



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**Facultad de Ingeniería**

**Metodología de diseño de  
manipuladores seriales RRR en  
base a la menor energía**

Tesis que presenta:

Yahvé Abdul Ledezma Rubio

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico

Director de Tesis: Dr. Ángel Alfonso Rojas Salgado



México, D. F.

Abril 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Le dedico este trabajo a mi madre, no solo por darme la vida, también por darme las herramientas con las cuales no solo sobrevivir, si no ser una persona de bien para la comunidad.

A mi padre, aquel que me vio crecer y me dio el ánimo de saber más, de conocer las cosas, de ver a las estrellas y tratar de encontrar que hay detrás de ellas.

## I. Agradecimientos.

Gracias a mi familia, por el apoyo que me brindó desde la más tierna infancia, para poder conocer y crecer en este mundo cambiante.

Gracias a mis profesores, no solo los de la carrera, si no aquellos que encausaron mi camino en los diferentes niveles escolares, ya que de cada uno de ellos adquirí todo aquello que en las aulas se debe aprender.

Gracias a mis amigos, a los que veo a diario, a los que veo una vez al año. A todos aquellos que puedo considerar como amigos, no solo por haber pasado horas dentro del salón de clases, si no por las experiencias vividas afuera de ellos. Donde quiera que estén, gracias por haber estado conmigo. “Amigo es aquel que uno escoge como su familia”.

Gracias a la UNAM, por brindarme esa oportunidad de ampliar mis conocimientos, de vivir las experiencias buenas y malas, de ser un lugar en el cual pude crecer a lo largo del tiempo.

Este trabajo no es solo la culminación de un ciclo de estudio, sino el resultado de las acciones de muchas personas. Gracias a todos ustedes que han estado conmigo en este camino de estudio y crecimiento. A todos ustedes, gracias.

En especial quiero agradecer al Dr. Ángel Alfonso Rojas Salgado, por darme la oportunidad de realizar esta tesis bajo su supervisión y “sobrevivir” a terminar esta investigación. Gracias también a la DGAPA y su programa PAPIIT por los recursos otorgados para realizar esta investigación.

“GRACIAS A TI, POR ESTAR AHÍ”.

I.	Agradecimientos.	3
II.	Índice.	4
1.	Introducción.	7
1.1.	El hombre y su desarrollo.	7
1.2.	Justificación.	8
1.3.	Objetivo general.	10
1.4.	Objetivos particulares.	10
1.5.	Descripción del trabajo escrito.	11
2.	Marco teórico.	12
2.1.	Antecedentes matemáticos.	12
2.1.1.	Algebra vectorial.	13
2.1.2.	Base canónica y bases ortonormales.	15
2.1.3.	Transformación lineal.	16
2.1.4.	Antecedentes de cálculo de una y múltiples variables.	18
2.2.	Sistemas termodinámicos.	20
2.2.1.	Campo de estudio de la termodinámica	20
2.2.2.	Sistemas termodinámicos y sus fronteras.	21
2.2.3.	Propiedades y estados termodinámicos.	22
2.2.4.	Trabajo.	23
2.2.5.	Energía y la primera ley de la termodinámica.	24
2.2.6.	Características de la energía y el trabajo.	25
2.3.	Cinemática de un cuerpo rígido.	27

2.3.1. Cinemática de la partícula.	27
2.3.2. Marcos de referencia absolutos y relativos.	30
2.3.3. Cinemática del cuerpo rígido.	31
2.4. Dinámica de un cuerpo rígido.	38
2.4.1. Cantidad de movimiento de un sistema de partículas.	39
2.4.2. Cantidad de movimiento en un cuerpo rígido.	40
2.4.3. Energía cinética de un cuerpo rígido.	43
2.5. Clasificación de los robots.	43
2.5.1. Antecedentes de los robots.	43
2.5.2. Eslabones, articulaciones y grados de libertad.	44
2.5.3. Sistemas de lazo abierto y cerrado.	46
2.5.4. Clasificación de los robots.	47
2.6. Principios de optimización.	48
2.6.1. Función Objetivo.	48
2.6.2. Mínimos absolutos y mínimos locales.	49
2.6.3. Función objetivo de variable vectorial.	50
2.6.4. Regiones y restricciones.	50
2.6.5. Convergencia.	52
2.6.6. Método simplex	53
3. Modelo teórico.	56
3.1. Modelo termodinámico de un manipulador serial.	56
3.2. Modelo cinemático de un manipulador serial.	60
3.3. Ecuaciones de energía del sistema.	65
3.4. Ecuación objetivo del sistema.	66
3.5. Restricciones del Modelo.	67

4. Simulación y resultados.	70
4.1. Resultados en trayectoria con energía constante.	71
4.2. Resultados con energía potencial variable.	73
4.3. Resultados con energía cinética variable.	76
4.4. Simulaciones de un manipulador plano RRR.	79
5. Conclusiones y perspectivas.	82
5.1. Alcances del estudio.	82
5.2. Limitaciones de cómputo.	83
5.3. Perspectivas del estudio a futuro.	83
5.4. Resumen de la metodología ocupada.	84
Bibliografía	85
Glosario	86
Índice de figuras	87

*“Cada uno es responsable para siempre de aquello que ha cautivado”*

*El principito*

*Antoine de Saint-Exupéry*

## 1 Introducción

Este trabajo se enfoca en dar un nuevo acercamiento al diseño de sistemas mecánicos, específicamente, aplicado a manipuladores robóticos. Por medio del análisis de la energía mecánica asociada a cada manipulador y a la trayectoria que tiene que realizar, se definirá cuales son los parámetros de diseño óptimos para realizar el trabajo con la menor energía posible.

En muchas tareas la energía requerida para mover una carga o trazar una trayectoria no se pueden reducir más, dando pauta a tratar de optimizar ahora el manipulador o mecanismo que realice dicha tarea. Los parámetros de diseño que se ocupan en este caso son las longitudes de cada eslabón, aunque también se pueden usar las formas de la sección transversal de los eslabones, tipos de materiales o configuraciones geométrías que se deseen probar.

Como se irá desarrollando en el texto, la metodología a seguir en este trabajo se puede resumir de la siguiente forma. Con una trayectoria a cumplir, se darán los siguientes pasos:

- Describir el modelo termodinámico
- Describir el modelo mecánico.
- Analizar la trayectoria y región factible.
- Analizar el mecanismo y obtener la ecuación de energía
- Optimizar la función de energía

Como resultado se contempla el poder generar un diseño óptimo en el que se reduzca el consumo de energía al mínimo, siendo la mayor parte de energía canalizada a la tarea por realizar.

### 1.1 El hombre y su desarrollo.

En los albores de la civilización, tres factores fundamentales fueron los que dieron al hombre ventajas competitivas con respecto de otras especies. El primero fue el cerebro de mayor tamaño, con lo que conseguía adaptarse más fácilmente al medio ambiente y modificarlo. El segundo factor fue la capacidad de manipular su entorno, por medio de sus extremidades superiores libres al ser bípedo. El tercer factor fue el uso del fuego, que le permitió cocinar y mantenerse caliente durante las noches, al inicio clasificado

como elemento fundamental de todo lo existente. Con el paso de los años, estos mismos factores siguen dominando al hombre y su futuro. Por medio del cerebro sigue desarrollando innovaciones, creando ideas, proyectando nuevas formas de cambiar su mundo. Actualmente el uso de las manos se ve extendido por medio del uso de herramientas y maquinarias complejas. Por su parte, el fuego representa el uso de la energía, en sus diferentes formas ya sean combustibles fósiles, electricidad o energía nuclear.

Pero a la par de este gran desarrollo se han creado grandes problemas. El deterioro ambiental amenaza a la población, sus asentamientos y a futuro, la prevalencia del hombre dentro del planeta, esto debido al gran consumo de energéticos y dependencia del mismo. Este problema aumenta junto con el crecimiento de la población, siendo enorme por sus efectos, debido a que el planeta recibe una gran cantidad de emisiones y los ciclos naturales se ven sobrepasados en la absorción de las mismas. Ahora, con una población que ronda alrededor de los seis mil millones de habitantes, el ser humano debe de hacer un uso racional de la tecnología y de los recursos energéticos, para disminuir su impacto en el ambiente, y si es posible, corregirlo.

Con esta perspectiva, es necesario hacer un uso eficiente de energéticos, y cualquier disminución del consumo de los mismos ayudará en esta causa. Ya sea desde las actividades cotidianas hasta en la industria especializada, para aumentar las probabilidades de continuar con un desarrollo sustentable de la humanidad.

## 1.2 Justificación.

El ahorro de energía representa uno de los grandes retos de la actualidad, tanto por su importancia ecológica como económica. El impacto ambiental de la generación de energía por medios no renovables (petróleo, gas natural) y las consecuencias de los gases de invernadero en el cambio climático dan una gran relevancia a cualquier esfuerzo por el ahorro de energía. Por otro lado, el impacto económico viene de la mano, ya sea directamente en el costo de producción de energía, así como en los costos por daños colaterales a la infraestructura y la población causados por los desordenes ambientales desatados por el uso de combustibles “no limpios”. Estos últimos introdujeron a la atmósfera más de 6800 millones de toneladas de carbono al medio ambiente en el 2003. En la gráfica se observa la preponderancia de la generación de energía eléctrica y la industria dentro de esta descarga al medio ambiente (Fig.1.1), con sus consecuentes efectos [1].

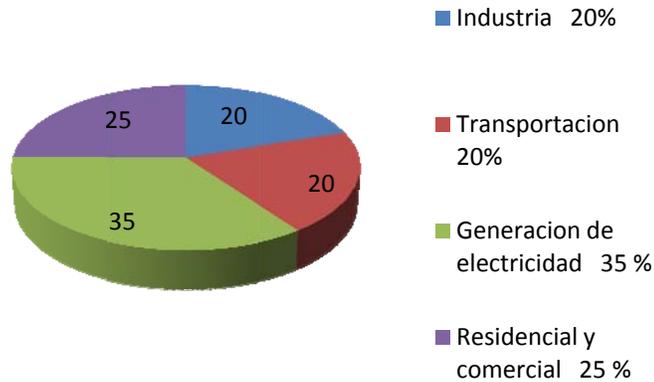


Figura 1.1 Porcentajes de producción de emisiones de carbono.

Las líneas de trabajo actuales en el ahorro de energía se encaminan en varias ramas. La primera toma como premisa la generación de energía renovable o limpia, para así mitigar los efectos ambientales del uso de combustibles fósiles. Otra rama se orienta en el incremento en eficiencia, ya sea por el cambio de equipos obsoletos o de baja eficiencia por otros con tecnología reciente. Otra rama más está enfocada al cambio de conductas para fomentar el ahorro de energía, concientizando a la población.

De estas medidas, la menos onerosa y de rápida implementación es el cambio de conductas, pero es una de las de menor impacto. Las otras dos medidas permiten un mayor ahorro de energía, pero son de un mayor costo, como el cambio de equipos, o reemplazo de combustibles. En general, se requiere un enfoque integral en el que se tomen en cuenta todos los posibles caminos para el uso eficiente y racional de la energía.

Como ejemplo de las actuales políticas de ahorro de energía se pueden encontrar los programas propuestos por CONAE, los cuales se orientan a mejorar las normas en equipos que proporcionen mejores eficiencias, cambio o mejora de equipos obsoletos y el cambio en conductas del uso de la energía. Casos específicos son aquellos en los que el uso eficiente de lámparas no incandescentes y aparatos electrodomésticos con normatividades vigentes, logren un ahorro del 35% en el consumo de energía dentro del hogar. Otro ejemplo es el ahorro propuesto en los nuevos equipos de aire acondicionado, que llega a un 25% según la norma actual (NOM-011-ENER-2006). Un último ejemplo, orientado a las conductas está dado por la modificación en las formas de manejo de vehículos de transporte de pasajeros o carga, en los cuales el cambio en la forma de manejo logra un ahorro del 6.99% de combustible a comparación de un manejo normal.

La importancia del ahorro de energía radica en que se debe de mejorar cómo producirla, cómo transmitirla y cómo ocuparla, ya sea por los equipos de generación o por la forma en la que se usa esta energía, para mitigar los efectos colaterales que ocasionan su uso ineficiente.

En la actualidad, dentro del campo de los manipuladores robóticos se pueden observar avances en los actuadores, siendo de mayor eficiencia en la transformación entre tipos de energía, así como en la planeación de las trayectorias a realizar. Siendo así, el presente trabajo explora otra rama más, en la que el diseño de un robot va a depender del mejor uso de energía para una tarea asignada y de esta forma colaborar con el ahorro energético.

### 1.3 Objetivo general.

Al final del presente trabajo se busca llegar al siguiente objetivo:

**Definir una metodología para encontrar las dimensiones óptimas de diseño para un manipulador serial a partir del menor estado energético del mismo.**

Para este caso las dimensiones óptimas de diseño se refieren a las longitudes y formas que debe de tener el manipulador, para con ellas modificarlos valores de inercia que están involucrados y la energía necesaria para realizar la tarea propuesta. Las ecuaciones de energía del manipulador quedarán en función de las dimensiones de diseño, y se buscará la combinación de dimensiones que logren un mínimo en el estado energético al ir realizando la tarea requerida.

### 1.4 Objetivos particulares.

Para el desarrollo de este trabajo se requiere ir cumpliendo con diferentes etapas, en las cuales se pueden identificar los siguientes objetivos particulares:

- Definir el estado energético y los flujos de energía que afectan al manipulador.
- Describir la cinemática y dinámica del manipulador a ocupar.
- Relacionar las dimensiones de diseño del manipulador con la función energía.
- Aplicar un método para optimizar la función objetivo de energía del manipulador.

El cumplir estos objetivos particulares se logra por medio de la relación entre los conocimientos básicos de mecánica clásica y termodinámica, por medio de los que se pretende modelar el sistema. Al final, englobando todos ellos cimentan el objetivo general para su aplicación.

### 1.5 Descripción del trabajo escrito.

De la misma forma que se presentan los objetivos particulares y generales, este texto desarrolla cada uno de ellos por etapas. En el capítulo 2 se da una introducción a los conocimientos básicos de termodinámica, mecánica clásica, descripción de los manipuladores y robots así como una breve introducción a los conceptos de optimización. En el capítulo 3 se explora la metodología a ocupar con la relación de los conocimientos anteriores en la descripción de un manipulador y de cómo se genera el modelo en particular con el que se va a trabajar.

El capítulo 4 presenta el modelo de manipuladores de una construcción simple y las simulaciones realizadas con él. Se obtendrán los resultados para diferentes procesos, ya sean estos de energía constante o variable, y se verá cómo afectan al manipulador. En el capítulo 5 se analizan los resultados y los alcances que puede tener esta técnica para el análisis de sistemas más complejos dentro de los mecanismos y robots, a la par de las conclusiones a las que llega este trabajo.

*"Somos el medio para que el Cosmos se conozca a sí mismo."*

*Carl Sagan.*

## 2 Marco teórico.

La generación del conocimiento del hombre es un problema filosófico estudiado desde la época clásica. Ya sea desde la forma en que se adquiere conocimiento por medio de la clasificación de las cosas, hasta el tratar de llegar a teorías generales que engloben lo que ocurre en un área del conocimiento, la descripción final del todo. De esta forma se trata de encontrar un orden, una forma sistemática de llegar al conocimiento, si no la más sencilla, si aquella que exima de caer en errores de apreciación, que permita adentrarse más en el conocimiento de las causas, de los efectos. De esta forma se llega al método científico, que trata de proporcionar las herramientas para el análisis de las cosas, desde las más simples hasta las más complejas [2].

En esta forma, el conocimiento adquirido es parte de aquello que conocemos o que tenemos como conocimiento previo. Se necesita tener claras las bases a partir de las que se trata de generar nuevas ideas, para poder asegurar que están bien fundamentadas y no son sólo un castillo de naipes. De esta forma, el actual capítulo pretende plantear los conocimientos previos a partir de los cuales se desarrolla este estudio, mostrando el marco teórico en el que se trabajará. Se desarrollara desde los conceptos básicos de la matemática a ocupar, hasta los conocimientos de cada área en particular que se encuentra involucrada. Estas exposiciones solo muestran aquellos conocimientos que se ocuparán más adelante, sin adentrarse a profundidad en los alcances de cada uno de ellos, pero sí preparando el campo para saber hasta dónde se pretende llegar en el presente estudio.

### 2.1 Antecedentes matemáticos

Se atribuye a Gauss la siguiente cita: "Para poder decir que conocemos algo, lo tenemos que poder expresar en números". De esta forma, para poder hablar de los números de nuestro interés, es necesario plantear cuáles son las herramientas matemáticas que se van a utilizar y cuáles son las reglas que les rigen. En esta sección se realiza una introducción a la nomenclatura y álgebra que se va a ocupar en el desarrollo de este texto. Este no es un estudio a profundidad de esta estructura matemática, sino solamente un breviarío de aquellas herramientas que se ocupan para posteriormente poder hablar en números del ahorro de energía.

### 2.1.1 Álgebra vectorial.

Las propiedades de los conjuntos de números reales  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  bajo ciertas operaciones, hacen llegar intuitivamente a la idea que existen conjuntos que presentan un orden bajo ciertas características. Se va a trabajar con estos conjuntos, bajo el concepto de que son espacios vectoriales. En el caso particular de  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$ , que tienen como vectores a diadas y triadas de números reales y como escalares a los mismos números reales. Como espacios vectoriales, éstos presentan las siguientes características [3,4]:

“Un espacio vectorial es un conjunto de objetos denominados vectores  $V$ , que junto con el conjunto  $E$  de elementos conocidos como escalares y con dos operaciones conmutativas  $+$  (suma) y  $\cdot$  (producto por un escalar) definidas de la siguiente forma

$$+ : V \otimes V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow x + y; x, y \in V$$

y

$$\cdot : E \otimes V \rightarrow V$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x; \lambda \in E, \lambda x \in V$$

con elementos neutros  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{1}$  respectivamente, que cumple con los siguientes axiomas:

Conjunto cerrado a la suma.

$$x \in V, y \in V \rightarrow x + y \in V$$

Ley asociativa.

$$\forall x, y, z \in V \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$$

Neutro aditivo.

$$\exists \mathbf{0} \in V \rightarrow \forall x \in V, \quad x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$$

Inverso aditivo.

$$\forall x \in V, \quad \exists -x \rightarrow x + (-x) = \mathbf{0}$$

Ley conmutativa.

$$x, y \in V, \quad x + y = y + x$$

Conjunto cerrado al producto.

$$x \in V, \alpha \in E, \quad \alpha x \in V$$

Primer ley distributiva.

$$x, y \in V, \alpha \in E \rightarrow \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Segunda ley distributiva.

$$x \in V, \quad \alpha, \beta \in E \rightarrow (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Ley asociativa de la multiplicación escalar.

$$x \in V \text{ y } \alpha, \beta \in E \rightarrow \alpha(\beta x) = \alpha\beta x$$

Neutro multiplicativo.

$$\forall x \in V, 1x = x$$

“

De esta forma se tiene que los conjuntos de  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  como vectores y con  $\mathbf{R}$  como escalar, forman un espacio vectorial con las operaciones de suma estándar y multiplicación por un escalar estándar.

Aparte de estas operaciones es necesario dentro de estos conjuntos definir otras tres operaciones, que son el producto interno o producto punto, la norma y el producto cruz, que posteriormente serán de utilidad.

El producto interno entre dos vectores quedará definido de la siguiente forma:

“Sean  $x$  y  $y$  dos vectores con componentes  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  y  $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ , la operación producto interno queda definida de la siguiente forma:

$$x \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

“

Por norma de un vector se tiene la siguiente definición.

“Sea  $x$  un vector con componentes  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , la norma del mismo es:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

teniendo como resultado un número real, que es la medida del vector”

Con estos dos conceptos se define el coseno del ángulo entre dos vectores, que es la razón del producto punto de los vectores entre el producto de la norma de los mismos, expresado en la siguiente ecuación:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

Para el producto cruz se tiene que es un producto que genera un vector perpendicular a otros dos vectores en  $\mathbf{R}^3$ . Este se encuentra definido por la base canónica del sistema, representada por los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . La operación entre dos vectores sería definida de la siguiente forma:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Por medio de este producto se puede definir la siguiente igualdad que relaciona al seno del ángulo existente entre los vectores:

$$\text{sen } \theta = \frac{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

### 2.1.2 Base canónica y bases ortonormales.

A los vectores  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , se les conoce como base canónica del espacio tridimensional  $\mathbf{R}^3$ . Esto es porque es un conjunto linealmente independiente, y además genera a todo el espacio vectorial  $\mathbf{R}^3$ .

La base de un espacio vectorial no es necesariamente única, como se pensaría que es la base canónica del espacio tridimensional. Puede existir otro conjunto de vectores linealmente independientes que también generen al mismo espacio. Así, por ejemplo, cualquier punto del espacio bidimensional puede ser representado por una combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1), pero también por los vectores linealmente independientes (1,3) y (-1,2). Aunque darán diferente combinación lineal, pueden representar al mismo punto del espacio, y buscando la igualdad entre ellos, se puede encontrar una matriz A que transforma de un sistema de coordenadas a otro:

$$\mathbf{x}_b = A\mathbf{x}_a$$

De los diferentes conjuntos de vectores que pueden ser base, el interés principal será por aquellos que cumplan con las siguientes características:

- Los vectores generadores son ortogonales.
- Su norma es 1

Por ortogonales se tiene al conjunto de vectores en los que sus elementos entre sí tienen un producto interno que da el escalar cero, independientemente de la norma de

cada uno de ellos. Estos conjuntos son de importancia, como se verá más adelante, pues permiten una descripción sencilla del espacio, ya sea en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$ .

El conjunto de vectores de la base canónica cumple con los puntos que se buscan deseables en una base, ya que:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \quad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \quad \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$
$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

A estos conjuntos se les conoce como vectores ortonormales. Estos agrupan la característica de que son una base, que son ortogonales entre sí, pues el producto interno entre ellos es el vector 0, y tienen norma de 1.

### 2.1.3 Transformación lineal.

Así como las funciones permiten relacionar ordenadas con abscisas en el espacio de  $\mathbf{R}^2$ , una idea más general de estas relaciones se puede ver a través de las transformaciones lineales, que relacionan a los espacios vectoriales entre sí de manera funcional. Para las transformaciones lineales se tiene la definición:

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales. Una transformación lineal  $T$ , de  $V$  en  $W$  es una función que asigna a cada vector  $v \in V$  un único vector  $Tv \in W$  y que satisface las siguientes condiciones:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

Las transformaciones lineales pueden ser representadas por medio de una matriz de transformación, la cual trae inmersa la representación de los vectores de una base en un espacio vectorial a otro espacio vectorial. Este concepto ayuda a encontrar una matriz que represente al mismo vector dentro de dos espacios vectoriales diferentes, y para el caso particular de que sea el mismo espacio vectorial, entre dos bases distintas.

Un ejemplo que se ampliará más adelante es la transformación lineal entre bases ortonormales de  $\mathbf{R}^3$ . En este caso, se define un sistema base  $XYZ$ , con ejes perpendiculares y con una base ortonormal  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . Junto a este sistema y con un origen coincidente se coloca otro sistema coordenado  $xyz$ , con ejes perpendiculares y una base ortonormal  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ . Ambos sistemas se encuentran orientados de manera distinta (Fig. 2.1).

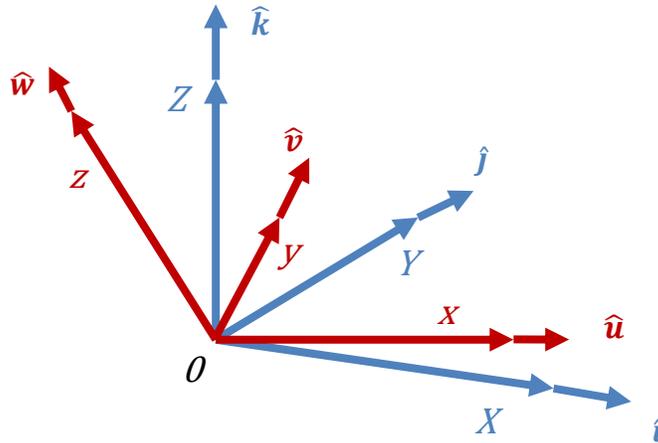


Fig. 2.1 Sistemas coordenados XYZ y xyz con distinta orientación.

En estos sistemas coordenados se puede tener un vector  $\mathbf{a}$ , que tiene representación en una y otra base. Pero también se puede calcular la relación entre estas representaciones en diferentes bases por medio de una matriz que relaciona la representación entre bases de la siguiente forma:

$$(\mathbf{a})_{Base\ 1} = A_T(\mathbf{a})_{Base\ 2}$$

Al ser invertible esta matriz, se puede encontrar una matriz que lleve de regreso al vector entre los sistemas de la siguiente forma:

$$(\mathbf{a})_{Base\ 2} = A_T^{-1}(\mathbf{a})_{Base\ 1}$$

Entonces se puede encontrar una única matriz que permita pasar de un sistema coordenado al otro. Pero para conservar la medida entre ellos es necesario del concepto de isometría, en el cual no solo se conserva la forma, como en un isomorfismo, sino además que conserva la medida, al pasar la operación de producto interno entre los espacios vectoriales de la siguiente forma

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y$$

De esta forma, con una transformación lineal isométrica e isomórfica, se puede conocer la orientación entre diferentes sistemas coordenados, además de poder conservar la medida entre ellos.

#### 2.1.4 Antecedentes de cálculo de una y múltiples variables.

En el análisis de funciones de una sola variable, interesa el conocer el comportamiento de la función para poder describirla. Así, por medio del cálculo diferencial se puede encontrar la pendiente para todo momento, por medio de la derivada, los puntos extremos de la función, igualando esta derivada a cero, y conocer si se trata de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, conociendo el comportamiento de la segunda derivada de la función (Fig. 2.2).

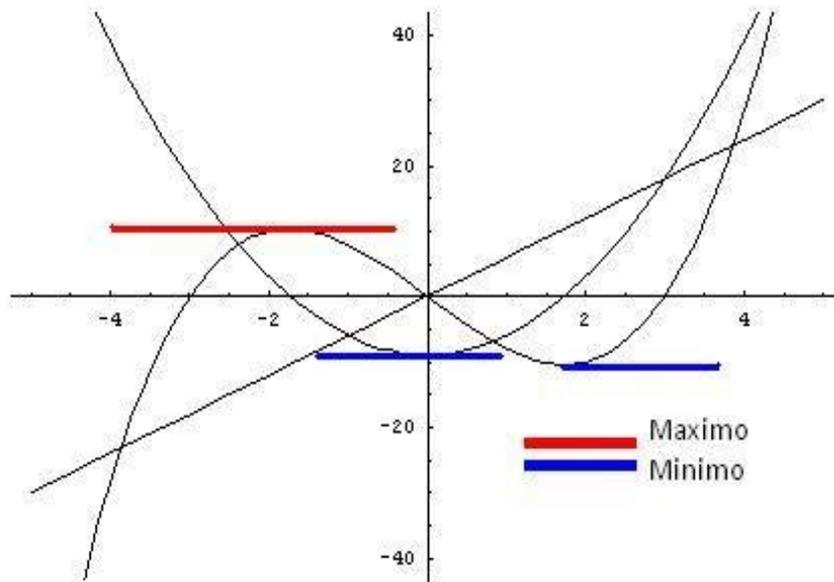


Fig. 2.2 Máximos y mínimos locales en una función.

De esta forma, queda descrito el comportamiento de la función y los puntos de interés, como lo son los mínimos, los cuales tomarán importancia más adelante.

De la misma forma, en el cálculo de múltiple variable es posible encontrar los puntos extremos de una función conocida y definida, si se puede analizar el comportamiento de las derivadas de esta función. La forma de representar estas derivadas es por medio de un arreglo matricial en el que se pueden conocer las derivadas parciales de la función con respecto a cada una de las variables de la siguiente forma:

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

Conocido como el gradiente de una función escalar de variable vectorial. También se le conoce como Jacobiano, y se volverá a ver más adelante. Este elemento permite encontrar el comportamiento de las derivadas parciales de la función  $f$  para todo momento. El punto de interés será entonces cuando las derivadas parciales valgan cero, ya que ello indicará un punto extremo. También será necesario el conocer el comportamiento de la segunda derivada, pero en este caso en forma de derivadas parciales con respecto a cada una de las variables. Este ente se conoce como Hessiano, será el que permita identificar si se trata de un punto máximo, mínimo o un punto de inflexión dentro de la función escalar de variable vectorial.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Pero para que ambos elementos puedan ser de ayuda, la función debe de ser evaluable en todo punto, siendo diferenciable parcialmente para todas sus variables y continua para todo punto. Si no se cumple esto, o para sistemas más complejos, este procedimiento puede llevar a estructuras complejas de difícil resolución. Así, una función escalar de variable vectorial puede ser analizada, encontrando los puntos de máximos y mínimos locales o absolutos para funciones escalares de variable vectorial (Fig. 2.3).

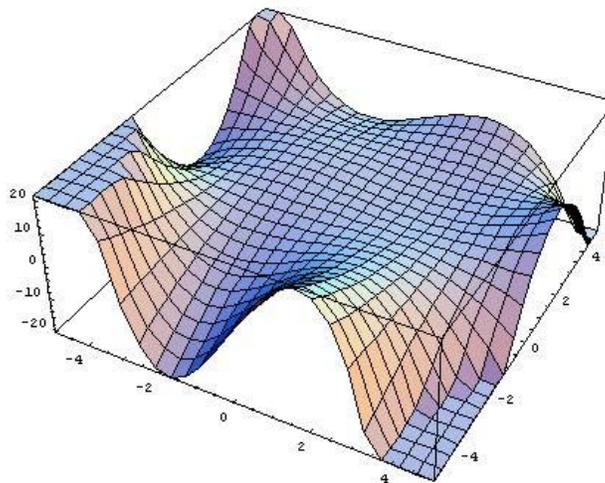


Fig. 2.3 Función escalar de variable vectorial.

## 2.2 Sistemas termodinámicos.

Este estudio propone el diseño de un manipulador por medio de un estado energético bajo. Pero para poder definir a qué energía se refiere, de dónde proviene y hacia dónde se dirige, es necesario el conocer ciertos conceptos de termodinámica. Esta rama de la física es muy recurrida en los análisis químicos, en los procesos de transformación de energía y de transferencia de calor. En este caso, aplicando varios de los conceptos de la termodinámica a los sistemas mecánicos en estudio, se pretende describir cuál es el sistema en estudio y cómo es que se plantea el ahorro de energía.

### 2.2.1 Campo de estudio de la termodinámica

La termodinámica se ocupa de las transformaciones de la energía y de la relación entre las propiedades físicas de las sustancias o elementos involucrados dentro de estas transformaciones [5]. Con ello se plantea un amplio campo de acción, desde sistemas de combustión hasta sistemas de generación de energía por medios eólicos y celdas de energía.

Existen dos visiones para el estudio de la termodinámica. En la primera se toma una visión macroscópica de los sistemas, mientras que en la segunda se realiza el estudio estadístico del comportamiento de las partículas individuales del sistema. El primer caso se conoce como termodinámica clásica, siendo que no requiere una hipótesis detallada de la forma en que están constituidos los sistemas, y sobrevive en general aun cuando cambien las descripciones microscópicas de dichos elementos. Por el otro lado, se tiene a la termodinámica estadística, la cual se encarga del comportamiento de cada elemento de la sustancia en estudio, tomando las características estadísticas de todos los elementos. Existen también los acercamientos por medio de la teoría cinética de la materia, en donde se requiere la descripción de las interacciones entre todas las partículas a partir de la mecánica newtoniana. De todos estos enfoques, aquél que se ocupa es el de la mecánica clásica, tomando en cuenta solo la parte macroscópica, no interesando el comportamiento microscópico de los elementos de estudio.

Puntos fundamentales de la termodinámica clásica se basan en 5 leyes que rigen estas interacciones. Los primeros dos postulados se enfocan a la energía dentro del sistema, la primera ley de la termodinámica se encarga del balance de energía y su conservación, la segunda ley se enfoca a la calidad de la energía dentro del sistema. Los otros dos postulados se encargan de las relaciones entre las propiedades termodinámicas de los sistemas, como el postulado de estado, la ley cero y la tercera ley de la termodinámica. Este caso, al no estar estudiando las propiedades de las sustancias, solo se enfoca a la energía y sus características.

Un concepto importante es el de eficiencia. Un acercamiento intuitivo dice que la eficiencia será la razón entre energía que se obtiene del sistema y la que se tiene que introducir al mismo.

$$\eta = \frac{\textit{Trabajo obtenido}}{\textit{Energia proporcionada}}$$

Este concepto de eficiencia será útil más adelante, al definir los sistemas involucrados y los flujos de energía dentro del sistema mecánico que se estudia.

### 2.2.2 Sistemas termodinámicos y sus fronteras.

El primer punto es definir al sistema que se analiza. Un sistema es un espacio tridimensional que se encuentra acotado por superficies que se conocen como fronteras. Estas fronteras, reales o imaginarias son arbitrarias, y dependen de lo que se quiera analizar. A partir de dichas fronteras se pueden identificar dos regiones. La primera, dentro de las fronteras, se conoce como sistema, mientras que la segunda, fuera del sistema, se le conoce como alrededores. En particular, los alrededores son aquella vecindad inmediata que interactúa con el sistema.

Las fronteras se pueden clasificar de la siguiente forma: permiten el paso de energía y materia, y aquellas que sólo permiten el paso de energía, mas no de materia. El primer caso determina un sistema abierto, ya que puede cambiar materia con los alrededores, mientras que el segundo caso determina un sistema cerrado, con solo el intercambio de energía a través de las fronteras. Un caso especial de estas fronteras es la frontera adiabática, que corresponde a un sistema cerrado, y además, no permite el flujo de calor entre el sistema y los alrededores, sino únicamente del paso de trabajo. A los sistemas cerrados se les conoce como masa de control, pues no varía la misma, y a los sistemas abiertos se les conoce como volumen de control. En la figura siguiente se puede apreciar este tipo de sistemas (Fig. 2.4).

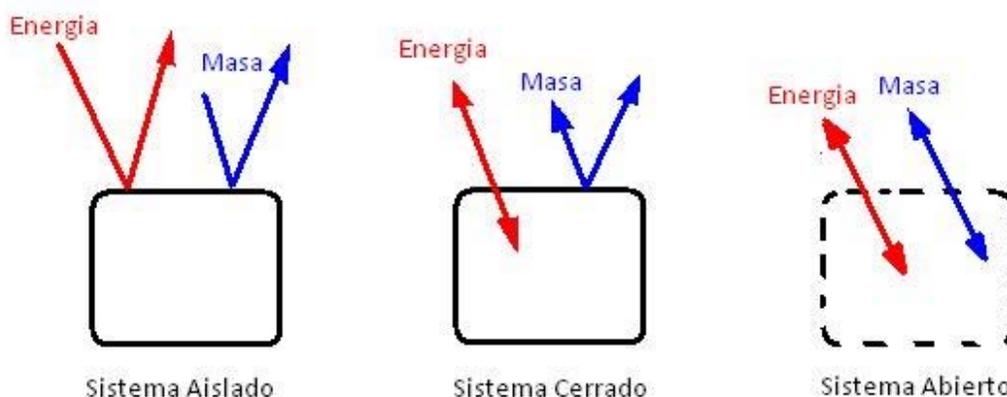


Fig. 2.4 Sistemas aislado, cerrado y abierto.

### 2.2.3 Propiedades y estados termodinámicos.

Una propiedad es una característica del sistema que puede cuantificarse por medios directos o indirectos y es propia del sistema. Esta propiedad tiene un valor único para cada condición del sistema y describe características en particular del mismo. Ejemplo de estas propiedades son la presión, el volumen específico, la energía de Gibbs o la energía cinética que posee el sistema. Dentro de las propiedades se puede identificar dos tipos, las extensivas, que están relacionadas directamente con la cantidad de materia existente dentro del sistema, y las intensivas, independientes de la cantidad de materia. Ejemplo de propiedades extensivas se tienen al peso, el volumen o la energía cinética, mientras que ejemplos de las propiedades intensivas se tienen a la presión, la temperatura y la densidad.

Ahora, con un conjunto de propiedades se puede caracterizar un estado del sistema, siempre y cuando estas propiedades se encuentren en equilibrio dentro del sistema. Este estado en equilibrio implica que hay balance entre fuerzas, composiciones químicas o térmicas, sin presentar cambios macroscópicos observables en las propiedades. El equilibrio termodinámico será entonces sinónimo de que el sistema se encuentra en un estado en el que no existen cambios espontáneos y finitos hacia algún otro estado sin que ocurran cambios en los alrededores del sistema. Este equilibrio se verá reflejado en el que no existan cambios de temperatura (equilibrio térmico), presiones o fuerzas (equilibrio mecánico), cambios netos en la composición química dentro del sistema (equilibrio químico), o cambios en el estado de agregación de los componentes (equilibrio de fase).

A los cambios entre un estado termodinámico y otro se les conoce como proceso, y en ellos ocurrirá algún cambio en las propiedades del sistema. Este proceso se encuentra

definido por una trayectoria, la cual se refiere a la descripción en el cambio de las propiedades, a través de los que pasa el sistema de un estado de equilibrio a otro. Para describir el proceso es necesario el conocer el estado inicial, el estado final, la trayectoria y las interacciones a través de la frontera.

#### 2.2.4 Trabajo.

De los cursos de mecánica clásica se extrae que el trabajo  $W$  es la acción de una fuerza  $F$  y un desplazamiento  $s$ , cuando éstos se realizan en la misma dirección. Vectorialmente esto se expresa de la siguiente forma.

$$\delta W = F ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Para obtener el trabajo total realizado por una fuerza, es necesario realizar la integración de este término, por lo que se requiere una relación funcional entre la fuerza y el desplazamiento. Para los procesos termodinámicos se tiene una definición más amplia de trabajo, como la interacción entre el sistema y sus alrededores de forma que el único efecto externo de dicha interacción pudiera haber sido la elevación de un peso (fuerza) una cierta distancia (desplazamiento). La amplitud de esta definición se debe a las diferentes formas de trabajo que pueden estar involucradas dentro del proceso. Un ejemplo de ellas es que el trabajo que puede efectuar un sistema sobre un peso puede ser realizado por medio de un pistón que desplace el peso una cierta distancia, o por medio de un eje que remolque un cable que eleve un peso esa misma distancia.

El siguiente punto es identificar la dirección del trabajo. Si un trabajo entra a un sistema, éste será positivo, mientras que si sale del sistema, éste será negativo para el sistema. En la figura siguiente, al momento de que el motor mueve al peso dentro del sistema se está introduciendo trabajo al mismo, mientras que en la segunda figura, el peso mueve al generador, el sistema está brindando trabajo a los alrededores, y por lo tanto, saliendo del sistema (Fig. 2.5).

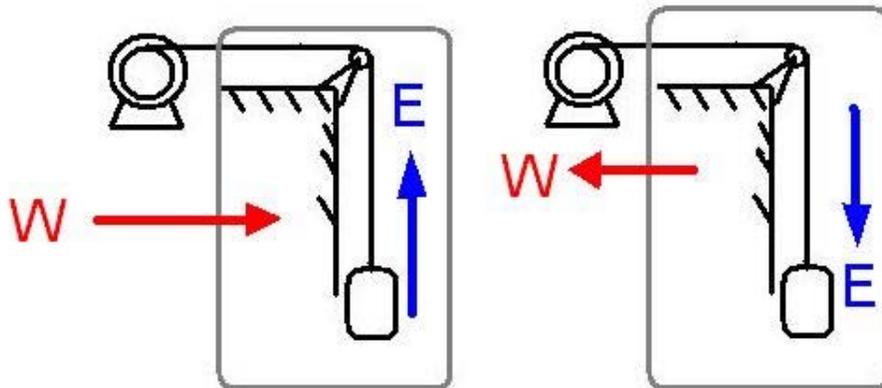


Fig. 2.5 Flujo de trabajo al sistema y desde el sistema.

Puntos importantes dentro del trabajo son la razón de cambio con respecto al tiempo, que se conocen como potencia y la definición de proceso adiabático, que es aquél en el que las interacciones que ocurren entre el sistema y los alrededores son únicamente en la forma de trabajo, sin ocurrir transferencia de calor.

$$\frac{dW}{dt} = \dot{W} = \text{Potencia}$$

### 2.2.5 Energía y la primera ley de la termodinámica.

La primera ley de la termodinámica dice que al modificar adiabáticamente a un sistema cerrado, la cantidad total de trabajo asociada a dicho cambio sólo dependerá del estado inicial y final del proceso, sin importar la trayectoria del proceso. Este cambio sólo depende del estado inicial y final del proceso, y se denomina como una propiedad a la que se llama energía.

Se puede expresar la primera ley de la termodinámica de la siguiente forma:

$$W_{ad} = E_{fin} - E_{ini} = \Delta E$$

Implica que el trabajo adiabático sólo depende del cambio en la propiedad llamada energía, y estará definida para cada estado, sin importar la trayectoria del proceso que lleve de un estado a otro.

Existen también interacciones de tipo térmico, ocasionadas por la diferencia en temperaturas entre el sistema y los alrededores. A esta interacción se le conoce como calor. Evaluando ahora al mismo sistema cerrado, se observa que el cambio de energía

no sólo depende del trabajo adiabático, sino también del calor que hay en el sistema, este calor queda cuantificado de la siguiente forma:

$$Q = E_2 - E_1 - W$$

$$Q + W = E_2 - E_1$$

De esta relación se observa que el calor que se introduce en el sistema aumenta la cantidad de energía del mismo, así como el trabajo que se introduce al sistema.

Aunque la energía sea independiente de la trayectoria por la que se llegue entre dos estados, no sucede lo mismo con el calor y el trabajo. Ambos dependen de la trayectoria del proceso que se realiza. Para encontrar el valor de ellos se requiere evaluar las diferenciales que le describen, para obtener su valor total ( $\delta Q$  y  $\delta W$ ).

### 2.2.6 Características de la energía y el trabajo.

El trabajo como la energía total del sistema cerrado proviene de la combinación de múltiples fuentes, cada una definida dependiendo de qué es lo que ocasione dicho estado. Una primera distinción que se puede hacer con ellas es identificar si son intrínsecas o extrínsecas. El trabajo o energía intrínseca tiene dependencia con la naturaleza del medio o sustancia que se encuentra dentro del sistema, mientras que si se trata de una cantidad extrínseca, ésta es independiente de qué sustancia está contenida en el sistema. De esta forma, la ecuación que define los equilibrios en un sistema cerrado queda de la siguiente forma:

$$\delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int} = dE^{ext} + dE^{int}$$

Todos los tipos de energía se pueden clasificar como formas de energía cinética (EC), por el movimiento del cuerpo, o en energía potencial (EP), resultado de la posición relativa que tiene éste con otros cuerpos. La energía cinética lleva envueltos tres términos, dos extrínsecos y uno intrínseco. El primero es la energía cinética lineal, que relaciona la masa y la velocidad lineal del cuerpo. El segundo término es la energía cinética rotacional, relacionando la inercia del cuerpo y su velocidad angular. El tercer término se refiere al movimiento de las partículas que componen al sistema, relativo al centro de masa del sistema. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$E_{EC\ Total} = E_{EC\ Lineal}^{ext} + E_{EC\ Rotacional}^{ext} + E_{EC}^{int}$$

$$E_{EC\ Total} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + E_{EC}^{int}$$

En esta ecuación,  $m$  se refiere a masa contenida en el sistema,  $I$  a su momento de inercia,  $v$  a la magnitud de la velocidad lineal y  $\omega$  a la magnitud de la velocidad angular. De esta forma, queda descrita la energía cinética total del sistema.

La energía potencial engloba a cuatro elementos potenciales. El primero es con respecto al campo gravitacional local, el segundo corresponde a la energía potencial electrostática, el tercero a la energía potencial magnetostática y el cuarto corresponde a la interacción entre las partículas del medio contenido dentro del sistema. Se tiene que, mientras que las primeras tres son mesurables y extrínsecas, la cuarta forma de energía potencial es intrínseca y no se puede medir directamente. La forma en la que se expresan estas energías potenciales es la siguiente:

$$E_{EP\ Total} = E_{EP\ Gravitacional}^{ext} + E_{EP\ Electr}^{ext} + E_{EP\ Magnet}^{ext} + E_{EP}^{int}$$

$$E_{EP\ Total} = mg\Delta z + \frac{V\epsilon_0\mathbf{E}^2}{2} + \frac{V\mu_0\mathbf{H}^2}{2} + E_{EP}^{int}$$

En donde  $g$  es la aceleración gravitacional local,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica,  $\mu_0$  es la susceptibilidad magnética,  $V$  el volumen del sistema,  $m$  su masa,  $\mathbf{E}$  el campo eléctrico y  $\mathbf{H}$  el campo magnético.

De esta forma, si se pretende describir completamente la energía de un sistema, y simplificando los términos de energía potencial a EP y energía cinética a EC, la ecuación correspondiente será:

$$\delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int}$$

$$= dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEP_{intr} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot} + dEC_{intr}$$

Sin embargo, las energías intrínsecas no se pueden obtener directamente, pero se pueden agrupar en un término conocido como energía interna, que es una propiedad del sistema y el cual se expresa de la siguiente forma:

$$U = E_{EP}^{int} + E_{EC}^{int}$$

Volviendo a desarrollar la ecuación, se tiene entonces:

$$\delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int}$$

$$= dU + dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEP_{intr} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot}$$

$$+ dEC_{intr}$$

Esta última ecuación engloba a todas las energías que se encuentran dentro del sistema cerrado, y representa el principio de conservación de energía para un sistema cerrado.

En el caso de la termodinámica clásica los valores de energía y trabajo extrínsecos son despreciados, pues se considera que no presentan cambios relevantes en los procesos estudiados. En cambio, para el presente estudio los valores que se desprecian son los valores intrínsecos, ya que no se está analizando la composición del sistema, sino a cantidades independientes de la naturaleza o sustancia del sistema. Con ello, la ecuación de energía que se va a ocupar puede reducirse a la siguiente expresión:

$$\delta W^{ext} = dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot}$$

### 2.3 Cinemática de un cuerpo rígido.

La cinemática es la rama de la mecánica encargada del movimiento de los cuerpos, sin importar sus causas que lo originen [6, 7]. Siendo así, esta sección analizará la forma en que se describen los cuerpos en el espacio, haciendo referencia a cualidades tales como posición, desplazamiento, velocidad, aceleración y movimiento angular. Estas descripciones son la base de estudio de la mecánica clásica, y por medio de ellas se puede desarrollar un modelo del movimiento de los cuerpos en el espacio.

#### 2.3.1 Cinemática de la partícula.

Una partícula es una idealización de la realidad, en la que se supone que la distribución de masa de un cuerpo se encuentra restringida a un sólo punto en el espacio y que éste determina las características de comportamiento del mismo. En esta idealización no importa la orientación precisa del cuerpo dentro del espacio, ya que la diferencia entre las magnitudes de la partícula y el desplazamiento que realiza es muy grande. Un ejemplo de ello es el comportamiento de un coche a lo largo de una carretera, en el cual el vehículo puede ser considerado como partícula, si se analiza el movimiento que realiza a lo largo de varios kilómetros de la carretera.

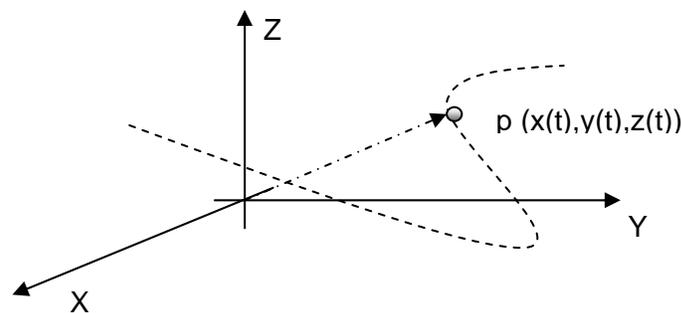


Fig. 2.6 Trayectoria espacial de una partícula

Para describir el movimiento de la partícula, es necesario definir los siguientes conceptos:

**Posición:** Es la ubicación geométrica de un punto en el espacio, con respecto a un marco de referencia. Esta puede ser una posición absoluta o relativa, dependiendo a qué marco de referencia se está haciendo alusión al describir la posición deseada.

**Trayectoria:** Es la sucesión de puntos que va ocupando una partícula o conjunto de partículas a lo largo del tiempo, pudiendo cambiar o no con respecto al marco de referencia.

**Desplazamiento:** Es el cambio entre dos posiciones, relativas al mismo marco de referencia.

**Velocidad promedio.** Es la razón de cambio de la posición con respecto a un periodo de tiempo. Esta puede ser velocidad promedio, cuando se toma un lapso finito de tiempo, o puede ser instantánea, cuando se toma un tiempo infinitesimal. En general, se llama velocidad a la velocidad instantánea. Esta velocidad también puede ser absoluta o relativa, dependiendo del marco de referencia al cual se mida.

**Aceleración:** Es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Si el periodo de tiempo es finito, se puede considerar una aceleración promedio, y si es en un infinitesimal de tiempo, se considera instantánea.

Para describir los puntos en el espacio que ocupa una partícula, se ocupa el concepto de vector, el cual proporciona los datos de cuál es la posición que este punto ocupa en el espacio con respecto a un marco de referencia. Al estar trabajando con un espacio tridimensional, se requiere de tres valores ordenados para determinar cuál es la ubicación del punto, y éstos están referidos dentro de los valores que se asigna al vector. Para este caso se ocupa un sistema cartesiano de tres dimensiones. También existen otros sistemas de referencia que se ocupan para el espacio tridimensional, los cuales son los sistemas cilíndricos y esféricos, pudiendo pasar de uno a otro sin dificultad.

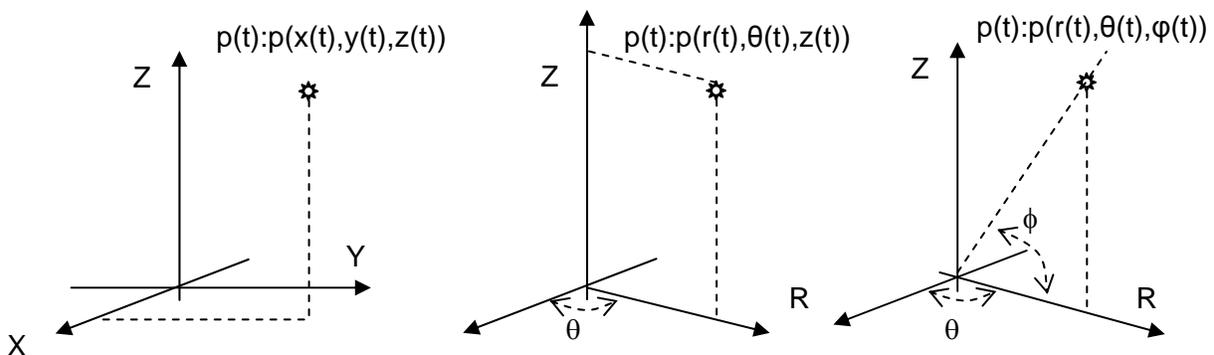


Fig. 2.7 Representación del mismo punto en sistema cartesiano, cilíndrico y esférico.

La posición de una partícula en el espacio puede estar expresada en forma de función, la cual describa el comportamiento de la partícula con respecto a un marco de referencia. En general se ocupa como variable independiente al tiempo, ya que se requiere el análisis de lo que pasa con la posición, velocidad y aceleración, todas ellas con respecto al tiempo. De esta forma, en una representación cartesiana del espacio tridimensional se tiene que un punto  $p$  está representado por sus coordenadas

$$p: (x(t), y(t), z(t))$$

Cada una de estas coordenadas queda expresada en función del parámetro tiempo, y puede obtenerse la relación de su cambio con respecto al parámetro para obtener más información del modelo.

A cada partícula o punto se puede asignar un vector que contiene la información de las coordenadas en cada dimensión, obteniendo entonces la siguiente representación:

$$\bar{p} = [x(t), y(t), z(t)]^T$$

Ahora, con esta representación se pueden aplicar los conceptos de cálculo vectorial para obtener la velocidad y aceleración que sufre la partícula. Para la velocidad se busca la relación de cambio entre la posición con respecto a un lapso de tiempo cuando dicho lapso tiende a cero. Se obtiene que:

$$v_{Prom} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t), y(t), z(t)]^T$$

$$\bar{v} = \left[ \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right]^T = [vx(t), vy(t), vz(t)]^T$$

De la misma forma, para la aceleración se obtiene la segunda derivada con respecto al tiempo de la posición, obteniendo lo siguiente:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{p}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dvx(t)}{dt}, \frac{dvy(t)}{dt}, \frac{dvz(t)}{dt} \right]^T$$

$$\bar{a} = \left[ \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right]^T = [ax(t), ay(t), az(t)]^T$$

De esta forma, si se conoce la relación funcional de la posición con respecto al tiempo, se puede conocer la velocidad y la aceleración instantáneas de ese punto en particular. De la misma forma, si se conoce el comportamiento de las aceleraciones y velocidades, así como las condiciones de frontera que rigen el movimiento, se puede encontrar la posición que desarrolla la partícula.

### 2.3.2 Marcos de referencia absolutos y relativos.

Bajo la mecánica clásica se tiene el concepto de marco de referencia absoluto, a partir del cual se puede realizar la medición de las cosas. Este marco de referencia privilegiado es aquel que se considere inercial, que no se mueve en absoluto, el que se puede ocupar como base para describir el movimiento. Para algunos casos se trata de la tierra, en otros casos de la superficie de la misma, y para otros, solamente de una sección de un objeto que “no se mueve”.

También existen los marcos de referencia relativos, que son aquellos que se mueven junto con un objeto con respecto a otro, el movimiento que se obtiene es relativo al marco de referencia y no se considera absoluto, pues este marco de referencia no se puede considerar absoluto. Este se puede encontrar montado dentro de un automóvil, en la luna o en la sección en movimiento de un torno.

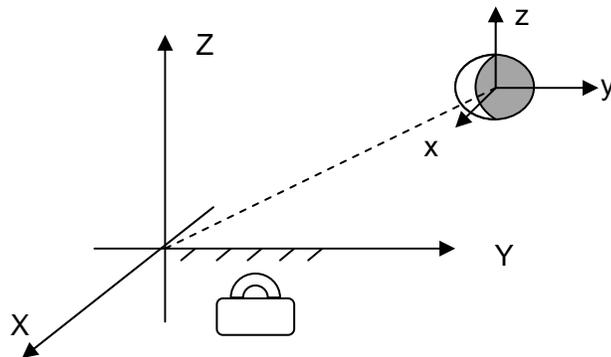


Fig. 2.8 Sistema de referencia absoluto (XYZ) y relativo (xyz).

De esta forma, se encuentra que existen movimientos relativos a los marcos de referencia y éstos solo pueden ser considerados absolutos si están descritos en el marco de referencia inercial. A partir de estos conceptos, si se busca obtener la descripción absoluta de los movimientos de las partículas, es necesario que estén descritos en el marco de referencia absoluto, por lo que es necesario también el tener una herramienta que permita pasar de una descripción a otra.

Cabe notar que todos estos conceptos están basados en la descripción de la mecánica clásica del movimiento. Los marcos de referencia absolutos no existen dentro de la descripción que realiza la mecánica relativista, ya que no se puede considerar a un

marco de referencia en especial como absoluto, pues cualquier marco de referencia es relativo a otro. Con esto, las aplicaciones de la mecánica newtoniana sólo se restringen a velocidades bajas con respecto a la velocidad de la luz que, aunque limitadas, son de amplia aplicación dentro de la actual tecnología del ser humano.

La importancia de los marcos de referencia relativos se verá con mayor claridad al abordar la cinemática de los cuerpos rígidos y las transformaciones entre estos marcos de referencia.

### 2.3.3 Cinemática del cuerpo rígido.

Un cuerpo rígido es aquel que no permite los desplazamientos relativos entre las partículas que lo componen, siendo que no se puede deformar. Esta es una abstracción de la realidad, la cual permite modelar objetos, no sólo como objetos puntuales, sino con las características espaciales que le constituyen. En el cuerpo rígido se supone una distribución conocida de sus partes. Esto ocasiona que además de la posición, velocidad y aceleración se tengan que tomar en cuenta la orientación y los cambios en ella para poder describir al sistema.

Para la orientación del cuerpo, se fija un marco de referencia que se mueva con él. Este marco indicará las posiciones de cada una de las partículas del cuerpo rígido, y al estar fijo a él, estas posiciones relativas a este marco de referencia no cambiarán a lo largo del tiempo. Al mover ahora el cuerpo rígido en un marco de referencia absoluto, su movimiento estará descrito por el movimiento del marco de referencia relativo que le acompaña.

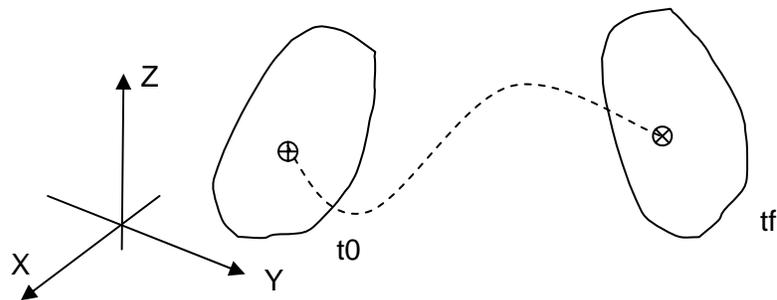


Fig. 2.9 Movimiento espacial de un cuerpo rígido.

De los diferentes movimientos que puede realizar un cuerpo rígido se pueden definir los siguientes patrones:

Traslación plana. En este movimiento, todas las partículas del cuerpo rígido se desplazan en planos paralelos, sin que en ningún momento cambie la orientación del

cuerpo. Este análisis solo necesita dos dimensiones para analizar el movimiento, ya que solo se realiza en los planos paralelos en los que se desplazan las partículas.

Rotación con un eje fijo. En este movimiento, todas las partículas del cuerpo rígido rotan alrededor de un eje definido, de esta forma la trayectoria de todas las partículas se encuentra en planos paralelos, en trayectorias circulares concéntricas. Para el análisis de este movimiento sólo se requiere el análisis en uno de los planos paralelos para describir el movimiento de las partículas.

Movimiento plano general. Es una combinación de la traslación y la rotación, pero cada una de las partículas permanece en planos paralelos durante toda la trayectoria, por lo cual se simplifica el análisis a su comportamiento sólo en dos dimensiones: las de los planos paralelos en los que se realiza movimiento.

Traslación espacial. En este caso, el cuerpo rígido se desplaza en las tres dimensiones del espacio, sin cambiar de orientación.

Rotación alrededor de un punto fijo. En este caso el cuerpo rígido rota alrededor de un punto del espacio, sin que se pueda definir un eje fijo de rotación. Esto cambia la orientación en todo momento, pero sin que el punto fijo sufra cambios en su descripción absoluta.

Movimiento espacial general. En este movimiento se involucra tanto la traslación espacial como la rotación alrededor de un punto fijo, y puede ser representado sumando los efectos de estos dos movimientos y generando el movimiento general en el espacio.

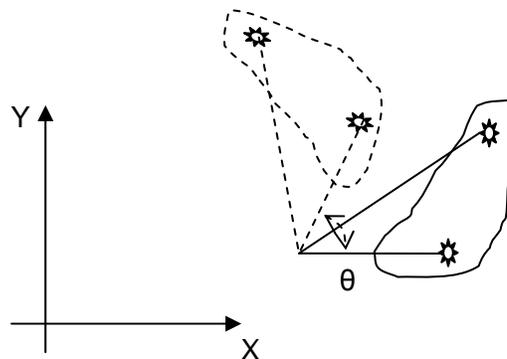


Fig. 2.10 Rotación plana.

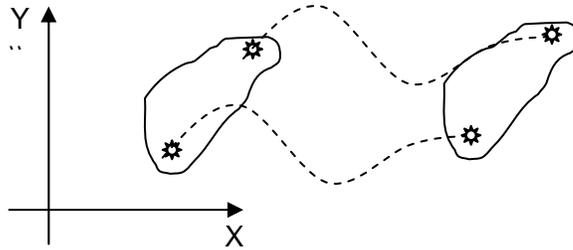


Fig. 2.11 Traslación plana.

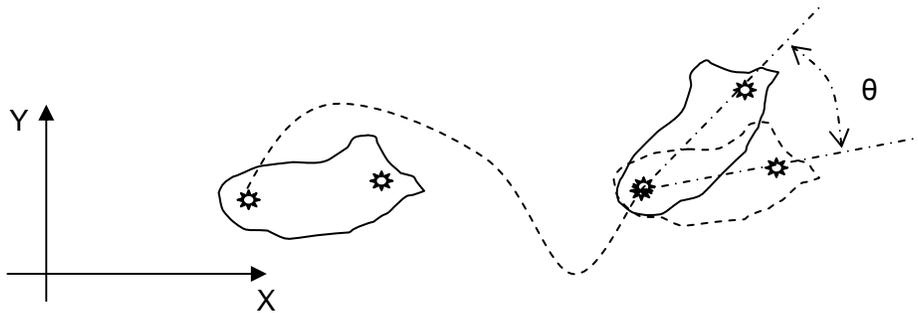


Fig. 2.12 Movimiento plano general

Para el análisis del movimiento espacial general, se divide en cuatro problemas, cada uno de mayor complejidad al anterior, que son: el análisis de la traslación espacial de un punto del cuerpo, la rotación que realiza el cuerpo alrededor de un punto fijo y la medición de un vector variable desde un sistema en rotación y la combinación de estos movimientos para dar el movimiento espacial, ya sea absoluto o con marcos de referencia relativos. Para ello, lo primero será asignar un marco de referencia fijo al cuerpo rígido, para identificar la dirección en la cual se encuentra orientado. A partir de estas orientaciones se puede encontrar si ésta cambia con el tiempo o permanece constante. Para el primer acercamiento se ocupan sistemas de ejes paralelos, en los que la orientación del sistema de referencia del cuerpo rígido es paralela y corresponde a los mismos ejes del sistema de referencia absoluto. Los marcos de referencia pueden tener distintas orientaciones, pero para hacer validas las observaciones realizadas en uno de ellos y referirlas a otro sistema, será necesario el realizar una transformación lineal que oriente de forma paralela a los ejes y pueda proyectar lo que ocurre en el marco de referencia local al marco de referencia absoluto. Otra de las observaciones pertinentes consiste en que el marco de referencia del cuerpo rígido se encuentra fijo dentro del mismo cuerpo.

La traslación espacial de un cuerpo rígido implica que la orientación del marco de referencia fijo al cuerpo al inicio, final y a lo largo de toda la trayectoria es la misma,

siendo que solo se tiene que conocer el comportamiento de uno de los puntos del cuerpo, ya que todos los demás seguirán de forma paralela la misma trayectoria. La selección del punto que represente el movimiento depende de las condiciones a analizar, o de que se conozca el comportamiento de algún punto en particular. Para simplificar el análisis se ocupa también que el marco de referencia absoluto y el marco relativo del cuerpo rígido sean paralelos. De esta forma, para llegar hasta el punto  $p$  se pueden seguir dos rutas; la primera es desde el marco de referencia absoluto  $XYZ$  por medio del vector  $\bar{p}_{XYZ}$  obteniendo desde aquí las posiciones, velocidades y aceleraciones absolutas directamente, y el segundo por medio de la suma de vectores  $\bar{OA}$  y  $\bar{p}_{xyz}$ . Se tiene entonces la igualdad:

$$\bar{p}_{XYZ} = \bar{OA} + \bar{p}_{xyz}$$

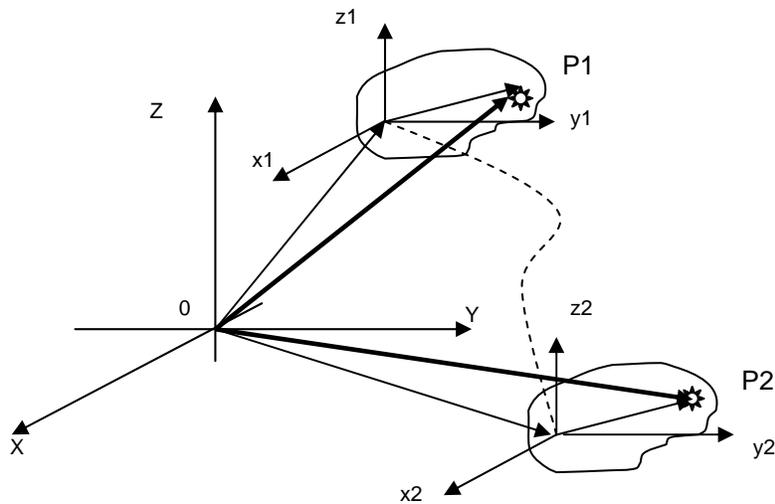


Fig. 2.13 Traslación espacial de un cuerpo rígido

Al derivar con respecto al tiempo se tiene directamente

$$\bar{v}_{XYZ} = \frac{d\bar{p}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\bar{OA}}{dt} + \frac{d\bar{p}_{xyz}}{dt}$$

Para este caso, al ser un cuerpo rígido, el vector que define el punto  $p$  en el sistema relativo no cambia ni en orientación ni en magnitud, por lo que su derivada es cero, de lo que se tiene:

$$\bar{v}_{XYZ} = \frac{d\bar{p}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\bar{OA}}{dt} = \bar{v}A_{XYZ}$$

De forma similar para la aceleración se tiene;

$$\bar{a}_{XYZ} = \frac{d\bar{v}_{XYZ}}{dt} = \frac{d^2\bar{OA}}{dt^2} = \bar{a}A_{XYZ}$$

De esta forma, al conocer el comportamiento de uno de los puntos del cuerpo rígido, se conoce el movimiento de todos los demás puntos que lo componen. La selección del punto de origen del sistema relativo dependerá de las condiciones del problema a resolver, siendo éste el más conveniente para cada caso.

La rotación de un cuerpo rígido plantea un problema distinto, ya que lo que varía no es solo la posición de cada punto, sino la orientación del cuerpo en su conjunto. Para entender qué es lo que sucede, se elige un punto arbitrario  $p$  del cuerpo. Girando este cuerpo arbitrariamente alrededor de un punto de origen  $O$  con lo que se crea un eje instantáneo de rotación  $\overline{OO'}$ . El punto  $p$  queda a una distancia de este eje, determinado por el ángulo que forma con los planos perpendiculares al eje y su vector de posición a partir del punto de  $O$ . Al girar el cuerpo un poco, se ocasiona que el punto se desplace junto con el cuerpo.

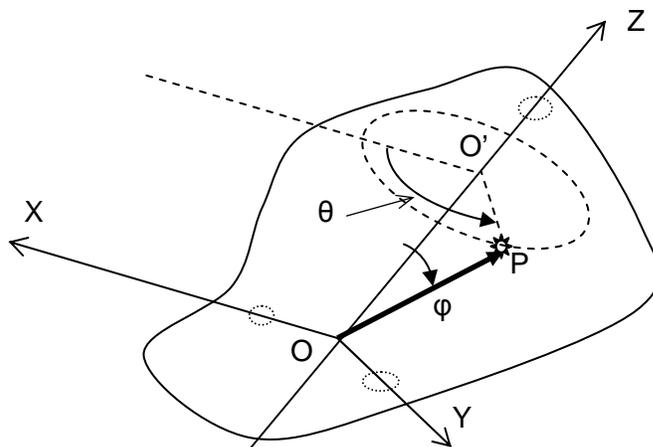


Fig. 2.14 Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo.

La velocidad de este punto está dada por el diferencial del ángulo de giro que realiza el cuerpo, siendo que

$$ds = r d\theta$$

$$ds = \text{sen}\varphi \overline{Op} d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = \text{sen}\varphi \overline{Op} \frac{d\theta}{dt}$$

Para la medición de la posición angular, se define un vector perpendicular al plano en el que se realiza el cambio angular, el cual mide la magnitud de cambio angular con respecto al tiempo. A este vector se le denomina velocidad angular, con lo que se tiene:

$$|\bar{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\bar{v} = \overline{Op} \times \bar{\omega}$$

Para analizar el movimiento de un cuerpo rígido se puede separar éste en dos movimientos, primero, el desplazamiento del cuerpo en una traslación, tomando como punto de análisis el origen de giro del cuerpo, y sumando los efectos del giro sobre este punto. De esta forma se obtiene que:

$$\bar{v} = \bar{v}_t + \bar{v}_r$$

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{Ap}$$

Al derivar este término, se obtienen los componentes de la aceleración del cuerpo rígido, siendo estos:

$$\hat{a} = \hat{a}_A + \hat{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{r_{B/A}})$$

En donde todos los términos se encuentran expresados en el marco de referencia absoluto, y refieren que el movimiento general de un cuerpo rígido puede ser dividido en dos, una traslación general de un punto del cuerpo rígido y una rotación alrededor de este punto.

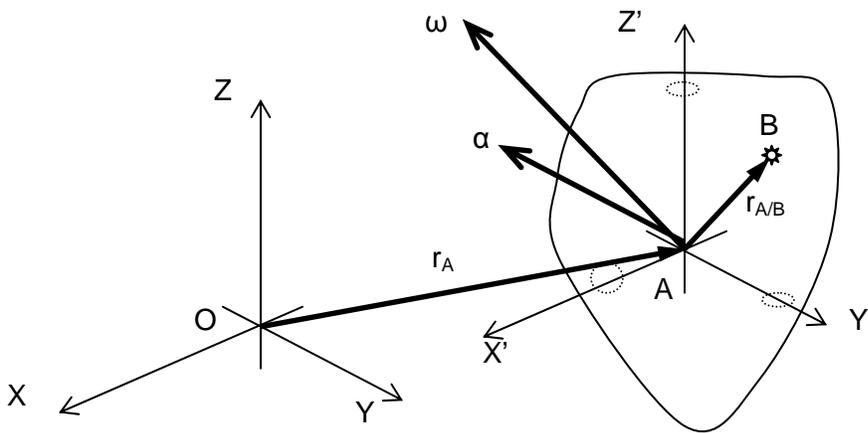


Fig. 2.15 Movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio.

Ahora, para describir el movimiento que ocurre si se tiene un vector que cambia no sólo orientación, sino también en magnitud, se da el siguiente razonamiento. El vector de posición puede estar referido al sistema de referencia fijo siendo una medición absoluta  $\bar{p}$  o puede estar referido a un sistema en rotación alrededor de un punto del espacio  $\bar{p}_m$ . Para estos vectores, se puede plantear la siguiente igualdad.

$$\bar{p} = \bar{p}_{mov}$$

$$\bar{p} = |\overline{O'p_m}| \hat{e}_{mov}$$

Al obtener la razón de cambio con respecto al tiempo, se obtiene que dichos vectores se comportan de la siguiente forma.

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \hat{e}_{mov} \frac{d}{dt} |\overline{O'p_m}| + |\overline{O'p_m}| \frac{d}{dt} \hat{e}_{mov}$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} |\overline{O'p_m}| \right)_{mov} + \bar{p} \times \hat{\omega}$$

El primer término se refiere al cambio del vector dentro del sistema móvil, mientras que el segundo término expresa el cambio de orientación del sistema móvil con respecto al sistema fijo. De esta forma, para cualquier vector representado en un sistema móvil, se puede conocer su cambio con respecto al tiempo dividiendo el problema en dos partes, cómo cambia el vector en el sistema móvil y cómo cambia el sistema móvil con el punto coincidente a ese vector.

Con estas herramientas, se pueden obtener las relaciones entre los vectores de posición de un sistema de referencia fijo y uno móvil, que dan las siguientes ecuaciones:

$$\bar{p} = \bar{p}_{mov}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \omega \times \bar{p}_{mov} + \frac{d}{dt} \bar{p}_{mov}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{v}_{P'} + \bar{v}_{P/M}$$

Esta ecuación explica que la velocidad absoluta del punto  $\hat{p}$  en el marco de referencia fijo es igual a la velocidad de un punto  $\hat{p}'$  del sistema de referencia móvil coincidente con el punto  $\hat{p}$  más la velocidad del punto  $\hat{p}$  relativa al sistema de referencia en movimiento.

Por su parte, al derivar la ecuación anterior se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{d^2}{dt^2} \bar{p} = \bar{a} \times \bar{p} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_{mov}) + 2\bar{\omega} \times \frac{d}{dt} \bar{p}_{mov} + \frac{d^2}{dt^2} \bar{p}_{mov}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2}{dt^2} \bar{p} = a_{P'} + a_{P/M} + a_C$$

Esta ecuación expresa que la aceleración del punto  $\hat{p}$  en el marco de referencia fijo es igual a la aceleración de un punto  $\hat{p}'$  del sistema móvil que coincide con el punto  $\hat{p}$  más la aceleración relativa de P al sistema de referencia móvil más la aceleración complementaria o de Coriolis.

Estas ecuaciones son útiles para movimientos entre sistemas de referencia relativos y fijos, con respecto a un sistema fijo. Para extender la idea a sistemas de mayor complejidad, se ocupa el concepto de que un movimiento general en tres dimensiones es también la combinación de una traslación y de una rotación. De esta forma, se traslada el punto alrededor del cual se realiza la rotación del sistema, dando como resultado el poder conocer el movimiento espacial general de una partícula o un cuerpo rígido en sistemas de referencia concatenados.

$$\bar{p} = \overline{OA} + \bar{p}_{mov}$$

$$\hat{v} = \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{v}_A + \omega \times \bar{p}_{mov} + \frac{d}{dt} \bar{p}_{mov}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2}{dt^2} \bar{p} = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{p} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_{mov}) + 2\bar{\omega} \times \frac{d}{dt} \bar{p}_{mov} + \frac{d^2}{dt^2} \bar{p}_{mov}$$

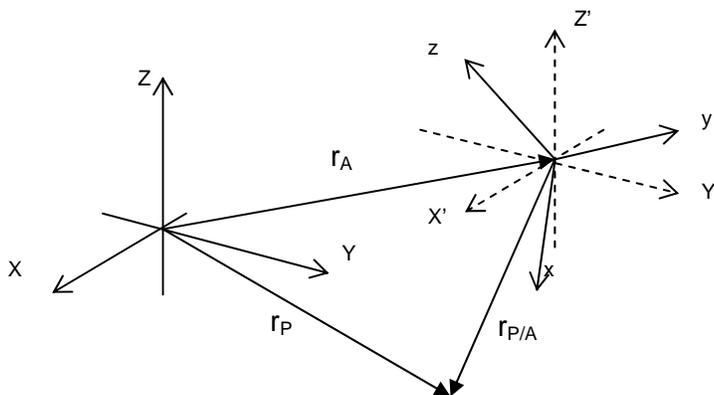


Fig. 2.16 Sistema de referencia en movimiento espacial general

## 2.4 Dinámica de un cuerpo rígido.

Al referirse a la dinámica de un cuerpo rígido sólo se toman en cuenta las cantidades de movimiento que tiene un cuerpo rígido al ser considerado como un conjunto de partículas en movimiento. Las cantidades de movimiento lineal y angular serán de importancia, ya que éstas determinan la energía mecánica cinética que posee el cuerpo

rígido para cierto instante, por lo que es necesario conocer cómo es que se definen estas cantidades de movimiento.

#### 2.4.1 Cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

La cantidad de movimiento lineal de una partícula es su masa multiplicada por la velocidad lineal de ésta. Al sumar la cantidad de movimiento de un conjunto de partículas se puede obtener la cantidad de movimiento lineal de todas ellas:

$$L = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$$

Para el movimiento angular alrededor de un punto O de un sistema de partículas se tiene que:

$$H_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$$

En donde  $r_i$  es la distancia entre el punto O y la partícula  $i$ .

Un punto importante dentro del estudio de la cinética es el centro de masa (G), que en el caso de un sistema de partículas está dada como el punto geométrico en el cual se concentra toda la masa de las partículas, considerando la posición de cada una de ellas

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Siendo  $\bar{r}$  el vector de posición de G.

Con esta ecuación se puede considerar la siguiente igualdad

$$m\bar{r} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i$$

Derivando con respecto al tiempo, se tiene que:

$$m\bar{v} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$$

Siendo así, la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas esta dado por la velocidad del centro de masa del sistema y su masa total.

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i$$

Realizando el mismo análisis para la cantidad de movimiento angular alrededor del centro de masa del cuerpo, se tiene que:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{r}}_{G_i}' \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i)$$

Con ello se puede calcular la cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas.

#### 2.4.2 Cantidad de movimiento en un cuerpo rígido.

En el cuerpo rígido la restricción es que las partículas que lo componen no sufren desplazamientos relativos entre sí, es decir, conservan su forma. Al aplicar los conceptos de cantidad de movimiento lineal y angular se tiene que, en lugar de tomar un número finito de partículas, se usa todo el conjunto de partículas del cuerpo, y que las masas asociadas a cada partícula se vuelven infinitesimales, con lo que la ecuación de cantidad de movimiento lineal queda ahora de la siguiente forma:

$$\mathbf{L} = \int \bar{\mathbf{v}} dm = m\bar{\mathbf{v}}$$

Esto es que la cantidad de movimiento lineal de un cuerpo rígido está dada por el total de la masa y la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido, de forma similar a lo que ocurre con el sistema de partículas. Ahora, considerando la derivada de la cantidad de movimiento con respecto del tiempo se tiene que:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} m\bar{\mathbf{v}} = m \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} m$$

Al estar considerando cuerpos rígidos sin cambio de masa apreciable, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} m\bar{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} = \sum \mathbf{F}$$

Lo cual es la segunda ley de Newton, y dice “El cambio en la cantidad de movimiento lineal es proporcional a la sumatoria de las fuerzas externas aplicadas y en la misma dirección”

Ahora, para la cantidad de movimiento angular se tiene que ésta se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\overline{r}_{Gi}' \times \bar{v}_i \Delta m_i)$$

Como  $r'_{Gi}$  y  $\hat{v}_i$  están referidas al sistema centroidal se tiene que:

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \overline{r}_{Gi}'$$

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\overline{r}_{Gi}' \times (\bar{\omega} \times \overline{r}_{Gi}') \Delta m_i)$$

Esto es, la cantidad de movimiento angular es resultado de un triple producto vectorial, que se puede expresar de forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

Esta matriz representa la distribución geométrica de la masa dentro del cuerpo rígido, sin ser necesariamente homogénea. Cada uno de los factores de la diagonal principal representa las distancias a los ejes centroidales de cada una de las partículas consideradas dentro del cuerpo rígido, y se les denomina momentos de inercia centroidales, los otros factores representan los productos de inercia de masa centroidales, y quedan expresados de la siguiente forma:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xy dm$$

$$I_{xy} = I_{zy} = \int yz dm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int xz dm$$

$I_G$  se denomina como tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masa G. Este tensor representa la distribución de la masa para ese caso específico, y es en general con un sistema de referencia paralelo al sistema de referencia fijo. En general, los productos de inercia están presentes, pero existe una orientación preferencial que los elimina, llamándose a esta orientación los ejes principales de inercia. Estos se encuentran asociados a las simetrías que puede presentar un cuerpo. El problema de encontrar las inercias asociadas a un cuerpo rígido para poder encontrar la cantidad de movimiento angular que éste tiene, se puede atacar desde dos perspectivas. En la primera, se obtiene el tensor de inercia asociado a los ejes paralelos y se trabaja con él directamente, mientras que el segundo acercamiento utiliza los ejes principales de inercia del cuerpo rígido, y posteriormente por medio de transformaciones los traslada al sistema fijo para su análisis. En este punto se debe de ser cuidadoso, pues no con una simple matriz de rotación se logra transformar al tensor de inercia entre un marco de referencia y otro, pues se origina en un triple producto vectorial.

$$\overline{r_{Gi}}^T \times (\overline{\omega} \times \overline{r_{Gi}}')$$

$$I_{XYZ} = Q^T I_{xyz} Q$$

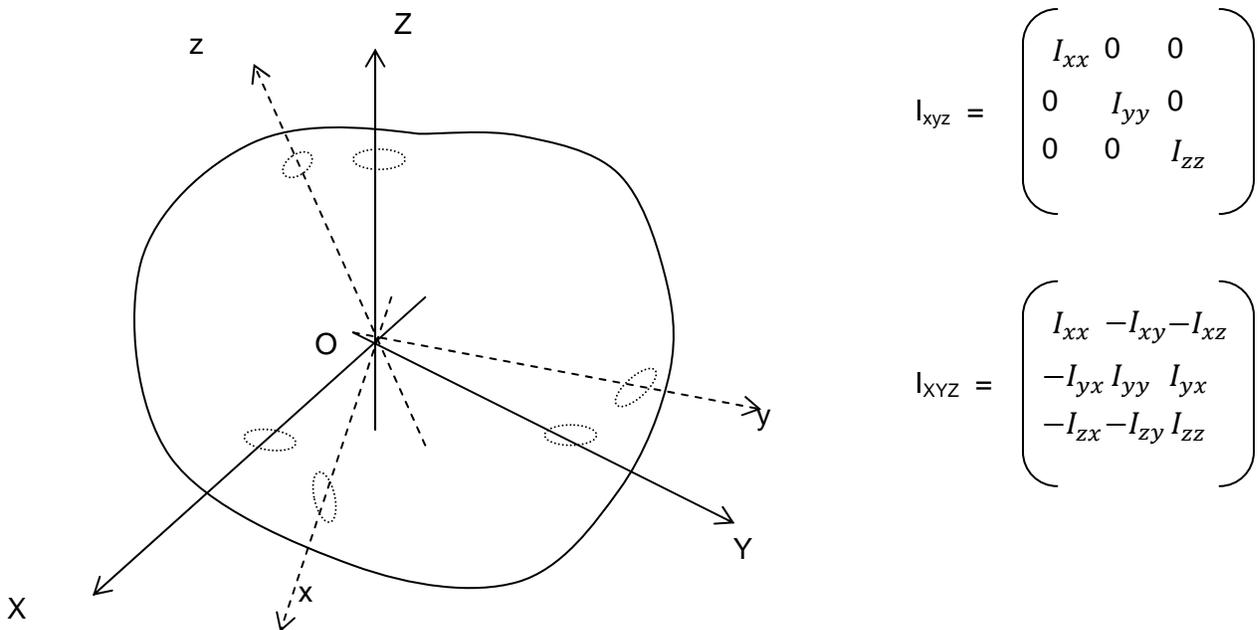


Fig. 2.17 Sistemas de referencia con diferentes orientaciones y tensores de inercia.

### 2.4.3 Energia cinetica de un cuerpo rigido.

Para encontrar la energia cinetica de un cuerpo rigido, se utiliza el siguiente planteamiento. La cinetica del cuerpo esta representada por la energia cinetica lineal asociada a su centro de masa y su total de masa, así como por la energia cinetica de cada una de las partícula alrededor de este punto. Esto es:

$$Ec = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \bar{v}_i^2$$

Desarrollando el segundo termino se tiene que:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\bar{\omega} \times \bar{r}_i|^2 \Delta m$$

Al desarrollar, se tiene que

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{xz} \omega_x \omega_z)$$

Esta ecuacion se simplifica al seleccionar los momentos de inercia principales paralelos a los ejes de referencia del sistema fijo o absouto. Con esto, se puede obtener la energia cinetica general para un cuerpo rigido en movimiento espacial general.

### 2.5 Clasificación de los sistemas mecánicos robóticos.

El presente trabajo analiza el desempeño de un manipulador robótico y la forma en la que se puede hacer más eficiente su trabajo. Por ello, es necesario entonces el conocer cuáles son los manipuladores robóticos, cuáles sus antecedentes y sus clasificaciones, para poder conocer cuál de estos sistemas es el que está en análisis.

#### 2.5.1 Antecedentes de los robots.

La palabra Robot proviene del eslavo "Robota", que significa esclavo. En un principio representaba a los adelantos mecánicos antropomorfos que desarrollarían tareas tales que eliminaran el trabajo físico del ser humano. Pero la versión antropomórfica dista de los actuales robots, que más bien pueden ser definidos como el conjunto de sistemas mecánicos, electrónicos y de programación encaminados a realizar una serie de tareas definidas y con la capacidad de adaptación [8, 9].

Después de la década de los 40 del siglo pasado se inicia el desarrollo de nuestro actual concepto de robot, empezando con manipuladores que podían desarrollar tareas peligrosas para el ser humano, pero con la dirección inmediata de un operador para su control. Al ir avanzando la tecnología se inicia con la retroalimentación de información desde el robot y con la programación para que él desarrolle tareas por sí mismo. Para la década de los 50 la retroalimentación y la integración de microcontroladores para realizar las tareas específicas permiten ampliar la gama de aplicaciones de los robots.

Para la década de los 60 se tiene un mayor desarrollo en los sistemas de retroalimentación de los robots, como es la integración de sistemas táctiles y sistemas de visión para su mejor desempeño y campos de aplicación. Ya para la década de los 70 series de robots como los modelos PUMA tienen aplicaciones industriales amplias, al tener de ventaja el poder desarrollar tareas repetitivas con alta precisión y poder ser flexibles en cuanto a las tareas a desarrollar, punto muy importante dentro de la industria. Uno de los principales consumidores y patrocinadores de los robots es la industria automotriz, que hasta la fecha sigue consumiendo gran cantidad de robots para sus plantas de ensamblaje.

La década de los 80 marca la expansión de las aplicaciones robóticas al buscar robots de mayor flexibilidad, más aplicaciones y la reducción del costo de implementar dichos sistemas. Ya no solo son los grandes robots industriales que pueden cargar grandes pesos, sino que aparecen los robots de mayor precisión, para ensamblaje de circuitos electrónicos, donde el valor preponderante no es la fuerza, sino la velocidad y precisión de la tarea. En los años 90s la integración de sistemas de inteligencia integrada a los robots son los que van marcando la pauta, para lograr una mayor independencia en medios que están continuamente cambiando. Actualmente, el desarrollo no solo de robots industriales, sino también de robots antropomórficos, primero con fines experimentales y después con fines lúdicos, son los que van marcando la vanguardia. El desarrollo de sistemas expertos de inteligencia artificial aplicados a los robots ya no solo en el área industrial, el desarrollo de sistemas de alta velocidad y gran precisión, y la aplicación en distintas áreas de la manufactura son los motores que van permitiendo que los robots sean ampliamente aplicados en todo el mundo.

#### 2.5.2 Eslabones, articulaciones y grados de libertad.

Para el análisis de los sistemas mecánicos que conforman un robot se analiza primero como está conformado y como es que se mueve dicho sistema. El primer concepto es el de eslabón, que así se le denomina a cada cuerpo que realiza un movimiento dentro del sistema. Los eslabones pueden clasificarse en función de cuántos son los eslabones con los que interactúa para realizar una tarea, siendo así que un eslabón binario interactúa con otros dos eslabones, y uno ternario interactúa con tres.

La forma de interactuar entre eslabones es por medio de las articulaciones. La articulación es la superficie que se encuentra entre un eslabón y otro, y se clasifica por el tipo de movimiento que permite y los grados de libertad que posee. Como grado de libertad se entiende a los movimientos que permite realizar cada articulación, en función de los desplazamientos lineales o rotaciones posibles en ejes coordenados ortogonales. La siguiente lista relaciona cuáles son los tipos de articulaciones y sus características:

Articulación prismática (P): Esta permite el movimiento lineal entre eslabones, en un solo eje, deslizando un eslabón sobre el otro. Únicamente permite un movimiento, un grado de libertad.

Articulación rotacional (R): Esta permite el giro con un solo eje de rotación, dejando solo rotar a un elemento sobre otro. Ejemplo de estas articulaciones serían los correspondientes a un rodamiento. Este también solo permite un movimiento, el de rotación, dando un solo grado de libertad.

Articulación cilíndrica (C): Esta permite tanto la rotación como el deslizamiento, ambos a lo largo de un eje coincidente, dejando dos posibles variables o grados de libertad dentro de ella.

Articulación helicoidal (H). Similar a la relación entre un tornillo y una tuerca, este tipo de articulación permite transformar el movimiento rotacional a un movimiento lineal y viceversa, siendo entonces que solo permite un grado de libertad dentro de ella.

Articulación esférica (S). En esta articulación se permite el giro del eslabón en cualquiera de los ejes rotacionales por lo que presenta entonces tres grados de libertad, tres movimientos rotacionales por realizar.

Articulación plana. Esta permite el deslizamiento de un eslabón sobre de otro en dos direcciones ortogonales y un giro. Es de tres grados de libertad, pues permite dos desplazamientos longitudinales a lo largo de un plano y el giro correspondiente.

Articulación entre engranes. Esta articulación permite el deslizamiento entre superficies y permite transformar un movimiento rotacional en otro similar. Se le considera como una articulación de dos grados de libertad, o bien, como una articulación de par superior.

Articulación en leva. Similar al caso de un engrane, esta articulación permite el deslizamiento combinado con una rotación, por lo que también se considera de dos grados de libertad y también una articulación de par superior.

Ahora, se ha venido mencionando el concepto de grado de libertad en todas estas articulaciones. Por grado de libertad entiéndase que son las variables que se tienen

que definir para poder tener una solución cerrada al momento de estar moviendo un sistema mecánico. Por ejemplo, si se trata de un sistema con un grado de libertad, solo es necesario el controlar una de las variables para que todos los otros elementos queden definidos. Como caso especial, cuando solo se trata de un grado de libertad, se llama a estos sistemas mecanismos.

Para calcular los grados de libertad de un sistema mecánico se recurre a la fórmula propuesta por Grüber y Kutzbach, en la que se consideran el número de eslabones y sus interacciones o articulaciones. La fórmula es la siguiente:

$$GL = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

En esta ecuación los grados de libertad  $GL$  están en función del número de eslabones del sistema  $n$ , incluyendo al eslabón fijo, el número de articulaciones que componen al mecanismo  $j$ , los grados de libertad del espacio en análisis  $\lambda$ , ya sean 2 para un sistema plano o 3 para un sistema espacial y los grados de libertad permitidos por cada una de las articulaciones  $f_i$ . Con ello, se obtiene la siguiente tabla:

<b>Grados de libertad</b>	<b>Clasificación</b>	<b>Ejemplo</b>
<b>1 &lt; n</b>	Cadena cinemática	Robot
<b>1</b>	Mecanismo	Mecanismo de 4 barras
<b>0</b>	Estructura	Triángulo
<b>n &lt; 0</b>	Estructura sobreesforzada	--

En general la fórmula descrita funciona, pero existen casos en los que son necesarias más herramientas para poder determinar los grados de libertad del sistema mecánico, y se les denomina sistemas sobrerestringidos.

### 2.5.3 Sistemas de lazo abierto y cerrado.

Los sistemas mecánicos también se pueden clasificar por el tipo de lazo que presentan. Un lazo es cuando todos los eslabones de un sistema quedan siempre unidos a otros dos eslabones, cuando menos.

El primer caso es el lazo abierto, en el cual se tiene una cadena de eslabones que no cierra ningún lazo, es decir, uno de los eslabones queda únicamente sujeto a un solo eslabón, dejando libre el otro extremo del eslabón. Otro caso es en el que todos los eslabones se unen formando un o varios lazos, considerados como de lazo cerrado. Aquí todos los eslabones están unidos a más de un eslabón. También existe la posibilidad de que una parte del sistema se considere de lazo cerrado, mientras que en otra se considere de lazo abierto, siendo estos sistemas llamados de lazo mixto.

Un ejemplo claro de este tipo de clasificación puede ser un manipulador robótico serial, en el cual cada eslabón está unido a otros dos, excepto el último, con lo que se hace un sistema de lazo abierto. Por el otro lado se tiene al mecanismo de cuatro barras, en el que todos los elementos se encuentran unidos a otros dos eslabones, formando un solo lazo.

#### 2.5.4 Clasificación de los robots.

Existen distintas formas para clasificar un sistema robótico, y a continuación se mencionan algunas de ellas:

Por grados de libertad: Para poder realizar un movimiento en el espacio tridimensional son necesarios 6 grados de libertad, 3 rotacionales y 3 longitudinales. A aquellos sistemas con 6 grados de libertad se les conoce como robots de propósito general. Se les llama redundantes cuando tienen más de 6 grados de libertad y se les llama deficientes, cuando tienen menos grados de libertad.

Por estructura cinemática. Se pueden clasificar por medio de la estructura de lazo que presentan. Si se trata de una estructura de lazo abierto, se les llama robots seriales, si se trata de una estructura de lazo cerrado, se les conoce como robots paralelos, mientras que si se encuentran ambas características, se les conoce como robots híbridos.

Por el tipo de motor ocupado. Se pueden tener accionamientos de tipo eléctrico, neumático o hidráulico. La selección de qué tipo de accionamiento sea el que se ocupa en un robot dependerá de las aplicaciones, fuerzas requeridas o suministros de energía disponibles.

Por área de trabajo. Si el movimiento que desarrolla el robot es en varias coordenadas rectangulares, se le denomina cartesiano. Otra opción es cuando el sistema ocupa dos coordenadas longitudinales (radio y altura) y una angular, al cual se le conoce como cilíndrico. Otro más es aquél que ocupa dos coordenadas angulares y una última prismática, y se le conoce como esférico.

También se puede clasificar a los robots por medio de su tipo de movimiento (plano, espacial), sus características geométricas o la similitud con formas que puede tener el robot (robot paralelo diamante) u otra característica de interés.

En este trabajo se inicia el estudio con manipuladores seriales, de dos y tres eslabones y grados de libertad, en movimiento plano, sin definir cuál es la fuente de energía que ocupa para desarrollar la tarea prescrita.

## 2.6 Principios de Optimización.

El problema de optimización surge a partir de los sistemas de múltiples variables en los que la descripción del sistema llega a tener tal grado de complejidad, que el análisis del cálculo de múltiple variable lleva a ecuaciones de mayor complejidad que no permiten ser resueltas por métodos analíticos de una forma sencilla. Ejemplo de ello sería un proceso de producción, en el cual se involucran múltiples variables como costo de insumos, materia prima, costo de operación y amortización de la maquinaria y del cual se quiere saber cómo se comporta el costo total del producto. Otro ejemplo sería dentro de una planta de generación de energía donde la eficiencia del proceso no solo está en función de calidades de vapor o entalpías en los puntos de extracciones de vapor, sino en el comportamiento de otros equipos, como flujos en intercambiadores de calor, o eficiencias por la configuración de una turbina. Al tratar de describir de forma más precisa un sistema, se encuentra que éste se hace de una mayor complejidad, hasta el punto tal que no es práctico el tratar analíticamente a las funciones que se van obteniendo del proceso [10].

Para ello, y con la llegada de los procesadores numéricos, se propone la idea de no tener que resolver analíticamente toda la función, sino optar por un método numérico que oriente el lugar donde puede encontrarse el punto óptimo, ya sea un máximo, un mínimo, un punto de inflexión o un punto de equilibrio dentro del proceso. Por medio de estas técnicas de optimización se logra que no solo no se tenga que realizar el análisis complejo de la función, sino la reducción en tiempo de análisis al no tener que evaluar toda la función sino únicamente puntos. A continuación se presentan los fundamentos en los que se basa la optimización y se desarrolla cada uno de ellos de acuerdo al planteamiento presentado por Aaby y Dempster [15] acerca de la optimización.

### 2.6.1 Función objetivo.

Para lograr una optimización, primero es necesario identificar qué es lo que se quiere mejorar. En algunos casos será el costo de producción de un artículo, la eficiencia de un equipo o el trabajo que realiza una persona dentro de su jornada laboral. Para ello se requiere de una relación que represente aquello que se quiera mejorar y que se encuentre relacionada con los parámetros a variar dentro de esta optimización. A esta relación se conoce como función objetivo.

Los puntos que se buscan dentro de la función objetivo son en general los máximos o mínimos. Para simplificar el trabajo, se busca que la función objetivo quede expresada de tal forma que se busque siempre el mínimo. Así, si se está buscando un máximo de una función, la función objetivo se multiplica por la unidad negativa, buscando ahora un mínimo.

Para definir la función objetivo es necesario conocer cuáles son las variables o parámetros que van a estar involucrados en el proceso de optimización. En general se trata de procesos iterativos que a partir de una serie de coordenadas de las variables, se genera un nuevo juego de puntos para evaluar la función. Así, se obtiene un vector de parámetros que en forma matricial, quedando expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

Para cada punto de la función objetivo se va a obtener un valor  $E_i$ , y por medio del método seleccionado, se generara un siguiente valor  $E_{i+1}$  por medio de la variación

$$\Delta \mathbf{x}^T = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

Dependiendo del método seleccionado será cómo se encuentra el valor de las variaciones en el vector de parámetros, para ir acercando la función objetivo a su valor mínimo.

Se puede entonces definir la función objetivo en función de los parámetros de la siguiente manera:

$$\text{Funcion Objetivo} = f(\mathbf{x}^T)$$

## 2.6.2 Mínimos absolutos y mínimos locales.

Cuando se analiza el comportamiento de una función de una sola variable, se busca su pendiente, sus máximos y mínimos y sus puntos de inflexión. En los puntos máximos y mínimos se encentra que, dependiendo del rango de la función y del comportamiento de la vecindad de puntos, se puede clasificar a éstos como valores extremos absolutos o locales. Por valores extremos absolutos se entiende a aquellos que tienen mayor valor de máximo o mínimo dentro del rango, mientras que los valores máximos y mínimos locales solo lo son con respecto a su vecindad de puntos.

Con los métodos de optimización se tiene el problema de que en general encuentran los valores mínimos locales a partir del punto inicial que se le dé al método. Con esto sería necesario el buscar todos los valores mínimos locales y compararlos, para poder asegurar que se trata del mínimo absoluto. Para ello se puede recurrir a orientar la búsqueda de mínimos por medio del análisis del comportamiento de la función. Otro de los problemas que enfrenta la optimización es cuando las funciones objetivo puedan no ser suaves, es decir, generan puntos de singularidades. Para ello, dependiendo del comportamiento de la función se puede optar por un método u otro, pero tomando en cuenta siempre que estos métodos sólo arrojarán los resultados locales, en caso de existir múltiples mínimos.

### 2.6.3 Funciones objetivo de variable vectorial.

En el caso general la función objetivo está definida no solo por un parámetro, sino por  $n$  parámetros simultáneamente. Ya que no es posible aplicar el concepto de derivada del cálculo de una sola variable, se recurre al cálculo vectorial, y a las derivadas parciales.

En este caso es necesario desarrollar el gradiente de esta función, el cual va a estar definido por:

$$\mathbf{g}^T = \nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

A este se le conoce también como Jacobiano de la función  $f$ . También es necesario definir la matriz Hessiana, la cual ordena las segundas derivadas de la función de la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Con estos dos conceptos, es posible desarrollar cómo varía la función  $f$  de variable vectorial, ya que por su desarrollo en serie de Taylor se tendrá:

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \dots$$

Este desarrollo será útil cuando la función objetivo sea conocida y las derivadas parciales de ésta con respecto a los parámetros puedan ser obtenidas fácilmente. En el caso general, la complejidad de las funciones objetivo y la imposibilidad de cálculo de las derivadas, requiere métodos que no dependen de dichas derivadas parciales.

### 2.6.4 Regiones y restricciones

Otro de los problemas que enfrentan los métodos de optimización es que los parámetros a variar solo pueden encontrarse dentro de un rango. Ejemplo de función objetivo y rango es el costo de producción, en la que el rango de unidades producidas solo puede ser positivo. Restricciones más generales se pueden encontrar por relaciones entre los parámetros o ecuaciones simultáneas que describen el sistema. Unas de las más comunes serán las desigualdades que expresan la frontera a partir de la cual se encuentra la región de estudio.

Esto ocasiona que la búsqueda del punto óptimo de la función objetivo se restrinja a una región definida por los rangos de los parámetros y ecuaciones simultáneas entre ellos. La búsqueda del punto óptimo dentro de la región restringida implica el problema de que el método de optimización tome en cuenta dichas fronteras, siendo que puede estar dentro de ellas el punto mínimo buscado. Se pueden entonces identificar dos regiones, una región factible, y una no factible. El método numérico de optimización deberá tomar en cuenta que el punto evaluado esté dentro de la región factible y que los puntos generados por él queden dentro de esta misma región.

En la figura siguiente se muestran diferentes desigualdades y las regiones que ellas producen, al combinar dichas restricciones. Las funciones  $r_n$  representan la frontera de las desigualdades, y combinando estas figuras se puede encontrar cuál es la región de estudio en la que se debe encontrar el punto óptimo, el cual puede estar incluso en la frontera de la región factible (Fig. 2.18).

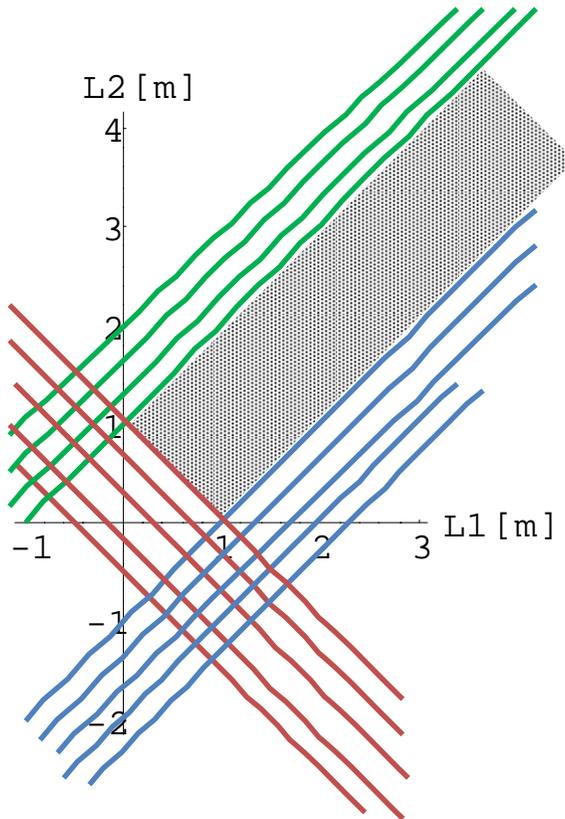


Fig. 2.18 Fronteras de la región factible.

### 2.6.5 Convergencia.

Los métodos de optimización se ocupan para reducir tiempo de cálculo al encontrar un mínimo para una función objetivo. Para evaluar su eficacia es necesario conocer la convergencia que ellos tienen. Por convergencia se entiende que el método logre acercarse a un punto mínimo en cada iteración que realiza. Así, si el punto en estudio no puede acercarse, no tendrá convergencia y no servirá. Esta falta de convergencia puede ser por la forma de la función que no permita la convergencia del método.

Después de superar el problema de la convergencia, se enfrenta la cuestión de la velocidad de convergencia. Cada método de optimización se basa en un algoritmo que se acerque cada vez más al punto óptimo, pero la diferencia entre ellos es en cuántos pasos lo logran. Cada uno de estos métodos requiere de tiempo para realizar operaciones numéricas para cada uno de los puntos evaluados, y éstas representarán tiempo de cómputo del procesador. Así, aquel método que permite lograr un mayor avance con un menor número de cálculos será aquél que tendrá una mayor velocidad de convergencia.

Para ejemplificar la convergencia, se usa el método de Newton para encontrar la raíz de una función. Suponiendo que la función que se está analizando por medio del método de Newton es la derivada de la función objetivo, con lo que se tendrá que si se encuentra a los ceros de dicha función, se encontrarán los máximos y mínimos de la función objetivo.

Este método evalúa para un punto inicial a la función y su derivada, y por medio de ellos predice cual será el siguiente punto en el cual debe de ser evaluada la función. El algoritmo está descrito de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La representación gráfica de este método se puede ver en la siguiente figura (Fig. 2.19):

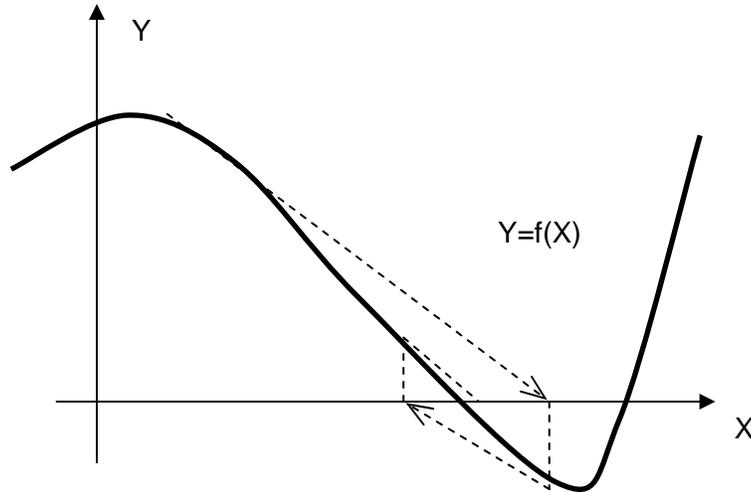


Fig. 2.19 Convergencia del método de Newton

Pero puede ocurrir que el punto propuesto no lleve hacia un punto de convergencia, como se puede ver en la figura siguiente.

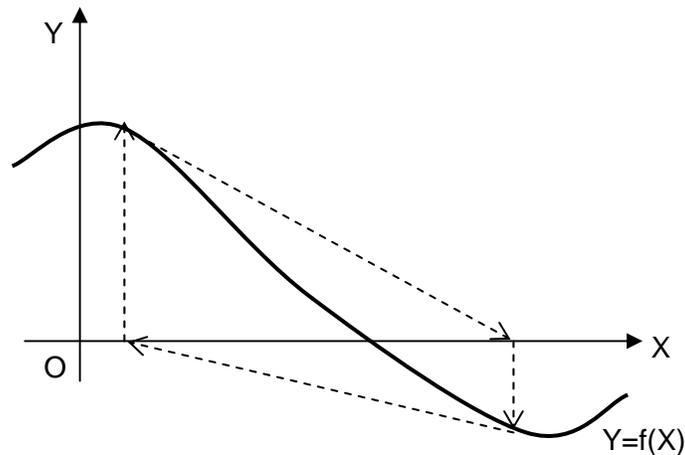


Fig. 2.20 Error en el método de Newton.

Este método podría servir para conocer el punto óptimo, pero se ve limitado por su aplicación a funciones escalares de una variable, en las que sea conocida la primera y segunda derivada de la función objetivo. Asimismo, la convergencia del método depende de la forma de la función, siendo entonces de aplicación limitada.

### 2.6.6 Método simplex

Para modelos de mayor complejidad, se puede optar por métodos de carácter numérico, los cuales tienen un mayor alcance. Uno de estos métodos es el método

simplex, el cual selecciona puntos dentro de la región factible, y va generando nuevos puntos para evaluar hasta llegar al punto óptimo, generalmente expresado como un mínimo local.

Al ser un modelo iterativo, permite evaluar solo puntualmente la función, sin necesidad de analizar completamente todos los puntos o realizar un análisis propio del cálculo vectorial para conocer su comportamiento. Por ejemplo, para el caso de una función escalar de dos variables, se generan tres puntos, se elimina uno y con los otros dos se genera una línea, que sirve como referencia para reflejar el punto eliminado y generar el siguiente punto (Fig. 2.21). En el caso de tres variables, se generan cuatro puntos, y al eliminar el de mayor valor quedan tres puntos, con los cuales se genera un plano al que se reflejara el punto eliminado de forma perpendicular (Fig. 2.22). Se sigue de esa forma hasta llegar a la tolerancia impuesta al método numérico, obteniendo así las coordenadas del punto óptimo.

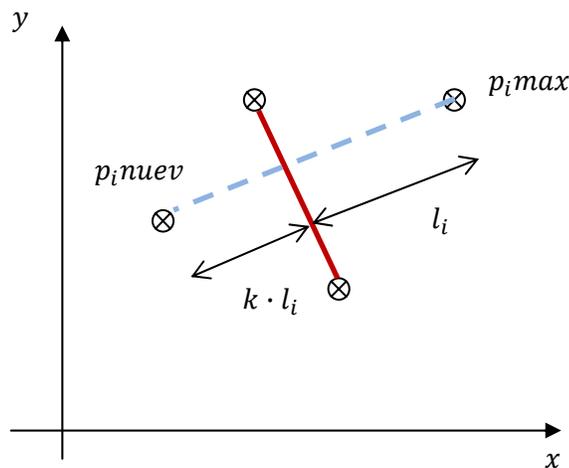


Fig. 2.21 Método Simplex en dos dimensiones.

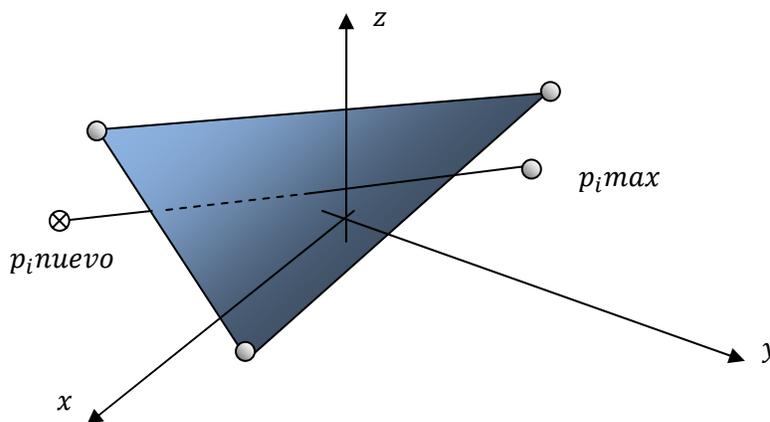


Fig. 2.22 Método simplex en tres dimensiones.

Para funciones escalares de  $n$  variables se requiere generar  $n + 1$  puntos, evaluar cada uno de ellos y eliminar el de mayor valor, generando un subespacio vectorial con ellos y reflejando ortogonalmente el punto eliminado con respecto del subespacio generado. Como criterio de convergencia se puede tomar cuando los puntos del subespacio van acercándose tanto que la diferencia de valor del escalar generado entre ellos va tendiendo a cero.

Existen casos en los que no se trata de un solo punto óptimo, sino regiones que cumplen con el criterio de optimización. En esos casos el método puede tener fallas, ya que en cada corrida genera distintos puntos iniciales, lo cual puede llevar a soluciones distintas, que son un subconjunto dentro de la región solución del problema (Fig. 2.23). Se pueden aplicar métodos numéricos más robustos, dependiendo de la complejidad de los funciones a evaluar, teniendo como consecuencia el aumento del tiempo para generar la solución.

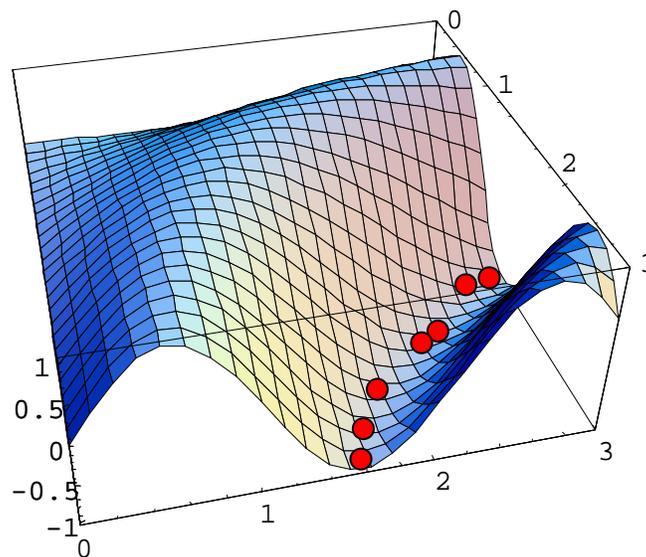


Fig. 2.23 Región de convergencia y soluciones numéricas con distintos valores.

*“Si supiese que es lo que estoy haciendo, no lo llamaría investigación, ¿verdad?”*

*Albert Einstein.*

### 3. Modelo teórico.

En el capítulo anterior se presentaron las bases teóricas en las que se basa el análisis del sistema mecánico que se pretende estudiar. Abarcó desde los conocimientos básicos de mecánica clásica y termodinámica hasta los conceptos de optimización de una función. Con estas bases, en este capítulo se expone cuál es el modelo teórico que se ocupará en este caso, para un manipulador serial, describiendo cada una de las características del modelo y cómo es que se combinan dichos conceptos en una ecuación que engloba la energía total, la trayectoria de trabajo y las dimensiones de diseño del modelo. Es decir, se trata de obtener las dimensiones de un manipulador para una tarea que consume la energía mínima

El modelo teórico presenta los siguientes pasos:

1. Describir el modelo termodinámico.
2. Describir el modelo mecánico.
3. Obtener la función de trayectoria.
4. Obtener la función de radio de trabajo y encontrar sus máximos y mínimos absolutos.
5. Determinar la región factible a partir de las ecuaciones de restricción de los valores extremos del modelo geométrico.
6. Determinar la función de energía total del manipulador en función de los parámetros de diseño.
7. Buscar el punto óptimo para la función objetivo de energía total del manipulador.

#### 3.1 Modelo termodinámico de un manipulador serial.

Todo sistema termodinámico debe de estar identificado por sus fronteras, ya que éstas determinan las interacciones que presenta el sistema con sus alrededores. La adecuada selección de dichas fronteras permitirá un análisis de mayor o menor complejidad, así como la obtención de la información que se requiera. Para nuestro caso se identifica cuál es el sistema, el tipo de frontera y los alrededores que se considerarán.

Para ello, primero se identifica cuál es el sistema de estudio y cuales sus fronteras. El esquema que se muestra a continuación representa a un manipulador serial, por el momento sin importar el tipo, modelo o número de eslabones. El manipulador cuenta

con una base que suministra la energía para cada uno de los motores del mismo y da la inercia necesaria para que el brazo robótico esté firmemente asegurado. Por otro lado, el brazo está conformado por varios eslabones de forma serial, articulados entre ellos sin tener una restricción para el tipo de articulación empleada. Por último se toma en cuenta el objeto o tarea a realizar, la cual se considera que está previamente identificada y no se puede modificar (Fig 3.1).

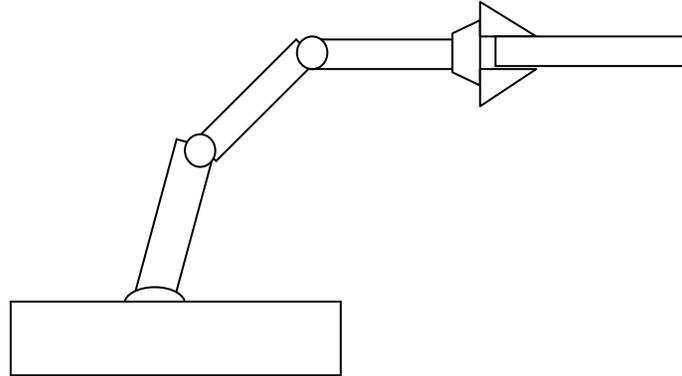


Fig. 3.1 Esquema del manipulador

El sistema que se define está dado por los eslabones del manipulador, dejando fuera de las fronteras del sistema al objeto a mover y a su base. El tipo de frontera seleccionado no permite el paso de masa, sino solamente el flujo de energía, ya sea entre el brazo y su base, el brazo y el objeto a mover o el brazo y los alrededores en general (Fig 3.2).

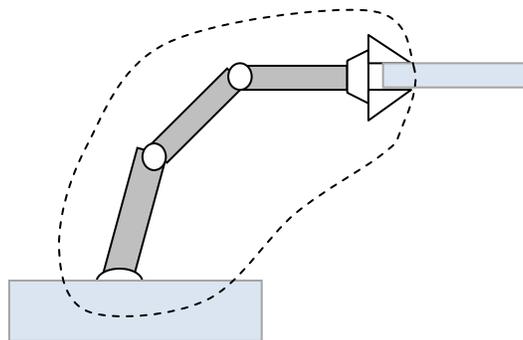


Fig. 3.2. Fronteras del

Como a través de las fronteras sólo puede haber flujo de energía, es necesario identificar a qué corresponde cada uno de ellos. El primer flujo es aquél que va de la base inercial al manipulador, siendo éste el que engloba al total de energía que se introduce al sistema. El segundo flujo que se logra identificar es la energía que sale del manipulador para realizar la tarea descrita, siendo ésta una cantidad de energía menor a la que se introduce, y esto se da por dos causas. La primera es qué parte de la

energía se disipa en forma de calor en actuadores o articulaciones, ocasionando un flujo de calor al medio ambiente, mientras que la segunda es parte de la energía que se introduce al sistema y se destina a mover al manipulador mismo (Fig. 3.3).

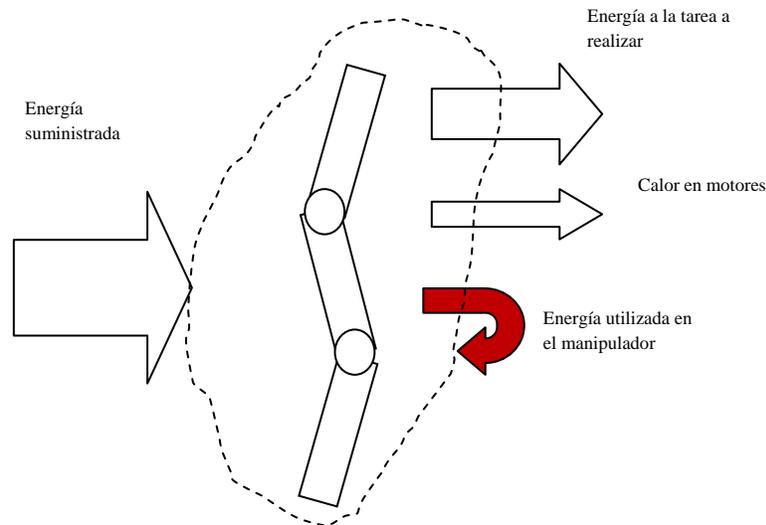


Fig. 3.3. Flujos de energía a través de las fronteras

En la realidad, al sistema ingresa energía a través de sus actuadores. Generalmente se trata de energía eléctrica, pero puede tener actuadores de tipo hidráulico o neumático o de otro tipo, por lo que solo se identifica el flujo de energía sin importar el tipo de actuador que realiza este trabajo. En los actuadores se modifica la energía introducida al sistema en energía cinética, encargada de realizar el movimiento del manipulador, y una parte de la energía introducida se disipa en forma de calor ya sea por fricción en las articulaciones o por fricción y calentamiento en los actuadores. El total de energía cinética obtenida se divide en dos partes, una al objeto a mover o la tarea a realizar, y otra parte se ocupará para mover el mismo manipulador.

La energía ocupada en la tarea a realizar no se puede cambiar a menos de que se modifique la tarea misma o la trayectoria descrita. Por otro lado, el calor disipado en los actuadores y su consecuente pérdida de energía sólo se puede disminuir por medio de mejores actuadores. En ambos campos existen diversos trabajos encaminados a hacer trayectorias más eficientes, así como a mejorar la eficiencia de los actuadores y reducir las pérdidas de energía en las articulaciones por medio de disminución en la fricción. Bajo este punto de vista, queda una parte de energía que aun se puede optimizar, y ésta es aquella que ocupa el mismo manipulador para realizar su tarea. Si se reduce este último flujo de energía se tendrá que la mayor parte de la energía cinética obtenida irá a realizar la tarea descrita, siendo éste el caso de mayor eficiencia del modelo.

En el modelado de este estudio se utiliza un modelo ideal, el cual no tiene pérdidas por fricción y se trata a los eslabones como sólidos no elásticos, con lo que se elimina la energía potencial elástica dentro de los eslabones. También se considera que no se va a modificar la tarea a realizar, siendo ésta predeterminada, sin importar si es o no la de mayor eficiencia. También se considera que los actuadores ni las articulaciones tienen pérdidas en forma de calor. Esto implica que solo se tiene en análisis la energía mecánica del manipulador. Esta energía quedará en función de la geometría del manipulador, así que la tarea en sí es buscar la configuración geométrica que asegure tener siempre la menor energía en toda la tarea a realizar. Con ello se tendrá que la mayor parte de la energía introducida al sistema se dedicará a la tarea a realizar. Para un sistema más detallado que considere fricciones y pérdidas, éstas estarán relacionadas con las velocidades relativas en las articulaciones, así como con la potencia que se requiere para realizar dichos movimientos, quedando estas ecuaciones también en función de las variables de diseño.

Para la energía mecánica de cada elemento del manipulador, se toman en cuenta las energías potenciales y cinéticas que presenta cada elemento. Para ello, es necesario modelar los eslabones, sus relaciones con los actuadores y todo aquello que pueda tener un flujo de energía involucrado dentro del manipulador. Para simplificar el análisis, solo se toma en cuenta a los eslabones del manipulador, sin considerar masas de actuadores, otros elementos de acumulación de energía u otros, pues éstos no están definidos en este primer acercamiento al modelo.

Al ser nuestra función objetivo la energía mecánica del manipulador, dicha función estará determinada por la energía de cada uno de sus eslabones. Esta ecuación queda en función de sus dimensiones. Esta energía estará determinada por sus propiedades inerciales (masa, momento de inercia) así como cinemática que se desprende de la trayectoria que se pretende realizar. Estos datos deben de estar relacionados con los parámetros que se pretenden modificar del manipulador.

Para un primer acercamiento se toma que la masa depende de la longitud de cada eslabón, relacionado por una densidad lineal  $\rho L$  (Fig. 3.4).

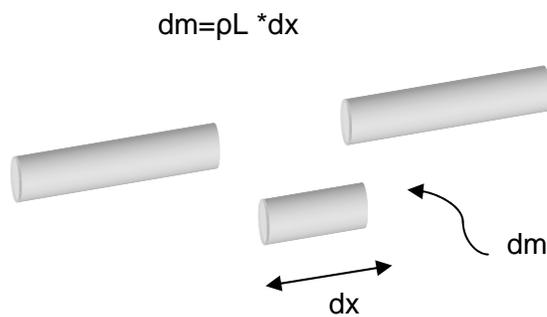


Fig. 3.4 Elemento diferencial del eslabón

Para obtener el momento de inercia se modela al eslabón como una barra sólida (Fig. 3.5). En algunos otros estudios se sugiere que la geometría idónea será una sección tubular de pared delgada que tendría como ventaja que con la misma masa se tendría una menor deflexión<sup>[11]</sup> o el cambio en el tipo de materiales a ocupar, como fibra de carbono, y eslabones modelados por medio de elemento finito <sup>[12]</sup>. Así se tendrá que para cada eslabón del manipulador se generan ecuaciones de las propiedades inerciales en función de las longitudes de los eslabones.

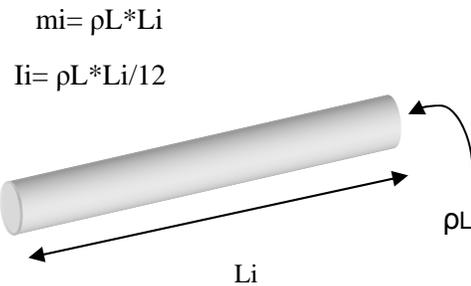


Fig. 3.5 Masa y momento de inercia.

Se tomo una barra sólida como modelo inicial por la sencillez del cálculo de sus propiedades inerciales. De la misma forma, si se opta por otra geometría para cada una de los eslabones, ésta se podrá incluir dentro del cálculo, únicamente tomando en cuenta cuáles son las variables de diseño. Para este primer acercamiento, solamente se dejan variables las longitudes de los eslabones.

### 3.2 Modelo cinemático de un manipulador serial.

Después de obtener las propiedades inerciales es necesario conocer las propiedades cinemáticas asociadas a la trayectoria. Para ello se necesita conocer la velocidad lineal de los centros de masa y las velocidades angulares absolutas de cada eslabón. Estas dependerán de la trayectoria de trabajo y de las longitudes de los eslabones. El primer acercamiento para un manipulador serial se da a través de un sistema con movimiento plano, para reducir el número de ecuaciones involucradas. Pero de la misma forma puede analizarse para un sistema que desarrolla un movimiento tridimensional. Los casos analizados a continuación corresponden a un manipulador de dos barras con articulaciones RR en movimiento plano general y a un manipulador de tres eslabones con articulaciones RRR, también en movimiento plano.

El primer acercamiento utiliza el modelo de un manipulador plano RR, como el representado en la siguiente figura (Fig. 3.6). En este modelo las variables que se

pretenden encontrar son las longitudes de los eslabones y los ángulos correspondientes de cada eslabón en cada instante.

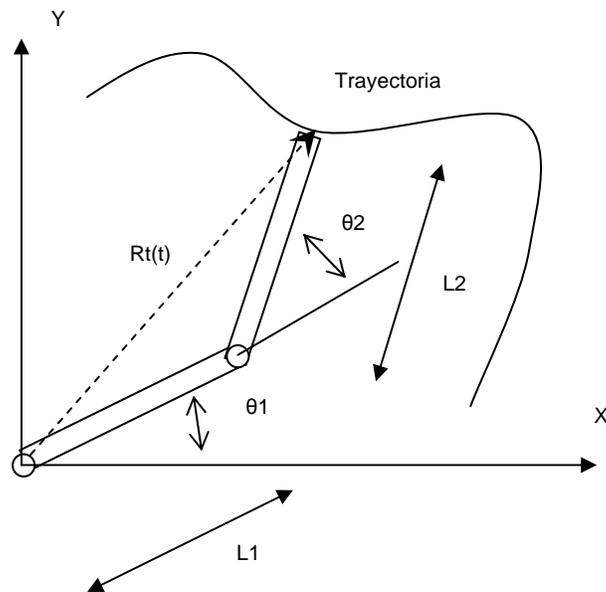


Fig. 3.6 Manipulador RR y trayectoria

La trayectoria es una función del tiempo con

$$R(t) = \{Xt(t), Yt(t)\}$$

Para las proyecciones en cada eje coordenado se tiene:

$$Xt(t) = L1 * \cos(\theta1) + L2 \cos(\theta1 + \theta2)$$

$$Yt(t) = L1 * \sen(\theta1) + L2 \sen(\theta1 + \theta2)$$

Si se aplica cinemática inversa desde alguna posición inicial, es necesario utilizar un método iterativo para encontrar la siguiente posición, y se corre el peligro de que llegue a puntos singulares en los que pueda perder la siguiente posición cuando llegue a una posición extrema. En lugar de ello se recurre al planteamiento geométrico en el que el manipulador siempre permanece en una configuración, ya sea brazo arriba o brazo abajo, obteniendo las siguientes relaciones entre ángulos (Figs. 3.7 y 3.8).

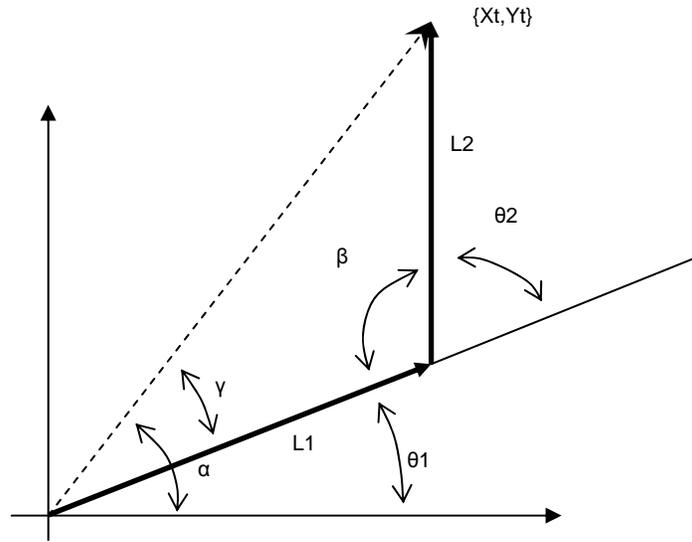


Fig. 3.7 Configuración brazo abajo

Para ambas configuraciones se tienen las siguientes relaciones angulares:

$$Rt = \sqrt{Xt^2 + Yt^2}$$

$$\alpha = ATan \left[ \frac{Yt}{Xt} \right]$$

$$\gamma = ACos \left[ \frac{L1^2 - L2^2 + Rt^2}{2 L1 Rt} \right]$$

$$\beta = ACos \left[ \frac{L1^2 + L2^2 - Rt^2}{2 L1 L2} \right]$$

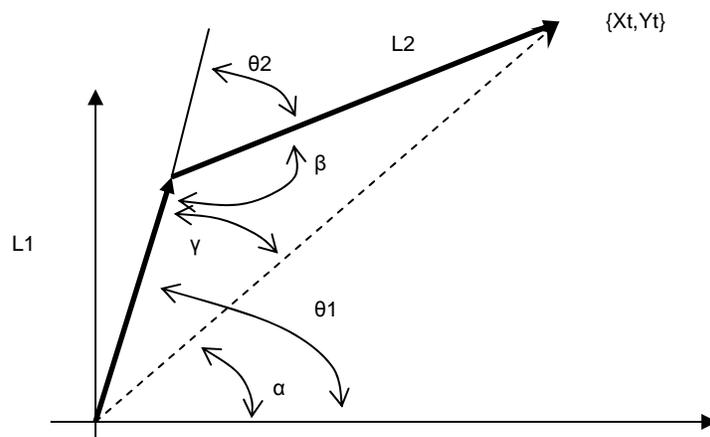


Fig. 3.8 Configuración brazo arriba

Con estos ángulos se obtienen las siguientes configuraciones: (A) brazo abajo, (B) brazo arriba.

$$\theta_{1A} = \alpha - \gamma$$

$$\theta_{2A} = \pi - \beta$$

$$\theta_{1B} = \alpha + \gamma$$

$$\theta_{2B} = -\pi + \beta$$

Quedan definidos los ángulos del manipulador en función de la longitud de eslabones y la trayectoria.

$$\theta_1 = f_1[t, L_1, L_2]$$

$$\theta_{21} = f_2[t, L_1, L_2]$$

$$\theta_2 = \theta_{21} + \theta_1 = f_3[t, L_1, L_2]$$

$$\omega_1 = \frac{d}{dx} \theta_1$$

$$\omega_2 = \frac{d}{dx} \theta_2$$

Con las velocidades angulares y las posiciones de los centros de masa de cada eslabón es posible conocer las velocidades lineales y de este modo su energía cinética total, que queda en función de la trayectoria y las longitudes de los eslabones. Para la energía potencial se ocupa un vector que va desde una altura de referencia hasta el centro de masa de cada eslabón.

Para el caso del manipulador RRR en movimiento plano, se tiene que agregar al último eslabón como incógnita, pero se resume en el mismo análisis anterior. Para este caso el punto de trabajo requiere también de que se define una orientación del eslabón final, con lo que se tiene como datos el punto de trabajo y la orientación necesaria para este punto de trabajo. Este modelo genera una recta dentro de la cual debe encontrarse el punto de articulación del eslabón intermedio con el eslabón final (Fig. 3.9)

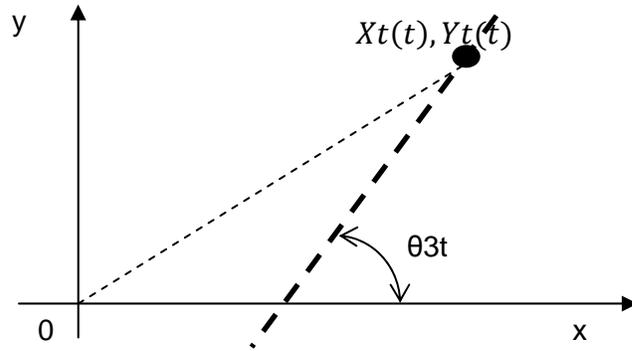


Fig. 3.9 Línea de soluciones del tercer eslabón

Al definir la recta anterior se restringe la posible solución a un sistema que incluye la longitud del tercer eslabón con el problema de un manipulador de dos barras, ya que es una combinación de ambos casos. De esta forma, con los datos de posición y orientación, se obtienen las siguientes relaciones.

$$R(t) = \{Xt(t), Yt(t)\}$$

$$\theta_3 = f_1[t]$$

$$\theta_{21} = f_2[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\theta_2 = \theta_{21} + \theta_1 = f_3[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\theta_1 = f_4[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\omega_1 = \frac{d}{dt} \theta_1$$

$$\omega_2 = \frac{d}{dt} \theta_2$$

$$\omega_3 = \frac{d}{dt} \theta_3$$

Esto significa que las velocidades angulares, así como las velocidades lineales de los centros de masa de cada uno de los eslabones, están en función de la trayectoria de trabajo, y de la orientación del último eslabón, siendo expresadas en el tiempo, permitiendo realizar un análisis similar al del sistema con sólo dos barras (Fig. 3.10).

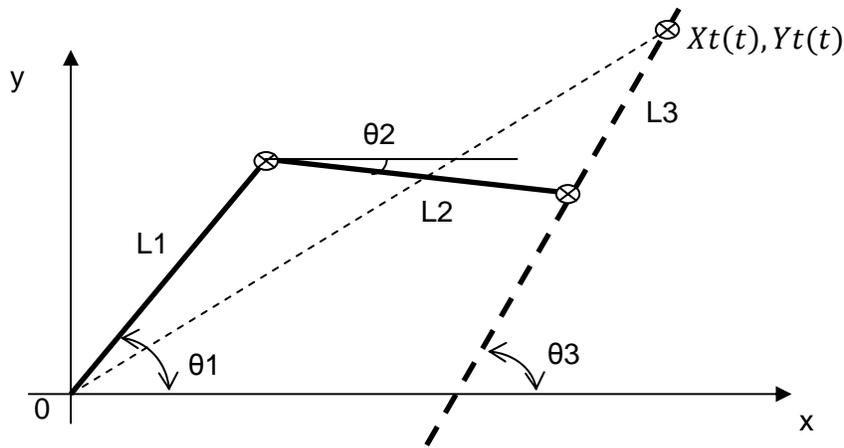


Fig. 3.10 Modelo geométrico de 3 eslabones RRR.

### 3.3 Ecuaciones de energía del sistema.

Con el producto punto del vector de posición del centro de masa de cada uno de los eslabones y el campo gravitacional multiplicado por la masa del eslabón, se obtiene el valor de la energía potencial, tomando en consideración que la altura de referencia no ocasiona valores negativos de energía para el movimiento en análisis.

$$E_{Clineal_i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$E_{Angular_i} = \frac{I_i \omega_i^2}{2}$$

$$E_{Pot_i} = m_i g h_i$$

$$E_{eslabon\ i} = E_{Clineal\ esl\ i} + E_{Angular\ esl\ i} + E_{Pot\ esl\ i}$$

$$E_{Tot} = \sum E_{eslb\ i}$$

De esta forma la propiedad de energía del sistema queda definida. Dicha función está definida por las longitudes de los eslabones y la trayectoria a realizar, quedando de la siguiente forma para el caso de dos eslabones:

$$E_{Tot} = f[Xt, Yt, L1, L2]$$

Con esta ecuación con 4 variables se determinan 2, que son la trayectoria  $Xt(t), Yt(t)$ , para dejar solo variables las longitudes y explorar cuáles de ellas dan el menor monto de energía, siendo la función objetivo en este proceso de optimización.

Para el caso de tres eslabones, la función se amplía a la siguiente expresión:

$$ETot = f[Xt, Yt, \theta3, L1, L2, L3]$$

En este caso se tienen 6 variables, de las cuales se dan como dato la trayectoria  $(Xt(t), Yt(t))$  y la orientación del último eslabón  $\theta3$ , con que quedan 3 variables independientes, que corresponden a las longitudes de los eslabones.

### 3.4 Ecuación objetivo del sistema.

El parámetro que determina cuál es la mejor configuración para un manipulador, es la energía mecánica del sistema. Pero esta cantidad es variable y dependiente del tiempo, al ser sus variables dependientes del tiempo, con lo que para el caso general, su valor se va a estar modificando punto a punto de la trayectoria a describir. Entonces no es suficiente conocer la energía para cada instante de la trayectoria, sino un total de energía involucrada en el movimiento.

Para obtener este global de energía del modelo, se realiza un muestreo a tiempos iguales de la cantidad de energía del sistema, sumando todos estos estados energéticos y obteniendo un total de energía asociado a la trayectoria a realizar. El punto de diseño óptimo será aquel en el que el global de energía que tiene el manipulador sea el mínimo, ya que esto indicará que el sistema permanece en el menor estado energético para dicho movimiento o trayectoria. Se tiene entonces que para un lapso de tiempo entre  $t_0$  y  $t_f$  (tiempos iniciales y finales) se elige un muestreo homogéneo dividiendo este intervalo en  $n$  partes, y tomando el valor de energía en cada uno de ellos.

$$\Delta t = \frac{t_f}{n}; n \in \mathbb{N}$$

$$EGlobal = \sum_{t=0}^{t=n\Delta t} ETot(t)$$

$$EGlobal = \sum_{t=0}^{t=n\Delta t} ETot = f[Xt(t), Yt(t), \theta3(t), L1, L2, L3]$$

En esta última ecuación se asegura que se está considerando la energía del sistema para todo instante, representando a toda la trayectoria y orientaciones solicitadas, solo en función de los parámetros de diseño que en este caso son las longitudes de los eslabones. Con ello se obtiene la función objetivo a evaluar para cada caso.

### 3.5 Restricciones del modelo.

Para evaluar la función global de energía del modelo es necesario determinar cuáles son las restricciones dentro de las que se encuentra la región factible del punto óptimo buscado. En un principio sería necesario conocer cuáles son los puntos en los que el sistema entra en singularidades, es decir, puntos en los cuales el movimiento no será posible.

Para el caso de un manipulador de dos eslabones RR, la función de energía global está definida para todos los puntos  $(L1, L2)$ , pero no todos ellos cumplen con las restricciones geométricas posibles para poder generar dicha trayectoria. Las limitaciones se encuentran pues, en la suma de las longitudes de los eslabones, las cuales se definen por las longitudes máximas y mínimas del manipulador. Las siguientes ecuaciones nos dan las restricciones de longitud para el brazo completamente extendido (1) en el que el brazo tiene que alcanzar al radio máximo de trabajo, mientras que las otras configuraciones (2, 3) se dan cuando el brazo se encuentra contraído y tiene que alcanzar el radio mínimo de trabajo.

$$R_{Max} \leq L1 + L2 \rightarrow L2 \geq R_{Max} - L1 \quad (1)$$

$$R_{min} \geq L1 - L2 \rightarrow L2 \geq L1 - R_{min} \quad (2)$$

$$R_{min} \geq L2 - L1 \rightarrow L2 \leq R_{min} + L1 \quad (3)$$

Para el caso de dos barras, Paredis y Koshla [13] muestran que las longitudes deben de cumplir con las características antes mencionadas: la suma de las longitudes de los eslabones debe de ser mayor o igual al radio máximo de trabajo y la longitud del segundo eslabón debe de ser mayor o igual a la diferencia entre el radio de trabajo y la longitud del primer eslabón (Fig. 3.11). Para esto es necesario entonces conocer el radio de trabajo y los máximos y mínimos de la trayectoria, con lo cual quedarían definidos las restricciones geométricas que se buscan. Otro acercamiento que se da para generar esta región factible, es por medio de la búsqueda de las singularidades de la matriz Jacobiana serial, que asocia las variables buscadas con la razón de cambio con respecto al tiempo, y que nos da un valor singular de matriz si se encuentra fuera de la región factible.

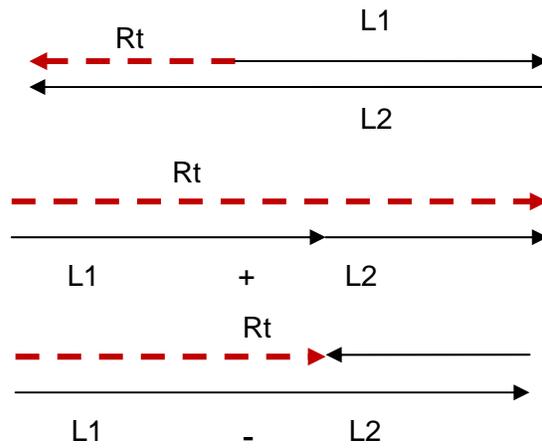


Fig 3.11. Restricciones geométricas del modelo RR

En un primer caso con un radio de trabajo constante unitario, se obtendrían los siguientes gráficos y restricciones geométricas (Fig. 3.12).

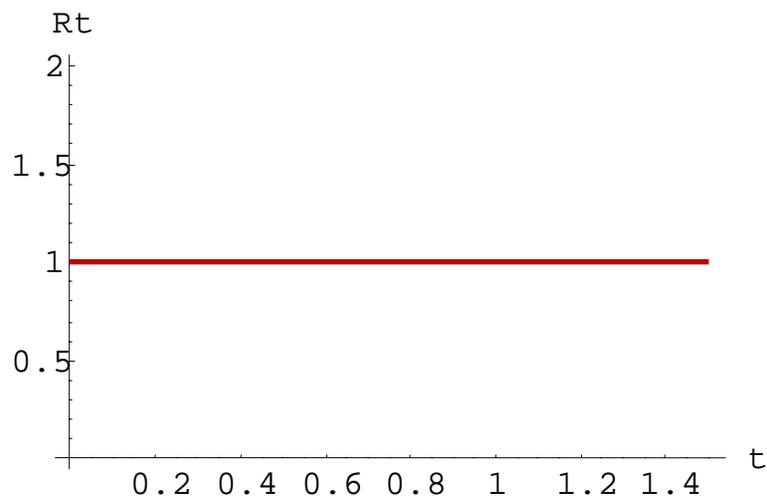


Fig. 3.12 Radio de trabajo en el tiempo

Las restricciones que dan el radio de trabajo máximo y mínimo generan el siguiente área factible, en el que se debe de encontrar el valor mínimo de energía total (Fig. 3.13).

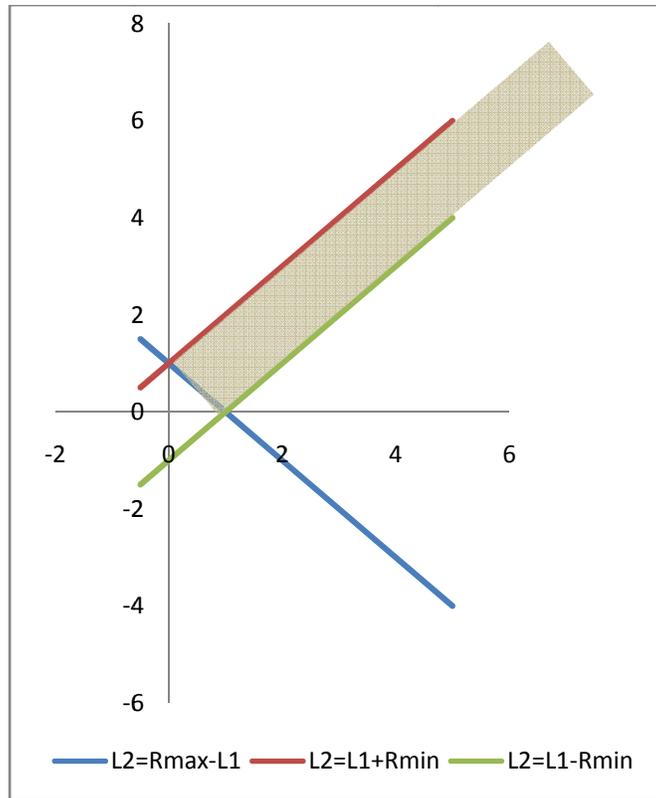


Fig. 3.13 Fronteras de las restricciones geométricas.

Al momento de evaluar la función de energía global, se encuentra que en los puntos de singularidad la energía necesaria para lograr el movimiento se vuelve infinita, reflejo de que el jacobiano relacionado para ese punto en específico también tiende a valores infinitos. Esto se puede interpretar físicamente como que para las condiciones en las que se ha planteado el modelo sería necesario contar con energía infinita, ya que se están realizando movimientos que bloquean el manipulador, siendo incompatibles con el movimiento y ocasionando los puntos de singularidad.

De esta forma la ecuación de energía global del sistema excluye automáticamente aquellos puntos en los que se tiene una singularidad, dejando que las dimensiones de diseño queden dentro del área factible de la función de energía. Esto permite sólo considerar las restricciones geométricas para encontrar la región factible, ya que fuera de ella, la energía requerida se hará infinita, y por lo tanto, el movimiento imposible.

*“He realizado observaciones y experimentos en el espacioso laboratorio del mundo con una maravillosa máquina portátil perfectamente ajustada en mi cabeza.”*

*George Bernard Shaw*

#### 4. Simulaciones y resultados.

En el capítulo anterior se determinó cuál era el modelo a evaluar dentro de la simulación, siendo éste el que representa la energía mecánica del manipulador para todo el movimiento, siendo la suma de las energías en distintos instantes del movimiento. También se determinó cuáles eran las regiones geoméricamente compatibles con el movimiento que ya viene expresado dentro de la ecuación de energía global del sistema, el cual elimina dichos puntos al considerar que se necesita un infinito de energía para poder realizar las posiciones en las que se cae en singularidad. Con estos datos se desarrolla un procedimiento para evaluar trayectorias y diseños de distintos manipuladores en diversas condiciones de operación. Este procedimiento se aplica a distintas trayectorias, avanzando en cada una de las simulaciones a un sistema más complejo.

El procedimiento seguido se puede enumerar en los siguientes pasos:

- Obtener la función de trayectoria de trabajo
- Obtener la función de radio de trabajo y encontrar sus máximos y mínimos absolutos.
- Determinar la región factible a partir de las ecuaciones de restricción de los valores extremos del radio de trabajo.
- Determinar la función de energía global del manipulador en función de los parámetros de diseño.
- Buscar el punto óptimo para la función objetivo de energía global del manipulador.

La función de la trayectoria a realizar debe estar dada en función del tiempo, para poder analizar cómo es el movimiento que se pretende realizar. Por medio de esta ecuación de trayectoria es posible identificar los radios máximos y mínimos de trabajo, que serán los que determinan las áreas posibles de trabajo. Ya con la región factible de trabajo y la ecuación de energía global, dichos datos se introducen en un método de optimización para determinar el punto de mínima energía y las dimensiones óptimas de diseño para ese manipulador.

Este procedimiento se aplicará para cada uno de los casos que a continuación se describen. En ellos se ocupan densidades constantes de 7 [kg/m] para los eslabones, considerando que son barras sólidas de sección transversal constante.

#### 4.1 Resultados en trayectoria con energía constante.

El primer acercamiento hacia este método inicia con una trayectoria que genera una energía cinética constante. Esta trayectoria está dada por una circunferencia de valor unitario alrededor del origen con velocidad tangencial constante, lo cual ocasiona una energía cinética también constante. Considerando que el campo gravitacional es perpendicular a ambos eslabones, se obtiene que la energía potencial también permanece constante. Los brazos del manipulador pueden moverse únicamente en el plano  $XY$  de la trayectoria. Con estas características el manipulador debe dar un cuarto de vuelta, con energía potencial y cinética constante (Fig. 4.1). De esta forma, la trayectoria a seguir es Para este caso, el radio de trabajo permanece constante, por lo que el valor máximo y mínimo corresponde al mismo valor. Se da un círculo con radio de trabajo 1, constante (Fig. 4.2)

$$Rt = [\text{Cos}(t), \text{Sen}(t)], \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

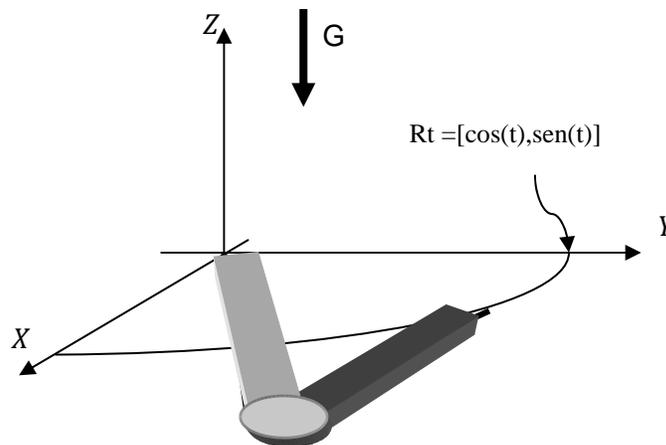


Fig. 4.1 Manipulador en trayectoria circular

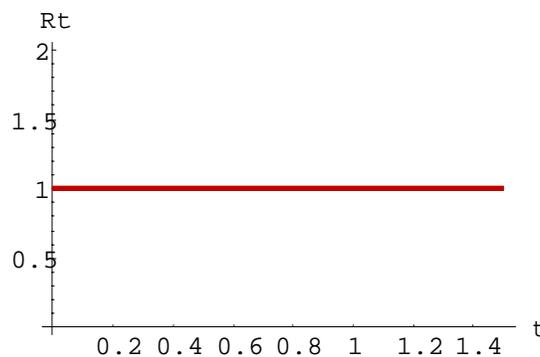


Fig. 4.2. Radio de trabajo en el tiempo

Con este radio de trabajo, se puede definir la región factible de la función energía (Fig. 4.3).

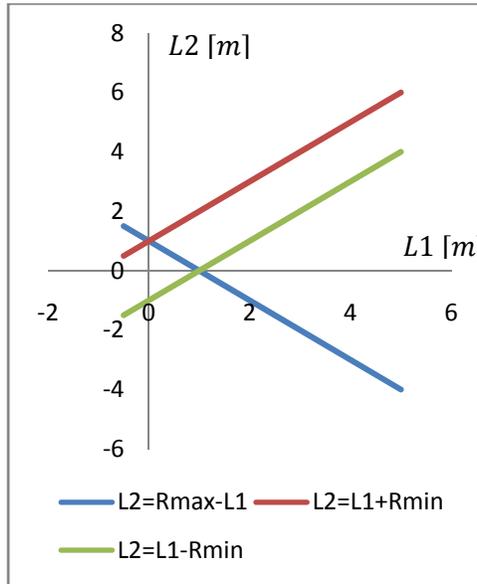


Fig. 4.3 Región de restricciones

Las funciones de energía cinética y potencial permanecen constantes a lo largo de toda la trayectoria, ya que la velocidad de los eslabones no cambia en magnitud y su altura con respecto al nivel de referencia tampoco cambia a lo largo del tiempo, quedando la función de energía total únicamente en función de las longitudes de los eslabones involucrados. Este planteamiento arroja el siguiente resultado gráfico de la energía total (Fig. 4.4).

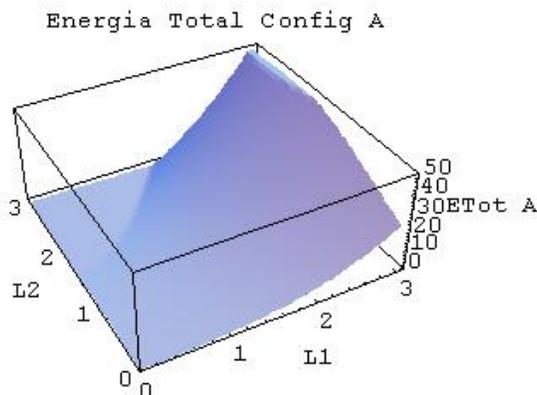


Fig. 4.4 Energía total constante.

Al combinar la función de energía total y la región factible en el método de optimización del programa de computación ocupado (Mathematica Ver. 5), arroja los siguientes resultados.

$$L1 = 1 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0 \text{ [m]}$$

ó

$$L1 = 0 \text{ [m]}$$

$$L2 = 1 \text{ [m]}$$

$$ETot = 1.16667 \text{ [J]}$$

Este resultado infiere que para el movimiento circular que se está planteando, solo es necesario un eslabón de radio unitario, ya que éste será el que puede desarrollar la trayectoria con el menor monto de energía. Las otras combinaciones de longitudes de eslabones dan como resultado una mayor energía. Al explorar otras combinaciones, se encuentra el siguiente ejemplo. Para el caso de que las longitudes de los brazos del manipulador fueran del mismo tamaño ( $L1=L2$ ) se tendría el siguiente resultado

$$L1 = 0.5 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.5 \text{ [m]}$$

$$ETot = 1.38542 \text{ [J]}$$

Esto arroja que la mejor combinación para resolver este movimiento, se logra por medio de un eslabón único de longitud unitaria.

#### 4.2 Resultados con energía potencial variable.

El siguiente paso en estas simulaciones es colocar el sistema ante una energía potencial variable. Esto se logra por medio de colocar ahora al manipulador realizando el mismo movimiento, pero con la acción del campo gravitacional en el mismo plano del movimiento (Fig. 4.5). En este caso se toma como altura de referencia una distancia de 2 unidades de longitud por debajo del origen del manipulador ( $h_0$ ). La trayectoria será similar al caso anterior, con un recorrido semicircular de un cuarto de vuelta, de radio unitario.

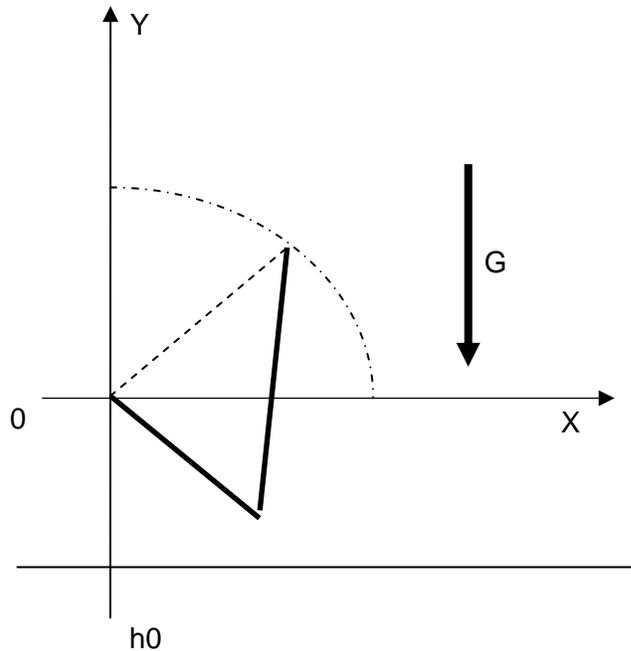


Fig. 4.5 Trayectoria circular con energía potencial variable

Siguiendo el procedimiento del caso anterior, se obtiene el radio de trabajo, su máximo y mínimo. Como se trata del mismo movimiento, ya que la trayectoria no ha cambiado, se obtienen los mismos radios de trabajo y la misma región factible.

Ahora, para el cálculo de la energía del sistema, se tiene que la energía cinética permanece constante, mientras que la energía potencial va cambiando, ya que es variable con el tiempo. Se ocupa entonces el barrido de energías para toda la trayectoria, con  $n=100$  muestras, para obtener la energía global del sistema. También se presenta que para este caso se pueden encontrar dos combinaciones en la configuración geométrica, ya sea brazo abajo (Config. A) o brazo arriba (Config. B), con lo que es necesario calcular las energías globales para cada una de estas posibilidades y encontrar cuál de ellas es la que cumple con la menor energía con respecto a la otra. En este caso, la energía cinética es la que plantea un mayor uso de energía en el manipulador, ya que éste requiere desplazar su propio peso desde un potencial menor a uno mayor. Al obtener la energía promedio se tienen los siguientes resultados gráficos (Figs. 4.6 y 4.7).

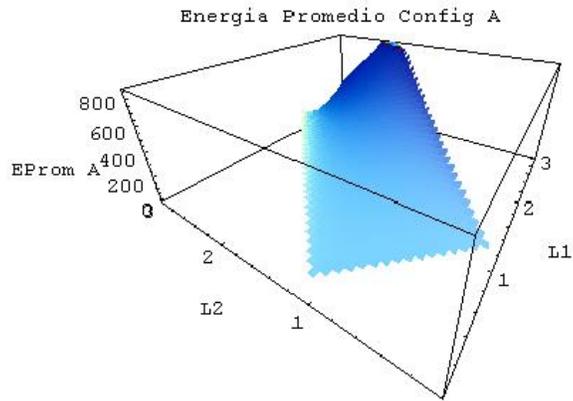


Fig. 4.6 Energía en configuración brazo abajo

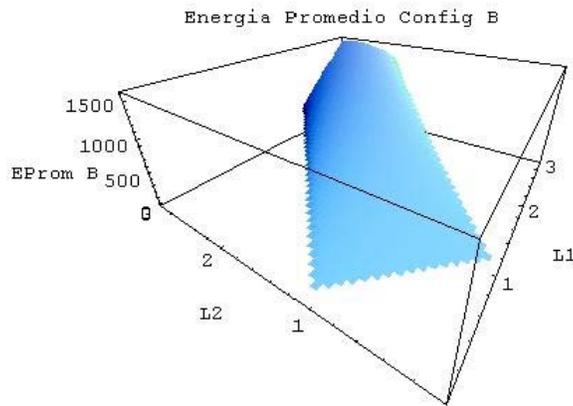


Fig. 4.7 Energía en configuración brazo arriba

El punto óptimo obtenido es el mismo, tanto para la configuración brazo arriba como brazo abajo, siendo la misma combinación de longitudes de eslabones la que representa la menor energía. La diferencia entre ambos modelos radica en que la configuración brazo arriba posee una mayor energía potencial con respecto a la configuración brazo abajo.

$$L1 = 0.555213 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.471418 \text{ [m]}$$

$$ETotA = 160.584 \text{ [J]}$$

$$ETotB = 167.52 \text{ [J]}$$

La configuración brazo abajo requiere una cantidad menor de energía para realizar el movimiento solicitado. Las longitudes de los eslabones no son iguales y su suma no es la unidad, pero se puede asegurar que esta combinación de longitudes es la que menor energía global requiere (Fig. 4.8).

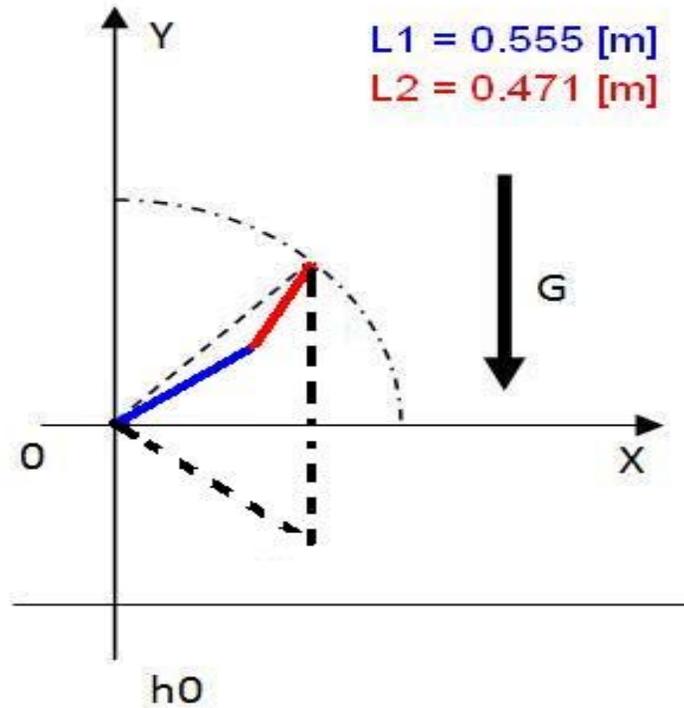


Fig. 4.8 Solución al sistema con energía potencial

#### 4.3 Resultados con energía cinética variable.

El siguiente paso dentro de la simulación es considerar una trayectoria mas compleja que englobe cambios en la energía cinética. Las ecuaciones de energía global que se generan son muy complejas, ya que vienen implícitos los cambios con respecto al tiempo de dicha energía y todas ellas en función del las longitudes de diseño. Para variar la energía cinética, se modifica la trayectoria a una sinusoidal (Fig. 4.9), y se hace que el campo gravitacional quede perpendicular al plano de trabajo, con lo que se eliminan los efectos de la energía potencial.

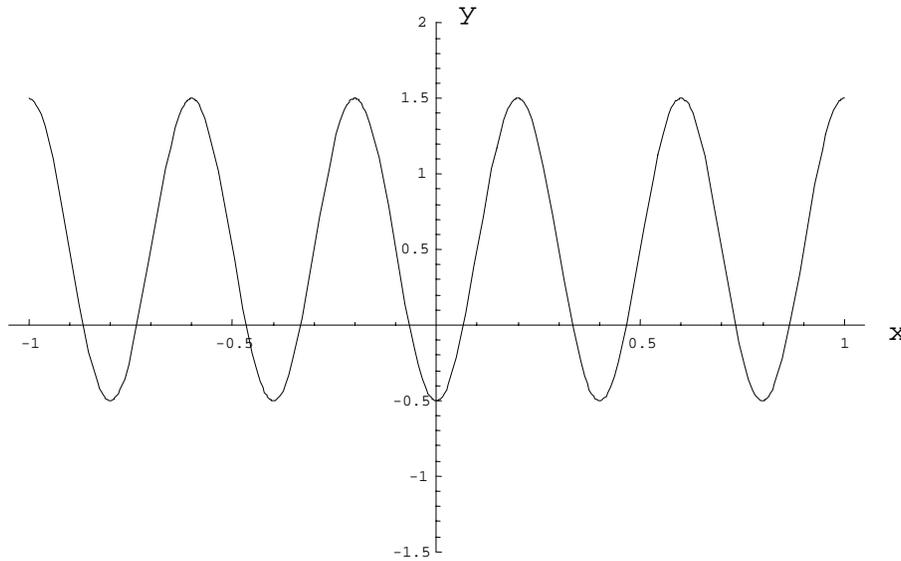


Fig. 4.9 Trayectoria sinusoidal sugerida.

Regresando al procedimiento sugerido anteriormente, se obtiene el radio de trabajo (Fig. 4.10), los máximos y mínimos absolutos del radio de trabajo, y se identifica la región factible limitada por las restricciones geométricas. Se obtiene que el radio máximo de trabajo es de 1.25 [m] y el radio mínimo de 0.25 [m] generando la siguiente región (Fig. 4.11).

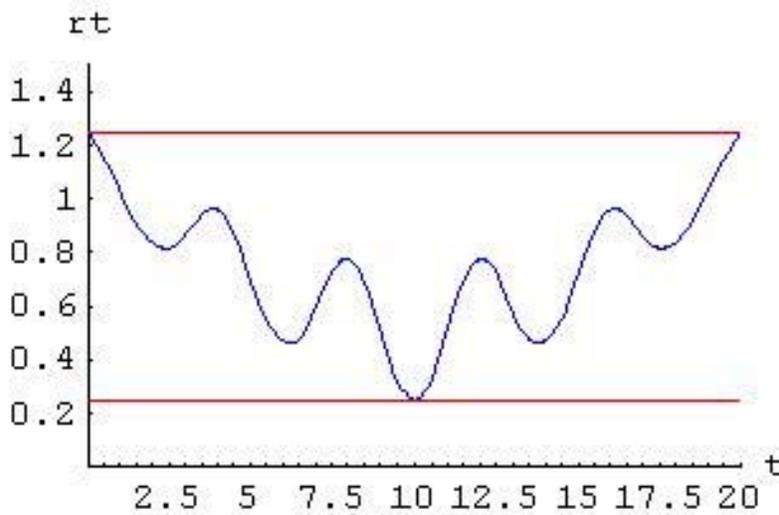


Fig. 4.10 Radio de trabajo, máximo y mínimo 2.

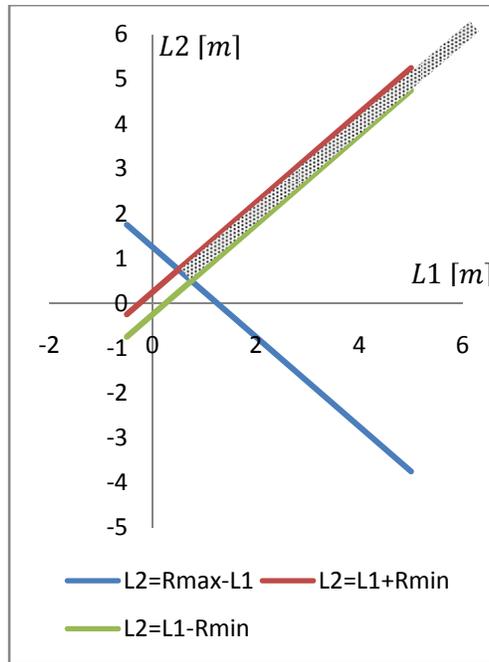


Fig. 4.11 Fronteras de restricciones geométricas

Al calcular la energía promedio del brazo para realizar esta tarea más compleja, el tiempo de cómputo se eleva, debido a que las ecuaciones que describen el movimiento son más complejas. Se realiza un muestreo a tiempos regulares ( $n=100$ ), con lo que se obtiene una energía global para cada combinación de longitudes de diseño. A igual que en los casos anteriores, se busca el valor mínimo de la función energía, dentro de región factible, como se ve en la siguiente ilustración (Fig. 4.12). En estas figuras se observa que los puntos en los cuales el manipulador se acerca a una singularidad, función de energía tiende a infinito, con lo que dichos puntos quedan automáticamente eliminados de la búsqueda del punto óptimo.

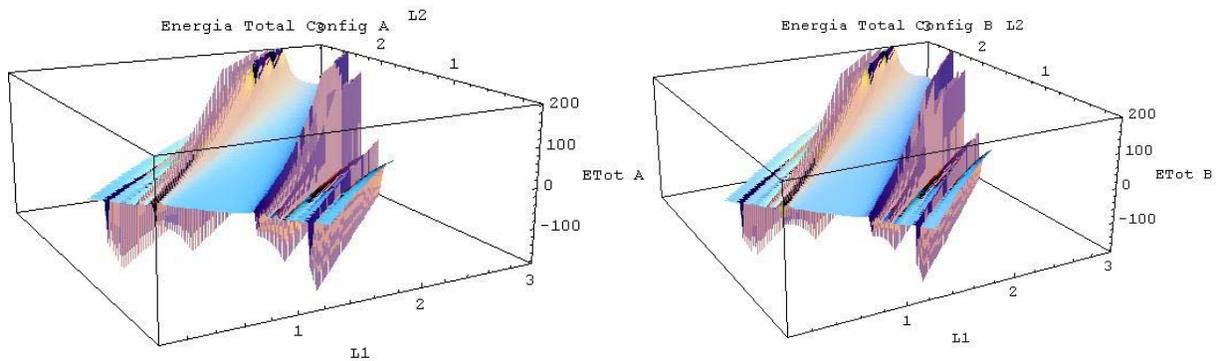


Fig. 4.12. Energía en configuración brazo arriba (Izq) y brazo abajo (Der)

Los valores mínimos obtenidos son los siguientes, para cada una de las configuraciones:

$$L1 = 1.25475 \text{ [m]}$$

$$L2 = 1.04932 \text{ [m]}$$

$$E_{\text{Global A}} = 8.94419 \text{ [J]}$$

$$E_{\text{Global B}} = 8.90884 \text{ [J]}$$

Con esto se obtiene que las longitudes vuelvan a ser las mismas para ambas configuraciones, pero que la configuración brazo abajo es la que permitirá una menor energía para realizar el trabajo (Fig. 4.13).

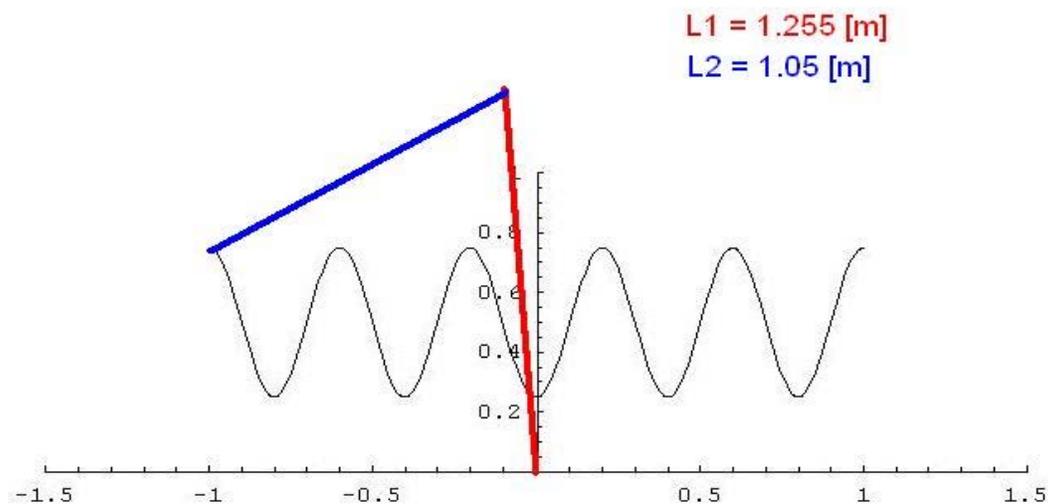


Fig. 4.13 Resultado de energía cinética variable

#### 4.4 Simulaciones en un manipulador plano RRR.

Hasta el momento se ha hecho la simulación de manipuladores planos RR, ya que las gráficas que generan la energía global pueden ser interpretadas en el espacio tridimensional, al ser dos las variables de diseño (L1, L2) y ser una función escalar. Al momento de introducir más variables de diseño, como ocurre con un manipulador RRR plano, se pierde la opción de visualizar los resultados de la energía, pero el método propuesto tiene la misma validez, ya que se busca el punto óptimo de una función escalar de variable vectorial, en este caso con tres variables de diseño (L1, L2 y L3).

De esta forma, siguiendo el mismo procedimiento, se requiere de la función de trayectoria que se va a describir. Además, se necesita conocer la orientación del último

eslabón, todo en función del tiempo. Así se proponen para esta simulación las siguientes ecuaciones de la trayectoria y orientación.

$$Xt = \text{Cos}(t)$$

$$Yt = \text{Sen}(t)$$

$$\theta 3t = 2t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Con estas ecuaciones se obtienen los valores de radio de trabajo máximo y mínimo. Para este caso, se vuelve a tratar de una circunferencia de radio unitario y velocidad constante, pero la orientación del tercer eslabón altera las características de comportamiento del manipulador.

Con los radios de trabajo máximos y mínimos se plantean las ecuaciones de restricción, que en este caso plantean desigualdades que deben de cumplir las longitudes de los eslabones para poder cumplir con el movimiento. De similar manera, estas restricciones se pueden obtener al buscar cuáles son las configuraciones extremas que puede tener el manipulador, como el brazo completamente extendido, o completamente retraído. La otra forma de conocer cuál es la frontera de la región factible, será por medio de la matriz Jacobiana serial que está asociada al movimiento, pero esto queda fuera del alcance del presente trabajo.

$$L1 \geq 0$$

$$L2 \geq 0$$

$$L3 \geq 0$$

$$R_{Max} \leq L1 + L2 + L3$$

$$R_{min} \leq -L1 + L2 + L3$$

$$R_{min} \leq L1 - L2 + L3$$

$$R_{min} \leq L1 + L2 - L3$$

Con estas restricciones se consideran todas las configuraciones que puede tener el manipulador plano, y que las longitudes de los eslabones deben de ser reales positivos, para que la solución tenga un sentido físico real.

Para el cálculo de la energía global del sistema, se tiene que la energía cinética queda en función de las velocidades angulares y lineales de los eslabones, las cuales se

encuentran en función de L1, L2 y L3. Por su parte, la energía potencial se ve representada por medio de la fuerza de gravedad, que es coplanar con el movimiento y en dirección negativa del eje y. Con la ecuación de energía global y las restricciones por las desigualdades se puede utilizar el método de optimización. Este arroja resultados para las variables L1, L2 y L3, con el punto de mínima energía.

Para esta trayectoria, con los mismos valores de densidad lineal para los eslabones, el método arroja que el punto óptimo de energía es el mismo para la configuración brazo arriba y brazo abajo, con las siguientes longitudes:

$$L1 = 0.769679 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.835033 \text{ [m]}$$

$$L3 = 0.691782 \text{ [m]}$$

Por lo que se refiere a la energía global, la configuración brazo abajo (A) tiene una menor energía que la configuración brazo arriba (B) como se puede ver en los siguientes resultados.

$$E_{\text{Global A}} = 1487.78 \text{ [J]}$$

$$E_{\text{Global B}} = 1855.75 \text{ [J]}$$

Por lo que la configuración idónea es con las longitudes descritas, en la posición de brazo abajo. Con esta configuración se puede encontrar la menor energía para el movimiento que se observa en las siguientes ilustraciones (Fig.4.14)

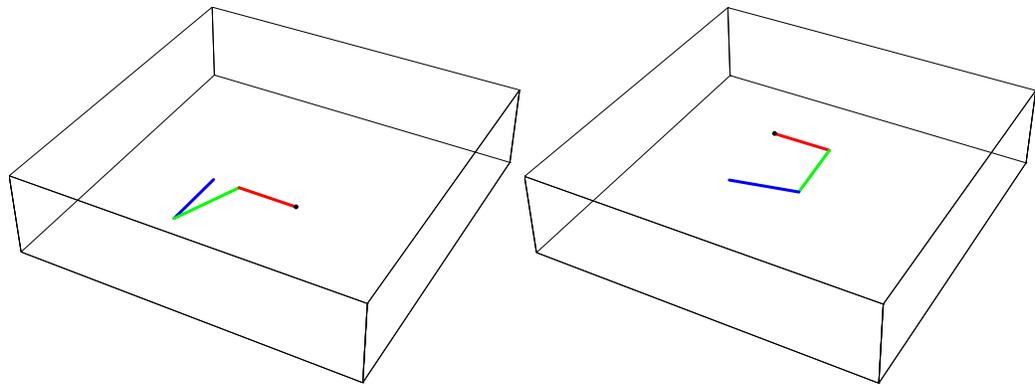


Fig. 4.14 Posición inicial y final del movimiento del manipulador plano RRR

*"El hombre nunca sabe de lo que es capaz hasta que lo intenta."*

*Charles Dickens*

## 5. Conclusiones y perspectivas.

En los capítulos previos se ha desarrollado el marco teórico, el modelo del sistema y los casos de estudio en los que se aplica una metodología para encontrar las dimensiones óptimas de diseño para un manipulador en función de la energía mecánica del sistema. El método propuesto ha arrojado resultados congruentes que dan una solución única de dimensiones para cada trayectoria propuesta, con el menor monto de energía para un sistema restringido.

Las soluciones encontradas son aquellas que cumplen con el modelo y las restricciones geométricas implícitas en cada uno de ellos. Al estar evaluando la energía, el modelo elimina los valores en los que esta energía se vuelve infinita, que corresponden a aquellos en los que el manipulador se desensambla, siendo imposible el movimiento para ese caso. Al estar considerando toda la trayectoria propuesta, se puede asegurar que el diseño en base a la menor energía es un criterio para encontrar la mejor solución para dicho movimiento.

### 5.1 Alcances del estudio.

En este estudio solo se ha llegado al análisis de manipuladores seriales, con movimiento plano y articulaciones de tipo rotacional de un solo grado de libertad por medio de simulaciones computacionales. Esto ha sido para poder realizar un primer acercamiento para comprobar la validez de la metodología propuesta. Se requiere volver a revisar la validez de los resultados por medio de la comparación de la realidad con experimentos que evalúen el consumo de energía para manipuladores en situaciones reales de operación. Como un primer acercamiento, la naturaleza del brazo humano tiene la proporción obtenida dentro de la simulación con dos barras, mientras que la representación de tres barras tiene longitudes similares a las de los dedos.

Otro de los aspectos a cubrir sería el dar un modelo más cercano a la realidad que tome en cuenta dentro de la simulación una mayor variedad de formas para los eslabones, las fricciones en las articulaciones y las masas de los actuadores y sus eficiencias. Al momento sólo se ha evaluado la validez de la metodología, pero el modelo simplificado se aleja de la realidad, un modelo más detallado acercará los resultados a una mejor representación del mudo físico real y de los verdaderos valores de ahorro de energía.

La decisión de primero analizar un manipulador serial RR se basa en que las gráficas que describen la energía del sistema se pueden desarrollar en un espacio tridimensional, mientras que en un manipulador de mayor complejidad se requiere un

hiperespacio de  $n+1$  tomando  $n$  eslabones. El siguiente paso en este estudio es ampliar este concepto a manipuladores seriales de mayor complejidad en cuanto a número de eslabones así como aumentar la complejidad de las trayectorias de trabajo para movimientos espaciales.

## 5.2 Limitaciones de cómputo.

A diferencia de otros criterios de diseño, éste no requiere de una gran capacidad de cómputo, tiempo para el análisis de resultados o el ir muestreando regiones al azar para obtener el valor óptimo deseado como otros modelos propuestos que se encuentran dentro de la bibliografía, que mencionan el uso de sistemas computacionales en paralelo por varios días para poder obtener una posible solución. En este método se encuentra directamente la solución de menor energía, los valores de las longitudes óptimas de los eslabones y el comportamiento energético al ir variando las longitudes de diseño en una sola computadora, con programas de fácil implementación. Ciertamente es que al aumentar la complejidad de las trayectorias y de los modelos físicos de los manipuladores se necesita una mayor capacidad de cómputo, por la complejidad de las funciones, pero al ser estas funciones continuas y derivables dentro de la región factible, los métodos de optimización pueden converger rápidamente. El siguiente paso será el poder ocupar métodos de optimización de mayor capacidad para poder reducir aún más los tiempos de cálculo de los puntos óptimos.

Ángeles <sup>[14]</sup> menciona que los modelos en base a la energía sí se pueden desarrollar a partir de las ecuaciones básicas de la mecánica clásica, pero que son muy complejos para poder obtener resultados significativos de una forma sencilla. Con la actual capacidad de cómputo de una computadora personal, que es alrededor de 3 [GHz,] esta limitante va quedando atrás, ya que no es necesario que uno esté realizando las operaciones del modelo, sino únicamente colocando las ecuaciones adecuadas que describen el modelo, identificar las restricciones que presenta y elegir un adecuado método de optimización, dejando todo el trabajo de cálculo a la computadora.

## 5.3 Perspectivas del estudio a futuro.

Este método puede ser aplicado a sistemas en movimiento espacial general, a sistemas no solo de tipo serial, sino paralelos o de mayor complejidad, siempre que se pueda obtener la función de energía que describe el sistema. De esta forma el método no tendrá más limitaciones que la capacidad de cómputo que se disponga, y del método de optimización utilizado.

Los alcances de aplicación de esta metodología radican en el poder diseñar un manipulador que utilice al máximo la energía disponible, logrando ahorros marginales, que englobados representen un aumento en la eficiencia del proceso, en la disminución de costos y en la disminución de emisiones al medio ambiente.

Los manipuladores se ocupan generalmente para cumplir con actividades de manufactura flexible en los que se puede modificar fácilmente la tarea a desarrollar. Bajo el actual enfoque de este método, sería necesario modificar al manipulador para cada una de las tareas, para poder asegurar que es el más eficiente, por lo que una de las posibles perspectivas de este trabajo será desarrollar un manipulador serial reconfigurable que pueda seleccionar automáticamente cuáles son las dimensiones apropiadas para desarrollar una tarea y además tenga la capacidad de adaptarse para diferentes tareas. Otro de las posibles perspectivas es conjuntar este análisis de menor energía con el cálculo de la trayectoria más eficiente, con lo cual se lograría el desarrollar una tarea dada aún con mayor eficiencia.

#### 5.4 Resumen de la metodología ocupada.

Se puede resumir el procedimiento realizado para encontrar el punto de diseño óptimo de la siguiente forma:

1. Definir el modelo termodinámico.
2. Definir el modelo mecánico.
3. Obtener la función de trayectoria
4. Obtener la función de radio de trabajo y encontrar sus máximos y mínimos absolutos.
5. Determinar la región factible a partir de las ecuaciones de restricción de los valores extremos del radio de trabajo.
6. Determinar la función de energía total del manipulador en función de los parámetros de diseño.
7. Buscar el punto óptimo para la función objetivo de energía total del manipulador.

La diferencia en los consumos de energía entre un diseño que toma en cuenta este criterio de diseño y uno que no, será marginal y para una sola operación casi intangible. Pero tomando en cuenta que los manipuladores robóticos generalmente se ocupan en lugares en donde la tarea es repetitiva y se realiza múltiples veces en el día de trabajo, estos ahorros marginales desembocaran en un ahorro global de la energía que se ocupe para un proceso.

El adecuado uso de la energía es uno de los factores que la evolución ha ocupado para seleccionar a los organismos más aptos, para su diseño a partir de prueba y error. Al comparar los resultados de mayor eficiencia para movimientos que desarrollan los seres vivos, los resultados se acercan a aquellas dimensiones óptimas de diseño con la menor energía, por lo que esta metodología de diseño puede llegar a tener grandes alcances.

## GLOSARIO

$R^n$	Conjunto coordinado de los $n$ reales
$V$	Vector
$E$	Escalar
$x, y, z$	Vectores del conjunto $V$
$\alpha, \beta, \gamma$	Escalares del conjunto $E$
$XYZ$	Sistema coordinado principal
$xyz$	Sistema coordinado auxiliar
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vectores unitarios de la base canónica de $XYZ$
$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$	Vectores unitarios de la base canónica de $xyz$
$T$	Transformación de un espacio vectorial
$W$	Trabajo
$F$	Fuerza
$s$	Desplazamiento
$\dot{W}$	Potencia
$E_i$	Energía en estado $i$
$Q$	Calor
$\epsilon_0$	Permisividad eléctrica
$\epsilon$	Campo eléctrico
$\mu_0$	Permisividad magnética
$H$	Campo magnético
$m$	Masa
$I$	Inercia
$\omega$	Velocidad angular
$v$	Velocidad lineal
$\vec{p}$	Vector de posición
$\vec{v}$	Vector de velocidad lineal
$\vec{a}$	Vector de aceleración lineal
$\overline{OA}$	Vector de posición entre los puntos $O$ y $A$
$\vec{\omega}$	Vector de velocidad angular
$\vec{\alpha}$	Vector de aceleración angular

## BIBLIOGRAFIA

- [1] "Beyond Kyoto", Foreign Affairs, July August, EUA, 2004.
- [2] Cohen, M. Nagel, E. "Introducción al método científico". Amorrortu Editores, 9° reimpresión. 2000.
- [3] Grossman, Stanley I. "Algebra lineal". Ed. Iberoamericana. Segunda edición. México, 1988.
- [4] Rojo, Jesús. "Algebra Lineal". McGraw – Hill / Interamericana, España, 2001.
- [5] Wark Jr., Kenneth. "Termodinámica". McGraw – Hill, 1° Edición. México. 1991.
- [6] Seely y Ensingn. "Mecanica analitica para ingenieros". UTHEA. Reimpresion 1968. Mexico.
- [7] Beer, Johnston y Claussen. "Mecanica vectorial para ingenieros" McGraw – Hill. 8° Ed. Mexico. 2007.
- [8] Stejskal, Valasek. "Kinematics and dynamics of machinery" Marcel Dekker Inc. EUA. 1996.
- [9] Tsai, Lung-Wen. "Robot Analysis" John Wiley & Sons Inc. EUA. 1999.
- [10] Aaby y Dempster. "Introduction to optimization methods" Chapman & Hall, EUA. 1974.
- [11] Snyman, J. A. Berner, D. F. "The design of a planar robotic manipulator from optimum performance of prescribed tasks" Structural design Vol. 18. 1999. Pp. 95-106.
- [12] Hirzinger, G. Sporer, N. Schedl, M. Butterfaß, J. Grebenstein, M. "Torque-Controlled Lightweight Arms and Articulated Hands : Do We Reach Technological Limits Now?" The International Journal of Robotics Research. Vol 23 No. 4-5. April-May 2003. Pp. 331-340.
- [13] Paredis, C. J. J. Koshla, P. K. "Kinematic Design of Serial Link Manipulators From Task Specifications" The International Journal of Robotics Research, Vol 12. No 3. June 1993. Pp. 274-287.
- [14] Angeles, Jorge. "Fundamentals of robotic mechanical systems" Springer. EUA 2003.
- [15] Aaby, Paul R. & Dempster. "Introduction to Optimization Methods" Chapman & Hall Mathematics, EUA, 1974
- Ma, O. Angeles, J. "Optimum design of manipulators under dynamic isotropy conditions" IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1993. Pp 485-492.
- Lee, E. Mavrodís, C. Merlet, J. P. "Five Precision point Synthesis of Spatial RRR Manipulators Using Interval Analysis" Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design. Vol. 126. September 2004. Pp. 842-849.

## INDICE DE FIGURAS.

### Capítulo 1

1.1 Porcentajes de producción de emisiones de carbono.

### Capítulo 2

2.1 Sistemas coordenados con distinta orientación.

2.2 Máximos y mínimos locales en una función.

2.3 Función escalar de variable vectorial.

2.4 Sistemas aislado, cerrado y abierto.

2.5 Flujo de trabajo al sistema y desde el sistema.

2.6 Trayectoria espacial de una partícula.

2.7 Representación del mismo punto en sistema cartesiano, cilíndrico y esférico.

2.8 Sistema de referencia absoluto (XYZ) y relativo (xyz).

2.9 Movimiento espacial de un cuerpo rígido.

2.10 Traslación plana.

2.11 Rotación plana.

2.12 Movimiento plano general.

2.13 Traslación espacial de un cuerpo rígido.

2.14 Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo.

2.15 Movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio.

2.16 Sistema de referencia en movimiento espacial general.

2.17 Sistemas de referencia con diferentes orientaciones y tensores de inercia.

2.18 Región factible.

2.19 Convergencia del método de Newton.

2.20 Error en el método de Newton.

2.22 Método simplex en tres dimensiones.

2.21 Método Simplex en dos dimensiones.

2.23 Región de convergencia y soluciones numéricas con distintos valores.

### Capítulo 3.

3.1 Esquema del manipulador.

3.2 Fronteras del sistema.

3.3. Flujos de energía a través de las fronteras.

3.4 Elemento diferencial del eslabón.

3.5 Masa y momento de inercia.

3.6 Manipulador RR y trayectoria.

3.7 Configuración brazo abajo.

- 3.8 Configuración brazo arriba.
- 3.9 Línea de soluciones del tercer eslabón.
- 3.10 Modelo geométrico de 3 eslabones RRR.
- 3.11. Restricciones geométricas del modelo RR.
- 3.12 Radio de trabajo en el tiempo.
- 3.13 Región de restricciones geométricas.

#### Capítulo 4.

- 4.1 Manipulador en trayectoria circular.
- 4.2. Radio de trabajo en el tiempo.
- 4.3 Región de restricciones geométricas.
- 4.4 Energía cinética y potencial constante.
- 4.5 Trayectoria circular con energía potencial variable.
- 4.6 Energía en configuración brazo abajo.
- 4.7 Energía en configuración brazo arriba.
- 4.8 Solución al sistema con energía potencial variable.
- 4.9 Trayectoria sinusoidal sugerida.
- 4.10 Radio de trabajo, máximo y mínimo 2.
- 4.11 Región de restricciones geométricas.
- 4.12. Energía en configuración brazo arriba (Superior) y brazo abajo (Inferior).
- 4.13 Resultado de energía cinética variable.
- 4.14 Posición inicial y final del movimiento del manipulador plano RRR.