos en la sección precedente una descripción suponiendo una interacción de tipo delta-atractiva entre los fermiones del par. Esto representa una primera aproximación al problema, el siguiente paso consiste en refinar este modelo (sin pretender incorporar todos los complejos fenómenos involucrados) considerando que existe un potencial de interacción atractivo con un *alcance distinto de cero* a diferencia del potencial de contacto (delta).

Para conseguir dicho objetivo, trabajaremos con un potencial más general: El potencial de Schmitt-Rink [27]. Con él, esperamos una mayor riqueza en la información física del sistema, a la par de una mayor complejidad y dificultad del manejo y entendimiento de ésta. A pesar de lo anterior, aquí apreciaremos las experiencias y las enseñanzas dejadas por tratamiento del problema con el potencial delta.

4.1. La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink

Nuevamente tendremos un par de fermiones de masa idéntica (dentro de un gas de N fermiones), que interactúan por medio del potencial atractivo y separable de alcance finito [27]:

$$V_{kk'} = -Vg_kg_{k'} \quad (4.1)$$

Aquí $V \geq 0$ es la intensidad de interacción y $g_k \equiv (1 + k^2/k_0^2)^{-1/2}$ es un factor de forma adimensional; el parámetro k_0 es el inverso del alcance del potencial, de manera que si $k_0 \rightarrow \infty$, entonces $g_k = 1$ y obtenemos el potencial delta (alcance cero). Por otra parte, si $g_k \rightarrow 0$ entonces $V_{kk'} \rightarrow 0$, es decir, nuestro par de Cooper se comportará como una partícula libre y su relación de dispersión será cuadrática. En las Figs. 4.1 y 4.2 mostramos las transformadas de Fourier de g_k y g_k^2 , donde x es la coordenada espacial relativa. Apreciamos que conforme $k_0 \rightarrow \infty$ obtendremos el potencial delta.

La ecuación de Schrödinger de un par en el vacío que interactúa con este potencial se determina siguiendo un procedimiento completamente análogo al mostrado en las ecuaciones (2.1)-(2.16) y es

$$\frac{1}{V} = \sum_k \frac{g_k^2}{B + \hbar^2 k^2/m}. \quad (4.2)$$

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.1 La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink

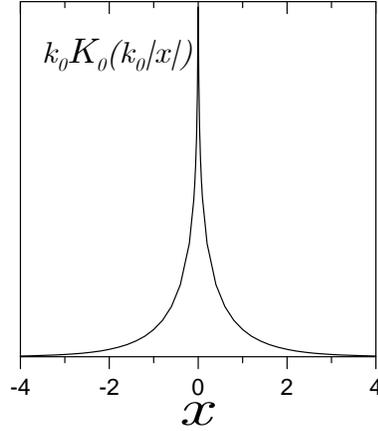


Figura 4.1: Gráfica de $k_0 K_0(k_0|x|)$, que es la transformada de Fourier de g_k . K_0 es la función modificada de Bessel de segundo tipo ($n=0$) y es asintótica en $x=0$.

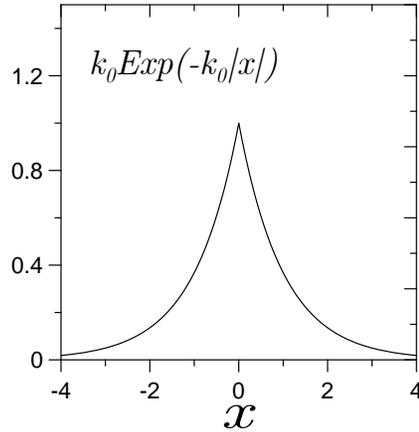


Figura 4.2: Gráfica de $k_0 e^{-k_0|x|}$, la cual es la transformada de Fourier de g_k^2 .

La ecuación para dos fermiones que están en el gas queda

$$\frac{1}{V} = \sum_k' \frac{g_k^2}{\hbar^2 k^2/m + \Delta_K - 2E_F + \hbar^2 K^2/4m} \quad (4.3)$$

donde la prima significa que los momentos de los fermiones están sobre una superficie de Fermi; es decir, siguen la condición (3.9). Igualando estas expresiones con la finalidad de eliminar V y considerando nuevamente el límite termodinámico, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k^2}{B + \hbar^2 k^2/m} dk = \int' \frac{g_k^2}{\hbar^2 k^2/m + \Delta_K - 2E_F + \hbar^2 K^2/4m} dk. \quad (4.4)$$

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.1 La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink

La Ec. (4.4) se reduce a la Ec. (3.8) si $g_k = 1$; es decir, el potencial de contacto (delta). Por lo tanto, contamos con una ecuación más general, de la cual podemos derivar mayor información física. Nuevamente consideramos que $k_F < |k \pm K/2|$ porque (4.1) es atractiva y actúa desde k_F hasta el infinito. Si definimos $\tilde{k}_0 \equiv k_0/k_F$, de suerte que $g_k^2 = (1 + \xi^2/\tilde{k}_0^2)^{-1}$ con $\xi \equiv k/k_F$ y volvemos a utilizar las variables adimensionales, obtenemos los siguientes resultados si $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 > 0$ para $\tilde{K} < 2$

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)(\xi^2 + \tilde{B}/2)} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \beta_K^2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} \quad (4.5)$$

Si $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 < 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)(\xi^2 + \tilde{B}/2)} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 - \alpha_K^2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} \quad (4.6)$$

y además, para $\tilde{K} > 2$

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)(\xi^2 + \tilde{B}/2)} = \int_0^{\xi'_0} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \beta_K^2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} + \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \beta_K^2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)}. \quad (4.7)$$

Recordemos que $\xi_0 \equiv 1 + \tilde{K}/2$ y $\xi'_0 \equiv \tilde{K}/2 - 1$. En la sección previa hicimos notar la ausencia de polos, en este caso la situación es la misma: El término $\xi^2 + \tilde{k}_0^2$ siempre es distinto de cero, pues ξ es real. Así las cosas, esto simplifica el cálculo de las integrales; sin embargo, hay que estar al tanto (nuevamente) del signo de la expresión $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1$, que determina el tipo de función. Cuando es positiva tenemos

$$\frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \tilde{B}/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right) = \frac{1}{\tilde{k}_0^2 - \beta_K^2} \left\{ \frac{1}{\beta_K} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\xi_0}{\beta_K} \right] - \frac{1}{\tilde{k}_0} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\xi_0}{\tilde{k}_0} \right] \right\}. \quad (4.8)$$

En el caso $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 < 0$

$$\frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \tilde{B}/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right) = -\frac{1}{\tilde{k}_0^2 + \alpha_K^2} \left[\frac{1}{2\alpha_K} \ln \left(\frac{\xi_0 - \alpha_K}{\xi_0 + \alpha_K} \right) + \frac{\pi/2}{\tilde{k}_0} \right]. \quad (4.9)$$

Finalmente, para $\tilde{K} > 2$

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.1 La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink

$$\frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \tilde{B}/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right) =$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_0^2 - \beta_K^2} \left\{ \frac{1}{\beta_K} \left[\arctan \frac{\xi'_0}{\beta_K} + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\xi_0}{\beta_K} \right] - \frac{1}{\tilde{k}_0} \left[\arctan \frac{\xi'_0}{\tilde{k}_0} + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\xi_0}{\tilde{k}_0} \right] \right\}. \quad (4.10)$$

No nos sorprende el hecho de contar con unas relaciones considerablemente más complicadas a las asociadas al potencial delta, pues este potencial es más general. Esto se manifiesta a través del nuevo parámetro \tilde{k}_0 , en el cual se incluye el inverso del alcance del potencial. En efecto, con $\tilde{k}_0 \rightarrow \infty$, recuperamos las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.19). Es necesario recalcar que el parámetro \tilde{k}_0 permite variar el alcance y, por lo tanto, obtener las relaciones de dispersión para sistemas cuyo alcance efectivo sea distinto de cero.

Guardando la similitud con la sección (3.6), de la siguiente ecuación podemos determinar $\tilde{\Delta}_0$ y corresponde al caso en que $\tilde{K} = 0$ en la Ec. (4.8)

$$\frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \tilde{B}/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right) =$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_0^2 - \beta_0^2} \left\{ \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\beta_0} \right] - \frac{1}{\tilde{k}_0} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\tilde{k}_0} \right] \right\}. \quad (4.11)$$

En el capítulo anterior la gráfica de $\tilde{\Delta}_0$ que depende de \tilde{B} , mostraba una función creciente. Para el potencial de SR la energía de amarre depende además de \tilde{k}_0 . La Fig. 4.3 muestra a $\tilde{\Delta}_0$ como función de \tilde{k}_0 , destaca el efecto físico que tiene el alcance: *una interacción de largo alcance disminuye la energía de amarre*. En el extremo opuesto, tiende al valor que adquiere en el potencial de contacto.

Otro límite súmamente interesante consiste en tomar $\tilde{K} \rightarrow \infty$ en la ecuación precedente, esto implica que $\xi'_0 = \xi_0 \simeq \tilde{K}/2$ y con ello llegamos a

$$\frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \tilde{B}/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right) = \frac{\pi/2}{\tilde{k}_0^2 - \beta_K^2} \left(\frac{1}{\beta_K} - \frac{1}{\tilde{k}_0} \right). \quad (4.12)$$

Luego de efectuar operaciones algebraicas elementales logramos la ecuación siguiente

$$\tilde{\Delta}_K = b - \frac{\tilde{K}^2}{2} \quad (4.13)$$

donde b es una combinación de \tilde{k}_0 y \tilde{B} , es decir,

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.1 La energía de amarre del potencial de Schmitt-Rink

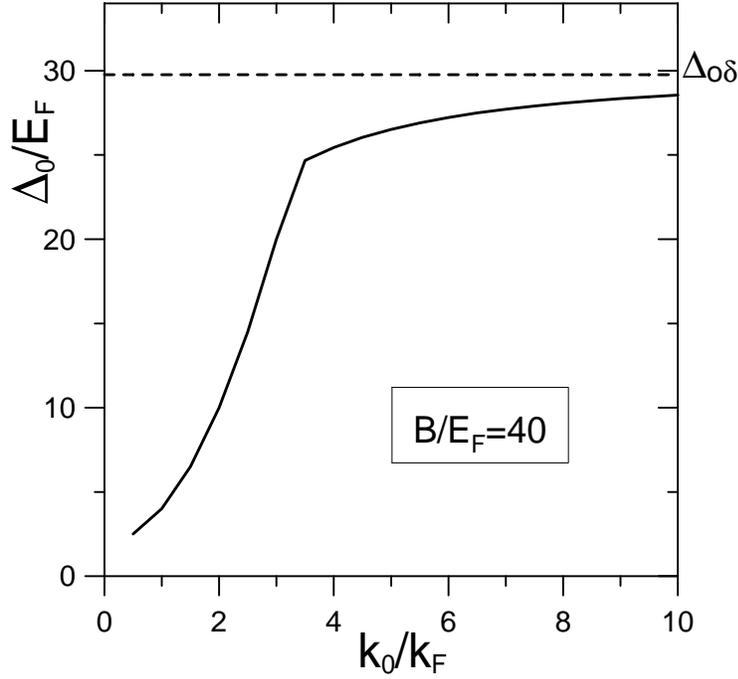


Figura 4.3: $\tilde{\Delta}_0$ como función de \tilde{k}_0 para $\tilde{B} = 40$. $\tilde{\Delta}_{0\delta}$ es el valor del potencial delta.

$$b = \tilde{k}_0 - 2 \pm \sqrt{\tilde{k}_0^2 + 4 \left(\tilde{k}_0 + \sqrt{\frac{\tilde{B}}{2}} \right) \sqrt{\frac{\tilde{B}}{2}}}. \quad (4.14)$$

Lo que realmente importa del resultado recién derivado, es la demostración de la siguiente proposición: *Independientemente de la intensidad del acoplamiento y del alcance del potencial, $\tilde{\Delta}_K$ es cuadrática cuando $\tilde{K} \rightarrow \infty$.* Lo anterior es físicamente entendible ya que cuando $\tilde{K} \gg 1$ la energía cinética del par es mucho mayor que su energía de amarre. Si volvemos a las variables físicas, y tomamos el límite $E_F \rightarrow 0$ obtenemos que la energía de excitación tiene la siguiente forma

$$\varepsilon_K = \frac{\hbar^2 K^2}{4m}. \quad (4.15)$$

Esta energía cinética de dos partículas en el vacío. Por lo anterior, hemos demostrado que las curvas de ε_K son cuadráticas cuando $\tilde{K} \rightarrow \infty$.

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.2 Análisis gráfico de la energía de amarre

4.2. Análisis gráfico de la energía de amarre

A diferencia de la sección dedicada al estudio del potencial delta, aquí no podemos despejar la energía de amarre, debido a la intrincada combinación de α_K , β_K y del nuevo parámetro \tilde{k}_0 en las expresiones (4.8)-(4.10). Por esta causa, se ha adoptado un enfoque numérico en la resolución de $\tilde{\Delta}_K$, para *todo* tipo de acoplamiento y alcance, en dichas ecuaciones.

El primer procedimiento para determinar $\tilde{\Delta}_K$, es la construcción de curvas similares a la Fig. 3.1 para diversos valores de \tilde{k}_0 (recordemos que $\tilde{k}_0 = \infty$ es el potencial de contacto); cabe mencionar que este tipo de figuras son la guía en la elaboración de la programación. Cada valor de \tilde{k}_0 producirá una familia de valores de κ_f , κ_r , \tilde{K}_c , $\tilde{\Delta}_{K_c}$, \tilde{B}_1 y \tilde{B}_2 . Sin embargo, en el análisis de cada una de las familias de curvas de $\tilde{\varepsilon}_K$ (que es función de \tilde{B} y \tilde{k}_0) se realizó siguiendo una guía totalmente análoga a la del potencial delta (Sec. 3.3).

Es necesario aclarar que se han omitido los numerosos detalles de dicho análisis con el objetivo de darle continuidad a la lectura de la información física que aportan las gráficas de $\tilde{\varepsilon}_K$.

Contando con aquella información, se elaboraron las curvas de $\tilde{\varepsilon}_K$ con \tilde{B} fija para distintos alcances. La Fig. 4.4 muestra las curvas de la energía de excitación para diferentes alcances de $\tilde{B} = 1$, donde las curvas para $\tilde{k}_0 = 10$ e infinito se superponen. La Fig. 4.5 corresponde con $\tilde{B} = 40$. En ella observamos claramente la evolución de un potencial de largo alcance hacia el potencial delta conforme \tilde{k}_0 aumenta (equivalente a disminuir el alcance).

La Fig. 4.5 revela la coexistencia de los modos de excitación tipo fonónico y tipo rotónico, siempre que el alcance sea corto ($\tilde{k}_0 \rightarrow \infty$). Un potencial de largo alcance ($\tilde{k}_0 \rightarrow 0$) favorece una energía de excitación cuadrática.

Podemos seguir con las características integradas en las gráficas. En ambas detectamos un comportamiento cuadrático cuando \tilde{K} aumenta. Apreciamos que κ_r aumenta para $\tilde{B} = 1$ (Fig. 4.4) al incrementar el alcance. Si $\tilde{B} = 40$ (Fig. 4.5), la situación se invierte, κ_r crece al disminuir el alcance. En esta última figura identificamos curvas con un abrupto cambio de comportamiento, en concordancia con las rasgos esenciales de las curvas de la energía de excitación de la sección anterior.

En ambas gráficas confirmamos que $\tilde{\varepsilon}_K$ tiende a una dependencia cuadrática con respecto a \tilde{K} conforme $\tilde{k}_0 \rightarrow 0$, lo que en términos físicos significa que el par se comporta como una partícula libre, pues $g_k \rightarrow 0$ de modo que $V_{kk'} \rightarrow 0$.

Los conocimientos físicos arrojados por este modelo son abundantes, la siguiente lista

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.2 Análisis gráfico de la energía de amarre

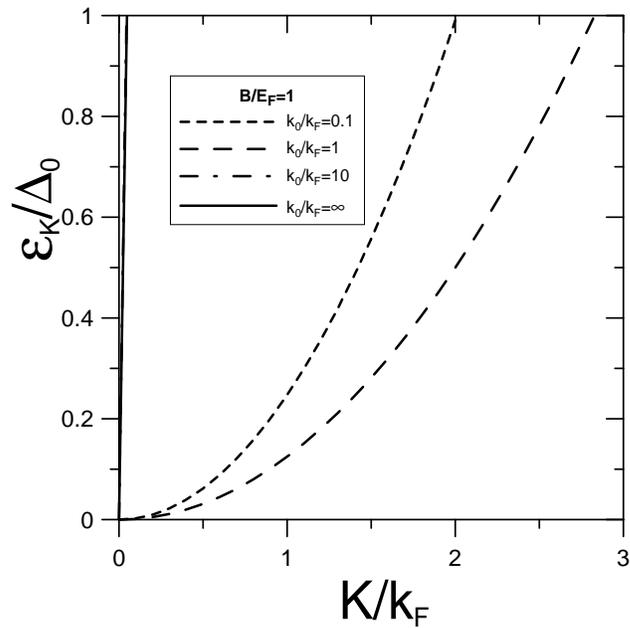


Figura 4.4: Energías de excitación $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para $\tilde{B} = 1$.

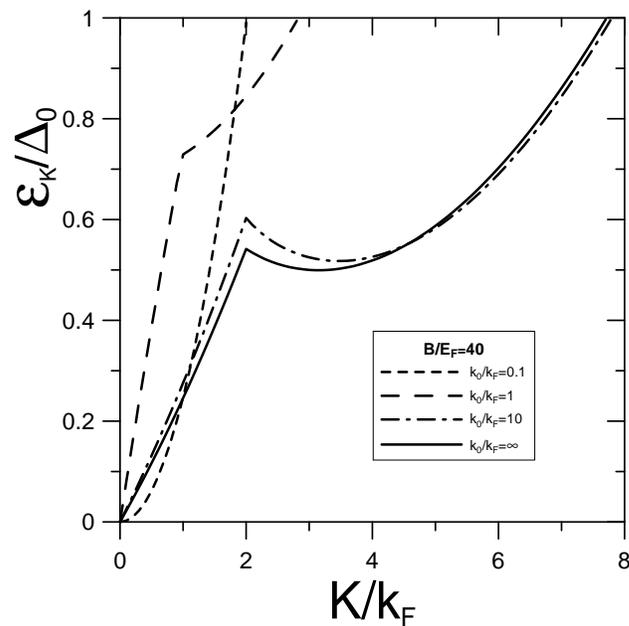


Figura 4.5: Energías de excitación $\tilde{\epsilon}_K/\tilde{\Delta}_0$ para $\tilde{B} = 40$.

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.3 Movimiento de los pares de fermiones

enumera las características más destacadas.

- Un alcance grande favorece el movimiento tipo rotónico y disminuye $\tilde{\Delta}_0$
- En el régimen de acoplamiento fuerte se observa claramente la simultaneidad de los modos fonónico y rotónico, siempre que dispongamos de un alcance corto.

En este punto, puede valorarse la pertinencia de haber incluido el alcance del potencial en nuestro modelo, pues arroja valiosa información física que aporta al entendimiento del fenómeno de formación de pares. En la siguiente sección se darán elementos para la explicación de la aparición de dos tipos de modos de excitación.

4.3. Movimiento de los pares de fermiones

Las subsecuentes secciones otorgan elementos en la discusión acerca del tipo de modos de excitación que se perciben a través de las relaciones de dispersión del problema. Es indispensable manifestar el carácter intuitivo de los próximos razonamientos, que están basados en el tipo de relaciones de dispersión obtenidas.

4.3.1. Análisis geométrico de los modos de excitación

Las Figs. 4.6 y 4.7 muestran las regiones de integración de nuestro problema, que corresponden con las zonas sombreadas (en dos dimensiones y que se extienden más allá del recuadro) y obedecen la condición (3.9) a diferencia de las Figs. 2.1 y 2.2 de las interacciones de Cooper y de BCS. Las líneas gruesas colineales al vector \mathbf{K} representan los intervalos de integración en 1D. Notamos que sólo tiene lugar la integración en la región sombreada. Se han dibujado las parejas de vectores \mathbf{k}_1 con \mathbf{k}_2 (que representan los vectores de onda de los fermiones integrantes del par) y \mathbf{k}'_1 con \mathbf{k}'_2 y sus proyecciones en una dimensión.

La Fig. 4.6 es el caso $\tilde{K} < 2$, es evidente que en dos (y tres) dimensiones disponemos de una contribución angular además del vector \mathbf{K} . Sabemos que la integración debe realizarse en la parte sombreada. En particular, identificamos en el caso unidimensional el intervalo de integración (tomando en cuenta la parte positiva porque el integrando de la Ec. (3.8) es par) $[k_F + K/2, \infty]$, o bien, $[\xi_0, \infty)$ en términos de variables adimensionales. Este intervalo aparece en las ecuaciones (3.11), (3.12), (4.5) y (4.6). En la Fig. 4.6 destaca que en una dimensión, si $\tilde{K} < 2$ se observará solamente el tipo fonónico (flechas antiparalelas). El modo tipo rotónico (flechas paralelas) no se manifiesta.

La Fig. 4.7 muestra el caso $\tilde{K} > 2$. Notamos dos intervalos de integración $[0, K/2 - k_F]$ y $[K/2 + k_F, \infty)$ ($[0, \xi'_0]$ y $[\xi_0, \infty)$ respectivamente) de las ecuaciones (3.13) y (4.7),

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.3 Movimiento de los pares de fermiones

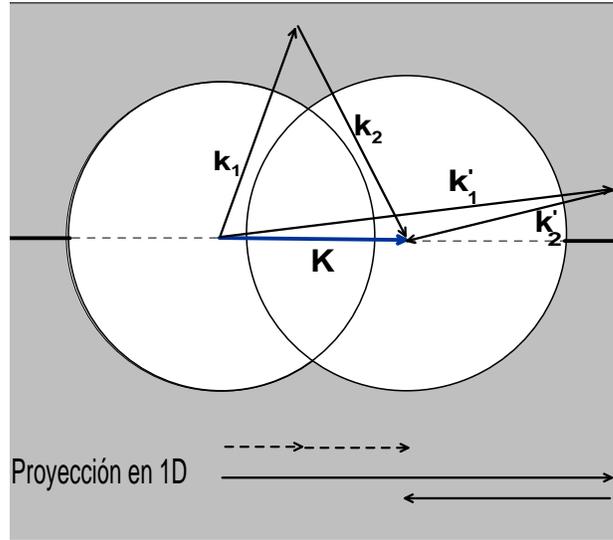


Figura 4.6: Región de integración para $\tilde{K} < 2$.

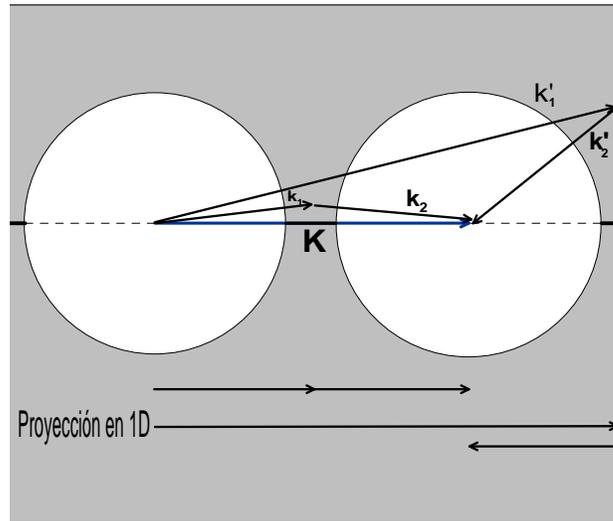


Figura 4.7: Región de integración para $\tilde{K} > 2$.

representados por las líneas gruesas colineales a \mathbf{K} . En esta figura ya observamos la existencia de los dos modos de excitación; sin embargo, hay que tener cautela porque de acuerdo a las Figs. 3.3 y 4.5 son necesarias dos condiciones: a) valores de \tilde{B} grandes y b) alcances cortos.

La primera condición garantiza que el par no se rompa antes de $2k_F$. Con respecto a la segunda, recordemos que un potencial de largo alcance favorece una relación energía-

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.3 Movimiento de los pares de fermiones

momento cuadrática, por lo que no se apreciaría el modo fonónico.

Terminaremos esta sección acentuando que en dos y tres dimensiones, la transición entre los modos de excitación fonónico y rotónico está suavizada por la contribución angular que en una dimensión es inexistente.

4.3.2. Velocidad de las cuasipartículas

Conociendo la forma de la energía de excitación analizaremos el movimiento de los CP siguiendo un esquema de la teoría de bandas de los sólidos [28] en una dimensión. La velocidad de grupo de las cuasipartículas (los pares de fermiones) es

$$v = \hbar^{-1} \frac{d\varepsilon_K}{dK}. \quad (4.16)$$

Esta ecuación revela de manera muy clara la importancia de conocer la relación de dispersión ε_K del sistema. De acuerdo a lo examinado en las secciones previas, podemos ajustar a $\tilde{\varepsilon}_K$ (en el acoplamiento fuerte y potenciales de corto alcance) una función de la siguiente forma

$$\tilde{\varepsilon}_K / \tilde{\Delta}_0 \doteq \tilde{\varepsilon}_K / \tilde{\Delta}_0 = \begin{cases} a\tilde{K}^s; & \text{en } 0 < \tilde{K} < 2 \\ \rho + c(\tilde{K} - \tilde{K}_m)^2; & \text{si } \tilde{K} > 2 \end{cases} \quad (4.17)$$

donde $\tilde{\varepsilon}_K$ es la curva ajustada, \tilde{K}_m es el mínimo de la parte cuadrática, $1 \leq s < 2$ es el exponente que acompaña a \tilde{K} en la parte cuasilineal; a , ρ y c son constantes. Con ello la velocidad de las cuasipartículas queda

$$v = \frac{1}{2} v_F \tilde{\Delta}_0 \times \begin{cases} as\tilde{K}^{s-1}; & \text{para } 0 < \tilde{K} < 2 \\ 2c(\tilde{K} - \tilde{K}_m); & \text{si } \tilde{K} > 2 \end{cases} \quad (4.18)$$

La Fig. 4.8 muestra la curva de la energía de excitación, la Fig. 4.9 su respectiva velocidad. Como hemos encontrado $\tilde{\varepsilon}_K$ por métodos numéricos, somos capaces de determinar las constantes de la curva ajustada (siempre que se trate de un alcance corto). La Tabla 4.1 muestra los valores encontrados.

\tilde{k}_0	a	\tilde{K}_m	s
10	0.275989	3.5	1.12712
∞	0.245594	3.2	1.14130

Tabla 4.1: Parámetros ajustados a las curvas de la energía de excitación.

Con estos parámetros podemos determinar con buena precisión, la velocidad de los pares. Por ejemplo, la velocidad en la parte cuasilineal, para el caso de $\tilde{B} = 10$ y $\tilde{k}_0 = 10$ queda

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.3 Movimiento de los pares de fermiones

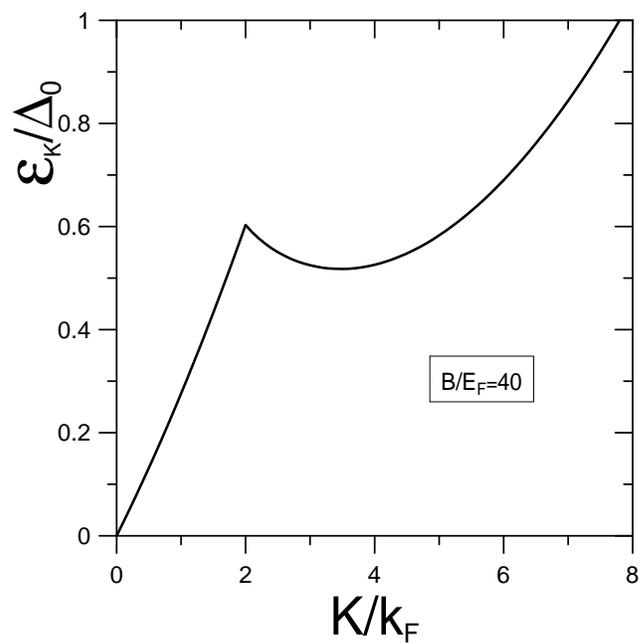


Figura 4.8: Energía de excitación para $\tilde{B} = 40$ y $\tilde{k}_0 = 10$.

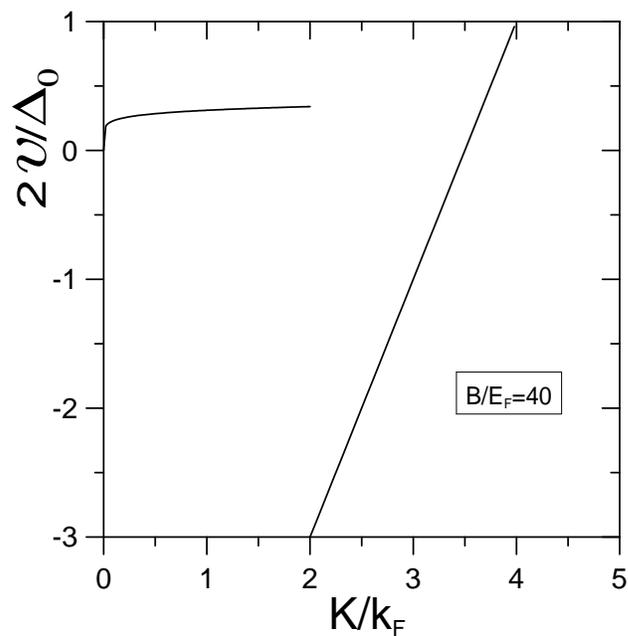


Figura 4.9: Velocidad de grupo de los pares para $\tilde{B} = 40$ y $\tilde{k}_0 = 10$.

4. Fermiones interactuando con un potencial de alcance finito

4.3 Movimiento de los pares de fermiones

$$v = \frac{\tilde{\Delta}_0}{2} a s v_F \tilde{K}^{s-1}. \quad (4.19)$$

Aquí $\tilde{\Delta}_0/2 = 4.44092$ y $s - 1 = 0.12712$, con esto la velocidad de los pares está limitada al intervalo $0 < v < 1.51v_F$. En la parte rotónica obtenemos una recta que se no está acotada superiormente y que tiene un cambio de signo.

Estas características están bien ilustradas en la Fig. 4.9, en donde apreciamos una variación cuya potencia es $s - 1$ y que tiende a una constante conforme $\tilde{K} \rightarrow 2$. En el otro caso, notamos una dependencia lineal, que refleja el dominio de la parte cuadrática en la relación de dispersión, es decir, la cuasipartícula se comporta como una partícula libre.

Cabe recalcar que todos los parámetros de esta ecuación han sido obtenidos por medio del modelo de interacción propuesto en esta tesis.

Capítulo 5

Conclusiones

5. Conclusiones

- Se obtuvieron las curvas de la energía de excitación de los pares de Cooper formados en un gas unidimensional de fermiones que interactúan a través de un potencial de Schmitt-Rink, para distintas intensidades de interacción atractivas y alcances efectivos.
- Es notoria la presencia de dos modos de excitación del par, para momentos pequeños domina el modo tipo fonónico; es decir, con relación energía-momento lineal, que coexiste con un modo tipo rotónico para momentos mayores a $2k_F$.
- El alcance del potencial ejerce un papel destacado, al incrementarse tiene dos efectos: favorece una relación de dispersión cuadrática y disminuye el valor de $\tilde{\Delta}_0(\tilde{B}, \tilde{k}_0)$ a partir de la $\tilde{\Delta}_0(\tilde{B}, \infty)$ del potencial delta para una \tilde{B} dada.
- En el potencial delta hay una coexistencia (muy peculiar) de dos modos de excitación disconexos siempre que $\pi^2/2 < \tilde{B} < 2\pi^2$. El modo tipo fonónico desaparece conforme aumenta el momento hasta llegar a κ_f , luego existe un intervalo de momentos en los que hay fermiones desapareados. A partir de $2k_F$ se encuentra el modo tipo rotónico, que desaparece cuando \tilde{K} alcanza κ_r .
- A partir de una intensidad de interacción mínima del potencial atractivo, existen ambos modos de excitación para todos los valores del momento del centro de masa. En el punto $\tilde{K} = 2$ tiene lugar la abrupta separación de dichos modos y contrasta con la suavidad de la energía de excitación alrededor de este punto en dos y tres dimensiones, que se atribuye a la contribución angular la cual es inexistente en una dimensión.
- El modelo analizado proporciona una estimación de la velocidad de grupo de los pares.
- Las relaciones energía-momento encontradas para los pares de Cooper, son el punto de partida para una discusión estadística de un gas integrado por pares de fermiones.

Apéndice A

Polos y regiones de integración

A. Polos y regiones de integración

A.1 Polos de los problemas de Cooper y de BCS

A.1. Polos de los problemas de Cooper y de BCS

La integral de la Ec. (2.27) es inmediata, sin embargo, para calcularla es necesario verificar si en el intervalo de integración existen polos, los cuales se encuentran para valores de $\tilde{\epsilon}_r \equiv \epsilon_r/E_F$ que satisfacen

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 - \frac{\tilde{\Delta}_K}{2} - \frac{\tilde{K}^2}{4}. \quad (\text{A.1})$$

Como $\tilde{\Delta}_K$ y \tilde{K} son cantidades positivas, los polos son menores a uno y están fuera del intervalo de integración, por lo cual

$$\frac{1}{\lambda} = \int_{1+\tilde{K}/2}^{\sqrt{1+\nu}-\tilde{K}/2} \frac{d\xi}{\xi^2 - 1 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4} = \frac{1}{2\alpha_K} \left[\ln \left(\frac{\xi - \alpha_K}{\xi + \alpha_K} \right) \right]_{1+\tilde{K}/2}^{\sqrt{1+\nu}-\tilde{K}/2} \quad (\text{A.2})$$

que es la expresión (libre de polos) (2.27). Si consideramos ahora el intervalo $[E_F - \hbar\omega_D, E_F + \hbar\omega_D]$, la Ec. (2.29) exhibe la presencia de un polo en esta región de integración si se satisface:

$$0 < \tilde{\Delta}_0/2 \leq \nu,$$

lo cual es posible porque estamos suponiendo que $\tilde{\Delta}_0$ es cercana a cero. Así las cosas la Ec. (2.29) se estima utilizando el valor principal de la integral, es decir

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{1-\nu}^{\epsilon_r - \eta} \frac{d\epsilon}{\epsilon - \epsilon_r} + \int_{\epsilon_r - \eta}^{\epsilon_r + \eta} \frac{d\epsilon}{\epsilon - \epsilon_r} + \int_{\epsilon_r + \eta}^{1+\nu} \frac{d\epsilon}{\epsilon - \epsilon_r} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Donde $\epsilon_r = 1 - \tilde{\Delta}_0/2$ es el polo en estudio y $\epsilon_r \in [1 - \nu, 1)$. El cálculo de estas integrales es inmediato y conducen finalmente a la Ec. (2.30).

A.2. Región de integración del potencial delta atractivo

Notamos que las integrales en cuestión son elementales; a pesar de ello, necesitamos verificar la existencia de polos en el intervalo de integración. En el primer caso, la ecuación para estos puntos está dada por

$$\xi^2 - \alpha_K^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Si suponemos la presencia de alguno de estos puntos, entonces tienen la forma $\xi_r = 1 + \tilde{K}/2 + \tilde{K}'$ con $\tilde{K}' \geq 0$. Con esta suposición, podemos tomar en cuenta la Ec. (A.4) y realizar varios cálculos muy sencillos para hallar:

$$\tilde{\Delta}_K = -2 \left(\frac{\tilde{K}^2}{2} + \tilde{K}'(\tilde{K} + 2) + \tilde{K} + \tilde{K}'^2 \right). \quad (\text{A.5})$$

Hemos supuesto a $\tilde{\Delta}_K > 0$ (es la energía del par tomando como referencia a E_F), esto ocasiona la ausencia de polos en este intervalo. En el caso restante, $\tilde{K} > 2$, la ecuación para los polos $\xi^2 + \beta_K^2 = 0$, implicaría que ξ es compleja, lo cual no es cierto.

Teniendo como base el análisis previo, podemos dejar de preocuparnos por complicaciones en el cálculo de las integrales (3.11) y (3.13) ocasionadas por la existencia de polos. Hecho esto, identificamos el intervalo de integración, dado por la desigualdad

$$\left| \xi \pm \frac{\tilde{K}}{2} \right| \geq 1. \quad (\text{A.6})$$

Que conduce a la condición

$$\xi \geq 1 \pm \frac{\tilde{K}}{2} \quad \text{o} \quad \xi \leq - \left(1 \pm \frac{\tilde{K}}{2} \right) \quad (\text{A.7})$$

Aquí apreciamos la situación especial de $\tilde{K} = 2$, porque es la frontera de dos expresiones distintas. En principio, si $\tilde{K} < 2$ entonces $\xi \in [\xi_0, \infty)$. Cabe mencionar que debido a que los integrandos de la Ec. (3.8) son funciones pares, no es necesario incluir la parte negativa. Si $\tilde{K} > 2$, entonces la región consta de dos intervalos: $[0, \xi'_0] \cup [\xi_0, \infty)$, porque a diferencia del caso precedente, existen valores de ξ que están entre cero y ξ'_0 que satisfacen la Ec. (A.7).

Considerando aquellos intervalos de integración para el cálculo de la Ec. (3.10), obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1}. \quad (\text{A.8})$$

A. Polos y regiones de integración

A.2 Región de integración del potencial delta atractivo

Si $\tilde{K} > 2$

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_0^{\xi'_0} \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1} + \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1} \quad (\text{A.9})$$

El signo del término $\tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 \equiv \beta_K^2 \equiv -\alpha_K^2$ determina el tipo de integral. Si $\tilde{K} > 2$ siempre es positivo y usamos a β_K^2 ; con $\tilde{K} < 2$ debe tenerse mayor cuidado. Para $\tilde{K} \in [0, 2)$ existe $\tilde{\Delta}_K$ que hace negativo a $1 - \tilde{\Delta}_K/2 - \tilde{K}^2/4$. Por ejemplo, haciendo $\tilde{K} = 0$, sabemos que si $\tilde{B} > \tilde{B}_0 \equiv \pi^2/2$ el binomio $1 - \tilde{\Delta}_0(\tilde{B})/2$ de la Ec. (3.28) es negativo. Las integrales (3.11) y (3.12) consideran el cambio de signo, su resultado explícito es

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = -\frac{1}{2\alpha_K} \ln \left(\frac{\xi_0 - \alpha_K}{\xi_0 + \alpha_K} \right) \quad \text{si } \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 < 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{B}}} = \frac{1}{\beta_K} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\xi_0}{\beta_K} \right) \right] \quad \text{si } \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1 > 0 \quad (\text{A.11})$$

Similarmente, dada una $\tilde{B} > \tilde{B}_0$ podemos encontrar \tilde{K} a partir de la cual se produce el cambio de signo. Por lo anterior, llamamos $\tilde{K}_c \in [0, 2)$ al valor donde se lleva a cabo el cambio de signo. El cálculo a realizar es entonces:

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2} \quad \text{si } 0 < \tilde{K} < \tilde{K}_c,$$

también

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 - \alpha_K^2} \quad \text{cuando } \tilde{K}_c < \tilde{K} < 2,$$

finalizando con

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \tilde{B}/2} = \int_0^{\xi'_0} \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2} + \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \beta_K^2},$$

que son los resultados que ya conocíamos.

Con el potencial de SR el tratamiento es esencialmente el mismo, el cambio reside en la sustitución de las Ecs. (A.8) y (A.9) por

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{B}/2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} = \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} \quad (\text{A.12})$$

y

A. Polos y regiones de integración

A.2 Región de integración del potencial delta atractivo

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{B}/2)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} = \int_0^{\xi'_0} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)} + \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + \tilde{\Delta}_K/2 + \tilde{K}^2/4 - 1)(\xi^2 + \tilde{k}_0^2)}. \quad (\text{A.13})$$

Con los mismos razonamientos del potencial delta, esta ecuación se reduce a las expresiones (4.8)-(4.10).

Referencias

- [1] H. K. Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **119**, **120**, **122**, (1911).
- [2] F. London and H. London, “Supraleitung und diamagnetismus”, Physica **2**, 341 (1935).
- [3] V. L. Ginzburg and L. Landau, “Concerning the theory of superconductivity”, J. Exptl. Phys. **20**, 1064 (1950).
- [4] M. R. Schafroth, “Superconductivity of charged Boson Gas”, Phys. Rev. **96**, 1149 (1954).
- [5] M. R. Schafroth, S. T. Butler and J. M. Blatt, “Quasichemical equilibrium approach to superconductivity”, Helv. Phys. Acta **30**, 93 (1957).
- [6] J. G. Bednorz and K. A. Müller, “Possible high- T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system”, Z. Phys. **64**, 189 (1986).
- [7] L. Gao, Y. Y. Xue, F. Chen, Q. Xiong, R. L. Meng, D. Ramírez, C. W. Chu, J. H. Eggert and H. K. Mao, “Superconductivity up to 164 K in $HgBa_2Ca_{m-1}Cu_mO_{2m+2+\delta}$ ($m = 1, 2$ and 3) under quasihydrostatic pressures”, Phys. Rev. B **50**, 4260 (1994).
- [8] M. de Llano, *Generalized Bose-Einstein condensation in superconductivity and superfluidity*, Lectures delivered at the XXXVIII Latin American School of Physics, Mexico City, (2007).
- [9] C. P. Poole, H. A. Farach and R. J. Creswick, *Superconductivity*, (Academic Press, San Diego, 1995), p. 173.
- [10] F. J. Sevilla, “Modelos Bosón-Fermión de la superconductividad”, (Tesis de doctorado, UNAM; México, D. F., 2004) p. 37.
- [11] M. de Llano and V. V. Tolmachev, “Multiphases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity”, Physica A **317**, 546 (2003).

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- [12] M. Fortes, M. de Llano and M. A. Solís, “One dimensional Cooper pairing via the Bethe-Salpeter equation”, para ser publicado.
- [13] L. N. Cooper, “Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas”, *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [14] M. Casas, C. Esebbag, A. Extremera, J. M. Getino, M. de Llano, A. Plastino and H. Rubio, “Cooper pairing in a soluble one-dimensional many-fermion model”, *Physical Review A* **44**, 4915–4922 (1991).
- [15] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo and M. A. Solís, “The Cooper Pair dispersion relation”, *Physica C* **295**, 93–100 (1998).
- [16] R. Mendoza-Pérez, M. Fortes, M. de Llano and M. A. Solís, “Roton-like excitations in Cooper problem”, para ser publicado.
- [17] D. Pines, *The Many-Body Problem*, Fifth printing, (W. A. Benjamin, Inc., Massachusetts, 1979) p. 369.
- [18] M. de Llano, *Mecánica Cuántica*, (Las Prensas de Ciencias, México, D. F., 2002) p. 46.
- [19] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd Ed. (Pergamon, Oxford, 1996), p. 183.
- [20] V. C. Aguilera-Navarro and M. de Llano, “Cooper pairing with a one-dimensional δ -potencial”, *Rev. Mex. Fís.* **40**, 167–173 (1994).
- [21] M. de Llano, A. Salazar and M. A. Solís, “Two-dimensional delta potential wells and condensated-matter physics”, *Rev. Mex. Fís.* **51**, 626–632 (2005).
- [22] P. Gosdzinsky and R. Tarrach, “Learning quantum field theory from elementary quantum mechanics”, *Am. J. Phys.* **59**, 70–74 (1991).
- [23] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Cooper pair dispersion relation for weak to strong coupling”, *Physical Review B* **62**, 8671–8674 (2000).
- [24] R. M. Quick, C. Esebbag and M. de Llano, “BCS theory tested in an exactly solvable fermion model”, *Phys. Rev. B* **47**, 512–514 (1993).
- [25] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares and O. Rojo, “Linear to quadratic crossover of Cooper-pair dispersion relation”, *Physica C* **351**, 341–348 (2001).
- [26] J. M. Blatt, *Theory of superconductivity*, (New York, Academic Press, 1971) p. 157.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- [27] P. Nozières and S. Schmitt-Rink, “Bose Condensation in an attractive fermion gas: From weak to strong coupling superconductivity”, *Journal of Low Temperature Physics* **59**, 195–211 (1985).
- [28] A. J. Dekker, *Solid State Physics*, (Macmillan, London, 1969) p. 247.