



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“APLICACIONES DE LA CORRESPONDENCIA  
AdS/CFT AL PLASMA DE QUARKS Y  
GLUONES”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**MARIANO CHERNICOFF MINSBERG**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO GÜJOSA HIDALGO

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. DAVID VERGARA OLIVER



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Primero lo primero. Quiero agradecer a Alberto Güijosa por darme la posibilidad de trabajar con él. Por el inmenso compromiso que tiene con la enseñanza y la investigación; espero que algo de eso se me quede. Le agradezco por las infinitas horas que pasamos discutiendo sobre física, política y por supuesto, fútbol. Por transmitirme el gusto por la teoría de cuerdas y todas sus marcianadas. Por su sinceridad. Pero sobre todo, quiero agradecerle su amistad.

Quiero agradecer a José Antonio García por haberme sugerido estudiar la dualidad de Maldacena. Por haber sido parte de este proyecto de principio a fin. Por tener la puerta de su oficina siempre abierta sin importar si estamos trabajando juntos o no. Le agradezco por su peculiar forma de hacerme pensar y reflexionar. Por su inigualable franqueza.

Agradezco a David Vergara por su apoyo a lo largo todo el doctorado. Y muy en particular le agradezco sus clases de mecánica clásica.

Quisiera agradecer también a mis sinodales: Leonardo Patiño, Hugo Morales, Luis Urrutia, Myriam Mondragón y Axel de la Macorra por los valiosos comentarios que me hicieron sobre el trabajo.

Al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM y en particular a Yanalté, porque sin ella las cosas hubieran sido mucho más complicadas, de verdad gracias.

Quiero agradecer a mis compañeros de batalla: Nacho, Alexander, Hector, Elías, Eduardo, Adolfo, Yuri, Nettel y William por los buenos ratos, por las discusiones y por la infinidad de veces que me ayudaron con la compu. En particular, estoy profundamente agradecido con mis compañeros de vivienda académica (el cubículo), Nacho y Alex, por la increíble convivencia a lo largo de estos últimos años y por todo lo que me enseñaron. Espero que trabajemos juntos en un futuro.

Al Instituto de Ciencias Nucleares por ser mi casa durante más de 5 años. A la Universidad Nacional Autónoma de México por ser el espacio donde toda esta gente se reúne y a Conacyt por becarme durante todo el doctorado.

En el sector familiar...

Agradezco a mi madre y a mi padre por su amor incondicional, por el hogar que armaron. Por mostrarme lo que significa que dos personas se amen y respeten. Agradezco a mi mamá por su inconmensurable fuerza, por ser una guerrera y siempre tirar para adelante. Le agradezco por lo que soy y porque nunca te vas a olvidar de las cosas importantes. A mi papá, por la seguridad y tranquilidad que le das a nuestra

familia. A Lei, por ser el más hermano mayor de todos y porque cuando las cosas se ponen difíciles siempre estás para ayudarme. Por tus comentarios sobre el manuscrito. A los tres, porque son mi fuerza, mi tranquilidad y mi alegría.

A los Chernicoff de estas latitudes, Tío, Tía, Mati y Nico, porque tenerlos cerca hace toda la diferencia. Por los asados en Domingo y por cada Lagarde que tomamos juntos. A la familia en el Sur porque siempre están presentes. A los Furlan Magaril por dejarme ser parte de su familia y por supuesto, por haber “hecho” una hija tan hermosa.

A mis amigos, porque pasar la vida con ustedes es un increíble privilegio.

A Ezra, porque los años solo te hacen más mi hermano y porque en lo bueno y en lo malo, siempre estás ahí. A Louis, porque a pesar de la distancia aprendimos a no perder la cotidianidad. A Frank y a Anta, por saberlos en mi vida. A Ariel, por ser imprescindible. A Damián (puriiiiii!), porque probablemente no estaría escribiendo ninguna tesis si no hubiera encontrado un cómplice tan perfecto. Por las noches de estudio, por explicarme electrónica y por tu impecable forma de ser. A Damián “mijo”, porque solo tuve suerte esa tarde en Barcelona. A Laurita, porque es un verdadero placer haberte conocido. A Sole, porque te convertiste en mi hermana y porque espero nos queden muchas historias juntos. A Caro y Sofía porque sus risas me acompañan hace más de 15 años. A Pabli y Spud, porque con ustedes mi familia está completa. A Luca, porque corresponde.

Por último, quiero agradecer con todo mi corazón a May (bultini, pajaré, etc), porque cuando me abrazas vivo tranquilo y cuando me miras sueño. Por tu paciencia, por aguantarme estos últimos meses (por decirlo de manera resumida). Por tu inigualable sensibilidad y tu increíble fortaleza. Porque todo esto es para ti y porque te amo.

## Resumen

En este trabajo utilizamos la correspondencia AdS/CFT para determinar la energía de un par quark-antiquark que atraviesa un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  con velocidad constante  $v$ . Encontramos que el par no siente fuerza de arrastre. La energía tiene la esperada dependencia  $1/L$  para separaciones pequeñas, y el par se desliga a partir de una cierta longitud de apantallamiento cuya dependencia en la velocidad también determinamos. Discutimos la relación que existe entre el límite ultrarrelativista de nuestros resultados y el lazo de Wilson tipo luz propuesto recientemente como definición del parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ .

Consideramos también otras cargas de prueba moviéndose en el medio térmico, y calculamos la fuerza de arrastre ejercida por el plasma. Un sistema de  $k$  quarks ligados en la representación totalmente antisimétrica encontramos que siente una fuerza con una dependencia no trivial en  $k$ . Nuestros resultados para  $k = 1$  y  $N$  grande coinciden con los obtenidos recientemente por Herzog *et al.* y Gubser, pero contienen además una serie infinita de correcciones en  $1/N$ . El barión ( $k = N$ ) no siente fuerza de arrastre. También encontramos que un gluón pesado siente una fuerza que es dos veces más grande que la que experimenta el quark.

Exploramos diversos aspectos del movimiento de quarks pesados en teorías de norma fuertemente acopladas. Basándonos en un trabajo previo de Mikhailov, estudiamos la relación de dispersión y la pérdida de energía de un quark con masa finita que se mueve de forma acelerada en SYM  $\mathcal{N} = 4$ , tanto en el vacío como a temperatura finita. En el primer caso notamos que al aplicar una fuerza externa se modifica la relación de dispersión. En el segundo caso, encontramos que cuando un quark estático es acelerado por una fuerza externa, su tasa inicial de pérdida de energía es insensible al plasma, y existe un tiempo de retraso antes de que la tasa coincida con el valor encontrado para las configuraciones estacionarias.

Siguiendo el trabajo de Herzog *et al.* consideramos también la evolución de un quark y de un antiquark (espalda con espalda) inmediatamente después de su formación. Aprendimos que la correspondencia AdS/CFT distingue entre la configuración del singlete y de la adjunta. Caracterizamos la distancia a partir de la cual la desaceleración de cada partícula está correctamente descrita por un coeficiente de fricción constante. Examinamos la manera en que se modifica la energía de un par quark-antiquark que se mueve con velocidad constante en el medio térmico para el caso con masa finita. Encontramos que la dependencia en la velocidad de la longitud de apantallamiento se modifica radicalmente en el régimen ultrarrelativista con respecto al caso con masa infinita.

## Abstract

We make use of the AdS/CFT correspondence to determine the energy of an external quark-antiquark pair that moves through strongly-coupled thermal  $\mathcal{N} = 4$  super-Yang-Mills plasma, both in the rest frame of the plasma and in the rest frame of the pair. It is found that the pair feels no drag force, has an energy that reproduces the expected  $1/L$  (or  $\gamma/L$ ) behavior at small quark-antiquark separations, and becomes unbound beyond a certain screening length whose velocity-dependence we determine. We discuss the relation between the high-velocity limit of our results and the lightlike Wilson loop proposed recently as a definition of the jet-quenching parameter.

We then consider other types of external color sources that move through the hot medium, and calculate, via the AdS/CFT correspondence, the dissipative force (or equivalently, the rate of energy loss) they experience. A bound state of  $k$  quarks in the totally antisymmetric representation is found to feel a force with a nontrivial  $k$ -dependence. Our result for  $k=1$  (or  $k = N - 1$ ) agrees at large  $N$  with the one obtained recently by Herzog *et al.* and Gubser, but contains in addition an infinite series of  $1/N$  corrections. The baryon ( $k = N$ ) is seen to experience no drag. Finally, a heavy gluon is found to be subject to a force which at large  $N$  is twice as large as the one experienced by a heavy quark, in accordance with gauge theory expectations.

We explore various aspects of the motion of heavy quarks in strongly-coupled gauge theories. Building on earlier work by Mikhailov, we study the dispersion relation and energy loss of an accelerating finite-mass quark in  $\mathcal{N} = 4$  super-Yang-Mills, both in vacuum and in the presence of a thermal plasma. In the former case, we notice that the application of an external force modifies the dispersion relation. In the latter case, we find in particular that when a static heavy quark is accelerated by an external force, its rate of energy loss is initially insensitive to the plasma, and there is a delay before this rate approaches the value derived previously from the analysis of stationary or late-time configurations.

Finally, following up on work by Herzog *et al.*, we also consider the evolution of a quark and antiquark as they separate from one another after formation, learning how the AdS/CFT setup distinguishes between the singlet and adjoint configurations, and locating the transition to the stage where the deceleration of each particle is properly accounted for by a constant friction coefficient. Additionally, we examine the way in which the energy of a quark-antiquark pair moving jointly through the plasma scales with the quark mass. We find that the velocity-dependence of the screening length is drastically modified in the ultra-relativistic region, and is comparable with that of the transition distance mentioned above.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. QCD y el plasma de quarks y gluones . . . . .	7
1.2. Cuerdas y D-branas . . . . .	11
1.3. La correspondencia AdS/CFT . . . . .	18
1.4. La correspondencia AdS/CFT y el plasma de quarks y gluones . . . . .	25
<b>2. La energía de un mesón que se mueve en un plasma de SYM <math>\mathcal{N} = 4</math></b>	<b>31</b>
2.1. La cuerda en AdS-Schwarzschild . . . . .	32
2.2. La energía de un par quark-antiquark en movimiento . . . . .	41
<b>3. La pérdida de energía de gluones, bariones y k-quarks en un plasma de SYM <math>\mathcal{N} = 4</math></b>	<b>53</b>
3.1. El encaje de la D5-brana . . . . .	54
3.2. La fuerza de arrastre sobre bariones y k-quarks . . . . .	59
3.3. La fuerza de arrastre que siente un gluón pesado . . . . .	64
<b>4. Aceleración, pérdida de energía y apantallamiento en teorías de norma fuertemente acopladas</b>	<b>67</b>
4.1. Evolución de un quark: temperatura cero . . . . .	70
4.1.1. Masa infinita . . . . .	72
4.1.2. Masa finita . . . . .	73
4.1.3. El agujero negro en la hoja de mundo y el comportamiento final de la cuerda . . . . .	76
4.2. Evolución de un quark: temperatura finita . . . . .	78
4.2.1. Velocidad constante . . . . .	80
4.2.2. El quark acelerado . . . . .	83
4.2.3. El agujero negro en la hoja de mundo y el comportamiento final de la cuerda . . . . .	93
4.3. Evolución de un par quark-antiquark . . . . .	96
4.3.1. Revisión de resultados anteriores . . . . .	96
4.3.2. Condiciones iniciales generalizadas . . . . .	98
4.3.3. La velocidad límite . . . . .	102
4.3.4. Transición al régimen asintótico . . . . .	104
4.4. Potencial Quark-Antiquark con masa finita . . . . .	107

4.4.1. Revisión de resultados anteriores . . . . .	107
4.4.2. Masa finita y temperatura cero . . . . .	108
4.4.3. Masa finita y temperatura finita . . . . .	109
4.4.4. Longitud de apantallamiento vs. distancia de transición . . . .	114

<b>5. Conclusiones</b>	<b>117</b>
------------------------	------------



# Capítulo 1

## Introducción

El universo en el que vivimos es increíblemente complejo. Intentar entender de qué está hecho y cómo funciona es un objetivo sumamente ambicioso. A pesar de ello, y gracias a la inmensa curiosidad del ser humano, es mucho lo que hemos avanzado en este intento. Falta mucho por hacer, pero el panorama es fascinante y alentador<sup>1</sup>.

Desde hace mucho sabemos que toda la materia está compuesta por átomos y que éstos están formados por un núcleo y electrones que giran a su alrededor. El núcleo está constituido por neutrones y protones, y éstos a su vez están hechos de partículas más pequeñas que denominamos *quarks*. Ni los electrones ni los quarks, hasta donde sabemos, están hechos de componentes más pequeños; ellos son las partículas que llamamos *elementales*. Uno bien pudiera pensar que la historia termina ahí y que con estos ingredientes podemos describir de qué está hecho nuestro universo en su totalidad, pero sorprendentemente hemos descubierto que existe todo un pequeño zoológico de partículas elementales. Gracias al trabajo de mucha gente durante las décadas de los 60 y los 70, tenemos desde hace 30 años una teoría que describe a todas ellas. Le hemos llamado el *modelo estándar*.

De acuerdo con este modelo, las partículas fundamentales que componen la materia están divididas en dos grupos: los leptones y los quarks. Al primero pertenecen el electrón, el muón, el tauón (estas últimas dos son partículas parecidas al electrón pero más pesadas) y 3 diferentes tipos de partículas ligeras llamadas neutrinos. Existen igualmente 6 distintos tipos de quarks, que llamamos arriba, abajo, cima, fondo, encanto y extraño.

Además de conocer los ladrillos básicos de la naturaleza, es necesario entender la manera en que éstos interactúan entre sí. Hemos descubierto que las partículas elementales se hablan unas con otras a través de cuatro fuerzas fundamentales: la gravitacional, la electromagnética, la débil y la fuerte. Las primeras dos son bastante conocidas por el papel estelar que juegan en nuestra vida diaria; por el contrario, la fuerza débil y fuerza fuerte solo las podemos observar a distancias muy pequeñas y por

---

<sup>1</sup>El objetivo de esta sección es presentar en un lenguaje amigable y sin tecnicismos las ideas generales de la tesis (como resultado de lo cual, es posible que un lector especializado encuentre incluso varias imprecisiones). Es un esfuerzo dedicado a mi familia y amigos.

tanto nos resultan menos familiares. Cada una de estas interacciones está asociada a un tipo de partícula elemental que actúa como portadora de la fuerza. Por ejemplo, en el caso del electromagnetismo dicha partícula es conocida como el fotón, y el hecho de que dos electrones se repelen es el resultado del intercambio de fotones entre ellos. El modelo estándar describe a las fuerzas electromagnética, débil y fuerte de manera sumamente exitosa.

Para nuestros propósitos resulta conveniente revisar con un poco más de detalle las características principales de los quarks. Una novedad que presentan estas partículas es que además de tener carga eléctrica tal y como la tienen los electrones, los quarks tienen otro tipo de carga que determina la manera en que responden a la fuerza fuerte; a dicha carga se le conoce como el “color” del quark. El nombre nada tiene que ver con la noción cotidiana de color, simplemente es útil ya que de esta carga hay tres diferentes tipos, que llamamos rojo, verde y azul.

La partícula encargada de mediar la interacción fuerte entre los quarks es el gluón. Es decir, así como los electrones se repelen uno a otro electromagnéticamente intercambiando fotones, los quarks se atraen o repelen uno a otro intercambiando gluones. La teoría que describe estas interacciones se llama cromodinámica cuántica (o QCD, por sus siglas en inglés), y es una parte esencial del modelo estándar.

Sabemos de la experiencia cotidiana, que cuanto más lejos estén dos electrones uno del otro, más débil es la repulsión electromagnética entre ellos. Curiosamente, con los quarks sucede justo lo contrario: la fuerza entre ellos es similar a la de una “liga”, en el sentido de que cuanto más separados están, más se jalan. Dado que la magnitud de la fuerza aumenta con la separación, parece dudoso que podamos encontrar quarks aislados; y en efecto, ésto no sucede: en condiciones normales siempre los encontramos formando combinaciones cuya carga de color es neutra. Pero ¿qué significa ésto exactamente? Un objeto es eléctricamente neutro si tiene la misma cantidad de carga eléctrica positiva que negativa. En el caso de la carga de color la idea es más complicada ya que podemos obtener combinaciones neutras de dos maneras diferentes. La primera es análoga al caso electromagnético, es decir, con dos quarks del mismo color pero de “signo” contrario (rojo y “antirrojo” por ejemplo). La segunda alternativa es completamente nueva y consiste en juntar un quark de cada color (rojo, azul y verde), lo cual extrañamente resulta también en un objeto neutro (haciendo más cercana la analogía con la noción cotidiana de color). A los objetos neutros formados con tres quarks de colores distintos (como resulta ser el caso del protón o del neutrón) les llamamos bariones, mientras que a los formados con dos de colores opuestos les decimos mesones. El hecho de que los quarks en general estén atrapados dentro de combinaciones que son en conjunto neutras bajo la fuerza fuerte se conoce como el fenómeno de *confinamiento*.

La cromodinámica cuántica fue propuesta hace más de 30 años y aún presenta grandes retos para la física teórica. A pesar de que muchas de sus predicciones han sido verificadas experimentalmente, existen varios aspectos de esta teoría que aún no podemos estudiar con las herramientas usuales de la física de partículas y por tanto hay partes de ella que simplemente no comprendemos. Por ejemplo, en los párrafos

anteriores mencionamos que cuanto más separados están los quarks, más grande es la fuerza fuerte entre ellos; más allá de cierta distancia la interacción es tan intensa que nuestros cálculos se salen de control. En este régimen es muy poco lo que podemos decir y por tanto, es indispensable desarrollar nuevas herramientas que nos ayuden a entender la fuerza fuerte.

En este contexto fue que apareció por primera vez lo que hoy se conoce como la teoría de cuerdas. Veamos por qué. A diferencia de los fotones, que no tienen carga electromagnética, los gluones sí tienen carga de color y por tanto pueden interactuar entre sí. El resultado de esto es que cuando se intenta separar dos quarks (un rojo y un antirrojo, por ejemplo), entre ellos se forma algo muy similar a una liga hecha de muchos gluones. Cuanto más grande es la separación, mayor es el número de gluones que la forman y como mencionamos antes, la magnitud de la fuerza crece. A esta “liga” se le conoce como la cuerda de QCD. Durante algún tiempo se pensó que la manera correcta de explicar la fuerza fuerte era utilizando directamente estas “cuerdas” en lugar del lenguaje de QCD, basado en gluones. Sin embargo, pronto se encontraron nuevas dificultades y la idea fue desechada cuando QCD fue validada experimentalmente.

Casi 10 años después, un grupo pequeño de gente retomó muchas de estas ideas con un objetivo mucho más ambicioso en mente y formuló (al menos en su primera versión) la teoría de cuerdas. Su propuesta es que todas y cada una de las partículas elementales de nuestro universo son en realidad manifestaciones diferentes de un objeto más fundamental: un diminuto filamento de energía que podemos visualizar como una liga muy pequeña y delgada, a la que llamamos “cuerda”. Estamos acostumbrados a imaginar a cada partícula como un “puntito” en el espacio, el cual puede moverse pero, debido a su naturaleza “puntual”, no puede vibrar. Una cuerda, en cambio, además de moverse como un todo, puede vibrar de muy diversas maneras, justo como una cuerda de violín. La idea es identificar a cada partícula con un modo de vibración específico. En otras palabras, si pudiéramos ver con un microscopio muy potente cualquiera de las partículas elementales de las que hemos hablado, entonces de acuerdo con esta propuesta lo que observaríamos sería una cuerda vibrando de una manera particular. Como no tenemos todavía la posibilidad de ver distancias tan pequeñas, lo que observamos es simplemente un “puntito”.

Pero ¿qué ganamos si la teoría de cuerdas resulta ser verdadera? Primero, la posibilidad de que todo lo que observamos, incluyendo el contenido del modelo estándar, esté hecho de un solo elemento: cuerdas vibrando. Y segundo, superar una limitación importante que tiene el modelo estándar: no es capaz de darnos una descripción microscópica de la gravedad. La relatividad general, que explica a la gravedad en términos de la posibilidad que tienen el espacio y el tiempo de curvarse, nos proporciona una descripción satisfactoria desde distancias tan grandes como el universo mismo hasta escalas tan pequeñas como una milésima de milímetro. Sin embargo, por abajo de esa distancia, no estamos seguros sobre qué sucede con la fuerza de gravedad. La búsqueda de una teoría microscópica de la gravedad es uno de los problemas más importantes de la física teórica y al día de hoy, la teoría de cuerdas es uno de los candidatos más atractivos. Como explicamos antes, su propósito más ambicioso es

dar una descripción completa y unificada del universo.

Desafortunadamente, algunas de las consecuencias de esta propuesta son poco alentadoras. Por ejemplo, resulta que las cuerdas deben vivir en 9 dimensiones espaciales en lugar de las 3 que conocemos. Así que si acaso pretendemos que la teoría de cuerdas describa nuestro mundo, debemos encontrar la manera de “esconder” las seis dimensiones adicionales para explicar por qué no se han detectado todavía. Además, hasta el momento no existe evidencia experimental alguna de que la teoría de cuerdas sea la manera correcta de describir el universo, lo cual pudiera deberse en parte a que todavía no conocemos su forma completa.

A pesar de esto, durante los últimos veinte años los avances que se han logrado en la teoría de cuerdas son sorprendentes. La teoría crece y su riqueza tanto matemática como conceptual abre diversas ramas de investigación. Uno de los logros más sobresalientes es el descubrimiento de la llamada correspondencia AdS/CFT hacia finales de los 90. Esta herramienta, increíblemente, vuelve a poner a la teoría de cuerdas como una alternativa para explicar la interacción fuerte (o, siendo más cuidadosos, ciertas teorías parecidas a QCD).

La idea en términos muy generales es la siguiente. Por una parte tenemos una teoría de partículas similar a QCD que, como hemos explicado, vive en 3 dimensiones y no incluye a la fuerza de gravedad. Por otra, tenemos a la teoría de cuerdas, que entre otras cosas tiene gravedad y como dijimos vive en 9 dimensiones. Pues bien, la propuesta de la correspondencia AdS/CFT es que, contrario a las apariencias, estas dos teorías son de hecho completamente equivalentes. Tenemos entonces dos lenguajes muy distintos para describir el mismo sistema físico, y existe un diccionario que nos permite traducir de una teoría a la otra. Una de las grandes ventajas de la correspondencia AdS/CFT es que este diccionario convierte cálculos que son difíciles de realizar en las teorías tipo QCD en cuentas relativamente sencillas en la teoría de cuerdas. En particular, a través de esta herramienta podemos obtener información sobre teorías similares a QCD cuando la fuerza entre los quarks es muy grande, cosa que resulta imposible con los métodos tradicionales.

Durante mucho tiempo no hubo escenarios reales donde poner a prueba esta maquinaria, pero en años recientes parecíamos haber encontrado tal arena. En 2005 el acelerador de partículas conocido como RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) fue capaz de producir por primera vez un nuevo estado de la materia, donde los quarks y los gluones no están atrapados adentro de combinaciones neutras de color, como explicamos anteriormente, sino que están sueltos y forman una especie de sopa caliente que llamamos el plasma de quarks y gluones (o QGP, por sus siglas en inglés). Estudiar esta sopa es importante porque representa el estado de la materia cerca del instante inicial en el que se creó nuestro universo (conocido como el big bang), de modo que cualquier información que obtengamos a partir de su estudio nos ayudará a entender un poco más de dónde venimos. Además, como hemos enfatizado a lo largo del texto, todavía existen muchos aspectos de la fuerza fuerte que no comprendemos y un escenario experimental como éste nos puede proporcionar información que nos ayude y oriente en dicha búsqueda.

Los experimentos parecen indicar que a pesar de que los quarks y los gluones en el QGP están sueltos, siguen interactuando fuertemente entre sí. Como explicamos anteriormente, poco se sabe sobre lo que sucede en este régimen, las herramientas usuales no funcionan para estudiar el plasma y se nos presenta una oportunidad aparentemente inmejorable para utilizar la correspondencia AdS/CFT.

En este trabajo estamos interesados en estudiar la manera en que las partículas que atraviesan el plasma de quarks y gluones pierden energía. Atacar este problema es importante debido a que entendiendo dicho proceso podemos obtener información sobre las características del plasma y más aún, comenzar a entender qué sucede con los quarks y los gluones cuando interactúan fuertemente. Otra motivación es la posibilidad de hacer contacto con resultados experimentales y así conseguir, aunque sea de manera indirecta, evidencia de que la teoría de cuerdas sirve para describir el mundo real. Como mencionamos anteriormente, la falta de evidencia experimental a su favor es hasta ahora una deficiencia importante de dicha teoría.

Para poder ayudar al lector a entender los cálculos que hemos realizado en esta tesis, así como a contextualizar algunos de los resultados, será conveniente primero presentar un resumen de los conceptos más importantes que estaremos utilizando. En la Sección 1.1 revisaremos (ya a un nivel más técnico) las ideas generales de la cromodinámica cuántica y explicaremos como se produce el plasma de quarks y gluones en RHIC. Veremos cuáles son las limitaciones de las herramientas tradicionales que utilizamos para estudiar QCD y repasaremos las características más importantes del QGP. La correspondencia AdS/CFT es la maquinaria que utilizaremos para estudiar el plasma, y como ya hemos mencionado ésta proviene de la teoría de cuerdas. Con esto en mente, en la Sección 1.2 haremos una revisión más cuidadosa de los conceptos principales de dicha teoría. En la Sección 1.3 daremos una deducción heurística de la correspondencia AdS/CFT y revisaremos el diccionario que nos ofrece, enfatizando los puntos más relevantes para este trabajo. Finalmente, en la Sección 1.4 presentaremos un panorama general de lo que se ha hecho hasta ahora utilizando estas herramientas para estudiar el QGP y explicaremos brevemente lo que haremos nosotros en este trabajo.

## 1.1. QCD y el plasma de quarks y gluones

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría que describe las interacciones fuertes, es una teoría de norma no abeliana con grupo de norma  $SU(3)$ . QCD es una generalización directa de la electrodinámica cuántica (QED), con grupo de norma  $U(1)$ , al caso no abeliano, pero físicamente es mucho más compleja e interesante.

La fuerza fuerte describe las interacciones entre los quarks y los gluones. Existen 6 diferentes tipos de quarks: arriba, abajo, encanto, extraño, cima y fondo. A esta etiqueta se le conoce como el “sabor” del quark. Una novedad que presentan estas partículas es que además de tener carga eléctrica tal y como la tienen los electrones, los quarks tienen otro tipo de carga que determina la manera en que responden a la

fuerza fuerte; a dicha carga se le conoce como el “color” del quark y hay tres diferentes tipos: rojo, verde y azul. Cómo es que se pueden mezclar estos colores está descrito por el grupo de norma. Los quarks transforman en la representación fundamental de  $SU(3)$ .

La partícula mediadora de la fuerza fuerte se llama gluón, es un bosón de norma sin masa, espín 1 y transforma en la representación adjunta de  $SU(3)$ . A diferencia del fotón, que no tiene carga electromagnética, el gluón sí tiene carga de color y por tanto puede autointeractuar. La magnitud de la interacción aumenta a medida que la separación entre las fuentes crece; en particular, esto implica que es difícil encontrar quarks aislados. La forma en que se agrupan los quarks está determinada por su carga de color y en condiciones normales siempre los encontramos formando estructuras cuya carga de color es neutra. Hay dos combinaciones que logran este objetivo. La primera es con un quark y un antiquark con colores opuestos (rojo y antirrojo por ejemplo), y la segunda con tres quarks, uno de cada color. A los objetos neutros formados con tres quarks les llamamos bariones (como el protón o el neutrón), mientras que a los formados por un quark y un antiquark les decimos mesones. El hecho de que los quarks en general estén atrapados dentro de combinaciones que son en conjunto neutras bajo la fuerza fuerte se conoce como el fenómeno de *confinamiento*.

En la cromodinámica cuántica la intensidad de las interacciones está regulada por la constante de acoplamiento  $\alpha_{\text{QCD}} = g_{\text{QCD}}^2/4\pi$ , que es el análogo a la constante  $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$  de QED. Es natural preguntarse bajo qué condiciones  $\alpha_{\text{QCD}} \ll 1$  y por tanto es válido un tratamiento perturbativo. Como es sabido, en una teoría cuántica de campo genérica la constante de acoplamiento corre con la energía. Con base en el análisis de los diagramas a un lazo y utilizando el hecho de que QCD es renormalizable uno obtiene el siguiente resultado para la constante de acoplamiento:

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q) = \frac{\alpha_{\text{QCD}}(Q_0)}{1 + \frac{\alpha_{\text{QCD}}(Q_0)}{2\pi} \beta_0 \log \frac{Q}{Q_0}}, \quad (1.1)$$

donde tanto  $Q$  como  $Q_0$  son escalas de momento; éste último corresponde a una escala en la que  $\alpha_{\text{QCD}}(Q_0)$  es muy chica y las correcciones de orden superior son despreciables. La constante  $\beta_0$  está dada por  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ , con  $n_f$  el número de sabores que participan en un diagrama dado.

Para  $Q > 1\text{GeV}$ ,  $\alpha_{\text{QCD}}$  es chica y el análisis perturbativo es válido, por el contrario si  $Q < 1\text{GeV}$  entonces la teoría está fuertemente acoplada. La consecuencia más espectacular de la expresión (1.1) es que  $\alpha_{\text{QCD}}$  es cero cuando  $Q \rightarrow \infty$ , característica que se conoce como libertad asintótica.

El valor de  $Q_0$  depende del esquema de renormalización que se esté utilizando, por lo que resulta conveniente reescribir la fórmula (1.1) para que no dependa de dicho valor. Para ello se define una escala de momento  $\Lambda_{\text{QCD}}$  que representa la línea divisora entre el régimen fuertemente acoplado y aquél en el que el análisis perturbativo es válido, a través de

$$g_{\text{QCD}}^2 \frac{\beta_0}{8\pi^2} \log\left(\frac{Q_0}{\Lambda}\right) = 1. \quad (1.2)$$

Utilizando (1.2), la ecuación (1.1) se puede reescribir como

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q) = \frac{2\pi}{\beta_0 \log\left(\frac{Q}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)}. \quad (1.3)$$

Fijando una escala de momento (por ejemplo utilizando la masa del bosón  $Z$  [11]) para obtener el valor experimental de  $\alpha_{\text{QCD}} \simeq 0.2$ , se puede calcular el valor aproximado de  $\Lambda_{\text{QCD}}$  y éste resulta ser

$$\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 - 300 \text{ MeV}. \quad (1.4)$$

Ésta es entonces la escala característica de la interacción fuerte.

Hemos visto que la intensidad de la interacción entre los quarks y los gluones depende de la escala energética. Mencionamos también que para energías chicas (o distancias grandes) los quarks están fuertemente acoplados y se agrupan para formar objetos neutros de color que llamamos hadrones. Si calentamos lo suficiente el sistema, parece natural pensar que podemos alcanzar una temperatura a partir de la cual los quarks y los gluones ya no estén confinados formando materia hadrónica. Cálculos de QCD en la red confirman que esta transición sucede a una temperatura  $T_c \sim 150 - 200$  MeV [12]. Lo que no es para nada obvio es si existe un intervalo de temperaturas en el cual podamos ver a estas partículas desconfiadas pero todavía interactuando fuertemente. Hoy sabemos que este estado de la materia existe y es justamente el plasma de quarks y gluones sobre el que hablaremos un poco más adelante.

Si el objetivo es estudiar un sistema desconfinado y fuertemente acoplado, no podemos olvidar las limitaciones que tenemos utilizando la cromodinámica cuántica, por las cuales resulta sumamente importante encontrar teorías que sean similares a QCD pero más accesibles a nuestras herramientas de estudio. Una manera de lograr ésto es simplificar mucho la realidad y trabajar con modelos de “juguete” que nos permitan obtener información útil sobre la teoría que nos interesa estudiar.

Por razones que quedarán claras en las siguientes secciones de esta introducción, la “prima” de QCD que nos interesa revisar es una teoría de norma que se conoce como súper-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$ .

Ésta es una teoría de campo máximamente supersimétrica con un campo de norma  $A_\mu$ , seis campos escalares  $\Phi^I$ ,  $I = 1, 2, \dots, 6$  y cuatro espinores de Weyl  $\chi_i$ , todos transformando en la representación adjunta del grupo de norma  $SU(N)$ . En esta teoría no hay campos que transformen en la representación fundamental y por tanto, si uno quiere estudiar quarks es necesario ponerlos a mano como fuentes externas del campo de norma.  $\mathcal{N} = 4$  es tanta supersimetría que la constante de acoplamiento de hecho no corre con la energía, y la teoría resulta entonces ser invariante bajo reescalamientos aún a nivel cuántico. Su grupo de simetría espaciotemporal es el grupo conforme  $SO(4, 2)$ . Por supuesto ésto la hace muy distinta a QCD; en particular en SYM  $\mathcal{N} = 4$  no hay confinamiento ni libertad asintótica.

Un punto importante es que si consideramos esta misma teoría de norma pero a temperatura finita (en particular  $T > T_c$ ), algunas de sus características cambian

radicalmente. Veamos qué tanto se parece ahora a QCD. Primero, la presencia de una escala energética asociada a la temperatura rompe la invariancia conforme y también la supersimetría. Segundo, esta teoría de norma presenta apantallamiento en el potencial quark-antiquark y en ambas teorías la densidad de energía  $\varepsilon$  es proporcional a  $T^4$ . Y tercero, SYM no confina pero para  $T > T_c$  QCD también está desconfina. Tenemos entonces una teoría que cuando  $T > T_c$ , reproduce algunas de las características de la cromodinámica cuántica y por tanto podemos usarla, por ejemplo, para estudiar aspectos que no entendemos de la interacción fuerte a temperatura finita.

En 2005 el acelerador de partículas conocido como RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) fue capaz de producir por primera vez el llamado plasma de quarks y gluones. En lo que resta de la sección explicaremos algunas de sus características y veremos por qué es que se presenta como un escenario ideal para poner a prueba la utilidad de la correspondencia AdS/CFT.

Para formar el plasma de quarks y gluones colisionan núcleos de oro a velocidades relativistas. A la zona de impacto llegan aproximadamente 400 nucleones con una energía del orden de 100 GeV por nucleón; con la colisión se producen más de 5000 partículas. La etapa que nos interesa estudiar es el instante posterior a la colisión en el cual la materia aún no hadroniza, este periodo dura aproximadamente  $10^{-22}$ s (10 fm/c). A pesar de su corta duración, mediciones de la rapidez media de los hadrones indican que el sistema está en equilibrio térmico a una temperatura de  $\sim 200$  MeV ( $T \sim 10^{12}$ K) [12] y que por tanto algunas de sus propiedades pueden ser explicadas en términos de conceptos termodinámicos.

En un principio se pensaba que este plasma tendría las propiedades de un gas, con quarks y gluones moviéndose casi libremente. Sin embargo, observaciones experimentales parecen indicar que en realidad se comporta como un fluido casi perfecto. La evidencia más importante en esta dirección es la estimación experimental de lo que se conoce como la viscosidad de corte  $\eta$ . Esta cantidad mide la difusión de momento  $p_i$  a lo largo de la dirección ortogonal  $j$ . El comportamiento hidrodinámico se puede caracterizar por la razón entre la viscosidad de corte  $\eta$  y la densidad de entropía  $s$ , que resulta ser una medida de la viscosidad por grado de libertad [17]. Un punto que vale la pena aclarar es que para sistemas que interactúan débilmente (como por ejemplo un gas) esta razón es grande, mientras que en el régimen opuesto, es decir, cuando el sistema está fuertemente acoplado (como un líquido), se espera que sea pequeña. Los resultados experimentales de RHIC indican que el plasma de quarks y gluones tiene una razón  $\eta/s$  muy chica [13].

Resumiendo, este sistema es un medio térmico en el que los quarks y los gluones están desconfinados pero interactuando fuertemente, en cuyo caso las herramientas usuales de QCD son de poca ayuda para estudiarlo. La búsqueda de nuevas herramientas que nos permitan obtener información sobre teorías de norma a temperatura finita fuertemente acopladas parece muy necesaria. En las siguientes secciones estudiaremos uno de los posibles caminos para atacar este problema.



## 1.2. Cuerdas y D-branas

El movimiento de una cuerda en el espacio-tiempo traza una superficie bidimensional que llamamos hoja de mundo. Nos interesa tener una descripción de la trayectoria que sea covariante de Lorentz, por lo que resulta conveniente parametrizarla. Si denotamos  $\sigma$  y  $\tau$  a los parámetros de dicha parametrización, entonces la trayectoria que dibuja la cuerda está descrita por el conjunto de funciones  $X^\mu \equiv X^\mu(\sigma, \tau)$ , donde  $\mu = 0, \dots, d-1$  es un índice espacio-temporal. La dinámica de la cuerda está descrita por la acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \mathcal{L}_{NG}, \quad (1.5)$$

donde  $g_{ab} \equiv G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$  es la métrica inducida en la hoja de mundo y  $G_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio tiempo. El coeficiente de la acción es la tensión de la cuerda y  $\alpha'$  se conoce como la pendiente de Regge, relacionada con la longitud de cuerdas  $l_s$  a través de  $\sqrt{\alpha'} = l_s$ .

Esta acción es invariante bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo de la cuerda y también en el espacio-tiempo. La expresión (1.5) es no polinomial, por lo que las ecuaciones de movimiento que se derivan de ella son bastante complicadas. Afortunadamente hay una manera equivalente (a nivel clásico) de describir la dinámica de la cuerda con un expresión más sencilla, utilizando la acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} h^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, \quad (1.6)$$

donde  $h_{ab}$  es una métrica intrínseca en la hoja de mundo y los demás elementos son los mismos que describimos en la acción de Nambu-Goto. La acción (1.6) también es invariante bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo y en el espacio-tiempo, pero además bajo transformaciones de Weyl, es decir, bajo reescalamientos locales

$$X'^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau) \quad \text{y} \quad h'_{ab}(\sigma, \tau) = \Omega(\sigma, \tau) h_{ab}(\sigma, \tau). \quad (1.7)$$

Una manera de ver que las acciones (1.5) y (1.6) son equivalentes es a partir de la ecuación de movimiento para la métrica intrínseca  $h_{ab}$ ,

$$g_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} g_{cd} = 0. \quad (1.8)$$

Es fácil checar que  $h_{ab}(\sigma, \tau) = \lambda(\sigma, \tau) g_{ab}(\sigma, \tau)$  con  $\lambda(\sigma, \tau)$  una función arbitraria, es solución de (1.8). Sustituyendo esta expresión en la acción de Polyakov lo que obtenemos es

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}} h^{ab} g_{ab} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \sqrt{\lambda^2 \lambda^{-1}} g^{ab} g_{ab} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} = S_{NG} \end{aligned} \quad (1.9)$$

lo que demuestra la equivalencia entre las dos acciones.

En el caso puramente bosónico, desde la perspectiva de la hoja de mundo lo que tenemos es una teoría de campo en  $1 + 1$ -dimensiones con  $D$  campos escalares. La inclusión de variables fermiónicas modifica radicalmente esa estructura y lo que se obtiene es una teoría de campo  $(1 + 1)$  dimensional supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$  con  $D$  supercampos, cada uno formado por una coordenada bosónica  $X^\mu$  y dos coordenadas fermiónicas  $\psi^\mu$  y  $\bar{\psi}^\mu$  [10]. La cuantización de estos supercampos con sus respectivas condiciones de frontera nos da como resultado una torre infinita de estados, cada uno de los cuales representa un modo de vibración de la cuerda y corresponde a un tipo específico de partícula. Un número finito de ellos corresponde a los estados no masivos. Entre ellos figura siempre un modo con espín 2 y con las interacciones apropiadas para describir a un gravitón.

Un resultado importante es que los estados masivos del espectro tienen una masa del orden del inverso de la longitud de cuerdas [9]. En vista de la conexión entre cuerdas y gravedad, esperamos que  $l_s$  sea del orden de la longitud de Planck. Bajo la suposición tradicional de que esta longitud es del orden de  $10^{-33}$ cm, los modos masivos estarían entonces lejos del alcance de los aceleradores que tenemos hoy en día, y por tanto, la información más relevante de la teoría la encontraremos en los estados no masivos.

Hasta mediados de los 90, se habían encontrado 5 teorías de cuerdas diferentes con características muy particulares; sin embargo, según se descubrió posteriormente, todas ellas forman en realidad parte de una sola estructura, provisionalmente conocida como teoría M. En este escrito trabajaremos únicamente con las teorías de cuerdas tipo II, por lo que resulta conveniente que revisemos algunas de sus características.

A nivel de la hoja de mundo tenemos diez campos escalares  $X^\mu$  y veinte espinores de Majorana-Weyl, diez con quiralidad derecha  $\psi^\mu$  y diez con quiralidad izquierda  $\bar{\psi}^\mu$  [9]. Estas teorías solo tienen cuerdas cerradas así que la componente espacial de la hoja de mundo es un círculo. Los campos escalares satisfacen condiciones de frontera periódicas en dicha coordenada y los espinores tienen la opción de satisfacer condiciones periódicas o antiperiódicas, es decir,

$$\begin{aligned}\psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) &= \psi^\mu(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{o} \\ \psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) &= -\psi^\mu(\sigma, \tau) \quad \forall \mu.\end{aligned}$$

El primer caso se conoce como condición de frontera tipo Ramond (R) y el segundo como Neveu-Schwarz (NS). Las mismas dos opciones existen para  $\bar{\psi}^\mu$ . Para tener una teoría de supercuerdas consistente, necesitamos considerar ambas condiciones de frontera al momento de la cuantización. Ésto tiene como consecuencia que obtenemos cuatro sectores (NS-NS, R-R, NS-R, R-NS) que describen los diferentes estados de la cuerda.

Los estados correspondientes a los sectores NS-NS y R-R resultan ser bosónicos en el espacio-tiempo, mientras que los correspondientes a los sectores NS-R y R-NS son fermiónicos. El espectro no masivo en el sector NS-NS es el mismo en las dos teorías de cuerdas tipo II y está formado por el gravitón  $G_{\mu\nu}$ , un campo escalar conocido

como el dilatón  $\phi$  y un tensor antisimétrico de rango dos  $B_{\mu\nu}$  denominado campo de Kalb-Ramond. El sector RR en la teoría tipo IIA incluye el campo de Maxwell  $A_\mu$  y un tensor antisimétrico de rango tres, mientras que para el caso IIB tenemos un campo escalar  $\chi$ , un segundo tensor antisimétrico de rango dos  $B'_{\mu\nu}$  y un tensor totalmente antisimétrico de rango cuatro  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Nosotros trabajaremos únicamente con la parte bosónica de la teoría, así que no será necesario describir el sector fermiónico.

Dado que solo estamos considerando una parte del espectro, es imposible que capturemos toda la dinámica de la teoría. La opción que tenemos es trabajar con una acción efectiva. La idea es construir una acción clásica para los campos no masivos que reproduzca la información de la matriz  $S$  de la teoría de cuerdas [3]. Dicha acción (en el llamado marco de Einstein) para la teoría tipo IIB tiene la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{g} [R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\phi}H_3^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}F_1^2 - \frac{1}{2}e^\phi F_3^2 - \frac{1}{4}F_5^2] - \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (1.10)$$

donde  $H_3$  y  $F_3$  son las intensidades de campo asociadas a los campos de norma generalizados  $B_{\mu\nu}$  y  $B'_{\mu\nu}$ ,  $F_1$  es la “intensidad de campo” asociada al campo escalar  $\chi$  y  $F_5$  es la intensidad de campo asociada a la cuatro forma  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Además,  $g_s$  es la constante de acoplamiento de cuerdas. Esta constante no es un parámetro libre de la teoría, sino que se relaciona con el campo del dilatón de la siguiente manera:

$$g_s = \exp(\langle\phi\rangle). \quad (1.11)$$

La forma de la acción para la teoría tipo IIA es muy similar.

La expresión (1.10) define una teoría de campo que se conoce como supergravedad IIB en 10 dimensiones, y corresponde al límite de bajas energías ( $E \ll 1/l_s$ ) de la teoría de cuerdas tipo IIB. La acción efectiva completa incluye correcciones con derivadas de orden superior que por análisis dimensional necesariamente aparecen junto con potencias de  $\alpha'$  y por tanto se vuelven despreciables siempre y cuando la escala de variación espaciotemporal de los campos sea mucho mayor que  $l_s$ .

En los últimos años se han logrado grandes avances en el estudio de los aspectos no perturbativos de la teoría de supercuerdas. Gracias a estos trabajos ahora sabemos que en realidad las cuerdas no son la pieza fundamental de la teoría, sino que existe un gran zoológico de objetos extendidos igualmente importantes que se conocen como *branas* (una generalización de la palabra membrana). Una clase particular de ellos son las llamadas D-branas.

Las D-branas son hiperplanos donde las cuerdas abiertas deben terminar [5]. Son objetos dinámicos con masa y cargados bajo los campos Ramond-Ramond [2].

Una  $Dp$ -brana traza un “volumen de mundo”  $(p+1)$  dimensional; con esto en mente, podemos dividir el conjunto de coordenadas en dos grupos. El primero, formado por las coordenadas tangentes a su volumen de mundo, es decir, el tiempo y  $p$  coordenadas espaciales. El segundo formado por las restantes  $(9-p)$  coordenadas

normales a éste. Las puntas de las cuerdas abiertas terminan en la D-brana, por lo que a lo largo de las coordenadas normales a ésta deben satisfacer condiciones de frontera de Dirichlet (de ahí su nombre). Por otro lado, las puntas se pueden mover sobre la brana, así que a lo largo de las coordenadas tangentes a ésta deben satisfacer condiciones de frontera de Neumann.

Es importante mencionar que las cuerdas abiertas las podemos entender como objetos auxiliares que describen la dinámica de la D-brana sobre la cual terminan. Una vez establecido el tipo de condiciones de frontera que satisfacen las coordenadas de la cuerda, se puede realizar la cuantización de la misma. La importancia del análisis de dicha cuantización radica en que a partir del espectro de la cuerda abierta, podemos entender las excitaciones de la D-brana.

Realizando dicho análisis, uno encuentra que de los modos no masivos del espectro se desprende un resultado fundamental: cada  $D_p$ -brana tiene un campo de norma  $y$ , por cada coordenada normal, un campo escalar viviendo en su volumen de mundo [1]. Los campos escalares son interpretados físicamente como desplazamientos de la brana en la dirección normal asociada a dicho campo.

Hasta ahora solo hemos considerado el caso de una D-brana aislada. Resulta también conveniente estudiar qué sucede con un sistema de D-branas paralelas, cuyas excitaciones se describen nuevamente a través de cuerdas abiertas extendiéndose entre ellas. Para un sistema con dos D-branas paralelas, llamémosles 1 y 2, existen 4 clases de cuerdas abiertas: las que tienen ambos extremos en 1, ambos extremos en 2, un extremo en 1 y el otro en 2 y, como las cuerdas son orientadas, están además las que van de 2 a 1. El sistema de dos D-branas paralelas tiene entonces 4 sectores distintos de excitaciones y la manera usual de denotarlos es  $[11]$ ,  $[22]$ ,  $[12]$  y  $[21]$ , respectivamente.

Supongamos ahora que tenemos un sistema con  $N$  D-branas paralelas y coincidentes. Los distintos sectores de cuerdas abiertas pueden ahora etiquetarse con  $[ij]$  donde  $i$  y  $j$  son enteros que corren de 1 hasta  $N$ . El sector  $[ij]$  corresponde a una cuerda que empieza en la D-brana  $i$  y termina en la D-brana  $j$ . En total hay  $N^2$  sectores. Utilizando este lenguaje, el resultado de que cada D-brana tiene un campo de norma viviendo en su volumen de mundo se generaliza y ahora hay un campo de norma por cada sector. Este sistema tiene entonces  $N^2$  campos de norma que interactúan y en el límite de bajas energías definen una teoría de Yang-Mills con grupo de norma  $U(N)$  [1]. Para nuestros propósitos, resulta conveniente reescribir los  $N^2$  campos de norma como una matriz  $A_{ab}^\alpha$  de  $N \times N$  con  $a, b = 1 \dots N$ , y separar el grupo  $U(N)$  como

$$U(N) = SU(N) \times U(1) \tag{1.12}$$

donde el factor  $U(1)$  codifica los grados de libertad asociados al centro de masa del conjunto de  $N$  D-branas, mientras que  $SU(N)$  describe sus excitaciones relativas. Este último será el grupo de norma relevante con el que estaremos trabajando en los siguientes capítulos.

Como mencionamos anteriormente, las  $D_p$ -branas son objetos extendidos en  $p$  dimensiones espaciales y parte de su dinámica puede ser descrita con la acción que generaliza a la de la partícula relativista (de manera análoga a como sucede con la

cuerda)

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}, \quad (1.13)$$

donde  $T_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}$  es la tensión de la brana y  $g_{\mu\nu}$  es la métrica inducida sobre su volumen de mundo, es decir,

$$g_{\mu\nu} = G_{mn} \partial_\mu X^m \partial_\nu X^n, \quad (1.14)$$

donde los índices griegos corren de 0 a  $p$ , mientras que los índices latinos van de 0 a  $d - 1$ .

Esta acción únicamente describe cómo se mueve la D-brana, pero no nos dice nada sobre el campo de norma o cómo interactúa ésta con campos de fondo distintos a la métrica. Para resumir esta información nuevamente podemos construir una acción efectiva.

En el límite de bajas energías y cuando la variación espaciotemporal de los campos es pequeña, la dinámica de una D-brana resulta estar descrita por la acción de Dirac-Born-Infeld. Ésta es una teoría de norma  $U(1)$  en  $p + 1$  dimensiones con  $9 - p$  campos escalares que representan las fluctuaciones de la brana en las direcciones transversales. La forma de dicha acción es la siguiente:

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})} \quad (1.15)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.16)$$

$B_{\mu\nu}$  es el campo de Kalb-Ramond que aparece en el sector NS-NS del espectro de la cuerda cerrada y  $\phi$  es el campo del dilatón.

En este trabajo consideraremos únicamente el caso en que el campo del dilatón es constante y el campo de fondo  $B_{\mu\nu}$  está apagado. Bajo estas condiciones la acción que obtenemos es

$$S = -\frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}, \quad (1.17)$$

donde hemos utilizado que  $e^{-\phi} = g_s^{-1}$ . Vale la pena mencionar que si la métrica inducida es Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , entonces (1.17) se puede desarrollar en potencias de  $2\pi\alpha' F_{\mu\nu}$ , es decir,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})} \\ &\simeq -\frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \int d^{p+1}\xi \left( 1 + \frac{(2\pi\alpha')^2}{4} F^2 + (2\pi\alpha')^4 F^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

que al orden más bajo corresponde al lagrangiano del electromagnetismo. Para  $N$  D-branas paralelas, la acción (1.15) se generaliza a una versión no abeliana que estudiaremos en el Capítulo 3, cuyo límite de bajas intensidades de campo, análogo a (1.18), es la acción de Yang-Mills que mencionamos anteriormente.

La acción (1.17) es invariante bajo reparametrizaciones del volumen de mundo. La forma habitual para fijar esta libertad es escoger la denominada norma estática, que consiste en identificar las coordenadas del volumen de mundo con las primeras  $(p + 1)$  coordenadas del espacio tiempo,

$$x^\mu = \xi^\mu \quad \text{con} \quad \mu = 0, 1, \dots, p. \quad (1.19)$$

A las restantes  $(d - (p + 1))$  coordenadas, las denominamos coordenadas transversales,

$$x^m = y^m \quad \text{con} \quad m = p + 1, \dots, d - 1. \quad (1.20)$$

Dado que las D-branas tienen masa, esperamos que un número considerable de ellas deforme el espacio-tiempo de manera apreciable. A bajas energías ésto se debería poder entender a partir de la acción de supergravedad; y efectivamente, las D-branas tienen esa descripción alternativa como soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento en supergravedad [2]. Estas soluciones resultan ser generalizaciones extendidas de agujeros negros, que llamamos branas negras. Justo como las D-branas, están cargadas bajo el campo Ramond-Ramond con  $p + 1$  índices.

Antes de continuar, conviene recordar que en relatividad general, para poder encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein necesitamos imponer condiciones de simetría sobre el espacio tiempo. Por ejemplo, en 4 dimensiones espacio temporales, si exigimos simetría esférica y estaticidad lo que obtenemos es la métrica de Schwarzschild [4]. Si acoplamos la gravedad con un campo de norma  $U(1)$  la métrica resultante es Reissner-Nordström.

En el contexto de la teoría de cuerdas, nuestro punto de partida es la acción (1.10) de supergravedad tipo IIB, y de manera análoga, podemos imponer condiciones de simetría sobre el espacio-tiempo y buscar una solución a las ecuaciones de movimiento.

Resulta conveniente trabajar en el llamado marco de cuerdas por lo que la acción (1.10) queda reescrita de la siguiente manera:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left( e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{2}{(8-p)!} F_{p+2}^2 \right) \quad (1.21)$$

Si suponemos simetría traslacional y rotacional en  $p$  dimensiones espaciales, la métrica más general en diez dimensiones espacio-temporales tiene la siguiente forma [6]

$$ds^2 = e^A d\hat{s}^2 + e^B dx_i dx^i \quad (1.22)$$

donde  $d\hat{s}^2$  es una métrica lorentziana en  $10 - p$  dimensiones espacio-temporales y  $x_i$  son las  $p$  coordenadas cartesianas. En [6], mostraron que sustituyendo la métrica (1.22) en la acción (1.21), el problema se reduce a encontrar una solución a las ecuaciones de movimiento pero ahora en  $10 - p$  dimensiones espacio-temporales.

La familia de soluciones que satisface las condiciones antes mencionadas tiene como métrica [16]

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} + r^2 f_-(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2, \quad (1.23)$$

mientras que el dilatón y la  $p+1$ -forma están dados por

$$e^{-2\phi} = g_s^{-2} f_-(\rho)^{-\frac{p-3}{2}} \quad \text{y} \quad C_{01\dots p} = g_s^{-1} (1 - f_-(\rho)^{-1}) \quad (1.24)$$

donde

$$f_{\pm}(\rho) = 1 - \left( \frac{r_{\pm}}{\rho} \right)^{7-p}. \quad (1.25)$$

Los parámetros  $r_+$  y  $r_-$  se pueden relacionar con la masa  $M$  (por unidad de volumen) y la carga Ramond-Ramond  $N$  de la solución a través de las siguientes fórmulas:

$$M = \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 d_p l_p^8} ((8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p}), \quad (1.26)$$

$$N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} (r_+ r_-)^{\frac{7-p}{2}}, \quad (1.27)$$

donde  $l_p = g_s^{\frac{1}{4}} l_s$  es la longitud de Planck en 10 dimensiones y  $d_p$  es un factor numérico,

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (1.28)$$

Es importante notar que esta familia de soluciones no representa una brana negra cargada para todo valor de los parámetros  $r_+$  y  $r_-$ . En [6, 16] encontraron que para  $p \leq 6$  la métrica tiene una singularidad en  $\rho = r_-$  y un horizonte en  $\rho = r_+$ . Por tanto, únicamente cuando  $r_+ \geq r_-$  la solución corresponde a una brana negra cargada.

A partir de las ecuaciones (1.26) y (1.27) y utilizando la condición de que  $r_+ \geq r_-$  podemos ver que la relación que existe entre la carga y la masa de la brana negra es

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^3 g_s l_s^{p+1}}. \quad (1.29)$$

Ésto se conoce como la cota BPS, y se puede deducir también a partir del álgebra de supersimetría. Cuando  $r_+ = r_-$ , que a partir de ahora llamaremos caso extremal, se cumple la igualdad y lo que obtenemos es una configuración BPS [16], que resulta preservar la mitad de las 32 supersimetrías de la teoría IIB.

Para ver la forma que toma la métrica en este caso, es conveniente definir una nueva coordenada  $r$  que coloca el horizonte en el origen,

$$r^{7-p} \equiv \rho^{7-p} - r_+^{7-p} \quad (1.30)$$

e introducir una coordenada  $r^a = r\theta^a$  donde  $a = 1, \dots, 9 - p$  y  $\sum_a (\theta^a)^2 = 1$ .

Con esta modificación la métrica resultante es:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left( -dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} \sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a, \quad (1.31)$$

mientras que el dilatón y la  $(p + 1)$ -forma son

$$e^\phi = g_s H(r)^{\frac{3-p}{4}} \quad \text{y} \quad C_{012\dots p} = g_s^{-1} (1 - H(r)^{-1}) \quad (1.32)$$

donde

$$H(r) = 1 + \frac{r_+^{7-p}}{r^{7-p}} \quad \text{y} \quad r_+^{7-p} = d_p g_s N l_s^{7-p}$$

En la siguiente sección exploraremos con cierto detalle estas ideas y veremos algunas de las consecuencias más importantes.

Desde luego la estructura de la teoría de cuerdas es mucho más rica de lo que hemos presentado en este breve resumen, pero como mencionamos anteriormente, la intención es simplemente familiarizar al lector con varios de los conceptos que estaremos utilizando a lo largo de este trabajo.

Algunos años después del descubrimiento de las D-branas, en 1997 para ser precisos, Juan Maldacena presentó lo que quizás sea al día de hoy la mayor aportación de la teoría de cuerdas a la física teórica: la correspondencia AdS/CFT. En la siguiente sección, explicaremos en qué consiste y presentaremos una deducción heurística de la misma.

### 1.3. La correspondencia AdS/CFT

Un objetivo muy importante que ha tenido la teoría de cuerdas en los últimos años, es el de encontrar una descripción satisfactoria para las teorías de norma fuertemente acopladas. Quizás el ejemplo más conocido sea QCD. Como explicamos en la Sección 1.1, esta teoría es asintóticamente libre, es decir, la constante de acoplamiento decrece a medida que la energía aumenta. En el régimen de bajas energías en el que la teoría está fuertemente acoplada no podemos utilizar los métodos perturbativos usuales.

Actualmente existen dos caminos a través de los cuales se está atacando este problema. El primero se conoce como QCD en la red, y en términos muy generales la idea es calcular de manera aproximada la integral funcional para QCD reduciendo drásticamente los grados de libertad de los campos. Para lograr ésto, se reemplaza el espacio-tiempo por una malla discreta de puntos y una vez discretizado el espacio, se resuelven las ecuaciones utilizando métodos computacionales muy poderosos. Una limitación importante que tiene esta propuesta es que utiliza (por construcción) un espacio-tiempo euclidiano, por lo que resulta muy difícil calcular propiedades dinámicas del sistema.



El segundo camino se llama la correspondencia AdS/CFT o dualidad de Maldacena y es el que seguiremos nosotros en este trabajo.

Mencionamos en la sección anterior que, hasta mediados de los 90, se habían encontrado 5 teorías de cuerdas diferentes con características muy particulares; sin embargo, según se descubrió posteriormente, todas ellas forman en realidad parte de una sola estructura. Para poder llegar a este resultado, la herramienta principal fue el concepto de “dualidad”, el cual no es exclusivo de la teoría de cuerdas, pero sí es uno de sus rasgos característicos. Una dualidad consiste en tener dos formas aparentemente distintas, pero en el fondo completamente equivalentes, para describir un mismo sistema físico. Existen varios tipos de dualidades, pero nosotros solo estudiaremos uno en particular, la llamada dualidad de Maldacena.

La idea en términos muy generales es la siguiente. Por una parte tenemos una teoría de norma que vive en cierto número de dimensiones espacio-temporales y no incluye a la gravedad. Por otra, tenemos a la teoría de cuerdas, que entre otras cosas tiene gravedad y como dijimos vive en 10 dimensiones. Pues bien, la propuesta de la correspondencia AdS/CFT es que, contrario a las apariencias, estas dos teorías son completamente equivalentes y el lenguaje que utilizamos para describir la física es lo que cambia. Hoy en día conocemos varios ejemplos de esta dualidad. A pesar de que se ha reunido mucha evidencia que la apoya, aún no ha podido ser demostrada rigurosamente, por lo que en el sentido estricto es todavía una conjetura. A continuación, haremos una deducción heurística de la misma en el ejemplo mejor entendido.

Nuestro punto de partida es la teoría de cuerdas tipo IIB sobre un espacio de Minkowski, en el cual colocamos una pila de  $N$  D3-branas paralelas. Las excitaciones de este sistema se describen a través de cuerdas cerradas que se mueven sobre el fondo plano y cuerdas abiertas que empiezan y terminan en las diferentes D3-branas. Si consideramos el límite de bajas energías, es decir,  $E \ll \frac{1}{l_s}$  (o de manera equivalente,  $l_s \rightarrow 0$  con  $E$  fija), únicamente tenemos los modos no masivos del espectro de las cuerdas y podemos escribir una acción efectiva para ellos. La forma esquemática de dicha acción es la siguiente:

$$S = S_{sugra} + S_{brana} + S_{int}. \quad (1.33)$$

El primer término corresponde a los modos no masivos de las cuerdas cerradas, descritas por la acción de supergravedad tipo IIB (1.10). El segundo, representa las excitaciones de las D-branas descritas por la teoría Super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones que describimos en la Sección 1.1 y correcciones de orden superior en las derivadas. El tercer término describe las interacciones entre cuerdas abiertas y cerradas.

Para entender realmente cómo se comporta este sistema resulta conveniente reescribir la métrica  $g$  como la suma de dos términos, un fondo plano más una perturbación, y realizar una expansión de la expresión (1.33). Así,  $g = \eta + \kappa h$  donde  $\kappa = 8\pi^{7/2} g_s l_s^4$  es la constante de acoplamiento gravitacional (de tal modo que  $\kappa^2$  es proporcional a la constante de Newton) y  $h$  es el campo del gravitón canónicamente normalizado. Se puede ver que en  $S_{sugra}$  y  $S_{int}$  lo que obtenemos son únicamente

términos libres cuadráticos más interacciones proporcionales a potencias positivas de  $\kappa$  [16].

Por ejemplo, para el término con dependencia explícita en el gravitón tenemos

$$S_{sugra} \sim \frac{1}{2\kappa^2} \int \sqrt{g} R \sim \int (\partial h)^2 + \kappa (\partial h)^2 h + \dots \quad (1.34)$$

Ahora, en el límite de bajas energías, la constante  $\kappa \rightarrow 0$  y las interacciones proporcionales a ésta desaparecen [16]. Por otro lado, todos los términos que corresponden a derivadas de orden superior en la acción de las D-branas son proporcionales a  $\alpha' = l_s^2 \rightarrow 0$ , de modo que también desaparecen.

Podemos concluir entonces que bajo estas condiciones lo que tenemos son dos sistemas desacoplados. Por un lado, supergravedad libre en un fondo plano en  $9 + 1$  dimensiones, y por el otro, Super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones.

Consideraremos ahora el mismo sistema desde otro punto de vista, esto es, como solución solitónica a las ecuaciones de supergravedad. Al final de la Sección 1.2 escribimos explícitamente la forma de dicha solución para  $p$  arbitraria. Si ahora consideramos  $p = 3$  la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = f^{-\frac{1}{2}} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (1.35)$$

$$f = 1 + \frac{R^4}{r^4}$$

donde  $R^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N$ .

Una característica fundamental de la métrica (1.35) es que la componente  $g_{tt}$  no es constante. Ésto implica una relación no trivial entre mediciones hechas por observadores en distintas regiones del espacio tiempo. En particular, la energía  $E_r$  de un objeto medida por un observador en cierta posición  $r$  y la energía  $E$  de ese mismo objeto pero medida por un observador en infinito se relaciona a través de la siguiente expresión:

$$E = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-\frac{1}{4}} E_r. \quad (1.36)$$

Esto quiere decir que si llevamos un objeto muy cerca de  $r = 0$ , el observador en infinito medirá energías cada vez más pequeñas.

Las excitaciones de la 3-brana negra corresponden solamente a cuerdas cerradas, ubicadas ya sea a distancias radiales grandes, es decir, en la región asintóticamente plana, o en la garganta donde  $r \leq R$ . Tal y como hicimos en la descripción de este sistema a través de D3-branas sobre un fondo plano, tomemos el límite de bajas energías y analicemos qué sucede desde el punto de vista de un observador en infinito.

En la región lejana al horizonte, lo que obtenemos son solo modos de supergravedad que se propagan libremente, mientras que en la región cercana a éste, como consecuencia de la expresión (1.36) podemos tener cuerdas con energías arbitrariamente grandes. Debido a la existencia de una barrera gravitacional, los modos de las dos regiones no pueden interactuar [16], por lo que nuevamente nuestro sistema se desacopla

en dos partes, supergravedad libre en el fondo plano ( $r \gg 0$ ) y teoría de supercuerdas tipo IIB en la región cercana al horizonte ( $r \ll R$ ), donde  $f \sim \frac{R^4}{r^4}$  y por tanto la métrica ahora se aproxima a

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (1.37)$$

que corresponde a un espacio  $AdS_5 \times S^5$ ; es decir, el producto de un espacio anti-de Sitter (homogéneo con constante cosmológica negativa) 5-dimensional y una 5-esfera de radio  $R$ .

Hemos presentado dos maneras equivalentes de describir el mismo sistema físico: una pila de  $N$  D3-branas. En ambos casos obtuvimos en el límite de bajas energías, supergravedad sobre un fondo plano más una segunda teoría. Es inevitable entonces identificar las dos teorías que aparecen en ambas descripciones, y conjeturar que: *la teoría super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  en 3 + 1 dimensiones es equivalente a la teoría de supercuerdas tipo IIB sobre un espacio asintóticamente  $AdS_5 \times S^5$*  [16].

Un punto clave que hace suponer que esta correspondencia pudiera ser correcta es la concordancia que existe entre la simetrías globales de ambas teorías. Como mencionamos en la Sección 1.1, SYM  $\mathcal{N} = 4$  en 3 + 1 dimensiones es invariante conforme y posee por tanto el grupo de simetría espaciotemporal  $SO(4, 2)$  [7, 16]. Este grupo incluye los 10 generadores del grupo de Poincaré, 4 generadores para las llamadas transformaciones conformes especiales y un generador para la transformación de escala. Adicionalmente, la teoría de norma es invariante bajo el grupo de simetría interna  $SU(4) \simeq SO(6)$  que describe como se mezclan entre sí las 4 supercargas [7, 16]. Por el lado de la teoría con gravedad, el grupo de isometría del espacio  $AdS_5$  es precisamente  $SO(4, 2)$ , mientras que la 5-esfera está asociada al grupo  $SO(6)$  [7, 16].

Hasta ahora no hemos mencionado nada sobre los regímenes perturbativos de las dos descripciones. En la teoría de norma aparece un factor de  $N$  por cada lazo, de tal manera que un análisis perturbativo es válido cuando  $g_s N \ll 1$ , mientras que en la teoría con gravedad es válido siempre y cuando el radio de curvatura  $R$  del espacio  $AdS_5$  y de la 5-esfera sea grande comparado con la longitud de cuerdas  $l_s$ . Ésto implica que  $g_s N \gg 1$ . El punto clave es suponer que, si bien los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes, las dos teorías existen para cualquier valor de  $g_s N$ , y es precisamente esta la razón por la que podemos hablar de una dualidad. Por supuesto, el hecho de que siempre alguna de las dos teorías está fuertemente acoplada hace muy difícil demostrar rigurosamente la dualidad, pero al mismo tiempo la vuelve extremadamente útil.

La posibilidad de obtener información sobre un sistema fuertemente acoplado a partir del estudio de una teoría completamente diferente, nos obliga a pensar en cómo interpretar dicha información. Durante los últimos 10 años mucha gente se ha dedicado a confeccionar un diccionario básico que relacione las dos teorías. Algunos de los puntos más importantes son los siguientes [8]:

1. Los operadores invariantes de norma de la teoría de campo están en correspondencia uno a uno con los campos de la teoría con gravedad. Por ejemplo, el

tensor de energía-momento en la teoría de campo corresponde a la métrica en el espacio curvo.

2. La función de partición de la teoría de cuerdas con condiciones de frontera dadas es identificada con la función generatriz de las funciones de correlación en la teoría de campo.
3. Un lazo de Wilson en la teoría de norma puede ser calculado a través de la siguiente relación:

$$\langle W(C) \rangle = \exp(-S_{NG}[C]) \quad (1.38)$$

donde  $C$  es un contorno trazado por los extremos de la cuerda y  $S_{NG}$  es la acción de Nambu-Goto.

4. La conexión UV-IR [58] establece que la coordenada radial  $r$  del espacio AdS debe ser identificada con una escala energética del lado de la teoría norma, de tal forma que valores pequeños de  $r$  (i.e., cerca del horizonte de eventos) corresponden a energías bajas del lado de la teoría de norma y valores de  $r$  cercanos a la frontera de AdS corresponden a energías altas. Vale la pena mencionar también que las cuatro coordenadas espaciotemporales de SYM son identificadas directamente con las coordenadas de la frontera de AdS<sub>5</sub>.

Confeccionar y mejorar este diccionario solo es una parte del trabajo realizado en el contexto de la dualidad. Otra dirección de gran importancia es encontrar duales geométricos a teorías de norma que cada vez se parezcan más a QCD. Como mencionamos al principio de esta sección, teoría de cuerdas tipo IIB en AdS<sub>5</sub> × S<sup>5</sup> y SYM  $\mathcal{N} = 4$  es el ejemplo mejor entendido de la dualidad, pero como explicamos en la Sección 1.1, las características de esta teoría de norma son muy distintas a las de QCD.

El panorama no parece muy alentador; sin embargo, como mencionamos en la Sección 1.1, muchas de estas diferencias desaparecen encendiendo una temperatura en la teoría de norma. Para lograr esto utilizando la correspondencia AdS/CFT, necesitamos regresar nuevamente al sistema de  $N$  D3-branas como solución solitónica a las ecuaciones de supergravedad. En nuestra deducción de la dualidad de Maldacena únicamente consideramos el caso extremal,  $M = N/(2\pi)^3 g_s l_s^4$ , sin embargo, si ahora ponemos más energía al sistema dejando fija su carga lo que obtenemos es lo que se conoce como una 3-brana negra no extremal. Nuevamente podemos tomar el límite de bajas energías de dicho sistema y lo que queda es la geometría de AdS-Schwarzschild cuya métrica es

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} (-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{\sqrt{H}}{h} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (1.39)$$

$$H = \frac{R^4}{r^4}, \quad h = 1 - \frac{r_H^4}{r^4},$$

que tiene un horizonte regular con área finita en  $r = r_H$  y cuya temperatura de Hawking es  $\frac{r_H}{\pi R^2}$ <sup>2</sup>. La teoría de norma dual a esta geometría es SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita. Existen varios fondos cuyos duales son otras teorías de norma a temperatura finita, sin embargo en este trabajo estaremos usando únicamente la métrica (1.39).

Tenemos el dual geométrico a SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita. Como vimos en la Sección 1.1, esta teoría no tiene quarks dinámicos y por tanto es necesario ponerlos a mano. La pregunta que queremos respondernos ahora es cómo podemos representar quarks dinámicos utilizando el lenguaje de la correspondencia [84]. Para ésto también resulta conveniente regresar algunos pasos para atrás y empezar con la pila de  $N$  D3-branas sobre el fondo plano. Como hemos visto, los modos más bajos de las cuerdas abiertas que se extienden entre ellas dan lugar a una teoría de super-Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N)$ . Agreguemos a este sistema una pila con  $k$  D7-branas donde  $k \ll N$ . Para ser más precisos, el sistema D3/D7 con el que vamos a trabajar es el siguiente:.

$$\begin{array}{cccccccccc}
& 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\text{D3:} & \times & \times & \times & \times & & & & & & \\
\text{D7:} & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & & 
\end{array} \tag{1.40}$$

donde los números denotan las direcciones espaciotemporales y las “ $\times$ ” marcan las direcciones en las que se extienden las D-branas. Así, además del sector 3-3 que ya conocíamos y que contiene modos en la representación adjunta de  $SU(N)$ , ahora tenemos cuerdas con ambos extremos en las D7-branas y cuerdas que se extienden entre las D3 y las D7, y por tanto el espectro de la teoría se modifica. La inclusión de las D7-branas tiene al menos dos consecuencias muy importantes. Primero, los modos más bajos de las cuerdas abiertas con un extremo en las D3-branas y el otro en las D7-branas dan lugar a campos fermiónicos y bosónicos que transforman en la representación fundamental del grupo de norma  $SU(N)$ , a los que llamaremos quarks. Y segundo, rompen la supersimetría de la teoría a solo  $\mathcal{N} = 2$ .

Para regresar al escenario de la correspondencia AdS/CFT, tomemos el límite de bajas energías con  $g_s N \gg 1$  y veamos qué nos queda. Sabemos ya que en este límite las D3-branas pueden ser sustituidas por el fondo correspondiente; como  $N \gg k$  podemos despreciar el efecto gravitacional de las D7-branas y entonces lo que obtenemos son  $k$  D7-branas sobre  $AdS_5 \times S^5$ . Un punto que es importante enfatizar es que aún después de considerar  $g_s N \gg 1$ , las cuerdas abiertas con un extremo en las D7-branas y el otro ahora en el horizonte de  $AdS_5$ , representan quarks, mientras que los modos más bajos de las cuerdas con ambos extremos en las D7-branas corresponden a estados ligados de quarks y antiquarks (i.e., mesones) [118].

Las D7-branas cubren las cuatro direcciones de la teoría de norma  $t, \vec{x}$ , están enrolladas en una  $S^3$  a un ángulo polar variable dentro de la  $S^5$ , y se extienden a lo largo de la dirección radial en AdS, desde la frontera en  $r = \infty$ , hasta una posición

---

<sup>2</sup>La temperatura asociada al agujero negro se obtiene haciendo una rotación de Wick en la métrica (1.39) e imponiendo que el horizonte de eventos no sea singular. Esto se traduce en que la coordenada temporal sea periódica y con periodo  $\beta = 1/\pi T$  de la misma manera que sucede en teoría de campos cuando calculamos la integral trayectoria para una trayectoria cerrada con tiempo euclidiano

$r = r_m$ , donde las branas “terminan” (la  $S^3$  colapsa al punto en el polo norte de la  $S^5$ ). A temperatura cero, esta distancia está relacionada con la masa del quark a través de

$$m = \frac{r_m}{2\pi\alpha'}. \quad (1.41)$$

En los siguientes capítulos de este trabajo analizaremos varios aspectos de la dinámica de los quarks y los mesones que atraviesan un medio térmico. En particular, estudiaremos el potencial quark-antiquark, por lo que resulta conveniente revisar brevemente cuál es la receta para calcularlo utilizando la correspondencia AdS/CFT.

Podemos definir el potencial  $V_{q\bar{q}}(r)$  a partir de un lazo de Wilson rectangular  $W(C)$  de ancho  $r$  y extensión temporal  $T$  de acuerdo con

$$\langle W(C) \rangle \propto \exp(-V_{q\bar{q}}(r)T) \quad (1.42)$$

Por otro lado, tenemos la ya mencionada receta que nos proporciona la dualidad de Maldacena para calcular lazos de Wilson a partir de la acción de cuerdas  $S_{NG}$ : juntando estos dos resultados podemos escribir

$$\exp(-V_{q\bar{q}}(r)T) = \exp(-S_{NG}[C]). \quad (1.43)$$

A continuación, para familiarizar al lector con las técnicas que estaremos utilizando en los Capítulos 2 y 4, esbozaremos el cálculo del potencial estático para un par infinitamente pesado en SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura cero.

Consideremos un contorno  $C$  rectangular muy delgado e infinitamente largo (el lado corto de tamaño  $L$  y el lado grande de tamaño  $T \rightarrow \infty$ ). Coloquemos el quark  $q$  en  $x = -\frac{L}{2}$  y al antiquark  $\bar{q}$  en  $x = \frac{L}{2}$ . Del lado de la teoría de cuerdas trabajaremos con la métrica

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (1.44)$$

y la acción

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}}. \quad (1.45)$$

Si escogemos la norma estática de tal manera que  $\tau = t$  y  $\sigma = x$ , entonces, por simetría, el encaje de la cuerda que queremos esta descrito únicamente por la función

$$r \equiv r(x). \quad (1.46)$$

Sustituyendo (1.46) y la métrica (1.44) en la acción de Nambu-Goto lo que obtenemos es

$$S_{NG} = -\frac{T}{2\pi\alpha'} \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{(\partial_x r)^2 + \frac{r^4}{R^4}} \quad (1.47)$$

La expresión (1.47) no depende explícitamente de  $x$  y por tanto el momento conjugado  $\Pi_r^x$  es constante,

$$\Pi_r^x = \frac{\partial L}{\partial(\partial_x r)} = \frac{r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^4/R^4}} = \text{cte.} \quad (1.48)$$

donde  $r'$  quiere decir  $dr/dx$ . Si definimos  $r_0$  como el mínimo de la función  $r(x)$ , es decir, donde la cuerda se da la vuelta, y hacemos el cambio de variable  $y = r/r_0$ ; podemos integrar (1.48) y lo que obtenemos es

$$x = \frac{R^2}{r_0} \int_1^{r/r_0} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}}. \quad (1.49)$$

Para encontrar el valor explícito de  $r_0$  necesitamos utilizar la condición de frontera  $r(\infty) = L/2$  en (1.49) de tal manera que

$$\frac{L}{2} = \frac{R^2}{r_0} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} = \frac{R^2 \sqrt{2} \pi^{3/2}}{r_0 \Gamma(1/4)^2}. \quad (1.50)$$

Finalmente, para calcular el potencial quark-antiquark utilizando la relación (1.43) es necesario primero regularizar la integral (1.47), debido a que la energía de la cuerda es infinita. Este punto será discutido con bastante detalle en el Capítulo 2, por el momento solo diremos que la manera de renormalizar es restando la energía de dos cuerdas que se extienden desde la frontera en  $r = \infty$  hasta el horizonte en  $r = 0$ , o en el lenguaje de la teoría de norma, la energía del sistema de una quark y un antiquark desligados. Haciendo las cuentas correspondientes el resultado que se obtiene es [16]

$$V_{q\bar{q}}(L) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^2} \frac{\sqrt{2g_{\text{YM}}^2 N}}{L}. \quad (1.51)$$

La dependencia  $1/L$  es la esperada debido a que SYM es una teoría conforme; sin embargo, la energía es proporcional a  $\sqrt{g_{\text{YM}}^2 N}$  a diferencia de lo que se encuentra en el cálculo perturbativo, donde  $V_{q\bar{q}}(L) \propto g_{\text{YM}}^2 N$ . Esto indica que la carga está apantallada en el régimen de acoplamiento fuerte.

Antes de finalizar esta sección vale la pena mencionar que en los últimos años el desarrollo que ha habido en el contexto de la dualidad de Maldacena es sorprendente. Han surgido nuevas líneas de investigación y una muy importante es la aplicación de la correspondencia AdS/CFT para entender propiedades del plasma de quarks y gluones que describimos en la Sección 1.1. Para terminar con esta introducción, en la siguiente sección revisaremos algunos de los resultados que se han obtenido en dicho contexto.

## 1.4. La correspondencia AdS/CFT y el plasma de quarks y gluones

Durante los últimos dos años, el uso de la correspondencia AdS/CFT [14, 15, 16] para estudiar procesos de pérdida de energía en teorías de norma a temperatura finita y fuertemente acopladas ha llamado poderosamente la atención. El motivo principal es que se tiene la esperanza de que a través de esta línea de investigación eventualmente

se haga contacto con los datos que se obtienen en RHIC [19] y próximamente en el LHC [20].

Mencionamos en la Sección 1.1 que el plasma de quarks y gluones se comporta como un fluido casi perfecto, y una manera de estudiar sus propiedades es a través del cálculo de coeficientes de transporte. Un coeficiente particularmente importante es la razón entre viscosidad de corte y densidad de entropía,  $\eta/s$ , cuyo significado físico fue revisado también en la Sección 1.1.

En 2001 Policastro, Son y Starinets calcularon por primera vez  $\eta/s$  utilizando la correspondencia AdS/CFT y dieron con ello inicio a una prometedora área de investigación. Estos autores trabajaron con el dual geométrico a SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita, dado por la ecuación (1.39). Determinaron la viscosidad de corte  $\eta$  usando la fórmula de Kubo

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[ \int dx^4 e^{iqx} \theta(t) \langle [T_{\mu\nu}(x), T_{\alpha\beta}(0)] \rangle \right] \quad (1.52)$$

y calculando la función de dos puntos utilizando el diccionario de la correspondencia. La densidad de entropía  $s$  la obtuvieron a partir de la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un agujero negro,

$$S_{BH} = \frac{A_H}{4G_N}, \quad (1.53)$$

donde  $A_H$  es el área del horizonte de eventos. El resultado que obtuvieron para el cociente de estas cantidades es [60]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \quad (1.54)$$

La gran sorpresa fue encontrar que este número es muy cercano al valor estimado para el QGP en RHIC. La situación se puso aún más interesante cuando en [61, 62, 63] mostraron que  $\eta/s = 1/4\pi$  es una propiedad universal de las teorías de norma en el límite de  $N$  grande, fuertemente acopladas ( $g_{YM}^2 N \rightarrow \infty$ ), a temperatura finita y que tienen duales geométricos. Si bien aún no está demostrado, los autores de [63] conjeturaron adicionalmente que

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (1.55)$$

es una cota universal para teorías de campo relativistas a temperatura finita [17].

Durante los años posteriores hubo relativamente poco desarrollo en este contexto, fue recién hasta el 2006 y gracias al trabajo de Herzog *et al.* [21], de Gubser [22] y de Liu *et al.* [40] que esta área de investigación recobró fuerza. Una parte importante de la actividad se ha enfocado en caracterizar la pérdida de energía de los partones que atraviesan el medio térmico y la manera en que dicha energía se distribuye en el plasma.

En [21, 22] calcularon la fuerza de arrastre que siente un quark infinitamente pesado que se mueve a través de un plasma de super Yang-Mills (SYM)  $\mathcal{N} = 4$



utilizando la descripción dual a un quark, es decir, una cuerda que se mueve sobre el fondo de AdS-Schwarzschild, extendiéndose en la dirección radial desde la frontera en  $r \rightarrow \infty$  hasta el horizonte en  $r = r_H$ . Este cálculo fue realizado bajo la suposición de que el quark se mueve todo el tiempo con velocidad constante a lo largo de la dirección  $x^1$ . El ansatz que propusieron para describir esta situación es

$$X(r, t) = vt + \xi(r), \quad (1.56)$$

donde el término  $\xi(r)$  corresponde a la forma de la cuerda y desde el punto de vista de la teoría de norma, describe el perfil de los campos gluónicos, como explicaremos en detalle en el siguiente capítulo.

Sustituyendo (1.56) en la acción de Nambu-Goto (1.5) y utilizando el hecho de que la densidad de momento canónico conjugado  $\Pi_x^r$  es constante, es posible sin tener que integrar las ecuaciones de movimiento, encontrar una relación entre éste último y la velocidad del quark. El punto clave en el cálculo de [21, 22] es el haber notado que existe un cierto valor de la coordenada radial que depende de la velocidad  $v$  con la que se mueve la cuerda,

$$r_v = \frac{r_H}{(1 - v^2)^{1/4}}, \quad (1.57)$$

debajo del cual la función de encaje de la cuerda (1.56) se vuelve imaginaria. La única manera de evitar esto es permitiendo que la cuerda tenga un cierto perfil  $\xi(r) \neq \text{constante}$ , lo cual se traduce en un valor específico para la fuerza de arrastre  $F_x$  que siente el extremo que está en la frontera. El valor de dicha fuerza es [21, 22]

$$F_x = \frac{dp}{dt} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} T^2 \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.58)$$

De manera similar, pero utilizando  $\Pi_t^r$ , se puede calcular la tasa de pérdida de energía del quark que atraviesa el medio térmico y el resultado es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} T^2 \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.59)$$

Del lado de la teoría de cuerdas, las ecuaciones (1.58) y (1.59) representan la tasa a la cual fluye momento y energía por la cuerda desde la frontera hasta el horizonte.

Una segunda línea de trabajo en el contexto del estudio de la pérdida de energía de los partones que atraviesan el medio térmico fue desarrollada por Liu *et al.* en [40]. Su propuesta consiste en calcular el llamado parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ , el cual, en los modelos fenomenológicos de pérdida de energía por radiación, codifica el cuadrado del momento transversal promedio transferido al quark por el plasma (para revisiones ver [68]). Apoyándose en el hecho de que ciertos cálculos aproximados en estos modelos relacionan  $\hat{q}$  con un lazo de Wilson tipo luz en la representación adjunta (ver por ejemplo [39]), los autores de [40] sugirieron que este lazo de Wilson puede ser utilizado para dar una definición no perturbativa del parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ . Usando la relación que existe entre los lazos en la representación adjunta y la fundamental cuando se toma el límite de  $N$  grande y la receta que provee

la correspondencia AdS/CFT para calcular los lazos de Wilson [42], dichos autores calcularon el parámetro  $\hat{q}$  para la teoría de norma SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita, obteniendo el resultado

$$\hat{q} = \frac{\pi^2}{a} \sqrt{g_{\text{YM}}^2 N T^3}, \quad (1.60)$$

donde  $a = \sqrt{\pi} \Gamma(5/4) / \Gamma(3/4)$ .

De la misma manera que en el cálculo de la fuerza de arrastre [21, 22], la cuenta para obtener  $\hat{q}$  en [40] se enfoca en una cuerda que se mueve en el fondo de AdS-Schwarzschild. La diferencia es que la cuerda considerada en [21, 22] tiene uno solo de sus extremos en la frontera, representando al quark externo en movimiento, mientras que la cuerda estudiada en [40] tiene ambos extremos en la frontera, representando un par quark-antiquark externo que traza el lazo de Wilson tipo luz correspondiente. Discutiremos algunos de los detalles de este cálculo al final del Capítulo 2. La propuesta de Liu *et al.* ha sido extendida en varias direcciones (ver por ejemplo [26, 43, 44, 45, 46, 100]), sin embargo, también ha sido cuestionada en algunos trabajos [102, 106, 101].

Una tercera línea de investigación consiste en estudiar directamente el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  de la teoría de norma en cuestión para intentar entender las propiedades hidrodinámicas del plasma. También es posible obtener resultados sobre la pérdida de energía de los partones que atraviesan el medio térmico a partir de este enfoque. Como mencionamos en la Sección 1.3, el diccionario de la correspondencia AdS/CFT nos dice que el tensor de energía-momento en la teoría de campo corresponde a la métrica en el espacio curvo. Revisaremos ahora esta idea con más detalle para el caso particular de  $AdS_5$ , aunque el procedimiento es válido para cualquier espacio asintóticamente  $AdS$  [18].

Utilizando coordenadas de Fefferman-Graham podemos escribir la métrica 5 dimensional de la siguiente manera:

$$ds^2 = R^2 \left( \frac{dz^2}{4z^2} + \frac{1}{z} G_{\mu\nu}(x, z) dx^\mu dx^\nu \right). \quad (1.61)$$

En estas coordenadas la frontera de  $AdS_5$  está en  $z = 0$  y  $G_{\mu\nu}$  es una métrica 4 dimensional que podemos expandir para valores pequeños de  $z$  en la forma

$$G_{\mu\nu}(x, z) = g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(2)} z + g_{\mu\nu}^{(4)} z^2 + g_{\mu\nu}^{(4)} z^2 \log z + \dots \quad (1.62)$$

Ahora, haciendo uso del diccionario de la dualidad,  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  es la métrica del espacio en donde vive la teoría conforme y el valor esperado del tensor de energía-momento está dado por [18]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{CFT} = \frac{N^2}{2\pi^2} g_{\mu\nu}^{(4)}. \quad (1.63)$$

Es importante mencionar que para este ejemplo particular, en donde  $g^{(0)}$  es Minkowski,  $g^{(4)} = 0$  y por tanto  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ . Sin embargo, no olvidemos que a nosotros

nos interesa trabajar con SYM a temperatura finita, cuyo dual geométrico es AdS-Schwarzschild. El tensor de energía-momento correspondiente resulta distinto de cero [30],

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{\pi^2}{8} (N^2) T^4 \text{diag}(3, 1, 1, 1), \quad (1.64)$$

y tiene justo la estructura esperada para una teoría conforme (donde necesariamente debemos tener  $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = 0$ ).

Regresemos ahora a la situación donde un quark que atraviesa el plasma pierde energía y ésta es transferida al medio térmico. Es posible describir la manera en que se distribuye dicha energía si uno conoce la forma del tensor energía-momento modificado por la presencia del quark en el plasma. Para ello, del lado de la teoría de cuerdas, primero es necesario ver cómo se modifica la métrica por el efecto de la cuerda que es dual al quark, y después, utilizando las herramientas que describimos en los párrafos anteriores, obtener el  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  correspondiente. Esta línea de trabajo ha sido ampliamente desarrollada en [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35], con resultados sumamente interesantes.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar con cierto detalle la dinámica de los diferentes partones que atraviesan el medio térmico. Nuestra discusión estará basada en los siguientes 3 trabajos:

1. M. Chernicoff y A. Güijosa, “Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly-Coupled Gauge Theories,”. *JHEP* **06005** (2008) [arXiv:hep-th/0803.3070].
2. M. Chernicoff y A. Güijosa, “Energy loss of gluons, baryons and k-quarks in an  $\mathcal{N} = 4$  SYM plasma,” *JHEP* **0702**, 084 (2007) [arXiv:hep-th/0611155].
3. M. Chernicoff, J. A. García y A. Güijosa, “The energy of a moving quark-antiquark pair in an  $\mathcal{N} = 4$  SYM plasma,” *JHEP* **0609**, 068 (2006) [arXiv:hep-th/0607089].

A continuación describimos en términos muy generales qué es lo que hicimos y algunas de nuestras motivaciones.

En el Capítulo 2 utilizaremos la correspondencia AdS/CFT para determinar la energía de un par quark-antiquark que atraviesa el plasma con velocidad constante  $v$ . Este problema fue estudiado anteriormente en el caso particular en que el par está estático con respecto al medio térmico. Como era de esperarse, en ese caso se encontró que el potencial quark-antiquark es insensible al plasma para distancias pequeñas, pero es apantallado a partir de una cierta distancia crítica  $L_*$  [47, 48]. Analizar la forma en que estas propiedades se modifican por el efecto del movimiento del par atravesando el plasma es una pregunta interesante tanto desde el punto de vista teórico como fenomenológico. En particular, como se hizo notar en [50], el cálculo de la longitud de apantallamiento tiene implicaciones para el fenómeno de supresión de mesones formados por quarks pesados. Nuestro análisis está motivado además por la discusión que existe actualmente sobre la pérdida de energía de los partones

que atraviesan el medio. A diferencia del quark estudiado en [21, 22], el par quark-antiquark es una fuente de color neutra y puede servir como una herramienta más para estudiar las propiedades del plasma.

En el Capítulo 3 daremos un paso más en esta misma dirección, considerando otras cargas de prueba de interés tanto teórico como experimental. La más importante desde el punto de vista fenomenológico es el gluón, ya que de los partones que atraviesan el plasma, se espera que los gluones sean los más abundantes. Así, uno de los objetivos de ese capítulo será calcular la fuerza de arrastre que siente un gluón pesado. En este trabajo consideramos el gluón como una fuente puntual externa de color en la representación adjunta. Desde la perspectiva teórica también es interesante considerar cargas de prueba que transforman en otras representaciones del grupo de norma  $SU(N)$ . La tecnología para describir dichas fuentes en el lenguaje de AdS fue desarrollada recientemente en el contexto del cálculo de lazos Wilson [78, 79].

Como hemos mencionado, en los primeros dos capítulos estudiamos la dinámica de partones infinitamente pesados que atraviesan el medio térmico con velocidad constante. Desde el punto de vista fenomenológico es importante poder entender mejor qué sucede en una situación más real en la que el partón tiene masa finita o su dinámica es más complicada. Es de esperarse que al considerar la etapa inicial de la evolución, o en una situación en la que el quark (o el mesón) está acelerado, el coeficiente de fricción calculado en [21, 22] se modifique. Este punto ha sido abordado desde el punto de vista fenomenológico (en el contexto de pérdida de energía) en [116], donde se discute que existe un periodo de tiempo significativo, después de que se produce el par, en el que la tasa de pérdida de energía no coincide con los resultados del régimen estacionario. En trabajos más recientes [117] se ha cuestionado la duración de dicho régimen, pero no su existencia. Con todo esto en mente, en el Capítulo 4 atacaremos nuevamente el tema de pérdida de energía, intentando reproducir escenarios más reales, como los descritos en las líneas anteriores. Finalmente, en el Capítulo 5 presentaremos un resumen de los resultados e implicaciones físicas de nuestro trabajo.

# Capítulo 2

## La energía de un mesón que se mueve en un plasma de SYM $\mathcal{N} = 4$

### Resumen

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2.1 revisamos los puntos más importantes del cálculo de la fuerza de arrastre realizado en [21, 22]. Después, planteamos y estudiamos el problema análogo para una cuerda con ambos extremos en la frontera de AdS-Schwarzschild sujeta a las condiciones de frontera (2.11). Encontramos que esta cuerda no siente fuerza de arrastre; discutimos las razones físicas de dicho resultado y hacemos la observación de que existen configuraciones con las mismas condiciones de frontera pero diferentes condiciones iniciales en las que la cuerda sí siente fuerza de arrastre. A pesar de que todos los resultados son obtenidos en el fondo dual a SYM  $\mathcal{N} = 4$ , nuestros argumentos se pueden extender también a otros fondos.

Hacia el final de la Sección 2.1 derivamos las ecuaciones que permiten determinar la forma y la energía de la cuerda en el fondo en cuestión. Primero trabajamos en el sistema de referencia del plasma en reposo y discutimos algunos puntos sutiles sobre cómo definir la energía (y momento) de las dos cuerdas desconectadas duales al sistema del par desligado. Después realizamos una transformación de Lorentz al sistema de referencia del par  $q\bar{q}$  en reposo en donde la energía puede ser definida y calculada de manera directa. Notamos que a pesar de que la cuerda por definición está estática en este sistema, aún tiene momento, que como explicamos después de la ecuación (2.41) codifica información sobre la densidad de momento de la configuración de los campos gluónicos generada por los quarks en la teoría de norma. Debido a que el momento es distinto de cero, la energía  $E$  en el sistema de referencia del plasma en reposo no es simplemente proporcional a la energía  $\bar{E}$  en el sistema del par en reposo. La relación entre las dos energías esta dada por la ecuación (2.42).

La Sección 2.2 tiene los resultados principales escritos en el lenguaje de SYM. Comenzamos con una discusión sobre lo que significa desde el punto de vista de la teoría de norma que el par no sienta fuerza de arrastre a medida que atraviesa

el plasma de SYM. Después, realizamos las integraciones numéricas necesarias para determinar la energía del par quark-antiquark como función de la separación  $L$  y la velocidad  $v$ . Los resultados se muestran en las Figs. 2.3 y 2.4. Para separaciones pequeñas la energía tiene el esperado comportamiento coulombiano (2.48), y después la energía aumenta por el efecto del plasma hasta que el par tiene una separación  $L_*(v)$  a partir de la cual se desliga. La dependencia en la velocidad de la longitud de apantallamiento se muestra en la Fig. 2.5; encontramos que está bien aproximada por la expresión (2.54). Para velocidades  $v > 0.447$  encontramos una brecha entre la energía de la configuración del sistema ligado y el desligado, cuyo significado físico aún lo desconocemos.

En las últimas hojas de la Sección 2.2 discutimos con cierta profundidad la relación que existe entre nuestros resultados en el límite  $v \rightarrow 1$  y el lazo de Wilson nulo propuesto en [40] como definición del parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ . La principal lección es que el resultado de [40] utilizando la correspondencia AdS/CFT no puede ser obtenido como el límite de un lazo de Wilson estándar tomando  $v \rightarrow 1$  desde abajo. Sugerimos que, por el contrario, éste se puede obtener tomando  $v \rightarrow 1$  desde arriba. Finalmente, notamos con (2.58) que, a pesar de que uno no puede hacer una interpolación continua entre la hoja de mundo tipo espacio considerada en [40] y la hoja de mundo tipo tiempo estudiada en este trabajo, la dependencia  $E \propto L^2$ , clave para la definición del parámetro  $\hat{q}$  de [40], se puede obtener considerando el límite  $v \rightarrow 1$  de un subgrupo de las configuraciones analizadas en este capítulo. Por analogía con [40], uno entonces puede definir un parámetro  $\mathcal{K}$  que, al menos en éste ejemplo específico, captura la misma información que  $\hat{q}$ .

## 2.1. La cuerda en AdS-Schwarzschild

Como se mencionó en la Introducción, para el cálculo de la fuerza de arrastre que siente un quark externo moviéndose en un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  realizado en [21, 22], se utilizó una cuerda que se extiende desde la frontera hasta el horizonte de la geometría de AdS-Schwarzschild, es decir, desde  $r \rightarrow \infty$  hasta  $r = r_H$ , con  $r$  la coordenada radial y que de ahora en adelante usaremos como la coordenada espacial en la hoja de mundo. Tomaremos además, el tiempo de la frontera  $t = x^0$  como el tiempo de la hoja de mundo, es decir, trabajaremos en la norma estática

$$\sigma = r, \quad \tau = t. \quad (2.1)$$

La dinámica de la cuerda esta descrita por la acción de Nambu-Goto

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio tiempo y  $g_{\alpha\beta} \equiv G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$  es la métrica inducida en la hoja de mundo. La fuerza que un segmento arbitrario de la cuerda ejerce en la dirección espacial sobre un segmento adyacente fue expresado en [22]

como

$$F_i = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-g} P_i^r, \quad (2.3)$$

con

$$P_\mu^\alpha = -g^{\alpha\beta} \partial_\beta X_\mu \quad (2.4)$$

la corriente en la hoja de mundo asociada al momento espaciotemporal, por otro lado en [21] fue formulada como

$$F_i = \frac{1}{2\pi\alpha'} \Pi_i^r, \quad (2.5)$$

con

$$\Pi_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \quad (2.6)$$

las densidades de momento canónico conjugado a  $X^\mu$ . Invertiendo explícitamente la matriz  $g_{\alpha\beta}$  uno puede verificar que

$$\sqrt{-g} P_\mu^\alpha = \Pi_\mu^\alpha, \quad (2.7)$$

y por tanto las expresiones (2.3) y (2.5) coinciden. Claramente, la última es más simple y por eso la utilizaremos en nuestros cálculos.

El punto clave en el cálculo de [21, 22] es el haber notado que, si uno asume que la cuerda se mueve a velocidad constante  $v \neq 0$  a lo largo de la dirección  $x = x^1$  paralela a la frontera, entonces existe un cierto valor de la coordenada radial que depende de dicha velocidad,

$$r_v = \frac{r_H}{(1 - v^2)^{1/4}}, \quad (2.8)$$

debajo del cual la función de encaje de la cuerda

$$X(r, t) = vt + \xi(r) \quad (2.9)$$

se vuelve imaginaria. La única manera de evitar esto, es permitiendo que la cuerda tenga un cierto perfil  $\xi(r) \neq \text{constante}$ , lo cual se traduce en un valor específico para la fuerza de arrastre  $F_x$  que siente el extremo que está en la frontera.

En este capítulo, estamos interesados en explorar cómo estas consideraciones se generalizan al caso de una cuerda que se mueve con velocidad constante pero que tiene ambos extremos en la frontera y por tanto, es dual a un par quark-antiquark en la teoría de norma.

Para describir un par quark-antiquark en movimiento, podemos considerar que ambos extremos de la cuerda se mueven con la misma velocidad  $v$  y en la misma dirección  $x$ , y que están separados por una distancia constante  $L$  en cierta dirección  $y = x^2$  (en la frontera). En otras palabras, escogiendo apropiadamente el origen, la función de encaje (2.9) y

$$Y(r, t) = Y(r) \quad (2.10)$$

satisfacen las condiciones de frontera

$$X(\infty, t) = vt, \quad Y(\infty) = \mp \frac{L}{2}, \quad (2.11)$$

donde el signo  $-$  le corresponde a la mitad izquierda de la cuerda y el  $+$  a la mitad derecha. Por simplicidad, nos enfocaremos en el caso en que  $y$  es perpendicular a la dirección del movimiento, sin embargo, un análisis más general fue realizado en [100]. La cuerda comienza en  $r \rightarrow \infty$  y se extiende hacia abajo hasta un radio mínimo  $r_{min}$ , por simetría éste debe ser tal que  $Y(r_{min}) = 0$  y  $Y'(r_{min}) = \infty$  (estas condiciones reflejan simplemente el hecho de que la proyección de la cuerda en el plano  $r - y$  debe ser suave).

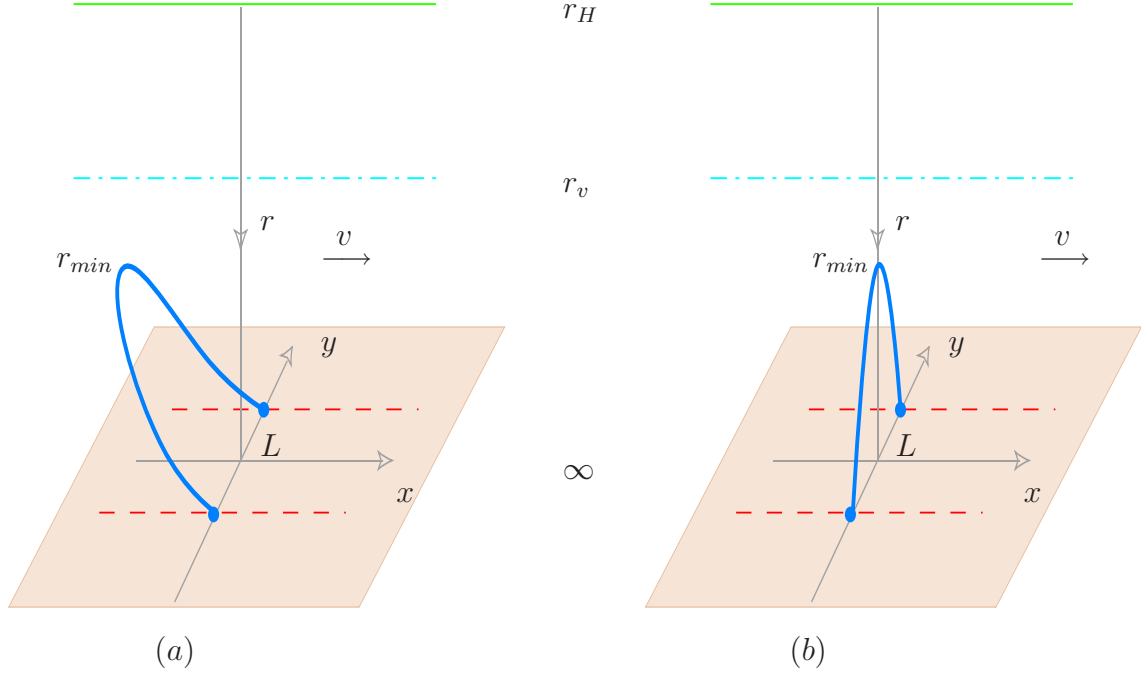


Figura 2.1: Dibujo de la cuerda dual al par quark-antiquark en movimiento. La coordenada radial corre hacia abajo, por tanto el horizonte en  $r = r_H$  se muestra en la parte de arriba y la frontera en  $r \rightarrow \infty$  está representada por un plano en la parte de abajo. La línea punteada en  $r = r_v$  marca el radio dependiente de la velocidad a partir del cual la cuerda no puede penetrar. A medida que la cuerda se mueve hacia la derecha, sus extremos trazan las trayectorias punteadas sobre el plano. Su forma codifica información sobre la configuración de los campos de color en SYM. (a) Uno esperaría que la cuerda se acueste hacia atrás como resultado del movimiento. Ésto es posible únicamente si el perfil de la cuerda tiene una dependencia del tiempo no trivial. (b) La configuración de mínima energía para la cuerda en movimiento es aquella en la que está derecha. Véase el texto para mayor discusión.

La principal pregunta entonces es si la cuerda se acuesta hacia atrás y ejerce una fuerza de arrastre sobre sus extremos como uno espera que suceda de manera intuitiva. La forma de la cuerda sería similar a la que se muestra en la Fig. 2.1a. Es fácil ver que esto no puede suceder y la razón es la siguiente. Por un lado, la fuerza en la dirección del movimiento debe ser cero en el punto medio ( $r = r_{min}$ ), ya que por simetría, la cuerda en ese punto es perpendicular al eje  $x$ ; y por el otro, la fuerza debe ser constante



a lo largo de toda la cuerda, ya que ésta se mueve a velocidad constante. Concluimos entonces que  $F_x = 0$  en todos los puntos y por tanto, la cuerda se mantiene derecha (ver Fig. 2.1b).

El hecho de que la cuerda no se acueste hacia atrás cuando sus extremos están en movimiento es completamente contraintuitivo. Para aclarar este punto vale la pena notar que la dependencia en  $r$  de  $F_x \propto \Pi_x^r$  es una consecuencia de la ecuación de movimiento de  $X$  (o de manera equivalente, la conservación covariante del momento  $P_x^\alpha$ ),

$$\partial_t(\Pi_x^t) + \partial_r(\Pi_x^r) = 0 , \quad (2.12)$$

donde el primer término es cero debido la dependencia temporal trivial en la función de encaje (2.9) y (2.10) (mientras que el lado derecho se anula porque  $\mathcal{L}$  es independiente de  $X$ ). A partir de esto es claro que podemos evitar la conclusión del párrafo anterior y por tanto encontrar una cuerda que se acuesta hacia atrás, siempre y cuando el perfil de la misma tenga una dependencia temporal más complicada (quizás un comportamiento oscilatorio).

Este punto es bastante familiar: especificar la condiciones de frontera para la cuerda no implica tener una única solución para la ecuación de movimiento; debemos además imponer las condiciones iniciales. Si inicialmente la cuerda esta derecha y moviéndose (completa) a velocidad constante  $v$ , entonces, como hemos visto, ésta seguirá moviéndose así y sus extremos trazarán una trayectoria recta en la frontera sin necesidad de que un agente externo aplique una fuerza en la dirección del movimiento. Por otro lado, si la cuerda esta inicialmente en reposo y después comenzamos a jalar sus extremos con la fuerza necesaria para que éstos se muevan con velocidad constante  $v$ , entonces, la cuerda necesariamente se acostará hacia atrás como se muestra en la Fig. 2.1a. Utilizando lo que aprendimos en los párrafos anteriores, podemos concluir que esta cuerda va a continuar oscilando sin lograr estabilizarse (en el sentido clásico) a una configuración del tipo (2.9). Esta solución por tanto, no puede ser la de mínima energía para las condiciones de frontera dadas. No obstante, como explicaremos en la siguiente sección, existen casos en los que este tipo de soluciones pueden llegar a jugar un papel importante en el cálculo de la energía del par quark-antiquark.

De igual forma, debemos tener en mente que es posible satisfacer las condiciones de frontera (2.11) con dos cuerdas separadas que se inclinan hacia atrás y que se extienden desde la frontera hasta el horizonte con  $Y = \mp L/2$ , tal y como se utilizó en [21, 22]. Esta configuración describe un par quark-antiquark desligado y como veremos más adelante resulta de gran importancia en el cálculo de la energía del sistema ligado.

A continuación veremos como determinar la forma de una cuerda que se mueve

en una geometría de AdS-Schwarzschild. Usando la forma explícita de la métrica<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\sqrt{H}} (-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{\sqrt{H}}{h} dr^2, \\ H &= \frac{R^4}{r^4}, \quad h = 1 - \frac{r_H^4}{r^4}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

y las funciones de encaje (2.9) y (2.10), la densidad lagrangiana (2.2) se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} = -\sqrt{1 + \frac{h}{H} (X'^2 + Y'^2) - \frac{v^2}{H} Y'^2 - \frac{v^2}{h}}. \quad (2.14)$$

También podemos escribir las densidades de los momentos canónicos conjugados

$$\begin{aligned} \Pi_t^t &= \frac{-1}{\sqrt{-g}} \left[ 1 + \frac{h}{H} (X'^2 + Y'^2) \right], \\ \Pi_x^t &= \frac{v}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{H} Y'^2 \right], \\ \Pi_t^r &= \frac{v}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{h}{H} X' \right], \\ \Pi_x^r &= \frac{-1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{h}{H} X' \right], \\ \Pi_y^r &= \frac{-1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{h - v^2}{H} Y' \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como mencionamos anteriormente, dado que la cuerda se mueve con velocidad constante y que  $\mathcal{L}$  es independiente de  $X$ , la correspondiente ecuación de movimiento (2.12) refleja simplemente el hecho de que la densidad de momento conjugado  $\Pi_x^r$  es una constante (real). A partir de ahora la denotaremos  $\Pi_x$ . Por supuesto lo mismo sucede con  $\Pi_y \equiv \Pi_y^r$ . De acuerdo con (2.5), dichas constantes determinan las fuerzas  $-F_x$  y  $-F_y$  que un agente externo debe aplicar sobre los extremos de la cuerda para satisfacer las condiciones de frontera de Dirichlet dadas por (2.11). La tasa a la cual la cuerda recibe energía es  $dE/dt = \Pi_t^r/2\pi\alpha'$ , y como podemos ver en (2.15), es igual al trabajo realizado  $-vF_x$ .

Invirtiendo las relaciones en (2.15) podemos expresar  $X'$  y  $Y'$  en términos de las constantes  $\Pi_x$  y  $\Pi_y$ , es decir,

$$X' = -\Pi_x \frac{(h - v^2)}{h} \sqrt{\frac{H}{(h - v^2)(\frac{h}{H} - \Pi_x^2) - h\Pi_y^2}}, \quad (2.16)$$

$$Y' = -\Pi_y \sqrt{\frac{H}{(h - v^2)(\frac{h}{H} - \Pi_x^2) - h\Pi_y^2}}, \quad (2.17)$$

---

<sup>1</sup>El fondo relevante es como siempre  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$ , sin embargo, solo mostramos el primer factor ya que estamos considerando que la cuerda tiene una posición fija en la  $\mathbf{S}^5$ .

donde vemos que nuevamente aparece el factor  $h - v^2$ , cuya raíz define el radio crítico (2.8) y que como hemos explicado anteriormente juega un papel determinante para fijar el valor de

$$\Pi_x = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{r_H}{R}\right)^2 \quad (2.18)$$

para la cuerda que es dual al quark en movimiento [21, 22]. De estas últimas ecuaciones podemos aprender un par de cosas. Primero, de la ecuación (2.17) vemos que  $Y'$  diverge cuando el denominador se hace cero, y de acuerdo con la condición (2.10) esto define el punto  $r_{min}$  donde la cuerda se da la vuelta,

$$\left[ (h - v^2) \left( \frac{1}{H} - \frac{\Pi_x^2}{h} \right) \right]_{r=r_{min}} = \Pi_y^2. \quad (2.19)$$

A partir de esta expresión es fácil mostrar que  $r_{min} \geq r_v$ , y se cumple la igualdad únicamente si  $\Pi_y = 0$  (que implicaría  $L = 0$ ). Como esperábamos, encontramos entonces que la cuerda dual al par quark-antiquark en movimiento no puede penetrar más allá del radio crítico  $r_v$ .

Segundo, para que las proyecciones de las dos mitades de la cuerda en el plano  $y - x$  se unan de manera suave, requerimos que  $\partial Y / \partial X = Y' / X' = \infty$  en  $r_{min}$ , pero tomando el cociente de (2.16) y (2.17) vemos que esto no es posible al menos que  $\Pi_x = 0$ , y por tanto  $X' = 0$ . Así que como habíamos anticipado, aprendemos que la cuerda se puede mover a velocidad constante únicamente si va completamente derecha. Esta misma conclusión también fue obtenida de manera independiente en [49].

Tomando el caso  $X' = 0$  ( $\Rightarrow \xi(r) = 0$ ) en (2.14), (2.15), (2.17) y (2.19), podemos derivar las ecuaciones que nos serán de interés a partir de ahora y para el resto del capítulo. El perfil de una cuerda con forma de  $\cap$  (derecha), que se mueve con velocidad  $v$  y cuyos extremos están separados por una distancia  $L$ , está determinado por

$$Y' = -\Pi_y \frac{R^4}{\sqrt{(r^4 - r_H^4)(r^4(1 - v^2) - r_H^4 - R^4\Pi_y^2)}}, \quad (2.20)$$

donde el valor de  $\Pi_y$  debe ser escogido de tal manera que

$$L = 2 \int_{r_{min}}^{\infty} dr Y' = 2\Pi_y R^4 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{(r^4 - r_H^4)(r^4(1 - v^2) - r_H^4 - R^4\Pi_y^2)}}, \quad (2.21)$$

con

$$r_{min} = \left( \frac{r_H^4 + R^4\Pi_y^2}{1 - v^2} \right)^{1/4}. \quad (2.22)$$

Usando (2.20), la densidad lagrangiana se reduce a

$$\mathcal{L}_{ligado} = -\frac{r^4(1 - v^2) - r_H^4}{\sqrt{(r^4 - r_H^4)(r^4(1 - v^2) - r_H^4 - R^4\Pi_y^2)}}. \quad (2.23)$$

Encontramos que cerca de la frontera  $\mathcal{L}_{ligado} \rightarrow -\sqrt{1-v^2}$ , lo cual implica, una vez integrado, que el área total de la hoja de mundo por unidad de tiempo (de la frontera) es linealmente divergente. Esta es una consecuencia obvia debido a que la cuerda se extiende hasta el infinito espacial, la misma divergencia se encuentra en el caso de dos hojas de mundo desconexas duales a un quark y a un antiquark desligados. Utilizando las expresiones (2.14)-(2.17) con  $\Pi_y = 0$  y  $\Pi_x$  como en (2.18), obtenemos  $\mathcal{L}_{desligado} = -\sqrt{1-v^2}$ . Restando estas dos áreas encontramos la expresión finita

$$A = -\frac{2}{2\pi\alpha'} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \left( \int_{r_{min}}^{\infty} dr \mathcal{L}_{ligado} - \int_{r_H}^{\infty} dr \mathcal{L}_{desligado} \right). \quad (2.24)$$

De acuerdo con la receta usual [42], el área relativa (2.24) determina el valor de expectación de un lazo de Wilson trazado por el par quark-antiquark en la teoría de norma a temperatura finita. Nos interesa también calcular la energía total de la cuerda, ya que esto corresponde a la energía del par quark-antiquark. Empezando con (2.15), podemos calcular la densidad hamiltoniana  $\mathcal{H} \equiv -\Pi_t^t$  y obtener

$$\mathcal{H}_{ligado} = \frac{r^4 - r_H^4}{\sqrt{r^4(1-v^2) - r_H^4 - R^4\Pi_y^2}}. \quad (2.25)$$

Como es de esperarse, cerca de la frontera esta expresión también da lugar a una divergencia lineal en la energía total de la cuerda; nuevamente podemos cancelarla simplemente restando la energía de dos cuerdas desconectadas y para esto es necesario integrar

$$\mathcal{H}_{desligado} = \frac{r^4 - r_H^4(1-v^2)}{(r^4 - r_H^4)\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.26)$$

Con esta regularización aparece un nuevo infinito debido a que (2.26) es logarítmicamente divergente en el límite de integración  $r = r_H$  [21]. El origen de esta divergencia es la cantidad de energía (infinita) que el agente externo le proporciona al sistema cuando jala el extremo de la cuerda en la frontera (a lo largo de la dirección  $x$ ) durante un periodo de tiempo infinito. Desde la perspectiva de un observador en la frontera, esta energía fluyó por la cuerda y se acumuló en una vecindad del horizonte.

Como se explicó en [21], una manera simple de estimar el trabajo realizado por el agente externo sobre la cuerda, es asumiendo que ejerció únicamente la fuerza necesaria para vencer la fuerza de arrastre (2.18) a lo largo de la distancia que separa la punta de enfrente (en la frontera) de la de atrás (en el horizonte). Realizando dicho cálculo se encuentra que

$$\mathcal{H}_{desligado}^{suministrada} = \frac{r_H^4 v^2}{(r^4 - r_H^4)\sqrt{1-v^2}} \quad (2.27)$$

Restando ésto a (2.26), obtenemos un estimado de la densidad energía intrínseca de la cuerda en movimiento,

$$\mathcal{H}_{desligado}^{intrinseca} \equiv \mathcal{H}_{desligado} - \mathcal{H}_{desligado}^{suministrada} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.28)$$

Como era de esperarse, (2.28) ya no incluye el término con la divergencia logarítmica. La prescripción para eliminar esta divergencia no es única: a (2.27) podemos agregarle cualquier función  $\mathcal{U}(r, v)$  tal que  $U(v) \equiv \int_{r_H}^{\infty} \mathcal{U}(r, v) < \infty$  y  $\mathcal{U}(r, 0) = 0$ . La primera condición establece que  $\mathcal{U}(r, v)$  represente una renormalización finita para la energía de la cuerda, mientras que la segunda nos asegura que coincidamos con la energía conocida de la cuerda en reposo.

Es conveniente notar que una historia completamente análoga sucede con el momento lineal  $\mathcal{P} \equiv \Pi_x^t$  de la cuerda desligada [21]: al integrar la densidad de momento  $\mathcal{P}_{desligado} = v/(h\sqrt{1-v^2})$  que obtenemos a partir de (2.15), aparece una divergencia lineal en  $r \rightarrow \infty$  y una divergencia logarítmica en  $r = r_H$ ; ésta última se debe a la cantidad (infinita) de momento que el agente externo le proporciona al sistema. Nuevamente, haciendo una estimación obtenemos

$$\mathcal{P}_{desligado}^{suministrada} = \frac{\mathcal{H}_{desligado}^{suministrada}}{v} \quad (2.29)$$

mientras que la densidad de momento intrínseco de la cuerda está dada por

$$\mathcal{P}_{desligado}^{intrínseco} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.30)$$

Finalmente, y gracias a esta discusión podemos escribir una expresión finita que codifique la energía de una cuerda en movimiento con forma de  $\cap$  relativa a la energía de dos cuerdas en movimiento desconectadas,

$$E \equiv \frac{2}{2\pi\alpha'} \left( \int_{r_{min}}^{\infty} dr \mathcal{H}_{ligado} - \int_{r_H}^{\infty} dr \mathcal{H}_{desligado}^{intrínseca} + U(v) \right). \quad (2.31)$$

Esta definición captura, para cualquier velocidad dada, la dependencia correcta en  $L$  que tiene la energía del sistema ligado. En el lenguaje de la teoría de norma, lo que obtuvimos es la energía de un par quark-antiquark relativa a la energía del par desligado.

La arbitrariedad encontrada en la elección de la función  $\mathcal{U}(r, v)$  presenta dos complicaciones importantes: por un lado, no permite comparar de manera directa el valor de la energía para diferentes velocidades, y por el otro, se hace imposible deducir únicamente a partir del valor  $E(L, v)$  con  $v$  y  $L$  fijos, cual es la configuración energética preferida por el sistema: la ligada o la desligada. Para resolver estos problemas necesitamos tener una definición operacional unívoca para la energía intrínseca de la cuerda desligada en movimiento (una sugerencia fue hecha en [21]).

Como hemos visto, el origen de la ambigüedad en la definición de  $E(L, v)$  es la energía infinita que el agente externo le proporciona a la cuerda desligada al arrastrarla. Una manera natural de resolver esta dificultad es calculando la energía en el marco de referencia de la cuerda en reposo, donde el agente externo no realiza ningún

trabajo. La transformación de coordenadas necesaria para lograr ésto esta dada por

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \gamma(t - vx) , \\
\bar{x} &= \gamma(x - vt) , \\
\bar{y} &= y , \\
\bar{r} &= r ,
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

(con  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2}$ ) y equivale, desde el punto de vista de la teoría de norma, a un empujón de Lorentz que nos lleva del sistema de referencia del plasma en reposo al sistema de referencia del par quark-antiquark en reposo. Las densidades de momentos canónicos conjugados (2.15) se transforman de acuerdo a

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_{\bar{\mu}}^{\bar{\tau}} &= \frac{\partial X^\nu}{\partial \bar{X}^{\bar{\mu}}} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \Pi_\nu^\tau - \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} \Pi_\nu^\sigma \right) , \\
\bar{\Pi}_{\bar{\mu}}^{\bar{\sigma}} &= \frac{\partial X^\nu}{\partial \bar{X}^{\bar{\mu}}} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} \Pi_\nu^\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}} \Pi_\nu^\tau \right) ,
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

donde hemos tomado también en consideración el efecto de cambiar de la norma estática en el sistema de referencia del plasma en reposo ( $\tau = X^0, \sigma = r$ ) a la norma estática en el sistema de referencia donde el par quark-antiquark está en reposo ( $\bar{\tau} = \bar{X}^0, \bar{\sigma} = \bar{r}$ ).

Es fácil checar que  $\bar{\Pi}_{\bar{t}}^{\bar{\tau}} = 0$ , lo cual muestra que en este sistema de referencia no se le está suministrando energía a la cuerda. De esta manera, la energía total de la cuerda desligada ya no tiene la divergencia logarítmica, mientras que la divergencia lineal la utilizamos para regularizar de la manera usual la energía de la cuerda en forma de  $\cap$ .

Debido a que la cuerda esta estática, sabemos que  $\bar{\mathcal{H}} = -\bar{\Pi}_{\bar{t}}^{\bar{\tau}} = -\bar{\mathcal{L}}$ , y por el hecho de que el lagrangiano transforma como una densidad escalar tenemos que  $\bar{\mathcal{L}} = \gamma \mathcal{L}$ . Podemos entonces escribir la energía del sistema ligado relativa al sistema desligado como

$$\bar{E} \equiv -\frac{2}{2\pi\alpha'} \left( \int_{r_{min}}^{\infty} dr \bar{\mathcal{L}}_{ligado} - \int_{r_H}^{\infty} dr \bar{\mathcal{L}}_{desligado} \right) .
\tag{2.34}$$

Como debe de suceder, esta última expresión se relaciona directamente con el área (2.24) a través de  $\bar{E} = \gamma A/\mathcal{T} = A/\bar{\mathcal{T}}$ . Es importante enfatizar que trabajando en este sistema de referencia (2.34) no tiene ninguna ambigüedad y por tanto su dependencia en  $v$  y en  $L$  es completamente física. Además, el estado ligado es energéticamente favorable cuando  $\bar{E}(L, v) < 0$ .

Es interesante notar que, incluso en el sistema de referencia en reposo y en contraste con la energía, no es posible definir de manera unívoca el momento lineal de la cuerda sin tener información física adicional. A pesar de que el agente externo no realiza ningún trabajo sobre el sistema ligado o desligado, en el último caso, sí proporciona momento a la cuerda estática. Dicho en el lenguaje de la teoría de norma, es necesario ejercer una fuerza sobre el quark para mantenerlo estático mientras el plasma pasa como un viento con velocidad  $v$  perpendicular a él. Como resultado, la

densidad de momento  $\bar{\mathcal{P}}_{desligado} = v\gamma^2(1-h)/h$  de las cuerdas desconectadas da lugar a una divergencia logarítmica en el extremo  $r = r_H$  cuando integramos. Podemos eliminarla restando

$$\bar{\mathcal{P}}_{desligado}^{input} = v\gamma^2 \left( \frac{1-h}{h} \right), \quad (2.35)$$

que corresponde al momento proporcionado por el agente externo. Hay dos caminos para obtener (2.35): el primero, haciendo una transformación de Lorentz sobre el momento  $(\Pi_\mu^\alpha)_{desligado}^{suministrado}$  para llevarlo al sistema de la cuerda en reposo, y el segundo, simplemente calculando los momentos directamente en dicho sistema asumiendo las mismas condiciones que nos llevaron a (2.27). Después de realizar la resta, lo que uno obtiene es  $\bar{\mathcal{P}}_{desligado}^{intrinseco} = 0$  como un estimado del momento intrínseco asociado a la cuerda. A primera vista, este resultado puede parecer natural y libre de ambigüedades, sin embargo, el tema se complica cuando uno observa que la densidad de momento de la cuerda en forma de  $\cap$ ,

$$\bar{\mathcal{P}}_{ligado} = v\gamma(1-h)\mathcal{H}, \quad (2.36)$$

no es cero a pesar de que la cuerda está en reposo y no se le ha proporcionado momento externo alguno. Esto solo es posible debido a que en el sistema de referencia que ahora estamos trabajando  $\bar{g}_{\bar{t}\bar{x}} \neq 0$ , y por tanto, la métrica no es estática. Retomaremos esta discusión en la siguiente sección.

## 2.2. La energía de un par quark-antiquark en movimiento

En esta sección utilizaremos lo aprendido hasta ahora sobre la cuerda en movimiento para obtener información sobre algunas de las características del sistema dual: un par quark-antiquark externo, en una teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  y grupo de norma  $SU(N)$ . Como ya sabemos, la constante de 't Hooft  $g_{YM}^2 N$  y la temperatura  $T$  están determinadas por el radio  $R$  de AdS, el radio del horizonte  $r_H$  y la longitud de cuerdas  $\sqrt{\alpha'}$  a través de [16]

$$g_{YM}^2 N = \frac{R^4}{\alpha'^2}, \quad T = \frac{r_H}{\pi R^2}. \quad (2.37)$$

De acuerdo con (2.5), el resultado  $\Pi_x = 0$  se traduce en el hecho de que, a diferencia del quark solitario considerado en [21, 22], el par quark-antiquark no siente fuerza de arrastre a medida que atraviesa el plasma. Este resultado fue obtenido casi de manera simultánea en [49].

Como se explica en [21, 22] y se analiza con mayor profundidad en [28, 29, 30], un quark en movimiento produce un estela en los campos de color que puede entenderse como un “chorro” coherente de gluones radiados, ésto es el dual en la teoría conforme a una cuerda en movimiento que se extiende desde la frontera hasta el horizonte. Es precisamente esta estela la que transporta la energía y el momento del quark hacia el plasma. Es importante mencionar que este mecanismo también opera a temperatura

cero, es decir, sin plasma: dadas las condiciones iniciales apropiadas para los campos gluónicos, un quark que se mueve con velocidad constante  $v$  puede perder energía a través de la estela que deja en dichos campos. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, lo que esto quiere decir es que una cuerda con un perfil dependiente del tiempo no trivial que se mueve en AdS puede inclinarse/curvarse de tal manera que su “cola” quede por detrás del extremo que se mueve a velocidad constante en la frontera. Desde luego, este punto no es sorprendente, ya que el vacío de SYM es un medio polarizable altamente no lineal. En este mismo contexto, la configuración de energía más baja para el perfil de campos gluónicos que rodean al quark en movimiento a temperatura cero se puede obtener realizando un empujón de Lorentz sobre el perfil estático; esta configuración es dual a una cuerda derecha que no siente fuerza de arrastre. La cuerda que se consideró en [21, 22] se reduce de manera correcta a este caso cuando  $T \rightarrow 0$ , lo cual nos asegura que el proceso de pérdida de energía estudiado en dicho artículo está intrínsecamente asociado a la presencia del plasma.

A diferencia del quark, que tiene una carga de color neta, el par quark-antiquark es un dipolo, y en consecuencia produce un perfil de campos gluónicos de corto alcance. A temperatura cero, el decaimiento dipolar de  $\text{Tr } F^2$  es proporcional a  $L^3/r^7$  [38, 51], en comparación con el comportamiento del tipo coulombiano  $1/r^4$  del monopolo [37]. A temperatura finita, hemos aprendido aquí que el perfil generado por el par quark-antiquark en movimiento no es capaz de transportar energía hacia el medio que lo rodea, propiedad que debería ser verificable utilizando los métodos de [28, 29, 30]. En el régimen  $N \gg 1$  y  $g_{YM}^2 N \gg 1$  de la teoría de norma, que es captado por la teoría de cuerdas clásica sobre el fondo de AdS-Schwarzschild débilmente curvado, no hay otro mecanismo de pérdida de energía y por tanto el par quark-antiquark puede atravesar el plasma sin ningún impedimento. Como veremos más adelante en este trabajo, este resultado se puede generalizar a cualquier carga neutra de color que atraviese el plasma. Las observaciones que hicimos sobre el quark a temperatura cero aplican también a los sistemas neutros a temperatura finita; sin embargo, para ciertas configuraciones iniciales de los campos gluónicos, el par quark-antiquark sí puede sentir fuerza de arrastre.

Finalmente estamos en posición de poder calcular la energía  $\bar{E}$  (y  $E$ ) del par quark-antiquark, para una velocidad  $v$  y una separación  $L$  dada. Para esto, primero necesitamos resolver las integrales (2.21), (2.34) y (4.84) para encontrar  $L(\Pi_y, v)$ ,  $\bar{E}(\Pi_y, v)$  y  $E(\Pi_y, v)$ , y luego eliminar  $\Pi_y$  para obtener  $\bar{E}(L, v)$  y  $E(L, v)$ . Como explicamos en el párrafo debajo de la ecuación (2.15),  $\Pi_y$  es la fuerza que un agente externo debe ejercer sobre el par quark-antiquark para mantenerlo a la separación deseada.

Desafortunadamente, las integrales no pueden ser resueltas de manera analítica así que las resolveremos numéricamente. Para este propósito, resulta conveniente utilizar  $h = 1 - r_H^4/r^4$  en lugar de  $r$  como variable de integración. El nuevo rango de integración va desde

$$h_{min} \equiv h(r_{min}) = \frac{v^2 + f_y^2}{1 + f_y^2} \quad (2.38)$$



hasta 1, donde hemos definido la fuerza reescalada

$$f_y \equiv \frac{R^2}{r_H^2} \Pi_y = \frac{2}{\pi \sqrt{g_{YM}^2 N T^2}} F_y .$$

El resultado  $r_{min} > r_v$  de la sección anterior se traduce a  $h_{min} > v^2$  y puede ser deducido a partir de (2.38). Después de realizar el cambio de variables y utilizando el diccionario (2.37), la expresión para la separación entre el par quark-antiquark (2.21) queda de la siguiente manera

$$L(f_y, v) = \frac{f_y}{2\pi T} \int_{h_{min}}^1 \frac{dh}{(1-h)^{\frac{1}{4}} \sqrt{(h-v^2)h - (1-h)hf_y^2}} , \quad (2.39)$$

mientras que la energía en el marco de referencia en reposo (2.34) se convierte en

$$\bar{E}(f_y, v) = \frac{T \sqrt{g_{YM}^2 N}}{4} \left[ \int_{h_{min}}^1 \frac{dh(h-v^2)\gamma}{(1-h)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(h-v^2)h - (1-h)hf_y^2}} - \int_0^1 \frac{dh}{(1-h)^{\frac{5}{4}}} \right] . \quad (2.40)$$

Como se hizo notar al final de la sección anterior, restar el segundo término en la ecuación (2.40) nos asegura un resultado finito y corresponde a remover la energía asociada al quark y al antiquark separados, en el sistema de referencia del par en reposo. Por otro lado, la energía del sistema en el marco de referencia donde el plasma esta en reposo puede reescribirse a partir de (4.84) y obtenemos

$$E(f_y, v) - U(v) = \frac{T \sqrt{g_{YM}^2 N}}{4} \left[ \int_{h_{min}}^1 \frac{dh \sqrt{h}}{(1-h)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(h-v^2)h - (1-h)hf_y^2}} - \int_0^1 \frac{dh \gamma}{(1-h)^{\frac{5}{4}}} \right] . \quad (2.41)$$

Se puede ver que los segundos términos en las expresiones (2.40) y (2.41) son proporcionales, mientras que con el primero esto no sucede. La razón es la siguiente: el empujón de Lorentz que nos lleva del sistema de referencia del mesón en reposo al sistema del plasma en reposo mezcla la energía del par  $\int_{h_{min}}^1 dh \bar{\mathcal{H}}_{ligado}$  con su momento  $\int_{h_{min}}^1 dh \bar{\mathcal{P}}_{ligado}$ , que como vimos en (2.36) es distinto de cero. Debido a que por definición, en el sistema de referencia del par quark-antiquark en reposo, éstos no tienen momento, lo que sucede es que dicho momento es portado por los campos gluónicos que ellos generan y que interactúan con el plasma, i.e., la densidad de momento  $\bar{\mathcal{P}}(r)$  codifica el análogo en cromodinámica al vector de Poynting en electrodinámica a una escala de energía de  $\sim r/R^2$ . Sería interesante explorar con más detalle estas relaciones utilizando los métodos de [30].

A pesar de que (2.40) y (2.41) no son proporcionales, resultan estar relacionadas a través de una expresión relativamente simple,

$$E(L, v) - U(v) = \gamma \bar{E}(L, v) + \frac{\pi}{2} \sqrt{g_{YM}^2 N T^2} \frac{v^2 \gamma^2 L}{f_y} . \quad (2.42)$$

Esto permite determinar  $E(L, v)$  una vez que conocemos  $\bar{E}(L, v)$  sin tener que realizar más integraciones numéricas. En lo que resta de esta sección nos enfocaremos en calcular ésta última.

Los resultados de la integración numérica de (2.39) se presentan en la Fig. 2.2, donde se muestra

$$l \equiv 2\pi TL$$

como función de la fuerza externa  $f_y$  aplicada para diferentes valores de la velocidad  $v$ . En todos los casos, el comportamiento cualitativo es el mismo que el encontrado en [47, 48] para el caso estático: dada una velocidad  $v$ , solo es posible obtener separaciones en un rango finito  $0 \leq L \leq L_{max}(v)$ , y cada separación en este rango puede ser alcanzada con dos valores diferentes de la fuerza  $F_y$ . La única excepción es por supuesto  $L_{max}(v)$ , que de manera empírica hemos podido localizar en un valor de la fuerza externa que puede ser aproximado por una función cuadrática de la velocidad

$$f_{y_{max}}(v) \simeq 0.949 + 0.247v + 0.223v^2 . \quad (2.43)$$

El significado físico de  $L_{max}(v)$  lo aclararemos más adelante.

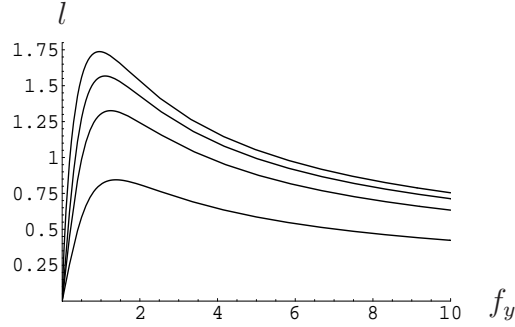


Figura 2.2: Separación del quark-antiquark (en unidades de  $1/2\pi T$ ) como función de la fuerza externa aplicada (en unidades de  $\pi\sqrt{g_{YM}^2 NT^2}/2$ ), para velocidades  $v = 0, 0.45, 0.7, 0.95$ . Las curvas de más abajo corresponden a velocidades más grandes

Combinando estos resultados con la integración numérica de (2.40), podemos calcular la energía del par quark-antiquark  $\bar{E}(L, v)$  para cualquier velocidad  $0 \leq v \leq 1$  y cualquier separación  $0 \leq L \leq L_{max}(v)$ . Los resultados están graficados en las Figs. 2.3 y 2.4, que muestran

$$\bar{e} \equiv \frac{4}{\sqrt{g_{YM}^2 NT}} \bar{E}$$

como función de  $l$ , para algunos valores representativos de  $v$ . En cada uno de los casos, la curva está dividida en dos partes: un sector punteado obtenido a partir de los valores más chicos de la fuerza aplicada consistente con la separación dada (i.e.,  $f_y < f_{y_{max}}$ ), y un sector continuo obtenido a partir de los valores más grandes ( $f_y \geq f_{y_{max}}$ ). Como se puede observar en las figuras, es precisamente éste último caso el que nos da el valor más chico para la energía del par quark-antiquark y en consecuencia,

son las curvas continuas las que resultan de mayor relevancia para nosotros ya que describen configuraciones estables. Las curvas punteadas en cambio, están asociadas a configuraciones físicas que se pueden obtener bajo ciertas condiciones iniciales de los campos gluónicos en SYM pero como se demostró en [36], son inestables.

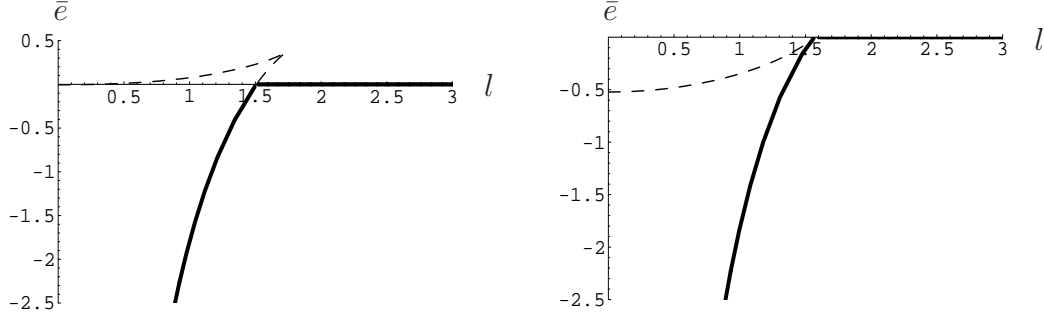


Figura 2.3: La energía del par quark-antiquark (en unidades de  $T\sqrt{g_{YM}^2 N}/4$ ) como función de la separación (en unidades de  $1/2\pi T$ ), para (a)  $v = 0$  (b)  $v = 0.45$ . La parte continua (punteada) de cada curva corresponde a configuraciones estables (inestables)

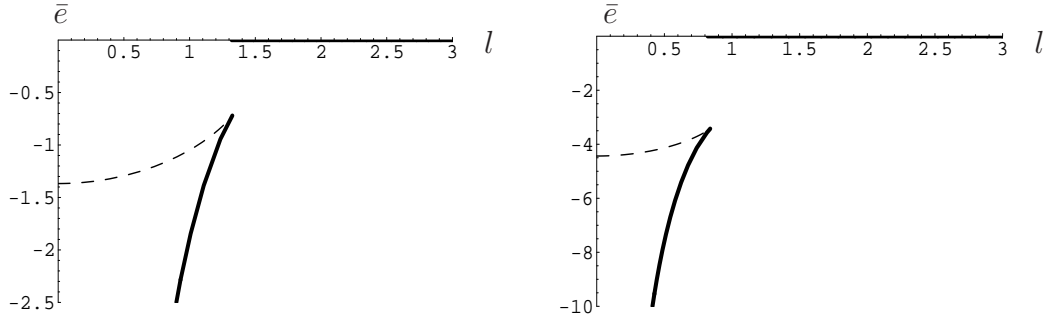


Figura 2.4: La energía del par quark-antiquark (en unidades de  $T\sqrt{g_{YM}^2 N}/4$ ) como función de la separación (en unidades de  $1/2\pi T$ ), para (a)  $v = 0.7$ , (b)  $v = 0.95$ . La parte continua (punteada) de cada curva corresponde a configuraciones estables (inestables)

Con la Fig. 2.3a verificamos que el caso  $v = 0$  (configuración estática) reproduce correctamente el potencial quark-antiquark calculado en [47, 48], y como se explica en dicho trabajo, codifica la física esperada. Para separaciones pequeñas (energías grandes), el par quark-antiquark es insensible al plasma y como resultado, el potencial tiende al comportamiento  $1/L$  que se observa a  $T = 0$  en [42]. A medida que la separación aumenta, el efecto del plasma se hace presente apantallando al quark y al antiquark; como consecuencia, la energía del sistema aumenta por encima del comportamiento coulombiano. El apantallamiento es total a una distancia  $L_* \approx 1.51/2\pi T < L_{max}(0)$  donde la energía es igual a la del sistema desligado. Para separaciones más grandes que la longitud de apantallamiento, el quark y el antiquark están libres y por tanto el potencial es cero como se indica con la línea sólida hori-

zontal. Las configuraciones descritas por (2.39) y (2.40) en el rango  $L_* < L \leq L_{max}$  son inestables y por esta razón la curva correspondiente la hemos puesto punteada.

Como se puede ver en las Figs. 2.3 y 2.4, los resultados para  $v > 0$  son muy similares al caso estático. Esencialmente, el efecto de aumentar la velocidad se traduce en desplazar la curva de  $\bar{E}(L)$  hacia abajo y hacia la izquierda. La dependencia en la velocidad de  $L_{max}$  se muestra con una curva continua en la Fig. 2.5. Hemos encontrado que se puede aproximar con

$$L_{max}(v) \simeq \frac{1.73}{2\pi T} (1 - v^2)^{1/3} , \quad (2.44)$$

como se muestra con la curva punteada en la misma figura. Más adelante comentaremos sobre el comportamiento cuando  $v \rightarrow 1$ .

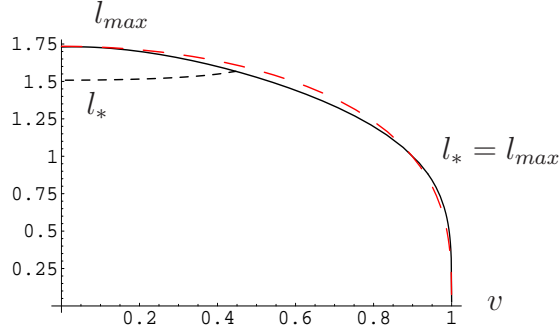


Figura 2.5: La distancia máxima entre el quark y el antiquark  $L_{max}$  y la longitud de apantallamiento  $L_*$  como función de la velocidad. Ambas distancias están en unidades de  $1/2\pi T$ .

La energía en esta separación máxima  $\bar{E}_{max}(v) \equiv \bar{E}(L_{max}, v)$ , se muestra como función de la velocidad en la Fig. 2.6. A medida que  $v$  aumenta la energía disminuye y pasa por cero cuando  $v \simeq 0.447$ , después tiende a  $-\infty$  cuando  $v \rightarrow 1$ . Hemos encontrado que para casi todo el intervalo  $0 \leq v \leq 1$ , la gráfica es prácticamente indistinguible de la función

$$\bar{E}_{max}(v) \simeq \frac{0.368T \sqrt{g_{YM}^2 N}}{4} (1 - 5v^2)(1 - v^2)^{-5/12} . \quad (2.45)$$

El comportamiento preciso en  $v \rightarrow 1$  también lo determinaremos más adelante.

Para cualquier velocidad, esperamos que la presencia del plasma sea irrelevante a distancias pequeñas, por tanto, para  $L$  suficientemente chica nuestros resultados se deben de aproximar a las curvas con temperatura cero. Estos últimos los podemos determinar de manera analítica. Tomando el límite  $T \rightarrow 0$  en (2.22), (2.39) y (2.40) obtenemos

$$L = 2R^4 \Pi_y \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{(1 - v^2)r^4 - R^4 \Pi_y^2}} \quad (2.46)$$

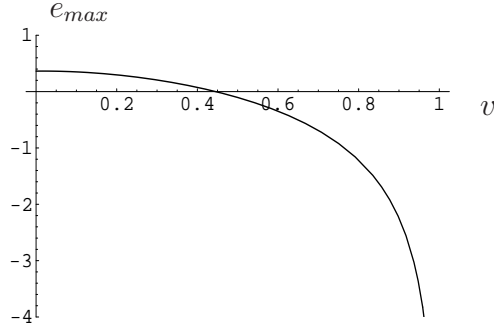


Figura 2.6: La energía máxima como función de  $v$ , en unidades de  $T\sqrt{g_{YM}^2 N}/4$ .

y

$$\bar{E} = \frac{1}{\pi\alpha'} \left[ \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{r^2 \sqrt{1-v^2} dr}{\sqrt{(1-v^2)r^4 - R^4 \Pi_y^2}} - \int_0^{\infty} dr \right], \quad (2.47)$$

con  $r_{min} = R\sqrt{\Pi_y}/(1-v^2)^{1/4}$ . Cambiando a la variable de integración adimensional  $\rho \equiv (1-v^2)^{1/4}r/R\sqrt{\Pi_y}$ , es posible encontrar una relación explícita entre  $\bar{E}$  y  $L$ ,

$$\bar{E}(L, v) = -\frac{4\pi^2 \sqrt{g_{YM}^2 N}}{\Gamma(\frac{1}{4})^4 L}, \quad (2.48)$$

que coincide, para cualquier valor de  $v$ , con el resultado del caso estático obtenido hace algunos años en [42]. Hemos comprobado también que nuestros resultados para  $\bar{E}(L, v)$  a temperatura finita se aproximan correctamente a (2.48) para separaciones pequeñas. La razón, desde el punto de vista de la teoría de cuerdas es bastante evidente: el límite  $L \rightarrow 0$  implica que  $r_{min} \rightarrow \infty$ , lo cual quiere decir que la cuerda no “explora” la geometría de AdS-Schwarzschild y por tanto, no siente diferencia alguna con la geometría de AdS. Notemos además que el segundo término en ambos lados de la ecuación (2.42) se vuelve irrelevante (del lado izquierdo, porque la ambigüedad que nos llevaba a  $U(v)$  estaba asociada a la presencia del horizonte, mientras que del lado derecho escala como  $L^3$  en este límite), y por tanto, la energía en el sistema de referencia del plasma se reduce unívocamente a

$$E(L, v) = \gamma \bar{E}(L, v) = -\frac{4\pi^2 \sqrt{g_{YM}^2 N}}{\Gamma(\frac{1}{4})^4 \sqrt{1-v^2} L}, \quad (2.49)$$

como debe de suceder por invariancia de Lorentz.<sup>2</sup>

El comportamiento de la gráfica completa de  $\bar{E}(L, v)$  para velocidades pequeñas es esencialmente el que se observa en el caso estático. A medida que la velocidad aumenta, la longitud de apantallamiento  $L_*(v)$  (que siempre definimos como la separación

<sup>2</sup>Esta dependencia también la notaron en [27], donde se incluyen algunos comentarios sobre el comportamiento de  $E(L, v)$  a temperatura finita en el contexto de la teoría de norma

máxima a partir de la cual el par quark-antiquark se desliga<sup>3</sup>) decrece lentamente, como se muestra en la Fig. 2.5 con la línea punteada pequeña. La dependencia es casi cuadrática

$$L_*(v) \simeq \frac{1.51}{2\pi T} \left(1 + \frac{1}{3}v^2\right) \quad \text{para } v < 0.447. \quad (2.50)$$

Como se observa en la misma figura,  $L_{max}(v)$  es monótonicamente decreciente, por tanto, existe una velocidad  $v_{brecha} \sim 0.447$  para la cual ambas longitudes coinciden; esto es precisamente el cero en la Fig. 2.6, y explica la cota en la región de validez de (2.50).

Para  $v > v_{brecha}$ , las dos clases de soluciones (estable e inestables) tienen energía negativa. Como se puede ver en la Fig. 2.4, existe una “brecha” que comienza a formarse entre la configuración ligada y la desligada, y cuyo ancho evoluciona como se indica en la parte negativa de la gráfica en la Fig. 2.6. Debido a que esta separación aumenta sin cota cuando  $v \rightarrow 1$ , resulta natural preguntarse si para  $v > v_{brecha}$  pueden existir configuraciones de  $q\bar{q}$  ligados con un rango de separación  $L > L_{max}$ , que reduzcan o eliminen la “brecha”. Como discutimos anteriormente en este capítulo, sin duda existen configuraciones en las que el par quark-antiquark se mueve con velocidad constante pero los campos de color tienen una dependencia temporal más complicada. Su descripción desde el punto de vista de AdS fue discutida en el párrafo que le sigue a (2.12); involucra una cuerda que se acuesta hacia atrás como en la Fig. 2.1a y tiene una dependencia temporal más allá de su movimiento a velocidad constante  $v$ . Estas configuraciones existen en ambos casos  $L \leq L_{max}$  y  $L > L_{max}$ , sin embargo, las primeras son inestables y por tanto no resultan importantes para la discusión. Lo que no resulta para nada obvio es si al menos una de las configuraciones con  $L > L_{max}$  puede llegar a tener energía negativa. Ésta es una pregunta complicada que pareciera requerir de una exploración numérica del espacio de soluciones correspondientes al sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales.

En lo que resta de este capítulo, asumiremos que para todo valor de  $L$  y  $v$ , la configuración con la mínima energía es aquella que tiene la dependencia temporal más simple: para  $L < L_{max}$ , el sistema ligado de  $q\bar{q}$  dual a la cuerda parada como se muestra en la Fig. 2.1b y para  $L > L_{max}$ , el quark y el antiquark desligados dual a dos copias separadas de la cuerda que se estudió en [21, 22]. De esta manera, a partir de las gráficas en Figs. 2.3 y 2.4, podemos ver que para  $v > v_{brecha}$  la longitud de apantallamiento debe ser identificada con el punto donde está la discontinuidad en

---

<sup>3</sup>Dada la forma de la gráfica de la energía, el hecho de que  $\bar{E}(L_*(v), v) = 0$  implica que para separaciones  $L > L_*$ , pasar de la configuración ligada a la desligada es válido desde el punto de vista de la conservación de la energía. Sin embargo, como hemos visto, en general el momento de la configuración es distinto de cero y por tanto, estrictamente hablando, habría que verificar que dicha transición también es válida desde el punto de vista de la conservación del momento. Para realizar esta cuenta sería necesario conocer de manera precisa el momento intrínseco del quark aislado, pero como ya hemos visto, por ahora, esto no es posible. Si tuviéramos conocimiento de este resultado podríamos calcular la longitud de apantallamiento directamente a partir de la energía  $E(L, v)$  en el sistema de referencia del plasma.

$\bar{E}(L)$ , i.e.,

$$L_*(v) = L_{max}(v) \quad \text{para } v > 0.447. \quad (2.51)$$

La predicción que hace la correspondencia AdS/CFT sobre la dependencia en la velocidad de la longitud de apantallamiento (para un ángulo arbitrario entre la dirección del movimiento y la separación del par quark-antiquark) fue el tema principal en [50] que apareció cuando nuestro trabajo estaba en preparación. Estos autores no calcularon  $\bar{E}(L, v)$ , y escogieron definir la longitud de apantallamiento no como  $L_*$ , sino como la separación máxima permitida  $L_{max}$  en todo el rango de velocidades. Sus ecuaciones y resultados numéricos (para  $\theta = \pi/2$ ) están en completo acuerdo con los nuestros. Como se observa en (2.44), nosotros encontramos que si se considera todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq 1$ , la función que mejor describe a  $L_{max}(v)$  es proporcional a  $(1 - v^2)^{1/3}$ . Por el otro lado, Liu et al. encontraron de manera analítica que el comportamiento de  $L_{max}(v)$  en el límite ultra-relativista es proporcional a  $(1 - v^2)^{1/4}$ . Este resultado se puede confirmar directamente a partir de (2.39), que en el límite  $v \rightarrow 1$  se reduce a

$$L(f_y, v) = \frac{1}{2\pi T} \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} \frac{f_y}{(1 + f_y^2)^{3/4}} (1 - v^2)^{1/4}. \quad (2.52)$$

En acuerdo con la ecuación (2.43), esta expresión tiene un máximo en  $f_{y_{max}} = \sqrt{2}$ , que nos lleva a

$$L_{max}(v) = \frac{1}{2\pi T} \frac{3^{-3/4} 8\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} (1 - v^2)^{1/4} \approx \frac{1.49}{2\pi T} (1 - v^2)^{1/4} \quad \text{for } v \sim 1. \quad (2.53)$$

Combinando esto con (2.50) y (2.51), obtenemos una expresión relativamente simple

$$L_*(v) \simeq \frac{1.51}{2\pi T} \left( 1 + \frac{7}{12}v^2 - \frac{7}{12}v^4 \right) (1 - v^2)^{1/4} \quad \text{for } 0 \leq v \leq 1, \quad (2.54)$$

que captura el comportamiento analítico correcto en  $v \rightarrow 0$  y  $v \rightarrow 1$ , y empata adecuadamente con los resultados numéricos en todo el rango de velocidades.

Como se puede ver en estas últimas dos ecuaciones, la longitud de apantallamiento  $L_*(v)$  decrece monótonicamente a cero para velocidades grandes, lo cual implica que  $\bar{E}(L, v) = 0$  excepto en el intervalo  $0 < L < L_*(v)$ , donde  $\bar{E}(L, v)$  se puede obtener a partir de (2.52) y el límite  $v \rightarrow 1$  de (2.40),

$$\bar{E}(f_y, v) = -\frac{T\sqrt{g_{YM}^2 N}}{4} \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} \frac{2 + f_y^2}{(1 + f_y^2)^{3/4}} (1 - v^2)^{-1/4}. \quad (2.55)$$

Es interesante notar que a pesar de que  $L$  es pequeña y que la condición  $r_{min} > r_v = r_H(1 - v^2)^{-1/4}$  obliga a la cuerda a quedarse cerca de la frontera, la dependencia en  $L$  de la energía se mantiene más complicada que en el caso  $T = 0$ , y es cualitativamente similar a la gráfica que se muestra en la Fig. 2.4: existe una región inestable para

$f_y < \sqrt{2}$ , y una región estable  $f_y > \sqrt{2}$ , tal que para  $f_y \gg 1$  uno recupera el comportamiento coulombiano de (2.48). Evaluando (2.4) en  $f_{y_{max}} = \sqrt{2}$ , encontramos

$$\bar{E}_{max}(v) = -\frac{T\sqrt{g_{YM}^2 N} 2^{9/2} 3^{-3/4} \pi^{3/2}}{4 \Gamma(1/4)^2} (1 - v^2)^{-1/4} \quad \text{para } v \sim 1. \quad (2.56)$$

Notemos nuevamente la diferencia entre el exponente de ésta expresión y el de (2.45), recordando que el último se encontró como una aproximación en todo el rango de velocidades.

En el límite  $v \rightarrow 1$ , el lazo de Wilson trazado por nuestro par quark-antiquark se aproxima al lazo Wilson tipo tiempo de [40], utilizado para proponer una definición no perturbativa del parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ .<sup>4</sup> Esperábamos que nuestros resultados hicieran contacto con los de [40] en este límite; sin embargo, para nuestra sorpresa no fue así. La diferencia es drástica: la cuerda de [40] se extiende desde la frontera hasta el horizonte y de regreso, mientras que para nosotros, en el límite  $v \rightarrow 1$ , la cuerda que utilizamos para describir configuraciones ligadas explora únicamente una región muy pequeña de la geometría cercana a la frontera.<sup>5</sup>

El mayor problema que hay para lograr una interpolación entre nuestros resultados y los de [40] es que, para cualquier valor de  $v$ , nosotros encontramos y utilizamos una hoja de mundo cuya área es real, mientras que los autores del citado trabajo usaron una hoja de mundo con área imaginaria. Esta diferencia no parece que se la podamos atribuir al hecho de que su lazo de Wilson es estrictamente nulo, a diferencia del nuestro que solo lo es de manera aproximada, ya que los cálculos en la teoría de norma que motivan la conexión con el parámetro de supresión de chorros, construido a partir de la aproximación eikonal, están justificados en términos de un límite de altas energías, que de manera manifiesta toma  $v \rightarrow 1$  desde abajo [39, 57]. Más aún, recientemente en [50, 56] presentaron un argumento para justificar cómo el resultado del lazo de Wilson nulo de [40] puede ser obtenido de manera continua a partir de lazos de Wilson que corresponden a velocidades que se aproximan a  $v$  desde abajo. El punto clave aquí es que, para cualquier velocidad  $v < 1$ , los autores de [40, 50] impusieron condiciones de frontera para la cuerda en un radio finito  $r = r_{LRW} \ll r_v$  (con  $r_v$  el radio crítico dado en (2.8)) y no en la frontera de AdS-Schwarzschild. Como resultado de esto, su hoja de mundo está metida completamente en la región  $r < r_v$ , que es inaccesible para una cuerda que llega a la frontera como la que estamos considerando en este trabajo. Esto explica por qué las hojas de mundo que llevan al resultado de [40] son tipo espacio.

Desafortunadamente no entendemos la física que esta detrás de esta prescripción. Por supuesto uno puede imaginarse una situación donde la elección de las condiciones

---

<sup>4</sup>Siendo más precisos, hay que tomar el límite  $v \rightarrow -1$  para estar de acuerdo con las convenciones usadas en [40].

<sup>5</sup>Hay que recordar que una configuración de este tipo solo esta permitida si la separación entre los extremos de la cuerda, que en el límite de velocidades grandes tiende a cero, es menor que la longitud de apantallamiento. Para separaciones más grandes, la configuración esta desligada y tenemos dos cuerdas que se extienden de la frontera hasta infinito, sin embargo, aún así la situación es distinta a la considerada en [40].



de frontera para una integral de trayectoria resulten en que ésta sea dominada por un punto silla con acción imaginaria<sup>6</sup>; sin embargo, no vemos como ésto puede llegar a ser el caso para el problema en cuestión. Para determinar el valor de un lazo de Wilson trazado por un par quark-antiquark que se mueve con cualquier velocidad más chica que, pero arbitrariamente cercana, a la velocidad de la luz, la receta de la correspondencia AdS/CFT [42] requiere que las condiciones de frontera de la cuerda (2.11) sean impuestas en  $r \rightarrow \infty$ , ya que sólo es en este límite que el quark y el antiquark duales a la cuerda son puntuales. Debido a que el límite se toma con  $v$  fija, la cuerda en cuestión no tendrá otra posibilidad que estar completamente metida en la región  $r > r_v$ , por tanto, su hoja de mundo será tipo tiempo y el valor predicho para el lazo de Wilson con acoplamiento fuerte coincidirá sin ambigüedades con el resultado  $\exp[i\bar{T}\bar{E}(L, v)]$  obtenido en este trabajo.

Si las condiciones de frontera de la cuerda (2.11) son puestas como se recomienda en [40, 50, 56], entonces los extremos de la misma quedan a un radio finito  $r = r_{LRW} \ll r_v$ . En este caso, la integral de trayectoria para la cuerda es dominada por un punto silla con acción imaginaria, una condición que como fue discutido en [50, 56, 57] es necesaria si se desea hacer contacto con el parametro de supresión de chorros definido en los modelos fenomenológicos de pérdida de energía. Sin embargo, de acuerdo con el razonamiento usual de la conexión UV/IR [58], esta integral de trayectoria estaría calculando un lazo de Wilson “ancho” (en lugar de uno normal), trazado por fuentes de los campos gluónicos que tienen un tamaño característico  $d \sim R^2/r_{LRW} \gg R^2/r_v \simeq (1 - v^2)^{1/4}/T$  y que de acuerdo con (2.54), resulta ser mucho más grande que la longitud de apantallamiento para una velocidad dada. Para nosotros no es claro si este lazo de Wilson “ancho” es relevante en algún sentido para los cálculos en la teoría de norma [39] que motivaron la propuesta de [40]. Por supuesto, uno no debe perder de vista el hecho de que el lazo se va haciendo más delgado (en el sentido de que  $d \rightarrow 0$ ) a medida que  $v \rightarrow 1$ , y precisamente cuando  $v = 1$ , lo que uno está calculando es el lazo de Wilson usual (con una hoja de mundo que se extiende correctamente hasta la frontera de AdS-Scharzschild). Sin embargo, como se explicó anteriormente, las bases de la teoría de norma para la definición de [40] parecen permitir un acercamiento suave a través de los lazos de Wilson *estándard* con  $v \rightarrow 1$  desde abajo, lo cual sería calculado por la correspondencia AdS/CFT usando hojas de mundo tipo tiempo con  $0 \leq v \leq 1$  (y nosotros encontraríamos  $\bar{E}(L, v = 1) = 0$ ). Quizás una caracterización más útil del lazo de Wilson con  $v = 1$  calculado en [40] es como un límite suave del lazo de Wilson tomando  $v \rightarrow 1$  pero desde arriba.

Antes de dejar este tema, es interesante notar que la dependencia  $\bar{E} \propto L^2$  que se necesita en la definición de  $\hat{q}$  propuesta en [40] se puede obtener tomando el límite  $v \rightarrow 1$  de las hojas de mundo tipo tiempo que analizamos en este trabajo, enfocándonos no en la región estable, sino en la región inestable (punteada) de las curvas de  $\bar{E}(L, v)$  en la Fig. 2.4 que están cerca de la intersección con el eje  $\bar{E}$ . Esta región corresponde

---

<sup>6</sup>Un ejemplo sencillo de ésto se obtiene calculando el propagador de una partícula relativista libre que se mueve a lo largo de un intervalo tipo espacio.

a configuraciones con separación pequeña y fuerza externa aplicada  $f_y \ll 1$ . Usando estas condiciones, se puede deducir directamente de (2.39), (2.40) y considerando al siguiente orden en  $L$  que,

$$\begin{aligned} \bar{E}(L) = & \frac{T(g_{YM}^2 N)^{\frac{1}{2}}}{4} \left[ \int_{h_{min}}^1 \frac{\gamma \sqrt{h-v^2} dh}{\sqrt{h}(1-h)^{\frac{5}{4}}} - \int_0^1 \frac{dh}{(1-h)^{\frac{5}{4}}} \right] \\ & + \frac{L^2 T^3 \pi^2 (g_{YM}^2 N)^{\frac{1}{2}}}{2} \gamma \left[ \int_{h_{min}}^1 \frac{dh}{(1-h)^{\frac{1}{4}} \sqrt{h(h-v^2)}} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

es decir, la energía depende cuadráticamente de la separación del par quark-antiquark, como se deseaba. En el límite  $v \rightarrow 1$ , esta relación implica

$$\begin{aligned} \bar{E}(L) = & \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ -(1-v^2)^{-1/4} \mathcal{A} + (1-v^2)^{-3/4} \mathcal{K} L^2 \right], \\ \mathcal{A} = & \frac{8\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2} \sqrt{g_{YM}^2 N T}, \quad \mathcal{K} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma(1/4)^2 \sqrt{g_{YM}^2 N T^3}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde el valor numérico del prefactor en la primera ecuación fue escogido de acuerdo a la normalización usada en [40], para poder comparar directamente  $\mathcal{K}$  con  $\hat{q}$ . Independientemente de si existe algún argumento que relacione el coeficiente  $\mathcal{K}$  con el parámetro de supresión de chorros tal y como se define en los modelos fenomenológicos [68, 39], este cálculo muestra que la información codificada en el parámetro  $\hat{q}$  definido en [40] puede ser obtenida usando las hojas de mundo tipo tiempo estudiadas en este trabajo. Esto es especialmente interesante por el hecho de que en el límite  $v \rightarrow 1$ , estas hojas de mundo nunca se alejan mucho de la frontera de AdS-Schwarzschild. Debido a la invariancia conforme de la teoría de norma en cuestión, la dependencia en la temperatura de los parámetros  $\mathcal{K}$  y  $\hat{q}$  debía de coincidir. Tampoco es particularmente raro que tengan la misma dependencia en la constante de 't Hooft, pero lo que quizás sí vale la pena notar es que los coeficientes numéricos son prácticamente iguales,

$$\mathcal{K} = (\Gamma(1/4)^4 / 16\pi^2) \hat{q} \approx 1.1 \hat{q}.$$

A falta de una conexión directa entre estos dos parámetros en la teoría de norma (o de cuerdas), podría resultar interesante explorar su relación en otras teorías de norma cuyo dual gravitacional conocemos.

# Capítulo 3

## La pérdida de energía de gluones, bariones y $k$ -quarks en un plasma de SYM $\mathcal{N} = 4$

### Resumen

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 3.1 encontramos el encaje que nos interesa para la D5-brana. En el proceso, descubrimos que la configuración de la D5-brana a un ángulo polar constante (3.10)-(3.11) obtenida en [82, 83] está incompleta; le falta una parte del encaje (que denominamos “tapa”) que se encuentra en la frontera de AdS y cuya presencia es crucial para reproducir correctamente la energía y la carga  $SU(4)$  del sistema dual a  $k$ -quarks. El encaje completo de la D5-brana resulta ser un caso especial de las soluciones obtenidas previamente en [54] y puede ser descrito como el límite  $S \rightarrow \infty$  de (3.12).

En la Sección 3.2 obtenemos a partir de las de D5-branas el valor de la fuerza de arrastre que siente un sistema de  $k$ -quarks ligados. El resultado está dado por la ecuación (3.14), la cual tiene una dependencia no trivial en  $k$  que se muestra en la Fig. 3.1. Verificamos que para  $k = 1$  y  $N$  grande nuestros resultados coinciden con los cálculos de la fuerza de arrastre que siente un quark realizados en [21, 22], pero (3.14) tiene además una serie infinita de correcciones en  $1/N$  que en analogía con [75], deben de codificar información sobre las autointeracciones de la cuerda.

Desde el punto de vista de la teoría de norma, un estado ligado de  $(N - k)$  quarks en la representación totalmente antisimétrica debe ser equivalente a un estado ligado de  $k$ -antiquarks en la representación totalmente antisimétrica; debido a la simetría que existe entre quarks y antiquarks, ésto predice que la fuerza de arrastre que siente un sistema de  $k$ -quarks debe ser la misma que la que siente un sistema de  $(N - k)$  quarks, precisamente como encontramos en (3.14). Esto implica en particular que la fuerza es cero para el caso del barión,  $k = N$ , lo cual parece natural dados los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior para el mesón.

También encontramos una conexión interesante entre nuestro resultado de la

fuerza de arrastre (3.14) para  $k$ -quarks en SYM  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones y la tensión  $\sigma^{(k)}$  que controla la ley del área en los lazos de Wilson tipo espacio en la misma teoría. La relación precisa entre ambas cantidades está dada por (3.16). Hacemos la observación de que (3.16) reproduce correctamente únicamente algunos de los resultados previos sobre la fuerza de arrastre [25, 67].

En la Sección 3.3 finalmente nos enfocamos en el caso del gluón, que de acuerdo al diccionario de [79] corresponde a un sistema de dos D5-branas que portan  $k = N - 1$  y  $k = 1$  unidades de flujo eléctrico, respectivamente. Este sistema está descrito a nivel árbol por la acción no abeliana (3.20) más una infinidad de correcciones que involucran conmutadores y derivadas de los campos. En el límite  $N \rightarrow \infty$  las dos D5-branas se desacoplan y la tasa total de pérdida de energía es simplemente la suma de la tasas de cada brana por separado. El resultado nuevamente está dado por (3.14). La conclusión es que para  $N$  grande, la fuerza disipativa que siente un gluón pesado es, como indica (3.22), dos veces más grande que la que siente un quark pesado, precisamente como predice teoría de grupos del lado de la teoría de norma.

### 3.1. El encaje de la D5-brana

De acuerdo con la prescripción de [78, 79], para poder calcular un estado ligado de quarks en la representación totalmente antisimétrica de  $SU(N)$ , moviéndose a través del plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$ , debemos de considerar una D5-brana con flujo eléctrico viviendo en la geometría de  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{\sqrt{H}} (-h dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{\sqrt{H}}{h} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \\ H &= \frac{R^4}{r^4}, \quad h = 1 - \frac{r_H^4}{r^4}, \quad R^4 = 4\pi N g_s l_s^4, \end{aligned} \quad (3.1)$$

con intensidad de campo Ramond-Ramond autodual

$$G_{(5)} \equiv dC_{(4)} = 4R^4 \left( \text{vol}(\mathbf{S}^5) d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_5 - \frac{r^3}{R^8} dt \wedge \dots \wedge dx_3 \wedge dr \right), \quad (3.2)$$

donde  $\text{vol}(\mathbf{S}^5) \equiv \sin^4 \theta_1 \text{vol}(\mathbf{S}^4) \equiv \sin^4 \theta_1 \sin^3 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin \theta_4$ . La D5-brana se acopla a estos campos a través de la acción de Born-Infeld y al término de Chern-Simons

$$\begin{aligned} S_{D5} &= T_{D5} \int d^6 \sigma \left[ -\sqrt{-\det(g_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} + (2\pi\alpha' F_{(2)} \wedge c_{(4)})_{0\dots 5} \right], \\ g_{ab} &\equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad c_{a_1\dots a_4} \equiv \partial_{a_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{a_4} X^{\mu_4} C_{\mu_1\dots\mu_4}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Siguiendo [78, 79], buscamos encajes donde la D5-brana se extienda radialmente en AdS, porte un campo eléctrico radial y se enrolle en la  $\mathbf{S}^4 \subset \mathbf{S}^5$ ; para ésto, es conveniente escoger la norma estática  $\sigma^a = (t, r, \theta_2, \dots, \theta_5)$ , y denotar  $\theta \equiv \theta_1$ . Configuraciones de este tipo fueron estudiadas previamente en [53, 54, 82, 83]. Como en

[21, 22], necesitamos una solución donde la brana se mueva a velocidad constante en la dirección  $x \equiv x^1$ , para ello, podemos utilizar el ansatz estacionario descrito por

$$X(t, r) = vt + \xi(r), \quad \theta(r), \quad X^2 = X^3 = 0. \quad (3.4)$$

Bajo estas condiciones, el término de Chern-Simons en (3.3) solo incluirá las componentes  $\theta_2 \dots \theta_5$  del campo de norma Ramond-Ramond. Integrando  $\partial_{\theta_1} C_{\theta_2 \dots \theta_5} = G_{\theta_1 \dots \theta_5}$ , encontramos que esta dado por

$$C_{\theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5} = -R^4 D(\theta) \text{vol}(\mathbf{S}^4), \quad (3.5)$$

donde, como en [54], hemos definido

$$D(\theta) \equiv -\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}\sin\theta \cos\theta + \sin^3\theta \cos\theta. \quad (3.6)$$

Es importante notar, que el valor de la constante de integración en esta expresión, aparece en la forma generalizada de un lazo de Wilson  $\int_{\mathbf{S}^4} C_{(4)} \propto D(\theta)$ , y en consecuencia, sí afecta la física del problema. Como en [82, 83], para asegurarnos que la solución que encontremos tiene una interpretación física, hemos tomado la constante igual a cero.<sup>1</sup>

Sustituyendo (3.4) y (3.5) en la acción (3.3), encontramos que tanto el término de Born-Infeld como el de Chern-Simons son proporcionales a  $\text{vol}(\mathbf{S}^4)$ , cuya integral es el volumen de la  $\mathbf{S}^4$ , es decir,  $\Omega_4 = 8\pi^2/3$ . Usando  $T_{D5} = 1/(2\pi)^5 g_s l_s^6$  y la definición de  $R$  en (3.1) lo que nos queda es

$$S_{D5} = \frac{N}{3\pi^2 \alpha'} \int dt dr \left[ -\sin^4\theta \sqrt{-g^{(F1)} - (2\pi\alpha' F_{tr})^2} - 2\pi\alpha' F_{tr} D \right], \quad (3.7)$$

donde

$$g^{(F1)} \equiv (G_{tt} + v^2 G_{xx})(G_{rr} + \theta'^2 G_{\theta\theta}) + G_{tt} G_{xx} X'^2 \quad (3.8)$$

es el determinante de la métrica inducida para una cuerda encajada en la geometría (3.1) de acuerdo con (3.4), y las primas denotan derivadas con respecto a  $r$ .

Las ecuaciones de movimiento para  $A_t$  y  $A_r$  implican que el momento conjugado de  $A_r$  es una constante, y debido a la condición de cuantización del flujo, éste debe de ser un entero:

$$\Pi_{A_r}^t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{D5}}{\partial(\partial_t A_r)} = \frac{2N}{3\pi} \left( \frac{E \sin^4\theta}{\sqrt{-g^{(F1)} - E^2}} - D \right) = k \in \mathbf{Z}, \quad (3.9)$$

donde hemos tomado  $E \equiv 2\pi\alpha' F_{tr}$ . Como sucede en el contexto de las cuerdas de Born-Infeld, el entero  $k$  mide la cantidad de carga de cuerda fundamental que porta la D5-brana:  $\partial \mathcal{L}_{D5} / \partial B_{tr} = k / 2\pi\alpha'$ . Vale la pena enfatizar, que de acuerdo con (3.9),

<sup>1</sup>La otra opción es tomar la constante igual a  $3\pi/2$  como se hizo en [80], pero la física es equivalente.

esta carga no solo recibe contribución del campo eléctrico (ya relevante en un fondo trivial), sino también de la cuatro forma R-R (3.5). Para un valor de  $k$  dado, la ecuación de movimiento de  $\theta$  permite una solución donde la D5-brana se acomoda a un ángulo polar constante

$$\theta = \Theta_k, \quad \pi \frac{k}{N} = \Theta_k - \sin \Theta_k \cos \Theta_k, \quad (3.10)$$

siempre y cuando el campo eléctrico este dado por

$$E = \pm \cos \Theta_k \sqrt{-g^{(F1)}}, \quad (3.11)$$

con el signo escogido para que coincida con el de  $\sin \Theta_k$ .

Se puede ver a partir de (3.10) que  $\Theta_{-k} = -\Theta_k$ , lo cual en (3.11) implica que  $E(-k) = -E(k)$ . Esto codifica la relación que existe entre  $k$  cuerdas y  $k$  anticuerdas (i.e., cuerdas con la orientación opuesta), que como ya hemos explicado anteriormente, son duales a  $k$  quarks y  $k$  antiquarks, respectivamente. La D5-brana correspondiente tiene exactamente el mismo encaje pero con la orientación opuesta y tiene un campo eléctrico que es igual en magnitud pero con el signo contrario. Existe también una conexión muy cercana entre el sistema de  $k$  y  $N - k$  cuerdas/quarks: a partir de (3.10) se tiene que  $\Theta_{N-k} = \pi - \Theta_k$ , lo cual quiere decir que la correspondiente D5-brana se enrolla en la cuatro esfera al mismo ángulo  $\Theta_k$  pero medido ahora desde el polo sur de la  $\mathbf{S}^5$ ,<sup>2</sup> y utilizando (3.11) esto implica que  $E(N - k) = -E(k)$ . La interpretación de esta simetría desde el punto de vista de la teoría de norma quedará clara más adelante.

En el caso extremal,  $r_H = 0$ , la invariancia de Lorentz de (3.1) a lo largo de las direcciones en la frontera garantiza que la configuración (3.4), en la cual la D5-brana se mueve a velocidad constante  $v$  en la dirección  $x$ , sea solo un empujón de Lorentz de la solución estática, por lo que debemos tener  $\xi(r) = 0$  y por tanto  $X' = 0$ , i.e., la brana se mantiene “derecha”. Los autores de [78, 79] trabajaron precisamente con este caso, e identificaron la solución con el ángulo polar constante (3.10)-(3.11), obtenida primero en [82], como la contraparte en AdS a un estado ligado, a temperatura cero en SYM  $\mathcal{N} = 4$ , de  $k$  quarks externos en la representación totalmente antisimétrica, moviéndose a velocidad constante  $v$ . La identificación se basó principalmente en el hecho de que, al igual que una cuerda fundamental puramente radial, este encaje de la D5-brana preserva las mismas simetrías fermiónicas y bosónicas que la fuente de la teoría de norma: es  $\frac{1}{2}$ -BPS e invariante bajo el subgrupo  $SO(2, 1) \times SO(3) \simeq SU(1, 1) \times SU(2)$  (generado por  $P_0, K_0, D$  y  $J_1, J_2, J_3$ ) del grupo conforme  $SO(4, 2)$ , y también invariante bajo el subgrupo  $SO(5)$  del grupo de simetría  $R\ SO(6) \simeq SU(4)$  —resumiendo, es invariante  $Osp(4^*|4)$ . Como se enfatizó en [82], una característica interesante de esta configuración es que su energía no es proporcional a su carga. Retomaremos este punto más adelante.

---

<sup>2</sup>Escoger la constante de integración en (3.6) como se propuso en el pie de página anterior, simplemente intercambia el papel del polo norte y del polo sur.

En [54] obtuvieron una familia diferente de configuraciones para la D5-brana que son  $\frac{1}{2}$ -BPS y que describen un estado ligado de  $k$  quarks. Éstas por supuesto, también son soluciones a las ecuaciones que se obtienen de extremizar (3.7), pero la diferencia es que tienen un perfil no trivial de  $\theta(r)$ . En ese mismo trabajo obtuvieron el inverso de dicho perfil de manera analítica,

$$r(\theta) = \frac{S}{\sin \theta} \left[ \frac{(\pi k/N - \theta + \sin \theta \cos \theta)}{\pi k/N} \right]^{1/3}, \quad (3.12)$$

donde  $S$  es una constante arbitraria, y el campo eléctrico correspondiente coincide con (3.9). Estas soluciones cubren el rango  $0 \leq \theta \leq \Theta_k$  (donde la expresión que está dentro del paréntesis es positiva) y tienen  $r$  decreciendo monótonicamente desde  $\infty$  en  $\theta = 0$  hasta 0 en  $\theta = \Theta_k$ . Describen un “manejo” de cuerdas fundamentales que se extienden radialmente desde la frontera en  $r \rightarrow \infty$  hasta el horizonte en  $r = 0$ , siempre apuntando en la dirección del polo norte de la  $\mathbf{S}^5$ , en  $\theta = 0$ .

En [53, 86], se mostró que los encajes (3.12) son BPS desde el punto de vista de preservación de supersimetría, mientras que en [54, 86, 87] lo hicieron desde la perspectiva de minimización de la energía. Estos encajes rompen 16 supersimetrías, y tienen la energía de  $k$  cuerdas fundamentales, lo que apoya fuertemente la identificación con un estado ligado de  $k$  quarks en SYM  $\mathcal{N} = 4$  [54]. Ésto es válido para cualquier valor del factor de escala  $S$ , el cual es por tanto un módulo en el espacio de configuraciones con la misma energía. A través de la conexión estándar UV-IR [58], en la teoría de norma,  $L \equiv R^2/S$  es una medida de la extensión espacial que tiene el estado ligado de  $k$  quarks, como se puede ver de manera explícita en [38] para el caso  $k = N$ . La existencia de soluciones con un tamaño arbitrario es, por supuesto, una consecuencia de la invariancia conforme de SYM  $\mathcal{N} = 4$ .

Dado que tanto (3.10)-(3.11) como la familia con un parámetro (3.12) son configuraciones  $\frac{1}{2}$ -BPS de la D5-brana duales a un estado ligado de  $k$  quarks, resulta natural preguntarse si existe alguna relación entre ellas. Una pista importante en esta dirección viene del hecho de que, a pesar de que preservan las mismas simetrías fermiónicas, las bosónicas no coinciden completamente. Para cualquier factor de escala  $S$ , el encaje (3.12) es como (3.10)-(3.11) invariante bajo  $SO(5) \subset SO(6)$  y  $SO(3) \subset SO(4, 2)$ , pero no bajo  $SO(2, 1) \subset SO(4, 2)$ , ya que el generador de dilataciones  $D$  manda  $(t, \vec{x}, r) \rightarrow (\lambda t, \lambda \vec{x}, r/\lambda)$  y en consecuencia reescala el valor de  $S$ .

La única excepción es el caso  $S \rightarrow \infty$  (el cual corresponde a una fuente en la teoría de norma cuyo tamaño es  $L \rightarrow 0$ ), que es invariante bajo dilataciones, y así, bajo exactamente el mismo grupo  $Osp(4^*|4)$  que el encaje con ángulo constante encontrado en [82]. La razón del acuerdo se puede ver directamente: en el límite  $S \rightarrow \infty$ , la parte de (3.12) que está cerca de  $r = 0$  y  $\theta = \Theta_k$  se expande para coincidir exactamente con (3.10)-(3.11). El encaje de la D5-brana con ángulo constante obtenido en [82] se puede entender en éste sentido, como un caso particular de la familia de configuraciones con un parámetro. Más aún, la solución de [82] resulta incompleta, ya que le falta la parte de (3.12) que cubre el rango angular  $0 \leq \theta < \Theta_k$ , y que es empujado hacia la frontera de AdS en el límite  $S \rightarrow \infty$ . Para ponerlo en un lenguaje quizás más claro, cada una

de las gráficas polares que se muestran en la Fig. 1 de [54] pueden ser descritas como un “cono” pequeño pegado a un tubo largo, mientras que la solución (3.10)-(3.11) se obtiene, después de un reescalamiento infinito, tomando lo que ahora es un cono infinito e ignorando el tubo, que en este límite, está en la frontera y se puede pensar como la tapa del cono.

Esta última observación resuelve el problema de la energía y de la carga que apareció en [82]: una vez que incluimos la tapa, encontramos que la energía total de la configuración es proporcional a su carga, como se demostró en [54].<sup>3</sup> Esta aclaración es particularmente importante en el caso del barión,  $k = N$ , donde encontramos que  $\Theta_N = \pi$ , lo cual quiere decir que el cono (3.10)-(3.11) se colapsó para convertirse en una cuerda sin tensión, y que la “tapa” ahora consiste de una D5-brana completamente enrollada alrededor de la  $S^5$  en  $r \rightarrow \infty$  y con la misma energía que  $N$  quarks.

La presencia de la tapa también juega un papel relevante en la explicación de cómo el encaje de la D5-brana codifica los números cuánticos de  $SU(4)$  del quark. A diferencia del cono (3.10), que está en el polo sur o en el polo norte de la cinco esfera dependiendo de si  $k < N/2$  o  $k > N/2$ , la tapa incluida en la solución completa (3.12) siempre se cierra en el polo norte, reflejando correctamente el hecho de que la D5-brana en cuestión describe un “manejo” de cuerdas (o anticuerdas) apuntando en la dirección  $\theta = 0$ , y consecuentemente es dual a  $k$  quarks (o antiquarks) que son fuente únicamente de un campo escalar específico en SYM, que define la dirección polar del espacio interno. A esta solución en [54] la llamaron “tubos inferiores”. De igual forma, uno puede construir la solución para los “tubos superiores”, es decir, donde la tapa cierra en el polo sur, y describe un “manejo” de anticuerdas (o cuerdas) apuntando en la dirección  $\theta = \pi$ .<sup>4</sup> Un encaje de este tipo, en términos de energía, corresponde a un estado ligado de  $k$  anticuerdas (o cuerdas) y encontramos que consiste de un cono en  $\theta = \Theta_{N-k}$  y una tapa que cubre el rango angular  $\Theta_{N-k} < \theta \leq \pi$ . Ahora, por simetría, el ángulo que este cono “superior” hace con el polo sur,  $\pi - \Theta_{N-k}$ , debe de coincidir con el ángulo  $\Theta_k$  que el cono “inferior” hace con el polo norte. Esto explica la conexión  $\Theta_{N-k} = \pi - \Theta_k$  antes mencionada, y que ahora reconocemos, en términos del lenguaje de la teoría de cuerdas, como la afirmación en la teoría de norma de que un estado ligado totalmente antisimétrico de  $N - k$  quarks con una carga  $SU(4)$  dada, es equivalente a un estado ligado totalmente antisimétrico de  $k$  antiquarks con la carga  $SU(4)$  opuesta.

En estos últimos párrafos nos hemos concentrado en estudiar lo que sucede en el fondo extremal tal y como lo hicieron en [54, 78, 79, 82]; sin embargo, en este trabajo estamos más interesados en comprender los efectos del plasma, y por tanto, nuestra preocupación son los encajes de la D5-brana en la geometría no extremal

---

<sup>3</sup>Nótese que la discusión en [54] sobre la carga faltante en los casos  $k \neq 0, N/2, N$  fue equivocada; la carga relevante en todos los casos está dada por  $k$  como en (3.9), y no por el flujo total del campo R-R interceptado por la D5-brana.

<sup>4</sup>Éstas son comparables a las soluciones de [82] que resultan de la elección alternativa de la constante de integración descrita en los pies de página 1 y 2.



(3.1) con  $r_H > 0$ . Como vimos anteriormente, en ese caso, el encaje con ángulo constante (3.10)-(3.11) es todavía una solución [80]. Por otro lado, las configuraciones (3.12), no permiten una generalización directa al caso no extremal [55, 88]. Un punto importante es que la presencia del agujero negro en AdS rompe la supersimetría y la invariancia conforme, de tal manera que  $S$  ya no puede ser un módulo, y por tanto, no podemos esperar encontrar una familia de soluciones de un parámetro simplemente generalizando (3.12). Dado que el cono (3.10) es una solución, debe suceder que el límite  $S \rightarrow \infty$  de (3.12) donde éste está contenido también es una solución. Para poder verificar ésto, simplemente hay que mostrar que la porción de la D5-brana que está contenida en el encaje completo (3.12) y no en (3.10) es solución de las ecuaciones de movimiento en el caso no extremal. Esto es evidente, ya que esta parte está toda en  $r \rightarrow \infty$ , donde los términos de la ecuación que aparecen por la no extremalidad son de orden más bajo. Esto es entonces, otra propiedad importante que distingue a las configuraciones con  $S \rightarrow \infty$  de aquellas con  $S < \infty$ : aparte del estado ligado de  $k$  quarks encontrado en [54], ésta es la única que admite una generalización directa al caso no extremal. Claramente, este es el único encaje que nos va a permitir calcular la fuerza de arrastre sobre una fuente puntual ( $L = 0$ ) que atraviesa el plasma, y por esta razón en la próxima sección nos enfocaremos únicamente en ella.

## 3.2. La fuerza de arrastre sobre bariones y k-quarks

En la sección anterior aprendimos que un estado ligado de  $k$  quarks en la representación totalmente antisimétrica moviéndose a través del plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  se describe, en el lenguaje dual, con una D5-brana en  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$  cuyo perfil  $\theta(r)$  está dado por (3.12) en el límite  $S \rightarrow \infty$ . Éste está formado por dos partes: el “cono” (3.10)-(3.11), que se extiende desde el horizonte  $r = r_H$  hasta la frontera  $r \rightarrow \infty$ , y la “tapa” localizada en la frontera y cubriendo el rango angular  $0 \leq \theta < \Theta_k$ . Como hemos visto, incluir esta tapa es importante para reproducir correctamente la energía y la carga  $SU(4)$  del sistema de  $k$  quarks, y de hecho, el mismo cono, con una tapa cubriendo  $\Theta_k < \theta \leq \pi$ , es dual a un estado ligado de  $N - k$  antiquarks. Ahora quisiéramos determinar la fuerza  $F_x$  con la que hay que jalar a esta D5-brana para mantenerla a velocidad constante, la cual, a través de la correspondencia AdS/CFT, es equivalente a la fuerza de arrastre que siente un estado ligado de  $k$  quarks (o  $N - k$  antiquarks). Como en [21, 22], esta fuerza será distinta de cero únicamente si la D5-brana se acuesta hacia atrás mientras se está moviendo, i.e., si la función  $\xi(r)$  que describe el perfil (3.4) de la D5-brana en la dirección del movimiento es no trivial. Debido a que la tapa solo está ubicada en la frontera, para determinar este perfil solo necesitamos concentrarnos en la parte cónica de la solución.

Para el cono (3.10)-(3.11), es fácil ver que la ecuación de movimiento para  $X(r, t)$  que se obtiene de (3.7) es la misma que resulta del Lagrangiano de Nambu-Goto  $-\sqrt{-g^{(F1)}}$  que describe una cuerda encajada en  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$  de acuerdo con (3.4), con  $\theta_1, \dots, \theta_5$  fijos. Esto es solo un caso particular del resultado obtenido en [80], donde se mostró que, dada cualquier solución de la ecuación de movimiento de

una cuerda que alcanza la frontera de un espacio  $M$  asintóticamente  $\text{AdS}_5$ , uno puede obtener una familia de encajes de un parámetro válida para la D5-brana en  $M \times \mathbf{S}^5$  (donde la esfera es atravesada por  $N$  unidades de flujo de campo R-R), simplemente haciendo que la D5-brana porte  $k$  unidades de flujo de campo eléctrico y se enrolle en la  $\mathbf{S}^4 \subset \mathbf{S}^5$  a un ángulo polar  $\theta = \Theta_k$ . Basándonos en este resultado general, la fuerza de arrastre que obtendremos más adelante en el contexto de SYM  $\mathcal{N} = 4$ , debe ser también relevante para cualquier teoría de norma a temperatura finita con una descripción dual en términos de la teoría Tipo IIB sobre  $M \times \mathbf{S}^5$ .

Dado que la dinámica reducida coincide con la de la cuerda, la situación es exactamente la misma que la analizada en [21, 22]: para la configuración estacionaria del tipo (3.4), la ecuación de movimiento de  $X(r, t)$  implica que la densidad de momento conjugado

$$\Pi_x^r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{D5}}{\partial X'} = \frac{2N \sin^3 \Theta_k}{3\pi} \frac{1}{2\pi\alpha'} \left( \frac{G_{tt} G_{xx} X'}{\sqrt{-g^{(F1)}}} \right) \quad (3.13)$$

es constante, y existe un radio crítico  $r_v \equiv r_H/(1-v^2)^{1/4}$  debajo del cual la solución es real solo si el factor entre paréntesis toma el valor  $-(r_H/R)^2(v/\sqrt{1-v^2})$ . Esto, por tanto, fija el valor de la densidad de momento (3.13), que como sabemos, mide la tasa a la cual fluye radialmente  $\Pi_x$  desde la frontera al horizonte a través de la D5-brana. Para poder mantenerla a velocidad constante  $v$  y moviéndose en la dirección  $x$ , un agente externo debe suministrarle precisamente esta cantidad de momento lineal en la frontera, i.e., debe ejercer una fuerza cuya magnitud es (3.13).

De acuerdo con el diccionario de la correspondencia AdS/CFT establecido en [78, 79], la fuerza ejercida sobre la D5-brana se traduce en la fuerza de arrastre que siente un sistema de  $k$  quarks (o  $N-k$  antiquarks) en la representación totalmente antisimétrica que atraviesan un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$ . Haciendo uso de las relaciones  $T = r_H/\pi R^2$  y  $R^4 = g_{YM}^2 N l_s^2$ , podemos escribir esta fuerza disipativa como

$$F_x^{(k)} \equiv \frac{dp_x}{dt} = \frac{2N}{3\pi} \sin^3 \Theta_k \left( -\frac{\pi}{2} \sqrt{g_{YM}^2 N T^2} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (3.14)$$

que es el resultado principal de esta sección. Al flujo de momento (3.14) que existe entre los  $k$  quarks en movimiento y el plasma le corresponde una tasa de pérdida de energía  $dE/dt = v dE/dx = v F_x^{(k)}$  (que también puede ser directamente deducida a partir de la densidad de momento  $\Pi_t^r$  de la D5-brana).

Es interesante que la dependencia en  $k$  que tiene la fuerza está completamente contenida en el prefactor  $\sin^3 \Theta_k$ , cuyo comportamiento se muestra en la Fig. 3.1. Vemos que  $F_x^{(N-k)} = F_x^{(k)}$ , lo cual exhibe la simetría comentada entre los quarks y los antiquarks. En particular, esto implica que un estado ligado de  $N$  quarks (barión), debe sentir la misma fuerza de arrastre que un sistema sin quarks, lo que quiere decir que:  $F_x^{(N)} = 0$ . Por tanto, al menos a este nivel de aproximación, un barión puede atravesar el plasma sin perder energía. Ésta es la misma conclusión a la que llegamos para el mesón en el capítulo anterior. La razón en ambos casos es la misma: ninguna de estas fuentes neutras de color pueden generar campos gluónicos de largo alcance,

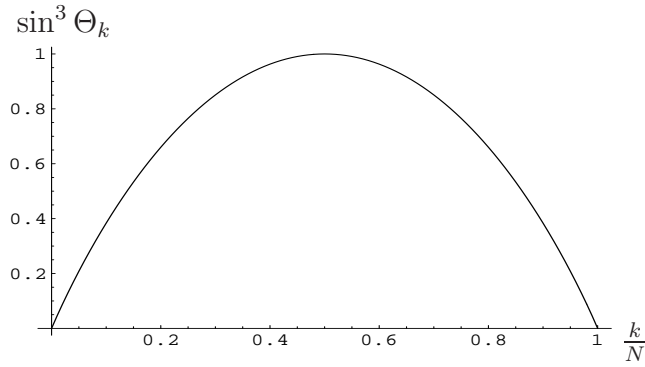


Figura 3.1: Dependencia en  $k$  de la fuerza de arrastre que sienten  $k$ -quarks.

que como se estudió en [28, 30] son los responsables de transportar la energía y el momento desde los  $k$  quarks (con  $0 < k < N$ ) hacia infinito. De hecho, para  $k = N$ , el ángulo (3.10) se vuelve  $\theta = \pi$ , lo que quiere decir, como ya hemos explicado, que la parte “cónica” de la D5-brana se cierra y pierde su tensión. Sin embargo, es precisamente esta región la que codifica el perfil de los campos gluónicos generados por el sistema de  $N$  quarks, por lo que podemos concluir que nuestro barión puntual no produce campo alguno. Éste está descrito únicamente por la “tapa” de la D5-brana en la frontera, que en este caso particular está completamente enrollada en la  $\mathbf{S}^5$ , y se puede mover libremente porque, estando en  $r \rightarrow \infty$ , no siente la presencia del horizonte.

Resulta instructivo considerar el caso de un solo quark,  $k = 1$  (o un solo antiquark,  $k = N - 1$ ), donde la D5-brana está en un ángulo polar  $\Theta_1$  (o  $\pi - \Theta_1$ ), que de acuerdo con (3.10) está dado por  $\pi/N = \Theta_1 - \sin \Theta_1 \cos \Theta_1$ . Para  $N \gg 1$ , esto implica que  $\sin^3 \Theta_1 \simeq \Theta_1^3 \simeq 3\pi/2N$ , y como debe de suceder, la fuerza de arrastre  $F_x^{(1)}|_{N \rightarrow \infty}$  coincide con la obtenida en [21, 22] (el factor dentro de los paréntesis en (3.14)), cuyo cálculo fue realizado a nivel árbol en la cuerda y por tanto, aplica en el límite de  $N$  grande. Basándonos en los resultados de [75], es tentador especular que las correcciones a  $N$  finita de éste resultado, que pueden ser deducidas a partir de la fuerza de arrastre sobre la D5-brana (5.1), tienen correcciones de mayor orden que aparecen de las auto-interacciones de la cuerda. Más en general, si mantenemos  $k$  fijo en el límite de  $N$  grande, se sigue de (5.1) que

$$F_x^{(k)} = k \left( 1 - \frac{3}{10} \left( \frac{3\pi k}{2N} \right)^{2/3} + \dots \right) F_x^{(1)}|_{N \rightarrow \infty}, \quad (3.15)$$

y esperaríamos que el segundo término y aquellos de orden superior capturaran los efectos de las interacciones entre los  $k$  quarks. La primer corrección es negativa, lo que quiere decir que, para  $g_{YM}$  finita, los  $k$  quarks pierden energía a una tasa menor que  $k$  quarks desligados. Debemos recordar además que, a diferencia de [75], nosotros no estamos trabajando en un contexto supersimétrico y por tanto podría haber contribuciones adicionales que aparecieran como correcciones, a nivel de lazos, del fondo (3.1).

El prefactor  $\sin^3 \Theta_k$  que se ve en nuestro resultado de la fuerza de arrastre (3.14) también apareció en el cálculo del lazo de Wilson [80]. Desde la perspectiva de la teoría de cuerdas esto no es sorprendente, ya que en ambos cálculos se utilizó el mismo encaje para la D5-brana, la única diferencia es que el lazo de Wilson no solo recibe contribuciones de la acción (3.7), sino también de los términos de la frontera, que son los responsables de dar una solución finita [74, 75, 81]. Desde el punto de vista de la teoría de norma esta coincidencia es aún menos sorprendente, ya que las dos cantidades se refieren a la misma fuente externa.

Lo que sí encontramos interesante es que el mismo factor  $\sin^3 \Theta_k$  haya aparecido también en [55], en donde trataron con un problema que, al menos desde la perspectiva de teoría de campos, pareciera ser completamente diferente. Ellos hicieron el cálculo de la tensión de los tubos de flujo  $\sigma^{(k)}$  en la teoría de norma tres dimensional confinante que se obtiene haciendo reducción dimensional y una rotación de Wick sobre las D3-branas en un círculo que rompe la supersimetría. Este problema fue estudiado en [55] separando al barión en dos grupos, uno con  $k$  quarks y el otro con  $N - k$  (o, equivalentemente, con  $k$  quarks y  $k$  antiquarks) produciendo un tubo de flujo de campo cromoelectrónico entre ellos. La descripción dual a este barión “partido” involucra a una D5-brana (como se infirió del caso desarrollado para SYM  $\mathcal{N} = 4$  en [52, 53, 54]), y la parte de esta brana que es dual al tubo de flujo resulta estar precisamente en el ángulo polar (3.10), lo que explica, del lado de la teoría de cuerdas, el acuerdo que hay con nuestro resultado.

La relación entre las cantidades calculadas acá y en [55] es

$$F_x^{(k)} = -\sigma^{(k)} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.16)$$

donde se observa que la fuerza y la tensión tienen la misma dependencia en  $k$ ,  $N$ , la constante de 't Hooft y la temperatura. Los autores de [27], usando una cuerda fundamental en lugar de la D5-brana, encontraron esta misma relación para el caso particular  $k = 1$  y  $N \rightarrow \infty$ . Ellos interpretaron  $\sigma^{(k)}$ , desde el punto de vista de la teoría de norma, como la tensión que controla la ley del área en los lazos de Wilson tipo espacio [89], y utilizaron el hecho de que estos lazos codifican la interacción magnética entre dos cables con corriente para justificar que la expresión (3.16) refleja el origen magnético de la fuerza de arrastre. Retomaremos este punto más adelante.

El cálculo de la tensión de una  $k$ -cuerda en  $d$  dimensiones es un problema importante en el contexto de las teorías de norma confinantes (véase [90] para revisiones recientes y los trabajos en [91] para cálculos relacionados con AdS/CFT), por lo que quizás valdría la pena explorar si la conexión encontrada acá y en [27] con la fuerza de arrastre en  $d + 1$  dimensiones aplica de forma más general. Por ejemplo, el escalamiento  $(k/N)(1 - k/N)$  de la tensión de los tubos de flujo encontrado en [55], para el caso de una teoría de YM cuatro dimensional obtenida a partir de D4-branas [89], sugiere un escalamiento idéntico para la tasa de pérdida de energía de un partón en el correspondiente plasma cinco dimensional. Es importante notar que la primera cantidad es estática mientras que la segunda es dinámica, por lo que si uno pudiera establecer una relación del tipo (3.16) en un contexto más general, en principio sería

posible obtener información sobre pérdida de energía a partir cálculos de tubos de flujo en la red.

Una fórmula como (3.16) también simplificaría mucho los cálculos con la correspondencia AdS/CFT de pérdida de energía en otras teorías, debido a que del lado de la geometría el valor de  $\sigma^{(k)}$  está dado por la tensión de una cuerda/brana que está localizada en el tiempo y que se encuentra en la superficie de límite estacionario  $r = r_s$  donde  $G_{tt} = 0$ . Por ejemplo, en el caso de una fuente en la representación fundamental, lo que se obtiene es  $\sigma^{(k)} = G_{xx}(r_s)/2\pi\alpha'$ . Hemos checado que cuando esto se sustituye en (3.16) se reproduce correctamente el cálculo de la fuerza de arrastre de [25, 67], sin embargo, no sucede así con [26, 65, 66], que en general, involucran otros campos de fondo no triviales además de la métrica. En particular, la dependencia en  $v$  de la fuerza de arrastre puede ser mucho más complicada que  $v/\sqrt{1-v^2}$ , por lo que la deseada generalización de (3.16), si acaso existe, debe tener una prescripción para determinar correctamente esta dependencia.

Dado que en el cálculo de la fuerza de arrastre uno de los roles principales lo juega el radio dependiente de la velocidad  $r_v$  y no el radio del límite estacionario  $r_s$ , es natural esperar una relación entre  $F_x$  y la tensión de una cuerda (o brana) tipo espacio localizada en  $r_v$ . Y en efecto, trabajando en un fondo arbitrario como en [24, 26], uno puede probar que en todos los casos

$$F_x = -\tilde{\sigma} \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \quad (3.17)$$

donde  $\tilde{\sigma} = \sqrt{1+v^2}G_{xx}(r_v)/2\pi\alpha'$  es la tensión de una hoja de mundo de una cuerda extendida a lo largo de  $\tilde{x}, x_2$  y localizada en  $\tilde{t} = \text{const.}$ ,  $r = r_v$ , con  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  las coordenadas en el sistema de referencia del par  $q-\bar{q}$  en reposo y  $r_v$  el radio donde  $G_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0$ . Esta última condición muestra que  $r_v$  marca la ubicación de la superficie de límite estacionario del agujero negro vista por un observador en reposo en el sistema de referencia  $(\tilde{t}, \tilde{x})$  (y en particular, coincide con  $r_s$  cuando  $v = 0$ ). Todo esto sugiere fuertemente que (3.17) es la generalización de (3.16) que queríamos para la relación entre la fuerza y la tensión; sin embargo, para que ésto sea de utilidad, es necesario encontrar una interpretación para  $\tilde{\sigma}$  desde el punto de vista de la teoría de norma, ya que por ahora solo ha sido definida del lado de AdS. Definirla como la cantidad que controla la ley de área para un lazo de Wilson tipo espacio que se extiende a lo largo de las direcciones  $\tilde{x}, x_2$  resulta ser incorrecto, debido a que la cuerda en forma de  $\cap$  que se utiliza para calcular dicho lazo pasa  $r_v$  y llega hasta  $r_s$  a medida que éste crece. Este último punto genera duda sobre la propuesta de [27], ya que (3.16) parece funcionar únicamente en los casos donde el fondo es tal que  $\sigma$  es proporcional a  $\tilde{\sigma}$ .

De cualquier forma, es importante notar que la observación hecha en [27] y en este trabajo sobre que la información de pérdida de energía de un partón puede ser obtenida a partir de un lazo de Wilson tipo espacio es semejante a la propuesta de [40] para calcular el parámetro de supresión de chorros utilizando un lazo de Wilson tipo luz, y de hecho, nos da la posibilidad de pensar que este último puede ser considerado como un límite del lazo de Wilson tipo espacio trazado por una fuente cuya velocidad se acerca a la de la luz pero por “arriba” [69]. Notemos sin embargo,

que los lazos discutidos acá y en [40] exploran diferentes regímenes: la ley de área es válida para lazos anchos ( $LT \gg 1$ ), mientras que la “aproximación dipolar” ( $E \propto L^2$ ) que inspiró [40] es válida solo para lazos delgados ( $LT \ll 1$ ). Sería interesante estudiar si existe alguna extrapolación posible entre estos dos regímenes, con la esperanza de que en el proceso podamos comprender el significado de (3.17).

También sería interesante extender nuestros cálculos de la fuerza de arrastre al caso de fuentes en representaciones distintas a la totalmente antisimétrica. El ejemplo más sencillo sería un sistema de  $k$  quarks en la representación totalmente simétrica, que de acuerdo al diccionario de [79] es dual a una D3-brana cargada con  $k$  unidades de cuerda fundamental. Las ecuaciones que determinan el encaje para la D3-brana correspondiente son mucho más complicadas que las que encontramos para la D5-brana, por lo que dejaremos esto para trabajo futuro.

### 3.3. La fuerza de arrastre que siente un gluón pesado

De acuerdo con [79], de la misma manera que un sistema de  $k$  quarks en la representación totalmente antisimétrica es representado por una D5-brana cargada con  $k$  unidades de cuerda fundamental, podemos pensar que un gluón (una fuente en la representación adjunta) está descrito por dos D5-branas paralelas cargadas con  $k = 1$  y  $k = N - 1$  unidades de cuerda fundamental, respectivamente. La dinámica de este sistema está descrita por alguna acción con grupo de simetría  $U(2)$ , cuya forma completa aún se desconoce. Al día de hoy, la propuesta más viable es la de [92] (ver también [93]),

$$S_{Dp} = -T_p \int d^{p+1} \sigma \text{Tr} \left( e^{-\phi} \sqrt{-\det(P[E_{\mu\nu} + E_{\mu i}(Q^{-1} - \delta)^{ij} E_{j\nu}] + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu}) \det(Q_j^i)} \right) + T_p \int \text{Tr} \left( P \left[ e^{i2\pi\alpha' i_\Phi i_\Phi} \left( \sum C^{(n)} e^B \right) \right] e^{2\pi\alpha' F} \right) \quad (3.18)$$

donde

$$E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}, \quad Q_j^i = \delta_j^i + i2\pi\alpha' [\Phi^i, \Phi^k] E_{kj}, \quad (3.19)$$

$P[E]$  es la forma general para una retracción no abeliana y  $i_\Phi$  denota el producto interior de  $\Phi_i$  considerado un vector en el espacio transversal. El campo de norma es no abeliano y los escalares  $\Phi^i$  están en la representación adjunta de  $U(2)$ . Como notaron primero en [94, 95], todas las derivadas en la acción son reemplazadas por derivadas covariantes, y más aún, todos los campos del bulto son funcionales de los escalares no abelianos. Tal y como sucede en el caso abeliano, estos campos son interpretados en términos de una expansión de Taylor, sin embargo, ahora, los desplazamientos transversales son descritos por matrices y por tanto, la acción queda dada por una expansión de Taylor no abeliana [92].

Finalmente, la traza sobre los campos de norma en (3.18) debe ser tomada como fue propuesta por primera vez en [94], es decir, formando el producto totalmente

simétrico de todas las expresiones no abelianas del tipo  $F_{\mu\nu}$ ,  $D_\mu\Phi^i$  y  $[\Phi^i, \Phi^j]$ . Esta prescripción reproduce correctamente las interacciones  $F^2$  y  $F^4$ , pero parece requerir modificaciones a orden  $F^6$  y más alto [96]. Esta limitación está relacionada con el hecho de que la prescripción de tirar todas las interacciones que involucren derivadas de la intensidad de campo, como uno hace en la acción de Born-Infeld abeliana, es ambigua en la teoría no abeliana debido a los conmutadores que involucran intensidades de campo.

En nuestro caso particular, donde  $\phi = 0$ ,  $B_{\mu\nu} = 0$  y la métrica del espacio tiempo es diagonal, (3.18) se reduce a:

$$S_{D5} = -T_{D5} \int d^6\sigma \text{Tr} \left[ \sqrt{-\det(P[G_{\mu\nu}] + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})} - (2\pi\alpha' F_{(2)} \wedge P[C_{(4)}])_{0\dots 5} \right] \quad (3.20)$$

con

$$P[G_{\mu\nu}] = G_{\mu\nu} + G_{ij} D_\mu X^i D_\nu X^j, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \quad (3.21)$$

Si expandimos los dos términos en (3.20) para obtener una expresión polinomial en los campos, es fácil mostrar que, después de tomar la traza, todos los campos fuera de la diagonal (12 or 21) siempre aparecen en pares. Es por tanto consistente con las ecuaciones de movimiento tomarlos igual a cero. Más aún, todas las interacciones entre elementos de la diagonal del tipo 11 y 22 involucran también elementos fuera de la diagonal, y en consecuencia, tomar éstos últimos igual a cero implica apagar las interacciones. De esta forma, al menos a este orden, las dos D5-branas no se ven y por tanto podemos trabajar directamente con dos copias de la ecuación de movimiento abeliana.

Es importante notar que el resultado anterior no solo aplica al caso específico de la acción (3.18), sino para cualquiera que sea la acción que codifique todas las interacciones de la D-brana a nivel árbol. La razón es que esta acción surge de diagramas de disco, donde la presencia de una sola frontera (responsable de que aparezca una sola traza) obliga a que cada vértice del tipo 12 venga con uno del tipo 21, y permite la inserción de los vértices 11 y 22 en un solo diagrama únicamente en conjunción con al menos uno de éstos pares que están fuera de la diagonal.

En este punto, podemos usar nuestros resultados de la Sección 3.2. Tenemos dos D5-branas desacopladas, una con  $k = 1$  y la otra con  $k = N - 1$  unidades de flujo eléctrico. Usando la ecuación (3.14) podemos finalmente obtener la fuerza de arrastre que siente un gluón,

$$F(\text{gluon}) = F_x^{(1)} + F_x^{(N-1)} = 2F_x^{(1)} = 2F(\text{quark}) . \quad (3.22)$$

Este resultado concuerda con lo que uno espera del lado de la teoría de norma. El punto clave es que, a partir de las reglas de Feynman para un vértice de tres puntos en QCD, uno encuentra que la probabilidad de que un partón radíe un gluón es proporcional al cuadrado del Casimir en la representación correspondiente del grupo  $SU(N)$ , que es  $N$  si el partón es un gluón y  $(N^2 - 1)/2N$  si es un quark. El mismo

factor de teoría de grupos aparece en el cálculo, mucho más complicado, de pérdida de energía de un partón [68], y por esta razón, el factor relativo de la tasa de pérdida de energía entre el gluón y el quark se espera que sea  $2N^2/(N^2 - 1)$  [72, 97], al menos en el régimen perturbativo. En el límite de  $N$  grande, esto se reduce a un factor de 2, tal y como encontramos acá. En el mundo real,  $N = 3$ , y el factor no es exactamente 2 sino 2.25.

Nuestros resultados deben recibir correcciones  $1/N$  que vendrían de los cálculos a orden más alto a nivel de lazos en cuerdas. Empezando a nivel del anillo, la presencia de varias fronteras (que implica tomar varias trazas) permite la inserción simultánea de vértices del tipo 11 y 22 sin la necesidad de que aparezcan los modos que están fuera de la diagonal (que nuevamente aparecen por pares y pueden ser puestos igual a cero de manera consistente con las ecuaciones de movimiento), lo que significa que ya no podemos tratar a las D5-branas de manera independiente. Estos digramas están suprimidos por potencias de  $g_s = g_{YM}^2/4\pi$ , que para  $g_{YM}^2 N$  fija, es equivalente a potencias de  $1/N$ . Sería interesante obtener estas correcciones, pero para ello sería necesario conocer de manera explícita la forma de la acción no abeliana a orden más alto.



# Capítulo 4

## Aceleración, pérdida de energía y apantallamiento en teorías de norma fuertemente acopladas

### Resumen

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 4.1.1 revisamos los resultados de un artículo escrito por Mikhailov [110], en el que dicho autor construye un encaje analítico para la cuerda dual a un quark infinitamente pesado en SYM  $\mathcal{N} = 4$  que sigue una trayectoria tipo tiempo arbitraria, y obtiene a partir de éste una tasa de pérdida de energía, ec. (4.9), que coincide con la fórmula de Lienard de la electrodinámica clásica. En la forma en que Mikhailov presenta sus resultados omite una derivada total, que como mostramos en la ecuación (4.10) corresponde precisamente a la relación de dispersión del quark. A partir de los resultados de [110] aprendemos dos lecciones importantes: primero, que para todo tiempo, la energía de la cuerda incluye la energía intrínseca del quark pero también la que éste radió en su historia previa; segundo, que la relación de dispersión del quark aparece como una derivada total evaluada en los extremos de la cuerda.

Resulta natural preguntarse cómo se generalizan los resultados de Mikhailov al caso en que el quark tiene masa finita, lo cual, como vimos en la introducción, corresponde a colocar D7-branas donde la cuerda puede terminar [84]. Este punto lo estudiamos (todavía con  $T = 0$ ) en la Sección 4.1.2. Descubrimos que la relación de dispersión del quark, Ec. (4.19), así como la tasa de pérdida de energía, Ec. (4.18), dependen de la fuerza externa  $F$  ejercida sobre éste, o, equivalentemente, del parámetro  $X'$  del encaje de la cuerda que en la teoría de norma controla la forma de la nube de gluones virtuales que rodea al quark. La dependencia es tal que la energía y el momento del quark se reducen a la fórmula usual cuando  $F \rightarrow 0$ , y divergen cuando la fuerza se acerca a su valor crítico (i.e., el valor a partir del cual  $F$  es suficientemente grande como para crear pares quark-antiquark en el vacío). Finalizamos el análisis a temperatura cero en la Sección 4.1.3, donde notamos que el proceso de pérdida de

energía está ligado a la formación de un horizonte de eventos (y una curva de límite estacionario) en la hoja de mundo de la cuerda. Esta situación está representada en la Fig. 4.1.

Utilizando la intuición que ganamos a partir de la construcción de Mikhailov, en la Sección 4.2 pasamos al caso con temperatura finita. En este contexto estamos limitados por el hecho de que no conocemos una solución general analítica a las ecuaciones de movimiento de la cuerda; no obstante, creemos que el método de Mikhailov debe tener una generalización al caso con  $T > 0$ , y en la Sección 4.2.1 mostramos que ésto es cierto al menos en el caso de la solución estacionaria estudiada en [21, 22]. La relación de dispersión resultante se muestra en la segunda y tercera línea de la Ec. (4.34), y tiene la novedad (a diferencia del caso con  $T = 0$ ) de que recibe no solo contribuciones del extremo de la cuerda en las D7-branas que es dual al quark, sino también del extremo ubicado en el horizonte del agujero negro, que, como explicaremos más adelante, codifica información de las condiciones iniciales del sistema quark+plasma.

En la sección 4.2.2 consideramos el caso más general en el que el quark se acelera en el plasma. Después de revisar el trabajo realizado por [21] en este contexto, retomamos algunas de sus propuestas e integramos numéricamente las ecuaciones de movimiento para una cuerda que comienza en reposo, es acelerada por una fuerza externa por un periodo finito de tiempo y después soltada. Como se muestra en las Figs. 4.2, 4.3 y 4.4, encontramos que bajo estas condiciones y para valores de la masa en la vecindad del quark encanto, existe un periodo después de que se suelta en el que la tasa de pérdida de energía del quark es sustancialmente más chica que la predicha por los resultados del caso estacionario en [21, 22]. Adicionalmente, como se muestra en la Fig. 4.6, la tasa de pérdida de energía en la etapa inicial en la que el quark es empujado por la fuerza externa está muy bien aproximada por la fórmula generalizada de Lienard (4.18) que utilizamos para el caso con  $T = 0$ . En los párrafos que le siguen a (4.52) discutimos la forma de la relación de dispersión del quark sujeto a las condiciones iniciales descritas anteriormente, incorporando la dependencia en  $F$  esperada de nuestros resultados a temperatura cero y explicando en detalle la relación que existe con la expresión relativista (4.46) propuesta en [21]. En la Sección 4.2.3 retomamos la discusión sobre la formación de un horizonte de eventos en la hoja de mundo de la cuerda pero ahora en el contexto de temperatura finita, donde obtenemos un agujero negro dependiente del tiempo análogo al agujero negro de Schwarzschild encontrado para el caso estacionario en [101, 106]. Esta situación está representada esquemáticamente en la Fig. 4.7.

Una vez explorados los efectos de la aceleración en la tasa de pérdida de energía de un quark solo, en la Sección 4.3 introducimos un nuevo elemento de realidad y estudiamos un quark que es producido en un tiempo finito con el correspondiente antiquark en el medio térmico. La descripción de este sistema del lado de gravedad involucra a una cuerda con ambos extremos en las D7-branas e inicialmente en el mismo punto. Como revisamos en la Sección 4.3.1, un análisis inicial de este tipo de configuraciones se llevó a cabo en [21]. En la Sección 4.3.2 mostramos como se pueden

generalizar las condiciones iniciales con un parámetro consideradas en dicho trabajo a una familia de infinitos parámetros que caracterizan diferentes excitaciones de los campos gluónicos, y más importante aún, al caso en donde el quark y el antiquark transforman en la representación adjunta del grupo de norma (carga de color), en lugar de en la representación del singlete. Curiosamente, encontramos que es solo en el caso de la representación adjunta que la velocidad inicial del quark la podemos escoger de manera arbitraria. Para el caso del singlete, al igual que en [21] uno debe tener  $v_0 = v_m$ , donde  $v_m$  es la velocidad (4.68) que apareció de diversas maneras en los trabajos [49, 50, 101, 106] y que del lado de la teoría de cuerdas corresponde a la velocidad propia de la luz en la posición del extremo de la cuerda [71]. Esta identificación sugiere fuertemente que  $v_m$  debe ser una velocidad límite y esto lo discutimos con mayor profundidad en la Sección 4.3.3. Mientras este trabajo estaba en preparación este tópico fue también abordado en [103, 104].

En la Sección 4.3.4 estudiamos la transición del par  $q\bar{q}$  al régimen asintótico descrito por el coeficiente de fricción constante y que como se muestra en la Fig. 4.10 aplica a todos los diferentes casos de condiciones iniciales. Para la configuración del singlete, la evolución inicial del quark se ve afectada drásticamente por la presencia del antiquark. En la Fig. 4.11 determinamos la dependencia en la velocidad que tiene la distancia de transición a partir de la cual el quark pasa al régimen asintótico. Por otro lado, para las configuraciones en la representación adjunta, las interacciones entre el quark y el antiquark están suprimidas para  $N$  grande y por tanto, cada elemento del par evoluciona libremente desde el inicio. Para este último caso encontramos que la distancia de transición es esencialmente cero.

Una pregunta que es natural hacerse, es si la transición al régimen asintótico ocurre inmediatamente después de que el par quark-antiquark es apantallado por el plasma. Para esto requerimos calcular el potencial correspondiente y en particular la longitud de apantallamiento; dicho problema lo abordamos en la Sección 4.4. Después de un muy breve recordatorio en la Sección 4.4.1 de los resultados sobre el potencial quark-antiquark, en las Secciones 4.4.2 y 4.4.3 hacemos el cálculo del potencial para el caso con masa finita, primero a temperatura cero y después con temperatura finita. Los resultados se muestran en las Figs. 4.12 y 4.13. Como se expresa en (4.81), (4.85) y (4.91), el potencial es lineal en lugar de divergente a medida que el quark y el antiquark están más cerca, reflejando el hecho de que la fuente de color ya no es puntual.

En el caso con temperatura finita, el potencial implica una dependencia en la velocidad de la longitud de apantallamiento  $L_{\max}$  que se muestra en las Figs. 4.14 y 4.15. Como se observa en dichas gráficas, comparado con el caso que estudiamos en el Capítulo 2, hay una modificación drástica en el comportamiento para velocidades grandes que ahora están acotadas por  $v_m$  en lugar de 1. La dependencia en  $v$  cerca de este límite puede ser calculada de manera analítica y tiene la forma (4.94), muy diferente a la fórmula (2.53) encontrada en [50]. Para todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq v_m$ , y para masas en el rango del quark encanto, el comportamiento está bien descrito por (4.92) que es la generalización obvia de (2.44) propuesta en el Capítulo

2.

Finalizamos este capítulo comparando en la Sección 4.4.4 la longitud de apantallamiento contra la distancia de transición que determinamos en 4.3.4. Para las configuraciones del singlete encontramos que la magnitud y la dependencia en la velocidad de estas dos cantidades son comparables; ésto se muestra en la Fig. 4.16. Una situación similar sucede en el caso de la adjunta, en donde la longitud de apantallamiento y la distancia de transición son esencialmente cero. Concluimos entonces que, para el par quark-antiquark creados dentro del plasma, la transición al régimen asintótico sucede inmediatamente después de que éstos se dejan de ver (son apantallados); es decir, no hay una etapa intermedia en la cual el quark y el antiquark se desaceleran a una tasa sustancialmente diferente a la del caso estacionario descrito en [21, 22].

## 4.1. Evolución de un quark: temperatura cero

Para analizar el movimiento de quarks pesados en un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  fuertemente acoplado, uno debe seguir la evolución de una cuerda que termina en las  $N_f$  D7-branas [84] que viven en la geometría  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$

$$ds^2 = G_{mn}dx^m dx^n = \frac{R^2}{z^2} \left( -h dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{h} \right) + R^2 d\Omega_5, \quad (4.1)$$

$$h = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}, \quad \frac{R^4}{l_s^4} = g_{YM}^2 N_c \equiv \lambda, \quad z_h = \frac{1}{\pi T},$$

donde  $l_s$  denota la longitud característica de la cuerda. En este capítulo, nuevamente consideraremos el caso de una cuerda que se extiende en una posición fija en la  $\mathbf{S}^5$ , lo cual nos permite no tomar en cuenta la componente angular de la métrica de manera consistente con las ecuaciones de movimiento. Las D7-branas cubren las cuatro direcciones de la teoría de norma  $t, \vec{x}$ , y se extienden a lo largo de la dirección radial en AdS, desde la frontera en  $z = 0$ , hasta una posición  $z = z_m$ , donde la brana “termina”. Esta distancia, como veremos más adelante, está relacionada con la masa del quark.

Desde la perspectiva de la teoría de norma, poner D7-branas en el fondo (4.1) es equivalente a agregar  $N_f$  hípermultipletes en la representación fundamental del grupo de norma  $SU(N_c)$ , y a reducir la supersimetría a  $\mathcal{N} = 2$ . Son precisamente estos hípermultipletes los grados de libertad que denominamos “quarks”, a pesar de que incluyen campos con espín 0 y con espín 1/2. Para  $N_f \ll N_c$ , el efecto de las D7-branas sobre el fondo puede ser despreciado; en la teoría de norma esto corresponde a trabajar en la aproximación “apagada”, es decir, sin considerar lazos de quarks.

Al igual que en los capítulos anteriores, la dinámica de la cuerda la obtenemos a partir de la acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \equiv \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \mathcal{L}, \quad (4.2)$$

donde  $g_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n G_{mn}(X)$  ( $a, b = 0, 1$ ) denota la métrica inducida en la hoja de mundo. En la norma estática  $\sigma^0 = t$ ,  $\sigma^1 = z$ , y para movimiento de la cuerda únicamente en la dirección  $x \equiv x^1$ , las densidades de los momentos canónicos conjugados  $\Pi_\mu^a \equiv \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_a X^\mu)$  diferentes de cero están dadas por

$$\begin{aligned}
\Pi_t^t &= -\frac{hX'^2 + 1}{z^2 \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\
\Pi_x^t &= \frac{\dot{X}}{z^2 h \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\
\Pi_t^z &= \frac{h\dot{X}X'}{z^2 \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\
\Pi_x^z &= -\frac{hX'}{z^2 \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde por supuesto  $\dot{X} \equiv \partial_t X(t, z)$ ,  $X' \equiv \partial_z X(t, z)$ . Notemos que, debido a la normalización que utilizamos para  $\mathcal{L}$ ,  $\Pi_\mu^a$  debe ser multiplicado por  $R^2/2\pi\alpha' = \sqrt{\lambda}/2\pi$  para obtener la densidad de energía y momento con valor físico.

En esta sección nos concentraremos en el caso de temperatura cero ( $z_h \rightarrow \infty$ ), que utilizando (4.1) corresponde a trabajar en la geometría de AdS. También en este contexto, el parámetro de la D7-brana,  $z_m$ , es inversamente proporcional a la masa lagrangiana del quark,

$$z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}. \tag{4.4}$$

Si un quark se acelera en el vacío, esperaríamos que emita radiación cromoelectrónica. Este problema ha sido examinado desde el punto de vista clásico en [114], y cuánticamente con acoplamiento débil en [115]. Los primeros pasos hacia un análisis con acoplamiento fuerte utilizando la correspondencia AdS/CFT fueron dados en [38], donde utilizaron las herramientas desarrolladas en [37] para estudiar las ondas dilatónicas generadas por pequeñas perturbaciones hechas sobre una cuerda que se extendía a lo largo de la coordenada radial en AdS. A partir de esto, pudieron inferir el perfil de los campos gluónicos  $\langle \text{Tr } F^2(x) \rangle$  en presencia de un quark que sufre pequeñas oscilaciones. Los resultados de [38] pintaron una imagen interesante de la forma en que se propagan ondas no lineales en SYM  $\mathcal{N} = 4$ , pero no permitieron identificar ondas cuyo comportamiento sea del tipo  $1/|\vec{x}|$  tal y como el que se asocia con la radiación.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Recientemente, el comportamiento  $1/|\vec{x}|$  fue detectado en el mismo contexto que [38] pero a través del cálculo del tensor energía momento  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  [121].

### 4.1.1. Masa infinita

La primer caracterización completa de la tasa a la que radía un quark acelerado fue encontrada mucho después por Mikhailov en [110], utilizando una herramienta completamente diferente. Sorprendentemente, este autor pudo resolver las ecuaciones de movimiento no lineales para una cuerda que se mueve en AdS<sub>5</sub>, dada una trayectoria *arbitraria* tipo tiempo del extremo de la cuerda. En términos de las coordenadas utilizadas en (4.1) (por ahora con  $h = 1$ ), su solución es

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} + x^\mu(\tau), \quad (4.5)$$

con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , y  $x^\mu(\tau)$  la línea de mundo del extremo de la cuerda que se mueve en la frontera de AdS, parametrizada por el tiempo propio  $\tau$ , definido a través de  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1$ , donde  $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ . La ecuación (4.5) muestra la hoja de mundo de la cuerda como una superficie reglada en AdS<sub>5</sub>, y barrida por líneas rectas para  $\tau$  constante.

Combinando (4.1) y (4.5), la métrica inducida sobre la hoja de mundo está dada por

$$g_{\tau\tau} = \frac{R^2}{z^2}(z^2 \dot{x}^2 - 1), \quad g_{zz} = 0, \quad g_{z\tau} = -\frac{R^2}{z^2},$$

lo que implica que las líneas de  $\tau$  constante son nulas. Como iremos viendo a lo largo de este capítulo, ésto es un punto importante en la construcción de Mikhailov. En la solución (4.5), el comportamiento de un segmento de la cuerda, localizado en una posición radial  $z$  y a un tiempo  $t = X^0(\tau, z)$ , está completamente determinado por el comportamiento del extremo de la cuerda (en la frontera) a un tiempo retardado  $t_{\text{ret}}(t, z)$ , que se obtiene proyectando hasta la frontera a lo largo de la trayectoria nula para un  $\tau$  fijo. Para la componente  $\mu = 0$  de (4.5), parametrizando la línea de mundo del quark con  $x^0(\tau)$  en lugar de  $\tau$ , y usando  $d\tau = \sqrt{1 - \vec{v}^2} dx^0$ , donde  $\vec{v} \equiv d\vec{x}/dx^0$ , lo que se obtiene es

$$t = z \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + t_{\text{ret}}, \quad (4.6)$$

donde la velocidad de la punta de la cuerda  $\vec{v}$  debe ser evaluada en  $t_{\text{ret}}$ . De la misma manera, las componentes espaciales de (4.5) están dadas por

$$\vec{X}(t, z) = z \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + \vec{x}(t_{\text{ret}}) = (t - t_{\text{ret}})\vec{v} + \vec{x}(t_{\text{ret}}). \quad (4.7)$$

Trabajando en la norma estática  $\sigma^0 = t$ ,  $\sigma^1 = z$ , la energía total de una cuerda que se extiende desde infinito hasta la frontera en  $z_m = 0$ , se obtiene a partir de la acción de Nambu-Goto (4.2) y es

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} \frac{1 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}}. \quad (4.8)$$

Usando (4.6) y (4.7), Mikhailov fue capaz de reexpresar esta energía (utilizando un cambio de variable,  $z \rightarrow t_{\text{ret}}$ ) como un funcional local de la trayectoria del quark,

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} + E_q(\vec{v}(t)) , \quad (4.9)$$

donde  $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dx^0$ . El segundo término de la ecuación (4.9) aparece a partir de una derivada total que no fue escrita de manera explícita por Mikhailov. Esta puede ser calculada fácilmente y el resultado es

$$E_q(\vec{v}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \frac{1}{z} \right) \Big|_{\infty}^{z_m=0} = \gamma m , \quad (4.10)$$

que corresponde a la relación de dispersión esperada para un quark por invariancia de Lorentz. De esta manera, la separación en la energía obtenida en (4.9) tiene un significado físico muy claro:  $E_q$  es la energía intrínseca del quark a un tiempo  $t$ , y la integral sobre  $t_{\text{ret}}$  codifica la energía perdida por el quark para todo tiempo anterior a  $t$ . Es sorprendente el hecho de que la tasa de pérdida de energía de un quark que se mueve en esta teoría no abeliana y fuertemente acoplada esté en completo acuerdo con la fórmula usual de Lienard que aparece en electrodinámica clásica.

Para el momento de la cuerda, de manera análoga Mikhailov encontró

$$\vec{P}(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} \vec{v} + \vec{p}_q(\vec{v}(t)) , \quad (4.11)$$

donde a partir del segundo término se puede obtener

$$\vec{p}_q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \frac{1}{z} \right) \Big|_{\infty}^{z_m=0} = \gamma m \vec{v} , \quad (4.12)$$

que codifica el momento intrínseco del quark. Estas últimas dos ecuaciones también se obtienen a partir de (4.9) y (4.10) por invariancia de Lorentz.

### 4.1.2. Masa finita

Es interesante considerar la manera en que estos resultados se modifican en el caso de  $z_m > 0$ , en donde la masa  $m$  del quark, dada por la ecuación (4.4), es grande pero no infinita. Como hemos revisado en los últimos párrafos, en la solución original de Mikhailov (4.5) la evolución de la cuerda en cualquier posición radial  $z$  está determinada conociendo la trayectoria del extremo en la frontera de AdS. Para un quark con masa finita, debemos imponer las condiciones de frontera para la cuerda en  $z = z_m$  y no en  $z = 0$ . Dada la línea de mundo del quark  $\vec{x}(t)$ , requerimos que la hoja de mundo de la cuerda satisfaga la condición  $\vec{X}(t, z_m) = \vec{x}(t)$ , y más aún, solo necesitamos determinar el comportamiento de la cuerda en la región  $z \geq z_m$ .

La solución que buscamos puede ser vista como la porción  $z \geq z_m$  en un instante particular de la solución general encontrada por Mikhailov. Nuestro objetivo es por

tanto expresar (4.5) en términos de los datos  $\vec{x}(t)$  en la nueva frontera, donde  $z = z_m$ , en lugar de los datos en la frontera (ahora solo auxiliar) de AdS, donde  $z = 0$ . De aquí en adelante, a estos últimos los denotaremos con una “tilde” para diferenciarlos de los valores en  $z = z_m$ . Por simplicidad, trabajaremos únicamente con el caso en que la cuerda se mueve en la dirección  $x \equiv x^1$ . Se sigue de (4.6) y (4.7) que, para cualquier punto  $(t, z)$  en la hoja de mundo,

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dz}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + dt_{\text{ret}} \left[ \frac{\tilde{v}\tilde{a}z}{(1-\tilde{v}^2)^{3/2}} + 1 \right], \\ dX &= \frac{\tilde{v}dz}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + dt_{\text{ret}} \left[ \frac{\tilde{a}z}{\sqrt{1-\tilde{v}^2}} + \frac{\tilde{v}^2\tilde{a}z}{(1-\tilde{v}^2)^{3/2}} + \tilde{v} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $\tilde{v}, \tilde{a}$  denotan la velocidad y la aceleración de el punto ( $t = t_{\text{ret}}, z = 0$ ) en la frontera de AdS, obtenido al proyectar hacia atrás desde  $(t, z)$  a lo largo de una trayectoria nula. A partir de (4.13), podemos deducir que

$$\left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)_z = \frac{\tilde{a}z + \tilde{v}(1-\tilde{v}^2)^{3/2}}{\tilde{v}\tilde{a}z + (1-\tilde{v}^2)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Evaluada en la nueva frontera  $z = z_m$ , esta fórmula relaciona la velocidad  $v \equiv dx/dt = \partial_t X(t, z_m)$  de la punta de la cuerda (i.e., la velocidad del quark con masa finita), con la velocidad  $\tilde{v}$  y aceleración  $\tilde{a}$  de la punta (auxiliar) en  $z = 0$ . La ecuación (4.14) implica que la aceleración del quark  $a \equiv d^2x/dt^2 = \partial_t^2 X(t, z_m)$  no solo depende de  $\tilde{v}$  y  $\tilde{a}$ , sino también de la segunda derivada de  $\tilde{v}$ . Debido a esto, no es posible despejar  $\tilde{v}$  y  $\tilde{a}$ , las cantidades que aparecen directamente en la fórmula para la energía (4.9), en términos de  $v$  y  $a$ , los datos que uno ingenuamente esperaría que fueran los necesarios para caracterizar la pérdida de energía de un quark pesado.

Por otro lado, utilizando (4.6) y (4.7) podemos inferir que

$$\left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_t = -\frac{\sqrt{1-\tilde{v}^2}\tilde{a}z}{\tilde{v}\tilde{a}z + (1-\tilde{v}^2)^{3/2}}, \quad (4.15)$$

y por tanto, es posible despejar  $\tilde{v}$  y  $\tilde{a}$  en términos de  $v$  y  $\partial_z X(t, z_m)$ . Nótese que cuando  $z_m \rightarrow 0$ , automáticamente tenemos que  $\partial_z X(t, z_m) \rightarrow 0$ , lo que explica por qué este parámetro no fue necesario en la descripción del quark con masa infinita. Para  $z_m > 0$ , el valor  $\partial_z X(t, z_m)$  codifica qué tanto se inclina la punta de la cuerda alejándose de la vertical. Pero, ¿qué significa esto en el lenguaje de la teoría de norma? A través del cálculo de  $\langle \text{Tr } F^2 \rangle$  o  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  en paralelo con lo hecho en [28, 30, 37, 38], uno puede concluir que la inclinación de la cuerda repercute en la forma del perfil de los campos gluónicos en la vecindad inmediata del quark; para  $\partial_z X(t, z_m) \neq 0$ , este perfil no es esféricamente simétrico. Desde el punto de vista físico, nos parece más transparente expresar la pérdida de energía no en términos de  $\partial_z X(t, z_m)$ , sino usando la densidad de momento de la cuerda  $\Pi_x^z$  dada por (4.3), que utilizando (4.14) y (4.15) puede ser reescrita como

$$\Pi_x^z = \frac{\tilde{a}}{z(1-\tilde{v}^2)^{3/2}}. \quad (4.16)$$



Cuando la evaluamos en  $z = z_m$ ,  $\Pi_x^z$  controla la fuerza externa  $F \equiv (\sqrt{\lambda}/2\pi)\Pi_x^z(t, z_m)$  que actúa sobre el extremo de la cuerda (dual al quark). Invirtiendo (4.14) y (4.16), encontramos

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \frac{v - z_m^2 \Pi}{1 - z_m^2 v \Pi}, \\ \tilde{a} &= z_m \Pi \frac{(1 - v^2)^{3/2} (1 - z_m^4 \Pi^2)}{(1 - z_m^2 v \Pi)^3},\end{aligned}\quad (4.17)$$

donde hemos abreviado  $\Pi \equiv \Pi_x^z$ . Usando esto y (4.13) en (4.9), podemos finalmente concluir que la energía total de la cuerda a un tiempo  $t$  está dada por

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt z_m^2 \Pi^2 \left[ \frac{1 - v \Pi z_m^2}{1 - z_m^4 \Pi^2} \right] + E_q(v(t), F(t)). \quad (4.18)$$

Igual que antes, el primer término representa la pérdida de energía del quark acumulada para todo tiempo anterior a  $t$ , y nos da entonces la generalización al caso  $m < \infty$  de la fórmula de Lienard (4.9) deducida por Mikhailov. El segundo nuevamente proviene de un término de superficie y representa la relación de dispersión modificada para un quark con masa finita,

$$E_q(v, F) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1 - z_m^2 v \Pi}{z \sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}} \right) \Big|_{\infty}^{z_m} = \left( \frac{2\pi m^2 - \sqrt{\lambda} v F}{\sqrt{4\pi^2 m^4 - \lambda F^2}} \right) \gamma m. \quad (4.19)$$

Si ahora empezamos con la expresión (4.11) de Mikhailov, obtenemos la fórmula para el momento

$$P(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt z_m^2 \Pi^2 \left[ \frac{v - \Pi z_m^2}{1 - z_m^4 \Pi^2} \right] + p_q(v(t), F(t)), \quad (4.20)$$

donde

$$p_q(v, F) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{v - z_m^2 \Pi}{z \sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}} \right) \Big|_{\infty}^{z_m} = \left( \frac{2\pi m^2 v - \sqrt{\lambda} F}{\sqrt{4\pi^2 m^4 - \lambda F^2}} \right) \gamma m. \quad (4.21)$$

Notemos que  $\partial E_q / \partial p_q = (2\pi m^2 v - \sqrt{\lambda} F) / (2\pi m^2 - \sqrt{\lambda} v F)$ , lo cual cuando  $m < \infty$  y  $F \neq 0$  difiere del resultado esperado para un quark puntual,  $\partial E / \partial p = v$ . Ésto refleja el hecho de que la fuente (en la representación fundamental) dual a la cuerda que termina en  $z_m > 0$  es, en efecto, *no puntual*. De acuerdo con la conexión usual UV/IR [58], ésta tiene un tamaño lineal del orden de  $z_m$ , y es debido a esta naturaleza de “objeto extendido” que, como hemos visto, para caracterizar su estado uno debe especificar, además de su velocidad, el parámetro  $F$  (o  $\partial_z X(t, z_m)$ ) que codifica su forma. El punto crucial acá es que la fuente en cuestión no debe ser pensada como un quark desnudo, sino como un quark que está rodeado por una nube gluónica de ancho  $z_m$  [118, 120]. Veremos más evidencia de ésto en la Sección 4.3.

Otra característica interesante de la energía y el momento del quark dadas por las expresiones (4.19) y (4.21), es que ambas divergen cuando el valor de la fuerza externa se acerca a

$$F_c = \frac{2\pi m^2}{\sqrt{\lambda}} . \quad (4.22)$$

La razón es fácil de entender del lado de la teoría de cuerdas. Para ejercer una fuerza  $F$  sobre el extremo de la cuerda que está en las D7-branas, debemos encender un campo eléctrico cuya intensidad es  $F_{01} = F$  en  $z = z_m$ . Trabajando en la norma estática, el lagrangiano de Born-Infeld para la D7-brana es

$$\sqrt{-\det(g_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \propto \sqrt{-G_{tt}G_{xx} - (2\pi\alpha' F_{01})^2} = R^2 \sqrt{\frac{1}{z^4} - \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} F_{01}\right)^2} ,$$

que es real en  $z = z_m$  únicamente si el campo eléctrico se mantiene por debajo del valor crítico  $F_{01} = \sqrt{\lambda}/2\pi z_m^2$ . A través de (4.4), esto coincide con el valor para la fuerza crítica (4.22). El origen físico de esta cota es debido a que, para  $F_{01} > F_c$ , crear cuerdas abiertas es energéticamente favorable y por tanto el sistema es inestable. De acuerdo con (4.19) y (4.21), entonces, la energía y el momento del quark (vestido) diverge precisamente en el punto donde la fuerza externa se vuelve capaz de crear pares de quark y antiquark.

### 4.1.3. El agujero negro en la hoja de mundo y el comportamiento final de la cuerda

Resulta interesante considerar la evolución de la cuerda en el caso en que el quark es acelerado por una fuerza externa  $F(t)$ , y después de cierto tiempo  $t_{libre}$ , ésta se hace cero. Si ponemos  $F = 0$  ( $\Pi = 0$ ) en (4.17), entonces  $\tilde{a} = 0$ , lo que implica, a través de (4.14) y (4.15), que  $\dot{X} = \tilde{v}$  y  $X' = 0$  en todos los puntos de la misma línea nula ( $t_{ret}$  constante), independientemente del valor de  $z$ . En particular, el extremo inferior de la cuerda ( $z = z_m$ ) se mueve con una velocidad  $v \equiv \dot{X}(t, z_m) = \tilde{v}$ , lo que significa que para  $t \geq t_{libre}$  el quark se mueve a velocidad constante  $v$ , como uno esperaría, ya que está en el vacío.

A medida que el tiempo transcurre, la línea nula que comienza en  $(t_{libre}, z_m)$ , que de acuerdo con (4.6) está dada por

$$z_{libre}(t) = \sqrt{1 - v^2}(t - t_{libre}) + z_m , \quad (4.23)$$

se aleja de la frontera de AdS. Esto quiere decir que hay una porción creciente de la cuerda ( $z_m \leq z \leq z_{libre}(t)$ ) que está vertical y que se mueve toda con la misma velocidad final  $v$ . A medida que  $t \rightarrow \infty$ , este segmento vertical describe a un quark que se mueve con velocidad constante y que está rodeado por un perfil estacionario de los campos gluónicos.

Para cualquier tiempo  $t \geq t_{libre}$ , la energía y el momento previamente radiados por el quark están guardados en el segmento de la cuerda por arriba de  $z_{libre}(t)$ , como un

excedente de energía y momento. Esto sugiere la existencia de una región geométrica en la hoja de mundo de la cuerda que “absorbe” dicho exceso.

Para definir esta región con mayor precisión, debemos notar primero que, para la métrica del espacio-tiempo (4.1) (con  $h = 1$ ), las curvas nulas en la hoja de mundo satisfacen

$$\dot{z}_{nula}^{(\pm)}(t) = \frac{-X'\dot{X} \pm \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}{X'^2 + 1}, \quad (4.24)$$

con el signo “+” para indicar la curvas que apuntan hacia arriba en el cono de luz futuro y el “−” la situación opuesta. Usando (4.14), (4.15) y (4.17), ésto se traduce en

$$\dot{z}_{nula}^{(+)}(t) = \frac{\sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}}{1 - v z_m^2 \Pi} \quad (4.25)$$

y

$$\dot{z}_{nula}^{(-)}(t) = -\frac{(1 - v z_m^2 \Pi) \sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)} [1 - (z^2 + z_m^2) z_m^2 \Pi^2]}{\left[ z z_m \Pi (v - z_m^2 \Pi) + (1 - v z_m^2 \Pi) \sqrt{1 - z_m^4 \Pi^2} \right]^2}, \quad (4.26)$$

donde, como antes,  $v$  y  $\Pi$  son la velocidad y la fuerza externa en  $z_m$ , evaluadas en el tiempo retardado para un  $(t, z)$  dado. Como mencionamos anteriormente, las líneas de Mikhailov con  $t_{ret}$  constante (4.6)-(4.7), y en particular (4.23), son nulas y es fácil ver que satisfacen (4.25).

Si seguimos el punto  $z_{libre}(t)$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ , y después proyectamos hacia atrás caminando por la curva que describe  $z_{nula}^{(-)}(t)$ , lo que encontramos es precisamente una región en la hoja de mundo ( $z \geq z_{nula}^{(-)}(t)$ ) de la que, por construcción, ninguna señal puede escapar hacia la región asintótica que corresponde al segmento vertical y estacionario de la cuerda. En otras palabras, la curva que obtuvimos con  $z_{nula}^{(-)}(t)$  es el horizonte de eventos de un agujero negro en la hoja de mundo. De ahora en más, a dicha curva la llamaremos  $z_{BH}(t)$ .

En el estudio realizado en [101, 106] de la pérdida de energía de un quark que se mueve en un plasma, también se discutió la presencia de un agujero negro en la hoja de mundo. En esos trabajos, consideraron únicamente la configuración estacionaria donde el quark se mueve con velocidad constante  $v$ ; como consecuencia de ésto, el agujero negro que ellos encontraron era estático y con el horizonte de eventos localizado en una posición fija  $z_{BH}(t) \equiv z_h(1 - v^2)^{1/4}$ , es decir, precisamente en el radio que juega un papel fundamental en el cálculo de la fuerza de arrastre realizado en [21, 22].

Para el sistema no estacionario, el horizonte de eventos sobre la hoja de mundo es dinámico. Concentrémonos en el caso donde el quark está en reposo hasta un tiempo  $t = t_{det}$ , y después es acelerado hasta  $t = t_{libre}$ . La trayectoria descrita por el horizonte de eventos  $z_{BH}(t)$  tendría las siguientes características: debe de comenzar a bajar desde  $z \rightarrow \infty$  incluso antes de  $t = t_{det}$  (debido a la perturbación generada por la aceleración del extremo en la frontera), alcanzar un valor mínimo (en la coordenada radial) y volver a subir, acercándose a  $z_{libre}(t)$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Notemos que, a partir de (4.26), para cualquier  $z$  la mitad del cono de luz  $z_{nula}^{(-)}$  solo puede apuntar en la dirección de  $z$  crecientes para  $\Pi$  suficientemente grande (y, para cualquier  $\Pi \neq 0$ ,

apuntaría hacia arriba para  $z$  suficientemente grande). Lo que ésto significa es que toda la porción de  $z_{BH}(t)$  que apunta hacia arriba debe estar en la región perturbada de la hoja de mundo, i.e., entre la franja diagonal que delimitan  $z_{det}(t) \equiv t - t_{det} + z_m$  y  $z_{libre}(t)$ .

Como siempre, determinar la ubicación exacta del horizonte de eventos es complicado debido al carácter global que éste tiene por definición: uno debe conocer la historia completa de la cuerda e integrar (4.26) utilizando como condición el estado final de la misma. Resulta más fácil, utilizar esta misma ecuación para ubicar la región en la hoja de mundo en donde  $\dot{z}_{nula}^{(-)}(t) = 0$ , ya que ésto nos da una cota inferior sobre la porción ascendente de  $z_{BH}(t)$  (donde por definición uno tiene  $\dot{z}_{nula}^{(-)}(t) > 0$ ). A partir de (4.26), esto sucede en

$$z_{ergo}(t) = \frac{\sqrt{1 - z_m^4 \Pi^2}}{z_m \Pi}, \quad (4.27)$$

donde, al igual que antes, la fuerza externa  $\Pi$  está evaluada en el tiempo retardado correspondiente a  $t, z$ . Para cualquier punto sobre esta curva, la mitad descendente del cono de luz futuro es horizontal (o de manera equivalente,  $g_{tt} = 0$ ), y por tanto, las trayectorias tipo tiempo deben apuntar en la dirección en la que  $z$  crece. En otras palabras,  $z_{ergo}(t)$  es una curva de límite estacionario, y la región entre ésta y la porción del horizonte que apunta hacia arriba es el análogo a una ergosuperficie, un concepto cuya relevancia fue notado por primera vez en [102] en el contexto de  $T > 0$ . Hacer  $\Pi = 0$  en (4.27) implica  $z_{ergo} \rightarrow \infty$ , por lo que a diferencia del horizonte de eventos, la curva de límite estacionario está completamente localizada entre  $z_{det}(t)$  y  $z_{libre}(t)$ . Se sigue de la definición de las dos curvas que  $z_{BH}(t)$  cruza  $z_{ergo}(t)$  precisamente cuando la última alcanza su valor mínimo, y así, la otra porción del horizonte queda por debajo y a la izquierda de  $z_{ergo}(t)$ . La situación se resume en la Fig. 4.1.

Es interesante que a temperatura cero, la idea de un agujero negro sobre la hoja de mundo juega un papel igual de importante que en el caso analizado previamente con temperatura finita. La aparición de esta estructura causal parece estar intrínsecamente amarrada con el concepto de disipación de energía, sin importar si se está en el vacío o en un medio térmico. Estudiaremos este último caso en la Sección 4.2.3. Sería bueno también, para poder desarrollar más estas ideas, explorar la relación que existe entre la tasa a la cual la energía atraviesa el horizonte del agujero negro y la fórmula modificada de Lienard en (4.18).

## 4.2. Evolución de un quark: temperatura finita

Habiendo entendido la tasa de pérdida de energía y la relación de dispersión para un quark pesado que se mueve en el vacío de SYM, en esta sección vamos a estudiar esas mismas cantidades pero para el caso en que el quark se mueve en un plasma. En este caso, la posición  $z = z_m \leq z_h$  donde “termina” la D7-brana se relaciona con la

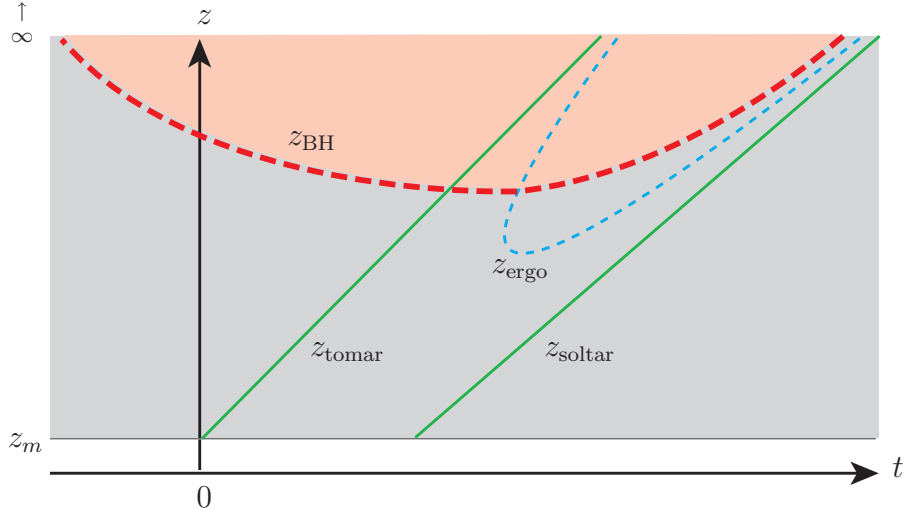


Figura 4.1: Ilustración esquemática de la hoja de mundo de la cuerda (región sombreada en gris) en la norma estática  $\tau = t$ ,  $\sigma = z$ . Se muestran las líneas nulas de Mikhailov (con  $t_{\text{tret}}$  fijo)  $z_{\text{tomar}}$  y  $z_{\text{soltar}}$  (en verde), la curva de límite estacionario  $z_{\text{ergo}}$  (azul punteado), y el horizonte de eventos  $z_{\text{BH}}$  (en rojo punteado) rodeando el agujero negro de la hoja de mundo representado en color rojo claro. Véase el texto para mayor discusión.

masa lagrangiana del quark  $m \gg \sqrt{\lambda}T$  a través de [21]

$$\frac{1}{z_m} = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sqrt{\lambda}T}{2m} \right)^4 - \frac{5}{128} \left( \frac{\sqrt{\lambda}T}{2m} \right)^8 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda}T}{2m} \right)^{12} \right) \right]. \quad (4.28)$$

Una generalización completa del resultado analítico de Mikhailov [110] para el caso con temperatura finita requeriría encontrar la solución exacta a las ecuaciones de movimiento de la cuerda en el fondo de AdS-Schwarzschild para cualquier trayectoria del extremo en  $z_m \geq 0$ . Desafortunadamente no hemos sido capaces de lograr esto. Sin embargo, basándonos en los resultados discutidos en la sección previa, esperamos que la energía total de la cuerda, para cualquier tiempo dado, se pueda otra vez descomponer en un término de superficie que codifica la energía intrínseca del quark y un término integrado (local) que refleja cuanta energía ha perdido.

*A priori* no es obvio que la tasa de pérdida de energía en presencia de un plasma fuertemente acoplado (y no abeliano) esté dada por una expresión que solo depende de la trayectoria del quark en un instante dado, y no de toda la historia previa. Pero en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, esta propiedad está fuertemente apoyada por el hecho de que la energía de la cuerda está dada por una expresión local en la hoja de mundo tanto en el caso del fondo de AdS-Schwarzschild, dual al plasma, como en el fondo de AdS puro que corresponde al vacío de SYM. Empezando con  $E$  escrita como una integral sobre  $z$ , otra vez debe ser posible proyectar a lo largo de trayectorias nulas hasta la frontera, para obtener una fórmula que depende localmente de la línea

de mundo del quark  $\vec{x}(t)$ . La diferencia principal con el caso de temperatura cero es que las trayectorias nulas ya no serán líneas rectas.

#### 4.2.1. Velocidad constante

Hemos verificado que estas expectativas se cumplen al menos para el único caso a temperatura finita para el que se conoce una solución analítica, es decir, la configuración estacionaria de [21, 22], que describe un quark moviéndose con velocidad constante  $v$ ,

$$X(t, z) = v \left[ t - \frac{z_h}{4} \ln \left( \frac{z_h + z}{z_h - z} \right) + \frac{z_h}{2} \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_h} \right) \right], \quad (4.29)$$

Cualquier punto  $(t, z)$  en la hoja de mundo está conectado con un punto  $(t_{\text{ret}}, 0)$  en la frontera de AdS a través de una curva nula  $t(z)$  definida por

$$\left( \frac{dt}{dz} \right)_{t_{\text{ret}}} = \frac{z_h^4 (z_h^2 + \sqrt{1-v^2} z^2)}{(z_h^4 - z^4)(z^2 + z_h^2 \sqrt{1-v^2})}. \quad (4.30)$$

Esta ecuación puede ser integrada y el resultado es

$$t = t_{\text{ret}} + \frac{z_h}{4} \ln \left( \frac{z_h + z}{z_h - z} \right) - \frac{z_h}{2} \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_h} \right) + \frac{z_h}{(1-v^2)^{1/4}} \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_h (1-v^2)^{1/4}} \right), \quad (4.31)$$

en términos de lo cual la solución estacionaria (4.29) puede ser reescrita como

$$X(t_{\text{ret}}, z) = \frac{z_h v}{(1-v^2)^{1/4}} \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_h (1-v^2)^{1/4}} \right) + x(t_{\text{ret}}). \quad (4.32)$$

Conocer esta solución permite que la energía de la cuerda,

$$E(t) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{z_m}^{z_h} dz \Pi_t^t = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{z_m}^{z_h} dz \frac{hX'^2 + 1}{z^2 \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}} \quad (4.33)$$

pueda ser reexpresada como

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{v^2}{z_h^2 \sqrt{1-v^2}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left[ \frac{1}{z_m \sqrt{1-v^2}} + \frac{v^2}{z_h (1-v^2)^{3/4}} \tan^{-1} \left( \frac{z_m}{z_h (1-v^2)^{1/4}} \right) - \frac{1}{z_h \sqrt{1-v^2}} - \frac{v^2}{z_h (1-v^2)^{3/4}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{(1-v^2)^{1/4}} \right) \right]. \quad (4.34)$$

De manera idéntica, el momento total de la cuerda,

$$P(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{z_m}^{z_h} dz \Pi_x^t = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{z_m}^{z_h} dz \frac{\dot{X}}{z^2 h \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \quad (4.35)$$

puede ser reescrito en la forma

$$P(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left[ \frac{v}{z_m \sqrt{1-v^2}} + \frac{v}{z_h (1-v^2)^{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \left( \frac{z_m}{z_h (1-v^2)^{\frac{1}{4}}} \right) - \frac{v}{z_h \sqrt{1-v^2}} - \frac{v}{z_h (1-v^2)^{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{4}}} \right) \right]. \quad (4.36)$$

Como esperábamos, el término integrado en la primer línea de (4.34) y (4.36) recupera el resultado de pérdida de energía y momento obtenido en [21, 22],

$$\left( \frac{dE_q}{dt} \right)_s = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} T^2 \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \left( \frac{dp_q}{dt} \right)_s = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} T^2 \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.37)$$

Entonces, los términos en la segunda y tercer línea de (4.34) y (4.36) codifican la energía  $E_q$  y momento  $p_q$  intrínsecos al quark. Podemos ver que, tal y como en el caso a temperatura cero,  $\partial E_q / \partial p_q$  se reduce a  $v$  únicamente en el límite cuando  $z_m \rightarrow 0$ .

Una diferencia importante con respecto al caso a temperatura cero, analizado en la sección anterior, es que aquí el término de superficie que determina la forma de la relación de dispersión del quark no solo tiene la contribución de la punta en  $z = z_m$ , sino también del extremo en el horizonte, en  $z = z_h$ . De hecho, esta es la situación genérica para el caso  $T > 0$ , y lo podemos ver incluso en la cuerda estática extendida en la dirección radial, donde por supuesto, no hay término de pérdida de energía y  $E$  está dada por la contribución de la frontera que define la masa térmica del quark en reposo,

$$M_{\text{rep}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1}{z_m} - \frac{1}{z_h} \right). \quad (4.38)$$

Claramente el segundo término en (4.38), de la misma forma que los términos en la tercera línea de (4.34) y (4.36), son la contribución del extremo de la cuerda que está en el horizonte del agujero negro. Es natural preguntarse hasta qué punto estos términos deben ser considerados como una contribución a la energía intrínseca del quark, ya que su valor, para todo tiempo, no depende de los parámetros  $v$  y  $F$  (o  $\partial_z X(t, z_m)$ ) que caracterizan el estado del extremo en  $z = z_m$  en el mismo intervalo de tiempo. De hecho, debido a que  $z = z_h$  marca la posición del horizonte de eventos, para cualquier tiempo coordenado finito  $t$ , el valor del término de superficie en  $z = z_h$

no es influenciado por el comportamiento del segmento de la cuerda  $z < z_h$ , sino que depende únicamente de la configuración de la cuerda en  $t \rightarrow -\infty$ . La misma interpretación puede ser llevada a la teoría de norma: los términos aparentemente fuera de lugar representan una contribución a la energía del estado que solo depende de la configuración inicial del sistema quark+plasma. Durante la evolución, la causalidad garantiza que el comportamiento de los campos de SYM en el infinito (espacial) solo pueda ser afectado por la configuración inicial en  $t \rightarrow -\infty$ , por lo que, de manera equivalente, podemos pensar en el término de superficie en  $z = z_h$  como el que codifica la información de las condiciones de frontera asintóticas del sistema. Y en efecto, para procesos dinámicos, la posición radial  $z = z_h$  en AdS-Schwarzschild corresponde a la región IR en la teoría de norma.

Concluimos entonces que, si lo que queremos es comparar la energía de configuraciones con diferentes condiciones de frontera/iniciales, es importante seguirle la pista a la contribución que proviene del término de superficie en el horizonte, a pesar de que éste en general es independiente de los parámetros  $v$  y  $F$  asociados a la energía intrínseca del quark. Notemos en particular que, con esta interpretación, el signo negativo en el segundo término de la expresión (4.38) es más simple de comprender: refleja el efecto del apantallamiento debido al plasma sobre los campos gluónicos de largo alcance generados por el quark, que a su vez implica una reducción en la energía en comparación con el caso  $T = 0$ .

Resulta instructivo comparar (4.34) con la separación alternativa obtenida en [21],

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{v^2}{z_h^2 \sqrt{1-v^2}} \frac{\Delta x}{v} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1}{z_m} - \frac{1}{z_h} \right) \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (4.39)$$

con  $\Delta x \equiv X(t, z_m) - X(t, z_h)$ . Si uno pudiera interpretar esta última cantidad como la distancia total recorrida por el quark desde el principio de los tiempos, entonces el primer término en (4.39) nos daría la energía perdida, a la tasa (4.37), en el tiempo total transcurrido  $\Delta x/v$ . De acuerdo con (4.38), entonces el segundo término implicaría una relación de dispersión estándar para el quark con masa  $M_{\text{rest}}$ .

Sin embargo, el problema con esta interpretación es que no atiende de manera correcta el problema de las condiciones iniciales. La distancia recorrida por el quark es por definición  $X(t, z_m) - X(-\infty, z_m)$ , que coincide con  $\Delta x/v$  solo si  $X(-\infty, z_m) = X(t, z_h)$ .<sup>2</sup> Esta igualdad sería válida si hubiéramos empezado en  $t \rightarrow -\infty$  con el quark en reposo (i.e., con la cuerda estática y completamente vertical), pero el término de pérdida de energía en (4.39) no contempla ningún periodo inicial con aceleración.

En contraste con esto, la separación obtenida en (4.34) tiene un origen geométrico muy simple en el contexto de la generalización al caso de temperatura finita del trabajo de Mikhailov [110] presentado aquí. La fracción  $dE(t, z_h)$  de la energía total de la cuerda  $E(t)$  debida al segmento de la misma que se encuentra en la vecindad del horizonte (localizado en  $X(t, z_h)$ , utilizando la notación de (4.29), o  $X(t_{\text{ret}}, z_h)$  en la notación de (4.32)), fue perdida por el quark en un tiempo particular  $t_{\text{ret}}$  en el pasado

---

<sup>2</sup>Cuando escribimos expresiones como  $X(-\infty, z_m)$ , lo que queremos decir es evaluar la expresión en un tiempo fijo, pero arbitrariamente lejos en el pasado.



distante que puede ser deducido a partir de (4.31). Debido a que este es el segmento más alto de la cuerda que contribuye a  $E(t)$ ,  $t_{\text{ret}}$  marca precisamente el instante en el que debemos de comenzar a medir la energía perdida por el quark. En  $t = t_{\text{ret}}$  el extremo inferior de la cuerda (y por tanto el quark) se encontraba a una distancia  $d \equiv X(t_{\text{ret}}, z_h) - X(t_{\text{ret}}, z_m)$  atrás de la posición de la punta superior al tiempo  $t$ , que de acuerdo con (4.32) se traduce en

$$d = \frac{z_h v}{(1-v^2)^{1/4}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{(1-v^2)^{1/4}} \right) - \frac{z_h v}{(1-v^2)^{1/4}} \tan^{-1} \left( \frac{z_m}{z_h(1-v^2)^{1/4}} \right) .$$

Bajo esta lógica, la energía total perdida por el quark está dada por una expresión con la misma forma que el primer término en (4.39), pero remplazando  $\Delta x$  por la correcta distancia recorrida  $\Delta x + d = v \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}}$ . Y en efecto, vemos que el término integrado en la primer línea de (4.34) es más grande que el término de pérdida de energía dado por (4.39) precisamente por la cantidad  $(d/v)dE_q/dt$ , y de manera correspondiente, la energía intrínseca del quark que identificamos en la segunda y tercer línea de (4.34) es más chica por esta misma cantidad que lo que hubiera indicado (4.39).

### 4.2.2. El quark acelerado

Habiendo ganado ya un poco de intuición analizando un quark que se mueve a velocidad constante con respecto al plasma fuertemente acoplado, pongamos ahora toda nuestra atención en la situación más general en donde el quark se acelera. En [21] dieron algunos pasos importantes en esta dirección. En los siguientes párrafos presentaremos sus resultados de manera resumida.

Un quark bajo cualquier tipo de movimiento, forzado (durante un tiempo finito) o no forzado, se irá frenando a medida que atraviesa el plasma, hasta que eventualmente llega al reposo. Los autores de [21] estudiaron el comportamiento del quark para tiempos suficientemente grandes (velocidad y aceleración pequeñas) considerando fluctuaciones pequeñas y exponencialmente amortiguadas por encima de la configuración final en reposo. En el lenguaje dual, esto implica calcular los modos cuasi-normales en la hoja de mundo de una cuerda estática y puramente radial. A partir de dicho análisis, fueron capaces de deducir numéricamente, dado cualquier parámetro de la masa del quark, el valor del coeficiente de fricción

$$\mu \equiv -\frac{1}{p_q} \frac{dp_q}{dt} . \quad (4.40)$$

Siempre y cuando uno se mantenga en el régimen no relativista, la definición anterior es equivalente a  $\mu = -(1/v)dv/dt$ , y por construcción da un resultado que es independiente de  $p$  (o  $v$ ). Algunos valores representativos de  $\mu$  fueron tabulados en [21].

Adicionalmente, los autores de [21] encontraron de manera analítica, para el régimen de velocidades bajas, la forma de la relación de dispersión del quark,

$$E_q = M_{\text{rep}} + \frac{p_q^2}{2M_{\text{cin}}} + \mathcal{O}(p_q^4) , \quad (4.41)$$

donde  $M_{\text{rep}}$  es la masa térmica en reposo (4.38), y

$$M_{\text{cin}} \equiv \frac{\pi \sqrt{\lambda} T^2}{2 \mu} \quad (4.42)$$

la masa cinética del quark. En el límite de quark pesado  $m \gg \sqrt{\lambda} T$  ( $z_m \ll z_h$ ), donde (4.38) y (4.28) implican que

$$M_{\text{rep}} = m - \frac{\sqrt{\lambda} T}{2} + \mathcal{O} \left( m \left( \frac{\sqrt{\lambda} T}{2m} \right)^4 \right), \quad (4.43)$$

ellos encontraron, a partir del cálculo de los modos cuasi-normales, que

$$\mu = \frac{\pi \sqrt{\lambda} T^2}{2 m} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\lambda} T}{2m} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\sqrt{\lambda} T}{2m} \right)^2 \right) \right], \quad (4.44)$$

lo cual a través de (4.42) lleva a

$$M_{\text{cin}} = M_{\text{rep}} + \mathcal{O} \left( m \left( \frac{\sqrt{\lambda} T}{2m} \right)^2 \right). \quad (4.45)$$

En [21] notaron que las expresiones (4.41) y (4.44), válidas en el régimen de velocidades bajas, así como el coeficiente de fricción (4.40) deducido a partir de (4.37), válido para velocidad constante pero arbitraria, son consistentes con una relación de dispersión *relativista* de la forma

$$E_q = M_{\text{rep}} - M_{\text{cin}} + \sqrt{p_q^2 + M_{\text{cin}}^2} = M_{\text{rep}} + M_{\text{cin}}(\gamma - 1). \quad (4.46)$$

Más evidencia a favor de esta relación de dispersión se encontró en el análisis del movimiento de un quark y un antiquark que se crean en el plasma y después se mueven espalda con espalda. Los resultados de [21] en dicho contexto serán revisados y extendidos en la Sección 4.3.

Debido a la discrepancia entre (4.46) y la relación  $E_q = \sqrt{p_q^2 + M_{\text{rest}}^2}$  que uno inferiría ingenuamente a partir del segundo término en (4.39), los autores de [21] enfatizaron la necesidad de un estudio más detallado de la dinámica intrínseca del quark, y propusieron un plan de ataque. Ellos observaron que si uno empieza con el quark en reposo, y después éste se acelera por el efecto de una fuerza externa, entonces, siempre y cuando la energía disipada sea despreciable, es natural definir la energía total intrínseca del quark como la energía en reposo más el trabajo realizado por el agente externo. Motivados por esta propuesta, hemos estudiado la etapa inicial del comportamiento de un quark que comienza en reposo, es acelerado durante un periodo corto por una fuerza externa dependiente del tiempo, y se mueve después solo bajo la influencia del plasma.

Como mencionamos anteriormente, desafortunadamente no hemos podido encontrar una solución general exacta a las ecuaciones de movimiento de la cuerda para el caso no estacionario. Sin embargo, sí es posible encontrar soluciones numéricas que describan configuraciones de la cuerda duales al sistema propuesto en el párrafo anterior. Empezando en  $t = 0$ , una cuerda que se extiende desde una posición fija de la coordenada radial  $z = z_m$  hasta el horizonte en  $z = z_h$ , inicialmente en reposo y vertical, es acelerada aplicándole una fuerza externa  $F(t)$  en el extremo inferior. Después de un tiempo  $t_{\text{soltar}}$ , la fuerza externa se hace cero y la cuerda se mueve libremente en el fondo curvo.

Usando (4.1) y (4.2) e imponiendo la condición de que la cuerda solo se mueva en la dirección  $x \equiv x^1$ , la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{-hX'}{z^2 \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\dot{X}}{z^2 h \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}} \right] = 0, \quad (4.47)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera

$$X(0, z) = 0, \quad \dot{X}(0, z) = 0, \quad X'(t, z_m) = f(t), \quad X(t, z_h) = 0. \quad (4.48)$$

Las primeras dos condiciones simplemente reflejan el hecho de que la cuerda empiece estática y extendiéndose en la dirección radial. En la tercera condición, para una fuerza externa  $F(t) \equiv (\sqrt{\lambda}/2\pi)\Pi_x^z(t, z_m)$  que actúa sobre el quark, la función  $f(t)$  puede ser determinada usando la relación (4.3) que existe entre  $X'$  y  $\Pi_x^z$ . Sin embargo, en la práctica encontramos más fácil especificar  $f(t)$  y usar los resultados de la integración numérica junto con (4.3) para deducir la fuerza  $F(t)$  correspondiente. Estudiando un número grande de ejemplos, hemos podido verificar que la tasa instantánea de pérdida de energía, una vez que el quark es soltado, es independiente de la elección de  $f(t)$  y de  $t_{\text{soltar}}$ , i.e., al quark no le importa su historia pasada. Para las trayectorias que graficaremos más adelante, hemos utilizado  $f(t) = bt(t - t_{\text{soltar}})$ , con  $t_{\text{soltar}} = 0.3/\pi T$  y  $b$  ajustable.

La cuarta y última condición en (4.48) especifica que el extremo de la cuerda en el horizonte se mantenga fijo, reflejando el hecho de que el frente de onda de la perturbación generada por el agente externo sobre el extremo en  $z = z_m$  no puede alcanzar  $z = z_h$  antes de que haya transcurrido un tiempo (de la frontera) infinito. Para poder implementar esta condición en la integración numérica, hemos tomado  $X(t, z_{\text{max}}) = 0$  en el corte  $z_{\text{max}} = 0.999z_h$ , y considerar para todos los casos un tiempo de integración  $t_{\text{max}}$  menor que el tiempo  $\int_{z_m}^{z_{\text{max}}} dz/(1 - (z/z_h)^4)$  que le toma al frente de onda llegar al corte.

Para aplicaciones de este formalismo a casos de interés fenomenológico, debemos escoger el valor del parámetro de masa  $z_m$  basándonos en las masas del quark encanto y el quark fondo,  $m \simeq 1.4, 4.8$  GeV. La pregunta de cómo lograr una mejor traducción entre los parámetro de SYM y QCD fue discutido en [99]. Tomando  $\alpha_{QCD} = 0.5$  ( $g_{QCD} = \sqrt{2\pi}$ ),  $N_c = 3$  y  $T_{QCD} = 250$  MeV, y usando la prescripción “obvia”  $g_{YM} = g_{QCD}$  y  $T_{SYM} = T_{QCD}$ , a partir de (4.28) encontramos que  $z_m/z_h \sim 0.40$

para el encanto y  $z_m/z_h \sim 0.11$  para el fondo. Si uno en cambio utiliza el esquema “alternativo”  $g_{YM}^2 N \sim 5.5$  (motivado en [99] a partir de igualar el potencial quark-antiquark calculado con la correspondencia AdS/CFT y el calculado en la red) y  $T_{SYM} = 3^{-1/4} T_{QCD} \simeq 190$  MeV (que viene de igualar la densidad de energía de las dos teorías), entonces (4.28) nos lleva a  $z_m/z_h \sim 0.16$  para el encanto y  $z_m/z_h \sim 0.046$  para el fondo. En nuestro análisis hemos cubierto un rango significativo de valores para la masa, sin embargo solo presentaremos los resultados para tres valores representativos en la vecindad de la masa del quark encanto,  $z_m/z_h = 0.2, 0.3, 0.4$ .

Hemos llevado a cabo la integración numérica de (4.47) sujeta a las condiciones (4.48) usando la rutina `NDSolve` del Mathematica 5.2. Basándonos en la variación de nuestros resultados al duplicar el número de pasos en el proceso de integración, estimamos que el error numérico es menor al 1%. El tiempo de integración que se muestra en todas las gráficas está en unidades de  $1/\pi T$ , que corresponde (con  $T_{QCD} = 250$  MeV) a  $0.25$  fm/c usando la prescripción “obvia” y  $0.33$  fm/c usando la “alternativa”. Desafortunadamente, la integración numérica comienza a fallar rápidamente, obligándonos a trabajar con intervalos de tiempo (en ambos esquemas) que están por debajo de la escala de tiempo experimental del plasma (típicamente  $t_{\text{falla}} \sim 0.9/\pi T \sim 0.3$  fm/c). Por la misma razón, aún cuando el quark puede ser llevado a velocidades relativistas en el punto de máxima aceleración, solo podemos alcanzar velocidades pequeñas al momento de soltarlo (para la mayor parte  $v_{\text{soltar}} < 0.1$ ).

Nuestros resultados muestran una diferencia cualitativa entre la etapa inicial ( $0 \leq t < t_{\text{soltar}}$ ) donde el quark es acelerado por el agente externo, y la segunda etapa ( $t_{\text{soltar}} \leq t < t_{\text{max}}$ ), donde se mueve únicamente bajo la influencia del plasma. Comenzaremos discutiendo ésta última ya que desde el punto de vista fenomenológico pareciera ser más relevante.

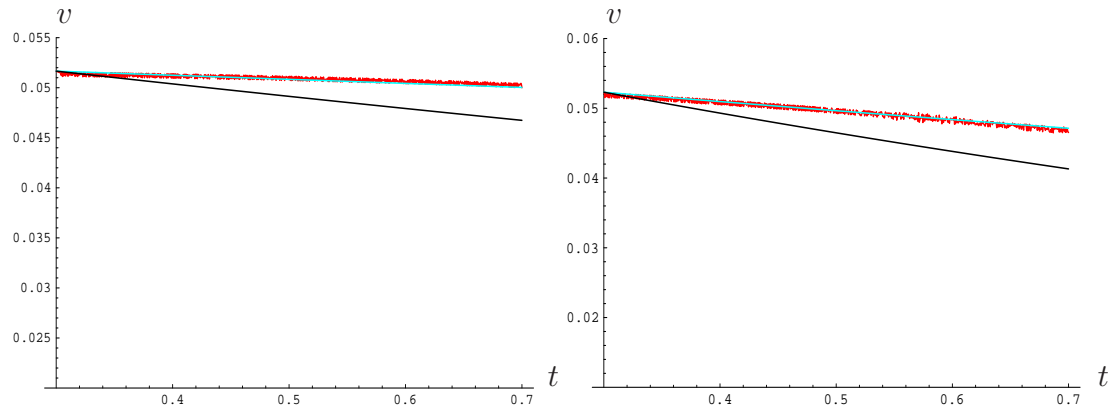


Figura 4.2: Comparación de la velocidad del quark como función del tiempo a partir de la integración numérica (en rojo) contra (4.51) con el valor de  $\mu$  deducido en [21] (en negro), y (4.51) con  $\mu$  escogido para que se ajuste a nuestros resultados (en azul claro), para a)  $z_m/z_h = 0.2$  y b)  $z_m/z_h = 0.4$ . Véase texto para mayor discusión.

La manera más directa de revisar si los resultados de nuestra integración numérica para el quark acelerado se ajustan a los resultados con velocidad constante de [21, 22],

es comparando las correspondientes trayectorias del quark. Si uno asume la relación de dispersión (4.46), entonces la ecuación de movimiento para el quark sujeto únicamente a la fuerza de arrastre (4.40) con  $\mu$  constante es

$$\frac{dv}{dt} = -\mu v(1 - v^2), \quad (4.49)$$

cuya solución es [21]

$$v(t) = \frac{v_{\text{soltar}}}{\sqrt{v_{\text{soltar}}^2 + (1 - v_{\text{soltar}}^2)e^{2\mu(t-t_{\text{soltar}})}}}. \quad (4.50)$$

Como ya hemos mencionado, en nuestros resultados numéricos  $v_{\text{soltar}} \ll 1$ , y por tanto, solo podemos checar la versión no relativista de (4.50),

$$v(t) = v_{\text{soltar}}e^{-\mu(t-t_{\text{soltar}})} \quad (4.51)$$

(y, ya que nuestra integración se limita a intervalos pequeños de tiempo, solo veremos los efectos de la parte lineal de esta función). En la Fig. 4.2 se muestra una comparación entre esta predicción analítica y nuestros resultados numéricos para  $t \geq t_{\text{soltar}}$ . Es evidente a partir de esta gráfica que, en la etapa inicial del movimiento cubierto por nuestro análisis, el quark disipa energía a una tasa mucho menor que la predicha por los resultados de [21]. En efecto, para  $z_m/z_h = 0.2, 0.3, 0.4$  el coeficiente de fricción asintótico es  $\mu_{\text{final}}/\pi T = 0.25, 0.41, 0.59$  respectivamente, mientras que los resultados numéricos quedan mejor ajustados con  $\mu_{\text{inicial}}/\pi T = 0.08, 0.15, 0.26$ .

También podemos intentar realizar la comparación directamente a partir de la tasa de pérdida de energía. Una limitación importante que surge por trabajar con la solución numérica es que no podemos lograr una división de la energía total  $E$  de la cuerda como hicimos en el caso estacionario (y también para el caso general a temperatura cero). Esto quiere decir que, *a priori*, no conocemos la forma correcta de la relación de dispersión del quark o una fórmula para la tasa de pérdida de energía. Sin embargo, dado que su suma permanece constante a lo largo de toda la evolución, si encontramos una expresión para alguna de estas dos, entonces podremos calcular la otra.

Los autores de [21] asumieron que la pérdida de energía sería despreciable para intervalos de aceleración suficientemente pequeños (i.e.,  $t_{\text{soltar}}$  chico), debido a que la fuerza de arrastre ejercida por el plasma no habría podido realizar una cantidad sustancial de trabajo. Si así fuera, esto permitiría determinar de forma directa la relación de dispersión. Desafortunadamente la situación no es tan sencilla, ya que, como aprendimos en la sección 4.1, el quark pierde energía por radiación incluso cuando se mueve en el vacío, y este efecto debe ser considerado para establecer qué fracción de la energía total  $E$  de la cuerda es intrínsecamente atribuible al quark.

Para intentar resolver este problema, debemos recordar, de nuestro estudio de los casos donde tenemos control analítico, que la relación de dispersión surge como un término de superficie con contribuciones de ambos extremos de la cuerda. Basándonos

en nuestros resultados previos, esperamos que la relación de dispersión del quark en el medio térmico tome la siguiente forma:

$$E_q(v, F, T) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1 - z_m^2 v \Pi}{z_m \sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}} - \frac{1}{z_h} \right) + \mathcal{O}(z_m^2/z_h^3). \quad (4.52)$$

El primer término fue copiado de la expresión (4.19) para el caso con  $T = 0$  (otra vez abreviando  $\Pi \equiv \Pi_x^z$ ), y pretende ser una aproximación a la contribución que proviene de la punta que está en las  $D7$ -branas. El segundo término se debe al extremo que alcanza el horizonte, que como ya hemos entendido, codifica información sobre las condiciones iniciales. Sabiendo que nuestra configuración inicial es estática, podemos simplemente leer esta contribución del segundo término de la energía en reposo (4.38), que lo hemos interpretado como un efecto de apantallamiento. Incluir este término es importante para asegurarse que (4.52) se reduce al resultado correcto en el caso en que el quark está estático y sin acelerarse,  $E_q(0, 0, T) = M_{\text{rep}}$ .

Claramente la ecuación (4.52) es solo una aproximación, ya que el primer término debe recibir correcciones debido a la presencia del plasma. En particular, es natural esperar que el factor  $1 - z_m^4 \Pi^2$  que aparece en el denominador sea reemplazado por  $h(z_m) - z_m^4 \Pi^2$ , de tal manera que, al igual que en el caso con  $T = 0$ , la energía del quark diverja en el valor crítico del campo eléctrico, que ahora corresponde a  $\Pi = \sqrt{h(z_m)}/z_m^2$  [106]. Más en general, debido a que la métrica de fondo (4.1) solo se entera que  $T > 0$  a través del factor  $h < 1$ , cualquier corrección al término de superficie en  $z = z_m$  debido a la presencia del plasma debe ser de orden  $1 - h$  o  $h'$ , y por tanto es pequeña en el régimen de quarks pesados  $z_m/z_h \ll 1$ . Para los valores fenomenológicamente importantes  $z_m/z_h = 0.2, 0.3, 0.4$ , estimamos que el error en la relación de dispersión (4.52) está entre 4 – 16 % (mucho más grande que el 1 % que estimamos para nuestros resultados numéricos).

Notemos que (4.52), sin corrección alguna, debe ser la relación de dispersión correcta en el límite de masa infinita  $z_m \rightarrow 0$ , que ha sido el caso más estudiado al utilizar la correspondencia AdS/CFT para investigar sobre pérdida de energía (e.g., [22, 28, 30, 31]). En este límite lo que uno obtiene es

$$E_q(v, T) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{\gamma}{z_m} - \frac{1}{z_h} \right), \quad (4.53)$$

i.e., la dependencia de  $F$  desaparece y, de la misma manera como vimos al final de la sección 4.1 en el contexto de temperatura cero, recuperamos el comportamiento puntual. Podemos ver que el primer término en (4.53) coincide con el límite  $z_m \rightarrow 0$  de la segunda línea de la expresión del caso estacionario (4.34), pero no así el segundo término en (4.53) con la tercer línea en (4.34), debido a que las condiciones iniciales son distintas.

La expresión (4.52) se ve bastante diferente a la relación de dispersión (4.46) propuesta en [21]. En particular, (4.46) evidentemente no puede reproducir la dependencia en  $F$  (o  $\Pi$ ) observada en (4.52), cuya presencia está justificada por los resultados

obtenidos a temperatura cero en la sección anterior. Sin embargo, es importante recordar que dicha dependencia no hubiera sido posible de observar en el análisis de modos cuasi-normales usado para deducir (4.41) o en la evolución del quark-antiquark que ayudó a justificar (4.46), ya que en esos cálculos la fuerza externa es cero.

Poniendo  $\Pi = 0$ , (4.52) se reduce a  $E_q = (\sqrt{\lambda}/2\pi)(\gamma/z_m - 1/z_h) + \mathcal{O}(z_m^2/z_h^3)$ , mientras que (4.46) a través de (4.38) y (4.45) se puede escribir como  $E_q = (\sqrt{\lambda}/2\pi)(\gamma/z_m - \gamma/z_h) + \mathcal{O}(z_m/z_h^2)$ . Estas dos expresiones difieren únicamente en la forma del término que es independiente de  $z_m$ , el cual, como ya hemos entendido, codifica información sobre las condiciones iniciales en la teoría de norma. Dado que las condiciones iniciales en todas las situaciones consideradas en [21] son diferentes a las utilizadas por nosotros, no hay razón para esperar que dichos términos coincidan.

Interpretamos la dependencia en  $v$  que se observa en la contribución del término de superficie en  $z_h$  de la expresión (4.46) como un reflejo del hecho de que el extremo de la cuerda en el horizonte se está moviendo, a diferencia de lo que sucede en nuestro caso.<sup>3</sup> En otras palabras, encontramos que la masa cinética del quark, definida como el coeficiente del término  $v^2/2$  en  $E_q$ , es sensible a las condiciones iniciales. En particular, para un quark que se encuentra inicialmente en reposo, hemos obtenido una relación de dispersión con la misma forma relativista que (4.46),

$$E_q = M_{\text{rep}} + M_{\text{cin}}(\gamma - 1) + \mathcal{O}\left(m\left(\frac{\sqrt{\lambda}T}{2m}\right)^3\right), \quad (4.54)$$

pero con  $M_{\text{cin}} = \sqrt{\lambda}/2\pi z_m = m + \mathcal{O}(m(\sqrt{\lambda}T/2m)^2)$ .

Finalmente estamos en posición de tratar el tema de pérdida de energía. Para el tipo de procesos que nosotros consideramos, la energía total de la cuerda en un tiempo  $t$  está dada por

$$E(t) = M_{\text{rep}} + E_{\text{suministrada}}(t),$$

donde el segundo término es el trabajo realizado por el agente externo y puede ser calculado integrando la corriente de energía  $-\Pi_t^z(t, z_m)$  que se muestra en (4.3). De esta manera, la energía perdida por el quark pesado es

$$E_{\text{perdida}}(t) \equiv E(t) - E_q(v(t), F(t), T) = E_{\text{suministrada}}(t) - E_{\text{cin}}(t), \quad (4.55)$$

donde el último término es la energía cinética

$$E_{\text{cin}} \equiv E_q(v, F, T) - M_{\text{rep}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{z_m} \left( \frac{1 - z_m^2 v \Pi}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}} - 1 \right). \quad (4.56)$$

---

<sup>3</sup>Para las configuraciones del quark-antiquark que fueron analizadas en [21] y serán revisadas y generalizadas en la Sección 4.3, no hay extremo de la cuerda en el horizonte, por lo que debemos esperar solo contribuciones del término de superficie en  $z = z_m$ . Independientemente de esto, la evolución en ese caso no es sensible al valor de la masa cinética  $M_{\text{cin}}$  que aparece en ambos lados de la ecuación de movimiento (4.75), y en consecuencia desaparece, llevándonos a (4.49).

Desde luego, en la etapa  $t \geq t_{\text{soltar}}$  ( $\Pi = 0$ ), en donde solo alcanzamos velocidades muy bajas, solo observamos la parte no relativista (cuadrática en  $v$ ) de esta última expresión.

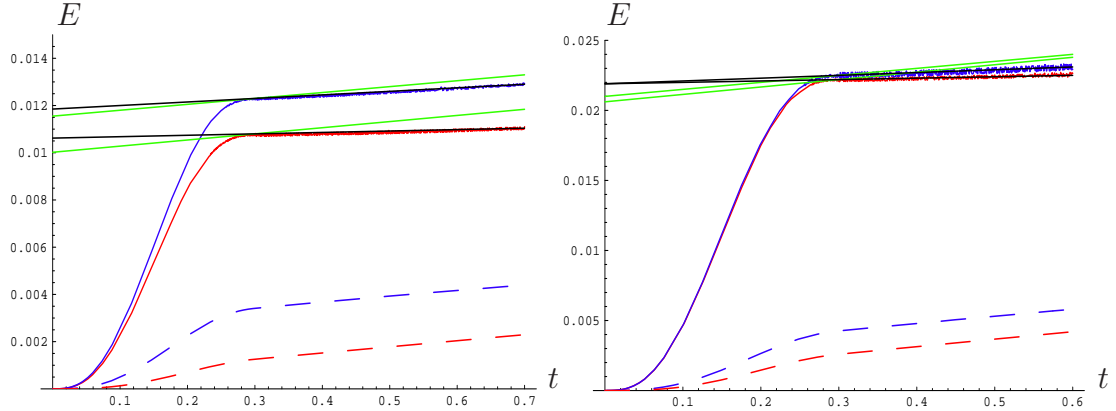


Figura 4.3: a) Energía perdida acumulada (en unidades de  $\sqrt{\lambda T}/2$ ) como función del tiempo (en unidades de  $1/\pi T$ ) para a)  $z_m = 0.2$  (rojo) y  $z_m = 0.4$  (azul) con  $v_{\text{soltar}} = 0.051$ , y b)  $z_m = 0.2$  (rojo) y  $z_m = 0.3$  (azul) con  $v_{\text{soltar}} = 0.073$ . Para comparación, las curvas punteadas con los mismos colores, muestran la energía perdida que se hubiera obtenido siguiendo los resultados del caso estacionario (4.37) obtenidos en [21, 22]. Las líneas verdes representan la tasa (4.37) evaluada con  $v = v_{\text{soltar}}$ , que puede ser contrastada con la pendiente de las curvas numéricas representadas en negro.

En la Fig. 4.3, comparamos la pérdida de energía para diferentes masas pero con la misma velocidad al momento de apagar la fuerza externa (es decir, en  $t = t_{\text{soltar}}$ ). Las curvas tienen pendiente esencialmente constante para  $t > t_{\text{soltar}}$ , lo que significa que la tasa de pérdida de energía es casi constante en la pequeña ventana de tiempo a la que tenemos acceso. Las líneas en la figura contrastan la tasa de pérdida de energía instantánea en dicho intervalo de tiempo, obtenido a partir de un ajuste numérico y que denotaremos  $(\partial_t E_q)_n$ , contra los resultados correspondientes al caso estacionario [21, 22], que denotaremos  $(\partial_t E_q)_s$ . Para  $z_m = 0.4$ ,  $(\partial_t E_q)_n$  es casi dos veces más grande que  $(\partial_t E_q)_s$ , y a medida que el valor de  $z_m$  decrece (correspondiendo a quarks más pesados), esta diferencia aumenta. En particular, para  $z_m = 0.2$ ,  $(\partial_t E_q)_s$  es por lo menos tres veces más grande que  $(\partial_t E_q)_n$ .

Una comparación similar se muestra en la Fig. 4.4, pero con valores fijos de la masa y diferentes velocidades al momento de soltar el quark. En todos los casos, hemos encontrado otra vez que la tasa de pérdida de energía dada por (4.37), está por encima de nuestros resultados numéricos. La discrepancia que se observa es significativamente más grande que el margen de error estimado. Por tanto, nuestros resultados aportan clara evidencia de que, en el intervalo de masas con importancia experimental, existen condiciones bajo las cuales la tasa de pérdida de energía de un quark que se mueve solo bajo la influencia del plasma puede ser considerablemente más chica que la obtenida en [21] para el caso estacionario.



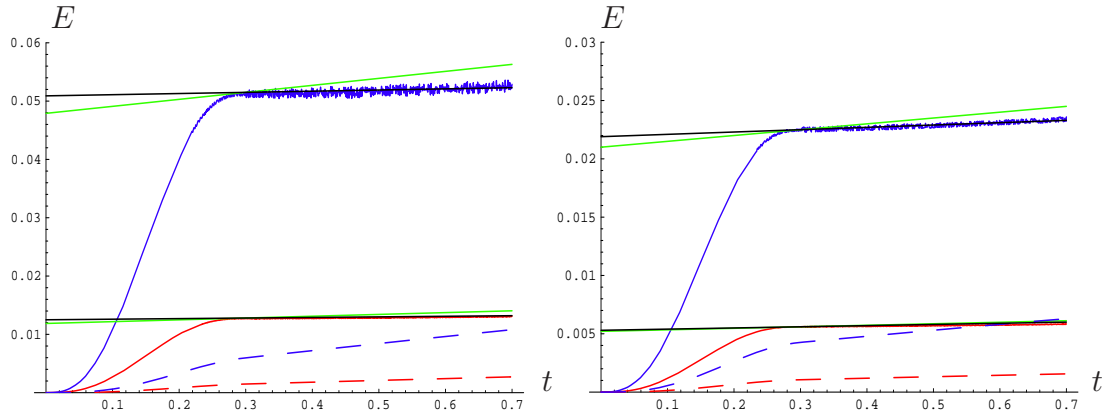


Figura 4.4: a) Energía perdida acumulada (en unidades de  $\sqrt{\lambda T}/2$ ) como función del tiempo (en unidades de  $1/\pi T$ ) para a)  $z_m = 0.2$  con  $v = 0.056$  (rojo) y  $v = 0.111$  (azul) y b)  $z_m = 0.3$  con  $v = 0.036$  (rojo) y  $v = 0.073$  (azul). Para comparación, las curvas punteadas con los mismos colores muestran la energía perdida que se hubiera obtenido siguiendo los resultados del caso estacionario (4.37) obtenidos en [21, 22]. Las líneas verdes representan esta tasa de pérdida de energía evaluada en  $t = t_{\text{soltar}}$  y con velocidad  $v$ , que puede ser contrastada con la pendiente de las curvas numéricas representadas en negro.

Como uno esperaría, la tasa de pérdida de energía numérica depende de  $z_m$  y  $v$ . Como se muestra en la Fig. 4.5, para valores fijos de la masa, ésta depende cuadráticamente de la velocidad del quark. Como mencionamos anteriormente, para los valores de la velocidad que podemos alcanzar, solo tenemos que preocuparnos por la aproximación no relativista de la relación de dispersión (4.56). Esto implica que la pérdida de energía acumulada (4.55) varía cuadráticamente con la velocidad  $v$  del quark, y por tanto, la pendiente constante que vemos en la porción  $t_{\text{soltar}} \leq t \leq t_{\text{max}}$  de las curvas numéricas en la Figs. 4.3 y 4.4, debe ser proporcional a  $v\Delta v$ , donde  $\Delta v$  denota el pequeño cambio de velocidad que haya habido en dicho intervalo de tiempo. Entonces, el comportamiento parabólico que se observa en Fig. 4.5, nos dice que  $\Delta v \propto v$ . En otras palabras, en el término dominante en la versión no relativista de (4.49), el coeficiente de fricción  $\mu$  es independiente de la velocidad del quark, tal y como uno esperaría.

Desafortunadamente, debido a limitaciones con la integración numérica, no hemos sido capaces de caracterizar la dependencia en la masa del quark que tiene la tasa de pérdida de energía, más allá de poder decir que  $(\partial_t E_q)_n$  aumenta casi linealmente cuando  $z_m/z_h$  crece (la masa disminuye). En particular, arriba de  $z_m/z_h \sim 0.75$ , nuestros resultados se vuelven indistinguibles (dentro del margen de error) de los del régimen estacionario (4.37).

Veamos ahora qué sucede en la etapa inicial  $0 \leq t < t_{\text{soltar}}$ . De la primer porción de las curvas en las Figs. 4.3 y 4.4, podemos ver que la situación cuando el quark está sujeto a una fuerza externa es justamente la opuesta a la que describimos en los párrafos anteriores para el movimiento no forzado: la tasa a la cual la energía se disipa

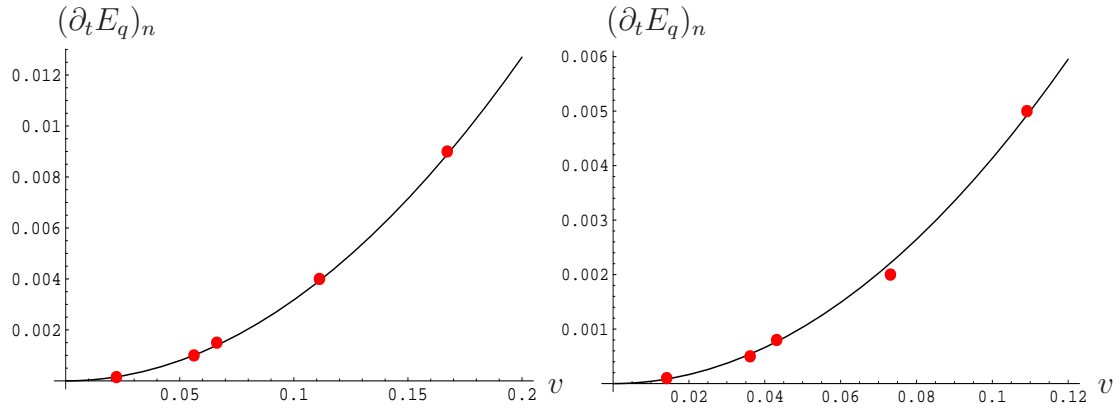


Figura 4.5: La tasa de pérdida de energía (puntos, en unidades de  $\sqrt{\lambda}\pi T^2/2$ ) como función de la velocidad para a)  $z_m = 0.2$  y b)  $z_m = 0.3$ , junto con el ajuste cuadrático correspondiente  $(\partial_t E_q)_n(0.2, v) = 0.31v^2$  y  $(\partial_t E_q)_n(0.3, v) = 0.41v^2$ .

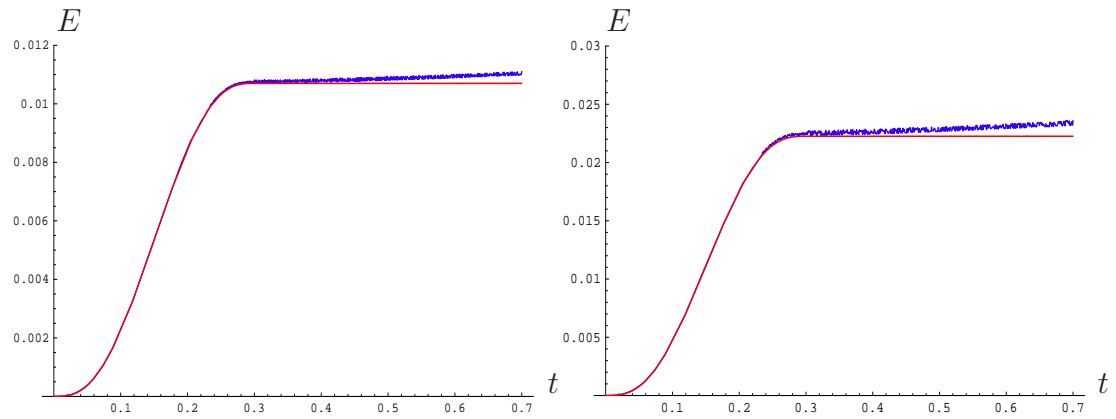


Figura 4.6: Comparación entre la pérdida de energía acumulada (en unidades de  $\sqrt{\lambda}T/2$ ) versus tiempo (en unidades de  $1/\pi T$ ) usando (4.55) en azul y (4.18) en rojo para a)  $z_m = 0.2$  y b)  $z_m = 0.3$ . Ver texto para discusión.

puede ser sustancialmente más grande que (4.37), lo que sugiere que en esta etapa el mecanismo de pérdida de energía es cualitativamente diferente. En particular, la energía perdida en este tramo no es despreciable, y es precisamente este obstáculo lo que impide que podamos deducir directamente la relación de dispersión para el quark a partir de nuestros resultados numéricos como propusieron en [21]. Ya habíamos anticipado esta situación en la discusión de los párrafos anteriores, basándonos en los resultados que obtuvimos en la Sección 4.1 para el caso  $T = 0$ .

Cuando, utilizando los datos numéricos de la evolución en el plasma, comparamos como en la Fig. 4.6 la energía perdida por un quark pesado, Ec. (4.55), contra la fórmula de Lienard modificada (4.18), encontramos que para  $t < t_{\text{soltar}}$  las dos curvas son indistinguibles una de la otra cuando  $z_m/z_h = 0.2, 0.3$ , y en menor medida cuando  $z_m/z_h = 0.4$ . De hecho, son prácticamente iguales incluso si en (4.18) ponemos los datos de la evolución a  $T = 0$ . En otras palabras, para este rango de masas, el quark se comporta inicialmente como si no hubiera plasma, y pierde energía por radiación, a una tasa igual a la descrita por la fórmula de Lienard modificada (el primer término en (4.18)). Esto es justamente lo que uno esperaría del lado de la teoría de norma, ya que un quark pesado debe ser insensible al plasma para tiempos muy tempranos en su evolución.

Del lado de teoría de cuerdas, el punto es que, para estos valores relativamente chicos de  $z_m/z_h$ , el factor  $h$  es tan cercano a 1 que las modificaciones inducidas por el horizonte del agujero negro sobre  $E_{\text{suministrada}}$  y  $E_{\text{perdida}}$  solo se vuelven apreciables cuando ha transcurrido un intervalo de tiempo suficientemente grande. Debemos enfatizar que no es posible reproducir los resultados numéricos para  $v(t)$  y  $E_{\text{input}}(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{perdida}}(t)$  en esta etapa inicial utilizando la relación de dispersión (4.46) y la tasa de pérdida de energía (4.37) encontradas en [21].

Más allá de  $t_{\text{soltar}}$  las curvas en la Fig. 4.6 se separan, mostrando la influencia del medio térmico. En [21] mostraron que (4.37) debe ser válida para tiempos suficientemente grandes, por lo que esperamos que la tasa de pérdida de energía que observamos en las Figs. 4.2-4.6 aumente a medida que el sistema evolucione en el tiempo. Desafortunadamente, debido a la gran limitación que tenemos en los tiempos de integración, no hemos sido capaces de seguir la evolución lo suficiente para poder localizar el tiempo de transición al comportamiento asintótico. Retomaremos este punto desde una perspectiva diferente en la Sección 4.3.4.

### 4.2.3. El agujero negro en la hoja de mundo y el comportamiento final de la cuerda

Resulta interesante visualizar la evolución del sistema más allá del intervalo de tiempo cubierto por nuestros resultados numéricos de forma similar a como hicimos en el caso con temperatura cero en la Sección 4.1.3. El quark, inicialmente en reposo, y acelerado por una fuerza externa  $F(t)$  entre  $t = t_{\text{tomar}}$  (originalmente  $t = 0$ ) y  $t = t_{\text{soltar}}$ , comenzará a desacelerarse debido a la influencia del plasma, hasta llegar al reposo en una cierta posición  $x_\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En la descripción dual, esto

significa que el encaje final de la cuerda, al igual que el inicial ( $t \leq t_{\text{tomar}}$ ), debe tener un segmento estático y vertical que se extiende desde las  $D7$ -branas en  $z = z_m$  hasta el horizonte del agujero negro en  $z = z_h$ , para representar al quark en reposo.

A medida que el tiempo avanza, el extremo inferior de la cuerda (en  $z = z_m$ ) recorre la trayectoria del quark, moviéndose desde  $x = 0$  hasta  $x = x_\infty$ . Por otro lado, el extremo superior (en  $z = z_h$ ) se mantiene en  $x = 0$  para todo tiempo finito, ya que el frente de onda generado en la cuerda por la aceleración de la punta en  $z = z_m$  llegará al horizonte solo cuando  $t \rightarrow \infty$ . Dadas estas condiciones de frontera, en el plano  $x$ - $z$  la cuerda pasará de tener una forma puramente radial, a tener una forma tipo  $\neg$ , con el segmento horizontal en  $z = z_h$ , extendiéndose desde  $x = 0$  hasta  $x = x_\infty$ . Toda la energía (y momento) perdida(o) por el quark a lo largo de su evolución queda guardada(o) en ésta porción “horizontal” de la cuerda, que como sabemos, codifica la región IR de la teoría de norma. La región de la que nada escapa, al igual que en la Sección 4.1.3, está acotada por el horizonte en la hoja de mundo de la cuerda. Éste lo podemos identificar parándonos en la esquina  $(x_\infty, z_h)$  y proyectando hacia atrás a lo largo de la mitad del cono de luz futuro  $\dot{z}_{\text{nula}}^{(-)}(t)$ , ahora definido por

$$\dot{z}_{\text{nula}}^{(\pm)}(t) = \frac{X' \dot{X} \pm \sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}{X'^2 + \frac{1}{h}}. \quad (4.57)$$

La curva resultante  $z_{\text{BH}}(t)$  desciende desde  $z \rightarrow \infty$  antes de  $t = t_{\text{tomar}}$ , alcanza un valor mínimo de la coordenada radial, y después vuelve a subir, acercándose a la esquina a medida que  $t \rightarrow \infty$ . El segmento que apunta hacia arriba está completamente metido en la región perturbada de la hoja de mundo, localizado entre las curvas nulas que apuntan hacia arriba  $z_{\text{tomar}}(t)$  y  $z_{\text{soltar}}(t)$  obtenidas a partir de integrar (4.57) con la elección del signo “+” y condiciones iniciales  $z_{\text{tomar}}(t_{\text{tomar}}) = z_m$  o  $z_{\text{soltar}}(t_{\text{soltar}}) = z_m$ , respectivamente. Una cota inferior para la ubicación de la porción ascendente de  $z_{\text{BH}}(t)$  está dada por (el segmento ascendente de) la curva de límite estacionario  $z_{\text{ergo}}(t)$ , definida como la región donde  $g_{tt} = 0$ , i.e.,  $\dot{X}^2 = h$ . La situación se resume en Fig. 4.7.

Si en lugar de soltar el quark lo jalamos con velocidad constante  $v$  por un periodo de tiempo arbitrariamente grande (i.e., si  $t_{\text{soltar}} \rightarrow \infty$ ), entonces nos acercaríamos a la configuración estacionaria [21, 22], y al hacerlo, el horizonte de la hoja de mundo se estabilizaría (al igual que la superficie de límite estacionario) en  $z = z_v \equiv (1 - v^2)^{1/4}$ , tal y como sucede en [106, 101] (y [102]).

El comportamiento de la cuerda mucho tiempo después de  $t_{\text{soltar}}$  fue determinado cuantitativamente en [21], y es de la forma  $X(z, t) = x_\infty - A(z)e^{-\mu_{\text{final}} t}$ , con el coeficiente de fricción  $\mu_{\text{final}}$  dado por el modo cuasi-normal más bajo. En ese trabajo también se mostró que imponer condiciones de frontera puramente entrantes cerca del horizonte del espacio-tiempo (en  $z = z_h$ ) obliga a la cuerda a desviarse de la vertical por una cantidad divergente ( $A(z) \rightarrow \infty$  as  $z \rightarrow z_h$ ). Ésto es consistente con la formación de una esquina, tal y como hemos argumentado para el caso del quark que está inicialmente en reposo.

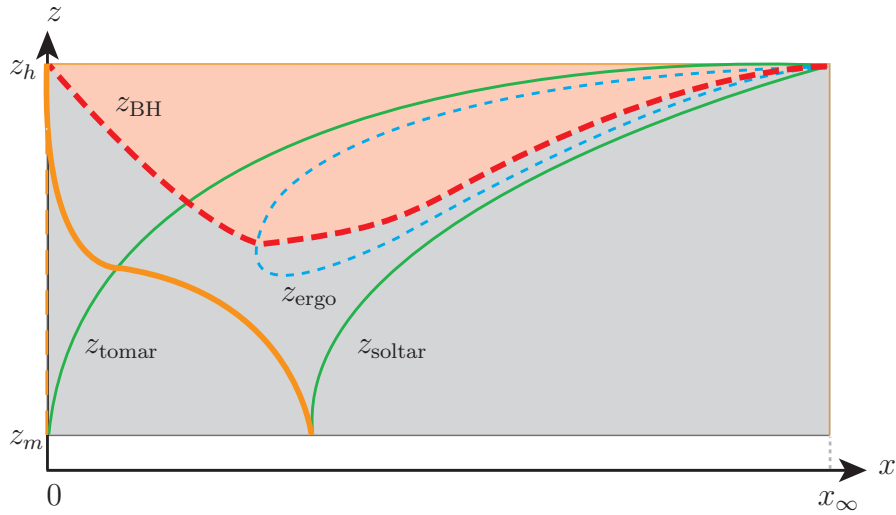


Figura 4.7: Ilustración esquemática de la hoja de mundo de la cuerda (región rectangular sombreada en gris), por conveniencia proyectada sobre el plano  $x$ - $z$ . Para ayudar con la visualización de la evolución, se muestran tres “imágenes instantáneas” de la cuerda en distintos momentos: en (cualquier tiempo hasta)  $t = t_{\text{tomar}}$  (línea punteada delgada naranja), cuando la cuerda está en reposo y vertical en  $x = 0$ ; en  $t = t_{\text{soltar}}$  (línea ancha naranja), cuando ya está parcialmente deformada debido al efecto de la fuerza externa  $F(t)$ ; y en  $t \rightarrow \infty$  (línea delgada naranja), cuando ya tiene la forma  $\neg$ , y el segmento vertical ya está en reposo en  $x = x_{\infty}$ . Además, en el diagrama se muestran las curvas nulas ascendentes (a  $t_{\text{tret}}$  fijo)  $z_{\text{tomar}}$  y  $z_{\text{soltar}}$  (verde), la curva de límite estacionario  $z_{\text{ergo}}$  (azul punteado), y el horizonte de eventos  $z_{\text{BH}}$  (en rojo punteado), rodeando al agujero negro de la hoja de mundo, representado en color rojo claro. Véase el texto para mayor discusión.

Al igual que como encontramos para  $T = 0$ , vemos acá que la pérdida de energía parece estar irremediabilmente ligada a la formación de un agujero negro sobre la hoja de mundo de la cuerda. Dado que nuestros resultados numéricos muestran que la pérdida inicial de energía está controlada por un coeficiente de fricción  $\mu_{\text{inicial}} < \mu_{\text{final}}$ , pareciera, al igual que en el caso no forzado, que la tasa asintótica comienza a funcionar cuando la cuerda esta muy cerca de su forma final ( $\neg$ ). Sería interesante poder establecer una conexión más clara y detallada entre la tasa instantánea de pérdida energía del quark y la tasa a la cual la energía fluye a través del horizonte de la hoja de mundo, generalizando los resultados de [101, 106] para la configuración estacionaria.

### 4.3. Evolución de un par quark-antiquark

Una cuerda con ambos extremos en las D7-branas describe un par quark-antiquark. En este contexto, la situación que se acerca más a modelar el proceso en el cual se crean un quark y un antiquark pesados en el plasma a un tiempo  $t = 0$ , y después se separan, es aquel en el que los extremos de la cuerda comienzan en la misma posición, pero con diferente velocidad. En una primera aproximación a dicho sistema, es interesante considerar el caso en el que los extremos de la cuerda se separan en direcciones opuestas (espalda con espalda) y con la misma velocidad inicial  $v_0$ , lo cual quiere decir que el sistema de referencia del centro de masa del par coincide con el sistema de referencia del plasma en reposo. Para realizar nuestros cálculos tomaremos  $x$  como la dirección del movimiento.

#### 4.3.1. Revisión de resultados anteriores

En [21] se realizó un estudio numérico de este problema. Se encontró que las trayectorias del quark y del antiquark se pueden seguir durante más tiempo de manera más eficiente, si en lugar de describir el encaje de la cuerda  $X^\mu(\tau, \sigma)$  en la norma estática  $\sigma = z, \tau = t$ , uno escoge coordenadas para la hoja de mundo en la cual rebanadas de  $\tau$  constante logran alcanzar valores más grandes de  $x$  cerca de  $z = z_m$ , manteniéndose lejos del horizonte en  $z = z_h$ . Resulta más fácil implementar esto trabajando con la acción de Polyakov (en lugar de la de Nambu-Goto)

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \equiv \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \mathcal{L}_P, \quad (4.58)$$

con  $g_{ab}$  la métrica intrínseca en la hoja de mundo, y la elección de norma  $g_{\tau\tau} = -s$ .  $g_{\sigma\sigma} = 1/s$ ,  $g_{\sigma\tau} = 0$ . El factor de “estiramiento”  $s = s(\sigma, \tau)$ , define de manera implícita nuestra elección de coordenadas para la hoja de mundo, y su elección debe ser tal que permita mantener la integración numérica lejos del horizonte durante el mayor tiempo posible. Para una trayectoria dada, la función  $z(\tau, \sigma)$  determina la cercanía con el horizonte, y por tanto, dicho objetivo se logra tomando  $s = s(z(\tau, \sigma))$  (a nivel

de las ecuaciones de movimiento). Siguiendo a [21] usaremos  $s \propto (z_h - z)^p$  para los ejemplos que presentaremos a continuación.

En este marco, la evolución de la cuerda está controlada por las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \frac{ht}{sz^2} \right) - \partial_\sigma \left( \frac{sh t'}{z^2} \right) &= 0, \\ \partial_\tau \left( \frac{\dot{x}}{sz^2} \right) - \partial_\sigma \left( \frac{sx'}{z^2} \right) &= 0, \\ \partial_\tau \left( \frac{\dot{z}}{shz^2} \right) - \partial_\sigma \left( \frac{sz'}{hz^2} \right) &= \frac{1}{2s} \left[ (\dot{z}^2 - s^2 z'^2) \partial_z \left( \frac{1}{hz^2} \right) - (t^2 - s^2 t'^2) \partial_z \left( \frac{h}{z^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\dot{x}^2 - s^2 x'^2) \left( \frac{2}{z^3} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

(donde  $\dot{\phantom{x}} \equiv \partial_\tau$ ,  $' \equiv \partial_\sigma$ ) y las constricciones

$$\begin{aligned} -htt' + \dot{x}x' + h^{-1}\dot{z}z' &= 0, \\ -h(t^2 + s^2 t'^2) + (\dot{x}^2 + s^2 x'^2) + h^{-1}(\dot{z}^2 + s^2 z'^2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

que, como siempre, establecen que la métrica intrínseca en la hoja de mundo debe ser proporcional a la métrica inducida (garantizando con ello la equivalencia clásica con la acción de Nambu-Goto). Dados los datos iniciales que satisfacen (4.60), el requerimiento de que las constricciones se sigan satisfaciendo a lo largo de la evolución sirve como prueba de consistencia para asegurarnos que la integración numérica es válida. Los resultados que reportaremos en esta Sección fueron obtenidos utilizando la rutina de integración numérica de Mathematica 5.2's `NDSolve`, satisfaciendo las constricciones a un nivel de  $10^{-5}$  or  $10^{-6}$ .

En términos de las densidades de momento  $\Pi_\mu^a \equiv \partial \mathcal{L}_P / \partial (\partial_a X^\mu)$ , vemos que las dos primeras ecuaciones en (4.59) expresan la conservación de las corrientes de Noether  $\Pi_t^a$  y  $\Pi_x^a$ , que como sabemos, están asociadas a la invariancia bajo traslaciones en  $t$  y en  $x$ , respectivamente. Para describir un par quark-antiquark que solo siente la presencia del plasma, debemos escoger las condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet usuales

$$t'(\tau, 0) = t'(\tau, \pi) = 0, \quad x'(\tau, 0) = x'(\tau, \pi) = 0, \quad z(\tau, 0) = z(\tau, \pi) = z_m \quad \forall \tau. \quad (4.61)$$

La energía total y el momento en la dirección  $x$ ,

$$E = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma (-\Pi_t^\tau) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \frac{ht}{sz^2}, \quad (4.62)$$

$$P = \frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \Pi_x^\tau = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \frac{h\dot{x}}{sz^2}, \quad (4.63)$$

se conservan.

Para este problema en particular, los autores de [21] identificaron una familia de condiciones iniciales con un parámetro que satisfacen correctamente las constricciones (4.60), y son compatibles con las condiciones de frontera (4.61). Trabajando a partir de ahora en unidades donde  $z_h = 1/\pi T = 1$ , estas condiciones toman la forma

$$\begin{aligned} t(0, \sigma) &= 0, & \dot{t}(0, \sigma) &= A, \\ x(0, \sigma) &= 0, & \dot{x}(0, \sigma) &= A\sqrt{1 - z_m^4} \cos \sigma, \\ z(0, \sigma) &= z_m, & \dot{z}(0, \sigma) &= A[1 - z_m^4] \sin \sigma, \end{aligned} \quad (4.64)$$

y describen una cuerda puntual en  $t = 0$  que crece cuando  $t > 0$  como resultado de tener velocidad inicial distinta de cero

$$v_x(\sigma) = \frac{\dot{x}}{\dot{t}} = \sqrt{1 - z_m^4} \cos \sigma, \quad v_z(\sigma) = \frac{\dot{z}}{\dot{t}} = [1 - z_m^4] \sin \sigma. \quad (4.65)$$

El parámetro  $A$  (que con respecto a [21] ha sido reescalado por un factor de  $\sqrt{1 - z_m^4}$ ) controla la energía (4.62) de la configuración

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \left( \frac{h\dot{t}}{sz^2} \right)_{\tau=0} = \frac{\sqrt{\lambda} (1 - z_m^4) A}{2 z_m^2 s(z_m)}. \quad (4.66)$$

Como es de esperarse, el momento total en  $x$  es cero. Usando las condiciones iniciales (4.64), en [21] encontraron que, dependiendo del valor de  $E$ , el comportamiento subsecuente de los extremos de la cuerda puede ser dos tipos. Cuando la energía del par es suficientemente grande (esencialmente,  $E > 2M_{rep}$ ), el quark y el antiquark se separan logrando escapar de la influencia que siente el uno del otro, y se irán frenando monotonamente hasta llegar al reposo (en  $t = \infty$ ) por el efecto del plasma. Por otro lado, para energías bajas, la atracción mutua los frena y los hace oscilar hasta que disipan toda su energía al plasma. Durante medios-ciclos consecutivos, la cuerda alterna estando por arriba y por debajo de la línea  $z = z_m$ , como resultado de lo cual el movimiento es asimétrico.

### 4.3.2. Condiciones iniciales generalizadas

Intuitivamente, debe ser posible reemplazar la forma de las velocidades iniciales (4.65) propuesta en [21] por funciones  $v_x(\sigma)$ ,  $v_z(\sigma)$  más generales, lo que equivale a decir que  $\dot{x}(0, \sigma) = Av_x(\sigma)$ ,  $\dot{z}(0, \sigma) = Av_z(\sigma)$ . Por simplicidad y basándonos en la simetría de nuestro problema, nos concentraremos únicamente en funciones  $v_x(\sigma)$  que sean impares en el intervalo  $[0, \pi]$ . Por compatibilidad con las condiciones de frontera de Neumann en (4.61) se requiere que  $v'_x(0) = 0$ , la restricción hamiltoniana en (4.60) determina  $v_z(\sigma)$  en términos de  $v_x(\sigma)$ , y la condición de frontera de Dirichlet en (4.61) necesita que  $v_z(0) = 0$ . Combinando todas estas condiciones, encontramos que podemos escoger

$$\begin{aligned} t(0, \sigma) &= 0, & \dot{t}(0, \sigma) &= A, \\ x(0, \sigma) &= 0, & \dot{x}(0, \sigma) &= Av_x(\sigma), \\ z(0, \sigma) &= z_m, & \dot{z}(0, \sigma) &= A\sqrt{1 - z_m^4} \sqrt{1 - z_m^4 - v_x(\sigma)^2}, \end{aligned} \quad (4.67)$$



con  $v_x(0) = \sqrt{1 - z_m^4}$  y  $v'_x(0) = 0$ , lo cual representa una generalización de las condiciones iniciales (4.64) con infinitos parámetros.

La energía de todas estas configuraciones también está dada por la fórmula (4.66). Debido a que la cuerda es inicialmente un punto, pudiera parecer peculiar que uno pueda distinguir físicamente entre las varias posibles velocidades que tienen los diferentes “puntos internos” de la cuerda. Uno pudiera sospechar que en realidad todas las condiciones iniciales (4.67) están relacionadas entre sí a través de una transformación de norma. Para ver que ese no es el caso, basta con evolucionar en el tiempo algunas de estas condiciones iniciales y ver lo que sucede. Como se muestra en la Fig. 4.8, las trayectorias resultantes en el espacio-tiempo son todas diferentes. La moraleja de la historia es que si bien la cuerda es un punto en el espacio-tiempo, no es un punto en el espacio fase, y es precisamente gracias a esto que pueden existir condiciones iniciales con infinitos parámetros.

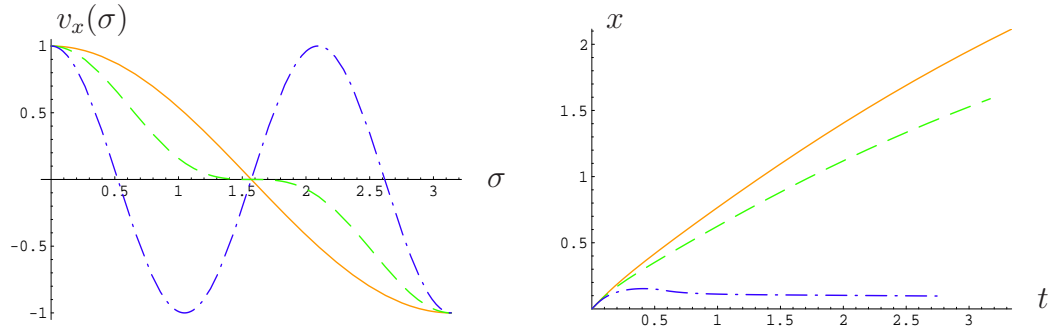


Figura 4.8: (a) Tres perfiles diferentes para la velocidad inicial de la cuerda:  $\cos \sigma$  (continua),  $\cos^3 \sigma$  (rayas), y  $\cos 3\sigma$  (raya-punto). (b) La trayectoria correspondiente para el extremo de la cuerda con  $\sigma = 0$  y el parámetro de masa  $z_m = 0.2$ . Aún cuando las tres configuraciones tienen la misma energía  $E/2M_{rep} = 2.45$  y la misma velocidad inicial  $v_0 = 0.9992$ , la evolución del quark es claramente diferente en cada caso.

La pregunta sobre si hay dependencia de la norma en nuestra descripción nos permite remarcar un punto importante: en lugar de probar diferentes condiciones iniciales variando la forma funcional de  $v_x(\sigma)$  en (4.67) (para una elección de la coordenada  $\sigma$  en la hoja de mundo), podemos mantener fija la forma de  $v_x(\sigma)$  y cambiar el significado de  $\sigma$ . Una forma de lograr esto último es modificar la elección inicial del factor de “estiramiento”  $s(0, \sigma)$ . Es fácil ver que, en efecto, esto da diferentes trayectorias en el espacio tiempo, incluso utilizando la misma energía inicial (4.66) para todos los casos. Por el contrario, cuando modificamos  $s(\tau, \sigma)$  para encontrar la elección que optimiza la integración numérica para una configuración de la cuerda dada, debemos mantener fijo el factor de estiramiento inicial  $s(0, \sigma)$ , para asegurarnos que las condiciones iniciales para la evolución no cambien. Para nuestros cálculos encontramos que resulta conveniente utilizar  $s(\tau, \sigma) = (1 - z(\tau, \sigma))^p / (1 - z_m)^{p-1}$ , con  $p$  ajustable.

Es natural preguntarse cuál es la interpretación en el lenguaje de SYM de las diferentes condiciones iniciales (4.67). La respuesta la encontramos utilizando la receta estándar para las funciones de correlación [15]: diferentes perfiles de la cuerda

dependientes del tiempo corresponden a diferentes configuraciones dependientes del tiempo de los campos gluónicos [37, 38]. De la misma manera que el encaje de la cuerda no está completamente caracterizado por la ubicación de sus extremos, el estado inicial de la teoría de norma no queda caracterizado de manera única especificando la ubicación del quark y del antiquark. Esto es incluso cierto en electrodinámica a temperatura cero, pero en ese caso, debido al carácter lineal de las ecuaciones de movimiento, dada una configuración de los campos es fácil identificar directamente qué parte de éstos está asociada a la fuente en cuestión.

Se puede ver a partir de (4.67) que la velocidad inicial del quark,  $v_0 \equiv v_x(0) = \sqrt{1 - z_m^4}$ , no es un parámetro libre del sistema, sino que se fija por la elección de  $z_m$ , o de manera equivalente, por la masa Lagrangiana  $m$  del quark, de acuerdo con (4.28). La razón por la que esto sucede es fácil de comprender desde el lado de la teoría de cuerdas. En  $t = 0$ , la cuerda ubicada en su totalidad en un solo punto no solo satisface  $\dot{z} = 0$ , en acuerdo con (4.61), sino también  $z' = 0$ , según (4.67), tal y como lo haría un extremo que es libre de moverse en todas las direcciones del espacio-tiempo. Sabemos que el extremo de dicha cuerda debe de moverse a la velocidad de la luz (ver por ejemplo [109]), y dado que los extremos están localizados en  $z = z_m$ , podemos ver a partir de (4.1) que, en efecto, la velocidad coordenada  $v_x = \sqrt{1 - z_m^4}$  corresponde a la velocidad propia  $V_x = 1$  (un hecho que fue mencionado por primera vez en [71]).<sup>4</sup> En la teoría de norma, esta identificación le confiere un significado especial a la velocidad dependiente de la masa

$$v_m \equiv \sqrt{1 - z_m^4} . \quad (4.68)$$

Al menos desde la perspectiva de la teoría de norma, uno esperaría poder encontrar configuraciones en las cuales la velocidad inicial  $v_0$  del quark se pudiera ajustar del modo que uno desee. Dada la discusión de los párrafos anteriores, vemos que del lado de AdS, con una cuerda cuyos extremos inicialmente están juntos, esto solo se puede lograr si escogemos  $z' \neq 0$ . Para satisfacer la primer constricción en (4.60) debemos tomar  $\dot{z} = 0$ . Escogiendo para la cuerda un perfil de la velocidad  $v_x(\sigma)$  que sea una función arbitraria impar en el intervalo  $[0, \pi]$ , el conjunto de condiciones iniciales queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} t(0, \sigma) &= 0 , & \dot{t}(0, \sigma) &= A , \\ x(0, \sigma) &= 0 , & \dot{x}(0, \sigma) &= A v_x(\sigma) , \\ z(0, \sigma) &= \zeta(\sigma) , & \dot{z}(0, \sigma) &= 0 , \end{aligned} \quad (4.69)$$

con  $\zeta(\sigma)$  una función par en el intervalo  $[0, \pi]$ , que satisface  $\zeta(0) = z_m$  por compati-

---

<sup>4</sup>El mismo razonamiento aplica a todos los puntos de la cuerda: sus velocidades propias iniciales son

$$V_x(\sigma) \equiv \frac{v_x(\sigma)}{\sqrt{1 - z_m^4}} , \quad V_z(\sigma) \equiv \frac{v_z(\sigma)}{1 - z_m^4} = \frac{\sqrt{1 - z_m^4 - v_x(\sigma)^2}}{\sqrt{1 - z_m^4}} ,$$

y claramente satisfacen  $V_x^2 + V_z^2 = 1$ , independientemente de la elección de  $v_x(\sigma)$ .

bilidad con las condiciones de frontera de Dirichlet en (2.11), y

$$\zeta'(\sigma) = \pm \frac{A\sqrt{1-\zeta(\sigma)^4}}{s(\zeta(\sigma))} \sqrt{1-\zeta(\sigma)^4 - v_x(\sigma)^2}, \quad (4.70)$$

para cumplir con la constricción hamiltoniana en (4.60). Por construcción, ahora la velocidad inicial del quark puede ser escogida de manera arbitraria, siempre y cuando  $v_0 \leq v_m$  para que el lado derecho de (4.70) sea real en  $\sigma = 0, \pi$ . Así, la energía (4.62) de la configuración está dada por

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \left( \frac{h\dot{t}}{s z^2} \right)_{\tau=0} = \frac{\sqrt{\lambda}A}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \frac{1-\zeta^4}{s(\zeta)\zeta^2}. \quad (4.71)$$

Las condiciones (4.69) describen una cuerda “tipo línea” que se extiende únicamente en la dirección de la coordenada radial de AdS, yendo desde  $z = z_m$  hasta un punto de retorno en  $z = \zeta(\pi/2)$  y después regresando nuevamente hasta  $z = z_m$ . La función  $\zeta(\sigma)$  solo será suave en el punto de retorno si  $\zeta'(\pi/2) = 0$ , que combinado con (4.70) y la necesidad de que  $v_x(\pi/2) = 0$  implica que  $\zeta(\pi/2) = 1$ , es decir, la cuerda se da la vuelta en el horizonte. Para que ésto ocurra, dado un perfil inicial para la velocidad  $v_x(\sigma)$ , el valor de  $A$  debe ser ajustado de tal manera que la solución numérica de (4.70) llegue a  $\zeta = 1$  precisamente en  $\sigma = \pi/2$ . Por tanto, para estas condiciones iniciales, donde  $v_0$  es un parámetro libre,  $A$  no lo es. Habiendo determinado  $\zeta(\sigma)$ , uno puede proceder como antes con la integración numérica de la ecuación de movimiento (4.59). En la Fig. 4.9 se muestran algunas de las trayectorias del quark con  $v_x(\sigma) = v_0 \cos \sigma$  y  $s = (1 - z)^{1/2}$ .

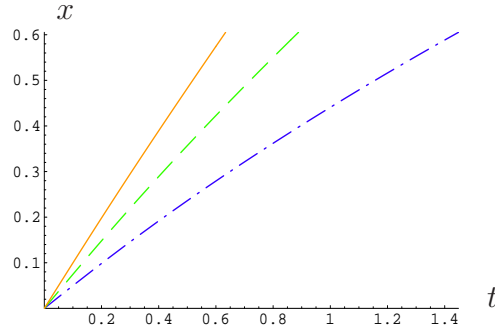


Figura 4.9: Trayectorias del quark para la configuración adjunta  $q-\bar{q}$ , para  $z_m = 0.2$  y  $v_0 = v_m$  (continua),  $v_0 = 0.75v_m$  (rayas),  $v_0 = 0.5v_m$  (raya-punto). Las energías correspondientes son  $E/2M_{rest} = 2.86, 1.38, 1.13$ .

La existencia de los conjuntos cualitativamente diferentes de condiciones iniciales para la cuerda, que describen la creación de un par quark-antiquark, tiene una interpretación directa en el contexto de teoría de campos: el producto de un  $q$  fundamental y un  $\bar{q}$  antifundamental nos permite obtener un par  $q-\bar{q}$  en la representación del singlete o en la representación adjunta del grupo de norma  $SU(N_c)$ , y cada una de las

configuraciones para la cuerda es dual a una de estas. La cuerda tipo “línea” (4.69) es precisamente el sistema que se consideró en [73, 36, 79, 98] para modelar una fuente de color en la representación adjunta. Debido a que es un objeto extendido, los campos de supergravedad que produce son de largo alcance, lo cual se traduce a través de [15] en un perfil para los campos gluónicos de largo alcance, característica de una fuente con carga neta de color. Por el otro lado, la cuerda tipo “punto” (4.67) no genera campos de largo alcance, por lo que describe al singlete. Dada esta correspondencia, es interesante que la dualidad AdS/CFT predice que (para  $N_c$  y  $\lambda$  grandes) la velocidad inicial del quark es un parámetro libre en la configuración que corresponde a la representación adjunta, y no así para el caso en que la configuración es la asociada al singlete.

### 4.3.3. La velocidad límite

En la sección anterior aprendimos que la velocidad inicial del quark y del antiquark al momento que se crea el par está acotada superiormente por la velocidad  $v_m$  definida en (4.68). La razón, como ya hemos visto, es fácil de comprender del lado de la teoría de cuerdas: la velocidad coordenada  $v_x = v_m$  corresponde a una velocidad propia  $V_x$  igual a la velocidad de la luz en el extremo de la cuerda en  $z = z_m$  [71]. El punto interesante es que es  $v_x$ , y no  $V_x$ , la que corresponde a la velocidad en la teoría de norma.

Resulta natural esperar que esta restricción sobre la velocidad ( $v \leq v_m$ ) también aplique a configuraciones de la cuerda más generales. En completa analogía con el caso de la partícula puntual, la forma más simple de deducir esta restricción es volviendo a la acción de Nambu-Goto (4.2), y observar que el requerimiento de que ésta sea real (i.e., que la hoja de mundo de la cuerda sea tipo tiempo) impone una cota sobre los posibles encajes (físicos) que se pueden obtener. Trabajando por simplicidad en la norma estática  $\tau = t, \sigma = z$ , es fácil ver que la raíz cuadrada en la acción es real siempre y cuando la función de encaje  $\vec{X}(z, t)$  satisfaga

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \leq h \frac{1 + h \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}{1 + h \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 \sin \alpha}, \quad (4.72)$$

donde  $\alpha \equiv \angle(\partial \vec{X}/\partial t, \partial \vec{X}/\partial z)$ . Para una cuerda que se estira y se mueve únicamente a lo largo de la dirección  $x$ , como hemos considerado hasta ahora,  $\alpha = 0$  o  $\pi$  y esto se reduce a

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 \leq h \left(1 + h \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2\right). \quad (4.73)$$

Puede parecer peculiar que, siempre y cuando el segmento de la cuerda que estamos considerando no esté vertical ( $\partial X/\partial z \neq 0$ ), la cota (4.73) permite que la velocidad propia del segmento,  $(1/\sqrt{h})\partial X/\partial t$ , rebase la velocidad de la luz (por una

cantidad que se vuelve arbitrariamente grande en el límite  $|\partial X/\partial z| \rightarrow \infty$ ). Sin embargo, debemos notar que éste es un argumento dependiente de norma, ya que a menos que el segmento esté vertical,  $x$  no es completamente transversal a éste, y por tanto, la componente longitudinal del movimiento de la cuerda no es física (en particular, el movimiento a lo largo de la dirección  $x$  no es en absoluto físico en el límite  $|\partial X/\partial z| \rightarrow \infty$ , cuando la cuerda se pone horizontal). A partir de (4.72) podemos ver que para el movimiento puramente transversal,  $\alpha = \pm\pi/2$  (como en la configuración del mesón que consideraremos en la Sección 4.4), requerimos que la velocidad propia sea menor que 1, i.e., la velocidad coordenada está acotada por  $\sqrt{1 - z^4}$ .

El argumento del párrafo anterior aplica a cualquier punto del interior de la cuerda, pero la situación es diferente para los extremos, donde el movimiento a lo largo del cuerpo de la cuerda sí es físico. Como sabemos, el extremo de la cuerda en las  $D7$ -branas es dual a un quark (o un antiquark), por lo que la velocidad  $\vec{v}$  de éste último debe necesariamente respetar la cota (4.72), o, para el movimiento colineal, (4.73). Evaluando esta última ecuación en  $z = z_m$  y parametrizando la dependencia en  $\partial X/\partial z$  en términos de la densidad de momento  $\Pi \equiv \Pi_x^z$ , dado por (4.3), como hicimos en la Sección 4.1 y 4.2, deducimos que  $v$  está acotada por

$$v \leq \frac{h_m}{\sqrt{(h_m - z_m^4 \Pi^2)(1 + z_m^4 \Pi^2)}} = \frac{v_m^2}{\sqrt{(v_m^2 - \lambda F^2/4\pi^2 m^4 \square^4)(1 + \lambda F^2/4\pi^2 m^4 \square^4)}}, \quad (4.74)$$

donde  $h_m \equiv h(z_m)$  y  $\square$  denota la expresión entre corchetes en (4.28).

Para el caso que consideramos en la sección anterior, en donde el extremo de la cuerda está libre, es decir, un quark que se mueve únicamente bajo la influencia del plasma, (4.74) muestra que  $v \leq v_m$ . Como era de esperarse, vemos que esta cota (y más en general, la cota análoga deducida a partir de (4.72)), aplica no solo para configuraciones del par quark-antiquark, sino también en el caso del quark solo.<sup>5</sup>

Para el caso en donde el quark se mueve bajo el efecto de una fuerza externa, la cota (4.74) es menos restrictiva: a medida que  $F$  aumenta, la cantidad de la derecha crece monótonicamente, y de hecho diverge cuando la fuerza alcanza el valor crítico  $F_{\text{crit}} = (\sqrt{\lambda}/2\pi)h_m/z_m^2$  como mencionamos anteriormente en la Sección 4.2.2 (ésta es la misma divergencia que se observa en (4.72) y (4.73) cuando  $\partial X/\partial z \rightarrow \infty$ ). Simplemente desde esta perspectiva, parecería posible poder llevar al quark a velocidades más grandes que  $v_m$ , siempre y cuando se le aplique una fuerza externa.

Desafortunadamente, no podemos asegurar que esto suceda realmente en la práctica. Por ejemplo, en el caso estacionario considerado en [21, 22], se encontró que  $v > v_m$  requiere necesariamente que  $F > F_{\text{crit}}$ , y en consecuencia dicha velocidad no se puede alcanzar [106]. Más en general, la pregunta sobre si  $v_m$  es una velocidad límite o no, es de naturaleza dinámica, y depende esencialmente de la forma de la relación de dispersión del quark en el medio térmico. En la discusión que sigue de (4.52) notamos que, basándonos en los resultados de temperatura cero en la Sección 4.1, la

<sup>5</sup>Esta observación también fue hecha recientemente en [104]. De manera simultánea, en [103],  $v_m$  apareció como una velocidad límite directamente del cálculo de la relación de dispersión microscópica para un mesón. Estos dos artículos aparecieron mientras nuestro trabajo estaba en preparación.

energía intrínseca del quark (y momento  $p_q$ ) debe divergir cuando  $F \rightarrow F_{\text{crit}}$ . Dada la conexión que existe entre el factor  $1 - v^2$  en el denominador de (4.52) y la invariancia de Lorentz de la métrica (4.1) con  $T = 0$ , es natural esperar que debamos reemplazar dicho término por  $h_m - v^2 = v_m^2 - v^2$  cuando  $T > 0$ , lo que implicaría que  $E_q \rightarrow \infty$  (y  $p_q \rightarrow \infty$ ) cuando  $v \rightarrow v_m$ . Ésto querría decir que  $v > v_m$  no es físicamente realizable. Los resultados que obtendremos en la Sección 4.4.3 parecen respaldar esta situación, sin embargo sería muy bueno poderlo mostrar de manera directa.<sup>6</sup>

#### 4.3.4. Transición al régimen asintótico

Para las trayectorias de la cuerda con las condiciones iniciales de un parámetro (4.64) y en el caso particular que no hay oscilación, se encontró en [21] que el movimiento del quark en la etapa final es independiente de la energía  $E$  de la configuración, y coincide con el comportamiento esperado para una partícula cuya relación de dispersión es  $p \propto v/\sqrt{1 - v^2}$ , sujeta a una fuerza de amortiguamiento

$$\frac{dp}{dt} = -\mu p , \quad (4.75)$$

con  $\mu$  un coeficiente de fricción independiente de  $p$ . Este coeficiente fue tabulado en [21] para varios valores de  $z_m$ , y es consistente con la fuerza de arrastre obtenida en [21, 22, 23] para la configuración estacionaria. El acuerdo que hay entre la expresión analítica y los resultados numéricos obtenidos para el comportamiento final del quark se puede ver de manera más clara si en lugar de comparar las gráficas de  $x(t)$  o  $v(t)$  para el quark (donde habría que ver  $t \rightarrow \infty$ ), uno examina las gráficas de  $v(x)$ ,<sup>7</sup> donde el comportamiento analítico para  $\mu$  constante toma la forma

$$v(x) = \tanh[\mu(x_\infty - x)] , \quad (4.76)$$

que es lineal con pendiente  $-\mu$  cerca del punto final de reposo  $x = x_\infty$ . Estas gráficas se muestran en la Fig. 4.10, donde se ve que el comportamiento para tiempo suficientemente grande está bien descrito por (4.76) incluso para las trayectorias que oscilan y la configuraciones generales del singlete (4.67) y la adjunta (4.69). Notemos que en muchos casos los resultados numéricos siguen la curva analítica (4.76) más allá del régimen lineal que es la parte que se cubrió con el análisis de modos cuasi-normales hecho en [21].

En la Fig. 4.10, vemos que existe un periodo inicial en donde el comportamiento difiere del descrito por (4.76). Esta diferencia es claramente más significativa en el caso de la configuración del singlete que en la adjunta. El tiempo que debe transcurrir antes de que comience a operar el comportamiento asintótico se vuelve arbitrariamente grande para las configuraciones del singlete que están cerca de ser oscilatorias. En este caso, toda la energía del quark se pierde debido a la fuerza cromoelectromagnética ejercida por el antiquark sobre él, y no por el efecto del plasma.

<sup>6</sup>Para mesones ésto fue hecho recientemente en [103].

<sup>7</sup>Le agradecemos a Antonio García por esta sugerencia.

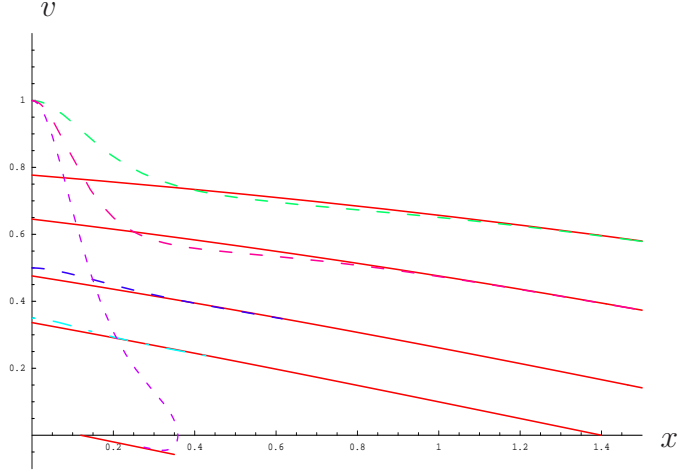


Figura 4.10: Evolución del quark (la velocidad como función de la distancia, en unidades de  $1/\pi T$ ) para cinco condiciones iniciales diferentes. Para explorar la vecindad de la masa del quark encanto, el parámetro de masa se escogió como  $z_m = 0.2$ , que corresponde a una velocidad límite  $v_m = 0.9992$ . Las curvas punteadas muestran los resultados de nuestra integración numérica, contrastados contra la expresión analítica (línea continua roja) (4.76), con el valor  $\mu = 0.25$  obtenido en [21] y una elección óptima de la distancia de frenado  $x_\infty$ . Las tres curvas punteadas que comienzan en el mismo punto describen configuraciones para el singlete (y por tanto tienen  $v_0 = v_m$ , como se explica en el texto principal). Las curvas verde, magenta y morada corresponden respectivamente a una energía total  $E/2M_{\text{rep}} = 2.45, 2.45, 1.01$  y un perfil de la velocidad inicial de la cuerda  $v_0 \cos \sigma$ ,  $v_0 \cos^3 \sigma$  and  $v_0 \cos \sigma$  (que lleva a  $x_\infty = 4.15, 3.07, 0.12$ ). Notemos en particular que la curva morada describe una situación en la cual el quark y el antiquark, después de cierta distancia recorrida, comienzan a acercarse mutuamente hasta llegar al reposo. Las otras dos curvas vienen de la configuración adjunta pero con valores diferentes para la energía y la velocidad inicial del quark: el caso  $E/2M_{\text{rep}} = 1.12$  y  $v_0 = 0.5v_m$  (que lleva a  $x_\infty = 2.07$ ) se muestra en azul oscuro, mientras que  $E/2M_{\text{rep}} = 1.05$  y  $v_0 = 0.35v_m$  ( $x_\infty = 1.4$ ) se muestra en azul claro.

Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, el asunto es que, a medida que la cuerda tipo “punto” crece y comienza a caer hacia el horizonte, toma cierto tiempo hasta que ésta está suficientemente cerca de  $z = 1$  y deformada con el perfil asintótico – discutido en la Sección 4.2.3. Esta imagen parece estar en la misma dirección que la discusión con carácter fenomenológico presentada en [116] (en el contexto de pérdida de energía por colisiones): cuando se crea un par quark- antiquark (el singlete) en el plasma, existe un retraso antes de que la interacción entre el par recién creado y el plasma puedan producir campos gluónicos de largo alcance, los cuales, como hemos visto, son los responsables de la disipación de energía para tiempos suficientemente grandes.

Para analizar con más detalle la transición al comportamiento “final” (4.76) (que-riendo decir para  $t$  muy grande), hemos determinado para diferentes trayectorias el punto  $(x_f, v_f)$  a partir del cual la curva numérica de  $v(x)$  empata con la curva analítica (4.76) con una precisión indicada por la fracción  $f$ . A pesar de que nuestros resultados numéricos parecen tener un error de hasta 1%, la precisión con la que podemos determinar  $(x_f, v_f)$  está limitada por la incertidumbre que tenemos para ajustar el parámetro  $x_\infty$ , y que estimamos es del orden de 5-10%. Por tanto, no parece tener mucho sentido considerar valores de  $f$  menores que ésto.

Algunos ejemplos representativos de nuestros resultados se muestran en Fig. 4.11 para  $f = 0.1$  y  $f = 0.05$ . Los dos conjuntos de datos parecen tener una forma funcional ligeramente diferente, pero son compatibles entre sí dentro del gran margen de error que manejamos. La tendencia es que  $x_f$  se acerca a cero a medida que  $v_f \rightarrow v_m$ .

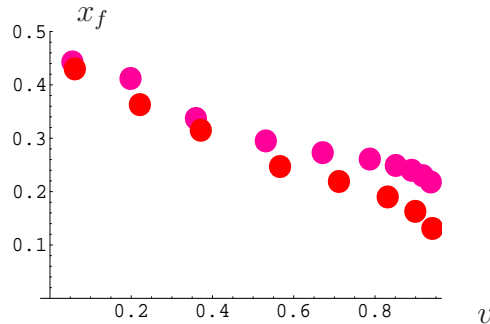


Figura 4.11: La distancia de transición  $x_f$  como función de la velocidad, para  $f = 0.1$  (rojo) y  $f = 0.05$  (magenta). El tamaño de los puntos da una estimación aproximada del margen de error.

Para las configuraciones en la representación adjunta, encontramos que las curvas numéricas para  $v(x)$  difieren en menos del 5% de (4.76) desde el principio de la evolución, y por tanto, para ser consistentes con el criterio previamente establecido, debemos identificar la distancia de transición como  $x_f = 0$ . De cualquier manera vale la pena notar que existe un periodo inicial en donde la forma funcional de las curvas numéricas y analíticas es diferente, como se puede ver en la Fig. 4.10. Dicha diferencia es despreciable para velocidades iniciales pequeñas y se vuelve más importante a



medida que  $v_0$  aumenta. La distancia de transición identificable (tomando  $f = 0.04$ ) tiene una tendencia opuesta al caso de la configuración del singlete. Sin embargo, para las velocidades que hemos sido capaces de alcanzar,  $v_f \sim 0.5$ , se mantiene más chica que la  $x_f$  del singlete mostrada en la Fig. 4.11.

Una pregunta que vale la pena hacerse es si la transición al régimen donde el quark experimenta una fuerza de arrastre con coeficiente de fricción constante ocurre inmediatamente después de que el quark y el antiquark se apantallan debido a la presencia del plasma, o si existe una etapa intermedia en la cual el quark se mueve de manera independiente al antiquark, pero sintiendo una fuerza de arrastre diferente a la encontrada en el caso estacionario [21, 22, 23], tal y como obtuvimos en la Sección 4.2.2. Para responder esta pregunta, en la siguiente sección determinaremos la longitud de apantallamiento correspondiente.

También sería muy interesante poder tener una interpretación de la pérdida de energía del par quark-antiquark en paralelo a la imagen propuesta por Mikhailov para el quark tal y como vimos en la Secciones 4.1 y 4.2. Trabajo en ésta dirección fue hecho en [111], pero desafortunadamente no entendemos por qué dichos autores hacen uso de trayectorias que están fuera de la hoja de mundo de la cuerda. Sospechamos que debe ser posible trabajar con trayectorias que estén *en* la hoja mundo. Nuevamente, los avances en este contexto están restringidos por la falta de una solución analítica que describa la evolución del par moviéndose espalda con espalda, como analizamos en esta sección (o incluso para la situación equivalente a  $T = 0$ ). Otro punto de confusión es el hecho de que, a diferencia del caso del quark solo, ahora los dos extremos de la cuerda están en  $z = z_m$ , y por tanto, *a priori* sería posible que las trayectorias nulas reboten repetidamente entre un extremo y el otro. Debemos sin embargo tener en cuenta que, al menos más allá de un intervalo finito de tiempo, esto estaría impedido por la formación de un horizonte de eventos en la hoja de mundo como el que se discutió en las Secciones 4.1.3 y 4.2.3.

## 4.4. Potencial Quark-Antiquark con masa finita

### 4.4.1. Revisión de resultados anteriores

El potencial  $E(L)$  para un par quark-antiquark estático con masa infinita en un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  fue calculado en [47], como explicamos en el Capítulo 2, utilizando una cuerda con ambos extremos en la frontera de AdS. Como es de esperarse, cuando la separación  $L$  entre el par es pequeña, los efectos del plasma son despreciables y el potencial es igual al resultado obtenido para temperatura cero [42]

$$E(L) = -\frac{4\pi^2 \sqrt{g_{YM}^2 N}}{\Gamma(\frac{1}{4})^4 L}. \quad (4.77)$$

Sin embargo, a medida que la separación aumenta, el plasma apantalla progresivamente al quark del antiquark y como consecuencia la energía del sistema crece por

encima del comportamiento coulombiano. El encaje de la cuerda en forma de  $\cap$  que se utiliza para dicho cálculo existe hasta una separación máxima  $L_{\max} = 0.865/\pi T$ , y su energía alcanza a la de la solución para el sistema de dos cuerdas desconectadas para una distancia  $L_* = 0.755/\pi T$ . En el límite  $N, \lambda \rightarrow \infty$ , donde como ya hemos visto, los cálculos con la teoría de cuerdas son fáciles de realizar, el potencial tiene un pico en  $L_*$ , y más allá de este punto, la integral de trayectoria de la cuerda es dominada por una configuración cuya hoja de mundo tiene una curvatura grande, y que para  $L$  grande describe el intercambio de gravitones entre dos cuerdas desconectadas, resultando en  $E(L) \sim -T \exp(-L/L_{\text{brecha}})$ , con  $L_{\text{brecha}} = 0.428/\pi T$  [108].

En el Capítulo 2 realizamos este cálculo para el caso en que el par quark-antiquark se mueve a velocidad constante  $v$  con respecto del plasma. Resulta interesante preguntarse cómo este resultado se puede generalizar al caso en que el par  $q-\bar{q}$  tiene masa lagrangiana grande, pero no infinita, que como vimos en la Sección 4.2.2 corresponde a tener la D7-brana extendiéndose hasta una posición  $z_m > 0$  dada por (4.28).

#### 4.4.2. Masa finita y temperatura cero

En la configuración estática, la ecuación de movimiento de la cuerda nos dice que la densidad de momento  $\Pi_x^z$  en (4.3) es independiente de  $x$ . En la geometría de AdS (puro) el encaje resultante está dado por [42]

$$X(z) = \pm z_{\max} \int_1^{z_{\max}/z} \frac{d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^4 - 1}}, \quad (4.78)$$

donde  $z_{\max} \in [z_m, \infty)$  denota el punto de retorno en la cuerda con forma de  $\cap$ , y el signo “+” o “-” corresponde a la mitad derecha e izquierda respectivamente. A partir de ésto se puede ver en particular que la distancia entre los dos extremos de la cuerda en  $z = z_m$  (i.e., el par  $q-\bar{q}$ ) es

$$L = 2z_{\max} \int_1^{z_{\max}/z_m} \frac{d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^4 - 1}} = 2z_{\max} \left[ -\frac{1}{4} B \left( \left( \frac{z_m}{z_{\max}} \right)^4 ; \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right], \quad (4.79)$$

donde  $B$  denota la función beta de Euler incompleta. La energía de esta cuerda, habiendo renormalizado restando la energía de dos cuerdas puramente radiales, se sigue de (4.2) y es

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi z_{\max}} \left\{ \int_1^{z_{\max}/z_m} d\zeta \left[ \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^4 - 1}} - 1 \right] - 1 \right\}. \quad (4.80)$$

El resultado correspondiente para un par quark-antiquark moviéndose a velocidad constante se obtiene directamente por invariancia de Lorentz.

Usando (4.79) y (4.80), es fácil ver que para  $L \gg \sqrt{\lambda}/m$  (i.e.,  $z_{\max} \gg z_m$ ), el potencial quark-antiquark  $E(L)$  tiende al mismo comportamiento coulombiano dado

por (4.77) como en el caso con masa infinita ( $z_m = 0$ ). Por otro lado, en el límite cuando  $L \rightarrow 0$  tenemos que  $z_{max} \rightarrow z_m$  y resulta que el potencial es lineal,

$$E(L) = 2m \left[ -1 + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} mL + \mathcal{O} \left( \left( \frac{mL}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \right) \right]. \quad (4.81)$$

Estos resultados son consistentes con la forma que tienen los campos gluónicos que rodean a un quark aislado con masa finita [118],

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{F^2}(\vec{x}) \rangle_q &= \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2 |\vec{x}|^4} \left[ 1 - \frac{1 + \frac{5}{2} \left( \frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2}{\left( 1 + \left( \frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \right)^{5/2}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{128\pi^2} \left[ - \left( \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \right)^4 + \frac{7}{4|\vec{x}|^4} \left( \frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

(donde  $\mathcal{O}_{F^2} = \text{Tr}\{F^2 + \dots\}/4g_{YM}^2$  es el operador dual al campo dilatónico), que es coulombiano para distancias grandes y no singular en donde se encuentra la fuente (el quark).

En las expresiones (4.81) y (4.82) estamos viendo el efecto de una distribución de carga de color que cubre a la fuente fundamental, o en otras palabras, el efecto de la nube de gluones que rodea al quark desnudo para convertirlo en un quark “vestido”. Notemos además a partir de (4.82) que el tamaño de la nube no es el de la longitud de onda de Compton del quark,  $1/m$  (lo que indica que no está hecha de quarks y antiquarks virtuales), sino de una escala mucho más grande  $\sqrt{\lambda}/m$ , que corresponde al tamaño característico de un mesón de la teoría [112, 113, 118].

### 4.4.3. Masa finita y temperatura finita

Primero consideraremos el caso en el que el par quark-antiquark está estático con respecto al plasma. Repitiendo el cálculo de la sección anterior para  $T > 0$ , la separación entre los dos extremos de la cuerda está dada por

$$L = 2z_{max} \int_1^{z_{max}/z_m} d\zeta \sqrt{\frac{1 - \zeta_H^4}{\zeta^4 - \zeta_H^4}} \frac{1}{\sqrt{\zeta^4 - 1}}, \quad (4.83)$$

con  $\zeta_H \equiv z_{max}/z_h$ , y la energía renormalizada es

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi z_{max}} \left\{ \int_1^{z_{max}/z_m} d\zeta \left[ \sqrt{\frac{\zeta^4 - \zeta_H^4}{\zeta^4 - 1}} - 1 \right] - 1 \right\}. \quad (4.84)$$

A partir de (4.83) y (4.84), ahora se obtiene que el comportamiento del potencial para distancias pequeñas es

$$E(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[ - \left( \frac{1}{z_m} - \frac{1}{z_h} \right) + \frac{L}{2z_m^2} \sqrt{1 - \left( \frac{z_m}{z_h} \right)^4} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{L}{z_m} \right)^2 \right) \right], \quad (4.85)$$

con  $z_m$  relacionada con la masa lagrangiana del quark a través de (4.28). Comparando con gráficas numéricas (como en la Fig. 4.12 más adelante), esta expresión lineal se puede ver como una buena aproximación al potencial real al menos hasta  $L \sim z_m/2$ .

El término constante en (4.85) no es otra cosa que la masa térmica del quark (antiquark) aislado y en reposo (4.38), que fue restado en nuestra elección de renormalización. Para cualquier  $L$ , la fuerza  $F_{pot}(L) \equiv -dE/dL$  deducida a partir del potencial balancea la fuerza externa

$$F_{ext}(L) \equiv \frac{dp}{dt} = \Pi_x^z|_{z=z_m} = \mp \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi z_{max}^2} \sqrt{1 - \left( \frac{z_{max}}{z_h} \right)^4} \quad (4.86)$$

requerida para mantener los extremos de la cuerda fijos. Además, el coeficiente del término lineal en (4.85) codifica correctamente el límite  $L \rightarrow 0$  ( $z_{max} \rightarrow z_m$ ) de esta fuerza. Usando (4.1) y (4.68), esto puede ser reescrito de la siguiente manera

$$F_{ext}(0) = \mp \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} T^2 \frac{v_m^2}{\sqrt{1 - v_m^2}}, \quad (4.87)$$

que coincide con la fuerza de arrastre  $F_{arrastre}(v)$  calculada [21, 22], pero evaluada en la velocidad  $v = v_m$ . Este acuerdo tiene una explicación muy simple. Como se explicó en [106], la fuerza de arrastre calculada en [21, 22] tiene un rango limitado de validez ( $z_m \leq z_h(1 - v^2)^{1/4}$  para una  $v$  dada, o de manera equivalente,  $v \leq v_m$  para una  $z_m$  dada), debido a que el campo eléctrico necesario para mantener el extremo de la cuerda moviéndose a velocidad constante no debe superar el valor crítico  $F_{0x}^{crit}$  en  $z_m$ . La fuerza de arrastre más grande que se puede obtener está dada por el lado derecho de (4.87), lo cual no es una sorpresa, ya que por definición  $F_{ext}(0)$  codifica la fuerza necesaria para separar los extremos de una cuerda con tamaño cero en  $z = z_m$ , es decir, el valor de  $F_{0x}^{crit}$ .

Para  $L > z_m/2$ , el potencial es apantallado y se desvía significativamente de la forma lineal dada por (4.85). En la Fig. 4.12 se muestra el comportamiento. Como se puede ver en dichas gráficas, la posición de la longitud de apantallamiento  $L_*$  y  $L_{max}$  se mueve hacia la izquierda conforme  $z_m$  aumenta.

Consideremos ahora el caso en el que el par quark-antiquark se mueve a velocidad constante a través del plasma. Por simplicidad, al igual que en el Capítulo 2, nos restringiremos al caso en que el movimiento es perpendicular al eje del dipolo. Podemos copiar la expresión (2.39) que obtuvimos para la separación entre los dos extremos

$$L(f_y, v) = \frac{f_y}{2\pi T} \int_{h_{min}}^{h_m} \frac{dh}{(1-h)^{\frac{1}{4}} \sqrt{(h-v^2)h - (1-h)hf_y^2}}, \quad (4.88)$$

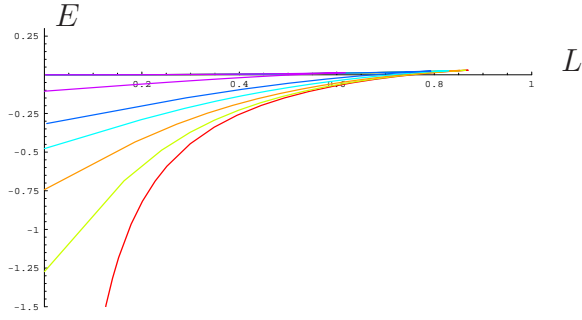


Figura 4.12: Potencial quark-antiquark estático y con masa finita, con  $z_m/z_h = 0.001$  (rojo), 0.2 (verde claro), 0.3 (naranja), 0.4 (azul claro), 0.5 (azul) y 0.75 (morado). Ver texto para discusión.

donde

$$f_y \equiv z_h^2 \Pi_y^z = \frac{2}{\pi \sqrt{g_{YM}^2 N T^2}} F_y$$

es una versión reescalada de la fuerza  $F_y$  que se necesita para mantener a los extremos a la separación deseada,  $h(z)$  es la función que aparece en la métrica (4.1),

$$h_{min} \equiv h(z_{max}) = \frac{v^2 + f_y^2}{1 + f_y^2}, \quad (4.89)$$

y hemos tomado en cuenta que ahora tenemos una masa lagrangiana finita, cambiando el límite superior de integración de 1 a  $h_m \equiv h(z_m)$ . De igual forma, podemos utilizar la expresión para la energía (2.40) del par quark-antiquark (en el sistema del par en reposo) obtenida en el Capítulo 2,

$$E(f_y, v) = \frac{T\sqrt{\lambda}}{4} \left[ \int_{h_{min}}^{h_m} \frac{dh(h-v^2)\gamma}{(1-h)^{\frac{5}{4}} \sqrt{(h-v^2)h - (1-h)hf_y^2}} - \int_0^{h_m} \frac{dh}{(1-h)^{\frac{5}{4}}} \right]. \quad (4.90)$$

Resolviendo las integrales (4.88) y (4.90) numéricamente, uno obtiene gráficas como las que se muestran en la Fig. 4.13. Para separaciones pequeñas el comportamiento es nuevamente lineal,

$$E(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left[ -\left(\frac{1}{z_m} - \frac{1}{z_h}\right) + \frac{L\gamma}{2z_m^2} \sqrt{1 - \left(\frac{z_m}{z_h}\right)^4 - v^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{L}{z_m}\right)^2\right) \right]. \quad (4.91)$$

Los dos términos en esta expresión tienen la misma interpretación que se dió para (4.85) en los párrafos que están alrededor de (4.86)-(4.87).

De la Fig. 4.13 uno puede ver que el valor de  $z_m$  afecta la posición de la longitud de apantallamiento  $L_*, L_{max}$  (y la velocidad a partir de la cual  $L_* = L_{max}$ ). El

comportamiento con  $v$  fija y  $z_m$  variable que se muestra en la Fig. 4.13a es cualitativamente el mismo que vimos en la Fig. 4.12 para el caso de la configuración estática. El comportamiento con  $z_m$  fija y  $v$  variable se muestra en la Fig. 4.13b, y es sin duda el caso más relevante desde el punto de vista fenomenológico.

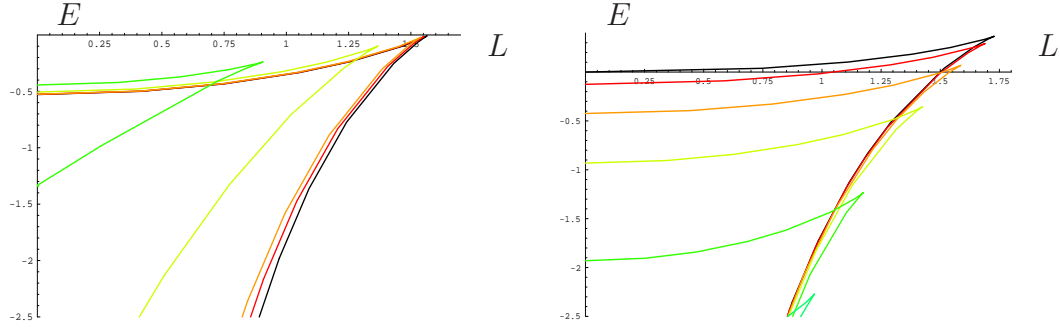


Figura 4.13: Energía del par quark-antiquark (en unidades de  $T\sqrt{g_{YM}^2 N}/4$ ) como función de la separación (en unidades de  $1/2\pi T$ ), para valores fijos de (a)  $v = 0.45$  y  $z_m = 0$  (negro), 0.2 (rojo), 0.25 (naranja), 0.5 (verde claro), y 0.75 (verde); (b)  $z_m = 0.2$  y  $v = 0$  (negro), 0.2 (rojo), 0.4 (naranja), 0.6 (verde claro), 0.8 (verde) y 0.9 (verde brillante). Ver texto para discusión.

En las Figs. 4.14 y 4.15, vemos que cuando  $z_m/z_h = 0.2$ , y en menor medida cuando  $z_m/z_h = 0.4$ , la longitud de apantallamiento  $L_{\max}(v)$  todavía está bien aproximada en todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq v_m$  por la modificación natural del ajuste para  $z_m = 0$  (2.44),

$$L_{\max}(v) \approx \frac{0.865}{\pi T v_m^{2/3}} (v_m^2 - v^2)^{1/3}. \quad (4.92)$$

Esta aproximación se vuelve incorrecta a medida que  $z_m/z_h$  aumenta. En todos los casos, el ajuste análogo a (2.53),

$$L_{\max}(v) \approx \frac{0.865}{\pi T v_m^{1/2}} (v_m^2 - v^2)^{1/4}, \quad (4.93)$$

funciona peor que (4.92).

Una diferencia importante con respecto al caso del quark y el antiquark con masa infinita es que ahora la región “ultrarrelativista” se refiere al límite en donde la velocidad del par se acerca a la cota  $v_m < 1$  dada en (4.68). Solo a partir de este hecho, es claro que el comportamiento asintótico de la fórmula (2.53) ya no funciona. El comportamiento en esta región nuevamente puede ser determinado analíticamente y el resultado es

$$L_{\max} \rightarrow \frac{1}{2\pi T} \frac{v_m^2 - v^2}{v_m (1 - v_m^2)^{3/4}} = \frac{1}{2\pi T} \frac{z_h^3 [1 - (z_m/z_h)^4 - v^2]}{z_m^3 \sqrt{1 - (z_m/z_h)^4}}, \quad (4.94)$$

donde vemos que el exponente 1/4 de (2.53) cambia a 1 para masa finita. Como se muestra en las gráficas Figs. 4.14b and 4.15b, para valores de  $z_m/z_h$  en la vecindad

de la masa del quark encanto, la forma funcional (4.94) aplica únicamente para velocidades que están muy cerca de  $v_m$ . De las Figs. 4.14 y 4.15 vemos que la longitud de apantallamiento sigue estando bien aproximada en todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq v_m$  por el ajuste (2.44) hecho para  $z_m = 0$ , cuando  $z_m/z_h = 0.2$ , y en menor medida cuando  $z_m/z_h = 0.4$ . Esta aproximación es cada vez peor a medida que el valor de  $z_m/z_h$  aumenta, y simultáneamente hay una tendencia a que (4.94) funcione en un rango más grande del intervalo  $0 \leq v \leq v_m$ .

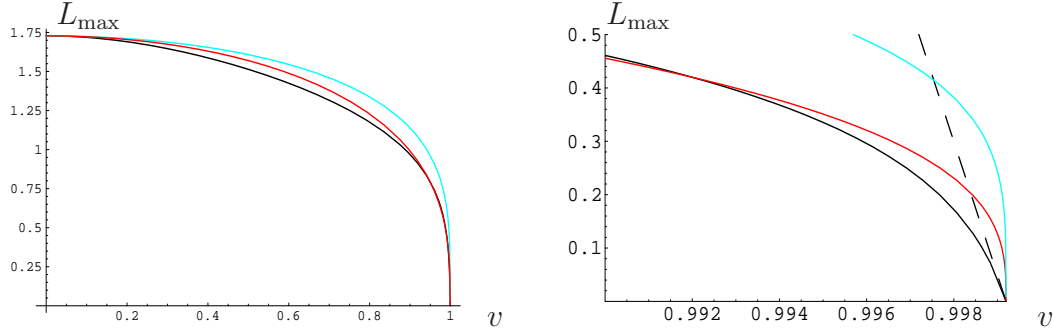


Figura 4.14: (a) Longitud de apantallamiento  $L_{\max}$  (en unidades de  $2\pi T$ ) como función de la velocidad para  $z_m/z_h = 0.2$  (en negro) comparado contra el ajuste (4.92) (en rojo) y (4.93) (en azul claro). (b) La misma gráfica expandida, mostrando que (4.92) da una aproximación relativamente buena hasta velocidades muy cercanas a  $v_m$ , en donde el comportamiento es asintóticamente lineal como en (4.94) (azul oscuro punteado).

En [50, 100], el resultado (2.53) para la longitud de apantallamiento en el caso del quark infinitamente pesado se convirtió en una predicción tentativa para la temperatura de disociación del quarkonio que atraviesa el plasma,  $T_{\text{dis}} \propto (1 - v^2)^{1/4}$ . El argumento para obtener esta última expresión es heurístico, y depende de la comparación entre la longitud de apantallamiento y el tamaño natural del estado ligado en cuestión (ver por ejemplo [119]). Aplicando la misma lógica a las expresiones (4.92) o (4.94) para la longitud de apantallamiento en el caso particular de la masa del quark encanto (o una vezidad de ésta), uno inferiría que  $T_{\text{dis}} \propto (v_m^2 - v^2)^n$ , con  $n \simeq 1/3$  para toda  $v$ , y  $n = 1$  en el límite ultrarrelativista  $v \rightarrow v_m$  (éste último siendo el ajuste adecuado únicamente en el rango  $v > 0.998$  o  $v > 0.98$ , dependiendo del valor de  $z_m$ ).

Mientras se estaba escribiendo este trabajo, apareció [103], en donde se incluye una deducción explícita de la relación de dispersión para un mesón. Para momento  $p$  grande, su cálculo dió como resultado que  $E = v_m p$ , con  $v_m$  la velocidad límite definida en (4.68) y discutida a profundidad en la Sección 4.3.3 del presente trabajo. Los autores de [103] enfatizaron que la dependencia de  $v_m$  en  $z_h$  y  $z_m$  implica una cota en la temperatura a la cual un mesón con velocidad  $v$  puede existir en el plasma. Interpretando la temperatura máxima permitida como la temperatura de disociación, encontraron que  $T_{\text{dis}} \propto (1 - v^2)^{1/4}$ , de la misma forma que sugería el argumento heurístico presentado en el párrafo anterior.

Dado los resultados del Capítulo 2 y los de esta sección, no estamos seguros de

cómo interpretar dicho acuerdo. Como explicamos anteriormente, para masa finita, el potencial quark-antiquark no escala como  $(1 - v^2)^{1/4}$  incluso en la región ultrarrelativista (que ahora es  $v \rightarrow v_m$ ). Por tanto, el hecho de que el argumento heurístico de [50, 100] basado en el potencial sugiera el mismo escalamiento en la velocidad que el encontrado de manera directa en [100] puede ser una coincidencia, o pudiera estar indicando que solo existe una conexión física directa entre la temperatura de disociación y el potencial cuando éste último es calculado para quarks infinitamente pesados. En cualquier caso, debemos enfatizar que el escalamiento con exponente  $1/4$  no viene del cálculo de la relación de dispersión realizado en [100], sino de la dependencia en la temperatura de la velocidad límite (4.68).

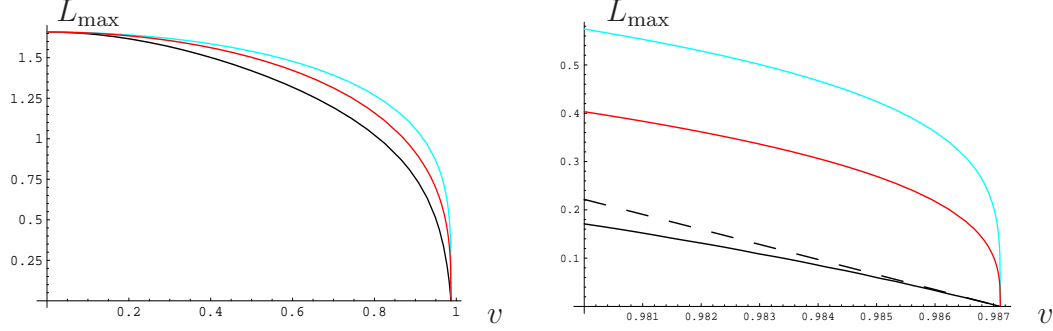


Figura 4.15: (a) Longitud de apantallamiento  $L_{\max}$  (en unidades de  $2\pi T$ ) como función de la velocidad para  $z_m/z_h = 0.4$  (en negro) comparado contra el ajuste (4.92) (en rojo) y (4.93) (en azul claro). (b) La misma gráfica expandida, mostrando que la región en la vecindad de  $v_m$  donde el comportamiento lineal asintótico (4.94) (azul oscuro punteado) es una aproximación significativamente mejor que (4.92), ha crecido en comparación con el caso  $z_m/z_h = 0.2$  representado en la Fig. 4.14.

#### 4.4.4. Longitud de apantallamiento vs. distancia de transición

En la Fig. 4.11 al final de la sección anterior, determinamos la ubicación  $(x_f, v_f)$  a partir de donde un quark y un antiquark creados en el plasma (con momento total cero) comienzan a frenarse a una tasa descrita por el coeficiente de fricción constante obtenido en [21, 22]. Para separaciones del par  $q\bar{q}$  más grandes que  $2x_f$ , las dos partículas evolucionan de manera independiente (no se sienten), por tanto, parece interesante comparar la distancia de transición  $x_f$  contra la (mitad de la) longitud de apantallamiento  $L_{\max}$  encontrada en ésta sección, que como sabemos, nos da una medida de la distancia mínima para la cual el quark y el antiquark se desacoplan. El resultado de esta comparación, para la configuración del singlete, se muestra en la Fig. 4.16, donde vemos que las dos distancias son comparables en magnitud y escalan con la velocidad de manera similar. Notemos que esto sucede a pesar de que las dos configuraciones de la cuerda son diferentes: en el primer caso, el movimiento es a lo largo de la dirección del plano donde se extiende la cuerda, mientras que



en el segundo, el movimiento es perpendicular al mismo. Podemos concluir entonces que la transición al régimen donde el coeficiente de fricción es constante, sucede inmediatamente después de que el quark y el antiquark se dejan de ver. En este caso, a diferencia de lo que encontramos en la Sección 4.2.2 para el quark que se mueve bajo el efecto de una fuerza externa, no hay una etapa intermedia en donde el quark y el antiquark se desaceleran a una tasa que difiere sustancialmente de los resultados encontrados para el régimen estacionario en [21, 22].

La etapa inicial, donde como se muestra en la Fig. 4.10 el quark y el antiquark disipan energía a una tasa mayor que (4.37), corresponde al periodo en el cual la cuerda no está suficientemente cerca del horizonte del agujero negro. En otras palabras, a primera aproximación, el quark y el antiquark evolucionan en esta región como si no hubiera plasma.

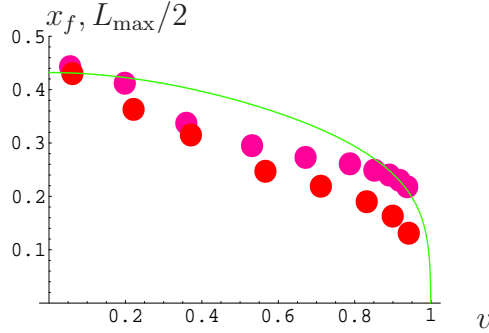


Figura 4.16: (La mitad de) la longitud de apantallamiento  $L_{\max}(v)$  (línea verde) comparada contra la distancia de transición  $x_f(v)$  definida al final de la Sección 4.3, para  $f = 0.1$  (puntos rojos) y  $f = 0.05$  (puntos magenta).

Para configuraciones en la representación adjunta, esperamos que el potencial quark-antiquark esté suprimido por un factor  $1/N^2$  con respecto a la configuración del singlete (ver por ejemplo [122]). Del lado de la teoría de cuerdas, esto se puede ver a partir del hecho de que las condiciones iniciales de “línea” (4.69) describen dos cuerdas separadas que se extienden desde las D7-branas hasta el horizonte. En el límite clásico (donde estamos trabajando) las dos cuerdas no se sienten, ya que cualquier señal propagándose entre ellas deberá pasar por el horizonte, y el que se separen, aniquilen o se unan está suprimido por potencias de la constante de cuerdas  $g_s$ , que tomamos igual a cero. Entonces, a este nivel de aproximación, el quark y el antiquark no se ven, y por tanto la longitud de apantallamiento relevante es  $L_s = 0$ . Esto es consistente con el resultado  $x_f = 0$  que obtuvimos en la Sección 4.3.4 para el caso de la configuración en la representación adjunta.

El hecho de que en la adjunta el quark y el antiquark evolucionen de manera independiente desde el principio hace que podamos compararlos directamente con el análisis que realizamos en la Sección 4.2.2 para el quark solo. Es interesante notar que estos resultados parecen ir en direcciones opuestas. Mientras que para el quark inicialmente en reposo y sometido a una fuerza externa identificamos un periodo corto,

después de que es soltado, en que la tasa de pérdida de energía es bastante menor que la encontrada para el caso estacionario (4.37), para un quark que se crea con una cierta velocidad inicial y un perfil particular de los campos gluónicos y después se mueve únicamente bajo la influencia del plasma, encontramos que la tasa de pérdida de energía es más grande que (4.37).

Parece entonces que hasta cierto punto, las condiciones iniciales pueden influir sobre la evolución subsecuente del quark. La aplicación de una fuerza externa como en la Sección 4.2.2 claramente tiene un efecto significativo sobre la forma de la cuerda al momento de soltarla, o en otras palabras, sobre la configuración de los campos gluónicos que rodean al quark. Viendo nuestros resultados sobre la evolución del par quark-antiquark en esta sección y en la anterior, interpretamos el periodo inicial como el tiempo que le toma al quark estabilizar los campos gluónicos que lo rodean. En cualquier caso, es importante recordar que la situación más cercana al experimento es la presentada en la Sección 4.3, y no la de la Sección 4.2.2.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado diferentes aspectos del plasma de quarks y gluones utilizando la correspondencia AdS/CFT. Como mencionamos en la introducción, en esta prometedora área de investigación existe una gran diversidad de temas; nosotros hemos analizado solamente una pequeña parte de ellos. La motivación original era entender los procesos de pérdida de energía de los diferentes partones que atraviesan el medio térmico; comenzamos estudiando la energía de un mesón infinitamente pesado que se mueve en el plasma con velocidad constante  $v$ , pero incluso en este sistema relativamente sencillo empezamos a descubrir la riqueza y dificultad que tiene el tema. Dimos un paso más, estudiando otras clases de partones que se mueven también con velocidad constante. En particular, vimos qué pasaba con el gluón, el barión y otras cargas de prueba quizás de mayor interés teórico que fenomenológico. Para la segunda mitad de este trabajo la motivación había cambiado y crecido. Buscábamos seguir aprendiendo sobre las características de los procesos de pérdida de energía (apantallamiento, fuerza de arrastre, etc.), pero ahora, intentando reproducir situaciones más similares a las que se observan en el experimento. Volvimos a atacar el tema de un mesón que se mueve con velocidad constante en el plasma pero considerando el caso de masa finita. En esta misma línea, estudiamos situaciones en las que el par quark-antiquark se crea dentro del medio térmico y fuimos capaces de describir la dinámica de dicha evolución. Retomamos también las ideas del cálculo de la fuerza de arrastre sobre un quark aislado y las extendimos a un escenario en donde el quark tiene masa finita y además se mueve de forma acelerada, al menos por un periodo corto de tiempo.

En este largo proceso descubrimos herramientas nuevas para estudiar la correspondencia AdS/CFT, aprendimos nuevas ideas y modificamos algunas viejas y nos enfrentamos a la complejidad de intentar explicar y reproducir resultados experimentales. En los siguientes párrafos resumiremos los resultados y conclusiones que fuimos obteniendo a lo largo de este hermoso camino.

En el Capítulo 2 utilizamos una cuerda con ambos extremos en la frontera de  $AdS_5$  moviéndose a velocidad constante  $v$  en la dirección perpendicular al dipolo para calcular el potencial quark-antiquark como función de su separación y velocidad. Antes incluso de haber obtenido algún resultado sobre la energía del par, encontramos

que la fuerza de arrastre que siente un mesón es cero. La razón es que una carga neutra de color produce un perfil de campos gluónicos de corto alcance que no es capaz de transportar energía hacia el medio que lo rodea. En el régimen  $N \gg 1$  y  $g_{YM}^2 N \gg 1$  de la teoría de norma, que es captado por la teoría de cuerdas clásica sobre el fondo de AdS-Schwarzschild débilmente curvado, no hay otro mecanismo de pérdida de energía y por tanto el par quark-antiquark puede atravesar el plasma sin ningún impedimento. Este resultado es válido para cualquier carga neutra de color, como corroboramos estudiando al barión en el Capítulo 3.

Los resultados del potencial quark-antiquark están graficados en las Figs. 2.3 y 2.4 y el comportamiento es el siguiente: para separaciones pequeñas (energías grandes), el par quark-antiquark es insensible al plasma y como resultado, tiende al comportamiento  $1/L$  que se observa a  $T = 0$  en [42]. A medida que la separación aumenta, el efecto del plasma se hace presente apantallando al quark y al antiquark; como consecuencia, la energía del sistema aumenta por encima del comportamiento coulombiano. El apantallamiento es total a una distancia  $L_* \approx 1.51/2\pi T < L_{max}(0)$  donde la energía es igual a la del sistema desligado. Más allá de esta separación el potencial quark-antiquark es cero al nivel de aproximación que hemos trabajado. Es importante mencionar también que las configuraciones descritas por (2.39) y (2.40) en el rango  $L_* < L \leq L_{max}$  son inestables y por esta razón la curva correspondiente la hemos puesto punteada.

Resultados de QCD en la red a temperatura finita confirman que al menos en el caso estático, el potencial quark-antiquark sufre apantallamiento [12]. Por tanto, resulta importante caracterizar el comportamiento de la longitud de apantallamiento debido a las posibles implicaciones fenomenológicas (además de las teóricas) que ésta pueda tener. A partir de los resultados que obtuvimos para el potencial quark-antiquark, pudimos obtener una expresión para la longitud de apantallamiento como función de la velocidad. Como se observa en (2.44), encontramos que si se considera todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq 1$ , la función que mejor describe a  $L_{max}(v)$  es proporcional a  $(1 - v^2)^{1/3}$ . Por otro lado, como se discutió en este capítulo y con mucha mayor profundidad en el Capítulo 4, el comportamiento de  $L_{max}(v)$  considerando únicamente el límite ultra-relativista es proporcional a  $(1 - v^2)^{1/4}$  [50]. Más adelante en estas conclusiones comentaremos cómo cambian estas expresiones cuando uno trabaja con un mesón cuya masa es finita.

En la última parte del Capítulo 2 se discutieron varios aspectos técnicos sobre la propuesta de Liu *et al.* para calcular el parámetro de supresión de chorros  $\hat{q}$ , de gran importancia para los modelos fenomenológicos de pérdida de energía. A pesar de que no comulgamos con su propuesta, señalamos que en la región inestable (punteada) de las curvas de  $\bar{E}(L, v)$  en la Fig. 2.4 se obtiene la misma dependencia  $\bar{E} \propto L^2$  que se necesita para calcular a  $\hat{q}$ . Tomando el límite  $v \rightarrow 1$  de estas hojas de mundo extrajimos un coeficiente prácticamente igual,

$$\mathcal{K} = (\Gamma(1/4)^4/16\pi^2)\hat{q} \approx 1.1\hat{q}.$$

En el Capítulo 3 utilizamos la prescripción de [78, 79] para estudiar un estado ligado de  $k$  quarks en la representación totalmente antisimétrica de  $SU(N)$ , moviéndose a

través del plasma. Como mencionamos anteriormente, estudiar los procesos de pérdida de energía en distintas cargas de prueba (además de quarks) es de interés tanto teórico como fenomenológico. En particular, los gluones son los partones más abundantes en el medio térmico y entender su dinámica puede arrojar importantes pistas sobre el plasma de quarks y gluones.

Este capítulo quizás es el más técnico, tiene una gran cantidad de conceptos de la teoría de cuerdas y la construcción de los objetos que utilizamos es algo rebuscada, sin embargo, hay varios resultados interesantes y vale la pena que los mencionemos. Vimos que un estado ligado de  $k$  quarks en la representación totalmente antisimétrica moviéndose a través del plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  se describe, en el lenguaje dual, con una D5-brana en  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times \mathbf{S}^5$  cuyo perfil  $\theta(r)$  está dado por (3.12) en el límite  $S \rightarrow \infty$ ; y calculamos la fuerza de arrastre que siente este sistema. El resultado es

$$F_x^{(k)} \equiv \frac{dp_x}{dt} = \frac{2N}{3\pi} \sin^3 \Theta_k \left( -\frac{\pi}{2} \sqrt{g_{YM}^2 N T^2} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (5.1)$$

La ec.(5.1) exhibe la simetría comentada entre los quarks y los antiquarks, pero más aún, muestra que un estado ligado de  $N$  quarks (barión) debe sentir la misma fuerza de arrastre que un sistema sin quarks:  $F_x^{(N)} = 0$ . Por tanto, a este nivel de aproximación, un barión puede atravesar el plasma sin perder energía.

A partir de esta construcción también consideramos el caso de un quark solo y calculamos la fuerza de arrastre correspondiente. El resultado que obtuvimos,  $F_x^{(1)}$ , coincide con el obtenido en [21, 22] cuando  $N \rightarrow \infty$  pero (5.1) contiene además una serie infinita de correcciones para  $N$  finita. Finalmente llegamos al caso del gluón, para el cual la historia es un poco diferente. De acuerdo con [79], de la misma manera que un sistema de  $k$  quarks en la representación totalmente antisimétrica es representado por una D5-brana cargada con  $k$  unidades de cuerda fundamental, un gluón (una fuente en la representación adjunta) está descrito por dos D5-branas paralelas cargadas con  $k = 1$  y  $k = N - 1$  unidades de cuerda fundamental, respectivamente. En esta sección el punto fue lograr mostrar que en el límite de  $N$  grande las dos D-branas se desacoplan, y entonces podemos tratar al sistema como dos copias del mismo objeto y calcular la fuerza de arrastre como hicimos en los casos anteriores. De esta manera, encontramos que la fuerza de arrastre que siente un gluón es

$$F(\text{gluón}) = F_x^{(1)} + F_x^{(N-1)} = 2F_x^{(1)} = 2F(\text{quark}). \quad (5.2)$$

Como explicamos en el Capítulo 3, este resultado concuerda con lo que uno espera del lado de la teoría de norma.

El último capítulo de este trabajo es el más extenso y refleja una buena parte de nuestro andar por estos temas. El objetivo original era estudiar la etapa inicial del plasma, ver qué sucedía con los procesos de pérdida de energía cuando considerábamos sistemas más reales (por ejemplo quarks y mesones con masa finita) e intentar obtener una relación de dispersión para los partones que atraviesan el medio térmico. Todos y cada uno de estos temas fueron abordados y en el proceso nos encontramos con muchas sorpresas.

En las primeras secciones del este Capítulo 4 estudiamos la dinámica de un quark acelerado a temperatura cero (con masa infinita o finita). La intención era obtener mayor intuición sobre este sistema para poder describir después el caso con temperatura finita. Precisamente en este contexto fue que echamos mano de un trabajo previo de Mikhailov [110]; y gracias a esas técnicas pudimos obtener algunos resultados muy interesantes sobre la tasa de pérdida de energía.

Encontramos que la energía total de la cuerda se separa naturalmente en dos partes: la primera, que describe la energía intrínseca del quark y que como explicamos en esa sección proviene de una derivada total evaluada en los extremos de la cuerda, y la segunda, que codifica la energía perdida por el quark hasta un tiempo  $t$ . La expresión para la pérdida de energía esta dada por [110]

$$E_{\text{perdida}}(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - v^2)^3}. \quad (5.3)$$

Es sorprendente el hecho de que la tasa de pérdida de energía de un quark que se mueve en esta teoría no abeliana y fuertemente acoplada esté en completo acuerdo con la fórmula usual de Lienard que aparece en electrodinámica clásica.

El siguiente paso fue generalizar estos resultados al caso en el que el quark tiene masa finita. Nuevamente utilizamos las herramientas de Mikhailov y la expresión que encontramos es

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt z_m^2 \Pi^2 \left[ \frac{1 - v \Pi z_m^2}{1 - z_m^4 \Pi^2} \right] + E_q(v(t), F(t)), \quad (5.4)$$

donde  $\Pi$  determina la fuerza externa ( $F \equiv (\sqrt{\lambda}/2\pi)\Pi(t, z_m)$ ) que actúa sobre el extremo de la cuerda (dual al quark).

Igual que antes, el primer término representa la pérdida de energía del quark acumulada para todo tiempo anterior a  $t$ , y nos da entonces la generalización al caso  $m < \infty$  de la fórmula de Lienard (5.3) deducida por Mikhailov. El segundo nuevamente proviene de un término de superficie y representa la relación de dispersión modificada para un quark con masa finita,

$$E_q(v, F) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1 - z_m^2 v \Pi}{z \sqrt{(1 - v^2)(1 - z_m^4 \Pi^2)}} \right) \Big|_{\infty}^{z_m} = \left( \frac{2\pi m^2 - \sqrt{\lambda} v F}{\sqrt{4\pi^2 m^4 - \lambda F^2}} \right) \gamma m. \quad (5.5)$$

Calculando esta misma relación pero para el momento total de la cuerda, es fácil ver que  $\partial E_q / \partial p_q = (2\pi m^2 v - \sqrt{\lambda} F) / (2\pi m^2 - \sqrt{\lambda} v F)$ , lo cual cuando  $m < \infty$  y  $F \neq 0$  difiere del resultado esperado para un quark puntual,  $\partial E / \partial p = v$ . Como explicamos en esa sección, el punto crucial es que la fuente en cuestión no debe ser pensada como un quark desnudo, sino como un quark que está rodeado por una nube gluónica de ancho  $z_m$  [118, 120].

Antes de pasar al caso con temperatura finita, en la Sección 4.1.3 mostramos que los procesos de pérdida de energía parecen estar estrechamente ligados con la

formación de un horizonte de eventos en la hoja de mundo de la cuerda. La discusión tiene varios puntos importantes pero esencialmente del lado de la teoría de cuerdas. Estas mismas ideas las retomamos en la Sección 4.2.3 para el caso  $T > 0$ .

El análisis de la tasa de pérdida de energía de un quark con masa finita que se mueve en el plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  está dividido en dos partes. En la primera utilizamos las herramientas de Mikhailov para estudiar el quark moviéndose con velocidad constante  $v$ , mientras que en la segunda, estudiamos la dinámica de un quark acelerado y debido a que no fuimos capaces de encontrar una solución analítica para las ecuaciones de movimiento de la cuerda, tuvimos que recurrir al análisis numérico.

Una de las lecciones más importantes que aprendimos del caso con velocidad constante es que la energía intrínseca del quark tiene contribuciones de la punta de la cuerda que está en  $z = z_H$  y que codifica las condiciones iniciales (o de frontera) del sistema. Si queremos comparar la energía de configuraciones con diferentes condiciones de frontera/iniciales, es importante seguirle la pista a esta contribución que proviene del término de superficie en el horizonte, a pesar de que en general es independiente de los parámetros  $v$  y  $F$  asociados a la dinámica intrínseca del quark.

Todo el análisis que realizamos para el quark acelerado lo hicimos considerando las masas del quark encanto y el quark fondo,  $m \simeq 1.4, 4.8$  GeV. Como explicamos en la introducción, los quarks pesados sirven como importantes cargas de prueba para investigar las propiedades del plasma de quarks y gluones.

Los resultados que obtuvimos son los siguientes. En la etapa en donde el quark solo se mueve bajo la influencia del plasma hicimos una comparación con los resultados del coeficiente de fricción en el régimen estacionario. En la etapa inicial del movimiento cubierto por nuestro análisis, el quark disipa energía a una tasa mucho menor que la predicha por los resultados de [21]. En efecto, para  $z_m/z_h = 0.2, 0.3, 0.4$  el coeficiente de fricción asintótico es  $\mu_{\text{final}}/\pi T = 0.25, 0.41, 0.59$  respectivamente, mientras que los resultados numéricos quedan mejor ajustados con  $\mu_{\text{inicial}}/\pi T = 0.08, 0.15, 0.26$ .

Con el objetivo de obtener una expresión para la tasa de pérdida de energía y a partir de algunos de los resultados a temperatura cero, propusimos una expresión para la relación de dispersión del quark en el medio térmico. Para un quark que se mueve solo bajo la influencia del plasma, el resultado es

$$E_q = M_{\text{rep}} + M_{\text{cin}}(\gamma - 1) + \mathcal{O} \left( m \left( \frac{\sqrt{\lambda} T}{2m} \right)^3 \right). \quad (5.6)$$

Esta fórmula es diferente a la propuesta de [21] únicamente en la forma del término que es independiente de  $z_m$ , el cual, como explicamos, codifica información sobre las condiciones iniciales en la teoría de norma. En presencia de una fuerza externa  $F$ , nuestra propuesta es (4.52), que a diferencia de (4.46) puede reproducir la dependencia en  $F$  observada y cuya presencia está justificada por los resultados obtenidos a temperatura cero en la primera sección del Capítulo 4.

Concentrados en la etapa en donde el quark se mueve únicamente bajo los efectos del plasma ( $t > t_{\text{soltar}}$ ), estudiamos la pérdida de energía. Los resultados numéricos nos

permitieron concluir que la tasa de pérdida de energía es casi constante en la pequeña ventana de tiempo a la que tenemos acceso. Lo novedoso no fue que el valor fuera constante, sino que al compararlo con los resultados del régimen estacionario [22, 21] la tasa de pérdida de energía fuera hasta tres veces más chica que la predicha por dichos autores. La discrepancia que se observa es significativamente más grande que el margen de error estimado. Por tanto, nuestros resultados aportan clara evidencia de que, en el intervalo de masas con importancia experimental, existen condiciones bajo las cuales la tasa de pérdida de energía de un quark que se mueve solo bajo la influencia del plasma puede ser considerablemente más chica que la obtenida en [21] para el caso estacionario.

Estudiando la etapa en la que el quark se mueve bajo la influencia de la fuerza externa y utilizando los datos numéricos de la evolución en el plasma, comparamos la energía perdida por un quark pesado, Ec. (4.55), contra la fórmula de Lienard modificada (5.4) y encontramos que para  $t < t_{\text{soltar}}$  las dos curvas son indistinguibles una de la otra cuando  $z_m/z_h = 0.2, 0.3$ , y, en menor medida, cuando  $z_m/z_h = 0.4$ . En otras palabras, para este rango de masas, el quark se comporta inicialmente como si no hubiera plasma, y pierde energía por radiación a una tasa igual a la descrita por la fórmula de Lienard modificada (el primer término en (5.4)). Esto es justamente lo que uno esperaría del lado de la teoría de norma, ya que un quark pesado debe ser insensible al plasma para tiempos muy tempranos en su evolución.

En la segunda mitad del Capítulo 4 hicimos un análisis bastante extenso de la dinámica del par quark- antiquark. Los resultados más importantes son los siguientes.

Encontramos que existen dos conjuntos cualitativamente diferentes de condiciones iniciales para la cuerda que describen la creación de un par quark-antiquark, ambas con una interpretación directa en el contexto de teoría de campos. El producto de un  $q$  fundamental y un  $\bar{q}$  antifundamental nos permite obtener un par  $q\text{-}\bar{q}$  en la representación del singlete o en la representación adjunta del grupo de norma  $SU(N_c)$ , y cada una de las configuraciones para la cuerda es dual a una de estas. La cuerda tipo “línea” (4.69) es precisamente el sistema que se consideró en [73, 36, 79, 98] para modelar una fuente de color en la representación adjunta. Debido a que es un objeto extendido, los campos de supergravedad que produce son de largo alcance, lo cual se traduce a través de [15] en un perfil para los campos gluónicos de largo alcance, característica de una fuente con carga neta de color. Por el otro lado, la cuerda tipo “punto” (4.67) no genera campos de largo alcance, por lo que describe al singlete. Dada esta correspondencia, es interesante que la dualidad AdS/CFT predice que (para  $N_c$  y  $\lambda$  grandes) la velocidad inicial del quark es un parámetro libre en la configuración que corresponde a la representación adjunta, y no así para el caso en que la configuración es la asociada al singlete.

Utilizando estas dos familias de condiciones iniciales evolucionamos al par  $q\text{-}\bar{q}$  para estudiar su dinámica. Pudimos ver que el comportamiento tanto del singlete (4.67) como de la adjunta (4.69) para tiempo suficientemente grande está bien descrito por los resultados de la configuración estacionaria analizada en [21]. Por otro lado, también encontramos que existe un periodo inicial en donde el comportamiento difiere



del descrito por (4.76). Esta diferencia es claramente más significativa en el caso de la configuración del singlete que en la adjunta. El tiempo que debe transcurrir antes de que comience a operar el comportamiento asintótico se vuelve arbitrariamente grande para las configuraciones del singlete que están cerca de ser oscilatorias. En este caso, toda la energía del quark se pierde debido a la fuerza cromoelectromagnética ejercida por el antiquark sobre él, y no por el efecto del plasma.

Notamos que existe una distancia de transición al régimen asintótico y resultó natural preguntarse que relación tenía ésta, si acaso la hubiera, con la longitud de apantallamiento que estudiamos en el Capítulo 2 y desarrollamos en mayor profundidad en el Capítulo 4. Encontramos que para la configuración del singlete, las dos distancias son comparables en magnitud y escalan con la velocidad de manera similar. Esto sucede a pesar de que las dos configuraciones de la cuerda son muy diferentes: en el primer caso, el movimiento es a lo largo de la dirección del plano donde se extiende la cuerda, mientras que en el segundo, el movimiento es perpendicular al mismo. La conclusión es que la transición al régimen donde el coeficiente de fricción es constante sucede inmediatamente después de que el quark y el antiquark se dejan de ver. Interesantemente, este mismo resultado fue obtenido de manera independiente y con un enfoque distinto en [123], que apareció de manera simultánea con nuestro trabajo.

La última parte de este trabajo consistió en estudiar el sistema del par quark-antiquark que revisamos en el capítulo 2, pero ahora considerando los efectos de una masa finita. Primero, encontramos que el comportamiento del potencial para distancias pequeñas, a diferencia del caso con masa infinita, es lineal y por supuesto no divergente en  $L = 0$ . Por otro lado, también pudimos ver que el valor de  $z_m$  afecta la posición de la longitud de apantallamiento  $L_*, L_{\max}$  (y la velocidad a partir de la cual  $L_* = L_{\max}$ ).

Encontramos que cuando  $z_m/z_h = 0.2$ , y en menor medida cuando  $z_m/z_h = 0.4$ , la longitud de apantallamiento  $L_{\max}(v)$  todavía está bien aproximada en todo el rango de velocidades  $0 \leq v \leq v_m$  por la modificación natural del ajuste para  $z_m = 0$  (2.44),

$$L_{\max}(v) \approx \frac{0.865}{\pi T v_m^{2/3}} (v_m^2 - v^2)^{1/3}. \quad (5.7)$$

Una diferencia importante con respecto al caso del quark y el antiquark con masa infinita es que ahora la región “ultrarrelativista” se refiere al límite en donde la velocidad del par se acerca a la cota  $v_m < 1$  dada en (4.68). El comportamiento en esta región nuevamente puede ser determinado analíticamente y el resultado es que en lugar de tener el exponente  $1/4$  que mencionamos en el Capítulo 2, ahora con masa finita el exponente es 1.

Hay algunos resultados en este trabajo que no fueron discutidos en las conclusiones, sin embargo, creemos haber mencionado aquellos que tienen mayor relevancia desde el punto de vista fenomenológico para entender aspectos de la física del plasma de quarks y gluones.

En esta tesis hemos explorado diversos aspectos relacionados con la pérdida de

energía de los partones que atraviesan el medio térmico utilizando la correspondencia AdS/CFT. Esperamos haber transmitido las ideas físicas de fondo y no haber perdido al lector en los detalles matemáticos. El tema es apasionante y desde luego queda mucho por hacer; algunas de las direcciones más claras son las siguientes. Un punto esencial es modelar situaciones que se asemejen mucho más al experimento incluyendo la utilización de un plasma finito y en expansión. Más aún, es necesario conocer con mayor detalle las cantidades que pueden medir los experimentales y así intentar trabajar con un objetivo común. En este mismo contexto, también tenemos la necesidad de buscar duales geométricos a teorías de norma que cada vez se parezcan más a QCD, si bien como hemos visto a temperatura finita SYM tiene muchas similitudes, es claro que aún estamos lejos de reproducir todas sus características. Otro camino, igualmente atractivo y necesario, es buscar cantidades que sean universales, ésto es, que su valor no dependa de la teoría de norma en la que estemos trabajando. Estos son solo tres ejemplos de temas que están directamente relacionadas con las aplicaciones de la correspondencia AdS/CFT al plasma de quarks y gluones. Sin embargo, es mucho lo que aún desconocemos dentro de la dualidad misma, necesitamos seguir trabajando para entender el verdadero poder de esta increíble herramienta.

# Bibliografía

- [1] B. Zwiebach, A first Course in String Theory, Cambridge University Press, (2004).
- [2] M. Kaku, Introduction to superstring and M-Theory, Springer, (1998).
- [3] M. Green, J.H. Schwarz y E.Witten, Superstring Theory, Vol.2 Loop Amplitudes, Anomalies and Fenomenology, Cambridge University Press, (1987).
- [4] B. Schutz, A First Course in General Relativiy, Cambridge University Press, (1990).
- [5] J. Polchinski, “TASI Lectures on D-branes,” [arXiv:hep-th/9611050].
- [6] G. Horowitz y A. Strominger, Nucl.Phys. B360 (1991) 197.
- [7] I.R. Klebanov, “TASI Lectures: Introduction to the AdS/CFT Correspondence,” [arXiv:hep-th/0009139].
- [8] I. Papadimitriou y K. Skendris, “AdS/CFT Correspondence and Geometry,” [arXiv:hep-th/0404176].
- [9] A. Sen, “An Introduction to Non-perturbative String Theory,” [arXiv:hep-th/9802051].
- [10] E. Kiritsis, “Introduction to Superstring Theory,” Leuven University Press, (1998).
- [11] A. Khodjamiriam, “Quantum Chromodynamics and Hadrons: An Elementary Introduction,” [arXiv:hep-ph/0403145].
- [12] R. Rapp y H. van Hees, “Heavy Quark Diffusion as a Probe of the Quark Gluon Plasma,” [arXiv:hep-ph/0803.0901].
- [13] B. Müller y J. Nagle, “Results from the Relativistic Heavy Ion Collider,” [arXiv:nucl-th/0602029].
- [14] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

- [15] S. S. Gubser, I. R. Klebanov y A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109];  
E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
- [16] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri y Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [17] D. Mateos, “String theory and quantum chromodynamics,” arXiv:hep-ph/0709.1523.
- [18] R.C. Myers y S.E. Vázquez, “Quark soup al dente: applied superstring theory,” arXiv:hep-ph/0804.2423.
- [19] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], “Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration,” *Nucl. Phys. A* **757**, 184 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410003];  
I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], “Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment,” *Nucl. Phys. A* **757** (2005) 1 [arXiv:nucl-ex/0410020];  
B. B. Back *et al.*, “The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC,” *Nucl. Phys. A* **757** (2005) 28 [arXiv:nucl-ex/0410022];  
J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” *Nucl. Phys. A* **757**, 102 (2005) [arXiv:nucl-ex/0501009].
- [20] F. Carminati *et al.* [ALICE Collaboration], “ALICE: Physics performance report, volume I,” *J. Phys. G* **30** (2004) 1517;  
A. Morsch [ALICE Collaboration], “Jet quenching studies with the ALICE detector,” *Czech. J. Phys.* **55** (2005) B333.
- [21] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz y L. G. Yaffe, “Energy loss of a heavy quark moving through  $N = 4$  supersymmetric Yang-Mills plasma,” arXiv:hep-th/0605158.
- [22] S. S. Gubser, “Drag force in AdS/CFT,” arXiv:hep-th/0605182.
- [23] J. Casalderrey-Solana y D. Teaney, “Heavy quark diffusion in strongly coupled  $N = 4$  Yang Mills,” arXiv:hep-ph/0605199.
- [24] C. P. Herzog, “Energy Loss of Heavy Quarks from Asymptotically AdS Geometries,” arXiv:hep-th/0605191.

- [25] E. Cáceres y A. Güijosa, “Drag Force in a Charged  $N = 4$  SYM Plasma,” arXiv:hep-th/0605235.
- [26] E. Cáceres y A. Güijosa, “On drag forces and jet quenching in strongly coupled plasmas,” arXiv:hep-th/0606134.
- [27] S. J. Sin y I. Zahed, “Ampere’s law and energy loss in AdS/CFT duality,” arXiv:hep-ph/0606049.
- [28] J. J. Friess, S. S. Gubser y G. Michalogiorgakis, “Dissipation from a heavy quark moving through  $N = 4$  super-Yang-Mills plasma,” arXiv:hep-th/0605292.
- [29] Y. h. Gao, W. s. Xu y D. f. Zeng, “Wake of color fields in charged  $N = 4$  SYM plasmas,” arXiv:hep-th/0606266.
- [30] J. J. Friess, S. S. Gubser, G. Michalogiorgakis y S. S. Pufu, “The stress tensor of a quark moving through  $N=4$  thermal plasma,” arXiv:hep-th/0607022.
- [31] S. S. Gubser y S. S. Pufu, “Master field treatment of metric perturbations sourced by the trailing string,” arXiv:hep-th/0703090.
- [32] A. Yarom, “On the energy deposited by a quark moving in an  $N = 4$  SYM plasma,” arXiv:hep-th/0703095.
- [33] A. Yarom, “The high momentum behavior of a quark wake,” arXiv:hep-th/0702164.
- [34] S. S. Gubser y A. Yarom, “Universality of the diffusion wake in the gauge-string duality,” arXiv:0709.1089 [hep-th];
- [35] P. M. Chesler y L. G. Yaffe, “The stress-energy tensor of a quark moving through a strongly-coupled  $N=4$  supersymmetric Yang-Mills plasma: comparing hydrodynamics and AdS/CFT,” arXiv:0712.0050 [hep-th];
- [36] J. J. Friess, S. S. Gubser, G. Michalogiorgakis y S. S. Pufu, JHEP **0704**, 079 (2007) [arXiv:hep-th/0609137].
- [37] U. H. Danielsson, E. Keski-Vakkuri y M. Kruczenski, “Vacua, propagators, and holographic probes in AdS/CFT,” JHEP **9901**, 002 (1999) [arXiv:hep-th/9812007].
- [38] C. G. Callan y A. Güijosa, “Undulating strings and gauge theory waves,” Nucl. Phys. B **565**, 157 (2000) [arXiv:hep-th/9906153].
- [39] A. Kovner y U. A. Wiedemann, “Gluon radiation and parton energy loss,” arXiv:hep-ph/0304151.
- [40] H. Liu, K. Rajagopal y U. A. Wiedemann, “Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT,” arXiv:hep-ph/0605178.

- [41] J. Gomis y F. Passerini, “Holographic Wilson loops,” arXiv:hep-th/0604007.
- [42] J. M. Maldacena, “Wilson loops in large N field theories,” Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859 [arXiv:hep-th/9803002];  
S. J. Rey y J. T. Yee, “Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity,” Eur. Phys. J. C **22** (2001) 379 [arXiv:hep-th/9803001].
- [43] A. Buchel, “On jet quenching parameters in strongly coupled non-conformal gauge theories,” arXiv:hep-th/0605178.
- [44] J. F. Vazquez-Poritz, “Enhancing the jet quenching parameter from marginal deformations,” arXiv:hep-th/0605296.
- [45] S. J. Sin y I. Zahed, “Holography of radiation and jet quenching,” Phys. Lett. B **608** (2005) 265 [arXiv:hep-th/0407215]
- [46] S. D. Avramis y K. Sfetsos, “Supergravity and the jet quenching parameter in the presence of R-charge densities,” arXiv:hep-th/0606190.
- [47] S. J. Rey, S. Theisen y J. T. Yee, “Wilson-Polyakov loop at finite temperature in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity,” Nucl. Phys. B **527** (1998) 171 [arXiv:hep-th/9803135].
- [48] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein y S. Yankielowicz, “Wilson loops in the large N limit at finite temperature,” Phys. Lett. B **434**, 36 (1998) [arXiv:hep-th/9803137].
- [49] K. Peeters, J. Sonnenschein y M. Zamaklar, “Holographic melting and related properties of mesons in a quark gluon plasma,” arXiv:hep-th/0606195.
- [50] H. Liu, K. Rajagopal y U. A. Wiedemann, “An AdS/CFT Calculation of Screening in a Hot Wind,” arXiv:hep-ph/0607062.
- [51] I. R. Klebanov, J. M. Maldacena y C. B. Thorn, “Dynamics of flux tubes in large N gauge theories,” JHEP **0604** (2006) 024 [arXiv:hep-th/0602255].
- [52] E. Witten, “Baryons and branes in anti de Sitter space,” JHEP **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].
- [53] Y. Imamura, “Supersymmetries and BPS configurations on Anti-de Sitter space,” Nucl. Phys. B **537** (1999) 184 [arXiv:hep-th/9807179].
- [54] C. G. Callan, A. Güijosa y K. G. Savvidy, “Baryons and string creation from the fivebrane worldvolume action,” Nucl. Phys. B **547** (1999) 127 [arXiv:hep-th/9810092];

- [55] C. G. Callan, A. Güijosa, K. G. Savvidy y O. Tafjord, “Baryons and flux tubes in confining gauge theories from brane actions,” Nucl. Phys. B **555**, 183 (1999) [arXiv:hep-th/9902197].
- [56] K. Rajagopal, comunicaciones privadas.
- [57] U. A. Wiedemann, comunicaciones privadas.
- [58] L. Susskind y E. Witten, “The Holographic Bound In Anti-De Sitter Space,” arXiv:hep-th/9805114;  
A. W. Peet y J. Polchinski, “UV/IR relations in AdS dynamics,” Phys. Rev. D **59** (1999) 065011 [arXiv:hep-th/9809022].
- [59] E. Cáceres, M. Natsuume y T. Okamura, “Screening Length in Plasma Winds,” arXiv:hep-th/0607233.
- [60] G. Policastro, D. T. Son y A. O. Starinets, “The shear viscosity of strongly coupled  $N = 4$  supersymmetric Yang-Mills plasma,” Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 081601 [arXiv:hep-th/0104066].
- [61] D. Teaney, “Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and Hanbury Brown-Twiss radii,” Phys. Rev. C **68** (2003) 034913 [arXiv:nucl-th/0301099].
- [62] A. Buchel y J. T. Liu, “Universality of the shear viscosity in supergravity,” Phys. Rev. Lett. **93**, 090602 (2004) [arXiv:hep-th/0311175];
- [63] P. Kovtun, D. T. Son y A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231];
- [64] R. A. Janik y R. Peschanski, “Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT,” Phys. Rev. D **73**, 045013 (2006) [arXiv:hep-th/0512162].
- [65] T. Matsuo, D. Tomino y W. Y. Wen, “Drag force in SYM plasma with B field from AdS/CFT,” arXiv:hep-th/0607178.
- [66] E. Nakano, S. Teraguchi y W. Y. Wen, “Drag force, jet quenching, and AdS/QCD,” arXiv:hep-ph/0608274.
- [67] P. Talavera, “Drag force in a string model dual to large- $N$  QCD,” arXiv:hep-th/0610179.
- [68] R. Baier, D. Schiff y B. G. Zakharov, “Energy loss in perturbative QCD,” Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50** (2000) 37 [arXiv:hep-ph/0002198];  
R. Baier, “Jet quenching,” Nucl. Phys. A **715**, 209 (2003) [arXiv:hep-ph/0209038];  
M. Gyulassy, I. Vitev, X. N. Wang y B. W. Zhang, “Jet quenching and radiative energy loss in dense nuclear matter,” arXiv:nucl-th/0302077;

- A. Kovner y U. A. Wiedemann, “Gluon radiation and parton energy loss,” arXiv:hep-ph/0304151.
- [69] M. Chernicoff, J. A. García y A. Güijosa, “The energy of a moving quark-antiquark pair in an  $N = 4$  SYM plasma,” JHEP **0609** (2006) 068 [arXiv:hep-th/0607089].
- [70] S. S. Gubser, “Momentum fluctuations of heavy quarks in the gauge-string duality,” Nucl. Phys. B **790** (2008) 175 [arXiv:hep-th/0612143].
- [71] P. C. Argyres, M. Edalati y J. F. Vázquez-Poritz, “No-drag string configurations for steadily moving quark-antiquark pairs in a thermal bath,” arXiv:hep-th/0608118.
- [72] A. Dainese, C. Loizides y G. Paic, “Leading-particle suppression in high energy nucleus-nucleus collisions,” Eur. Phys. J. C **38** (2005) 461 [arXiv:hep-ph/0406201].
- [73] S. S. Gubser, “Relativistic heavy ion collisions and string theory,” lectures at Prospects in Theoretical Physics, 2006, available at <http://www.admin.ias.edu/pitp/2006files/Lecture%20notes/Gubser%20Lecture%20notes%20REVISED.pdf>
- [74] N. Drukker, D. J. Gross y H. Ooguri, “Wilson loops and minimal surfaces,” Phys. Rev. D **60**, 125006 (1999) [arXiv:hep-th/9904191].
- [75] N. Drukker y B. Fiol, “All-genus calculation of Wilson loops using D-branes,” JHEP **0502**, 010 (2005) [arXiv:hep-th/0501109].
- [76] C. G. Callan y J. M. Maldacena, “Brane dynamics from the Born-Infeld action,” Nucl. Phys. B **513**, 198 (1998) [arXiv:hep-th/9708147];  
G. W. Gibbons, “Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes,” Nucl. Phys. B **514** (1998) 603 [arXiv:hep-th/9709027];  
P. S. Howe, N. D. Lambert y P. C. West, “The self-dual string soliton,” Nucl. Phys. B **515** (1998) 203 [arXiv:hep-th/9709014].
- [77] S. A. Hartnoll y S. Prem Kumar, “Multiply wound Polyakov loops at strong coupling,” Phys. Rev. D **74**, 026001 (2006) [arXiv:hep-th/0603190].
- [78] S. Yamaguchi, “Wilson loops of anti-symmetric representation and D5-branes,” JHEP **0605**, 037 (2006) [arXiv:hep-th/0603208].
- [79] J. Gomis y F. Passerini, “Holographic Wilson loops,” JHEP **0608**, 074 (2006) [arXiv:hep-th/0604007].
- [80] S. A. Hartnoll, “Two universal results for Wilson loops at strong coupling,” Phys. Rev. D **74** (2006) 066006 [arXiv:hep-th/0606178].



- [81] S. A. Hartnoll y S. P. Kumar, “Higher rank Wilson loops from a matrix model,” JHEP **0608**, 026 (2006) [arXiv:hep-th/0605027].
- [82] J. Pawelczyk y S. J. Rey, “Ramond-Ramond flux stabilization of D-branes,” Phys. Lett. B **493**, 395 (2000) [arXiv:hep-th/0007154].
- [83] J. M. Camino, A. Paredes y A. V. Ramallo, “Stable wrapped branes,” JHEP **0105**, 011 (2001) [arXiv:hep-th/0104082].
- [84] A. Karch y E. Katz, “Adding flavor to AdS/CFT,” JHEP **0206** (2002) 043 [arXiv:hep-th/0205236].
- [85] C. G. Callan y I. R. Klebanov, “D-Brane Boundary State Dynamics,” Nucl. Phys. B **465** (1996) 473 [arXiv:hep-th/9511173].
- [86] B. Craps, J. Gomis, D. Mateos y A. Van Proeyen, “BPS solutions of a D5-brane world volume in a D3-brane background from superalgebras,” JHEP **9904** (1999) 004 [arXiv:hep-th/9901060].
- [87] J. Gomis, A. V. Ramallo, J. Simon y P. K. Townsend, “Supersymmetric baryonic branes,” JHEP **9911** (1999) 019 [arXiv:hep-th/9907022].
- [88] A. Güijosa, K. G. Savvidy y O. Tafjord, unpublished.
- [89] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998) [arXiv:hep-th/9803131].
- [90] M. Shifman, “k strings from various perspectives: QCD, lattices, string theory and toy models,” Acta Phys. Polon. B **36**, 3805 (2005) [arXiv:hep-ph/0510098]; P. Giudice, F. Gliozzi y S. Lottini, “Quantum fluctuations of k-strings: A case study,” arXiv:hep-lat/0609055.
- [91] C. P. Herzog y I. R. Klebanov, “On string tensions in supersymmetric SU(M) gauge theory,” Phys. Lett. B **526** (2002) 388 [arXiv:hep-th/0111078]; C. P. Herzog, “String tensions and three dimensional confining gauge theories,” Phys. Rev. D **66** (2002) 065009 [arXiv:hep-th/0205064]; S. A. Hartnoll y R. Portugues, “Deforming baryons into confining strings,” Phys. Rev. D **70** (2004) 066007 [arXiv:hep-th/0405214]; Y. Imamura, “Baryon vertices in AdS blackhole backgrounds,” Prog. Theor. Phys. **115** (2006) 815 [arXiv:hep-th/0512314]; I. R. Klebanov, J. M. Maldacena y C. B. Thorn, “Dynamics of flux tubes in large N gauge theories,” JHEP **0604** (2006) 024 [arXiv:hep-th/0602255]; H. Firouzjahi, L. Leblond y S. H. Henry Tye, “The (p,q) string tension in a warped deformed conifold,” JHEP **0605** (2006) 047 [arXiv:hep-th/0603161]; A. Armoni y B. Lucini, “Universality of k-string tensions from holography and the lattice,” JHEP **0606**, 036 (2006) [arXiv:hep-th/0604055].

- [92] R. C. Myers, “Dielectric-branes,” JHEP **9912**, 022 (1999) [arXiv:hep-th/9910053].
- [93] W. I. Taylor y M. Van Raamsdonk, “Multiple Dp-branes in weak background fields,” Nucl. Phys. B **573**, 703 (2000) [arXiv:hep-th/9910052].
- [94] A. A. Tseytlin, “On non-abelian generalisation of the Born-Infeld action in string theory,” Nucl. Phys. B **501**, 41 (1997) [arXiv:hep-th/9701125].
- [95] H. Dorn, “Nonabelian gauge field dynamics on matrix D-branes,” Nucl. Phys. B **494**, 105 (1997) [arXiv:hep-th/9612120];  
C. M. Hull, “Matrix theory, U-duality and toroidal compactifications of M-theory,” JHEP **9810**, 011 (1998) [arXiv:hep-th/9711179].
- [96] P. Bain, “On the non-Abelian Born-Infeld action,” arXiv:hep-th/9909154.
- [97] D. d’Enterria, “High p(T) leading hadron suppression in nuclear collisions at  $s(\text{NN})^{1/2} = 20\text{-GeV} - 200\text{-GeV}$ : Data versus parton energy loss models,” Eur. Phys. J. C **43**, 295 (2005) [arXiv:nucl-ex/0504001].
- [98] M. Chernicoff y A. Güijosa, “Energy loss of gluons, baryons and k-quarks in an  $N = 4$  SYM plasma,” JHEP **0702** (2007) 084 [arXiv:hep-th/0611155].
- [99] S. S. Gubser, “Comparing the drag force on heavy quarks in  $N = 4$  super-Yang-Mills theory and QCD,” arXiv:hep-th/0611272.
- [100] H. Liu, K. Rajagopal y U. A. Wiedemann, “Wilson loops in heavy ion collisions and their calculation in AdS/CFT,” JHEP **0703** (2007) 066 [arXiv:hep-ph/0612168].
- [101] S. S. Gubser, “Jet-quenching and momentum correlators from the gauge-string duality,” arXiv:hep-th/0612143.
- [102] P. C. Argyres, M. Edalati y J. F. Vázquez-Poritz, “Spacelike strings and jet quenching from a Wilson loop,” JHEP **0704** (2007) 049 [arXiv:hep-th/0612157].
- [103] Q. J. Ejaz, T. Faulkner, H. Liu, K. Rajagopal y U. A. Wiedemann, “A limiting velocity for quarkonium propagation in a strongly coupled plasma via AdS/CFT,” arXiv:0712.0590 [hep-th].
- [104] P. C. Argyres, M. Edalati y J. F. Vázquez-Poritz, “Lightlike Wilson loops from AdS/CFT,” arXiv:0801.4594 [hep-th].
- [105] K. Kajantie y T. Tahkokallio, “Spherically expanding matter in AdS/CFT,” Phys. Rev. D **75** (2007) 066003 [arXiv:hep-th/0612226].
- [106] J. Casalderrey-Solana y D. Teaney, “Transverse momentum broadening of a fast quark in a  $N = 4$  Yang Mills plasma,” arXiv:hep-th/0701123.

- [107] G. Bertoldi, F. Bigazzi, A. L. Cotrone y J. D. Edelstein, “Holography and Unquenched Quark-Gluon Plasmas,” arXiv:hep-th/0702225.
- [108] D. Bak, A. Karch y L. G. Yaffe, “Debye screening in strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” JHEP **0708** (2007) 049 [arXiv:0705.0994 [hep-th]].
- [109] L. Brink y M. Henneaux, “PRINCIPLES OF STRING THEORY,” *NEW YORK, USA: PLENUM (1988) 297p*
- [110] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence,” arXiv:hep-th/0305196.
- [111] S. J. Sin y I. Zahed, “Holography of radiation and jet quenching,” Phys. Lett. B **608** (2005) 265 [arXiv:hep-th/0407215].
- [112] S. Hong, S. Yoon y M. J. Strassler, “Quarkonium from the fifth dimension,” JHEP **0404** (2004) 046 [arXiv:hep-th/0312071].
- [113] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers y D. J. Winters, “Meson spectroscopy in AdS/CFT with flavour,” JHEP **0307** (2003) 049 [arXiv:hep-th/0304032].
- [114] H. Arodz, “Solutions Of Yang-Mills Equations With External Sources,” Phys. Lett. B **78** (1978) 129;  
 A. Trautman, “Radiation Of Energy And Change In Color Of A Point Source Of The Yang-Mills Field,” Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 875;  
 W. Drechsler, “Does A Moving Nonabelian Charge Radiate?,” Phys. Lett. B **90**, 258 (1980);  
 W. Drechsler y A. Rosenblum, “Equations Of Motion And Iteration Of Lienard-Wiechert Type Solutions In Classical Yang-Mills Theory,” Phys. Lett. B **106** (1981) 81;  
 C. H. Oh, C. H. Lai y R. Teh, “Color Radiation In The Classical Yang-Mills Theory,” Phys. Rev. D **33** (1986) 1133;  
 O. Sarioglu, “Lienard-Wiechert potentials of a non-Abelian Yang-Mills charge,” Phys. Rev. D **66** (2002) 085005 [arXiv:hep-th/0207227];  
 L. D. McLerran y R. Venugopalan, “Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei,” Phys. Rev. D **49** (1994) 2233 [arXiv:hep-ph/9309289].
- [115] J. F. Gunion y G. Bertsch, “Hadronization By Color Bremsstrahlung,” Phys. Rev. D **25** (1982) 746;  
 R. D. Field, G. C. Fox y R. L. Kelly, “Gluon Bremsstrahlung Effects In Hadron - Hadron Collisions,” Phys. Lett. B **119** (1982) 439;  
 M. Gyulassy y L. D. McLerran, “Yang-Mills radiation in ultrarelativistic nuclear collisions,” Phys. Rev. C **56** (1997) 2219 [arXiv:nucl-th/9704034].

- [116] S. Peigne, P. B. Gossiaux y T. Gousset, “Retardation effect for collisional energy loss of hard partons produced in a QGP,” *JHEP* **0604** (2006) 011 [arXiv:hep-ph/0509185].
- [117] M. Djordjevic, “Collisional energy loss in a finite size QCD matter,” *Phys. Rev. C* **74** (2006) 064907 [arXiv:nucl-th/0603066];  
P. B. Gossiaux, S. Peigne, C. Brandt y J. Aichelin, “Energy Loss of a Heavy Quark Produced in a Finite Size Medium,” *JHEP* **0704** (2007) 012 [arXiv:hep-ph/0608061];  
P. B. Gossiaux, J. Aichelin, C. Brandt, T. Gousset y S. Peigne, “Energy loss of a heavy quark produced in a finite-size quark-gluon plasma,” *J. Phys. G* **34** (2007) S817 [arXiv:hep-ph/0703095].
- [118] J. L. Hovdebo, M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers y D. J. Winters, “Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality,” *Int. J. Mod. Phys. A* **20** (2005) 3428.
- [119] H. Satz, “Quarkonium binding and dissociation: The spectral analysis of the QGP,” *Nucl. Phys. A* **783** (2007) 249 [arXiv:hep-ph/0609197].
- [120] S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers y R. M. Thomson, “Holographic phase transitions at finite baryon density,” *JHEP* **0702** (2007) 016 [arXiv:hep-th/0611099].
- [121] K. Maeda y T. Okamura, “Radiation from an accelerated quark in AdS/CFT,” arXiv:0712.4120 [hep-th].
- [122] O. Philipsen, “Non-perturbative formulation of the static color octet potential,” *Phys. Lett. B* **535**, 138 (2002) [arXiv:hep-lat/0203018];  
O. Kaczmarek, F. Karsch, P. Petreczky y F. Zantow, “Heavy quark anti-quark free energy and the renormalized Polyakov loop,” *Phys. Lett. B* **543**, 41 (2002) [arXiv:hep-lat/0207002].
- [123] Y. Hatta, E. Iancu and A. H. Mueller, “Jet evolution in the N=4 SYM plasma at strong coupling,” arXiv:0803.2481 [hep-th].