



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“REVISIÓN DE LA CARACTERIZACIÓN DE BOMBAS  
CENTRÍFUGAS MEDIANTE CURVAS ADIMENSIONALES”

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA  
(HIDRÁULICA)

PRESENTA:

ING. RAYMUNDO HERRERA CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAFAEL CARMONA PAREDES



Ciudad Universitaria

ENERO de 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Raymundo Herreras  
Chavez  
29 Enero 12008  
RCH

## Revisión de la caracterización de bombas centrífugas mediante curvas adimensionales

Contenido	Páginas
<b>I Aportación</b>	<b>1</b>
<b>II Introducción</b>	<b>11</b>
<b>Capítulo 1 Antecedentes</b>	
1.1 Ecuación fundamental de las turbomáquinas.	16
1.1.1 Primera forma de la ecuación de Euler.	16
1.1.2 Deducción de la Ecuación de Euler.	16
1.1.3 Notas de la ecuación de Euler.	20
1.2 Triángulos de velocidades.	21
1.2.1 Segunda forma de la ecuación de Euler.	21
<b>Capítulo 2 Bombas y turbinas</b>	
2.1 Bombas centrífugas.	25
2.1.1 Características de las bombas	25
2.2 Curva característica de una bomba.	27
2.2.1 Eficiencia y potencia mecánica.	29
2.3 Velocidad específica.	32
2.4 Turbinas hidráulicas.	34
2.4.1 Clasificación de las turbinas hidráulicas.	37
<b>Capítulo 3 Bombas como turbinas</b>	
3.1 Descripción de las bombas operando como turbinas.	40
3.1.1 Diferencias particulares entre las bombas y las turbinas.	41
3.1.2 Condiciones de Operación de las bombas y las turbinas.	42
3.2 Rendimiento de bombas centrífugas como turbinas.	43
3.2.1 Modelos de rendimiento en el punto de mejor eficiencia.	44
3.2.2 Modelos para bombas y turbinas con velocidad variable, aplicando las leyes de similitud.	45
3.2.3 Modelo con motor eléctrico para velocidad variable.	49
3.2.4 Método Atatorre-Frenk's para calcular las curvas de bombas turbinas.	50
3.3 Representación de las Curvas Características Completas de Bombas centrífugas.	51
3.3.1 Caracterización general de las bombas centrífugas	53
3.3.2 Diagrama de círculo o de los cuatro cuadrantes	55
3.4 Modelado de una bomba como turbina.	61
<b>Capítulo 4 Experimentación</b>	
4.1 Descripción general de la instalación experimental.	66
4.2 Obtención de las curvas características para bombas de flujo radial y mixto.	67
4.3 Cálculo de las curvas características.	68
4.3.1 Bomba de flujo radial.	68
4.3.2 Bomba de flujo mixto.	71
4.3.3 Ajuste de las curvas características para la bomba de flujo radial.	72
4.3.4 Ajuste de las curvas características para la bomba de flujo mixto.	74
4.4 Transformación de las curvas características a curvas Knapp.	76
4.4.1 Obtención de los valores nominales para la bomba de flujo radial.	76
4.4.2 Obtención de los valores nominales para la bomba de flujo mixto.	79
4.4.3 Curvas adimensionales para la bomba de flujo radial.	82
4.4.4 Curvas adimensionales para la bomba de flujo mixto.	84
<b>Capítulo 5 Conclusiones</b>	<b>80</b>
Enfocadas a la obtención de las curvas Knapp	
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>89</b>

### **A mi esposa:**

Erika Fabiola Moreno Gómez, por todos los momentos que hemos compartido juntos, por su paciencia y apoyo desinteresado, gracias por todo.

Y a nuestro Bebe que viene en camino, con mucho cariño y amor.

### **En memoria de:**

*Mis abuelos.*

†Raymundo Herrera Saucillo.

†Francisca Puga Rincón.

†Policarpio Chávez Mosqueda.

†María del Carmen Jiménez Cabello.

*Mis Tíos y Primos.*

†Carmen Herrera Puga.

†Rosario Chávez Jiménez.

†Francisco Chávez Suárez.

*Mi amigo.*

†Marcos Rafael Ocampo Heredia.

Que aunque no están presentes los recuerdo con mucho amor, cariño y respeto.

### **A mis padres:**

José Herrera Puga y María Consuelo Chávez Jiménez, por ser testigos de un logro más en mi vida.

### **A mis Hermanos:**

Héctor Apolinar, que aunque este fuera del país lo sigo recordando.

Verónica Rebeca, Sergio, Leonel, Guadalupe, Jesús José, María Consuelo y Trinidad Alfonso.

### **A mis sobrinos:**

Laura, Abigail Estefany, Omar, Fernando, Diana Arlette, Alexis Felipe, Eduardo, Andrea, José Carlos, Héctor Manuel.

Espero que algún día vean los logros que he obtenido y les sirva de motivación en su vida para que se superen y sean alguien importante en la vida.

### **A mis grandes amigos:**

Eduardo López González  
Manuel Moisés Cabrera Delgadillo  
Mauricio de los Santos Hernández  
Hugo Rivera Martínez  
Lic. Rigoberto Arguez Ceballos  
Guillermo Cabrera Delgadillo

### **A mis compañeros y amigos del Laboratorio de Hidráulica.**

M en I. Arturo Nava Mastache  
M en I. Adriana Caffagi Felix  
José A. Jaramillo Olivares  
Eliseo de la Rosa Heras  
Leonardo Estrada Camacho  
Juan Zúñiga Naranjo

Con ellos compartí una de las etapas más bonitas de mi vida durante 12 años de colaboración en el laboratorio de Hidráulica, desde que inicié el Servicio Social en marzo de 1994 hasta el 12 de agosto de 2006 y que actualmente los sigo recordando.

### **A la Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería**

Gracias por darme la oportunidad de haber dado mis primeros pasos en la docencia y por permitirme tener una formación con gran calidad humana.

### **A la Universidad Tecnológica de México.**

Por haberme permitido continuar en el camino de la docencia y darme la oportunidad de dar clases en el campo de la Hidráulica y Arquitectura, Gracias por los seis años de estancia en esta.

### **A mis compañeros y amigos de Consorcio ARA.**

Gracias por su amistad y colaboración.

### **Al Director de tesis:**

Dr. Rafael Carmona Paredes por ser una persona paciente y dedicada en la dirección de esta tesis, gracias por su tiempo y entusiasmo que contagia.

---

# **I. APORTACIÓN**

---

## Aportación

*Las bombas como turbinas (PAT) pueden tener una aplicación muy amplia en México y ofrecer una alternativa técnica con una considerable ventaja económica, el costo de mantenimiento de una bomba trabajando como turbina es menor que el de una turbina (referencia 1), por lo que se sugiere que en México se empiece a desarrollar este tipo de aplicaciones y así proporcionar energía eléctrica a zonas rurales aisladas que no tiene acceso a electricidad; y las pequeñas centrales hidráulicas juegan un papel importante en su desarrollo.*

La propuesta inicial fue el de trabajar con las bombas de flujo radial y flujo mixto que se encuentran en el Laboratorio de Hidráulica, en la instalación del sistema en paralelo, posteriormente fue posible que la bomba de flujo radial se pusiera a trabajar en sentido inverso (bomba como turbina), siendo alimentada con la bomba de flujo mixto; manipulando las válvulas que se encuentran en la instalación. Este funcionamiento duro aproximadamente 2 minutos, debido a que se presentaron problemas en dicha bomba, e inmediatamente se detuvo y no se logro realizar mediciones funcionado en sentido inverso.

En segunda instancia se propuso trabajar con las curvas características de ambas bombas funcionando de manera normal para obtener las curvas adimensionales o curvas Knapp y se dibujaron únicamente en un solo cuadrante, ya que solo se trabajo funcionando como bomba. La metodología propuesta en este trabajo es adecuada en el intervalo de funcionamiento de ambas bombas, este desarrollo se puede ver en el capitulo 3 de esta tesis.

En esta tesis se investigaron y desarrollaron ecuaciones que pueden usarse para simplificar los datos para bombas, también se describe el comportamiento de las bombas trabajando como turbinas (PAT) bajo cualquier régimen, incluyendo e identificando la forma para obtener el punto de mejor eficiencia (BEP). Esto representa la combinación de técnicas que pueden aplicarse a un rango muy amplio, para varios tipos de bombas centrífugas.

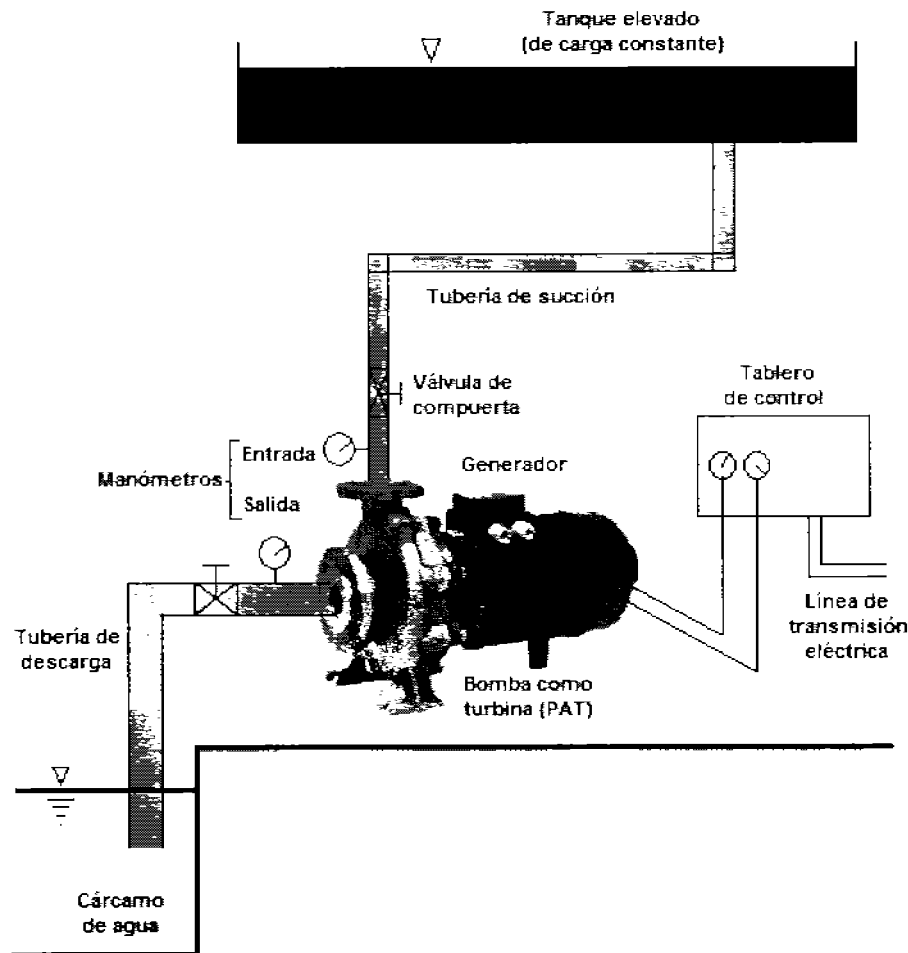
La Figura 1 muestra el esquema propuesto, en la que se alimenta la bomba por medio de un tanque elevado a través de una tubería; para proporcionar la potencia hidráulica necesaria, y posteriormente la bomba funcione en sentido contrario (PAT) y a su vez mueva al motor eléctrico, una vez que la flecha es movida por la bomba, el motor se convierte en generador y en vez de consumir energía eléctrica, este la produce.

Para poder trabajar con un sistema de bombeo y generar energía eléctrica se requiere una instalación con las siguientes características:

- Tanque elevado (para simular la corriente aguas arriba de la bomba).
- Cárcamo de agua (cistema).
- Sistemas de bombeo (para elevar el agua al tanque elevado).
- Tubería de succión.



- Válvula de compuerta y manómetro de carátula antes de la PAT.
- Bomba (PAT) y motor eléctrico (generador).
- Tablero de control, donde se medirá la electricidad que se produzca.
- Tubería de descarga.
- Válvula de compuerta y manómetro de carátula después de la PAT.



**Figura 1. Arreglo de una bomba funcionando en sentido inverso (PAT) para generar energía eléctrica.**

Durante la experimentación se observará el desempeño que tiene el conjunto motor bomba funcionando como generador y turbina. El motor funcionará como generador de inducción bajo dos esquemas, uno de estos es arrancando como motor conectado a la red eléctrica para que posteriormente y auxiliado por la bomba en operación inversa, aumente su velocidad y se convertirá en generador entregando potencia a la red eléctrica.

El segundo esquema es el de mover la flecha del motor de inducción utilizando únicamente la potencia mecánica que entrega la bomba en sentido inverso y mediante el uso de un banco de capacitores, lograr que el motor se convierta en generador.

Este trabajo deja abierta la posibilidad, para que posteriormente se pueda continuar con la investigación y se deba ampliar para cubrir el/los intervalos de interés de la bomba funcionando como turbina (PAT), quedando por construir una instalación adecuada para llevar a cabo la experimentación y de ser así obtener las curvas adimensionales en los cuatro cuadrantes, el punto de mejor eficiencia y comprobar el rendimiento de la PAT con respecto a la bomba centrífuga.

El experimento se sugiere que se lleve a cabo en dos partes: la primera será en un Laboratorio, por contar con todo lo necesario para poder instalar el sistema (tal como se muestra en la figura 1), y la segunda parte hacerlo cerca de un río y llevar la energía producida hacia a alguna casa habitación; y además obtener el rendimiento de los sistemas de bombeo funcionando como turbinas.

El propósito de esta experimentación fue el de obtener el funcionamiento de una bomba centrífuga la cual a su vez sería movida por un flujo hidráulico en sentido inverso, es decir un flujo aplicado en la "descarga" de la bomba y desfogado a través de la "succión". De esta forma el fluido entregará su potencia al impulsor de la bomba y este a su vez transmitirá potencia mecánica a la flecha del generador de inducción al que se encuentra acoplada. Es decir la bomba estará operando como una turbina hidráulica.

Cuando se emplean bombas como turbinas no se realizan cambios o modificaciones en el diseño; pero una vez hecha la selección se deberá realizar una verificación del diseño de la máquina de forma adecuada, dado que durante la operación de la bomba como turbina, la carga y la potencia son generalmente mas altas que las correspondientes a su operación como bomba.

- Bomba: Cuando hay transferencia neta de potencia mecánica del eje a potencia hidráulica del fluido.
- Turbina: Cuando hay transferencia neta de potencia hidráulica del fluido a potencia mecánica del eje.
- Disipación de energía: Cuando el fluido entrega potencia hidráulica y el eje entrega potencia mecánica que se disipa en el fluido en forma de calor.

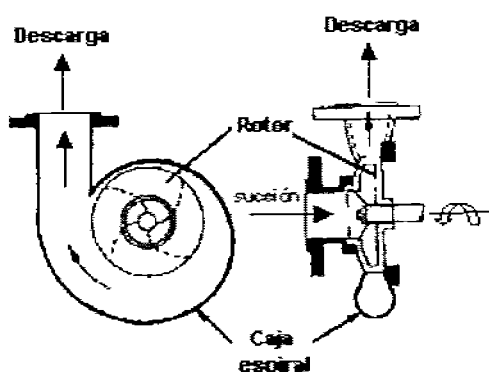


Figura 2. Bomba centrífuga funcionando como bomba.

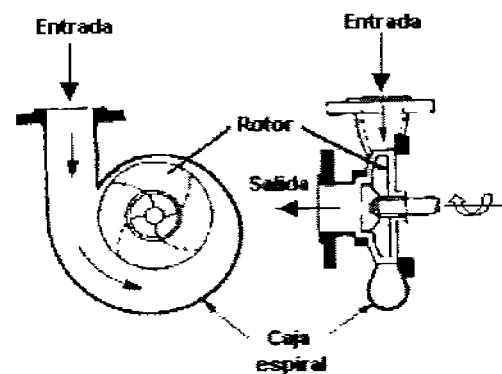


Figura 3. Bomba centrífuga funcionando como turbina.

## Modelación de bombas como turbinas

Para modelar las bombas como turbinas, se hace una caracterización general de las bombas centrífugas, esto permiten la transformación de potencia mecánica-usualmente proporcionada por un motor eléctrico en potencia hidráulica. Ello implica el paso del fluido de un recinto con menor presión (succión) a otro con mayor presión (descarga).

La caracterización es una designación que se refiere a la geometría de la trayectoria de las partículas del fluido dentro de la máquina en relación con el eje de la misma, la caracterización más general posible de una familia de máquinas geoméricamente semejantes de cualquiera de estos tipos se realiza mediante cuatro variables, que son: densidad del fluido, diámetro característico, velocidad de giro del rodete y gasto volumétrico.

1. Identificar los datos de carga, gasto, eficiencia y velocidad angular de la máquina para el punto de mejor rendimiento de la máquina.
2. Calcular los parámetros adimensionales de carga, gasto, velocidad y par o torque.

$$h = \frac{H}{H_0}; q = \frac{Q}{Q_0}; \alpha = \frac{N}{N_0}; \beta = \frac{M}{M_0}$$

3. Con las "ecuaciones características de la maquina", obtener de forma adimensional los parámetros  $W_H$  y  $W_M$ .

$$\text{Carga} \quad W_H = \frac{h}{q^2 + \alpha^2}$$

$$\text{Par} \quad W_M = \frac{\beta}{q^2 + \alpha^2}$$

4. Por último, calcular el ángulo en función de la velocidad y el par momento.

$$\text{Ángulo} \quad \theta = \text{ang} \tan \left( \frac{\alpha}{q} \right)$$

En la tabla 1 se muestran los datos que calculados por Knapp, Donsky y Guarga, para obtener las curvas adimensionales mostradas en las figuras 4 y 5, además en estas se incluyeron los datos calculados para una bomba del Sistema Cutzamala (referencia 17 y 20).



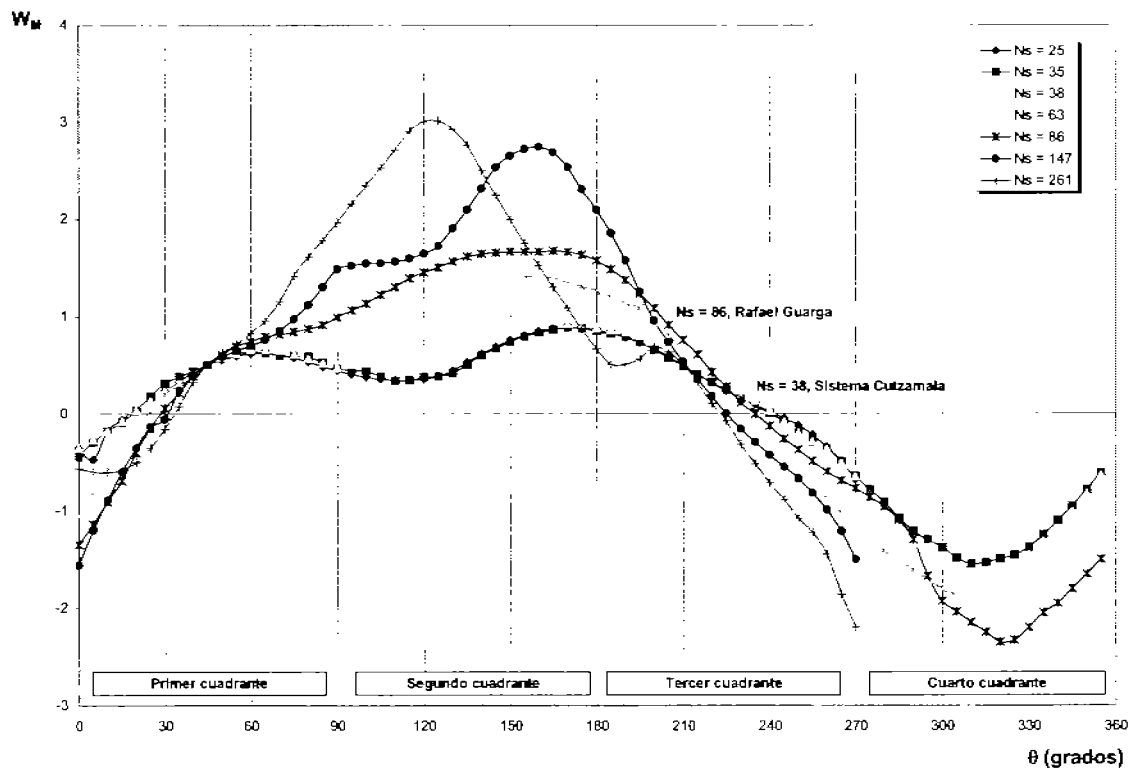


Figura 4. Curvas adimensionales obtenidas en los cuatro cuadrantes, ángulo – momento.

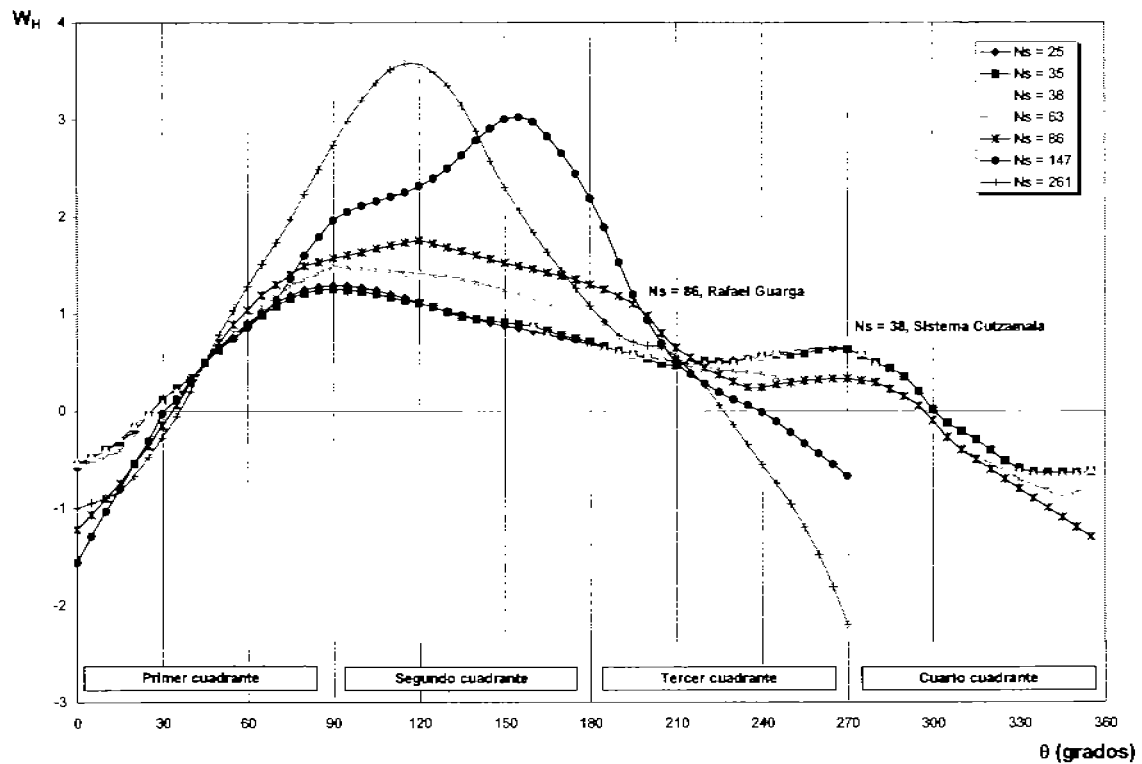


Figura 5. Curvas adimensionales obtenidas en los cuatro cuadrantes, ángulo – carga.

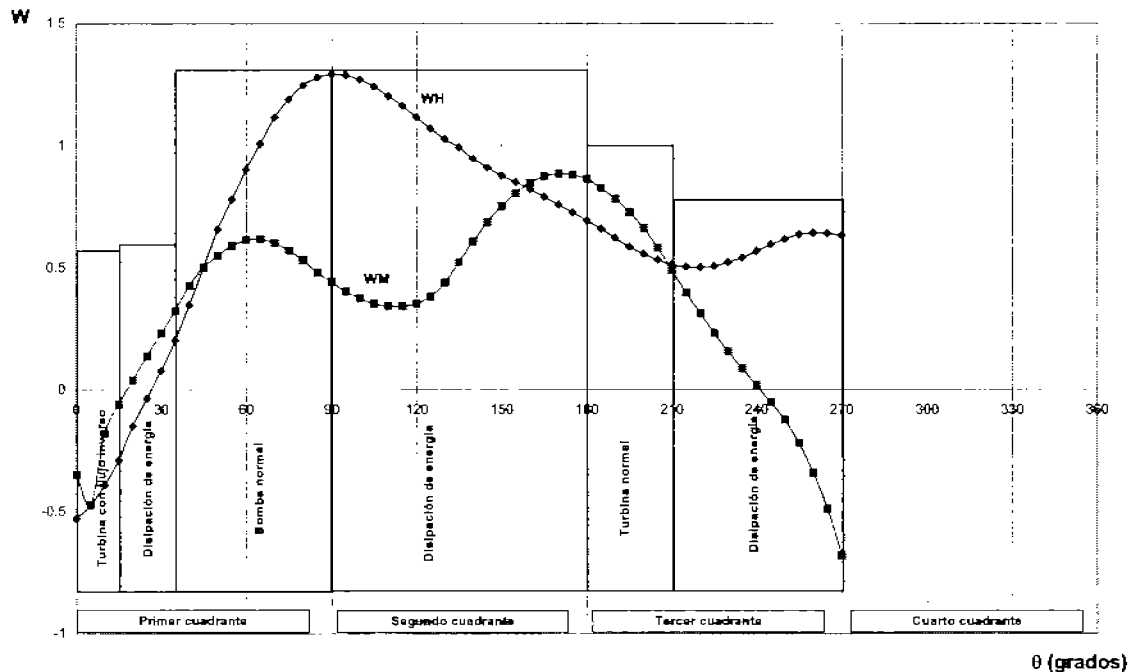


Figura 6. Representación gráfica de las curvas adimensionales utilizando los parámetros  $W_H$  y  $W_M$  de una bomba funcionando como turbina, para  $N = 25$  (datos obtenidos de la tabla 1).

En esta tesis, para realizar el experimento se emplearon dos bombas con diferentes características de operación. Las bombas de flujo radial y flujo mixto, para ellas se obtuvieron las curvas adimensionales en el primer cuadrante (ver figuras 7 y 8); dado que la instalación empleada no contó con un sistema adecuado para que las bombas trabajaran como turbinas y por lo tanto no se pudieron obtener las curvas adimensionales en los cuatro cuadrantes y el rendimiento de las máquinas.

## Objetivo

El objetivo de este trabajo fue analizar la posibilidad de utilizar las bombas funcionando como turbinas para generar energía eléctrica; construir las curvas adimensionales en los cuatro cuadrantes o curvas Knapp, y predecir el rendimiento que tienen las bombas funcionando como turbinas (PAT), a partir de carga, gasto y eficiencia, en el punto de mejor de funcionamiento de la máquina.

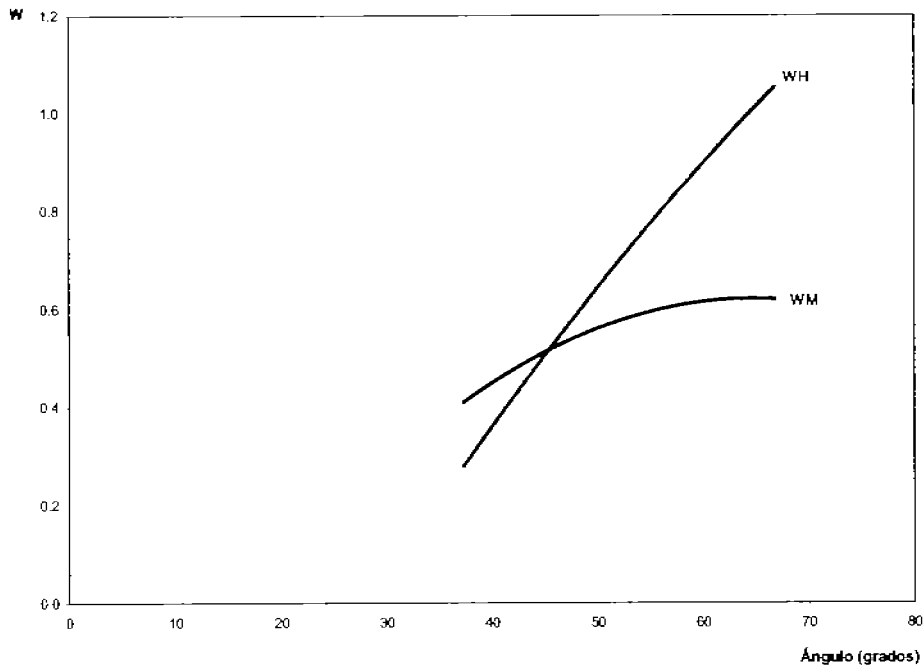


Figura 7. Curvas adimensionales obtenidas en el primer cuadrante, para la bomba de flujo radial.

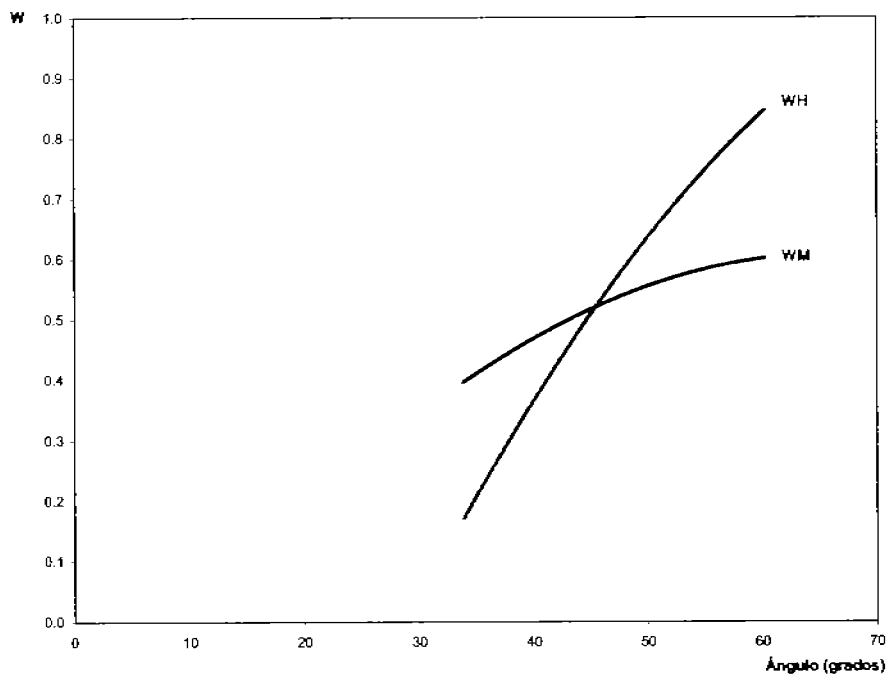


Figura 8. Curvas adimensionales obtenidas en el primer cuadrante, para la bomba de flujo mixto.

---

## **II. INTRODUCCIÓN**

---



### Pequeñas centrales hidráulicas (PAT).

Una central hidroeléctrica reversible, es una central hidroeléctrica que además de poder transformar la energía potencial del agua en electricidad, tiene la capacidad de hacerlo a la inversa, es decir, aumentar la energía potencial del agua (por ejemplo subiéndola a un embalse) consumiendo para ello energía eléctrica. De esta manera puede utilizarse como un método de almacenamiento de energía (una especie de batería gigante). Están concebidas para satisfacer la demanda energética en horas pico y almacenar energía en horas que disminuye la demanda.

Lo habitual es que estas centrales turbinen o bombeen el agua entre dos embalses a distinta altura, existe un caso particular llamado centrales de bombeo puro donde el embalse superior se sustituye por un gran depósito cuya única aportación de agua es la que se bombea del embalse inferior.

En la figura 1 se muestran los componentes principales de una pequeña central hidroeléctrica que aprovecha la corriente del río. Este tipo de estructura no requiere de almacenamientos de agua, pero desvía la corriente del río para canalizarla a lo largo de un valle antes de llegar el agua a la tubería de succión y así llegar a la casa de máquinas donde se encuentra la bomba o turbina (PAT). La PAT mueve un generador que suministra la electricidad a una línea eléctrica; la línea de transmisión se puede llevar a una población local para proporcionar la energía necesaria para uso doméstico, y algunos otros usos.

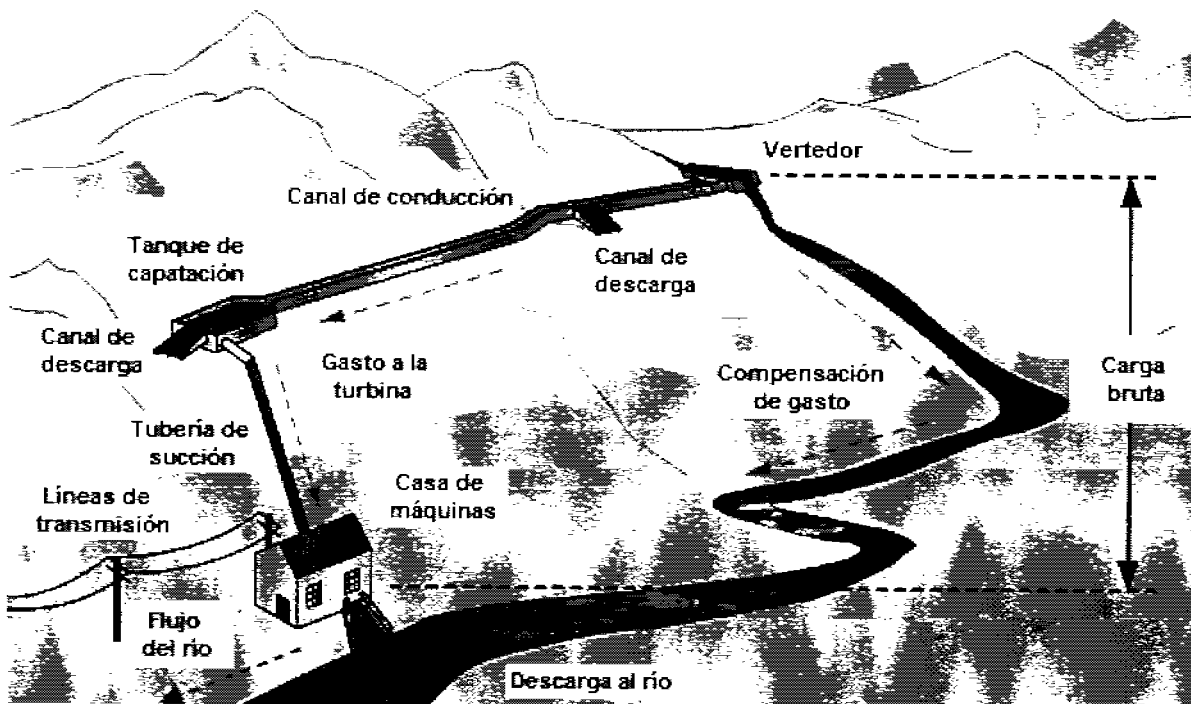


Figura 1. Instalación típica de una pequeña central hidroeléctrica.

La principal diferencia entre una PAT y una turbina convencional radica en que las PAT carecen de un dispositivo de control hidráulico (Predistribuidor y Distribuidor). Esta carencia ayuda a disminuir el costo de las PAT, y significa que las mismas necesitan condiciones de operación constantes.

Estas condiciones pueden ser provistas considerando que, para el caso de variaciones de carga, estas puedan funcionar por medio de un control electrónico de carga; las variaciones estacionales de gasto se soluciona operando varias máquinas en paralelo, o bien operando una sola máquina a toda su capacidad con ciclos intermitentemente de corta duración.

La segunda deficiencia que hay que resolver, y tal vez la más importante, es la falta de información respecto al funcionamiento de las (PAT). Los fabricantes de bombas únicamente cuentan con las curvas características del funcionamiento normal de sus equipos e ignoran el funcionamiento de sus bombas como turbinas, las grandes compañías multinacionales, que sí cuentan con esta información, la consideran confidencial. Por lo tanto, en la mayoría de los casos, la mejor opción para el usuario de una PAT es predecir por si mismo, y por medio de métodos confiables, su funcionamiento como turbina.

Ventajas de una bomba con respecto a una turbina:

- a) Los fabricantes de Turbinas son pocos.
- b) El mercado de turbinas es pequeño comparado con el mercado que representan las bombas centrífugas.
- c) Una turbina es más cara que una bomba estándar, siempre comparando dimensiones semejantes.
- d) La disponibilidad de una bomba centrífuga y sus componentes, son más accesible que en el caso de las turbinas; esto es mas evidente cuando se trata de países en desarrollo.
- e) Las bombas centrífugas son de concepción más robustas y simple, no requieren de un técnico y/o mecánico altamente calificado para su mantenimiento; esto hace que la bomba centrífuga utilizada como turbina

Selección de una bomba usada como turbina

Idealmente la selección de una bomba como turbina (PAT) debe ser fácil y sencilla como la selección de una bombas centrífuga estándar, para ello se consideran los diagramas de rendimiento de diferentes fabricantes en función de los requerimientos de la bomba en cuestión y que estarán en función del gasto, carga y eficiencia óptima. Pero desafortunadamente, este no es el caso de las PAT, dado que no se cuenta con información suficiente respecto al rendimiento de las bombas funcionando como turbinas y la poca información que existe resulta insuficiente.

En los últimos años se han publicado diversos métodos de aproximación para predecir el rendimiento del funcionamiento de una bomba centrífuga; las mismas son de carácter empírico y teórico. Con los métodos propuesto no se han obtenido

resultados muy confiables, dado que se han detectados errores para predecir el rendimiento de la bomba centrífuga operando como turbina y que oscilan entre un 20 por ciento o más.

La bomba al funcionar como turbina trabajará fuera de su régimen normal de operación; de ahí que, una vez hecha la selección de la bomba, debe revisarse y/o verificarse el diseño de la máquina.

Por lo general no se realizan cambios o modificaciones en el diseño cuando se va a utilizar una bomba como turbina; pero una vez realizada la selección, se deberá verificar el diseño de manera adecuada, dado que durante la operación de la bomba como turbina, la carga y la potencia son por lo general más grandes que las correspondientes a su operación como bomba.

*El trabajo está dividido en varios capítulos en los que se describe brevemente en que consiste cada uno de ellos:*

En la primera parte se hace una descripción de la aportación de esta tesis y posteriormente la introducción describe algunos conceptos generales de las bombas funcionando como turbinas. A continuación se resalta la parte más importante de cada capítulo.

**Capítulo 1.** Se describe la ecuación de Euler; que es la ecuación fundamental para el estudio de las turbomáquinas hidráulicas, que expresa la energía que se intercambia en el rodete de estas máquinas y se hace la deducción de la ecuación de Euler.

**Capítulo 2.** En esta parte se da la definición de turbomáquina, bomba y turbina; También se da el significado que tiene las curvas características, cual es su función y para que se utilizan dichas curvas, además de obtener el rendimiento de la máquina y la potencia de la misma.

**Capítulo 3.** Se describe el rendimiento de las bombas centrífugas trabajando como turbinas y el funcionamiento inverso de las mismas. Posteriormente se presenta una descripción para obtener un ajuste de las curvas características y de rendimiento utilizando las leyes de similitud; a partir de estas, se obtiene una ecuación general para la construcción de dichas curvas en sistemas de bombeo. Además se representa el funcionamiento de las bombas operando como turbinas, y los criterios para obtener las curvas adimensionales o curvas Knapp.

**Capítulo 4.** En esta sección se hace una breve descripción del lugar donde se encuentran las bombas y el procedimiento para realizar este experimento. Posteriormente se describe paso a paso como se obtuvieron las curvas características en ambas bombas, las cuales trabajaron con rango de operación en la bomba de flujo radial de 1425 a 1800 rpm y la bomba de flujo mixto con 1800 a 2100 rpm, así como la obtención de los parámetros necesarios para obtener las curvas Knapp o curvas adimensionales mediante un procedimiento analítico descrito en los

capítulos 3 y 4 de esta tesis. Y finalmente en la última parte se dan las conclusiones de este trabajo.

---

# **CAPÍTULO 1**

## **ANTECEDENTES**

---

## 1.1. Ecuación fundamental de las turbomáquinas o ecuación de Euler

### 1.1.1. Primera forma de la ecuación de Euler

La ecuación de Euler es la ecuación fundamental para el estudio de las turbomáquinas hidráulicas, misma que expresa la energía intercambiada en el rodete de estas máquinas. La deducción de la ecuación de Euler se basa en la figura 1.1, en la cual se ilustran los dos planos de representación de una turbomáquina ( bomba ), los cuales son el plano o corte meridional y el plano o corte transversal.

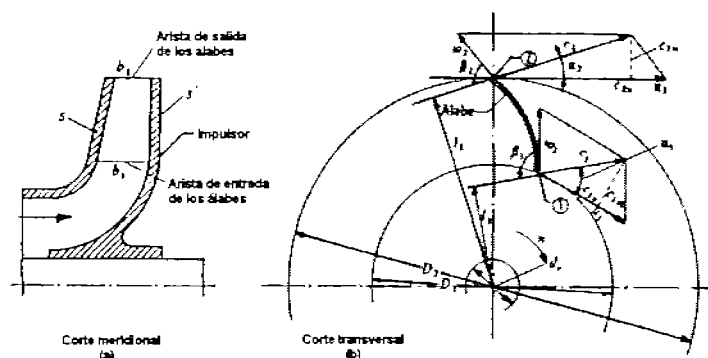


Figura 1.1. Rodete de una bomba centrífuga, a) corte meridional y b) corte transversal.

En la figura 1.1 a se presenta el corte por un plano que contiene el eje de la máquina, que se llama corte meridional, porque en él se representan las superficies de revolución de la máquina, como son las superficies anterior y posterior del rodete ( s y s' ). También se observan las aristas de entrada y salida de los álabes, los cuales, en el caso de la turbina, absorben energía del fluido (referencia 14). Estas aristas de entrada y salida, en el caso de las bombas, son paralelas al eje de la máquina.

En la figura 1.1 b se ilustra el corte transversal por un plano perpendicular al eje. En la figura se observa el álabe del rodete en su verdadera forma, el cual es una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje de la máquina.

### 1.1.2. Deducción de la ecuación de Euler

Esta deducción se hará con relación a la figura anterior, siendo aplicable el razonamiento correspondiente para la totalidad de las turbomáquinas. Suponiendo que la bomba funciona en régimen permanente y que al girar crea una depresión en el rodete penetrando el fluido en el interior de la bomba. Sea  $c_1$  la velocidad absoluta de la partícula del fluido a la entrada de un alabé. El rodete accionado por el motor de una bomba gira a una velocidad  $n$ , en r.p.m. En el punto 1 el rodete tiene una velocidad

$$\text{periférica } u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60}$$

Con relación al alabé el fluido se mueve con una velocidad  $w_1$ , llamada velocidad relativa a la entrada. Las tres velocidades  $c_1$ ,  $u_1$  y  $w_1$  están relacionadas según la mecánica del movimiento relativo, por la ecuación vectorial:

$$w_1 = v_1 - u_1 \quad (1.1)$$

Suponemos que el alabé ( o su tangente ) tiene la dirección del vector  $\bar{w}_1$ , con lo que la partícula entra sin choque en el álabe. La partícula guiada por el álabe sale del rodete con una velocidad relativa a la salida  $\bar{w}_2$ , que será tangente al álabe en el punto 2, en el cual el álabe tiene una velocidad periférica  $\bar{u}_2$ . La misma composición de velocidades de la ecuación 1.1 nos proporciona la velocidad absoluta a la salida,  $v_2$

$$v_2 = \bar{w}_2 + \bar{u}_2 \quad (1.2)$$

La partícula de fluido ha sufrido, en su paso por el rodete un cambio de velocidad de  $v_1$  a  $v_2$ . a partir del teorema de la cantidad de movimiento se deduce el teorema del momento cinético o del momento de la cantidad de movimiento. Si se aplica la ecuación general de la cantidad de movimiento a la vena líquida al que pertenece la partícula de fluido considerada, se tiene:

$$d \bar{F} = d Q \rho (v_2 - v_1) \quad (1.3)$$

Tomando momentos en la ecuación anterior con respecto al eje de la máquina, se tiene que:

$$d M = d Q \rho (l_2 v_2 - l_1 v_1) \quad (1.4)$$

que es el teorema del momento cinético.

donde:

- DM momento resultante con relación al eje de la máquina de todas las fuerzas que el rodete ha ejercido sobre las partículas que integran la vena líquida considerado para hacerle variar su momento cinético,
- dQ gasto de la vena;
- $l_2, l_1$  brazos del momento de los vectores  $v_2$  y  $v_1$  respectivamente.

Si ahora se supone que todas las partículas de fluido que entran en el rodete a un diámetro  $D_1$  con la misma velocidad  $v_1$ , y salen a un diámetro  $D_2$  con la misma velocidad  $v_2$ . Esto equivale a suponer que todos los filamentos de corriente sufren la misma desviación, lo cual a su vez implica que el número de álabe es infinito para que el rodete guíe al fluido perfectamente. Aplicando la hipótesis anterior, conocida como teoría del número infinito de alabe, al hacer la integral de la ecuación anterior el paréntesis del segundo miembro será constante, obteniéndose:

$$M = Q \rho (l_2 v_2 - l_1 v_1)$$

donde

M momento total comunicado al fluido o momento hidráulico;

Q gasto total de la bomba;

Por otra parte, de la figura 1.1, se deduce que  $l_1 = r_1 \cos \alpha_1$ ,  $l_2 = r_2 \cos \alpha_2$

Entonces

$$M = Q \rho (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \quad (1.5)$$

Este momento multiplicado por  $\omega$  será igual a la potencia que el rodete comunica al fluido. Por lo que

$$P_u = M \omega = Q \rho (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1), \text{ en } W \quad (1.6)$$

donde la velocidad angular del rodete es  $\omega = \frac{2 \pi n}{60}$  en rad /s.

Por otra parte, si llamamos  $Y_u$  a la energía específica intercambiada entre el rodete y el fluido, en este caso la energía específica que el rodete de la bomba comunica al fluido, y  $G$  al gasto másico que atraviesa el rodete, se tendrá en el Sistema Internacional de Unidades:

$$P_u (W) = G \left( \frac{kg}{s} \right) Y_u \left( \frac{J}{kg} \right) = Q \left( \frac{m^3}{s} \right) \rho \left( \frac{kg}{m^3} \right) g \left( \frac{m}{s^2} \right) H_u (m) \quad (1.7)$$

donde

$H_u$  es la carga equivalente a la energía intercambiada en el fluido:

$$Y_u \left( \frac{J}{kg} \right) = Y_u \left( \frac{m^2}{s^2} \right) = H_u (m) g \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

Igualando las dos expresiones de la potencia de las ecuaciones 1.6 y 1.7 se tiene:

$$Q \rho Y_u = Q \rho \omega (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \quad (1.8)$$

Pero  $r_1 \omega = u_1$                        $r_2 \omega = u_2$   
 $v_1 \cos \alpha_1 = v_{1u}$                        $v_2 \cos \alpha_2 = v_{2u}$

donde

$V_{1u}$ ,  $V_{2u}$  son las proyecciones de  $v_1$  y  $v_2$  sobre  $u_1$  y  $u_2$ , o componentes periféricas de las velocidades absolutas a la entrada y a la salida de los alabes.



Sustituyendo estos valores en la ecuación 1.8, y simplificando, se obtiene la ecuación de Euler:

$$Y_u = u_2 v_{2u} - u_1 v_{1u} \quad (1.9)$$

Ecuación de Euler: bombas, ventiladores y turbocompresores.

Las bombas, ventiladores y compresores son máquinas generadoras: el rodete imparte energía al fluido. La ecuación 1.5 expresa el momento comunicado al fluido y la ecuación 1.6 la potencia comunicada al fluido, y por lo tanto el valor de  $Y_u$  en la ecuación 1.9 es la energía específica comunicada al fluido, que se expresa en J / kg o equivalente en  $m^2 / s^2$  en el Sistema Internacional de Unidades.

Sin embargo en el rodete existen dos pares iguales y en sentido contrario: el par comunicado al fluido y el par de reacción que el fluido ejerce sobre el rodete. Las turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas son máquinas motoras: el fluido imparte energía al rodete. Por eso al tratar de deducir la ecuación de Euler para máquinas motoras se procedería análogamente; pero escribiendo el momento que el fluido ejerce sobre el rodete, con lo que el segundo miembro de la ecuación 1.5 tendría los signos cambiados y lo mismo los segundos miembros de las ecuaciones 1.6 y 1.9.

$Y_u$  ya no será la energía que da la máquina al fluido, sino la que absorbe la máquina.

$$Y_u = u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u} \quad (1.9a)$$

(Ecuación de Euler: turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas.)

En ambos casos  $Y_u$  será la energía específica intercambiada entre el rodete y el fluido. Por tanto, para todas las turbomáquinas hidráulicas y térmicas, tanto motoras como generadoras, se tendrá:

$$Y_u = \pm (u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u}) \quad (1.10)$$

Primera forma de la Ecuación de Euler (Expresión energética): bombas, ventiladores y turbocompresores, turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas: signo + máquinas motoras y signo - máquinas generadoras; unidades  $m^2 / s^2$ , en el Sistema Internacional de Unidades.

En las turbinas hidráulicas se prefiere emplear la ecuación de Euler en forma de carga debido principalmente a que es una variable de gran significado físico: carga bruta de un salto de agua, carga neta de una turbina hidráulica, carga de elevación de una bomba, etc.

De la variable  $Y$  se pasa a la variable  $H$  por la ecuación:

$$Y \left( \frac{m^2}{s^2} \right) = g \left( \frac{m}{s^2} \right) H (m) \quad (1.11)$$

Por tanto, dividiendo los términos de la ecuación 1.10 por  $g$  se tiene:

$$\frac{u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u}}{g} \quad (1.12)$$

Primera forma de la Ecuación de Euler (Expresión en carga)

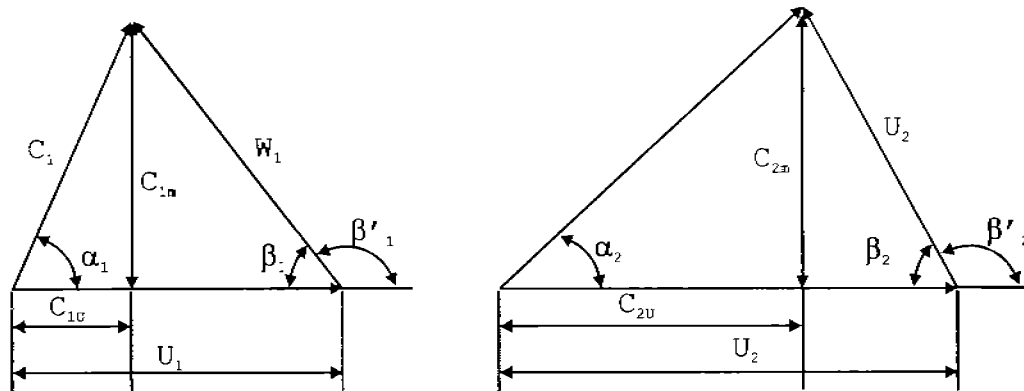
bombas, ventiladores y turbocompresores, turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas: signo + máquinas motoras y signo - máquinas generadoras; unidades m, en el Sistema Internacional de Unidades.

### 1.1.3. Notas a la ecuación de Euler

1. La ecuación de Euler es la ecuación fundamental de las turbomáquinas.
2. La carga  $H_u$  de la ecuación 1.12 en las turbomáquinas hidráulicas se conoce también como carga hidráulica.
3. En la figura 1.1, empleada para deducir la ecuación de Euler, tanto el vector  $v_1$  como el  $v_2$  se encuentran en el plano del dibujo transversal. En general, en una turbomáquina la velocidad en cada punto puede tener tres componentes, según los ejes  $r$ ,  $u$  y  $a$ , que tienen la dirección del radio en dicho punto, la tangente y el eje de la máquina.
4.  $Y_u$  representan respectivamente las variables ( $H_u$ ):  
 En las bombas, ventiladores y compresores: la energía (carga) teórica comunicada al fluido.  
 En turbinas hidráulicas, de vapor y de gas: la energía (carga) útil aprovechada por el rodete.

### 1.2. Triángulos de velocidades: notación universal

Las ecuaciones vectoriales 1.1 y 1.2,  $v_1 = u_1 + w_1$ ,  $v_2 = u_2 + w_2$  se representan mediante dos triángulos, que se llaman triángulo de entrada y triángulo de salida, respectivamente:



**Figura 1.2. Triángulo de velocidad de entrada y salida de los alabes de un rodete de una bomba o ventilador con la notación internacional para ángulos, velocidades y componentes de velocidades.**

En estos triángulos se utiliza la figura 1.2, la notación que se conoce como internacional por ser la más utilizada en casi todos los países. En dichos triángulos:

- $u_1$  velocidad absoluta del álabe a la entrada o velocidad periférica a la entrada;
- $v_1$  velocidad absoluta del fluido a la entrada;
- $w_1$  velocidad relativa a la entrada (del fluido con respecto al álabe);
- $v_{1m}$  componente meridional de la velocidad absoluta del fluido a la entrada;
- $\alpha_1$  ángulo que forman las dos velocidades  $c_1$  y  $u_1$ ;
- $\beta_1$  ángulo que forma  $w_1$  con  $(-u_1)$ . Nótese que el ángulo que forma  $w_1$  con  $+u_1$  es el suplementario de  $\beta_1$  y lo mismo en el triángulo de salida, sustituyendo el subíndice 1 por el 2 (referencia 14).

#### 1.2.1. Segunda forma de la ecuación de Euler.

Del triángulo de entrada se deduce trigonométricamente que

$$w_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \alpha_1 = u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_{1u} \tag{1.13}$$

$$u_1 v_{1u} = \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2 - w_1^2) \tag{1.13a}$$

También del triángulo de salida se deduce que

$$u_2 v_{2u} = \frac{1}{2} (u_1^2 + v_2^2 - w_2^2) \quad (1.14)$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler 1.10 los valores de  $u_1 v_{1u}$  y  $u_2 v_{2u}$  de las ecuaciones 1.13a y 1.14 y ordenando los términos se obtiene:

$$Y_u = \pm \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) \quad (1.15)$$

Segunda forma de la Ecuación de Euler (Expresión energética)

*Signo +* : máquinas motoras; turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas.

*Signo -* : máquinas generadoras; bombas, ventiladores y compresores; unidades  $m^2/s^2$ , en el Sistema Internacional de Unidades.

Si ahora se divide por  $g$  ambos miembros de la ecuación 1.15 se tiene:

$$H_u = \pm \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right) \quad (1.15a)$$

Segunda forma de la Ecuación de Euler (Expresión en carga)

*Signo +* : máquinas motoras; turbinas hidráulicas, turbinas de vapor y turbinas de gas.

*Signo -* : máquinas generadoras; bombas, ventiladores y compresores; unidades  $m$ , en el Sistema Internacional de Unidades.

Si se escribe la ecuación de Bernoulli entre la entrada y la salida del rodete, puntos 1 y 2, sin considerar las pérdidas en el mismo, se tiene que:

$$H_u = \pm \left( \frac{p_1 - p_2}{2g} + z_1 - z_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right) \quad (1.16)$$

Según la ecuación de Euler, se tiene que:

$$H_u = \pm \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right)$$

Igualando las dos expresiones anteriores de  $H_u$  se tiene:

$$H_u = \pm \left( \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right)$$

El término  $\pm \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g}$  es evidentemente la carga dinámica que da el fluido al rodete (turbinas hidráulicas) o el rodete al fluido (bombas y ventiladores). Por lo tanto, los dos primeros términos del segundo miembro de 1.16 serán la carga de presión del rodete, es decir:

$$H_p = \pm \left( \frac{p_1^2 - p_2^2}{\rho g} \right) = \pm \left( \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \right) \quad (1.17)$$

Carga de presión del rodete; signo +: turbinas, signo -: bombas

$$H_d = \pm \left( \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right) \quad (1.18)$$

Carga dinámica del rodete; signo +: turbinas, signo -: bombas

---

# **CAPÍTULO 2**

## **BOMBAS Y TURBINAS**

---

## 2.1. Bombas centrífugas.

La palabra "máquina" deriva de la griega MACHANE y su asociada latina MACHINA. Ambas quieren decir, "cualquier proyecto ingenioso o invención". El diccionario Webster's New International dice que una máquina es "cualquier artificio compuesto de dos o más partes, resistentes y relacionadas que, por cierto movimiento predeterminado, pueda servir para transmitir y modificar la fuerza y el movimiento interno con la finalidad de producir un efecto dado o hacer una clase de trabajo deseado". Es una definición excelente, pero especializada, con una predisposición hacia la ingeniería mecánica. Puede, sin duda alguna, ensancharse para que cubra todos los ingenios electrónicos y mecánicos que amplían la fuerza humana (referencia 18).

Otras definiciones:

- Una máquina es un dispositivo que produce movimiento. En general se busca que la máquina haga girar un eje o flecha, de manera que ésta accione algún dispositivo cuya utilización nos interese.
- Una máquina es un transformador de energía, ya que absorbe energía de un tipo y la restituye con otra de diferente clase.
- Un equipo de bombeo es un transformador de energía, recibe energía mecánica, que puede proceder de un motor eléctrico, de combustión interna, y la convierte en energía que un fluido adquiere en forma de presión, de posición o de velocidad.
- Máquina hidráulica es aquella en que el fluido que intercambia su energía no varía sensiblemente de densidad y de temperatura en su paso a través de la máquina, por lo cual en el diseño y estudio de la misma se hace la hipótesis de que  $\rho = \text{cte}$ .

Las bombas centrífugas se clasifican de forma general en bombas de flujo radial, mixto y axial.

### 2.1.1. Características de las bombas.

Una bomba centrífuga consta de dos elementos principales: un elemento rotativo denominado rodete, el cual fuerza al líquido a seguir un movimiento rotativo, y la carcasa o cuerpo de la bomba, el cual tiene por objeto dirigir al líquido hacia al rodete y hacia la salida.

Al girar el rodete, el líquido sale del mismo con presiones y velocidades superiores a las que tenía a su entrada. La velocidad de salida del fluido se convierte parcialmente en presión antes de abandonar la bomba por la boquilla de descarga.

La conversión de la velocidad en presión tiene lugar dentro de la carcasa, la cual puede ser de dos tipos, de voluta o de difusión. En una bomba de flujo radial el líquido entra axialmente en el rodete a través de la boquilla de aspiración y es descargado radialmente hacia la carcasa.

En las bombas de flujo mixto, el líquido entra axialmente en el rodete y es descargado en una dirección intermedia entre la radial y la axial. En una bomba de flujo axial, el líquido entra y sale del rodete axialmente. A menudo, las bombas centrífugas se clasifican de acuerdo con un parámetro conocido como *velocidad específica*, el cual varía según la forma del rodete. En la figura 2.3 se muestran los valores típicos de la velocidad específica correspondientes a diversos tipos de bombas centrífugas.

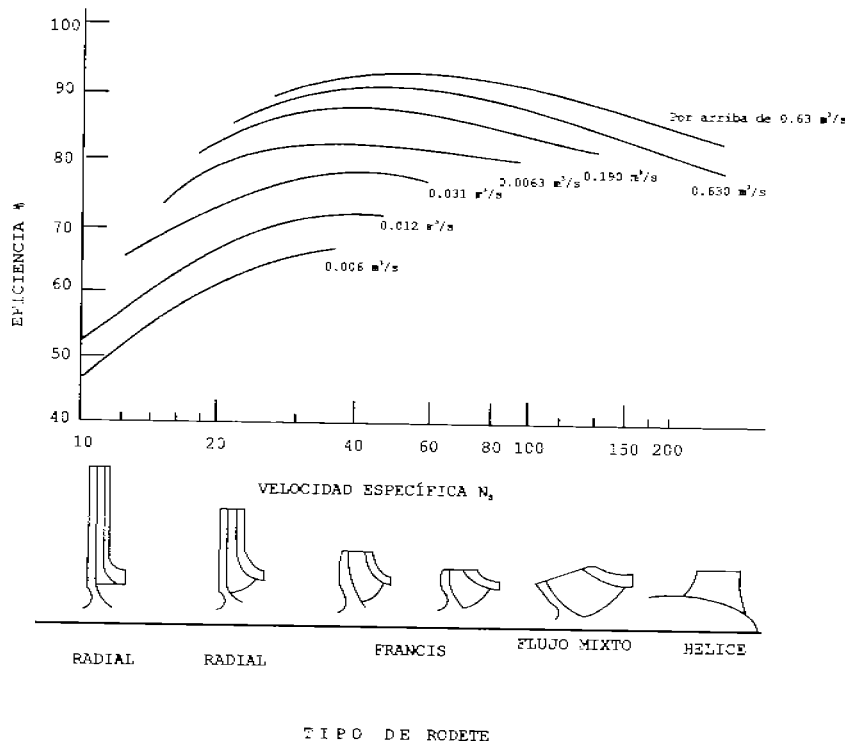


Figura 2.3. Eficiencia de la bomba con respecto a la velocidad específica y tamaño de la bomba, referencia 18.

### 2.1.1.1. Bombas de flujo radial.

Los rotores utilizados en las bombas de flujo radial se clasifican en rotores de succión simple o doble. También pueden clasificarse de acuerdo a la forma y tamaño de sus canales, los cuales pueden ser rectos o de doble curvatura, tal como el rodete tipo Francis. Las bombas de flujo radial, incluyendo a las de rodete tipo Francis, tienen velocidades específicas variables entre 10 y 80, figura 2.3.

### 2.1.1.2. Bombas de flujo mixto.

Los rodetes empleados en las bombas de flujo mixto pueden instalarse en carcasas tipo voluta, en cuyo caso se denominan *bombas de voluta de flujo mixto* o en carcasas de difusión similares a las de las bombas de hélice, designándose *bombas de hélice de flujo mixto*. Los rodetes tipo Francis y los de flujo mixto pueden emplearse para carcasas del mismo diseño, los rodetes tipo Francis se construyen para alturas de bombeo superiores a 30 m.



La velocidad específica de las bombas de flujo mixto varía entre 80 y 200, aproximadamente. A medida que la velocidad específica aumente de 80 a 120 y a 200, las características de la bomba de flujo mixto se aproximan a las de una bomba de flujo axial.

### 2.1.1.3. Bombas de flujo axial.

Las bombas de flujo axial tienen un rotor dotado de varios alabes dispuestos en hélice situado en una carcasa que incluye unos canales guía fijos antes y después de la hélice. Estas bombas tienen velocidades específicas superiores a 200. La acción de la bomba es similar a la de una hélice de barco.

## 2.2. Curvas características de una bomba.

Las curvas características de una bomba son la representación gráfica de las variables hidráulicas, mecánicas y geométricas relacionadas con la selección, diseño y operación de la bomba. La curva más común es la de gastos contra carga ( $Q, H_b$ ).

La carga a la que la bomba puede impulsar los diversos gastos a velocidad de funcionamiento constante se establece en los ensayos de bombeo que realizan los fabricantes. Los fabricantes de las bombas suministran información relativa al comportamiento de equipos en forma de curvas características o curvas de la bomba. En la mayoría de las curvas características se representa gráficamente la carga total  $H_b$  en metros, la eficiencia  $\eta$  en porcentaje y la potencia absorbida  $P$  en kilowatts, en las ordenadas, y el gasto  $Q$  en metros cúbicos por segundo, en las abscisas. La forma general de estas curvas varía con la velocidad específica. La carga total de la bomba es la diferencia entre las energías existentes en los conductos de impulsión (d) y aspiración (s) de la bomba según la ecuación de Bernoulli.

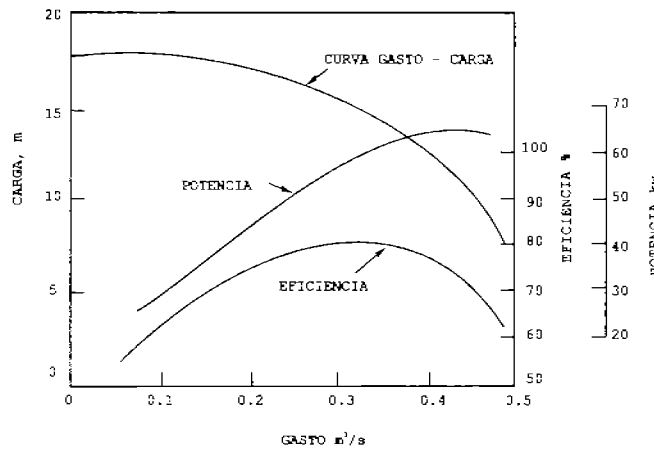
$$H_b = z_d - z_s + \frac{P_d}{\gamma} - \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_d^2}{2g} - \frac{V_s^2}{2g} \quad (2.1)$$

donde:

- $H_b$  carga de bombeo total, en m.
- $P_d$  presión manométrica medida en la descarga, en  $\text{kg/m}^2$ ;
- $P_s$  presión manométrica medida en la succión, en  $\text{kg/m}^2$ ;
- $V_d$  velocidad en el conducto de descarga, en m/s;
- $V_s$  velocidad en el conducto de succión, en m/s;
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $\text{m/s}^2$ ;
- $z_d$  cota del manómetro de descarga, en m;
- $z_s$  cota del manómetro de succión, en m.

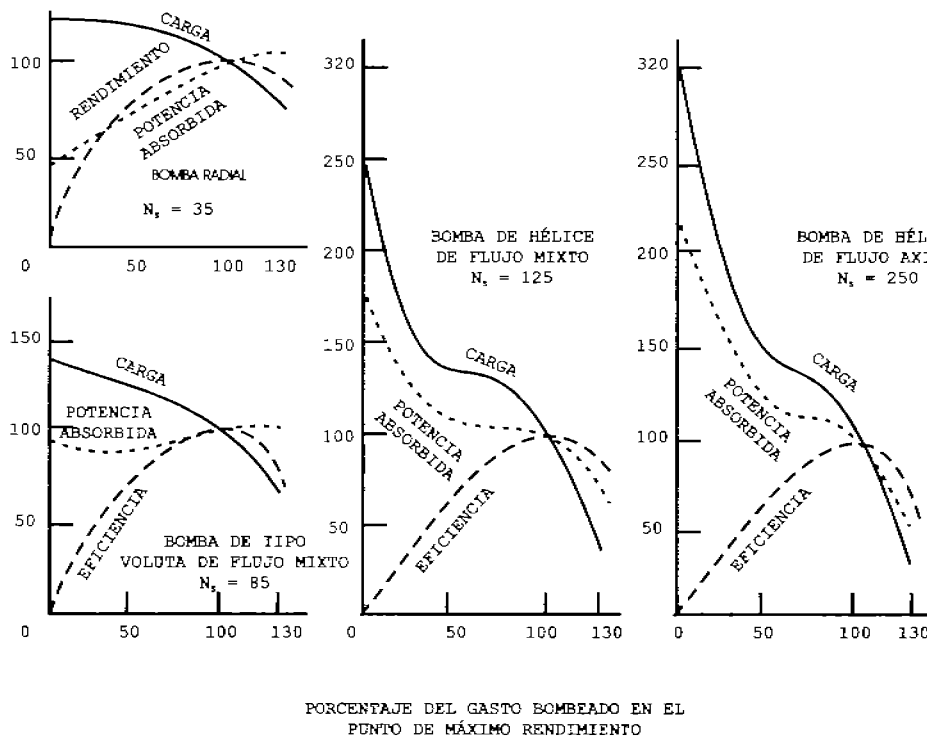
Las pérdidas de carga que se producen dentro de la bomba están incorporadas en el término de la carga de bombeo total de la ecuación 2.1.

Durante ensayo de una bomba se varía el gasto de bombeo actuando sobre una válvula dispuesta en la descarga de la bomba y se mide la altura de bombeo correspondiente. Los resultados del ensayo se representan gráficamente dando lugar a una curva de carga - gasto para la velocidad de giro empleada (figura 2.5.). Al mismo tiempo, se obtienen la eficiencia y la potencia absorbida, y se calcula le eficiencia de la bomba. los valores resultantes se representan sobre el mismo diagrama. Y al conjunto de estas curvas se denominan curvas características de la bomba.



**Figura 2.5. Curvas características de una bomba centrífuga de flujo radial.**

Las curvas características para bombas centrífugas típicas de flujo, radial, de voluta de flujo mixto, de hélice de flujo mixto y de flujo axial se muestran en la figura 2.5.



**Figura 2.6. Curvas Características típicas de bombas centrífugas.**

### 2.2.1. Eficiencia y potencia mecánica.

La eficiencia de una bomba se obtiene con base al gasto que descarga contra la carga. El gasto de la bomba es función del diseño de proyecto. La información sobre el diseño de la bomba viene suministrada por medio de una serie de curvas características.

La eficiencia de la bomba  $\eta_i$  es el cociente entre la potencia producida y la demandada por la bomba y viene dada por:

$$\eta_i = \frac{\gamma Q H_b}{P_i} = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia mecánica}} \quad (2.2)$$

donde:

- $\eta_i$  eficiencia de la bomba, adimensional;
- $P_i$  potencia mecánica, en kg·m/s;
- $\gamma$  peso específico del agua, en kg/m<sup>3</sup>;
- $Q$  gasto, en m<sup>3</sup>/s;
- $H_b$  carga de bombeo total, en m.

Las eficiencias de las bombas suelen variar dentro de un intervalo comprendido entre un 60 y un 85 por ciento. Las pérdidas de energía en el interior de una bomba pueden clasificarse como volumétricas, mecánicas e hidráulicas. Las pérdidas volumétricas tienen lugar por la existencia de pequeñas separaciones que existen entre la carcasa y el rotor por donde pueden producirse fugas. Las pérdidas mecánicas son originadas por los empaques, cojinetes, discos internos y esfuerzos cortantes creados por el líquido. Las pérdidas por fricción y parásitas que se producen en la circulación del agua se incluyen como pérdidas hidráulicas.

#### 2.2.1.1. Potencia mecánica, $P_m$ .

Es la potencia en el eje de la bomba o potencia mecánica que la bomba absorbe. Esta potencia según la mecánica tiene la siguiente expresión:

$$P_m = M \omega = M \frac{2\pi n}{60} \quad (2.3)$$

donde  $n$  es la velocidad de la bomba, en rpm.

#### 2.2.1.2. Potencia interna $P_i$ .

Es la potencia total transmitida al fluido, o sea la potencia de accionamiento, descontando las pérdidas mecánicas:

$$P_i = P_m - \text{pérdidas internas} \quad (2.4)$$

Las pérdidas llamadas internas, que son las pérdidas hidráulicas y las pérdidas volumétricas. En efecto, el rodete entrega al fluido una energía específica equivalente

a una carga  $H_u = H + H_{r-int}$  ecuación 2.4 y esta carga la entrega al gasto bombeado por el rodete, que es  $Q + q_e + q_i$  :

$$P_i = (Q + q_e + q_i) \rho g (H + H_{r-int}) \quad (2.5)$$

### 2.2.1.3. Potencia útil, P.

Es la potencia mecánica descontando todas las pérdidas de la bomba o equivalentemente la potencia interna (hidráulicas y volumétricas).

Entonces:

$$P = P_a - P'_m - P'_v - P'_h$$

$$P = P_i - P'_v - P'_h$$

Por otra parte la potencia hidráulica será la encargada en impulsar el gasto la carga hidráulica.

$$P = Q \rho g H \quad (2.6)$$

### 2.2.1.4. Eficiencia hidráulica, $\eta_h$ .

Toma en cuenta todas y sólo las pérdidas de carga total,  $H_{r-int}$  en la bomba. Como, según la ecuación 2.3.4,  $H = H_u - H_{r-int}$ , el valor de  $\eta_h$  es:

$$\eta_h = \frac{H}{H_u} \quad (2.7)$$

### Eficiencia volumétrica, $\eta_v$ .

Toma en cuenta todas y sólo las pérdidas volumétricas, y su valor es:

$$\eta_v = \frac{Q}{Q + q_e + q_i} \quad (2.8)$$

donde:

Q gasto útil o gasto efectivo impulsado por la bomba; en  $m^3/s$ .  
 $Q + q_e + q_i$  es el gasto teórico o gasto bombeado por el rodete.

### Eficiencia interna de la bomba, $\eta_i$ .

Toma en cuenta todas y sólo las pérdidas internas, o sea las hidráulicas y volumétricas y engloba ambas eficiencias hidráulica y volumétrica

$$\eta_i = \frac{P}{P_i} \quad (2.9)$$

Ahora bien, según la ecuación 2.5.

$$P_i = (Q + q_e + q_i) \rho g H_u = \frac{Q \rho g H}{\eta_v \eta_h}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 2.6 se tendrá:

$$\eta_i = \frac{P}{P_i} = \frac{Q \rho g H \eta_h \eta_v}{Q \rho g H}$$

Y, finalmente:

$$\eta_i = \eta_h \eta_v \quad (2.10)$$

#### 2.2.1.5. Eficiencia mecánica, $\eta_m$ .

Tiene en cuenta todas y sólo las pérdidas mecánicas, y su valor es:

$$\eta_m = \frac{P_i}{P_o} \quad (2.11)$$

#### 2.2.1.6. Eficiencia total, $\eta_{TOT}$ .

Tiene en cuenta todas las pérdidas de la bomba, y su valor es:

$$\eta_{TOT} = \frac{P}{P_a} \quad (2.12)$$

#### 2.2.1.7. Relación entre las eficiencias.

Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 se tendrán:

$$\eta_{tot} = \frac{P}{P_a} = \frac{P}{P_i} \frac{P_i}{P_a} = \eta_i \eta_m = \eta_v \eta_h \eta_m \quad (2.13)$$

Por tanto:

$$\eta_{tot} = \eta_i \eta_m = \eta_h \eta_v \eta_m$$

La eficiencia total de una bomba es el producto de la eficiencia interna por la eficiencia mecánica, o también el producto de las tres eficiencias: hidráulica, volumétrica y mecánica

Es útil expresar la potencia mecánica en función de Q y de H:

$$P_m = \frac{\gamma QH}{\eta_{tot}} = \frac{\gamma QH}{\eta_v \eta_h \eta_m} \quad (2.14)$$

Asimismo la potencia interna en función de las eficiencias hidráulica y volumétrica se expresa, como:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\gamma QH}{\eta_v \eta_h} \\ P_m &= P_i \frac{1}{\eta_m} \\ P_i &= \eta_m P_m \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.3. Velocidad específica.

Las relaciones  $C_Q$ ,  $C_H$  y  $C_P$  se utilizan para predecir el comportamiento de las bombas centrífugas funcionando a velocidades distintas de las que se han utilizado para desarrollar sus curvas características.

En las bombas centrífugas se presentan condiciones de flujo similares en series de bombas geoméricamente similares. Aplicando los principios de análisis dimensional y el procedimiento propuesto por Buckingham, se pueden tener los tres grupos dimensionales independientes siguientes para describir el funcionamiento de las máquinas rotodinámicas, entre las que se incluyen las bombas centrífugas.

$$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3} \quad (2.16)$$

$$C_H = \frac{H}{\omega^2 D^2} \quad (2.17)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho \omega^3 D^5} \quad (2.18)$$

donde:

- $C_Q$  coeficiente de gasto, adimensional.
- Q gasto, en  $m^3/s$ ;
- N velocidad, r.p.m.;
- D diámetro del rodete, en m;
- $C_H$  coeficiente de carga, adimensional.
- H carga, en m;
- $C_P$  coeficiente de potencia, adimensional;
- P potencia absorbida, en  $kg \ m/s$ ;

$\rho$  densidad, en  $\text{kg/m}^3$ .

Los puntos de funcionamiento en los que se producen condiciones de flujo similares se denominan puntos correspondientes, y las ecuaciones 2.6, 2.17 y 2.18 solamente son de aplicación a tales puntos. Sin embargo, cada punto de la curva de carga - gasto de una bomba corresponden a un punto de la curva carga - gasto de una bomba geoméricamente similar que funciona a la misma o diferente velocidad.

La velocidad específica  $n_s$  se define como aquella velocidad en r.p.m., a la cual un impulsor geoméricamente similar al impulsor en cuestión, pero pequeño, desarrollaría una carga unitaria a una capacidad unitaria. La siguiente información acerca de la velocidad específica es importante para el estudio y diseño de bombas centrífugas:

- El parámetro se usa simplemente como una característica tipo, para impulsores geoméricamente similares, pero carece de significado físico para el proyectista.
- La velocidad específica se usa como un número tipo, para diseñar las características de operación, solamente, para el punto de máxima eficiencia.
- Para impulsores similares, la velocidad específica es constante en diferentes velocidades y tamaños.

Cada rodete corresponde a un valor de un parámetro de excepcional interés en las turbomáquinas hidráulicas,  $n_s$  o velocidad específica, donde se demostrará que todas las bombas o turbinas geoméricamente semejantes tienen el mismo  $n_s$ , independientemente del tamaño.

La clasificación más precisa de las bombas rotodinámicas es una clasificación numérica, asignado a toda la familia de bombas geoméricamente semejantes un número, a saber, el número de revoluciones.

Ese número se define como:  $n_s = n P^{1/2} H^{-3/4}$

En las bombas este número oscila entre 35 y 1800 aproximadamente.

La velocidad específica,  $n_s$ , no es adimensional. Las unidades de  $n_s$  que se utilizan en la práctica son muy variadas. En el SI se deberá expresar  $n$  en rps,  $P$  en W y  $H$  en m. sin embargo hasta el día de hoy, en los países que utilizan el sistema métrico las unidades más frecuentemente utilizadas para expresar  $n_s$  son:  $n$  en rpm.,  $P$  en CV y  $H$  en m.

$$P = \gamma Q H \text{ (kg m/s)} \quad (2.19)$$

Expresando  $Q$ ,  $\rho$ ,  $H$  en el SI,  $P$  viene expresado en esta fórmula en CV.

La velocidad específica de una bomba se suele calcular suponiendo que el fluido es agua, con lo cual:

$$n_s = n P^{1/2} H^{-3/4} = n \left( \frac{Q \rho H}{75} \eta_{tot} \right)^{1/2} H^{-3/4} \quad (2.20)$$

finalmente la expresión en función del gasto y la carga es

$$n_s = 3.65 \sqrt{\eta_{tot}} Q^{1/2} H^{-3/4}$$

O bien en una serie de bombas geoméricamente similares que funcionen en condiciones similares, el término del diámetro de las ecuaciones 2.16 y 2.17 puede eliminarse. Si se eleva el primer miembro a la potencia 1/2 y el segundo a la 3/4 y dividiendo el primer miembro entre el segundo se obtiene la siguiente relación que se define como velocidad específica:

$$N_s = \frac{C \frac{1}{Q}^{\frac{1}{2}}}{C \frac{1}{H}^{\frac{3}{4}}} = \frac{\left(\frac{Q}{N D^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{H}{N^2 D^2}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{N Q^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{3}{4}}} \quad (2.21)$$

donde:

$N_s$  velocidad específica;

$N$  velocidad, en r.p.m.;

$Q$  gasto, en  $m^3/s$ ;

$H$  carga, en m.

Para cualquier bomba que funcione a una velocidad dada,  $Q$  y  $H$  se toman en el punto de máxima eficiencia. Cuando se utilice la ecuación 2.21 para bombas que tienen rodete de aspiración doble, hay que utilizar la mitad del gasto a menos que se indique lo contrario.

El valor calculado de la velocidad específica no tiene significado físico, pero es extraordinariamente útil porque permanece constante para todas las bombas similares y no varía con la velocidad para una bomba dada. La velocidad específica para una bomba determinada es independiente de su tamaño y velocidad, es únicamente función de su forma, por lo que a veces, se considera como un factor de forma.

## 2.4. Turbinas hidráulicas.

Los primeros asentamientos humanos siempre buscaban la proximidad de cauces de agua, para poder llevar a cabo distintas actividades que precisan de ella además de facilitarle la vida. Durante siglos el hombre no contó con otro tipo de energía que no fuera su propia energía muscular; en la actualidad está acostumbrado a poder utilizar grandes cantidades de energía, procedente de diversas fuentes, con el simple esfuerzo de apretar un pequeño interruptor, pero para llegar hasta este punto, la técnica ha tenido que recorrer un largo camino de forma gradual y escalonada.

En tiempos del Imperio Romano, el hombre empezó a aprovechar una gran parte de los recursos que el agua le podía proporcionar, ya que la canalizó, la elevó mediante sistemas de bombeo por encima de su nivel natural, explotó cauces subterráneos y la transportó a lugares que carecían de ella por medio de enormes acueductos. En esta



época surge la rueda hidráulica descrita por Vitrubio a principios del siglo I que se conocía como *rota aquaria* y consistía en una rueda donde se fijaban unos cangilones con una serie de radios que le otorgaban rigidez<sup>1</sup>. La rueda hidráulica era conocida por el hombre desde hace unos 3000 años a. C. El pueblo sumerio disponía de molinos movidos por agua; también los griegos y los romanos emplearon estas ruedas. En la figura 1.2 se muestran algunas ruedas hidráulicas de la antigüedad.

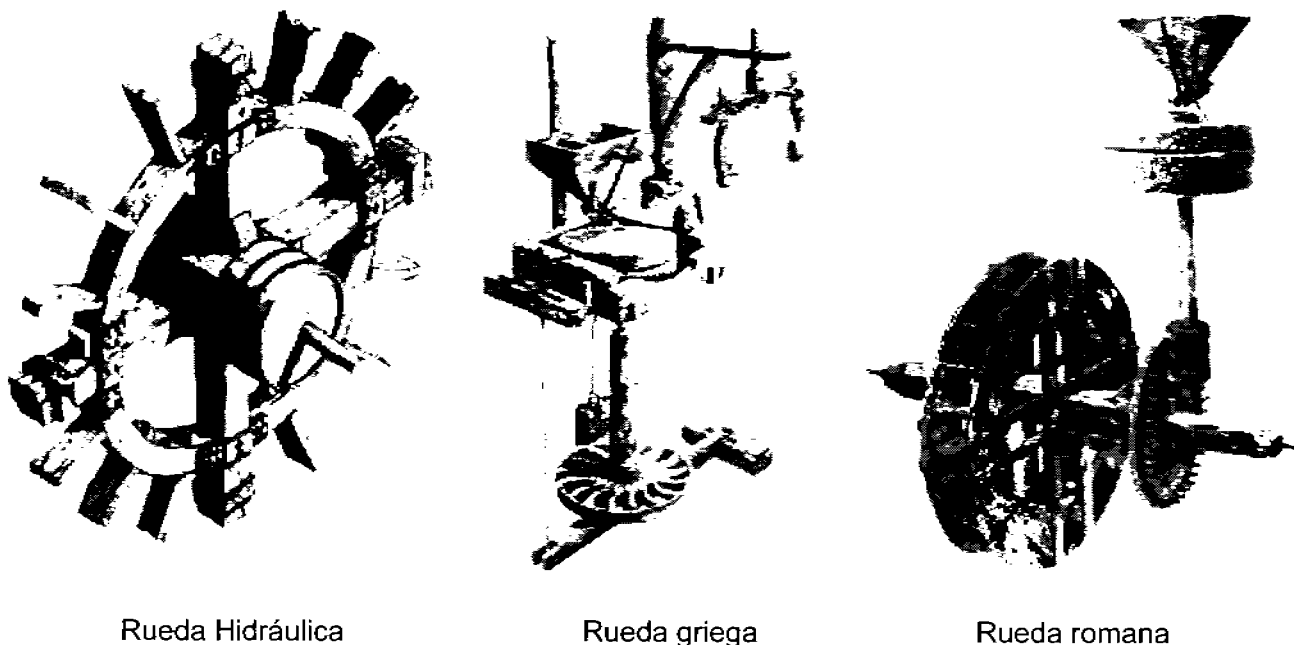


Figura 2.7. Ruedas hidráulicas de la antigüedad.

La rueda constituyó un ingenioso mecanismo que significó la primera liberación del hombre, con respecto al trabajo bruto. Fue en la Edad Media cuando el empleo de este ingenioso dispositivo mecánico se extendió en forma masiva. Para dar cuenta de la importancia que supuso la aplicación de la rueda hidráulica se menciona el siguiente ejemplo: un molino movido por dos personas podía moler unos 5 kg/h, en cambio uno movido por rueda hidráulica, molía unos 180 kg/h.

También en el antiguo Egipto se tienen datos del uso de máquinas hidráulicas. Se sabe que el Nilo era el eje de la vida en Egipto. El río no escurre por todo el territorio, había tierras naturalmente inundadas por la crecida del río y otras alejadas de él que debían ser regadas artificialmente<sup>2</sup>.

El nivel del agua, en la época de estiaje quedaba por debajo de la orilla del cauce, aproximadamente entre 4 y 5 m, lo que hacía necesaria la utilización de elevadores de agua para poder regar las tierras limítrofes. Se conocen varios tipos de maquinarias que realizaban esta función. Una de las más conocidas es el *shaduf* o *sadhoof*. Esta se encuentra representada en pinturas de tumbas de las dinastías XVIII y XIX (1500 - 1100

<sup>2</sup> The History of Technology in the ancient world: THE URBAN REVOLUTION, Irrigation.

a. C.). Consistía en un largo palo de forma cónica casi horizontal, que se apoyaba en un mecanismo oscilante o de balancín. Del extremo largo cuelga un cangilón generalmente de piel y del extremo corto un contrapeso. Un hombre empuja hacia abajo el cangilón introduciéndolo en el agua y una vez lleno el contra peso le ayuda a elevarlo.



**Figura 2.8. Shaduf.** Pintura que representa un *shaduf* manejado por un solo hombre, procede de la tumba de *Ipuy* en *Deir-el-Medina* en la época de *Ramses II*. En la actualidad es frecuente su uso en Egipto y en el mundo árabe en general, para salvar desniveles no muy grandes y regar campos pequeños.

Posteriormente se utilizó una máquina para elevar el agua llamada *sakia*, rueda hidráulica de cubos. Estaba colocada verticalmente y era accionada por un hombre o un animal. Era similar a las actuales norias.

Otro mecanismo que con mucha frecuencia se observa en la actualidad en los campos egipcios, es la llamada *espiral de Arquímedes*. Su invención se debe a Arquímedes (Siracusa 287-212 a. C.).

Las denominadas turbinas hidráulicas tienen como principio de funcionamiento el mismo que el de las ruedas hidráulicas descritas anteriormente, pero la transición de la rueda hidráulica a la turbina hidráulica es sobre todo semántica, es decir en la actualidad se usa la palabra turbina en lugar de rueda.

El primer intento de formular la base teórica para el diseño de ruedas hidráulicas fue en el siglo XVIII a cargo del ingeniero civil británico John Smeaton, que demostró que la rueda de empuje superior era más eficaz. Sin embargo, el ingeniero militar francés Jean Víctor Poncelet (1788-1867) diseñó una rueda de empuje inferior cuyos alabes curvos aumentaban el rendimiento casi un 70%.

Otro ingeniero militar francés, Claude Burdin (1790-1873), inventó el término turbina, como parte de su análisis teórico en el que daba gran importancia a la velocidad de rotación. Benoît Fourneyron (1802-1867), un alumno de Burdin en la Escuela de Minería de Saint Étienne, diseñó y construyó ruedas que alcanzaban velocidades de

rotación de 60 r.p.m. o más y que proporcionaban hasta 50 CV en las fabricas metalúrgicas francesas. Por último, Fournay construyó turbinas que trabajaban a 2300 r.p.m., desarrollando 60 CV y un rendimiento de más del 80%, pero esta turbina tenía algunos inconvenientes causados por el flujo centrífugo del agua que la atravesaba, pues esto provocaba problemas si se reducía el flujo de agua o su carga.

El ingeniero estadounidense nacido en Gran Bretaña James B. Francis (1815-1892) diseñó una turbina en la que el flujo se producía hacia el interior. La llamada turbina Francis se convirtió en la turbina hidráulica más utilizada con cargas equivalentes a una columna de agua de 10 a 100 m.

La turbina Pelton, cuyo nombre proviene del ingeniero estadounidense Lester Allen Pelton (1829-1908), se empezó a aplicar durante la segunda mitad del siglo XIX, en instalaciones donde la presión del agua era equivalente a una columna de agua de entre 90 y 900 m.

El aumento de las necesidades de energía hidroeléctrica durante los albores del siglo XX puso de manifiesto la necesidad de turbinas que pudieran aprovechar caídas de agua de 3 a 9 m, que podrían utilizarse en muchos ríos construyendo pequeños embalses de agua. En 1913, el ingeniero austriaco Viktor Kaplan (1876-1934) planteó por primera vez la turbina de hélice, que actúa al contrario que la hélice de un barco.

Kaplan mejoró la turbina haciendo que los alabes pudieran girar sobre su eje ya que los distintos ángulos de los alabes aumentaban el rendimiento de la máquina.

#### 2.4.1. Clasificación de las turbinas hidráulicas.

La clasificación de las turbinas hidráulicas puede hacerse con diversos criterios.

La turbina hidráulica es ante todo una máquina de fluido pues aprovecha la energía del fluido, en este caso agua.

La turbina es una turbomáquina. El funcionamiento de las turbomáquinas se basa en la variación de la cantidad de movimiento de las partículas del fluido, producto de la interacción mecánica a la que se someten al ponerlas en contacto con los alabes de una o más ruedas en movimiento. Estas máquinas siempre tienen movimiento rotatorio, de ahí el prefijo *turbo* que significa *giro*. El elemento rotatorio de las turbinas se conoce como rodete. Las turbomáquinas pueden ser motrices si la máquina aprovecha la energía del fluido, o generatrices si la máquina suministra energía al fluido.

Las turbinas hidráulicas pueden ser de impulso, de reacción o de reacción de hélice:

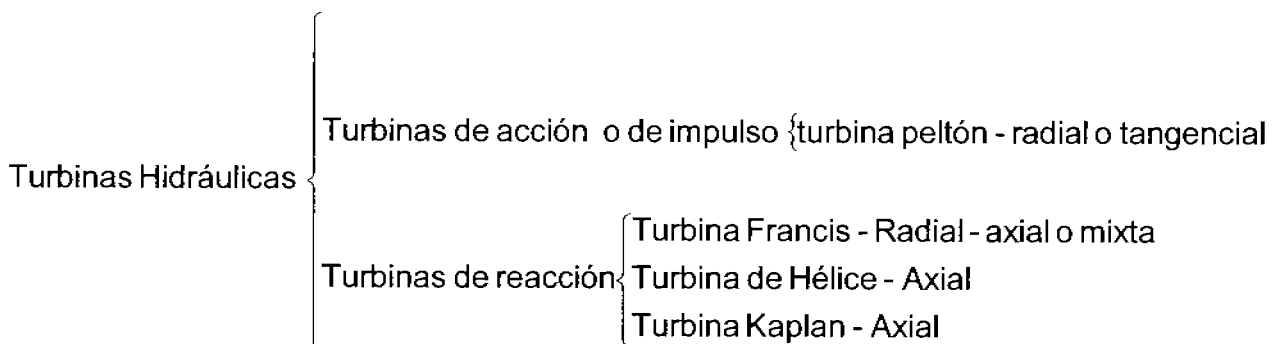
1. De acción o impulso (turbina Pelton): Se les llama así porque el agua impulsa al rodete en forma tangencial a los cangilones. Su funcionamiento hidráulico es principalmente para gastos bajos y cargas altas.
2. De reacción (turbina Francis): En este caso el movimiento se debe a la reacción de las partículas del agua al cambiar su velocidad en dirección y magnitud, debido a

que el rodete absorbe una fuerza de flujo. El flujo entra a la turbina en forma radial y sale en forma axial. Por lo anterior se les conoce como de flujo mixto. Su funcionamiento hidráulico es con cargas y gastos medios.

3. De reacción de hélice (turbina Kaplan): El flujo es axial y cuando los alabes son fijos se llaman de hélice, cuando son móviles se les conoce como Kaplan. Su funcionamiento hidráulico es con cargas bajas y gastos muy grandes.

Los elementos básicos que componen a las turbinas de acción o impulso son: Tubería forzada, Distribuidor y Rodete

Las turbinas de reacción adicionalmente cuentan con un tubo de aspiración. De acuerdo con lo anterior se puede realizar la siguiente clasificación:



Existen también las turbinas Deriaz, que en ocasiones funcionan como bombas y en otras como turbinas, por lo que salen de la clasificación anterior.

Un parámetro llamado velocidad específica, puede también tomarse en cuenta para clasificar en cada uno de los tipos de turbina, el cual también se usa en la clasificación de las bombas aunque con algunas variaciones. La velocidad específica en turbinas se define como la velocidad de una máquina de tamaño tal que produce la unidad de potencia operando bajo la unidad de carga:

$$N_s = \frac{N \sqrt{P}}{H^{5/4}}$$

Si la velocidad angular  $N$  expresada en rpm., la potencia  $P$  en CV y  $H$  en m, los intervalos de velocidad específica para cada tipo de turbina son:

- Turbina Pelton de 0 a 100.
- Turbina Francis de 50 a 350, invadiendo los campos de las Pelton y Kaplan.
- Turbina Kaplan de 300 a 1000.

---

# **CAPÍTULO 3**

## **BOMBAS COMO TURBINAS**

---

### 3.1. Descripción de las bombas operando como turbinas.

Una bomba como turbina es una bomba que opera en sentido contrario para generar potencia.

Una bomba como turbina (PAT) desarrolla la presión mediante impulsión directa y esa presión, como en todas las bombas rotativas, es ayudada por la acción de la fuerza centrífuga. En este tipo de bombas el líquido penetra en forma tangencial a la turbina, de modo que la forma del alabe y la velocidad periférica de los mismos son los que determinan los valores de carga y gasto (referencia 12).

Geométrica e hidráulicamente las máquinas son similares (velocidades específicas iguales), los rendimientos que se obtienen para una unidad de un tamaño y velocidad pueden usarse para determinar el rendimiento de máquinas de tamaño y velocidad de rotación distintas.

A menudo la velocidad de la turbina no será la misma que la velocidad de la bomba y es necesario usar ecuaciones adicionales que tomen en cuenta las velocidades de funcionamiento diferentes de la turbina y la bomba.

La bomba depende del número de alabes del impulsor, el ángulo de las aspas, la cámara espiral, y/o distribuidor, etc., la relación entre el rendimiento en modo bomba y en modo turbina puede diferir considerablemente de una máquina a otra aunque el número específico y la eficiencia de la bomba pueden ser los mismos.

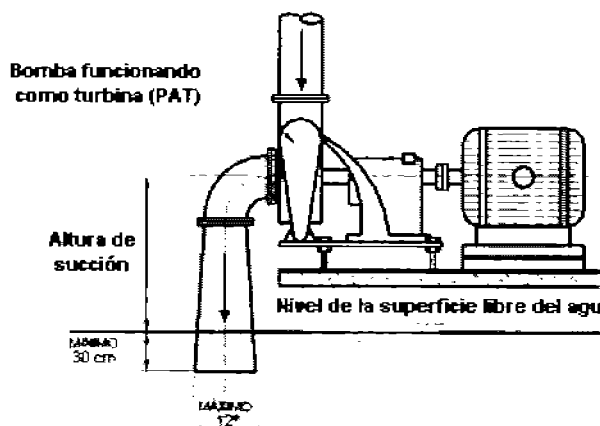


Figura 3.1. Bomba centrífuga funcionando como turbina

La figura 3.1 presenta una instalación de una bomba funcionando como turbina. Los accesorios necesarios para un funcionamiento adecuado de esa instalación son: Una curva de 90° con diámetro igual de entrada en la bomba, destinada a operar como turbina, un tubo de sección cónica divergente con un ángulo central de 12°, suficiente para penetrar 30 cm a partir del nivel del agua en el canal de desfogue (referencia 7).

La mayoría de los métodos para obtener el rendimiento de bombas y turbinas, se concentran en la obtención del punto de mejor eficiencia (BEP), sin embargo, una comparación simple entre los valores obtenidos de carga y gasto no dan buenos resultados. Esto es porque el punto de operación se determina por la intersección de la curva característica con la curva de cargas en la cuál la bomba como turbina (PAT) se define por una sola curva característica.

Las condiciones de funcionamiento en términos de carga y gasto en el punto de mejor eficiencia de una bomba operando como turbina, son muy diferentes con respecto a una bomba, aunque la eficiencia de una PAT deberá ser aproximadamente la misma como una bomba en operación. Las pérdidas de energía, dentro de una bomba centrífuga, resultan en una reducción de carga y gasto máximo, la carga y el gasto requerido cuando funciona como una turbina deberán ser más grandes que los valores teóricos.

3.1.1. Diferencias particulares entre las bombas y las turbinas.

La teoría hidrodinámica es la misma para ambas máquinas; sin embargo, el comportamiento del gasto incluye la fricción y la turbulencia que resulta diferente en algunos aspectos para el diseño de la bomba y la turbina (figuras 3.2 y 3.3).

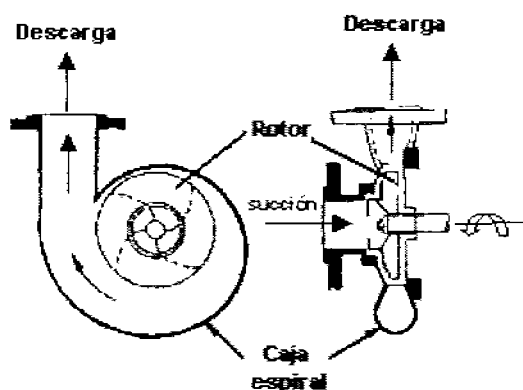


Figura 3.2. Bomba centrífuga funcionando como bomba.

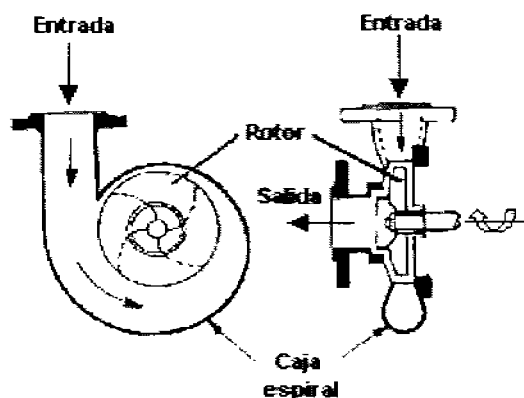


Figura 3.3. Bomba centrífuga funcionando como turbina.

	Turbina	Bomba
<b>Flujo de energía</b>	La entrada de energía es del tipo hidráulica.  La salida de energía es del tipo mecánica a través del torque de la máquina.	La entrada de energía es del tipo mecánica a través del torque en el eje de la máquina.  La salida de la energía es de tipo hidráulica por medio de un fluido a presión.
<b>Altura de presión hidráulica</b>	La altura neta de la turbina decrece al incrementarse el gasto.	La altura dinámica total que genera, se incrementara al aumentar el gasto.
<b>Sentido de rotación</b>	El rotor de la turbina gira en dirección opuesta al sentido de rotación del impulsor de la bomba.	
<b>Dirección del torque</b>	En ambos modos tiene la misma dirección.	

Tabla 3.1. Diferencias particulares entre una bomba y una turbina.

Una bomba funcionando como turbina tiene un costo considerablemente menor que el de una turbina convencional. Esto se debe principalmente a que la bomba presenta un diseño muy simple al no estar presente el distribuidor o alabes directrices, y además

tiene una ventaja adicional que es la de tener costos de fabricación menores debido a que su producción es en serie por la gran demanda que tiene este producto (referencia 1).

### 3.1.2. Condiciones de Operación de las bombas y las turbinas.

**Bombas:** Estas máquinas por lo general, operan con gasto, carga, y velocidad de rotación constante. Por lo tanto, estas son diseñadas para un punto de operación en particular y se denomina punto de funcionamiento, no requiere de un dispositivo de regulación de gasto. En condiciones ideales, el punto de funcionamiento coincide con la máxima eficiencia de la máquina. La energía cinética entregada al fluido debe ser transformada toda o parcialmente en energía de presión, es decir que el flujo debe ser desacelerado a lo largo de su trayectoria que va desde el impulsor hasta la cámara espiral o voluta.

**Turbinas:** Operan para condiciones de gastos y cargas variables, en pequeñas centrales hidráulicas, el gasto debe ser ajustado con las variaciones estacionales de agua disponible o ajustar la potencia o energía de salida de acuerdo al nivel de demanda en el centro de consumo. El gasto es regulado por medio de alabes de distribución en máquinas de reacción (Francis y Kaplan); o por un inyector, en el caso de máquinas de acción (Pelton).

Dependiendo del diseño de la bomba, como puede ser el número de alabes del impulsor, ángulo de las aspas, cámara espiral, y/o distribuidor, etc., la relación entre el rendimiento del modo bomba y el modo turbina puede diferir considerablemente de una máquina a otra aunque el número específico y la eficiencia de la bomba pueden ser los mismos.

Si se comparan las posibles condiciones de operación de una turbina hidráulica con las instalaciones de una bomba centrífuga, se involucran las bombas que están sujetas a una variación muy amplia y más complicada que el de las turbinas, sobre todo durante los estados transitorios de arranque, paro, o durante una operación de emergencia. En las turbinas la dirección del flujo y la dirección de rotación es siempre la misma, incluso en caso de una avería de la propia máquina al arrancar un interruptor en el equipo auxiliar.

### 3.2. Rendimiento de bombas centrífugas como turbinas.

Cuando se selecciona una bomba para ser utilizada como turbina es necesario obtener la carga y el gasto para el mejor rendimiento de la bomba, y trasladar esos valores al modo de operación como turbina.

El rendimiento de una bomba y/o turbina por lo general se representa en diagramas de carga-gasto o bajo la misma relación funcional, por medio de coeficientes adimensionales.



El rendimiento de la bomba y la misma en el modo turbina pueden ser llevados a un diagrama único de carga-gasto, con la salvedad de que este estará comprendido en un rango que tomara valores positivos y negativos. El valor negativo representa el flujo inverso de la bomba trabajando como turbina, en la figura 3.4, se muestra la curva característica carga-gasto de una bomba, y una bomba funcionando como turbina. Estas curvas están dadas para una misma velocidad de rotación en las dos formas de funcionamiento de las máquinas, la relación entre el modo bomba y el modo turbina no es la misma para cualquier tipo y dimensión de la bomba, además depende de las características que presenta el flujo a través de las máquinas.

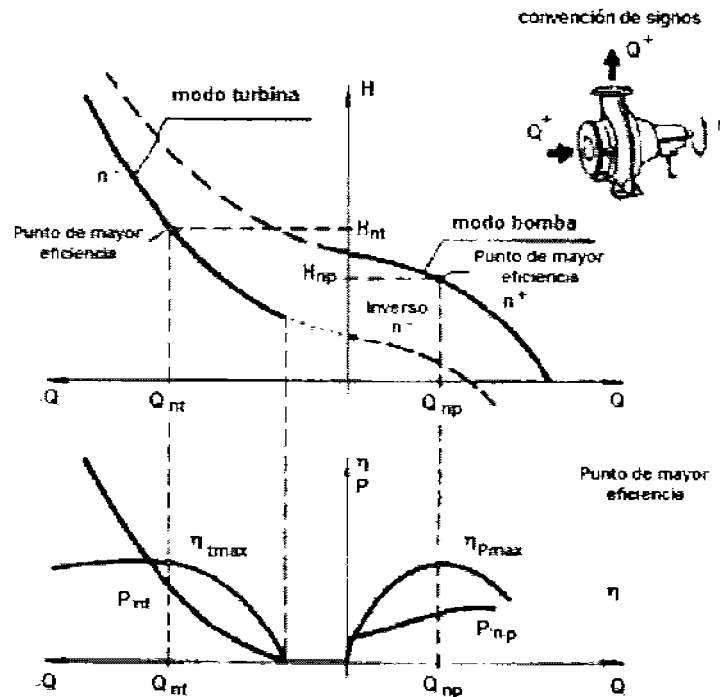


Figura 3.4. En esta grafica se puede visualizar de una manera clara que el punto de mejor eficiencia en el modo bomba no corresponde para la misma combinación de valores de carga-gasto para el punto de mejor eficiencia en el modo turbina.

Las bombas centrífugas que funcionan a la inversa tienen características aceptables de una turbina. El funcionamiento inverso de las bombas se han usado como recuperadores de energía en bombas y turbinas en almacenamientos a condiciones ambientales (referencia 5).

En experimentos realizados con bombas centrífugas seleccionadas adecuadamente han demostrado que al funcionar como una turbina, esta tiene una eficiencia hidráulica máxima en su mejor rendimiento que es alrededor del 2% al 3% en el punto de mejor eficiencia (referencia 3).

Para propósitos prácticos la turbina y la bomba en el punto de máxima eficiencia puede ser considerada igual, según varias fuentes (referencia 5 y 10). Las leyes de similitud de las bombas son válidas para bombas centrífugas que operan como turbinas y pueden

usarse para predecir el rendimiento de la turbina. La literatura describe varios métodos para estimar el comportamiento del punto de mejor eficiencia (BEP) de bombas centrífugas que operan como turbinas en base a las características del rendimiento de la bomba, generalmente se han usado dos métodos que para su conveniencia se identificarán como el "método del punto de mejor eficiencia" y el "método de la velocidad específica" (referencia 5).

### 3.2.1. Modelos de rendimiento en el punto de mejor eficiencia.

La suposición fundamental del método de punto de mejor eficiencia es que las eficiencias de una bomba centrífuga que opera como una turbina ( $\eta_{t, BEP}$ ) y como una bomba ( $\eta_{p, BEP}$ ) son iguales (referencia 5). Tomando esta como punto de partida, Sharma desarrolló las siguientes relaciones para cambiar la circulación del gasto ( $Q_{p, BEP}$ ) y carga ( $H_{p, BEP}$ ) en la bomba para el punto de mejor eficiencia, y los valores correspondientes de la turbina BEP del gasto ( $Q_{t, BEP}$ ) y carga ( $H_{t, BEP}$ ):

$$Q_{t, BEP} = \frac{Q_{p, BEP}}{\eta_{p, BEP}^{0.8}} = C_q Q_{p, BEP} \quad (3.1)$$

$$H_{t, BEP} = \frac{H_{p, BEP}}{\eta_{p, BEP}^{1.2}} = C_h H_{p, BEP} \quad (3.2)$$

donde  $C_q$  y  $C_h$  son factores de conversión que relacionan el gasto y carga en la turbina para el BEP, con los mismos parámetros de la bomba en el BEP.

Basado en los resultados de Williams, Sharma (referencia 5) dice que el método del punto de mejor eficiencia es un procedimiento para la determinación preliminar del rendimiento de la turbina en el BEP y de la bomba de máxima eficiencia que tiene una exactitud aceptable para ese propósito. Sin embargo, ambos, Williams (1994) y Buse (1981) dan énfasis a ese razonamiento para determinar el rendimiento de la turbina una vez que se hace una selección preliminar.

El método de velocidad específica se ha utilizado en el diseño de varios sistemas de recuperación de energía en bombas y turbinas para aplicaciones de enfriamiento de agua (referencia 5).

Una alternativa del método en el punto de mejor eficiencia está basada en factores de conversión que son funciones, de la velocidad específica de la turbina (Buse 1981). En dicha máquina, la velocidad específica es un parámetro de similitud que combina la turbina en el punto de mejor eficiencia:

$$N_s = \frac{N_{BEP} \cdot Q_{BEP}^{0.75}}{H_{BEP}} \tag{3.3}$$

Donde:

		Unidades empleadas en el sistema:	
		Ingles	Internacional
N <sub>s</sub>	Velocidad específica		
N <sub>BEP</sub>	Velocidad en el punto de mejor eficiencia	rpm	rpm
Q <sub>BEP</sub>	Gasto en el punto de mejor eficiencia	gpm	m <sup>3</sup> /s
H <sub>BEP</sub>	Carga en el punto de mejor eficiencia	ft	m

Buse presenta valores de los factores de conversión C<sub>q</sub>, C<sub>h</sub>, y C<sub>e</sub> que relacionan, la turbina en el punto de mejor eficiencia con respecto al gasto (Q<sub>i, BEP</sub>), carga (H<sub>i, BEP</sub>), y eficiencia (η<sub>i, BEP</sub>) para valores de bombeo de BEP. Para un punto dado en la selección de la turbina (gasto y carga), estos factores de conversión permiten un cálculo rápido de las características requeridas en la bomba, (referencia 1):

$$Q_{p, BEP} = \frac{Q_{i, BEP}}{C_q} \tag{3.4}$$

$$H_{p, BEP} = \frac{H_{i, BEP}}{C_q} \tag{3.5}$$

$$\eta_{p, BEP} = \eta_{i, BEP} \cdot C_q \tag{3.6}$$

Según Buse, C<sub>q</sub> y C<sub>h</sub> varían de 2.2 a 1.1 y C<sub>e</sub> varía de 0.92 a 0.99 por encima de un rango de velocidad específica de 500 a 2800 (9.7 a 54.2). Considerando estos valores, es evidente que:

1. La eficiencia máxima de la turbina es menor que la eficiencia máxima de la bomba y ocurre para una circulación de gasto grande, y
2. la presión en la turbina es baja, por lo que debe ser mayor la presión que es desarrollada por la bomba; por consiguiente, el punto más alto debe ser superior en la turbina.

### 3.2.2. Modelos para bombas y turbinas con velocidad variable, aplicando las leyes de similitud.

Las curvas características de las bombas centrífugas y bombas centrífugas que operan como turbinas son función de su velocidad específica respectiva (N<sub>s</sub>), la carga de presión (H) y la eficiencia (η) son datos variables que van a dar el rendimiento de la bomba como función del gasto (Q) y dichas curvas son proporcionadas por el fabricante.

Las curvas características en bombas centrífugas se modelaron cambiando la velocidad específica, el modelado de estas se llevo a cabo mediante una regresión polinomial de segundo orden, los coeficientes de la regresión se obtuvieron como función de la velocidad específica, el modelo de carga (H) para una bomba o una turbina tiene la forma:

$$H = C_1 Q^2 + C_2 Q + C_3 \quad (3.7)$$

donde:

$$C_n = D_{1,n} N_s^2 + D_{2,n} N_s + D_{3,n}$$

El rendimiento de modelos para velocidad variable de la bomba y la turbina pueden desarrollarse aplicando las leyes de similitud de bombas para velocidad constante de carga y eficiencia (Ecuaciones 3.7 y 3.10). Para una bomba o una turbina con carga ( $H_0$ ); es definida como función del gasto ( $Q_0$ ) y velocidad de rotación ( $N_0$ ), donde N es arbitraria.

Recordando las leyes de similitud para bombas iguales:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{N}{N_0} \quad (3.7.1)$$

$$\frac{H}{H_0} = \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (3.7.2)$$

Donde:

Q Gasto

N Velocidad de rotación

H Carga

0 subíndice que denota una referencia o condición nominal

Una aproximación cuadrática de la curva característica de la bomba con velocidad nominal ( $N_0$ ) puede escribirse en la forma:

$$H_0 = C_1 Q_0^2 + C_2 Q_0 + C_3 \quad (3.7.3)$$

donde:

$C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son coeficientes de regresión, para la ecuación 3.7.3.

$$H = H_0 \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (3.7.4)$$

Por consiguiente, sustituyendo  $H_0$  en la ecuación 3.7.3, se tiene:

$$H = \left( C_1 Q_0^2 + C_2 Q_0 + C_3 \right) \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (3.7.5)$$

Despejando de la ecuación 3.7.1  $Q_0$ , se tiene:

$$Q_0 = Q \left( \frac{N_0}{N} \right) \quad (3.7.6)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.7.6 para  $Q_0$  en la ecuación 3.7.5 se obtiene la siguiente expresión:

$$H = \left( C_1 Q^2 \left( \frac{N_0}{N} \right)^2 + C_2 Q \left( \frac{N_0}{N} \right) + C_3 \right) \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (3.7.7)$$

Desarrollando la ecuación 3.7.7. se concluye que:

$$H = C_1 Q^2 + C_2 Q \left( \frac{N}{N_0} \right) + C_3 \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 se usa para modelar una bomba operando con velocidad variable para proporcionar el gasto del sistema,  $Q_{sys}$ , a la presión del sistema,  $H_{sys}$ , la velocidad requerida puede determinarse por medio de la siguiente fórmula:

$$N = \left\{ \frac{-C_2 Q_{sys} + \left( (C_2^2 - 4C_1 C_3) Q_{sys}^2 + 4C_3 H_{sys} \right)^{0.5}}{2C_3} \right\} N_0 \quad (3.9)$$

De manera similar como se obtuvo la ecuación 3.8, la eficiencia de la bomba o la turbina se puede expresar como:

$$\eta = E_1 Q^2 + E_2 Q + E_3 \quad (3.10)$$

donde:

$$E_n = F_{1,n} N_s^2 + F_{2,n} N_s + F_{3,n}$$

La velocidad específica utilizada en las ecuaciones  $C_n$  y  $E_n$ , se refieren a la bomba o la turbina.

La curva eficiencia-velocidad para una bomba o una turbina se desarrolla aplicando las relaciones de similitud al modelo de eficiencia y velocidad constante (Ecuación 3.10) de

manera similar a ello y usando la derivación de la ecuación 3.8, se obtiene la ecuación de eficiencias:

$$\eta = E_1 \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 Q^2 + E_2 \left( \frac{N}{N_0} \right) Q + E_3 \tag{3.11}$$

Cuando la recuperación de energía es empleada en una interfaz de bombeo, la turbina se conecta a la bomba a través de un motor de doble eje extendido. Por consiguiente, la bomba y la turbina deben operar a la misma velocidad, porque la velocidad en ambas máquinas es determinada por los requerimientos de la misma esto es que el sistema característico de la bomba, la velocidad de control del motor se representan como una regulación en la turbina.

La curvas características representadas en las figuras 3.5.a y 3.5.b fueron modeladas con un polinomio de segundo orden y se obtuvieron como función de la velocidad específica, gasto y carga.

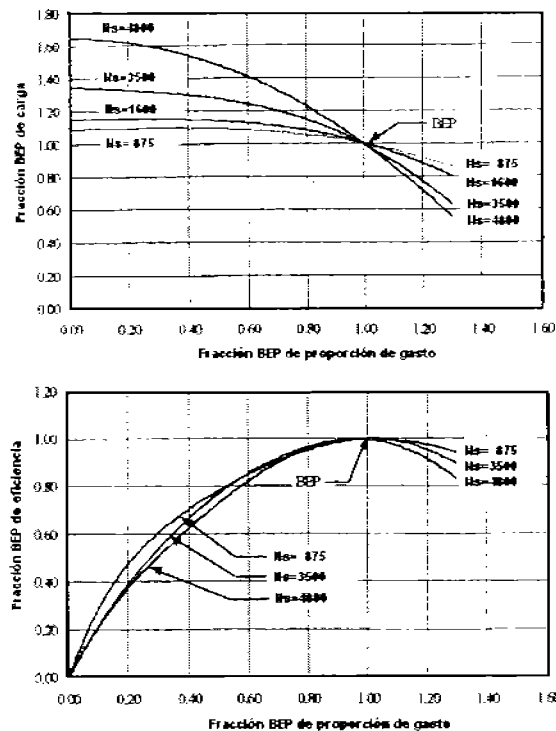


Figura 3.5. Efectos de la velocidad específica en el rendimiento característico para cuando la bomba trabaja con velocidad constante; en las curvas se grafican: (a) carga-gasto, (b) eficiencia-gasto, donde Ns es la velocidad específica de la bomba.

La entrada de potencia requerida por una bomba es,

$$P_p = \frac{Q H}{K \eta_p} \tag{3.12}$$

y el eje impulsa el rendimiento de una turbina, por lo tanto se tiene:

$$P_t = \frac{Q H \eta_t}{K} \tag{3.13}$$

Donde:

$\eta_p$ : eficiencia de la bomba

$\eta_t$ : eficiencia de la turbina

K : constante para el manejo en el sistema de unidades, considerando que la temperatura del agua es 20 °C, se tiene:

		Sistema Ingles	Sistema Internacional
K	Constante	3960	1000
P	Potencia	HP	KW
Q	Gasto	gpm	m <sup>3</sup> /s
H	Carga	ft	m

### 3.2.3. Modelo con motor eléctrico para velocidad variable.

La potencia requerida para manejar una bomba centrífuga en ausencia de recuperación de energía puede expresarse en términos de bomba, motor, y manejo de eficiencias. La potencia del motor esta dada por:

$$P_m = \frac{W_p}{\eta_m} \tag{3.14}$$

Donde:

$\eta_m$ : eficiencia del motor.

La eficiencia de un motor eléctrico varía como una función de la fracción de todas estas potencias de carga, el rendimiento en el motor para una gran eficiencia (ASHRAE 1996), se aproximó a un polinomio continuo.

La potencia eléctrica de entrada requerida para operar una bomba de velocidad variable a velocidad constante esta dado por:

$$P_{total} = \frac{P_m}{\eta_d} \tag{3.15}$$

Donde

$\eta_d$ : eficiencia con respecto a la velocidad en el manejo de control de la bomba.

$\eta_d = 1$  para cuando la bomba no tiene control en el manejo de la velocidad.

La curva de eficiencia–velocidad fue obtenida como una función cuadrática del radio de operación de la velocidad (ASHRAE 1996).

La flecha de la potencia producida por la recuperación de energía en la turbina se deduce directamente para la salida que debe producirse por el motor conectado a la bomba, la potencia total requerida por una interfase con recuperación de energía es:

$$P_{total} = \frac{P_p - P_t}{\eta_m \eta_d} = \frac{Q (H_p - H_t \eta_p \eta_t)}{K \eta_p \eta_m \eta_d} \quad (3.16)$$

Donde

$H_p$ : carga de la bomba

$H_t$ : carga de la turbina

La eficiencia del motor depende de una fracción de la potencia consumida, esta reducción en la potencia del motor altera la eficiencia del mismo; sin embargo, la velocidad de la bomba es solamente determinada para los requerimientos de bombeo y el manejo de la eficiencia no es afectada al considerar la turbina.

### 3.2.4. Método Alatorre-Frenk para calcular las curvas de bombas como turbinas .

Alatorre-Frenk (referencia 6) aplicó un método estadístico a un gran número de bombas funcionando como turbinas (PAT) para desarrollar un sistema de ecuaciones que describen las curvas de carga–potencia de la turbina.

Para la selección de las bombas como turbinas primero hay que calcular la velocidad específica adimensional ( $\Omega_p$ ) de la bombas para el punto de mejor eficiencia (BEPp).

$$\Omega_p = \frac{\omega_p \sqrt{Q_p}}{g (H_p)^{3/4}} \left[ \frac{(rad/s) \sqrt{m^3/s}}{(m/s) (m^{3/4})} \right] \quad (3.17)$$

Segundo, Obtener el punto de mejor eficiencia de la turbina (BEPt) para la misma velocidad de rotación de la bomba:

$$H_{bep,t} = 1.21 H_{bep,p} \eta_{bep,p}^{-0.8} \left[ 1 + \left( 0.6 \ln \Omega_p \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

$$Q_{bep,t} = 1.21 Q_{bep,p} \eta_{bep,p}^{-0.6} \quad (3.19)$$

$$\eta_{bep,t} = 0.95 \eta_{bep,p}^{-0.7} \left[ 1 + \left( 0.5 \ln \Omega_p \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

Definir los factores de elasticidad  $E_T$  y  $E_{2T}$  respectivamente, la pendiente media, la curvatura en el modo turbina de carga–gasto y las características en el punto de mejor eficiencia de la turbina.



$$E_T = 0.68 + 0.6 \Omega_p^{0.5} \quad (3.21)$$

$$E_{2T} = 0.76 + 2.1 \Omega_p^{0.5} \quad (3.22)$$

y los coeficientes siguientes:

$$A_H = \frac{E_{2T} H_{bep,t}}{2 Q_{bep,t}} \quad (4.17) \quad (3.23)$$

$$B_H = -\frac{(E_T - E_{2T}) H_{bep,t}}{Q_{bep,t} \omega_t} \quad (3.24)$$

$$C_H = \frac{(1 - E_T + 0.5 E_{2T}) H_{bep,t}}{\omega_t^2} \quad (3.25)$$

$$A_p = \frac{E_T P_{bep,t}}{Q_{bep,t} \omega_t} \quad (3.26)$$

$$B_p = \frac{(1 - E_T) P_{bep,t}}{Q_{bep,t} \omega_t^2} \quad (3.27)$$

El modelo matemático de bombas funcionando como turbinas para el rendimiento son:

$$H_t = A_H Q_t^2 + B_H Q_t N_t + C_H N_t^2 \quad (3.28)$$

$$P_t = A_p Q_t^2 N_t + B_p Q_t N_t^2 \quad (3.29)$$

donde:

H Carga, en m.

Q Gasto, en m<sup>3</sup>/s.

N Velocidad de rotación, en rpm.

A, B y C Constantes definidas de la bomba en el punto de mejor eficiencia.

Las ecuaciones 3.28 y 3.29 son la base para las curvas de las bombas funcionando como turbinas, desarrolladas en la sección 3.2.2.

### 3.3. Representación de las Curvas Características Completas de Bombas centrífugas.

Uno de los primeros métodos para representar el rendimiento de una bomba fuera de lo normal, fue el diagrama de círculo desarrollado por Knapp en 1937 (referencia 15), en la figura 3.6 se representa en el eje de las abscisas la velocidad de rotación y en el eje de las ordenadas el gasto. La representación fue tomada por Swanson (referencia 12); aplicando teóricamente estos principios y adicionando datos para bombas de flujo mixto y axial. Los diagramas del círculo son una parte normal en los libros de bombas, por ejemplo Stepanoff (referencia 10) donde el gasto se representa en el eje de las

abscisas y la velocidad en el eje de las ordenadas, como es el caso de este capítulo. La figura 3.7 indica las diferentes zonas de funcionamiento representadas en el diagrama, esto es normal en la práctica para normalizar el diseño de puntos en bombas iguales.

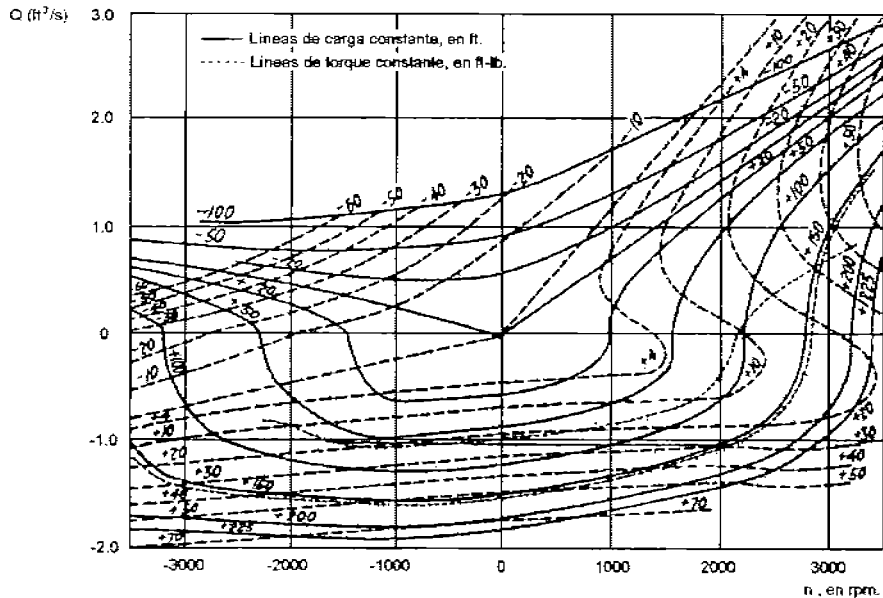


Figura 3.6. Diagrama de círculo de las curvas características completas para una bomba centrífuga.

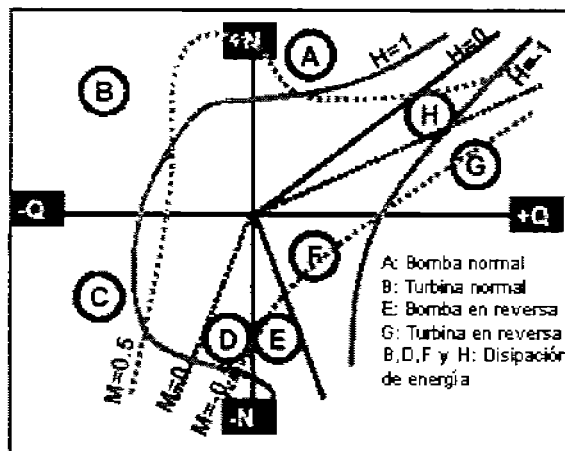


Figura 3.7. Zonas del diagrama de círculo: depende de  $\pm Q$ ,  $N$ ,  $H$  y  $M$ .

Otra forma del diagrama característico de la bomba es el círculo de Karman-Knapp (referencia 9) en un plano normalizado que se muestra en la figura 3.9, este separa en forma más clara las diferentes zonas de funcionamiento de la bomba. La figura muestra varias zonas de operación que se separan, hay dos zonas de operación de la bomba, la zona normal en el primer cuadrante y la de rotación inversa anormal en el segundo cuadrante. En el funcionamiento de la turbina Hay dos zonas, la normal en el tercer cuadrante, y la anormal o gasto exterior en el primer cuadrante. Cada una de estas zonas de posible funcionamiento útil está separada de otras zonas de disipación de energía.

Todas las posibles condiciones de funcionamiento pueden representarse en un diagrama que puede nombrarse "diagrama de curvas características completas" de la máquina hidráulica, esto es igualmente aplicable a una bomba o una turbina (figura 3.6).

### 3.3.1. Caracterización general de las bombas centrífugas

Las bombas permiten la transformación de potencia mecánica-usualmente proporcionada por un motor eléctrico en potencia hidráulica. Ello implica el paso del fluido de un recinto con menor presión (succión) a otro con mayor presión (descarga). La complejidad física del fenómeno que ocurre en el interior de la máquina no permite, al día de hoy, describirlo teóricamente. Sin embargo, haciendo uso de la teoría de la similitud entre máquinas con semejanza geométrica aunque de dimensiones diferentes, es posible organizar los datos empíricos de manera que se caracterice completamente el comportamiento de esta familia de máquinas semejantes. Ello permite tratar en forma general problemas que, de otra forma, se reducirían a un estudio caso a caso sin posibilidad alguna de empleo racional de la información obtenida en un caso, para su uso en otros (referencia 10).

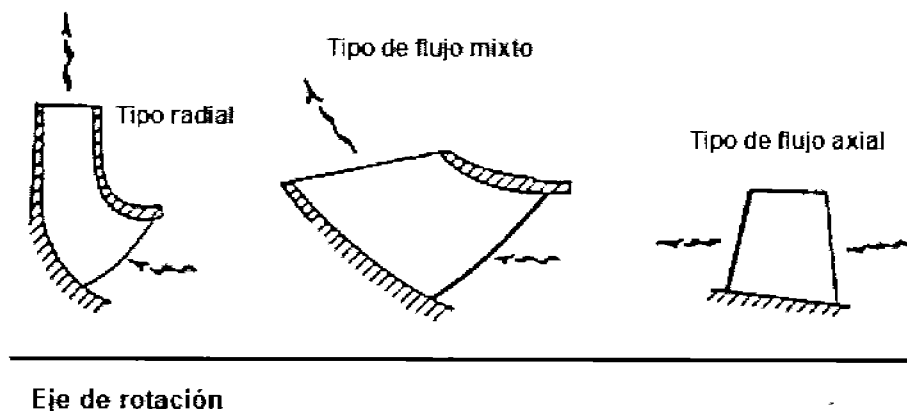


Figura 3.8. Trayectorias de las partículas fluidas a través del impulsor de bombas de flujo radial, mixto y axial.

La caracterización es una designación que se refiere a la geometría de la trayectoria de las partículas del fluido dentro de la máquina (figura 3.8) en relación con el eje de la misma, la caracterización más general posible de una familia de máquinas geoméricamente semejantes de cualquiera de estos tipos se realiza mediante cuatro variables, que son:

- Densidad del fluido  $\rho$
- Diámetro característico  $D$
- Velocidad de giro del rodete  $N$
- Gasto volumétrico  $Q$

Dada la geometría de la familia, las cuatro variables anteriores describen toda condición particular de operación de una máquina, dadas  $\rho$ ,  $D$ ,  $N$  y  $Q$  existe una función  $f_1$  entre

dichas variables y la diferencia de carga total  $H\gamma$  creada por la operación de la máquina entre la succión y la descarga, otra función  $f_2$  entre las mismas variables y el par  $M$  que debe ejercerse sobre el eje de la máquina para mantener dicha condición de operación, es decir:

$$f_1(\rho, D, N, Q) = H\gamma \quad (3.30)$$

$$f_2(\rho, D, N, Q) = M \quad (3.31)$$

En las ecuaciones características (3.30 y 3.31) de la máquina no interviene el tiempo  $t$ , son ecuaciones que se determinan experimentalmente mediante una sucesión de ensayos estacionarios. La expresión de la diferencia de cargas totales como  $H\gamma$  obedece a la intención de mantener la notación de  $H$  para la carga total expresada en metros de columna de agua pero como en este análisis deben emplearse unidades coherentes se expresara como  $H\gamma$  que son unidades de fuerza por unidad de área (presión) siendo  $\gamma$  el peso específico del líquido bombeado (referencia 21).

Si las ecuaciones 3.30 y 3.31 describen un fenómeno físico, -en este caso la operación de una máquina- no pueden depender de las unidades de medida empleadas para cuantificar las magnitudes  $\rho$ ,  $D$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $H\gamma$  y  $M$  siempre que estas se midan en un sistema coherente de unidades. El teorema de Buckingham o teorema de los números dimensionados, dice que las ecuaciones 3.30 y 3.31 deben poderse formular en función de tantos números adimensionados como el total de variables en juego (en este caso son seis) menos el número de variables básicas, las variables básicas son aquellas que permiten formar números adimensionados con cada una de las restantes. Escogiendo  $\rho$ ,  $D$  y  $N$  como variables básicas, los números adimensionados que se pueden formar los siguientes:

$$\frac{Q}{ND^3} = \Pi_1 \quad (3.32)$$

$$\frac{H\gamma}{\rho N^2 D^2} = \Pi_2 \quad (3.33)$$

$$\frac{M}{\rho D^5 N^2} = \Pi_3 \quad (3.34)$$

En consecuencia, las ecuaciones 3.30 y 3.31 pueden formularse en función  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , como:

$$g_1(\Pi_1) = \Pi_2 \quad (3.35)$$

$$g_2(\Pi_1) = \Pi_3 \quad (3.36)$$

## 3.3.2. Diagrama de círculo o de los cuatro cuadrantes.

Si bien las expresiones 3.35 y 3.36 equivalen a la 3.30 y 3.31 pero con la ventaja de que las seis variables se han reducido a tres, por razones históricas los fabricantes de máquinas aun emplean una representación de las ecuaciones 1 y 2, en cuatro variables que son:

$$h = \frac{H}{H_0}; q = \frac{Q}{Q_0}; \alpha = \frac{N}{N_0}; \beta = \frac{M}{M_0} \quad (3.37)$$

Siendo como se señaló en la sección anterior  $Q_0, N_0, H_0, M_0$  los valores de las respectivas variables para el punto de mayor rendimiento de la máquina. En la ecuación 3.37 se emplea la letra  $h$  para designar la diferencia de carga total entre succión y descarga para un punto de operación genérico dividida por esa diferencia correspondiente al punto de máximo rendimiento. Obsérvese que  $H/H_0 = \Delta h / (\Delta h)_0$  siendo  $\Delta h$  es la diferencia de carga piezométrica entre la succión y la descarga de la máquina si se desprecia la diferencia de cargas de velocidad en dichos puntos.

De acuerdo con las definiciones 3.33, 3.34 y 3.35 se tiene que:

$$\frac{v}{\alpha} \Pi_{1_0} = \Pi_1 \quad (3.38)$$

$$\frac{h}{\alpha^2} \Pi_{2_0} = \Pi_2 \quad (3.39)$$

$$\frac{\beta}{\alpha^2} \Pi_{3_0} = \Pi_3 \quad (3.40)$$

Donde:  $\Pi_{1_0} = Q_0 / N_0 D^3$ ;  $\Pi_{2_0} = (H \gamma)_0 / \rho N_0^2 D^2$  y  $\Pi_{3_0} = M_0 / \rho N_0^2 D^5$  son los valores de los números adimensionados para el punto de mejor eficiencia (BEP) de la máquina.

Aplicando las relaciones experimentales 3.35 y 3.36 se tiene:

$$g_1 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) = \frac{h}{\alpha^2} \Pi_{2_0} \quad (3.41)$$

$$g_2 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) = \frac{\beta}{\alpha^2} \Pi_{3_0} \quad (3.42)$$

Despejando las variables  $h$  y  $\beta$  de las ecuaciones 3.41 y 3.42 y respectivamente, se tiene:

$$g_1 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) \frac{\alpha^2}{\Pi_{2_0}} = h \quad (3.43)$$

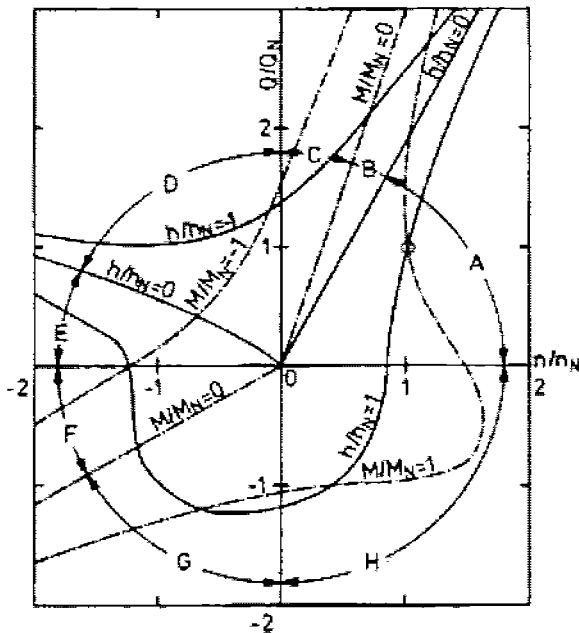
$$g_2 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) \frac{\alpha^2}{\Pi_{3_0}} = \beta \tag{3.44}$$

La expresión 3.43 indica que  $h$  es función de  $q, \alpha, \Pi_{1_0}, \Pi_{2_0}$  y la 3.44 que  $\beta$  lo es de  $q, \alpha, \Pi_{1_0}, \Pi_{3_0}$ ; esto se expresa como:

$$h = F_1(q, \alpha, \Pi_{1_0}, \Pi_{2_0}) \tag{3.45}$$

$$\beta = F_2(q, \alpha, \Pi_{1_0}, \Pi_{3_0}) \tag{3.46}$$

Las expresiones 3.45 y 3.46 al ser representadas en un plano cartesiano con  $q$  en las abscisas y  $\alpha$  en las ordenadas, definen el denominado "diagrama de los cuatro cuadrantes" o "diagrama de Knapp" (referencia 12), figura 3.9.



Nomenclatura utilizada en el diagrama.

- A: Zona de operación normal de la bomba.
- C: Zona inversa de la turbina.
- E: Zona inversa de la bomba.
- G: Zona de operación de la turbina
- B, D, F, H: Zonas de disipación de energía.

Figura 3.9. Diagrama de círculo Karman-Knapp, de una bomba de flujo radial y las diferentes zonas de operación.

El paso de las funciones  $g_1$  y  $g_2$  a las funciones  $F_1$  y  $F_2$  se ha dado únicamente con el propósito de explicar el diagrama de los cuatro cuadrantes, que es una forma representar los resultados experimentales propuesto por R.T. Knapp en 1937 (referencia 10 y 15) pero aun hay fabricantes que prefieren la representación más moderna con las funciones  $g_1$  y  $g_2$ .

En la figura 3.9 se muestran todas las posibles condiciones de operación de una bomba y se emplean las siguientes definiciones:

- Bomba: Cuando hay transferencia neta de potencia mecánica del eje a potencia hidráulica del fluido.
- Turbina: Cuando hay transferencia neta de potencia hidráulica del fluido a potencia mecánica del fluido.
- Disipación de energía: Cuando el fluido entrega potencia hidráulica y el eje entrega potencia mecánica que se disipa en el fluido en forma de calor.

Caracterizadas las distintas formas de operación de la máquina en el diagrama de los cuatro cuadrantes, se verán las curvas de operación deducidas de las expresiones 3.45 y 3.46 considerando valores constantes de  $h$  y  $\beta$ .

En la figura 3.6 se presentan las curvas características completas, considerando los siguientes intervalos:

$$h = C_1 \quad \text{con} \quad -100\% \leq C_1 \leq 250\% \quad (3.47)$$

$$\beta = C_2 \quad \text{con} \quad -200\% \leq C_2 \leq 250\% \quad (3.48)$$

Donde  $h$  y  $\beta$  así como  $q$  y  $\alpha$  están expresados en forma de porcentaje. Como las funciones  $F_1$  y  $F_2$  que dependen de  $\Pi_{1_0}$ ,  $\Pi_{2_0}$  y  $\Pi_{3_0}$  ello indica que cada familia de máquinas posee su diagrama propio.

Todo punto de operación de la máquina tiene su representación como un punto geométrico en el diagrama, por lo tanto cualquier comportamiento de la máquina variable en el tiempo (comportamiento no estacionario a transitorio) se traducirá en una curva en el plano  $q$ - $\alpha$ . Para todo punto en esa curva el diagrama de los cuatro cuadrantes tiene los valores de  $h$ ; (carga porcentual) y  $\beta$  (par o momento porcentual) que corresponden a ese punto, ahora bien, dichas se obtienen experimentalmente, en la cual el fenómeno a considerar es estacionario (referencia 21).

Sin embargo, para el cálculo numérico de la bomba, como condición de frontera de una conducción, es preferible trabajar con las funciones  $g_1$  y  $g_2$  (ecuaciones 3.43 y 3.44) transformándolas ligeramente y multiplicando ambos términos de  $g_1$  y  $g_2$  por  $1/(q^2 + \alpha^2)$ , se tiene:

$$g_1 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) \frac{1}{\Pi_{2_0}} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\alpha^2}} = \frac{h}{v^2 + \alpha^2} \quad (3.49)$$

$$g_2 \left( \frac{q}{\alpha} \Pi_{1_0} \right) \frac{1}{\Pi_{3_0}} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\alpha^2}} = \frac{\beta}{q^2 + \alpha^2} \quad (3.50)$$

Obsérvese que las funciones, de la derecha de ambas expresiones son funciones de  $q/\alpha$  y de los números  $\Pi$ . Por lo tanto, a partir de las expresiones 3.49 y 3.50, además

recordando que  $\Pi_{2_0}$  y  $\Pi_{1_0}$  están definidos por  $\Pi_{1_0}$  y este último queda determinado al caracterizarse la familia de máquinas a través de su velocidad específica  $N_s$ , por lo que se concluye que:

$$\frac{h}{q^2 + \alpha^2} = G_1 \left( \frac{q}{\alpha}, N_s \right) \quad (3.51)$$

$$\frac{\beta}{q^2 + \alpha^2} = G_2 \left( \frac{q}{\alpha}, N_s \right) \quad (3.52)$$

La razón por la cual se construyeron estas funciones con  $q^2 + \alpha^2$  en el denominador, es para prevenir la anulación del mismo. En el proceso de paro accidental de una máquina, la evolución en el tiempo tiene en general, el aspecto que se indica en la figura 3.11. Por lo tanto en el punto 1 se anula  $v$  y en el 2 se anula  $\alpha$ . Pero, como puede verse, no ocurre nunca la anulación simultánea de ambos lo cual implicaría que la curva pase por el origen. En consecuencia, el artificio realizado evita tener que trabajar en el cálculo con valores  $G_1$  y  $G_2$  infinitos en alguna etapa del cálculo (referencia 21).

En la figura 3.12 se presentan en forma esquemática estas relaciones y en ella se distinguen las diferentes zonas de operación que ya se analizaron en el diagrama de los cuatro cuadrantes. Para que las funciones sean biunívocas en lugar de  $q/\alpha$  se consideró en las abscisas la variable  $\theta$ , esto es:

$$\theta = \arctan \left( \frac{\alpha}{q} \right) \text{ con } 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \quad (3.53)$$

Por lo tanto, se llega a las ecuaciones de la máquina y que de acuerdo con los elementos de teoría de las mismas hay tres funciones:

- Evalúa la diferencia de carga entre la descarga y la succión
- Evalúa el par o momento aplicado desde el exterior al eje de la máquina
- Ecuación dinámica o de las masas rotantes.

Las dos primeras se denominan habitualmente "ecuaciones características de la máquina", las ecuaciones características formuladas en forma adimensional son (referencia 10 y 21):

$$W_H = \frac{h}{q^2 + \alpha^2} \quad (3.54)$$

$$W_M = \frac{\beta}{q^2 + \alpha^2} \quad (3.55)$$

Donde:



$$h = \frac{H}{H_0} \tag{3.56}$$

$$q = \frac{Q}{Q_0} \tag{3.57}$$

$$\alpha = \frac{N}{N_0} \tag{3.58}$$

$$\beta = \frac{M}{M_0} \tag{3.59}$$

$$\theta = \arctan \frac{\alpha}{q} \tag{3.60}$$

$$Ns = \frac{Q_0}{H_0^{3/4}} \tag{3.61}$$

N la velocidad de rotación de la maquina

M el par aplicado desde el exterior sobre el eje de la máquina,

Ns la velocidad específica,

H la diferencia de carga total entre la descarga y la succión y,

El subíndice "0" indica que son los valores nominales de las variables que corresponden al punto de operación de máximo rendimiento de la máquina.

Knapp encontró que la similitud normal o aplicación de las leyes en curvas es bastante amplia, por lo menos en zonas útiles (bomba normal o funcionamiento de la turbina), y que la familia de curvas pudiera derivarse de una sola, una representación más concisa fue desarrollada por Marchal, Suter (referencia 12), en que los datos visualmente complejos del diagrama del círculo pueden ser representados por dos curvas  $W_H$  y  $W_M$ , (ver figura 3.8).

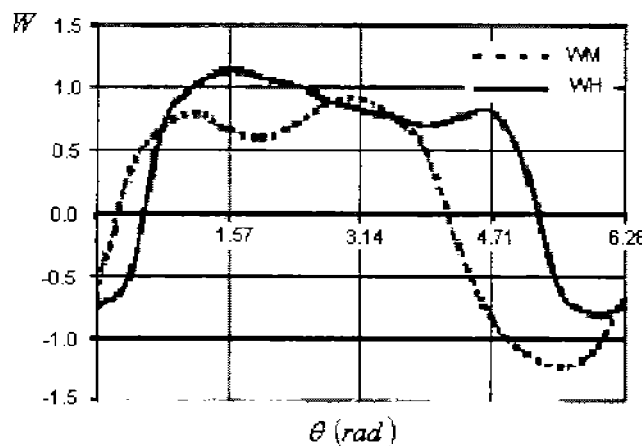


Figura 3.10. Curva Suter, representando las ecuaciones 25 y 26.

Las curvas de carga, torque y los parámetros  $W_H$  y  $W_M$  contra el ángulo pueden ser tratados como coordenadas polares y desplegar hacia atrás para rodear los diagramas

(referencia 2). Bombas y bombas como turbinas, la eficiencia  $\eta_p$  y  $\eta_t$  pueden ser derivados directamente para ello se tienen las siguientes relaciones:

$$\eta_p = \frac{W_H^2}{W_M^2} \frac{\eta_{bep,p}}{\tan \theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 3\pi/2) \tag{3.63}$$

$$\eta_t = \frac{W_M^2}{W_H^2} \frac{\eta_{bep,p}}{\tan \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \tag{3.64}$$

Estas representaciones se han aplicado principalmente para predecir el comportamiento de transitorios en bombas, en lugar de su comportamiento de bombas como turbinas, esta parte se puede ver con mayor detalle en el tema de pequeñas plantas hidroeléctricas, que no son tema de esta tesis.

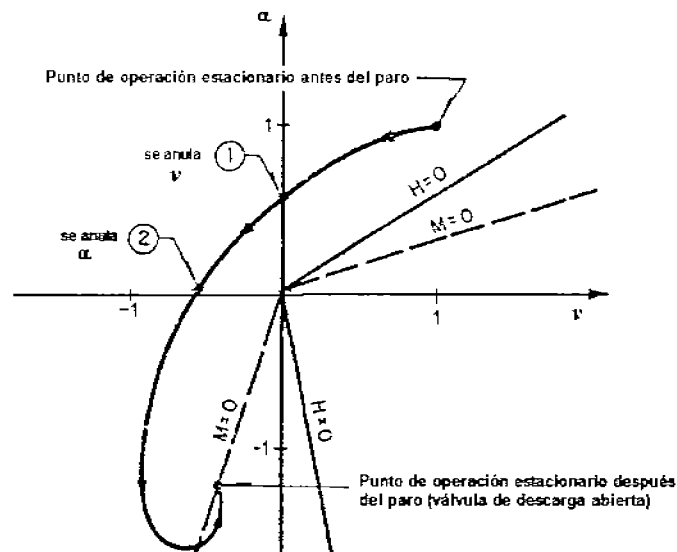


Figura 3.11. Evolución en el diagrama de los cuatro cuadrantes del punto representativo de la operación de la bomba después de un paro accidental en el cual permanece abierta la válvula de descarga.

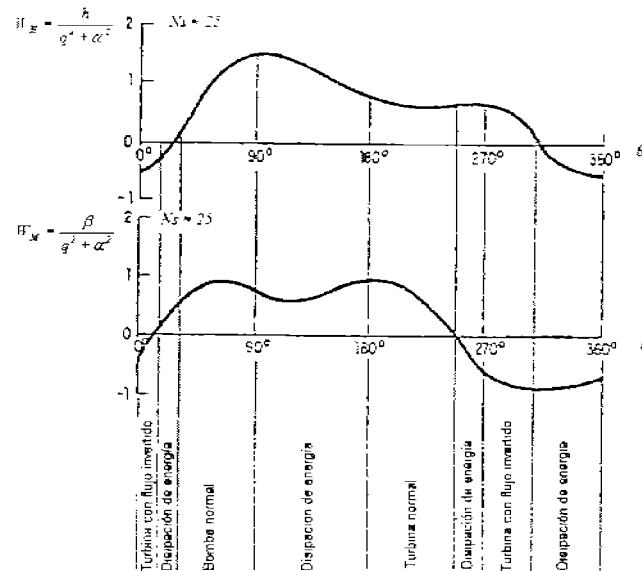


Figura 3.12. Representación gráfica de las funciones  $W_H$  y  $W_M$  de una bomba funcionando como turbina.

### 3.4. Modelado del rendimiento de una bomba como turbina.

A pesar de las investigaciones iniciales en el modelado de las curvas características en círculo de superficies en 3-D se encontró que la aplicación de las leyes de similitud en los diagramas de círculo lo hizo más simple al usar los métodos descritos anteriormente, se consideraron datos de bombas funcionando como turbinas y el modelo seleccionado apropiadamente.

El método estadístico de Alatorre-Frenk se aplicó para datos existentes “en el círculo completo” (referencia 10) para una bomba de flujo radial. Los resultados también se aplicaron a los datos obtenidos de las Turbinas Francis (referencia 3). Las predicciones del punto de mejor eficiencia (BEP) de Alatorre-Frenk en el diseño de la bomba funcionando como turbina se representaron en el diagrama de Suter y son muy similares a las figura 3.6 y 3.10.

El modelo se comparó con los datos publicados en la referencia 6, como sigue:

- Las ecuaciones 3.28 y 3.29 fueron aplicadas para el modo de bombeo con los datos en el punto de mejor eficiencia para generar las curvas de las bombas como turbinas de carga–gasto y potencia–gasto, con una velocidad de rotación fija de la bomba igual al de la turbina ( $N_t=N_p$ ).
- Todos los datos y predicciones de bombas como turbinas se llevaron a cabo hasta cerrar los diagramas con los datos generados, además dichas curvas se compararon entre si.

Se observó que los puntos obtenidos con las ecuaciones 3.28 y 3.29 de la bomba funcionando como turbina se ajustaron los puntos más cercanos, considerando el punto

de mejor eficiencia como turbina ( $BEP_t$ ), siendo este el cuadrático de ellos, la carga y la potencia se ve reducida para gastos pequeños.

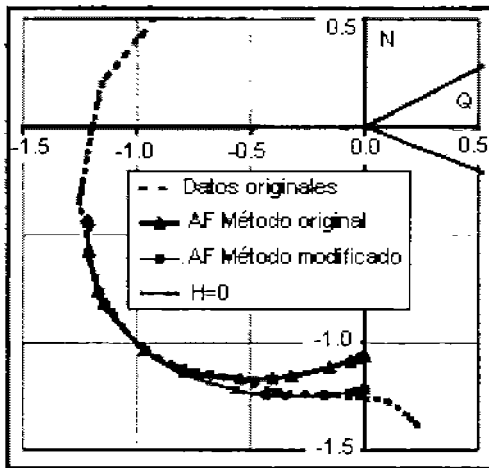


Figura 3.13. Datos y predicciones, zona de funcionamiento de una bomba como turbina

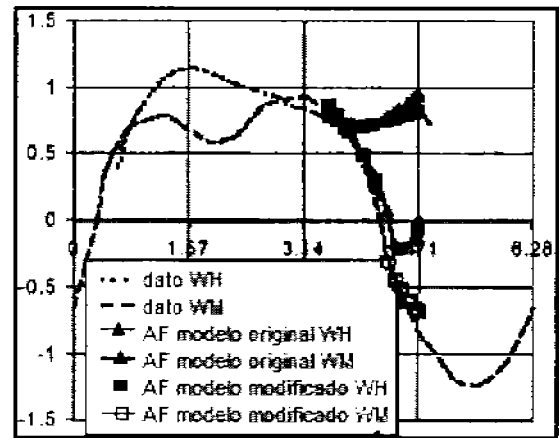


Figura 3.14. Diagrama de predicción suter de una bomba funcionando como turbina.

Las curvas de Alatorre-Frenk se ajustaron para acercarse más a la realidad en regiones estrechas de gastos pequeños. Tomando como una justificación uniforme, la ecuación cúbica de carga-gasto y torque para las curvas con velocidad constante (referencia 6 y 16); los puntos pronosticadas se ajustaron entre  $2Q_{bep,t}$  y  $0.5Q_{bep,t}$  para obtener una extrapolación más racional en la disipación de energía y el funcionamiento a la inversa en las bombas, ver figura 3.15.

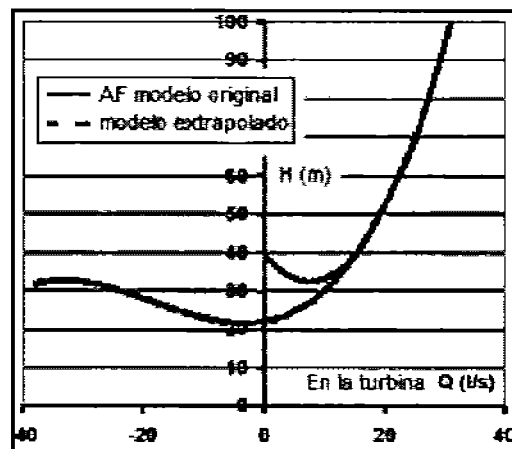


Figura 3.15. Curva de prueba modificada en la predicción de H-Q.

Una extrapolación similar de datos generados normalmente para el sistema de bombeo en el segundo cuadrante, en la región donde se disipa la energía. La combinación de estos puntos extrapolados habilitó por completo  $W_M$  y  $W_H$  en las curvas obtenidas para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , figura 3.14.

3.4.1. El Uso de los Diagramas de Suter.

La combinación y representación mediante el diagrama de Suter, se realizó con técnicas que involucran la predicción de bombas como turbinas (PAT), dichas curvas han demostrado ser muy útiles.

Algunos datos pueden entenderse más intuitivamente en el diagrama de círculo (referencia 12), los puntos que cruzan el valor cero para  $W_H$  y  $W_M$  en el diagrama Suter, el diagrama de círculo muestran un ángulo para cuando la carga es cero y las líneas de torque, una representación clara de la bomba y la eficiencia de la turbina que puede derivarse de  $W_H$  y  $W_M$ , además se grafican las ecuaciones 3.19 y 3.20.

La predicción de las curvas de Suter (referencia 9) se podrían analizar más allá de la forma de cada curva como la suma de dos curvas relacionadas entre si o como una onda repetida que equivale a un periodo,  $T = 2\pi$ .

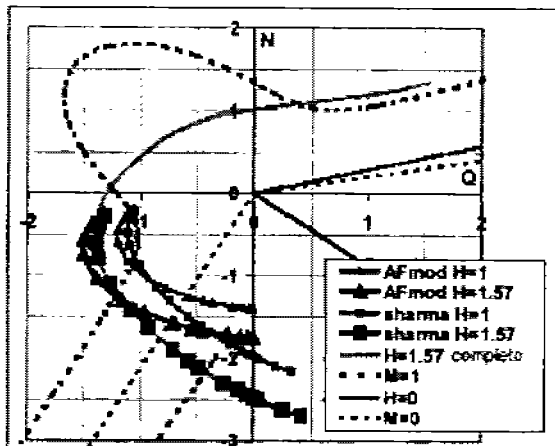


Figura 3.16. Predicción de curvas en círculo para una bomba.

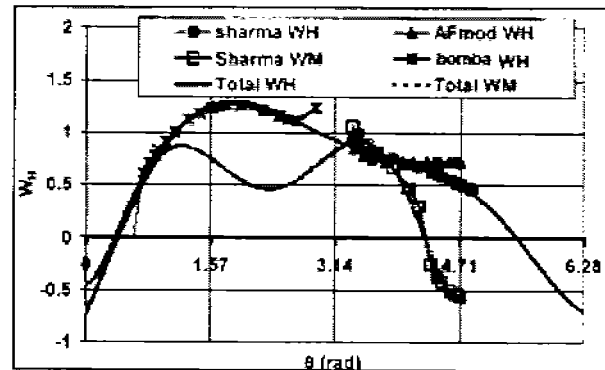


Figura 3.17. Adecuación y Predicción de curvas Suter, para una Bomba.

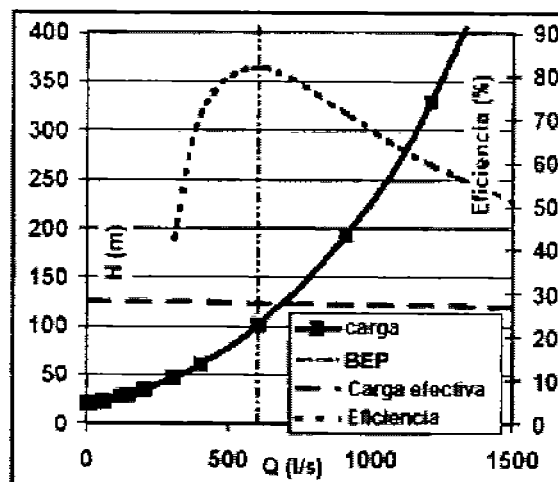


Figura 3.18. Curva de bomba como turbina de una bomba.

---

# **CAPÍTULO 4**

## **EXPERIMENTACIÓN**

---

#### 4.1. Descripción de la instalación experimental.

Las bombas de flujo radial y mixto se encuentran ubicadas en el laboratorio de hidráulica de la Facultad de Ingeniería, en la sala de máquinas hidráulicas.

La figura 4.1 y 4.2 muestra el sistema de bombeo indicando en cada una de ellas la rama de succión y de descarga donde se midieron las presiones de entrada y salida de las bombas.



Figura 4.1. Instalación de la bomba de flujo radial. Rango de operación de 1440 a 3280 rpm, potencia 15 HP.

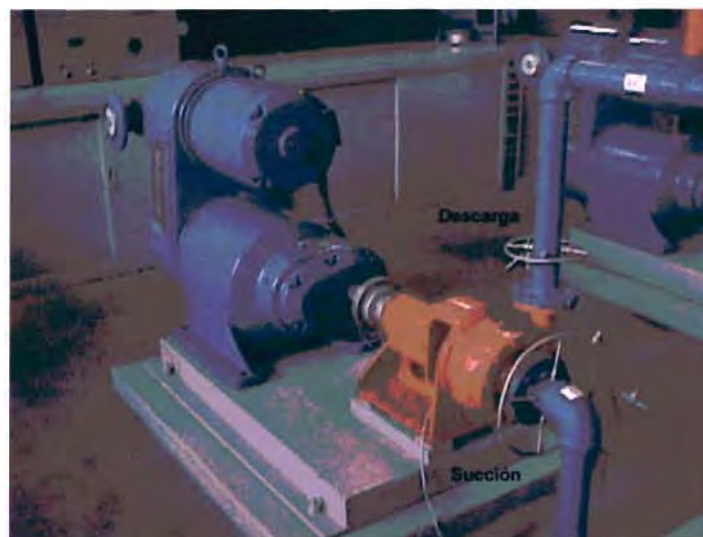


Figura 4.2. Instalación de la bomba de flujo mixto. Rango de operación de 820 a 3280 rpm, potencia 15 HP.

### 4.2. Obtención de las curvas características para las bombas de flujo radial y mixto.

Para obtener las curvas características en las bombas de flujo radial y flujo mixto, se midieron los siguientes datos:

- Las cargas de posición en las bridas de succión ( $z_s$ ) y descarga ( $z_d$ ), considerando el piso como plano horizontal de referencia, ver figura 5.1.

$$\begin{matrix} \text{Bomba de flujo radial} & & \text{Bomba de flujo mixto} \\ z_s = 0.325 \text{ m} & z_d = 0.320 \text{ m} & z_s = 0.475 \text{ m} & z_d = 0.785 \text{ m} \end{matrix}$$

- Los diámetros en la succión ( $D_s$ ) y la descarga ( $D_d$ ).

$$D_s = 0.0762 \text{ m} \quad D_d = 0.0508 \text{ m} \quad D_s = 0.0762 \text{ m} \quad D_d = 0.0635 \text{ m}$$

En las tablas 4.1 y 4.2 se muestra el resumen de los datos medidos en ambas bombas.

$N_B$ (rpm)	$P_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$P_s/\gamma$ (-) (cmHg)	$P_e$ (KW)	$h_{lim}$ (cm)
1425	0.6	34.0	5.1	22.10
	0.7	31.0	5.0	21.23
	0.9	26.5	4.9	20.05
	1.1	21.5	4.6	18.65
	1.3	18.0	4.3	16.85
	1.5	13.0	3.2	3.03
1500	0.6	36.0	5.8	22.60
	0.8	35.0	5.7	22.25
	1.0	32.0	5.6	21.52
	1.3	24.0	5.2	19.40
	1.6	17.5	4.6	16.66
	1.9	12.5	3.2	3.03
1575	0.7	36.0	5.8	22.75
	1.0	31.5	5.5	21.34
	1.3	26.0	5.2	19.90
	1.5	21.5	4.9	18.50
	1.7	16.5	4.5	16.05
1650	0.7	36.5	6.1	22.65
	0.9	35.0	6.0	22.33
	1.1	33.0	5.9	21.82
	1.4	26.0	5.5	19.94
	1.7	19.0	5.0	17.30
	2.0	14.0	3.6	3.03
1725	0.7	37.0	6.6	22.75
	1.0	35.0	6.5	22.20
	1.3	31.5	6.4	21.35
	1.5	27.5	6.1	20.10
	1.9	18.5	5.4	16.25
	2.2	13.0	3.8	3.03
1800	0.7	37.0	7.6	22.95
	1.0	36.5	7.4	22.70
	1.4	33.5	7.1	21.90
	1.8	26.5	6.9	20.10
	2.2	19.5	6.0	17.50
	2.5	13.0	4.1	3.03

$N_B$ (rpm)	$P_d$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$P_d/\gamma$ (-) (cmHg)	$P_e$ (KW)	$h_{lim}$ (cm)
1800	0.1	42.0	5.2	30.03
	0.3	39.0	4.9	29.74
	0.5	36.0	4.8	29.10
	0.8	26.0	4.5	27.73
	1.1	18.0	4.0	24.97
	1.4	12.0	3.2	9.08
1875	0.1	43.0	5.1	30.60
	0.4	40.0	5.0	30.05
	0.7	31.0	4.9	28.75
	0.9	27.0	4.6	28.00
	1.3	16.5	4.0	24.40
1950	0.2	45.0	5.4	30.80
	0.4	43.0	5.3	30.38
	0.7	34.5	5.1	29.53
	1.0	27.8	5.0	28.24
	1.3	20.3	4.6	26.28
2025	0.15	44.8	5.9	30.87
	0.4	44.5	5.8	30.70
	0.8	36.5	5.6	29.90
	1.2	27.3	5.1	28.22
	1.6	16.7	4.4	24.22
	1.8	12.0	3.3	9.08
2100	0.15	45.3	6.1	30.84
	0.4	45.2	6.0	30.84
	0.8	43.0	5.9	30.49
	1.2	31.3	5.7	29.10
	1.6	21.9	5.1	26.80
	2	12.1	3.4	9.08

Tabla 4.1. Medición de datos para obtener las curvas características en la bomba de flujo radial, con velocidades de 1425 a 1800 rpm.

Tabla 4.2. Medición de datos para obtener las curvas características en la bomba de flujo mixto, con velocidades de 1800 a 2100 rpm.

*Nomenclatura empleada en las tablas 4.1 y 4.2.*

- $N_B$  Velocidad angular de la bomba
- $P_d$  Presión de descarga
- $P_s/\gamma$  Carga de presión en la succión
- $P_e$  Potencia eléctrica
- $h_{lim}$  Nivel de la superficie libre del agua en el vertedor



**4.3. Cálculo de las curvas características.**

4.3.1. Bomba de Flujo Radial.

Procedimiento de cálculo a partir de los datos mostrados en la tabla 4.1.

Para obtener el gasto se utilizó un vertedor triangular y la ecuación de la Universidad Católica de Chile.

$$Q = C h^{5/2} ; C = \frac{8}{15} 2g \tan(\theta/2) \mu k$$

- Q gasto, en m<sup>3</sup>/s.
- C coeficiente de descarga, en m<sup>1/2</sup>/s.
- g gravedad, en m/s<sup>2</sup>.
- θ ángulo del vertedor, en grados.
- μ y K Coeficientes de gasto y del vertedor, se obtiene de las figuras 4.3 y 4.4 respectivamente.

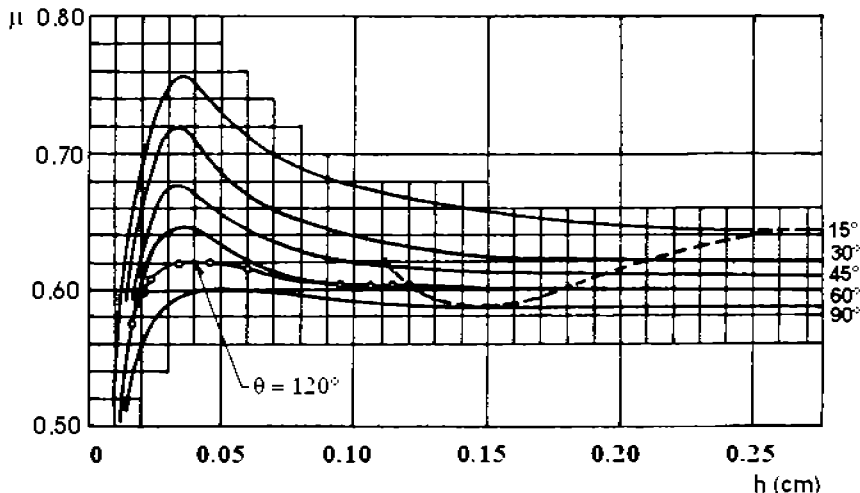


Figura 4.3. Coeficientes de gasto μ de vertedores triangulares en la fórmula de la Universidad Católica de Chile.

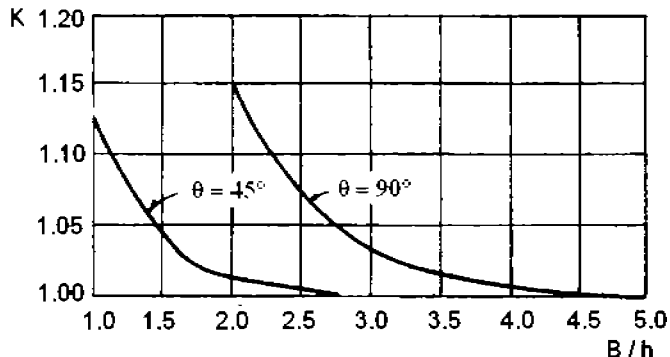


Figura 4.4. Valores de K (eje de las ordenadas) en la fórmula de la Universidad Católica de Chile para vertedores triangulares.

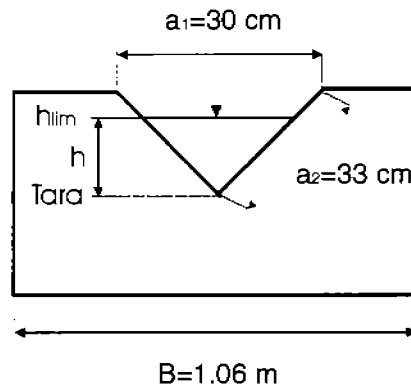


Figura 4.5. Características del vertedor de sección triangular.

De la figura 4.5 se obtiene el ángulo y la carga de agua sobre el vertedor:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \theta = 27^\circ ; h = 22.1 - 3.02 = 19.07 \text{ cm}$$

de la Universidad Católica de Chile se obtiene el coeficiente de descarga sobre el vertedor:

$$\mu = 0.61 \text{ (figura 5.3)} ; K = 1 \text{ (figura 5.4)} \Rightarrow C = 0.7282 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

$$Q = (0.7282)(0.1907)^{5/2} = 0.0116 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con el gasto calculado y los diámetros en la succión ( $D_s$ ) y descarga ( $D_d$ ) de la tubería, se obtiene la velocidad, aplicado la ecuación de continuidad y posteriormente se obtiene la carga de velocidad.

$$D_s = 0.0762 \text{ m} \Rightarrow A_s = 0.00456 \text{ m}^2 \Rightarrow v_s = 2.53 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{v_s^2}{2g} = 0.3277 \text{ m}$$

$$D_d = 0.0508 \text{ m} \Rightarrow A_d = 0.00203 \text{ m}^2 \Rightarrow v_d = 5.70 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{v_d^2}{2g} = 1.6592 \text{ m}$$

Con las cotas de posición en la bomba de flujo radial, la presión en la descarga y la carga de presión en la succión (tabla 4.1) y las cargas de velocidad calculadas en el punto anterior, se obtiene la carga de la bomba:

$$H_B = z_d - z_s + \frac{P_d}{\gamma} - \frac{P_s}{\gamma} + \frac{v_d^2}{2g} - \frac{v_s^2}{2g}$$

$$H_B = 11.04 \text{ m}$$

Con la carga y el gasto, se calcula la potencia hidráulica, potencia mecánica o potencia al freno y eficiencia de la bomba.

$$P_H = \gamma Q H \text{ (kg m/s)} \Rightarrow P_H = 9.81 Q H \text{ (kW)}$$

$$P_H = 9.81 (0.0116) (11.951) = 1.356 \text{ kW}$$

$$P_f = 0.182 P_e^{1.596} = 0.182 (5.1)^{1.596} = 2.451 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{P_H}{P_f} \Rightarrow \eta = 55.313 \%$$

Los cálculos realizados anteriormente se repiten para cada uno de los datos medidos en las tablas 4.1 y la solución de los puntos calculados se resumen en las tablas 4.3.

$N_s$ (rpm)	$P_{21}$ (m)	$P_{22}-1$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$H_e$ (m)	$P1$ (KW)	$\eta_1$ (KW)	$\eta$ (%)
1425	6.0	4.824	0.0192	13.04	2.45	1.56	66.31
	7.0	4.216	0.0102	12.25	2.37	1.23	51.63
	9.0	3.624	0.0066	13.55	2.30	1.13	49.12
	11.0	2.924	0.0072	14.74	2.06	0.98	47.39
	13.0	2.443	0.0057	15.70	1.67	0.73	42.30
	15.0	1.768	0.0000	16.76	1.16	0.00	0.00
1500	6.0	4.896	0.0122	12.33	3.07	1.49	49.38
	8.0	4.760	0.0117	14.12	2.93	1.62	55.33
	10.0	4.352	0.0106	15.47	2.85	1.61	56.62
	13.0	3.264	0.0073	17.63	2.53	1.30	51.26
	16.0	2.390	0.0050	18.62	2.06	0.90	43.52
	19.0	1.790	0.0000	20.70	1.16	0.00	0.00
1575	7.0	4.896	0.0125	13.23	3.01	1.54	54.60
	10.0	4.234	0.0104	16.17	2.78	1.56	56.41
	13.0	3.536	0.0084	17.24	2.53	1.43	56.47
	15.0	2.824	0.0068	18.33	2.30	1.23	53.90
	17.0	2.244	0.0044	19.42	2.01	0.84	41.96
	19.0	1.768	0.0000	20.76	1.26	0.00	0.00
1650	7.0	4.964	0.0123	13.21	3.26	1.63	49.66
	9.0	4.760	0.0115	14.82	3.18	1.76	55.27
	11.0	4.488	0.0117	16.33	3.09	1.87	59.54
	14.0	3.536	0.0086	18.25	2.75	1.52	54.99
	17.0	2.534	0.0056	19.83	2.37	1.06	45.84
	20.0	1.924	0.0000	21.52	1.41	0.00	0.00
1725	8.0	5.032	0.0125	13.98	3.70	1.63	43.26
	10.0	4.760	0.0115	16.75	3.61	1.84	50.84
	13.0	4.234	0.0104	18.35	3.52	1.87	53.03
	15.0	3.740	0.0087	19.43	3.26	1.66	50.96
	19.0	2.516	0.0046	21.72	2.69	0.98	36.40
	22.0	1.768	0.0000	23.76	1.53	0.00	0.00
1800	7.0	5.032	0.0126	13.66	4.63	1.77	38.96
	10.0	4.964	0.0124	16.43	4.44	2.00	45.15
	14.0	4.556	0.0112	19.73	4.16	2.17	52.19
	18.0	3.624	0.0087	22.30	3.97	1.97	49.01
	22.0	2.652	0.0056	24.98	3.18	1.47	44.36
	25.0	1.768	0.0000	26.76	1.73	0.00	0.00

Tabla 4.3. Obtención de las curvas características en la bomba de flujo radial, para velocidades comprendidas entre 1425 a 1800 rpm.

Con los datos de la tabla 4.3, carga – gasto se grafican las curvas características para la bomba de flujo radial.

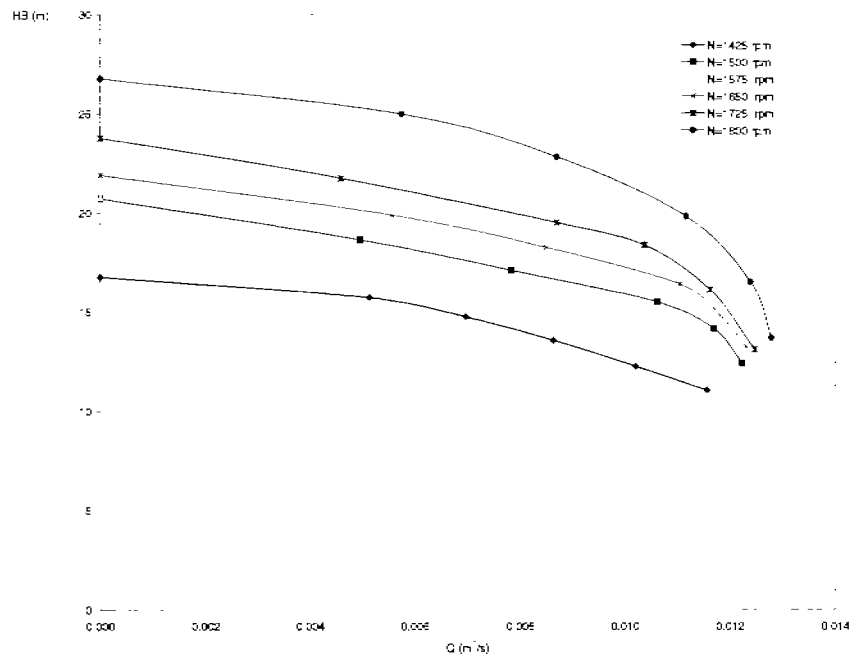


Figura 4.6. Curvas características en la bomba de flujo radial, para velocidades angulares de 1425 a 1800 rpm.

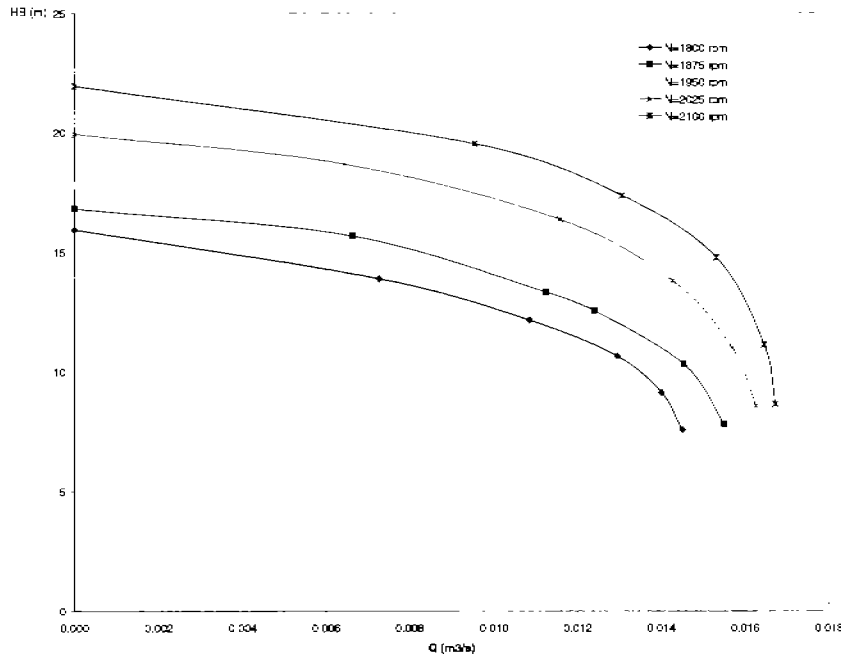
### 4.3.2. Bomba de Flujo Mixto.

El procedimiento para obtener las curvas características de la bomba de flujo mixto es similar al de la bomba de flujo radial, utilizando los datos medidos de la tabla 4.2.

$N_s$ (rpm)	$P_2/P_1$ (m)	$P_2/P_1 - 1$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$H_c$ (m)	$P_1$ (KW)	$P_2$ (KW)	$\eta$ (%)
1800	1.0	5.7	0.0145	7.58	2.53	1.08	42.65
	3.0	5.3	0.0140	9.13	2.30	1.25	54.58
	5.0	4.9	0.0130	10.65	2.23	1.35	60.90
	8.0	3.5	0.0108	12.16	2.01	1.29	64.44
	11.0	2.4	0.0073	13.90	1.66	0.99	59.58
	14.0	1.6	0.0000	15.94	1.16	0.00	0.00
1875	1.0	5.8	0.0155	7.79	2.45	1.19	48.98
	4.0	5.4	0.0145	10.31	2.37	1.47	61.91
	7.0	4.2	0.0124	11.93	2.30	1.45	63.07
	9.0	3.7	0.0112	13.31	2.08	1.47	70.65
	13.0	2.2	0.0066	15.67	1.66	1.02	61.31
	15.0	1.5	0.0000	16.81	1.16	0.00	0.00
1950	1.5	6.1	0.0159	8.59	2.69	1.34	49.85
	4.0	5.8	0.0151	10.76	2.61	1.60	61.24
	7.0	4.7	0.0137	12.49	2.45	1.67	68.29
	10.0	3.8	0.0116	14.45	2.37	1.64	69.25
	13.0	2.8	0.0089	16.26	2.08	1.41	68.06
	16.0	1.5	0.0000	17.81	1.16	0.00	0.00
2025	1.5	6.1	0.0160	8.58	3.09	1.35	43.54
	4.0	6.1	0.0157	11.01	3.01	1.70	56.33
	8.0	5.0	0.0143	13.81	2.85	1.94	68.01
	12.0	3.7	0.0116	16.38	2.45	1.86	75.86
	16.0	2.3	0.0064	18.69	1.94	1.18	60.99
	18.0	1.6	0.0000	19.94	1.22	0.00	0.00
2100	1.5	6.2	0.0160	8.64	3.26	1.35	41.45
	4.0	6.1	0.0160	11.13	3.18	1.74	54.81
	8.0	5.8	0.0153	14.78	3.09	2.22	71.79
	12.0	4.3	0.0130	17.01	2.93	2.16	73.82
	16.0	3.0	0.0095	19.53	2.45	1.83	74.61
	20.0	1.6	0.0000	21.96	1.28	0.00	0.00

**Tabla 4.4. Obtención de las curvas características en la bomba de flujo mixto, para velocidades comprendidas entre 1800 a 2100 rpm.**

Con los datos de la tabla 4.4, carga – gasto se grafican las curvas características para la bomba de flujo mixto.



**Figura 4.7. Curvas características en la bomba de flujo mixto, para velocidades de 1800 a 2100 rpm.**

4.3.3. Ajuste de las curvas características para la bomba de flujo radial.

Para obtener las curvas características de la bomba se utilizan las ecuaciones de similitud 3.7.4, 3.7.6 mostradas a continuación y la tabla 4.3, las curvas de operación de las bombas se transformaron a una sola curva con velocidad de giro igual a  $N_{max}$ .

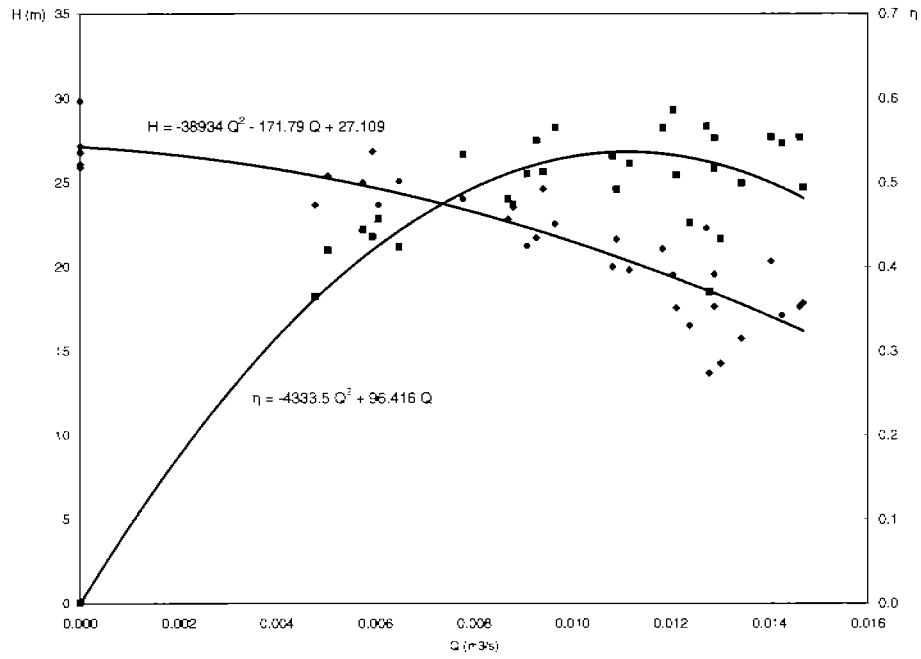
$$Q' = Q \left( \frac{N_{max}}{N} \right) \tag{4.1}$$

$$H' = H \left( \frac{N_{max}}{N} \right)^2 \tag{4.2}$$

Nm (rpm)	Q (m³/s)	HB (m)	Q' (m³/s)	H' (m)	η	η <sub>global</sub> (%)
1425	0.0116	11.04	0.0146	17.62	0.553	0.266
	0.0102	12.25	0.0129	19.54	0.516	0.245
	0.0086	13.55	0.0109	21.62	0.491	0.231
	0.0070	14.74	0.0088	23.52	0.473	0.214
	0.0051	15.70	0.0065	25.06	0.423	0.184
	0.0000	16.76	0.0000	26.75	0.000	0.000
1500	0.0122	12.38	0.0147	17.83	0.494	0.256
	0.0117	14.12	0.0140	20.33	0.553	0.284
	0.0106	15.47	0.0127	22.28	0.566	0.288
	0.0078	17.08	0.0094	24.60	0.513	0.249
	0.0050	18.62	0.0059	26.81	0.435	0.197
	0.0000	20.70	0.0000	29.80	0.000	0.000
1575	0.0125	13.09	0.0143	17.10	0.546	0.283
	0.0104	16.11	0.0118	21.04	0.564	0.284
	0.0084	17.24	0.0096	22.52	0.565	0.275
	0.0068	18.38	0.0078	24.01	0.533	0.250
	0.0044	19.43	0.0050	25.38	0.420	0.187
	0.0000	20.76	0.0000	27.12	0.000	0.000
1650	0.0123	13.21	0.0134	15.72	0.499	0.267
	0.0118	14.80	0.0129	17.61	0.553	0.293
	0.0111	16.39	0.0121	19.51	0.585	0.307
	0.0085	18.25	0.0093	21.72	0.550	0.276
	0.0056	19.89	0.0061	23.67	0.456	0.217
	0.0000	21.90	0.0000	26.06	0.000	0.000
1725	0.0125	13.08	0.0130	14.24	0.432	0.242
	0.0116	16.10	0.0121	17.53	0.508	0.282
	0.0104	18.35	0.0108	19.98	0.530	0.292
	0.0087	19.49	0.0091	21.22	0.510	0.272
	0.0046	21.72	0.0048	23.65	0.364	0.181
	0.0000	23.76	0.0000	25.87	0.000	0.000
1800	0.0128	13.66	0.0128	13.66	0.370	0.225
	0.0124	16.49	0.0124	16.49	0.451	0.271
	0.0112	19.79	0.0112	19.79	0.522	0.305
	0.0087	22.80	0.0087	22.80	0.480	0.276
	0.0058	24.98	0.0058	24.98	0.444	0.235
	0.0000	26.76	0.0000	26.76	0.000	0.000

**Tabla 4.5. Valores obtenidos en la bomba de flujo radial utilizando las ecuaciones de similitud, para velocidades de giro de 1425 rpm a 1800 rpm.**

Con los datos de la tabla 4.5 carga – gasto ( $H'$  -  $Q'$ ) se grafican las curvas características para la bomba de flujo radial y se obtiene una ecuación para la distribución de puntos.



**Figura 4.8. Dispersión de puntos de las Curvas características y de eficiencia a partir de la tabla 5.5, en la bomba de flujo radial.**

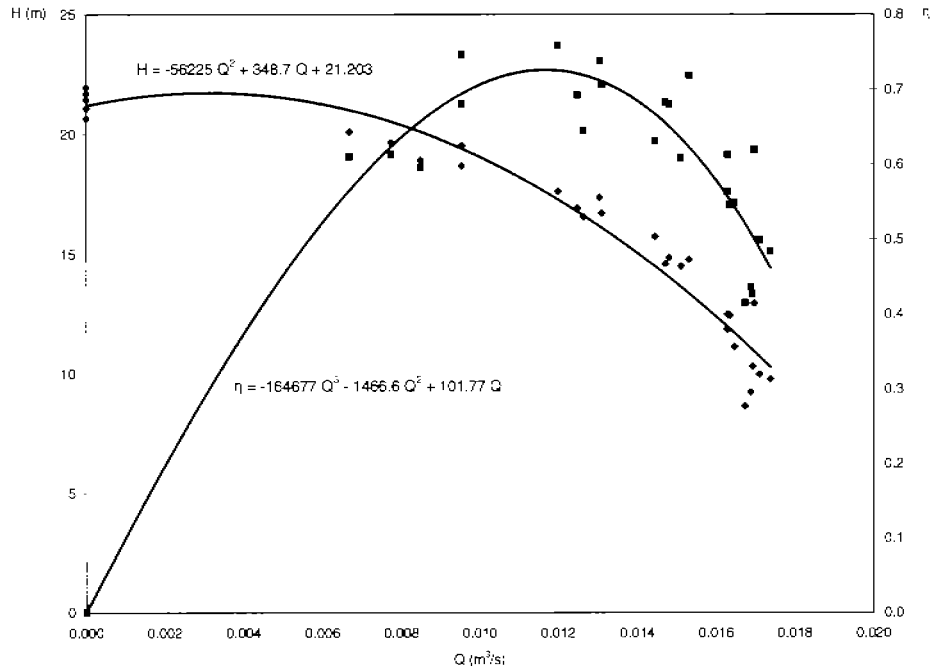
4.3.4. Ajuste de las curvas características para la bomba de flujo mixto.

Para obtener las curvas características de la bomba se utilizan las ecuaciones de similitud (4.1 y 4.2) y la tabla 4.4, las curvas de operación de las bombas se transformaron a una sola curva con velocidad de giro igual a  $N_{max}$ .

Nm (rpm)	Q (m <sup>3</sup> /s)	HB (m)	Q' (m <sup>3</sup> /s)	H' (m)	$\eta$	$\eta_{global}$
1800	0.0145	7.58	0.0169	10.31	0.426	0.207
	0.0140	9.13	0.0163	12.43	0.546	0.256
	0.0130	10.65	0.0151	14.49	0.608	0.282
	0.0108	12.16	0.0127	16.55	0.644	0.287
	0.0073	13.90	0.0085	18.92	0.596	0.248
	0.0000	15.94	0.0000	21.70	0.000	0.000
1875	0.0155	7.79	0.0174	9.77	0.484	0.233
	0.0145	10.31	0.0170	12.93	0.619	0.294
	0.0124	12.54	0.0145	15.73	0.631	0.296
	0.0112	13.31	0.0131	16.70	0.707	0.319
	0.0066	15.67	0.0077	19.66	0.613	0.255
	0.0000	16.81	0.0000	21.08	0.000	0.000
1950	0.0159	8.59	0.0171	9.97	0.498	0.248
	0.0151	10.76	0.0163	12.48	0.612	0.301
	0.0137	12.57	0.0147	14.58	0.683	0.328
	0.0116	14.59	0.0125	16.92	0.692	0.329
	0.0089	16.11	0.0095	18.68	0.681	0.308
	0.0000	17.81	0.0000	20.65	0.000	0.000
2025	0.0163	8.58	0.0169	9.22	0.435	0.228
	0.0157	11.01	0.0163	11.84	0.563	0.292
	0.0143	13.81	0.0148	14.85	0.680	0.346
	0.0116	16.38	0.0120	17.61	0.759	0.365
	0.0064	18.69	0.0067	20.10	0.610	0.268
	0.0000	19.94	0.0000	21.45	0.000	0.000
2100	0.0167	8.64	0.0167	8.64	0.415	0.222
	0.0165	11.13	0.0165	11.13	0.548	0.290
	0.0153	14.78	0.0153	14.78	0.718	0.376
	0.0131	17.36	0.0131	17.36	0.738	0.379
	0.0095	19.53	0.0095	19.53	0.746	0.359
	0.0000	21.96	0.0000	21.96	0.000	0.000

Tabla 4.6. Valores obtenidos en la bomba de flujo mixto utilizando las ecuaciones de similitud, para velocidades de giro de 1800 rpm a 2100 rpm.

Con los datos de la tabla 4.6 carga – gasto ( $H'$  -  $Q'$ ) se grafican las curvas características para la bomba de flujo mixto y se obtiene una ecuación para la distribución de puntos.



**Figura 4.9. Dispersión de puntos de las Curvas características y de eficiencia para su ajuste a partir de la tabla 4.6, en la bomba de flujo mixto.**



#### 4.4. Transformación de las curvas características a curvas Knapp.

##### 4.4.1. Obtención de valores nominales para la bomba de flujo radial.

Los valores nominales de la bomba se obtienen a partir de las ecuaciones de carga y eficiencia de la bomba que se obtienen en función del gasto, de la figura 4.8.

$$\eta = -4333.5 Q^2 + 96.416 Q \quad (4.3)$$

$$H = -38934 Q^2 - 171.79 Q + 27.109 \quad (4.4)$$

$$H = C_1 Q^2 + C_2 Q \left( \frac{N}{N_0} \right) + C_3 \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (4.5)$$

Derivando e igualando a cero la ecuación 4.3 se obtiene el gasto y la eficiencia máxima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dQ} (-4333.5 Q^2 + 96.416 Q) &= 0 \\ -8667 Q + 96.416 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Resolviendo la ecuación 4.6, se tiene:

$$Q_j = 0.0112 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Sustituyendo el gasto Q en la ecuación 4.3 y 4.4 se tiene:

$$\begin{aligned} \eta &= -4333.3 - (0.0112)^2 + 96.416 (0.0112) = 0.5362 \\ H &= -38934 (0.0112)^2 - 171.79 (0.0112) + 27.109 = 20.37 \text{ m} \end{aligned}$$

A partir de lo calculado anteriormente se obtienen los *datos nominales* para la bomba de flujo radial:

$$N_0 = 1800 \text{ rpm}; Q_0 = 0.0112 \text{ m}^3 / \text{s}; H_0 = 20.37 \text{ m}; \eta_0 = 53.62 \%$$

El valor de los coeficientes C, se obtienen de la ecuación 4.4, que en términos generales es la ecuación 3.7.

$$C_1 = -38934; C_2 = -171.79; C_3 = 27.109$$

Los valores C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> y C<sub>3</sub> obtenidos de la ecuación 4.2 se sustituyen en la ecuación 4.3, procediendo a proponer gastos y obteniendo cargas de la bomba al ir variando la

velocidad angular, por lo que se encuentra una ecuación general para la bomba de flujo radial.

$$H = -38934 Q^2 - 171.79 Q \left( \frac{N}{1800} \right) + 27.109 \left( \frac{N}{1800} \right)^2 \quad (4.7)$$

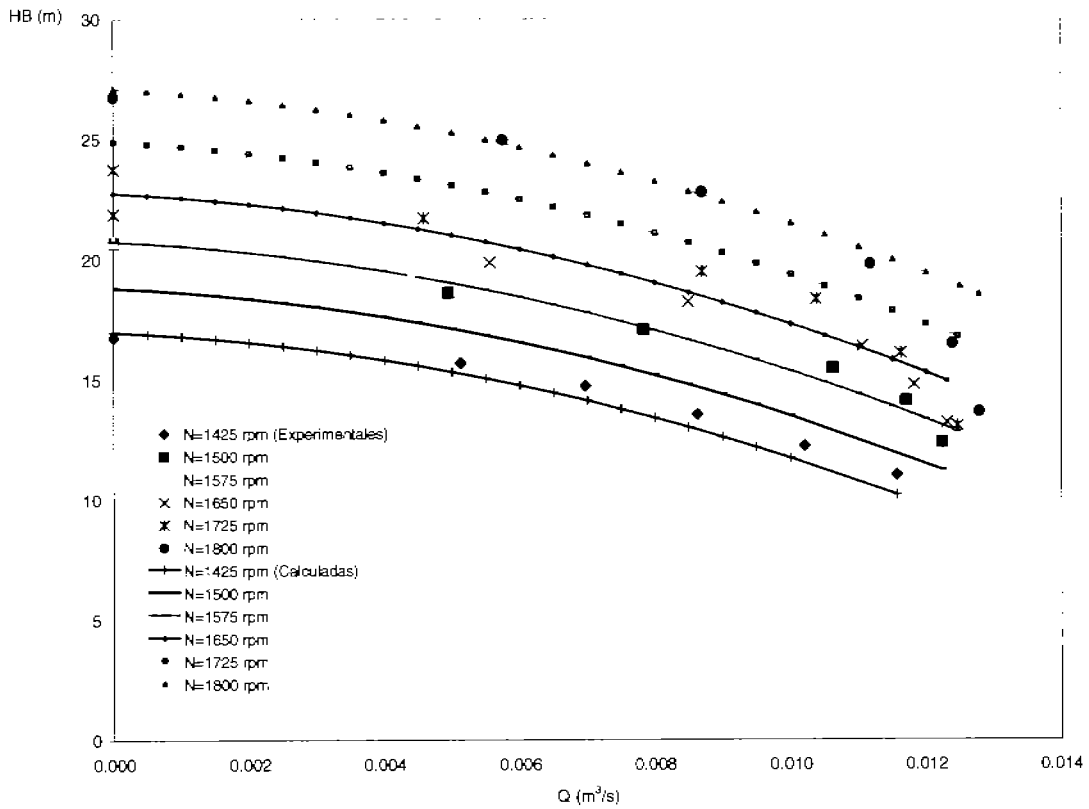
De la tabla 4.3 se obtiene el gasto  $Q = 0.0116 \text{ m}^3/\text{s}$  y la velocidad angular  $N = 1425 \text{ rpm}$  que se sustituyen en la ecuación 4.7.

$$H = -38934 (0.0116)^2 - 171.79 (0.0116) \left( \frac{1425}{1800} \right) + 27.109 \left( \frac{1425}{1800} \right)^2 = 10.21 \text{ m}$$

Una vez que se llevaron a cabo los cálculos para dicha bomba, se resume en la tabla 4.5 los resultados finales y se obtienen nuevamente las curvas características a partir de la ecuación 4.7, ver figura 4.8, para la bomba de flujo radial.

N (rpm)	Q (m <sup>3</sup> /s)	HB (m)	$\eta$	$\eta_{global}$
1425	0.0116	10.21	0.0048	0.261
	0.0102	11.55	0.0040	0.248
	0.0086	12.92	0.0031	0.227
	0.0070	14.16	0.0022	0.199
	0.0051	15.27	0.0013	0.159
	0.0000	16.99	0.0000	0.000
1500	0.0122	11.25	0.0054	0.269
	0.0117	11.83	0.0051	0.266
	0.0106	12.92	0.0045	0.257
	0.0078	15.32	0.0029	0.221
	0.0050	17.16	0.0013	0.161
	0.0000	18.83	0.0000	0.000
1575	0.0125	12.83	0.0059	0.273
	0.0104	15.02	0.0047	0.260
	0.0084	16.71	0.0035	0.237
	0.0068	17.93	0.0025	0.209
	0.0044	19.33	0.0012	0.153
	0.0000	20.76	0.0000	0.000
1650	0.0123	14.94	0.0061	0.274
	0.0118	15.48	0.0058	0.272
	0.0111	16.28	0.0054	0.269
	0.0085	18.63	0.0038	0.243
	0.0056	20.70	0.0019	0.188
	0.0000	22.78	0.0000	0.000
1725	0.0125	16.79	0.00637	0.275
	0.0116	17.73	0.00597	0.273
	0.0104	19.00	0.00527	0.267
	0.0087	20.52	0.00419	0.251
	0.0046	23.32	0.00150	0.169
	0.0000	24.90	0.00000	0.000
1800	0.0128	18.54	0.0067	0.274
	0.0124	19.00	0.0066	0.275
	0.0112	20.33	0.0060	0.274
	0.0087	22.67	0.0044	0.256
	0.0058	24.83	0.0024	0.204
	0.0000	27.11	0.0000	0.000

Tabla 4.7. Obtención de datos de las curvas características en la bomba de flujo radial a partir de la ecuación 5.5.



**Figura 4.10. Curvas características experimentales y teóricas (tabla 4.5) de la bomba de flujo radial.**

#### 4.4.2. Obtención de valores nominales para la bomba de flujo mixto.

Los valores nominales de la bomba se obtienen a partir de las ecuaciones de carga y eficiencia de la bomba que se obtienen en función del gasto, de la figura 4.8.

$$\eta = -164677 Q^3 - 1466.6 Q^2 + 101.77 Q \quad (4.8)$$

$$H = -56225 Q^2 + 348.7 Q + 21.203 \quad (4.9)$$

$$H = C_1 Q^2 + C_2 Q \left( \frac{N}{N_0} \right) + C_3 \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad (4.10)$$

Derivando e igualando a cero la ecuación 4.6 se obtiene el gasto y la eficiencia máxima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dQ} (-164677 Q^3 - 1466.6 Q^2 + 101.77 Q) &= 0 \\ -494031 Q^2 - 2933.2 Q + 101.77 &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática (4.11) con la fórmula general, se tiene:

$$a = -494031, \quad b = -2933.2 \quad y \quad c = 101.77$$

$$Q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Q_1 = 0.0116 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = -0.0176 \text{ m}^3/\text{s}$$

Sustituyendo el gasto  $Q_1$  en la ecuación 4.6 y 4.7 se tiene:

$$\eta = -164677 (0.0116)^3 - 1466.6 (0.0116)^2 + 101.77 (0.0116) = 0.7261$$

$$H = -56225 (0.0116)^2 + 348.7 (0.0116) + 21.203 = 17.60 \text{ m}$$

A partir de lo calculado anteriormente se obtienen y los *datos nominales* para la bomba de flujo mixto:

$$N_0 = 2100 \text{ rpm}; \quad Q_0 = 0.0116 \text{ m}^3/\text{s}; \quad H_0 = 17.60 \text{ m}; \quad \eta_0 = 72.61 \%$$

El valor de los coeficientes C, se obtienen de la ecuación 4.9, que en términos generales es la ecuación desarrollada en el capítulo 3.

$$C_1 = -56225; \quad C_2 = 348.7; \quad C_3 = 21.203$$

Los valores  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  obtenidos de la ecuación 4.9 se sustituyen en la ecuación 4.10, procediendo a proponer gastos y obteniendo cargas de la bomba al ir variando la velocidad angular, por lo que se encuentra una ecuación general para la bomba de flujo radial.

$$H = -56225 Q^2 + 348.7 Q \left( \frac{N}{1800} \right) + 21.203 \left( \frac{N}{1800} \right)^2 \tag{4.12}$$

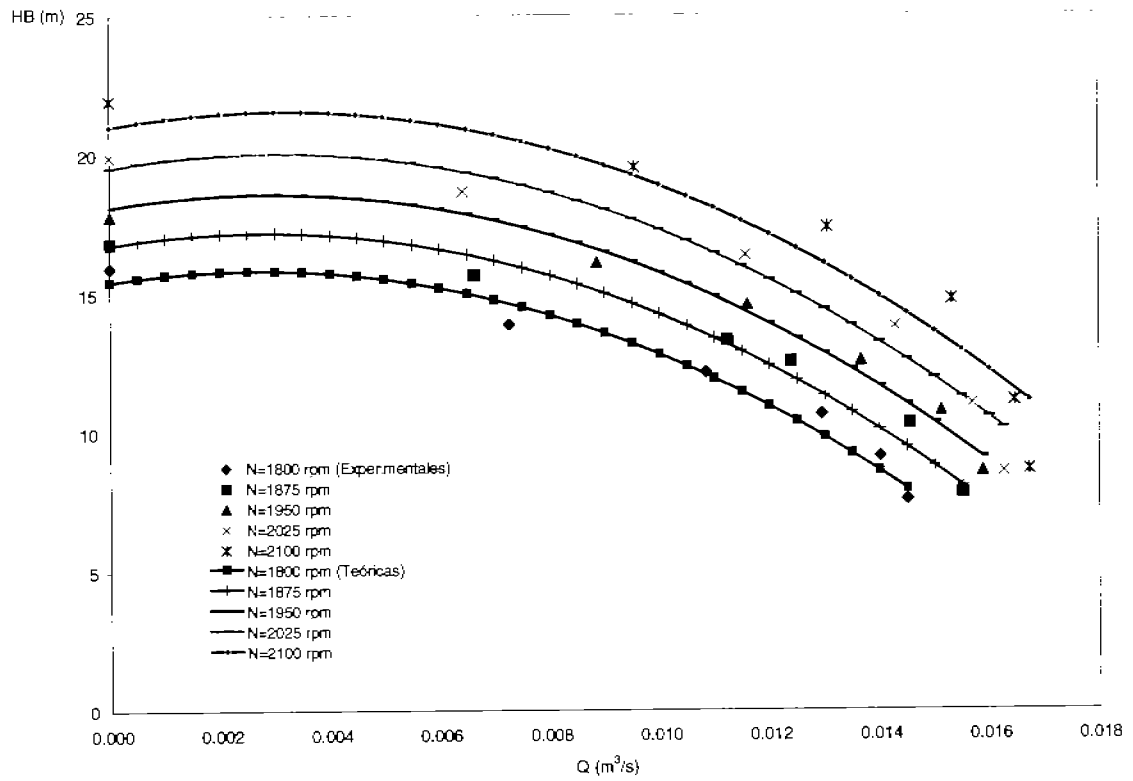
De la tabla 4.3 se obtiene el gasto  $Q = 0.0116 \text{ m}^3/\text{s}$  y la velocidad angular  $N = 1425 \text{ rpm}$  que se sustituyen en la ecuación 4.5.

$$H = -56225 (0.015)^2 + 348.7 (0.015) \left( \frac{1800}{2100} \right) + 21.203 \left( \frac{1800}{2100} \right)^2 = 7.41 \text{ m}$$

Una vez que se llevaron a cabo los cálculos para dicha bomba, se resume en la tabla 4.6 los resultados finales y se obtienen nuevamente las curvas características a partir de la ecuación 4.10, ver figura 4.9, para la bomba de flujo mixto.

N (rpm)	Q (m <sup>3</sup> /s)	HB (m)	η	η <sub>global</sub>
1800	0.0145	7.95	0.7221	0.3432
	0.0140	8.60	0.7254	0.3424
	0.0130	9.89	0.7237	0.3364
	0.0108	12.08	0.6871	0.3085
	0.0073	14.65	0.5373	0.2242
	0.0000	15.45	0.0000	0.0000
1875	0.0155	8.06	0.6906	0.3350
	0.0145	9.40	0.7137	0.3420
	0.0124	11.99	0.7234	0.3360
	0.0112	13.16	0.7073	0.3223
	0.0066	16.36	0.5171	0.2140
	0.0000	16.76	0.0000	0.0000
1950	0.0159	9.10	0.6539	0.3207
	0.0151	10.17	0.6839	0.3326
	0.0137	12.07	0.7189	0.3429
	0.0116	14.32	0.7203	0.3328
	0.0089	16.59	0.6463	0.2835
	0.0000	18.13	0.0000	0.0000
2025	0.0163	10.14	0.5997	0.2970
	0.0157	10.98	0.6334	0.3120
	0.0143	12.89	0.6932	0.3359
	0.0116	15.91	0.7242	0.3370
	0.0064	19.39	0.5361	0.2236
	0.0000	19.55	0.0000	0.0000
2100	0.0167	11.13	0.5210	0.2599
	0.0165	11.54	0.5434	0.2707
	0.0153	13.18	0.6229	0.3074
	0.0131	15.99	0.7121	0.3416
	0.0095	19.24	0.6946	0.3134
	0.0000	21.03	0.0000	0.0000

Tabla 4.8. Obtención de datos de las curvas características en la bomba de flujo mixto a partir de la ecuación 4.9.



**Figura 4.11.** Curvas características experimentales y teóricas (tabla 4.6) de la bomba de flujo mixto.

## 4.4.3. Curvas adimensionales para la bomba de flujo radial.

Para transformar las curvas características de la figura 4.8 a curvas Knapp o curvas adimensionales se presentan las ecuaciones obtenidas en el capítulo 3, y son las siguientes:

Parámetros adimensionales

$$\text{Gasto} \quad q = \frac{Q}{Q_0} \quad (4.13)$$

$$\text{Carga} \quad h = \frac{H}{H_0} \quad (4.14)$$

$$\text{Velocidad} \quad \alpha = \frac{N}{N_0} \quad (4.15)$$

$$\text{Par} \quad \beta = \frac{M}{M_0} \quad (4.16)$$

Curvas Knapp o curvas adimensionales

$$\text{Carga} \quad W_H = \frac{h}{q^2 + \alpha^2} \quad (4.17)$$

$$\text{Par} \quad W_M = \frac{\beta}{q^2 + \alpha^2} \quad (4.18)$$

$$\text{Ángulo} \quad \tan \theta = \frac{\alpha}{q} \quad (4.19)$$

N (rpm)	Q <sub>0</sub> (m <sup>3</sup> /s)	H <sub>0</sub> (m)	η	P <sub>0</sub> (Kw)	M <sub>0</sub> (N m)
1800	0.0112	20.370	0.5362	4.17	22.14
1725	0.0107	18.708	0.5362	3.67	20.34
1650	0.0103	17.116	0.5362	3.22	18.61
1575	0.0098	15.596	0.5362	2.80	16.95
1500	0.0093	14.146	0.5362	2.42	15.38
1425	0.0089	12.767	0.5362	2.07	13.88

**Tabla 4.9.** Obtención de los parámetros Q<sub>0</sub> y H<sub>0</sub> a partir de las ecuaciones de similitud, 4.1 y 4.2, tomando en cuenta los datos nominales para la bomba de flujo radial.

N (rpm)	Q (m <sup>3</sup> /s)	HB (m)	$\eta$	P (kW)	M (N m)	q = Q/D <sup>2</sup>	h = H/H <sub>1</sub>	$\alpha = N/N_1$	$\beta = M/M_1$	$W_H = h / (q^2 - \alpha^2)$	$W_M = \beta / (q^2 - \alpha^2)$	$\tan \theta = \eta / q$
1425	0.0116	11.04	0.5531	2.26	15.17	1.30	0.86	1.00	1.09	0.32	0.40	37.48
	0.0102	12.25	0.5183	2.37	15.91	1.15	0.96	1.00	1.15	0.41	0.49	40.89
	0.0086	13.56	0.4912	2.34	15.65	0.97	1.06	1.00	1.13	0.54	0.58	45.77
	0.0070	14.74	0.4733	2.13	14.26	0.79	1.15	1.00	1.03	0.71	0.64	51.85
	0.0051	15.70	0.4232	1.87	12.51	0.58	1.23	1.00	0.90	0.92	0.68	58.96
	0.0000	16.76	0.0000			0.00	0.00	1.31	1.00	0.00		
1500	0.0122	12.38	0.4938	3.01	18.16	1.31	0.88	1.00	1.25	0.32	0.46	37.34
	0.0117	14.12	0.5533	2.63	18.63	1.25	1.00	1.00	1.21	0.39	0.47	38.59
	0.0106	15.47	0.5662	2.85	18.32	1.14	1.09	1.00	1.18	0.48	0.51	41.32
	0.0078	17.08	0.5125	2.56	16.30	0.84	1.21	1.00	1.06	0.71	0.62	50.07
	0.0050	18.62	0.4352	2.06	13.23	0.53	1.32	1.00	0.86	1.03	0.67	62.05
	0.0000	20.70	0.0000			0.00	0.00	1.46	1.00	0.00		
1575	0.0125	13.09	0.5463	2.93	17.77	1.27	0.84	1.00	1.05	0.32	0.40	38.16
	0.0104	16.11	0.5641	2.90	17.60	1.06	1.03	1.00	1.04	0.49	0.49	45.41
	0.0084	17.24	0.5647	2.83	15.33	0.86	1.11	1.00	0.90	0.63	0.52	49.26
	0.0068	18.38	0.5330	2.30	13.34	0.69	1.18	1.00	0.82	0.80	0.56	56.25
	0.0044	19.43	0.4186	2.01	12.17	0.45	1.25	1.00	0.72	1.04	0.60	65.74
	0.0000	20.76	0.0000			0.00	0.00	1.33	1.00	0.00		
1650	0.0123	13.21	0.4968	3.20	18.52	1.20	0.77	1.00	1.00	0.32	0.41	38.82
	0.0118	14.80	0.5527	3.10	17.97	1.15	0.86	1.00	0.97	0.37	0.42	40.98
	0.0111	16.39	0.5654	3.04	17.57	1.08	0.96	1.00	0.94	0.44	0.44	42.89
	0.0085	18.25	0.5498	2.76	16.90	0.83	1.07	1.00	0.86	0.63	0.51	50.40
	0.0056	19.89	0.4564	2.37	13.74	0.54	1.16	1.00	0.74	0.90	0.57	61.58
	0.0000	21.90	0.0000			0.00	0.00	1.28	1.00	0.00		
1725	0.0125	13.08	0.4325	3.70	20.48	1.16	0.70	1.00	1.01	0.30	0.43	40.72
	0.0118	16.10	0.5084	3.61	19.98	1.08	0.86	1.00	0.98	0.40	0.45	42.73
	0.0104	18.35	0.5303	3.52	19.49	0.97	0.98	1.00	0.96	0.51	0.50	45.97
	0.0087	19.49	0.5096	3.26	18.06	0.81	1.04	1.00	0.89	0.63	0.54	50.99
	0.0046	21.72	0.3642	2.69	14.86	0.43	1.16	1.00	0.73	0.98	0.62	66.85
	0.0000	23.76	0.0000			0.00	0.00	1.27	1.00	0.00		
1800	0.0128	13.66	0.3698	4.63	24.58	1.14	0.67	1.00	1.11	0.29	0.48	41.21
	0.0124	16.49	0.4515	4.44	23.55	1.11	0.81	1.00	1.06	0.36	0.48	42.11
	0.0112	18.79	0.5219	4.16	22.05	1.00	0.97	1.00	1.00	0.49	0.50	45.08
	0.0087	22.80	0.4801	4.05	21.49	0.78	1.12	1.00	0.97	0.70	0.61	52.18
	0.0058	24.98	0.4436	3.18	16.85	0.51	1.23	1.00	0.76	0.97	0.60	62.82
	0.0000	26.76	0.0000			0.00	0.00	1.31	1.00	0.00		

Tabla 4.10. Obtención de las curvas adimensionales a partir de la tabla 4.6 y los datos de la tabla 4.3 con las ecuaciones 4.11 a la 4.17.

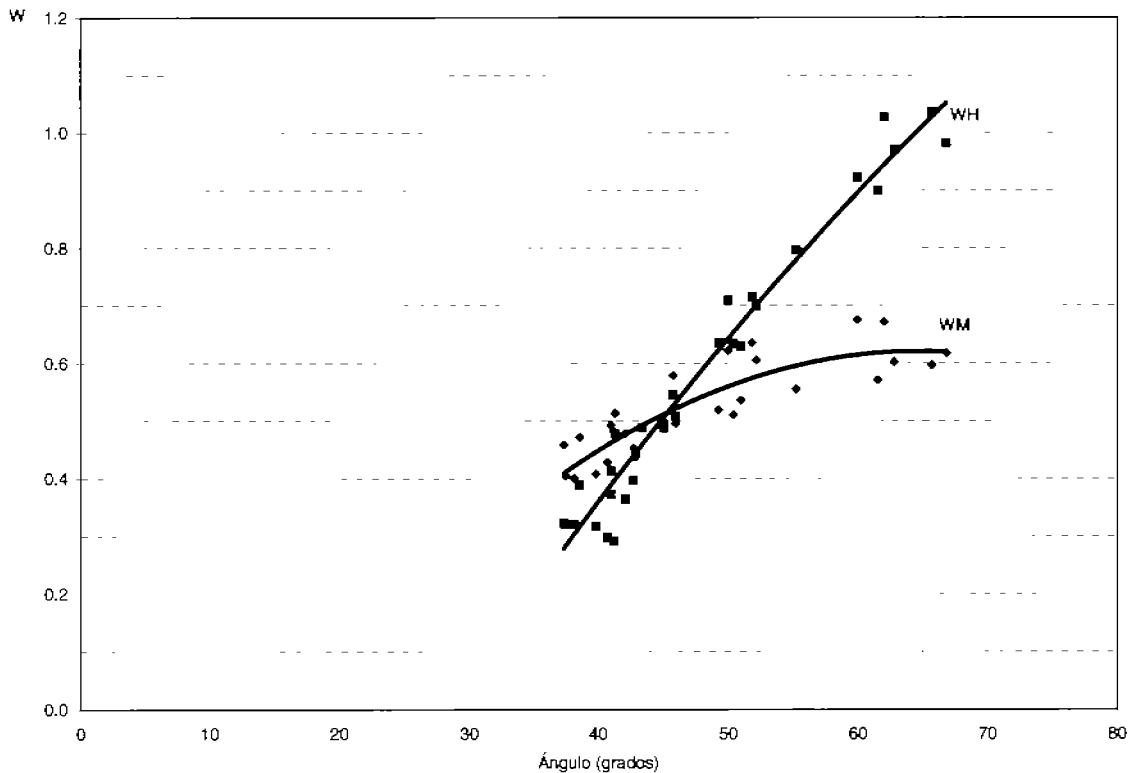


Figura 4.12. Familia de curvas Knapp o curvas adimensionales,  $W_H$  y  $W_M$  para la bomba de flujo radial.



4.4.4. Curvas adimensionales para la bomba de flujo mixto.

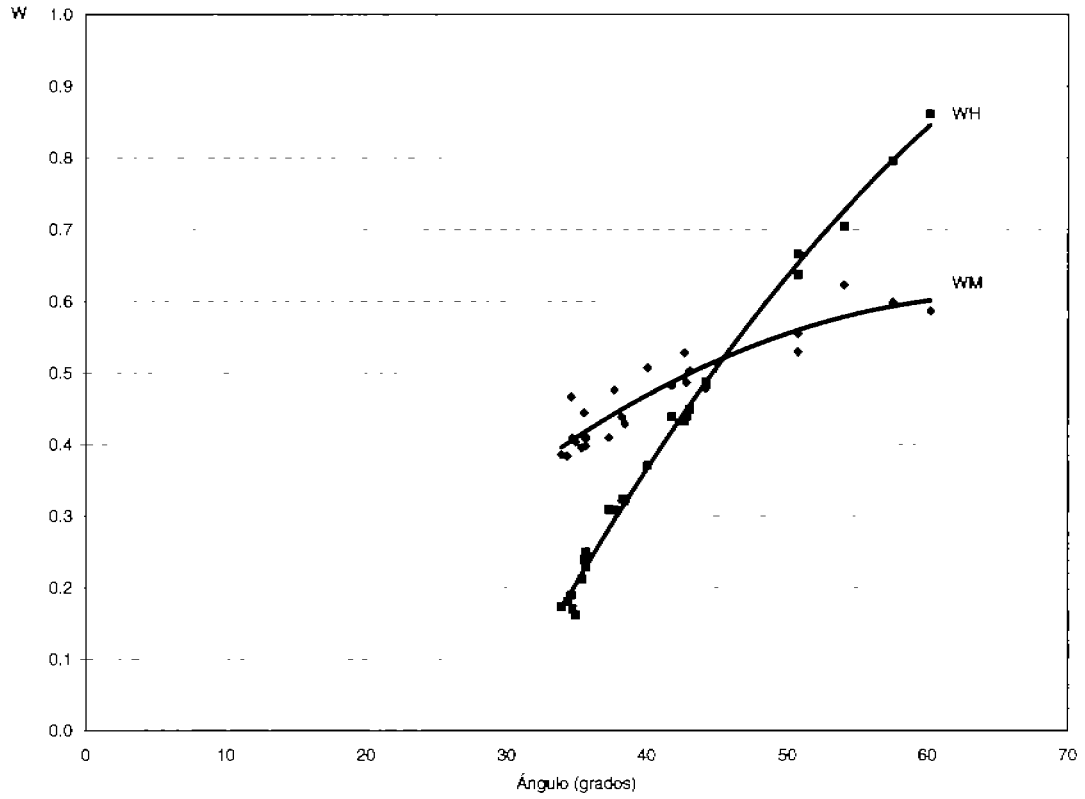
Para transformar las curvas características de la figura 4.9 a curvas Knapp o curvas adimensionales se presentan en las ecuaciones 4.13 a 4.19.

N (rpm)	Q <sub>0</sub> (m <sup>3</sup> /s)	H <sub>0</sub> (m)	η	P <sub>0</sub> (kW)	M <sub>0</sub> (N m)
2100	0.0117	17.598	0.7262	2.78	12.63
2025	0.0113	16.363	0.7262	2.49	11.75
1950	0.0109	15.174	0.7262	2.22	10.89
1875	0.0104	14.029	0.7262	1.98	10.07
1800	0.0100	12.929	0.7262	1.75	9.28

**Tabla 4.11. Obtención de los parámetros Q<sub>0</sub> y H<sub>0</sub> a partir de las ecuaciones de similitud 4.1 y 4.2, tomando en cuenta los datos nominales para la bomba de flujo mixto.**

N (rpm)	Q (m <sup>3</sup> /s)	HB (m)	η	P (kW)	M (N m)	q = Q/Q <sub>0</sub>	h = HB/H <sub>0</sub>	α = NN <sub>0</sub>	β = MM <sub>0</sub>	W <sub>1</sub> = h/(q <sup>2</sup> + α <sup>2</sup> )	W <sub>2</sub> = β/(q <sup>2</sup> + α <sup>2</sup> )	tan θ = α/q
1800	0.0146	7.58	0.4265	2.53	13.41	1.45	0.59	1.00	1.44	0.19	0.47	34.63
	0.0140	9.13	0.5458	2.30	12.20	1.40	0.71	1.00	1.31	0.24	0.44	35.57
	0.0130	10.65	0.6090	2.23	11.80	1.29	0.82	1.00	1.27	0.31	0.48	37.72
	0.0108	12.16	0.6444	2.01	10.65	1.08	0.94	1.00	1.15	0.43	0.53	42.72
	0.0073	13.30	0.5958	1.66	8.82	0.73	1.07	1.00	0.95	0.70	0.62	54.04
	0.0000	15.94	0.0000		0.00	0.00	1.23	1.00	0.00			
1875	0.0155	7.79	0.4838	2.45	12.48	1.49	0.56	1.00	1.24	0.17	0.39	33.93
	0.0145	10.31	0.6191	2.37	12.09	1.39	0.73	1.00	1.20	0.25	0.41	35.66
	0.0124	12.54	0.6307	2.42	12.31	1.19	0.89	1.00	1.22	0.37	0.51	40.10
	0.0112	13.31	0.7065	2.08	10.59	1.08	0.95	1.00	1.05	0.44	0.49	42.86
	0.0066	15.67	0.6191	1.66	8.47	0.64	1.12	1.00	0.84	0.60	0.60	57.55
	0.0000	16.81	0.0000		0.00	0.00	1.20	1.00	0.00			
1950	0.0159	8.59	0.4985	2.59	13.15	1.46	0.57	1.00	1.21	0.18	0.38	34.35
	0.0151	10.76	0.8124	2.61	12.76	1.39	0.71	1.00	1.17	0.24	0.40	35.67
	0.0137	12.57	0.6829	2.47	12.08	1.26	0.85	1.00	1.11	0.32	0.43	38.47
	0.0116	14.59	0.6925	2.40	11.75	1.07	0.96	1.00	1.09	0.45	0.50	43.06
	0.0089	16.11	0.6806	2.06	10.08	0.82	1.06	1.00	0.92	0.64	0.55	50.77
	0.0000	17.81	0.0000		0.00	0.00	1.17	1.00	0.00			
2025	0.0163	8.58	0.4354	3.14	14.83	1.44	0.52	1.00	1.26	0.17	0.41	34.71
	0.0157	11.01	0.5633	3.01	14.19	1.39	0.67	1.00	1.21	0.23	0.41	35.68
	0.0143	13.81	0.6801	2.85	13.42	1.27	0.84	1.00	1.14	0.32	0.44	38.27
	0.0116	16.38	0.7586	2.45	11.56	1.03	1.00	1.00	0.99	0.49	0.48	44.24
	0.0064	18.69	0.6099	1.94	9.13	0.57	1.14	1.00	0.78	0.66	0.59	60.25
	0.0000	19.94	0.0000		0.00	0.00	1.22	1.00	0.00			
2100	0.0167	8.64	0.4145	3.42	15.56	1.43	0.49	1.00	1.23	0.16	0.40	34.94
	0.0165	11.13	0.5481	3.28	14.91	1.41	0.63	1.00	1.18	0.21	0.40	35.38
	0.0153	14.78	0.7179	3.09	14.06	1.31	0.84	1.00	1.11	0.31	0.41	37.35
	0.0131	17.36	0.7382	3.01	13.70	1.12	0.99	1.00	1.09	0.44	0.48	41.83
	0.0095	19.53	0.7461	2.45	11.15	0.82	1.11	1.00	0.88	0.67	0.53	50.76
	0.0000	21.96	0.0000		0.00	0.00	1.25	1.00	0.00			

**Tabla 4.12. Obtención de las curvas adimensionales a partir de la tabla 4.9 y los datos de la tabla 4.4 con las ecuaciones 4.13 a la 4.19.**



**Figura 4.13. Familia de curvas Knapp o curvas adimensionales,  $W_H$  y  $W_M$  para la bomba de flujo mixto.**

---

# **CONCLUSIONES**

---

Para la obtención de las curvas adimensionales o curvas Knapp, se llevo a cabo una investigación minuciosa de algunos artículos y publicaciones hechas en la ASHRAE y ASME.

Se realizaron mediciones en bombas de flujo radial y flujo mixto (tablas 4.1 y 4.2), con los datos medidos se calcularon las curvas características y de eficiencia para ambas bombas.

Para las curvas obtenidas se hizo un ajuste aplicando las ecuaciones de similitud 4.1 y 4.2 obteniendo los valores nominales de cada una de las bombas para la velocidad de giro máxima, con estos datos se obtiene una ecuación general y se construyen las curvas características y de eficiencia proponiendo gasto y fijando una velocidad angular en las bombas (ecuaciones 3.8 y 3.11) para los rangos establecidos en las figuras 4.1 y 4.2.

Después de haber realizado el procedimiento mencionado en el párrafo anterior se obtuvieron los parámetros adimensionales (ecuaciones 4.13 a la 4.16); y las curvas Knapp (ecuaciones 4.17 a la 4.18) en las dos bombas.

Se construyen las curvas Knapp en las bombas de flujo radial (figura 4.12) y flujo mixto (figura 4.13), para ambos sistemas de bombeo el punto de intersección de los parámetros  $W_H$  y  $W_M$  contra el ángulo es de  $0.5$  y  $45^\circ$  respectivamente, siendo esta una forma de poder comprobar la obtención de dichas curvas y que las ecuaciones obtenidas para su construcción son correctas para las bombas.

Las técnicas examinadas y desarrolladas en esta tesis pueden ser usadas para simplificar los datos de las bombas y predecir el comportamiento de las mismas.

Debido a que cada uno de éstos diagramas (figuras 4.12 y 4.13) son representados para ser usados por una variedad de bombas comerciales de velocidad específica similar.

El comportamiento de modelos pueden desarrollarse los métodos para la aplicación de las bombas centrífugas como las turbinas hidráulicas usando la información de esta tesis y las leyes de similitud de bomba-turbina. Para el diseño final, el fabricante de la bomba debe ser consultado para la selección de equipos específicos y la obtención de datos para saber el comportamiento de las mismas.

Si la velocidad de operación del modo turbina no es la misma que la operación como bomba, podemos hacer uso de las leyes de afinidad, de tal modo que podamos transformar los parámetros para cualquier velocidad.

En este trabajo no fue posible poder evaluar el funcionamiento de las bombas trabajando en sentido inverso (como turbinas), y solo se presenta la transformación de las curvas características a curvas adimensionales en un solo cuadrante.

---

# **REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**

---

1. **Williams A. Arthur.**, "Pumps as Turbine" a user's guide, IDTG Publishing, Second Edition, Great Britain 2003.
2. **Allan, M. R.**, "Modelling of Pumped Storage and Hydropower Potential Within Water Supply Networks," Loughborough University, UK, 2001.
3. **Mansoor S.**, "Behaviour and Operation of Pumped Storage Hydro Plants", PhD Thesis, University of Wales, April 2000.
4. **Williams A. Arthur.**, "Small Hydro for Energy Recovery in the Water Supply Network" *Proc. IMechE 2000*, pp. 235-242
5. **Bahnfleth, W. P. & Kirchner, C. G.**, "Analysis of Transfer Pumping Interfaces for Stratified Chilled Water Thermal Storage System," Part. 1. *Trans. ASHRAE*, 1999.
6. **Williams A. Arthur.**, "The Turbine Performance of Centrifugal Pumps: a Comparison of Prediction Methods", *Proc. IMechE* 1994, Vol.208, pp. 59-66.
7. **Stelzer, R. S. & Walters, R. N.** "Estimating Reversible Pump-Turbine Characteristics," United States Department of the Interior Bureau of Reclamation, Engineering monograph no. 39, 1977.
8. **M. Marchal, G. Flesch & P. Suter**, "The calculation of waterhammer problems by means of the digital computer", *Int. Symposium on Waterhammer in Pumped Storage Projects*, Chicago, ASME pp162-188, Nov. 1965
9. **Donsky, Benjamin**, "Complete Pump Characteristics and the Effects of Specific Speeds on Hydraulic Transients," *J. of Basic Engineering*, Dec. 1961, pp. 685-699.
10. **Stepanoff, A. J.**, "*Centrifugal and axial flow pumps*",. New York: John Wiley and Sons, 1957, pp. 276 – 277.
11. **Kittredge, C. P.**, "Hydraulic Transients in Centrifugal Pump Systems," *Trans.*, ASME, Vol. 78, 1956, pp. 1307-1322.
12. **Swanson, W. M.**, "Complete Characteristics Circle Diagrams for Turbomachinery," *Trans. ASME*. Vol. 75, 1953, pp. 819-826.
13. **Parmakian, John**, "Pressure Surges at Large Pump Installations" *Trans. ASME*, Vol. 75, 1953, pp. 995-1006.
14. **Parmakian, John**, "Pressure Surge Control at Tracy Pumping Plant," *Proc. ASCE*, Vol. 79, Separate No. 361, Hydraulics Div., Dec. 1953.

15. **Knapp, R. T.**, "Complete Characteristics of Centrifugal Pumps and Their Use in Prediction of Transient Behavior," *Trans. ASME*, Vol. 59, 1937; pp. 683-689.
16. **Alatorre-Frenk, C. & Thomas, T.** "Selection of Pumps-as-turbines" (republication), *Hydronet* 1/96, pp 6-7.
17. **Chaudhry H. M.**, *Applied Hydraulic Transients*, Van Nostrand Rein Hold, Vancouver Canada, 1975.
18. **Streeter, V. L. & Wylie B. E.**, *Fluid Transients*, McGRAW-HILL, USA, 1978.
19. **Mataix Claudio**; *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*, Editorial Harla, México 2001.
20. **Gardea V. H.**; *Aprovechamientos hidroeléctricos y de bombeo*, Editorial Limusa, México 1993.
21. **Carmona P. R.**; *Transitorios hidráulicos en conducciones de agua a presión*, Instituto de Ingeniería, UNAM, México 1990.
22. **Allievi, L.**, "Theory of Waterhammer," translated by E. E. Holmes, printed by Riccardo Garoni, Rome, Italy, 1925.
23. **Alatorre-Frenk**, "Cost Minimisation in Microhydro Systems Using Pumps-as-Turbines", PhD thesis, University of Warwick, March 1994.
24. **Robinson G.**, "Investigation into the Use of Reduced Pressure from a Water Main to Generate Electricity" (unpublished), Nottingham Trent University, May 2000.
25. **Smith, Nigel**, "Motors as Generators for Micro-hydro Power", IT Publications, London, 1995, ISBN 1-85339-286-3, or see Pico Hydro issue no. 1, Induction Generators for Pico Hydro in Sri Lanka by PC Hettiaratchi.