POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SELECCIONES Y CASI SELECCIONES EQUIVARIANTES

TESIS
que para obtener el grado académico de
Maestra en Ciencias
Presenta

Natalia Jonard Pérez

Director de tesis: Dr. Sergey Antonyan Apetnakovitch

México D.F. Mayo, 2008

Agradecimientos

Esto de los agradecimientos va un poco en contra de mis principios. Sin embargo, lo único que los parientes y amigos leen son los agradecimientos. No los culpo, a mi me daría mucha flojera leer toda esta bola de gabaratejos inentendibles si no fuera mi propia tesis. Así pues, para que no se queden sin leer nada, me obligué a escribir estas líneas

Primero quiero agradecerle a Sergey por haberme *obligado* a escribir esta tesis. Habiéndo otras formas más fáciles de titulación, él me advirtió desde antes de entrar a la maestría que tendría que hacer tesis. Y la verdad, de no haberlo hecho, me hubiera privado de la oportunidad de resolver un problema nuevo.

Luego quiero agradecerle a Conacyt por la jugosa beca que me brindo estos semestres. Bueno, quizá no sea muy jugosa, pero uno se la pasa mejor con ella que sin esos depósitos mensuales. Al Departamento de Matemáticas y a esa famosa cláusula 69 que me permitió seguir cobrando esos chequecitos quincenales sin necesidad de dar clases ni ayudantías. También quisiera agradecerle al Posgrado en Ciencias Matemáticas por haberme brindado un cubículo en él cual pudiera trabajar en todas esas horas muertas entre clase y clase.

A mis sinodales por haber leido el trabajo ... o al menos haber confiado en mí y darme su voto aprobatorio para que yo pudiera continuar con los trámites. También les agradezco por sus consejos y sugerencias que enriquecieron y mejoraron esta tesis.

Gracias a mis condiscípulos, Daniel, Hugo y Leonardo, por ayudarme a quitar varias de las piedritas que se me cruzaron por el camino. Muy especialmente quiero agradecerle a Daniel por ayudarme con todos los problemas TeXnicos.

Muchas gracias a Gabriel por ayudarme con la impresión, encuadernación y empastado de esta tesis. Sin su ayuda sería una tesis aburrida como todas las que hacen en Copilco.

Gracias a mi abuelito por haberme iniciado en el mundo de las matemáticas. Y, gracias a mi mamá y a mi abuelita por decirme que este nivel de matemáticas no sirve para nada... me ayuda a mantener la cabeza y los pies en la tierra.

Esto va a sonar un poco raro y quizá sin mucho sentido (pero es muy importante para mí), quisiera agrader que el hombre comete errores porque de no ser así, nunca hubiera resuelto el problema central de esta tesis.

Y hasta aquí con los agradecimientos. Si alguien no figura en esta lista probablemente no hizo nada para que esto saliera adelante, y no veo porqué tendria que agradecerle... pero no se sientan mal porque no me he olvidado de ustedes y he decidido dedicarles esta tesis a todos aquellos que me acompañaron en estos años de estudios.

Índice general

Introducción

La teoría de selecciones de *funciones multivaluadas* o *multifunciones* fue introducida a principio de la década de los 50's por el matemático estadounidense Ernest Michael, quien demostró los resultados fundamentales de esta área de la Topología. Desde entonces, dicha teoría se ha ido desarrollando ampliamente y se ha aplicado a otras áreas de las matemáticas, como son, el Análisis Funcional y Convexo, Topología General, Topología Geométrica, Teoría del Punto Fijo y la Teoría de Extensión de Funciones, entre muchas otras.

Sin entrar en detalles, la Teoría de Selecciones trata básicamente de lo siguiente: si X y Y son dos espacios topológicos y ϕ es una multifunción *inferiormente semicontinua* de X a los conjuntos no vacíos de Y, se pregunta qué condiciones se debe pedir a X, a Y y a ϕ, para poder encontrar una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in \phi(x)$. Esta función f es lo que llamaremos una *selección* de ϕ

Al terminar mi tesis de licenciatura, en la cual daba una pequeña revisión de los teoremas clásicos de la teoría de selecciones y algunas de sus aplicaciones, surgió la siguiente pregunta: Si X y Y son G-espacios (espacios topológicos en los cuales actúa continuamente un grupo topológico G) y ϕ es una multifunción *equivariante* (es decir, $\phi(gx) = g\phi(x)$, para todo elemento g del grupo), ¿bajo qué condiciones de G, de X, de Y y de ϕ es posible encontrar una selección equivariante? En otras palabras, nos preguntábamos si era posible generalizar algunos de los teoremas clásicos de Michael a la categoría G-**Top**.

El método (no equivariante) usado por Michael, consiste en encontrar primero una *casi selección*, es decir, una función continua $f : X \to Y$, en la cual $f(x)$ y $\phi(x)$ estuvieran arbitrariamente cercanos. Luego, construir una sucesión de casi selecciones que convergiera uniformemente a una selección. Tratando de seguir este método, notamos que el problema radicaba precisamente en encontrar un teorema que nos garantizara la existencia de una *casi selección equivariante*. Aparentemente, este problema era más difícil que el de encontrar una selección equivariante por otro método. En el artículo [1], se demuestra la existencia de una selección equivariante, en el caso de que el dominio sea un G-espacio paracompacto y el rango un G-espacio de Banach (en este caso G es un grupo compacto). El método usado consistía en usar la integral vector valuada respecto a la medida de Haar, para integrar una selección arbitraria (cuya existencia está garantizada por los teoremas clásicos de Michael), obteniendo finalmente una selección equivariante. Sin embargo, por este camino no había forma de encontrar una casi selección. Además, la hipótesis de que el rango fuera un espacio completo, era algo muy fuerte, ya que en los teoremas no equivariantes dicha hipótesis no es necesaria.

Paralelamente comenzamos a estudiar el artículo de T. Dobrowolski y J. Van Mill, *Selections and near-selections in linear spaces without local convexity* ([8]). En dicho artículo se da una caracterización de los retractos absolutos (en el caso de espacios lineales metrizables) a través de una condición de casi selección. Inspirados en el método usado en este artículo, regresamos a la pregunta original sobre la existencia de una casi selección equivariante, encontrando finalmente el teorema de casi selección equivariante deseado y generalizando el teorema de selección equivariante de [1] a un teorema en el cual el rango no es necesariamente completo (ver Capítulo 2).

Finalmente, en el Capítulo 3 de este trabajo, se demuestra un teorema de extensión de funciones equivariantes, a través del uso de casi selecciones equivariantes, mostrando así la utilidad que dichas funciones tienen.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos y resultados básicos que usaremos a lo largo del texto. Para ello, es conveniente establecer desde ahora alguna de la notación que se utilizará, así como hacer algunas aclaraciones sobre lo que se trabajará más adelante.

Todos los espacios topológicos con los que trabajaremos serán espacios de Hausdorff, a menos que se especifique lo contrario. Por un **espacio topológico lineal**(o simplemente, **espacio lineal**) entenderemos un espacio vectorial real provisto de una topología que hace continua la suma de vectores y la multiplicación por escalares. Cuando trabajemos con un espacio vectorial, daremos por entendido que los signos $+$ y $\sum$ denotan la suma de vectores en dicho espacio.

Si $(G, *)$ es un grupo, para facilitar la notación, eliminaremos el signo $*$ que denota la operación, sustituyéndolo por la yuxtaposición de los elementos del grupo. Así, si a y b son elementos de G, el producto $a * b$ lo denotaremos simplemente por ab.

Por otro lado, si X es un espacio topológico y A un subconjunto arbitrario de X, denotaremos por $\overline{A}$ a la cerradura de A en X; es decir, el conjunto formado por todos los puntos de adherencia de A. Por ∂A, denotaremos a la frontera de A. Y, por $|A|$ denotaremos la cardinalidad de A.

Si X es un espacio métrico, con métrica d, usaremos el signo $B(x, r)$ para denotar la bola abierta con centro en el punto x y radio r; esto es,

$$B(x, r) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}.$$

Definiciones básicas como *paracompacidad, partición de unidad, redes,* serán obviadas. Sin embargo, éstas pueden ser consultadas en [9]. El resto de la notación será introducida a lo largo del texto.

1.1. Conjuntos Convexos

Uno de los conceptos que más usaremos a lo largo de este trabajo es el de *conjunto convexo*. Por ello, es conveniente repasar esta definición así como algunos resultados básicos al respecto.

Consideremos un espacio topológico lineal Y. Diremos que un conjunto $A \subset Y$ es **convexo**, si para cualesquiera dos puntos a y b de A, el segmento

$$T = \{y \in Y \mid \ y = (1-t)a + tb, \ t \in [0,1]\}$$

está contenido en A.

Si A es un subconjunto arbitrario del espacio lineal Y, llamaremos **casco convexo** de A (y lo denotaremos por $\mathrm{Conv}(A)$) al conjunto convexo más pequeño que contenga a A. Es decir,

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap \{K \mid K \text{es convexo y } A \subset K\}.$$

Por otro lado diremos que un vector $v \in Y$ es una **combinación convexa** de elementos de A, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

donde $a_i \in A$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \in [0,1]$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $\mathrm{Conv}_n(A)$ de la siguiente forma:

$$\mathrm{Conv}_n(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid \ a_i \in A, \ \lambda_i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Proposición 1.1.1. *Sean Y un espacio topológico lineal y A un subconjunto de Y. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *$Conv(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Conv_n(A)$,*

2. si A es finito, entonces Conv(A) es compacto.

Demostración. 1. Primero demostremos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A)$ es un conjunto convexo. En efecto, si $a, b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A)$, entonces podemos suponer que $a \in \mathrm{Conv}_m(A)$ y $b \in \mathrm{Conv}_k(A)$, para ciertos $m, k \in \mathbb{N}$. De esta manera, existen puntos $a_1, \ldots, a_m$ y $b_1, \ldots, b_k$ en A, y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y $t_1, \ldots, t_k$ en $[0,1]$ tales que

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \qquad \text{y} \qquad b = \sum_{j=1}^{k} t_j b_j,$$

y además,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum_{j=1}^{k} t_j.$$

Sea $s \in [0,1]$ arbitrario, entonces

$$(1-s)a + sb = (1-s)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + s\sum_{j=1}^{k} t_j b_j = \sum_{i=1}^{m}(1-s)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{k} s t_j b_j.$$

Notemos que en este caso, $(1-s)\lambda_i \in [0,1]$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. De igual manera observemos que $st_j \in [0,1]$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k$. Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^{m}(1-s)\lambda_i + \sum_{j=1}^{k} s t_j = (1-s)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i + s\sum_{j=1}^{k} t_j = (1-s) + s = 1.$$

De esta manera, $(1-s)a + sb \in \mathrm{Conv}_{m+k}(A)$, por ser una combinación convexa de $m+k$ puntos de A. Luego, $(1-s)a + sb \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A)$, lo cual prueba que este último conjunto es convexo, como se quería demostrar.

Ahora observemos que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A)$, por lo que

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A).$$

Demostraremos por inducción sobre n que $\mathrm{Conv}_n(A) \subset$Conv$(A)$. Si $n = 1$, entonces

$$\mathrm{Conv}_1(A) = A \subset \mathrm{Conv}(A).$$

Supongamos que para toda $k \leq n$, $\mathrm{Conv}_k(A) \subset$Conv$(A)$. Sea $y \in \mathrm{Conv}_{n+1}(A)$, entonces existen puntos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ en A, y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \qquad \text{y} \qquad y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i.$$

Podemos suponer sin perder la generalidad que $y \notin A$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$$

lo cual nos permite definir $\lambda = 1/\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. Notemos que $\mu_i = \lambda \cdot \lambda_i \in [0, 1]$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} = 1,$$

por lo que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i \in \mathrm{Conv}_n(A).$$

Aplicando la hipótesis de inducción, podemos afirmar que $v \in$Conv(A). Como Conv(A) es un conjunto convexo, el punto

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a_{n+1}$$

pertenece a Conv(A). Ahora bien,

$$\begin{aligned} y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) v + \lambda_{n+1} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $y \in$Conv(A), y por lo tanto

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}_n(A).$$

2. Ahora supongamos que A es finito y demostremos que Conv(A) es compacto. Sea $n = |A|$. Por la parte 1 de esta proposición, sabemos que Conv(A) =Conv$_n(A)$. Consideremos el simplejo estándar

$$\triangle_n = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

así como el cubo unitario $I^n \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que I^n es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Como $\triangle_n \subset I^n$, el simplejo $\triangle_n$ está acotado. Por otro lado, $\triangle_n = f^{-1}(\{1\}) \cap I^n$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función continua definida en cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Como $\{1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, la continuidad de f nos garantiza que $f^{-1}(\{1\})$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Así, $\triangle_n = f^{-1}(\{1\}) \cap I^n$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. De esta manera, podemos conluir que $\triangle_n$ es compacto.

Como A es finito, A es compacto. Por lo tanto A^n también es compacto. Luego, el producto $X = \triangle_n \times A^n$ es un espacio compacto. Definamos la función $g : X \to$Conv(A) de la siguiente manera:

$$g((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (a_1, \dots a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Es claro que g está bien definida y es continua. Además, se sigue de la definición de $\mathrm{Conv}_n(A)$, que g es una función suprayectiva. Entonces

$$g(X) = \mathrm{Conv}_n(A) = \mathrm{Conv}(A)$$

es un espacio compacto, como se quería demostrar.

$\square$

Diremos que un espacio topológico lineal es **localmente convexo**, si el origen tiene una base local de vecindades convexas.

Supongamos que Y es un espacio lineal metrizable y que d es una métrica en Y. Diremos que d es **invariante bajo traslaciones** si para cualesquiera puntos $x, y, z \in Y$, la métrica d satisface:

$$d(x, y) = d(x + z, y + z).$$

Por ejemplo, si $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, la métrica d determinada por la norma es una métrica invariante bajo traslaciones. En efecto:

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

para todo $x, y, z \in Y$.

Como veremos en el siguiente teorema, la existencia de una métrica invariante bajo traslaciones es una propiedad de todos los espacios lineales metrizables.

Teorema 1.1.2. *Sea Y un espacio lineal metrizable. Entonces existe una métrica d en Y, compatible con la topología de Y, tal que d es invariante bajo traslaciones. Más aún, si Y es localmente convexo, entonces las bolas determinadas por la métrica d son convexas.*

Para la demostración de este teorema, se puede consultar ([12], pág. 18).

Proposición 1.1.3. *Sea Y un espacio lineal metrizable. Supongamos que d es una métrica en d, invariante bajo traslaciones y tal que las bolas determinadas por dicha métrica son conjuntos convexos. Entonces, para todo $r > 0$, y para todo subconjunto convexo A de Y, el conjunto*

$$B(A, r) = \{y \in Y \mid d(y, a) < r, \ \textit{para algún } a \in A\} = \bigcup_{x \in A} B(x, r).$$

es convexo.

Demostración. Primero notemos que, por la invarianza de d bajo traslaciones, $d(x,y) < r$ si y sólo si $d(0, y-x) < r$. Afirmamos que $B(x,r) = x + B(0,r)$. En efecto, si $y \in B(x,r)$, entonces $y = x + (y-x)$ y, como $y - x \in B(0,r)$, sucede que $y \in x + B(0,r)$. A la inversa, si $y \in x + B(0,r)$, entonces $y = x + z$ donde z es un punto de $B(0,r)$. Luego, $d(0, y-x) = d(0,z) < r$, por lo que $d(x,y) < r$ y por lo tanto $y \in B(x,r)$. Esto prueba que $B(x,r) = x + B(0,r)$. Así,

$$B(A,r) = \bigcup_{a\in A} B(a,r) = \bigcup_{a\in A} (a + B(0,r)) = A + B(0,r).$$

Con esto, hemos probado que $B(A,r) = A + B(0,r)$.

De esta manera, si $x, y \in B(A,r)$, entonces existen puntos $a_1, a_2 \in A$, y $x_1, x_2 \in B(0,r)$ tales que

$$x = a_1 + x_1 \qquad \text{y} \qquad y = a_2 + x_2.$$

Así, si $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t(a_1 + x_1) + (1-t)(a_2 + x_2) \\ &= (ta_1 + (1-t)a_2) + (tx_1 + (1-t)x_2). \end{aligned}$$

Como A y $B(0,r)$ son convexos,

$$(ta_1 + (1-t)a_2) \in A \qquad \text{y} \qquad (tx_1 + (1-t)x_2) \in B(0,r).$$

Luego,

$$tx + (1-t)y \in A + B(0,r) = B(A,r),$$

lo cual demuestra que $B(A,r)$ es convexo. □

1.2. Aciones de Grupos Topológicos

Un **grupo topológico** G es un grupo provisto de una topología que hace continua a la función producto:

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\to gh \end{aligned}$$

y a la función que manda cada elemento a su inverso:

$$\begin{aligned} G &\to G \\ g &\to g^{-1} \end{aligned}$$

Como ejemplos de grupos topológicos tenemos $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores; el grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$, así como sus subgrupos: el grupo ortogonal $O(n)$ o el grupo especial ortogonal $SO(n)$. De hecho, todos estos ejemplos son también *grupos de Lie*. Para ser más específicos, un **grupo de Lie** es un grupo provisto de una estructura de n-variedad diferenciable donde el producto y el inverso son funciones C^∞.

En lo sucesivo, usaremos las letras G o H para denotar a los grupos topológicos. La letra e denotará siempre el neutro del grupo en cuestión, y utilizaremos las letras g y h para representar los elementos del grupo.

Definición 1.2.1. *Sean G un grupo topológico y X es un espacio topológico. Una* ***acción continua*** *de G en X es una función continua $\theta : G \times X \to X$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\theta(e, x) = x$, para todo $x \in X$;*
2. *$\theta(h, \theta(gx)) = \theta(hg, x)$, para todo $g, h \in G$, y $x \in X$.*

En la práctica a las acciones continuas les llamaremos simplemente acciones. Además, si $\theta : G \times X \to X$ es una acción de G en X, es común escribir $\theta(g, x)$ simplemente como gx. Entonces, las propiedades 1 y 2 de la definición anterior, indican que

$$ex = x, \qquad \text{y} \qquad h(gx) = (hg)x,$$

para cada $x \in X$ y cada $g, h \in G$. Cuando exista una acción continua de un grupo topológico G en un espacio X, diremos que G **actúa continuamente** en X o que X es un G**-espacio**. En dicha situación, si $x \in X$, el conjunto

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

recibirá el nombre de **órbita** de x. Si $A \subset X$ y $M \subset G$, denotaremos por MA al conjunto

$$MA = \{ha \mid h \in H, a \in A\}.$$

Si X es un G-espacio, entonces cada elemento $g \in G$ induce una función $\theta_g : X \to X$, donde $\theta_g(x) = gx$. La función θ_g recibirá el nombre de **transición**. La continuidad de la acción, nos garantiza que θ_g es continua. Además, para cualesquiera $g \in G$, $x \in X$, se cumple que:

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}(x) = \theta_g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = x,$$

y también

$$\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g(x) = \theta_g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x$$

Por lo que θ_g es en realidad un homeomorfismo de X en X. Este hecho nos va a permitir operar en el grupo con facilidad. Por ejemplo, afirmaciones como $g\overline{A} = \overline{gA}$, $g(A \cap B) = gA \cap gB$ o gU es abierto (cerrado) si y sólo si U es abierto (cerrado) son claramente ciertas.

Diremos que un subconjunto A de un G-espacio X es **G-invariante** (o simplemente *invariante*, cuando se sobreentienda quién es el grupo en cuestión), si $GA = A$.

Supongamos que X y Y son G-espacios, y que $f : X \to Y$ es una función. Diremos que f es **G-equivariante** si

$$f(gx) = gf(x), \text{ para cualesquiera } x \in X, g \in G.$$

Otro tipo de funciones importantes con las que vamos a trabajar son las funciones *invariantes*. Una función $f : X \to Y$, entre dos G-espacios es **G-invariante**, si

$$f(gx) = f(x), \text{ para cualesquiera } x \in X, g \in G.$$

En lo sucesivo, a las funciones G-equivariantes (G-invariantes) les llamaremos simplemente equivariantes (invariantes).

Si X es un G-espacio y $x \in X$, definimos el **grupo de isotropía de** x o **estabilizador de** x como el subconjunto $G_x \subset G$ determinado por

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Claramente G_x es un subgrupo de G.

Proposición 1.2.2. *Si X es un G-espacio y $(g, x) \in G \times X$, entonces:*

$$gG_xg^{-1} = G_{gx}.$$

Demostración. Si $h \in G_x$, entonces

$$ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}gx) = (gh)x = gx,$$

por lo que $ghg^{-1} \in G_{gx}$, de donde $gG_xg^{-1} \subset G_{gx}$.

Por otro lado, si $h \in G_{gx}$, entonces $h(gx) = (hg)x = gx$, por lo que

$$x = (g^{-1}hg)x.$$

Esto garantiza que $(g^{-1}hg) \in G_x$ y en consecuencia,

$$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}.$$

Así $G_{gx} \subset gG_xg^{-1}$, de donde $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, como se quería demostrar. □

La siguiente propiedad será usada más adelante.

Proposición 1.2.3. *Sean X un G-espacio y $H \subset G$ un subgrupo. Entonces el conjunto*

$$X[H] = \{x \in X \mid H \subset G_x\}$$

es cerrado en X.

Demostración. Sea $x \in \overline{X[H]}$. Entonces existe una red $(x_i)_{i\in I} \subset X[H]$ que converge a x. Como $x_i \in X[H]$, se cumple que $hx_i = x_i$ para todo $h \in H$, y para todo $i \in I$. Luego, si aplicamos la continuidad de la acción obtemenos que

$$hx = \lim hx_i = \lim x_i = x.$$

De este modo podemos concluir que $h \in G_x$ para todo $h \in H$, y por lo tanto $x \in X[H]$. □

1.2.1. Espacio de Órbitas

Proposición 1.2.4. *Si X es un G-espacio, entonces cualesquiera dos órbitas de X son iguales o son ajenas.*

Demostración. Supongamos que $x_1, x_2 \in X$ son puntos tales que

$$G(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset.$$

Entonces existen $g_1 \in G$ y $g_2 \in G$ tales que $g_1x_1 = g_2x_2$, y por lo tanto

$$x_1 = g_1^{-1}g_2x_2 \in G(x_2), \qquad \text{y} \qquad x_2 = g_2^{-1}g_1x_1 \in G(x_1).$$

Este hecho nos permite concluir que

$$G(x_1) \subset G(x_2) \subset G(x_1),$$

lo cual garantiza que $G(x_1) = G(x_2)$. $\square$

Denotaremos por X/G al conjunto de órbitas de un G-espacio X. Este conjunto es a su vez un espacio topológico, provisto de la topología cociente que hereda de X. Al espacio topológico X/G lo llamaremos **espacio orbital**, y, a la función cociente $\pi : X \to X/G$ le llamaremos **proyección orbital**.

Notemos que si X es un G-espacio, y $C \subset X$ es un subconjunto arbitrario, entonces $\pi^{-1}(\pi(C)) = GC$. En efecto, si $x \in GC$, entonces $x = gc$ para algún $g \in G$, $c \in C$. Luego, $\pi(x) = \pi(c)$ y por lo tanto $x \in \pi^{-1}(\pi(C))$, de donde concluimos que

$$GC \subset \pi^{-1}(\pi(C)).$$

Por otro lado, si $x \in \pi^{-1}(\pi(C))$, entonces existe $c \in C$ tal que $\pi(x) = \pi(c)$. Así, $x = gc$ para algún $g \in G$ y por lo tanto $x \in GC$. Este hecho demuestra que $\pi^{-1}(\pi(C)) \subset GC$, lo cual nos permite concluir que

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = GC.$$

En los siguientes resultados usaremos frecuentemente esta última igualdad.

Proposición 1.2.5. *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es abierta.*

Demostración. Sea U abierto en X. Entonces

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = GU = \bigcup_{g \in G} gU,$$

lo cual es una unión de abiertos (ya que cada gU es abierto) y, por lo tanto $\pi(U)$, es abierto. $\square$

1.2.2. Acciones de Grupos Compactos

Sea X es un G-espacio y $\theta : G \times X \to X$ la acción de G en X. Definamos para cada punto $x \in X$, una función $\theta_x : G \to X$ dada por

$$\theta_x(g) = gx. \tag{1.1}$$

Como θ es una función continua, θ_x también lo es. Notemos que $\theta_x(G) = G(x)$ es la órbita de x. Entonces, si G es compacto, podemos concluir que $\theta_x(G)$ es compacto, y por lo tanto todas las órbitas de X son conjuntos compactos. También observemos que

$$\theta_x^{-1}(\{x\}) = \{g \in G \mid gx = x\} = G_x.$$

De este modo, por la continuidad de la función θ_x podemos concluir que G_x es un subgrupo cerrado de G, para todo $x \in X$. Luego, si G es compacto, entonces G_x también es compacto.

Todo lo anterior lo podemos resumir en la siguiente observación.

Observación 1.2.6. *Si G es un grupo compacto y X es un G-espacio, entonces:*

1. *las órbitas son subconjuntos compactos de X;*
2. *los grupos de isotropía son subgrupos compactos.*

Supongamos que X es un G-espacio y que G es compacto. Para cualquier punto $x \in X$, el subgrupo G_x actúa en G de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_x \times G &\to G \\ (h, g) &\to gh^{-1} \end{aligned}$$

Por la continuidad del producto en el grupo, dicha acción es continua. Entonces G es un G_x-espacio y, por lo tanto, podemos pensar en el espacio de órbitas G/G_x. Sea $\pi : G \to G/G_x$ la proyección orbital. Notemos que G/G_x lo podemos ver como el conjunto de clases laterales:

$$G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}.$$

Ahora podemos pensar que G actúa en G/G_x por traslaciones izquierdas, es decir

$$\begin{aligned} G \times (G/G_x) &\to G/G_x \\ (g, hG_x) &\to ghG_x \end{aligned}$$

Esta acción es continua y, por tanto, G/G_x es a su vez un G-espacio.

Consideremos la función $\theta_x : G \to G(x)$ definida anteriormente. Notemos que para cualesquiera $g \in G$, y $h \in G_x$, se cumple que

$$\theta_x(gh) = (gh)x = g(hx) = gx = \theta_x(g).$$

Por la propiedad universal del cociente, existe una función continua $\overline{\theta}_x : G/G_x \to G(x)$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "\pi"'] & G(x) \\ G/G_x \arrow[ur, dashed, "\overline{\theta}_x"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que $\overline{\theta}_x(gG_x) = \overline{\theta}_x(\pi(g) = \theta_x(g) = gx$, para cada $g \in G$, y cada $x \in X$.

Proposición 1.2.7. *Si X es un G-espacio de Hausdorff y G es un grupo compacto, entonces $\overline{\theta}_x : G/G_x \to G(x)$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración. La propiedad universal del cociente nos garantiza que $\overline{\theta}_x$ es continua. Como G es compacto y π es continua, el espacio G/G_x es compacto. En vista de que $G(x)$ es de Hausdorff, podemos concluir que $\overline{\theta}_x$ es una función cerrada. Por otro lado, para cada $g, h \in G$ y cada $x \in X$,

$$\overline{\theta}_x(hgG_x) = (hg)x = h(gx) = h\overline{\theta}_x(gG_x),$$

lo cual demuestra que $\overline{\theta}_x$ es equivariante. Para completar la prueba necesitamos demostrar que $\overline{\theta}_x$ es una biyección. Si $y \in G(x)$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Entonces

$$\overline{\theta}_x(gG_x) = \overline{\theta}_x(\pi(g)) = \theta_x(g) = gx = y,$$

así que $\overline{\theta}_x$ es una función suprayectiva. Ahora supongamos que g_1G_x y g_2G_x son dos clases laterales en G/G_x tales que

$$\overline{\theta}_x(g_1G_x) = \overline{\theta}_x(g_2G_x).$$

Pero $\overline{\theta}_x(g_iG_x) = \theta_x(g_i) = g_ix$, para $i = 1, 2$. Entonces $g_1x = g_2x$ y por lo tanto $g_1^{-1}g_2x = x$, lo cual demuestra que $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ de donde

$$g_1G_x = g_2G_x.$$

De esta manera hemos demostrado que $\overline{\theta}_x$ es inyectiva y, por lo tanto, $\overline{\theta}_x$ es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 1.2.8. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio arbitrario. Entonces la acción $\theta : G \times X \to X$ es una función cerrada.*

Demostración. Sea $F \subset G \times X$ cerrado. Consideremos una red $(g_i, x_i)_{i\in I}$ en F de manera que la red $(g_i x_i)_{i\in I}$ converge a un punto $x \in X$. Necesitamos probar que $x \in \theta(F)$. Como G es compacto, la red $(g_i)_{i\in I}$ tiene una subred (g_{i_γ}) que converge a un elemento $g \in G$. Como G es un grupo topológico, la red $(g_{i_\gamma}^{-1})$ converge a g^{-1}. Pero $x_{i_\gamma} = g_{i_\gamma}^{-1}(g_{i_\gamma} x_{i_\gamma})$, por lo que la red (x_{i_γ}) converge a $g^{-1}x$ y, por lo tanto, la red $(g_{i_\gamma}, x_{i_\gamma})$ converge a $(g, g^{-1}x)$. Como F es cerrado, $(g, g^{-1}x) \in F$, Luego

$$x = g(g^{-1}x) = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(F),$$

como se quería probar. □

Proposición 1.2.9. *Sea X un G-espacio, donde G es grupo compacto. Entonces la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es perfecta.*

Demostración. Necesitamos demostrar que la proyección es cerrada y con fibras compactas. Dado $C \subset X$, cerrado, tenemos que $\pi^{-1}(\pi(C)) = GC$ el cual es cerrado por la Proposición 1.2.8, y por lo tanto $\pi(C)$ es cerrado en X/G, lo cual demuestra que la proyección orbital es una función cerrada. Para ver que las fibras son compactas, simplemente notemos que cada fibra es, de hecho, una órbita en X y por lo tanto es compacta. □

Corolario 1.2.10. *Si G es compacto y X es un G-espacio paracompacto, entonces X/G es paracompacto.*

Demostración. Como la paracompacidad se preserva bajo funciones cerradas, (véase [9], pág. 310), si X es paracompacto, entonces X/G también lo es. □

Si X es un G-espacio, diremos que una cubierta de X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, es **invariante** si cada U_α es invariante bajo la acción de G.

Proposición 1.2.11. *Sea X un G-espacio paracompacto. Si G es compacto, entonces toda cubierta abierta invariante de X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, tiene un refinamiento abierto, invariante y localmente finito.*

Demostración. Consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta e invariante de X. Sea $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital. Por el Corolario 1.2.10, X/G es paracompacto. Como π es abierta, la familia $\{\pi(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ constituye una cubierta abierta de X/G y, por la paracompacidad de este espacio, existe un refinamiento localmente finito $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Por la continuidad de π, la familia $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un refinamiento abierto y localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Además, cada conjunto $\pi^{-1}(V_\lambda)$ es G-invariante, lo cual prueba que $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el refinamiento buscado. □

Proposición 1.2.12. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta, invariante y localmente finita de un G-espacio X. Si G es compacto y X paracompacto, entonces existe $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una partición de unidad invariante subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.*

Demostración. Consideremos la proyección orbital $\pi : X \to X/G$. Como X/G es paracompacto, existe una partición de unidad $\{q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ subordinada a la cubierta $\{\pi(U_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X/G. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, definamos $p_\alpha : X \to [0,1]$ por

$$p_\alpha = q_\alpha \circ \pi.$$

Claramente $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una partición de unidad subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Para completar la prueba, sólo necesitamos demostrar que cada p_α es invariante. Si $g \in G$ y $x \in X$, entonces $\pi(x) = \pi(gx)$, por lo que

$$p_\alpha(gx) = q_\alpha(\pi(gx)) = q_\alpha(\pi(x)) = p_\alpha(x),$$

lo cual prueba que p_α es invariante, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es la partición de unidad buscada. □

Teorema 1.2.13. *Sea X un G-espacio métrico con métrica ρ. Si G es compacto, entonces la función $d : X\times X \to [0,\infty)$ definida en cada $(x,y) \in X\times X$ como*

$$d(x,y) = \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}$$

es una métrica en X, invariante bajo la acción del grupo (es decir $d(gx,gy) = d(x,y)$ para cada $x,y \in X$, y cada $g \in G$) y compatible con la topología de X.

Demostración. Como G es compacto y la función $G \to \mathbb{R}$ dada por $g \to \rho(gx,gy)$ es continua, podemos garantizar que $d(x,y)$ existe y es un número finito. Es claro que $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Además, si $x = y$, entonces $gx = gy$ para todo $g \in G$ y por lo tanto $d(x, y) = 0$. Por otro lado, si $d(x, y) = 0$ entonces $\rho(gx, gy) = 0$ para todo $g \in G$, en particular $\rho(ex, ey) = \rho(x, y) = 0$ por lo que $x = y$. Claramente $\rho(gx, gy) = \rho(gy, gx)$, de donde concluimos que $d(x, y) = d(y, x)$. Para ver la desigualdad del triángulo notemos que

$$\rho(gx, gy) \leq \rho(gx, gz) + \rho(gz, gy), \text{ para todo } g \in G, \quad x, y, z \in X,$$

por lo que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup_{g \in G}\{\rho(gx, gy)\} \\ &\leq \sup_{g \in G}\{\rho(gx, gz) + \rho(gz, gy)\} \\ &\leq \sup_{g \in G}\{\rho(gx, gz)\} + \sup_{g \in G}\{\rho(gz, gy)\} \\ &= d(x, z) + d(z, y), \end{aligned}$$

lo cual prueba que d es una métrica. Para ver que d es invariante bajo la acción del grupo, notemos que si $g' \in G$ entonces

$$\begin{aligned} d(g'x, g'y) &= \sup_{g \in G}\{\rho(gg'x, gg'y)\} = \sup_{gg' \in G}\{\rho(gg'x, gg'y)\} \\ &= \sup_{h \in G}\{\rho(hx, hy)\} = d(x, y). \end{aligned}$$

Para completar la prueba demostremos que la topología generada por d es la misma que la topología generada por ρ. Primero notemos que

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \text{ para todo } x, y \in X,$$

por lo que la función identidad de (X, d) en (X, ρ) es continua. Para completar la prueba demostremos que la función identidad de (X, ρ) en (X, d) también es continua. Sea $x_0 \in X$. Consideremos una función $\varphi : G \times X \to \mathbb{R}$ (en este caso X tiene la topología inducida por la métrica ρ) definida por:

$$\varphi(g, x) = \rho(gx, gx_0).$$

La continuidad de la acción y la continuidad de la distancia ρ garantizan que φ es una función continua. Además, $\varphi(g, x_0) = 0$, para todo $g \in G$. Así, dados $\varepsilon > 0$, y $g \in G$, podemos encontrar una vecindad abierta O_g de g, y $\delta_g > 0$ tales que, para todo $h \in O_g$ y para todo $x \in B(x_0, \delta_g) = \{y \in X | \rho(y, x_0) < \delta_g\}$, se cumpla que

$$|\varphi(h, x) - \varphi(g, x_0)| = \varphi(h, x) = \rho(hx, hx_0) < \varepsilon/2.$$

La familia $\{O_g\}_{g \in G}$ es una cubierta abierta del espacio compacto G. Entonces existe una subcubierta finita de $\{O_g\}_{g \in G}$, digamos $\{O_{g_1}, \dots O_{g_n}\}$. Sea

$$\delta = \text{mín}\{\delta_{g_i} | i = 1, 2 \dots, n\}.$$

Consideremos $x \in X$ tal que $\rho(x, x_0) < \delta$. Notemos que para todo $g \in G$, existe g_i tal que $g \in O_{g_i}$. Por la elección de δ, también se cumple que $x \in B(x_0, \delta_{g_i})$. Entonces

$$\varphi(g, x) = \rho(gx, gx_0) < \varepsilon/2.$$

Como podemos hacer esto para todo $g \in G$, podemos concluir que

$$\rho(gx, gx_0) < \varepsilon/2, \text{ para todo } g \in G,$$

y por lo tanto

$$d(x, x_0) = \sup_{g \in G}\{\rho(gx, gx_0)\} < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que la identidad de (X, ρ) en (X, d) es continua. $\square$

1.3. Rebanadas

Definición 1.3.1. *Sean X un G-espacio y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Diremos que un subconjunto $S \subset X$ es una H-**rebanada** si se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *S es cerrado en $G(S) = \{gx \mid g \in G,\ x \in S\}$.*

2. *S es H-invariante, es decir, $HS = S$.*

3. *Para cada elemento $g \in G \setminus H$, se cumple que $gS \cap S = \emptyset$.*

4. *$G(S)$ es abierto en X.*

*En estas condiciones, el conjunto $G(S)$ recibe el nombre de H-**tubo**.*

En la Observación 1.2.6 indicamos que si G es compacto, entonces $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ es un subgrupo compacto de G, para cada $x \in X$. En particular, cada G_x es un subgrupo cerrado de G. Así, podemos preguntarnos por la existencia de G_x-rebanadas. El siguiente resultado, conocido como el Teorema de la Rebanada, nos da condiciones bajo las cuales esto es posible.

Teorema 1.3.2. *Sean G un grupo compacto de Lie, y X un G-espacio completamente regular. Entonces, para cualquier punto $x \in X$, existe una G_x-rebanada $S \subset X$, tal que $x \in S$.*

Para una prueba del teorema anterior, véase [6] pág. 86.

Teorema 1.3.3. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio, y $S \subset G$ una G_x-rebanada, para algún $x \in S$. Entonces existe una retracción equivariante $r : G(S) \to G(x)$ tal que $r^{-1}(x) = S$.*

Demostración. Construyamos la función $r : G(S) \to G(x)$ de la siguiente manera:

$$r(y) = gx, \text{ si } y \in gS.$$

Si $y \in gS \cap hS$, entonces

$$h^{-1}gS \cap S \neq \emptyset.$$

Como S es una G_x-rebanada, $h^{-1}g \in G_x$ y por tanto $gx = hx$. Esto demuestra que r está bien definida. Claramente $r(gx) = gx$ para todo $gx \in G(x)$, y $r^{-1}(\{x\}) = S$. Para ver que r es equivariante, consideremos $y \in G(S)$ y $h \in G$. Si $y \in gS$, entonces $hy \in (hg)S$, por lo que

$$r(hy) = (hg)x = h(gx) = hr(y).$$

Para completar la prueba necesitamos demostrar que r es continua. Sean $y \in G(S)$ y $(y_i)_{i\in I}$ una red en $G(S)$ que converja a y. Entonces para cada $i \in I$, existe $x_i \in S$ y $g_i \in G$ tal que $y_i = g_i x_i$. Como G es compacto, podemos suponer, sin perder la generalidad, que la red $\{g_i\}_{i\in I}$ converge a $g \in G$. Entonces $g_i^{-1} y_i = x_i$ y, por la continuidad de la acción, tenemos que

$$\lim x_i = \lim g_i^{-1} y_i = g^{-1} y.$$

Como S es cerrado en $G(S)$, podemos concluir que $g^{-1}y \in S$, ya que la red $(x_i)_{i\in I}$ está contenida en S. Llamemos $z = g^{-1}y$. Entonces

$$\lim r(y_i) = \lim r(g_i x_i) = \lim g_i r(x_i).$$

Pero $r(x_i) = x$ ya que $x_i \in S$, para todo $i \in I$. Así,

$$\lim r(y_i) = \lim g_i x = gx = r(gz) = r(y),$$

lo cual demuestra que r es continua. $\square$

Corolario 1.3.4. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Supongamos que existe una G_x-rebanada, $S \subset X$, para algún $x \in S$. Entonces, para todo abierto $O \subset G$, el conjunto OS es abierto en X.*

Demostración. Como $G(S)$ es abierto en X y $OS \subset G(S)$, es suficiente demostrar que OS es abierto en $G(S)$. Para esto utilizaremos las funciones $\theta_x : G \to G(x)$ y $\overline{\theta}_x : G/G_x \to G(x)$ que definimos anteriormente. Recordemos que, para cada $g \in G$,

$$\theta_x(g) = gx, \qquad \text{y} \qquad \overline{\theta}_x(gG_x) = gx.$$

Además, si $\pi : G \to G/G_x$, es la proyección orbital, entonces $\overline{\theta}_x \circ \pi = \theta_x$. Por la Proposición 1.2.5, π es una función abierta y, por la Proposición 1.2.7, $\overline{\theta}_x$ es un homeomorfismo. Por tanto, la composición $\overline{\theta}_x \circ \pi$ es una función abierta. Luego, θ_x es abierta. Esto implica que $\theta_x(O)$ es abierto en $G(x)$. Ahora consideremos la retracción $r : G(S) \to G(x)$, como en el teorema anterior. La continuidad de esta función nos garantiza que $W = r^{-1}(\theta_x(\pi(O)))$ es abierto en $G(S)$. Pero $r^{-1}(gx) = gS$ para todo $g \in G$, por lo que

$$W = \bigcup_{g \in O} gS = OS,$$

lo cual demuestra que OS es abierto en $G(S)$. $\square$

Diremos que una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de un G-espacio X es una **cubierta tubular** si cada conjunto U_α es un H_α-tubo, para algún subgrupo cerrado $H_\alpha \subset G$.

Hemos visto que toda cubierta invariante de un G-espacio paracompacto admite un refinamiento invariante y localmente finito (cuando G es compacto). Ahora probaremos un resultado análogo en el caso de cubiertas tubulares. Para ello es necesario el siguiente lema.

Lema 1.3.5. *Sea G un grupo topológico que actúa continuamente en un espacio X. Supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo cerrado y que $S \subset X$ es una H-rebanada. Consideremos $U \subset X$ un abierto invariante. Si $U \cap S \neq \emptyset$, entonces $U \cap S$ es una H-rebanada.*

Demostración. Consideremos $x \in U \cap S$ y $h \in H$. Como S es H-invariante, $hs \in S$ para cada $s \in S$. Además, como U es invariante, también se cumple que $hs \in U$ para cada $s \in U$. Por tanto, $hs \in U \cap S$ para cada $s \in U \cap S$. Esto muestra que $U \cap S$ es H-invariante.

Por otro lado, si $g \in G \setminus H$, entonces $gS \cap S = \emptyset$ y por lo tanto

$$g(U \cap S) \cap (U \cap S) = \emptyset.$$

Para demostrar que $G(U \cap S)$ es abierto en X, primero notemos que $G(U \cap S) = U \cap G(S)$. En efecto, si $x \in U \cap G(S)$, entonces $x = gs$ para algún $g \in G$ y $s \in S$ tal que $gs \in U$. Como U es invariante, $s = g^{-1}x \in U$ y por lo tanto $x = gs \in G(U \cap S)$, de donde concluimos que

$$U \cap G(S) \subset G(U \cap S).$$

Además, como U es invariante, $G(U \cap S) \subset U \cap G(S)$. Esto prueba que $U \cap G(S) = G(U \cap S)$.

Como $G(S)$ es abierto en X y U también es abierto en X, se tiene que $G(U \cap S) = U \cap G(S)$ es abierto en X.

Por último, como S es cerrado en $G(S)$, existe un conjunto cerrado C en X tal que

$$S = G(S) \cap C.$$

Entonces

$$U \cap S = U \cap (G(S) \cap C) = (U \cap G(S)) \cap C = G(U \cap S) \cap C.$$

Esto prueba que $U \cap S$ es cerrado en $G(U \cap S)$, quedando así demostrado que $U \cap S$ es una H-rebanada. $\square$

Proposición 1.3.6. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio paracompacto. Sea $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta tubular, donde cada S_α es una H_α-rebanada. Entonces $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ admite un refinamiento tubular localmente finito.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $U_\alpha = G(S_\alpha)$. Consideremos el refinamiento $\{\pi^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, como en la demostración de la Proposición 1.2.11. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\alpha_\lambda \in \mathcal{A}$, tal que

$$\pi^{-1}(V_\lambda) \subset U_{\alpha_\lambda} = G(S_{\alpha_\lambda}).$$

Llamemos $Q_\lambda = S_{\alpha_\lambda} \cap \pi^{-1}(V_\lambda)$. Entonces, por el Lema 1.3.5, Q_λ es una H_{α_λ}-rebanada, y

$$\pi^{-1}(V_\lambda) = G(Q_\lambda),$$

por lo lo que $\{G(Q_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es el refinamiento localmente finito que buscábamos.

□

1.4. G-Espacios Lineales

Sea L un espacio lineal en el cual actúa continuamente un grupo G. Diremos que L es un G**-espacio lineal**, si para cada $g \in G$, $x, y \in L$ y para cada escalar t, se cumple que

$$g(x+y) = gx + gy, \text{ y } g(tx) = tgx.$$

En otras palabras, L es un G-espacio lineal, si las transiciones son funciones lineales.

Teorema 1.4.1. *Supongamos que L es un G-espacio lineal metrizable. Entonces existe una métrica d en L que es invariante bajo traslaciones e invariante bajo la acción del grupo. Mas aún, si L es localmente convexo, entonces las bolas determinadas por la métrica d son convexas.*

Demostración. Sean ρ una métrica en L invariante bajo traslaciones y sea d la métrica en L definida por

$$d(x,y) = \sup_{g\in G}\{\rho(gx, gy)\}.$$

Por el Teorema 1.2.13, d es una métrica invariante bajo la acción del grupo y compatible con la topología de L. Veamos que también es invariante bajo traslaciones. Sean $x, y, z \in L$. Como ρ es invariante bajo traslaciones, tenemos que

$$\rho(gx + gz, gy + gz) = \rho(gx, gy), \text{ para todo } g \in G.$$

De este modo

$$\begin{aligned}
d(x+z,y+z) &= \sup_{g\in G}\{\rho(g(x+z),g(y+z))\}\\
&= \sup_{g\in G}\{\rho(gx+gz,gy+gz)\}\\
&= \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}\\
&= d(x,y),
\end{aligned}$$

lo cual prueba que d es invariante bajo traslaciones.

Ahora supongamos que L es localmente convexo. Entonces, por el Teorema 1.1.2, podemos suponer que las bolas determinadas por la métrica ρ son convexas. Demostremos que también las bolas determinadas por d son convexas. Sean $z\in L$ y $\varepsilon>0$. Supongamos que $d(x,z)<\varepsilon$ y $d(y,z)<\varepsilon$. Necesitamos demostrar que para todo $t\in[0,1]$, $d(tx+(1-t)y,z)<\varepsilon$. Como las bolas determinadas por ρ son conjuntos convexos, tenemos que para todo $g\in G$ y para todo $t\in[0,1]$,

$$\rho(tgx+(1-t)gy,gz)\leq \text{máx}\{\rho(gx,gz),\rho(gy,gz)\}.$$

Por esta razón podemos usar la linealidad de la acción para concluir que

$$\begin{aligned}
d(tx+(1-t)y,z) &= \sup_{g\in G}\{\rho(g(tx+(1-t)y),gz)\}\\
&= \sup_{g\in G}\{\rho(tgx+(1-t)gy,gz)\}\\
&\leq \sup_{g\in G}\{\text{máx}\{\rho(gx,gz),\rho(gy,gz)\}\}\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que las bolas determinadas por d son convexas. □

1.5. Extensores Equivariantes

Supongamos que G es un grupo topológico y que X y Y son G-espacios. Diremos que Y es un G-**extensor absoluto de vecindad** para X, o en símbolos que $Y\in G\text{-ANE}(X)$ si para todo subconjunto cerrado e invariante $A\subset X$, y para toda función continua y equivariante $f:A\to Y$, existe una vecindad invariante de A, $U \subset X$, y una función continua y equivariante $F : U \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ U \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Bajo las mismas condiciones, diremos que Y es un G**-extensor absoluto** para X, o en símbolos que $Y \in G\text{-AE}(X)$, si para todo subconjunto cerrado e invariante $A \subset X$ y para toda función continua y equivariante $f : A \to Y$, existe otra función $F : X \to Y$, la cual extiende continua y equivariantemente a f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora supongamos $\mathcal{C}$ es una clase de G-espacios topológicos. Diremos que un G-espacio Y es un G**-extensor absoulto de vecindad para la clase** $\mathcal{C}$, si $Y \in G\text{-ANE}(X)$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Este hecho lo denotaremos en símbolos por $Y \in G\text{-ANE}(\mathcal{C})$.

Análogamente diremos que Y es un G**-extensor absoluto par la clase** $\mathcal{C}$ o en símbolos que $Y \in G\text{-AE}(\mathcal{C})$, si $Y \in G\text{-AE}(X)$, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Teorema 1.5.1 (Versión equivariante del Teorema de Dugundji)**.** *Supongamos que G es un grupo compacto de Lie y que L es un G-espacio lineal. Si L es localmente convexo, y $V \subset L$ es un subconjunto convexo, entonces* $V \in G\text{-ANE}(\mathcal{M})$, *donde $\mathcal{M}$ es la clase de todos los G-espacios metrizables.*

Para la demostración de este teorema véase [2].

1.6. Multifunciones y Selecciones Equivariantes

Definición 1.6.1. *Consideremos dos espacios topológicos X y Y. Una* ***multifunción*** *o* ***función multivaluada*** *es una función de X a los subconjuntos no vacíos de Y.*

Si ϕ es una multifunción de X a Y, escribiremos $\phi : X \Rightarrow Y$. Así ϕ asocia a cada punto $x \in X$ un subconjunto no vacío $\phi(x)$ de Y.

Se dice que una multifunción $\phi : X \Rightarrow Y$ es **inferiormente semicontinua** (y lo denotaremos por i.s.c.), si para cualquier abierto U de Y el conjunto

$$\phi^{\Leftarrow}(U) = \{x \in X \mid \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto en X.

Cuando X y Y sean G-espacios (para algún grupo topológico G), diremos que una multifunción $\phi : X \Rightarrow Y$ es **G-equivariante** (o simplemente, *equivariante*) si para todo $g \in G$, se cumple que

$$\phi(gx) = g\phi(x) = \{gy \mid y \in \phi(x)\}.$$

Proposición 1.6.2. *Si $\phi : X \Rightarrow Y$ es una multifunción i.s.c. y $\psi : X \Rightarrow Y$ es otra multifunción tal que, para cualquier $x \in X$,*

$$\overline{\psi(x)} = \overline{\phi(x)},$$

entonces ψ es i.s.c.

Demostración. Sea $U \subset Y$ un subconjunto abierto. Recordemos que para cualquier subconjunto A de Y, $A \cap U \neq \emptyset$ si y sólo si $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$. Por esta razón se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi^{\Leftarrow}(U) &= \{x \in X \mid \ \psi(x) \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X \mid \ \overline{\psi(x)} \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X \mid \ \overline{\phi(x)} \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X \mid \ \phi(x) \cap U \neq \emptyset\} \\
&= \phi^{\Leftarrow}(U).
\end{aligned}$$

Como ϕ es i.s.c., $\psi^{\Leftarrow}(U) = \phi^{\Leftarrow}(U)$ es abierto en X y por lo tanto ψ es i.s.c.

□

Corolario 1.6.3. *Si $\phi : X \Rightarrow Y$ es una multifunción i.s.c., entonces la multifunción $\psi : X \Rightarrow Y$, dado por*

$$\psi(x) = \overline{\phi(x)},$$

es i.s.c.

Además, si X y Y son G-espacios y ϕ es equivariante, entonces ψ también es equivariante.

Demostración. Simplemente notemos que

$$\overline{\psi(x)} = \overline{\overline{\phi(x)}} = \overline{\phi(x)}$$

y apliquemos la Proposición 1.6.2. Por otro lado, si X y Y son G-espacios y ϕ es equivariante, entonces

$$\phi(gx) = g\phi(x), \quad \text{para todo } x \in X \ \text{ y } \ g \in G.$$

Luego $\psi(gx) = \overline{g\phi(x)} = g\overline{\phi(x)} = g\psi(x)$, lo cual demuestra que ψ es equivariante. □

Proposición 1.6.4. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos y $r > 0$. Supongamos que Y admite una métrica d la cual define su topología y que $\phi : X \Rightarrow Y$ es una multifunción i.s.c. tal que, para cada $x \in X$,*

$$d(f(x), \phi(x)) < r.$$

Entonces la multfunción $\psi : X \Rightarrow Y$ dada por

$$\psi(x) = \phi(x) \cap B(f(x), r)$$

es i.s.c.. Además, si X y Y son G-espacios y d es invariante bajo la acción del grupo, entonces ψ es equivariante si ϕ y f son equivariantes.

Demostración. Consideremos un conjunto abierto $V \subset Y$. Demostraremos que el conjunto $\psi^{\Leftarrow}(V)$ es abierto en X. Sea $x \in \psi^{\Leftarrow}(V)$. Entonces existe $y \in Y$ tal que

$$y \in \psi(x) \cap V = (\phi(x) \cap B(f(x), r)) \cap V.$$

Evidentemente $d(y, f(x)) < r$, por lo que $\varepsilon = r - d(y, f(x)) > 0$. Escojamos $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que

$$B(y, \delta) \subset B(f(x), r) \cap V.$$

Como ϕ es i.s.c., el conjunto

$$W_1 = \phi^{\Leftarrow}(B(y, \delta/2)) = \{z \in X \mid \phi(z) \cap B(y, \delta/2) \neq \emptyset\}$$

es abierto en X. Más aún, como $y \in \phi(x) \cap B(y, \delta/2)$ podemos garantizar que W_1 es una vecindad abierta de x. Por otro lado, como f es continua, el conjunto

$$W_2 = f^{-1}(B(f(x), \delta/2))$$

es una vecindad abierta de x. Sea $O = W_1 \cap W_2$. Entonces O es una vecindad abierta de x. Consideremos $x' \in O$, entonces $f(x') \in B(f(x), \delta/2)$, por lo que

$$d(f(x'), f(x)) < \delta/2.$$

Además, $x' \in W_1$, por lo que existe un punto $y' \in \phi(x') \cap B(y, \delta/2) \subset V$. Luego

$$d(y', y) < \delta/2.$$

Utilizando estas dos últimas desigualdades, concluimos que

$$\begin{aligned} d(y', f(x')) &\leq d(y', y) + d(y, f(x)) + d(f(x), f(x')) \\ &< \delta/2 + (r - \varepsilon) + \delta/2 \\ &< \delta/2 + (r - \delta) + \delta/2 \\ &= r. \end{aligned}$$

Así, podemos garantizar que $y' \in \phi(x') \cap B(f(x'), r) \cap V = \psi(x') \cap V$. Luego $x' \in \psi^{\Leftarrow}(V)$ y por lo tanto $O \subset U$. De lo anterior, se sigue inmediatamente que U es un conjunto abierto. Esto prueba que ψ es i.s.c.

Ahora supongamos que X y Y son G-espacios, que las funciones ϕ y f son equivariantes y que la métrica d es invariante bajo la acción de G. Entonces $\phi(gx) = g\phi(x)$ para cualesquiera $g \in G$, $x \in X$. Por otro lado $d(f(x), y) < r$ si y sólo si $d(gf(x), gy) < r$, para todo $g \in G$. Como f es equivariante, esto último sucede si y sólo si $d(f(gx), gy) < r$. De aquí concluimos que

$$B(f(gx), r) = gB(f(x), r), \text{ para cualesquiera } g \in G, x \in X.$$

Así, podemos observar que

$$\begin{aligned} \psi(gx) &= \phi(gx) \cap B(f(gx), r) = g\phi(x) \cap gB(f(x), r) \\ &= g(\phi(x) \cap B(f(x), r)) = g\psi(x), \end{aligned}$$

lo cual garantiza que ψ es equivariante. □

Consideremos dos espacios topológicos X y Y, y $\phi : X \Rightarrow Y$ una multifunción. Una **selección** de ϕ es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in \phi(x)$, para toda $x \in X$. Además, si X y Y son G-espacios y ϕ es equivariante, diremos que f es una **G-selección** o **selección equivariante**, si es una selección tal que

$$f(gx) = gf(x), \text{ para cualesquiera } g \in G, \quad x \in X.$$

Si Y es un espacio métrico con métrica d y $\varepsilon > 0$, diremos que $f : X \to Y$ es una **ε-selección** o **casi selección** para ϕ si

$$d(f(x), \phi(x)) = \inf_{y \in \phi(x)} \{d(f(x), y)\} < \varepsilon.$$

En el caso de que X y Y sean G-espacios, diremos que una ε-selección es una **ε-selección equivariante** o **casi selección equivariante** si como función es equivariante.

Capítulo 2

Selecciones Equivariantes

En el artículo [1], se prueba un teorema de selección equivariante para multifunciones cuyo dominio es un G-espacio paracompacto y cuyo rango es un G-espacio de Banach, donde G es un grupo compacto. El método usado permite encontrar una selección equivariante a partir de una selección arbitraria. Sin embargo, en la prueba de dicho teorema es indispensable que el rango sea un espacio completo. Además, dicho camino es muy diferente al método usado por Michael en [11], en el cual primero se demuestra la existencia de una ε-selección, y luego se encuentra una selección como el límite uniforme de una sucesión de ε-selecciones.

En este capítulo, demostraremos un teorema de casi selección que nos permitirá (siguiendo el método de Michael) encontrar un teorema de selección equivariante en el cual el rango no es completo, generalizando de esta manera el Teorema 3.4 de [1].

2.1. Un Teorema Sobre Punto Fijo

Sean L un espacio lineal, localmente convexo y metrizable y G un grupo compacto de transformaciones que actúa lineal y continuamente en L. Supongamos que $K \subset L$ es un subconjunto convexo, completo e invariante. Consideremos $C(G, K)$, el espacio de todas las funciones continuas de G en K, provisto de la topología compacto abierta. En $C(G, K)$ podemos definir una acción de G de la siguiente manera:

$$G \times C(G, K) \to C(G, K)$$

$$(g, f) = g * f,$$

donde

$$(g * f)(h) = gf(h), \text{ para todo } h \in G.$$

Para cada $f \in C(X, G)$, y $g \in G$, sea ${}_gf \in C(G, K)$ dada por:

$${}_gf(h) = f(hg), \text{ para todo } h \in G.$$

Análogamente definimos $f_g \in C(G, K)$ por

$$f_g(h) = f(hg), \text{ para todo } h \in G.$$

Teorema 2.1.1. *Existe una función continua, $\int : C(G, K) \to K$, la cual satisface las siguientes condiciones:*

1. $\int {}_gf = \int f = \int f_g$, *para todo* $g \in G$ *y* $f \in C(G, K)$;
2. $\int g * f = g \int f$, *para todo* $g \in G$ *y* $f \in C(G, K)$;
3. *si* $f(g) = x_0 \in K$, *para todo* $g \in G$, *entonces* $\int f = x_0$.

Para la demostración de este teorema véase [5].

Corolario 2.1.2. *Sean G un grupo compacto y L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Supongamos que $K \subset L$ es un subconjunto convexo, completo e invariante. Entonces existe un punto $a \in K$ tal que $ga = a$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Sea $z \in K$ un punto arbitrario. Definamos una función continua $f : G \to K$ de la siguiente manera

$$f(g) = gz.$$

Llamemos $a = \int f \in K$, donde $\int$ es la función definida en el Teorema 2.1.1. Notemos que para todo $g \in G$, $g * f = {}_gf$. En efecto, si $h \in G$, entonces,

$$g * f(h) = gf(h) = ghz = f(gh) = {}_gf(h).$$

De esta manera, si $g \in G$ es un elemento arbitrario, entonces:

$$ga = g \int f = \int g * f = \int {}_gf = \int f = a,$$

lo cual demuestra que a es un punto fijo, como se quería probar. $\square$

2.2. Espacios Ricos

Definición 2.2.1 ([4]). *Sea G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Diremos que H es **grande**, si existe un subgrupo normal $N \subset H$ tal que G/N es un grupo de Lie.*

El siguiente teorema nos brinda una útil caracterización de los subgrupos grandes.

Teorema 2.2.2. *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de un grupo localmente compacto G. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *H es un subgrupo grande.*

2. *G/H es un G-ANE metrizable para la clase de todos los G espacios paracompactos.*

3. *G/H es localmente contraible.*

Para la demostración de este teorema véase [4].

Supongamos que G es un grupo compacto que actúa continuamente en un espacio de Hausdorff X. Observemos que si $x \in X$ es un punto cuyo estabilizador, G_x, es un subgrupo grande, entonces la órbita $G(x)$ es un G-ANE para la clase de todos los G-espacios paracompactos, ya que $G(x)$ es G-homeomorfo a G/G_x. Esto lo podemos resumir en la siguiente observación.

Observación 2.2.3. *Sean G compacto y X un G-espacio de Hausdorff. Si G_x es grande para algún $x \in X$, entonces $G(x) \in G$-ANE para la clase de todos los G-espacios paracompactos.*

Definición 2.2.4 ([4]). *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Diremos que X es un G-espacio **rico**, si para cualquier punto $x \in X$, y para cualquier vecindad U de x en X, existe un punto $y \in U$ tal que G_y es grande, y $G_x \subset G_y$.*

Evidentemente, si G es de Lie, cualquier G-espacio es un espacio rico.

Teorema 2.2.5. *Sea G un grupo compacto de Hausdorff y X un G-espacio completamente regular. Supongamos que $X \in G$-ANE$(\mathcal{P})$, donde $\mathcal{P}$ denota la clase de todos los G-espacios paracompactos. Entonces, X es un G-espacio rico.*

Para la demostración de este teorema véase [3].

Teorema 2.2.6. *Supongamos que G es un grupo compacto y que X es un G-espacio rico. Entonces, para cada punto $x \in X$ y para cada vecindad U de x, existe un punto $y \in X$ y una G_y-rebanada $S \subset U$ que contiene al punto x, tal que G_y es grande y $G_x \subset G_y$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [4].

2.3. Casi Selecciones Equivariantes

Lema 2.3.1. *Sea G un grupo compacto. Sean X y Y G-espacios. Supongamos que d es una métrica en Y invariante bajo la acción del grupo. Sea $\phi : X \Rightarrow Y$ una multifunción equivariante i.s.c. y $\delta > 0$. Supongamos que existe un subespacio invariante $X_0 \subset X$ y una función continua y equivariante $f : X \to Y$ tal que $f|_{X_0}$ es una δ-selección para $\phi|_{X_0}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad abierta e invariante de X_0, U_ε, tal que $f|_{U_\varepsilon}$ es una $(\delta + \varepsilon)$-selección de $\phi|_{U_\varepsilon}$.*

Demostración. Para cada $x \in X_0$, sea

$$W_x = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon/2)) \cap \phi^{\Leftarrow}(B(f(x), \delta + \varepsilon/2)).$$

Como f es continua y ϕ es i.s.c., el conjunto W_x es una vecindad abierta de x. Consideremos la unión

$$U_\varepsilon = \bigcup_{x \in X_0} W_x.$$

Está claro que U_ε es una vecindad abierta de X_0. Veamos que es la vecindad que estamos buscando. Primero demostremos que U_ε es invariante. Para ello tomemos un punto $x \in U_\varepsilon$ y un elemento $g \in G$. Entonces existe $x_0 \in X_0$ tal que $x \in W_{x_0}$. Como X_0 es invariante, se sabe que $gx_0 \in X_0$. Por otro lado, como

$$\phi(x) \cap B(f(x_0), \delta + \varepsilon/2) \neq \emptyset,$$

podemos encontrar un punto $y \in \phi(x)$ tal que $d(y, f(x_0)) < \delta + \varepsilon/2$. Como d es invariante y f es equivariante, se tiene que

$$d(gy, f(gx_0)) = d(gy, gf(x_0)) = d(y, f(x_0)) < \delta + \varepsilon/2.$$

Pero $gy \in g\phi(x) = \phi(gx)$, lo cual demuestra que

$$\phi(gx) \cap B(f(gx_0), \delta + \varepsilon/2) \neq \emptyset,$$

y por lo tanto

$$gx \in \phi^{\Leftarrow} B(f(gx_0), \delta + \varepsilon/2).$$

Por otro lado, como $x \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon/2))$ sabemos que

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2.$$

Pero si usamos nuevamente la invarianza de d y la equivarianza de f llegamos a que

$$d(f(gx), f(gx_0)) = d(gf(x), gf(x_0)) = d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2,$$

lo cual nos garantiza que $gx \in f^{-1}(B(f(gx_0), \varepsilon/2))$. Luego,

$$gx \in f^{-1}(B(f(gx_0), \varepsilon/2)) \cap \phi^{\Leftarrow}(B(f(gx_0), \delta + \varepsilon/2)) = W_{gx_0} \subset U_\varepsilon,$$

lo cual prueba que U_ε es invariante.

Ahora demostremos que $f|_{U_\varepsilon}$ es una $(\delta+\varepsilon)$-selección de $\phi|_{U_\varepsilon}$. Sea $x \in U_\varepsilon$. Entonces existe $x_0 \in X_0$ tal que $x \in W_{x_0}$. Por la definición de W_{x_0}, las siguientes desigualdades se cumplen:

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2,$$

y

$$d(f(x_0), \phi(x)) < \delta + \varepsilon/2.$$

Así, podemos estimar la distancia entre $f(x)$ y $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} d(f(x), \phi(x)) &< d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), \phi(x)) \\ &< \varepsilon/2 + \delta + \varepsilon/2 = \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto nos dice que $f|_{U_\varepsilon}$ es una $(\delta+\varepsilon)$-selección de $\phi|_{U_\varepsilon}$.

$\square$

Definición 2.3.2. *Si X es un G-espacio topológico y L es un G-espacio lineal y metrizable, diremos que L tiene la* ***propiedad de casi selección equivariante respecto a*** *X (o en símbolos, $L \in G\text{-PCS}(X)$), si para todo $\varepsilon > 0$ y para toda multifunción equivariante i.s.c., $\phi : X \Rightarrow L$, cuyos valores $\phi(x)$ son conjuntos completos y convexos, existe una ε-selección equivariante.*

Teorema 2.3.3. *Sea G un grupo compacto y L un G-espacio lineal localmente convexo y metrizable. Sea X un G-espacio paracompacto. Si L es un G-espacio rico, entonces $L \in G$-PCS(X).*

Demostración. Consideremos un G-espacio paracompacto X y $\phi : X \to L$ una multifunción equivariante i.s.c., con valores completos y convexos. Supongamos que d es una métrica en L. Sin perder la generalidad, podemos suponer que d es invariante bajo traslaciones y bajo la acción del grupo y que las bolas determinadas por d son conjuntos convexos. Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Como ϕ es equivariante, se tiene que

$$\phi(x) = \phi(gx) = g\phi(x), \text{ para todo } g \in G_x.$$

Por lo tanto $\phi(x)$ es G_x-invariante, es decir, el grupo de isotropía de x está actúando en el conjunto completo y convexo $\phi(x)$. Por el Corolario 2.1.2 podemos encontrar un punto $a_x \in \phi(x)$, tal que $ga_x = a_x$ para todo $g \in G_x$. Definamos ahora una función $\mu_x : G(x) \to L$ de la siguiente manera

$$\mu_x(gx) = ga_x.$$

Notemos que μ_x está bien definida ya que si $g_1x = g_2x$, entonces $g_2^{-1}g_1 \in G_x$, por lo que

$$g_2^{-1}g_1a_x = a_x,$$

y por lo tanto

$$g_1a_x = g_2a_x.$$

Claramente μ_x es una función equivariante y además, por la continuidad de la acción, μ_x es una función continua. Más aún, μ_x es una selección para $\phi|_{G(x)}$ ya que

$$\mu_x(gx) = ga_x \in g\phi(x) = \phi(gx).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como L es rico, podemos aplicar el Teorema 2.2.6, para encontrar un punto $y \in L$ y una G_y-rebanada por y, $S_x \subset B(x, \varepsilon/2)$, tal que G_y sea un grupo grande que contenga a G_x, y de manera que

$$x \in S_x.$$

Sea $r_x : G(S_x) \to G_y$ definida por

$$r_x(gs) = gy, \text{ para todo } g \in G, s \in S.$$

Por el Teorema 1.3.3, r_x es una retracción equivariante. Entonces

$$d(r_x(a_x), a_x) = d(y, a_x) < \varepsilon/2.$$

Definamos $f_x : G(x) \to G(y)$ por

$$f_x(z) = r_x \circ \mu_x(z).$$

Entonces f_x es una función continua y equivariante definida en un subconjunto cerrado de un G-espacio paracompacto. Como $G(y)$ es un G-ANE para la clase de los G-espacios paracompactos (por la Observación 2.2.3), podemos encontrar una vecindad invariante W_x, así como una extensión continua y equivariante de f_x, digamos $F_x : W_x \to L$. Notemos que para todo $gx \in G(x)$, $F_x(gx) = f_x(gx)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(F_x(gx), \mu_x(gx)) &= d(f_x(gx), ga_x) = d(r_x(ga_x), ga_x) \\ &= d(gr_x(a), ga_x) = d(r_x(x), a_x) \\ &< \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Como $\mu_x(g_x) \in \phi(gx)$ podemos concluir que $F_x|_{G(x)}$ es una $\varepsilon/2$-selección para $\phi|_{G(x)}$. En estas condiciones, podemos aplicar el Lema 2.3.1 y encontrar una vecindad abierta e invariante de $G(x)$, $U_x \subset W_x$, tal que $F|_{U_x}$ sea una ε-casi selección de $\phi|_{U_x}$.

Hagamos esto para cada $x \in X$. De este modo obtenemos una cubierta abierta e invariante de X, $\{U_x\}_{x\in X}$. Como X es paracompacto, podemos encontrar una refinamiento localmente finito e invariante $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de $\{U_x\}_{x\in X}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $x(\alpha) \in X$ tal que $O_\alpha \subset U_{x(\alpha)}$. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, extendamos la función $F_{x(\alpha)}$ a una función $\tilde{F}_\alpha : X \to L$ definida de la siguiente manera

$$\tilde{F}_\alpha(z) = \begin{cases} F_{x(\alpha)}(z), & \text{si } z \in O_\alpha, \\ 0, & \text{si } z \in X \setminus O_\alpha. \end{cases}$$

Ahora consideremos una partición de unidad invariante $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ subordinada a la cubierta $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Definamos $f : X \to L$ a través de la siguiente fórmula:

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(z)\tilde{F}_\alpha(z).$$

Como la familia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es un cubierta abierta localmente finita y puesto que la restricción de $\tilde{F}_\alpha$ a O_α es una función continua, podemos concluir que f es continua. Para cada $z \in X$, sea $Q(z)$ el conjunto de todos los índices $\alpha \in \mathcal{A}$ tales que $z \in O_\alpha$. Evidentemente, si $\alpha \notin Q(z)$, se tiene que $p_\alpha(z) = 0$. Entonces

$$f(z) = \sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z)\tilde{F}_\alpha(z).$$

Más aún, como $z \in O_\alpha$ para todo $\alpha \in Q(z)$, tenemos que $\tilde{F}_\alpha(z) = F_{x(\alpha)}(z)$, para todo $\alpha \in Q(z)$. Así, podemos reescribir a $f(z)$ de la siguiente manera:

$$f(z) = \sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z)F_{x(\alpha)}(z).$$

Recordemos que cada O_α es invariante. Esto nos dice que $z \in O_\alpha$ si y sólo si $gz \in O_\alpha$ para todo elemento $g \in G$. De este modo se tiene que

$$Q(z) = Q(gz), \quad \text{para cualesquiera } z \in X,\ g \in G.$$

Así, podemos usar la linealidad de la acción y el hecho de que $F_{x(\alpha)}$ es equivariante, para concluir que

$$\begin{aligned} f(gz) &= \sum_{\alpha\in Q(gz)} p_\alpha(gz)F_{x(\alpha)}(gz) = \sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z)gF_{x_\alpha}(z) \\ &= g\left(\sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z)F_{x(\alpha)}(z)\right) = gf(z). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es equivariante.

Por último demostremos que f es una ε-selección de ϕ. Para cada índice $\alpha \in Q(z)$, $F_{x(\alpha)}(z) \in B(\phi(z), \varepsilon)$. Ahora observemos que

$$f(z) = \sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z)F_{x(\alpha)}(z)$$

satisface que $p_\alpha(z) \geq 0$ para todo $\alpha \in Q(z)$, y que

$$\sum_{\alpha\in Q(z)} p_\alpha(z) = 1.$$

Por lo tanto, $f(z)$ es una suma convexa de elementos del conjunto convexo $B(\phi(z), \varepsilon)$. Esto prueba que $f(z) \in B(\phi(z), \varepsilon)$, y consecuentemente f es una ε-casi selección equivariante.

□

Corolario 2.3.4. *Sea G un grupo compacto y L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Si L es un G-ANE($\mathcal{P}$) (donde $\mathcal{P}$ denota la clase de todos los G-espacios paracompactos), entonces $L \in G$-PCS(X), para todo G-espacio paracompacto X.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.5 L es un G-espacio rico. Así, en virtud del Teorema 2.3.3, podemos concluir que $L \in G$-PCS(X) para todo G-espacio paracompacto X. □

Una variante del Teorema 2.3.3 es el siguiente resultado.

Teorema 2.3.5. *Sea G un grupo compacto y L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Supongamos que X es un G-espacio paracompacto. Si L es un G-ANE(X) entonces $L \in G$-PCS(X).*

Demostración. Sigamos la prueba del 2.3.3 hasta construir la función μ_x. Como $L \in G$-ANE(X), podemos extender directamente la función μ_x a una función continua y equivariante F_x definida en una vecindad invariante W_x de $G(x)$. Luego continuemos la prueba exactamente como se hizo en 2.3.3. □

teorema

Corolario 2.3.6. *Sea G un grupo compacto de Lie y L un G-espacio lineal localmente convexo y metrizable. Entonces $L \in G$-PSC(X) para todo G-espacio metrizable X.*

Demostración. Sea X un G-espacio metrizable. Por el Teorema 1.5.1, $L \in G$-ANE(X). Así, en virtud del Teorema 2.3.5, $L \in G$-PCS(X). □

2.4. Selecciones Equivariantes

Así como definimos la propiedad de casi selección equivariante, podemos definir la *propiedad de selección equivariante* de la siguiente manera.

Definición 2.4.1. *Sean X un G-espacio y L un G-espacio lineal. Diremos que L tiene la* ***propiedad de selección equivariante respecto a*** *X ($Y \in G$-$\mathrm{PS}(X)$) si cada multifunción equivariante i.s.c., $\phi : X \Rightarrow Y$, cuyos valores son conjuntos convexos y compactos, admite una selección equivariante.*

Teorema 2.4.2. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio paracompacto. Supongamos que L es un G-espacio lineal localmente convexo y metrizable. Si $L \in G$-$\mathrm{PCS}(X)$, entonces $L \in G$-$\mathrm{PS}(X)$.*

Demostración. Sea d una métrica en L. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las bolas determinadas por d son conjuntos convexos y que d es invariante bajo la acción del grupo y bajo traslaciones. Sea $\phi : X \Rightarrow L$ una multifunción equivariante i.s.c. Construiremos por inducción una sucesión de funciones continuas y equivariantes de X en L, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que cumplirá las siguientes dos propiedades:

(I) $d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < 2^{-(n-1)}$, para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

(II) $d(f_n(x), \phi(x)) < 2^{-n}$, para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$, como $L \in G$-$\mathrm{PCS}(X)$, podemos encontrar una función equivariante $f_1 : X \to L$ tal que $d(f_1(x), \phi(x)) < 1/2$, para toda $x \in X$. Ahora supongamos que hemos construido funciones equivariantes $f_1, f_2, \ldots f_n$, que satisfacen las propiedades (I) y (II). Definamos una multifunción $\phi_n : X \Rightarrow L$ por

$$\phi_n(x) = \overline{\phi(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n})}.$$

La Proposición 1.6.4 y por el Corolario 1.6.3 nos garantizan que la multifunción ϕ_n es i.s.c. Además, observemos que $\phi_n(x)$ es un conjunto convexo y completo. Veamos que ϕ_n es además una función equivariante. Para ello notemos que si $y \in B(f_n(x), 2^{-n})$, entonces,

$$d(gy, f_n(gx)) = d(gy, gf_n(x)) = d(y, f_n(x)) < 2^{-n}, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Así, concluimos que $gB(f_n(x), 2^{-n}) = B(f_n(gx), 2^{-n})$. Por otro lado, como ϕ es equivariante, sabemos que $\phi(gx) = g\phi(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} g\phi_n(x) &= g(\overline{\phi(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n})}) \\ &= \overline{g(\phi(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n}))} \\ &= \overline{g\phi(x) \cap gB(f_n(x), 2^{-n})} \\ &= \overline{\phi(gx) \cap B(f_n(gx), 2^{-n})} \\ &= \phi_n(gx). \end{aligned}$$

Esto demuestra que ϕ_n es equivariante. Aplicando nuevamente el hecho de que $L \in G$-PCS(X), podemos encontrar una función $f_{n+1} : X \to L$ tal que

$$d(f_{n+1}(x), \phi_n(x)) < 2^{-n-1}, \quad \text{para toda } x \in X.$$

Como $\phi_n(x) \subset \overline{\phi(x)} = \phi(x)$, es claro que f_{n+1} satisface la propiedad (II). Veamos que también satisface la propiedad (I). Sea $x \in X$. Como $f_{n+1}(x)$ pertenece a $B(\phi_n(x), 2^{-n-1})$, podemos encontrar un punto $y \in \phi_n(x)$ tal que

$$d(f_{n+1}(x), y) < 2^{-n-1}.$$

Notemos que

$$\phi_n(x) \subset \overline{B(f_n(x), 2^{-n})} \subset \{z \in L \mid d(z, f_n(x)) \leq 2^{-n}\},$$

y por lo tanto

$$d(y, f_n(x)) \leq 2^{-n}.$$

Utilizando estas dos últimas desigualdades concluimos que

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_{n+1}(x)) &\leq d(f_n(x), y) + d(y, f_{n+1}(x)) \\ &< 2^{-n} + 2^{-n-1} \\ &< 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, f_{n+1} satisface la propiedad (I), lo cual completa la construcción por inducción.

Afirmamos que para toda $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y pertenece a $\phi(x)$. En efecto, por (II), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $a_n \in \phi(x)$, tal que $d(a_n, f_n(x)) < 2^{-n}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+1}) &\leq d(a_n, f_n(x)) + d(f_n(x), f_{n+1}(x)) + d(f_{n+1}(x), a_{n+1}) \\ &< 2^{-n} + 2^{-(n-1)} + 2^{-(n+1)} < 2^{-(n-2)}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio completo $\phi(x)$ y por lo tanto el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe y pertenece a $\phi(x)$. Pero

$$d(f_n(x), a_n) < 2^{-n},$$

por lo que las suceciones $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo punto de $\phi(x)$. Definamos $f : X \to L$, por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Demostremos que (f_n) converge uniformemente a f. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N+2} < \varepsilon$. Luego, si $n \geq m \geq N$, podemos aplicar la propiedad (I) para obtenerla siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_m(x)) &\leq \sum_{i=0}^{n-m-1} \tilde{d}(f_{m+i}(x), f_{m+i+1}(x)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-N-1} \tilde{d}(f_{N+i}(x), f_{N+i+1}(x)) \\ &< \sum_{i=0}^{n-N-1} 2^{-(N+i-1)} \\ &< 2^{-(N-2)}. \end{aligned}$$

Así,

$$d(f(x), f_m(x)) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq 2^{-(N-2)} < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Esto nos permite concluir que f es continua. Además, como cada f_n es equivariante, dado $g \in G$ y $x \in X$, se tiene que

$$f(gx) = \lim_{n\to\infty} f_n(gx) = \lim_{n\to\infty} gf_n(x) = gf(x),$$

por lo que f es equivariante. Esto demuestra que f es una selección equivariante de ϕ. □

De este último teorema se desprenden inmediatamente los siguientes corolarios.

Corolario 2.4.3. *Sea G un grupo compacto y L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Si L es un G-espacio rico entonces $L \in G$-*PS(X)*, para todo G-espacio paracompato X.*

Corolario 2.4.4. *Sea G un grupo compacto y L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Si L es un G-*ANE$(\mathcal{P})$*, entonces $L \in G$-*PS(X)*, para todo G-espacio paracompato X.*

Corolario 2.4.5. *Supongamos que G es un grupo compacto y X es un G-espacio paracompacto. Sea L un G-espacio lineal, localmente convexo y metrizable. Si $L \in G$-*ANE(X)*, entonces $L \in G$-*PS(X)*.*

Corolario 2.4.6. *Sea G un grupo compacto de Lie y L un G-espacio lineal localmente convexo. Entonces $L \in G\text{-PS}(X)$, para todo G-espacio metrizable X.*

Capítulo 3

Extensión de Funciones Equivariantes

Una condición más débil que la propiedad de casi selección equivariante es la *propiedad de casi selección equivariante de dimensión finita*. En este capítulo veremos cómo dicha propiedad es una condición suficiente para que un espacio sea un G-ANE.

3.1. G-Equiconexidad Local

Definición 3.1.1. *Sea X un G-espacio. Consideremos el producto topológico $X \times X = X^2$ con la acción*

$$G \times X^2 \to X^2$$

$$(g, x, y) \to (gx, gy).$$

*Diremos que X es **G-localmente equiconexo** si existe una vecindad invariante $V \subset X \times X$ de la diagonal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ y una función continua $\gamma : V \times [0,1] \to X$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. $\gamma(x_1, x_2, 0) = x_1$
2. $\gamma(x_1, x_2, 1) = x_2$
3. $\gamma(x, x, t) = x$
4. $\gamma(gx_1, gx_2, t) = g\gamma(x_1, x_2, t)$

para cualesquiera $x, x_1, x_2 \in X$, $t \in [0,1]$. Si $V = X \times X$, diremos que X es ***G-equiconexo****.*

Evidentemente un espacio G-equiconexo es G-localmente equiconexo.

Ejemplo 3.1.2. *Sea L un G-espacio lineal y $Y \subset L$ cualquier subconjunto convexo y G-invariante de L. Entonces Y es G-equiconexo. En efecto, la función $\gamma : Y^2 \times I \to Y$ dada por*

$$\gamma(x_1, x_2, t) = (1-t)x_1 + tx_2$$

satisface las condiciones de la Definición 3.1.1.

Sean X un espacio topológico y Y un espacio métrico. Diremos que una sucesión de funciones $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en compactos** a una función $f : X \to Y$, si para cualquier subconjunto compacto $K \subset X$, la sucesión $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f|_K$. Claramente la convergencia en compactos es una condición más débil que la convergencia uniforme.

Teorema 3.1.3. *Sean G un grupo compacto, (Z,d) y (X,ρ) G-espacios métricos (donde las métricas ρ y d son invariantes bajo la acción del grupo) y $A \subset Z$ un subconjunto invariante. Supongamos que X es G-localmente equiconexo, y que $f : A \to X$ es una función continua y equivariante. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas y equivariantes de A en X la cual converge en compactos a f. Si f_n es extendible continua y equivariantemente a una vecindad invariante de A, entonces existe una vecindad invariante de A, en la cual f se extiende continuamente a una función equivariante.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea W_n una vecindad invariante de A y $\tilde{f}_n : W_n \to X$ una extensión continua e invariante de f_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea O_n la vecindad de A dada por

$$O_n = \{x \in Z \mid d(x, A) < 1/n\}.$$

Afirmamos que O_n es un conjunto invariante. En efecto, si $x \in O_n$ y $g \in G$, entonces

$$d(gx, A) = d(x, g^{-1}A) = d(x, A) < 1/n,$$

lo cual prueba que O_n es invariante. Por otro lado, es claro que la familia $\{O_n\}$ satisface que

$$O_{n+1} \subset \overline{O}_{n+1} \subset O_n, \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = A.$$

Llamemos $O'_n = O_n \cap W_n$. Entonces O'_n también es una vecindad invariante de A en la cual está definida la función $\tilde{f}_n$. Escojamos para cada $z \in Z$ un punto $a_z \in A$ tal que

$$d(z, a_z) \leq 2d(z, A).$$

Si $z \in A$, supongamos que $a_z = z$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Como $\tilde{f}_n$ es continua en W_n, para cada $z \in W_n$ existe $\delta_z > 0$ tal que si $d(z, y) < \delta_z$, entonces $\rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(y)) < 1/2n$. Como las métricas d y ρ son invariantes y $\tilde{f}_n$ es equivariante, podemos suponer sin perder la generalidad que $\delta_{gz} = \delta_z$ para todo $g \in G$. Ahora consideremos una nueva vecindad

$$U'_n = \bigcup \{B(z, \delta_z/8) \mid z \in W_n, d(z, A) < \delta_z/4\}.$$

Claramente U'_n es una vecindad abierta de A. Además, si $y \in U'_n$ y $g \in G$, entonces existe $z \in W_n$ tal que

$$d(z, y) < \delta_z/8, \qquad \text{y} \qquad d(z, A) < \delta_z/4.$$

Como W_n es invariante, $gz \in W_n$. De la invarianza de la métrica d y por la elección de δ_z, se desprenden las siguientes desigualdades:

$$d(gz, gy) = d(z, y) < \delta_z/8 = \delta_{gz}/8$$

y

$$2d(gz, A) = 2d(z, g^{-1}A) = 2d(z, A) < \delta_z/2 = \delta_{gz}/2.$$

Esto garantiza que $gy \in B(gz, \delta_{gz}/8) \subset U'_n$ y por lo tanto U'_n es una vecindad invariante de A. Llamemos $U_n = U'_n \cap O'_n$ y hagamos esto para cada natural n. Así, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de vecindades abiertas e invariantes de A. Notemos que si $y \in U_n \subset U'_n$ existe $z \in W_n$ tal que

$$y \in B(z, \delta_z/8), \qquad \text{y} \qquad d(z, A) < \delta_z/4.$$

Consecuentemente,

$$d(y,a_y) \leq 2d(y,A) \leq 2d(y,z) + 2d(z,A) < 2\delta_z/8 + \delta_z/2 = 3\delta_z/4.$$

Luego,

$$d(z,a_y) \leq d(z,y) + d(y,a_y) < \delta_z/8 + 3\delta_z/4 < \delta_z$$

De este modo hemos demostrado que $d(z,a_y) < \delta_z$, y por lo tanto

$$\rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(a_y)) < 1/2n, \quad \text{para cualesquiera } n \in \mathbb{N}, z \in W_n.$$

Notemos también que $d(z,y) < \delta_z/8 < \delta_z$, y por lo tanto

$$\rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(y)) < 1/2n.$$

Usando estas dos últimas desigualdades podemos concluir que

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{f}_n(y), \tilde{f}_n(a_y)) &\leq \rho(\tilde{f}_n(y), \tilde{f}_n(z)) + \rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(a_y)) \\ &< 1/2n + 1/2n \\ &= 1/n. \end{aligned}$$

Recapitulemos un poco: hemos construido una familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades de A que satisface las siguientes condiciones:

1. U_n es invariante;

2. la función $f_n : A \to X$ se extiende de manera continua y equivariantemente a la función $\tilde{f}_n|_{U_n} : U_n \to X$;

3. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$;

4. $U_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n$;

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, y para todo $y \in U_n$, se cumple la siguiente desigualdad:
$$\rho(\tilde{f}_n(y), \tilde{f}_n(a_y)) < 1/n.$$

Ahora consideremos la función $\lambda : U_1 \setminus A \to (1, \infty)$ dada por

$$\lambda(x) = \frac{d(\partial U_n, x)}{d(\partial U_n, x) + d(\partial U_{n+1}, x)} + n, \qquad \text{si } x \in U_n \setminus U_{n+1},$$

donde ∂ denota la frontera de un conjunto. Claramente λ es una función invariante (por la invarianza de la métrica d y por que los conjuntos ∂U_n son invariantes). Además, se observa inmediatamente que λ satisface las siguientes condiciones:

(I) $\lambda(U_n \setminus \overline{U}_{n+1}) \subset (n, n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(II) $\lambda(\partial U_{n+1}) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(III) λ es continua.

Como X es G-localmente equiconexo, podemos encontrar una vecindad invariante, V, de la diagonal en $X \times X$ y una función $\gamma : X^2 \times [0, 1]$ como en la Definición 3.1.1. Para cada $n \geq 2$ sea

$$V_n = \{z \in U_n \mid (\tilde{f}_{n-1}(z), \tilde{f}_n(z)) \in V\}.$$

Llamemos W al conjunto definido por

$$W = A \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (V_n \setminus U_{n+1}) \right).$$

Demostraremos que W es una vecindad invariante de A. Para ello es suficiente demostrar que todos los puntos de A son puntos interiores de W. Lo haremos a través de una serie de afirmaciones.

<u>Afirmación 1</u>. Para todo punto $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $M \in \mathbb{N}$ y una vecindad de a abierta en A, $N(a)$, tal que

$$\rho(f_n(a'), f_n(a)) < \varepsilon, \quad \text{para cualesquiera } a' \in N(a), \ \text{ y } \ n \geq M.$$

Supongamos que no es así. Entonces podemos encontrar un punto $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $M \in \mathbb{N}$, y para toda vecindad $N(a) \subset A$ de a existe $k \geq M$, y $a' \in N(a)$ tal que

$$\rho(f_k(a'), f_k(a)) \geq \varepsilon.$$

Luego, si $M = 1$, existe $a_1 \in A$ y $n_1 \geq 1$ tal que

$$\varepsilon \leq \rho(f_{n_1}(a_1), f_{n_1}(a)), \qquad \text{y} \qquad d(a_1, a) < 1.$$

Continuando recursivamente, podemos encontrar $n_k > n_{k-1}$ y $a_k \in A$, los cuales satisfacen las siguientes desigualdades

$$\varepsilon \leq \rho(f_{n_k}(a_k), f_{n_k}(a)), \qquad \text{y} \qquad d(a_k, a) < 1/k.$$

Claramente la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto a, por lo que el conjunto $B = \{a\} \cup \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ es un conjunto compacto. Como la sucesión (f_n) converge en compactos a f, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_n(B) \subset B(f(a), \varepsilon/2), \quad \text{para todo } n \geq N_0.$$

En particular, para toda $n_k \geq N_0$, se cumplirá que $f_{n_k}(a_k) \in B(f(a), \varepsilon/2)$ y $f_{n_k}(a) \in B(f(a), \varepsilon/2)$. Esto nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
\rho(f_{n_k}(a_{n_k}), f_{n_k}(a)) &\leq \rho(f_{n_k}(a_{n_k}), f(a)) + \rho(f(a), f_{n_k}(a)) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual contradice nuestra elección de n_k y a_k. Por lo tanto la afirmación 1 es cierta.

Afirmación 2. Para todo $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ y una vecindad de a abierta en Z, $U(a)$, tal que

$$\rho(\tilde{f}_n(z), f(a)) < \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in U(a) \cap U_n, \ \ n \geq N.$$

En efecto, sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Por la afirmación 1, existe $\delta > 0$ y $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para tod $a' \in N(a) = B(a, \delta) \cap A$, y para todo $n \geq M_1$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\rho(f_n(a), f_n(a')) < \varepsilon/4.$$

Como la sucesión $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M_2$, se cumple que

$$\rho(f_n(a), f(a)) < \varepsilon/4.$$

Esto nos permite concluir que para cualquier punto $a' \in N(a)$, y para todo $n \geq \text{máx}\{M_1, M_2\}$,

$$\rho(f_n(a'), f(a)) \leq \rho(f_n(a'), f_n(a)) + \rho(f_n(a), f(a)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2. \tag{3.1}$$

Sea $M_3 \in \mathbb{N}$ tal que $1/M_3 < \varepsilon/2$. Llamemos $K = \text{máx}\{M_1, M_2, M_3\}$ y definamos $U(a) = B(a, \delta/4)$. Veamos que esta es la vecindad que estamos buscando. Si $z \in U(a) \cap U_n$ y $n \geq K$, entonces $d(z, a) < \delta/4$. Esto nos permite estimar la distancia entre z y a_z de la siguiente manera:

$$d(z, a_z) \leq 2d(z, A) \leq 2d(z, a) < \delta/2.$$

Luego,

$$d(a, a_z) \leq d(a, z) + d(z, a_z) < \delta/4 + \delta/2 < \delta,$$

por lo que $a_z \in N(a)$. Así, en virtud de la desigualdad (3.1), se tiene que

$$\rho(f_n(a_z), f(a)) < \varepsilon/2. \tag{3.2}$$

Por otro lado, como $z \in U_n$ sabemos que la siguiente desigualdad se cumple

$$\rho(\tilde{f}_n(a_z), \tilde{f}_n(z)) < 1/n \leq 1/K \leq \varepsilon/2.$$

Utilizando esta última desigualdad así cimi la desigualdad (3.2), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\rho(\tilde{f}_n(z), f(a)) &\leq \rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(a_z)) + \rho(\tilde{f}_n(a_z), f(a)) \\
&= \rho(\tilde{f}_n(z), \tilde{f}_n(a_z)) + \rho(f_n(a_z), f(a)) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra la afirmación 2.

Afirmación 3. Para cada $a \in A$ existe una vecindad de a abierta en Z, $O(a)$, y un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in O(a) \cap U(n)$ y para todo $n > N$, se cumple que

$$(\tilde{f}_{n-1}(z), \tilde{f}_n(z)) \in V_n.$$

En efecto, como $(f(a), f(a)) \in V$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(f(a), \varepsilon) \times B(f(a), \varepsilon) \subset V.$$

Por la afirmación 2, existe una vecindad $U(a)$ de a y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, y para todo $z \in U(a) \cap U_n$, se cumple que

$$\rho(\tilde{f}_n(z), f(a)) < \varepsilon.$$

Consecuentemente, si tomamos $O(a) = U(a) \cap U_{N+1}$, podemos garantizar que para todo $z \in O(a)$, existe $n \geq N$ tal que $z \in U_n$. En estas condiciones se tienen las siguientes desigualdades:

$$\rho(\tilde{f}_{n-1}(z), f(a)) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \rho(\tilde{f}_n(z), f(a)) < \varepsilon.$$

Así, concluimos que

$$(\tilde{f}_{n-1}(z), \tilde{f}_n(z)) \in B(f(a), \varepsilon) \times B(f(a), \varepsilon) \subset V,$$

y por lo tanto $z \in V_n$ para todo $z \in O(a) \cap U_n$.

Afirmación 4. W es una vecindad invariante de A.

En efecto, W es una vecindad invariante de A puesto que A es invariante y cada uno de los conjuntos $V_n \setminus U_{n+1}$ es invariante. Demostremos que A está en el interior de W. Sea $a \in A$, y escojamos $O(a)$ y $N \in \mathbb{N}$ como en la afirmación 3. Luego, $O(a) \subset U_{N+1}$. Si $x \in O(a) \cap A$, entonces $x \in W$. Por otro lado, si $x \in O(a) \setminus A$, entonces existe $k > N$ tal que $x \in U_k$ pero $x \notin U_{k+1}$. En particular $x \in O(a) \cap U_k$. Esto garantiza que $x \in V_k$ y $x \notin U_{k+1}$. Por tanto $x \in V_k \setminus U_{k+1} \subset W$. Luego

$$a \in O(a) \subset W,$$

Lo cual demuestra que W es una vecindad de A.

Ahora sólo nos queda extender la función f a una función continua y equivariante. Sea $F : W \to X$ definida en cada $z \in W$ por

$$F(z) = \begin{cases} \gamma(\tilde{f}_{n-1}(z), \tilde{f}_n(z), \lambda(z) - n), & \text{si } z \in V_n \setminus U_{n+1}, \\ f(z), & \text{si } z \in A. \end{cases}$$

Claramente F es una extensión de f. Para ver que es equivariante, consideremos $z \in W$ y $g \in G$. Si $z \in A$, entonces $gz \in A$ por lo que

$$F(gz) = f(gz) = gf(z) = gF(z).$$

Por otro lado, si $z \in V_n \setminus U_{n+1}$, entonces $gz \in V_n \setminus U_{n+1}$. Así,

$$\begin{aligned} F(gz) &= \gamma(f_{n-1}(gz), f_n(gz), \lambda(gz) - n) \\ &= \gamma(gf_{n-1}(z), gf_n(z), \lambda(z) - n) \\ &= g\gamma(f_{n-1}(z), f_n(z), \lambda(z) - n) \\ &= gF(z). \end{aligned}$$

Esto prueba que F es equivariante. Para terminar la demostración falta demostrar la continuidad de F. Para ello es suficiente demostrar que F es continua en A así como en ∂U_{n+1}, para cada $n \geq 2$.

Primero consideremos $a \in A$ y $M \subset X$ una vecindad de $f(a)$, Como γ es continua, y $[0,1]$ es compacto, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(a) \in \gamma(B(f(a), \varepsilon), B(f(a), \varepsilon), [0,1]) \subset M.$$

Por la afirmación 3, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ y $O(a) \subset U_{N+1}$ una vecindad abierta de a, tal que para todo $n \geq N$,

$$O(a) \cap U_n \subset V_n \quad \text{ y } \quad \rho(f_n(z), f(a)) < \varepsilon, \text{ para cada } z \in U_n.$$

Consecuentemente, si $z \in O(a) \setminus A$ existe $k > N$ tal que $z \in V_k \setminus U_{k+1}$. Luego $f_{k-1}(z)$ y $f_k(z)$ pertenecen a $B(f(a), \varepsilon)$ y de esta manera,

$$F(z) = \gamma(f_{n-1}(z), f_n(z), \lambda(z) - n) \in M.$$

Por otro lado, como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que $f(A \cap B(a, \delta)) \subset M$. Sea $Q = O(a) \cap B(a, \delta)$. Entonces Q es una vecindad de a tal que $F(Q) \subset M$, lo cual demuestra que F es continua en A.

Para demostrar la continuidad en ∂U_{n+1} consideremos un punto $x \in \partial U_{n+1}$. Supongamos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en W que converge a x. Podemos suponer sin perder la generalidad que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset V_{n+1} \setminus U_{n+2}$. Entonces

$$\lim_{k \to \infty} \lambda(x_k) = \lambda(x) = n + 1,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} F(x_k) &= \lim_{k \to \infty} \gamma(f_n(x_k), f_{n+1}(x_k), \lambda(x_k) - n + 1) \\ &= \gamma(f_n(x), f_{n+1}(x), 0) \\ &= f_n(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$F(x) = \gamma(f_{n-1}(x), f_n(x), \lambda(x) - n) = \gamma(f_{n-1}(x), f_n(x), n + 1 - n) = f_n(x).$$

De esta manera podemos concluir que $\lim\limits_{k \to \infty} F(x_k) = F(x)$, Esto nos dice que F es continua en ∂U_{n+1} y por lo tanto es continua en todo W, como se quería probar. $\square$

Como una aplicación de este teorema, tenemos el siguiente resultado sobre extensión de funciones.

Corolario 3.1.4. *Sea G un grupo compacto que actúa linealmente en un espacio lineal localmente convexo y metrizable, L. Consideremos un subconjunto convexo e invariante $Y \subset L$. Si Y es un G-espacio rico, entonces $Y \in G$-ANE$(\mathcal{M})$, donde $\mathcal{M}$ denota la clase de todos los G-espacios metrizables.*

Demostración. Sea d una métrica en L. Podemos suponer, sin perder la generalidad, que d es invariante bajo traslaciones y bajo la acción del grupo, y que además las bolas determinas por d son conjuntos convexos.

Consideremos un G-espacio metrizable X y $f : A \to Y$ una función equivariante y continua definida en un subconjunto cerrado e invariante de X. Necesitamos encontrar una vecindad invariante W de A, y una función continua y equivariante $F : W \to Y$ que extienda a f. Para ello, en virtud del Teorema 3.1.3, es suficiente encontrar una sucesión de funciones continuas y equivariantes $(f_n : A \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada una de las funciones f_n se extienda continua y equivariantemente a una vecindad invariante de A, y de manera que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja en compactos a f.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como Y es un G-espacio rico, para cada $a \in A$, existe un punto $x_a \in Y$ y una G_{x_a}-rebanada por x_a, S_a, tal que $f(a) \in S_a$, G_{x_a} es un subgrupo grande, y

$$S_a \subset B(f(a), 1/3n).$$

Luego, por el Teorema 1.3.3, podemos encontrar una retracción equivariante $r_a : G(S_a) \to G(x_a)$, tal que $r_a(f(a)) = x_a$. Por esta razón, para todo punto $ga \in G(a)$, se cumple que

$$d(f(ga), r_a(f(ga))) = d(gf(a), gr_a(f(a)) = d(f(a), x_a) < 1/3n.$$

Definamos $f_a : G(a) \to G(x_a)$ por $f_a = r_a \circ f$. Entonces f_a es una función continua y equivariante, tal que para tod $ga \in G(a)$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$d(f_a(ga), f(ga)) < 1/3n.$$

Como la órbita $G(a)$ es un subconjunto cerrado e invariante de X y como $G(x_a) \in G$-ANE$(\mathcal{M})$, podemos encontrar una vecindad invariante de $G(a)$, W_a, y una función continua y equivariante $F_a : W_a \to G(x_a)$ que extienda a f_a. Por la continuidad f, existe una vecindad $O_a \subset X$ de a, tal que

$$f(A \cap O_a) \subset B(f(a), 1/3n).$$

De igual manera, como F_a es continua, existe una vecindad de a, V_a, tal que

$$F_a(V_a) \subset B(F_a(a), 1/3n) = B(x_a, 1/3n).$$

Entonces, $M_a = G(O_a \cap V_a) \cap W_a$ es una vecindad invariante de la órbita $G(a)$ en la cual está definida la función F_a. Notemos que si $y \in A \cap M_a$, entonces $y = gz$ para algún $z \in O_a \cap V_a$, y para algún $g \in G$. Como $y \in A$ y A es un conjunto invariante, se tiene que $z = gy \in A \cap O_a$. Luego,

$$d(f(y), f(ga)) = d(f(gz), f(ga)) = d(gf(z), gf(a)) = d(f(z), f(a)) < 1/3n,$$

por lo que $d(f(y), f(ga)) < 1/3n$. Por otro lado, como $z \in V_a$, se tiene que $d(F_a(z), F_a(a)) < 1/3_n$. Entonces

$$d(F_a(gz), F_a(ga)) = d(gF_a(z), gF_a(a)) = d(F_a(z), F_a(a)) < 1/3_n,$$

y por lo tanto $d(F_a(y), F_a(ga)) < 1/3n$. Además recordemos que

$$d(F_a(ga), f(ga)) < 1/3n.$$

Si usamos estas últimas desigualdades, podemos concluir que

$$\begin{aligned} d(F_a(y), f(y)) &\leq d(F_a(y), F_a(ga)) + d(F_a(ga), f(ga)) + d(f(ga), f(y)) \\ &< 1/3n + 1/3n + 1/3n \\ &= 1/n. \end{aligned}$$

Entonces la función F_a satisface

$$d(F_a(y), f(y)) < 1/n, \quad \text{para todo } y \in M_a \cap A.$$

Sea $W_n = \bigcup_{a \in A} M_a$. Entonces W_n es una vecindad invariante de A. Además, la familia $\{M_a\}_{a \in A}$ es una cubierta invariante de W_n, el cual es un espacio paracompacto. Como lo hemos hecho anteriormente, podemos encontrar un refinamiento abierto, invariante y localmente finito, $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, de $\{M_a\}_{a \in A}$ Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $a_\lambda \in A$, talque $Q_\lambda \subset M_{a_\lambda}$. Luego, consideremos las funciones $\tilde{F}_\lambda : W_n \to Y$, $\lambda \in \Lambda$, definidas por

$$\tilde{F}_\lambda(z) = \begin{cases} F_{a\lambda}(z), & \text{si } z \in Q_\lambda, \\ b, & \text{si } z \notin Q_\lambda, \end{cases}$$

donde $b \in Y$ es un punto arbitrario. Consideremos $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de unidad invariante subordinada a la cubierta $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Ahora construyamos una nueva función, $F_n : W_n \to Y$, definida en cada punto $z \in W$, por

$$F_n(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda(z) F_\lambda(z).$$

Notemos que la función F_n es continua y equivariante. Además, para cada punto $a \in A$, el valor $F_n(a)$ es una suma convexa de elementos de $B(f(a), 1/n)$, el cual es un conjunto convexo. Así, para todo $a \in A$,

$$F_n(a) \in B(f(a), 1/n).$$

Esto garantiza que $d(F_n(a), f(a)) < 1/n$. Llamemos $f_n = F_n|_A$. Entonces f_n es una función continua y equivariante la cual se extiende continua y equivariantemente a la función F_n definida en la vecindad invariante de A, W_n. Además, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f (y por lo tanto converge en compactos). Luego, por el Teorema 3.1.3, podemos concluir que f se extiende continua y equivariantemente a una vecindad W de A, probando así que $Y \in G$-ANE$(\mathcal{M})$. □

En este teorema de extensión de funciones equivariantes, al igual que en el teorema de Dugundji (1.5.1), es necesaria la convexidad local del contradominio para garantizar la existencia de la extensión. Al final de este capítulo, presentaremos un teorema de extensión equivariante, en el cual la condición de convexidad local será sustituida por cierta condición de casi selección.

3.2. Cubiertas G-Canónicas

Definición 3.2.1. *([2]). Sea U un subconjunto abierto e invariante de un G-espacio X. Consideremos una familia $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de conjuntos tubulares que cubran a U, donde cada S_α es una H_α-rebanada ($H_\alpha \subset G$ es un subgrupo cerrado). Diremos que la cubierta $\{G(S_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es* G***-canónica*** *respecto a X si se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *$\{G(S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita.*

2. *Para cada índice $\lambda \in \Lambda$, existe un punto $x \in U$ tal que $H_\lambda = G_x$.*

3. *Para cada punto $a \in X \setminus U$ y para cada vecindad V_a de a, existe otra vecindad del punto a, $U_a \subset V_a$, de modo que para cada elemento $g \in G$, si $gS_\lambda \cap U_a \neq \emptyset$, entonces:*

   a) *$gS_\lambda \subset V_a$*

   b) *Existe un elemento $h \in G$ tal que $ha \in V_a$ y $H_\alpha \subset g^{-1}G_{ha}g$.*

En esta sección demostraremos que cualquier subconjunto abierto e invariante de un G-espacio metrizable (G un grupo compacto de Lie), admite una cubierta G-canónica. Para ello será necesario probar los siguientes lemas.

Lema 3.2.2. *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio completamente regular. Entonces para cada órbita $G(x) \subset X$, existe una vecindad invariante N de $G(x)$ tal que para todo $y \in N$,*

$$G_y \subset gG_xg^{-1}, \quad \text{para algún } g \in G.$$

Demostración. Sea $x \in X$ y S_x una G_x-rebanada por x (la cual existe por 1.3.2). Llamemos $N = G(S_x)$ y veamos que es la vecindad buscada. Primero notemos que si $s \in S_x$ entonces para todo $g \in G_s$ se cumple que $gS_x \cap S_x \neq \emptyset$ y por tanto $g \in G_x$. Esto prueba que

$$G_s \subset G_x \text{ para todo } s \in S_x.$$

Ahora tomemos $y \in N$. Entonces existe $s \in S_x$ y $g \in G$ tal que $y = gs$. Así,

$$G_y = G_{gs} = gG_sg^{-1} \subset gG_xg^{-1},$$

como se quería probar. □

Lema 3.2.3. *Sea X un G-espacio completamente regular, donde G es un grupo compacto de Lie. Entonces, para cada punto $x \in X$ y para cada vecindad O de e en G, existe una vecindad U de x, tal que para cualquier punto $y \in U$,*

$$G_y \subset gG_xg^{-1} \text{ para algún } g \in O.$$

Demostración. Consideremos una G_x-rebanada por x, S_x, (1.3.2). Llamemos $U = OS_x$. Por el Teorema 1.3.4, U es abierto en X. Además, si $y \in U$, existe $g \in O$ y $s \in S_x$ tal que $y = gs$. Por la demostración del lema anterior podemos concluir que $G_y \subset gG_xg^{-1}$, lo cual demuestra que U es la vecindad buscada. □

Teorema 3.2.4 ([2]). *Sea G un grupo compacto de Lie. Para cada subconjunto invariante U de un G-espacio X, existe una cubierta G-canónica de U respecto a X.*

Demostración. Si $U = X$, entonces cualquier cubierta tubular localmente finita es una cubierta G-canónica. Supongamos entonces que $X \setminus U \neq \emptyset$. Sea d una métrica invariante en X. Para cada $x \in U$ consideremos

$$r_x = 1/4d(x, X \setminus U) > 0.$$

En cada órbita $G(x)$, $x \in U$, fijemos una G_x-rebanada por x, digamos Q_x. Para cada una de estas rebanadas, consideremos

$$R_x = Q_x \cap B(x, r_x).$$

Claramente R_x también es una G_x-rebanada cuyo diámetro es menor igual que $2r_x$. La familia $\{G(R_x)\}$ es una cubierta tubular de U y por la Proposición 1.3.6 existe un refinamiento tubular localmente finito, digamos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Entonces cada U_λ es de la forma $U_\lambda = G(S_\lambda)$, donde $S_\lambda = U_\lambda \cap R_x$, para algún $x \in U$. De este modo S_λ es una H_λ-rebanada, donde $H_\lambda = G_x$, por lo que la cubierta $\{G(S_\lambda)\}$ satisface las condiciones 1 y 2 de la Definición 3.2.1. Veamos que también satisface la tercera condición.

Sea $a \in X \setminus U$ y V_a cualquier vecindad de a. Por la continuidad de la acción, existe una vecindad O del neutro $e \in G$ tal que para todo $g \in O$, $ga \in V_a$. Por el Lema 3.2.3 existe una vecindad U_a de a tal que para todo $y \in U_a$, existe un elemento $h \in O$ tal que $G_y \subset hG_ah^{-1}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a, \varepsilon) \subset V_a \cap U_a.$$

Consideremos $W_a = B(a, \varepsilon/4)$ y veamos que W_a es la vecindad buscada. Supongamos que $gS_\lambda \cap W_a \neq \emptyset$. Sea $y \in gS_\lambda \cap W_a$. Como $S_\lambda = U_\lambda \cap R_x$, para algún $x \in U$, tenemos que $y \in gR_x \cap W_a$ por lo que

$$d(a, y) < \varepsilon/4, \qquad \text{y} \qquad d(y, gx) \leq \text{diam } gR_x.$$

Pero la métrica d es invariante bajo la acción del grupo, de manera que

$$\text{diam } gR_x = \text{diam } Rx \leq 2r_x.$$

Así,

$$d(y, gx) \leq 2r_x = 1/2d(x, X \setminus U) = 1/2d(gx, X \setminus U).$$

Luego, podemos obeservar que

$$d(a,gx) \leq d(a,y) + d(y,gx) < \varepsilon/4 + 1/2d(gx, X \setminus U) \leq \varepsilon/4 + 1/2d(gx,a)$$

ya que $a \in X \setminus U$. Despejando $d(a,gx)$ de la última desigualdad obtenemos que $d(a,gx) < \varepsilon/2$. Pero

$$\mathrm{diam} gR_x \leq 1/2d(gx, X \setminus U) \leq 1/2d(gx,a) < \varepsilon/4.$$

Entonces, si $z \in gR_X$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(a,z) &\leq d(a,y) + d(y,z) \\ &< \varepsilon/4 + \mathrm{diam}\ gR_x \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \\ &= \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Esto nos garantiza las siguientes contenciones

$$gS_\lambda \subset gR_x \subset B(a,\varepsilon) \subset V_a \cap U_a.$$

Por otro lado, como $gx \in gR_x \subset U_a$, podemos encontrar un elemento $h \in O$ tal que $ha \in V_a$ (por la elección de O) y tal que

$$gG_xg^{-1} = G_{gx} \subset hG_ah^{-1} = G_{ha}.$$

Pero $G_x = H_\lambda$, por lo que

$$H_\lambda \subset g^{-1}G_{ha}g.$$

Así queda demostrado que la cubierta $\{G(S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es G-canónica. □

3.3. Un Teorema de Extensión Equivariante

Lema 3.3.1. *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de un grupo compacto G. Supongamos que X es un G-espacio y $S \subset X$ es una H-rebanada. Entonces existe una única función equivariante $\tilde{g} : G(S) \to G/H$ con la propiedad de que $g \in \tilde{g}(x)$, para todo $g \in G$ tal que $x \in gS$ (la acción de G en G/H es por traslación izquierda, es decir: $g(g'H) = gg'H$).*

Demostración. Para cada $x \in G(S)$ existe un elemento $g_x \in G$ tal que $x \in g_x S$. Definamos $\tilde{g}$ de la única manera posible:

$$\tilde{g}(x) = g_x H$$

Para ver que $\tilde{g}$ está bien definida, notemos que si $x \in g_x S \cap h_x S$, entonces $h_x^{-1} g_x \in H$, por lo que

$$g_x H = h_x H.$$

Esto demuestra que $\tilde{g}$ está bien definida. Para ver que $\tilde{g}$ es equivariante, simplemente observemos que si $x \in g_x S$ y $h \in G$, entonces $hx \in hg_x S$. De este modo

$$\tilde{g}(hx) = hg_x H = h(g_x H) = h\tilde{g}(x),$$

por lo que $\tilde{g}$ es equivariante. Para completar la prueba demostremos que $\tilde{g}$ es continua. Sea $x_0 \in G(S)$ y U una vecindad arbitraria de $\tilde{g}(x_0)$. Sea $q : G \to G/H$ la proyección cociente. Entonces $M = q^{-1}(U)$ es abierto en G. Por el Corolario 1.3.4, el conjunto MS es abierto en X y por lo tanto es abierto en $G(S)$. Claramente $x_0 \in MS$, veamos que $\tilde{g}(MS) \subset U$. Para ello tomemos un punto $x \in MS$ arbitrario. Entonces $x = gy$ para algún $g \in M$ y para algún $y \in S$. Esto nos garantiza que $x \in gS$ y por lo tanto

$$\tilde{g}(x) = gH \in U,$$

ya que $gH \in q(M) = U$. De esta manera, $\tilde{g}(MS) \subset U$, lo cual demuestra que $\tilde{g}$ es continua. $\square$

Lema 3.3.2. *Sea G un grupo compacto y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Sea $q : G \to G/H$ la proyección cociente. Supongamos que X es un G-espacio y denotemos por $X[H]$ al conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo H; es decir*

$$X[H] = \{x \in X \mid H \subset G_x\}.$$

Definamos una función $\Theta : G/H \times X[H] \to X$ dada por

$$\Theta(gH, x) = gx.$$

Entonces Θ es una función continua.

Demostración. Primero veamos que Θ está bien definida. En efecto, si $g_1H = g_2H$, entonces $g_1 = g_2h$ para algún elemento $h \in H$. Consecuentemente

$$\Theta(g_1H, x) = g_1x = g_2hx = g_2x = \Theta(g_2H, x),$$

por lo que Θ está bien definida. Para demostrar la continuidad de Θ observemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G/H \times X[H] \arrow[r, "\Theta"] & X \\ G \times X[H] \arrow[u, "q\times Id_{X[H]}"] \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

donde ω es la restricción de la acción a $G\times X[H]$ y $Id_{X[H]}$ denota la identidad en $X[H]$. Como ω es continua y $q \times Id_{X[H]}$ es abierta, podemos concluir que Θ es una función continua. $\square$

Consideremos la función Θ del lema anterior Observemos que si $g \in G$ es un elemento arbitrario de G, entonces para cualquier par $(g'H, x) \in G/H \times X[H]$ se cumple que

$$\Theta(g(g'H), x) = gg'x = g\Theta(g'H, x) \tag{3.3}$$

Definición 3.3.3. *Sea L un G-espacio lineal y $Y \subset L$ un subconjunto invariante y metrizable. Diremos Y tiene la* ***G-propiedad de casi selección de dimensión finita****, si para todo G-espacio metrizable X, para todo $\varepsilon > 0$ y para toda multifunción equivariante i.s.c., $\phi : X \Rightarrow Y$, tal que $\phi(x)$ sea un conjunto compacto convexo y de dimensión finita, existe $f : X \to Y$ una ε-selección equivariante de ϕ.*

Observemos que esta propiedad es una condición más débil que la propiedad de casi selección equivariante respecto a espacios metrizables.

Teorema 3.3.4. *Sea G un grupo compacto de Lie, y $Y \subset L$ un subconjunto convexo, invariante y metrizable de un G-espacio lineal L. Si Y tiene la G-propiedad de casi selección de dimensión finita, entonces $Y \in G$-*ANE$(\mathcal{M})$.

Demostración. Sea (X, d) un G-espacio métrico y $A \subset X$ un subespacio cerrado e invariante. Supongamos que $f : A \to L$ es una función continua y equivariante. Por el Lema 3.2.2, para cada punto $a \in A$ existe una vecindad invariante $N_a \subset X$ con la propiedad de que para cada punto $x \in N_a$ existe un elemento $g \in G$ tal que

$$G_x \subset gG_ag^{-1}.$$

Llamemos $W = \bigcup_{a\in A} N_a$. Entonces W es una vecindad invariante de A. Sea $\{G(S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una G-cubierta canónica de $W \setminus A$ con respecto a W. Para cada índice $\lambda \in \Lambda$ sea $H_\lambda \subset G$ el sugbrugo rebanador de S_λ. Definamos A_λ como sigue:

$$A_\lambda = \{a \in A \mid H_\lambda \subset G_a\}.$$

Por la Proposición 1.2.3, A_λ es un subconjunto cerrado de X. Demostraremos que para cada $\lambda \in \Lambda$, A_λ es no vacío. Para ello notemos que dado $\lambda \in \Lambda$, existe $x_\lambda \in W$ tal que

$$H_\lambda = G_{x_\lambda}.$$

Pero $x_\lambda \in N_{a_\lambda}$ para algún $a_\lambda \in A$, por lo que

$$G_{x_\lambda} \subset gG_{a_\lambda}g^{-1} = G_{ga_\lambda}.$$

Como A es invariante, $ga_\lambda \in A$ y por lo tanto $ga_\lambda \in A_\lambda$. Esto prueba que el conjunto A_λ es no vacío. Escojamos, para cada $\lambda \in \Lambda$, un punto $x_\lambda \in S_\lambda$ y otro punto $a_\lambda \in A_\lambda$ tal que

$$d(x_\lambda, a_\lambda) \leq 2d(x_\lambda, A_\lambda).$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sean $\tilde{g}_\lambda : G(S_\lambda) \to G/H_\lambda$ como en el Lema 3.3.1. y $\Theta_\lambda : G/H_\lambda \times X[H_\lambda] \to X$ como en el Lema 3.3.2. Observemos que $A_\lambda \subset X[H_\lambda]$. Así podemos definir, para cada $\lambda \in \Lambda$ una función $p_\lambda : G(S_\lambda) \to A$, a través de la siguiente fórmula:

$$p_\lambda(x) = \Theta_\lambda(\tilde{g}_\lambda(x), a_\lambda).$$

Por ser p_λ composición de funciones continuas, podemos asegurar que p_λ es una función continua. Más aún, si $g \in G$ y $x \in G(S)$, la ecuación (3.3) nos garantiza que

$$p_\lambda(gx) = \Theta_\lambda(\tilde{g}_\lambda(gx), a_\lambda) = \Theta_\lambda(g\tilde{g}_\lambda(x), a_\lambda) = g\Theta_\lambda(\tilde{g}_\lambda(x), a_\lambda) = gp_\lambda(gx)$$

lo cual demuestra que p_λ es una función G-equivariante. Para cada $x \in W \setminus A$, sea $E(x) = \{\lambda \in \Lambda \mid x \in G(S_\lambda)\}$. Como la cubierta $\{G(S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita, $E(x)$ es un conjunto finito. Ahora definamos $\phi : W \to Y$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \mathrm{Conv}\{f(p_\lambda(x)) \mid \lambda \in E(x)\}, & \text{si } x \in W \setminus A. \end{cases}$$

Claramente los conjuntos $\phi(x)$ son compactos, convexos y de dimensión finita. Veamos que la función ϕ es inferiormente semicontinua. Sean $U \subset Y$ un conjunto abierto y $x \in \phi^{\Leftarrow}(U)$.

<u>Caso 1</u>. Si $x \in W \setminus A$ entonces el conjunto $O = \bigcap\limits_{\lambda \in E(x)} G(S_\lambda)$ es una vecindad invariante de x. Como $x \in \phi^{\Leftarrow}(U)$, existen números $t_\lambda \in [0,1]$ $(\lambda \in E(x))$ tales que

$$\sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(p_\lambda(x)) \in \phi(x) \cap U.$$

Como $E(x) \subset E(y)$ para todo $y \in O$, podemos definir una nueva función $\mu : O \to Y$ por

$$\mu(y) = \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(p_\lambda(y)),$$

la cual es una función continua por ser suma de funciones continuas. Notemos que $\mu(y) \in \phi(y)$ por ser una suma convexa de elementos de la forma $f(p_\lambda(y))$, $\lambda \in E(x) \subset E(y)$. Además, como μ es continua, existe una vecindad O' de x tal que $\mu(O') \subset U$. Entonces, para todo $y \in O'$, se cumplirá que

$$\mu(y) \in U \cap \phi(y).$$

Así, $O' \subset \phi^{\Leftarrow}(U)$, y por lo tanto x es punto interior de $\phi^{\Leftarrow}(U)$.

<u>Caso 2</u>. Si $x \in A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(B(x,\varepsilon) \cap A) \subset U$. Sea $V_x = B(x, \varepsilon/6)$. Por la definición de cubierta canónica, existe una vecindad de x, $W_x \subset V_x$, que satisface las condiciones de la Definición 3.2.1. Demostraremos que $W_x \subset \phi^{\Leftarrow}(U)$. Como $W_x \cap A \subset V_x \cap A \subset B(x, \varepsilon \cap A)$ se tiene que

$$f(W_x \cap A) \subset U.$$

De esta manera, para todo $y \in W_x \cap A$, $\phi(y) = \{f(y)\} \in U$, por lo que

$$W_x \cap A \subset \phi^{\Leftarrow}(U).$$

Demostremos que también $W_x \setminus A \subset \phi^{\Leftarrow}(U)$. Supongamos que $y \in W_x \setminus A$. Entonces existe $\lambda \in \Lambda$ y $g_\lambda \in G$ tal que

$$y \in g_\lambda S_\lambda.$$

Consecuentemente $g_\lambda S_\lambda \cap W_x \neq \emptyset$, por lo que $g_\lambda S_\lambda \subset V_x$. En particular $g_\lambda x_\lambda$ pertenece a V_x. Luego,

$$d(g_\lambda x_\lambda, x) < \varepsilon/6. \tag{3.4}$$

Además, por la Definición 3.2.1, existe $h \in H$ tal que $hx \in V_x$ y

$$H_\lambda \subset g_\lambda^{-1} G_{hx} g_\lambda = G_{g_\lambda^{-1}hx}.$$

Por esta razón, el punto $g_\lambda^{-1}hx \in A_\lambda$. Ahora notemos que

$$d(x_\lambda, a_\lambda) \leq 2d(x_\lambda A_\lambda) \leq 2d(x_\lambda, g_\lambda^{-1}hx) = 2d(g_\lambda x_\lambda, hx)$$

Pero $g_\lambda x_\lambda$ y hx se encuentran en $V_x = B(x, \varepsilon/6)$. Esto nos permite concluir que

$$d(g_\lambda x_\lambda, hx) \leq d(g_\lambda x_\lambda, x) + d(x, hx) < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3.$$

Usando esta última desigualdad y nuestros cálculos previos, podemos estimar la distancia entre x_λ y a_λ:

$$d(x_\lambda, a_\lambda) \leq 2d(g_\lambda x_\lambda, hx) < 2\varepsilon/3.$$

Por último, usemos la desigualdad anterior así como la desigualdad (3.4) para estimar la distancia entre x y $g_\lambda a_\lambda$:

$$\begin{aligned} d(x, g_\lambda a_\lambda) &\leq d(x, g_\lambda x_\lambda) + d(g_\lambda x_\lambda, g_\lambda a_\lambda) \\ &= d(x, g_\lambda x_\lambda) + d(x_\lambda, a_\lambda) \\ &< \varepsilon/6 + 2\varepsilon/3 = 5\varepsilon/6 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g_\lambda a_\lambda \in B(x, \varepsilon) \cap A$, lo cual nos garantiza que

$$f(g_\lambda a_\lambda) \in U.$$

Pero $g_\lambda a_\lambda = p_\lambda(y)$ ya que $y \in g_\lambda S_\lambda$. Por lo tanto $f(g_\lambda a_\lambda) = f(p_\lambda(y)) \in \phi(x)$. Esto garantiza que

$$\phi(y) \cap U \neq \emptyset$$

y por tanto $y \in \phi^{\Leftarrow}(U)$. De esta manera $W_x \subset \phi^{\Leftarrow}(U)$, lo cual demuestra que x es punto interior de $\phi^{\Leftarrow}(U)$. Consecuentemente ϕ es una multifunción inferiormente semicontinua con valores compactos, convexos y de dimensión finita. Demostremos que ϕ es G-equivariante. En efecto, si $g \in G$, y $x \in A$, entonces

$$\phi(gx) = \{f(gx)\} = \{gf(x)\} = g\{f(x)\} = g\phi(x),$$

ya que la función f es equivariante. Por otro lado, si $g \in G$ y $x \in W \setminus A$, entonces $E(gx) = E(x)$ ya que $x \in G(S_\lambda)$ si y sólo si $gx \in G(S_\lambda)$. De este modo:

$$\begin{aligned}
\phi(gx) &= \left\{ \sum_{\lambda \in E(gx)} t_\lambda f(p_\lambda(gx)) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(gx)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(p_\lambda(gx)) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(gp_\lambda(x)) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda g f(p_\lambda(x)) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= \left\{ g(\sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(p_\lambda(x))) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= g \left\{ \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda f(p_\lambda(x)) \;\middle|\; t_\lambda \in [0,1], \quad \sum_{\lambda \in E(x)} t_\lambda = 1 \right\} \\
&= g\phi(x).
\end{aligned}$$

Así queda demostrado que ϕ es una multifunción inferiormente semicontinua y equivariante. Por hipótesis, Y tiene la propiedad de casi selección equivariante de dimenisión finita. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $\tilde{f}_n : W \to Y$, una $1/n$-selección equivariante de ϕ. Sea $f_n = \tilde{f}_n|_A$. Entonces, para todo $x \in A$, se tiene que

$$\rho(f(x), f_n(x)) = \rho(\phi(x), \tilde{f}_n(x)) < 1/n,$$

lo cual demuestra que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (y por lo tanto en compactos) a la función f. Además, f_n se extiende continua y equivariantemente a la función $\tilde{f}_n$ definida en la vecindad invariante W de A. Como Y es convexo y la acción en L es lineal, Y es G-equiconexo (Ejemplo 3.1.2). Lo cual nos permite aplicar el Lema 3.1.3, para encontrar una vecindad invariante U de A y una extensión continua y equivariante de f, $F : U \to Y$. Así, queda demostrado que Y es un G-ANR. $\square$

Bibliografía

[1] S. A. Antonyan, Z. I. Balanov, and B. D. Gel'man, *Bourgin-Yang-type theorem for a-compact perturbations of closed operators. Part I. The case of index theories with dimension property*, Abstract and Applied Analysis, volume 2006 (2006), 1-13.

[2] S. A. Antonyan, *Equivariant generalization of Dugundji's theorem*, Matemathical Notes, vol. 38 no.4 (1985) 844-848.

[3] S. A. Antonyan, *Existence of a cut for arbitrary compact transformations groups*, Mathematical Notes, vol. 56, no. 5 (1994) 1101-1104.

[4] S. A. Antonyan, *Orbit spaces and unions of equivariant absolute extensors*, Topology Appl. 146-147 (2005) 289-315.

[5] S. A. Antonyan, *Retracts in the categories of G-spaces*, Math. Anal. 15(5) (1980) 30-43.

[6] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.

[7] T. Dobrowolski, *On extending mappings into nonlocally convex linear metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 555-560.

[8] T. Dobrowolski and J. van Mill, *Selections and near-selections in linear spaces without local convexity*, Fund. Math. 192 (2006), 215-232.

[9] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlín (1989).

[10] S. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit (1965).

[11] E. Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, USA (1973).

[13] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland Math. Library 43, Amsterdam 1989.