



---

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELO JERÁRQUICO MULTITEMPERATURA  
PARA SEGMENTACIÓN MARKOVIANA**

**T E S I S**

**PARA OPTAR POR EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES**

**P R E S E N T A:  
ING. LUDWIN VENTURA LÓPEZ LÓPEZ**

**T U T O R:  
DR. MIGUEL MOCTEZUMA FLORES**



**MAYO 2008**

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Jorge Lira Chávez

Secretario: Dr. Fernando Arámbula Cosío

Vocal: Dr. Miguel Moctezuma Flores

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Boris Escalante Ramírez

2<sup>do.</sup> Suplente: Dr. Victor García Garduño

Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

**TUTOR DE TESIS:**  
Dr. Miguel Moctezuma Flores

---

**FIRMA**

---

---

Gracias papá por regalarme tu experiencia.

Gracias UNAM por la beca recibida durante la maestría.

---

---

# MODELO JERARQUICO MULTITEMPERATURA PARA SEGMENTACION MARKOVIANA

## INDICE

RESUMEN	5
1. INTRODUCCION	
1.1. OBJETIVO	6
1.2. FUNDAMENTACION	6
1.3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	7
1.4. APORTACIÓN DE LA TESIS	8
2. CAMPOS ALEATORIOS DE MARKOV (CAM)	
2.1. GENERALIDADES	9
2.2. TOPOLOGIAS	11
2.2.1. VECINDADES	11
2.2.2. CLIQUES	12
2.3. PROPIEDADES DE MARKOV	14
2.3.1. MODELO DE ISING	16
2.3.2. MODELO DE POTTS	18
3. RECOCIDO SIMULADO	
3.1. GENERALIDADES	20
3.2. RECOCIDO SIMULADO	20
3.3. ESQUEMAS DE DECREMENTO DE TEMPERATURA	24
4. ESQUEMA DE PROCESAMIENTO	
4.1. GENERALIDADES	25
4.2. ESQUEMA TIPICO DE SEGMENTACION MARKOVIANA	26
4.2.1 CALCULO DE LAS FUNCIONES DE ENERGIA	29
4.2.2 OPTIMACION DE LA FUNCION DE ENERGIA A POSTERIORI	31
4.3. ESQUEMA PROPUESTO	34
4.3.1 FUNCION DE ENERGÍA JERARQUICA	36
4.3.2 PROCESAMIENTO MULTITEMPERATURA	37
4.4 RESULTADOS	40
4.4.1 IMAGENES SINTETICAS	40
4.4.2 IMAGENES DE PERCEPCION REMOTA	46
4.4.3 COMPARACION CON OTROS MÉTODOS DE SEGMENTACION	49
4.5 TABLAS	51
5. CONCLUSIONES	53
6. REFERENCIAS	54

---

**Resumen**

En el siguiente trabajo propongo un modelo basado en la teoría de Campos Aleatorios de Markov (CAM) para la segmentación de imágenes digitales, basado en un esquema jerárquico y de optimización estocástica multitemperatura.

El esquema típico consiste en modelar toda la imagen como una sola malla. Para acelerar la convergencia del algoritmo el modelo propuesto descompone la imagen original en varias mallas de diferentes tamaños. Se busca la solución del problema en una resolución menor y se utiliza este resultado para encontrar el mínimo global del nivel original.

La base de nuestro modelo consiste en analizar la función de energía original como una suma de funciones de potencial entre niveles adyacentes. Estas funciones de potencial están definidas sobre vecindades de bloques y dependen de las etiquetas asociadas a estos niveles.

Una vez obtenida la función de energía, se realiza la optimización, para llevar a cabo tal tarea se usará una adaptación del algoritmo de recocido simulado basado en el algoritmo de Metropolis-Hastings. El algoritmo de optimización estocástica seguirá un esquema de decremento multitemperatura.

**Abstract**

The present work proposes a hierarchical scheme for image segmentation which employs a Markov Random Field (MRF) model and stochastic multi-temperature optimization.

The typical use of a MRFs consists on analyzing the entire image as if it were a single lattice. In order to improve the convergence time when using this modelling approach, this work proposes a scheme that separates the original image into several images, each at different resolutions. Hence, the problem can then be solved at lower resolutions, and afterwards, the output at a lower resolution can be used to find a solution for the original image.

The proposed approach is to construct a model that incorporates the energy function as a sum of the original functions of potential between adjacent levels of resolution. These functions are defined over square neighborhoods and are dependent upon the labels assigned at the correspondent resolution.

Once the energy function is thus defined, optimization is carried out employing a modified version of simulated annealing based on the Metropolis-Hastings algorithm.

# 1 Introducción

## 1.1 Objetivo

Proponer un modelo basado en la teoría de Campos Aleatorios de Markov (CAM) para la segmentación de imágenes digitales, basado en un esquema jerárquico y de optimación estocástica multitemperatura.

## 1.2 Fundamentación

El modelo de Campo Aleatorio de Markov (CAM) para el procesamiento digital de imágenes fue introducido en [GEMA84], siendo utilizado a partir de entonces en problemas de procesamiento digital de imágenes tales como restauración y segmentación.

La demanda en tiempo de cómputo ha sido la principal crítica en el uso práctico de los CAM bajo el método de optimación estocástica. El espacio de configuraciones es grande y la búsqueda del mínimo global es una tarea computacional intensa ya que este es un problema de naturaleza combinatoria. Pero en contraparte de esta desventaja, el modelado de una imagen bajo un esquema de CAM no necesita de gran cantidad de información a priori para realizar su tarea.

El esquema típico consiste en modelar toda la imagen como una sola malla o lattice. Para acelerar la convergencia de los algoritmos se han desarrollado métodos multiresolución, en el cual el problema se descompone en varias mallas de diferentes tamaños. Se busca la solución del problema en una resolución menor y se proyecta el resultado en la resolución original. Estos métodos proveen un medio para mejorar la convergencia del procedimiento iterativo de optimación. Se mostró en [TERZ86] que la optimación multiresolución puede ser usada para resolver eficientemente problemas de visión.

La técnica multiresolución ha sido estudiada para el modelado de CAM por varios autores. Desde [KONR88] se combina el análisis bayesiano aplicado a la estimación de campos de movimiento utilizando diferentes resoluciones de la imagen original, en [KATO96] se utiliza un modelo multiresolución para la segmentación supervisada en el cual cada nivel de la pirámide es resuelto por medio de un procesador exclusivo para tal fin. En [HU91] se estudia la segmentación de texturas por medio de un modelo multiresolución basado en CAM utilizando un enfoque no-supervisado.

Existen diferentes aproximaciones de segmentación basadas en distintos tamaños de mallas o lattices. En [MARQ92] se propone un MRF jerárquico de dos pirámides, una de etiquetas y otra de observaciones. Bouman [BOUM91] propone

un modelo jerárquico donde cada resolución menor es dependiente de la resolución inmediata superior.

La base de nuestro modelo consiste en el modelo jerárquico de CAM propuesto en [HEIT91] y retomado por Z. Kato [KATO93, KATO96]. El modelo jerárquico consiste en analizar la función de energía original como una suma de funciones de potencial entre niveles adyacentes. Estas funciones de potencial están definidas sobre vecindades de bloques y dependen de las etiquetas asociadas a estos entre los niveles adyacentes de la pirámide de segmentaciones. De esta manera existe comunicación entre las mallas de los diferentes niveles de la pirámide multiresolución.

Una vez obtenida la función de energía, se realiza la optimación, para llevar a cabo tal tarea se usará una adaptación del algoritmo de recocido simulado basado en el algoritmo de Metropolis-Hastings. El algoritmo de optimación estocástica genera una secuencia de muestras de la función de energía a posteriori hasta llegar al mínimo global.

### 1.3 Definición del problema

La segmentación de imágenes es un proceso que divide una imagen en un conjunto de regiones de interés para su análisis, basándose en características similares tales como intensidad, textura o forma. Este proceso es el primer nivel para el entendimiento de la imagen y afecta el procesamiento posterior de ésta, proporcionando estructuras útiles tales como regiones y bordes. La segmentación bajo el modelo de CAM proporciona gran capacidad de incorporar información contextual en el modelo de segmentación. Esto conlleva a una segmentación que proporciona gran robustez en los resultados en imágenes ruidosas.

El esquema para modelar un CAM considera a la imagen digital como una lattice, se definen las funciones de probabilidad conjuntas de cada clase observada para optimar la función de energía a posteriori tomando como base la teoría de probabilidad de Bayes. Utilizando un método de optimación global se buscará la solución para la función de energía a posteriori buscando la configuración que satisfaga el criterio Máximo A Posteriori (MAP).

La búsqueda del máximo global es una tarea computacional intensa. Para acelerar el proceso de convergencia, se plantea el uso de un modelo jerárquico. De esta manera, la función de energía original se analiza como una suma de funciones de potencial entre niveles adyacentes. La desventaja de reducir la resolución espacial de la imagen original consiste en que la discriminación entre objetos disminuye. Para resolver este problema se utilizará una comunicación entre los diferentes



niveles de resolución en la pirámide. La segmentación se resuelve en el nivel de resolución menor y posteriormente en el nivel de resolución mayor.

Este modelo resulta en un esquema de multimalla que reemplaza el problema de optimación de una sola malla por una secuencia de problemas de optimación más fácilmente tratables. Usando una estrategia de arriba hacia abajo en la pirámide de segmentaciones el problema de optimación para la malla inferior es resuelto utilizando el nivel superior. De esta manera se establecen funciones de energía que consideran el resultado obtenido en los diferentes niveles de la pirámide. Este sistema de comunicación permite incorporar información existente entre los niveles de la jerarquía.

Para optimar las funciones de energía relacionadas a cada nivel de la pirámide, se usará un esquema multitemperatura basado en el algoritmo de recocido simulado con ciertas modificaciones. La ventaja de este algoritmo consiste en que no es dependiente de la configuración inicial de clases a priori siempre y cuando se realice una inicialización estocástica y se inicialice con una temperatura lo suficientemente alta. Otra ventaja importante de este algoritmo es que permite encontrar el mínimo global saliendo de los mínimos locales.

#### **1.4 Aportación de la Tesis**

Los puntos que aporta esta tesis son:

1. Estudio sobre técnicas de procesamiento de imágenes y su aplicación a imágenes ruidosas.
2. Estudio sobre segmentación por Campos Aleatorios de Markov utilizando un modelo jerárquico.
3. Estudio sobre optimación estocástica utilizando un esquema multitemperatura que toma principios del algoritmo de recocido simulado.
4. Aplicación del esquema de segmentación propuesto en imágenes digitales.

## 2 Campos Aleatorios de Markov

### 2.1 GENERALIDADES

La segmentación de una imagen se considera como un problema de etiquetado, de tal manera que la solución al problema de segmentación es la etiqueta asignada a cada píxel de la imagen. Así en la imagen segmentada cada píxel recibe el nombre de site. Sea  $S$  el conjunto discreto con  $m$  sites:

$$S = \{1, 2, \dots, m\}$$

Para una imagen de  $n \times n$  pixels se puede denotar al conjunto de sites de la siguiente manera:

$$S = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

La relación que guardan entre sí diferentes sites es tratada en el punto 2.2.1.

$L$  es el conjunto de etiquetas que puede tomar cada site. Este conjunto de etiquetas puede ser discreto como por ejemplo la segmentación de una imagen en 5 clases, como se observa en la figura 2.1 a) o puede ser un conjunto continuo como el cálculo de profundidad en un par de imágenes estereoscópicas, en donde cada píxel puede tomar un valor continuo de profundidad, figura 2.1 b). En el caso continuo, este conjunto de etiquetas posibles podría corresponder a  $\mathbb{R}$  (conjunto de números reales) o a un intervalo determinado de éste:

$$L_c = [x_l, x_h] \subset \mathbb{R}$$

Donde  $[x_l, x_h]$  es el valor mínimo y el valor máximo de profundidad del campo de vista presente en el par estereoscópico. Para el caso discreto de segmentación, las etiquetas solo podrán tomar un valor determinado dentro de un conjunto de  $M$ -clases:

$$L = \{l_1, \dots, l_M\} = \{1, \dots, M\}$$

En el problema de etiquetado se tiene que asignar a cada site de  $S$  una etiqueta de  $L$ . Depende de la naturaleza de nuestro problema si este conjunto  $L$  presenta un número discreto o continuo de etiquetas. Sí se desean detectar los bordes presentes en una imagen,  $S$  contendrá a todos los sites pertenecientes a la imagen y cada uno tomará una etiqueta perteneciente al conjunto  $L$ , donde  $L = \{\text{borde}, \text{no borde}\}$ .

A cada site de  $S$  se le ha asignado una de las etiquetas de  $L$  con la función *mapping* o de mapeo  $f$ :

$$f : S \rightarrow L$$

A cada site de  $S$  solo se le asigna una única etiqueta de  $L$ .

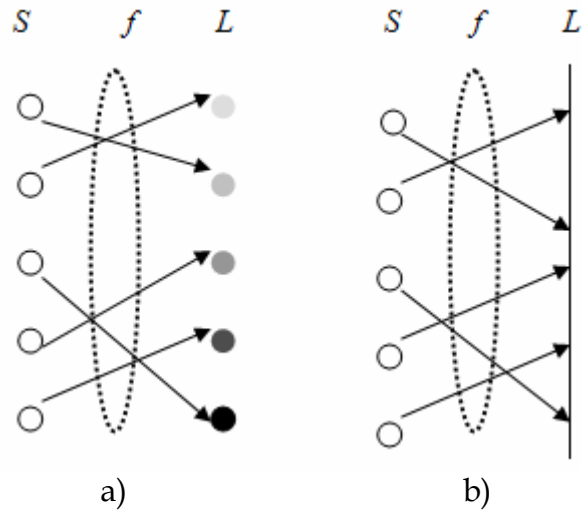


Figura 2.1

Etiquetado discreto (segmentación en 5 clases) y etiquetado continuo (medición de profundidad).

En la terminología de campos aleatorios un conjunto específico de etiquetas recibe el nombre de configuración, se consideran casos específicos de configuraciones a cada una de las imágenes de la figura 2.2. En este caso el conjunto de etiquetas  $L$  correspondería a  $L=\{blanco, negro\}$ , es decir 2 etiquetas.

Cuando todos los sites tiene el mismo conjunto posible de etiquetas de  $L$ , al conjunto de todas las configuraciones, recibe el nombre del espacio de configuraciones que se denota por el símbolo  $\mathcal{S}$ . Para obtener el tamaño de este espacio de configuraciones, para una imagen de  $m$  sites y  $E$ -número de etiquetas, se realiza el siguiente producto:

$$\text{Espacio de Configuraciones} \quad \mathcal{S} = E \times E \times E \times \dots \times E = E^m$$

Por ejemplo, de la figura 2.2, se presentan tres posibles configuraciones (de  $2^{16}$  posibles).

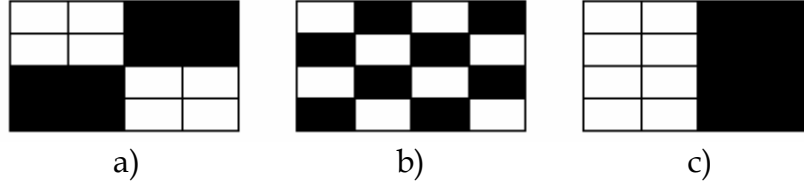


Figura 2.2

Tres configuraciones de un espacio de configuraciones con  $2^{16}$  configuraciones.

Para un problema de etiquetado discreto con  $m$  sites y  $E$  etiquetas, existen  $E^m$  configuraciones posibles. Para un problema de etiquetado continuo, el número de configuraciones posibles es infinito.

## 2.2 TOPOLOGÍAS

Las topologías de los Campos Aleatorios de Markov describen las relaciones contextuales entre sites, sirviendo posteriormente como base para establecer distribuciones de probabilidad.

### 2.2.1 Vecindades

Los sites de  $S$  están relacionados mediante el sistema de vecindades  $N$ . Una vecindad  $N$  es un conjunto de sites  $S$  tal que

$$N = \{N_i \mid \forall i \in S\}$$

donde  $N_i$  es el conjunto de *sites* vecinos a  $i$  para los que se cumple las siguientes dos condiciones:

1.  $i \notin N_i$  un *site* no es vecino a sí mismo
2.  $i \in N_{i'} \Leftrightarrow i' \in N_i$  la relación de vecindad es mutua entre el site  $i'$  y el site  $i$

En el caso de las imágenes digitales, la distribución geométrica de los sites corresponde a una malla o rejilla, también conocida como lattice. Para una malla que contenga a  $S$ , el conjunto de vecinos del *site*  $a$  está definido como el conjunto de sites próximos dentro de un radio  $r$ :

$$N_a = \{(a, s) \in S \mid dist(a, s)^2 \leq r, a \neq s\} \quad (2.1)$$

donde  $dist(a, s)$  es la distancia de Euclídes entre el *site*  $a$  y el *site*  $s$ ,  $r$  es un número entero.

Con base en estas definiciones se introduce el concepto de conectividad, que constituye una relación de vecindad espacial entre un site y sus próximos vecinos. Dos sites  $s$  y  $s'$  tienen 4-conectividad si  $s'$  pertenece al conjunto de  $N_s^1$ . Dos sites  $s$  y  $s'$  tienen 8-conectividad si  $s'$  pertenece al conjunto de  $N_s^2$ .

El conjunto de sites de una malla regular que contengan al conjunto  $S = \{(i, j) | 1 \leq i, j \leq n\}$  corresponde a los pixels de una imagen en dos dimensiones de tamaño  $n \times n$ . Cada site interior, representado por  $(i, j)$ , tiene 4 vecinos bajo el sistema de 4-conectividad, los cuales son:  $N_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$ , los sites de la frontera tienen tres sites vecinos y los sites de las esquinas tienen dos.

Para 8-conectividad se tendría  $N_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1), (i+1, j+1), (i-1, j-1), (i+1, j-1), (i-1, j+1)\}$ .

### 2.2.2 Cliques

El par  $(S, N)$  formado por el conjunto de sites  $S$  y la vecindad  $N$  constituye un grafo. La vecindad establece la relación de los nodos formados por los sites. Un clique  $c$  de  $(S, N)$  está definido como un subconjunto de sites en  $S$ . Un clique puede formarse de un solo site (figura 2.3 a), dos sites (figura 2.3 b), tres sites o más sites y está representado por  $C_1, C_2, y C_3, \dots$ , respectivamente, donde:

$$C_1 = \{i | i \in S\}$$

$$C_2 = \{(i, i') | i' \in N_i, i \in S\}$$

$$C_3 = \{(i, i', i'') | i, i', i'' \in S\}$$

El conjunto de todos los cliques para  $\{S, N\}$  será  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$

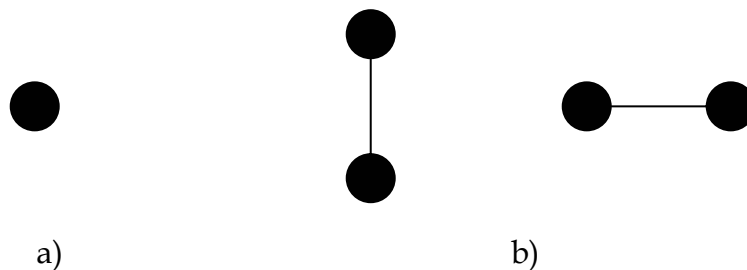


Figura 2.3  
Ejemplo de cliques en a)  $C_1$  y b)  $C_2$

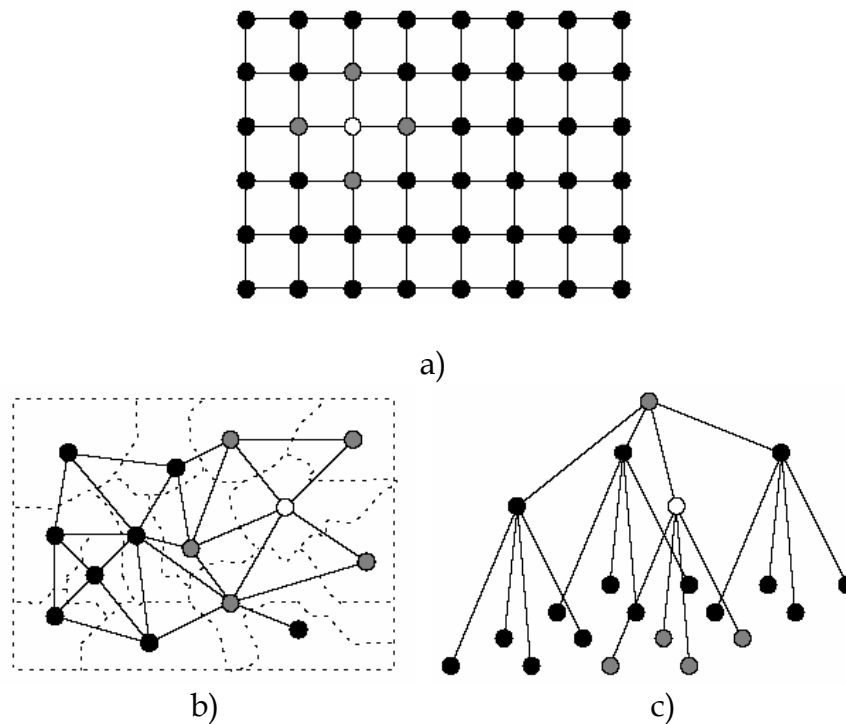


Figura 2.4

En la figura 2.4 se presentan modelos de cliques para análisis de imágenes; (a) malla rectangular con vecindad de primer orden; (b) grafo no regular plano asociado a la partición de una imagen; (c) quad-tree. Para cada grafo, los nodos en gris son vecinos al nodo en blanco. A partir de trabajos con en [HEIT91], [LUTH99] en donde se analiza movimiento sobre video y [KATO93] donde se realiza segmentación, los cliques se pueden definir con sites que pertenezcan a mallas o lattices diferentes, independiente del tamaño de éstas.

En [LUTH99] se definen funciones de energía en un modelo markoviano 3D. En donde se analizan mallas a lo largo de un determinado tiempo para así generar una malla espacio-temporal y definir así los cliques espaciales, cliques temporales y cliques espacio-temporales.

### 2.3 PROPIEDADES DE MARKOV

Un Campo Aleatorio discreto de Markov se define como una colección de variables aleatorias, que corresponden a los sites de una malla, cuya distribución de probabilidad es tal que la probabilidad condicional de que un site determinado tenga un valor particular, dado los valores del resto de las sites, es idéntico a la probabilidad condicional dados los valores del campo en un conjunto pequeño de sites, vecinos de ese site determinado.

Sea  $F = \{F_1, \dots, F_m\}$  una familia de variables aleatorias definidas en  $S$ , donde cada variable aleatoria  $F_i$  toma un valor  $f_i$  en  $L$ . Llamaremos Campo Aleatorio a la familia de variables aleatorias  $F$ . Una familia de variables aleatorias  $F$  se dice que es un Campo Aleatorio de Markov (CAM) sobre  $S$  con respecto al sistema de vecindad  $N$  sí y solo sí las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\textit{Positividad} \quad P(f) > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{S} \quad (2.2)$$

$$\textit{Markovianidad} \quad P(f_i | f_{S-\{i\}}) = P(f_i | f_{N_i}) \quad (2.3)$$

donde  $f_{S-\{i\}}$  denota al conjunto de etiquetas en todos *sites* exceptuando a  $\{i\}$  y  $f_{N_i} = \{f_{i'} | i' \in N_i\}$  es el conjunto de etiquetas que pertenecen a los *sites* de la vecindad de  $i$ .

Un Campo Aleatorio de Markov es caracterizado por su propiedad local (Markovianidad) mientras que un Campo Aleatorio de Gibbs esta caracterizado por su propiedad global (distribución de probabilidad Gibbs).

El teorema de Hammersley-Clifford establece la equivalencia entre estas dos propiedades:  $F$  es un Campo Aleatorio de Markov en  $S$  con respecto a  $N$  sí y solo sí  $F$  es un Campo Aleatorio de Gibbs en  $S$  con respecto a  $N$ . La demostración se puede encontrar en [LI01].

Una distribución de Gibbs tiene la siguiente forma:

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{T} U(f)\right) \quad (2.4)$$

donde

$$Z = \sum_{f \in N} e^{-\frac{1}{T}U(f)} \quad (2.5)$$

T: es la temperatura ,  $T=1$

$U(f)$ : función de energía

Z: función de partición

La función de energía  $U(f)$  está definida por

$$U(f) = \sum_c V_c(f) \quad (2.6)$$

$C$  es el clique y  $V_c(f)$  es la función potencial de clique.

$U(f)$  es la suma de todas las funciones cliques potenciales,  $V_c(f)$ , para todos los cliques posibles  $C$ , donde el valor de  $V_c(f)$  depende de la configuración local del clique  $c$ .

Se dice que un Campo Aleatorio de Gibbs es homogéneo si  $V_c(f)$  es independiente de la posición relativa de la clique  $c$  en  $S$ . Se dice que es isotrópico si la posición de  $V_c$  es independiente de la orientación de  $c$ . Es más simple especificar una distribución de Campo Aleatorio de Gibbs si es homogéneo e isotrópico que si no lo es. La homogeneidad se asume en la mayoría de los modelos de Campos Aleatorios de Markov por conveniencia matemática y computacional.

$P(f)$  mide la probabilidad de la ocurrencia de una configuración determinada. Las configuraciones más probables son aquellas con energías más bajas. La temperatura  $T$  controla la forma de la distribución. Cuando la temperatura es alta, todas las configuraciones tienden a estar igualmente distribuidas. Con la temperatura cercana a cero, la distribución se concentra alrededor del mínimo global de energía.

La energía de una distribución de Gibbs se puede expresar como la suma de varios términos correspondientes a *cliques* de diferentes tamaños, es decir:

$$U(f) = \sum_{c \in C} V_c(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} V_1(f_i) + \sum_{\{i,j\} \in C_2} V_2(f_i, f_j) + \sum_{\{i,j,k\} \in C_3} V_3(f_i, f_j, f_k) + \dots \quad (2.7)$$

La ecuación anterior implica una distribución homogénea de Gibbs porque  $V_1, V_2, \dots$ , son independientes de las localizaciones  $i, j$ . En las distribuciones no homogéneas de Gibbs, las funciones *clique* se deben considerar de la forma:  $V_1(i, f_i)$ ,  $V_2(i, j, f_i, f_j)$  y así sucesivamente.



En la práctica se consideran hasta los cliques de orden dos. Por lo que la ecuación anterior quedaría como:

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} V_2(f_i, f_j) \quad (2.8)$$

La función de energía sería expresada como la suma de dos funciones de potencial de clique.

A continuación se introducen brevemente los modelos más comunes en el estudio de los Campos Aleatorios de Markov.

### 2.3.1 Modelo de Ising

El modelo de Ising surge del problema de modelar materiales ferromagnéticos en lo que se conoce como fenómeno de Ising, en el cual se observa una serie de dipolos en una línea que pueden estar orientados hacia arriba (+1) o hacia abajo (-1) y el estado de cada dipolo se ve influenciado por los dipolos cercanos, por ejemplo, la función de energía para cliques de primer y de segundo orden está definida por:

$$U(f) = \sum_{i \in S} V_1(f_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} V_2(f_i, f_j) \quad (2.9)$$

Cuando  $V_1(f_i) = f_i G_n(f_i)$  y  $V_2(f_i, f_j) = \beta_{i,j} G_n(f_i, f_j)$ , donde  $G_n(\cdot)$  son funciones y  $\beta_{i,j}$  son constantes que reflejan la interacción entre cada par de sites  $i$  y  $j$ , entonces la función de energía es:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} f_i G_n(f_i) + \sum_{\{i,j\} \in C_2} \beta_{i,j} G_n(f_i, f_j) \quad (2.10)$$

EL modelo anterior recibe el nombre de modelo auto-logístico, en la literatura si  $f_i$  y  $f_j$  toman valores en el conjunto de etiquetas discreto  $L=\{0,1\}$  o  $L=\{+1,-1\}$ . La correspondiente función de energía se define de la forma:

$$U(f) = \sum_{\{i\} \in C_1} \alpha_i f_i + \sum_{\{i,j\} \in C_2} \beta_{i,j} f_i f_j \quad (2.11)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta_{i,j}$  se definen como coeficientes de interacción.

Cuando el sistema de vecindad que se considera es el de 4-vecinos en una malla, entonces el modelo auto-logístico recibe el nombre de modelo de *Ising*. La probabilidad condicional para el modelo de Ising es:

$$P(f_i | f_{N_i}) = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{\sum_{f_i \in \{0,1\}} e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}} = \frac{e^{\alpha_i f_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_i f_j}}{1 + e^{\alpha_i + \sum_{j \in N_i} \beta_{i,j} f_j}} \quad (2.12)$$

Cuando la distribución es homogénea, tenemos  $\alpha_i = \alpha$  y  $\beta_{i,j} = \beta$ .



Figura 2.5

Modelo de Ising para con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0.1, \beta = 0.7, \beta = 0.9, \beta = 1.1, \beta = 1.5, \beta = 2$  respectivamente.

En la figura 2.5 se muestra un ejemplo de un modelo de Ising. Para este modelo de Ising, se considera un sistema de vecindad de primer orden con parámetros  $\alpha = 0, \beta = 0.1, \beta = 0.7, \beta = 0.9, \beta = 1.1, \beta = 1.5$  y  $\beta = 2$ .



Figura 2.6

Ejemplo de un modelo de Ising. Lattice en la cual se considera un sistema de vecindad de primer orden en todos los casos con  $\alpha = 0$  y  $(\beta_1, \beta_2) = (5, 0.5), (5, 0.1), (1, -1)$  y  $(-1, -1)$  respectivamente.

### 2.3.2 Modelo de Potts

El modelo de Potts también es conocido como Multi-Level Logistic model, MLL o modelo generalizado de Ising. Si hay  $M > 2$  etiquetas discretas en el conjunto de etiquetas  $L = \{1, \dots, M\}$ , el potencial del *clique* depende de el número de *sites* que lo forman y la orientación en la que se encuentran.

Para los *cliques* que contienen más de un *site* se define las funciones de potencial para cada *clique*, la cual es de la forma:

$$V_c(f) = \begin{cases} -\zeta_c & \text{si todos los estados de } c \text{ tienen la misma etiqueta} \\ \zeta_c & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.13)$$

donde  $\zeta_c$  es el potencial para los *cliques* de tipo  $c$ , para los *cliques* de un solo *site* depende de la etiqueta asignada al *site*:

$$V_c(f) = V_c(f_i) = \alpha_I \text{ si } f_i = I \in L_d \quad (2.14)$$

donde  $\alpha_I$  es el potencial para la etiqueta  $I$ .

La fig. 2.7 muestra los tipos de *cliques* y los parámetros asociados en sistemas de vecinos de segundo orden.

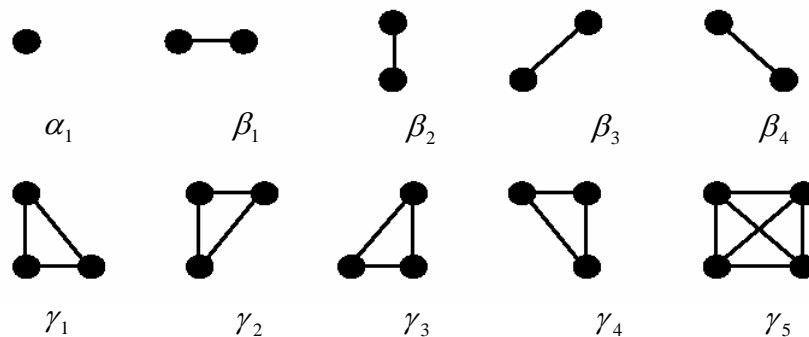


Figura 2.7

Tipos de *cliques* y parámetros potenciales asociados a una vecindad de segundo orden

Se supone que un modelo MLL es de segundo orden, sí y solo sí  $\alpha$  (para *cliques* de un estado) y  $\beta$  (para *cliques* de dos estados) son parámetros distintos de cero.

La función *clique* potencial para *clique* de dos estados es:

$$V_2(f_i, f_j) = \begin{cases} -\beta_c & \text{si los estados de la clique } \{i, j\} = c \in C_2 \text{ tienen la misma etiqueta} \\ \beta_c & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $\beta_c$  es el parámetro  $\beta$  para las *cliques* de tipo  $c$ , y  $C_2$  es el conjunto de *cliques* de dos estados. Para una vecindad de primer orden hay cuatro tipos de *cliques* de dos estados fig. 2.7 y cuatro diferentes  $\beta_c$ . Cuando el modelo es isotrópico los cuatro toman el mismo valor. Debido a su simplicidad, el modelo de Potts es usado extensamente para modelar regiones y texturas.

Cuando el modelo es isotrópico, la probabilidad condicional puede ser expresada como sigue:

$$P(f_i = I \mid f_{N_i}) = \frac{e^{-\alpha_I - \beta n_i(I)}}{\sum_{l=1}^M e^{-\alpha_l - \beta n_i(l)}} \quad (2.16)$$

donde  $n_i(I)$  es el número de estados en  $N_i$  que tienen etiqueta  $I$ . El caso particular para el cual las etiquetas son  $\{0,1\}$  se reduce al modelo de *Ising*.

## 3 *Recocido Simulado*

### 3.1 GENERALIDADES

Una vez modelado el Campo Aleatorio de Markov utilizando los conceptos de cliques, conectividades y vecindades, se procede a optimar la función de energía. Los algoritmos para optimar la función de energía se clasifican en globales y locales. Los algoritmos de optimación local deben ser inicializados en un punto cercano a la solución global, entre estos se encuentran: Iterated Conditional Modes [BESA86], Highest Confidence First, Dynamic Programming. Entre los algoritmos de optimación global se encuentran: Simulated Annealing [GEMA84], Mean Field Annealing, Graduated Non-Convexity [LI02], estos algoritmos tienen la capacidad de salir de los mínimos locales y son inicializados en puntos alejados de la solución global.

El algoritmo de Simulated Annealing, Recocido Simulado (RS) está basado en una analogía entre el recocido de sólidos y la problemática de resolver problemas de optimación combinatoria de gran escala. Por esta razón el algoritmo se conoce como recocido simulado. Recocido denota un proceso de calentamiento de un sólido a una temperatura en la que sus granos deformados cristalizan para producir nuevos granos. La temperatura de recocido o de recristalización, depende del tipo de material, del grado de deformación del mismo. Seguida a la fase de calentamiento, viene un proceso de enfriamiento en donde la temperatura se baja poco a poco. De esta manera, cada vez que se baja la temperatura, las partículas se reacomodan en estados de más baja energía hasta que se obtiene un sólido con sus partículas acomodadas conforme a una estructura de cristal.

En [SZIR00] se analiza la manera de optimar la función de energía por medio de una estructura de redes neuronales, también se presentan para optimar las funciones de energía opciones Deterministic Pseudo Annealing [KATO92] y Modified Metropolis Dynamics [KATO92].

### 3.2 RECOCIDO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING)

Para resolver el problema de segmentación bajo el esquema de Campos Aleatorios de Markov, es necesario definir las funciones de potencial para los diferentes cliques, y minimizar la función de energía a posteriori. La solución se encontrará en el espacio de configuraciones  $\mathcal{S}$ , siendo este un problema combinatorio, se utiliza un algoritmo de optimación estocástica como lo es el Recocido Simulado.

En general, encontrar el mínimo global de una función objetivo con muchos grados de libertad sujeta a restricciones es un problema complejo, ya que la función objetivo tiene varios mínimos locales. El recocido simulado presenta como punto favorable entregar un óptimo global prácticamente independiente de la configuración inicial pero por otro parte, es demandante en consumo de tiempo de cómputo.

---



---

*Inicializar T y f;*  
*Repetir*  
     *muestrear aleatoriamente f de N(f) bajo T;*  
     *decrementar T;*  
     *mientras (T → 0);*  
*regresar f;*

---



---

### Algoritmo de Recocido Simulado RS

De acuerdo con el algoritmo de RS descrito en la parte superior, inicialmente T se inicializa en un valor elevado y  $f$  es una configuración que se inicializa de manera aleatoria. Se realizará el muestreo aleatorio de la configuración  $f$  de la vecindad  $N$  detonada por  $N(f)$  para cada valor de temperatura, para después decrementarla.

En la práctica, el algoritmo de Recocido Simulado, emplea un algoritmo de Metrópolis, con un esquema de temperatura variable, a fin de minimizar la función de energía a posteriori. Para la imagen original  $X$ , el objetivo del problema de optimización consiste en encontrar un elemento dentro del conjunto de etiquetas  $\Omega_0$  donde:

$$\Omega_0 = (\varpi \in \Omega_0, \varpi \text{ es la clase que minimiza la función de energía})$$

$U^*$  es la energía máxima en todas las configuraciones y  $U_*$  es la energía mínima, la desviación entre las dos energías es  $\Delta U = U^* - U_*$ .

Al emplear un muestreador de Gibbs con una temperatura  $T_n$ , que varía después de cada barrido, la variación de la temperatura debe seguir el esquema:

$$T_n \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

$$T_n = \frac{N\Delta U}{\log(n)} \text{ para } n \geq 2 \quad (3.2)$$

donde  $N$  es el número de *sites* en la imagen.

Para toda configuración inicial  $\eta$  (de la imagen) y para toda la configuración de una interacción cualquiera  $\varpi$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y^{(n)} = \varpi \mid Y^{(0)} = \eta) = \pi(\varpi) \quad (3.3)$$

donde  $\pi(\varpi)$  corresponde a la medida de probabilidad de Gibbs definida por los Campos Aleatorios de Markov. Así, existe una convergencia hacia una realización dada, con una probabilidad que sigue la distribución de Gibbs global.

El algoritmo típico de RS aplicado a CAM quedaría como sigue:

1. Inicialización

- Determinación aleatoria de la solución  $Y^{(0)}$
- Escoger una temperatura inicial  $T^{(0)}$  suficientemente elevada

2. Barrido secuencial de la Imagen

En cada etapa ( $n$ )

- Escoger un *site*  $s$ :

$r=s^{(n)}$  su valor es  $Y_r^{(n)}$  y su configuración de vecindad es  $V_r^{(n)}$

- Efectuar sorteo:

variable aleatoria con distribución uniforme  $\xi \in \Omega$

3. Criterio de Metrópolis

- Calcular variación de la energía local asociada al *site*  $r$ :

$$\Delta U = U(\xi \mid V_r^{(n)}, X) - U(Y_r^{(n)} \mid V_r^{(n)}, X)$$

- Pueden surgir dos casos

$$\text{Si } \Delta U \leq 0 \Rightarrow Y_r^{(n+1)} = \xi$$

$$\text{Si } \Delta U > 0 \Rightarrow Y_r^{(n+1)} = \xi \text{ con probabilidad } \xi = e^{-\frac{\Delta U}{T}}$$

4. Continuar con la etapa 2

5. Serie de temperaturas decrecientes hacia 0, por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$

La expresión  $\Delta U = U(\xi | V_r^{(n)}, X) - U(Y_r^{(n)} | V_r^{(n)}, X)$  representa tanto la variación local de energía, como la variación global de la energía asociada a la transición  $Y_r^{(n+1)} = \xi$ . De forma práctica, se simula la probabilidad dada por  $p = e^{-\frac{\Delta U^{(n)}}{T^{(n)}}}$ , efectuando el sorteo aleatorio de una variable distribuida uniformemente  $\eta \in [0,1]$ .

$$Y_r^{(n+1)} = \begin{cases} \xi & \text{si } 0 \leq \eta \leq p \\ Y_r^{(n)} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La figura 3.1 muestra la función de energía a posteriori  $U(w|X)$  siendo  $X$  la imagen original y  $w$  la imagen de clases.

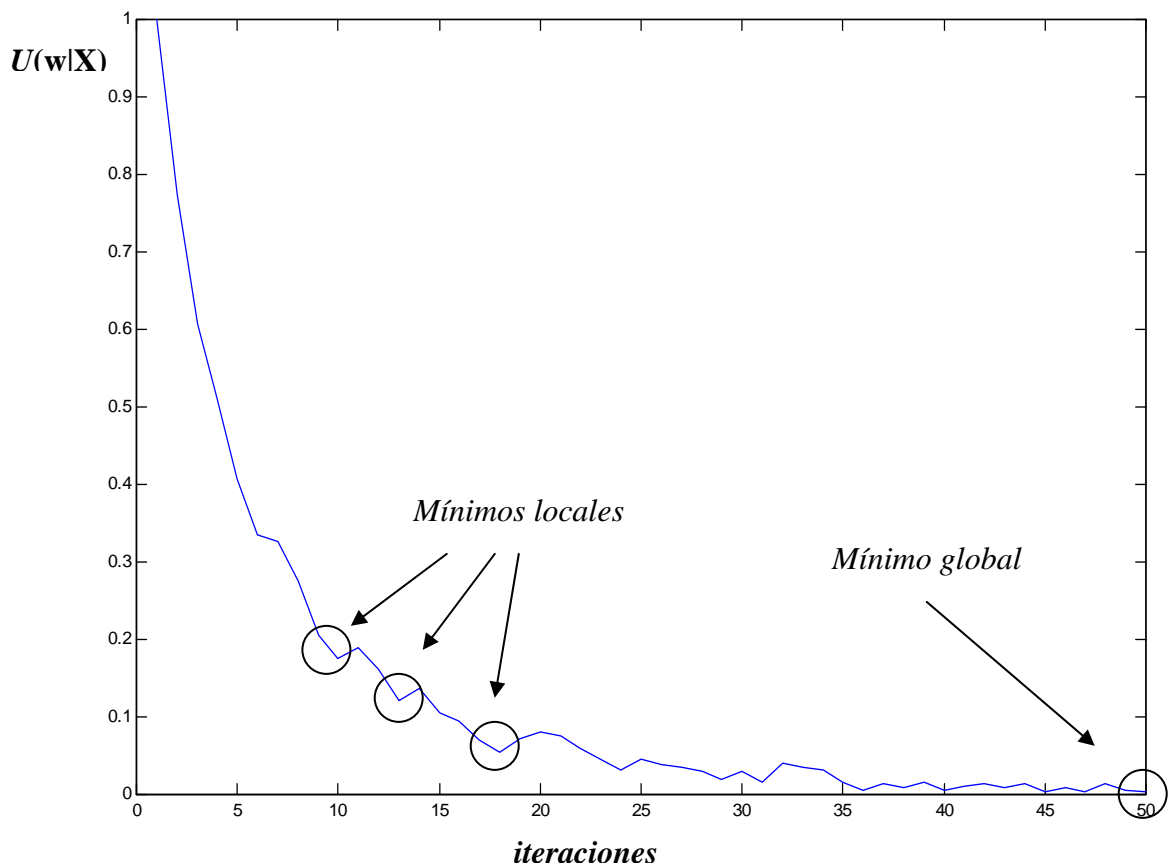


Figura 3.1  
Función de energía a posteriori

### 3.3 ESQUEMAS DE DECREMENTO DE TEMPERATURA



Para minimizar la función de energía *a posteriori* es necesario decrementar la temperatura para cada configuración, ya que para temperaturas altas, las configuraciones con mayor entropía están presentes. Para asegurar la convergencia a un mínimo global, el esquema de decremento de temperatura, deberá seguir las siguientes condiciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{(n)} = 0 \quad (3.4)$$

$$T^{(n)} \geq \frac{m \Delta}{\ln(1+n)} \quad (3.5)$$

donde  $\Delta = \max E(f) - \min E(f)$  y  $m$  es el número de *sites*, entonces el sistema converge al mínimo global, la desventaja de la ec. 3.5 es la lentitud, de manera heurística se han adoptado los siguientes esquemas:

1. La primera, establecía una velocidad de enfriamiento de la temperatura de tipo geométrico,  $T^{(n+1)} = \alpha \cdot T^{(n)}$ , como  $0 < \alpha < 1$ . Las evidencias empíricas señalaban que valores elevados de  $\alpha$  comprendidos entre 0.8 y 0.99 eran los que mejores resultados proporcionaban. [Ingb95] presenta el Adaptive Simulated Annealing, en donde a lo largo del proceso de recocido el coeficiente  $\alpha$  se modifica para acelerar la convergencia de la solución.
2. Según el segundo esquema de enfriamiento, se ejecuta una sola iteración para cada temperatura, pero por el contrario la temperatura se reduce a una velocidad muy lenta según la fórmula  $T \rightarrow \frac{T}{1 + \beta \cdot T}$ , siendo  $\beta$  muy pequeño.
3. Entre los esquemas de descenso de temperatura también se encuentran los de la forma  $T^{(n)} = \frac{c}{\log(n+1)}$ , donde  $n$  es el número de iteraciones.

## 4 *Esquema de Procesamiento*

### 4.1 GENERALIDADES

El uso práctico del Campo Aleatorio de Markov se atribuye a la equivalencia entre las distribuciones de probabilidad de los Campos Aleatorios de Markov y los Campos de Aleatorios de Gibbs, el cual queda establecido por el teorema de Hammersley-Clifford. Esto permite modelar matemáticamente problemas de visión manejables para el análisis de imágenes en el marco de la teoría de probabilidad de Bayes.

El esquema propuesto consiste en construir una pirámide multiresolución a partir de la imagen original. El esquema para construir los niveles superiores de la pirámide sería básicamente un filtrado paso bajas y posterior submuestreo de la imagen resultante, en este esquema existen diferentes opciones marcadas en la literatura [LUTH99], [PERE92].

En general, para resolver el problema de segmentación bajo el esquema Máximo a Posteriori (que se analizará en detalle en el esquema de procesamiento), después de haber definido las funciones de potencial para los diferentes cliques, es necesario minimizar la función de energía *a posteriori*. La solución se encuentra en el espacio de configuraciones  $\mathfrak{S}$ , siendo un problema combinatorio, se utiliza un algoritmo de optimación global [GEMA84].

Se estudiará el caso de relajación estocástica que tiene la ventaja de estar menos ligada a la configuración de inicial. Para modelar la función de energía a posteriori se considerarán los cliques no solo de la malla en que se efectúa el recocido simulado, si no que también se incorporarán los cliques entre mallas de diferente resolución. Esto incorporará información jerárquica.

Este procedimiento puede ser visto como una manera de incorporar cliques que se encuentran apartados a un precio razonable de uso de memoria. Este modelo dará un algoritmo de optimación con un nuevo esquema de recocido simulado que puede ser repartido en la pirámide entera.

## 4.2 ESQUEMA TÍPICO DE SEGMENTACIÓN MARKOVIANA

La segmentación se considera como un problema de etiquetado en el marco de estudio de los Campos Aleatorios de Markov. A cada uno de los sites  $s \in S$  en una lattice regular figura 4.1-a, le corresponderá una etiqueta en  $\Lambda = \{1, 2, \dots, L\}$ , dando lugar a una configuración de la figura 4.1-b.

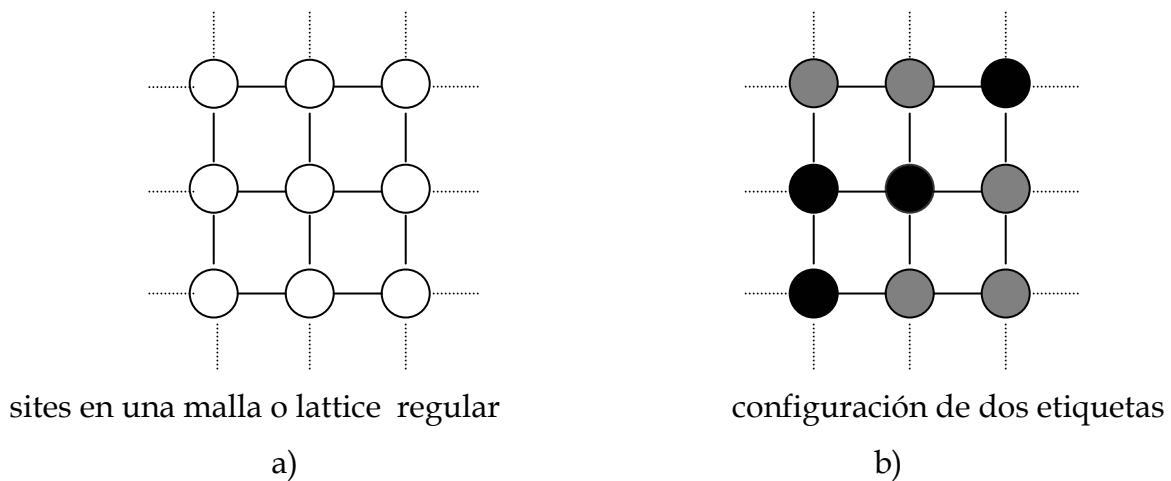


Figura 4.1

Cada site tiene un conjunto de posibles etiquetas  $\Lambda = \{1, 2, \dots, L\}$ , siendo  $L$  el número total de etiquetas. Cada una de estas etiquetas corresponde a las clases en las que se desea asignar a los sites.

Los sites están relacionados entre sí por el sistema de vecindades. Una vecindad muy común en segmentación de imágenes son las de primer y segundo orden.

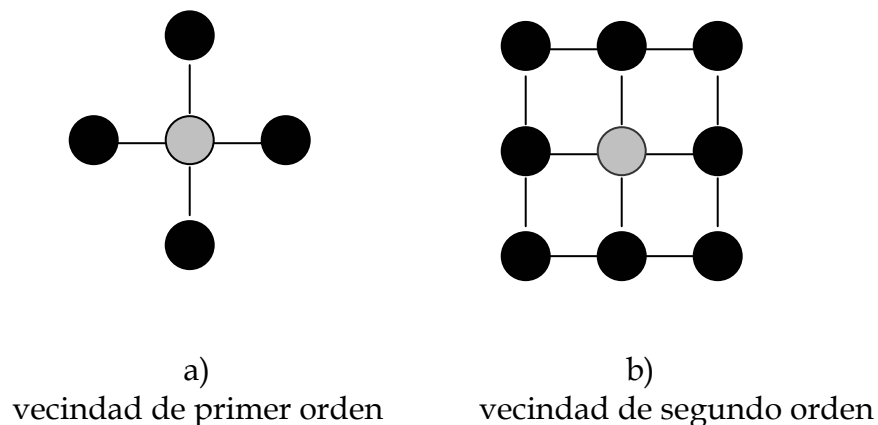


Figura 4.2

Retomando los conceptos vistos en el capítulo 2. El grafo  $G=(S,N)$  es llamado *clique*. Un clique  $c$  de  $G$  es un subconjunto de sites en  $S$  donde todos los sites son vecinos entre sí.  $C$  es el conjunto de todos los cliques de  $G$  y  $C_a = \{c \mid s_a \in c\}$  el conjunto de cliques conteniendo el site  $a$ . Conforme el tamaño de la vecindad aumenta, el número de cliques crece considerablemente.

Los cliques utilizados para análisis en *4-conectividad* y *8-conectividad* son los siguientes:

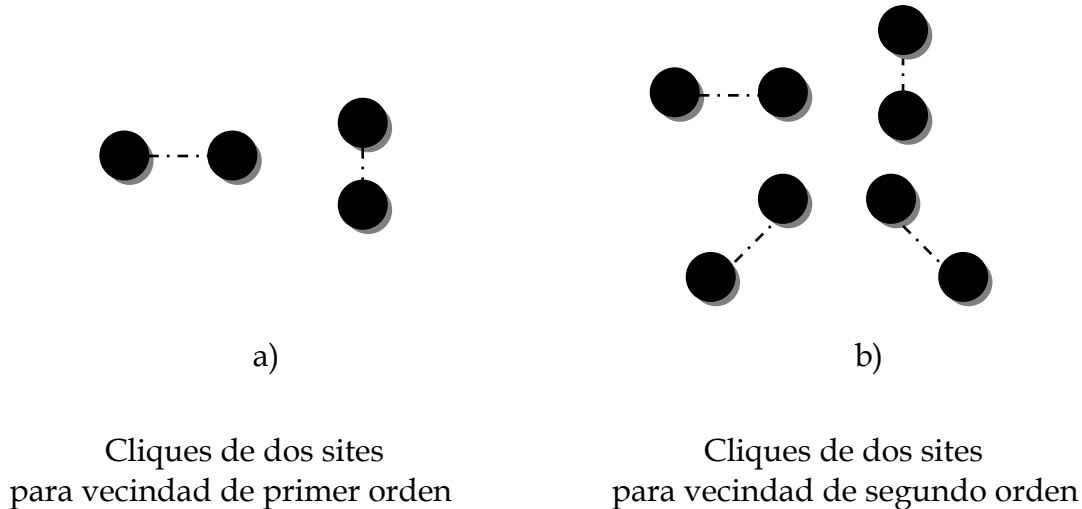


Figura 4.3

Un Campo Aleatorio discreto de Markov sobre una trama finita se define como una colección de variables aleatorias, que corresponden a los sites de una lattice.

La distribución de probabilidad es tal que la probabilidad condicional de que una variable determinada tenga un valor particular, dado los valores del resto de las variables, es idéntica a la probabilidad condicional dados los valores del campo en un conjunto pequeño de sites, es decir, su vecindad:

$$P(f_i \mid f_{S-\{i\}}) = P(f_i \mid f_{N_i}) \quad (4.1)$$

Propiedad de *Markovianidad*

es decir, la probabilidad de que el píxel  $i$  tome el nivel de gris  $f_i$ , dado todos los niveles de gris  $f_{S-\{i\}}$  de todos los píxeles restantes de la imagen, es igual a la probabilidad de que el píxel  $i$  tome el nivel de gris  $f_i$  dados los valores de los niveles de gris  $f_{N_i}$  de la vecindad de píxeles  $N_i$ .

Un Campo Aleatorio de Markov es caracterizado por su propiedad local (Markovianidad) mientras que un Campo Aleatorio de Gibbs esta caracterizado por su propiedad global (distribución de probabilidad Gibbs). El teorema de *Hammersley-Clifford* establece la equivalencia entre estas dos propiedades. La importancia de esta equivalencia es que de forma práctica, un CAM queda definido con la distribución de Gibbs.

La distribución de Gibbs es de la siguiente forma:

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{T} U(f)\right) \quad (4.2)$$

donde

$$Z = \sum_{f \in \Omega} e^{-\frac{1}{T} U(f)} \quad (4.3)$$

- $T$ : es el parámetro de temperatura.  $T=1$ .
- $U(f)$ : función de energía.
- $Z$ : función de partición (normalización).
- $f$ : es una configuración.

Como se puede observar de la ecuación anterior, las configuraciones con menor energía *a priori* tiene una mayor probabilidad de ocurrencia.

Ahora bien, por otra parte, el teorema de Bayes implica la probabilidad condicional de tener la imagen  $Y$  (segmentada) dada la imagen  $X$  (original):

$$P(Y | X) = \frac{P(X | Y)P(Y)}{P(X)} \quad (4.4)$$

- $P(Y | X)$ : probabilidad *a posteriori*.
- $P(Y)$ : probabilidad *a priori* de la clase  $Y$ .
- $P(X | Y)$ : probabilidad conjunta de  $X$  dado  $Y$ .
- $P(X)$ : distribución de probabilidad de  $X$ .

$P(Y)$  define un Campo Aleatorio de Markov, de acuerdo con el teorema de *Hammersley-Clifford* y por lo tanto  $P(Y)$  puede ser expresada como una distribución de Gibbs:

$$P(Y) = \frac{1}{Z} \exp(-U(Y)) \quad (4.5)$$

$Z$  no proporciona información discriminante, por lo que no se considera.

### 4.2.1 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES DE ENERGÍA

La función de energía *a priori* es la función que permite codificar las restricciones contextuales. La fórmula que la describe es la siguiente:

$$U(Y) = \sum_{c \in C} V_c \quad (4.6)$$

Para el cálculo de esta función solo se considerarán los *cliques* de segundo orden (dos *sites* vecinos entre sí). Este tipo de convención es ampliamente usada por su forma simple y su bajo costo computacional.

Otra consideración del modelo de Campo Aleatorio de Markov es la independencia con respecto a la posición del *clique* en  $S$  (homogeneidad) y la orientación del *clique* (isotropía).

La función *potencial de clique* queda definida por:

$$V_c = -\beta\delta(y_i - y_j) \quad (4.7)$$

el *clique*  $c$  contiene a los *sites*  $i$  y  $j$ , donde  $y_i$  e  $y_j$  son niveles de gris. Del teorema de Bayes se considera que el término  $P(X)$  no presenta información discriminante, por lo que se realiza la siguiente aproximación:

$$P(Y | X) \approx P(X | Y)P(Y) \quad (4.8)$$

Bajo el esquema de Máximo a Posteriori (MAP) consiste en encontrar la configuración  $y$  que maximiza la distribución *a posteriori*  $P(Y | X)$ , o bien minimiza una función equivalente de energía:

$$y = \arg \max P(Y=y | X=x) = \arg \min U(y | x) \quad (4.9)$$

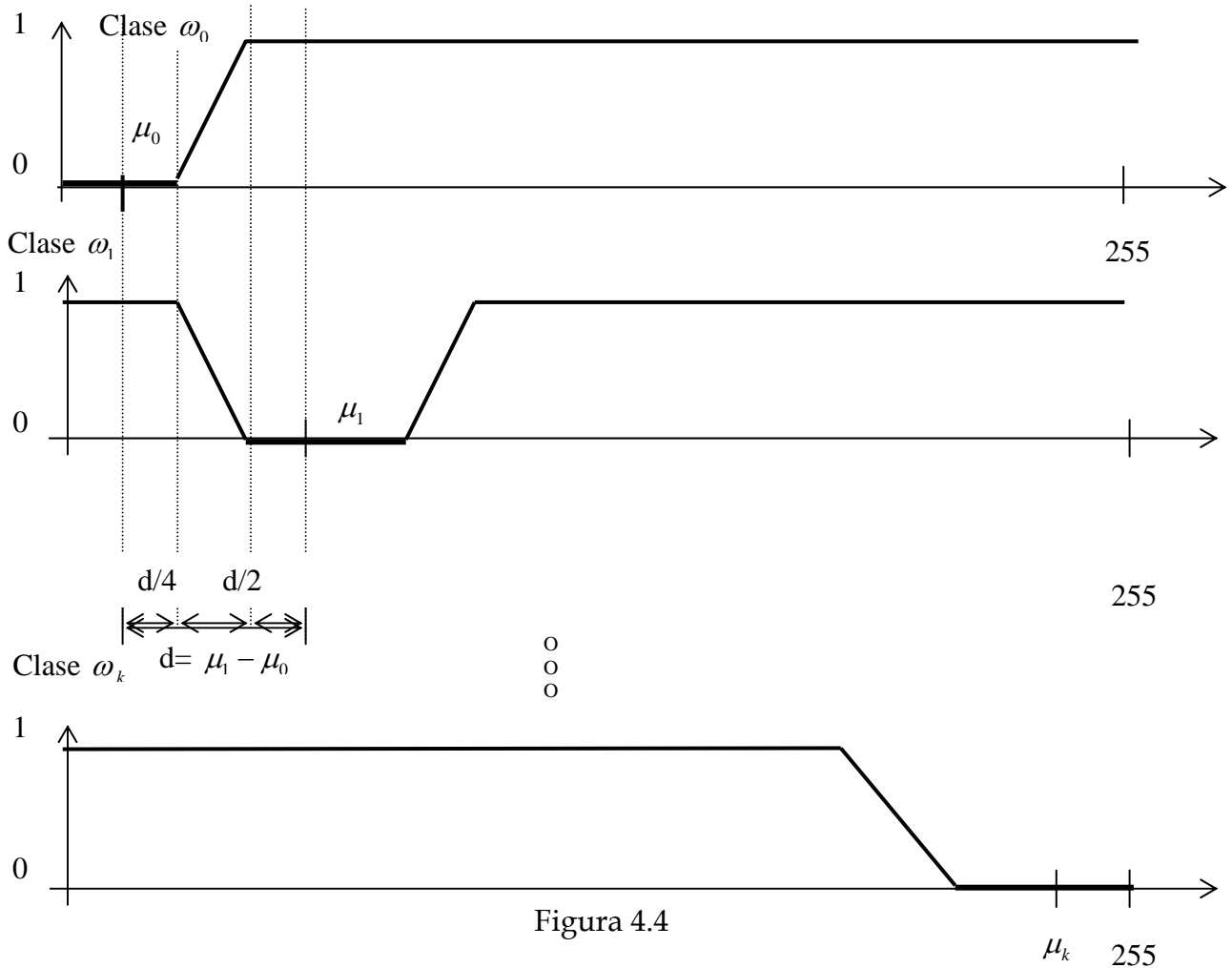
por lo que la ecuación 4.8 toma la forma:

$$U(Y | X) \approx U(X | Y) + U(Y) \quad (4.10)$$

Existen diferentes aproximaciones para las funciones de energía conjunta  $U(X | Y)$ , estas llegan a modelarse como funciones Gaussianas [GEMA84], [KATO96] o aproximaciones a una función parabólica [SZIR00].

Para caracterizar las clases presentes en la imagen, es necesario determinar el valor de cada una de sus medias. Por ejemplo, para  $k$ -número de clases tendremos  $k$ -valores de medias correspondientes al valor promedio de cada clase. En la figura 4.4 vemos la función de energía conjunta para la clase  $\omega_0$ , la cual está caracterizada por su valor promedio  $\mu_0$  y la separación con el valor promedio de la siguiente clase  $\omega_1$  representada por su valor promedio  $\mu_1$ . Para la clase  $\omega_1$  la función de energía conjunta está caracterizada por su valor promedio  $\mu_1$  y la separación con el valor promedio de la siguiente clase  $\omega_2$  representada por su valor promedio  $\mu_2$ . De esta manera para realizar las funciones de energía conjunta para cada clase, se divide la distancia  $d$  que se muestra en la figura 4.4 para aproximarlas a la forma trapezoidal.

Funciones de energía conjunta  $U(X|Y)$  se dan por medio de la siguiente aproximación a funciones de forma trapezoidal:



La energía *a priori*  $U(Y)$  se calcula de acuerdo con el análisis en 4-*conectividad*, la función de energía *a priori*  $U(Y)$  es de la siguiente forma:

$$U(Y) = -\beta \times n_k(Y) \quad (4.11)$$

donde  $n_k(I)$  es el número de *sites* en la vecindad  $N_k$  que tienen etiqueta  $Y$ .  $\beta$  recibe el nombre de coeficiente de interacción.

#### 4.2.2 OPTIMACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA A POSTERIORI

Los Campos Aleatorios de Markov están ligados a un método específico de optimación, el recocido simulado, el cual permite resolver el problema de estimación en el sentido MAP, buscando la convergencia hacia un mínimo global de la función de energía a posteriori.

El procedimiento de recocido simulado usa el algoritmo Metropolis, modificando el parámetro temperatura  $T$  de un valor muy alto (aceptando casi todas las nuevas configuraciones) hasta un valor muy bajo (punto de congelamiento del sistema) donde no se aceptan nuevas configuraciones.

De forma práctica se considera que  $X$  es la imagen original (en 256 niveles de gris) y  $Y$  la imagen segmentada en  $k$ -número etiquetas. La simulación toma como datos iniciales a  $X$  y a la imagen de clases originada en la inicialización,  $Y^{(0)}$ . La figura siguiente muestra la esquematización del algoritmo de recocido simulado, para el caso de  $n$  iteraciones:

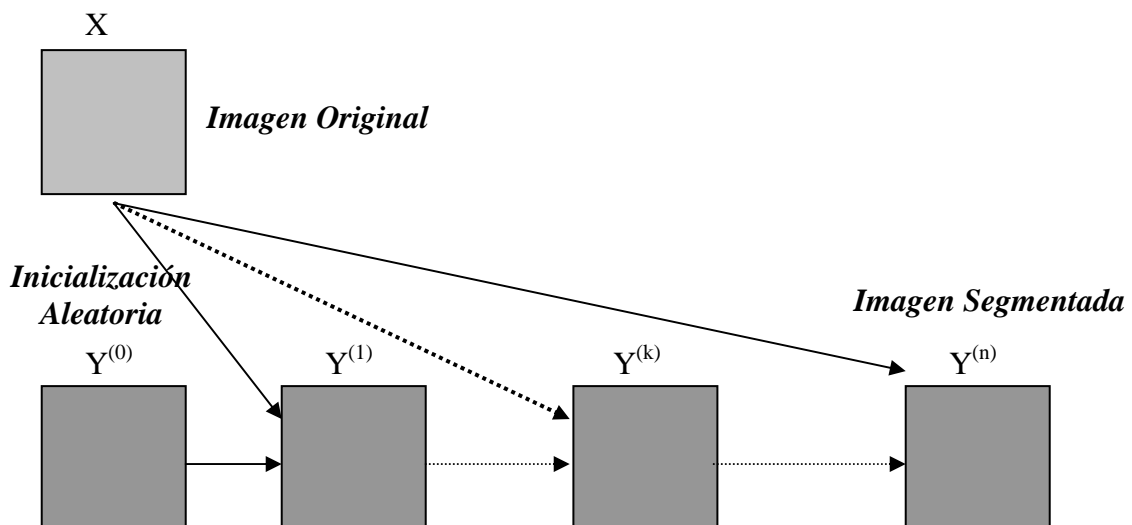


Figura 4.5  
Método iterativo de segmentación del Recocido Simulado



El algoritmo de recocido simulado es usado para minimizar la energía *a posteriori* y encontrar la configuración  $Y^{(n)}$ . Esta configuración es la imagen segmentada y es la solución al problema de etiquetado.

El método bayesiano asociado a la modelización markoviana proporcionan una función de energía *no convexa* que debe ser minimizada. La aplicación del recocido simulado en la optimación de la función de energía *a posteriori*  $U(Y|X)$  asegura la convergencia hacia el mínimo global y evitando la convergencia a los mínimos locales.

El algoritmo para segmentar una imagen bajo el esquema de CAM utilizando la función de energía *a posteriori* y optimarla con recocido simulado es el siguiente:

### 1. Inicialización

- Determinación aleatoria de la solución  $Y^{(0)}$ .  
La clase de cada píxel debe determinarse mediante un generador de números aleatorios, con distribución uniforme, en el rango del número de clases,  $\text{clases}=K$
- Escoger un temperatura inicial  $T^{(0)}$  suficientemente elevada.

### 2. Hacer desde $N_{iter}=1$ hasta $N_{iter}=n$

#### 2.1 Barrer secuencialmente la imagen:

En cada etapa  $n$ .

- Escoger un site:  $r=s^{(n)}$ , su valor es  $Yr^{(n)}$  y su configuración de vecindad es  $Vr^{(n)}$ .
- Efectuar el sorteo de una variable aleatoria (clase "elección") con distribución uniforme  $\xi \in \Omega = [1,k]$ ,  $k=\text{número de clases}$ .

#### 2.2 Análisis en 4-conectividad

- $\beta = 0.35$
- Si "actual"="x":  $\text{prob\_actual} = \text{prob\_actual} - \beta [\text{actual}]$
- Si "elección"="x":  $\text{prob\_elección} = \text{prob\_elección} - \beta [\text{elección}]$

#### 2.3 Calcular la variación de la energía local asociada al site $r$ :

- $\text{prob\_actual} = \text{prob\_actual} + \text{potencial}[\text{actual}]_{ij}$
- $\text{prob\_elección} = \text{prob\_elección} + \text{potencial}[\text{elección}]_{ij}$

donde  $\text{potencial}[]_{ij}$  representa la energía condicional  $U(X|Y)$  e  $i, j$  son las coordenadas del píxel analizado.

Si  $\text{prob\_elección} \leq \text{prob\_actual}$ :

$$Y_{ij} = \text{elección}$$

En caso contrario:

- $p = \exp[-(\text{prob\_elección} - \text{prob\_actual})/T^{(n)}]$
- sorteo de una variable aleatoria  $\xi_2$ , uniformemente distribuida en el rango  $[0,1]$
- si  $\xi_2 < p$ , entonces  $Y_{ij} = \text{"elección"}$

### 3 Regresar al punto 2.1 hasta terminar con el barrido

### 4 Decrementar la temperatura:

$$T^{(k+1)} = 0.96T^k$$

### 5 Regresar al punto 2 hasta terminar el número de iteraciones fijadas

Es conocido que el recocido simulado converge con probabilidad unitaria hacia el óptimo global si la ley de temperatura  $T_k$  decrece menos rápidamente que  $C/\ln(k)$ , para una cierta constante  $C$  independiente de  $k$ . Debido a la lentitud en convergencia del esquema  $C/\ln(k)$ , en la práctica, la ley de temperatura se aproxima por una ley exponencial.

La temperatura inicial  $T_0$  debe ser escogida tal que todas las transiciones iniciales puedan ser aceptadas con una probabilidad diferente a cero. Tal valor se encuentra ligado a los valores máximos y mínimos de la función de energía. En la práctica se escoge un valor  $T_0$  para asegurar una convergencia rápida. Así por ejemplo, un valor de 2 resulta generalmente adecuado.

### 4.3 ESQUEMA PROPUESTO

La segmentación se considera como un problema de etiquetado en el marco de estudio de los Campos Aleatorios de Markov. A cada uno de los sites  $s \in S$  en una lattice regular, le corresponderá una etiqueta en  $L$ , dando lugar a una configuración.

Cada site tiene un conjunto de posibles etiquetas  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , siendo  $n$  el número total de etiquetas. Cada una de estas etiquetas corresponde a las clases en las que se desea asignar a los sites.  $X$  corresponde a la imagen y  $x$  es el valor de cada uno de los píxeles presentes en ella.

El objetivo es maximizar la probabilidad a posteriori  $P(y_i | x)$  o bien minimizar su función de energía  $U(y_i | x)$  asociada. Para tal fin, de acuerdo al teorema de Bayes podemos aproximar la función de energía a posteriori como:

$$P(y_i | x) \approx P(x | y_i)P(y_i) \quad (4.12)$$

la cual tiene su contraparte en términos de energía

$$U(y_i | x) \approx U(x | y_i)U(y_i) \quad (4.13)$$

Se considerará a  $P(x | y_i)$  como una función Gaussiana:

$$P(x | y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (4.14)$$

donde  $\mu_i$  es la media de la clase  $i$ ,  $\sigma_i$  es la desviación estándar de la clase  $i$ . La probabilidad a priori  $P(y_i)$  se toma como el término markoviano:

$$P(y_i) = \exp\left(-\frac{U(y_i)}{T}\right) = \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_{c \in N_i} V_{cy_i}\right) \quad (4.15)$$

retomando la ecuación 4.12

$$\max(\log P(y_i | x)) = \max(\log P(x | y_i) + \log P(y_i)) \quad (4.16)$$

$$= \max\left(-\left(\log \sqrt{2\pi}\sigma_i + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) - \sum_{c \in N_i} V_{cy_i}\right) \quad (4.17)$$

$$\min U(y_i | x) = \min \left( \log \sqrt{2\pi} \sigma_i + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} + \sum_{c \in N_i} V_{cy_i} \right) \quad (4.18)$$

La ecuación anterior toma el nombre de función de energía a posteriori. A partir de la ecuación anterior el término  $\log \sqrt{2\pi} \sigma_i + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}$  corresponde a la función de energía conjunta  $U(x|y_i)$ , y el término  $\sum_{c \in N_i} V_{cy_i}$  relacionado con la función de energía a priori  $U(y_i)$ , dependiente del valor de etiquetas presentes en la vecindad correspondiente.

En el caso del modelo propuesto el término  $\sum_{c \in N_i} V_{cy_i}$  incorporará sites presentes en una malla superior o inferior según sea el caso. Esto es, los cliques estarán formados por sites de diferentes niveles.

Para completar el esquema, se construye una pirámide de la imagen original, la cual se obtiene por medio del filtro binomial paso-bajas y posterior decimación del nivel de la pirámide anterior empezando por la imagen original.

### 4.3.1 FUNCIÓN DE ENERGÍA JERÁRQUICA

Para que el modelo sea jerárquico, la comunicación entre niveles contiguos debe estar presente, esto se logra incorporando en el término  $\sum_{c \in N_i} V_{cy_i}$  relacionado con la función de energía a priori  $U(y_i)$  los valores de potencial del clique del nivel superior de la lattice de clases sobre la cual se realiza la segmentación, por lo que el potencial de clique estaría definido por la vecindad de 5 sites que se muestran en la figura 4.6:

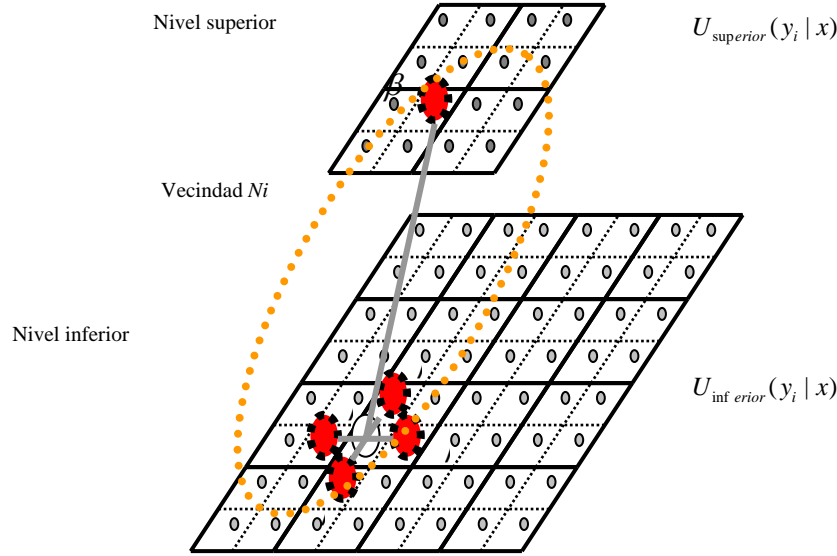


Figura 4.6

Pirámide de segmentaciones en donde se muestra una vecindad  $N_i$  formada por sites de diferentes mallas.

A partir de la ecuación 4.18 se realizan las siguientes consideraciones para realizar las funciones de energías correspondientes a cada nivel e incorporar sites de los diferentes niveles. Esto es:

$$U_{\text{superior}}(y_i | x) = \log \sqrt{2\pi} \sigma_i + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} + \sum_{c \in N_i} V_{cy_i} \quad (4.19)$$

$$U_{\text{inferior}}(y_i | x) = \log \sqrt{2\pi} \sigma_i + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} + \sum_{c \in N_i} V_{cy_i} \quad (4.20)$$

Los valores de  $\mu_i$  y  $\sigma_i$  se calculan por medio de ventanas de entrenamiento. Como en este caso se propone un esquema jerárquico, cada *nivel* tendrá su propia función de energía y compartiría los cliques de la vecindad  $N_i$ .

## 4.3.2 PROCESAMIENTO MULTITEMPERATURA

Para acelerar la convergencia de nuestra solución y evitar caer en mínimos locales, se proponen como alternativas:

1. Ejecutar el algoritmo de búsqueda local a partir de varios puntos iniciales.
2. Introducir restricciones adicionales a la función objetivo.
3. Introducir una estructura de vecinos más compleja para buscar en regiones más grandes del espacio.
4. Alterar soluciones buscando diversidad.

Para ejecutar el algoritmo de búsqueda local a partir de varios puntos iniciales se propone inicializar la optimización en diferentes resoluciones y bajo diferentes temperaturas iniciales de acuerdo con la ecuación 3.5 y el tamaño del espacio de soluciones. Se introducen restricciones adicionales a la función objetivo y una estructura de vecinos más compleja para buscar en regiones más grandes del espacio por medio de las vecindades que incluyen cliques adyacentes entre niveles como lo describe la figura 4.7.

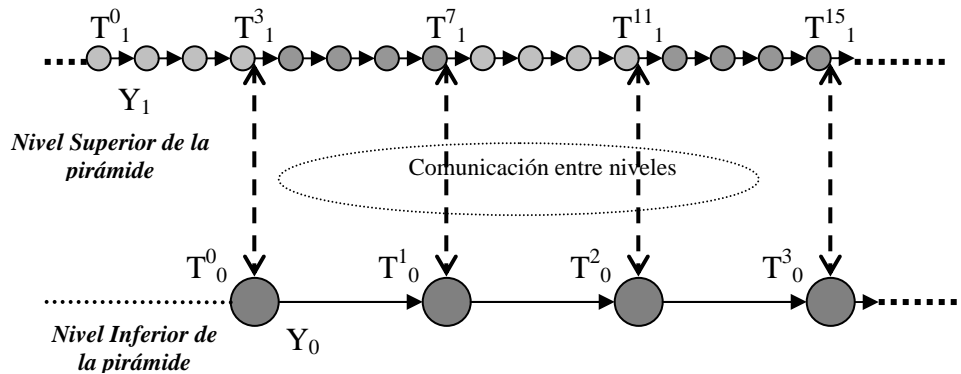


Figura 4.7

En la figura 4.7 se muestra el esquema de la tabla de tiempo de cómo se comunican los niveles.

El esquema de decremento de temperatura para cada nivel sería el siguiente:

$$T_1^{k+1} = T_1^0 \cdot (0.96)^{k1} \quad (4.21)$$

$$T_0^0 = T_1^3 \quad (4.22)$$

$$T_0^1 = T_1^7 \quad (4.23)$$

$$T_0^2 = T_1^{11} \quad (4.24)$$

$$T_0^3 = T_1^{15} \quad (4.25)$$

...

tomando  $T_0$  y  $T_1$  de acuerdo a la ec. 3.5., siendo  $k1$  el número de iteraciones respectivas donde:

$$k1=\{0,\dots,4n\} \tag{4.26}$$

Donde  $n$  es el número total de iteraciones en el nivel inferior de la pirámide de segmentación.

Para el nivel superior de la pirámide, se utiliza el procedimiento de recocido simulado, modificando el parámetro temperatura  $T_1^{k1+1}$  de un valor muy alto (aceptando casi todas las nuevas configuraciones) hasta un valor muy bajo (punto de congelamiento del sistema) donde no se aceptan nuevas configuraciones. De forma práctica se considera que  $X$  es la imagen original después de filtrar y decimar y  $Y$  la imagen segmentada en  $k$  etiquetas. La simulación toma como datos iniciales a  $X$  y a la imagen de clases originada en la inicialización,  $Y^{(0)}$ . La figura siguiente muestra la esquematización del algoritmo de simulación, para el caso de  $k1$  iteraciones:

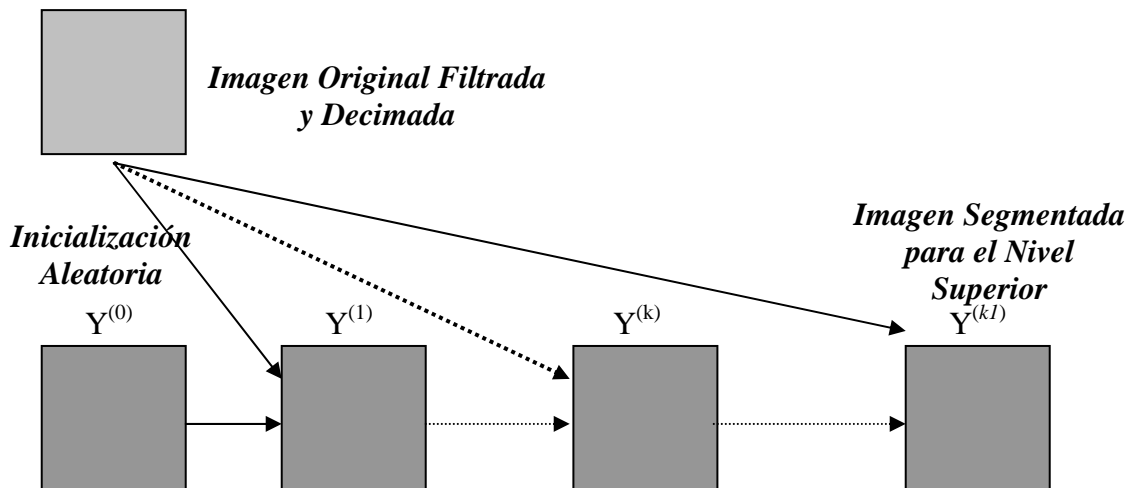


Figura 4.8

Para el nivel inferior de la pirámide, se utiliza el procedimiento basado en el algoritmo de recocido simulado, modificando el parámetro temperatura de acuerdo con la ecuación 4.22 de un valor muy alto (aceptando casi todas las nuevas configuraciones) hasta un valor muy bajo (punto de congelamiento del sistema) donde no se aceptan nuevas configuraciones.

La figura siguiente muestra la esquematización del algoritmo de simulación, para el caso de  $n$  iteraciones:

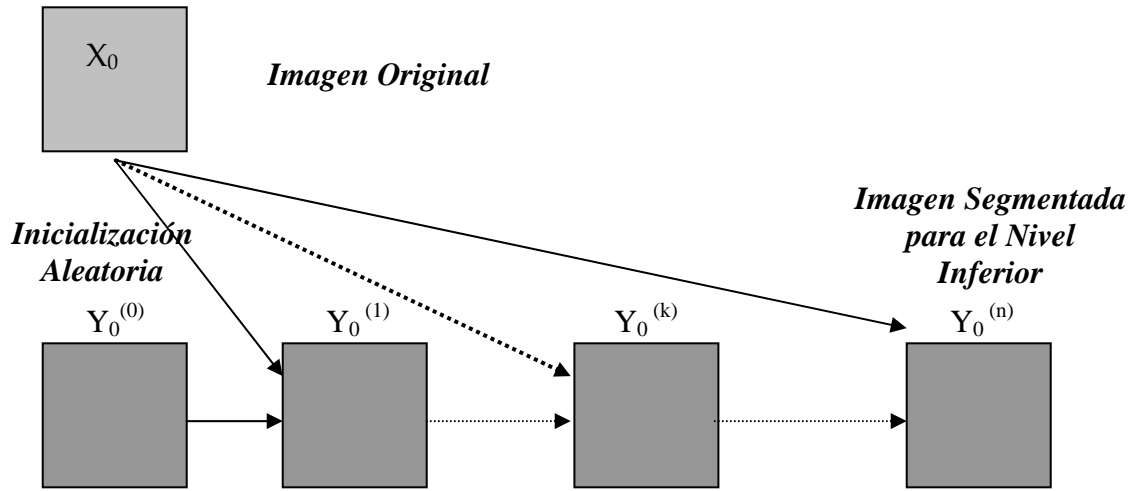


Figura 4.9

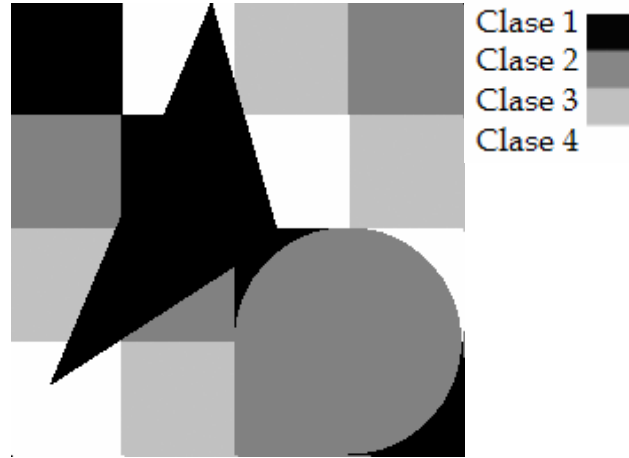
Para relacionar entre los dos niveles de segmentación se utiliza la función de energía de *clique* de la figura 4.7.

De forma práctica se considera que  $X_0$  es la imagen original y la imagen  $Y_0$  segmentada en  $k$  etiquetas. La simulación toma como datos iniciales a  $X_0$  y a la imagen de clases originada en la inicialización,  $Y_0^{(0)}$ .

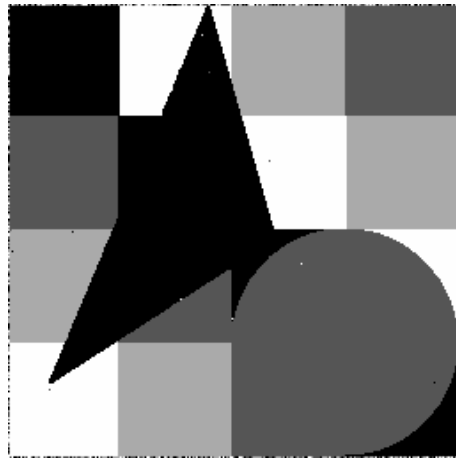


## 4.4 RESULTADOS

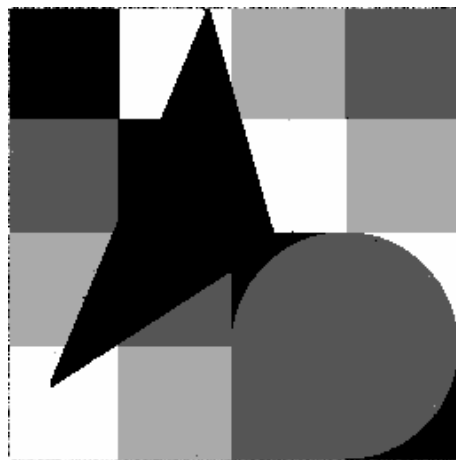
### 4.4.1 IMÁGENES SINTÉTICAS



a)Imagen Original: Temperatura=2, Beta=0.35, Tamaño Imagen=256x256 pixeles

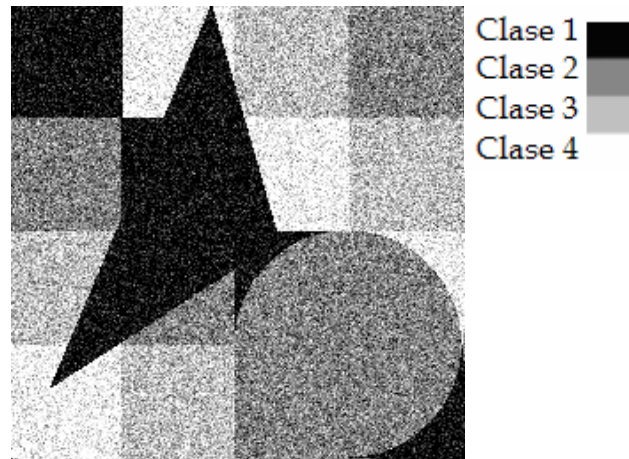


b)Esquema Típico: Iteraciones 60=, Tiempo=662.03[s]

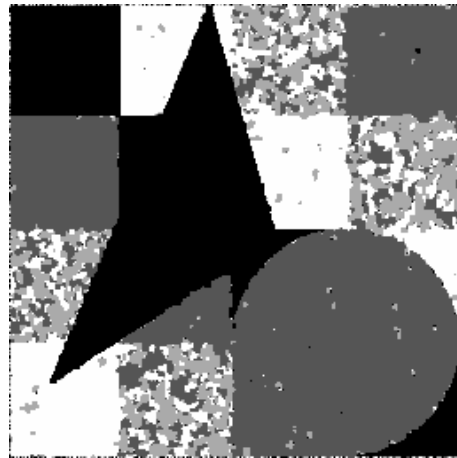


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=20, Tiempo=530.4[s]  
Niveles=2,  $T^0=1.76$ ,  $T^1=2$ ,  $\beta = 0.35$

Figura 4.10



a)Imagen Original: S/N=19 dB.

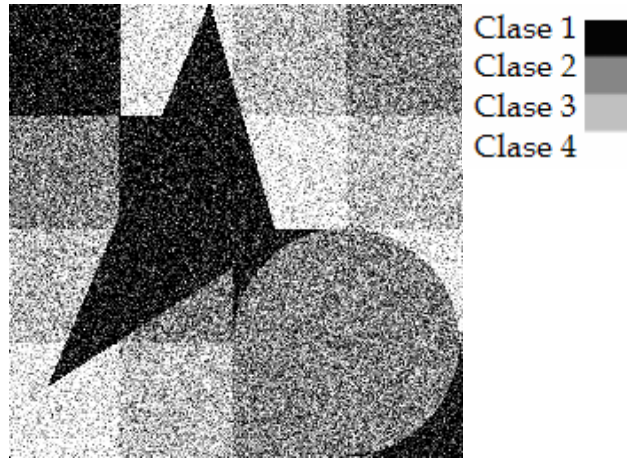


b)Esquema Típico: Iteraciones=70, Tiempo= 837.96[s]

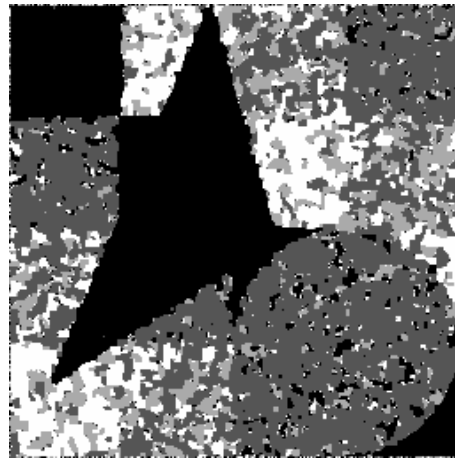


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=20, Tiempo=551.2[s]  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta=0.35$

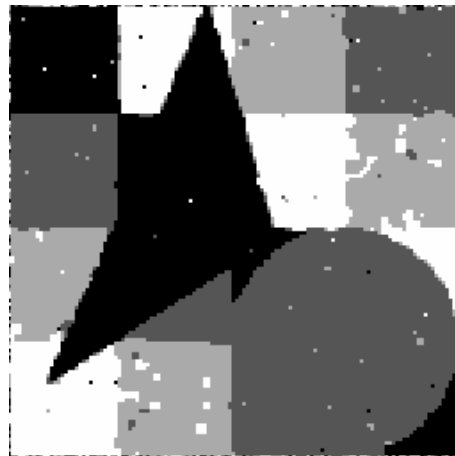
Figura 4.11



a)Imagen Original: S/N=13 dB.

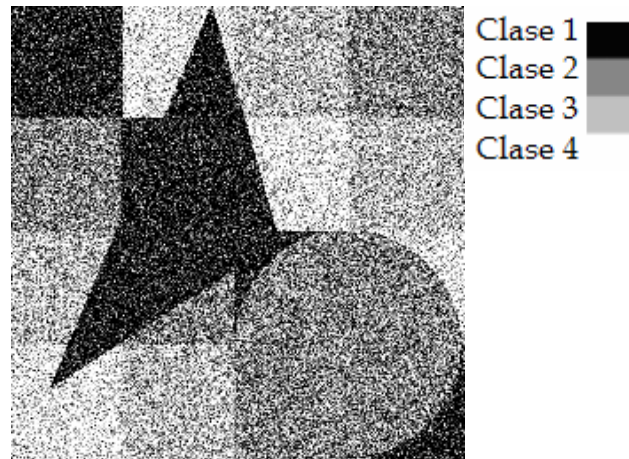


b)Esquema Típico: Iteraciones=80, Tiempo=916 [s]

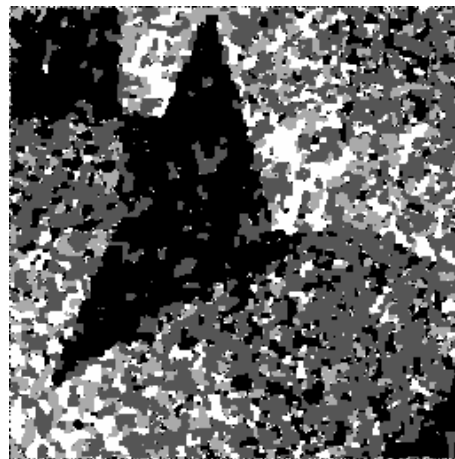


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=20, Tiempo=526.2[s]  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta=0.35$

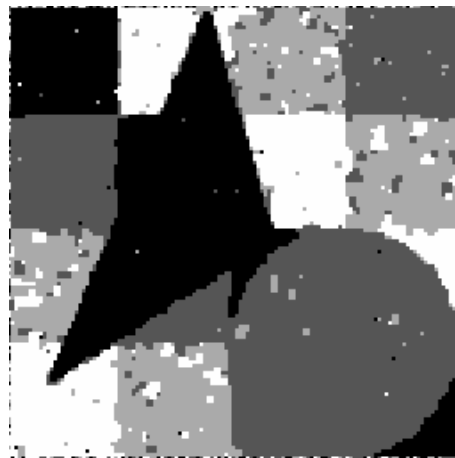
Figura 4.12



a)Imagen Original: S/N=11 dB.

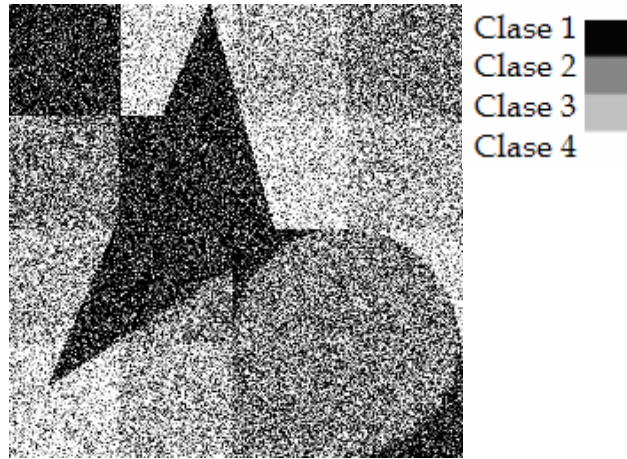


b)Esquema Típico: Iteraciones=80, Tiempo= 908.20 [s]

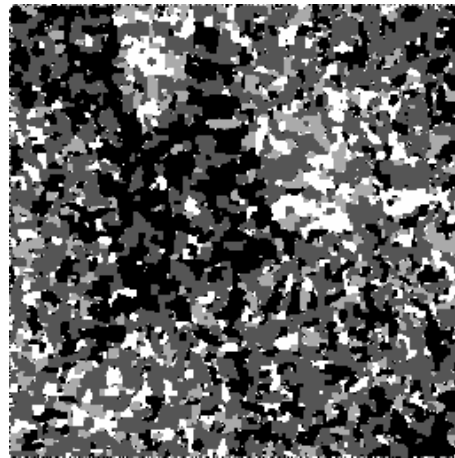


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=22, Tiempo=529.1[s]  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta =0.35$

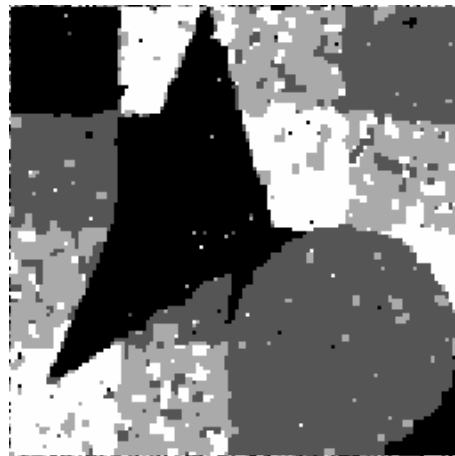
Figura 4.13



a)Imagen Original: S/N=9 dB.

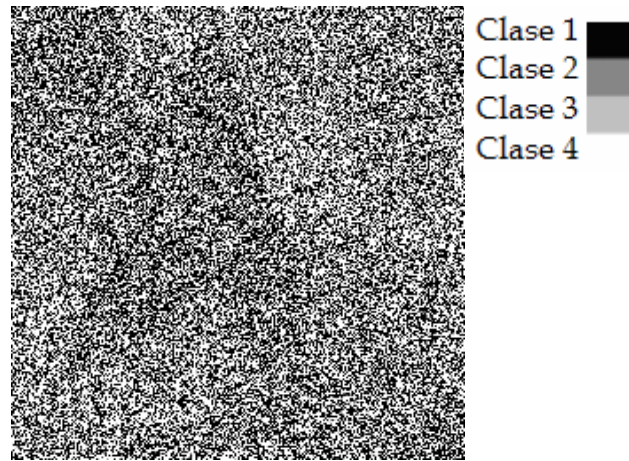


b)Esquema Típico: Iteraciones=80, Tiempo= 943.20 [s]

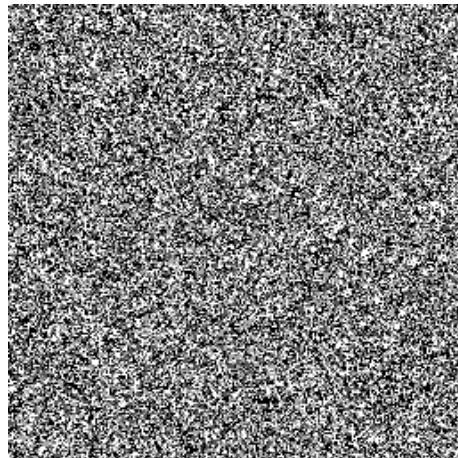


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=25, Tiempo=765.5[s]  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta=0.35$

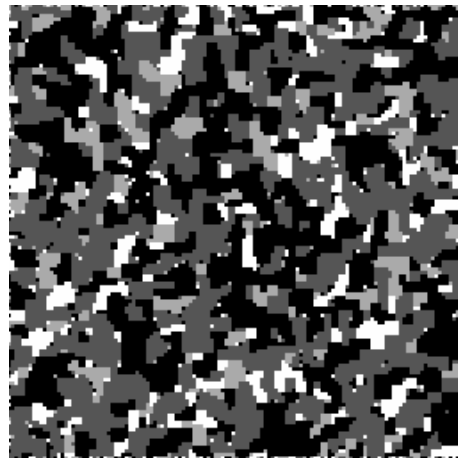
Figura 4.14



a)Imagen Original: S/N=3 dB.



b)Esquema Típico: Iteraciones=80, Tiempo= 1008.3 [s]



c)Esquema Propuesto: Iteraciones=25, Tiempo=808.25[s]  
Niveles=2,  $T^0=1.76$ ,  $T^1=2$ ,  $\beta=0.35$

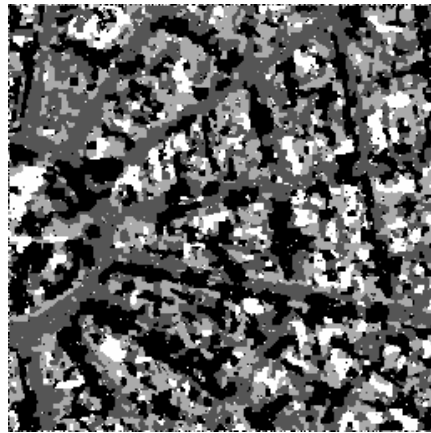
Figura 4.15

#### 4.4.2 IMÁGENES DE PERCEPCIÓN REMOTA

##### IMAGEN AÉREA PANCROMÁTICA



a)Imagen Original: Temperatura=2, Beta=0.35, Tamaño Imagen=512x512 pixeles



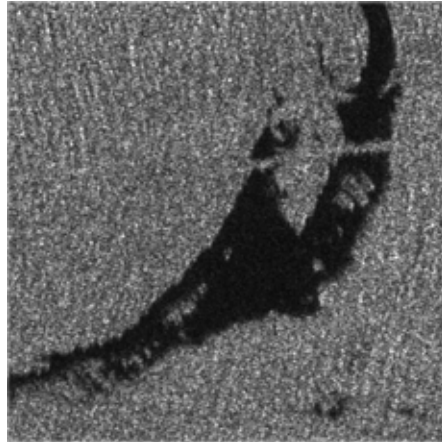
b)Esquema Típico: Iteraciones=80, Tiempo=3486.4[s]



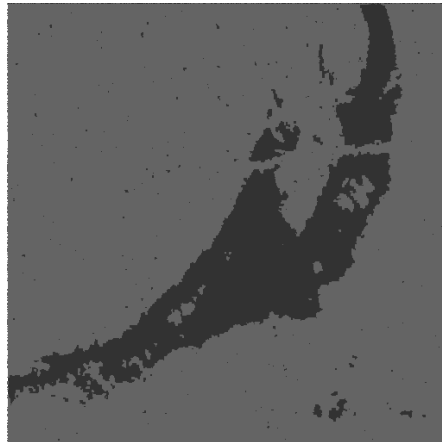
c)Esquema Propuesto: Iteraciones=35, Tiempo=3187.9[s]  
Niveles=2,  $T^0=1.76$ ,  $T^1=2$ ,  $\beta = 0.35$

Figura 4.16

## IMAGEN DE SAR



a)Imagen Original: Temperatura=2, Beta=0.35, Tamaño Imagen=512x512 pixeles



b)Esquema Típico: Iteraciones=70, Tiempo=2617.2 [s]

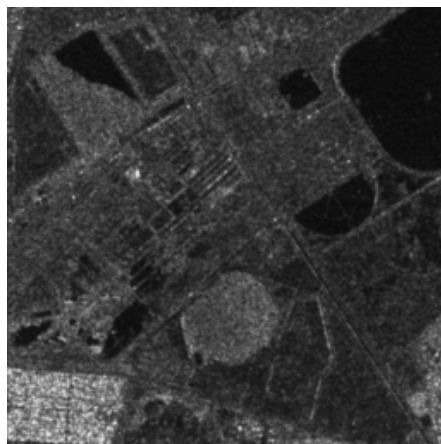


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=30, Tiempo=2254.9[s]  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta=0.35$

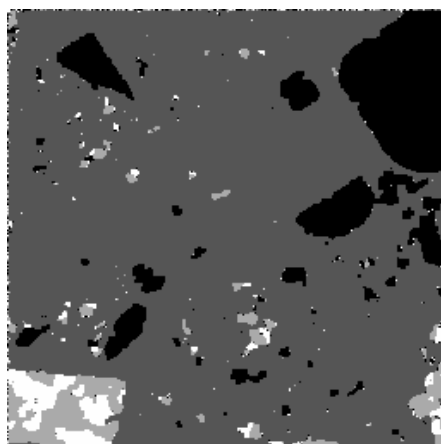
Figura 4.17



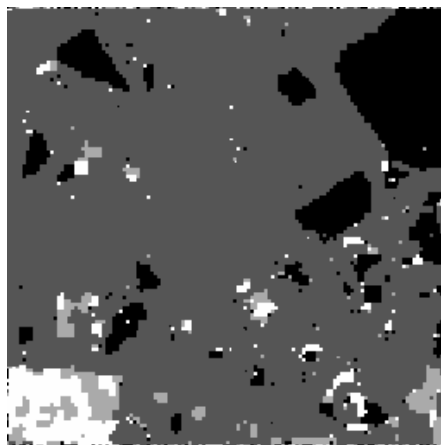
IMAGEN SAR



a)Imagen Original DF 1997  
Temperatura=2, Beta=0.35, Tamaño Imagen=256x256 pixeles



b)Imágenes Segmentadas Esquema Típico  
Iteraciones=70, Tiempo=816.73

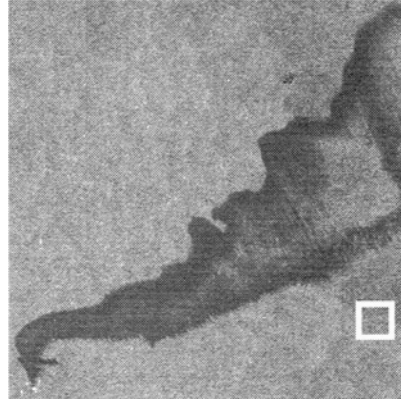


c)Esquema Propuesto: Iteraciones=23, Tiempo=621.43[s]  
Niveles=2,  $T^0=1.76$ ,  $T^1=2$ ,  $\beta = 0.35$

Figura 4.18

## 4.4.3 COMPARACIÓN VISUAL CON OTROS MÉTODOS DE SEGMENTACIÓN

En [MERC06] se presenta un método supervisado para detectar derrames de petróleo en imágenes SAR. Ese algoritmo y el propuesto en el presente trabajo se comparan:



a)Imagen original

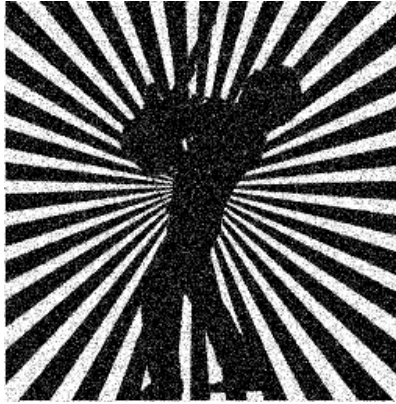


b)Imagen segmentada por [MERC06]

c)Esquema propuesto  
Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta=0.35$ 

Figura 4.19

IMAGEN SINTÉTICA



a)Imagen: 256 x 256 pixels



b)Resultado basado en [LOPE05]



c)Esquema Propuesto

Niveles=2,  $T_0=1.76$ ,  $T_1=2$ ,  $\beta =0.35$

Figura 4.20

El procesamiento de la figura 4.20-b) está basado en la fusión de diferentes segmentaciones. Lo cual resulta de una imagen más fina, pero el tiempo de procesamiento de esta es de 2952 [s] comparado con 540.2[s] de la figura 4.20-c).

## 4.5 TABLAS

<b>ESQUEMA TÍPICO</b>				
256x256 pixels: $T=2$ , $\beta=0.35$				
<b>Figura</b>	<b>Iteraciones</b>	<b>Tiempo Total [s]</b>	<b>[s]/Iter</b>	<b>SNR [dB]</b>
4.10	60	662.03	11.03	
4.11	70	837.96	11.97	19
4.12	80	916	11.45	13
4.13	80	908.2	11.35	11
4.14	80	943.2	11.79	9
4.15	80	1008.3	12.60	3
		<b>Total tiempo cómputo</b> 5275.69	<b>Promedio</b> 11.7	

Tabla 4.1

<b>ESQUEMA PROPUESTO</b>				
256x256 pixels: Niveles=2, $T^0=1.76$ , $T^1=2$ , $\beta=0.35$				
<b>Figura</b>	<b>Iteraciones</b>	<b>Tiempo Total [s]</b>	<b>Seg/Iter</b>	<b>SNR [dB]</b>
4.10	20	530.4	26.52	
4.11	20	551.2	27.56	19
4.12	20	526.2	26.31	13
4.13	22	529.1	24.05	11
4.14	25	765.5	30.63	9
4.15	25	808.25	32.33	3
		<b>Total tiempo cómputo</b> 3710.65 [s]	<b>Promedio</b> 27.89 [s]	

Tabla 4.2

**Imagen Aérea Pancromática Figura 4.16**

ESQUEMA TÍPICO			ESQUEMA PROPUESTO		
512x512 pixels: $T=2$ , $\beta=0.35$			512x512 pixels Niveles=2, $T^0_0=1.76$ , $T^0_1=2$ , $\beta=0.35$		
Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter	Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter
80	3486.4	43.58	35	3187.9	91.08

Tabla 4.3

**Imagen SAR Figura 4.17**

ESQUEMA TÍPICO			ESQUEMA PROPUESTO		
512x512 pixels: $T=2$ , $\beta=0.35$			512x512 pixels Niveles=2, $T^0_0=1.76$ , $T^0_1=2$ , $\beta=0.35$		
Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter	Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter
70	2617.2	37.38	30	2254.9	75.16

Tabla 4.4

**Imagen SAR Figura 4.18**

ESQUEMA TÍPICO			ESQUEMA PROPUESTO		
256x256 pixels: $T=2$ , $\beta=0.35$			256x256 pixels Niveles=2, $T^0_0=1.76$ , $T^0_1=2$ , $\beta=0.35$		
Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter	Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter
70	816.73	11.62	23	621.43	27.01

Tabla 4.5

**Figura 4.19**

[MERC06]		ESQUEMA PROPUESTO		
		Niveles=2, $T^0_0=1.76$ , $T^0_1=2$ , $\beta=0.35$		
a) Descomposición multiresolución por medio de transformada discreta wavelet. b) Se define la región no contaminada de entrenamiento. c) Se introducen las imágenes en un clasificador estadístico.	Tiempo Total [s]	Iteraciones	Tiempo Total [s]	Seg/lter
	1 min. – 10 s	21	574.31	27.34

Tabla 4.5

Las segmentaciones se llevaron a cabo sobre una PC con procesador Celeron a 2.8 Ghz y 512 Mb de RAM.

## 5 Conclusiones

En el presente trabajo se presentó un modelo para la segmentación de imágenes digitales. El modelo propuesto está basado en la teoría de Campos Aleatorios de Markov y ligado con optimización estocástica multitemperatura por medio de un esquema jerárquico.

Se pudo observar que este modelo presenta como ventaja principal el ahorro de tiempo de cómputo, a su vez, se obtienen buenos resultados comparables con el esquema típico de segmentación markoviana. De manera cualitativa mejora los resultados y de forma cuantitativa se reduce el tiempo global de procesamiento, así también, el trabajo de programación es un poco más elaborado que el esquema típico. De acuerdo con los resultados de las tablas contenidas en el punto 4.4, el tiempo para cada iteración aumenta, pero de manera global el tiempo de procesamiento disminuye. Esto tiene como razón a cada una de las iteraciones del esquema propuesto involucra un mayor número de operaciones que en el esquema típico. Los resultados visuales muestran que el modelo presenta buen desempeño ante imágenes de diferente naturaleza.

El algoritmo del modelo propuesto se inicializa desde diferentes configuraciones y diferentes temperaturas, también define una vecindad de sites en donde intervienen diferentes sites pertenecientes a niveles adyacentes de la pirámide multiresolución. La comunicación entre niveles jerárquicos se da como lo ilustra la figura 4.8. La opción de incorporar este esquema jerárquico se traduce en un modelo robusto al ruido presente en la imagen .

Se observó que la convergencia para los niveles superiores de la pirámide jerárquica fue más rápida comparado con los niveles inferiores de dicha pirámide. .Esto se explica en que el espacio de configuraciones es menor en el nivel superior con respecto al inferior. Con esta característica se podrían establecer mecanismos para evitar visitar soluciones encontradas previamente y así ahorrar más tiempo de cálculo. Para realizar la optimización de la función de energía a posteriori se utilizó el algoritmo de recocido simulado para el nivel superior de la pirámide y para el nivel inferior, se realizó una optimización estocástica basada en el mismo algoritmo. La evaluación de la calidad visual de los resultados aunado con el conocimiento previo de las clases presentes en la imagen a segmentar y la reducción del tiempo global de procesamiento, ayudaron para establecer que el modelo propuesto es una buena alternativa para realizar segmentación basada en Campos Aleatorios de Markov.

Las aportaciones de este trabajo es el de haber realizado la implementación de un modelo jerárquico multitemperatura para segmentación basada en Campos Aleatorios de Markov y realizar la evaluación con respecto a un esquema típico. Así también se comparó el modelo propuesto con otros algoritmos presentados en la literatura. Las perspectivas futuras para este trabajo serían: la publicación de un artículo en base a los resultados obtenidos, generar mayor sensibilidad a las estructuras finas presentes en las imágenes y realizar la segmentación en tiempo real utilizando esquemas basados en los Campos Aleatorios de Markov.

## 6

## Referencias

- [BESA86] J. Besag, *On the statistical analysis of dirty pictures*, Journal Royal Statistics Bolletin, 1986.
- [BOUM91] C. Bouman and B. Liu, *Multiple resolution segmentation of texture images*, IEEE Transactions Pattern Analysis Machine Intelligence. 13, 1991, 99–113.
- [BOUM94] C. A. Bouman and M. Shapiro, *A multiscale random field model for Bayesian image segmentation*, IEEE Transactions Image Processing. 3(2), 1994, 162–177.
- [DELY06] G. Delyon, *SAR Image Segmentation by Stochastic Complexity Minimization With a Nonparametric Noise Model*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 44, No. 7, pp. 1955-1961, 2006.
- [CHELL97] S. Krishnamachari and R. Chellappa, *Multiresolution Gauss-Markov Random Field Models for Texture Segmentation*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 6, No. 2, 1997.
- [COME99] M.L. Comer, E. J. Delp, *Segmentation of textured Images Using a Multiresolution Gaussian Autoregressive Model*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 8, No. 3, 1999.
- [GEMA84] S. Geman and D. Geman, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*, IEEE Transactions Pattern Analysis Machine Intelligence, Vol. 6, pp. 721-741, 1984.
- [GIDA89] B. Gidas, *A renormalization group approach to image processing problems*, IEEE Transaction Pattern Analysis Machine Intelligence, Vol. 11, No. 2, pp. 164-180. 1989.
- [HEIT91] F. Heitz, P. Perez, E. Memin, and P. Bouthemy. *Parallel Visual Motion Analysis Using Multiscale Markov Random Fields*, In Proceedings Workshop on Motion, Princeton, 1991.
- [HU91] R. Hu, M. Fahmy, *Texture segmentation based on Hierarchical Markov Random Field Model*, IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 1991, 512-515.
- [INGB93] A.L. Ingber, *Simulated Annealing: Practice versus Theory*, Journal Mathematical Computing Modelling, 18(11): pp.29-57, 1993.
- [INGB95] A.L. Ingber, *Adaptive Simulated Annealing (ASA): Lessons learned*, Control and Cybernetics. 1995.
- [KATO92] Z. Kato, M. Berthod and J. Zerubia. *Image classification using Markov Random Fields with two new relaxation methods: Deterministic Pseudoannealing and Modified Metropolis Dynamics*. Rapport de Recherche, 1992.
- [KATO93] Z. Kato, M. Berthod and J. Zerubia. *Multiscale Markov Random Field models for Parallel Image*. Proceedings Fourth International Conference on Computer Vision, pp. 253-257, 1993.
- [KATO94] Z. Kato, M. Berthod and J. Zerubia. *A Hierarchical Markov Random Fields*. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Rapport de Thésés, 1994.
- [KATO96] Z. Kato, M. Berthod and J. Zerubia. *An Hierarchical Markov Random Field Model and Multitemperature Annealing for Parallel Image Classification*. Graphical Models and Image Processing, Vol. 58, No. 1, pp. 18-37, 1996.
- [KOLM06] V. Kolmogorov, *Convergente Tree-Reweighted Message Passing for Energy Minimization*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 28, No.10, pp. 1568-1583, 2006.
- [KONR88] Konrad, Dubois, *Multigrid Bayesian estimation of image motion fields using stochastic relaxation*. IEEE Proceedings of International Conference on Computer Vision. 1988.
- [LIO1] S. Z. Li, *Markov Random Field Modeling in Image Analysis*, Ed. Springer Verlag, 2001.
- [LIEV04] M. Liévin and F. Luthon, *Non linear color space and spatiotemporal MRF for hierarchical segmentation of face features in video*, IEEE Transactions on Image Processing 13(1): pp. 1-9, 2004.
- [LOPE05] L. Lopez, M. Moctezuma, F. Parmiggiani, *Oil Spill Detection Using GLCM and MRF*, IEEE-IGARSS 2005.
- [LUTH99] F. Luthon, A. Caplier, M. Liévin, *Spatiotemporal MRF Approach Video Segmentation : Application to Motion Detection and Lip Segmentation*, Signal Processing Vol. 76, No. 1, pp. 61-80, 1999.

- [MARQ92]** F. Marques, J. Cunillera, and A. Gasull. *Hierarchical Segmentation Using Compound Gauss-Markov Random Fields*. In Proc. ICASSP, San Francisco, 1992.
- [MERC06]** G. Mercier and F. Girard. *Partially Supervised Oil-Slick Detection by SAR Imagery Using Kernel Expansion*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol 44, No. 10, pp. 2839-2846, 2006.
- [PERE92]** P. Perez and F. Heitz. *Multiscale Markov Random Fields and Constrained Relaxation in Low Level Image Analysis*. In Proc. ICASSP, San-Francisco, 1992.
- [PERE98]** P. Perez. *Markov Random Fields and Images*. CWI Quarterly. Volumen 11. No. 4, pp. 413-437, 1998.
- [SERP06]** S. B. Serpico and G. Moser, *Weight Parameter Optimization by the Ho-Kashyap Algorithm in MRF Models for Supervised Image Classification*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 44, No. 12, pp. 3695-3705, 2006.
- [SOLB07]** A. Solberg, C. Brekke and P.O. Husoy, *Oil Spill Detection in Radarsat and Envisat Images*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 45, No. 3, pp. 746-755, 2007.
- [SZIR00]** T. Szirányi, J. Zerubia, L. Czúni, D. Geldreich and Z. Kato, *Image Segmentation Using Markov Random Field Model in Fully Parallel Cellular Network Architectures*, Real-Time Imaging, Vol. 6, pp. 195-211, 2000.
- [TERZ86]** J. Terzopoulos, *Image analysis using multigrid relaxation methods*, IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol. 8, pp. 129-139, 1986.
- [YANG06]** Y. Yang and H. Sun, *Supervised SAR Image MPM Segmentation Based on Region-Based Hierarchical Model*, IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, Vol. 3, No. 4, pp. 517-521. 2006.
- [YU06]** Q. Yu and A. Clausi, *Filament Preserving Model (FPM) Segmentation Applied to SAR Sea-Ice Imagery*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 44, No. 12, pp. 3687-3694. 2006.
- [ZERU93]** J. Zerubia and R. Chellappa, *Mean field annealing using compound Gauss-Markov random fields for edge detection and image estimation*, IEEE Trans. Neural Networks 8(4), 1993, 703-709.