UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FONDO DE AHORRO PARA EL RETIRO DE MUJERES EN OAXACA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

ALEJANDRA GARCÍA MORÁN

TUTOR
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre (s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera No. de cuenta	1. Datos del alumno. García Morán Alejandra 11 14 19 83 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 300007981
2. Datos del asesor Grado Nombre (s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del asesor Dr. Pablo Padilla Longoria
3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre (s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del sinodal 1 Act. Carlos Lozano Nathal
4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre (s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 2 Act. Roberto Cánovas Theriot
5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre (s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 3 Act. Luis Felipe Javier Barros y Villa
6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre (s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 4 Dr. Ricardo Gomez Aiza
7. Datos del trabajo escrito Título Subtítulo Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Fondo de ahorro para el retiro de mujeres en Oaxaca 117 2008

Agradecimientos

Agradezco al arquitecto del Universo, por acompañarme y guiarme en cada paso de la vida. Gracias por este nuevo escalón que hemos subido juntos y por todo aquello que falta por vivir.

A mi familia, gracias porque juntos han sido la médula ósea de mi vida, por el apoyo incondicional y la comprensión, pero sobre todo por aceptarme como soy y corregir mis errores.

A mi padre, gracias por el amor, el ejemplo y la seguridad. Por enseñarme que un verdadero guerrero sabe que al perder una batalla, mejora su arte de manejar la espada y con ello luchará con mayor habilidad en el próximo combate.

A mi madre, gracias por ayudarme a construir las bases firmes que serán el soporte de lo que edifique en la vida. El que ama verdaderamente no es aquel que ignora tus defectos y oculta tus errores sino aquel que se preocupa por corregirte y hacer de ti una mejor persona. Gracias.

A mi hermana, gracias por enseñarme que la vida es única, que a veces hay que romper los esquemas y que aquel que siempre busca una explicación se pierde de lo mejor que la vida puede ofrecer.

A Diana, gracias por ser mi amiga, mi hda, gracias por estar siempre allí, por saber escuchar y recordarme quién soy en los momentos de duda. Gracias por enseñarme que una amiga es aquella persona con la que puedes pensar en voz alta.

A Mau, gracias por enseñarme a descubrir nuevos horizontes en la vida, por ayudarme a aclarar mis ideas en momentos difíciles. Gracias por enseñarme que la vida, aun cuando no es fácil, es lo mejor que podemos tener; por recordarme a cada instante que hay que disfrutar cada día como si fuera el último y planear la vida como si fuera eterna.

A mis amig@s y profesores(as) que han dejado huella en mi: “La vida es como un viaje en tren, cuando alguien aborda el tren está entrando en tu vida. Muchas personas suben al tren de tu vida y nunca notas su presencia, otras solo suben un tiempo y se van pero dejan una huella permanente y otras, muy pocas, son aquellas que llegan hasta la última estación en el viaje.” Gracias por los buenos momentos, por transmitirme parte de su conocimiento y sobre todo por la oportunidad de haber estado juntos.

A ti, espero te guste, se titula “Tus palabras y las mías”:
Tus palabras son perennes en el tiempo, describen como te comportas y reflejan quien eres, son como el Sol que sale cada mañana, sin importar que estés triste o contento, sale cada mañana. Sin embargo, las mías son como el viento, viajan por todas partes, van y vienen, ello no implica que no existan ni que no describan lo que siento en cada momento, pero el viento es impredecible, nunca se sabe cuando acariciará tu rostro con una refrescante brisa, ni cuando destruirá tu casa como un tornado.

Índice general

1. ENTORNO DEL RETIRO EN MÉXICO **5**
1.1. Fondos de retiro tradicionales 5
1.1.1. Antecedentes históricos 5
1.1.2. Las AFORE y sus obligaciones 8
1.1.3. Cuenta individual 9
1.1.4. Comisión versus rendimiento en las AFORE 10
1.2. Seguro y reaseguro rurales 14
1.2.1. Entorno rural en México 14
1.2.2. Riesgos agropecuarios 15
1.2.3. Administración de riesgos 17
1.2.4. Seguro y reaseguro 18
1.3. Fondos de aseguramiento agropecuarios 19
1.3.1. Fondo de aseguramiento 19
1.3.2. Proceso operativo de un fondo de aseguramiento 20
1.3.3. Requisitos para participar en un fondo de aseguramiento . 20
1.3.4. Organismos Integradores 21
1.3.5. Facultades de un Organismo Integrador Nacional 22

2. HERRAMIENTAS ACTUARIALES **23**
2.1. Funciones biométricas y conmutativas 23
2.2. Anualidades 27
2.2.1. Anualidades ciertas 29
2.2.2. Anualidades contingentes anticipadas 29
2.2.3. Anualidades contingentes vencidas 33
2.3. Pensiones 35
2.3.1. Proceso de formalización 36
2.3.2. Métodos de costeo actuarial 39

3. MANEJO Y COBERTURA DE CARTERAS **53**
3.1. Rendimiento de un activo 53
3.1.1. Rendimiento del portafolio 54
3.2. Media y varianza del portafolio 55
3.2.1. Media del rendimiento del portafolio 55
3.2.2. Varianza del rendimiento del portafolio 56

3.2.3. Diversificación . . . 56
3.2.4. Diagrama de un portafolio . . . 58
3.3. El conjunto factible . . . 60
3.3.1. El conjunto de mínima varianza y la frontera eficiente . . 62
3.4. El modelo de Markowitz . . . 64
3.4.1. Solución del problema de Markowitz . . . 64
3.4.2. Condiciones no negativas . . . 65
3.5. Teorema de los dos fondos . . . 66
3.6. Inclusión de un activo libre de riesgo . . . 68
3.7. Teorema de un fondo . . . 69

4. DERIVADOS Y RIESGO DE CRÉDITO 73
4.1. Productos derivados . . . 73
4.1.1. Contratos forward . . . 74
4.1.2. Contratos futuros . . . 77
4.1.3. Opciones . . . 78
4.2. Fórmula de Black-Scholes . . . 82
4.3. Riesgo de crédito . . . 84
4.3.1. Modelos de riesgo de crédito . . . 84
4.3.2. Modelo de Merton . . . 85

5. PRODUCTO 89
5.1. Diseño . . . 89
5.2. Valuación . . . 91
5.3. Administración del portafolio . . . 93
5.4. Riesgo de crédito . . . 98

A. Herramientas financieras en Mathlab 101
A.1. Ejercicio 1 . . . 101
A.2. Ejercicio 2 . . . 102

B. Encuesta socioeconómica de SEFIA 105
B.1. Datos económicos . . . 106
B.2. Actividad productiva . . . 108

C. Tabla de mortalidad e invalidez 109

Prefacio

El objetivo del presente trabajo es aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera para la creación de un producto financiero dirigido al mercado meta del banco Servicios Financieros Alternativos (SEFIA), el cual está conformado por mujeres de clase económica baja que habitan en el estado de Oaxaca.

La idea de la creación de este producto es satisfacer la necesidad de estas mujeres de mantener su nivel de vida al llegar a cierta edad en la cual ya no pueden desempeñar las actividades con las cuales contribuyen a la economía familiar. Se plantea la solución a esta problemática a través de un ahorro para el retiro y fomentando a su vez el ahorro entre dichas mujeres.

El presente trabajo se encuentra estructurado en cinco capítulos; a lo largo de los primeros cuatro capítulos se consolidará la teoría, así como el herramentaje financiero y actuarial que se utilizará para la creación del producto que se describe en el quinto capítulo. Así mismo, se cuenta con tres apéndices para aportar información técnica y/o práctica para la construcción del producto.

En el primer capítulo se verá como se han implementado en México diversos planes de acción con el objeto de evitar que las personas de la población se encuentren desprotegidas económicamente al llegar a la edad en la que dejan de trabajar; y como es que estos planes de acción generalmente solo aplican a las condiciones urbanas. Razón por la cual este capítulo se divide en dos vertientes: la vertiente del retiro bajo condiciones urbanas a la que llamaremos "retiro tradicional" y la vertiente del retiro en el medio rural.

La materia del segundo capítulo consiste en plantear la teoría actuarial requerida para el producto a través de tres secciones, siendo la primera donde se definen y desarrollan las funciones biométricas y conmutativas a través de las cuales se construyen las anualidades, que son el tema de la segunda sección, dejando el desarrollo de las pensiones para la tercera.

En el tercer capítulo se estudiarán brevemente las situaciones bajo las cuales se desarrolla una inversión. Restringiendo el caso a un solo período de inversión y tratando la incertidumbre a través del análisis media-varianza.

El capítulo cuarto plantea la teoría moderna de inversiones, desarrollando de manera muy general el tema de los productos derivados y sentando con ello las bases de la conocida fórmula de "Black-Scholes", la cual se empleará en el modelo de Merton.

Finalmente, en el quinto capítulo se aplica la teoría de pensiones para diseñar y valuar el costo del producto, se realizará una simulación de la administración del dinero del fondo del producto con base en información del mercado y se estimará el riesgo de crédito involucrado a través del modelo de Merton.

Capítulo 1

ENTORNO DEL RETIRO EN MÉXICO

En México, como en muchos países, se han implementado diversos planes de acción con el objeto de evitar que las personas de la población se encuentren desprotegidas económicamente al llegar a la edad en la que dejan de trabajar, comúnmente conocida como edad de retiro.

Desafortunadamente, la mayoría de estos planes de acción solo se aplican a las condiciones urbanas de las ciudades por diversas razones, una de las principales es que en las zonas rurales la "edad de retiro" no es algo establecido comúnmente puesto que las personas dejan de laborar hasta que ya no lo pueden hacer físicamente.

En la primera sección de este capítulo se hablará acerca del retiro que se da bajo condiciones urbanas, al que llamaremos "retiro tradicional", y en las siguientes dos secciones, del entorno del retiro en el medio rural.

1.1. Fondos de retiro tradicionales

Comenzaremos esta sección haciendo una breve recopilación de los hechos históricos que muestran los esfuerzos del país por la protección del trabajador que deja de estar activo.

Posteriormente se adentrará más a fondo en el tema de las AFORE: que es lo que son, cuales son sus obligaciones y las comisiones y rendimientos que ofrecen. Así mismo se hablará de la cuenta individual y las partes que la componen, ya que la cuenta individual de los trabajadores es la razón de ser de las AFORE.

1.1.1. Antecedentes históricos

Como primer esfuerzo para la protección al trabajador que deja de estar activo, se tiene que en el año de 1824 la Hacienda Pública efectúa descuentos al salario para la creación de un "fondo de incapacitados". Muchos intentos de mejoras para el trabajador se hicieron desde entonces hasta que el 30 de abril de 1904 surgió la *"Ley de Trabajo del Estado de México"*. Se tiene registro de que el primer ordenamiento que estableció el seguro social en México fue la Ley del Trabajo el 11 de diciembre de 1915 [17] promulgada en Yucatán, donde se establecía la necesidad de protección a los trabajadores y responsabilizaba a los patrones de accidentes y enfermedades de sus empleados.

Es en la etapa constituyente del devenir histórico de nuestro país cuando inicia el impulso definitivo a estos esfuerzos pues el 5 de febrero de 1917, con la publicación de la Carta Magna, surge la base constitucional del seguro social en México. En su artículo 123 se encuentran las garantías de los trabajadores en los aspectos económicos, políticos y sociales.

Más adelante el 12 de agosto de 1925 por disposiciones establecidas en esta Carta Magna empieza a funcionar la Dirección General de Pensiones Civiles y de Retiro, dependiente de la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP). En esta dirección se proporciona a los empleados: la jubilación, protección durante la vejez, préstamos a corto plazo e hipotecarios y pensiones que se otorgan por vejez, inhabilitación, muerte o retiro a los 65 años, después de 15 años de servicio.

El siguiente año, en 1926, se publica la *"Ley de Retiros y Pensiones del Ejército y la Armada Nacionales"* la cual tiene como principal atributo incluir a los militares y sus derechohabientes en el amplio espectro de la seguridad post-laboral. Posteriormente, en los años de 1939 y 1940 sufrió modificaciones con el objeto de aumentar los beneficios otorgados.

Para el año de 1929 Congreso de la Unión realizó una modificación a la fracción XXIX del artículo 123 para que la *"Ley del Seguro Social"* incluyera los seguros de: invalidez, vida, accidentes y enfermedades, cesantía involuntaria y otros fines análogos.

En el año de 1935 por encargo del entonces presidente Lázaro Cárdenas del Río se decidió la realización de un "instituto de seguros sociales" el cual con aportaciones y administraciones tripartitas incluía a: el Estado, los trabajadores asegurados y sus patrones. Esta institución incorporaba a todos los asalariados y pretendía cubrir los siguientes riesgos: enfermedades de trabajo, enfermedades no profesionales y maternidad y vejez e invalidez. El principal autor de este proyecto fue el abogado Ignacio García Tellez [17], a quien en 1942 se le encomendó la nueva Secretaría de Trabajo y Previsión Social.

Sin embargo, los derechos de los trabajadores. Sin embargo, los derechos de los trabajadores se verían consolidados legalmente hasta el 19 de enero de 1943, con la publicación de la "Ley del Seguro Social". Esta ley decretó la creación de un organismo público descentralizado con personalidad y patrimonios propios, denominado"Instituto Mexicano del Seguro Social" (IMSS) el cual es puesto en marcha en enero de 1944.

En el año de 1947 es promulgada la"Ley de Retiros y Pensiones Civiles", la cual otorgaba a todos los prestadores de servicios del estado los beneficios de seguridad social donde se incluían los seguros de vejez, invalidez, muerte, orfandad y viudez, así como también se indicaba que la edad para recibir las pensiones era a los 55 años de edad y con un mínimo de 15 años de servicio.

En un afán de suplementar mecanismos para mejorar la vida del trabajador a finales de estos años se dispuso de una parte de los fondos de pensiones para la construcción de conjuntos habitacionales.

Bajo este contexto, y como imperiosa necesidad de atención por la naturaleza de sus funciones, los militares son separados para su atenció. Siendo de esta forma, es emitida la ley que crea la “Dirección de Pensiones Militares” en 1955 y el 30 de diciembre de 1961 la “Ley de Retiros y Pensiones Militares” como sustento a los actos y prestaciones de la citada Dirección.

La ley del Seguro Social publicada en 1943 tuvo diversas modificaciones y fue sustituida por una que entró en vigor el 1 de abril de 1973, la cual posteriormente fue modificada en 1989 siguiendo siempre como fin, la mejora de las condiciones de vida del trabajador mexicano. Siguiendo con ello, el primero de mayo de 1992 entró en vigor el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) como una prestación complementaria adicional y no sustitutiva del sistema de pensiones del ISSSTE y del IMSS.

En forma genérica la operación del SAR es la siguiente: las aportaciones son de 2 y 5 % del salario, que efectúan bimestralmente las dependencias donde laboran los trabajadores, y que se integran a una cuenta individual del trabajador; bancos privados administran estas cuentas, pero no son depositarios de sus fondos. Las aportaciones son canalizadas tanto a una “subcuenta de retiro” en el Banco de México como a una “subcuenta de vivienda” en el FOVISSSTE. La primera subcuenta gana intereses cuya tasa determina la SHCP en función a la tasa de interés prevaleciente en el mercado de dinero (pero no inferior al 2 % anual), y además se reajusta mensualmente con base en la variación del índice nacional de precios al consumidor (INPC). La segunda subcuenta gana anualmente intereses en función del remanente de operación entre activos y pasivos del Fondo para la Vivienda del ISSSTE (FOVISSSTE), pero conservando al menos su valor real (Art. 106 ley del ISSSTE). A la edad de 65 años o al pensionarse o jubilarse se puede alternativamente retirar la totalidad del saldo acumulado, en una sola exhibición o negociar con el banco que administra la cuenta para que entregue el saldo acumulado en forma de una pensión mensual hasta agotar el saldo y sus rendimientos.

Un gran cambio en la administración de los recursos del trabajador se instituyó en febrero de 1997 al iniciar operaciones las Administradoras de Fondo para el Retiro (AFORE). Dichas AFORE son organizaciones financieras intermediarias, autorizadas por la SHCP y supervisadas por la CONSAR (Comisión Nacional de Sistema de Ahorro para el Retiro) encargadas del manejo de los ahorros para el retiro de los trabajadores. El primero de julio de 1997 entró en vigor la reforma a la ley del IMSS, estableciendo para los nuevos derechohabientes (los que ingresaran a partir de dicha fecha) las cuentas individuales administradas por las AFORE como única opción de ahorro para el retiro y dando la opción para los derechohabientes ya existentes de traspasar sus recursos del SAR a cuentas individuales en las AFORE.

Sin embargo, estos saldos eran exiguos, dada la corta existencia (1992-1997) del SAR, por lo cual y con el fin de que el saldo inicial de sus cuentas AFORE incluyera un equivalente a las aportaciones patronales y de sus sueldos que ya habían efectuado al fondo de pensiones del IMSS durante sus años de trabajo, ese instituto les efectuó a los trabajadores un aporte inicial adicional, o traspaso, de acuerdo a una tabla de equivalencias por semanas cotizadas, o a razón de \$ 1.45 por día laborado (actualizado según inflación). El costo fiscal de esta reforma pensionaria a la ley del IMSS fue del 1.10 % del PIB del año 1997 [16]. Algo semejante es lo que se efectuó con el proyecto de reforma a la ley del ISSSTE, "casi espejo" de la ley reformada del IMSS. Se calcula que el costo de esta reforma pensionaria de la ley del ISSSTE fue del 0.55 % del PIB del año 2003 [16].

El último hecho que citaremos en este punto será el del 25 de abril de 2002, que es cuando el Congreso de la Unión aprobó una modificación a la ley de las AFORE que permitó afiliarse a este sistema a cualquier persona física, incluyendo a los derechohabientes del ISSSTE.

1.1.2. Las AFORE y sus obligaciones

Estas Administradoras de Fondos para el Retiro llamadas "AFORE" se encargan básicamente de abrir, operar y administrar las cuentas individuales de los trabajadores, así como sus respectivas subcuentas, en las que se reciban recursos de los trabajadores afiliados o no afiliados.

Dicho con mas detalle, se encargan de las siguientes actividades:

- Recibir las cuotas y aportaciones de seguridad social correspondientes a las cuentas individuales de conformidad con las leyes de seguridad social.
- Recibir las aportaciones voluntarias y complementarias de retiro, y los demás recursos que en términos de esta ley puedan ser recibidos en las cuentas individuales.
- Administrar los recursos de los fondos de previsión social.
- Individualizar las cuotas y aportaciones destinadas a las cuentas individuales, así como los rendimientos derivados de la inversión de las mismas.
- Enviar al domicilio que indiquen los trabajadores, sus estados de cuenta y demás información sobre sus cuentas individuales y el estado de sus inversiones.
- Operar y pagar, bajo las modalidades que la CONSAR autorice, los retiros programados.
- Pagar los retiros parciales con cargo a las cuentas individuales de los trabajadores en los términos de las leyes de seguridad social.
- Entregar los recursos a las instituciones de seguros que el trabajador o sus beneficiarios hayan elegido, para la contratación de rentas vitalicias o del seguro de sobrevivencia.

La composición del capital social de las administradoras estará constituido por un 51 %, (acciones serie "A"), aportado por personas físicas mexicanas y personas morales mexicanas que tengan mayoría en la propiedad y control real de las empresas. El otro 49 %, (acciones serie "B"), es de libre suscripción, éste sería de acuerdo con la ley el límite a la inversión extranjera dentro de las administradoras. Respecto de la concentración del capital social en una sola persona física o moral, no podrá tener más del 10 % del control de acciones de ambas series. La CONSAR determina el mínimo de reserva especial que deben mantener las AFORE y cuando por alguna razón la reserva se encuentre por debajo del mínimo establecido, es obligación de las AFORE reestablecer este mínimo en un plazo máximo de 45 días naturales.

La *"Ley de Ahorro para el Retiro"* en su artículo 25 dictamina que a fin "··· de mantener las condiciones adecuadas de competencia y eficiencia" entre las diversas AFORE, ninguna podrá tener más del 20 % de control del mercado de fondos de retiro. El manejo de las cuentas individuales tendrá un costo que no se derivará de las utilidades que obtenga la administradora por las diversas asignaciones que pueda hacer de los fondos de retiro, en otras palabras, por el jineteo[1] de los ahorros para el retiro, sino que adicionalmente los trabajadores tendrán que pagar una comisión por el servicio, de acuerdo al Artículo 37 de la ley: "Las comisiones podrán cobrarse sobre el valor de los activos administrados, o sobre el flujo de las cuotas y aportaciones recibidas".

1.1.3. Cuenta individual

La cuenta individual del trabajador es aquella de la que es titular un trabajador; en ella se depositan las cuotas obrero-patronales y estatales, y sus rendimientos, se registran las aportaciones a los fondos de vivienda y se depositan los demás recursos que en términos de la ley del SAR puedan ser aportados a la misma así como aquellas otras que se abran a otros trabajadores no afiliados en términos de la ley SAR. La cuenta individual se compone de las siguientes Subcuentas con sus respectivas características:

- Retiro, Cesantía en Edad Avanzada y Vejez. (RCV)
    - El patrón aporta el 2 % del salario base de cotización para el retiro y el 3.15 % del salario base de cotización para cesantía en edad avanzada y vejez.
    - El gobierno aporta el 0.225 % del salario base de cotización para cesantía en edad avanzada y vejez (bimestralmente) y el 5.5 % del salario mínimo general para el Distrito Federal, por cada día de cotizado, por concepto de cuota social.
    - El trabajador aporta el 1.125 % sobre el salario base de cotización para retiro, cesantía en edad avanzada y vejez de forma bimestral.

[1] Jinetear: tr. Méx. Tardar en pagar un dinero con el fin de sacar ganancias. [24]

- Vivienda.
  En esta subcuenta el patrón deposita bimestralmente aportaciones que equivalen al 5 % sobre el Salario Base de Cotización. Estos recursos son canalizados al INFONAVIT a través del Fondo Nacional de Vivienda. La AFORE lleva el registro de dichos recursos y las actualizaciones de intereses en forma mensual, que aparecen en el estado de cuenta.

- Aportaciones Voluntarias.
  Aquí se depositan y acumulan las aportaciones adicionales que el trabajador decida realizar para incrementar el saldo de su cuenta individual, ya sea para incrementar el monto de la pensión al momento de su retiro o para ahorrar y obtener rendimientos. Cabe resaltar que de acuerdo con la Ley del Impuesto sobre la Renta, las aportaciones voluntarias pueden deducirse de los ingresos acumulables en la declaración anual de los trabajadores, hasta por un monto equivalente al 10 % de los ingresos acumulables o cinco veces el Salario Mínimo General Anualizado.

1.1.4. Comisión versus rendimiento en las AFORE

En esta sección analizaremos la situación del año en curso, 2007, respecto al porcentaje de comisiones que cobran las AFORE y los rendimientos pasados generados por las mismas, con la información obtenida de la CONSAR [13] y [14]. Es importante recordar que el comportamiento presente de este análisis no implica el mismo comportamiento futuro.

En las presentes tablas, el rendimiento estará dado en forma anual promedio, i.e. el promedio de los últimos tres años del rendimiento que obtuvo el fondo antes del cobro de comisiones. Las AFORE que no tienen la antigüedad suficiente para obtener esta información tendrán las siglas N.A que significan no aplica.

La tabla siguiente nos da la información de los trabajadores del IMSS. Las comisiones son equivalentes a un año bajo los supuestos siguientes:

a) Saldo inicial: $23,770.

b) Aportación bimestral: $777.41

c) Antigüedad: 5 años

d) Tasa de rentabilidad: 5 % anual real

Afore	Comisión	Rendimiento
Afirme Bajío	1.51	9.42
Inbursa	1.54	8.93
Actinver	1.94	10.01
Santander	1.95	9.97
Azteca	1.95	8.83
Ahorra Ahorra	1.96	N.A
Bancomer	1.98	8.89
Invercap	2.17	12.04
De la Gente	2.18	N.A
Coppel	2.21	N.A
Argos	2.3	N.A
Promedio	2.3	9.78
HSBC	2.33	9.37
Profuturo GNP	2.36	11.02
Banorte Generali	2.36	8.82
Ixe	2.4	9.63
Banamex	2.4	10.55
Scotia	2.66	N.A
Metlife	2.68	10.13
XXI	2.9	10.23
ING	2.97	9.78
Principal	3.48	9.86

Tabla 1.1. Comisiones y rendimientos que reciben los trabajadores del IMSS en las AFORE.

En esta tabla tenemos los rendimientos que reciben los trabajadores del ISSSTE así como las comisiones que les son cobradas, donde las comisiones son equivalentes a un año bajo los siguientes supuestos:

a) Saldo inicial: $ 23,770.

b) Aportación anual: $1,661.22

c) Antigüedad: 5 años

Afore	Comisión	Rendimiento
Afirme Bajío	0.45	9.42
Argos	0.51	N.A
Actinver	0.51	10.01
Ahorra Ahorra	0.51	N.A
Coppel	0.63	N.A
De la Gente	0.64	N.A
XXI	0.67	10.23
Metlife	0.68	10.13
Inbursa	0.68	8.93
Scotia	0.68	N.A
Bancomer	0.76	8.89
Principal	0.9	9.86
HSBC	1.39	9.37
Promedio	0.69	9.26

Tabla 1.2. Comisiones y rendimientos que reciben los trabajadores del ISSSTE en las AFORE.

Así mismo, la tabla que se muestra a continuación es para los trabajadores independientes en la cual las comisiones corresponden a la Siefore donde se invierten las aportaciones de estos trabajadores.

Posteriormente, en la figura 1.1 están graficadas las comparaciones de las comisiones contra los rendimientos que se reciben en los tres sistemas, es decir, como trabajadores del IMSS, del ISSSTE e independientes.

Afore	Comisión	Rendimiento
Argos	0.12	N.A
Ahorra Ahorra	0.2	N.A
Afirme Bajío	0.23	9.42
Scotia	0.26	N.A
Banorte Generali	0.3	8.82
Coppel	0.3	N.A
De la Gente	0.31	N.A
Bancomer	1	8.89
Actinver	1.25	10.01
Profuturo GNP	1.25	11.02
Metlife	1.725	10.13
Promedio	0.63	9.56

Tabla 1.3. Comisiones y rendimientos que reciben
los trabajadores de independientes en las AFORE.

Observe que los puntos que representan a los trabajadores del IMSS son los que se encuentren más a la derecha del eje x, lo que significa que son los trabajadores a los que se les cobra mayor comisión en las AFORE. Sin embargo, aun cuando la moda de sus comisiones se encuentra en el intervalo $[2\ ,\ 2.5]$, la dispersión de los rendimientos también es la mayor. Por lo que tienen la alternativa de escoger una AFORE que les de el mayor rendimiento para una mismo cobro de comisión.

Lo que respecta a los trabajadores del ISSSTE, observamos que su dispersión en los rendimientos y las comisiones es mínima, por lo que no importa que decisión tomen, el resultado que obtengan de la AFORE será muy parecido.

Finalmente, observamos dos cosas importantes para los trabajadores independientes. La primera es que, al igual que para los trabajadores del ISSSTE, la dispersión es mínima tanto para el rendimiento como para las comisiones. La segunda es que el número de empresas que ofrecen el servicio de administración de fondo para los trabajadores independientes es el menor de los tres, pues tan solo 12 AFORE ofrecen dicho servicio, comparado con las 22 y 14 AFORE para el IMSS y el ISSSTE respectivamente.

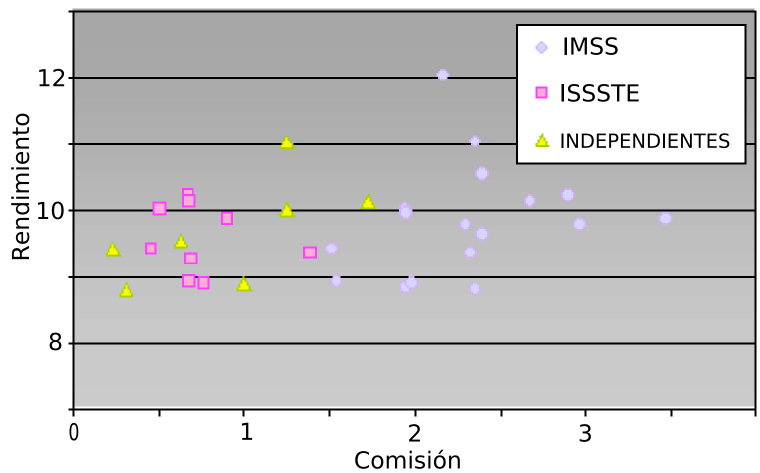


Figura 1.1: Esta gráfica muestra la comparación entre las comisiones y los rendimientos que reciben en las AFORE los trabajadores del IMSS, los del ISSSTE y los independientes.

1.2. Seguro y reaseguro rurales

En esta sección hablaremos del entorno actual de los seguros rurales y agropecuarios en México, dando para ello una breve descripción de lo que son los riesgos y como se clasifican. En particular hablaremos de los riesgos agropecuarios y daremos algunos ejemplos de los mismos.

Luego se dará una breve introducción de lo que es la administración de riesgos y se concluirá la sección analizando la importancia del seguro y del reaseguro rural para los productores.

1.2.1. Entorno rural en México

En México la preocupación por el desarrollo agropecuario y pesquero, debido a que es fundamental para elevar el bienestar de segmentos importantes de la población, ha dado lugar a la creación de leyes, instituciones, programas, seguros rurales y fondos económicos para apoyar a dicho sector, principalmente ante las contingencias climatológicas.

Una de las leyes más importantes en la regulación del sector agropecuario y pesquero es la "Ley de Desarrollo Rural Sustentable" que en su artículo 129 señala:

"El Gobierno Federal, con la participación de las dependencias que considere necesarias el Presidente de la República, creará un fondo administrado y operado con criterios de equidad social, para atender a la población rural afectada por contingencias climatológicas.

Con base en los recursos de dicho fondo y con la participación de los gobiernos de las entidades federativas, se apoyará a los productores afectados a fin de atender a los efectos negativos de las contingencias climatológicas y reincorporarlos a la actividad productiva.

A este fondo se sumarán recursos públicos del Gobierno Federal y de los estados, cuando así lo convengan, acompañados de los destinados a los programas de fomento."

De aquí que para hacer frente a estos eventos, el Gobierno Federal estableció en el año 2003 el Programa del Fondo para Atender a la Población Rural Afectada por Contingencias Climatológicas (FAPRACC), que hace frente a los efectos de desastres naturales imprevisibles, cuya magnitud supere la capacidad presupuestal de las dependencias y entidades federales, y de los gobiernos de los estados. El FAPRACC se orienta a apoyar a los productores rurales de bajos ingresos que no cuentan con un tipo de aseguramiento público o privado, y que realicen preponderantemente actividades agrícolas de temporal, pecuarias, acuícolas y pesqueras afectadas por contingencias climatológicas.

La operación del FAPRACC ha permitido a los gobiernos federal y estatales atender las necesidades urgentes de la población rural derivadas de la presencia de eventos naturales de carácter catastrófico. Sin embargo, es necesario contar con un instrumento de administración de riesgos que posibilite la adopción de estrategias para su dispersión en el mercado nacional e internacional, disminuya los costos fiscales que implica la atención de catástrofes y elimine la posibilidad de que se requieran recursos que rebasen las asignaciones presupuestarias específicas.

El gobierno federal ha considerado impulsar el desarrollo del seguro paramétrico y contratar coberturas para enfrentar con mayor eficiencia las consecuencias sociales y financieras que generan los fenómenos climatológicos adversos en las actividades agropecuarias y posibilitar su transferencia al mercado internacional. Es aquí donde entra AGROASEMEX, S.A. que ha diseñado una cobertura de seguro paramétrico de naturaleza catastrófica, para proteger riesgos agropecuarios asociados a eventos climatológicos extremos. Este seguro fue desarrollado específicamente para calcular y proteger las desviaciones financieras a las que está expuesto el gobierno federal por las obligaciones derivadas del FAPRACC y lograr su transferencia a los mercados internacionales de reaseguro.

1.2.2. Riesgos agropecuarios

El *Riesgo* se define como la pérdida potencial inesperada de beneficios o bienestar que sufre un individuo, ocasionada por un evento adverso y es inevitable al realizar cualquier negocio.

La interpretación del riesgo varía de acuerdo al campo de análisis, pero siempre tendrá dos características esenciales:

- Se ignora cuál será el resultado de un evento, ya que existen al menos dos posibles resultados.

- Por lo menos uno de los resultados posibles implica pérdida de beneficios o bienestar.

El *riesgo agropecuario* es el conjunto de eventos adversos potenciales que afectan al sector agropecuario. Estos eventos pueden agruparse en aquellos característicos de su actividad y los que son comunes a todos los negocios. A continuación citaremos algunos ejemplos de los riesgos característicos a los que se enfrenta el productor agropecuario y posteriormente algunos de los riesgos comunes a todos los negocios.

Riesgos agropecuarios:

- Riesgos de producción: acontecimientos que afectan la producción y que son incontrolables por el hombre. Generalmente varían de acuerdo a la región y corresponden a fenómenos naturales. Se pueden clasificar en:

  a Riesgos climatológicos (sequías, inundaciones, incendios, exceso de humedad, bajas temperaturas, huracanes, falta de piso, fenómenos como El Niño y La Niña, etc.).

  b Riesgos biológicos (enfermedades, plagas y depredadores).

  c Riesgos tecnológicos (utilizar maquinaria obsoleta, sembrar cultivos más resistentes a riesgos biológicos pero que se venden a menor precio, etc.).

- Riesgos de precio: eventos asociados a los cambios de precio tanto de los insumos como del producto final.

- Riesgos políticos e institucionales: cambios en las políticas y regulaciones que afectan a la agricultura y a la ganadería (cambios en leyes sobre uso de pesticidas o fármacos, cambios de regulación en países a los que se exporta, etc.).

Riesgos comunes a todas las organizaciones o negocios:

- Riesgos financieros: eventos relacionados con la forma en que el negocio obtiene y administra sus recursos. Las categorías más comunes son:

  a) Riesgo de mercado (cambios en las tasas de interés de créditos, variaciones del tipo de cambio al que se vende la producción, etc.).

  b) Riesgo de liquidez (situaciones en que se carece de los recursos necesarios para cubrir pagos, créditos u obligaciones).

  c) Riesgo de crédito (se originan por falta de pago, de capital o intereses, de alguna contraparte a la que se prestó dinero).

- Riesgos legales: situaciones que pueden generar pérdidas por el incumplimiento de disposiciones legales y emisión de resoluciones jurídicas desfavorables.

- Riesgos humanos y de contratación: eventos que ocurren a las personas y que afectan el desempeño del negocio (enfermedades, heridas o muerte). Incluye pérdidas por la posibilidad de que los recursos humanos sean insuficientes o inadecuados.
- Riesgos físicos a los activos: acontecimientos en los que la infraestructura del negocio (equipo, edificios, materia prima, etc.), se ve afectada por robo, incendio, pérdida o maltrato.
- Riesgos operativos: eventos que pueden ocurrir durante el desarrollo habitual del negocio y que generan pérdidas (sistemas inadecuados, fallas en la administración, controles insuficientes, fraude, errores humanos, etc.).

1.2.3. Administración de riesgos

La administración de riesgos es el conjunto de actividades que tiene como fin anticiparse a la ocurrencia de eventos adversos. Esto se logra con el diseño e implantación de estrategias, procesos y estructuras que minimicen el impacto de las pérdidas. Lo cual se desarrollará con detalle en el capítulo *"Manejo y cobertura de cartera"*, siendo necesario en este momento anticipar algunas definiciones que serán empleadas posteriormente.

Estrategias: son los compromisos que establecen las personas para crear una política de riesgos. Sobre ésta se define la estrategia de negocio, el nivel de riesgo tolerable y al responsable de mitigar cada riesgo.

Procesos: se refieren al enfoque sistemático para evaluar los distintos tipos de riesgo que se enfrentan de forma integral. La clave para una correcta evaluación de riesgos consiste en:

- Identificar el riesgo (clasificar los tipos de riesgo relevantes para el negocio).
- Definir cómo serán tratados (evitar el riesgo, contratar seguros, utilizar coberturas con instrumentos financieros, implantar metodologías para riesgos cuantificables, etc.).
- Establecer controles (definir procedimientos para no exceder los límites de cada riesgo).
- Monitorear y reportar la situación del riesgo (informar periódicamente sobre la evolución de los riesgos).

Estructuras: es la forma en que se organiza una entidad y cómo aplica sus recursos y técnicas para cumplir con las estrategias.

La administración de riesgos concierne a todos los miembros de una entidad e involucra a todos sus niveles de organización. Su actividad no es estática, ya que siempre habrá nuevos y diferentes riesgos al estar dentro de un entorno cambiante.

1.2.4. Seguro y reaseguro

Seguro

El seguro es un contrato a través del cual el asegurado transfiere un riesgo a un tercero (institución de seguros) a cambio de una suma de dinero denominada prima o cuota. La institución de seguros que toma el riesgo asume el compromiso de resarcir o indemnizar la pérdida o daño ocasionado por la realización del riesgo. Por ello, el seguro es un instrumento que satisface una necesidad de protección del ser humano.

El objetivo del seguro, en términos generales, es brindar protección ante las eventualidades dañinas a que está expuesto el ser humano, sus actividades, sus bienes y su vida. El seguro es importante en la economía de una persona, de una empresa, de un gremio o de un país, pues evita un desequilibrio en el patrimonio al compensar o cubrir las pérdidas o daños sufridos.

Los bienes y actividades del hombre, incluso su vida misma, son valores susceptibles de cuantificarse en términos económicos. En ese sentido, la pérdida de un bien, de una vida o de una actividad, representa una afectación patrimonial o económica cuyos efectos pueden ser disminuidos a través del seguro.

Es por ello que un seguro rural o agropecuario es un instrumento valioso para evitar la descapitalización del productor ante eventos dañosos que afecten sus actividades.

Cabe mencionar que La Secretaría de la Reforma Agraria (SAR) en su diagnóstico de los principales problemas del sector agrario, clasifica las fallas estructurales de este mismo como:

- Envejecimiento rural : 55 % del total de ejidatarios del país es mayor de 50 años y el 24.6 % tiene 65 años o mas, siendo la edad promedio 54 años.
- Agudización del minifundio: 58.7 % de los ejidatarios posee menos de 5 Hectáreas y 20 % ha divido sus predios en 3 o más parcelas,
- Difícil acceso a financiamiento: el gobierno es la principal fuente de financiamiento, fondeando 8 de cada 10 pesos en el medio rural.
- Alta emigración: el flujo neto anual (diferencia entre inmigración y emigración) se ha multiplicado, en términos absolutos, en más de 13 veces al pasar de un promedio anual de 27 mil personas en los 60's a cerca de 400 mil en los primeros 4 años del presente siglo.

Reaseguro

El reaseguro, desde un punto de vista jurídico, es un acuerdo de voluntades por el cual el reasegurado (asegurador directo) transfiere a un reasegurador una parte de uno o más riesgos tomados por el primero, contra el pago de una prima.

El reaseguro implica que el reasegurado transfiere una parte o la totalidad de determinados riesgos tomados por él a un reasegurador, para que éste responda por la parte transferida en caso de que se presente el evento objeto del seguro.

De los elementos del contrato de reaseguro destacamos a la persona que cede el riesgo y la que lo acepta. El contrato de reaseguro puede adoptar las siguientes modalidades:

- Automático: en su forma proporcional o no proporcional; en esta modalidad la empresa reaseguradora no escoge la toma del riesgo de manera individual, i.e. analizando si toma o no cada riesgo por separado, sino que le son pasados de forma automática por la empresa reasegurada de acuerdo a una clasificación antes pactada por ambos.

- Facultativo: en su forma proporcional o no proporcional; esta modalidad permite a la reaseguradora escoger los riesgos de manera particular, decidiendo cuales toma y cuales no.

1.3. Fondos de aseguramiento agropecuarios

En esta sección describiremos lo que es un fondo de aseguramiento en el ámbiro agropecuario, sus objetivos, quien los regula, las coberturas que ofrecen, su proceso operativo y los requisitos para participar en uno.

Después veremos como la asociación de fondos de aseguramiento lleva a la formación de unos entes llamados Organismos Integradores. Estudiaremos como se clasifican dichos organismos y las facultades que tienen.

1.3.1. Fondo de aseguramiento

El fondo de aseguramiento, en el ámbito de riesgos agropecuarios, es una asociación de productores agrícolas y/o ganaderos o de personas con nacionalidad mexicana que tengan su residencia en el medio rural, que tienen por objeto ofrecer protección mutualista y solidaria a sus socios a través de operaciones de seguros y coaseguros.

Estos fondos se encuentran regulados por las siguientes leyes: *Ley de Fondos de Aseguramiento Agropecuario y Rural* (LFAAR), Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros, Estatutos Sociales de los fondos de aseguramiento y Ley sobre el Contrato de Seguro.

Las coberturas que puede ofrecer se sujetan a lo siguiente:

a) En las operaciones de daños, al ramo agrícola y de animales y a aquellos ramos que específicamente registre ante la Secretaría de Hacienda y Crédito Público para el aseguramiento de los bienes conexos a la actividad agropecuaria y rural.

b) En operaciones de vida, a coberturas con sumas aseguradas limitadas para atender esquemas de saldo deudor y de vida para familias campesinas.

c) En las operaciones de accidentes y enfermedades de sus socios, el ramo de accidentes personales.

Para el caso de las operaciones de vida, las coberturas deberán practicarse por fondos de aseguramiento exclusivamente constituidos para este efecto.

Para que el fondo opere los seguros agropecuarios es importante que su personal conozca los productos, las normas de operación, así como los principales riesgos que inciden en la producción como son: las condiciones climáticas, los aspectos fitosanitarios y zoosanitarios, las tecnologías de producción de cultivos y especies ganaderas, la disponibilidad de agua y la comercialización.

1.3.2. Proceso operativo de un fondo de aseguramiento

El proceso de aseguramiento que realizan los fondos incluye cuatro etapas básicas: programación, suscripción, siniestros y ajuste y pago de indemnizaciones.

La programación es la etapa donde se desarrolla el programa operativo, en él se identifica la viabilidad técnica y financiera esperada para un ciclo agrícola y/o ejercicio ganadero y la oferta del seguro del fondo a sus socios. Es elaborado por el Gerente, revisado por el Consejo de Administración y aprobado por la Asamblea General de socios.

La suscripción consiste en recibir y revisar solicitudes de aseguramiento de los socios, realizar inspecciones para aceptación o rechazo de los riesgos, emitir constancias de aseguramiento, cobrar las cuotas, solicitar el subsidio a la cuota, informar a la reaseguradora que le preste el servicio de reaseguro de los riesgos tomados y cedidos.

La etapa de los siniestros comprende la recepción, registro, clasificación, seguimiento y atención de avisos de siniestro durante la vigencia de la constancia, ante la presencia de un riesgo cubierto.

Finalmente, el ajuste y pago de indemnizaciones es cuando el fondo practica inspecciones de campo para evaluar daños derivados de un siniestro, elabora los ajustes y, en su caso, paga las indemnizaciones procedentes a los socios. En este paso se afectan las reservas técnicas y si éstas no son suficientes, se aplica la cobertura del reaseguro con la institución que lo haya otorgado.

1.3.3. Requisitos para participar en un fondo de aseguramiento

Para ser admitido como socio de un Fondo de Aseguramiento, se requiere:

- Ser persona física o moral de nacionalidad mexicana en pleno ejercicio de sus derechos.
- Dedicarse a actividades agrícolas y/o ganaderas o tener su residencia en el medio rural.
- Presentar una solicitud de ingreso por escrito.
- No ser socio de otro Fondo de Aseguramiento, salvo que el fondo al que se pertenezca no pueda otorgar la cobertura de seguro requerido.

En caso de haber pertenecido a algún otro fondo de aseguramiento, se deberá presentar el acta de la asamblea general donde se acepte su separación o bien, la solicitud de separación recibida por el fondo al que perteneció. Así como presentar la documentación requerida para determinar si es susceptible de integrarse como socio al fondo de aseguramiento (cada fondo de aseguramiento fijará los requisitos que debe cumplir la persona interesada en ser socio) y que la asamblea general o el consejo de administración, en caso de que éste se encuentre facultado para ello, acepte su solicitud de ingreso.

Si se desea más información acerca de los pasos a seguir para la construcción de un Fondo de Aseguramiento, así como los entes que intervienen en el proceso, por favor refiérase a AGROASEMEX [1].

1.3.4. Organismos Integradores

La LFAAR reconoce la participación de organismos de representación y los recoge al establecer que los fondos de aseguramiento pueden asociarse en Organismos Integradores a nivel nacional, estatal y local.

Dichas asociaciones de los fondos de aseguramiento se constituyen como Organismos Integradores con fines no lucrativos, con personalidad y patrimonio propios; además, contar con un reglamento interno y están sujetos a lo dispuesto en la LFAAR para su constitución, operación y funcionamiento.

Los Organismos Integradores pueden ser:

- Organismo Integrador Nacional: se constituyen con la participación voluntaria de Organismos Estatales. Se registra ante la SHCP para el desempeño de las facultades que determina la LFAAR.

- Organismos Integradores Estatales: se constituye con la participación voluntaria de Organismos Locales y/o fondos de aseguramiento de la entidad federativa de que se trate y deben registrarse ante la SHCP para el desempeño de las facultades que le delegue el Organismo Integrador Nacional o la SHCP.

- Organismos Integradores Locales: se constituyen con la agrupación voluntaria de fondos de aseguramiento de una misma zona geográfica de la entidad federativa de que se trate y deben registrarse ante la SHCP para el desempeño de las facultades que le delegue el Organismo Integrador Nacional o la SHCP.

Cabe señalar que los Organismos Integradores no pueden afiliar a personas físicas ni otorgan directamente coberturas de seguros.

1.3.5. Facultades de un Organismo Integrador Nacional

Las facultades con las que cuenta un Organismo Integrador son:

- Otorgar el servicio de asesoría técnica y seguimiento de operaciones a los fondos de aseguramiento.
- Fungir como representante legal de sus afiliados.
- Promover, en general, la superación y capacidad técnica y operativa de sus integrantes, así como de sus empleados.
- Homologar, en lo procedente, reglamentos, trámites y mecanismos operativos, así como sistemas contables e informáticos.
- Prestar a los fondos de aseguramiento servicios técnicos, legales, administrativos, financieros y de capacitación.
- Integrar una base de datos de operaciones de seguros, clasificación de riesgos y todo lo relativo al funcionamiento de los fondos de aseguramiento.
- Constituir y administrar el Fondo de Protección y los Fondos de Retención de Riesgos.
- Registrar, evaluar y, en su caso, validar al personal técnico de los Organismos Integradores Estatales y Locales y de las empresas de servicio.
- Promover que los fondos de aseguramiento formen otras organizaciones productivas y de servicios para beneficio de sus socios.
- Promover que las organizaciones a que se refiere el literal anterior, integren una administración corporativa para brindarles todo tipo de servicios.

El Organismo Integrador Nacional podrá delegar sus funciones en los Organismos Integradores Estatales y Locales, los cuales tendrán la posibilidad de solicitar dicha delegación, en caso de negativa podrán optar por presentar su solicitud ante la SHCP.

Corresponde al Organismo Integrador Estatal emitir los dictámenes para la constitución de los fondos de aseguramiento, esta facultad no es delegada por el Organismo Integrador Nacional, sino que corresponde al Estatal conforme a la LFAAR.

Con esto damos por terminado el tema de Organismos Integradores pero si el lector está interesado en conocer más acerca de ellos, así como los pasos a seguir para la construcción de uno, puede consultarlo en la página de AGROASEMEX [1].

Capítulo 2

HERRAMIENTAS ACTUARIALES

El presente capítulo está estructurado de forma piramidal, ya que las secciones están cohesionadas de tal manera que se comportan como bloques de una pirámide, requiriendo la información del primer bloque para comprender el segundo y la información del segundo y el primero para comprender el tercero. Es por ello que se recomienda al lector seguir el orden secuencial del capítulo, sin saltar secciones, salvo el caso en el que se tenga previo conocimiento del tema.

En la primera sección de este capítulo, se definen y desarrollan las funciones biométricas y las funciones conmutativas, a través de las cuales se construyen las anualidades, que son el tema de la segunda sección.

La tercera y última sección tiene como razón de ser las pensiones; desarrollando el tema a través de dos vertientes: la vertiente teórica y la vertiente analítica. En la vertiente teórica se habla de la clasificación de los planes de pensiones y se da un enfoque personal de los pasos a seguir para la construcción de un plan de pensiones privado. Mientras que en la vertiente analítica, como su nombre lo indica, se desarrollan analíticamente los principales métodos de costeo actuarial para un plan de pensiones; empleando para dichos desarrollos anualidades, funciones biométricas y funciones conmutativas.

2.1. Funciones biométricas y funciones conmutativas

Modelaremos la incertidumbre de la edad al fallecimiento en términos probabilísticos. Para ello consideremos a un niño recién nacido y definamos a X como una variable aleatoria de tiempo continuo que representa la edad al fallecimiento de este recién nacido. Sea $F(x)$ la función de distribución de X, tenemos entonces que:

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]\,, \qquad \forall x \geq 0\,,$$

por definición supondremos siempre que $F(0) = 0$. En forma semejante podemos definir una función de distribución de supervivencia $S(x)$, que determine la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x, dicha función será complemento de $F(x)$, es decir:

$$S(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]\,, \qquad \forall x \geq 0\,,$$

entonces $S(0)$ siempre será 1.

A través de las leyes de probabilidad, se pueden hacer planteamientos acerca de la edad al fallecimiento, ya sea en términos de la función de supervivencia o de la función de distribución. Por ejemplo, la probabilidad de que un recién nacido muera entre la edad x y la edad z, con $x < z$ es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x < X \leq z] &= F(z) - F(x) \\ &= S(x) - S(z)\,.\end{aligned}$$

La probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre las edades x y z, dada la sobrevivencia a la edad x será:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x < X \leq z | X > x] &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}\,.\end{aligned}$$

Usaremos el símbolo x se usa para denotar a una vida de x años, o una persona de edad x. El tiempo futuro de vida de x, $X - x$, también se denotará con $T(x)$. A partir de este planteamiento definamos la siguiente notación.

$$\begin{aligned}{}_tq_x &= \mathbb{P}[\,T(x) \leq t\,]\,, \qquad t \geq 0\,. \\ {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x = \mathbb{P}[\,T(x) > t\,]\,, \qquad t \geq 0\,.\end{aligned}$$

donde el símbolo ${}_tq_x$ representa la probabilidad de que x muera dentro de t años, i.e. ${}_tq_x$ es la función de distribución de $T(x)$. Por otra parte, ${}_tp_x$ representa la probabilidad de que x alcance la edad $x+t$, i.e. ${}_tp_x$ es la función de supervivencia para x. En el caso específico de una vida de edad 0, tenemos que $T(0) = X$ y

$${}_0p_x = S(x)\,, \qquad x \geq 0\,.$$

Si $t = 1$, por convención omitiremos el prefijo, por lo que

$$\begin{aligned}q_x &= \mathbb{P}[x \text{ muera en el término de un año}] \\ p_x &= \mathbb{P}[x \text{ alcance la edad } x+1]\end{aligned}$$

Estas expresiones matemáticas que relacionan la eventualidad de la existencia de un individuo a través del tiempo son llamadas *funciones biométricas*. A continuación presentamos una tabla con las principales funciones biométricas, su defnción, el símbolo con el cual son denotadas y sus fórmulas [11].

Símbolo	Definición	Fórmula
l_x	Número de personas vivas a edad x	$l_x = kS(x)$ donde k es una constante
d_x	Número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$	$d_x = l_x - l_{x+1}$
p_x	Probabilidad de que x llegue con vida hasta la edad $x+1$	$p_x = l_{x+1}/l_x$
q_x	Probabilidad de que x fallezca entre x y $x+1$	$q_x = 1 - p_x$ $q_x = d_x/l_x$
${}_np_x$	Probabilidad de que x llegue con vida a edad $x+n$	${}_np_x = l_{x+n}/l_x$
${}_nq_x$	Probabilidad de que x fallezca entre x y $x+n$	${}_nq_x = 1 -_n p_x$ ${}_nq_x = (l_x - l_{x+n})/l_x$
${}_{n\|m}q_x$	Probabilidad de que x llegue con vida a $x+n$ y fallezca entre $x+n$ y $x+n+m$	${}_{n\|m}q_x = (l_{x+n} - l_{x+n+m})/l_x$
L_x	Número de personas vivas entre las edades x y $x+1$	$L_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$
m_x	Tasa central de mortalidad	$m_x = d_x/L_x$ $m_x = 2q_x/(2 - q_x)$

Símbolo	Definición	Fórmula
T_x	Cantidad de existencia o tiempo total de vida	$T_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} L_{x+t}$ $T_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-x-1} \; l_{x+t}$
$\mathring{e}_x$	Esperanza de vida completa o vida media completa	$\mathring{e}_x = T_x/l_x$ $\mathring{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-1} \; {}_tp_x$
e_x	Esperanza de vida abreviada o vida media abreviada	$e_x = \mathring{e}_x - \frac{1}{2}$ $e_x = \sum_{t=1}^{w-1} \; {}_tp_x$
μ_x	Tasa instantanea de mortalidad	$\mu_x = \frac{-1}{l_x}\left[\frac{d}{dx}(l_x)\right]$ $\mu_x \approx (l_{x-1} - l_{x+1})/(2\, l_x)$

Tabla 2.1. *Funciones biométricas.*

En base a estas funciones biométricas podemos desarrollar las *funciones conmutativas*, mejor conocidas como *conmutados*, que son una simplificación de un proceso de suma de valores que involucran probabilidades de sobreviviencia y muerte en una fecha de valuación determinada.

SUPERVIVENCIA p_x	MUERTE q_x
$D_x = V_i^x \ l_x$	$C_x = V_i^{x+1} \ d_x$
$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}$	$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$
$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t}$	$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} M_{x+t}$

Tabla 2.2. *Funciones conmutadas.*

donde $V_i{}^x = \frac{1}{(1+i)^x}$, a la cual denotaremos como V^x y ω es la última edad de la tabla de mortalidad, i.e. la edad en la que toda persona muere, lo que implica $q_\omega = 1$ y $l_\omega = 0$.

2.2. Anualidades

Una *anualidad* es un conjunto de pagos en el tiempo, generalmente iguales en intervalos de tiempo iguales. Donde un *intervalo* o *periodo de pago* es el tiempo que transcurre entre un pago y otro. Así mismo, el tiempo transcurrido entre el primer pago y el último, es llamado *plazo* de la anualidad . Solo resta definir la *renta*, que es el pago periódico que se realiza.

La variación de los elementos que intervienen en las anualidades hace que existan diferentes tipos, es por ello que podemos clasificarlas de acuerdo con diversos criterios, como son:

- *Tiempo.*

    - Ciertas: las fechas de iniciación y terminación son fijas y estipuladas de antemano, es decir, el número de pagos no depende de ninguna contingencia.

- Contigentes: el número de pagos depende de la o las contingencias establecidas (por ejemplo: la supervivencia de la persona). Éstas a su vez, de acuerdo a su *duración*, se dividen en:
    - Temporales: cuando la cantidad de pagos es un número fijo, previamente establecido pero sujeto a las contingencias.
    - Vitalicias: cuando los pagos se realizan mientrás la persona se encuentre con vida.

- *Intereses*
    - Simples: cuando el perido de pago coincide con el de capitalización de los intereses.
    - Generales: cuando el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización.
- *Pagos*
    - Vencidas: los pagos se efectúan al final de cada periodo, también se les conoce como anualidades ordinarias.
    - Anticipadas: los pagos se realizan al principio de cada periodo.
- *Rentas*
    - Constantes: cuando la renta que se paga es la misma durante toda la anualidad.
    - Variables: cuando la renta que se paga varia, i.e. la renta cambia en el tiempo. Las más comunes son las anualidades donde los pagos son creciente o decrecientes, sin embargo existen anualidades donde los pagos no siguen un patrón, simplemente son cantidades pactadas.
- *Iniciación*
    - Inmediatas: la realización de los cobros o pagos tiene lugar en el periodo que sigue inmediatamente a la formalización del trato.
    - Diferidas: se pospone la realización de los cobros o pagos hasta una fecha determinada.

Como ya hemos visto, las anualidades pueden ser de rentas variables o constantes, sin embargo nuestro estudio estará enfocado a las anualidades de rentas constantes. Prosigamos a construir algunas anualidades básicas, bajo el supuesto de que la renta es igual a una unidad monetaria. Observe que obtener el valor presente de una anualidad cuya renta es de R unidades monetarias, equivale a multiplicar por R el valor presente de una anualidad de una unidad monetaria.

Formalmente, al denotar una anualidad se debe indicar la tasa de interés que habrá de usarse para el cálculo del valor presente de los pagos. Sin embargo, en la literatura actuarial y financiera es común omitirla, pues se sobre entiende que toda anualidad involucra el uso de la tasa de interés que se haya especificado en el contexto del problema. El presente trabajo seguirá esta práctica común, omitiendo el subíndice i, que denota la tasa de interés que se usa en la anualidad.

2.2.1. Anualidades ciertas

Anticipadas

Denotemos como $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ a una anualidad cierta, anticipada, temporal n años. El valor presente de esta anualidad se obtiene trayendo a valor presente cada uno de los pagos, que en nuestro caso son de una unidad monetaria, a través de V^k, donde k es el periodo en el que se realiza el pago.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + V^1 + V^2 + \cdots + V^{n-1},$$

dado que ésta es una sucesión geométrica, tenemos que:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{1 - V}. \tag{2.1}$$

Vencidas

Sea $a_{\overline{n}|}$ una anualidad cierta, vencida, temporal n años. Bajo la misma analogía y recordando que el primer pago se realizará al final del primer periodo tenemos que

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= V^1 + V^2 + \cdots + V^n = V\left[1 + V^1 + V^2 + \cdots + V^{n-1}\right] \\ &= V\left[\frac{1 - V^n}{1 - V}\right] = \frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1 - V^n}{1 - \frac{1}{1+i}}\right] = \frac{1 - V^n}{(1+i) - 1}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - V^n}{i}. \tag{2.2}$$

2.2.2. Anualidades contingentes anticipadas

Vitalicias

Denotamos una anualidad anticipada vitalicia para la persona de edad x como $\ddot{a}_x$. Podemos expresar la serie de pagos como la suma de los valores presentes de los pagos por la probabilidad de que la persona de edad x esté con vida para realizar dicho pago en el periodo correspondiente, es decir:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= V^0\ {}_0p_x + V^1\ {}_1p_x + V^2\ {}_2p_x + \cdots + V^{\omega-1}\ {}_{\omega-1}p_x \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} V^t\ {}_tp_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} V^t\ \frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{V^x}{V^x}\right) \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \frac{V^{x+t}\ l_{x+t}}{V^x l_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} \\
&= \frac{N_x}{D_x}\,. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Temporales

Así mismo, una anualidad anticipada para la persona de edad x temporal n años es denotada como $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Analogamente, se traerán a valor presente los pagos, pero esta vez solo serán n y como son de forma anticipada, el útlimo pago será realizado en el momento $n-1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= V^0\ {}_0p_x + V^1\ {}_1p_x + V^2\ {}_2p_x + \cdots + V^{n-1}\ {}_{n-1}p_x \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} V^t\ {}_tp_x = \sum_{t=0}^{n-1} V^t\ \frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{V^x}{V^x}\right) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{V^{x+t}\ l_{x+t}}{D_x} \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} - \frac{1}{D_x}\sum_{t=n}^{\omega-x-1} D_{x+t} \\
&= \frac{1}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+n+t}\right] = \frac{1}{D_x}\left[N_x - \ N_{x+n}\right] \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\,. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Otra manera de obtener este resultado es recordando que las anualidades son un conjunto de pagos en el tiempo, y que dichos pagos pueden ser dividos en “bloques”. Entonces una anualidad temporal n años para x, en la que los pagos son realizados entre las edades x y $x+n$, puede ser pensada como la diferencia de una anualidad vitalicia para x y una anualidad vitalicia para $x+n$ llevada a fecha focal x; esto se debe a que al restar el valor presente de la segunda anualidad, estamos quitando el bloque de pagos entre las edades $x+n$ y ω, quedando así la misma cantidad de pagos a realizar en las mismas fechas. Definamos el valor presente actuarial del pago anticipado en el tiempo n como

${}_nE_x = V^n {}_np_x$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_x - {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n} = \frac{N_x}{D_x} - \left(V^n {}_np_x\right)\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \\
&= \frac{N_x}{D_x} - \left(\frac{V^x}{V^x}\right)\left(\frac{V^n l_{x+n}}{l_x}\right)\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \\
&= \frac{N_x}{D_x} - \left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\,. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Al comparar 2.5 con 2.4 vemos que efectivamente obtuvimos la misma expresión, por lo que usaremos este razonamiento de pagos en *bloques* posteriormente.

Fraccionadas vitalicias

En la práctica, las anualidades de vida a menudo son pagaderas en una base mensual, trimestral o semestral. Es por ello que surge el concepto de *anualidades fraccionadas*, que son aquellas donde cada pago anual es repartido en $1/k$ intervalos uniformes de tiempo, pagando $1/k$ de unidad monetaria en cada intervalo.

Desafortunadamente, el cálculo de las anualidades depende en su totalidad de las funciones conmutativas, y dichas funciones están tabuladas solamente para probabilidades de supervivencia anuales, i.e. para valores enteros. Es por ello, que para aplicar conmutados a anualidades pagaderas de manera fraccionada, por ejemplo mensualmente, necesitaríamos tablas que no existen. Sin embargo, bajo ciertos supuestos, como el de la fórmula sumatoria de Woolhouse [6] podemos suponer linearidad en algunos de estos términos o interpolar para obtener aproximaciones de los conmutados para valores fraccionados.

Prosigamos con el cálculo de las anulidades. Tenemos que $\ddot{a}_x^{(k)}$ representa a una anualidad anticipada, vitalicia para la persona de edad x fraccionada k, la cual podemos expresar como:

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{k-1} V^{t+(j/k)}\ {}_{t+(j/k)}p_x\,, \qquad (2.6)$$

suponiendo que la función $V^{t+(j/k)}\ {}_{t+(j/k)}p_x$ es lineal en j, para $j = 1, 2\cdots, m-1$, es decir:

$$V^{t+(j/k)}\ {}_{t+(j/k)}p_x \approx V^t {}_tp_x + \frac{j}{k}\Big[V^{t+1} {}_{t+1}p_x - V^x {}_tp_x\Big]\,, \qquad (2.7)$$

sustituyendo 2.7 en 2.6 tenemos:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x^{(k)} &\approx \sum_{t=0}^{\omega-x-1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k}\left(V^t{}_tp_x + \frac{j}{k}\left[V^{t+1}{}_{t+1}p_x - V^t{}_tp_x\right]\right) \\
&= \left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1}\frac{1}{k}\,k\,V^t\;{}_tp_x\right) - \sum_{t=0}^{\omega-x-1}\frac{1}{k}\left(\left[V^t{}_tp_x - V^{t+1}{}_{t+1}p_x\right]\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{k}\right) \\
&= \left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1}V^t\;{}_tp_x\right) - \left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1}\left[V^t\;{}_tp_x - V^{t+1}\;{}_{t+1}p_x\right]\frac{1}{k^2}\frac{k(k-1)}{2}\right) \\
&= \ddot{a}_x - \left(\frac{k-1}{2k}\right)\left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1}\left[V^t\;{}_tp_x - V^{t+1}\;{}_{t+1}p_x\right]\right) \\
&= \ddot{a}_x - \left(\frac{k-1}{2k}\right)\left[V^0{}_0p_x - V^{\,\omega-x}{}_{\omega-x}p_x\right] \\
&= \ddot{a}_x - \left(\frac{k-1}{2k}\right)\left(\frac{l_{x+0}}{l_x} - V^{\,\omega-x}\frac{l_w}{l_x}\right), \qquad \text{dado que } l_w = 0 \\
&= \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Fraccionadas temporales

Tenemos que $\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ representa a una anualidad anticipada temporal n años para una persona de edad x con k pagos fraccionados al año. Siguiendo la analogía de la diferencia en los bloques de pagos tenemos:

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}^{(k)}_{x} - {}_nE_x\,\ddot{a}^{(k)}_{x+n}\,, \qquad (2.9)$$

donde todos estos valores pueden ser calculados fácilmente en base a los desarrollos anteriores.

Diferidas vitalicias

Las anualidades diferidas juegan un papel muy importante en los sistemas de pensiones, ya que un plan de retiro puede ser considerado como un sistema que compra anualidades vitalicias diferidas - pagaderas durante el retiro- mediante alguna forma de anualidades temporales con aportaciones durante el servicio activo. La anualidad temporal puede consistir de aportaciones variables y su valuación puede tomar en cuenta no sólo el interés y la mortalidad sino otros factores como los incrementos de salarios y la terminación de la participación por razones distintas al fallecimiento.

Sea ${}_{m|}\,\ddot{a}_x$ una anualidad anticipada vitalicia para una persona de edad x diferida m años. Observe que el cálculo de esta anualidad se reduce a traer a valor presente actuarial una anualidad para una persona de edad $x+m$, es decir ${}_{m|}\,\ddot{a}_x = {}_mE_x\,\ddot{a}_{x+m}$. Así que prosigamos a desarrollar esta fórmula hasta llegar a una expresión en conmutados.

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ \ddot{a}_x &= {}_mE_x\, \ddot{a}_{x+m} = V^m\ {}_mp_x * \sum_{t=0}^{\omega-(x+m)-1} V^t\ {}_tp_{x+m} \\
&= V^m\ \frac{l_{x+m}}{l_x}\left(\frac{V^x}{V^x}\right) * \sum_{t=0}^{\omega-x-m-1} V^t\ \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}}\ \left(\frac{V^{x+m}}{V^{x+m}}\right) \\
&= \frac{V^{x+m}\ l_{x+m}}{V^x\ l_x}\left[\sum_{t=0}^{\omega-x-m-1} \frac{V^{x+m+t}\ l_{x+m+t}}{V^{x+m}\, l_{x+m}}\right] \\
&= \frac{D_{x+m}}{D_x}\left[\sum_{t=0}^{\omega-x-m-1} \frac{D_{x+m+t}}{D_{x+m}}\right] = \frac{D_{x+m}}{D_x}\left(\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}\right),
\end{aligned}
$$

por lo tanto la expresión para esta anualidad es:

$$
{}_{m|}\ \ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}\,. \tag{2.10}
$$

Diferidas temporales

Denotemos como ${}_{m|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ a una anualidad anticipada para la persona de edad x temporal n años diferida m. Para encontrar una expresión en conmutados de esta anualidad podemos seguir varios caminos, uno de ellos sería pensar esta anualidad como la diferencia de los bloques de pagos y otro camino sería traer a valor presente m años la anualidad $\ddot{a}_{x+m:\overline{n|}}$. Arbitrariamente escogeremos el segundo camino, por lo que tenemos que

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = V^m\ {}_mp_x * \sum_{t=0}^{n-1} V^t\ {}_tp_{x+m} \\
&= V^m\ \frac{l_{x+m}}{l_x}\left(\frac{V^x}{V^x}\right) * \sum_{t=0}^{n-1} V^t\ \frac{l_{x+m+t}}{l_{x+m}}\ \left(\frac{V^{x+m}}{V^{x+m}}\right) \\
&= \frac{V^{x+m}\ l_{x+m}}{V^x\ l_x}\left[\sum_{t=0}^{n-1} \frac{V^{x+m+t}\ l_{x+m+t}}{V^{x+m} l_{x+m}}\right] \\
&= \left(\frac{D_{x+m}}{D_x}\right)\left[\frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_{x+m}}\right] \\
&= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}\,.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

2.2.3. Anualidades contingentes vencidas

El cálculo de las anualidades vencidas es en exceso similar al de las anualidades anticipadas, solo que en éstas últimas los pagos son realizados al final de cada periodo en lugar de al principio. Es por ello que en esta sección solo desarrollaremos las dos primeras anualidades, extendiendo la invitación al lector de desarrollar el resto de las anualidades hasta llegar a las fórmulas que aquí se dejan planteadas.

Vitalicias

Sea a_x una anualidad vencida para la persona de edad x. Tenemos que el valor presente de los pagos será:

$$\begin{aligned} a_x &= V^1 \ {}_1p_x + V^2 \ {}_2p_x + \cdots + V^{\omega-x-1} \ {}_{\omega-x-1}p_x \\ &= \sum_{t=1}^{\omega-x-1} V^t \ \frac{l_{x+t}}{l_x} \left(\frac{V^x}{V^x}\right) = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}\,, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}\,. \tag{2.12}$$

Temporales

Una anualidad vencida para la persona de edad x temporal n años es representada por $a_{x:\overline{n}|}$. A diferencia de la anualidad anticipada, en este caso el primer pago se realiza al final del primer año y el útlimo pago se realiza al final del n-ésimo año, por lo que:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= V^1 \ {}_1p_x + V^2 \ {}_2p_x + \cdots + V^{n-1} \ {}_{n-1}p_x + V^n \ {}_np_x \\ &= \sum_{t=1}^{n} V^t \ {}_tp_x = \sum_{t=1}^{n} V^t \ \frac{l_{x+t}}{l_x} \left(\frac{V^x}{V^x}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{V^{x+t} \ l_{x+t}}{D_x} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Al comparar los desarrollos de 2.3 y 2.4 con los desarrollos de 2.12 y 2.13 respectivamente, se observa la gran semejanza entre las anualidades anticipadas y las vencidas, como se explicaba al principio de la sección. Así que para concluir esta sección, solo nos resta escribir las fórmulas para las anualidades vencidas restantes, dejando al lector los desarrrollos que considere pertinentes.

Fraccionadas vitalicias

Sea $a_x^{(k)}$ una anualidad vencida, vitalicia para la persona de edad x, pagadera k-veces al año. Siguiendo como guía el desarrollo de 2.8 se obtiene:

$$a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k}\,. \tag{2.14}$$

Observe que de 2.14 y 2.8 se puede obtener la siguiente equivalencia,

$$a_x^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} - \frac{1}{k}\,, \tag{2.15}$$

que es bastante obvia, ya que una anualidad vencida y una anticipada difieren solamente en la fecha del primero y el último pago; es por ello que en 2.15 se le resta $1/k$ a la anualidad anticipada, ya que éste corresponde al primer pago. Es importante observar que el último pago no recibe ninguna modificación; esto se debe a que en ambos casos, el último pago se realizará en edad w.

Fraccionadas temporales

En el caso de $a^{(k)}_{x:\overline{n|}}$, una anualidad vencida, para la persona de edad x, temporal n años, fraccionada . Tenemos que no solo cambiará el primer pago, sino también el último; ya que para la anualidad anticipada el útlimo pago se realiza a la edad $x+n-1+\frac{k-1}{k}$ que es equivalente a la edad $x+n-\frac{1}{k}$, pero en la vencida el se realizará a la edad $x+n$, entonces:

$$a^{(k)}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{k}\big(1 - {}_nE_x\big)\,. \tag{2.16}$$

Diferidas vitalicias

Sea $_{m|}\,a_x$ una anualidad vencida, vitalicia, para la persona de edad x, diferida m años. Su expresión en conmutados está dada por:

$$_{m|}\,a_x = \frac{N_{x+m+1}}{Dx}\,. \tag{2.17}$$

Esta expresión se obtiene del desarrollo análogo a la anualidad anticipada diferida m años, que puede usted consultar en la página 33.

Diferidas temporales

Finalmente, $_{m|}\,a_{x:\overline{n|}}$ representa una anualidad vencida, para la persona de edad x, temporal n años, que se comenzará a pagar dentro de m años. Al desarrollar esta anualidad bajo el análisis utilizado para encontrar la expresión 2.11, se obtiene:

$$_{m|}\,a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+1+n}}{Dx}\,. \tag{2.18}$$

2.3. Pensiones

Un plan de pensiones es un conjunto de reglas que establecen derechos y obligaciones para otorgar una pensión al retiro. Donde la pensión es considerada un arreglo, normalmente financiero, de pagos a partir de condiciones preestablecidas.

Existen diversas formas de clasificar los planes de pensiones, comenzaremos por dividirlos en *planes públicos* y *planes privados*; enfocándonos, por la naturaleza de este trabajo, en los planes de pensiones privados.

Por otra parte, los planes de pensiones pueden ser de *contribución definida* o de *beneficio definido*. En los planes de contribución definida, tal como su nombre lo indica, la cantidad de dinero que se aporta al plan es conocida o definida pero el beneficio que se obtendrá no lo es. Mientras que en los planes de beneficio definido, el beneficio que otorga el plan de pensiones es conocido, pero las aportaciones que hay que hacer al plan no lo son. Es importante notar que el costo de un plan de contribución definida ya está determinado, pero el de un plan de beneficio definido no lo está.

La determinación del costo de un plan de pensiones es fundamental, es por ello que existen diversos métodos matemáticos para el cálculo de dicho costo. Estos métodos son llamados *métodos de costeo* y más adelante hablaremos de los principales.

Como se observa, el tema de las pensiones es muy extenso y podría ahondarse demasiado en la forma del cálculo de los beneficios, los métodos de costeo e incluso en la selección de las hipótesis actuariales, ya que como cita Arthur Anderson [5] "cuando escogemos los supuestos, estamos entrando al subjetivismo real del arte actuarial y dejando el mundo matemático y preciso de la ciencia actuarial"[1].

Sin embargo el principal objetivo de esta sección no es ahondar en estos temas, sino dar un panorama general de ellos para dejar planteada la teoría que se utilizará para la construcción del producto en capítulos posteriores. Cabe mencionar que la siguiente información es un enfoque personal que nos dará una guía de los pasos a seguir para la construcción de un plan de pensiones privado.

2.3.1. Proceso de formalización de un plan privado de pensiones

A continuación, enumeraremos los pasos a seguir para el proceso de formalización de un plan privado de pensiones. Posteriormente, se describirán con más detalle los dos primeros puntos de este proceso.

1. *Diseño*: es el proceso de definición de las políticas de la empresa con respecto al personal de edad avanzada.

2. *Valuación*: es el proceso de determinación de los costos del plan de pensiones.

3. *Implementación*: es el proceso de formalización de un plan de pensiones. Es aquí donde se elaboran los documentos legales y fiscales del plan.

4. *Comunicación*: es el proceso de divulgación de los términos y condiciones del plan.

[1] "...when we come to choosing assumptions we are entering the subjective realm of actuarial art and leaving the precise and mathematical world of actuarial science."

5. *Administración*: consiste en planear, organizar, dirigir y controlar el plan de pensiones.

Diseño

El diseño de un plan de pensiones, es una parte fundamental, ya que es el esqueleto del plan, siendo aquel que determina las características de la pensión que será otorgada, así como los derechos y las obligaciones que se contraen en dicho plan. Los siguientes puntos resumen de manera concisa los principales elementos a considerar para la construcción del diseño del plan.

1. *Grupo elegible*: es el sector de la empresa o el conjunto de personas a las que va dirigido el plan de pensiones.

2. *Requisitos de elegibilidad*: son las condiciones que se deben cumplir para que la membresía en el plan sea efectiva, i.e. una vez cumplidos los requisitos se deben empezar a financiar los derechos que se están adquiriendo para la pensión.

3. *Salario*: forma de definir la compensación para efectos del plan de pensiones. Puede ser considerado por:

   a) *Extensión.* Se dan las especificaciones de los elementos a considerar como son: salario base, aguinaldo, bono de productividad, vales, prima vacacional, etc.

   b) *Comprensión.* Se estable una "regla" a seguir. Por ejemplo, $Salario = Salario\ Base\left(\frac{13}{12}\right)$

4. *Salario pensionable*: forma de considerar el salario para efectos del plan de pensiones. Puede ser por:

   a) *Promedio de la carrera.*

   b) *Salario final.*

   c) *Promedio de los años inmediatos anteriores.*

5. *Servicios pensionables*: forma en la que se considerará la antigüedad para efectos del cálculo de la pensión correspondiente. Algunos de los más comunes son:

   a) *Años completos.* Por ejemplo, si se laboraron 15 años con 11 meses y 28 días, solo se considerarán 15 años de antigüedad.

   b) *Años y partes proporcionales.* Un ejemplo típico de este caso es el de la antigüedad para la pensión del IMSS, ya que si se cotizan menos de 13 semanas le corresponde el 0 % del año, de 13 a 26 semanas el 50 % y de 26 a 52 semanas el 100 % del año.

   c) *Años y meses completos.* Por ejemplo, si se laboraron 10 años con 3 meses y 20 días, se considerarán 10 años 3 meses de antigüedad.

6. *Monto del beneficio*: determina la forma de calcular el beneficio que otorga la pensión. Algunos ejemplos son:

   a) *Beneficio cerrado.* Consiste en fijar una cantidad, sin importar el salario percibido ni la anigüedad acumulada. Por ejemplo:
   $Pensión$ =\$5,000 mensuales.

   b) *Porcentaje nivelado de compensación.* El beneficio depende de la percepción pero no de la antigüedad. Por ejemplo:
   $Pensión = 80\,\% * Salario\ Pensionable.$

   c) *Crédito unitario.* Considera la percepción y la antigüedad para el cálculo del beneficio. Por ejemplo:
   $Pensión = 3\,\% * Salario\ Pensionable * Servicios\ pensionables.$

7. *Fechas y condiciones de retiro*: se establece una edad como la *edad normal* de retiro del plan y el resto de las edad son opcionales. Por ejemplo:

   a) *Retiro anticipado.* Es cuando se cumplen los requisitos para el retiro pero no se ha cumplido la edad normal de retiro.

   b) *Retiro diferido.* Es cuando la edad en la que se retira es mayor a la edad normal, puesto que se continuó trabajando para completar los requisitos de la pensión o por deseo.

8. *Formas y condiciones de pago*: se establece una forma de pago como la *forma normal de pago* del plan de pensiones y cualquier otra será una *forma opcional* con la característica de ser actuarialmente equivalente, es decir, una pensión con el mismo valor presente actuarial.

9. *Beneficios adicionales*: son los puntos extras o "pluses" de la pensión. Por ejemplo: gastos funerarios, gastos médicos, pagos de marcha, pensión para sobrevivientes, beneficios por invalidez, etc.

10. *Financiamiento*: definición del patrocinador o responsable del plan, i.e. quién o quiénes darán las aportaciones. El plan puede ser:

    a) *Contributorio.* Cuando aportan tanto el trabajador como la empresa.

    b) *No contributorio.* Cuando las aportaciones son hechas en su totalidad por la empresa.

Valuación

Así como el diseño es el esqueleto del plan de pensiones, la valuación son sus músculos, ya que es a través de ella como se moverá el plan de pensiones. Es decir, en la valuación sabremos cuales son las obligaciones, los costos y los gastos que genera el plan, para lo cual necesitamos tener cierta información y hacer una selección adecuada de las hipótesis requeridas. Lo que da lugar a los siguientes puntos:

1. *Recolección de la información*: obtención de la información personal de los trabajadores, como son nombre, sexo, RFC o CURP, fecha de ingreso a la empresa, fecha de afiliación al IMSS, salario base y salario integrado.
2. *Selección de las hipótesis actuariales*: son los elementos que determinarán la estimación de casos que generarán pagos de pensión.
   a) *Demográficas.* Como son la mortalidad, invalidez, rotación, mortalidad de invalidez, etc.
   b) *Económicas y financieras.* Como la tasa de descuento, la tasa de inflación, la tasa de interés, la tasa de crecimiento salarial y la tasa de crecimiento del salario mínimo entre otras.
3. *Selección del método de costeo actuarial*: es la forma de constituir el fondo y/o la reserva. La selección del método depende de las características del plan.
4. *Estimación de lsa obligaciones, costos y gastos*: se calculan a través del método seleccionado y la experiencia de años anteriores.
5. *Presentación de los resultados*: es aquí donde se dan las conclusiones finales que servirán de preámbulo para la implementación del plan.

2.3.2. Métodos de costeo actuarial

A continuación, definiremos un método de costeo actuarial y después desglozaremos las partes importantes de dicha definición. Un *método de costeo actuarial* es un programa racional y consistente de pagos a un fondo o de incremento a una reserva para consolidar los beneficios de un plan de pensiones.

Un método es *racional* ya que no importa que pase en el transcurso del tiempo, al llegar a la edad de retiro se debe tener el dinero necesario para cumplir con la obligación adquirida. Es *consistente* porque se asigna ordenadamente una cantidad de dinero a cada año. Y los pagos se hacen para *consolidar* los beneficios, ya que los recursos se reunen poco a poco.

Crédito unitario

Supongamos que cada empleado tiene derecho de retirarse a edad y con una pensión anual, que se le pagará mensualmente, igual a $B(y)$. Un plan financiado adecuadamente debería haber acumulado una cantidad suficiente para solventar el pago de la pensión de cada trabajador en edad de retiro, i.e. acumular $B(y)\ddot{a}_y^{(12)}$ para cada empleado que alcanzara la edad y. Este requisito es una premisa lógica de todos los métodos de costeo que veremos.

Observe que el beneficio del que hablamos anteriormente, $B(y)$, no surge de repente a la edad y, sino que se va generando o "acumulando" de una manera más o menos continua durante los años de servicio activo del empleado. Así, cuando se contrata al empleado, digamos a edad w, su beneficio acumulado $B(w)$ será igual a cero y cuando se retire a edad y, será $B(y)$; entonces en cualquier punto intermedio, donde tenga edad x tendrá un *beneficio acumulado* de $B(x)$.

A cualquier edad x, más temprana que la edad y, el valor presente del beneficio acumulado del empleado j es igual a $B^j(x)\,\ddot{a}^{(12)}_{y_j}\,\frac{D_y}{D_x}$. Cabe señalar que el factor D_y/D_x se calcula usando una tabla de decrementos múltiples, i.e. una tabla donde las q's representan las probabilidades de terminación de empleo anteriores a la edad y por cualquier causa.

Por lo tanto, si siempre tuviéramos una cantidad de activos igual a

$$\sum_{\forall j\,\in A_t} B^j(x)\,\ddot{a}^{(12)}_{y_j}\,\frac{D_y}{D_x}\,,$$

no importaría la distribución de edades al tiempo t, dentro del grupo de los empleados activos A_t, ya que tendríamos suficientes fondos para retirar $B(y)\,\ddot{a}^{(12)}_y$ a medida que cada trabajador alcanzara la edad y.[2] Aún en el caso de que todos los trabajadores tuvieran la misma edad y se retiraran al mismo tiempo.

En realidad no retiraremos el dinero para comprar una anualidad, pero la filosofía es la misma sin importar que medio de financiamiento sea usado. Para facilitar los desarrollos, supondremos que las personas retiradas se eliminan de las columnas de activo y pasivo de nuestro plan de pensiones. Posteriormente las volveremos a incluir, pero por ahora supondremos que tenemos dinero suficiente para comparar una pensión vitalicia para cada una de estas personas.

Dicha observación es la razón de la segunda premisa de este método de costeo, característica que lo distingue de los demás métodos. El equilibrio ideal del fondo o monto deseado de activos disponibles en cualquier tiempo t, es igual a $\sum_{A_t} B^j(x)\,\ddot{a}^{(12)}_y\,\frac{D_y}{D_x}$, donde A_t representa el conjunto de empleados activos al tiempo t, suponiendo que no tenemos empleados retirados en nuestro plan. A este equilibrio ideal del fondo se le conoce como *obligación acumulada*, a la cual denotaremos como AL por sus siglas en inglés[3]:

$$^{C.U.}AL_{\,t} = \sum_{A_t} B^j(x)\,\ddot{a}^{(12)}_y\,\frac{D_y}{D_x}\,. \tag{2.19}$$

En otras palabras, bajo el método de costeo de crédito unitario, la obligación acumulada se define como el *valor presente de los beneficios acumulados*. Esta definición es la que lo distingue del resto de los métodos de costeo e implica una definición completa del costo de pensión que debería asignarse a cualquier año dado.

Cabe resaltar que en este contexto se utiliza la palabra *pasivo* para denotar un nivel deseado de *activos*, aun cuando contablemente no sea tan claro. Esto se debe a que en la contabilidad financiera ordinaria, una compañia registra

[2] A partir de aquí, eliminaremos por practicidad el subíndice de y_j. Así mismo, en las sumas pondremos el conjunto sobre el cual se hará la suma en lugar de poner a los trabajadores que pertenecen a dicho conjunto, por ejemplo, pondremos A_t dando por hecho que el lector entiende que nos referimos a $\forall j \in A_t$.

[3] Accrued liability.

cada transacción dos veces - una de cada lado del balance- y por lo tanto, podríamos decir que sus "pasivos" son casi la suma de lo que en realidad deben a alguien más. Por el contrario, en la contabilidad de los seguros de vida, las primas recibidas no se registran en los dos lados del libro, sino solo como activos - los pasivos son determinados por una especie de inventario que es la valuación actuarial anual. Para una compañía de seguros de vida, un "pasivo" es un monto actuarialmente determinado, que tiene derecho prioritario sobre los *activos* invertidos de la compañía; aún cuando estrictamente hablando no es una cantidad que se le deba a alguien más - pero lo será si las bases de la reserva prueban ser ciertas- ese es el monto de *activos* que se debe tener separado para cualquier reclamación que pueda presentarse. De la misma forma, la obligación acumulada en un plan de pensiones representa un derecho sobre los activos del plan.

Año con año la obligación acumulada cambia, no sólo porque las edades de los participantes activos aumentan, sino también porque la composición del grupo de activos cambia. Para facilitar los cálculos, supondremos temporalmente que el grupo de activos es cerrado, i.e. que no hay nuevos participantes en el plan, a estos los pondremos en un fondo de pensiones aparte y nos ocuparemos de ellos más adelante. Con este supuesto, el grupo de activos no crecerá nunca, sino que sólo disminuirá durante el año. Definamos a T como el conjunto de empleados que terminan de trabajar entre el tiempo t y $t+1$; y a R como el conjunto de empleados que llegan a la edad de retiro y durante el año, entonces podemos escribir:

$$A_{t+1} = A_t - T - R\,. \tag{2.20}$$

A continuación, analizaremos la relación entre la obligación acumulada al tiempo t y la obligación acumulada al tiempo $t+1$; para lo cual necesitamos el siguiente lema.

Proposición 2.1. $\frac{D_y}{D_{x+1}} = \frac{D_y}{D_x}(1+i) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right)$.

Demostración. Sabemos que $q_x = 1 - p_x$, entonces $p_x + q_x = 1$; multipliquemos el lado izquierdo de la igualdad por este 1.

$$\begin{aligned}
\frac{D_y}{D_{x+1}} &= \frac{D_y}{D_{x+1}}(p_x+q_x) = \frac{D_y}{D_{x+1}}\,p_x + \frac{D_y}{D_{x+1}}\,q_x \\
&= \frac{D_y}{V^{x+1}\,l_{x+1}}\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right) = \frac{D_y}{V^{x+1}}\left(\frac{1}{l_x}\right) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right) \\
&= \frac{D_y}{D_x}\left(\frac{1}{V}\right) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right) = \frac{D_y}{D_x}(1+i) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right)
\end{aligned}$$

□

Tenemos que la obligación acumulada al tiempo $t+1$ es

$$\begin{aligned}
{}^{C.U.}AL_{t+1} &= \sum_{A_{t+1}} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}, \qquad \text{sustituyendo 2.20,} \\
&= \sum_{A_t} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{T+R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}},
\end{aligned}$$

por el lema 2.1,

$$\begin{aligned}
{}^{C.U.}AL_{t+1} &= \sum_{A_t} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \left[\frac{D_y}{D_x}\big(1+i\big) + q_x\left(\frac{D_y}{D_{x+1}}\right)\right] \\
&\quad - \sum_{T+R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \\
&= \sum_{A_t} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}\big(1+i\big) + \sum_{A_t} q_x\, B^j(x+1)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \\
&\quad - \sum_{T+R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}},
\end{aligned}$$

sea ΔB^j el incremento en el j-ésimo beneficio acumulado durante el año. Lo cual implica que $B^j(x+1) = B^j(x) + \Delta B^j$, entonces

$$\begin{aligned}
{}^{C.U.}AL_{t+1} &= \sum_{A_t} \left[B^j(x) + \Delta B^j\right] \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}\big(1+i\big) + \sum_{A_t} q_x\, B^j(x+1)\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} \\
&\quad - \sum_{T+R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}},
\end{aligned}$$

reordenando términos y por definición de AL_t, véase 2.19, tenemos:

$$\begin{aligned}
{}^{C.U.}AL_{t+1} &= \left[AL_t + \sum_{A_t} \Delta B^j\, \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}\right]\big(1+i\big) \\
&\quad - \left[\sum_{T} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}} - \sum_{A_t} q_x\, B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}\right] \\
&\quad - \sum_{R} B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+1}}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Recuerde que D_y/D_x se debe calcular usando una tabla donde las q's representen la probabilidad de retiro del grupo de trabajadores activos en cada edad, no solamente la probabilidad de muerte. Es decir, las D_x's deben ser tomadas de la *tabla de servicios*.

Analicemos el segundo término entre paréntesis de la ecuación 2.21. Si la experiencia real concuerda con la experiencia esperada, este término será igual a cero. Esto quiere decir que la liberación de pasivos esperada, debida a la terminación de empleo antes de la edad y por cualquier causa, excepto retiro (segunda suma), compensará exactamente el monto actual de la obligación acumulada, liberada debido a los empleados que si terminaron, es decir, quienes fueron miembros del conjunto T. También, si la experiencia real y la supuesta concuerdan, el saldo del fondo ideal, AL_t, será el fondo más los intereses ganados por el mismo, $AL_t(i)$, menos el dinero retirado para la compra de las anualidades, $\sum_R B^j(x+1)\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}$. Por lo tanto, si las hipótesis se cumplen, se tendrá que agregar al principio de cada año un monto igual a:

$$^{C.U.}NC_t = \sum_{A_t} \Delta B^j\,\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x} = \sum_{A_t} {}^{C.U.}NC_t^j\,, \tag{2.22}$$

para aumentar el saldo del fondo al nivel adecuado al tiempo $t+1$. A este monto se le llamada *costo normal* del plan, porque es el costo de mantener el fondo de pensiones al nivel deseado, si las hipótesis se cumplieron y si los activos del fondo igualan a la obligación acumulada; en otras palabras, éste es el costo bajo circunstancias “normales”. Este costo normal es el valor presente del incremento en los beneficios acumulados entre el tiempo t y el tiempo $t+1$, y es una única suma que se supone será pagada al tiempo t. Aunque en realidad, el costo normal nunca es pagado al tiempo t ya que la valuación no ha sido finalizada para dicha fecha puesto que recolectar toda la información y realizar los cálculos correspondientes generalmente toma semanas.

El costo normal no refleja propiamente el costo total del plan, excepto en el caso ideal; que es cuando el saldo del fondo es exactamente igual al obligación acumulada y las hipótesis modelan perfectamente la realidad. En la vida real, (a) la experiencia real no concuerda exactamente con las hipótesis en un año dado, y (b) el saldo del fondo no es igual a la obligación acumulada; ya sea porque cuando se estableció el plan se concedieron beneficios por servicios pasados y la obligación acumulada comenzó en algún valor distinto de cero, o porque el plan tuvo buena suerte (en relación con las hipótesis) a través de los años y existen en el fondo activos superiores a la obligación acumulada (o una mala experiencia provocó, que la obligación acumulada superara a los activos). Por lo tanto, a pesar de que el componente central del costo de la pensión es el costo normal, debe haber ajustes en el costo para permitir las variaciones con respecto al caso ideal.

Supongamos ahora que el saldo del fondo al tiempo t es F_t pero en esta ocasión quitemos la hipótesis de que el saldo del fondo es exactamente igual a AL_t . A lo largo del año, entre el tiempo t y $t+1$, el saldo del fondo aumentará en una cantidad I, atribuible al rendimiento de inversiones y a las contribuciones al fondo, denotadas por C; y disminuirá en las sumas retiradas para “comprar” las pensiones, sea P dicha cantidad. Tenemos entonces que:

$$F_{t+1} = F_t + I + C - P\,. \tag{2.23}$$

La diferencia entre la obligación acumulada y el saldo del fondo al momento t, dada por $AL_t - F_t$, es llamada *obligación acumulada no financiada.* Para referiremos a la "obligación acumulada no financiada" usaremos simplemente el término "no financiado". Cabe mencionar que en algunas literaturas cuando el no financiado es negativo se le conoce como *superávit*, sin embargo nosotros no usaremos este término.

Crédito unitario proyectado

Existe una variación importante del método del crédito unitario, la cual es conocida como *crédito unitario proyectado*. Esta variación, consiste en tomar en cuenta el crecimiento salarial para el cálculo de la obligación acumulda y el costo normal.

Sea k la tasa de crecimiento salarial, anual. Entonces la obligación acumulada estará dada por:

$$^{C.U.P}AL_t = \sum_{A_t} B^j(x)\,[1+k]^{\,y-x}\, \ddot{a}_y^{(12)}\, \frac{D_y}{D_x}\,, \tag{2.24}$$

mientras que el costo normal para el año t será:

$$^{C.U.P}NC_t = \sum_{A_t} \Delta B^j\ [1+k]^{\,y-x}\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}\,. \tag{2.25}$$

Edad de entrada

Bajo el método de crédito unitario, los costos normales individuales tienden a aumentar más rápido que el salario, cuando éste es la base del beneficio. Esto significa que en general el costo normal del plan en su totalidad hará lo mismo, sólo hasta el punto en que los nuevos participantes del grupo disminuyan el costo normal promedio (porque son jóvenes y quizá tienen un salario bajo). De este modo, por medio del crédito unitario es posible mantener un costo que sea nivelado como un porcentaje de la nómina, lo que en general es una circunstancia inestable, en el aspecto de que si disminuyen las nuevas contrataciones, el promedio de edad se elevará y el costo normal se revertiría a su tendencia básica, i.e. a aumentar más rápido que la nómina.

Recuerde que el crédito unitario se basa en la premisa de que la obligación acumulada debe de ser igual al valor presente de los beneficios acumulados, en todo momento y durante la carrera del empleado hasta su retiro. Partiendo de esta premisa, las definiciones de costo normal y ganancia actuarial se siguen directamente como corolarios. El hecho de que el costo normal tuviera esta característica indeseable - la tendencia de aumentar mas rápido que la paga - fue por lo tanto, el resultado de la manera como se construyó el método. Sin embargo, es posible eliminar este inconveniente definiendo el costo normal directamente y dejando que la obligación acumulada sea el corolario; y de esta manera construiremos el método de costeo de *edad de entrada*.

En el caso más simple, donde el beneficio se expresa como una cantidad fija de dinero, la cual no tiene relación con el salario, el costo normal bajo el método de edad de entrada se define como una contribución anual nivelada, tal que el valor presente de todos los costos normales futuros a edad w (edad de entrada que para los propósitos de este capítulo será la misma que la edad al momento de la contratación) es exactamente igual al valor presente de los benéficos futuros a la edad w, es decir:

$$B^j(x)\,\ddot{a}_y^{(12)}\,\frac{D_y}{D_w} = {}^{E.E}NC^j\left[\frac{N_w - N_y}{D_w}\right], \tag{2.26}$$

donde ${}^{E.E}NC^j$ es el costo normal del empleado j. Entonces,

$${}^{E.E}NC_t = \sum_{A_t} {}^{E.E}NC_t^j = \sum_{A_t} B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_w - N_y}, \tag{2.27}$$

así como en el método anterior, el factor $D_y/(N_w - N_y)$ se basa en la tabla de servicios. Por consiguiente, bajo este método como bajo el método de crédito unitario, el costo normal total es simplemente la suma de muchos costos normales individuales.

Observe que esta definición no tiene el problema del aumento exponencial de los costos normales y que, en tanto $B^j(y)$ - que es el beneficio proyectado - no cambie, el costo normal permanece constante para cada individuo a lo largo de su carrera. Aunque en la vida real, $B^j(y)$ es re-estimado cada año y en el grado que aumente, el costo normal aumentará; pero solo en proporción al aumento en $B^j(y)$, porque el factor $D_y/(N_w - N_y)$ no depende de la edad actual x.

Es fácil demostrar que la obligación acumulada bajo el método de costeo de crédito unitario es el valor presente de los costos normales anteriores. Este resultado es consecuencia de la definición de obligación acumulada, pero para el método actuarial de edad de entrada, hacemos de ésta la definición de obligación acumulada. Es decir, definamos la obligación acumulada para el empleado j, como valor presente de sus costos normales anteriores:

$${}^{E.E}AL_t^R = \sum_{A_t} {}^{E.E}NC^j\left[\frac{N_w - N_x}{D_x}\right] = \sum_{A_t} B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}\left[\frac{N_w - N_x}{N_w - N_y}\right], \tag{2.28}$$

donde el superíndice R denota que la obligación acumulada es calculada bajo el método retrospectivo. Así mismo la obligación acumulada puede verse como el valor presente de los beneficios futuros, menos el valor presente de los costos normales futuros, lo que da lugar a otra expresión de la obligación acumulada, conocida como obligación acumulada bajo el método prospectivo:

$${}^{E.E}AL_t^P = \sum_{A_t} B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x} - \sum_{A_t} {}^{E.E}NC^j\left[\frac{N_x - N_y}{D_x}\right]. \tag{2.29}$$

Veamos a través de la siguiente proposición que ambas expresiones de la obligación acumulada son equivalentes.

Proposición 2.2. ${}^{E.E}AL_t^R \equiv {}^{E.E}AL_t^P$.

Demostración. Observa que esta equivalencia se cumplirá si para cada trabajador j, tenemos la siguiente igualdad:

$$B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}\left[\frac{N_w - N_x}{N_w - N_y}\right] = B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x} - {}^{E.E}NC^j\left[\frac{N_x - N_y}{D_x}\right],$$

pero esta igualdad efectivamente se cumple, ya que:

$$\begin{aligned}
&B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x} - {}^{E.E}NC^j\left[\frac{N_x - N_y}{D_x}\right], \quad \text{sustituyendo } {}^{E.E}NC^j \text{ de 2.27},\\
&= B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x} - \left(B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_w - N_y}\right)\left[\frac{N_x - N_y}{D_x}\right]\\
&= B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}\left[1 - \frac{N_x - N_y}{N_w - N_y}\right] = B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}\left[\frac{N_w - N_y - N_x + N_y}{N_w - N_y}\right]\\
&= B^j(y)\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_x}\left[\frac{N_w - N_x}{N_w - N_y}\right].
\end{aligned}$$

□

Si intentáramos definir de manera formal a la obligación acumulada, como el valor presente de los costos normales anteriores, tendríamos que explicar a todo el mundo, porque no pudimos tomar los costos normales reales, calculados a través de los años, y reunirlos de alguna forma para obtener así la obligación acumulada. Es por ello que surge la definición prospectiva de la obligación acumulada, ya que ésta hace que todo se pueda explicar de manera más sencilla; sin embargo es importante conocer ambas definiciones de la obligación acumulada y saber que son equivalentes.

Prima individual nivelada

Tanto el método de crédito unitario como el de edad de entrada, se construyeron bajo la premisa de que el monto de activos *deseado* a la edad y fuera igual al valor presente de la pensión a esa edad. Al nivel deseado de activos en cualquier etapa más temprana se le llamó obligación acumulada. Y ciertamente, si los activos reales del fondo son iguales a la obligación acumulada - es decir, si no existe obligación acumulada no financiada - el monto deseado de activos estará disponible a medida que cada empleado se retire, sin tener en cuenta el patrón real en el momento de esos retiros (dando por hecho, claro está, que las hipótesis actuariales fueron correctas). Aún cuando exista una obligación acumulada no financiada, si ésta es amortizada en un periodo de tiempo razonable, no habrá problemas de solvencia, porque el valor presente de los beneficios futuros seguirá siendo igual al valor presente de las contribuciones futuras al fondo. Sin embargo, esto no dice nada acerca del *corto plazo*. Es posible tener el valor presente de los beneficios futuros igual al valor presente de las contribuciones futuras ¡y aún así tener un fondo negativo por un cierto periodo de tiempo! Esta posibilidad debe enfrentarse cuando existe una parte no financiada.

En muchos planes, quizá en los planes de pensiones de los grandes corporativos, el problema es mitigado al no tener que retirar una cantidad global al retiro para comprar una anualidad, porque el plan paga las pensiones mes a mes directamente del fondo. Esto facilita los requerimientos de liquidez de manera considerable, y en la mayoría de estas situaciones, nunca surge el problema de la solvencia aún cuando exista una obligación acumulada no financiada.

Por otro lado, muchos planes permiten rutinariamente que las pensiones se conviertan en sumas globales al retiro, y otros se financian con contratos de seguros que requieren la compra de una anualidad, a costo de prima única, al retiro. Lo que necesitamos para situaciones como éstas, donde la liquidez a corto plazo es un problema, es un método de costeo que acumule no solamente la cantidad apropiada al retiro, sino que garantice la solvencia en todo momento en virtud de no tener nunca una obligación acumulada no financiada (excepto quizá por incidentales pérdidas actuariales). Una manera de solucinar este problema es usar el método de edad de entrada, definiendo la edad de entrada no como la edad al momento de la contratación sino como la edad en la fecha en que el plan entra en vigencia (usando la edad al momento de la contratación solamente para aquellos contratados después de la fecha efectiva).

De esta manera, no habría obligación acumulada no financiada al inicio; el problema es que si una parte sustancial de la obligación acumulada se atribuyera a un solo individuo (como por ejemplo, en un plan que cure solamente a un médico y a su enfermera), el plan podría tener pérdidas importantes debidas a un aumento en los salarios superior al anticipado.

Un método de costeo que aborda estos dos aspectos, es el de la *prima individual nivelada*. Éste método financia el beneficio proyectado de cada persona con "primas niveladas" a lo largo de sus años de participación real en el plan, y comienza con una obligación no financiada igual a cero.

El método de prima individual nivelada, comienza en el primer año de operación del plan con un costo normal calculado de la misma manera que en el método de edad de entrada, es decir, usando una edad de entrada x, que es la edad alcanzada en la fecha efectiva del plan. Esto es, que requiere que el coso normal sea un monto nivelado pagadero a partir de la edad alcanzada hasta la edad de retiro, lo que proveerá los fondos suficientes para "comprar" el beneficio:

$$NC_0^j \; \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} = B_t^j(y) \; \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \,,$$

de donde obtenemos que el costo normal al tiempo $t = 0$ es:

$$\begin{aligned} NC_0^j &= B_0^j(y) \; \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \left[\frac{1}{\ddot{a}_y^{(12)}} \right] \\ &= B_0^j(y) \; \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x} \left[\frac{N_x - N_y}{D_x} \right]^{-1} \\ &= B_0^j(y) \; \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{N_x - N_y} \,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observe, que la ecuación del costo normal bajo este método, es igual a la ecuación 2.27 evaluada en cero, es decir, es equivalente al costo normal bajo el método de costeo de edad de entrada en el momento cero. La diferencia surge al siguiente año (al tiempo 1, suponiendo que el plan se establece al tiempo 0). Cuando estimamos de nuevo $B^j(y)$, *no* permitimos que el costo normal sea definido por

$$B^j_{t+1}(y)\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{N_x - N_y} = NC^j_t + \Delta B^j\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{N_x - N_y}\,,$$

como lo haríamos bajo el método de edad de entrada. En lugar de ello, definiremos el costo normal como el costo normal calculado al tiempo 0 más un incremento, calculado como un nuevo pago nivelado, suficiente para financiar el aumento en el beneficio $(\Delta B)^j_1$ de la nueva edad alcanzada. Dicho incremento es

$$(\Delta NC)^j_1 = (\Delta B)^j_1\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{N_{x+1} - N_y}\,, \tag{2.31}$$

por lo que costo normal al tiempo $t = 1$ está dado por

$$NC^j_1 = NC^j_0 + (\Delta NC)^j_1\,. \tag{2.32}$$

Observe que el método de prima nivelada individual, tiene la misma primera premisa que el de crédito unitario y el de edad de entrada, es decir, que la cantidad $B^j\ \ddot{a}^{(12)}_y$ será acumulada para cada individuo al retiro. Note que hemos eliminado el argumento (y) de B^j_t para evitar confusiones.

Bajo el método de crédito unitario, definimos la obligación acumulada y permitimos que el costo normal fuera la consecuencia de dicha definición, pero aquí, al igual que en el método de edad de entrada, hemos definido el costo normal y en base a esta definición encontraremos la obligación acumulada para cada momento t.

A la fecha efectiva del plan (tiempo 0), la obligación acumulada es idénticamente cero, por definición de costo normal, es decir $AL^j_0 \equiv 0$. Pero al tiempo $t = 1$, la obligación acumulada debe ser igual al valor presente de los beneficios futuros menos el valor presente de los costos normales futuros:

$$AL^j_1 \quad = \quad B^j_1\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{D_{x+1}} - NC^j_1\ \ddot{a}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}\,,$$

sustituyendo los costos normales 2.30 y 2.32 tenemos

$$\begin{aligned} AL^j_1 \quad &= \quad \left[B^j_0 + (\Delta B)^j_1\right]\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{D_{x+1}} \\ &\quad -\left[B^j_0\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{N_x - N_y} + (\Delta B)^j_1\ \ddot{a}^{(12)}_y \frac{D_y}{N_{x+1} - N_y}\right] \frac{N_{x+1} - N_y}{D_{x+1}}\,; \end{aligned}$$

donde $(\Delta B)_1^j \equiv B_1^j - B_0^j$. Prosigamos a reducir esta ecuación,

$$\begin{aligned}
AL_1^j &= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} + (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} \\
&\quad -B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_x - N_y}\frac{N_{x+1}-N_y}{D_{x+1}} - (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}} \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}\left[1 - \frac{N_{x+1}-N_y}{N_x - N_y}\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}\left[\frac{N_x - N_y - N_{x+1} + N_y}{N_x - N_y}\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+1}}\left[\frac{N_x - N_{x+1}}{N_x - N_y}\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_x - N_y}\left[\frac{D_x}{D_{x+1}}\right].
\end{aligned}$$

$$\therefore AL_1^j = NC_0^j\ \frac{D_x}{D_{x+1}}\,. \tag{2.33}$$

Al tiempo $t = 2$ agregamos otro incremento en el costo normal igual a

$$(\Delta NC)_2^j \quad = \quad \underbrace{(B_2^j - B_1^j)}_{(\Delta B)_2^j}\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_{x+2} - N_y}\,, \tag{2.34}$$

con lo que obtenemos:

$$NC_2^j \quad = \quad NC_0^j + \Delta NC_1^j + \Delta NC_2^j\ . \tag{2.35}$$

Como la obligación acumulada está definida como el valor presente de los beneficios futuros menos el valor presente de los costos normales futuros, hagamos el mismo procedimiento

$$\begin{aligned}
AL_2^j &= B_2^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+2}} - NC_2^j\ \ddot{a}_{x+2:\overline{y-(x+2)|}}, \quad \text{sustituyendo 2.35} \\
&= \left[B_0^j + (\Delta B)_1^j + (\Delta B)_2^j\right]\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+2}} \\
&\quad -\left[NC_0^j + (\Delta NC)_1^j + (\Delta NC)_2^j\right]\ \ddot{a}_{x+2:\overline{y-(x+2)|}},
\end{aligned}$$

distribuyendo términos, desarrollando la anualidad y sustituyendo 2.30, 2.31 y 2.34 tenemos

$$AL_2^j \quad = \quad B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+2}} \ + \ (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+2}} \ + \ (\Delta B)_2^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{D_{x+2}}$$

$$-\left[B_0^j\ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_x - N_y} + (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_{x+1} - N_y} + (\Delta B)_2^j\ \ddot{a}_y^{(12)}\frac{D_y}{N_{x+2} - N_y}\right]\frac{N_{x+2} - N_y}{D_{x+2}}\,,$$

$$\begin{aligned}
AL_2^j &= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[1 - \frac{D_{x+2}}{N_x - N_y}\left(\frac{N_{x+2} - N_y}{D_{x+2}}\right)\right] \\
&\quad + (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[1 - \frac{D_{x+2}}{N_{x+1} - N_y}\left(\frac{N_{x+2} - N_y}{D_{x+2}}\right)\right] \\
&\quad +(\Delta B)_2^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[1 - \frac{D_{x+2}}{N_{x+2} - N_y}\left(\frac{N_{x+2} - N_y}{D_{x+2}}\right)\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[\frac{D_{x+2}(N_x - N_y - N_{x+2} + N_y)}{D_{x+2}(N_x - N_y)}\right] \\
&\quad + (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[1 - \frac{N_{x+2} - N_y}{N_{x+1} - N_y}\right] \\
&\quad +(\Delta B)_2^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[1 - 1\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[\frac{N_x - N_{x+2}}{N_x - N_y}\right] \\
&\quad + (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[\frac{N_{x+1} - N_y - N_{x+2} + N_y}{N_{x+1} - N_y}\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[\frac{D_x + D_{x+1}}{N_x - N_y}\right] + \ (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_{x+2}} \left[\frac{N_{x+1} - N_{x+2}}{N_{x+1} - N_y}\right] \\
&= B_0^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{N_x - N_y} \left[\frac{D_x + D_{x+1}}{D_{x+2}}\right] + \ (\Delta B)_1^j\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{N_{x+1} - N_y} \left[\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}\right] \\
&= NC_0^j \left[\frac{D_x + D_{x+1}}{D_{x+2}}\right] + \ (\Delta NC)_1^j \left[\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}\right] \\
&= NC_0^j\ \frac{D_x}{D_{x+2}} + \left(NC_0^j + \ (\Delta NC)_1^j\right) \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} \\
&= NC_0^j\ \frac{D_x}{D_{x+1}} \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} + \ NC_1^j\ \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} = AL_1^j\ \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} + \ NC_1^j\ \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} \, ,
\end{aligned}$$

$$\therefore AL_2^j = (\ AL_1^j + \ NC_1^j\ )\ \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} \, . \tag{2.36}$$

Aplicando inducción sobre el tiempo, vemos que para cada $t > 0$,

$$AL_{t+1}^j = (AL_t^j + NC_t^j)\, \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \, , \tag{2.37}$$

determina la obligación acumulada al tiempo t para el método de costeo de prima individual nivelada.

Agregado

Este método, también conocido como colectivo, a diferencia de los que hemos visto hasta ahora no tiene que tratar con el problema de la obligación no financiada, al menos inicialmente, puesto que el costo anual del plan es exactamente igual al costo normal, sin componentes adicionales que representen la amortización o ganancia del capital inicial no financiado. Partiendo de este supuesto el costo normal puede representarse como un porcentaje de la nómina, es decir,

$$NC_t = k\,\%\ (\textit{Nómina anual})\,,$$

por lo que

$$k\,\% \ = \frac{VPBT_x - Fondo_x}{VPSF_x}\,, \tag{2.38}$$

donde $VPSF_x$ es el *Valor Presente de los Sueldos Futuros a edad* x y $VPBT_x$ es el *Valor Presente de los Beneficios Totales a edad* x.

Claramente $VPBT_x$ es el valor presente de la suma de los costos de las pensiones vitalicias de los trabajadores, es decir:

$$VPBT_x = \sum_{A_t} B(y)\ \ddot{a}_y^{(12)} \frac{D_y}{D_x}\,. \tag{2.39}$$

Sea S_x el sueldo mensual del trabajador a edad x y supongamos que la tasa anual de incremento salarial es j y que el último incremento al salario se realiza un año antes del retiro, i.e., a edad $y-1$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} VPSF_x &= \sum_{A_t} S_x(12) + S_{x+1}(12)\frac{D_{x+1}}{D_x} + \cdots + S_{y-1}(12)\frac{D_{y-1}}{D_x} \\ &= \sum_{A_t} S_x(12) + S_x(1+j)(12)\frac{D_{x+1}}{D_x} + \cdots + S_x(1+j)^{y-x-1}(12)\frac{D_{y-1}}{D_x} \\ &= \sum_{A_t} S_x(12)\left[1 + (1+j)\frac{D_{x+1}}{D_x} + \cdots + (1+j)^{y-x-1}\frac{D_{y-1}}{D_x}\right]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Con estas dos definiciones queda determinado el porcentaje k y con ello el costo normal, observe que por construcción k debe ser calculado de manera anual.

De la ecuación 2.38 vemos que, como se había mencionado al principio, este método no tienen el problema de la falta de financiamiento puesto que el término $VPBT_x - Fondo_x$ refleja el financiamiento que se hace año con año de las pérdidas actuariales, en caso de que existan.

Capítulo 3

MANEJO Y COBERTURA DE CARTERAS

Cuando se hace una inversión, usualmente el capital inicial que se invertirá es conocido pero la cantidad que se obtendrá de regreso no lo es. Estudiaremos un poco de estas situaciones en el presente capítulo, restringiéndonos al caso de un solo período de inversión, i.e. el dinero se invierte al inicio del período y la ganancia es obtenida al final del mismo.

El suponer que una situación de inversión comprende un solo período es a veces una buena aproximación, por ejemplo: una inversión en un bono cupón cero con el cual se permanecerá hasta su maduración o una inversión en un proyecto físico el cual no dará pagos hasta que esté terminado.

Sin embargo, muchas inversiones comunes, como las acciones comercializables públicamente, no están sujetas a un simple período puesto que pueden ser liquidadas en cualquier momento que se desee y quizá den rendimientos periódicamente; a pesar de ello, dichas inversiones frecuentemente son analizadas en base a un solo período como simplificación.

Así que trataremos con la incertidumbre a través del análisis media-varianza, que es un método matemático que utiliza la teoría de probabilidad de manera básica. Para mayores referencias de este capítulo puede usted consultar el sexto capítulo de Luenberger [23].

3.1. Rendimiento de un activo

Esta sección tiene como objetivo definir lo que es un activo, un portafolio y explicar como calcular los rendimientos de ambos.

Un instrumento de inversión que puede ser comprado o vendido es comúnmente llamado *activo*. Supongamos que se compra un activo en el tiempo cero y que un año más tarde será vendido, el *rendimiento total* de dicha inversión estará definido por:

$$R = \frac{X_1}{X_0}\,, \tag{3.1}$$

donde R es el rendimiento total, X_0 la cantidad invertida y X_1 la cantidad recibida. Generalmente, por simplicidad el término *rendimiento* es usado en lugar del término *rendimiento total*.

La tasa de rendimiento, a la que denotaremos como r, es:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}\,. \tag{3.2}$$

Así mismo, se acostumbra a usar la expresión *rendimiento* en lugar de *tasa de rendimiento*. Sin embargo, generalmente el contexto define claramente de que rendimiento se está hablando; y nosotros lo podremos distinguir ya que usaremos mayúsculas, R, para referirnos al rendimiento total y minísculas, r, para referirnos a la tasa de rendimiento.

De 3.1 y 3.2 es claro ver la siguiente relación:

$$R = 1 + r\,,$$

y que 3.2 puede ser re-escrita como:

$$X_1 = (1 + r)X_0\,,$$

lo cual nos muestra que una tasa de rendimiento se comporta muy similar a una tasa de interés.

3.1.1. Rendimiento del portafolio

Supongamos que se tienen disponibles n activos diferentes. Entonces podemos formar un *activo maestro* o *portafolio*, con esos n activos. Supongamos que esto se hace aportando una cantidad X_0 entre los n activos; cuando seleccionamos las cantidades $X_{0,1}, X_{0,2}, \cdots, X_{0,n}$, tienen que satisfacer la condición de que $\sum_{i=1}^{n} X_{0,i} = X_0$, donde $X_{0,i}$ representa la cantidad invertida en el i-ésimo activo. Si la venta en corto está permitida, entonces algunos $X_{0,i}$'s pueden ser negativos, pero si no está permitida la venta en corto, entonces los restrigiremos de ser negativos.

Debido a que las cantidades invertidas pueden ser expresadas como fracciones de la inversión toatal, podemos escribirlas como:

$$X_{0,i} = w_i\,X_0\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, n\,,$$

donde w_i es el *peso* o la fracción del activo i en el portafolio. Claramente $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, y algunos w_i's pueden ser negativos si la venta en corto está permitida.

Sea R_i el rendimiento total del activo i. Entonces, la cantidad de dinero generada al final del periodo por el activo i-ésimo será $R_i\,X_{0,i} = R_i\,w_i\,X_0$. Por lo tanto, el rendimiento total del portafolio es:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i\, w_i\, X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i\, R_i\,,$$

y dado que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, tenemos que

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i\,.$$

3.2. Media y varianza del portafolio

En esta sección estableceremos los supuestos con los que se trabajará a lo largo del capítulo. Construiremos un portafolio y veremos como se calculan tanto la media como la varianza de dicho portafolio.

Posteriormente se definirá el proceso de diversificación, que se traduce en términos comunes al dicho popular “no pongas todos tus huevos en una sola canasta” y cuantificaremos sus efectos en el portafolio.

Por último, veremos como se representa gráficamente un portafolio de acuerdo a sus principales atributos, media y varianza, y caracterizaremos las regiones que resultan de dicha gráfica.

3.2.1. Media del rendimiento del portafolio

Supongamos que hay n activos con tasas de rendimientos aleatorias r_1, r_2, $\ldots$, r_n, cuyos valores esperados son $E(r_1) = \bar{r}_1$, $E(r_2) = \bar{r}_2$, $\ldots$, $E(r_n) = \bar{r}_n$. Construyamos un portafolio con estos n activos usando los pesos w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tenemos entonces que la tasa de rendimiento del portafolio, dada en términos de las tasas de rendimientos individuales, está dada por:

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n\,. \tag{3.3}$$

Sacamos el valor esperado de ambos lados y recordando que la esperanza es una función lineal obtenemos:

$$\begin{aligned} E(r) &= w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \cdots + w_n E(r_n) \\ &= w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + \cdots + w_n \bar{r}_n\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observamos entonces que la tasa de rendimiento esperada del portafolio se obtiene mediante la suma ponderada de las tasas de rendimiento individuales, por lo que encontrar el rendimiento esperado del portafolio será fácil una vez que tengamos las tasas de rendimiento esperadas individuales de cada activo con el que compusimos el portafolio.

3.2.2. Varianza del rendimiento del portafolio

Determinemos ahora la varianza del rendimiento del portafolio, a la cual denotaremos como σ^2. Así mismo denotemos como σ_i^2 a la varianza del rendimiento del activo i y como σ_{ij} a la covarianza del rendimiento del activo i con el activo j. Tenemos entonces que:

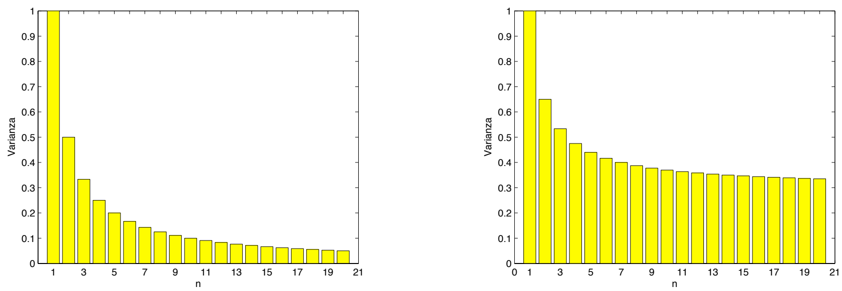
$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(r-\bar{r})^2] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E\big[w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j E\big[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Este resultado es importante pues muestra como la varianza del rendimiento de un portafolio puede ser calculada fácilmente mediante las covarianzas de los rendimientos de los activos, en pares, y los pesos de los activos usados en la construcción del portafolio.

3.2.3. Diversificación

Los portafolios con pocos activos pueden estar sujetos a un mayor grado de riesgo, representado por una varianza relativamente grande. Como regla general, la varianza del rendimiento de un portafolio se puede reducir agregando activos adicionales al portafolio, este proceso es conocido como *diversificación*. La diversificación se traduce en términos comunes al dicho popular: “no pongas todos tus huevos en una sola canasta”.

Los efectos de la diversificación pueden ser cuantificados usando las fórmulas para combinar varianzas. Por ejemplo, supongamos que hay muchos activos que no están mutuamente relacionados, i.e. el rendimiento de cada activo no



a) Activos no correlacionados b) Activos correlacionados

Figura 3.1: **Efectos de la diversificación.** Si los activos no están correlacionados, la varianza de un portafolio puede hacerse muy pequeña. Si los activos están correlacionados positivamente, el límite inferior que puede alcanzar la varianza será menor.

está relacionado con ningún otro rendimiento de activo en el grupo, y que la tasa de rendimiento de cada uno de estos activos tiene media m y varianza σ^2.

Construyamos ahora un portafolio con partes iguales de estos n activos; esto es, $w_i = 1/n$ para cada i, se sigue de 3.3 que la tasa de rendimiento del portafolio es $r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$. Y de 3.4 que el valor medio de ésta es $\bar{r} = m$, que es independiente de n. Usando el hecho de que los rendimientos individuales no están relacionados, la varianza correspondiente será:

$$var(r) \; = \; \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \, .$$

Es claro ver entonces que la varianza decrece rapidamente mientras n crece, como se muestra en la gráfica de la figura 3.1, que nos muestra la varianza como función de n, el número de activos (cuando $\sigma^2 = 1$).

La situación es un poco distinta si los rendimientos de los activos disponibles están correlacionados. Por ejemplo, supongamos nuevamente que cada activo tiene una tasa de rendimiento con media m y varianza σ^2, pero que ahora cada pareja de rendimientos tiene covarianza $cov\,(r_i, r_j) = k\sigma^2$ para $i \neq j$. Otra vez formamos el portafolio con partes iguales de los n activos y en este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
var(r) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(r_i-\bar{r})\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{n^2}E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(r_j-\bar{r})\right]\right\}\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=j}\sigma_{ij}+\sum_{i\neq j}\sigma_{ij}\right\}\\
&= \frac{1}{n^2}\{n\sigma^2+k(n^2-n)\sigma^2\}\\
&= \frac{\sigma^2}{n}+k\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{(1-k)\sigma^2}{n}+k\sigma^2\,.
\end{aligned}$$

Tomemos $k=0.3$, $\sigma^2=1$ y comparemos la gráfica de los activos correlacionados, gráfica a) figura 3.1, con la gráfica de los activos no correlacionados, gráfica b) figura 3.1. Este análisis de diversificación es muy básico, pues hemos supuesto que todas las tasas de rendimiento esperadas son iguales. En general la diversificación reduce el rendimiento esperado global al reducir la varianza.

Mucha gente no quiere sacrificar demasiado rendimiento esperado por pequeñas disminuciones en la varianza, así que dejan de lado la diversificación, sin entender su influencia tanto en la media como en la varianza del rendimiento, lo cual no es aconsejable. Está es la razón detrás del desarrollo de Markowitz, el encontrar un equilibrio entre la media y la varianza.

De cualquier forma, la parte importante de este simple análisis es aprender que si los rendimientos no están correlacionados es posible, a través de la diversificación, reducir la varianza del portafolio casi a cero tomando una n grande. Inversamente, si los rendimientos están correlacionados positivamente es más difícil reducir la varianza y quizá haya un menor límite de reducción para ésta.

3.2.4. Diagrama de un portafolio

Supongamos que dos activos son representados en un diagrama de media y desviación estándar. Estos dos activos pueden ser combinados, de acuerdo a algunos pesos, para formar un portafolio, que es un nuevo activo activo. La media y desviación estándar de la tasa de rendimiento de este nuevo activo pueden ser calculadas de las esperanzas, varianzas y covarianzas de los rendimientos de los activos originales. Sin embargo, como las covarianzas no son mostradas en el diagrama, la posición exacta del punto que representa al nuevo activo, no puede ser determinada de la posición en el diagrama de los dos activos originales, por lo que hay muchas posibilidades dependiendo de la covarianza de los rendimientos de estos activos.

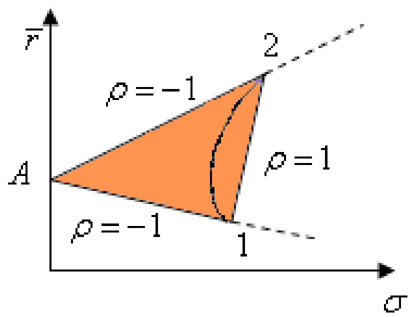


Figura 3.2: **Combinación de dos activos.** Cuando dos activos son combinados de varias formas, los portafolios resultantes trazan una curva entre los puntos que representan los activos originales. Esta curva debe encontrarse en la región triangular sombreada.

Analizaremos las posibilidades de la siguiente forma, empecemos con dos activos como se indica en la gráfica de la figura 3.2, después definimos una familia entera de portafolios mediante la introducción de la variable α, que define los pesos como $w_1 = 1 - \alpha$ y $w_2 = \alpha$. Entonces, como α varía entre 0 y 1, el portafolio va de uno que contiene solamente activo 1 a uno que contiene una mezcla de los activos 1 y 2, y de éste último a uno que tiene solamente activo 2. Los valores de α fuera del rango $0 \leq \alpha \leq 1$ hace que uno u otro de los pesos sean negativos, lo que corresponde a la venta en corto.

Mientras α varía, los nuevos portafolios trazan una curva que incluye activos 1 y 2. Esta curva se verá mas o menos como la curva que se muestra en la gráfica de la figura 3.2, pero su forma exacta depende de σ_{12}. La parte sólida de la curva corresponde a lats combinaciones positivas de los dos activos; la parte punteada corresponde a la venta en corto de uno de ellos (el que está en el extremo opuesto de la curva sólida). De hecho, puede demostrarse que la porción sólida de la curva debe estar dentro de la región sombreada que se muestra en la figura, i.e. debe caer en la región triangular definida por los vértices 1, 2 y un punto A en el eje vertical. Establezcamos pues, esta propiedad formalmente.

Lema del diagrama de portafolio. *En un diagrama $\bar{r}\sigma$, la curva definida por una mezcla no negativa de dos activos 1 y 2 está contenida en la región triangular definida por los dos activos originales y el punto en el eje vertical de altura* $A = \frac{\bar{r}_1\sigma_2 + \bar{r}_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$.

Demostración. La tasa de rendimiento del portafolio definido por α es:

$$r(\alpha) = (1 - \alpha)r_1 + \alpha r_2 \,,$$

y el valor medio de este rendimiento es:

$$\bar{r}(\alpha) = (1 - \alpha)\bar{r}_1 + \alpha\bar{r}_2 \,. \tag{3.6}$$

Lo cual nos dice que el valor esperado está entre las esperanzas originales, en proporción directa de las proporciones de los activos. Por ejemplo, en una mezcla de activos 50 %-50 %, la nueva esperanza estará a la mitad de las esperanzas originales. Calculemos ahora la desviación estándar del portafolio. Sabemos que,

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} + \alpha^2\sigma_2^2}\ .$$

Usando la definición de coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$, esta ecuación puede ser escrita como

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2}\ .$$

Para calcular los límites de esta expresión recordamos que ρ está en un rango de $-1 \leq \rho \leq 1$. Usando $\rho = 1$ tenemos que el límite superior es

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)^* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{\{(1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2\}^2} \\
&= (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2\ .
\end{aligned}$$

Análogamente usemos $\rho = -1$ para obtener el límite inferior

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha)_* &= \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{\{(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2\}^2} \\
&= |\,(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2\,|\ .
\end{aligned}$$

Observa que el límite superior es lineal en α, como la expresión para el valor esperado en 3.6. Si usamos estas dos expresiones lineales, podemos deducir que tanto la media como la desviación estándar se mueven proporcionalmente a α, tomando valores entre $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, dado $\rho = 1$. Esto implica que mientras α varía entre 0 y 1, el punto que representa al portafolio trazará una línea recta entre ambos puntos; ésta es la línea directa entre 1 y 2 indicada en la gráfica de la figura 3.2.

La expresión del límite inferior es casi lineal, excepto por el valor absoluto. Cuando α es pequeño, el término dentro del valor absoluto tiene signo positivo así que lo podemos remplazar por el término $(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2$. Este término será positivo hasta $\alpha = \sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2)$, después del cual el signo será negativo, por lo que el valor absoluto se convierte en $\alpha\sigma_2 - (1-\alpha)\sigma_1$. El revertimiento ocurre en el punto A dado por la expresión en la posición establecida. Las dos expresiones lineales junto con la expresión lineal para la esperanza, implican que el límite inferior trace la curva mostrada en la gráfica de la figura 3.2.

Por todo lo anterior, concluimos que la curva trazada por los puntos que representan al portafolio está contenida en la región sombreada y que para un valor intermedio de ρ, se ve como la curva mostrada.

3.3. El conjunto factible

Supongamos ahora que hay n activos básicos. Podemos graficarlos como puntos en el diagrama media-desviación estándar, luego imaginemos que formamos

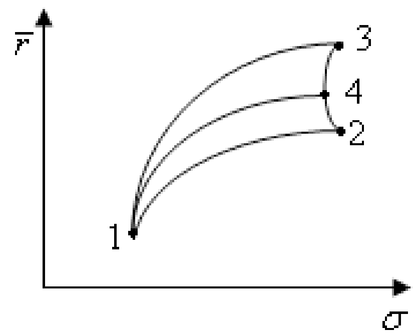


Figura 3.3: *Tres puntos forman una región.* Las combinaciones de los activos 2 y 3 trazan una curva entre ellos. La combinación de uno de estos activos, por ejemplo el 4, junto con el activo 1 traza otra curva. La familia de estas curvas forman una región sólida.

portafolios de estos n activos, usando cada esquema de pesos posible, entonces hay portafolios de cada uno de los n activos solos, combinaciones de dos activos, combinaciones de tres activos y así sucesivamente de todas las combinaciones de los n. Estos portafolios se forman al dejar variar los coeficientes w_i en todas sus combinaciones posibles con la única restricción de que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

El conjunto de puntos que corresponden a los portafolios es llamado *conjunto factible* o *región factible*. Dicho conjunto se puede definir de dos maneras, permitiendo la venta a corto plazo de los activos o no permitiéndola. Sin importar cual de estas definiciones se tome, el conjunto factible satisface las siguientes dos propiedades:

1. Si hay al menos tres activos (no correlacionados perfectamente y con medias diferentes), el conjunto factible será una región sólida bidimencional.

   La gráfica de la figura 3.3 nos muestra porque la región será sólida. Hay tres activos básicos: 1, 2 y 3. Sabemos que cualesquiera dos activos trazan una curva entre ellos cuando se van formando las combinaciones de los portafolios. Las tres curvas entre los tres pares posibles se muestran en la gráfica de la figura 3.3. Si la combinación de los activos 2 y 3 forma el activo 4, éste puede ser combinado con el activo 1 para formar una línea que conecte al activo 1 con el 4. Como el activo 4 se mueve entre el 2 y el 3, la línea entre los activos 1 y 4 traza una región sólida.

2. La región factible es convexa a la izquierda.

   Lo que significa que dados cualesquiera dos puntos en la región, la línea recta que los une no cruza el límite izquierdo de la región factible. Esto se sigue del hecho de que todos los portafolios, con pesos positivos, formados de la combinación de dos activos, están sobre la línea que los conecta o a su izquierda. Una región factible típica es mostrada en la gráfica de la figura 3.4.

En general, la región factible definida al permitir la venta a corto plazo contiene a la región definida al no permitirla, como se muestra en la gráfica de la figura 3.4.

3.3.1. El conjunto de mínima varianza y la frontera eficiente

El límite izquierdo del conjunto factible es llamado el *conjunto de mínima varianza* puesto que para cualquier valor de la tasa de rendimiento esperada, el punto factible con la menor varianza (o desviación estándar) es el correspondiente punto límite izquierdo. El conjunto de mínima varianza tiene la forma muy característica de bala, como se muestra en la gráfica de la figura 3.5 de lado izquierdo. Un punto especial de este conjunto es aquel que tiene mínima varianza, y por cuya característica recibe su nombre *punto de mínima varianza*, al que denotaremos como PMV por sus siglas.

Supongamos que el portafolio que un inversionista puede escoger está restringido a los puntos factibles que están en una línea horizontal en el plano $\bar{r}\sigma$. Todos los portafolios en esta línea tienen la misma tasa de rendimiento esperada pero diferentes desviaciones estándares (o varianzas) por lo cual muchos inversionistas preferirán el portafolio correspondiente al punto más a la izquierda de la línea, ésto es, el punto con la menor desviación estándar para una misma esperanza. Un inversionista de este tipo es llamado *averso al riesgo*, puesto que busca minimizar el riesgo (medido por la desviación estándar).

Se dice que un inversionista *prefiere riesgo* si selecciona un portafolio representado por un punto distinto que aquel con mínima desviación estándar. Nosotros nos enfocaremos al análisis de los inversionistas aversos al riesgo, i.e. aquellos que prefieren minimizar la desviación estándar y por lo cual están interesados en los puntos del conjunto de mínima varianza.

Así mismo, consideremos los portafolios que se encuentran sobre una línea vertical, i.e. los portafolios con una desviación estándar fija y distintos valores esperados. Muchos inversionistas preferirán el punto más alto de tal línea, en otras palabras, escogerán el portafolio con mayor valor esperado para un mismo nivel de desviación estándar. Este tipo de inversionistas es denominado *insatisfechos*, nombre que refleja la idea de que los inversionistas siempre quieren más dinero, es por ello que quieren el mayor rendimiento esperado posible para una desviación estándar dada.

Estos argumentos implican que solo la parte superior del conjunto de mínima varianza, llamada *frontera eficiente*, será de interés para los inversionistas que son aversos al riesgo e insatisfechos. En la figura 3.5 de lado derecho podemos ver una gráfica de la frontera eficiente, la cual está formada por los portafolios que proveen las mejores combinaciones de media-varianza para los inversionistas antes mencionados. Por lo anterior, limitaremos nuestra investigación a esta frontera, en particular la siguiente sección explica como calcular los puntos de la misma.

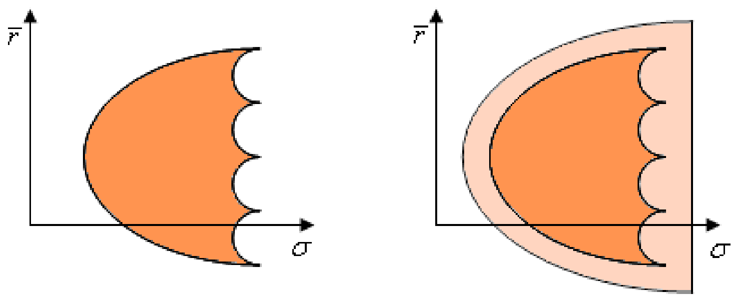


Figura 3.4: *Regiones factibles.* La región factible es el conjunto de todos los puntos que representan los portafolios hecho de n activos originales. Dos tipos de regiones pueden ser definidas: no permitiendo venta en corto (a la izquierda) y permitiendo venta en corto (a la derecha)

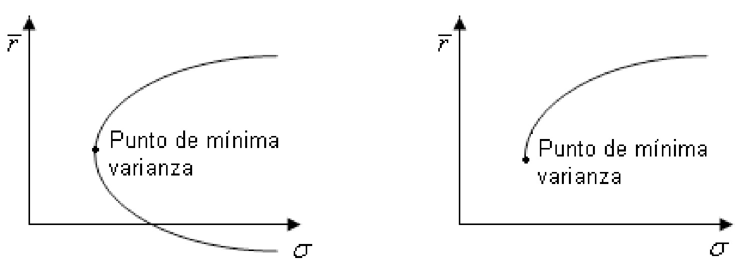


Figura 3.5: *Conjuntos especiales.* El conjunto de mínima varianza tiene la forma característica de bala. El punto de mínima varianza es el punto con la varinza más baja posible. La frontera eficiente es la parte superior dela porción del conjunto demínima varianza.

3.4. El modelo de Markowitz

Estamos ahora en posición de formular el problema matemático asociado a los portafolios de mínima varianza, para ello supongamos de nuevo que tenemos n activos, que las tasas de rendimiento esperado[1] son $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_n$ y que las covarianzas son σ_{ij} para $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Un portafolio es definido por un conjunto de n pesos $w_1, w_2, \cdots, w_n$, tales que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$; sin importar que $w_i < 0$, puesto que los pesos negativos corresponden a las ventas a corto plazo.

Para encontrar un portafolio de mínima varianza fijaremos un valor arbitrario, $\bar{r}$, para el valor esperado, posteriormente encontraremos el portafolio factible de mínima varianza que tenga dicho valor esperado. Lo que nos lleva a formular el siguiente problema:

$$\begin{array}{rll} \textit{minimizar} & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} & w_i w_j \sigma_{ij}\,, \\ \textit{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} & w_i \bar{r}_i = \bar{r}\,, \\ & \sum_{i=1}^{n} & w_i = 1\,. \end{array}$$

El factor $\frac{1}{2}$ que multiplica a la varianza es solo por conveniencia, pues simplificará la forma de las ecuaciones.

El problema de Markowitz provee el fundamento para la teoría de inversiones que duran un solo período. Este problema vincula directamente la búsqueda del equilibrio entre la tasa de rendimiento esperada y la varianza de la misma en un portafolio. Una vez que el problema de Markowitz es formulado, puede resolverse numéricamente para obtener una solución específica. Sin embargo, también es útil resolver el problema analíticamente ya que se obtienen algunas conclusiones adicionales que son importantes. El problema de Markowitz es usado principalmente cuando están disponibles un activo libre de riesgo y activos riesgoso; cabe resaltar que la existencia de un activo libre de riesgo simplifica enormemente la naturaleza del conjunto factible y también la solución analítica.

3.4.1. Solución del problema de Markowitz

Podemos encontrar las condiciones para la solución de este problema usando los *multiplicadores de Lagrange* λ y μ.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \alpha_{ij} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i - \bar{r}\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right).$$

Después derivamos el lagrangiano respecto a cada variable w_i e igualamos la derivada a cero. Por simplificación resolveremos el caso de dos variables, ya que el caso de n variables será tan solo una generalización de éste.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(w_1^2\sigma_1^2 + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_1 \sigma_{21} + w_2^2 \sigma_2^2) - \lambda\left(\bar{r}_1 w_1 + \bar{r}_2 w_2 - \bar{r}\right) \\ &\quad - \mu\left(w_1 + w_2 - 1\right). \end{aligned}$$

[1] En algunos textos reciben el nombre de tasas medias de rendimiento

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial w_1} &= \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 w_1 + \sigma_{12}w_2 + \sigma_{21}w_2) - \lambda\bar{r}_1 - \mu\,, \\
\frac{\partial L}{\partial w_2} &= \frac{1}{2}(\sigma_{12}w_1 + \sigma_{21}w_1 + 2\sigma_2^2 w_2) - \lambda\bar{r}_2 - \mu\,.
\end{aligned}
$$

Usando el hecho de que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, e igualando estas derivadas a cero, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 w_1 + \sigma_{12}w_2 - \lambda\bar{r}_1 - \mu &= 0\,, \\
\sigma_{21}w_1 + \sigma_2^2 w_2 - \lambda\bar{r}_2 - \mu &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Estas dos ecuaciones junto con las dos ecuaciones que teníamos de las condiciones nos da un total de cuatro ecuaciones, cuyas cuatro incógnitas son w_1, w_2, λ y μ. Conociendo ya la forma del problema para dos variables, podemos generalizarlo para n.

Ecuaciones para el conjunto eficiente. *Los n pesos del portafolio $w_1, \cdots, w_n$ y los dos multiplicadores de Lagrange λ y μ para un portafolio eficiente, donde la la venta en corto es permitida, y cuya tasa de rendimiento esperada es $\bar{r}$ satisfacen*

$$
\sum_{j=1}^{n} \sigma_j w_j - \lambda\bar{r}_i - \mu = 0\,, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3.7}
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i\bar{r}_i = \bar{r}\,, \tag{3.8}
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,. \tag{3.9}
$$

Observemos que hay n ecuaciones en 3.7, una de 3.8 y otra en 3.9, lo que nos dan un total de $n + 2$ ecuaciones que es igual al número de incógnitas $w_1, w_2, \cdots, w_n$, λ y μ. La solución de estas ecuaciones dará como resultado los pesos para construir un portafolio eficiente con media $\bar{r}$. Es importante resaltar que las $n + 2$ ecuaciones son lineales, lo cual facilitará su solución a través de métodos lineales.

3.4.2. Condiciones no negativas

En los desarrollos anteriores, los signos de las variables w_i no tenían restricciones, lo cual significa que la venta en corto estaba permitida. Sin embargo, podemos prohibir la venta en corto restringiendo la posibilidad de que w_i tome valores negativos para $i = 1, \cdots, n$. Lo cual da lugar a una propoción alternativa del problema de Markowitz:

$$\textit{minimizar} \quad \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij}\,, \tag{3.10}$$

$$\textit{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i\, \bar{r}_i = \bar{r}\,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,, \tag{3.12}$$

$$w_i \geq 0\,, \;\; \textit{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3.13}$$

Desafortunadamente este sistema no puede ser reducido a un sistema de ecuaciones lineales, sin embargo en la actualidad existen softwares especializados en resolver este tipo de sistemas que son llamados *programas cuadráticos* puesto que el objetivo es cuadrático y las condiciones son igualdades y desigualdades lineales.

La gran diferencia entre las dos formulaciones del problema de Markowitz radica en que cuando la venta en corto es permitida, muchos o quizá todos los w_i's tendrán valores distintos de cero, ya sean positivos o negativos, así que en esencia todos los activos son usados. En contraste con esto, en la formulación que no permite la venta en corto, usualmente muchos pesos serán iguales a cero.

3.5. Teorema de los dos fondos

El conjunto de mínima varianza tiene una importante propiedad que simplifica considerablemente el cálculo de su solución computacional. Recordando que los puntos en este conjunto satisfacen el sistema de $n+2$ ecuaciones lineales [ecuaciones 3.7, 3.8 y 3.9] que son:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j w_j - \lambda \bar{r}_i - \mu = 0\,, \qquad \textit{para } i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,.$$

Supongamos que hay dos soluciones conocidas, $w^1 = (w_1^1, w_2^1, \ldots, w_n^1)$, λ^1, μ^1 y $w^2 = (w_1^2, w_2^2, \ldots, w_n^2)$, λ^2, μ^2, con tasas de rendimiento esperadas $\bar{r}^1$ y $\bar{r}^2$ respectivamente. Formemos una combinación multiplicando el primero por α y el segundo por $(1-\alpha)$. Si sustituimos directamente, observamos que el resultado es también una solución de las $n+2$ ecuaciones, con su correspondiente valor esperado $\alpha\bar{r}^1 + (1-\alpha)\bar{r}^2$. Ahora veamos que efectivamente $\alpha w^1 + (1-\alpha) w^2$ es un portafolio.

1. Debido a que sus pesos suman 1 tenemos que 3.9 se satisface.

2. El rendimiento esperado es $E[\alpha w^1+(1-\alpha)w^2] = \alpha E[w^1]+(1-\alpha)E[w^2] = \alpha\bar{r}^1 + (1-\alpha)\bar{r}^2$ de lo cual se satisface 3.8 .

3. Finalmente, como ambas soluciones hacen cero el lado izquierdo de 3.7, las combinaciones de estas soluciones también lo hacen, por lo que también se satisface 3.7 .

Esto implica que el portafolio combinado $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$ también es una solución, es decir, también representa un punto en el conjunto de mímina varianza. Usando este resultado , supongamos que w^1 y w^2 son dos portafolios diferentes en el conjunto de mínima varianza, entonces mientras α varía entre $-\infty < \alpha < \infty$, los portafolios definidos por $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$ barreran todo el conjunto de mínima varianza.

Podemos escoger las dos soluciones originales como soluciones eficientes, i.e. en la parte superior del conjunto de mínima varianza, y esto generará el resto de los puntos eficientes, así como los otros puntos del conjunto de mínima varianza. Este resultado generalmente es planteado de una forma que tiene significado operacional para los inversionistas:

Teorema de los dos fondos. *Dos fondos eficientes, portafolios, pueden ser establecidos de tal forma que cualquier portafolio eficiente puede ser duplicado, en términos de media y varianza, como una combinación de estos dos. En otras palabras, todos los inversionistas que buscan portafolios eficientes solo necesitan invertir en combinaciones de estos dos fondos.*

Este resultado tiene dramáticas implicaciones, por ejemplo, dos fondos mutualistas[2] podrían proveer un servicio de inversión completo para cada uno, por lo cual no habría necesidad para nadie de comprar activos individuales de manera separada, podrían simplemente comprar acciones en los fondos mutualistas. Sin embargo, esta conclusión se hace pensando en que lo único que les interesa a todos es la media y la varianza, además de hacerse bajo el marco de que un solo período es apropiado para ello.

Otra implicación de este teorema es en el ámbito computacional, ya que para resolver las ecuaciones 3.7, 3.8 y 3.9 para todos los valores de $\bar{r}$ solamente es necesario encontrar dos soluciones y luego formar las combinaciones de estas dos. Una forma simple de encontrar dos soluciones particulares es especificando los valores de λ y μ; algunas elecciones convenientes son: (a) $\lambda = 0$, $\mu = 1$ y (b) $\lambda = 1$, $\mu = 0$. En cualquiera de estas soluciones la condición $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ quizá sea violada, pero esto puede remediarse después, normalizando los w_i's a través de un factor a escala común. La solución que se obtiene de (a) ignora la

[2]Un fondo mutualistas es un una compañía inversionista que acepta capital de inversión de otros individuos y reinvierte este capital en una diversidad de activos individuales. Cada individuo recibe un título de la parte proporcional del valor de los fondos del portafolio que le corresponde, así como de comisiones y costos de operación aunque menos ciertos estos últimos dos.

condición de la tasa media de rendimiento esperada, por lo cual éste es el punto de mínima varianza.

3.6. Inclusión de un activo libre de riesgo

En las secciones anteriores hemos supuesto implícitamente que los n activos disponibles son riesgosos, i.e. que $\sigma > 0$. Un *activo libre de riesgo* tiene un rendimiento determinista, es decir, conocido con certeza, lo que implica que $\sigma = 0$. En otras palabras, un activo libre de riesgo es un instrumento productor de intereses y su inclusión en el portafolio corresponde a pedir prestado o prestar dinero con la tasa libre de riesgo. Prestar (como en la compra de un bono) corresponde a tener un peso positivo en el activo libre de riesgo y pedir prestado corresponde a un peso negativo en el mismo.

La inclusión de un activo libre de riesgo en la lista de posibles activos es necesaria para un panorama realista ya que los inversionitas, indudablemente, tienen la oportunidad de pedir prestado o prestar. Afortunadamente, como veremos en seguida, la inclusión de un activo libre de riesgo introduce una degeneración matemática que simplifica enormemente la forma de la frontera eficiente. Para explicar la condición degenerativa supongamos que hay un activo libre de riesgo con una tasa de rendimiento (determinista) r_f, y consideremos cualquier otro activo riesgoso con tasa de rendimiento r, que tiene media $\bar{r}$ y varianza σ^2. Observe que la covarianza de estos dos rendimientos es cero, pues $cov(r, r_f) = E[(r - E[r])(r_f - E[r_f])] = E[(r - \bar{r})(r_f - r_f)] = E[0] = 0\,.$

Supongamos que estos dos activos son combinados para formar un portafolio usando un peso α para el activo libre de riesgo y $(1-\alpha)$ para el activo riesgoso, con $0 < \alpha \leq 1$, tenemos entonces que la tasa media de rendimiento de este portafolio será $\alpha\, r_f + (1-\alpha)\,\bar{r}$ y la desviación del rendimiento $\sqrt{(1-\alpha)^2\sigma^2} = (1-\alpha)\,\sigma$, puesto que el activo libre de riesgo no tiene varianza ni covarianza con el activo riesgoso, quedando en la fórmula solamente el término correspondiente al activo riesgoso.

Si por un momento definimos $\sigma_f = 0$ vemos que la tasa de rendimiento del portfolio tiene:

$$\begin{aligned} media &= \alpha\, r_f + (1-\alpha)\,\bar{r}\,, \\ desviación\ estándar &= \alpha\,\sigma_f + (1-\alpha)\,\sigma. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones muestran que tanto la media como la desviación estándar del portafolio varían linealmente a α, lo cual significa que mientras α varía, el punto representando al portafolio traza una línea recta en el plano $\bar{r}\,\sigma$.

Supongamos que hay n activos riesgosos con tasas medias de rendimiento conocidas $\bar{r}_i$ y covarianzas conocidas σ_{ij} . Supongamos además, que hay un activo libre de riesgo con tasa de rendimiento r_f . La inclusión del activo libre de riesgo en la lista de activos disponibles tiene un profundo efecto en la forma de la región factible que se observa en la gráfica de lado izquierdo de la figura 3.6. Primero construimos la región factible ordinaria definida por los n activos

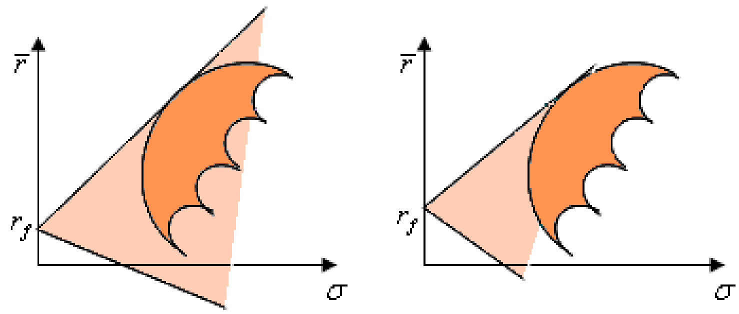


Figura 3.6: *Efectos de un activo libre de riesgo.* La inlcusión de un activo libre de riesgo agrega líneas a la región factible. De la izquierdo se permite prestar y pedir prestado, se obtiene una región triangular infinita. De lado derecho solo se permite prestar, la región triangular está limitada pero se curvará para una σ mayor.

riesgosos, ya sea permitiendo o no la venta en corto, esta región es la que región oscura de la figura; después para cada activo (o portafolio) en esta región formamos combinaciones con el activo libre de riesgo. En la formación de estas combinaciones permitimos prestar o pedir prestado activo libre de riesgo, pero solamente comprar activo riesgoso. Estas nuevas combinaciones trazan una recta infinita originada en el punto libre de riesgo, que pasa por los activos riesgosos y continua indefinidamente. Hay una recta de este tipo para cada activo en la región factible original y la totalidad de estas rectas forma una región factible triangular, que está sombreada de color claro en la figura. Entonces, como resultado, la región factible es un triángulo infinito cuando un activo libre de riesgo es incluido en el universo de activos disponibles.

Si no está permitido el pedir prestado activo libre de riesgo (no hay venta en corto de este activo), podemos colindar solamente los segmentos de línea finitos entre el activo libre de riesgo y los puntos en la región factible original. No podemos extender estas líneas más lejos puesto que permitiría el préstamo de activo libre de riesgo. La inclusión de estos segmentos de línea finitos da lugar a una nueva región factible con un línea recta por frontera, pero una parte superior redondeada, como se muestra en la gráfica de la figura 3.6 de lado derecho.

3.7. Teorema de un fondo

Cuando se tiene la opción de prestar y pedir prestado activo libre de riesgo, el conjunto eficiente será una sola línea recta, que es la frontera superior de la región factible triangular. Esta línea es tangente al conjunto factible original de activos riesgosos, véase la gráfica de la figura 3.7. Además, habrá un punto F en el conjunto factible original que está en el segmento de línea que define la frontera del conjunto eficiente.

Es claro que cualquier punto eficiente (cualquier punto en la línea) puede

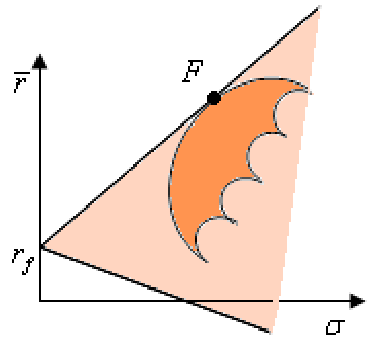


Figura 3.7: *Teorema de un fondo.* Cuando pedir prestado y prestar a la tasa libre de riesgo están permitidos, existe un único fondo F de activos riesgosos que es eficiente. Todos los puntos en la frontera eficiente son combinaciones del fondo F y el activo libre de riesgo.

ser expresado como una combinación de estos activos y el activo libre de riesgo, ya que obtendremos diferentes puntos eficientes al ir cambiando los pesos entre estos dos (incluyendo pesos negativos del activo libre de riesgo para pedir prestado dinero con motivo de comprar activos riesgosos).

El portafolio representado por el punto tangente puede pensarse como un fondo conformado por activos, al cual para venderse se le trata como una unidad. Para concluir esta sección, y con ello la teoría de portafolio media-varianza, estableceremos el rol que desempeña este fondo a través de un teorema. Posteriormente veremos como se calcula el punto eficiente especial F.

Teorema de un fondo. *Existe un único fondo de activos riesgosos F, tal que cualquier portafolio eficiente puede ser construido como una combinación del fondo F y el activo libre de riesgo.*

Encontremos ahora la solución para este teorema. Podemos caracterizar a F, el punto tangente que representa al fondo eficiente, en términos de un problema de optimización. Dado un punto en la región factible, dibujemos una línea entre el activo libre de riesgo y ese punto, denotemos el ángulo entre esa línea y el eje horizontal como θ. Para cada portafolio riesgoso posible p tenemos:

$$tan\, \theta = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}.$$

El portafolio tangente es el punto factible que maximiza θ, o equivalentemente que maximiza $tan\, \theta$, entonces este problema se reduce a encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Para encontrar la solución, supongamos que hay n activos riesgosos a los cuales les asignamos los pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$, de tal forma que $\sum_{1=1}^{n} w_i = 1$. Observe que el activo libre de riesgo tendrá un peso igual a cero en el fondo tangente y que estamos permitiendo la venta en corto pra los activos riesgosos. Para $r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i$, tenemos $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\, \bar{r}_i$ y $r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_f$. Entonces,

$$tan\,\theta = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\,(\bar{r}_i - r_f)}{\left[\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\, w_i\, w_j\right]^{1/2}}\,.$$

Si multiplicamos todos los w_i's por una constante, la expresión no cambiará puesto que la constante se cancela, entonces no es necesario imponer la condición de que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Derivando $tan\theta$ respecto a cada w_k e igualando a cero, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}\,\lambda\, w_i = \bar{r}_k - r_f\,, \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

donde λ es una constante desconocida. Haciendo la sustitución $v_i = \lambda\, w_i$ para cada i, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}\, v_i = \bar{r}_k - r_f\,. \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Resolviendo estas ecuaciones lineales para las v_i's y normalizando, se determinan los valores de $w_1,\, w_2,\, \ldots, w_n$; esto es:

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{k=1}^{n} v_k}\,. \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Capítulo 4

DERIVADOS Y RIESGO DE CRÉDITO

En este capítulo veremos lo que son los productos derivados y adentraremos un poco en esta teoría moderna, que en los últimos años ha aumentado de importancia en el mundo de las finanzas. Actualmente estos productos financieros son comerciados activamente en muchas transacciones por instituciones financieras, administradores de fondos y corporaciones, en lo que es llamado el mercado sobre el mostrador[1]

En la segunda parte de este capítulo seguiremos el desarrollo de la conocida fórmula de Black-Scholes, para posteriomente ocuparla en la valuación del riesgo de crédito a través del modelo de Merton.

4.1. Productos derivados

Un producto derivado, también conocido como derivado, es un instrumento financiero cuyo valor se deriva, o depende, del valor de otras variables subyacentes. Muy frecuentemente, las variables subyacentes de los derivados son el precio de los activos comerciados; por ejemplo, el precio de una opción sobre acción depende del precio de una acción. Sin embargo, como veremos mas adelante, los derivados pueden depender de casi cualquier variable, desde el precio de los cerdos hasta de la cantidad de nieve que esté cayendo en un determinada localidad turística. Cabe mencionar que los derivados frecuentemente dependen de un bono o una acción emitida.

Los derivados juegan un papel importante en el comercio diario, puesto que proveen herramientas efectivas para la cobertura de riesgos que envuelven las variables subyacentes. Por ejemplo, un negocio que involucra tratar con grandes cantidades de azúcar - quizá un productor de azúcar, un procesador o un comerciante- típicamente enfrenta riesgos sustanciales asociados con las posibles

[1]Conocido en inglés como *over the counter market*.

fluctuaciones del precio de la azúcar, sin embargo estos usuarios pueden controlar ese riesgo a través de los productos derivados, en este caso en particular, a través del uso de contratos futuros de azúcar. De hecho, la función principal de los productos derivados en un portafolio (para negocios, instituciones o individuos) es la de controlar el riesgo.

4.1.1. Contratos forward

Un derivado particularmente simple es el caso del contrato forward, también llamado forward. Un *forward* es un acuerdo de compra o venta de un activo en un determinado tiempo futuro a un cierto precio. Puede ser comparado con un *contrato spot*, que es un acuerdo para comprar o vender un activo el día de hoy.

Los forward son comerciados en el mercado sobre el mostrador, usualmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes. Una de las partes del contrato forward asume una *posición larga* y acepta comprar el activo subyacente en una fecha futura específica por un precio determinado y la otra parte del contrato asume una *posición corta* y acepta vender el activo en la misma fecha por el mismo precio.

El precio de un contrato forward es conocido como *precio de ejercicio*. En el momento en el que se realiza el contrato, el precio de ejercicio se escoge de tal forma que el valor del contrato para ambas partes sea cero, lo cual significa que no cuesta nada tomar una posición corta o larga.

Los contratos forward son usados comúnmente para cubrir el riesgo que involucra el tipo cambio extranjero. Supongamos que es 18 de enero de un determinado año y que el tesoro de una corporación Estados Unidos sabe que recibirá un millón de libras esterlinas en tres meses (el 18 de abril) y quiere cubrirse del riesgo de la tasa de cambio. Para ello podría contactar a un banco, informarse de que la tasa de cambio para un contrato forward de tres meses de libras esterlinas es de 1.6, y acordar vender un millón de libras. La corporación tendrá entonces un contrato forward de libras esterlinas en posición corta, pues ha acordado que el 18 de abri venderá un millón de libras esterlinas; por su parte el banco tendrá un contrato forward en posición larga, pues ha acordado que el 18 de abril comprará un millón de libras esterlinas por $1.6 millones. Ambas partes han hecho un compromiso vinculado.

Precio forward

El *precio forward* para un contrato forward particular en una fecha particular es el precio de ejercicio que aplicaría si el contrato se realizara en ese tiempo. En nuestro ejemplo, el 18 de enero el precio forward es de 1.6 para un contrato forward que involucra el ejercicio de esterlinas[2] en abril 18.

Es importante distinguir entre el precio forward y el precio de ejercicio, ya que cuando el contrato es realizado ambos precios son iguales, pero en tiempos posteriores tienden a ser diferentes. En el ejemplo de cambio de divisas, tanto el precio forward como el precio de ejercicio es de 1.6 el 18 de enero, para un

[2] Se usarán equivalentemente los términos libras esterlinas, esterlinas y libras.

contrato con fecha de ejercicio el 18 de abril. Sin embargo, considerando la situación en febrero 18, cuando el contrato forward ha tenido una existencia de un mes; el precio de ejercicio en el contrato forward es aún de 1.6 pero el precio forward es el precio de la libra esterlina en febrero 18 para un contrato forward (de 2 meses) con fecha de ejercicio el 18 de abril. En general, el precio forward no será de 1.6 ya que si la tasa de cambio de la libra esterlina ha aumentado entre el 18 de enero y el 18 de febrero, el precio tenderá a ser mayor a 1.6; pero si la tasa de cambio de la libra esterlina ha disminuido entre estas fechas, tenderá a ser menor a 1.6.

El precio forward de un contrato usualmente depende de la fecha de maduración. La tabla 4.1.1 nos muestra las tasas de cambio verdaderas entre el dólar estadounidense y la libra esterlina el 20 de enero de 1998.

Tasas forward y spot			
Tasa spot	1.6273	3 meses forward	1.6196
1 mes forward	1.6246	6 meses forward	1.6117
2 meses forward	1.6222	1 año forward	1.5973

Tabla 4.1: Tasas forward y spot de la libra esterlina.
al 20 de enero de 1998

El siguiente análisis se hará ignorando las diferencias que podrían ser causadas por la oferta y la demanda. El primer valor indica que la libra esterlina puede ser comprada o vendida en el mercado spot (i.e. , con ejercicio virtualmente inmediato) a la tasa de \$1.6273 por libra; el segundo valor nos indica que el precio forward para un contrato para comprara o vender libras esterlinas en un mes es de \$1.6246 por libra; el tercero nos indica que el precio forward para un contrato para comparar o vender libras esterlinas en dos meses es de \$1.6222 por libra y así sucesivamente.

Ganancias netas de los contratos forward

Consideremos un comerciante que entra a un contrato forward largo[3] el 20 de enero de 1998, para comprar £1 millón en tres meses a una tasa de cambio de 1.6196 y analicemos los posibles resultados.

El contrato obligaría al comerciante a comprar £1 millón por \$1,619,600 dls, si la tasa de cambio spot aumentara, digamos a 1.65 al final de los tres meses, el comerciante ganaría $\$30,400 = \$1,650,000 - \$1,619,600$, porque las libras tan pronto como sean compradas pueden ser vendidas a \$1,650,000. Similarmente, si la tasa de cambio spot disminuyera, digamos a 1.55 al final de los 90 días, el comerciante perdería \$69,600 ya que el contrato forward obligaría al comerciante a pagar \$1,619,600 por las libras que podría comprar en \$1,550,000 dado que el precio de mercado de la libra esterlina en la fecha de ejercicio es de 1.55.

[3]Por practicidad nos referiremos a un forward en posición larga como forward largo y a un forward en posición corta como forward corto.

En general, la ganancia neta por unidad del activo en una posición larga de contrato forward es:

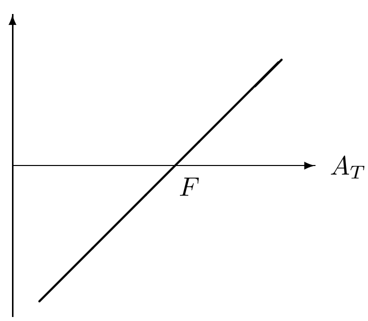
$$A_T - F\,,$$

donde F es el precio de ejercicio y A_T es el precio spot del activo en la fecha de maduración del contrato. Esto se debe a que el poseedor del contrato está obligado a comprar un activo que vale A_T por un costo F. Similarmente, la ganancia neta por unidad del activo en una posición corta de contrato forward es:

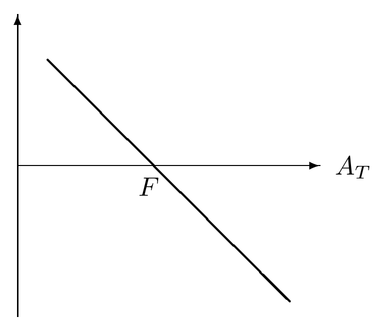
$$F - A_T\,.$$

Estas ganancias netas pueden ser positivas o negativas, como se ilustra en las siguientes gráficas. Puesto que no tiene costo alguno entrar en un contrato forward, la ganancia neta del contrato es también la ganancia o pérdida total que obtiene el comerciante por haber entrado a dicho contrato.

Posición larga



Posición corta



Precios forward y precios spot

En esta sección ilustraremos la razón por la cual los precios forward y los precios spot están relacionados, considerando como ejemplo los contratos forward en oro y suponiendo que no hay costo de almacenamiento del mismo.

Supongamos que el precio spot del oro es de \$300 por onza y que la tasa de interés libre de riesgo para una inversión de un año es del 5 % anual. Analicemos cual podría ser un valor razonable para el precio forward del oro a un año.

Supongamos primero que el precio forward a un año es de \$340 por onza, un comerciante puede tomar el siguiente plan de acción: pedir prestados \$300 a una tasa de interés anual del 5 % para comprar una onza de oro y entrar a un contrato forward corto para vender dicho oro en \$340 dentro de un año.

El interés que tendrá que pagar por los \$300 que ha pedido prestados (suponiendo composición del interés anual) es de \$15 por onza; así que el comerciante puede usar \$315, de los \$340 que recibirá de vender el oro al final del año, para saldar el préstamo que recibió y aún así obtendría una ganancia de \$25. En general, con cualquier precio forward de un año mayor a \$315 puede usarse esta estrategia para hacer arbitraje y obtener utilidades.

Ahora supongamos que el precio forward es de \$300, entonces cualquier inversionista que tenga un portafolio que incluya oro puede: vender el oro a \$300 la onza, invertir dicho capital a una tasa de interés anual del 5 % y entrar a un contrato forward largo para volver a comprar el oro dentro de un año a un precio de \$300 la onza.

Cuando esta estrategia es comparada con la estrategia alternativa de quedarse con el oro en el portafolio por una año, vemos que el inversionistas gana \$15 más por onza. Es por ello, que en cualquier situación en la que el precio forward del oro sea menor que \$315, los inversionistas que tengan oro en su portafolio tiene un incentivo para vender el oro y firmar un contrato forward largo en la manera en la que se ha descrito.

La primera estrategia da rendimiento cuando el precio del contrato forward del oro por un año es mayor a \$315, pero mientras mas comerciantes intenten sacar ventaja de esta estrategia, la demanda del los contratos forward cortos aumentará y el precio de los mismos empezará a disminuir. La segunda estrategia da rendimiento a todos los inversionista que tienen oro en sus portafolios, cuando el precio del contrato forward del oro es menor a \$315 pero como estos inversionistas intentarán sacar ventaja de esta estrategia, la demanda de los contratos forward largos aumentará y por consiguiente su precio subirá.

Suponiendo que los individuos están siempre buscando las oportunidades de hacer arbitraje cuando las hay, podemos concluir que las actividades de los comerciantes causarán que el precio de los contratos forward del oro a un año sea exactamente \$315, ya que cualquier otro precio dará la oportunidad de hacer arbitraje[4]

4.1.2. Contratos futuros

Al igual que un contrato forward, un contrato futuro es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en un cierto tiempo futuro a un determinado precio, pero a diferencia de los contratos forward, los contratos futuros son normalmente comerciados en una bolsa. Para hacer el comercio posible, la bolsa especifica determinadas características estandarizadas del contrato. Como las dos partes del contrato no necesariamente se conocen, la bolsa también provee un mecanismo que da a las dos partes una garantía de que el contrato será respetado.

Las mas grandes bolsas en las cuales los contratos futuros son comerciados son el *Chicago Board of Trade (CBOT)* y el *Chicago Mercantile Exchange (CME)*. En éstas y otras bolsas, una amplia variedad de mercancías y activos financieros forman los activos subyacentes de los varios contratos. Las mercancías incluyen puercos, ganado vivo, azúcar, lana, madera, cobre, aluminio, oro y estaño mientras que los activos financieros incluyen índices de activos, tasas de cambio y bonos del tesoro.

[4]Con objeto de simplificación asumiremos que la tasa de interés en prestamos es la misma que en inversiones, lo que comúnmente es conocido como *Banco ideal*.

Una diferencia esencial entre un contrato futuro y uno forward, es que usualmente en un contrato futuro no se especifica una fecha de ejercicio. El contrato es referido por el mes de ejercicio y la bolsa especifica el período durante el mes cuando se debe ejercer la opción. Para las mercancías el período de ejercicio es frecuentemente el mes completo y el poseedor de la posición corta tiene el derecho de escoger el momento durante el período de ejercicio en el cual ejercerá.

Frecuentemente, los contratos con muchos meses de ejercicio diferentes son comerciados en cualquier momento. La bolsa especifica la cantidad del activo a ser ejercida por un contrato y como el precio de los futuros será cotizado. En el caso de una mercancía, la bolsa también especifica la calidad del producto y el lugar de ejercicio. Por ejemplo, consideremos los contrato futuros de trigo negociados en el *Chicago Board of Trade*. Supongamos que el tamaño del contrato es de 5,000 fanegas[5] de trigo y que contratos para cinco meses de ejercicio (marzo, mayo, julio, septiembre y diciembre) están disponibles por mas de 18 meses en el futuro. La bolsa especifica los grados de trigo que pueden ser ejercidos y los lugares donde los ejercicios pueden ser realizados.

Los precios de los futuros son reportados regularmente en la prensa financiera. Supón que el 1 de septiembre, los precios de los futuros de oro de diciembre están cotizados en $300, éste es el precio, exclusivo de comisiones, al cual los comerciantes pueden acordar vender o comprar oro para ejercer en diciembre. Es determinado en función de la oferta y la demanda como los demás precios, en este caso si la mayoría de los comerciantes prefieren a largo plazo en lugar de corto plazo entonces el precio sube y visceversa, si la mayoría prefiere a corto plazo en vez de largo plazo entonces el precio baja.

4.1.3. Opciones

Las opciones sobre acciones fueron comerciadas por primera vez en 1973, desde entonces el mercado de las opciones ha crecido dramáticamente, hasta la actualidad, donde grandes volúmenes de opciones son comerciados sobre el mostrador por bancos y otras instituciones financieras. Los activos subyacentes incluyen acciones, índices de acciones, tipos de cambio, instrumentos de deuda, comodities y contratos futuros, entre otros.

Una *opción* es un contrato escrito por un *vendedor de opción*, también conocido como *emisor de opción*, que le da al *comprador de la opción* o *poseedor de la opción* el derecho - pero no la obligación - de comprar o vender un activo específico a un precio determinado en una fecha fija. Es importante notar que aun cuando una opción le da el derecho al poseedor de hacer algo, eso no implica que tenga la obligación de ejercerla. Este hecho es el que distingue a las opciones de los contratos forward y futuros, donde el poseedor se ve obligado a comprar o vender el activo subyacente aún cuando no le cueste entrar en estos contratos.

Al precio del contrato se le conoce como *precio de ejercicio* y a la fecha del mismo como *fecha de expiración o maduración*. Dependiendo de la fecha de ejercicio tenemos dos tipos de opciones, las *opciones americanas*, que son aquellas

[5]Fanega: f. Medida para los granos, legumbres y frutos secos a los que se aplican medidas de capacidad [19]

que pueden ser ejercidas en cualquier momento después de la fecha de maduración y las *opciones europeas*, que son las que se pueden ejercer únicamente durante la fecha de maduración.

Básicamente existen dos tipos de opciones, las de *compra* y las de *venta*. Una opción de compra le da el derecho al poseedor de *comprar* el activo subyacente por el precio de ejercicio, mientras que una opción de venta le garantiza al poseedor de la opción el derecho de *vender* el activo subyacente por dicho precio.

Otra terminología que se utiliza en este contexto es la posición que se toma en una opción, por ejemplo, si alguien quiere comprar un activo que no posee actualmente, se dice que está *corto* en el activo pero quiere estar *largo*. En general, cada contrato de opción tiene dos partes: el inversionista que compra la opción toma una *posición larga*, mientras que el emisor de la opción toma una *posición corta* porque vendió la opción al inversionista.

Observe que el emisor de una opción recibe dinero por adelantado, sin embargo adquiere posibles obligaciones futuras y sus pérdidas o ganancias serán justo las contrarias a las del comprador de la opción. La pregunta que cada comprador de opción se debe hacer es si el derecho de comprar o vender cierto activo en una fecha futura a un precio determinado es compensado por el precio que tendrá que pagar por dicha opción. De hecho, esta pregunta es la razón de ser del precio de una opción, pero antes de encontrar dicho precio, enunciemos una importante implicación del principio de no-arbitraje que utilizaremos más adelante.

Proposición 4.1. *Sean $(A_t)_{t\geq 0}$ y $(B_t)_{t\geq 0}$ el valor de dos activos diferentes con $A_T = B_T$ al tiempo $T > 0$. Entonces, por el principio de no-arbitraje, el valor de los activos hoy (al tiempo $t = 0$) es el mismo, i.e. $A_0 = B_0$.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A_0 > B_0$. Demostraremos que este supuesto contradice el principio de no-arbitraje y como consecuencia tendremos que $A_0 = B_0$. Llegaremos a esta contradicción a través de una simple *estrategia de inversión*, que consiste de los siguientes tres pasos:

1. Realizar la venta en corto de A el día de hoy, lo cual nos da A_0 unidades monetarias.

2. Comprar activo B el día de hoy, utilizando B_0 unidades monetarias de las A_0 obtenidas de la venta anterior.

3. Invirtir el residuo $A_0 - B_0 > 0$ en un bono libre de riesgo el día de hoy.

Al tiempo T, recibiremos de regreso el dinero invertido en el bono, así que tendremos $(A_0 - B_0)\, e^{rT}$ unidades monetarias. Adicionalmente, tendremos que devolver el activo A, que vendimos al tiempo $t = 0$, antes de tenerlo. Regresar este activo que no tenemos significa que debemos financiar o fondear la compra de A. Afortunadamente compramos B al tiempo $t = 0$, así que vender B, por un precio B_T, genera suficientes ingresos para comprar A al precio $A_T = B_T$. Entonces para saldar nuestras cuentas, no tuvimos la necesidad de usar las ganancias obtenidas del bono, por lo que al final habríamos obtenidos una ganancia libre de riesgo y con ello habríamos hecho arbitraje. $\square$

Precio de una opción

Supongamos que el activo subyacente de una opción de venta europea tiene movimientos de precio $(A_T)_{t\geq 0}$, que se comporta como un movimiento Browniano geométrico, y que el precio de ejercicio de la opción de compra es F. En el momento de maduración T, podemos distinguir dos posibles escenarios:

1. $A_T > F$: en este caso el poseedor de la opción definitivamente la ejercerá, porque al ejercer la opción puede obtener un activo que vale A_T por un mejor precio F. Ésto le dará una ganacia neta en el negocio siempre que el precio de la compra C_0 sea menor que la ventaja obtenida $A_T - F$.

2. $A_T \leq F$: si el activo es más barato o tiene el mismo precio en el mercado que el precio de ejercicio de la opción, el poseedor de la opción no la ejercerá. En este caso, el contrato no sirvió de nada y el costo de la opción es la pérdida del inversionista.

Ambos casos pueden resumirse en función de la *ganacia neta* de la opción, que en el caso de una opción europea de compra con precio de ejercicio F, está dada por

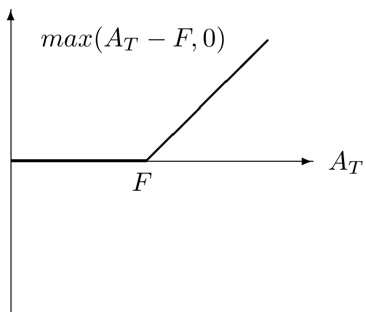
$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ A_T &\mapsto \pi(A_T) = max(A_T - F, 0)\,. \end{aligned}$$

En total, hay cuatro posiciones al negociar con opciones de compra y venta: compra larga, compra corta, venta larga y venta corta. Que son las combinaciones que observamos en las gráficas siguientes, con sus respectivas ganancias netas. Vemos claramente que, para una opción determinada, la ganancia neta del comprardor es justo la opuesta a la ganancia neta del vendedor, como ya habíamos explicado.

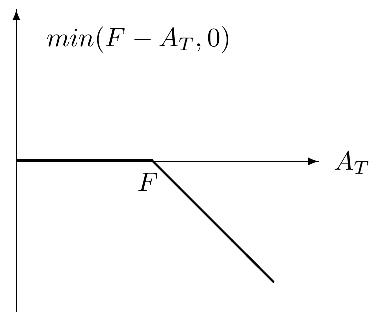
Observe que en las gráficas omitimos el precio de la opción, ya que éste cambiaría el diagrama de la ganancia a través del eje y, haciéndolo negativo para las posiciones largas - porque el precio de la opción tiene que ser pagado - y positivo en las posiciones cortas - porque el precio de la opción será recibido como una compensación por la emisión de la opción.

Es importante mencionar que las posiciones largas tienen *riesgo a la baja limitado*, ya que el peor escenario al que se enfrenta una comprador de opción es que el dinero invertido en la opción se pierda en su totalidad. Además tienen *oportunidad de alza ilimitada*. Correspondientemente, los emisores de opción tienen un *riesgo a la baja ilimitado*, más allá de ello, su mejor escenario es que el poseedor de la opción no la ejerza, en cuyo caso el precio de la opción es la ganancia neta del emisor.

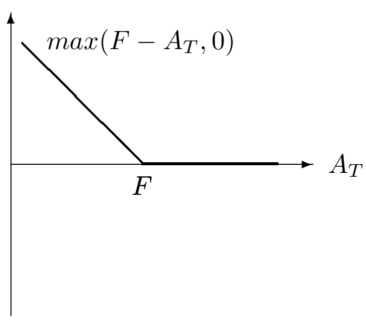
Opción de compra
posición larga



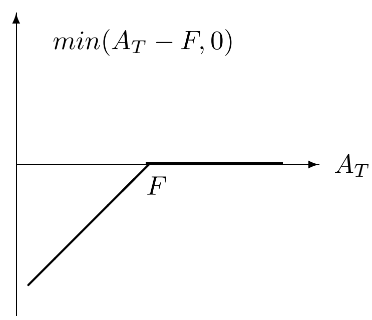
Opción de compra
posición corta



Opción de venta
posición larga



Opción de venta
posición corta



Proposición 4.2. *Sea C_0 el precio de una opción de compra europea y P_0 el precio de una opción de venta europea con precio de ejercicio F, fecha de maduración T y activo subyacente A. Denotando a la tasa libre de riesgo como r, tenemos la fórmula de paridad de compra-venta:*

$$C_0 + Fe^{-rT} = P_0 + A_0 \,.$$

Demostración. Para demostrar esta proposición compararemos los siguientes dos portafolios:

- Una opción de compra larga más una inversión Fe^{-rT} en el bono libre de riesgo.

- Una opción de venta larga más una inversión en una acción del activo A.

De acuerdo con a la proposición 4.1, basta probar que los dos portafolios tiene el mismo valor al momento $t = T$, porque entonces sus valores serían los mismos al tiempo $t = 0$ debido al principio de no-arbitraje. Prosigamos a calcular sus valores al tiempo de maduración T. Existen dos posibles casos:

- $A_T \leq F$: en este caso la opción de compra no será ejercida dado que el valor de ejercico es cero. La inversión Fe^{-rT} en el bono al tiempo $t = 0$ pagará exactamente la cantidad F al tiempo $t = T$, por lo que el valor del primer portafolio es de F. Así mismo, el valor del segundo portafolio es de F, porque al ejercer la opción de venta, se tendrá una ganacia neta de $F - A_T$, y agregando el valor del activo A al tiempo $t = T$ tenemos un total de $F - A_T + A_T = F$.

- $A_T > F$: en este caso la opción de compra será ejercida por un precio $A_T - F$ y dado que la inversión en el bono pagará F al tiempo $t = T$, tenemos que el valor del primer portafolio es de $A_T - F + F = A_T$. Para el segundo portafolio la opción de venta no será ejercida dado que el valor de ejercicio es cero y al agregar el valor del activo A al tiempo $t = T$ que es A_T, tenemos que el valor de portafolio es también A_T.

Por lo tanto, el valor de los portafolios al tiempo $t = T$ es el mismo en ambos casos. $\square$

Cabe mencionar que la paridad de compra-venta solo se preserva en las opciones europeas, sin embargo es posible establecer algunas relaciones entre las opciones de compra y venta americanas para una acción que no paga dividendos antes de la maduración final de la opción.

4.2. Fórmula de Black-Scholes

En 1973 Fischer Black y Myron Scholes encontraron una solución analítica para la valuación de opciones. Su método es parecido al usado en las proposiciones 4.1 y 4.2, es decir, construyendo un portafolio libre de riesgo que consiste de una combinación de opciones de compra y acciones de algún activo subyacente, una aplicación del principio de no-arbitraje establecido, una fórmula analítica para el precio de una opción de compra europea en acciones de un activo. La fórmula para la asignación de precio depende de cinco parámetros:

- A_0: la acción o precio del activo al día de hoy.
- σ_A: la volatilidad del activos subyacente A.
- F: el precio de ejercicio de la opción.
- T: el tiempo de maduración de la opción.

- $r > 0$: la tasa de interés libre de riesgo.

Debemos mencionar que un concepto clave en las fórmulas para el cálculo del precio que se presentan a continuación es la conocida *valuación neutral de riesgo*. En un mundo donde todos los inversionistas son neutros al riesgo, todas los títulos ganan la tasa libre de riesgo. Ésta es la razón por la cual la fórmula de Black-Scholes no depende de la desviación μ_A de $(A_t)_{t\geq 0}$. En un mercado completo, libre de arbitraje, los precios de arbitraje de las reclamaciones contingentes son iguales a sus valores esperados descontados bajo la medida martingala neutral de riesgo. Debido a que aplicaremos las fórmulas para encontrar los precios no nos preocuparnos en profundidades del contexto matemático, sin embargo si está interesado en conocer más acerca de la derivación de estas fórmulas puede usted consultar el libreo de Bingham y Kiesel [9].

El precio de una opción de compra europea está dado por:

Proposición 4.3. *El precio de Black-Scholes para una opción de compra europea con parámetros (A_0, σ_A, F, T, r) está dado por:*

$$A_0 N(d_1) - e^{-rT} F\, N(d_2)\,, \qquad \textit{donde} \tag{4.1}$$

$$d_1 = \frac{log[A_0/F] + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\,, \tag{4.2}$$

$$d_2 = \frac{log[A_0/F] + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}. \tag{4.3}$$

Como de costumbre $N(\cdot)$ denota la función de distribución normal estandarizada. En lo sucesivo escribiremos $C_0(A_0, \sigma_A, F, T, r)$ para denotar este precio.

Demostración. La prueba de esta fórmula puede encontrarse en cualquiera de las siguientes literaturas: [9], [20] y [23]. □

Para las opciones de venta europeas tenemos que la fórmula del precio se obtiene como una aplicación de la paridad de compra-venta.

Proposición 4.4. *El precio de Black-Scholes para una opción de venta europea con parámetros (A_0, σ_A, F, T, r) está dado por:*

$$e^{-rT} F\, N(-d_2) - A_0 N(-d_1)\,, \qquad \textit{donde} \tag{4.4}$$

$$d_1 = \frac{log[A_0/F] + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\,, \tag{4.5}$$

$$d_2 = \frac{log[A_0/F] + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}. \tag{4.6}$$

En lo sucesivo escribiremos $P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r)$ para denotar este precio.

Demostración. La paridad de compra-venta de la proposición 4.2 implica que

$$
\begin{aligned}
P_0(A_0, \sigma_A, F, T, r) &= C_0(A_0, \sigma_A, F, T, r) + F\, e^{-rT} - A_0 \\
&= A_0 N(d_1) - e^{-rT} F\, N(d_2) + F\, e^{-rT} - A_0 \\
&= A_0 \Big\{ N(d_1) - 1 \Big\} - e^{-rT} F \Big\{ N(d_2) - 1 \Big\} \\
&= A_0 \Big\{ -N(-d_1) \Big\} - e^{-rT} F \Big\{ -N(-d_2) \Big\} \\
&= e^{-rT} F\, N(-d_2) - A_0 N(-d_1)\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

4.3. Riesgo de crédito

El riesgo de crédito puede ser definido como la posibilidad de que la contraparte de un contrato no cumpla con sus obligaciones establecidas en el mismo, causando con ello una pérdida financiera para el acreedor. Observe que en esta burda definición, es irrelevante si la contraparte no tiene la capacidad financiera para cumplir con sus obligaciones o simplemente no está dispuesta a cumplir con ellas.

El riesgo de crédito ha sido reconocido como un determinante crucial de los precios y promesas de rendimiento de deuda. Un contrato de deuda que envuelve grandes cantidades de riesgo de crédito debe ofrecer un rendimiento más alto al inversionista, comparado con el rendimiento que ofrece un contrato de menor riesgo-crédito por los participantes del mercado.

A pesar de que el efecto del riesgo de crédito en los precios de los bonos, ha sido del conocimiento de los participantes del mercado desde hace tiempo, solo recientemente se han desarrollado modelos analíticos para cuantificar este efecto. En 1973 Black-Scholes dieron el primer paso significativo en lo que respecta a los modelos de riesgo de crédito, en su trabajo de determinación del precio de opciones. Más tarde, en el año de 1974, Merton desarrolló a fondo la intuición de Black-Scholes, plasmándola en un marco analítico. Después de los trabajos de Black, Scholes y Merton muchas más investigaciones han sido realizadas pero las bases siguen estando asentadas sobre el trabajo de estos.

4.3.1. Modelos de riesgo de crédito

Los modelos de riesgo de crédito pueden ser clasificados de diversas maneras, una de ellas es en: métodos tradicionales, modelos del valor de la firma, modelos del primer tiempo de paso y modelos de intensidad.

Los *métodos tradicionales* se centran en el concepto de valuar el riesgo de crédito a través de la información histórica de incumplimiento e infiriendo el margen de crédito a partir de dicha información. Mientras que los *modelos del valor de la firma* usan la aproximación desarrollada por Merton, en la cual el riesgo de crédito es considerado una opción de venta con el valor de los activos de la firma.

El concepto del valor de la firma también es utilizado en los *modelos del primer tiempo de paso*, pero en estos, el valor de la firma es usado para determinar el tiempo de incumplimiento. Cabe mencionar que, por lo general, la tasa de recuperación no se basa en el valor de la firma.

Los *modelos de intensidad* utilizan un proceso de quiebra libre de arbitraje que activa el incumplimiento. Donde la intensidad del proceso es calibrada para ajustar la información del mercado.

4.3.2. Modelo de Merton

Esta sección tiene por objeto plantear los resultados importantes del modelo de Merton, sin adentrar en la parafernalia matemática que conlleva a dichos resultados.

Los modelos del valor de la firma derivan el precio del riesgo de incumplimiento modelando el valor de los activos de la firma respecto a sus pasivos. También son conocidos como modelos estructurales, debido a que modelan la evolución de la estructura del capital de la firma. Un ejemplo de estos modelos es el modelo de Merton, que fue uno de los primeros modelos para dar precio a los bonos de riesgo-crédito o instrumentos similares.

Supongamos que la capacidad de una firma para pagar sus deudas está determinada por el valor total de sus activos, al cual denotaremos como V y consideremos que la firma tienen una única obligación con promesa de pago final K. Esta reclamación puede ser interpretada como un bono de cupón cero. De acuerdo con Black-Scholes, al emitir deuda, los accionistas venden los activos de la firma a los poseedores de los bonos manteniendo una opción de compra para comprar de regreso dichos activos. Esto es equivalente a decir que los accionistas son los poseedores de los activos de la firma y compran una opción de venta a los poseedores de los bonos. Si los activos de la firma valen menos que la cantidad que se le debe a los poseedores de la deuda, los accionistas pueden equilibrar la deuda que será pagada con sus ganancias de la opción de venta. Entonces, un bono corporativo puede ser visto como un bono libre de incumplimiento menos una opción de venta con precio de ejercicio K escrita sobre los activos de la firma. En este caso, la ganancia ϕ del bono con promesa de ganancia K es donde r es la constante de la tasa de interés libre de riesgo y σ_V la desviación estándar instantánea del valor de la firma. A pesar de que V no es por si mismo un activo negociable, un derivado de V es la acción de la firma. Merton muestra que para este caso, la valuación de los derivados de V es independiente de las preferencias de riesgo del inversionista. Por ello podemos suponer neutralidad de riesgo sin pérdida de generalidad, lo cual implica que existe una medida de probabilidad única equivalente Q bajo la cual V es una martingala si es descontada a la tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente. Entonces, el precio de una opción con ganancia $max(K - V, 0)$ está dado por la fórmula del precio de una opción de Black-Scholes.

Dadas estas dinámicas, el precio de un bono de incumplimiento es obtenido deduciendo una opción estándar de Black-Scholes del valor libre de riesgo de un bono. El precio al momento t del bono riesgoso puede ser expresado como:

$$P^d(t,T) = P(t,T) - p(t)\,. \tag{4.7}$$

Por la fórmula de Black-Scholes, véase sección 4.2, tenemos que 4.7 puede escribirser como:

$$P^d(t,T) = P(t,T) - P(T,T)\, e^{-r\,(T-t)}\, N(-d + \sigma_V \sqrt{T+t}\,) + V N(-d)\,,$$

donde $N(\cdot)$ es la distrubución normal y

$$d = \frac{ln\left[\frac{V}{P(T,T)}\right] + r + \frac{1}{2}\,\sigma_V^2\,(T-t)}{\sigma_V\,\sqrt{(T-t)}}\,.$$

Además, tenemos que $P(t,T) = P(T,T)\, e^{-r\,(T-t)}$ y $1 - N(d) = N(-d)$, entonces podemos escribir

$$P^d(t,T) = P(t,T)\, N(d - \sigma_V \sqrt{T+t}\,) + V N(-d)\,,$$

con

$$d = \frac{ln\left[\frac{V}{P(t,T)}\right] + \frac{1}{2}\,\sigma_V^2\,(T-t)}{\sigma_V\,\sqrt{(T-t)}}\,.$$

Sea $\Gamma = P(t,T)^{-1} V$, tenemos entonces que

$$P^d(t,T) = P(t,T)\left[N(d - \sigma_V \sqrt{T+t}\,) + \Gamma N(-d)\right], \tag{4.8}$$

con

$$d = \frac{ln\,[\Gamma\,] + \frac{1}{2}\,\sigma_V^2\,(T-t)}{\sigma_V\,\sqrt{(T-t)}}\,.$$

Γ es casi una razón activos-deuda, pero no es la razón activos-deuda real porque el valor de la deuda es calculado como si fuera libre de riesgo. Sin embargo, es evidente de la fórmula que la magnitud del riesgo de crédito se obtiene inmediatamente de la razón de los activos para las deudas. De hecho, esta razón puede ser interpretada como el subyacente de la opción. Algunas veces, el término *distancia al incumplimiento* es usado en este contexto; una gran distancia al incumplimiento significa que la razón de activos-deuda es alta, i.e., la opción está muy lejos de estar fuera del dinero[6]. Una firma a punto de quebrar tiene corta distancia al incumplimiento, en otras palabras, la opción está al dinero[7]. La expresión 4.8 también da el spread del precio del bono,

$$\frac{P^d(t,T)}{P(t,T)} = N(d - \sigma_V \sqrt{T+t}\,) + \Gamma N(-d)\,.$$

[6]out-of-the-money
[7]at-the-money

Mas allá, puesto que $P(t,T) = e^{-r(T-t)}$ y $P^d(t,T) = e^{-r^d(T-t)}$,

$$r^d - r = \frac{ln\left[N(d - \sigma_V\sqrt{T+t}\,) + \Gamma N(-d)\right]}{T-t}c,\,, \tag{4.9}$$

es el spread de crédito del bono riesgoso.

Este simple modelo de riesgo de crédito hace algunos supuestos muy rigurosos. Por ejemplo, supone que el incumplimiento no puede ocurrir antes que la maduración de la deuda. La deuda de la firma solo puede ser de una sola clase y las fecha de maduración diferentes o niveles de riesgos distintos son excluidos. Debido a que solo existe un tipo de deuda, las desviaciones de la prioridad absoluta no son un tema a tratar. Más allá de eso, los cupones no pueden ser manejados. Se supone que la quiebra está libre de cualquier costo asociado. A través de argumentos similares, se supone que la quiebra solo puede ocurrir si el valor de la firma está por debajo del valor nominal de la deuda, por lo que la quiebra inducida por falta de liquidez está excluida. Por supuesto, además de las restricciones del modelo de precio de Black-Scholes, como por ejemplo, el supuesto de las tasa de interés constantes.

Así como en el análisis de Black-Scholes para opciones estándares, la derivación original de Merton incluía una ecuación diferencial parcial para los bonos incumplidos. Empezando con las dinámicas del valor de la firma:

$$\frac{dV}{V} = (r - C)\,dt \,+\, \sigma_V\, d\tilde{W}(t)\,, \tag{4.10}$$

obtuvo, por la fórmula de *Itô*, para una derivada $F(V,t)$ la ecuación diferencial parcial

$$0 = \frac{1}{2}\sigma_V\, V^2\, F^{VV} \,+\, (r\,V - c_E)\,F^V - r\,F + F^t + c_B\,, \tag{4.11}$$

donde c_f denota los dividendos de la firma y c_F los dividendos del título F. Estableciendo condiciones iniciales y límites, resolvió la ecuación diferencial hasta obtener la fórmula arriba citada.

Capítulo 5

PRODUCTO

Finalmente hemos llegado al capítulo medular del presente trabajo, donde aplicaremos la teoría desarrollada en los capítulos precedentes. Comenzaremos creando la estructura del producto, con base en el "*Diseño*" de la página 37. Después, seleccionaremos un método de costeo actuarial de la sección 2.3.2 para valuar el costo de dicho producto.

Posteriormente, con la información del mercado[1], se hará una simulación de la administración del dinero en dicho fondo. Así mismo se estimará el riesgo de crédito que involucra el fondo a través del modelo de Merton, que se sigue como aplicación de la sección 4.3.2.

Antes de proseguir, queremos hacer énfasis al lector, que aun cuando usemos términos que generalmente son asociados a las AFORE, nuestro producto es independiente a ellas, por lo cual suplicamos al lector no haga dichas asociaciones, ya que podrían llevar a este producto a un enfoque legal no deseado. Algunos ejemplos de estos términos son: "cuenta individual", que suele ser asociado con las cuentas individuales que administran las AFORE; o el término "fondo de ahorro" que podría hacer pensar al lector que estamos construyendo una AFORE, y en un sentido puramente legal, no es así.

5.1. Diseño

A lo largo de este trabajo, hemos venido hablando de un producto, como lo crearemos, cuanto costará, como lo administraremos, que riesgo involucra; pero en realidad, nunca lo hemos definido. Así que, ha llegado el momento de decir en que consiste tan nombrado "producto", para lo cual necesitaremos definir sus objetivos. Los dos objetivos principales del producto son: (1) garantizar un ingreso mínimo a partir de cierta edad y (2) promover el ahorro.

Es por ello que, este producto estará conformado de dos partes. La primera será un fondo de ahorro "colectivo", a través el cual se garantizará una pensión mínima a cada participante, y será trabajado como un plan comunitario de

[1] Con fecha febrero de 2008

beneficio definido. La segunda parte será una "cuenta individual" en la que cada participante tendrá su ahorro, y esta parte será trabajada como plan individual de contribución definida.

Recuerde que este producto va a dirigido a mujeres, por las cuestiones que se mencionaban en la introducción, así que nos refiramos a las mujeres que contratan el producto, como a *las participantes.*

Plan comunitario de beneficio definido

Con base en el "*Diseño*" de la sección 2.3.1, ubicado en la página 37, definiremos las características de este plan de la siguiente forma.

1. *Grupo elegible*: las clientes del banco SEFIA.
2. *Requisitos de elegibilidad*: estar inscrita al plan y cumplir 3 años de antigüedad en el mismo.
3. *Ingreso*: el ingreso declarado por la participante.
4. *Ingreso pensionable*: promedio anual más alto durante los útlimos cinco años.
5. *Servicios pensionables*: antigüedad en el plan, tomada con años y meses completos.
6. *Monto del beneficio*: 1 % del ingreso pensionable por los servicios pensionables.
7. *Fechas y condiciones de retiro*: la edad normal de retiro será a los 65 años. Cualquier otra edad de retiro generará una pensión actuarialmente equivalente a la que se obtendría en la edad normal de retiro. Como única condición se establece tener al menos 50 años de edad al retiro.
8. *Formas y condiciones de pago*: la pensión se otorgará en forma de una pensión mensual vitalicia.
9. *Beneficios adicionales*: no se cuenta con beneficios adicionales en la primera etapa del plan.
10. *Financiamiento*: 100 % los participantes.

Plan individual de contribución definida

En este caso, el diseño queda definido casi identicamente al plan colectivo de beneficio definido, salvo en los puntos 6, 8, 9 y 10, que quedarán de la siguiente forma:

6. *Monto del beneficio*: pensión que se obtenga con el ahorro del 2 % de los ingresos.

8. *Formas y condiciones de pago*: la pensión se otorgará en forma de una pensión mensual hasta agotar el dinero en la cuenta.
9. *Beneficios adicionales*: en caso de muerte de la participante, sus beneficiarios recibirán el monto restante de la pensión a través de un pago único.
10. *Financiamiento*: idividual.

Al definir las dos partes que conforman al producto, queda definido en su totalidad el mismo, por lo cual ya estamos listos para pasar a la siguiente etapa que es, la valuación del producto.

5.2. Valuación

Sigamos la estructura de la *valuación* que se encuentra en la sección 2.3.1, página 38.

1. *Recolección de la información.* La información requerida será tomada de la "Encuesta socioeconómica" realizada por SEFIA en mayo de 2007. Dicha encuesta se encuentra en el apéndice B.
2. *Selección de las hipótesis actuariales.*
   a) *Demográficas.*
   - Tabla de mortalidad del Seguro Social (EMSS 97-M) y tabla de invalidez (EMSSI-97), véase apéndice C.

   b) *Económicas y financieras.*
   - Tasa de descuento. Usaremos una tasa del 4 % anual, la cual será utilizada para el cálculo de las funciones conmutativas.
   - Tasa de rendimiento para el fondo. Ésta se supone igual a la tasa de descuento.
3. *Selección del método de costeo actuarial.* Dadas las características de colectividad del plan usaremos el método del agregado para las participantes en activo. Recordemos brevemente la fórmula del costo normal bajo este método, fórmula 2.38, página 51:

$$NC_t = k\,\%\ (Nómina\ anual)\,.$$

4. *Estimación de obligaciones, costos y gastos.*

   Obligaciones. En este caso, la obligación del plan se reduce al cálculo del beneficio que otorga, el cual se realizará en dos partes: la del plan comunitario y la del plan individual.

   Para el *plan comunitario* tenemos una pensión definida como el 1 % del ingreso pensionable por los servicios pensionables. Sea S_y es el ingreso pensionable, i.e., el ingreso declarado a la edad de retiro y. Así mismo definamos I y E como las fechas, exactas, de ingreso al plan y de retiro del mismo respectivamente; tenemos entonces que $E-I$ es el número de días que la participante cotizó en el plan, y dado que los servicios pensionables deben ser tomados como años y meses completos, éstos estarán dados por $\left\lfloor \frac{E-I}{30} \right\rfloor$, por lo tanto

$$Beneficio_{B.D.} = 1\,\%\, S_y \left\lfloor \frac{E-I}{30} \right\rfloor, \tag{5.1}$$

Mientras que para el *plan individual* tenemos que el fondo acumulado a edad y con un ahorro del $2\,\%$ de los ingresos anuales durante $y-x$ años será de:

$$F_y = 2\,\%\ (Ingresos\ anuales)\ \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} \left(\frac{D_x}{D_y}\right), \tag{5.2}$$

además, este fondo será el que dará lugar a la pensión, entonces

$$F_y = P\,\ddot{a}_y^{(12)}\,, \tag{5.3}$$

por lo tanto, al igualar 5.2 con 5.3 y despejar P, que es el beneficio otorgado, tenemos:

$$Beneficio_{C.D.} = \frac{2\,\%\ (Ingresos\ anuales)\ \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} \left(\frac{D_x}{D_y}\right)}{\ddot{a}_y^{(12)}}\,. \tag{5.4}$$

Al sumar el beneficio de cada parte del plan, 5.1 y 5.4, se obtiene una pensión total de:

$$PENSIÓN = 1\,\%\, S_y \left\lfloor \frac{E-I}{30} \right\rfloor + \frac{2\,\%\ (Ingresos\ anuales)\ \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} \left(\frac{D_x}{D_y}\right)}{\ddot{a}_y^{(12)}}\,.$$

Costos. Al igual que en el beneficio, calcularemos el costo de cada parte del plan de manera separada y luego sumaremos ambos costos.

Calculemos el costo del *plan comunitario* a través del método del agregado, previamente seleccionado,

$$Costo_{B.D.} = k\,\%\,(Ingresos\ anuales) + \frac{PI}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}, \tag{5.5}$$

donde PI denota el pasivo inicial, en el caso de que lo hubiera, y n es el periodo de amortización de dicho pasivo.

El costo del *plan individual* ya está definido, pues es la aportación misma, entonces

$$Costo_{C.D.} = 2\,\%\ (Ingresos\ anuales)\,, \tag{5.6}$$

por lo que al sumar 5.5 y 5.6 tenemos que el costo total del producto es:

$$COSTO = k\,\%\,(Ingresos\ anuales) + \frac{PI}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} + 2\,\%\ (Ingresos\ anuales)\,.$$

5. *Presentación de los resultados.*

5.3. Administración del portafolio

En esta sección daremos un ejemplo práctico de la aplicación de las herramientas clásicas de la administración de cartera vistas en el capítulo dos.

Cabe mencionar que el software de apoyo utilizado en este capítulo fue *Mathlab*. Si le interesa saber el procedimiento, así como las funciones utilizadas para la obtención de los diagramas y la información que se presenta en este capítulo, sírvase consultar el apéndice A del presente trabajo.

Para este ejercicio escogimos 21 tipos de activos, cada uno corresponde a una empresa. Por practicidad nos referiremos por número de activo y no por el nombre de la empresa mediante la siguiente asiganación:

1. CEMEX CPO
2. SORIANA B
3. URBI desarrollos
4. GEO B
5. AXTEL CPO
6. CARSO Infraestructura B 1
7. WAL-MART V
8. MEXICHEM
9. TELMEX L
10. Empresas ICA
11. Consorcio ARA
12. Grupo TELEVISA CPO
13. Grupo financiero BANORTE O
14. Nacional Financiera CPO
15. Desarrollador HOMEX
16. ALSEA
17. Controladora UTS
18. Grupo Financiero O
19. Fomento Económico UTS
20. GMEXICO B
21. América Móvil L

Lo primero que se hace es obtener los valores históricos de los costos en el momento de apertura y el cierre, en este caso usaremos un lapso mensual entre cada observación del 1 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2007, dándonos como resultado 24 observaciones. Posteriormente se calcula el rendimiento r, véase 3.2 en la página 54, donde X_1 es es el precio de cierre y X_0 el el precio de apertura. Denotemos como r_{ij} al rendimiento del activo j-ésimo en el periodo i, entonces el rendimiento esperado de cada activo es $\bar{r}_j = \sum_{i=1}^{21} r_{ij}$ y la covarianza entre activos está dado por $Cov(r_k, r_l) = \sum_{i=1}^{21} = (r_{ki} - \bar{r}_k)(r_{li} - \bar{r}_l)$

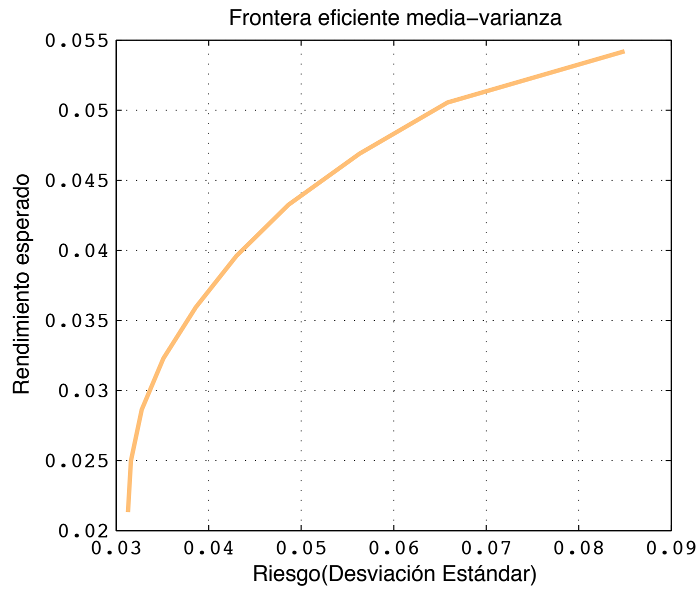


Figura 5.1: En está gráfica observamos la frontera eficiente generada por los portafolios del ejercicio 1.

Ejercicio 1. *Empecemos ilustrando el concepto de frontera eficiente mediante la contrucción de diez portafolios que utilicen combinaciones de los 21 activos.*

En la siguiente tabla tenemos tanto el rendimiento como el riesgo de cada uno de los 10 portafolios contruidos y en la figura 5.1, la gráfica de dichos valores.

Portafolio	Rendimiento	Riesgo
1	2.13 %	0.0313
2	2.50 %	0.0316
3	2.86 %	0.0328
4	3.23 %	0.0351
5	3.59 %	0.0386
6	3.96 %	0.0430
7	4.32 %	0.0486
8	4.69 %	0.0563
9	5.06 %	0.0658
10	5.42 %	0.0850

Tabla 5.1. Rendimiento y riesgo de los portafolios de la frontera eficiente del ejercicio1.

Solo nos falta conocer los pesos de los activos en la formación de cada portafolio. A continuación presentamos dichos pesos en dos partes:

	Pesos de los portafolios				
Activos	1	2	3	4	5
1	3.00 %	0.70 %	0 %	0 %	0 %
2	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
3	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
4	1.18 %	0 %	0 %	0 %	0 %
5	0.35 %	3.13 %	6.54 %	9.34 %	12.13 %
6	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
7	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
8	11.84 %	11.68 %	12.01 %	15.08 %	18.17 %
9	29.45 %	29.03 %	27.75 %	23.98 %	20.17 %
10	8.65 %	10.24 %	12.63 %	13.04 %	13.43 %
11	6.44 %	5.87 %	4.69 %	3.05 %	1.40 %
12	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
13	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
14	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
15	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
16	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
17	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
18	8.74 %	5.26 %	0.07 %	0 %	0 %
19	11.26 %	10.36 %	8.85 %	6.31 %	3.77 %
20	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
21	19.09 %	23.73 %	27.46 %	29.20 %	30.93 %
Total	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

Tabla 5.2. Pesos de los 21 activos en los portafolios 1 al 5.

	Pesos de los portafolios				
Activos	6	7	8	9	10
1	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
2	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
3	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
4	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
5	14.89 %	18.98 %	23.26 %	25.95 %	0 %
6	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
7	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
8	21.58 %	29.56 %	38.82 %	49.36 %	100 %
9	16.32 %	8.07 %	0 %	0 %	0 %
10	13.80 %	13.20 %	12.38 %	12.36 %	0 %
11	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
12	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
13	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
14	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
15	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
16	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
17	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
18	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
19	1.04 %	0 %	0 %	0 %	0 %
20	0 %	0	0.88 %	5.32 %	0 %
21	32.37 %	30.20 %	24.66 %	7.01 %	0 %
Total	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

Tabla 5.3. Pesos de los 21 activos en los portafolios 6 al 10.

Resolvamos ahora el problema de Markowitz, es decir, dados los 21 activos riesgosos encontremos un portafolio cuyos pesos en los activos minicen el riesgo del portafolio para un rendimiento esperado dado.

Ejercicio 2. *Encontrar los portafolios de mínima varianza para los rendimientos de 3 %, 4 % y 5 %.*

Portafolio	Rendimiento	Riesgo
1	3 %	0.0335
2	4 %	0.0435
3	5 %	0.0643

Tabla 5.4. Rendimiento y riesgo de los portafolios del problema de Markowitz.

	Pesos de los portafolios		
Activos	1	2	3
1	0 %	0 %	0 %
2	0 %	0 %	0 %
3	0 %	0 %	0 %
4	0 %	0 %	0 %
5	7.59 %	15.18 %	25.54 %
6	0 %	0 %	0 %
7	0 %	0 %	0 %
8	13.14 %	22.16 %	47.76 %
9	26.36 %	15.87 %	0 %
10	12.80 %	13.83 %	12.36 %
11	4.08 %	0 %	0 %
12	0 %	0 %	0 %
13	0 %	0 %	0 %
14	0 %	0 %	0 %
15	0 %	0 %	0 %
16	0 %	0 %	0 %
17	0 %	0 %	0 %
18	0 %	0 %	0 %
19	7.91 %	0.62 %	0 %
20	0 %	0 %	4.65 %
21	28.12 %	32.34 %	9.69 %
Total	100 %	100 %	100 %

Tabla 5.5. Pesos de los activos en los portafolios del problema de Markowitz.

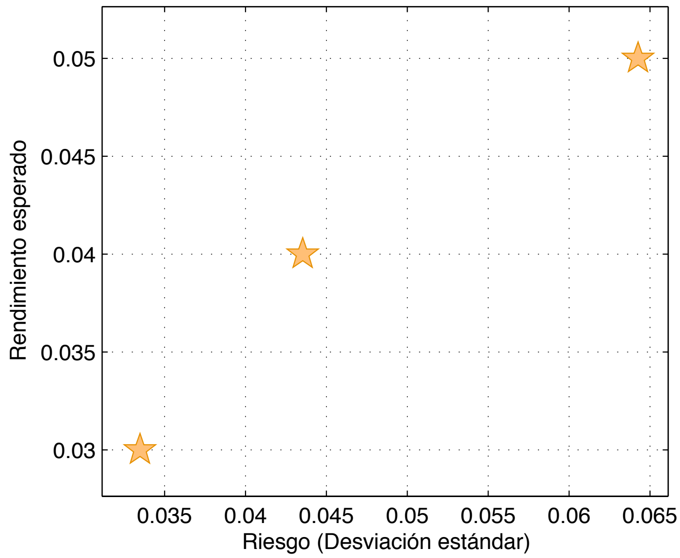


Figura 5.2: Gráfica de los tres portafolios del problema de Markowitz.

5.4. Riesgo de crédito

En esta sección analizaremos el riesgo de crédito a través de la aplicación del modelo de Merton, para lo cual tomaremos como ejemplo el banco "BBVA Bancomer".

Comencemos calibrando el movimiento browniano geométrico[2] en base al comportamiento histórico mensual del precio de cierre de las acciones del banco. Para ello usaremos el histórico del 31 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2007 que se muestra a continuación:

[2]Para mayor referencia de esta calibración puede usted consultar el quinto capítulo del libro Goodman-Stampfli[18]

FECHA	PRECIO
31/01/2006	211.88
28/02/2006	213
31/03/2006	226
30/04/2006	245
31/05/2006	230.63
30/06/2006	232
31/07/2006	234
31/08/2006	250
30/09/2006	254
31/10/2006	258.59
30/11/2006	266.82
31/12/2006	261
31/01/2007	275.37
28/02/2007	271.09
31/03/2007	270
30/04/2007	265
31/05/2007	270
30/06/2007	265.86
31/07/2007	269
31/08/2007	256
30/09/2007	256
31/10/2007	267
30/11/2007	272
31/12/2007	262.2

Tabla 5.6. Valor al cierre
de acciones BBVA-Bancomer.

Al calibrar estos datos obtenemos que $\widehat{\mu}$=0.120568 y $\widehat{\sigma}$ =0.125281 . Ahora nos falta definir A_0 y F. Dado que ocupamos los años 2006 y 2007 para estimar $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\sigma}$, usaremos esos mismos años para estimar A_0 y F, i.e., obtendremos un promedio de los activos de 2006 y 2007 de la compañía para estimar A_0 y haremos lo mismo para estimar F pero a través de los pasivos de la compañía en dichos años. En la siguiente tabla tenemos los activos y pasivos de los balances generales consolidados al 31 de diciembre de 2007 y 2006 en miles de pesos de poder adquisitivo del 31 de diciembre de 2007 del banco BBVA-Bancomer[8]

Año	Activo	Pasivo
2006	672,446,006	576,790,543
2007	731,773,010	630,468,856
Promedio	702,109,508	603,629,700

Tabla 5.7. Activos y pasivos de BBVA-Bancomer

Por lo anterior concluimos que A_0 =702,109,508 y F =603,629,700. Prosigamos a calcular el precio de Black-Scholes para esta opción de compra. Primero obtendremos d_1 y d_2 a través de las fórmulas 4.2 y 4.3 y después calcularemos la distribución normal acumulada de estos puntos:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1.668056 \qquad \Longrightarrow \qquad N(d_1) = 0.952348\,, \\ d_2 &= 1.542775 \qquad \Longrightarrow \qquad N(d_2) = 0.938557\,. \end{aligned}$$

Sea r =5 %, con estos valores se reunen los parámetros (A_0, σ, F, T y r) necesarios para calcular el precio de Black-Scholes, por lo que de la fórmula 4.1 obtenemos que el precio de esta opción de compra es de $129,742,231

Observe que $N(d_1) = 0.952348$ y dado que la probabilidad de incumpliemiento de una empresa se mide como $1 - N(d_1)$, tenemos que BBVA-Bancomer tiene probabilidad 0.047652 de caer en el incumplimiento de sus obligaciones, i.e., es una empresa con muy poco riesgo de crédito. $\square$

Apéndice A

Herramientas financieras en Mathlab

Éste apéndice está dirigido a aquellas personas que están interesadas en saber el algoritmo para obtener los resultados del capítulo 5. Para facilitar el entendimiento de este apéndice, está divido en secciones llamadas conforme el ejercicio correspondiente en el capítulo 5, donde cada sección contiene los comando utilizados para obtener los resultados de cada ejercicio.

A.1. Ejercicio 1

Algoritmo

```
>> RetSeries =[0.0924 0.0106 0.0482 -0.0458 ... 0.1603 -0.0789 -0.0202]
>> [ExpReturn, ExpCovariance, NumEffObs] = ewstats(RetSeries)
>>frontcon(ExpReturn,ExpCovariance, porta)
>>[PortRisk, PortReturn, PortWts] = frontcon(ExpReturn,ExpCovariance, porta)
```

Explicación

- RetSeries: Es la matriz de los rendimientos históricos. Las columnas son acciones y las filas son observaciones; es importante introducir los rendimientos históricos del más antiguo al más reciente, i.e. la primera observación debe ir en la primera fila y la última observación en la última fila, esto es para poder utilizar los comandos posteriores.

- ewstats(): este comando devuelve la información estadística de la matriz de los rendimientos históricos.
  - ExpReturn: es un vector columna que tiene los rendimientos promedio de cada activo.

- ExpCovariance: es la matriz de covarianzas de todos los activos.
- NumEffObs: es el número de observaciones efectivas. En nuestro caso, dado que la antigüedad no tiene peso en la información, el número de observaciones efectivas será igual al número de observaciones dadas.

- porta: es una constante que indica el número de portafolios deseados.
- frontcon(): esta función gráfica la frontera eficiente, véase gráfica 5.1 en la página 94.
- [ ]=frontcon(): los argumentos que calcula está función son los siguientes.
  - PortRisk: es un vector columna que indica el riesgo de cada portafolio contruido como combinación de los activos.
  - PortReturn: es un vector columna que indica el rendimiento esperado de cada portafolio contruido como combinación de los activos.
  - PortWts: es una matriz en la que cada fila representa el conjunto de pesos que recibió cada activo en la contrucción del portafolio, i.e. la fila i-ésima tiene los pesos de los activos que conformaron el portafolio i-ésimo.

A.2. Ejercicio 2

Algoritmo
>> RetSeries =[0.0924 0.0106 0.0482 -0.0458 ... 0.1603 -0.0789 -0.0202]
>> [ExpReturn, ExpCovariance, NumEffObs] = ewstats(RetSeries)
>> NumPorts=[ ]; PortReturn = [0.03 0.04 0.05];
>> [PortRisk, PortReturn, PortWts] = portopt(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts, PortReturn)

Explicación
Salvo la última función, tenemos los mismos elementos que en el ejercicio 1. Así que analicemos la última función.

- [ ]=poropt(): esta función construye portafolios eficientes dados los rendimientos esperados, utilizando los siguientes elementos.
  - NumPorts: este parámetro es opcional. Es el número de portafolios genrados a lo largo de la frontera eficiente. Repartiendo equitativamente entre el máximo rendimiento posible y el punto mínimo de riesgo. Si NumPorts está vacío (introducirlo como [ ]), calcualará 10 puntos espaciados equitativamente.

- PortReturn: este parámetro es opcional. Es el rendimiento esperado para cada portafolio. Es un vector de tamaño NPORTS por 1. Si no se introduce este valor, o es vacío, calculará NumPorts portafolios espaciados equitativamente entre los valores mínimo y máximo posibles. En nuestro caso, queríamos rendimientos del 3 %,4 % y 5 %, es por ello que hicimos PortReturn = [0.03 0.04 0.05].

Apéndice B

Encuesta socioeconómica de SEFIA

Servicios Financieros Alternativos S.A. de C.V., S.F.P.
REGISTRO
"Encuesta socioeconómica"

Revisión DNP
02/05/07

GRUPO SOLIDARIO (CODIGO Y NOMBRE): ____________________ FECHA: __________

NOMBRE DEL CLIENTE: ____________________ SEXO: Masculino ______ Femenino ______

FECHA DE NACIMIENTO: ____________________ EDAD: __________

DIRECCIÓN: ____________________ C.P. __________

LOCALIDAD: __________ MUNICIPIO: __________ TELÉFONO Si ___ No ___

OCUPACIÓN: ____________________ NÚM. Y LADA __________

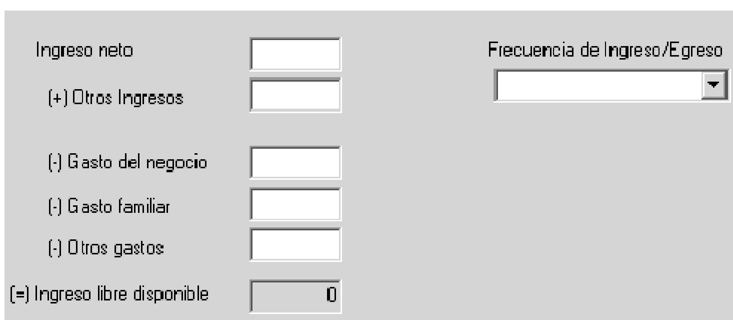
NOMBRE DEL CÓNYUGE: ____________________

B.1. Datos económicos

1. Vivienda

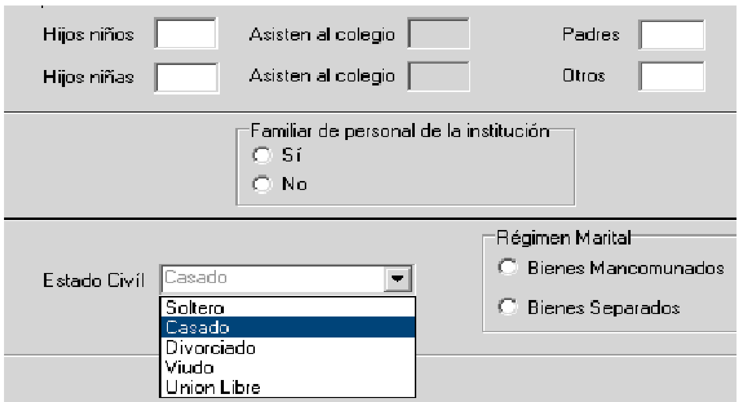
2. Educación

3. Ingreso

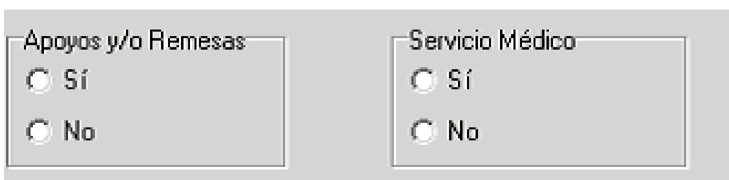


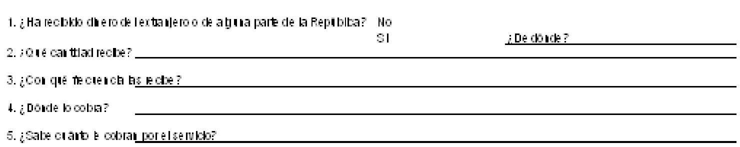
No. de personas que importan ingreso al hogar	

4. Familiares

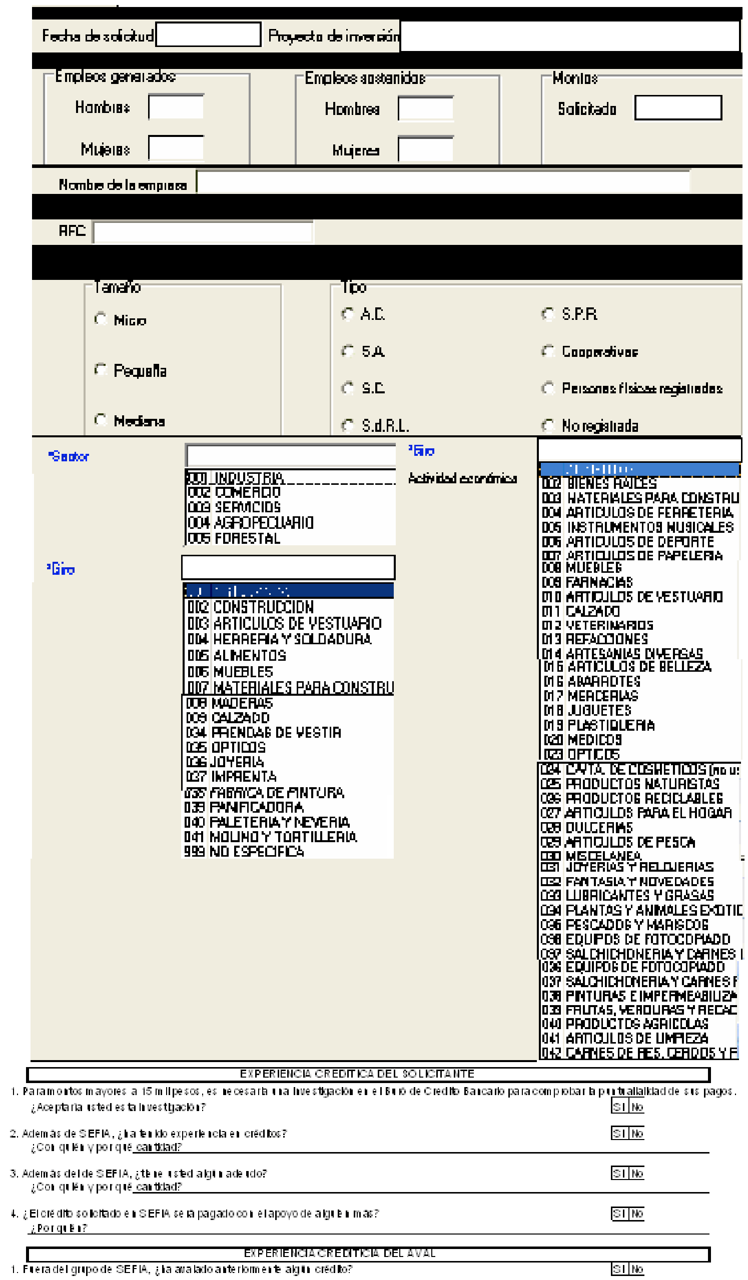


5. Otros




1. ¿Ha recibido dinero del extranjero o de alguna parte de la Repiblica? No
SI ¿De dónde? ______
2. ¿Qué cantidad recibe? ______
3. ¿Con qué frecuencia las recibe? ______
4. ¿Dónde lo cobra? ______
5. ¿Sabe cuánto le cobran por el servicio? ______

B.2. Actividad productiva



Fecha de solicitud
Proyecto de inversión

Empleos generados
Hombres
Mujeres

Empleos sostenidos
Hombres
Mujeres

Montos
Solicitado

Nombre de la empresa

RFC

Tamaño
Micro
Pequeña
Mediana

Tipo
A.C.
S.A.
S.C.
S.d.R.L.
S.P.R.
Cooperativas
Personas físicas registradas
No registrada

*Sector
001 INDUSTRIA
002 COMERCIO
003 SERVICIOS
004 AGROPECUARIO
005 FORESTAL

*Giro
002 CONSTRUCCION
003 ARTICULOS DE VESTUARIO
004 HERRERIA Y SOLDADURA
005 ALIMENTOS
006 MUEBLES
007 MATERIALES PARA CONSTRU
008 MADERAS
009 CALZADO
034 PRENDAS DE VESTIR
035 OPTICOS
036 JOYERIA
037 IMPRENTA
038 FABRICA DE PINTURA
039 PANIFICADORA
040 PALETERIA Y NEVERIA
041 MOLINO Y TORTILLERIA
999 NO ESPECIFICA

*Giro
Actividad económica
002 BIENES RAICES
003 MATERIALES PARA CONSTRU
004 ARTICULOS DE FERRETERIA
005 INSTRUMENTOS MUSICALES
006 ARTICULOS DE DEPORTE
007 ARTICULOS DE PAPELERIA
008 MUEBLES
009 FARMACIAS
010 ARTICULOS DE VESTUARIO
011 CALZADO
012 VETERINARIOS
013 REFACCIONES
014 ARTESANIAS DIVERSAS
015 ARTICULOS DE BELLEZA
016 ABARROTES
017 MERCERIAS
018 JUGUETES
019 PLASTIQUERIA
020 MEDICOS
023 OPTICOS
024 CATA. DE COSMETICOS (no u:
025 PRODUCTOS NATURISTAS
026 PRODUCTOS RECICLABLES
027 ARTICULOS PARA EL HOGAR
028 DULCERIAS
029 ARTICULOS DE PESCA
030 MISCELANEA
031 JOYERIAS Y RELOJERIAS
032 FANTASIA Y NOVEDADES
033 LUBRICANTES Y GRASAS
034 PLANTAS Y ANIMALES EXOTIC
035 PESCADOS Y MARISCOS
036 EQUIPOS DE FOTOCOPIADO
037 SALCHICHONERIA Y CARNES I
036 EQUIPOS DE FOTOCOPIADO
037 SALCHICHONERIA Y CARNES F
038 PINTURAS E IMPERMEABILIZA
039 FRUTAS, VERDURAS Y RECAC
040 PRODUCTOS AGRICOLAS
041 ARTICULOS DE LIMPIEZA
042 CARNES DE RES, CERDOS Y F

EXPERIENCIA CREDITICA DEL SOLICITANTE

1. Para montos mayores a 15 mil pesos, es necesaria una investigación en el Buró de Credito Bancario para comprobar la puntualidad de sus pagos.
¿Aceptaría usted esta investigación? SI No

2. Además de SEFIA, ¿ha tenido experiencia en créditos? SI No
¿Con quién y por qué cantidad?

3. Además del de SEFIA, ¿tiene usted algún adeudo? SI No
¿Con quién y por qué cantidad?

4. ¿El crédito solicitado en SEFIA será pagado con el apoyo de alguien más? SI No
¿Por quién?

EXPERIENCIA CREDITICIA DEL AVAL

1. Fuera del grupo de SEFIA, ¿ha avalado anteriormente algún crédito? SI No

Apéndice C

Tabla de mortalidad e invalidez

En este apéndice se desarrollarán la tabla de mortalidad y la de invalidez, a través de las las tasas de mortalidad individual de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) 2000-I para la primera y las tasas de invalidez de experiencia mexicana del Seguro Social para la segunda.

De manera formal las tasas deben de ajustarse para obtener una probabilidad, sin embargo este procedimiento es muy complejo y es un amplio tema demográfico el realizar estos ajustes, es por ello que se acostumbra usar estas tasas como las probabilidades, i.e., como las q's de la tabla a construir, ya que aunque hacer ésto no es lo más adecuado si es una buena aproximación.

Se tienen entonces las q's para comenzar la tabla pero antes de ello observe que por construcción de las tasas, en ambas tablas, ω =100, lo cual implica que q_{100} =1.

Definamos el radix inicial en ambas tablas como 10,000 personas, i.e., l_{12} =10,000 para la tabla de mortalidad y l_{15} =10,000 para la de invalidez. A continuación enunciaremos las fórmulas de la sección 2.1 que necesitaremos para la construcción de la tabla:

- $p_x = 1 - q_x$
- $l_x = l_{x-1} - d_{x-1}$[1]
- $d_x = q_x(l_x)$
- $D_x = V^x\ l_x$
- $N_x = \displaystyle\sum_{t=0}^{100-x-1} D_{x+t}$

[1]Donde $x > 12$ para la tabla de mortalidad y $x > 15$ para la de invalidez.

Tabla de mortalidad

x	q_x	p_x	l_x	d_x	D_x	N_x
12	0.000396	0.999604	10,000	4	6,245.97	145,602.03
13	0.000427	0.999573	9,996	4	6,003.36	139,356.06
14	0.000460	0.999540	9,992	5	5,770.00	133,352.69
15	0.000495	0.999505	9,987	5	5,545.52	127,582.69
16	0.000533	0.999467	9,982	5	5,329.60	122,037.17
17	0.000575	0.999425	9,977	6	5,121.88	116,707.57
18	0.000619	0.999381	9,971	6	4,922.05	111,585.70
19	0.000667	0.999333	9,965	7	4,729.81	106,663.64
20	0.000718	0.999282	9,958	7	4,544.86	101,933.83
21	0.000773	0.999227	9,951	8	4,366.92	97,388.97
22	0.000833	0.999167	9,944	8	4,195.72	93,022.04
23	0.000897	0.999103	9,935	9	4,030.98	88,826.32
24	0.000966	0.999034	9,926	10	3,872.47	84,795.34
25	0.001041	0.998959	9,917	10	3,719.93	80,922.87
26	0.001121	0.998879	9,906	11	3,573.13	77,202.94
27	0.001207	0.998793	9,895	12	3,431.85	73,629.80
28	0.001300	0.998700	9,883	13	3,295.88	70,197.95
29	0.001400	0.998600	9,871	14	3,164.99	66,902.07
30	0.001508	0.998492	9,857	15	3,039.00	63,737.08
31	0.001624	0.998376	9,842	16	2,917.71	60,698.08
32	0.001749	0.998251	9,826	17	2,800.93	57,780.37
33	0.001884	0.998116	9,809	18	2,688.50	54,979.43
34	0.002029	0.997971	9,790	20	2,580.22	52,290.94
35	0.002186	0.997814	9,770	21	2,475.95	49,710.71
36	0.002354	0.997646	9,749	23	2,375.52	47,234.77
37	0.002535	0.997465	9,726	25	2,278.77	44,859.25
38	0.002730	0.997270	9,701	26	2,185.57	42,580.48
39	0.002940	0.997060	9,675	28	2,095.78	40,394.90
40	0.003166	0.996834	9,646	31	2,009.24	38,299.13
41	0.003410	0.996590	9,616	33	1,925.85	36,289.88
42	0.003672	0.996328	9,583	35	1,845.46	34,364.03
43	0.003954	0.996046	9,548	38	1,767.97	32,518.57
44	0.004258	0.995742	9,510	40	1,693.25	30,750.60
45	0.004585	0.995415	9,470	43	1,621.19	29,057.36
46	0.004938	0.995062	9,426	47	1,551.69	27,436.16
47	0.005317	0.994683	9,380	50	1,484.64	25,884.48
48	0.005725	0.994275	9,330	53	1,419.95	24,399.83
49	0.006164	0.993836	9,276	57	1,357.52	22,979.88
50	0.006637	0.993363	9,219	61	1,297.26	21,622.36
51	0.007145	0.992855	9,158	65	1,239.09	20,325.10
52	0.007693	0.992307	9,093	70	1,182.92	19,086.01
53	0.008282	0.991718	9,023	75	1,128.67	17,903.10
54	0.008915	0.991085	8,948	80	1,076.27	16,774.43
55	0.009597	0.990403	8,868	85	1,025.65	15,698.15
56	0.010330	0.989670	8,783	91	976.74	14,672.50

Figura C.1: *Tabla de mortalidad de las edades 12 a la 56*

x	q_x	p_x	l_x	d_x	D_x	N_x
57	0.011119	0.988881	8,692	97	929.47	13,695.76
58	0.011967	0.988033	8,596	103	883.78	12,766.29
59	0.012879	0.987121	8,493	109	839.62	11,882.51
60	0.013860	0.986140	8,383	116	796.93	11,042.89
61	0.014914	0.985086	8,267	123	755.66	10,245.95
62	0.016048	0.983952	8,144	131	715.76	9,490.29
63	0.017265	0.982735	8,013	138	677.19	8,774.53
64	0.018574	0.981426	7,875	146	639.90	8,097.35
65	0.019980	0.980020	7,729	154	603.86	7,457.45
66	0.021490	0.978510	7,574	163	569.03	6,853.59
67	0.023111	0.976889	7,411	171	535.39	6,284.56
68	0.024851	0.975149	7,240	180	502.90	5,749.17
69	0.026720	0.973280	7,060	189	471.54	5,246.27
70	0.028724	0.971276	6,872	197	441.29	4,774.73
71	0.030874	0.969126	6,674	206	412.13	4,333.44
72	0.033180	0.966820	6,468	215	384.04	3,921.32
73	0.035651	0.964349	6,254	223	357.02	3,537.27
74	0.038300	0.961700	6,031	231	331.05	3,180.25
75	0.041136	0.958864	5,800	239	306.12	2,849.21
76	0.044174	0.955826	5,561	246	282.24	2,543.08
77	0.047424	0.952576	5,315	252	259.40	2,260.84
78	0.050902	0.949098	5,063	258	237.59	2,001.44
79	0.054619	0.945381	4,806	262	216.83	1,763.85
80	0.058592	0.941408	4,543	266	197.10	1,547.02
81	0.062834	0.937166	4,277	269	178.41	1,349.92
82	0.067362	0.932638	4,008	270	160.77	1,171.51
83	0.072190	0.927810	3,738	270	144.18	1,010.73
84	0.077337	0.922663	3,468	268	128.62	866.56
85	0.082817	0.917183	3,200	265	114.11	737.93
86	0.088649	0.911351	2,935	260	100.64	623.82
87	0.094850	0.905150	2,675	254	88.19	523.19
88	0.101436	0.898564	2,421	246	76.75	435.00
89	0.108424	0.891576	2,176	236	66.31	358.25
90	0.115832	0.884168	1,940	225	56.85	291.94
91	0.123677	0.876323	1,715	212	48.33	235.09
92	0.131973	0.868027	1,503	198	40.73	186.75
93	0.140737	0.859263	1,305	184	33.99	146.03
94	0.149983	0.850017	1,121	168	28.08	112.04
95	0.159723	0.840277	953	152	22.95	83.95
96	0.169970	0.830030	801	136	18.55	61.00
97	0.180733	0.819267	665	120	14.80	42.45
98	0.192020	0.807980	544	105	11.66	27.65
99	0.203837	0.796163	440	90	9.06	15.99
100	1.000000	0.000000	350	350	6.93	6.93

Figura C.2: *Tabla de mortalidad de las edades 57 a la 100*

Tabla de invalidez

x	q_x	p_x	l_x	d_x	D_x	N_x
15	0.000690	0.999310	10,000	7	6,245.97	138,121.45
16	0.000690	0.999310	9,993	7	6,001.60	131,875.48
14	0.000690	0.999310	9,986	7	5,766.78	125,873.89
15	0.000720	0.999280	9,979	7	5,541.16	120,107.10
16	0.000800	0.999200	9,972	8	5,324.20	114,565.94
17	0.000920	0.999080	9,964	9	5,115.33	109,241.74
18	0.001080	0.998920	9,955	11	4,914.06	104,126.41
19	0.001270	0.998730	9,944	13	4,719.95	99,212.35
20	0.001490	0.998510	9,932	15	4,532.65	94,492.40
21	0.001740	0.998260	9,917	17	4,351.83	89,959.74
22	0.002020	0.997980	9,900	20	4,177.17	85,607.92
23	0.002310	0.997690	9,880	23	4,008.40	81,430.75
24	0.002620	0.997380	9,857	26	3,845.32	77,422.35
25	0.002940	0.997060	9,831	29	3,687.74	73,577.03
26	0.003280	0.996720	9,802	32	3,535.48	69,889.29
27	0.003620	0.996380	9,770	35	3,388.35	66,353.81
28	0.003970	0.996030	9,734	39	3,246.23	62,965.47
29	0.004330	0.995670	9,696	42	3,108.99	59,719.23
30	0.004690	0.995310	9,654	45	2,976.46	56,610.25
31	0.005060	0.994940	9,609	49	2,848.56	53,633.78
32	0.005430	0.994570	9,560	52	2,725.14	50,785.22
33	0.005800	0.994200	9,508	55	2,606.10	48,060.08
34	0.006180	0.993820	9,453	58	2,491.33	45,453.98
35	0.006560	0.993440	9,394	62	2,380.71	42,962.64
36	0.006950	0.993050	9,333	65	2,274.13	40,581.94
37	0.007340	0.992660	9,268	68	2,171.46	38,307.81
38	0.007730	0.992270	9,200	71	2,072.62	36,136.35
39	0.008130	0.991870	9,129	74	1,977.50	34,063.73
40	0.008550	0.991450	9,055	77	1,885.98	32,086.23
41	0.008970	0.991030	8,977	81	1,797.94	30,200.25
42	0.009400	0.990600	8,897	84	1,713.28	28,402.31
43	0.009850	0.990150	8,813	87	1,631.90	26,689.03
44	0.010320	0.989680	8,726	90	1,553.68	25,057.14
45	0.010810	0.989190	8,636	93	1,478.50	23,503.46
46	0.011320	0.988680	8,543	97	1,406.27	22,024.95
47	0.011870	0.988130	8,446	100	1,336.88	20,618.68
48	0.012440	0.987560	8,346	104	1,270.20	19,281.81
49	0.013050	0.986950	8,242	108	1,206.15	18,011.61
50	0.013710	0.986290	8,134	112	1,144.63	16,805.46
51	0.014400	0.985600	8,023	116	1,085.51	15,660.83
52	0.015150	0.984850	7,907	120	1,028.73	14,575.32
53	0.015960	0.984040	7,788	124	974.18	13,546.58
54	0.016830	0.983170	7,663	129	921.76	12,572.40
55	0.017760	0.982240	7,534	134	871.39	11,650.64
56	0.018770	0.981230	7,401	139	823.00	10,779.25

Figura C.3: *Tabla de invalidez de las edades 15 a la 56*

x	q_x	p_x	l_x	d_x	D_x	N_x
57	0.019860	0.980140	7,262	144	776.49	9,956.25
58	0.021030	0.978970	7,117	150	731.80	9,179.76
59	0.022300	0.977700	6,968	155	688.85	8,447.97
60	0.023680	0.976320	6,812	161	647.59	7,759.11
61	0.025160	0.974840	6,651	167	607.94	7,111.53
62	0.026760	0.973240	6,484	174	569.85	6,503.59
63	0.028480	0.971520	6,310	180	533.27	5,933.74
64	0.030340	0.969660	6,131	186	498.15	5,400.48
65	0.032340	0.967660	5,945	192	464.46	4,902.32
66	0.034490	0.965510	5,752	198	432.15	4,437.86
67	0.036800	0.963200	5,554	204	401.20	4,005.71
68	0.039290	0.960710	5,349	210	371.57	3,604.51
69	0.041950	0.958050	5,139	216	343.24	3,232.94
70	0.044810	0.955190	4,924	221	316.20	2,889.69
71	0.047860	0.952140	4,703	225	290.41	2,573.49
72	0.051130	0.948870	4,478	229	265.88	2,283.08
73	0.054620	0.945380	4,249	232	242.58	2,017.20
74	0.058350	0.941650	4,017	234	220.51	1,774.62
75	0.062320	0.937680	3,783	236	199.66	1,554.11
76	0.066550	0.933450	3,547	236	180.01	1,354.45
77	0.071050	0.928950	3,311	235	161.57	1,174.44
78	0.075830	0.924170	3,076	233	144.32	1,012.87
79	0.080910	0.919090	2,842	230	128.25	868.55
80	0.086300	0.913700	2,612	225	113.34	740.30
81	0.092000	0.908000	2,387	220	99.57	626.97
82	0.098050	0.901950	2,167	213	86.93	527.40
83	0.104440	0.895560	1,955	204	75.39	440.46
84	0.111190	0.888810	1,751	195	64.92	365.07
85	0.118330	0.881670	1,556	184	55.48	300.15
86	0.125850	0.874150	1,372	173	47.04	244.66
87	0.133790	0.866210	1,199	160	39.54	197.62
88	0.142140	0.857860	1,039	148	32.93	158.09
89	0.150940	0.849060	891	135	27.16	125.16
90	0.160190	0.839810	757	121	22.18	97.99
91	0.169910	0.830090	635	108	17.91	75.82
92	0.180120	0.819880	527	95	14.29	57.91
93	0.190830	0.809170	432	83	11.27	43.62
94	0.202060	0.797940	350	71	8.77	32.35
95	0.213830	0.786170	279	60	6.73	23.58
96	0.226160	0.773840	220	50	5.08	16.86
97	0.239060	0.760940	170	41	3.78	11.77
98	0.000000	1.000000	129	0	2.77	7.99
99	0.000000	1.000000	129	0	2.66	5.22
100	1.000000	0.000000	129	129	2.56	2.56

Figura C.4: *Tabla de invalidez de las edades 57 a la 100*

Bibliografía

[1] AGROASEMEX. *¿Qué debo hacer para consituir un Fondo de Aseguramiento?*[en línea]. <http://www.agroasemex.gob.mx/fondos/-D2_01.html> [Consulta: febrero 2007]

[2] AGROASEMEX. *Organismos Integradores: Proceso de constitución de un Organismo Integrador* [en línea]. <http://www.agroasemex.gob.mx/fondos/D5_03.html> [Consulta: febrero 2007]

[3] AGROASEMEX. *Seguro y Reaseguro* [en línea]. <http://www.agroasemex.gob.mx/seguro/B1_01.html> [Consulta: febrero 2007]

[4] Ammann, Manuel. *Credit Risk Valuation: Methods, Models, and Applications*. Editorial Springer. 2a edición. Alemania, 2001.

[5] Anderson, Arthur W. *Pension mathematics for actuaries.* ACTEX Publications, Inc. 2a edición. EUA , 1992.

[6] Aranda Martínez, Oscar; Castillo García, Nadia Araceli. *Matemáticas Actuariales I.* Facultad de Ciencias. Vínculos matemáticos No. 43. México, 2006.

[7] Asociación Mexicana en Dirección de Recursos Humanos. *Pensiones* [en línea]. <http://www.amedirh.com.mx/apartados/articulos/-documentos/febrero/art220206/pensiones.htm> [Consulta: febrero 2007]

[8] BBVA-Bancomer. *Informe anual 2007* [en línea]. <http://www.bancomer.com.mx/nuestrom/09/2007.pdf> [Consulta: marzo 2008]

[9] Bingham, N.H.; Kiesel, R. *Risk-Neutral Valaution: Pricing and Hedging of Financial Derivates.* Springer Finance. Springer-Verlag. Tercera edición. 2000.

[10] Bluhm; Overbeck; Wagner. *An introduction to Credit Risk Modeling.* Ed. Chapman & Hall/CRC. Estados Unidos, 2003.

[11] Bowers; Gerber; Hickman; Jones & Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. Ed. Society of Actuaries. Estados Unidos, 1986.

[12] Comisión Federal de Competencia. *Competencia entre las AFORE* [en línea]. <http://www.cfc.gob.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=1750&Itemid=138> [Consulta: febrero 2007]

[13] Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. *Comparación de las comisiones de las AFORE* [en línea]. <http://www.consar.gob.mx/compara_afore/comisiones.htm> [Consulta: febrero 2007]

[14] Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. *Comparación de los rendimientos de las AFORE* [en línea]. <http://www.consar.gob.mx/compara_afore/rendimientos.htm> [Consulta: febrero 2007]

[15] Díaz Mata, Alfredo; Aguilera Gómez, Víctor Manuel. *Matemáticas financieras*. Editorial McGraw-Hill. México, 1999.

[16] Farreras Sanz, Salvador. *Reforma Ley ISSSTE-SAR-AFORE. Comencemos a preocuparnos* [en línea], 20 agosto 2004. Asociación del Personal Académico del Centro de Investigacion Cientifica y de Educacion Superior de Ensenada. <http://apacicese.cicese.mx/foro2.php> [Consulta: febrero 2007]

[17] Galindo Madroño, Anna Ligia. *Problemática de Pensionados del IMSS para el Año 2015. La Difícil Tarea de Mantener una Previsión Social Adecuada.* Tesis de licenciatura en actuaría de la Universidad de las Américas Puebla. México 2005.

[18] Goodman, Victor; Stampfli, Joseph. *Matemáticas para las finanzas*. Estados Unidos.

[19] *Enciclopédico Universo: Diccionario de la lengua española*. Fernández editores. Segunda edición. México, 1979.

[20] Hull, John C. *Options, Futures and Other Derivatives*. Sexta edición. Ed. Prentice Hall. London, 1993.

[21] Instituto de Seguridad Social para las Fuerzas Armadas Mexicanas. *Marco histórico de la Ley del ISSFAM* [en línea] <www.issfam.gob.mx/archivos_issfam/ley_trans/informes/memoria_02/marco_conceptual.pdf> [Consulta: febrero 2007]

[22] Lozano Nathal, Carlos. *Notas del curso de pensiones privadas*. México.

[23] Luenberger, David G. *Investment Science*. Oxford University Press. Nueva York Oxford, 1998.

[24] Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española*. Vigésima segunda edición. Madrid, 2001.

[25] Secretaría de la Reforma Agraria. *Programas de fondos para las tierras* [en línea]. <http://www.sra.gob.mx/internet/informacion_general/-programas/fondo_tierras/resumen.html> [Consulta: febrero 2007]