



Ciencia e Ingeniería
de Materiales

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE
MATERIALES**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATERIALES**

**“TEORÍA CONSTRUCTAL APLICADA A
UNA RED CAPILAR SANGUÍNEA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIA
E INGENIERÍA DE MATERIALES**

P R E S E N T A

ING. JORGE ARMANDO OJEDA SANCHEZ

Tutor: Dr. Federico Méndez Lavielle



México, D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

“Si no eres tú, ¿quién?
Si no es aquí, ¿dónde?
Si no es ahora, ¿cuándo?”

A. Jodorowsky

Mis más sinceros agradecimientos:

Al CONACYT, por el apoyo brindado durante la duración de mis estudios de maestría.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por su valioso apoyo, tiempo y amistad.

Al Dr. Carlos Escobar del Pozo por su gran amistad.

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería UNAM, por brindarme los recursos necesarios para la realización de este trabajo.

A Nancy.

A mi Madre.

Índice

Resumen	v
Nomenclatura	vii
1 Introducción	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Antecedentes	2
2 Planteamiento del problema	9
2.1 Consideraciones Generales y Modelo Físico	9
2.2 Primera Construcción	10
2.3 Segunda Construcción	21
2.4 Tercera Construcción	26
3 Resistencias	31
4 Resultados	37
5 Conclusiones	43
Apéndice A	49
Apéndice B	51

Resumen

En el presente trabajo se hace un estudio del transporte del dióxido de carbono en una red vascular. Es en éstas donde se presenta el transporte de nutrientes, de oxígeno, entre otras sustancias, y se recolecta el dióxido de carbono producto de la actividad del tejido vivo. Este trabajo analiza como se logra una menor resistencia para el máximo desalojo de dióxido de carbono en una red vascular óptima.

La red optimizada es el resultado de aplicar la teoría constructal propuesta por A. Bejan, que establece que la forma y la estructura en la naturaleza son producto de un diseño óptimo para privilegiar algún factor físico necesario para la subsistencia del sistema vivo. En el caso de las redes optimizadas con la teoría constructal, éstas se diferencian de las redes producto de modelos de la geometría fractal, ya que las primeras son resultado de los mismos principios físicos pero bajo restricciones locales diferentes.

Es a partir de esta teoría que se genera una red vascular a partir de principios físicos y restricciones de área y volumen, obteniendo así las proporciones geométricas para el diámetro y longitud de cada nivel de la red. Considerando que el flujo sanguíneo es un fluido no-newtoniano, se caracteriza su naturaleza reológica mediante el modelo de Ostwald de Waele o ley de potencia.

Posteriormente se aplican las proporciones de construcción del diámetro y la longitud generalizadas para el i -ésimo nivel de construcción, para aplicarlas a un modelo de transporte del dióxido de carbono que se presenta a través de las paredes de los vasos sanguíneos, determinando las resistencias debidas a la presencia de la presión osmótica, el gradiente de concentraciones, así como las debidas a los términos difusivos del flujo sanguíneo en la red vascular.

El modelo final considera la resistencia total, para entonces obtener el número de bifurcaciones para una resistencia mínima, en función del índice de potencia del modelo reológico aplicado.

Nomenclatura

A	área	$[m^2]$
a	espesor del elemento de construcción	$[m]$
C	concentración	$[\frac{Kg}{m^3}]$
D	diámetro	$[m]$
D	difusividad del CO_2	$[\frac{m^2}{s}]$
H	altura del elemento de construcción	$[m]$
J	transferencia total del CO_2 a través de la membrana	$[\frac{Kg}{m^2s}]$
K	índice de consistencia	$[\frac{Kgs^{n-2}}{m}]$
k	permeabilidad	$[m^2]$
L	longitud del elemento	$[m]$
\dot{m}	flujo másico	$[\frac{Kg}{s}]$
\dot{m}'	flujo másico volumétrico	$[\frac{Kg}{m^3s}]$
n	índice de potencia	
P	presión	$[Pa]$
V	volumen	$[m^3]$

Subíndices

0	primer elemento
1	primera construcción
2	segunda construcción
CO_2	dióxido de carbono
e	entrada
i	construcción i – <i>ésima</i>
M	difusividad
m	mezcla
$memb$	permeabilidad de la membrana
p	permeabilidad equivalente
sm	concentración promedio

Símbolos griegos

α	concentración relativa del CO_2 en el tejido	
μ	viscosidad dinámica	$[Pa \cdot s]$
Π	presión osmótica	$[Pa]$
ρ	densidad	$\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$
σ	coeficiente de reflexión	
ν_{co2}	viscosidad cinemática del CO_2	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$

1

Introducción

1.1 Generalidades

En el presente trabajo se estudia el transporte de dióxido de carbono en una red venular optimizada mediante el empleo de la teoría constructal propuesta por Bejan [1]. La teoría constructal establece que es posible la generación de redes optimizadas para el transporte de fluido a partir de principios físicos, aplicando restricciones globales a cada nivel de construcción, dando como resultado la forma y la estructura de la red.

El flujo sanguíneo se caracteriza mediante el modelo de la ley de potencia, tomando en cuenta que la sangre se considera como un flujo pseudoplástico [2]. La función principal de la red vascular es transportar oxígeno, nutrientes y desalojar básicamente el dióxido de carbono (entre otras sustancias) como producto de la actividad del tejido vivo.

La motivación del trabajo presente es obtener las leyes de construcción para una red capilar venular que se adapta a las necesidades del desalojo de dióxido de carbono, considerando las características reológicas del flujo sanguíneo. Posteriormente, los resultados de las leyes de construcción se aplican a un modelo de transporte del dióxido de carbono a través de las paredes vasculares de los vasos sanguíneos, consideradas como membranas que permiten el intercambio de sustancias. Las leyes de construcción que se derivan de la teoría constructal permiten entonces escribir de esta manera, las razones geométricas de los diámetros y longitudes para una red vascular optimizada, en términos de razones numéricas conocidas.

El modelo de transporte considera además, las contribuciones de las resistencias convectivas y difusivas debidas a la red con flujo sanguíneo y al transporte del dióxido de carbono a través de la pared de los vasos sanguíneos. Optimizando el modelo para índices de potencia menores a la unidad, se determina la influencia de la reología de la sangre y el desalojo del dióxido de carbono con el número de bifurcaciones óptimo de la red vascular venular.

1.2 Antecedentes

La circulación sanguínea se divide en: circulación periférica y pulmonar. La circulación periférica se encarga de suministrar sangre a los distintos órganos y la circulación pulmonar tiene la función de oxigenar la sangre. El sistema circulatorio consta de arterias, arteriolas, metarteriolas, capilares, vénulas y venas, tal como se observa en la Figura 1.1.

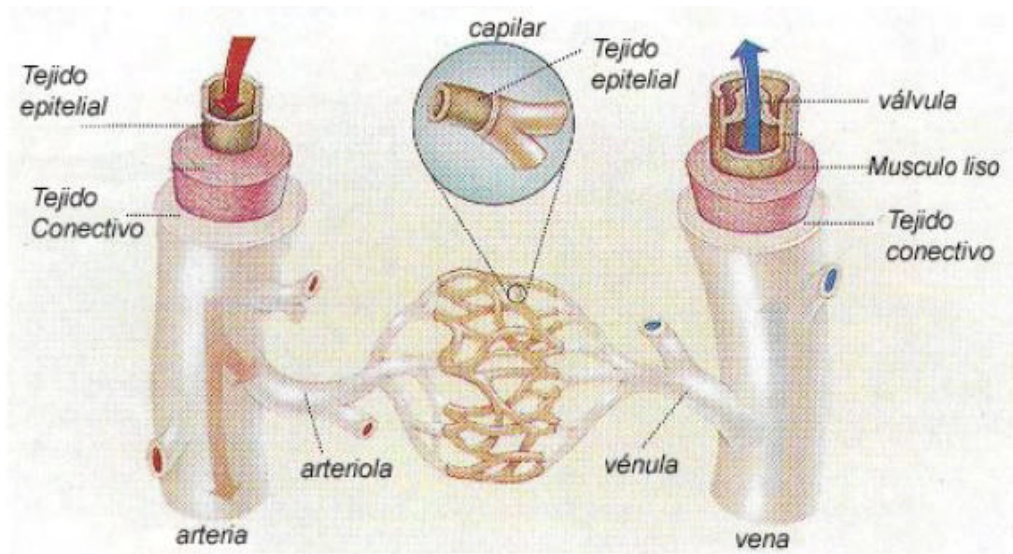


Figura 1.1: Red Vascular

El objetivo fundamental de una red vascular es transportar nutrientes y oxígeno a los diferentes tejidos del cuerpo humano. La microcirculación es responsable de la regulación de la sangre en órganos individuales, del intercambio de sustancias entre el tejido y el flujo sanguíneo; dicho intercambio se presenta principalmente en los vasos capilares, arteriolas pequeñas y vénulas. La sangre es una mezcla compleja de células, proteínas, lipoproteínas e iones, en la que nutrientes y desperdicios son transportados en un líquido llamado plasma. Éste se encarga de llevar nutrientes, proteínas; además de cumplir la función de lubricante para las células sanguíneas en los vasos más pequeños llamados capilares.

El plasma es una sustancia que está constituida por un 90 % de agua y generalmente se le considera como un fluido newtoniano en arterias y arteriolas. Los glóbulos rojos o eritrocitos son pequeñas partículas encargadas del transporte del oxígeno y del dióxido de carbono. Los glóbulos rojos constituyen el 95 % de la composición de la sangre, la presencia de los glóbulos rojos incrementan la viscosidad y afectan el comportamiento del fluido. En las arterias y venas principales se puede considerar a la sangre como un fluido homogéneo, debido a que el tamaño de las partículas es varios órdenes de magnitud más pequeño que las escalas de los vasos sanguíneos y presenta un comportamiento no-newtoniano pseudoplástico.

En la microcirculación la sangre se considera principalmente como un fluido bifásico, plasma y glóbulos rojos. Las vénulas y arteriolas contribuyen también al intercambio de algunas especies. Los glóbulos blancos o leucocitos se encuentran en una proporción de 1 a 1000 con respecto a los glóbulos rojos tienen poca influencia en el coeficiente de viscosidad de la sangre desde el punto de vista macroscópico. Las propiedades reológicas de la sangre dependen del esfuerzo cortante, de las dimensiones y geometría del sistema que contiene al fluido.

Popel, et. al., [4] reportan ejemplos de la arquitectura de la red microcirculatoria en diferentes especies, siendo evidente que dicho arreglo de vasos sanguíneos es tridimensional y altamente especializado para un órgano o tejido determinado; por ejemplo cada vaso es de una forma cuasi-cilíndrica, con diámetros y longitudes decrecientes desde la aorta hasta la red compuesta por capilares. Las paredes de los vasos sanguíneos se conforman de una serie de capas de tejido conectivo, músculo liso, membranas basales y células endoteliales.

El estudio de las redes vasculares presenta un alto grado de complejidad, para estudiar y describir su comportamiento, generación y adaptación es indispensable considerar diferentes aspectos. En esta dirección, los siguientes trabajos representan una visión global, que tomando en cuenta diferentes enfoques, permiten de manera sencilla tener una idea básica del fenómeno de la microcirculación en una red capilar sanguínea.

Pries, et. al., [5] desarrollaron un modelo teórico para determinar el cambio en los diámetros de los vasos sanguíneos durante el proceso de adaptación estructural de una red microvascular al responder a las necesidades de consumo de sustancias del tejido. Estos autores encuentran que el diámetro de cada segmento cambia con el tiempo de respuesta, principalmente por cuatro estímulos locales: esfuerzo cortante en la pared del endotelio, presión intravascular, el estímulo metabólico dependiente del flujo y el estímulo conducido a lo largo de las paredes vasculares. Para describir la situación anterior, consideran tres estructuras microvasculares hipotéticas que les permitió establecer un modelo con las mínimas respuestas adaptativas.

Lo anterior se compara con las redes microvasculares reales obtenidas de un tejido de rata. La información que se obtiene con dicho proceso básicamente se reduce a caracterizar la estructura microvascular (topología), las velocidades, longitudes y diámetros de cada segmento. Los resultados obtenidos ilustran cada uno de los estímulos para la adaptación del diámetro; en particular se presentan gráficas del esfuerzo cortante y el diámetro contra la presión para los extremos arterial, capilar y venoso. En este trabajo se reporta que si el esfuerzo cortante es uniforme en todos los segmentos de una red microvascular puede correlacionarse con el cubo del diámetro de cada segmento.

Uno de los primeros estudios del sistema vascular se basa en el principio de minimización de la energía establecido por Murray [6]. En este trabajo se plantean dos principios para abordar el estudio del sistema vascular, el primero es considerar estados permanentes, el segundo principio es el de mínimo trabajo. Con este último principio se aborda la operación de los sistemas fisiológicos, suponiendo que el mejor estado cuantitativo incorpora el concepto de organización. Éste es un principio que indica y establece que el costo de operación de los sistemas fisiológicos tiende a ser mínimo.

Para esto, Murray consideró la ecuación de Pouseuille para el flujo de fluido en conductos cilíndricos, con viscosidad de la sangre, radio y longitud de los capilares uniformes, determinando así una expresión para la energía total en el sistema circulatorio compuesta de dos elementos: el primero es la potencia para mantener el flujo el segundo que mantiene la potencia requerida para el mantenimiento metabólico de la sangre y la pared del endotelio del conducto capilar. Lo anterior permite entonces obtener el mínimo consumo de trabajo. Como resultados importantes se obtienen valores para diferentes diámetros de la red arterial, concluyendo que el sistema arterial reduce el trabajo realizado en $\frac{1}{16}$ respecto de los valores obtenidos para radios de la red arterial menores.

Gabrys, et. al., [7], realizan un análisis del flujo sanguíneo a partir de modelos asimétricos de la red circulatoria, donde la red se genera mediante la aplicación de los principios establecidos por el modelo de Murray, suponiendo que en la red vascular se requiere del mínimo trabajo biológico para mantener el flujo sanguíneo. Mediante la teoría de los fractales determinan el tamaño y rango de los diámetros; sin embargo, el modelo matemático fractal no puede dar por resultado una red de tamaño muy grande que carezca de significado físico.

Para generar dicha red consideran que la estructura es dicotómica, estableciendo diferentes modelos para el diámetro, la longitud y expresiones matemáticas para los ángulos de bifurcación de la red, así como los diferentes factores de escala para cada nivel. Los resultados reportados son representaciones gráficas de la red generada para los casos simétricos, asimétricos y el número de vasos sanguíneos.

Es importante mencionar que los trabajos anteriores destacan la necesidad de conocer con mayor detalle aspectos que identifiquen la morfología de las redes tanto pulmonares como sanguíneas. En esta dirección, Krenz, et. al., [8] reportaron un modelo matemático para la red pulmonar a partir de graficas obtenidas de datos morfométricos de diferentes especies, que sugieren una autosimilaridad independiente de la escala, es decir una estructura fractal. Este punto de vista permite anticipar que uno de los objetivos principales de este trabajo es obtener una estructura con las características morfométricas y hemodinámicas a partir de un número mínimo de parámetros.

En general para esta clase de estudios, las correlaciones obtenidas describen el diámetro y la longitud para cada nivel de la red pulmonar. Los resultados son expresiones matemáticas para la distribución de la resistencia, la distribución de la respuesta de la red a responder ante los cambios de presión; la descripción de las propiedades inerciales del oxígeno en los vasos sanguíneos. Como se verá más adelante, parte de los resultados obtenidos son curvas características para cada una de las distribuciones anteriores con diferentes parámetros y en la mayoría de los casos aparecen resultados teóricos muy similares a la ley de Murray [9].

De manera similar, Glenny, et. al., [10] reportaron de manera más sistemática la aplicación de la teoría de los fractales a redes vasculares pulmonares, partiendo del corolario de la autosimilaridad observada en fotografías tomadas *in vivo*, aproximando la forma a partir de modelos matemáticos. Partiendo de las redes vasculares reportan los principales conceptos para caracterizar las dimensiones fractales. Estos autores presentan además un análisis de la morfología de los pulmones humanos, suponiendo que la adaptación de los modelos fractales solamente es válida hasta un límite físico y entonces relacionar la fisiología de la red con la estructura obtenida.

En este contexto es importante mencionar que el crecimiento de las redes capilares se presenta en un ser vivo durante el proceso de embriogénesis. Paralelamente y para completar la formación y estabilidad estructural de las redes, la angiogénesis permite la formación de vasos sanguíneos a partir de una red microvascular existente, se presenta cuando se tienen que satisfacer las demandas de nutrientes de un tejido o músculo determinado, en el desarrollo de enfermedades como el cáncer o en retinopatías diabéticas. Las consecuencias de la adaptación de la red vascular, son el incremento del área para la difusión de oxígeno, disminución de la longitud promedio de difusión e incremento del tiempo de difusión entre la sangre y el tejido, [11].

Posteriormente, Stéphanou, et al., [12] desarrollaron un modelo matemático para el crecimiento de una red capilar inducida por la presencia de un tumor, tomando en cuenta los siguientes estímulos hemodinámicos y metabólicos para generar una estructura vascular estable: la presión intravascular, el esfuerzo cortante en la pared del endotelio, los hematocritos presentes en cada ramificación y una expresión para la adaptación vascular en función de los estímulos mencionados anteriormente y el tiempo.

En este trabajo, el flujo sanguíneo en los nuevos conductos generados es considerado como un fluido no-newtoniano, presentando una viscosidad aparente en función de la presencia de hematocritos y el radio del capilar. Las principales restricciones para la red adaptativa son reológicas y los resultados obtenidos demuestran el desarrollo de una red capilar dinámica que incrementa el número de vasos sanguíneos conforme se aproxima a la superficie del tumor, para diferentes tiempos y valores del gradiente del factor angiogénico generado por el tumor. El principal resultado es la evidencia del crecimiento de la red microvascular existente, sin la presencia de los estímulos metabólicos. El transporte de nutrientes se hace más eficiente en una red adaptada.

Bejan [13], estableció la teoría constructal, en la que plantea que las formas geométricas en la naturaleza son producto de privilegiar uno o varios elementos físicos para lograr un punto óptimo de desempeño. Las geometrías más comunes en el mundo vivo son las redes en forma de "árboles" o de forma dendrítica, presentes en los ríos, en los vasos sanguíneos humanos, en la red alveolar de los pulmones, en las dendritas neuronales, entre otros ejemplos. Considerando que el transporte de la cantidad de movimiento y la energía puede obedecer en ciertas circunstancias a un principio de minimización, no es aventurado decir que muchos de los desarrollos ingenieriles a lo largo de la historia humana se han generado con la ayuda de mínimos costos de operación.

En esta dirección, la teoría constructal establece que la forma y la estructura de un sistema complejo con estructura reticular es consecuencia del transporte de un fluido que se lleva a cabo por la trayectoria que oponga mínima resistencia y sujeta a las leyes físicas que gobiernen el fenómeno de transporte. Sin embargo, es importante destacar que Bejan hace una clara diferencia entre la teoría constructal y la teoría de los fractales, ya que esta última es solamente descriptiva, más no predictiva.

Como es bien conocido, un fractal, según su descubridor B. Mandelbrot [14], es un ente matemático generado mediante la repetición de un algoritmo basado en postulados de reglas de autosimilitud. En la descripción de redes vasculares mediante la teoría de los fractales, el algoritmo generalmente es obligado a interrumpir la secuencia, para así poder obtener una forma que es adecuada para describir un comportamiento físico. Los sistemas físicos pueden considerarse como entidades vivientes en competencia por la supervivencia, el óptimo acceso a un determinado factor físico como sustancias nutrientes, fluidos, calor, etc, persiste en el tiempo como una característica particular. Por lo tanto la teoría constructal propuesta establece el siguiente principio: *Un sistema de tamaño finito que persiste en el tiempo (sistema viviente) debe desarrollarse de una manera tal que proporcione un fácil acceso a las corrientes impuestas que fluyen a través del sistema.*

Como consecuencia del principio anterior, los principios de minimización se aplican en la construcción de conductos en forma de árbol para el transporte de fluidos entre puntos discretos (fuentes, sumideros) y un número infinito de puntos (líneas, áreas y volúmenes). Los elementos de construcción se optimizan en su forma, de manera que la longitud del conducto de flujo que conecta un punto discreto, área o volumen mínimo, por ejemplo la longitud de los conductos de la red alveolar en el flujo de aire en los pulmones [15].

Esta teoría considera un primer elemento volumétrico de material de tamaño finito que se optimiza en su geometría, de manera que la resistencia al flujo total sea mínima. Consecuentemente la solución anterior para el acceso del fluido a un volumen total es optimizando en cada escala de longitud, en una secuencia que comienza con un primer bloque (sistema elemental) para después proceder con bloques de mayor tamaño; la optimización del primer elemento da como resultado la proporción del tamaño del siguiente elemento o bloque (ensambles, construcciones), generando así una red optimizada. La red de forma total dendrítica o de árbol, la geometría de cada bloque que conforma a la red es producto de una optimización geométrica, que determina el número de ramificaciones [16].

Las arquitecturas de forma dendrítica optimizadas para el flujo mediante la teoría constructal han sido reportadas principalmente para el desalojo del flujo de calor mediante un circuito en un material conductivo, así como para redes pulmonares. Reis et al. [17], aplicaron los resultados de la teoría constructal para una red alveolar y obtuvieron las proporciones del diámetro y longitudes anteriores con respecto a los diámetros y longitudes posteriores, considerando que el flujo de aire es laminar, newtoniano, isotérmico e incompresible además de considerar que los sacos alveolares son esféricos.

Para dicha red establecen un modelo de resistencias difusivas y convectivas [18], demostrando que la resistencia debida a las bifurcaciones no es significativa, el resultado de minimizar la resistencia total al flujo obtienen el número de bifurcaciones óptimas de la red alveolar para resistencias mínimas. El número de bifurcaciones obtenido es muy cercano a datos reportados en redes pulmonares.

Wechsato et al. [19], [20], reportan diferentes configuraciones geométricas para el flujo en un cuerpo de forma discoidal, con un punto de entrada hacia el perímetro, dichas estructuras distribuyen al fluido radialmente, presentando bifurcaciones. Las estructuras estudiadas se consideran circuitos abiertos y cerrados, presentando aspectos a estudiar, que son: el número de tubos, relaciones de aspecto de las longitudes y de los diámetros, esto con el fin de optimizar cada conexión, en las geometrías analizadas se consideran despreciables las pérdidas de presión local en las bifurcaciones. El flujo es considerado totalmente desarrollado y laminar en cada conducto, optimizan la resistencia al flujo global. Los resultados reportados son la influencia del número de tubos en la resistencia global de las diferentes configuraciones geométricas, a mayor número de circuitos de la estructura, mayor es la resistencia; la relación de los diámetros no se ve afectada por el aumento de complejidad geométrica del sistema. La arquitectura del flujo es el resultado de cumplir con un objetivo global sujeto a restricciones globales.

En base a los antecedentes anteriores, el objetivo de la presente tesis es obtener un modelo de transporte que considere las resistencias debidas al flujo sanguíneo y al transporte de dióxido de carbono a través de la pared del conducto. Para ello es necesario determinar las leyes de construcción para el diámetro y la longitud para una red capilar venular sanguínea de conductos de paredes rígidas, considerando también que el carácter reológico de la sangre está dado por un modelo de ley de potencia. El resultado con dicho modelo de transporte son el número de bifurcaciones óptimas de la red para una resistencia total mínima en función del índice de potencia del fluido.

2

Planteamiento del problema

2.1 Consideraciones Generales y Modelo Físico

Es bien conocido que en la microcirculación se presenta aproximadamente el 80 % de la caída de presión total. Dicha caída de presión es del orden de $5-20 \text{ mm de Hg}$ y depende de manera muy significativa del número, longitudes y diámetros de los capilares correspondientes a la red vascular. Los capilares son los vasos sanguíneos más pequeños del sistema circulatorio presentando diámetros del orden de 2.5 a $8 \mu\text{m}$.

El interior de los vasos capilares se considera como una membrana permeable por donde se transportan oxígeno, dióxido de carbono, nutrientes, etc. Es importante señalar que bajo condiciones fisiológicas normales el flujo es considerado como newtoniano y la viscosidad es del orden de 3.84 centipoise [3]. Sin embargo, en el presente trabajo no se restringe a esta hipótesis, ya que bajo ciertas situaciones patológicas como la hipertensión el flujo puede poseer características reológicas no-newtonianas. Por otro lado, las arteriolas presentan diámetros de 0.3 mm , [34] y a partir de diámetros de $100 \mu\text{m}$ (macrocirculación) se considera a la sangre como un continuo. Dada la complejidad de la naturaleza de la sangre, se hace énfasis en la generación de la red mediante la teoría constructal, más no el fluido. La sangre se caracteriza con el modelo de Ostwald de Waele o ley de potencia.

Para situaciones de flujo sanguíneo en diferentes niveles de circulación, Popel, et. al [4] reportan números de Reynolds para los principales vasos sanguíneos. Para vasos capilares se tiene un número de Reynolds de 0.0003 , para arteriolas se reporta un número de 0.2 y para vénulas se tienen números de 0.001 . Se puede demostrar que mediante las ecuaciones de cantidad de movimiento, y un análisis de orden de magnitud es posible obtener un número de Reynolds y una relación de esbeltez. Por lo que es posible despreciar los términos inerciales, obteniendo como resultado principal las ecuaciones para un flujo axisimétrico, en cada nivel de construcción se considera directamente un flujo totalmente desarrollado. Para mayores detalles, consúltese el apéndice A.

A partir de las consideraciones anteriores, se plantea la siguiente hipótesis, para una red generada mediante la teoría constructal, existe un número óptimo de bifurcaciones, en función de la reología de la sangre y una mínima resistencia para el transporte de dióxido de carbono.

Para el problema físico se considera un vaso sanguíneo capilar cilíndrico de paredes rígidas y permeables, con diámetro D_1 y con un flujo sanguíneo que tiene a la entrada una presión conocida P_e (cuyo valor lo proporciona la red capilar arterial) y una presión a la salida del capilar igual a P_1 , como se puede apreciar en la Fig. 2.1. A partir de la teoría constructal, se plantea un primer elemento de volumen V , de área uniforme $A_1 = H_1 L_1$, y un espesor a . La sangre se considera como un fluido no-newtoniano que fluye por un conducto que está rodeado del tejido poroso rico en dióxido de carbono, de tal manera que el dióxido de carbono está fluyendo desde el tejido hacia el tubo. Por simplicidad, la densidad de la sangre se considera constante.

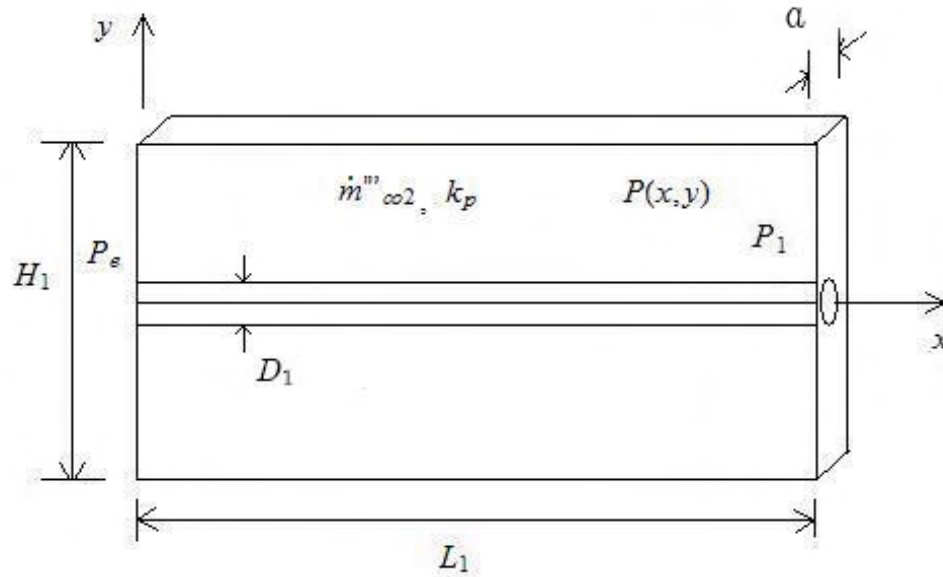


Figura 2.1: Primer elemento

2.2 Primera Construcción

Para modelar el flujo entrante de dióxido de carbono v_y únicamente en la dirección y , desde cualquier punto fuera del conducto de diámetro D_1 , se utiliza la ley de Darcy. La velocidad está dada por

$$v_y = -\frac{k_p}{\mu_{co2}} \frac{dP}{dy} \quad (1)$$

donde k_p , es la permeabilidad del medio.

A partir de aplicar un balance de masa local, se obtiene la variación de la velocidad en la dirección vertical y , que esta dada por el flujo de entrada del dióxido de carbono:

$$\frac{dv_y}{dy} = \frac{\dot{m}'_{co2}}{\rho_{co2}} \quad (2)$$

donde $\dot{m}'_{co2} = \frac{\dot{m}_{co2}}{V} \left[\frac{Kg}{m^3s} \right]$. Se considera que el dióxido de carbono es desalojado del primer elemento por el conducto de diámetro D_1 , en la dirección x . A partir de la ec. (1) y la ec.(2), es posible escribir una única ecuación para la presión de la forma,

$$\frac{d^2P}{dy^2} = -\frac{\dot{m}'_{co2}\nu_{co2}}{k_p}. \quad (3)$$

Integrando la ecuación anterior dos veces, se tiene que

$$P = -\frac{\dot{m}'_{co2}\nu_{co2}}{k_p} \frac{y^2}{2} + C_1y + C_2, \quad (4)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} y &= \frac{H_1}{2} & \frac{dP}{dy} &= 0, \quad v_y = 0 \\ y &= 0 & P &= P(x, 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Aplicando estas últimas se obtiene la distribución de presiones en el plano $x - y$:

$$P(x, y) = \frac{\dot{m}'_{co2}\nu_{co2}}{2k_p} H_1 \left(y - \frac{y^2}{H_1} \right) + P(x, 0). \quad (6)$$

La expresión anterior indica que la presión es cuasi-unidimensional para la región del tejido y tiene una dependencia en la coordenada longitudinal x debido al flujo sanguíneo. De esta manera, para obtener la distribución de presiones en la dirección longitudinal x , se considera el flujo sanguíneo en un conducto cilíndrico, de tal suerte que las correspondientes ecuaciones de gobierno se pueden escribir como:

Ec. de Continuidad.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

Considerando como ya se explicó anteriormente, que el flujo está totalmente desarrollado, con una concentración de CO_2 , ($v_x = v_x(r), v_r = 0$), entonces la ecuación anterior se reduce

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

La ecuación anterior indica que la velocidad v_x es sólo función de la coordenada radial r , i. e., $v_x = v_x(r)$. Por otro lado, la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección longitudinal x , puede expresarse como

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rx}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) + \rho g_x. \quad (9)$$

La ecuación anterior se simplifica notablemente suponiendo un estado estado permanente y caracterizado por las magnitudes de las velocidades en las dirección θ y r , son menores que la magnitud de la velocidad en la dirección longitudinal; la fuerza de cuerpo es despreciable, considerando las simplificaciones que se pueden realizar a partir del número de Reynolds y de la relación de esbeltez, ver apéndice A, la ecuación (9) puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rx}). \quad (10)$$

Asimismo se considera que integrando para definir el esfuerzo cortante τ_{rx} , se tiene que

$$r\tau_{rx} = -\frac{r^2}{2} \frac{dP}{dx} + C_1 \quad (11)$$

Sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$r = 0, \quad \text{y} \quad \tau_{rx} = 0 \quad (12)$$

El esfuerzo τ_{rx} , en la pared, se define de la siguiente manera

$$\tau_{rx} = -\frac{r}{2} \frac{dP}{dx}. \quad (13)$$

Para caracterizar el comportamiento no-newtoniano de la sangre, se utiliza el modelo de Ostwald de Waele, o ley de potencia, donde el esfuerzo cortante se define mediante la siguiente relación:

$$\tau_{rx} = K \left(-\frac{du_x}{dr} \right)^n ; \quad (14)$$

donde K es el índice de consistencia y n es el índice de potencia.

La ec.(14), es la forma de la ley de potencia para la situación de un flujo en conductos cilíndricos, con una rapidez de deformación negativa [28], [29]. Sustituyendo la ecuación anterior en la ec.(13) se obtiene que

$$\tau_{rx} = K \left(-\frac{du_x}{dr} \right)^n = -\frac{r}{2} \frac{dP}{dx}. \quad (15)$$

La caída de presión se considera negativa, de tal manera que podemos escribir sin pérdida de generalidad que

$$-\frac{du_x}{dr} = \left[\frac{r}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Integrando la ecuación anterior para obtener la velocidad y aplicando la condición de no-deslizamiento en la pared del conducto de radio R_1 , i. e.;

$$r = R_1 \quad ; \quad u_x = 0. \quad (17)$$

Entonces, la velocidad a lo largo del tubo se puede escribir como

$$u_x = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (18)$$

De la ec.(18), se obtiene el gasto.

$$Q = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{D_1}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (19)$$

Y para esta distribución de velocidad se puede obtener el gasto másico correspondiente $\dot{m}(x)$ como

$$\dot{m}(x) = Q\rho = \frac{\pi n\rho}{3n+1} \left(\frac{D_1}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}}; \quad (20)$$

donde ρ es la densidad de la sangre.

Por otro lado, a partir del siguiente elemento diferencial dx , se puede hacer un balance de masa para determinar el flujo másico de dióxido de carbono en el conducto de diámetro D_1 , tal como se observa en la Figura 2.2, obteniendo la siguiente expresión:

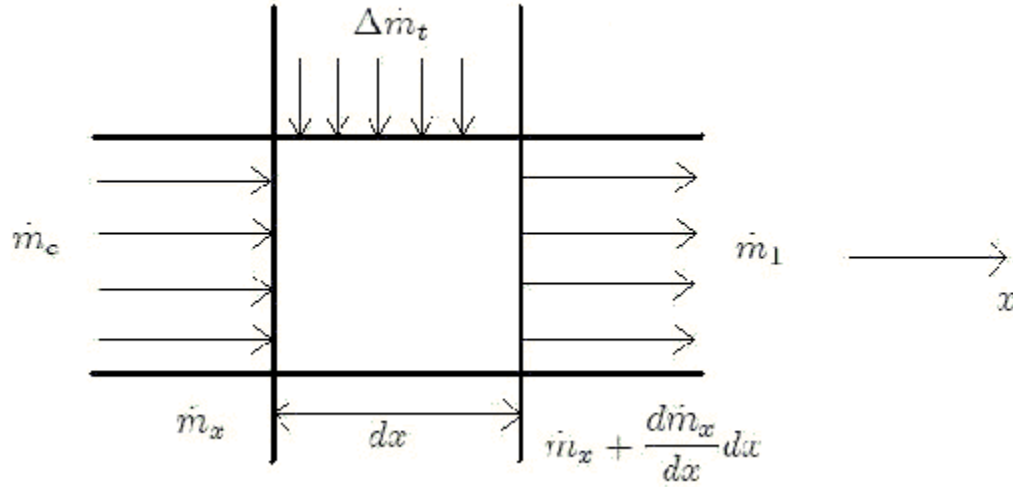


Figura 2.2: Balance de masa para el primer elemento

$$\dot{m}_x + \Delta \dot{m}_t = \dot{m}_{x+\Delta x} = \dot{m}_x + \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx. \quad (21)$$

Por lo tanto,

$$\Delta \dot{m}_t = \dot{m}'_{co_2} H_1 a dx. \quad (22)$$

donde $\Delta \dot{m}_t$ es el gasto másico total del dióxido de carbono a lo largo del conducto cilíndrico.

La ec.(21) se puede simplificar de manera que si se sustituye la ec. anterior, obtenemos la siguiente expresión.

$$\dot{m}'_{co_2} H_1 a dx' = \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx' \quad (23)$$

La ecuación anterior se puede integrar desde la entrada del flujo sanguíneo hasta una distancia arbitraria x , obteniendo que

$$\int_0^x \dot{m}'_{co_2} H_1 a dx' = \int_{\dot{m}_e}^{\dot{m}(x)} \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx' \quad (24)$$

o bien

$$\dot{m}(x) = \dot{m}_e + \dot{m}'_{co2} H_1 a x \quad (25)$$

La expresión anterior describe el gasto másico tanto a la entrada del capilar como su salida; es decir; en $x = L$ se debe tener el flujo a la entrada (\dot{m}_e , en $x = 0$) mas el gasto másico del dióxido de carbono que se va sustrayendo del tejido a lo largo del vaso capilar.

$$\dot{m}(0) = \dot{m}_e \quad (26)$$

$$\dot{m}(x = L_1) = \dot{m}_e + \dot{m}''_{co2} H_1 a L_1. \quad (27)$$

Sustituyendo ahora la ec. (20) en la ec.(25) y despejando $\frac{dP}{dx}$, se obtiene que,

$$\frac{dP}{dx} = -2K \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} (\dot{m}_e + \dot{m}'_{co2} H_1 a x)^n; \quad (28)$$

ecuación que se puede integrar fácilmente desde la entrada hasta una posición arbitraria x , para obtener la distribución de presión en la dirección x :

$$P(x) = P_e + \frac{2K}{\dot{m}'_{co2} H_1 a (n+1)} \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} \left[\dot{m}_e^{n+1} - (\dot{m}_e + \dot{m}'_{co2} H_1 a x)^{n+1} \right]; \quad (29)$$

de tal manera entonces que la expresión final para el campo de presión en el tejido blando y en el vaso capilar se puede escribir como:

$$P(x, y) = \frac{\dot{m}'_{co2} \nu_{co2}}{2k_p} H_1 \left(y - \frac{y^2}{H_1} \right) + P_e + \frac{2K}{\dot{m}'_{co2} H_1 a (n+1)} \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} \left[\dot{m}_e^{n+1} - (\dot{m}_e + \dot{m}'_{co2} H_1 a x)^{n+1} \right]. \quad (30)$$

Del campo de presiones obtenido, se buscan las coordenadas del punto (x, y) donde la presión es máxima, el objetivo es sustituir dicho punto para obtener una expresión de la caída de presión máxima y así obtener posteriormente, con la ecuación resultante, las dimensiones óptimas, H_1, L_1 , del primer elemento de construcción,

Derivando la expresión anterior, se obtiene lo siguiente

$$\frac{dP}{dy} = \frac{\dot{m}'_{co2}\nu_{co2}}{k_p} H_1 \left(1 - \frac{2y}{H_1}\right) = 0 \quad (31)$$

y

$$\frac{dP}{dx} = 2K \left(\frac{2}{D_1}\right)^{3n+1} \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho}\right]^n (\dot{m}'_e + \dot{m}'_{co2} H_1 a x)^n = 0. \quad (32)$$

Del sistema anterior de ecuaciones fácilmente se desprende que las coordenadas buscadas quedan representadas por las relaciones siguientes:

$$x = -\frac{\dot{m}'_e}{\dot{m}'_{co2} H_1 a}, \quad y = \frac{H_1}{2}. \quad (33)$$

La coordenada x , se puede definir de diferente manera a partir de la ec.(27) del balance de masa, si se despeja \dot{m}'_e , y se sustituye en la ec.(33) para obtener que

$$x = L_1 - \frac{\dot{m}'_1}{\dot{m}'_{co2} H_1 a}. \quad (34)$$

En consecuencia la variación máxima de presión resulta de sustituir las coordenadas del punto máximo obtenidas anteriormente en la ec.(30) y el resultado produce

$$\Delta P_1 = P_{\max} - P_e = \dot{m}'_{co2}\nu_{co2} \frac{H_1^2}{8k_p} + \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho}\right]^n \left[\frac{2K}{\nu_{co2}\dot{m}'_{co2}(n+1)H_1 a}\right] \left(\frac{2}{D_1}\right)^{3n+1} \left[\dot{m}'_{co2} \left(\frac{\dot{m}'_1}{\dot{m}'_{co2}} - H_1 a L_1\right)\right]^{n+1}, \quad (35)$$

y recordando que $A_1 = H_1 L_1 = cte$, la expresión anterior se puede también escribir como,

$$\frac{\Delta P_1}{\dot{m}'_{co2}\nu_{co2}} = \frac{H_1^2}{8k_p} + \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho}\right]^n \left[\frac{2K(\dot{m}'_{co2})^{n-1}}{\nu_{co2} H_1 a (n+1)}\right] \left(\frac{2}{D_1}\right)^{3n+1} \left(\frac{\dot{m}'_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a\right)^{n+1} \quad (36)$$

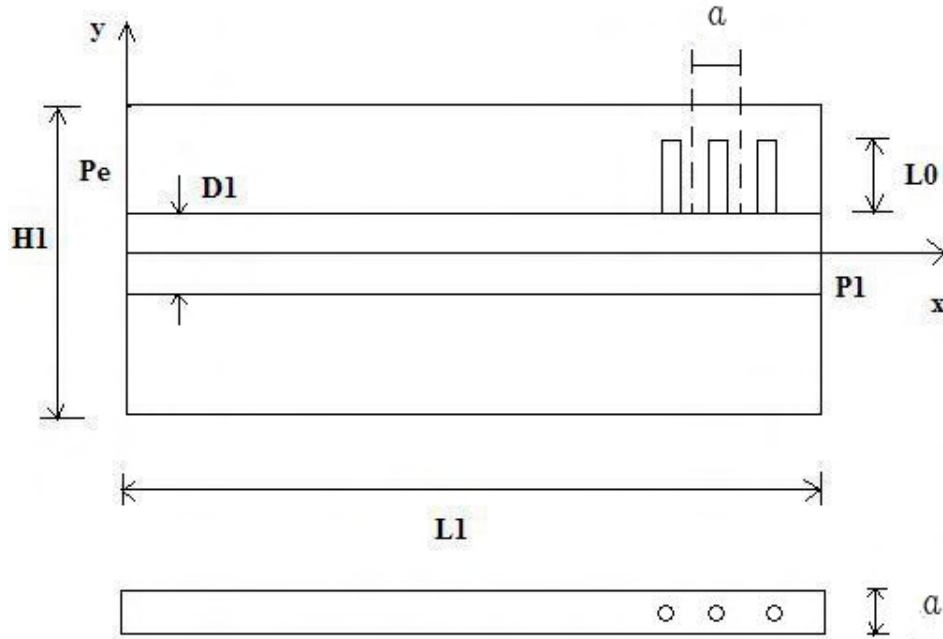
Como se mencionó anteriormente, el objetivo de haber derivado la ec.(30), es obtener la ec. (36) que es la caída de presión máxima en el primer elemento de construcción. De la ec.(36), se pueden obtener las derivadas con respecto a H_1 y a L_1 , para obtener las dimensiones óptimas.

$$H_1 = \left[\frac{8K (\dot{m}'_{co2})^{n-1} k_p}{\nu_{co2} a (n+1)} \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (37)$$

$$L_1 = \left[\frac{\nu_{co2} (n+1) A_1^3 a \rho^n}{8k_p K (\dot{m}'_{co2})^{n-1}} \left[\frac{\pi n}{3n+1} \right]^n \left(\frac{D_1}{2} \right)^{3n+1} \frac{1}{\left[\left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right) \right]^{n+1}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (38)$$

Para completar las relaciones anteriores es indispensable definir la permeabilidad del tejido, aquí denotada mediante el símbolo K_p , se considera el diagrama que aparece en la Fig.2.3.

copy



4.jpg

Figura 2.3: Primer elemento con un número n de conductos de diámetro D_0

La permeabilidad puede estimarse como la permeabilidad equivalente de un número n_T de conductos paralelos de diámetro D_0 y longitud L_0 , separados por una distancia a .

Mediante estos vasos se sustrae el dióxido de carbono del tejido poroso, para desalojarlos por medio del flujo sanguíneo en el tubo de diámetro D_1 . Se considera que dichos vasos están abiertos para recibir el flujo sanguíneo proveniente de la red arterial. A partir de realizar un balance de cantidad de movimiento en el vaso de diámetro D_0 y considerando las mismas suposiciones físicas utilizadas anteriormente para la obtención de la ec.(20), el gasto volumétrico es la siguiente expresión:

$$Q = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{D_0}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dy} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (39)$$

De la Figura 2.3, el área ocupada por uno de los vasos de diámetro D_0 , es a^2 . Por otro lado, se utiliza una generalización para la ley de Darcy para un fluido no-newtoniano descrito mediante la ley de potencia, para obtener la permeabilidad en función del índice de potencia, ya que el dióxido de carbono se desaloja del tejido mediante el flujo sanguíneo [30], [31]; en particular dicha expresión se puede escribir como,

$$v_y = \left[\frac{k_p}{K} \frac{dP}{dy} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (40)$$

igualando la ec.(39) con la expresión anterior, considerando el área ocupada,

$$\frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{D_0}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dy} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{a^2} = \left[\frac{k_p}{K} \frac{dP}{dy} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (41)$$

despejando la permeabilidad,

$$k_p = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi n}{(3n+1)a^2} \right]^n \left(\frac{D_0}{2} \right)^{3n+1} \quad (42)$$

El número de tubos n_T , se definirá más adelante en términos de la ec.(38).

Sustituyendo la ec.(42) en las ecs.(37) y (38), se obtienen las siguientes expresiones:

$$H_1 = \left[\frac{4K (\dot{m}'_{co2})^{n-1}}{\nu_{co2} (n+1) \rho^n} \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{1}{a^{2n+1}} \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (43)$$

y

$$L_1 = \left[\frac{A_1^3 \nu_{co2} a^{2n+1} \rho^n (n+1)}{4K (\dot{m}'_{co2})^{n-1}} \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{1}{\left[\left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right) \right]^{n+1}} \right]^{\frac{1}{3}}; \quad (44)$$

expresiones que permiten escribir la relación de aspecto del primer elemento como,

$$\frac{H_1}{L_1} = \left[\frac{16K^2 (\dot{m}'_{co2})^{2(n-1)}}{[\nu_{co2} a^{2n+1} (n+1) \rho^n]^2 A_1^3} \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{3n+1} \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right)^{2(n+1)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (45)$$

El número de tubos n_T , puede calcularse de la siguiente manera:

$$n_T = 2 \frac{L_1}{a} = 2a^{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{3})} \left[\frac{A_1^3 \nu_{co2} (\dot{m}'_{co2})^{1-n} \rho^n (n+1)}{4K} \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{1}{\left[\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}'_{co2}} - A_1 a \right]^{n+1}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (46)$$

Sustituyendo valores de las cantidades físicas del problema se llega a que el número óptimo de tubos (n_T) resultante es cercano al valor de 2. Presentándose así la característica fundamental de las redes vasculares: la dicotomía. La ec.(46) se obtuvo a partir de considerar el cociente de la longitud óptima, ec.(44), y la distancia a , que ocupa el vaso de diámetro D_0 , considerando que existe una condición de simetría a lo largo del vaso de diámetro D_1 .

Paralelamente y con objeto de validar los resultados, si se considera que $n = 1$, $K = \mu$, $\dot{m}_1 = 0$ y los puntos máximos $y = \frac{H_1}{2}$, $x = L_1$, entonces se puede obtener fácilmente que

$$\frac{\Delta P_1}{\dot{m}' \nu} = \frac{H_1^2}{8k_p} + \left[\frac{4}{\pi \rho} \right] \left[\frac{2\mu}{\nu H_1 a} \right] \left(\frac{2}{D_1} \right)^4 [H_1 a L_1]^2 \quad (47)$$

y

$$\frac{\Delta P_1}{\dot{m}' \nu} = \frac{H_1^2}{8k_p} + \frac{64a A_1^2}{\pi D_1^4 H_1} \quad (48)$$

resultados que coinciden directamente con las relaciones previamente reportadas por Bejan [13], para una red capilar.

Para obtener la primera relación de aspecto del diámetro, se consideran los gastos máxicos de los conductos de diámetro D_1 y D_0 , para obtener las correspondientes caídas de presión para posteriormente optimizar la caída de presión total con una restricción de volumen, en este primer ensamble se consideran ángulos rectos entre uno y otro vaso sanguíneo, [13], [19], [22], la expresión del gasto máxico del primer elemento es la siguiente,

$$\dot{m}_1 = \frac{\pi n \rho}{3n+1} \left(\frac{D_1}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (49)$$

expresión que permite despejar el gradiente de presión,

$$\frac{dP}{dx} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} \quad (50)$$

e integrando de la presión de entrada Pe hasta $P = P_{L_1}$, en toda la longitud del conducto de diámetro D_1 , se obtiene lo siguiente:

$$\Delta P_{D_1} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_1} \right)^{3n+1} L_1 \quad (51)$$

a partir de la ec.(39) se puede definir el gasto máxico de un solo vaso de diámetro D_0 , la caída de presión es la siguiente:

$$\dot{m}_0 = \frac{\pi n \rho}{3n+1} \left(\frac{D_0}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dy} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (52)$$

despejando $\frac{dP}{dy}$, e integrando desde $P_{y=0}$ hasta $P_{y=L_0}$, considerando que $\dot{m}_0 = \frac{\dot{m}_1}{2}$, se obtiene la siguiente expresión.

$$\Delta P_{D_0} = 2K \left[\frac{\dot{m}_1 (3n+1)}{2 \pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_0} \right)^{3n+1} L_0 \quad (53)$$

donde los subíndices de las ecs.(51) y (53) se refieren a la caída de presión en los diámetros D_1 y D_0 respectivamente.

Las ecs.(51) y (53) son las caídas de presión en la primera construcción, de tal manera que la contribución total a la caída de presión (ΔP_{T_1}) está dada por la siguiente expresión

$$\Delta P_{T_1} = \Delta P_{D_1} + \Delta P_{D_0} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_1}{\pi n \rho} 2^{\frac{3n+1}{n}} \right]^n \left[\frac{1}{D_1^{3n+1}} L_1 + \frac{1}{2^n} \frac{1}{D_0^{3n+1}} L_0 \right] \quad (54)$$

$$\frac{\Delta P_{T_1} [\pi n \rho]^n}{2^{3n+1} K [(3n+1)\dot{m}_1]^n} = \frac{2L_1}{D_1^{3n+1}} + \frac{2^{1-n} L_0}{D_0^{3n+1}} \quad (55)$$

El volumen ocupado, es una restriccion para la ec. (55)

$$V_{P_1} = \frac{\pi}{4} D_1^2 L_1 + 2 \frac{\pi}{4} D_0^2 L_0 \quad (56)$$

entonces de la ec. (56) se puede despejar D_0 , y el resultado sustituirse en la ec.(55), obteniéndose que,

$$\frac{\Delta P_{T_1} [\pi n \rho]^n}{2^{3n+1} K [(3n+1) \dot{m}_1]^n} = \frac{2L_1}{D_1^{3n+1}} + \frac{2^{1-n} L_0}{\left[\left(\frac{2V_{P_1}}{\pi L_0} - \frac{D_1^2 L_1}{4 L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{3n+1}}. \quad (57)$$

Derivando ahora la expresión anterior con respecto a D_1 ; se obtiene la siguiente relación de aspecto para los diámetros D_0 y D_1 ,

$$\frac{D_1}{D_0} = 2^{\frac{1}{3}}, \quad (58)$$

resultado que fué reportado inicialmente por Murray [6], [9] en sus estudios sobre la morfología de las redes capilares y que ahora se conoce ampliamente como la Ley de Murray.

2.3 Segunda Construcción

Para la segunda construcción se considera el siguiente ensamble que aparece en la Fig.(2.4) para un conducto de diámetro D_2 .

Para el siguiente acoplamiento entre el primer bloque de la primera construcción (que contiene a los conductos de diámetro D_0 y D_1) y el segundo elemento de construcción, se aplica nuevamente la Ley de Darcy para obtener la distribución de presión en la dirección y , y considerando las mismas condiciones de frontera utilizadas para el primer ensamble, se obtiene que

$$P(x, y) = \frac{\dot{m}^2 \cos 2\nu \cos 2}{2k_p} H_2 \left(y - \frac{y^2}{H_2} \right) + P(x, 0). \quad (59)$$

Como en la construcción anterior, se pueden aplicar las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para obtener la distribución de presiones en la dirección x , aplicando las mismas condiciones de flujo del primer ensamble. El resultado además produce la siguiente expresión para la distribución de velocidad,

$$u_x = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dz} \right]^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (60)$$

A partir de la ec.(60), se puede obtener facilmente el gasto másico representado mediante la siguiente relación:

$$\dot{m}_2(x) = \frac{\pi n \rho}{3n+1} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{D_2}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \quad (61)$$

De igual forma, Se puede realizar un balance de masa, considerando un elemento diferencial como el que aparece en la Fig. (2.2) para el segundo elemento de construcción, i. e.:

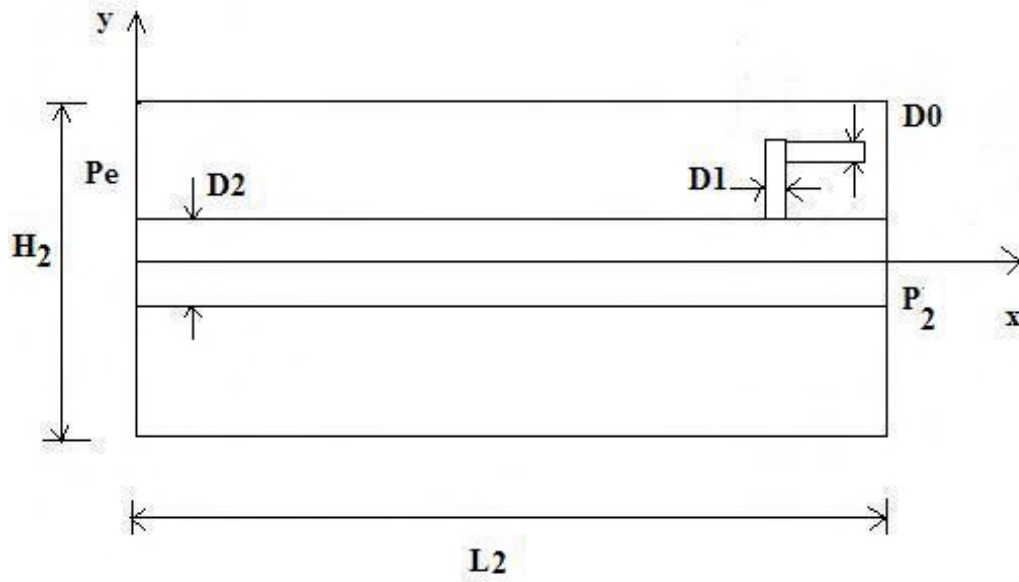


Figura 2.4: Segundo elemento de construcción

$$\dot{m}_x + \Delta\dot{m}_t = \dot{m}_{x+\Delta x} = \dot{m}_x + \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx \quad (62)$$

o bien,

$$\Delta\dot{m}_t = \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 dx' \quad (63)$$

y aplicando una integral a ambos términos de la igualdad anterior,

$$\int_0^x \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 dx' = \int_{\dot{m}_e}^{\dot{m}_2(x)} \frac{d\dot{m}_x}{dx} dx' \quad (64)$$

conduce a que

$$\dot{m}_2(x) = \dot{m}_{e2} + \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 x \quad (65)$$

Igualando la ec.(61) con la ec.(65), y despejando $\frac{dP}{dx}$, se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{dP}{dx} = 2K \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} (\dot{m}_{e2} + \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 x)^n \quad (66)$$

y después de realizar una primera integración, la distribución de presión en la dirección x se puede escribir como,

$$P(x) = P_{e2} + \frac{2K}{\dot{m}'_{co2} H_2 a_2 (n+1)} \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} \left[(\dot{m}'_{e2} + \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 x)^{n+1} - \dot{m}'_{e2}^{n+1} \right] \quad (67)$$

y sustituyendo finalmente en la ec.(59)

$$P(x, y) = \frac{\dot{m}'_{co2} \nu_{co2}}{2k_p} H_2 \left(y - \frac{y^2}{H_2} \right) + P_e + \left[\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right]^n \left[\frac{2K}{\dot{m}'_{co2} H_2 a_2 (n+1)} \right] \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} \left[(\dot{m}'_{e2} + \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 x)^{n+1} - \dot{m}'_{e2}^{n+1} \right] \quad (68)$$

De manera similar a la primera construcción, se puede demostrar fácilmente que los puntos donde la caída de presión es máxima en el segundo elemento son los siguientes:

$$y = \frac{H_2}{2} \quad (69)$$

y

$$x = -\frac{\dot{m}'_{e2}}{\dot{m}'_{co2} H_2 a_2} = L_2 - \frac{\dot{m}'_2}{\dot{m}'_{co2} H_2 a_2} \quad (70)$$

y sustituyendo estos últimos valores en la ec. (67), se obtiene que,

$$\Delta P_2 = P_{\max} - P_{e2} = \dot{m}'_{co2} \nu_{co2} \frac{H_2^2}{8k_p} + \frac{2K}{\nu_{co2} \dot{m}'_{co2} H_2 a_2 (n+1)} \left[\frac{3n+1}{\pi n} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} \left[\dot{m}'_{co2} \left(\frac{\dot{m}'_2}{\dot{m}'_{co2}} - H_2 a_2 L_2 \right) \right]^{n+1} \quad (71)$$

Optimizando ahora con respecto a H_2 y L_2 y recordando que $A_2 = H_2 L_2$ también se puede demostrar fácilmente que:

$$H_2 = \left[\frac{4K (\dot{m}'_{co2})^{n-1} k_p}{\nu_{co2} a_2 (n+1) \rho^n} \left(\frac{D_2}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{1}{a_2^{2n+1}} \left(\frac{\dot{m}'_2}{\dot{m}'_{co2}} - A_2 a_2 \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (72)$$

y

$$L_2 = \left[\frac{A_2^3 \nu_{co2} \rho^n a_2^{2n+1} (n+1)}{4K (\dot{m}'_{co2})^{n-1}} \left(\frac{D_2}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{1}{\left[\left(\frac{\dot{m}'_2}{\dot{m}'_{co2}} - A_2 a_2 \right) \right]^{n+1}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (73)$$

Siguiendo los mismos pasos que se hicieron para la primera construcción la permeabilidad esta dada por la siguiente expresión

$$k_p = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi n}{(3n+1)a_2^2} \right]^n \left(\frac{D_1}{2} \right)^{3n+1}, \quad (74)$$

y considerando también la simetría del problema, el número de tubos puede calcularse de la siguiente manera:

$$n_T = \frac{2L_{2opt}}{a_2} = 2a_2^{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{3})} \left[\frac{A_2^3 \nu_{co2} (\dot{m}'_{co2})^{1-n} \rho^n (n+1)}{4K} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{3n+1} \frac{1}{\left[\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}'_{co2}} - A_2 a_2 \right]^{n+1}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (75)$$

Sustituyendo nuevamente los valores de los parámetros y cantidades físicas del problema, se presenta de nuevo el caso de que la bifurcación para un conducto de diámetro D_1 . Para este segundo ensamble con un conducto de diámetro D_2 , el flujo másico es el siguiente:

$$\dot{m}_2 = \frac{\pi n \rho}{3n+1} \left(\frac{D_2}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (76)$$

y despejando dP/dx e integrando, se obtiene que,

$$\Delta P_{D_2} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_2}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} L_2 \quad (77)$$

Sumando la caída de presión del segundo ensamble, ec.(77), a la caída total del primer ensamble, se puede escribir que

$$\Delta P_{T_2} = \Delta P_{D_2} + \Delta P_{T_1} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_2}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} L_2 + \Delta P_{T_1} \quad (78)$$

y la ecuación anterior representa la caída de presión total del segundo ensamble. El término ΔP_{T_1} , esta dado por la ec.(54) y tomando en cuenta la restricción de volúmen y el gasto para esta segunda construcción se pueden escribir como

$$\dot{m}_2 = 2\dot{m}_1 \quad (79)$$

y

$$V_{P_2} = \frac{\pi}{4} D_2^2 L_2 + 2V_{P_1} \quad (80)$$

Se tiene la siguiente expresión para ΔP_{T_2}

$$\Delta P_{T_2} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_2}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} L_2 + 2K \left[2^{\frac{3n+1}{n}} \dot{m}_1 \left(\frac{3n+1}{\pi n \rho} \right) \right]^n \left[\frac{2}{D_1^{3n+1}} L_1 + \frac{2^{1-n}}{D_0^{3n+1}} L_0 \right] \quad (81)$$

o bien, también se puede escribir la expresión anterior como,

$$\frac{\Delta P_{T_2} (\pi n \rho)^n}{2^{3n+1} K (3n+1)^n \dot{m}_1^n} = \frac{2^{n+1}}{D_2^{3n+1}} L_2 + \frac{2L_1}{D_1^{3n+1}} + 2^{1-n} \frac{L_0}{D_0^{3n+1}} \quad (82)$$

Procediendo de manera similar a como se hizo en la primera construcción, con la restricción de volúmen,

$$V_{P_2} = \frac{\pi}{4} D_2^2 \frac{L_2}{2} + \frac{\pi}{4} D_1^2 L_1 + 4 \frac{\pi}{4} D_0^2 L_0 \quad (83)$$

De la restricción anterior, se puede despejar D_1 y sustituyendo este valor en la ec.(82), se puede obtener la derivada con respecto a D_2 y como resultado se obtiene la siguiente relación de aspecto para la razón de los diámetros D_1 y D_2 :

$$\frac{D_2}{D_1} = 2^{\frac{1}{3}}. \quad (84)$$

2.4 Tercera Construcción

Para la tercera construcción se sigue exactamente la misma metodología de las dos primeras para determinar tanto el número de tubos como el punto donde es máxima la presión. Partiendo del gasto másico para un tubo de diámetro D_3 , se tiene lo siguiente:

$$\dot{m}_3 = \frac{\pi n \rho}{3n+1} \left(\frac{D_3}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left[\frac{1}{2K} \frac{dP}{dx} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (85)$$

y despejando $\frac{dP}{dx}$ e integrando se obtiene que,

$$\Delta P_{D_3} = P_{x=L_3} - P_{x=0} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_3}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_3} \right)^{3n+1} L_3 \quad (86)$$

y la presión en el tercer ensamble será la siguiente:

$$\Delta P_{T_3} = \Delta P_{D_3} + \Delta P_{T_2} \quad (87)$$

o bien

$$\Delta P_{T_3} = 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_3}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_3} \right)^{3n+1} L_3 + 2K \left[\frac{(3n+1)\dot{m}_2}{\pi n \rho} \right]^n \left(\frac{2}{D_2} \right)^{3n+1} L_2 + \Delta P_{T_1} \quad (88)$$

sujeta a la siguiente restricción:

$$V_{P_3} = \frac{\pi}{4} D_3^2 L_3 + 2 \frac{\pi}{4} D_2^2 L_2 + 4V_{P_1} \quad (89)$$

Tomando en cuenta las siguientes equivalencias del flujo másico.

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_2 = 4\dot{m}_1 \quad \text{y} \quad \dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_1 = 2\dot{m}_1 \quad (90)$$

se pueden sustituir en la ec.(88) para obtener la siguiente expresión

$$\frac{\Delta P_3 (\pi n \rho)^n}{2^{3n+1} K [(3n+1) \dot{m}_1]^n} = \frac{4^n L_3}{D_3^{3n+1}} + \frac{2^n L_2}{D_2^{3n+1}} + \frac{\Delta P_1 (\pi n \rho)^n}{2^{3n+1} K [(3n+1) \dot{m}_1]^n} \quad (91)$$

Aplicando la restricción de volumen a la ec.(91). y derivando con respecto a D_3 , se llega a la tercera relación de aspectos del diámetro.

$$\frac{D_3}{D_2} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (92)$$

Se observa que los resultados de los diámetros son independientes del índice de potencia, estos mismos valores se presentan para la cuarta y quinta construcción. Los resultados son los siguientes.

$$\frac{D_4}{D_3} = 2^{\frac{n+1}{3n+3}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (93)$$

$$\frac{D_5}{D_4} = 2^{\frac{n+1}{3n+3}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (94)$$

Se hace una generalización para la i -ésima construcción:

$$\frac{D_i}{D_{i-1}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (95)$$

Refiriendo el diámetro i -ésimo con del diámetro inicial D_0 .

$$D_i = 2^{\frac{i}{3}} D_0 \quad (96)$$

Finalmente para completar este ejercicio sobre las relaciones de escalas geométricas, también es posible obtener relaciones universales para las razones de las longitudes sucesivas de los vasos capilares. Para llevar a cabo lo anterior y tener un mejor seguimiento del procedimiento se puede considerar el diagrama que se adjunta en la Fig. 2.5.

copy

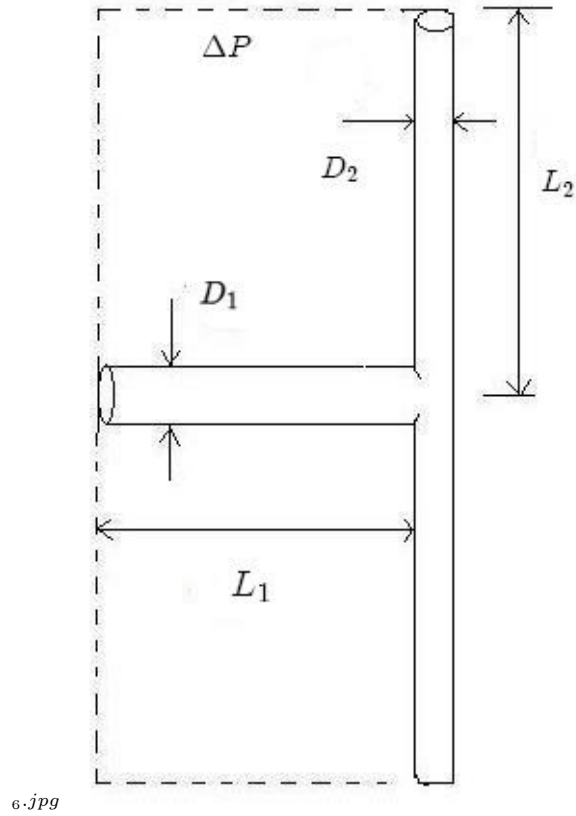


Figura 2.5: Diagrama para el primer ensamble

Ahora se sustituye la relación de aspecto del diámetro dada por la ec.(84), en la caída de presión de las construcciones anteriores, representada por la ec.(82). El resultado de lo anterior, conduce a que

$$\frac{\Delta P_2 (\pi n \rho)^n}{2^{3n+1} K (3n+1)^n \dot{m}_1^n} = \frac{2^n}{D_1^{\frac{3n+1}{3}}} L_2 + \frac{L_1}{D_1^{3n+1}} + 2^{1-n} \frac{L_0}{D_0^{3n+1}} \quad (97)$$

3

Resistencias

En este capítulo se definirán las resistencias debidas al transporte de dióxido de carbono a través de la pared de la red vascular, considerando los efectos de la concentración, las presiones hidrostática y osmótica, así como las debidas al flujo sanguíneo y la difusión en toda la red vascular; para ello se sustituirán las leyes de construcción obtenidas anteriormente. Para el transporte de CO_2 se utiliza la ecuación de Kedem - Katchalsky [23], [24], considerando que las paredes de los vasos sanguíneos son membranas de un espesor muy pequeño, las células endoteliales, que son las que recubren interiormente las paredes de los vasos sanguíneos son de un espesor del orden de $0.5 \mu m$ [4]. La ec. Kedem - Katchalsky viene dada por la siguiente expresión

$$J = C_{sm}^*(1 - \sigma)v - D_M \nabla C, \quad (104)$$

donde $v = -\frac{K_{memb}}{\mu_m} (\nabla P - \sigma \nabla \Pi)$, y C_{sm}^* es la concentración promedio del dióxido de carbono en $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$.

En la expresión anterior, la transferencia de CO_2 a través de la membrana está representada por el flujo másico J que tiene unidades de $\left[\frac{mol}{m^2 s}\right]$; ∇P es el gradiente de presión a lo largo de la membrana, $\nabla \Pi$ es el gradiente de presión osmótica y ∇C es el gradiente de concentraciones; el índice de reflexión (σ) es un coeficiente que es la medida de la restricción de los poros de la membrana para la entrada o salida de algún soluto en particular, el valor de dicho coeficiente está entre cero y uno, cuando σ tiene un valor de cero el dióxido de carbono puede pasar a través de la membrana libremente, para un valor igual a la unidad el dióxido de carbono se ve reflejado completamente por la membrana.

Físicamente el gradiente de concentraciones se presenta en los vasos sanguíneos para facilitar el transporte de nutrientes, oxígeno, dióxido de carbono y productos metabólicos a través de la membrana por medio de difusión. Otro de los mecanismos de transporte es por el efecto de ósmosis, que se presenta cuando se llega a un equilibrio que corresponde a potenciales químicos iguales en ambos lados de la membrana, generando un flujo de dióxido de carbono que genera una diferencia de presiones. A esta diferencia de presiones se le denomina como presión osmótica.

Para obtener los flujos másico en $\left[\frac{Kg}{s}\right]$, se integra cada sumando de la ec.(104) utilizando el siguiente elemento diferencial $dA = R_i d\theta dx$, que es una porción del conducto cilíndrico considerando, como se mencionó anteriormente, que la membrana es de un espesor muy pequeño, tal como se puede apreciar en la Fig.3.1.

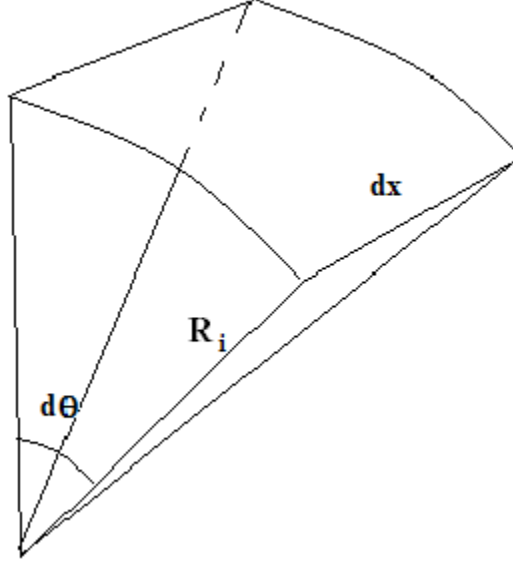


Figura 3.1: Elemento diferencial del conducto cilíndrico

En cada una de las expresiones del flujo másico se sustituyen las leyes de construcción obtenidas anteriormente para incluir el efecto de la red vascular.

$$\dot{m}_1 = -C_{sm}^* (1 - \sigma) \frac{K}{\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^{L_i} \nabla P R_i d\theta dx \quad (105)$$

donde el gradiente de presión se puede escribir en una primera aproximación como : $\nabla P \sim \left(\frac{P_T - P_i}{\frac{H_i}{2} - R_i}\right) = 2 \left(\frac{\Delta P}{H_i - D_i}\right)$, y por consiguiente, la expresión anterior puede escribirse como

$$\dot{m}_1 = -4\pi \frac{K_{memb}}{\mu_m} C_{sm}^* (1 - \sigma) \left(\frac{\Delta P}{H_i - D_i}\right) \frac{D_i}{2} L_i. \quad (106)$$

Sustituyendo las leyes de construcción, ecs.(96) y (103) en la ec.(106) se obtiene que:

$$\dot{m}_1 = -2^{2\left(\frac{i}{3}+1\right)} \pi \frac{K_{memb}}{\mu_m} C_{sm}^* (1 - \sigma) \left(\frac{\Delta P}{H_i - 2^{\frac{i}{3}} D_0}\right) D_0 L_0. \quad (107)$$

De la integración del segundo término de la ec.(104), aproximando el gradiente de presión osmótica como $\nabla\Pi \sim \left(\frac{2\Delta\Pi}{H_i}\right)$, obtenemos el flujo másico debido a la presión osmótica

$$\dot{m}_2 = 2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi\frac{K_{memb}}{\mu_m}C_{sm}^*\sigma(1-\sigma)\left(\frac{\Delta\Pi}{H_i}\right)D_0L_0. \quad (108)$$

Por otro lado integrando el tercer sumando de la ec.(104), y aproximando el gradiente de concentraciones como: $\nabla C \sim \left(\frac{2\Delta C}{H_i}\right)$, se llega a la siguiente expresión

$$\dot{m}_3 = -2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi D_M\left(\frac{\Delta C}{H_i}\right)D_0L_0. \quad (109)$$

Donde ΔC puede expresarse como:

$$\Delta C = \frac{\Delta\Pi}{R_{co2}T} \quad (110)$$

en la expresión anterior R_{co2} es la constante particular del dióxido de carbono[23], [24]. De esta manera se obtiene finalmente que

$$\dot{m}_3 = -2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi D_M\left(\frac{\Delta C}{H_i}\right)\frac{D_0L_0}{R_{co2}T}. \quad (111)$$

Las resistencias que presenta cada elemento son las siguientes:

$$r_1 = \frac{\Delta P}{\dot{m}_1} = -\frac{\mu_m}{K_{memb}2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi C_{sm}^*(1-\sigma)D_0L_0}\left(H_i - 2^{\frac{i}{3}}D_0\right), \quad (112)$$

$$r_2 = \frac{\Delta\Pi}{\dot{m}_2} = \frac{\mu_m}{K_{memb}2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi C_{sm}^*\sigma(1-\sigma)D_0L_0}\frac{H_i}{H_i}, \quad (113)$$

$$r_3 = \frac{\Delta\Pi}{\dot{m}_3} = -\frac{H_i R_{co2}T}{2^{2(\frac{i}{3}+1)}\pi D_M D_0 L_0}, \quad (114)$$

Tomando en cuenta las expresiones del flujo másico de cada nivel de construcción ecs.(20), (61) y (85), se define una expresión para el flujo másico del nivel de construcción i , mediante la siguiente relación:

$$\dot{m}_i = \frac{\pi\rho n}{3n+1}\left[\frac{1}{2K}\frac{\Delta P_i}{L_i}\right]^{\frac{1}{n}}\left(\frac{D_i}{2}\right)^{\frac{3n+1}{n}} \quad (115)$$

y sustituyendo las expresiones (96) y (103) en la expresión anterior, se puede despejar ΔP_i :

$$\Delta P_i = \left(\frac{3n+1}{\pi n}\right)^n \frac{4KL_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0}\right)^{3n+1} \dot{m}_0^n, \quad (116)$$

y la resistencia correspondiente se puede definir como

$$r_4 = \frac{\Delta P_i}{\dot{m}_i} = \left(\frac{3n+1}{\pi n}\right)^n \frac{4KL_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0}\right)^{3n+1} \dot{m}_0^{n-1}. \quad (117)$$

Tomando adicionalmente en cuenta el efecto del transporte de fluido en la red, desde el nivel $i = 0$ hasta $i - 1$, para posteriormente incluir el efecto del ultimo conducto de la red vascular.

$$r_4 = \sum_{i=0}^{i-1} \left(\frac{3n+1}{\pi n} \right)^n \frac{4KL_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0} \right)^{3n+1} \dot{m}_0^{n-1} i. \quad (118)$$

Se considera que el flujo de CO_2 es el producto de la diferencia de concentraciones relativas del dióxido de carbono por el flujo másico de la red, que se define de la siguiente manera

$$\dot{m}_{co2} = [C_{co2ent} - C_{co2i}] \dot{m}_i = \frac{\Delta P}{r_4} \quad (119)$$

La concentración relativa de toda la red, C_{co2i} puede definirse generalizando las concentraciones presentes en cada nivel de construcción, que se define de la siguiente manera

$$C_{co2i} = 2^i (C_0 + \alpha) + (2^i + 1) \alpha \quad (120)$$

donde α y C_0 son las concentraciones relativas promedio de dióxido de carbono desalojados, en el tejido y en un vaso sanguíneo respectivamente.

Despejando r_4 de la ec.(119) y sustituyendo en la ec.(118), se llega a la siguiente expresión:

$$r_4 = \left(\frac{3n+1}{\pi n} \right)^n \frac{4KL_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{\dot{m}_0^{n-1}}{[C_{co2ent} - C_{co2i}]} i. \quad (121)$$

De la ec.(117) se toma la resistencia que presenta el $i - \acute{e}simo$ tubo.

$$r_4 = \left(\frac{3n+1}{\pi n} \right)^n \frac{4KL_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0} \right)^{3n+1} \frac{\dot{m}_0^{n-1}}{[C_{co2ent} - C_{co2i}]} (i + 1). \quad (122)$$

La ec.(122), representa la resistencia total debida al flujo sanguíneo en toda la red, la resistencia debida a las bifurcaciones se considera despreciable [17].

Para definir la resistencia difusiva dentro de cada vaso sanguíneo de la red vascular, se considera el transporte en un solo vaso sanguíneo de la siguiente manera:

$$J_{dif} = \frac{D_M \Delta \rho_{c02}}{R_i} \quad (123)$$

para obtener el flujo másico, se usa el elemento diferencial, definido anteriormente

$$\dot{m}_{CO_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{L_i} D_M \frac{\Delta \rho_{c02}}{R_i} R_i d\theta dx \quad (124)$$

Integrando y sustituyendo las correspondientes leyes de construcción, se llega al flujo másico de CO_2 debido al proceso de difusión es el siguiente

$$\dot{m}_{CO_2} = 2^{\frac{i+3}{3}} 2\pi L_0 D_M \Delta \rho_{c02} \quad (125)$$

donde $\Delta \rho_{CO_2} = \frac{\Delta P_i}{R_{co2} T}$, entonces se define la resistencia difusiva de cada vaso sanguíneo de la red, de la siguiente manera:

$$r_5 = \frac{R_{co2} T}{2^{\frac{i+3}{3}} 2\pi L_0 D_M} \quad (126)$$

La resistencia total es la siguiente expresión:

$$R = -\frac{\mu_m}{K_{memb}} \frac{(H_i - 2^{\frac{i}{3}} D_0)}{2^{2(\frac{i}{3}+1)} \pi C_{sm}^* (1-\sigma) D_0 L_0} + \frac{\mu_m}{K_{memb}} \frac{H_i}{2^{2(\frac{i}{3}+1)} \pi C_{sm}^* \sigma (1-\sigma) D_0 L_0} - \frac{H_i R_{co2} T}{2^{2(\frac{i}{3}+1)} \pi D_M D_0 L_0} + \left(\frac{3n+1}{\pi n}\right)^n \frac{4K L_0}{\rho^n} \left(\frac{2}{D_0}\right)^{3n+1} \frac{\dot{m}_0^{n-1}}{[C_{co2ent} - C_{co2i}]} (i+1) + \frac{R_{co2} T}{2^{\frac{i}{3}} 4\pi L_0 D_M}, \quad (127)$$

multiplicando cada sumando por el término $\rho^n D_0^{3n+1}/KL_0 \dot{m}_0^{n-1}$, se obtiene la resistencia adimensional total

$$\begin{aligned}
 R^* = & -\frac{\mu_m}{K_{memb}} \frac{D_0^{3n} \rho^n}{4\pi C_{sm}^* (1-\sigma) KL_0^2 \dot{m}_0^{n-1}} \frac{(H_i - 2^{\frac{i}{3}} D_0)}{2^{i(n-\frac{1}{3})}} + \frac{\mu_m}{K_{memb}} \frac{D_0^{3n} \rho^n}{4\pi C_{sm}^* \sigma (1-\sigma) KL_0^2 \dot{m}_0^{n-1}} \frac{H_i}{2^{i(n-\frac{1}{3})}} \\
 & - \frac{R_{co2} T D_0^{3n} \rho^n}{4\pi D_M K L_0^2 \dot{m}_0^{n-1}} \frac{H_i}{2^{i(n-\frac{1}{3})}} + 2^{3(n+1)} \left(\frac{3n+1}{\pi n} \right)^n \frac{(i+1)}{[C_{co2ent} - C_{co2i}]} + \\
 & \frac{R_{co2} T \rho^n D_0^{3n+1}}{4\pi K L_0^2 D_M \dot{m}_0^{n-1}} \frac{1}{2^{i(n-\frac{2}{3})}} \quad (128)
 \end{aligned}$$

4

Resultados

En esta sección se muestran los principales resultados del modelo de resistencia para diferentes índices de potencia n . Específicamente se graficaron los valores de la resistencia adimensional R^* contra el número de bifurcaciones, i , relación expresada mediante la ec.(128). Los resultados siguientes son para determinar un número óptimo de bifurcaciones, para un valor mínimo de resistencia al transporte del dióxido de carbono. Para llevar a cabo lo anterior, se utilizaron los siguientes valores parámetros.

α	Concentración relativa del CO_2 en el tejido	1.0
σ	Coefficiente de reflexión	0.5
C_{sm}	Concentración promedio del CO_2	0.01 $[\frac{Kg}{m^3}]$
C_{co2ent}	Concentración relativa del CO_2 a la entrada del capilar venular	0.00001
C_0	Concentración relativa del CO_2 en el fluido	0.00001
H_i	Altura del $i - esimo$ elemento	0.0001 $[m]$

Los valores de los parámetros y constantes se tomaron de diferentes referencias [24], [25],[26], [27], con suma cautela ya que en general es difícil encontrar datos para medir las concentraciones en un tejido determinado. Las graficas siguientes se muestran en escala semi-logarítmica para ilustrar los valores de la resistencia adimensional. En el apéndice B, se encuentra el código fuente del programa para graficar los resultados para diferentes índices de potencia.

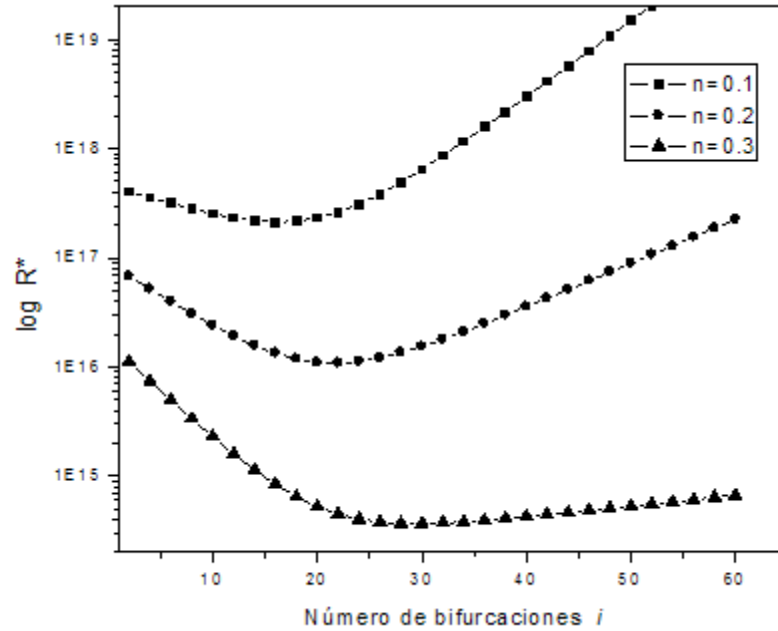


Figura 4.1: Resistencia para índices de potencia 0.1,0.2 y 0.3

De la Fig. 4.1 se puede apreciar fácilmente la existencia de un mínimo para el valor de la resistencia adimensional. En este punto obviamente se transporta más fácilmente el dióxido de carbono, para cualesquiera que sean los índices de potencia utilizados ($n = 0.1, 0.2$ y 0.3).

Para valores crecientes del índice de potencia se presenta un valor para una resistencia mínima al transporte de CO_2 ; presentando un número de bifurcación de la red, conforme aumenta el índice de potencia, aumenta el número de bifurcaciones. Para índices de potencia mayores a $n = 0.3$, se presentan valores de mínima resistencia con numeros bifurcacion muy altos, y de acuerdo con la expresión para el diámetro i –ésimo, ec.(96), con dichos valores de i , se tienen diámetros muy grandes que ya no corresponden a ninguna dimensión de algun vaso sanguíneo humano. Tal como se puede apreciar en la Fig. 4.2.

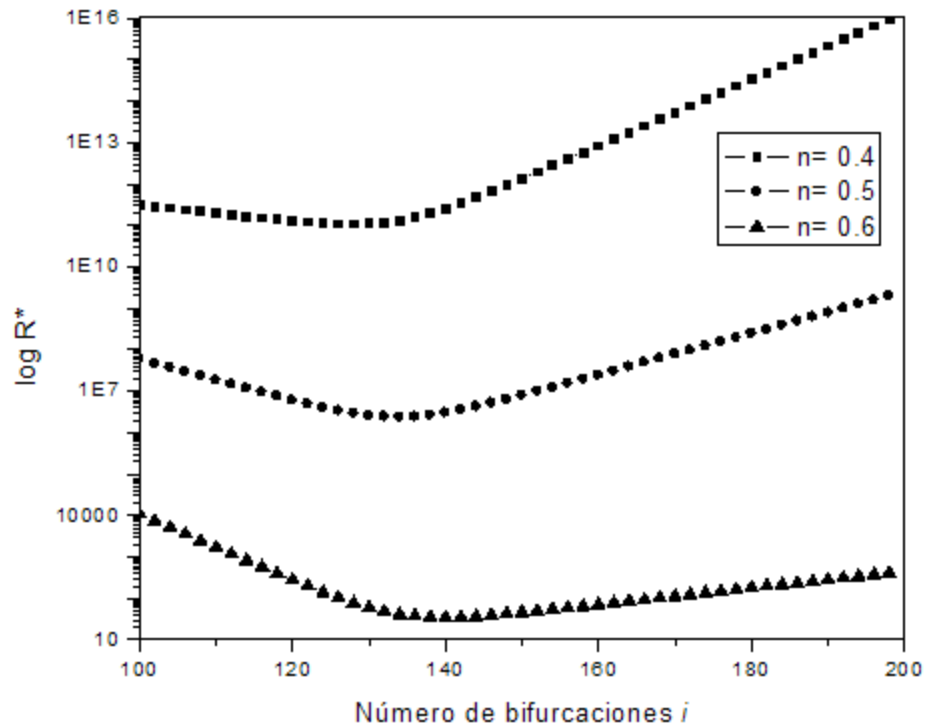


Figura 4.2: Resistencia para índices de potencia 0.4,0.5 y 0.6

Para índices de potencia mayores a $n = 0.6$, no presentan valores de resistencia mínimo, presentando un comportamiento asintótico, es decir para índices de potencia mayores, la red se vuelve ineficiente, por tanto no presenta un número óptimo de bifurcaciones. Tal como se observa en la Fig.4.3

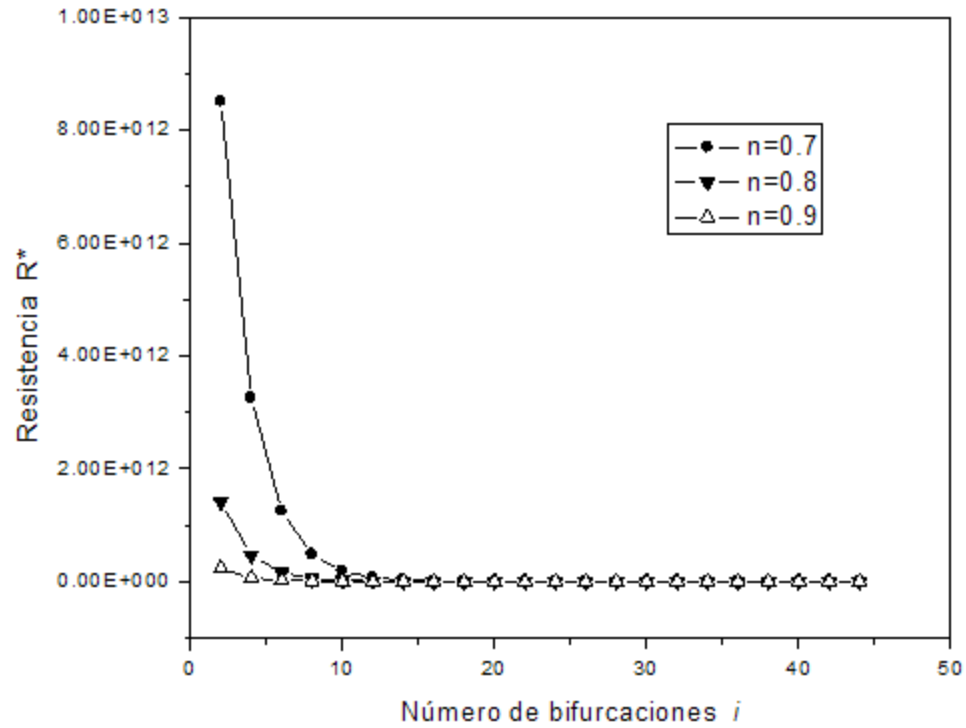


Figura 4.3: Resistencia adimensional para índices de potencia de 0.7, 0.8 y 0.9

Para el caso específico de un fluido newtoniano, con un índice de potencia $n = 1$, no se presenta resistencia mínima alguna, es decir un fluido newtoniano no puede cumplir con la función de transporte óptimo de CO_2 .

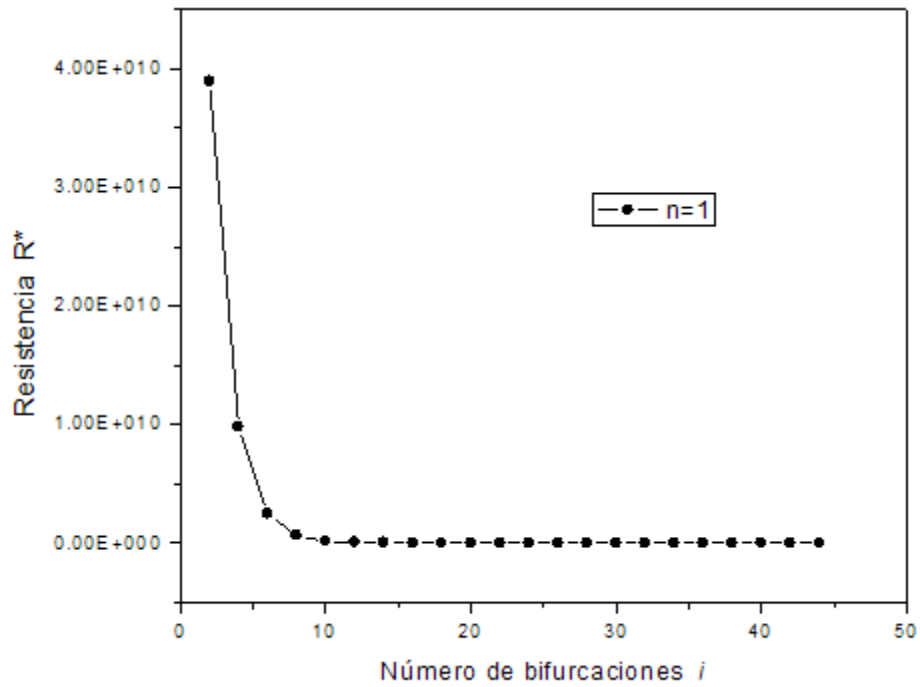


Figura 4.4: Resistencia para un índice de potencia $n = 1$

5

Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten conocer el número de bifurcaciones necesarias para determinar la mínima resistencia que ofrece el medio complejo para el transporte de dióxido de carbono. Evidentemente, el medio complejo al que aquí se está haciendo referencia consiste del tejido blando, la membrana endotelial y la región definida por el vaso capilar por donde fluye el torrente sanguíneo. Este medio complejo ha sido visualizado con la teoría constructal que permite, basada en las leyes físicas, ir tejiendo la estructura que optimiza el transporte.

Para el caso concreto aquí analizado, la ley de construcción para el diámetro coincide con la ley reportada para redes con fluido newtoniano, conocida como la ley de Murray, para el caso de la ley de construcción para las longitudes de los conductos de la red, se tienen resultados diferentes a las longitudes reportadas. De los resultados obtenidos, Figura 4.1, se observa que existe un número de bifurcaciones donde la resistencia es mínima, entre más adelgazante es el fluido, más bifurcaciones se requieren para el óptimo transporte de dióxido de carbono.

Para índices de potencia de 0.4, 0.5 y 0.6, se tienen un número de bifurcaciones mayor, tal como se observa en la Figura 4.2. En general, el número de bifurcaciones que se obtiene queda restringido por un límite físico, ya que el cálculo del diámetro i -ésimo, (véase ec.(96)), tiene que ser coherente con las dimensiones promedio del diámetro de una vénula del sistema circulatorio periférico. Al aumentar el índice de potencia, aumenta el número de bifurcaciones, disminuyendo el valor de la resistencia adimensional. Para un fluido más adelgazante se requiere de un número mayor de bifurcaciones, por tanto la reología de la sangre influye en el óptimo transporte del dióxido de carbono.

En la Figura 4.3, correspondiente para índices de potencia de 0.7, 0.8 y 0.9, no presenta un número mínimo de la resistencia adimensional. Al igual para el caso de un fluido newtoniano con un índice de potencia igual a la unidad, Figura 4.4, no presenta ningún valor mínimo de resistencia.

Es muy importante señalar que la ec.(128), que representa la resistencia adimensional, es muy sensible a los valores paramétricos utilizados. Sin embargo, esta sensibilidad no es manifiesta de manera notable con los valores de concentración del dióxido de carbono. En cambio, se observan cambios significativos al variar el parámetro de la altura del elemento rectangular del i – *ésimo* elemento de construcción; es decir, éste no puede ser de una magnitud menor al diámetro de una vénula del sistema vascular.

De los trabajos referentes a la generación de redes vasculares optimizadas, no se presentan resultados experimentales completos, como son los valores de las concentraciones de las diferentes sustancias involucradas en el flujo sanguíneo o imágenes de redes vasculares en un tejido determinado debido a la dificultad técnica para medir en su totalidad las condiciones fisiológicas; por lo que no es posible comparar una red generada mediante el empleo de la teoría constructal. Por tanto, la teoría constructal ofrece la posibilidad de generar redes optimizadas a partir de modelos físicos mediante la aplicación de restricciones globales, a diferencia de los modelos generados por fractales. Los modelos óptimos para el transporte de fluidos a partir de la aplicación de dicha teoría pueden considerar la integración de elementos como son el esfuerzo cortante interno como estímulo de crecimiento de la red, así como la naturaleza elástica de las paredes de los conductos y modelos de transporte de masa que consideren sustancias importantes como el óxido nítrico.

Referencias

- [1] Bejan, A. *Advanced Engineering Thermodynamics*. 2a ed, John Wiley and Sons, 1997
- [2] Huang, C.R., Characterization of thixotropic fluids. pp.3-17, en: Cheresmisinoff, Encyclopedia of Fluid Mechanics, Rheology and Non-Newtonian Fluids, Vol 7, Gulf Publishing Company,1988
- [3] Guyton, C.A., *Tratado de Fisiología Médica*. 1ª ed. Interamericana McGraw - Hill, México, 1997
- [4] Popel,A.S., Johnson, P.C., *Microcirculation and hemorheology*. Ann. Rev. Fluid Mech. 37, pp. 43-69, 2005
- [5] Pries, A.R., Secomb, T.W., Gaehtgens,P. *Structural adaptation and stability of microvascular networks: theory and simulations*. Am. J. Physiol. 275, pp. 349-360,1998
- [6] Murray, C.D.,*The physiological principle of minimum work. 1. The vascular system and the cost of blood volume*. Physiology. 12, pp.207-214, 1926
- [7] Gabrys. E, Ribaczuk, M, Kedzia, A. *Fractal models of circulatory system. Symmetrical and asymmetrical approach comparison*. Chaos, Solitons and Fractals. 24, pp. 707- 715 ,2005
- [8] Krenz,G., Linehan, J.,Dawson,C., *A fractal continuum model of the pulmonary arterial tree*. J. Appl. Physiol. 72, pp. 2225- 2237, 1992
- [9] Sherman, T.F. *On connecting large vessels to small. The meaning of Murray´s Law*. J. Gen. Physiol. 78, pp. 431-453, 1981
- [10] Glenney,R. ,Robertson, H., Yamashiro, S., Bassingthwaighte, B. *Applications of fractal analysis to physiology*. J. Appl. Physiol. 70 (6), pp. 2351-2367, 1991
- [11] Prior, B.M., Yang H.T., Terjung, R.L. *What makes vessels grow with exercise training?* J. Appl. Physiol. 97, pp.1119-1128, 2004
- [12] Stéphanou, A.,McDougall, S.R., Anderson,A.R., Chaplain, M.A.J. *Mathematical modelling of the influence of blood rheological properties upon adaptative tumour-induced angiogenesis*. Mathematical and Computer Modelling. pp.1-28, 2005
- [13] Bejan, A. *Shape and structure, from engineering to nature*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000

- [14] Mandelbrot, Benoit B., *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Company, New York, 1977
- [15] Lorente, S. Wechsato, W., Bejan, A. *Tree-shaped flow structures designed by minimizing path lengths*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 45, pp. 3299 - 3312, 2002
- [16] Bejan, A. *Constructal theory: from thermodynamic and geometric optimization to predicting shape in nature*. Energy Convers. Mgmt. 39, No. 16-18, pp. 1705-1718, 1998
- [17] Reis, A.H., Miguel, A.F., Aydin, M. *Constructal theory of flow architecture of the lungs*. Am. Assoc. Phys. Med. 31, pp. 1135-1140, 2004
- [18] Kulish, V.V., Lage, J.L., Hsia, C.C., Johnson, R.L. *A porous medium model of alveolar gas diffusion*. J. of Porous Media. 2, pp. 263-275, 2002
- [19] Wechsato, W., Lorente, S., Bejan, A. *Tree-shaped networks with loops*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 48, pp. 573-583, 2005
- [20] Wechsato, W., Lorente, S., Bejan, A. *Optimal tree-shaped networks for fluid flow in a disc-shaped body*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 45, pp. 4911- 4924, 2002
- [21] Lipowsky, H., *Microvascular Rheology and hemodynamics*. Microcirculation 12, pp. 5- 15, 2005
- [22] Bejan, A., Rocha, L., Lorente, S. *Thermodynamic optimization of geometry: T- and Y- shaped constructs of fluid streams*. Int. J. Therm. Sci. 39, pp. 949-960, 2000
- [23] Kargol, A. *A mechanistic model of transport processes in porous membranes generated by osmotic and hydrostatic pressure*. J. of Membrane Sci. 191, pp. 61-69 2001
- [24] Bejan, A. *Porous and complex flows in structures in modern technologies*. Springer, 2004
- [25] Huang, N.S, Hellums, J.D. *A Theoretical model of gas transport and acid base regulation by blood flowing in microvessels*. Microvascular Research. 48, pp. 364-388, 1994
- [26] Dash, K.R, Bassingthwaite, J.B. *Simultaneous blood-tissue exchange of oxygen, carbon dioxide, bicarbonate, and hydrogen ion*. Annals of Biomedical Engineering. 34, pp.1129-1148, 2006
- [27] Schmid-Schönbein, W. *Biomechanics of microcirculation blood perfusion*. Annu. Rev. Biomed. Eng. 1, pp. 73-102, 1999
- [28] Bird, B.R. *Fenómenos de transporte*. 1ªed. Reverté, México, 2004
- [29] Bird, B.R., Armstrong, R.C., Hassager, O., *Dynamics of Polymeric Liquids: Fluid Mechanics*. Vol 1, John Wiley and Sons, E.U.A., 1977
- [30] Vafai, K., *Handbook of Porous Media*, Dekker. 2005.
- [31] Dharmadhikari, R., *Flow of non-Newtonian fluids through porous media*. Chem. Eng. Sci., 40, Num. 3, pp. 527-529, 1985
- [32] Zhang, J., Nolan, T., Zhang, T., Griffith, B., Wu, Z. *Characterization of membrane blood oxygenation devices using computational fluid dynamics*. J. Memb. Sci., 288, pp. 268-279, 2007

- [33] Fung, Y.C. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. sec. ed., Springer, 1997
- [34] Mazumdar, J.N., *Biofluid Mechanics*. World Scientific Publishing, Australia, 1992

Apéndice A

Análisis de Orden de Magnitud

Para obtener las relaciones entre las variables de interés con las variables conocidas, se realiza un análisis de orden de magnitud. Las escalas utilizadas son las siguientes

$$r \sim R \quad x \sim L \quad v_x \sim U_c \quad v_r \sim V$$

$$P \sim P_e - P_1 \equiv \Delta P$$

donde R es el radio del conducto cilíndrico, L es la longitud, V es la velocidad en la dirección radial.

A partir de la ecuación de continuidad y empleando las relaciones anteriores se obtiene la siguiente velocidad:

$$V \sim U_c \frac{R}{L}$$

donde U_c es una velocidad característica en la dirección longitudinal del conducto cilíndrico.

Realizando el mismo análisis para las ecuaciones de cantidad de movimiento, para la dirección r y x se obtiene las siguientes expresiones

$$\text{Re} \epsilon^3 \sim 1, 2^n \epsilon^{n+1}, \epsilon^2, \epsilon^{2n+2}$$

$$\text{Re} \epsilon \sim 1, \epsilon^{2n}, 1, 2^n \epsilon^n$$

Los términos de la izquierda se refieren a los términos inerciales, los elementos de la derecha, al gradiente de presión y los términos viscosos, respectivamente. En ambas expresiones Re es el número de Reynolds, definido de la siguiente manera $\text{Re} = \frac{\rho U_c^{2-n} R^n}{K}$, y ϵ es una relación de esbeltez definida como $\epsilon = \frac{R}{L}$.

A partir del análisis anterior, la velocidad característica U_c se define a partir de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x , debido a que los terminos viscosos (cambios de la componente de la velocidad longitudinal en la dirección radial) son del mismo orden de magnitud que la fuerza de presión. Entonces U_c es del siguiente orden de magnitud.

$$U_c \sim \left[\frac{\Delta P R^{n+1}}{KL} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Ecuaciones Adimensionales

Para obtener las ecuaciones adimensionales se usan los resultados anteriores, definiendo las siguientes las variables adimensionales

$$\chi = \frac{x}{L} \quad \eta = \frac{r}{R} \quad v_x = \frac{v_x}{U_c} \quad v_r = \frac{v_r L}{U_c R}$$

$$\Psi = \frac{P - P_1}{P_e - P_1}$$

La ecuación de continuidad de forma adimensional queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta v_r) + \frac{\partial}{\partial \chi} (v_x) = 0$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones r y x obtenidas son las siguientes

$$\text{Re } \epsilon^3 \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial \eta} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial \chi} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - 2^n \epsilon^{n+1} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(-\frac{\partial v_r}{\partial \eta} \right)^n \right] + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\left(-\frac{\partial v_x}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial \chi} \right)^n \right]$$

$$\text{Re } \epsilon \left(v_r \frac{\partial v_x}{\partial \eta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \chi} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(-\frac{\partial v_x}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial \chi} \right)^n \right] + 2^n \epsilon^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(-\frac{\partial v_x}{\partial \chi} \right)^n \right]$$

Tomando en cuenta que el número de Reynolds y la relación de esbeltez son muy pequeños, en una primera aproximación los términos inerciales se pueden considerar despreciables. Las expresiones para la ec. de continuidad y de cantidad de movimiento son las siguientes

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta v_r) + \frac{\partial}{\partial \chi} (v_x) = 0 \tag{a1}$$

$$0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \tag{a2}$$

$$0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \left(-\frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right)^n \right] \tag{a3}$$

De la ec.(a3), se puede apreciar que la velocidad en la dirección x , puede obtenerse en términos del gradiente de presión y de la coordenada radial.

Apéndice B

Código fuente, FORTRAN 90

```
! funcion2.f90
! PROGRAM: funcion2
!
! PURPOSE: Programa que muestra valores de la funcion de la resistencia total adimensional
!
!*****
  program funcion2
  implicit none
  ! Variables
    ! Variables
  integer imax, i
  parameter(imax=1000)
  real x(imax),dx
  real term1,term2,term3,term4,term5
  real sigma,mcero,H,csm
  real cent,ccero,y
  real f(imax),pi,n
  real mu,kmemb,ro,L,D,k,T,R,Dc
!*****Parámetros Físicos*****
sigma=0.5
mcero=1.666E-8
H=1E-4
csm=0.4401
cent=0.00001
ccero=0.001
y=1.0
```

```

!*****Constantes*****
mu=1E-3
kmemb=1E-23
ro=1060
L=500E-6
D=1E-6
K=1E-3
T=310
R=188.9545E3
Dc=1.5E-5
!*****
pi=3.141592654
n=0.5
!*****
!dx=0.0001
f=0.0
x(1)=0.0
do i=2,imax
x(i)=x(i-1)+dx
enddo
! Body of funcion2
do i=2,imax

term1=-((mu/kmemb)*(ro**n)*(D**(3*n))/(4*pi*k*(L**2)*csm*&
(1-sigma)*(mcero**(n-1))))*((H-(2**(x(i)/3))*D)/(2**(x(i)*(n-1/3))))

term2=((mu/kmemb)*((H*(ro**n)*D**(3*n))/(4*pi*k*(L**2)*csm*sigma*(1-sigma)*&
(mcero**(n-1))))*(1/2**(x(i)*(n-1/3)))

term3=-((1/0.04401)*((H*R*T)/(4*pi*k*(L**2)*Dc))*((ro**n)*&
(D**(3*n))/(mcero**(n-1))))*(1/2**(x(i)*(n-1/3)))

term4=((x(i)+1)/(cent-(2**(x(i))*(ccero+y)+((2**(x(i))-1)*y)))*&
(2**(3+3*n))*(((3*n+1)/(pi*n))**n))

term5=((R*T*(ro**n)*(D**(3*n+1)))/(4*pi*k*(L**2)*Dc*&
(mcero**(n-1))))*(1/(2**(x(i)*n-x(i)*2/3)))

f(i)=term1+term2+term3+term4+term5

enddo

```



```
!*****  
open(unit=20,file='resist-n_0.1.txt')  
do i=1,imax  
write(*,110) x(i),f(i); 110 format(2e18.8)  
write(20,110) x(i),f(i); 120 format(2e18.8)  
enddo  
close (unit=20)  
end program funcion2
```