



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**METODO PARA LA ESTIMACION DEL TIEMPO DE
INVASION DE AGUA EN POZOS CERCANOS A FALLAS
CONDUCTIVAS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

PETROLERA Y GAS NATURAL (YACIMIENTOS)

P R E S E N T A :

ERIKA RODRIGUEZ GUZMAN



TUTOR:
DR. HEBER CINCO LEY

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Fernando Samaniego Verduzco

Secretario: Dr. Jesús Rivera Rodríguez

Vocal: Dr. Héber Cinco Ley

1er. Suplente: Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez

2do. Suplente: Dr. Jorge Alberto Arévalo Villagrán

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

MEXICO, D.F.

TUTOR DE TESIS:

DR. HEBER CINCO LEY



FIRMA

Dedicado con todo cariño:

A mis papas Yolanda y Mario, la mejor parte de mi vida,

A mi hermano Iván, por ser parte de mi misma.

A toda mi familia quien me sigue dando

muchos de los mejores momentos de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis el Dr. Cinco por la propuesta del tema así como tiempo y esfuerzo dedicados en su desarrollo, porque sin su ayuda no hubiera sido posible cumplir esta meta.

Al Dr. Arévalo por el interés mostrado en mi superación profesional, por enseñarme que todo logro en la vida requiere un esfuerzo extra.

Al Dr. Samaniego por la confianza que deposito en mi y porque se volvió parte esencial para mi desarrollo.

A l Dr. Rivera y Dr. Camacho por el apoyo y la disposición que me brindaron y por sus valiosos comentarios en la mejora de este trabajo.

Al Dr. Erick Luna por su buena disposición por ayudarme en los momentos más difíciles, por su apoyo incondicional y más que nada por su gran amistad.

A todas las personas que me apoyaron de diversas maneras para concluir mis estudios.

Finalmente a la UNAM con el orgullo que siento de formar parte de sus filas, POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU.

Índice general

Índice de figuras	x
Objetivo	xv
1. Introducción	1
1.1. Desarrollo de la tesis	3
2. Conceptos Básicos	5
2.1. Fallas	6
2.2. Tipos de Geometrías de Flujo	6
2.2.1. Flujo Radial en Estado estacionario	7
2.2.2. Flujo Esférico en Estado Estacionario	9
3. Revisión Bibliográfica	11
3.0.3. Método para detectar fallas con pruebas de incremento	11
3.0.4. Método para obtener la distancia de un pozo a una barrera impermeable (falla sellante)	13
3.0.5. Método de Cinco Ley, L.H., Samaniego V.F. y Domínguez A. N	17
3.0.6. Método de Yaxley.	18
3.0.7. Método de Ambastha.	19
3.0.8. Método de Abbaszadeh y Cinco-Ley.	22
4. Formulación Matemática	27
4.1. Problema de Flujo en el Yacimiento	28
4.1.1. Flujo Radial en Estado Transitorio	31
4.1.2. Flujo Radial en Estado Estacionario	34
4.1.3. Flujo Esférico en Estado Transitorio	37
4.1.4. Flujo Esférico en Estado Estacionario	41
4.2. Problema de Flujo en la Falla	44
4.2.1. Comprobación de la ecuación de velocidad en la falla	54
5. Método para obtener el tiempo de invasión de agua	55

6. Aplicación de Campo	57
6.1. Antecedentes y Objetivo del Caso de Campo	57
7. Conclusiones y Recomendaciones	67
7.1. Conclusiones	67
7.2. Recomendaciones	68
A. Método para Flujo Radial en Estado Transitorio	69
A.1. Desarrollo Matemático del Problema	69
B. Método para Flujo Radial en Estado Estacionario	75
B.1. Formulación Matemática del Problema	75
C. Método para Flujo Esférico en Estado Transitorio	79
C.1. Desarrollo Matemático del Problema	79
D. Método para Flujo Esférico en Estado Estacionario	89
D.1. Desarrollo Matemático del Problema	89
E. Flujo en la Falla	93
E.1. Flujo Bilineal	93
E.2. Método Uno, tiempos grandes	103
E.3. Método Alternativo	105
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

La industria petrolera a nivel mundial ha tenido desarrollos tecnológicos importantes durante los últimos años. Actualmente la producción de hidrocarburos en México proviene en su mayoría de formaciones geológicas donde los yacimientos están compuestos de rocas carbonatadas naturalmente fracturadas.

De estos yacimientos naturalmente fracturados, gran cantidad de ellos tienen un acuífero activo el cual a través de las fallas o fracturas, generan un gran efecto en el movimiento de los fluidos presentando una invasión temprana de agua en pozos productores de aceite, evitando que el barrido de la formación sea uniforme, debido a esto se tienen problemas severos de producción. Por lo tanto sería de gran utilidad poder predecir el tiempo de invasión de agua para evitar situaciones desastrosas en proyectos de inyección, en casos de entrada de agua o para poder calcular el gasto óptimo de los pozos productores cercanos a fallas conductivas. Trocchio [1] resalta la importancia de considerar la presencia de fallas conductivas y proporciona un criterio para planear la posición futura de pozos a

lo largo de la explotación de el yacimiento.

El ingeniero petrolero debe tener suficiente información para poder analizar el comportamiento de la formación. Mucha de esta información puede obtenerse a partir de pruebas de presión y de acuerdo a la información que se requiera se puede elegir el modelo más adecuado, con la cual se podrá determinar ciertas propiedades importantes del yacimiento como daño, permeabilidad, detectar heterogeneidades y evaluar las características de flujo y almacenamiento en la formación sin embargo con estos datos no es suficiente calcular el tiempo de irrupción cercano a una falla conductiva. Por lo tanto se desarrolló un método y con ayuda de la información obtenida a partir de las pruebas de presión será útil para tener un pronóstico más completo del comportamiento del yacimiento el cual nos ayudará a poder obtener el tiempo de invasión, con la finalidad de estimar el rendimiento económico que proporcionará la óptima explotación de un yacimiento, en la figura 1.1 se muestra el sistema a estudiar.

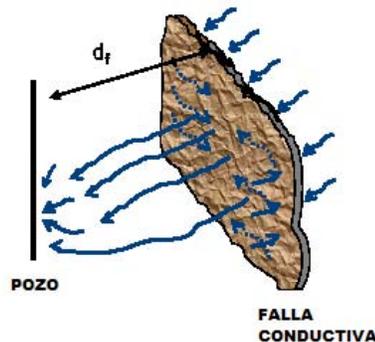


Figura 1.1: Modelo físico esquemático del problema [2].

1.1. Desarrollo de la tesis

A continuación se presenta una descripción breve del contenido de este trabajo.

En el capítulo 1 se presenta antecedentes e información general del problema a resolver así como las características principales que ayudaron a proponer la solución.

En el capítulo 2 se inicia con una descripción general de los conceptos básicos empleados para el desarrollo de este trabajo.

En el capítulo 3 se realiza una revisión bibliográfica donde se presenta un resumen de las diferentes soluciones obtenidas por varios autores.

En el capítulo 4 se plantea las ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos en la falla y en el yacimiento, así como sus curvas tipo.

En el capítulo 5 se describe el método para obtener el tiempo de irrupción en pozos cercanos a fallas conductivas.

En el capítulo 6 se describe la aplicación de campo, los resultados obtenidos por medio del método desarrollado.

En el capítulo 7 se presenta, una discusión de los resultados principales, así como las propuestas para extender este trabajo.

En los apéndices se presentan las derivaciones analíticas discutidas en el texto principal.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

En la actualidad se cuenta con una cantidad de soluciones matemáticas que describen el fenómeno de discontinuidades o barreras. Estas soluciones tienen como objetivo representar el comportamiento de presión en yacimientos con fallas, y que permiten obtener parámetros muy importantes para conocer el comportamiento del yacimiento.

Una de las consideraciones más importante de estas soluciones es el tipo de flujo en el yacimiento y en la falla, que pueden ser en régimen *transitorio* o *estacionario*. Por estado *estacionario* se considera que las condiciones en cada uno de los puntos de corriente no varía con el tiempo [3], mientras que en estado *transitorio* las condiciones varían con el tiempo.

Este capítulo presenta algunas definiciones importantes en las que se apoya esta tesis para fundamentar su desarrollo.

2.1. Fallas

Las fallas en los yacimientos de petróleo pueden ser sellantes o no sellantes. Es importante apuntar que algunas fallas sirven para sellar la migración de hidrocarburos mientras otras son conductivas [4]. Las fallas sellantes ver figura 2.1 bloquean el fluido impidiendo el flujo de fluidos a través de ellas, mientras que las fallas conductivas actúan como fuentes que ayudan al mantenimiento de la presión, y permiten una transferencia de fluidos a través del plano de la falla.

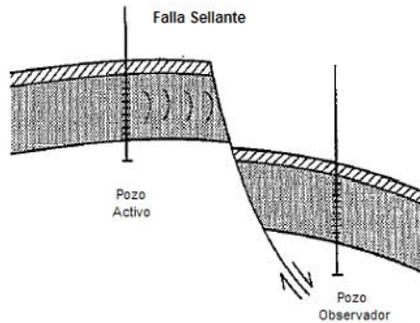


Figura 2.1: Falla sellante impide el flujo de fluido lateral.

2.2. Tipos de Geometrías de Flujo

Para dar solución a los problemas de flujo en el yacimiento, es necesario representarlos a través de sistemas geométricos de poca complejidad; los utilizados principalmente son: lineal y radial. En el flujo lineal como se muestra en la figura 2.2, las líneas de flujo son paralelas y la sección transversal expuesta al flujo es constante. En el flujo radial las líneas de flujo son rectas y convergen en dos dimensiones a un centro común; por ejemplo, un

pozo. La sección transversal expuesta al flujo disminuye a medida que el centro se aproxima. Ocasionalmente, el flujo esférico es de interés, y en éste las líneas de flujo son rectas y convergen en tres dimensiones hacia un centro común. Aunque las trayectorias reales de las líneas de flujo en las rocas son irregulares debido a la forma de los espacios porosos, las trayectorias generales o promedio pueden representarse por líneas rectas en flujos lineal, radial y esférico [5].

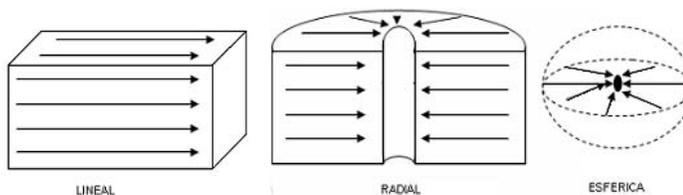


Figura 2.2: Diferentes geometrías de flujos.

En los yacimientos de petróleo no se encuentran ninguna de estas geometrías exactamente, pero para muchos fines de ingeniería, la geometría existente puede a menudo representarse por una de estas idealizaciones. Para este trabajo de tesis, el enfoque inicial se dará para dos geometrías principales: radial y esférica; a continuación se presentarán las ecuaciones que rigen el flujo radial y el flujo esférico en un estado estacionario.

2.2.1. Flujo Radial en Estado estacionario

Las ecuaciones fundamentales [6, 7] que gobierna el movimiento del flujo horizontal en coordenadas cilíndricas en estado estacionario son:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad (2.1)$$

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad \text{y} \quad v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{d\theta}, \quad (2.2)$$

donde v_x y v_y son las velocidades de Darcy, respectivamente. Resolviendo la ecuación 2.1, el resultado es:

$$p = c_1 \log r + c_2. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) representa la expresión general para la distribución de presiones en un sistema de flujo radial. El flujo radial puede caracterizarse por las siguientes condiciones de frontera. Ver Figura 2.3.

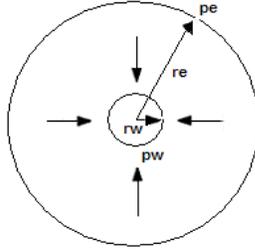


Figura 2.3: Esquema de un sistema radial.

$$r = r_w \quad p = p_w, \quad (2.4)$$

$$r = r_e \quad p = p_e,$$

donde r_w corresponde al radio del pozo y p_w a la presión en la cara del pozo. Resolviendo el sistema de ecuaciones, la ecuación de presión en un flujo radial.

$$p = \frac{p_e - p_w}{\log(r_e/r_w)} \log\left(\frac{r}{r_w}\right) + p_w. \quad (2.5)$$

Aplicando la ecuación (2.2) toma la forma de

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = -\frac{k}{\mu r} \frac{[p_e - p_w]}{\log(r_e/r_w)}. \quad (2.6)$$

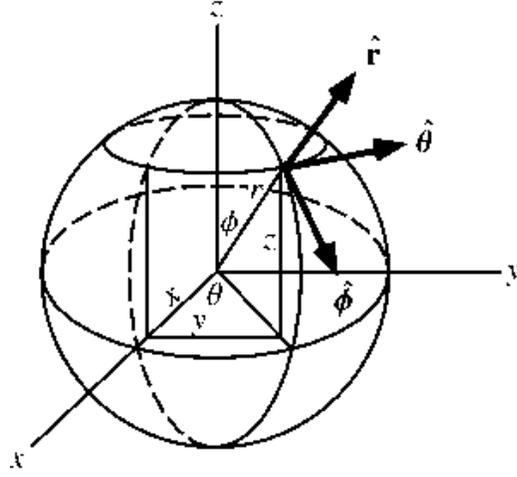


Figura 2.4: Coordenadas esféricas.

Finalmente el flujo total por unidad de tiempo desde la formación productora hacia el pozo está dada por la ecuación

$$q = -h \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi k h [p_e - p_w]}{\mu \log(r_e/r_w)},$$

donde h es el espesor de la formación. En términos de q puede ser escrita como

$$p = \frac{q\mu}{2\pi k h} \log \frac{r}{r_w} + p_w, \quad (2.7)$$

$$v_r = -\frac{q}{2\pi r h}. \quad (2.8)$$

2.2.2. Flujo Esférico en Estado Estacionario

La ecuación diferencial básica en coordenadas esféricas está dada por la siguiente ecuación [6, 7].

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} = 0. \quad (2.9)$$

Las coordenadas esféricas, se ilustra en la figura 2.4. Reduciendo el caso a “*flujo esférico*” se tiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Así que

$$\Phi = -\frac{c_1}{r} + c_2. \quad (2.11)$$

Esta es la función de distribución general para el potencial ϕ en un sistema de flujo esférico. Su característica principal es que el potencial varía inversamente con el radio r . Para ver el significado físico de las dos constantes c_1 y c_2 , se necesita sustituir las condiciones de frontera en la ecuación (2.10).

$$r = r_w, \quad \Phi = \Phi_w, \quad (2.12)$$

$$r = r_e, \quad \Phi = \Phi_e.$$

La ecuación para el potencial está dado por:

$$\Phi = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{\left[\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_w} \right] + \Phi_w. \quad (2.13)$$

La velocidad en el sistema, es

$$v_r = -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\Phi_e - \Phi_w}{\left[\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_w} \right]} \frac{1}{r^2}, \quad (2.14)$$

y el flujo total a través del sistema está dado por

$$q = - \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi r^2 \text{sen}\theta v_r d\theta = \frac{4\pi [\Phi_e - \Phi_w]}{\left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_e} \right)}. \quad (2.15)$$

El potencial Φ y la velocidad v_r pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right] + \Phi_w, \\ v_r &= -\frac{q}{4\pi r^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Capítulo 3

Revisión Bibliográfica

En este capítulo se explicará brevemente la revisión bibliográfica donde los autores trataron el tema de una falla cercana a un pozo.

3.0.3. Método para detectar fallas con pruebas de incremento

Horner fue el primero en detectar la presencia de una barrera sin flujo (falla sellante) mediante el análisis de pruebas de incremento de presión [8]. Este tipo de prueba, es probablemente la más familiar dentro de la industria petrolera. La prueba de incremento de presión requiere que el pozo se cierre durante la duración de la misma. Además el gasto de producción antes del cierre del pozo debe ser constante. En la figura 3.1 se muestra esquemáticamente el comportamiento del gasto y la presión durante una prueba de incremento. La presión se mide inmediatamente antes del cierre, y se registra como una función del tiempo durante el período de cierre [9].

La ecuación básica para el análisis de pruebas de incremento bajo condiciones de

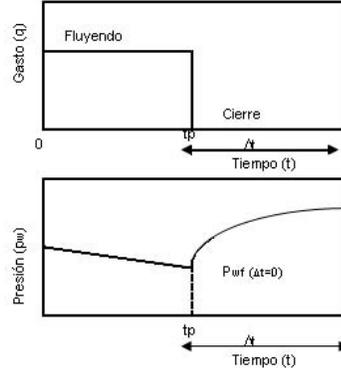


Figura 3.1: Comportamiento del gasto y presión en una prueba de incremento.

flujo radial, es la siguiente.

$$p_{ws} = p_i - 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \log \left(\frac{t + \Delta t}{\Delta t} \right). \quad (3.1)$$

Si graficamos el comportamiento de la presión observada durante un período de cierre p_{ws} contra $\log \left(\frac{t + \Delta t}{\Delta t} \right)$, obtenemos una línea recta cuya pendiente es $m = \frac{162.6qB\mu}{kh}$. Despejando la permeabilidad, obtenemos

$$k = \frac{162.6qB\mu}{mh}. \quad (3.2)$$

Horner señaló que los datos de incremento de presión en una gráfica de p_D contra $\log \left(\frac{t + \Delta t}{\Delta t} \right)$ exhiben dos líneas rectas, donde la segunda línea recta tiene una pendiente igual al doble de la primera recta, figura 3.2 . A partir de la gráfica se obtiene el tiempo de intersección Δt_x de las dos líneas rectas semilog. La distancia a la falla se estima utilizando la siguiente ecuación[10]

$$L = 0.01217 \sqrt{\frac{k\Delta t_x}{\phi\mu c}}. \quad (3.3)$$

El radio de investigación (que es la distancia lejos del pozo que es investigada durante un

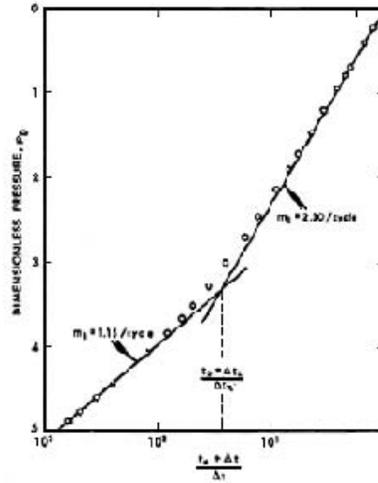


Figura 3.2: Gráfica semilog de una prueba de incremento mostrando la influencia de una falla.

tiempo de producción), puede estimarse por medio de la ecuación (3.4):

$$r_{inv} = 0.02897 \left(\frac{kt_p}{\phi\mu c} \right)^{0.5}. \quad (3.4)$$

El radio de investigación debe exceder la distancia a la falla, para que sea detectada. Para propósitos prácticos, el radio de investigación debe ser al menos 4 veces mayor a la distancia a la falla para que la curva de incremento sea lo suficientemente definida, y así se pueda apreciar la segunda línea recta de pendiente doble. Por lo tanto, empleando este criterio en la ecuación (3.4), podemos establecer que $\Delta t_x \leq 0.6t_p$, ó expresado en términos de una gráfica de Horner, $\frac{t_p + \Delta t_x}{\Delta t_x} \geq 2.7$.

3.0.4. Método para obtener la distancia de un pozo a una barrera impermeable (falla sellante)

Martínez y Cinco Ley [11], mostraron que la diferencia entre los datos de presión y la extrapolación de la primera línea recta semilog (lado izquierdo), proporciona un principio

para determinar la distancia a la barrera, aún cuando la segunda línea recta semilog (lado derecho) no se alcance en la prueba, ver figura 3.3. El tiempo de producción tiene un papel muy importante en la detección de una falla sellante; un tiempo de producción pequeño puede causar que la presión se desvíe hacia abajo de la primera línea recta semilog y en algunos casos, el comportamiento de la doble pendiente no se observa, no siendo en este caso aplicable el método de análisis basado en la intersección de las dos líneas rectas semilog.

La técnica de ajuste por curva tipo también puede usarse para estimar la distancia entre el pozo y la barrera. En algunos casos, la técnica de curva tipo no requiere que se alcance la segunda línea recta semilog.

La caída de presión adimensional para un pozo produciendo a un gasto constante cercano a una barrera puede expresarse por la siguiente ecuación, tal como lo demostraron Martínez y Cinco Ley.

$$p_{wD}(t_D) = p_D(r_D = 1, t_D) + p_D(r_D = 2d_{ibD}, t_D), \quad (3.5)$$

donde:

$$p_D = \frac{kh[p_i - p(r, t)]}{\alpha kt}, \quad t_D = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2},$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad \text{y} \quad d_{ibD} = \frac{d_{ib}}{r_w}.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.5) representa la caída de presión causada por la producción del pozo y el segundo término representa la caída de presión causada por la barrera (pozo imagen). La ecuación (3.5) puede expresarse en términos de

variable reales.

$$p_w = p_i - \frac{1.151\alpha q B \mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{4\beta k}{\phi \mu c_t r_w^2 \gamma} \right) + 0.87S \right] - \frac{\alpha q B \mu}{2kh} E_1 \left(\frac{4\phi \mu c_t d_{ib}^2}{4\beta k t} \right). \quad (3.6)$$

Para tiempos pequeños se tendrá un comportamiento de yacimiento infinito, o sea que la barrera no afecta al pozo, quedando la ecuación anterior en la siguiente forma.

$$p_w = p_i - \frac{1.151\alpha q B \mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{4\beta k}{\phi \mu c_t r_w^2 \gamma} \right) + 0.87S \right]. \quad (3.7)$$

Para valores largos de tiempo de producción el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.6) puede expresarse en términos de la aproximación logarítmica de la integral exponencial.

$$p_w = p_i - \frac{2.303\alpha q B \mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{4\beta k}{\phi \mu c_t r_w^2 \gamma} \right) - \log(2d_{ib}r_w) + 0.4343S \right]. \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8), indican que el comportamiento de la presión presentan dos líneas rectas como se aprecia en la figura 3.3. La primera línea recta tiene una pendiente $m = \frac{1.51\alpha q B \mu}{kh}$ y la segunda tiene una pendiente igual a $2m$. El tiempo de intersección de las

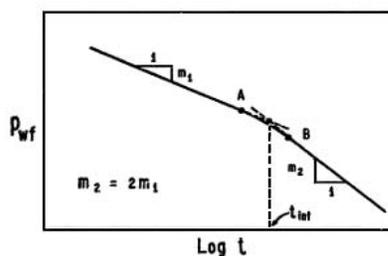


Figura 3.3: Gráfica semilog para una prueba de decremento cerca una barrera lineal.

dos líneas rectas semilog es

$$t_{int} = \frac{\gamma\phi\mu c_t d_{ib}^2}{\beta k}, \quad (3.9)$$

despejando d_{ib} distancia a la barrera sellante:

$$d_{ib} = \left(\frac{\beta k t_{int}}{\gamma\phi\mu c_t} \right)^{0.5}. \quad (3.10)$$

La ecuación 3.10 puede usarse para estimar la distancia hacia la barrera con la condición de que estén presentes las dos líneas rectas semilog en la prueba. El t_{int} puede determinarse de la gráfica semilog.

Martínez y Cinco Ley proporcionaron una técnica para calcular d_{ib} , que puede aplicarse siempre para el caso cuando la prueba no es lo suficiente larga para alcanzar la segunda línea recta semilog. Esta técnica emplea el análisis de curvas tipo. Se analiza la caída de presión causada por la barrera mediante el uso de la curva de solución de línea fuente como una función de variables adimensionales Δp_{ibD} contra $t_D/4d_{ibD}^2$, ver figura 3.4. Este método requiere una gráfica de $\log \Delta p_{ib}$ contra $\log t$ en un papel semitransparente. El ajuste vertical puede obtenerse mediante la ecuación siguiente:

$$(p_D)_M = \frac{1.151 (\Delta p)_M}{m}.$$

A partir de los puntos del ajuste horizontal, $(t)_M$ y $[t_D/4d_{ibD}^2]_M$, la distancia de la barrera al pozo se calcula aplicando la siguiente ecuación.

$$d_{ib} = \left(\frac{\beta k (t)_M}{4\phi\mu c (t_D/4d_{ibD}^2)} \right)^{0.5}.$$

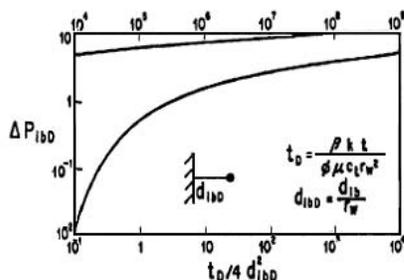


Figura 3.4: Curva tipo para estimar la distancia a una barrera para una prueba de decremento.

3.0.5. Método de Cinco Ley, L.H., Samaniego V.F. y Domínguez A. N .

Los autores desarrollaron un modelo matemático [12] para estudiar el comportamiento de la presión transitoria para un pozo cerca de una fractura vertical de conductividad infinita, figura 3.5.

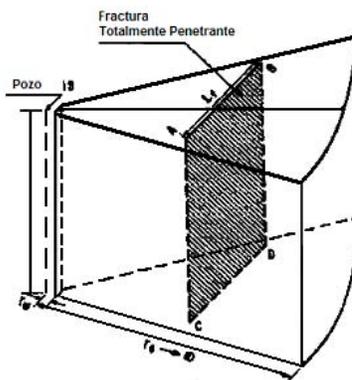


Figura 3.5: Sector de un yacimiento teniendo un pozo en su centro con una fractura vertical.

El fluido del yacimiento es ligeramente compresible a través de un medio poroso isotrópico y homogéneo. El pozo se aproxima por medio de una línea fuente y la fractura vertical de conductividad infinita se aproxima como un plano, usando el principio de super-

posición tenemos la ecuación siguiente:

$$p_{fD} = \frac{1}{2}E_1 \left(\frac{x_D^2 + y_D^2}{4t_D} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{t_D} \int_{x_{mD-1/2}}^{x_{mD+1/2}} \frac{q_D(x'_D, \tau) e^{-\frac{(x'_D-x_D)^2+(y_D-d_D)^2}{4(t_D-\tau)}}}{(t_D-\tau)} dx'_D d\tau, \quad (3.11)$$

con las condiciones siguientes: $\int_{x_{m-L_f/2}}^{x_{m+L_f/2}} q_f(x', t) dx' = 0$ y $\Delta p(x, d, L_f, d, d_m, t) = \text{const.}$

Después de obtener los gastos tanto en posición como en tiempo, la presión en cualquier punto en el yacimiento puede calcularse como sigue

$$p_{fD} = \frac{1}{2}E_1 \left(\frac{x_D^2 + y_D^2}{4t_D} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^M \Delta x_{Dj} q_{j,l} \left[E_1 \frac{(y_D - d_D)^2 + (x_D - x_{Dj})^2}{4(t_D - t_{D(l)})} - E_1 \frac{(y_D - d_D)^2 + (x_D - x_{Dj})^2}{4(t_D - t_{D(l)})} \right]. \quad (3.12)$$

3.0.6. Método de Yaxley.

El autor derivó soluciones analíticas para fallas parcialmente comunicantes [13].

El pozo se consideró como una *línea fuente* y la falla se supuso como una barrera lineal vertical semipermeable.

La solución analítica está dada por la interferencia de la respuesta en un pozo de observación y el comportamiento en un pozo activo; el modelo depende de las consideraciones siguientes: el fluido del yacimiento está en una sola fase, y ligeramente compresible de compresibilidad y viscosidad constantes, el yacimiento es homogéneo en todas las propiedades de la roca e isotrópico con respecto a la permeabilidad en cada lado de la falla, el espesor de la formación es constante.

El modelo se expresa por medio de la ecuación de difusión en coordenadas cartesianas para cada lado de la falla, figura 3.6.

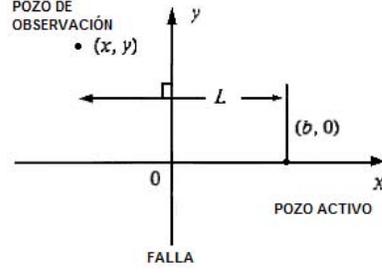


Figura 3.6: Sistema coordenado para un modelo de una falla parcialmente comunicada.

La distribución de la caída de presión en la región del pozo de observación es:

$$p_D = \sqrt{\pi} \alpha_L \int_0^{t_{DL}} \exp(4\alpha_L^2 u + 2\alpha_L) \operatorname{erfc} \left(2\alpha_L \sqrt{u} + \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) \frac{du}{\sqrt{u}}. \quad (3.13)$$

donde $\alpha_L = \left(\frac{k_f h}{l_f \mu} \right) / \left(\frac{kh}{L\mu} \right)$, k_f representa la permeabilidad efectiva y l_f el ancho efectivo de la fractura, ver figura 3.7. Se grafica la solución para diferentes valores de transmisibilidades como se muestra en la figura 3.8. La gráfica muestra que a tiempos grandes las respuestas de presión tienen la misma pendiente y son paralelas a la solución de *la integral exponencial*. El comportamiento de la caída de presión en el pozo productor es:

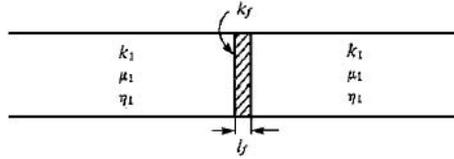


Figura 3.7: Barrera vertical semipermeable.

$$p_{Dw} = -\frac{1}{2} \operatorname{Ei} \left(-\frac{r_{Dw}^2}{4t_{DA}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{4t_{DA}} \right) - \sqrt{\pi} \alpha_A \times \int_0^{t_{DA}} \left\{ \exp(4\alpha_A^2 u + 4\alpha_A) \operatorname{erfc} \left(2\alpha_A \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \right\}, \quad (3.14)$$

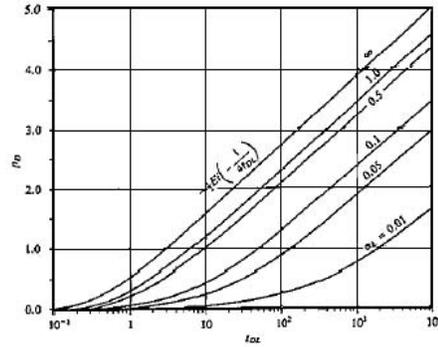


Figura 3.8: Comportamiento de la caída de presión de un pozo cerca de una falla parcialmente comunicante.

donde $r_{Dw} = r_w/b$, $t_{DA} = \frac{\eta t}{b^2}$ y $\alpha_A = \left(\frac{k_f h}{l_f \mu} \right) / \left(\frac{k h}{b \mu} \right)$. α_A se define como una transmisibilidad con respecto a la distancia a la falla b .

3.0.7. Método de Ambastha.

El autor propone un modelo analítico para el comportamiento transitorio de presión en un pozo, considerado como una línea fuente, produciendo a gasto constante en un yacimiento con daño en la discontinuidad lineal y con propiedades diferentes en ambos lados de la misma [14].

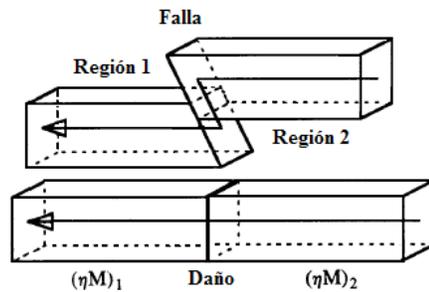


Figura 3.9: Esquema de un yacimiento compuesto con una falla parcialmente comunicante; la falla se modela con daño en la frontera.

La figura 3.9 muestra dos regiones separadas por una falla. La configuración del yacimiento se simplifica removiendo la discontinuidad vertical causada por la falla, haciendo que las dos partes horizontales coincidan a cada lado de la falla, como se muestra en la parte de abajo de la figura.

La figura 3.10 inciso (a) representa un yacimiento con dos fronteras paralelas donde no hay flujo; el inciso (b) representa un yacimiento infinito con una discontinuidad lineal. Las dos regiones en ambos lados de la falla pueden tener transmisibilidades diferentes y la resistencia al flujo en la falla es modelado a través del daño.

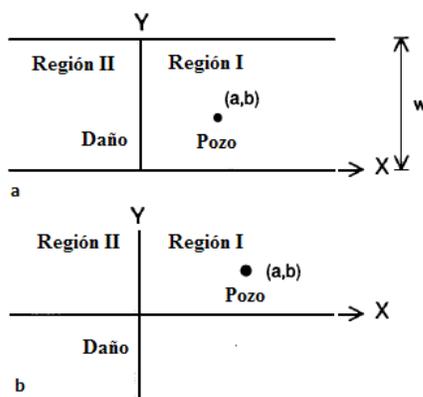


Figura 3.10: Esquema de un yacimiento compuesto con una falla parcialmente comunicante a) yacimiento con dos fronteras paralelas b) yacimiento compuesto infinito.

El modelo matemático y la solución para un yacimiento, de la figura 3.10 inciso (a) considera el fluido del yacimiento es de una sola fase, compresibilidad constante, el yacimiento es homogéneo en todas las propiedades de la roca e isotrópico en cada lado de la falla parcialmente penetrante, el espesor de la formación es constante, S representa el daño $S = k_1 h (\Delta p)_{daño} / 141.2 q B \mu_1$ y M la movilidad entre las regiones 1 y 2, a la distancia a la falla y b es la coordenada del pozo. La ecuación para la región $x_D \geq 0$

puede expresarse como:

$$\overline{p_{1D}} = -\frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1}} \left[e^{-|x_D - a_D|\sqrt{\alpha_1}} + \frac{\sqrt{\alpha_1} + SM\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - M\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + SM\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + M\sqrt{\alpha_2}} + e^{-(x_D - a_D)\sqrt{\alpha_1}} \right], \quad (3.15)$$

donde

$$\alpha_1 = v^2 m^2 + s_t, \quad (3.16)$$

$$\alpha_2 = v^2 m^2 + (s_t/\eta), \quad (3.17)$$

$$\alpha_3 = [-2\pi \cos(mb_D)] / s_t, \quad (3.18)$$

m es la variable de Fourier, s_t es la variable de \mathcal{L} aplace, $v = \pi/w_D$, w es el ancho del yacimiento y $\eta = (k/\phi\mu c_t)_2 / (k/\phi\mu c_t)_1$.

Y para la región $x_D \leq 0$.

$$\overline{p_{2D}} = -\frac{\alpha_3 e^{-x_D\sqrt{\alpha_2} - a_D\sqrt{\alpha_1}}}{\sqrt{\alpha_1} + SM\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + M\sqrt{\alpha_2}}. \quad (3.19)$$

donde

$$\alpha_1 = m^2 + s_t, \quad (3.20)$$

$$\alpha_2 = m^2 + (s_t/\eta), \quad (3.21)$$

$$\alpha_3 = (-\sqrt{2\pi} e_D^{imb}) / s_t. \quad (3.22)$$

La solución para un yacimiento infinito se muestra a continuación, figura 3.10 inciso (b).

$$\overline{p_{1D}}(x_D, b_D, s_t) = \frac{1}{s_t} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \left[e^{-|x_D - a_D|\sqrt{\alpha_1}} + f e^{-(x_D + a_D)\sqrt{\alpha_1}} \right] dm, \quad (3.23)$$

$$\overline{p_{2D}}(x_D, b_D, s_t) = \frac{1}{s_t} \int_0^\infty \frac{e^{-x_D\sqrt{\alpha_2} - a_D\sqrt{\alpha_1}}}{\sqrt{\alpha_1} + SM\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + M\sqrt{\alpha_2}} dm. \quad (3.24)$$

3.0.8. Método de Abbaszadeh y Cinco-Ley.

Los autores desarrollaron una solución analítica para determinar la distribución de presión en el yacimiento causada por la caída de presión de un pozo activo cercano a una falla no intersectante de conductividad finita [4, 15]. La solución considera flujo en ambos lados de la falla, a lo largo y a través de la falla. Como se muestra en la figura 3.11. La falla

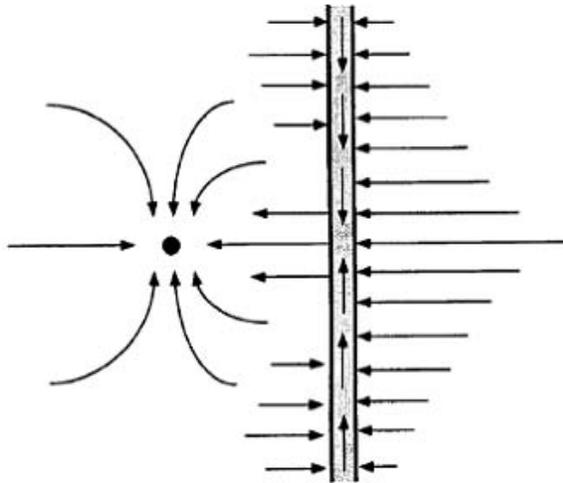


Figura 3.11: Esquema típico del flujo de líneas.

es de un espesor w_f y permeabilidad k_f . La falla está localizada a una distancia d_f desde el pozo activo, el cual produce un gasto constante q_w . Hay una zona alterada alrededor de la falla con una extensión w_a y una permeabilidad k_a . Las propiedades del yacimiento se consideran diferentes del lado izquierdo de la falla y del lado derecho de la falla. El sistema se considera con una presión inicial uniforme p_i . El flujo es isotérmico, de un fluido de compresibilidad pequeña y efectos gravitacionales despreciables. El problema se esquematiza con la figura 3.12 siguiente:

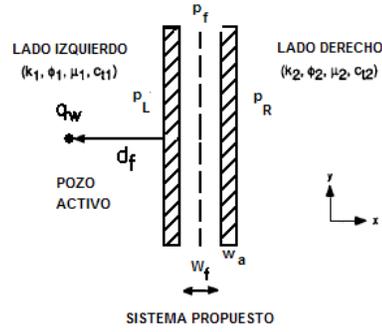


Figura 3.12: Esquema y nomenclatura del sistema.

La solución al problema de pruebas de presión en yacimientos con fallas de conductividad finita, es obtenida al dividir el flujo dominante en el yacimiento y el de las fallas. Estos dos problemas, que se resuelven separadamente y se acoplan a el plano de la falla por el requerimiento de continuidad de presión y condiciones de flujo.

La solución para la distribución de presión dentro de la falla es

$$p_{fD}(y_D, t_{Df}) = -\frac{2\pi}{F_{CD}} \int_{y_D}^{\infty} \int_0^{y_D} q_{fD}(y'_D, t_{Df}) dy'_D dy_D. \quad (3.25)$$

El flujo en el yacimiento, se considera como dos yacimientos seminfinitos, en el lado izquierdo y el lado derecho del plano de la falla.

El yacimiento semi-infinito del lado izquierdo de la falla consiste de un pozo activo con flujo a gasto constante q_w en $(x = 0, y = 0)$ y el origen de la falla en $x = d_f$. Debido a la linealidad del problema, el lado izquierdo del yacimiento seminfinito se puede convertir en un yacimiento infinito insertando un pozo imagen del lado derecho del yacimiento en $x = 2d_f$. Habrá dos pozos productores en $(x = 0, y = 0)$ y en $(x = 2d_f, y = 0)$, cada uno a

gasto constante q_w , y un plano origen dependiendo de la posición y tiempo con $2q_f$.

$$\begin{aligned}
p_{LD}(x_D, y_D, t_{Df}) &= \int_0^{t_{Df}} \int_0^\infty \frac{q_{fD}(y'_D, \tau_D)}{t_{Df} - \tau_D} \left\{ \exp \left[-\frac{(1-x_D)^2 + (y_D + y'_D)^2}{4(t_{Df} - \tau_D)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[-\frac{(1-x_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_{Df} - \tau_D)} \right] \right\} dy'_D d\tau_D \quad (3.26) \\
&\quad - \frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{x_D^2 + y_D^2}{4t_{Df}} \right) - \frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{(2-x_D)^2 + y_D^2}{4t_{Df}} \right).
\end{aligned}$$

El yacimiento semi-infinito del lado derecho de la falla también se modela por medio de una imagen del otro lado del yacimiento, en contra del plano $x = d_f$. Los resultados de un yacimiento infinito que contiene solo el plano origen en $x = d_f$, dependiendo del tiempo y la posición,

$$\begin{aligned}
p_{RD}(x_D, y_D, t_{Df}) &= \int_0^{t_{Df}} \int_0^\infty \frac{q_{fRD}(y'_D, \tau_D)}{t_{Df} - \tau_D} \left\{ \exp \left[-F_\eta \frac{(1-x_D)^2 + (y_D + y'_D)^2}{4(t_{Df} - \tau_D)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \exp \left[-F_\eta \frac{(1-x_D)^2 + (y_D - y'_D)^2}{4(t_{Df} - \tau_D)} \right] \right\} dy'_D d\tau_D. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Donde $F_\eta = (k/\phi\mu c_t)_1 / (k/\phi\mu c_t)_2$.

Las ecuaciones del yacimiento y la falla se acoplan en el plano de la falla, preservando continuidad en la presión y flujo. La caída de presión en el fondo del pozo es:

$$\begin{aligned}
p_{wD} &= 4 \sum_{l=1}^{y_{Df}+l} \bar{q}_{fLD}(y_D, t_{Df}) \int_{y_{Dl}}^{y_{Df}+l} K_0 \left\{ \sqrt{[(1-r_{wD})^2 + y'_D]^2} s \right\} dy'_D \quad (3.28) \\
&\quad + \frac{1}{s} K_0(r_{wD}\sqrt{s}) + \frac{1}{s} K_0[(2-r_{wD})\sqrt{s}],
\end{aligned}$$

donde $r_{wD} = r_w/d_f$.

Características de flujo en fallas conductivas.

Las características de flujo en un yacimiento que contiene una falla conductiva es complejo y depende del tiempo, la falla transmite fluido a lo largo y a través del plano de la

falla [16]. Para tiempos cortos la falla no ha detectado el pozo y se presenta un flujo radial alrededor del pozo activo, en la figura 3.13 inciso a) se muestra la región afectada por la expansión del fluido, o sea la difusión de presión. La presión transitoria se propaga por la falla y para tiempos intermedios las líneas de flujo dominan e indican que hay una frontera a presión constante inciso b), continuando con un flujo bilineal en el inciso c).

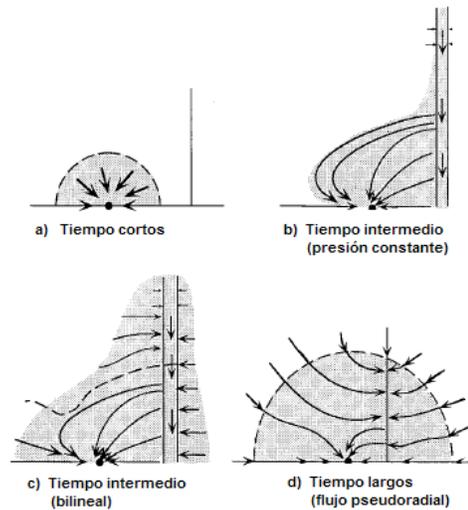


Figura 3.13: Esquema del líneas de flujo a diferentes tiempos con una falla conductiva.

En el inciso b) el sistema actúa como una fuente en estado estacionario, donde la falla es la fuente del fluido que suministra al yacimiento y el pozo activo constituye el punto de extracción de los fluidos. En el inciso c) virtualmente todo el fluido producido pasa a través de la falla y no hay expansión en las regiones alrededor del pozo, el cual alcanza una estado bilineal. El flujo en el yacimiento es lineal en ambos lados de la falla derecho e izquierdo. En el inciso d) a tiempos grandes donde la presión se propaga a través de la falla (usualmente para casos de baja conductividad en la falla), hay un flujo pseudoradial.

Capítulo 4

Formulación Matemática

El objetivo principal es desarrollar un método para determinar el tiempo de invasión del agua causada por la caída de presión de un pozo cercano a una falla conductiva no intersectante. Para la solución matemática del sistema a estudiar, se plantean dos tipos de flujo de fluidos en el yacimiento: flujo radial y flujo esférico.

El sistema a estudiar está conformado por una falla que provee fluido hacia el pozo productor, la cual se considera como una frontera a presión constante. La frontera externa se representa como una “*línea fuente infinita*”, donde el agua avanza en forma de una “*línea directa*”, desplazando el aceite hacia el pozo cerca de una interfase agua-aceite; se considera un desplazamiento de flujo tipo pistón. La figura 4.1 muestra un esquema de una falla típica en un yacimiento. En la invasión vía las fallas se forman alrededor de ellas corredores de muy alta permeabilidad a través de los cuales fluye el agua hacia los pozos ver figura 4.2.

La solución al problema se obtiene considerando el flujo dominante en el yacimiento y el flujo en la falla, los cuales se resuelven separadamente; ver figura 4.3, a continuación se

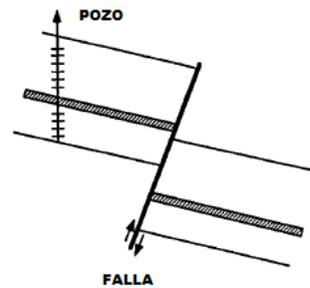


Figura 4.1: Pozo cercano a una falla.

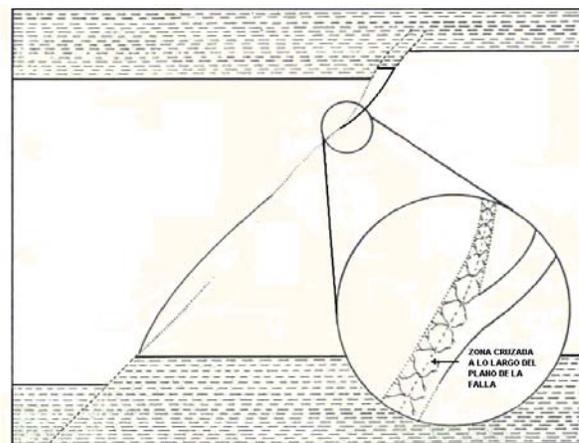


Figura 4.2: Concepción de una falla conductiva de fluido [1].

describe brevemente cada uno de ellos.

4.1. Problema de Flujo en el Yacimiento

La solución del modelo se basa en la premisa de que en ambos lados de la falla el comportamiento de la presión obedece la ecuación de difusividad para el problema de flujo de fluidos en el medio poroso, la cual se resuelve para coordenadas radiales y esféricas en el

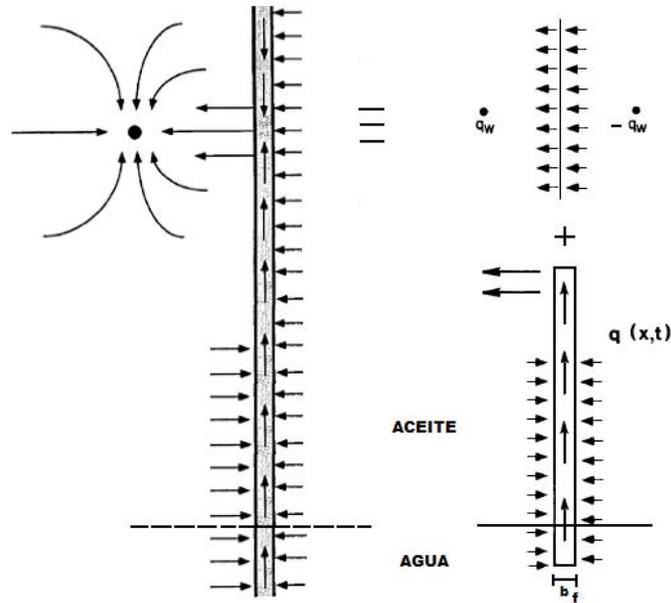


Figura 4.3: Modelo sistemático del problema.

yacimiento.

Para modelar una falla conductiva se considera el yacimiento con una frontera a presión constante, el modelo se puede resolver utilizando el *método de imágenes* [8, 17, 18, 19]; el sistema original tiene solamente un pozo activo con gasto constante en las coordenadas $(x = 0, y = 0)$ y la frontera externa se encuentra a la distancia $x = d_f$. En el sistema propuesto se plantea una linealidad, debido a esto el lado izquierdo del yacimiento semi-infinito puede ser convertido en un yacimiento infinito colocando un pozo imaginario a una distancia $x = 2d_f$ del pozo productor con gasto negativo, es decir, se considera un pozo inyector. La falla se ha removido y se inserta un segundo pozo, de tal manera que se tienen los mismos efectos equivalentes de la falla; este pozo imagen simula un empuje de agua en

forma de desplazamiento tipo pistón [21] (desplazamiento de un fluido por otro), la figura 4.4 muestra el sistema propuesto.

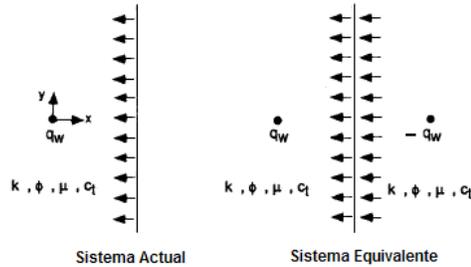


Figura 4.4: Modelo físico esquemático del flujo en el yacimiento.

A continuación se incluyen los pasos siguientes que se siguen en coordenadas radiales y esféricas en un comportamiento transitorio y estacionario, para derivar una expresión que represente la velocidad del flujo de fluidos en el yacimiento, para finalmente obtener el tiempo de invasión:

- Se plantea separadamente la ecuación de flujo y sus condiciones de frontera para ambos lados de la falla.
- Se resuelven las ecuaciones de flujo separadamente para obtener el comportamiento de la presión.
- Se suma la distribución de presiones de ambos lados de la falla.
- Se deriva la ecuación de presión del pozo productor y del pozo imagen inyector con respecto a la distancia.

- Para obtener la ecuación de velocidad macroscópica o aparente, se sustituye el gradiente de presión con respecto al tiempo en la ecuación de la *Ley de Darcy*; pero en este trabajo se considera la *velocidad microscópica o real* a través de los canales de flujo, la cual se puede obtenerse dividiendo la *velocidad aparente o macroscópica* por la porosidad [20]:

$$v_{micro} = \frac{v_{macro}}{\phi} = -\frac{k}{\mu\phi} \frac{dp}{dx}. \quad (4.1)$$

- Finalmente con la ecuación de velocidad, se obtiene el tiempo de invasión de flujo para los casos siguientes:
 - **Flujo estacionario**, la ecuación analítica que se obtiene es lineal la cual se puede resolver integrando el inverso de la velocidad para obtener el tiempo.
 - **Flujo transitorio**, la ecuación de velocidad presenta una no linealidad, la cual se resuelve por medio del método de diferencias finitas.

4.1.1. Flujo Radial en Estado Transitorio

Desarrollando los pasos anteriores se llega a la solución siguiente de la ecuación que determina la velocidad adimensional del frente de agua en una dimensión; la solución para derivar la ecuación de la velocidad adimensional es desarrollada detalladamente en el Apéndice A.

$$v_D = q_D \left[-\frac{1}{x_D} \exp\left(-\frac{x_D^2}{4t_{fD}}\right) - \frac{1}{(2-x_D)} \exp\left(-\frac{(2-x_D)^2}{4t_{fD}}\right) \right]; \quad (4.2)$$

en donde las variables adimensionales para el caso de flujo transitorio radial se definen como:

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \quad d_D = \frac{d_f}{r_w}, \quad q_{RD1} = \frac{qB\mu c_t}{2\pi kh d_D^2} \quad y \quad t_{fD} = \frac{tk}{\phi\mu c_t d_f^2}. \quad (4.3)$$

El objetivo principal de esta tesis es estimar el tiempo de irrupción conforme el agua llega al pozo; como se puede observar la ecuación diferencial (4.2) es no lineal, la cual no tiene una solución simple de obtener. Por lo tanto, para resolver esta ecuación no lineal se programó un código numérico en lenguaje FORTRAN, el cual resuelve la ecuación discretizada para el fluido y tiene iteración interna, producto de la no linealidad, y como salida proporciona el tiempo que tarda el flujo proveniente de la falla hacia el pozo.

La solución del método numérico requiere que el espacio continuo (x_D, t_{fD}) se proyecte a uno discreto, considerando un mallado con puntos no equiespaciados se resuelve bajo las condiciones iniciales cuando $x_D = 1$ en $t_{fD} = 0$, lo que significa que al principio del cálculo el agua se encuentra en la falla y se va calculando el tiempo conforme avanza hacia el pozo.

El mapeo desde el espacio y el tiempo continuos de la ecuación (4.2) del frente de avance al espacio y tiempo discretos tienen la forma:

$$\begin{aligned} x_D &= \left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2} \right). \\ \Delta t_{fD} &= t_{fDi+1} - t_{fDi}. \\ t_{fD} &= \left(\frac{t_{fDi+1} + t_{fDi}}{2} \right). \\ \Delta x_D &= x_{Dj+1} - x_{Dj}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Denotamos a x_{Dj+1} , como la solución aproximada de la ecuación diferencial, que será aquella

solución de la ecuación en diferencias finitas siguiente:

$$x_{Dj+1} = x_{Dj} - (t_{fDi+1} - t_{fDi})q_{RD1} \left[\frac{2}{x_{Dj+1} + x_{Dj}} \exp \left(-\frac{\left(\frac{x_{Dj+1}+x_{Dj}}{2}\right)^2}{4\left(\frac{t_{fDi+1}+t_{fDi}}{2}\right)} \right) + \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{x_{Dj+1}+x_{Dj}}{2}\right)\right)} \exp \left(-\frac{\left(2 - \left(\frac{x_{Dj+1}+x_{Dj}}{2}\right)\right)^2}{4\left(\frac{t_{fDi+1}+t_{fDi}}{2}\right)} \right) \right], \quad (4.5)$$

De la ecuación (4.5), se calcula el comportamiento del tiempo adimensional a un gasto adimensional y distancia adimensional; la ecuación se resolvió por técnicas convencionales como el método iterativo y la condición de convergencia. La gráfica 4.5 presenta el comportamiento del tiempo adimensional para un gasto adimensional contra la distancia adimensional obtenida a partir de la ecuación (4.5).

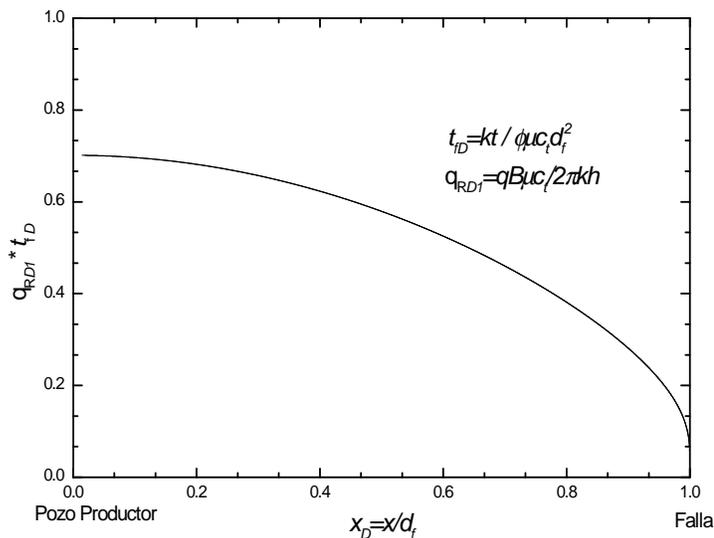


Figura 4.5: Variación del tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario contra la distancia adimensional, para flujo radial en estado transitorio.

En la gráfica 4.6, se representa el comportamiento del tiempo adimensional que tarda en llegar el fluido para diferentes gastos adimensionales proveniente de una falla

conductiva. Es posible observar que para valores de gasto adimensional q_{RD1} grandes el tiempo adimensional t_{fD} en que tarda en llegar el agua al pozo es menor.

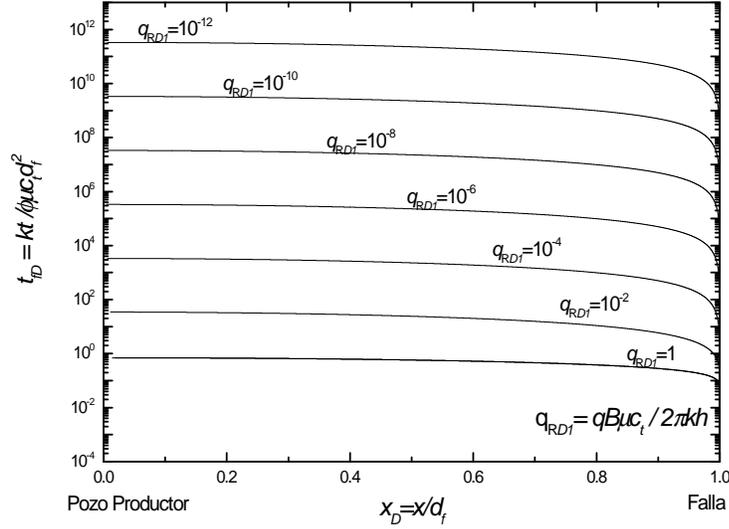


Figura 4.6: Variación del tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para flujo radial en estado transitorio.

4.1.2. Flujo Radial en Estado Estacionario

La ecuación analítica que representa la solución del comportamiento de la velocidad de los fluidos para un régimen estacionario es:

$$v_D = -q_{RD2} \left[\frac{4}{2x_D - x_D^2} \right]. \quad (4.6)$$

donde el gasto está definido como

$$q_{RD2} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi kh}.$$

Como se puede observar la solución de la ecuación de velocidad adimensional del fluido es una ecuación lineal muy simple de resolver, así que para determinar el tiempo se integra el

inverso de la velocidad obteniéndose:

$$t_{fD} = \int_1^{x/d} \frac{dx_D}{v_D}. \quad (4.7)$$

Finalmente la ecuación analítica que representa el tiempo de invasión de un pozo productor cercano a una falla conductiva es:

$$t_{fD} = \frac{1}{12q_{RD2}} [x_D^3 - 3x_D^2 + 2]. \quad (4.8)$$

El desarrollo matemático se encuentra en el Apéndice B. La gráfica 4.7 presenta el comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para flujo estacionario, obtenido por medio de la ecuación (4.8).

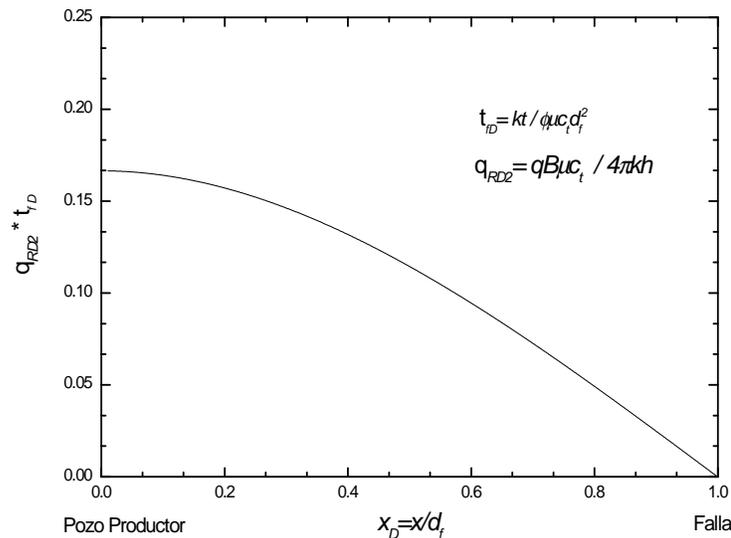


Figura 4.7: Variación del tiempo adimensional con un gasto adimensional unitario con respecto a la distancia adimensional, para flujo radial en estado estacionario.

A continuación se generó la gráfica 4.8 siguiente, la cual representa el comportamiento del tiempo adimensional con respecto a la distancia adimensional a diferentes

gastos adimensionales, para un sistema de un pozo cercano a una falla. A partir de los resultados anteriores, es posible establecer que por medio de la ecuación (4.8) se puede estimar una manera sencilla para calcular el tiempo de irrupción para un pozo productor cercano a una falla conductiva para un flujo estacionario. Para poder comparar los resultados que se

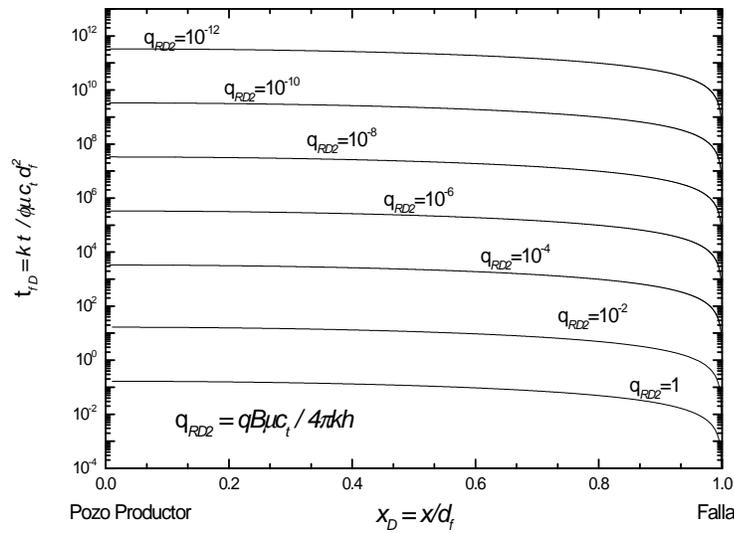


Figura 4.8: Variación del tiempo adimensional con respecto a la distancia adimensional, para flujo radial en estado estacionario.

obtuvieron para el régimen estacionario y régimen transitorio de flujo radial, se emplearon las mismas escalas adimensionales de tiempo y distancia que permiten observar el comportamiento de los dos regímenes estudiados, a continuación se muestra la comparación de las dos curvas en la figura 4.9, para algunos valores reales de campo.

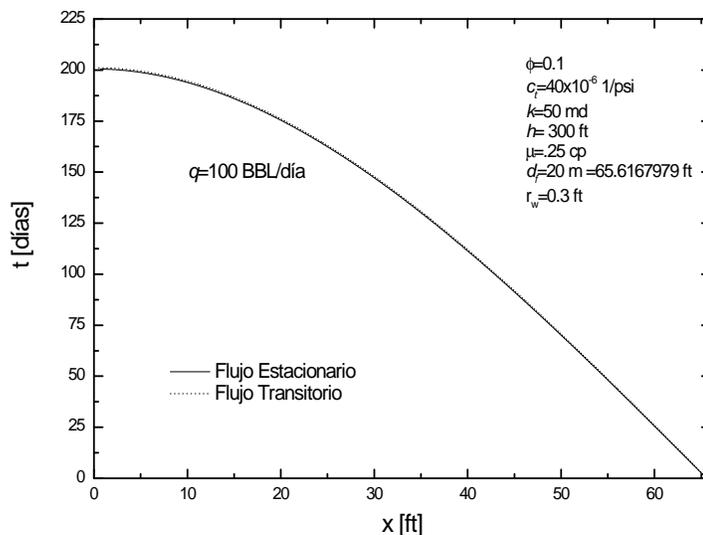


Figura 4.9: Comparación de flujo radial en estado estacionario y en estado transitorio para valores de un caso de campo.

La solución analítica del flujo estacionario es una aproximación al caso real de un pozo localizado a una distancia de una falla que proporciona resultados casi idénticos a los obtenidos con la solución de flujo transitorio cuando se evalúa para valores reales de campo, como se puede ver en la figura 4.9.

4.1.3. Flujo Esférico en Estado Transitorio

La expresión siguiente representa la velocidad de flujo esférico, la solución se desarrolló detalladamente en el Apéndice C, como se puede observar la ecuación diferencial es no lineal, la cual no se puede resolver fácilmente

$$\begin{aligned}
v_D = & \frac{qB\mu c t}{4\pi k d_f d_D^2} \left[\frac{1}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) - \frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right. \\
& - \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& + \frac{1}{\pi [2 - x_D] \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{[2 - x_D] \pi \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& \left. - \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right]. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial no lineal (4.9), correspondiente a flujo esférico se sigue el mismo procedimiento señalado anteriormente para flujo radial, es decir se resuelve la ecuación utilizando un método numérico. La ecuación diferencial no lineal (4.9), al principio se resuelve bajo la condición inicial $x_D = 1$ (nos localizamos en la frontera externa) a un tiempo $t_{fD} = 0$. La ecuación se discretiza de tal manera que la posición y el tiempo están definidos por las ecuaciones 4.4. La ecuación para flujo esférico en régimen transitorio es:

$$\begin{aligned}
\Delta x_D = q_{ED_1} \Delta t_{fD} & \left[\frac{1}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{x_D d_D - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \right. \\
& - \frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_D - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp (x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\exp (x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp (x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& + \frac{1}{\pi [2 - x_D] \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp (d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{[2 - x_D] \pi \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
& + \frac{\exp (d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& - \frac{\exp (d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{d_D (2 - x_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para propósitos reales es práctico graficar el tiempo de irrupción en cualquier punto del yacimiento en función de variables adimensionales. Las definiciones de las variables adimensionales para flujo esférico en régimen transitorio son las siguientes.

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \quad d_D = \frac{d_f}{r_w}, \quad q_{ED_1} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f} \quad \text{y} \quad t_{fD} = \frac{tk}{\phi \mu c_t d_f^2}. \tag{4.11}$$

El método empleado de solución de diferencias finitas es similar al de flujo radial, aunque, debe mencionarse que la función error complementaria presentó problemas al momento de programarla para valores donde las distancias son muy grandes, ya que generaba un error de

precisión por el rango de dígitos que maneja la computadora para funciones exponenciales; por lo anterior, se buscó otra alternativa para programar la función error, después de varios intentos utilizando otras opciones como series asintóticas e identificando las funciones donde se tiene el problema, se resolvió haciendo uso de la definición de la integral de la función error complementaria $\operatorname{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-t^2} dt$ utilizando un método numérico para programar la integral como una función, con esta solución se logró obtener óptimos resultados correctos para un rango muy grande de distancias a la falla. La ecuación final para obtener los tiempos de irrupción en un flujo esférico en comportamiento transitorio, bajo diferencias de posición y tiempo quedó como.

$$\begin{aligned}
\Delta x_D = & q_{ED_1} \Delta t_{fD} \left[-\frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right. \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi} x_D^2} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} }^{\infty} \exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& - \frac{2}{\sqrt{\pi} x_D} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} }^{\infty} \exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi} (2 - x_D)^2} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + (2 - x_D) d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} }^{\infty} \exp((2 - x_D) d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi} (2 - x_D)} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + (2 - x_D) d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} }^{\infty} \exp((2 - x_D) d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \right]. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Este sistema se resolvió por el método iterativo y la condición de convergencia. La gráfica 4.10 correspondiente representa el comportamiento del tiempo adimensional para un gasto adimensional contra la distancia adimensional, estimada a partir de la ecuación (4.12).

La curva tipo 4.11, representa el comportamiento del tiempo adimensional contra

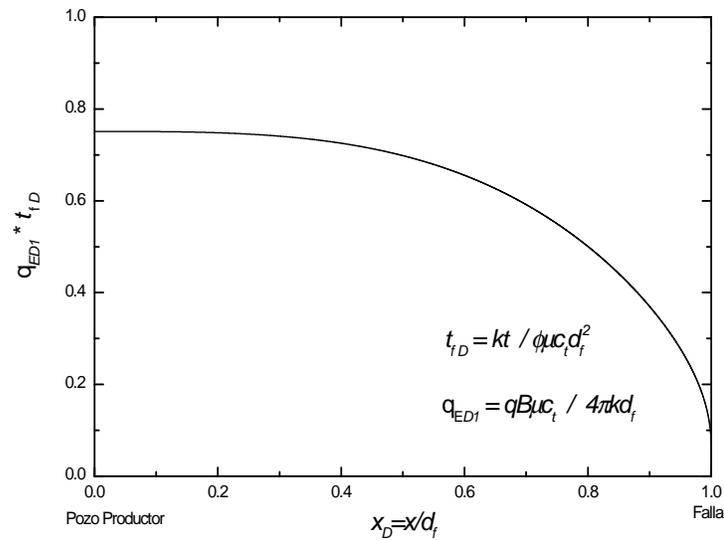


Figura 4.10: Tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario contra la distancia adimensional, para un flujo esférico en un régimen transitorio.

la distancia adimensional para varios gastos adimensionales para un sistema con un pozo a una distancia a una falla. Es posible observar que para valores de gasto adimensional q_{ED1} , grandes el tiempo adimensional t_{fD} que tarda en llegar el agua es menor. De la ecuación (4.12) se puede calcular el comportamiento del tiempo adimensional a cualquier gasto y distancia adimensional si se conocen los demás parámetros involucrados.

4.1.4. Flujo Esférico en Estado Estacionario

La ecuación que representa el comportamiento de la velocidad conforme avanza el agua hasta el pozo productor, en un régimen estacionario en flujo esférico es

$$v_D = -q_{ED2} \left[\frac{2x_D^2 - 4x_D + 4}{x_D^4 - 4x_D^3 + 4x_D^2} \right]. \quad (4.13)$$

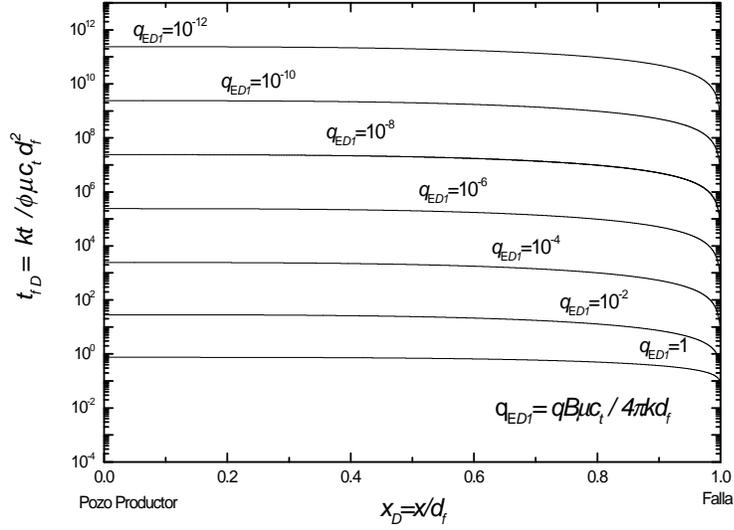


Figura 4.11: Tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para flujo esférico en un estado transitorio.

En el apéndice D, se ha realizado un análisis más detallado de las ecuaciones. De la misma manera que en flujo radial en régimen estacionario, es una ecuación lineal muy simple de resolver. Por lo tanto se integra el inverso de la velocidad, obteniéndose la integral siguiente:

$$t_{fD} = \int_1^{x/d} \frac{dx_D}{v_D}. \quad (4.14)$$

$$t_{fD} = -\frac{1}{q_{ED2}} \int_1^{x/d} \left[\frac{x_D^4 - 4x_D^3 + 4x_D^2}{2x_D^2 - 4x_D + 4} \right] dx_D. \quad (4.15)$$

La ecuación analítica que expresa el tiempo de irrupción cercano a una falla conductiva, para condiciones de flujo esférico en estado estacionario es:

$$t_{fD} = -\frac{1}{q_{ED2}} \left[\frac{1}{6}x_D^3 - \frac{1}{2}x_D^2 - x_D + 2 \arctan(x_D - 1) + \frac{4}{3} \right]. \quad (4.16)$$

Las definiciones para las variables adimensionales para flujo esférico son las siguientes:

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \quad t_{fD} = \frac{kt}{\phi c_t \mu d_f^2} \quad \text{y} \quad q_{ED2} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f}. \quad (4.17)$$

La gráfica 4.12, representa el comportamiento del tiempo adimensional para un gasto adimensional contra la distancia adimensional, en estado estacionario a partir de la ecuación (4.16).

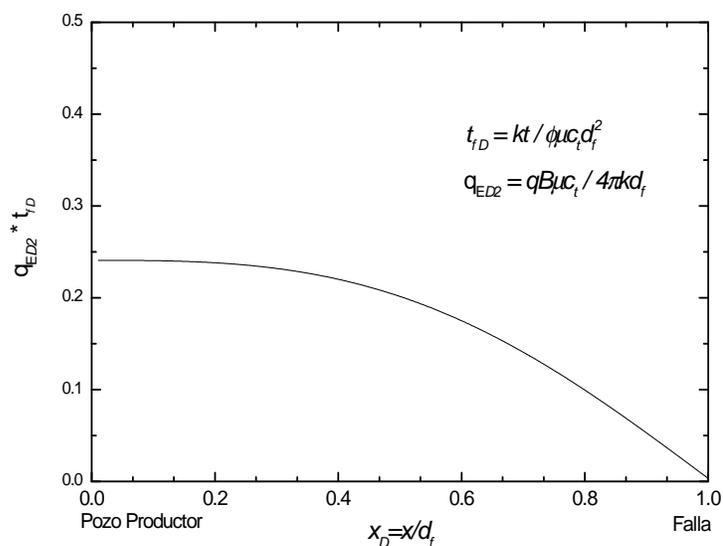


Figura 4.12: Tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario con respecto a la distancia adimensional, para un flujo esférico en un estado estacionario.

A continuación se generó la curva tipo 4.13 siguiente, que representa el comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia adimensional para diferentes gastos adimensionales en un sistema de un pozo cercano a una distancia a la falla.

Se presenta la gráfica que permita observar el comportamiento del régimen transitorio y estacionario para flujo esférico. La solución analítica del flujo estacionario es una aproximación al caso real de un yacimiento infinito con un pozo a una distancia de una falla estos proporcionan resultados casi idénticos a los obtenidos con la solución de flujo transitorio cuando se evalúa para valores de campo, ver la gráfica 4.14 siguiente .

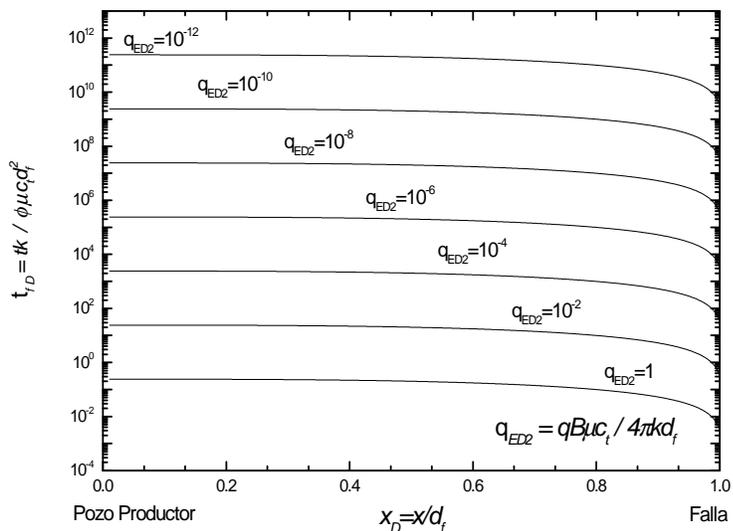


Figura 4.13: Tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para un flujo esférico en un estado estacionario.

4.2. Problema de Flujo en la Falla

La solución para el flujo en la falla, se resuelve independientemente al problema del yacimiento. El objetivo principal de esta sección es derivar una ecuación para determinar el tiempo en que el fluido proveniente del acuífero fluye a través de la falla hasta llegar al nivel del pozo activo, como se muestra en la figura 4.15.

Un flujo bilineal resulta al combinar el flujo del yacimiento, dentro de la falla y el flujo lineal en el plano de la falla [22]. En la figura 4.15 se puede observar que el flujo viaja hacia y por adentro de la falla; por lo tanto se toma como base la solución desarrollada para flujo bilineal de Cinco-Ley y Samaniego[22], en la cual se tiene un pozo intersectante a una falla conductiva. Para este caso particular los resultados se extienden cuando el pozo no intersecta el plano de la falla, la cual se encuentra a una distancia d_f , así que las coordenadas

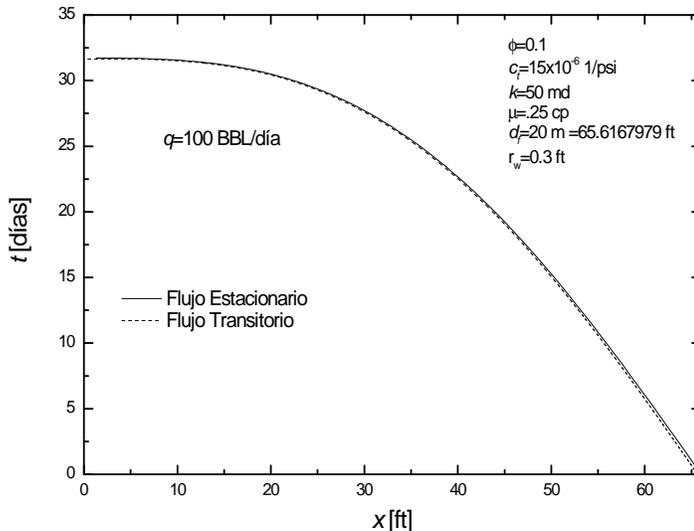


Figura 4.14: Comparación del comportamiento de flujo esférico en estado estacionario y en estado transitorio para valores reales de campo.

del sistema se ajusta para que coincidan con el plano de la falla.

En la solución del problema de flujo en la falla se utilizan los mismos pasos empleados para la parte del yacimiento. De la solución de la ecuación de presión en la falla del flujo bilineal[22] se deriva con respecto a la distancia y el gradiente se sustituye en la ecuación de la *Ley de Darcy* para obtener la velocidad de los fluidos que viajan del contacto por la falla hasta llegar al nivel del pozo productor cuando $x_D = 0$. En el Apéndice E se describe el desarrollo detallado antes descrito.

La ecuación de velocidad de los fluidos que viajan a través y a lo largo de la falla es:

$$\overline{v}_{fD} = -\frac{\phi_m}{\phi_f} q_D \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \left(\frac{1}{s} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right) \tag{4.18}$$

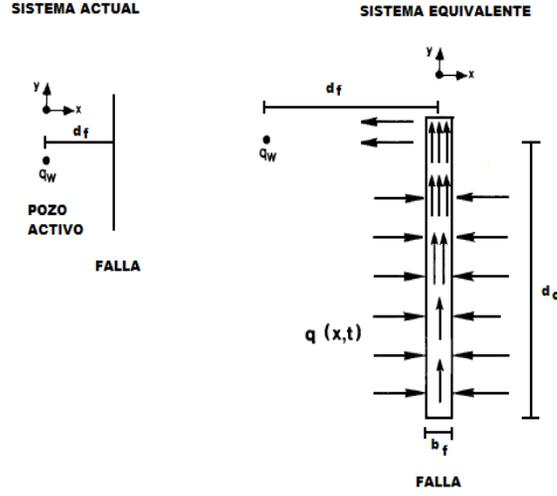


Figura 4.15: Modelo físico esquemático del problema del flujo en la falla.

donde las variables adimensionales se definen como:

$$q_D = \frac{qB\mu c_t}{2kh}, \quad b_{fD} = \frac{b_f}{d_f}, \quad y_{CD} = \frac{d_c}{d_f}, \quad F_{CD} = \frac{b_f k_f}{k d_f} \quad \text{y} \quad t_{fD} = \frac{kt}{\phi\mu c_t d_f^2},$$

donde y_C es la distancia al contacto y F_{CD} es la conductividad adimensional de la falla.

La ecuación de velocidad en la falla es una ecuación no lineal por lo tanto su solución no se puede resolver fácilmente, por lo tanto se resuelve numéricamente utilizando diferencias finitas y métodos iterativos, la ecuación se discretiza utilizando diferencias finitas centradas.

$$y_{CD} = \left(\frac{y_{CDk+1} + y_{CDk}}{2} \right). \quad (4.19)$$

$$\Delta t_{Df} = t_{fDi+1} - t_{fDi}.$$

$$t_{fD} = \left(\frac{t_{fDi+1} + t_{fDi}}{2} \right).$$

$$\Delta y_{CD} = y_{CDk+1} - y_{CDk}.$$

El resultado de la ecuación de la velocidad en la falla en diferencias finitas es:

$$\overline{v_{fD}} = -\frac{\phi_m}{\phi_f} q_D \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \left(\frac{1}{s} \exp \left(- \left(\frac{y_{CDk+1} + y_k}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right). \quad (4.20)$$

La ecuación (4.18) no lineal, se resuelve utilizando iteración con relajación para cada tiempo.

El grado de convergencia que se pide para cada iteración es de 1×10^{-5} , además como se puede observar en la ecuación 4.20 se tiene la variable de \mathcal{L} aplace por lo que posteriormente se utiliza el algoritmo de Stefest [23] para resolver la antitransformada de \mathcal{L} aplace.

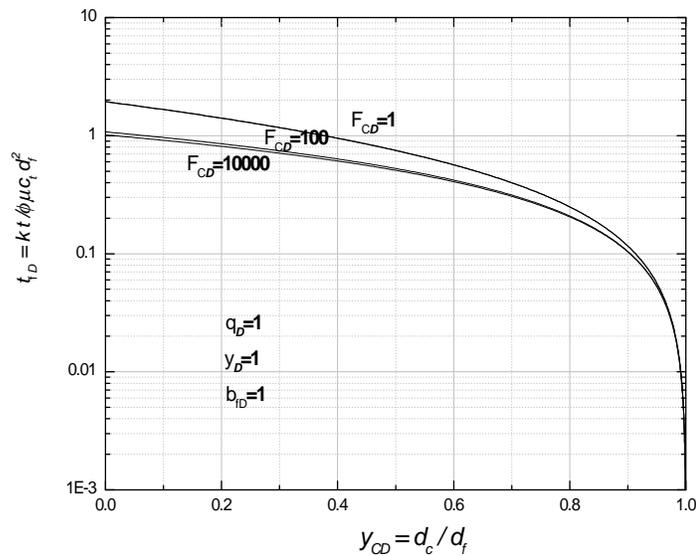


Figura 4.16: Comportamiento del tiempo del flujo del agua el cual viaja desde la distancia al contacto d_c hasta el nivel del pozo a través de una falla conductiva.

Al graficar la ecuación de velocidad del fluido en la falla como se muestra en la gráfica 4.16, se puede observar que el comportamiento del fluido varía dependiendo del valor de la conductividad adimensional F_{CD} ; mientras más grande es la conductividad de la falla el fluido se trasladará más rápido por la falla, cuando la distancia al contacto d_c es la misma

que la distancia a la falla d_f el valor de $y_{CD} = 1.0$. Estos resultados tambien dependen del gasto adimensional q_D y ancho adimensional b_{fD} .

De forma similar a la figura 4.16 anterior, la figura 4.17 muestra el comportamiento del agua en la falla, conforme q_D es mayor el tiempo es menor, lo cual indica que para el modelo de flujo el q_D controla la velocidad del agua en la falla.

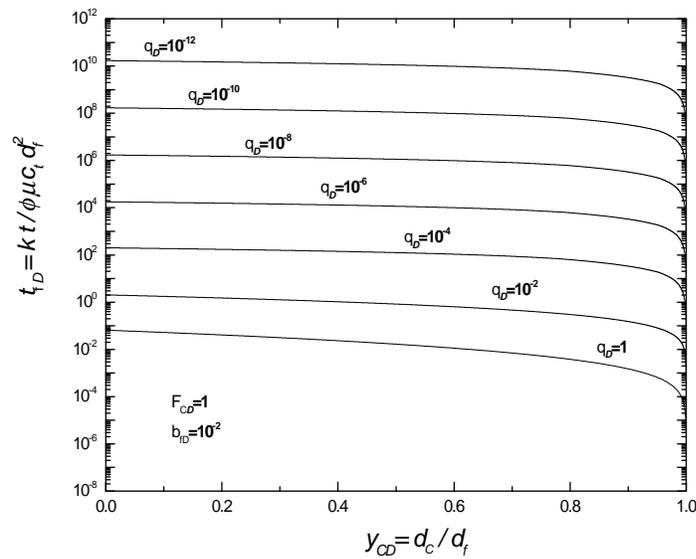


Figura 4.17: Comportamiento del fluido a través de la falla, a diferentes gastos adimensionales q_D .

Los resultados que se presentan en la figura 4.18 son para un rango mayor de y_{CD} , valores de $q_D = 10^{-4}$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando F_{CD} , se observa que la variación de la F_{CD} influye en el tiempo en que tarda en viajar el agua en la falla; a mayor F_{CD} el agua llegará más rápido al pozo. Además se muestra que a valores de y_{CD} pequeños las curvas de diferente F_{CD} se van juntando caso contrario sucede cuando las distancias son mayores

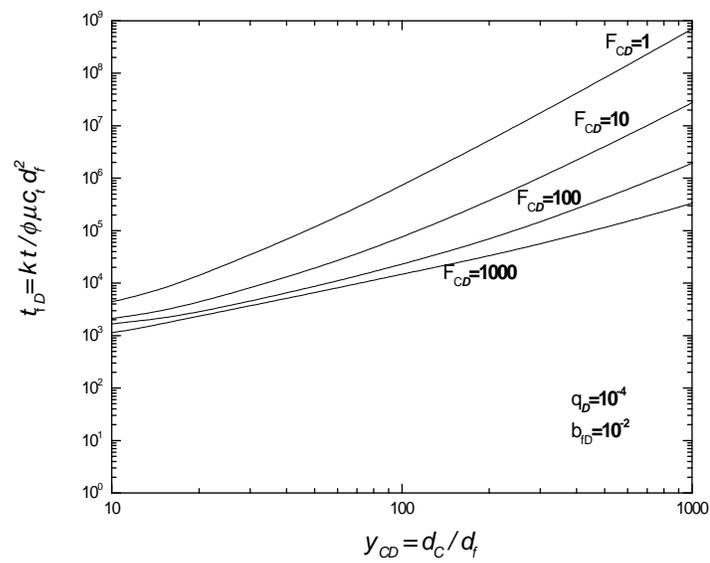


Figura 4.18: Comportamiento del tiempo adimensional con respecto a la distancia adimensional para $q_D = 10^{-4}$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y diferentes F_{CD} .

En la figura 4.19 podemos comprobar una vez más el comportamiento de la ecuación (4.20) conforme F_{CD} aumenta el tiempo disminuye, comparando las dos figuras 4.18 y 4.19 se observa que conforme el q_D es mayor el fluido se trasladará más rápido por la falla.

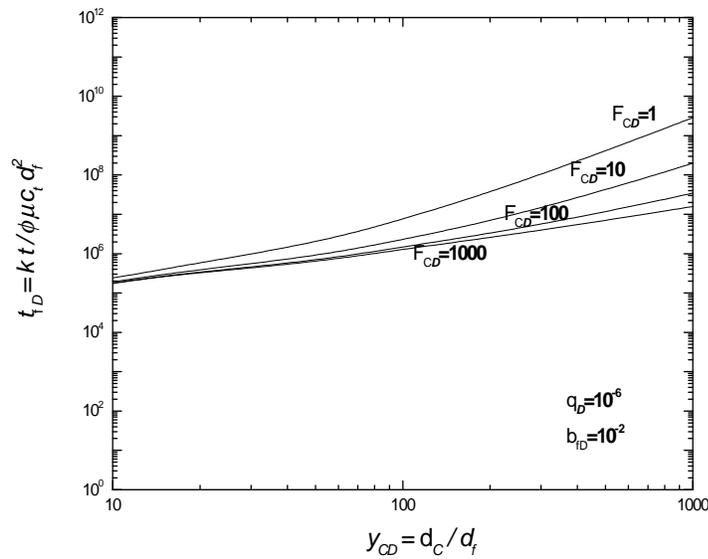


Figura 4.19: Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $q_D = 10^{-6}$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y diferentes F_{CD} .

A continuación, la figura 4.20 muestra una tendencia similar, dado valores de $b_{fD} = 10^{-4}$ y $q_D = 10^{-4}$ a diferentes conductividades adimensionales F_{CD} ; si se compara las figuras 4.18 y 4.20 se puede notar que el comportamiento del agua viajará mucho más rápido por la falla cuando b_{fD} es menor, lo cual se debe a que el comportamiento de la velocidad del modelo planteado depende de la distancia entre el pozo y la falla, lo cual implica que al disminuir d_f el tiempo será menor.

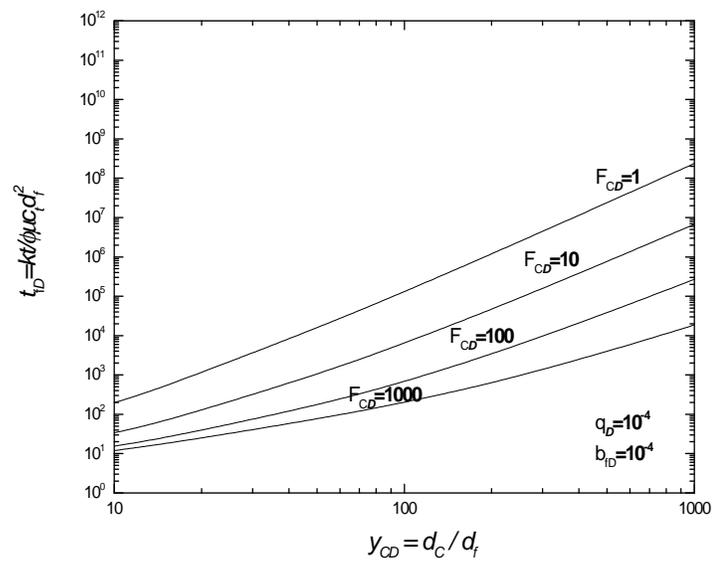


Figura 4.20: Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para un $q_D = 10^{-4}$, $b_{fD} = 10^{-4}$ y diferentes F_{CD} .

En las gráficas siguientes se muestra la variación del parámetro gasto adimensional q_D , observándose que conforme disminuye el valor de q_D , la curva se hace más pronunciada, lo cual nos indica que los fluidos viajaran más lentamente por la falla como se muestra en la figura 4.21.

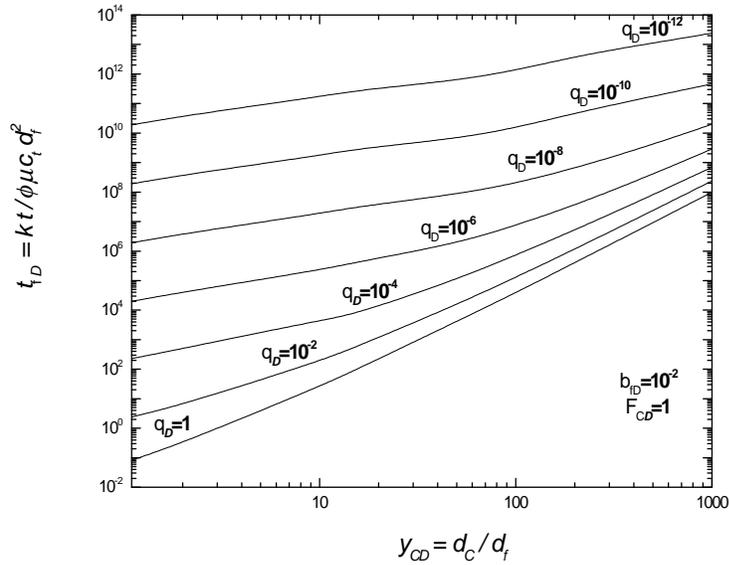


Figura 4.21: Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 1$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D .

A continuación se muestra la variación del parámetro F_{CD} comparando la gráfica 4.21 con las gráficas 4.22 y 4.23, se puede observar que conforme el valor de F_{CD} es más grande el comportamiento del tiempo será menor. De las gráficas mostradas, también se concluye que para valores de F_{CD} el comportamiento del tiempo es casi el mismo.

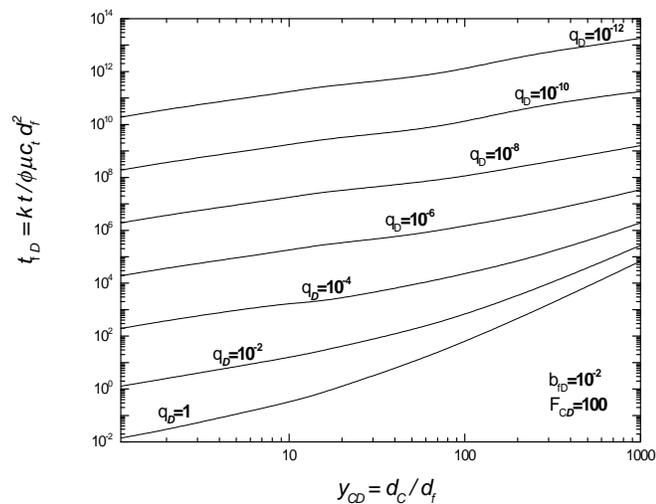


Figura 4.22: Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 100$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D .

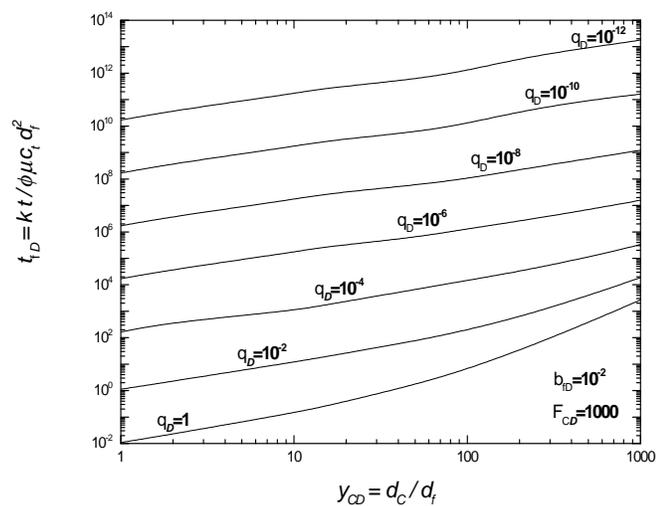


Figura 4.23: Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 1000$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D .

4.2.1. Comprobación de la ecuación de velocidad en la falla

Para realizar la comprobación de la ecuación (4.18) se toma en cuenta la aportación del acuífero a la falla, ver figura 4.24, tomando la ecuación de la presión en la fractura del artículo de flujo bilineal [22] y sustituyendo la ecuación en el gradiente de la presión del yacimiento [22] se obtiene el gradiente de la presión con respecto a la distancia en $x_D = 0$; separadamente se obtiene el gasto de la aportación del acuífero a la falla, esto es desde el infinito hasta la distancia al contacto y se sustituyen en la *Ley de Darcy* para obtener la velocidad del flujo en la falla: el método se describe detalladamente en el Apéndice F.

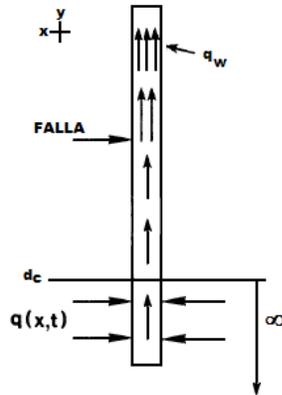


Figura 4.24: Esquema propuesto para la comprobación del flujo en la falla.

Finalmente se comprueba que la solución de la ecuación es la misma que la ecuación

(4.20).

$$\overline{v_{fD}} = -q_D \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \left(\frac{1}{s} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right) \quad (4.21)$$

Capítulo 5

Método para obtener el tiempo de invasión de agua

1. Obtener información de algunas propiedades del yacimiento, como la permeabilidad k , compresibilidad total del sistema c_t , distancia a la falla d_f y conductividad en la falla F_{CD} ; la cual se estima utilizando paquetes especializados de análisis de pruebas de presión.
2. Obtener información a través de registros geofísicos y análisis de fluidos contenidos en los núcleos, porosidad ϕ y viscosidad μ , respectivamente.
3. Obtener la distancia al contacto agua-aceite d_c , por medio de planos estructurales y calcular la variable y_{CD} donde $y_{CD} = d_c/d_f$.
4. Obtener el tiempo de producción de agua por medio de las historias de producción del pozo y pasarlo a unidades adimensionales t_{PD} .

5. Obtener el tiempo t_1 que tarda en llegar el agua de la falla al pozo y convertirlo a unidades adimensionales t_{fD1} , a través de los cuatro modelos matemáticos planteados de acuerdo con el tipo de geometría de flujo de fluidos en el yacimiento. Los cuatro modelos desarrollados son:
 - Flujo radial en el yacimiento para estado transitorio y estado estacionario.
 - Flujo esférico en el yacimiento para estado transitorio y estado estacionario.
6. Calcular t_{fD2} el cuál es el tiempo en que tarda en llegar el agua a través de la falla, $t_{fD2} = |t_{fD1} - t_{PD}|$.
7. Calcular el gasto adimensional q_D .
8. Utilizando el programa desarrollado para obtener el tiempo t_{fD2} en que viaja el agua a través de la falla dadas las variables de entrada y_{CD} , q_D y F_{CD} , se construye la gráfica b_{fD} con respecto a t_{fD2} .
9. De la gráfica obtenida y el valor de t_{fD2} del paso 6, se obtiene b_{fD} con el cual se calcula el ancho de la falla b_f .
10. Con el valor de b_{fD} se construye la gráfica t_{fD2} contra y_{CD} y con el valor de la variable y_{CD} obtenemos t_{fD2} para obtener el valor del tiempo t_2 que tarda en llegar el agua a través de la falla.
11. Finalmente se obtiene el tiempo de invasión del agua t_f , sumando los tiempos t_1 y t_2 .

Capítulo 6

Aplicación de Campo

6.1. Antecedentes y Objetivo del Caso de Campo

El Campo Jujo-Tecominoacán ha producido desde 1980, principalmente mediante el mecanismo de expansión volumétrica del sistema con entrada de agua. El yacimiento es naturalmente fracturado conteniendo fallas conductivas semipermeables e impermeables, existiendo evidencia de una comunicación vertical excelente ocasionada por fracturas naturales. En algunos casos el agua ha invadido los pozos vía fallas conductivas, tal como lo indican las pruebas de presión y los datos de producción.

La producción del campo ha descendido debido al depresionamiento del campo y a la invasión de pozos por agua, ver figura 6.1.

De acuerdo a las pruebas de presión disponibles, se seleccionó dos pozos de Tecominoacán, los cuales presentan la característica principal de frontera a presión constante.

Por lo anterior los pozos 446 y 125 de Tecominoacán tiene la característica principal para poder aplicar la metodología para estimar el tiempo de invasión de agua cercanos a

característica de una frontera a presión constante y que además la falla se encuentra muy cercana al pozo. El análisis de las pruebas presión indican que los datos de pozo se ajustan a un modelo de un pozo en un medio homogéneo cercano a una falla conductiva con los siguientes parámetros.

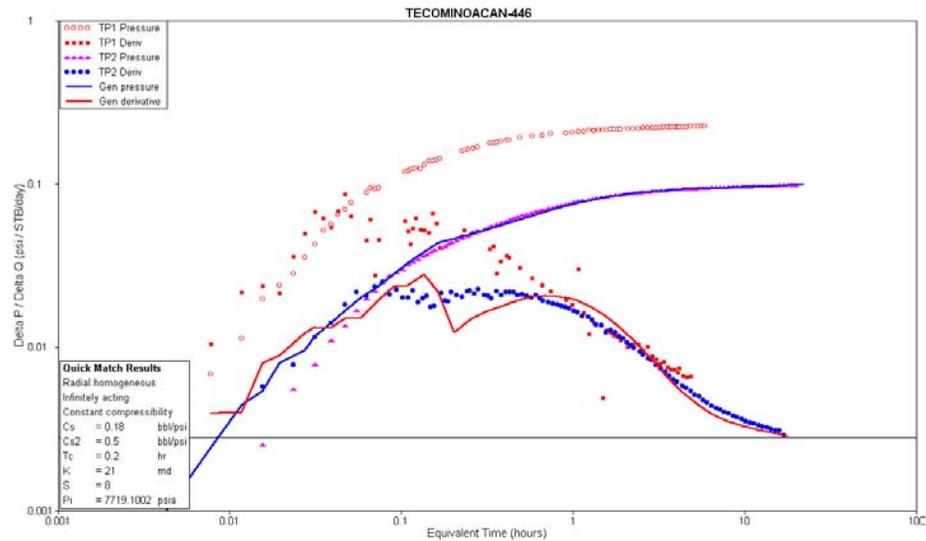


Figura 6.2: Presión y derivada de presión para la curva de incremento del pozo T-446.

Permeabilidad, k	=	21 md	
Porosidad, ϕ	=	0.02	
Distancia a la falla, d_f	=	514.7 ft	= 156.88 m
Espesor, h	=	640 ft	= 195.072 m
Compresibilidad Total, c_t	=	3×10^{-5} psi ⁻¹	
Viscosidad, μ	=	0.335 cp	
Factor de volumen de aceite, B	=	1.2	
Gasto inicial, q	=	1525 bls/día	
Radio del pozo, r_w	=	0.21 ft	
Conductividad de la falla, F_{CD}	=	0.1, 1, 10, 100	
Distancia del contacto agua/aceite, d_C	=	13, 123.35 ft	= 4000 m

De las historias de producción se obtiene el tiempo que tarda en entrar el agua al pozo, para este pozo se tardó 68 meses (49674 hrs), el cuál se pasa a unidades adimensionales el cual se representa con t_{PD} .

$$t_{PD} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{kt}{\phi \mu c_t d_f^2}$$

$$t_{PD} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{(21md)(68mes)(730.5hrs/mes)}{(0.02)(0.335cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(514.7ft)^2} = 5165.99$$

A continuación se obtiene el tiempo de invasión del agua al pozo $t_1 = 22.5$ meses (16436.25 hrs), el cual se obtiene utilizando el modelo de flujo radial desarrollado y se expresa en forma adimensional t_{fD1} , ver figura 6.3.

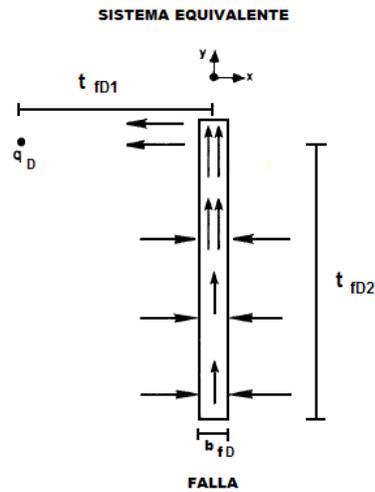


Figura 6.3: Esquema del sistema

$$t_{fD1} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{kt}{\phi \mu c_t d_f^2}$$

$$t_{fD1} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{(21md)(22.5mes)(730.5hrs/mes)}{(0.02)(0.335cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(514.7ft)^2} = 1709.33$$

Se resta los tiempos t_{PD} y t_{fD1} , se obtiene el tiempo t_{fD2} , el cual es el tiempo que tarda en llegar el agua por la falla desde el contacto hacia la altura del pozo

$$t_{fD2} = |t_{fD1} - t_{PD}| = 3459.65$$

Calculando el gasto adimensional

$$q_D = (4.44 \times 10^4) \frac{qB\mu c_t}{2kh}$$

$$q_D = (4.44 \times 10^4) \frac{(1525 \text{bls/día})(0.335 \text{cp})(1.2)(3 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1})}{(2)(21 \text{md})(640 \text{ft})} = 3.30 \times 10^{-2}$$

Con las variables adimensionales (q_D, y_{CD}, t_{fD2}) se crea la gráfica b_{fD} contra t_{fD2} para obtener b_{fD} y por lo tanto el ancho de la falla b_f , después se construye la gráfica t_{fD2} con respecto a y_{CD} y se obtiene la variable t_{fD2} para así obtener el tiempo t_2 que tarda en viajar el agua por la falla desde el contacto hacia la altura del pozo.

Resultados

A continuación se presentan sólo los resultados obtenidos de las corridas del programa y del ajuste de las gráficas construidas, a diferentes conductividades, las gráficas no se muestran debido a que son muchas

- $F_{CD} = 100$, $q_D = 3.30 \times 10^{-2}$, $y_{CD} = 25.5$, $t_{fD2} = 3459.6$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 0.82$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7 \text{ft})(0.82)(1 \text{m}/3.28 \text{ft}) = 128.86 \text{ m}$$

$$t_{fD2} = 3484.2$$

$$t_2 = \frac{\phi \mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.02)(0.335 \text{cp})(3 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1})(514.7 \text{ft})^2 (3484.2)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(21 \text{md})} = 45.69 \text{ meses}$$

- $\mathbf{F}_{CD} = \mathbf{10}$, $q_D = 3.30 \times 10^{-2}$, $y_{CD} = 25.5$, $t_{fD2} = 3459.6$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 0.48$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7ft)(0.48)(1m/3.28ft) = 75.32m$$

$$t_{fD2} = 3576.2$$

$$t_2 = \frac{\phi\mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.02)(0.335cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(514.7ft)^2 (3576.2)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(21md)} = 47.07 \text{ meses}$$

- $\mathbf{F}_{CD} = \mathbf{1}$, $q_D = 3.30 \times 10^{-2}$, $y_{CD} = 25.5$, $t_{fD2} = 3459.6$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 0.004$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7ft)(0.004)(1m/3.28ft) = 6.27m$$

$$t_{fD2} = 3951.35$$

$$t_2 = \frac{\phi\mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.02)(0.335cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(514.7ft)^2 (3951.35)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(21md)} = 52.01 \text{ meses}$$

- $\mathbf{F}_{CD} = \mathbf{0,1}$, $q_D = 3.30 \times 10^{-2}$, $y_{CD} = 25.5$, $t_{fD2} = 3459.6$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 3.8 \times 10^{-7}$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7ft)(3.8 \times 10^{-7})(1m/3.28ft) = 5.96 \times 10^{-5}m = 0.59 \text{ mm}$$

$$t_{fD2} = 4108.53$$

$$t_2 = \frac{\phi\mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.02)(0.335cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(514.7ft)^2 (4108.53)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(21md)} = 54 \text{ meses}$$

Finalmente se suma el tiempo (t_2) que tarda en llegar el agua del contacto a la altura del pozo y el tiempo (t_1) que tarda en llegar el agua de la falla al pozo, para obtener el tiempo de invasión de agua cercano a una falla conductiva.

$$t_f = t_1 + t_2 = 22.5 + 54 = 76.5 \text{ meses}$$

Por lo tanto el tiempo calculado es de 76.5 *meses* mientras que el tiempo que invade el agua al pozo obtenido de las historias de producción es de 68 *meses*.

Pozo Tecaminoacán 125

La figura 6.4 presenta el caso de una prueba de incremento, la curva de derivada muestra un comportamiento con fractura de conductividad finita y se ajusta con una frontera a presión constante con las siguientes propiedades:

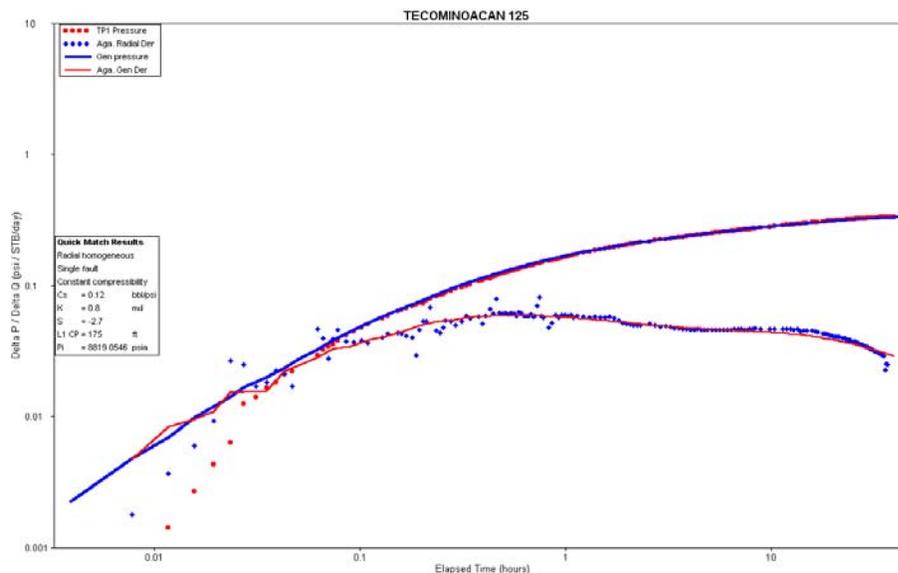


Figura 6.4: Presión y derivada de presión para la curva de incremento del pozo T-125.

Permeabilidad, k	=	0.8	md	
Porosidad, ϕ	=	0.03		
Distancia a la falla, d_f	=	175	ft	= 53.34 m
Espesor, h	=	1486	ft	= 452.93 m
Compresibilidad Total, c_t	=	3×10^{-5}	psi ⁻¹	
Viscosidad, μ	=	0.3254	cp	
Factor de volumen de aceite, B	=	1.2		
Gasto inicial, q	=	1946	bbls/día	
Radio del pozo, r_w	=	0.21	ft	
Conductividad de la falla, F_{CD}	=	1, 10, 100		
Distancia del contacto agua/aceite, d_C	=	13, 123.35	ft	= 4000.0 m

De las historias de producción se obtiene el tiempo que tarda en entrar el agua al pozo, para este pozo se tardó 81 *meses* (59170.5 *hrs*), el cuál se pasa a unidades adimensionales el cual se representa con t_{PD} .

$$t_{PD} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{kt}{\phi \mu c_t d_f^2}$$

$$t_{PD} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{(0.8 \text{ md})(81 \text{ mes})(730.5 \text{ hrs/mes})}{(0.03)(0.3254 \text{ cp})(3 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1})(175 \text{ ft})^2} = 1391.7$$

A continuación se obtiene el tiempo de invasión del agua al pozo $t_1 = 7.3$ *meses* (5332.65 *hrs*) el cual se obtiene utilizando el modelo de flujo radial desarrollado y se expresa en forma adimensional t_{fD1} .

$$t_{fD1} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{kt}{\phi \mu c_t d_f^2}$$

$$t_{fD1} = (2.637 \times 10^{-4}) \frac{(0.8 \text{ md})(7.3 \text{ mes})(730.5 \text{ hrs/mes})}{(0.03)(0.3254 \text{ cp})(3 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1})(175 \text{ ft})^2} = 125.4$$

Restando los tiempos t_{PD} y t_{fD1} , se obtiene el tiempo t_{fD2} , cual es el tiempo que tarda en llegar el agua por la falla desde el contacto hacia la altura del pozo

$$t_{fD2} = |t_{fD1} - t_{PD}| = 1266.26$$

Calculando el gasto adimensional

$$q_D = (4.44 \times 10^4) \frac{qB\mu c_t}{2kh}$$

$$q_D = (4.44 \times 10^4) \frac{(1946 \text{bls/día})(0.3254 \text{cp})(1.2)(3 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1})}{(2)(0.8 \text{md})(1486 \text{ft})} = 4.2 \times 10^{-1}$$

Resultados

A continuación se presentan sólo los valores obtenidos del programa y de las gráficas, las gráficas se omiten debido a que son muchas. Con las variables adimensionales (q_D, y_{CD}, t_{fD2}) calculadas se obtiene el ancho de la falla b_f , y el tiempo en que tarda en viajar el fluido por la falla t_2 .

- $F_{CD} = 100$, $q_D = 4.2 \times 10^{-1}$, $y_{CD} = 75$, $t_{fD2} = 1266.26$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 1.8$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7 \text{ft})(1.8)(1 \text{m}/3.28 \text{ft}) = 96.03 \text{ m}$$

$$t_{fD2} = 1253.16$$

$$t_2 = \frac{\phi \mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.03)(0.3254 \text{cp})(3 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1})(175 \text{ft})^2 (1253.16)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(0.8 \text{md})} = 72.93 \text{ meses}$$

- $F_{CD} = 10$, $q_D = 4.2 \times 10^{-1}$, $y_{CD} = 75$, $t_{fD2} = 1266.26$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 0.06$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7 \text{ft})(0.06)(1 \text{m}/3.28 \text{ft}) = 3.30 \text{ m}$$

$$t_{fD2} = 1354$$

$$t_2 = \frac{\phi \mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.03)(0.3254 \text{cp})(3 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1})(175 \text{ft})^2 (1354)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(0.8 \text{md})} = 78.80 \text{ meses}$$

- $\mathbf{F}_{CD} = \mathbf{1}$, $q_D = 4.2 \times 10^{-1}$, $y_{CD} = dc/df = 75$, $t_{fD2} = 1266.26$, se obtiene b_{fD} y t_{fD2} :

$$b_{fD} = 7.9 \times 10^{-4}$$

$$b_f = d_f \cdot b_{fD} = (514.7ft)(7.9 \times 10^{-4})(1m/3.28ft) = 4.21 \times 10^{-4}m = 4.21 \text{ mm}$$

$$t_{fD2} = 1317.69$$

$$t_2 = \frac{\phi\mu c_t d_f^2 t_{fD2}}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)k}$$

$$t_2 = \frac{(0.03)(0.3254cp)(3 \times 10^{-5}psi^{-1})(175ft)^2 (1317.69)}{(2.637 \times 10^{-4})(730.5)(0.8md)} = 76.68 \text{ meses}$$

Finalmente se suma el tiempo (t_2) que tarda en llegar el agua del contacto a la altura del pozo y el tiempo (t_1) que tarda en llegar el agua de la falla al pozo, para obtener el tiempo de invasión de agua cercano a una falla conductiva.

$$t_f = t_1 + t_2 = 7.3 + 76.68 = 83.9 \text{ meses}$$

Por lo tanto el tiempo calculado es de 83.9 *meses* mientras que el tiempo que invade el agua al pozo obtenido de las historias de producción es de 81 *meses*.

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

Basado en el desarrollo matemático expuesto, así como en los resultados del ejemplo de campo, a continuación se presentan las conclusiones siguientes:

1. Se desarrolló una metodología para obtener el tiempo de invasión de agua del pozo cercano a una falla. La solución considera el yacimiento con frontera a presión constante y flujo bilineal en la falla.
2. El flujo de desplazamiento en el yacimiento es tipo pistón.
3. Se desarrolló una metodología para obtener el ancho de la falla.
4. Se desarrolló una metodología para obtener el tiempo en que viaja el agua por la falla.
5. Las gráficas representan el comportamiento del tiempo con respecto a la posición del flujo para diferentes valores del gasto.

6. A mayor conductividad de la falla F_{CD} el agua se desplaza más rápido en la falla.
7. Se observó a través de los resultados analíticos que conforme se incrementa el gasto adimensional, los tiempos de llegada al pozo son menores.
8. En el ejemplo de campo de este trabajo, el tiempo de invasión obtenido por la metodología propuesta se aproxima a las historias de producción del pozo.
9. Se puede observar a partir de la información de campo, que el comportamiento de velocidad en el yacimiento es similar tanto para un flujo transitorio como para un flujo estacionario. Por consiguiente el efecto de la compresibilidad del área de drenaje del pozo es despreciable.
10. Se desarrolló un método para obtener el ancho efectivo al flujo de la falla.
11. Con el presente método se podrá calcular el tiempo mínimo de surgencia para la programación y localización de los siguientes pozos a perforar.

7.2. Recomendaciones

1. El presente modelo puede mejorarse si se considera la heterogeneidad en el yacimiento (doble porosidad, estratificación, etc) y factor de daño en la falla.

Apéndice A

Método para Flujo Radial en Estado Transitorio

A.1. Desarrollo Matemático del Problema

El modelo de flujo consideró las suposiciones siguientes: El yacimiento es isotrópico, homogéneo y de espesor constante; además todas las propiedades de la formación se suponen independientes de la presión, el fluido contenido en el yacimiento es ligeramente compresible con compresibilidad c_t y viscosidad μ constantes. La falla se localiza a una distancia d_f , del pozo.

La ecuación diferencial que representa el comportamiento de un fluido en un medio poroso con flujo radial es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

con las condiciones de frontera siguiente. Condición inicial: distribución uniforme

$$p(r, 0) = p_i. \quad (\text{A.2})$$

Condición de frontera interna: gasto constante en el pozo

$$\frac{\partial p(r_w, t)}{\partial r} = \frac{q\mu B}{2\pi kh r_w}. \quad (\text{A.3})$$

Condición de frontera externa: yacimiento infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i. \quad (\text{A.4})$$

Las definiciones de las variables adimensionales usadas tradicionalmente para este tipo de flujo son las siguientes:

$$\begin{aligned} r_D &= \frac{r}{r_w}; \\ p_D(r_D, t_D) &= \frac{2\pi kh}{q\mu B} (p_i - p(r, t)); \\ t_D &= \frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El modelo de flujo anterior formulado por las ecuaciones A.2 a A.4, escrito en forma adimensional por medio de los grupos definidos en la ecuación A.5, resulta en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (\text{A.6})$$

$$p_D(r_D, 0) = 0. \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial p_D(1, t_D)}{\partial r_D} = -1. \quad (\text{A.8})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Obteniendo la solución para la ecuación diferencial planteada, conocida en la literatura como la “*solución línea fuente*” [24, 25].

$$p_D(r_D, t) = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right). \quad (\text{A.10})$$

Del problema a resolver se define el sistema coordenado de la manera siguiente, como se muestra en la figura A.1.

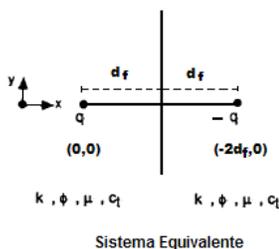


Figura A.1: Esquema propuesto para el flujo radial, hacia un pozo localizado cerca de una falla conductiva.

La solución del modelo se basa en la premisa de que en ambos lados de la falla el comportamiento de la presión obedece la ecuación de difusividad para coordenadas radiales; se plantea una ecuación para el lado izquierdo y derecho de la falla, un pozo productor y un pozo inyector de cada lado; este arreglo representa una frontera a presión constante; por lo tanto, se tiene la ecuación de presión siguiente [26]

$$p_D(r_D, t) = \underbrace{\frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_{D1}^2}{4t_D} \right)}_{\text{pozo productor}} - \underbrace{\frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_{D2}^2}{4t_D} \right)}_{\text{pozo inyector}}, \quad (\text{A.11})$$

donde el pozo imagen inyector simula el efecto una falla conductiva.

Expresando la ecuación (A.11), en coordenadas cartesianas, para el pozo productor

y para el pozo imagen inyector, se tiene las variables adimensionales adicionales siguientes:

$$x_D = \frac{x}{d_f} \quad y \quad y_D = \frac{y}{d_f}, \quad (\text{A.12})$$

donde d_f es la distancia del pozo a la falla como se muestra en la figura A.1. El pozo productor se localiza en el origen del sistema coordenado; la ecuación se expresa como

$$r_1^2 = x^2 + y^2. \quad (\text{A.13})$$

Pasando las coordenadas del pozo productor a variables adimensionales

$$r_{D1}^2 = (x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2, \quad (\text{A.14})$$

donde se define nuevas variables adimensionales

$$d_D = \frac{d_f}{r_w} \quad y \quad t_{fD} = \frac{tk}{\phi \mu c_t d_f^2}. \quad (\text{A.15})$$

Ahora, para las coordenadas cartesianas del pozo imagen inyector son

$$r_2^2 = (2d_f - x)^2 + y^2. \quad (\text{A.16})$$

En variables adimensionales las coordenadas del pozo imagen inyector son

$$r_{D2}^2 = d_D^2 (2 - x_D)^2 + d_D^2 y_D^2.$$

Sustituyendo en la ecuación (A.11), las ecuaciones para las coordenadas cartesianas adimensionales y el tiempo adimensional, resulta la ecuación siguiente para la presión adimensional del pozo productor y el pozo imagen

$$p_D(x_D, y_D, t_{fD}) = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{x_D^2 + y_D^2}{4t_{fD}} \right) - \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{(2 - x_D)^2 + (y_D)^2}{4t_{fD}} \right). \quad (\text{A.17})$$

Se obtiene la derivada de la presión con respecto a la distancia cuando $y_D = 0$, y se sustituye en la ecuación de Darcy.

$$\left. \frac{\partial p_D(x_D, y_D, t_{fD})}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} = -\frac{1}{x_D} \exp\left(-\frac{x_D^2}{4t_{fD}}\right) - \frac{1}{(2-x_D)} \exp\left(-\frac{(2-x_D)^2}{4t_{fD}}\right). \quad (\text{A.18})$$

Por otro lado expresando la *Ley de Darcy* en forma adimensional se obtiene

$$v_D = \frac{\partial x_D}{\partial t_D} = \frac{qB\mu c_t}{2\pi kh d_D^2} \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{y_D=0}. \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo el gradiente de presión con respecto a la distancia en la ecuación de Darcy, se tiene la solución que describe el avance del frente de agua, en función del tiempo y la distancia.

$$v_D = \frac{q c_t \mu B}{2\pi k h d_D^2} \left[-\frac{1}{x_D} \exp\left(-\frac{x_D^2}{4t_{fD}}\right) - \frac{1}{(2-x_D)} \exp\left(-\frac{(2-x_D)^2}{4t_{fD}}\right) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Resolviendo la ecuación no lineal de velocidad adimensional en diferencias finitas, se define las variables siguientes:

$$x_D = \left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2} \right); \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta t_{fD} = t_{fDi+1} - t_{fDi}; \quad (\text{A.22})$$

$$t_{fD} = \left(\frac{t_{fDi+1} + t_{fDi}}{2} \right); \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta x_D = x_{Dj+1} - x_{Dj}. \quad (\text{A.24})$$

Sustituyendo las variables en la ecuación (A.20)

$$x_{Dj+1} - x_{Dj} = -\Delta t_{fD} \frac{qB\mu c_t}{2\pi kh d_D^2} \left[\frac{2}{x_{Dj+1} + x_{Dj}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2}\right)^2}{4\left(\frac{t_{fDi+1} + t_{fDi}}{2}\right)}\right) + \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2}\right)\right)} \exp\left(-\frac{\left(2 - \left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2}\right)\right)^2}{4\left(\frac{t_{fDi+1} + t_{fDi}}{2}\right)}\right) \right]. \quad (\text{A.25})$$

Pasando toda la ecuación a las mismas variables en el tiempo,

$$x_{D_{j+1}} - x_{D_j} = -(t_{fD_{i+1}} - t_{fD_i}) \frac{qB\mu c_t}{2\pi kh} \left[\frac{2}{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}} \exp \left(-\frac{\left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)^2}{4 \left(\frac{t_{fD_{i+1}} + t_{fD_i}}{2}\right)} \right) + \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)\right)} \exp \left(-\frac{\left(2 - \left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)\right)^2}{4 \left(\frac{t_{fD_{i+1}} + t_{fD_i}}{2}\right)} \right) \right]. \quad (\text{A.26})$$

Definiendo un gasto adimensional para flujo radial en estado transitorio como:

$$q_{RD_1} = \frac{q\mu c_t B}{2\pi kh}, \quad (\text{A.27})$$

Verificando que la variable es adimensional

$$q_{RD_1} = \frac{[L^3 T^{-1}] [M T^{-1} L^{-1}]}{[L^2] [L] [M L^{-1} T^{-2}]}, \quad (\text{A.28})$$

tenemos

$$x_{D_{j+1}} - x_{D_j} = -(t_{fD_{i+1}} - t_{fD_i}) q_{RD_1} \left[\frac{2}{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}} \exp \left(-\frac{\left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)^2}{4 \left(\frac{t_{fD_{i+1}} + t_{fD_i}}{2}\right)} \right) + \frac{1}{\left(2 - \left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)\right)} \exp \left(-\frac{\left(2 - \left(\frac{x_{D_{j+1}} + x_{D_j}}{2}\right)\right)^2}{4 \left(\frac{t_{fD_{i+1}} + t_{fD_i}}{2}\right)} \right) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Apéndice B

Método para Flujo Radial en Estado Estacionario

B.1. Formulación Matemática del Problema

La ecuación diferencial que representa el comportamiento de un fluido en un medio poroso con flujo radial en estado estacionario en un yacimiento homogéneo e isotrópico es la siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Primera condición de frontera interna: gasto constante en el pozo.

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r_w} = \frac{qB\mu}{2\pi khr_w}. \quad (\text{B.2})$$

Segunda condición de frontera interna

$$r = r_w \quad p|_{r_w} = p_w.$$

Condición de frontera externa

$$r = r_e \quad p|_{r_e} = p_e.$$

La caída de presión en variables reales se expresa como

$$p = \frac{q\mu B}{2\pi kh} \text{Ln} \left(\frac{r}{r_w} \right) + p_w. \quad (\text{B.3})$$

Para la solución del problema se tiene un yacimiento con frontera a presión constante; por lo tanto, se considera un pozo imagen inyector. Así la ecuación de la caída de presión del pozo productor en r_1 y el pozo inyector en r_2 es.

$$p = \underbrace{\frac{qB\mu}{2\pi kh} \text{Ln} \left(\frac{r_1}{r_w} \right)}_{\text{pozo productor}} + p_w - \underbrace{\frac{qB\mu}{2\pi kh} \text{Ln} \left(\frac{r_2}{r_w} \right)}_{\text{pozo imagen inyector}} - p_w. \quad (\text{B.4})$$

Simplificando la ecuación (B.4) para la presión de un pozo productor y un pozo imagen inyector

$$p = \frac{qB\mu}{2\pi kh} \text{Ln} \left(\frac{r_1}{r_2} \right).$$

Expresando la solución en coordenadas cartesianas, se tiene que las distancias radiales al pozo productor r_1 y para el pozo imagen inyector r_2 son:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (\text{B.5})$$

$$r_2 = \sqrt{(2d_f - x)^2 + y^2}. \quad (\text{B.6})$$

La ecuación para la presión (B.4) para flujo radial en coordenadas cartesianas es

$$p = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \text{Ln} \left(\frac{x^2 + y^2}{(2d_f - x)^2 + y^2} \right). \quad (\text{B.7})$$

Haciendo uso de la ecuación de movimiento la “*Ley de Darcy*”:

$$v = - \frac{k}{\mu\phi} \frac{dp}{dx} \Big|_{y=0}. \quad (\text{B.8})$$

Derivando la presión con respecto a la distancia y sustituyendo el gradiente obtenido en la ecuación (B.8):

$$v = -\frac{qB}{4\pi h\phi} \left(\frac{4d}{(2d_f x - x^2)} \right). \quad (\text{B.9})$$

Expresando esta ecuación para la velocidad en variables adimensionales, se tiene:

$$v_D = -\frac{qB\mu c_t}{4\pi kh} \left(\frac{4}{2x_D - x_D^2} \right); \quad (\text{B.10})$$

definiendo un gasto en flujo radial en estado estacionario q_{RD_2} se tiene:

$$q_{RD_2} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi kh}. \quad (\text{B.11})$$

La ecuación que representa la solución del comportamiento de la velocidad conforme el agua avanza hasta el pozo, en régimen estacionario para flujo radial:

$$v_D = -q_{RD_2} \left[\frac{4}{2x_D - x_D^2} \right]. \quad (\text{B.12})$$

Para obtener el tiempo, se integra el inverso de la velocidad, obteniéndose:

$$t_{fD} = \int_1^{x/d_f} \frac{dx_D}{v_D}. \quad (\text{B.13})$$

La ecuación analítica que representa el tiempo de irrupción en un pozo cercano a una falla conductiva, que produjo flujo bajo condiciones de flujo radial es:

$$t_{fD} = \frac{1}{12q_{RD_2}} [x_D^3 - 3x_D^2 + 2]. \quad (\text{B.14})$$

Apéndice C

Método para Flujo Esférico en Estado Transitorio

C.1. Desarrollo Matemático del Problema

El modelo de flujo en el yacimiento, se desarrolló con base en las consideraciones siguientes, ver figura C.1 del sistema propuesto:

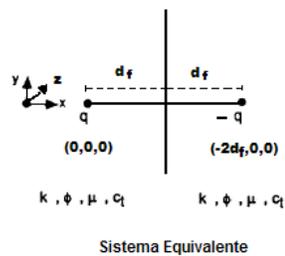


Figura C.1: Esquema propuesto de un pozo cercano a una falla para flujo esférico.

El modelo de flujo consideró las suposiciones siguientes: El yacimiento es isotrópico, homogéneo y de espesor constante, además todas las propiedades de la formación se suponen independientes de la presión, el fluido contenido en el yacimiento es ligeramente compresible c_t y viscosidad μ constantes. La falla se localiza a una distancia d_f , tangente del pozo.

La ecuación diferencial que representa el comportamiento de un fluido en un medio poroso bajo condiciones de flujo esférico es:

$$\frac{\partial^2 p(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p(r, t)}{\partial t} \quad r_w < r < \infty \quad t > 0. \quad (\text{C.1})$$

Las condiciones de frontera empleadas en este problema de flujo son las siguientes.

Condición inicial: Distribución uniforme

$$p(r, 0) = p_i. \quad (\text{C.2})$$

Condición de frontera interna: Gasto Constante.

$$\frac{\partial p(r_w, t)}{\partial r} = \frac{qB\mu}{kA}. \quad (\text{C.3})$$

Condición de frontera externa: Yacimiento infinito.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i. \quad (\text{C.4})$$

Las definiciones para las variables adimensionales usadas tradicionalmente para este tipo de flujo son las siguientes:

$$\begin{aligned} r_D &= \frac{r}{r_w}. \\ t_D(r_D, t_D) &= \frac{kt}{\phi c_t \mu r_w^2} = \frac{\eta t}{r_w^2}. \\ p_{DE}(r_D, t) &= \frac{kA [p_i - p(r, t)]}{qB\mu r_w}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para el caso de la esfera de interés, su superficie es: $A = 4\pi r_w^2$. Para propósitos reales es poco práctico gráficar la presión en cualquier punto del yacimiento en función de todas las variables que intervienen en el problema de flujo; por lo tanto se tiene que adimensionar las ecuaciones, donde es necesario buscar escalas correctas donde se quiere observar el problema.

La ecuación de presión y sus condiciones de frontera adimensionales son:

$$\frac{\partial^2 p_{DE}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_{DE}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial p_{DE}(r_D, t_D)}{\partial t_D}. \quad (\text{C.6})$$

Condición inicial:

$$p_{DE}(r_D, 0) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Condición de frontera interna:

$$\frac{\partial p_{DE}(1, t_D)}{\partial r_D} = -1. \quad (\text{C.8})$$

Condición de frontera externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{DE}(r_D, t_D) = 0. \quad (\text{C.9})$$

La presión adimensional para condiciones de flujo esférico [27]:

$$p_{DE}(r_D, t_D) = \frac{1}{r_D} \operatorname{erfc}\left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}}\right) - \frac{e^{(r_D - 1 + t_D)}}{r_D} \operatorname{erfc}\left(\frac{2t_D + (r_D - 1)}{2\sqrt{t_D}}\right). \quad (\text{C.10})$$

Las variables adimensionales para las coordenadas cartesianas de flujo esférico son.

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \quad y_D = \frac{y}{d_f} \quad \text{y} \quad z_D = \frac{z}{d_f}, \quad (\text{C.11})$$

donde d_f es la distancia del pozo a la falla. Las coordenadas del pozo productor se localizan en el origen del sistema coordenado, donde se tiene $r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Expresando en variables adimensionales las coordenadas del pozo productor

$$r_{D1} = \sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2}, \quad (\text{C.12})$$

donde

$$d_D = \frac{d_f}{r_w} \quad \text{y} \quad t_{fD} = \frac{tk}{\phi\mu c_t d_f^2}. \quad (\text{C.13})$$

Las coordenadas cartesianas para el pozo imagen inyector son $r_2^2 = (2d_f - x)^2 + y^2 + z^2$.

En variables adimensionales las coordenadas del pozo imagen inyector.

$$r_{D2} = \sqrt{d_D^2 (2 - x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2}. \quad (\text{C.14})$$

En la solución para el flujo esférico (C.10), se sustituyen las coordenadas cartesianas adimensionales expresadas por la ecuación (C.12) y el tiempo adimensional ecuación (C.5), obteniéndose la ecuación para la presión en el pozo productor en coordenadas cartesianas siguiente:

$$p_{DE} = \frac{1}{\sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2}} \times \quad (\text{C.15})$$

$$\text{erfc} \left(\frac{\sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2} - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)$$

$$\frac{\exp \left(\sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2} - 1 + d_D^2 t_{fD} \right)}{\sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2}} \times$$

$$\underbrace{\text{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + \left(\sqrt{(x_D d_D)^2 + (y_D d_D)^2 + (z_D d_D)^2} - 1 \right)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)}_{\text{Pozo productor}}.$$

Evaluando la ecuación (C.10) para la posición en que se tiene al pozo imagen $r_D = r_{DI}$ ecuación (C.14), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 p_{DE} = & -\frac{1}{\sqrt{d_D^2 (2-x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2}} \times \\
 & \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{d_D^2 (2-x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2} - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
 & + \frac{\exp \left(\sqrt{d_D^2 (2-x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2} - 1 + d_D^2 (t_{fD}) \right)}{\sqrt{d_D^2 (2-x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2}} \times \\
 & \underbrace{\operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 (t_{fD}) + \left(\sqrt{d_D^2 (2-x_D)^2 + d_D^2 (y_D)^2 + d_D^2 (z_D)^2} - 1 \right)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)}_{\text{pozo imagen inyector}}.
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Velocidad Adimensional

Similarmente al caso anterior de flujo radial, para obtener la velocidad se utiliza la *Ley de Darcy*, la cual para este caso de flujo esférico se deriva la presión expresada por la ecuación (C.16) con respecto a la distancia adimensional, considerando $y_D = 0$ y $z_D = 0$ [21].

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial p_{DE}}{\partial x_D} \right|_{\substack{y_D=0, \\ z_D=0}} &= \frac{1}{\pi x_D d_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{x_D d_D - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
&- \frac{1}{x_D^2 d_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_D - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
&- \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{\pi x_D d_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D^2 d_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
&- \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D d_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
&+ \frac{1}{\pi [2 - x_D] d_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
&- \frac{1}{d_D (2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
&- \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{[2 - x_D] \pi d_D \sqrt{t_{fD}}} \exp \left(- \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{d_D (2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
&- \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{d_D (2 - x_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2 d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2 d_D \sqrt{t_{fD}}} \right).
\end{aligned} \tag{C.17}$$

La ecuación de movimiento (*Ley de Darcy*) en variables adimensionales puede expresarse:

$$v_D = \frac{\partial x_D}{\partial t_{fD}} = \frac{q B \mu c_t}{4 \pi k d_f d_D} \left. \frac{\partial p_{DE}}{\partial x_D} \right|_{y_D=z_D=0}. \tag{C.18}$$

Sustituyendo la ecuación para el gradiente de presión con respecto a la distancia ecuación

(C.17), se obtiene la expresión siguiente para la velocidad adimensional:

$$\begin{aligned}
v_D = & \frac{q\mu c_t B}{4\pi k d_f d_D^2} \left[\frac{1}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp\left(-\left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right)^2\right) - \frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \right. \\
& - \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{\pi x_D \sqrt{t_{fD}}} \exp\left(-\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right)^2\right) \\
& + \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \\
& - \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D} \operatorname{erfc}\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \\
& + \frac{1}{\pi [2 - x_D] \sqrt{t_{fD}}} \exp\left(-\left(\frac{d_D(2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right)^2\right) \\
& - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_D(2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \\
& - \frac{\exp(d_D(2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{[2 - x_D] \pi \sqrt{t_{fD}}} \exp\left(-\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D(2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right)^2\right) \\
& + \frac{\exp(d_D(2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D(2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \\
& \left. - \frac{\exp(d_D(2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)} \operatorname{erfc}\left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D(2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}\right) \right]. \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación no lineal de la velocidad adimensional en diferencias finitas, empleando las variables adimensionales siguientes:

$$\begin{aligned}
x_D &= \left(\frac{x_{Dj+1} + x_{Dj}}{2}\right). \\
\Delta x_D &= x_{Dj+1} - x_{Dj}. \\
t_{fD} &= \left(\frac{t_{fD_{i+1}} + t_{fD_i}}{2}\right). \\
\Delta t_{fD} &= t_{fD_{i+1}} - t_{fD_i}.
\end{aligned}$$

Se presentaron problemas al programar la ecuación (C.19), por lo cual se simplificó expres-

sando la velocidad v_D como $\Delta x_D/\Delta t_{fD}$; despejando Δx_D :

$$\begin{aligned} \Delta x_D = & \frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f} \Delta t_{fD} \left[-\frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_{fD} - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right. \\ & + \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_D + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\ & - \frac{\exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD})}{x_D} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + (x_D d_D - 1)}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\ & - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\ & + \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\ & \left. - \frac{\exp(d_D (2 - x_D) - 1 + d_D^2 t_{fD})}{(2 - x_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{2d_D^2 t_{fD} + d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Se define un gasto adimensional (q_{ED_1}) para flujo esférico en estado transitorio como:

$$q_{ED_1} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f}, \quad (\text{C.21})$$

Verificando que el gasto es adimensional

$$q_{ED_1} = \frac{[L^3 T^{-1}] [M T^{-1} L^{-1}]}{[L^2] [L] [M L^{-1} T^{-2}]},$$

Utilizando la definición de función de error complementaria

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

queda finalmente la ecuación no lineal del pozo productor y el pozo inyector como

$$\begin{aligned}
\Delta x_D = & q_{ED1} \Delta t_{fD} \left[-\frac{1}{x_D^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \right. \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi} x_D^2} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}}^{\infty} \exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& - \frac{2}{\sqrt{\pi} x_D} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + x_D d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}}^{\infty} \exp(x_D d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& - \frac{1}{(2 - x_D)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_D (2 - x_D) - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}} \right) \\
& + \frac{2}{\sqrt{\pi} (2 - x_D)^2} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + (2 - x_D) d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}}^{\infty} \exp((2 - x_D) d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \\
& \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi} (2 - x_D)} \int_{\frac{2d_D^2 t_{fD} + (2 - x_D) d_D - 1}{2d_D \sqrt{t_{fD}}}}^{\infty} \exp((2 - x_D) d_D - 1 + d_D^2 t_{fD}) \exp(-t^2) dt \right]. \tag{C.22}
\end{aligned}$$

...

Apéndice D

Método para Flujo Esférico en Estado Estacionario

D.1. Desarrollo Matemático del Problema

La ecuación diferencial que representa el comportamiento de un fluido en un medio poroso para flujo esférico en estado estacionario es la siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad (\text{D.1})$$

En el apéndice D, se ha realizado un análisis más detallado para el problema.

Primera condición de frontera interna: gasto constante en el pozo.

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r_w} = \frac{qB\mu}{Ak} = \frac{qB\mu}{4\pi r_w^2 k}. \quad (\text{D.2})$$

Segunda condición de frontera interna:

$$\begin{aligned} r &= r_w. \\ p|_{r_w} &= p_w. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Condición de frontera externa

$$\begin{aligned} r &= r_e. \\ p|_{r_e} &= p_e. \end{aligned} \tag{D.4}$$

La ecuación de presión en variables reales se expresa como:

$$p = \frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right] + p_w. \tag{D.5}$$

Para la solución del problema, se tiene un pozo productor en r_1 y una falla, la cual se representa como un pozo imagen inyector en r_2 :

$$p = \underbrace{\frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_1} \right]}_{\text{pozo productor}} + \underbrace{p_w - \frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_2} \right]}_{\text{pozo imagen inyector}} - p_w. \tag{D.6}$$

Simplificando, la ecuación (D.6) para la presión del pozo productor y el pozo imagen inyector se tiene:

$$p = \frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]. \tag{D.7}$$

Las coordenadas cartesianas para el pozo productor y el pozo inyector son

$$r_1^2 = x^2 + y^2. \tag{D.8}$$

$$r_2^2 = (2d_f - x)^2 + y^2. \tag{D.9}$$

La ecuación (D.7) para la presión del pozo productor y el pozo inyector, en coordenadas cartesianas:

$$p = \frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{\sqrt{(2d_f - x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]. \quad (\text{D.10})$$

Haciendo uso de la *ley de Darcy* para obtener la velocidad microscópica, se obtiene:

$$v_{micro} = -\frac{k}{\mu\phi} \frac{dp}{dx} \Big|_{y=0, z=0}. \quad (\text{D.11})$$

Realizando la derivada parcial de $dp/dx|_{y=0}$ de la ecuación (D.10)

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{y=0} = -\frac{qB\mu}{4\pi k} \left[\frac{1}{(2d_f - x)^2} + \frac{1}{x^2} \right]. \quad (\text{D.12})$$

Sustituyendo la variables adimensionales y el gradiente de presión con respecto a la distancia, se obtiene la velocidad microscópica:

$$v_{micro} = -\frac{qB}{4\pi\phi d_f^2} \left[\frac{1}{(2 - x_D)^2} + \frac{1}{x_D^2} \right]. \quad (\text{D.13})$$

La velocidad expresada en variables adimensionales:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{\phi\mu c_t d_f} \frac{\partial x_D}{\partial t_{Dd}}. \quad (\text{D.14})$$

Para obtener la velocidad adimensional se igualan las ecuaciones (D.13) y (D.14),

$$v_D = \frac{dx_D}{dt_D} = -\frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f} \left[\frac{1}{(2 - x_D)^2} + \frac{1}{x_D^2} \right]: \quad (\text{D.15})$$

definiendo un gasto adimensional q_{ED_2} de flujo esférico en estado estacionario:

$$q_{ED_2} = \frac{qB\mu c_t}{4\pi k d_f}. \quad (\text{D.16})$$

$$v_D = -q_{ED_2} \left[\frac{1}{(2 - x_D)^2} + \frac{1}{x_D^2} \right]. \quad (\text{D.17})$$

La ecuación que representa el comportamiento de la velocidad conforme avanza el agua hasta el pozo productor, en un régimen estacionario en flujo esférico está expresada por la ecuación (D.18):

$$v_D = -q_{ED_2} \left[\frac{2x_D^2 - 4x_D + 4}{x_D^4 - 4x_D^3 + 4x_D^2} \right]. \quad (D.18)$$

Para obtener el tiempo adimensional, se integra el inverso de la velocidad, obteniéndose la integral siguiente:

$$t_{fD} = \int_1^{x/d} \frac{dx_D}{v_D}. \quad (D.19)$$

$$t_{fD} = -\frac{1}{q_{ED_2}} \int_1^{x/d} \left[\frac{x_D^4 - 4x_D^3 + 4x_D^2}{2x_D^2 - 4x_D + 4} \right] dx_D. \quad (D.20)$$

Resolviendo la integral de la falla al pozo

$$t_{fD} = -\frac{1}{q_{ED_2}} \left[\frac{1}{6}x_D^3 - \frac{1}{2}x_D^2 - x_D + 2 \arctan(x_D - 1) \right]_1^{x/d_f}. \quad (D.21)$$

Empleando la definición para la distancia adimensional $x_D = x/d$ que se tiene en la ecuación (C.11) y la ecuación (D.21), puede escribirse la ecuación analítica que expresa el tiempo de irrupción cercano a una falla conductiva, para condiciones de flujo esférico en estado estacionario:

$$t_{fD} = -\frac{1}{q_{ED_2}} \left[\frac{1}{6}x_D^3 - \frac{1}{2}x_D^2 - x_D + 2 \arctan(x_D - 1) + \frac{4}{3} \right]. \quad (D.22)$$

Apéndice E

Flujo en la Falla

E.1. Flujo Bilineal

Se presenta el desarrollo de la Ecuación Diferencial Parcial EDP, y las condiciones de frontera que describen el comportamiento de la presión en una falla con flujo bilineal [22], ver figura E.1 .

La ecuación que describe el flujo en el yacimiento es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{E.1})$$

Condición inicial

$$p(t = 0) = p_{ini}. \quad (\text{E.2})$$

Condiciones de frontera en y

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p(x = \infty) = p_{ini}, \quad (\text{E.3})$$

$$p_f = p. \quad (\text{E.4})$$

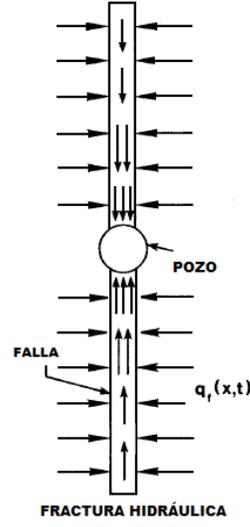


Figura E.1: Flujo bilineal en una fractura.

Variables adimensionales

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \quad \eta = \frac{k}{\phi\mu c_t}, \quad t_{fD} = \frac{tk}{\mu\phi c_t d_f^2} \quad \text{y} \quad p_D = \frac{2\pi kh}{q\mu B} (p_{ini} - p). \quad (\text{E.5})$$

Pasando la ecuación del yacimiento a variables adimensionales $(x, t) \rightarrow (x_D, t_{fD})$

utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (\text{E.6})$$

$$p_D(t_{fD} = 0) = 0, \quad (\text{E.7})$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_D(x_D \rightarrow \infty) = 0, \quad (\text{E.8})$$

$$p_D|_{x_D \rightarrow 0} = p_{fD}. \quad (\text{E.9})$$

La ecuación que describe el flujo de fluidos en la falla es

$$k_f \left(\frac{\partial^2 p_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} \right) = \phi_f c_f \mu \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{E.11})$$

Condición inicial

$$p(t = 0) = p_{ini}. \quad (\text{E.12})$$

Condiciones de frontera externa en y

$$\left[\frac{\partial p_f}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{q\mu B}{2b_f k h}, \quad (\text{E.13})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_f(y, x, t) = p_{ini}. \quad (\text{E.14})$$

Condiciones de frontera en x

$$p_f(x = 0) = p(x = 0), \quad (\text{E.15})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(y, x, t) = p_{ini}. \quad (\text{E.16})$$

Variables adimensionales

$$y_D = \frac{y}{d_f}, \quad x_D = \frac{x}{b_f}, \quad \eta_{fD} = \frac{k_f \phi c}{k \phi_f c_f} \quad \text{y} \quad F_{CD} = \frac{k b_f}{k_f d_f}. \quad (\text{E.17})$$

donde ϕ_m es la porosidad de la matriz, ϕ_f es la porosidad de la fractura y k_f es la permeabilidad de la fractura.

Pasando la ecuación de la falla a variables adimensionales $(y, x, t) \rightarrow (y_D, x_D, t_{fD})$

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} + \frac{d_f^2}{b_f^2} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial x_D^2} = \frac{1}{\eta_{fD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_{fD}}. \quad (\text{E.18})$$

Integrando con respecto a x_D

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} dx_D + \frac{d_f^2}{b_f^2} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial x_D^2} dx_D = \frac{1}{\eta_{fD}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_{fD}} dx_D, \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} + \frac{d_f^2}{b_f^2} \left(\left. \frac{\partial p_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} - \left. \frac{\partial p_{fD}}{\partial x_D} \right|_{x_D=\infty} \right) = \frac{1}{\eta_{fD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_{fD}}. \quad (\text{E.20})$$

$$p_{fD}(t_{fD} = 0) = 0. \quad (\text{E.21})$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fD} = 0. \quad (\text{E.22})$$

$$p_{fD}(x_D = \infty) = p_D(x_D), \quad (\text{E.23})$$

$$\left[\frac{\partial p_{fD}}{\partial x_D} \right]_{x_D=0} = \frac{b_f k}{d_f k_f} \left[\frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right]_{x_D=0}. \quad (\text{E.24})$$

$$\left[\frac{\partial p_{fD}}{\partial x_D} \right]_{x_D=\infty} = \frac{b_f k}{d_f k_f} \left[\frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right]_{x_D=\infty}. \quad (\text{E.25})$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación tenemos

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} + 2 \left(\frac{d_f k}{b_f k_f} \right) \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = \frac{1}{\eta_{fD}} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}, \quad (\text{E.26})$$

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} + 2 \left(\frac{d_f k}{b_f k_f} \right) \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = \frac{k \phi_f c_f}{k_f \phi c_t} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}, \quad (\text{E.27})$$

$$p_{fD}(t_{fD} = 0) = 0, \quad (\text{E.28})$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_{fD} = 0, \quad (\text{E.29})$$

$$p_{fD}(x_D = 0) = p_D(x), \quad (\text{E.30})$$

$$p_{fD}(x_D = \infty) = p_D(x_D), \quad (\text{E.31})$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fD} = 0, \quad (\text{E.32})$$

$$\left. \frac{\partial p_{fD}}{\partial y_D} \right|_{y_D=0} = -\pi \frac{k d_f}{b_f k_f},$$

La EDP en variables adimensionales,

$$\frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} + 2 \left(\frac{d_f k_x}{b_f k_f} \right) \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = \frac{k \phi_f c_f}{k_f \phi c_t} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} \quad 0 < y_D < \infty, \quad \forall t_D > 0. \quad (\text{E.33})$$

Condición inicial,

$$p_{fD} = 0 \quad t_D = 0, \quad \forall y_D \geq 0. \quad (\text{E.34})$$

Condiciones de frontera interior,

$$\left(\frac{\partial p_{fD}}{\partial y_D} \right)_{y_D=0} = -\pi \frac{kd_f}{b_f k_f} \quad \forall t_D > 0. \quad (\text{E.35})$$

Condición de frontera exterior,

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{fD} = 0 \quad \forall t_D > 0. \quad (\text{E.36})$$

Donde, las variables adimensionales están definidas como,

$$p_{fD} = \frac{2\pi kh [p_i - p_f]}{q\mu B}, \dots y_D = \frac{y}{d_f} \quad \text{y} \quad x_D = \frac{x}{b_f}. \quad (\text{E.37})$$

Aplicando la transformada de \mathcal{L} aplace con respecto a t_{fD}

$$\overline{p_{fD}}(y_D, s) = \mathcal{L} \{p_{fD}(y_D, t_{fD})\}; \quad (\text{E.38})$$

$$\frac{d^2 \overline{p_{fD}}}{dy_D^2} + 2 \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right) \frac{d\overline{p_{fD}}}{dx_D} \Big|_{x_D=0} = \frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi c_t} s \overline{p_{fD}}; \quad (\text{E.39})$$

$$\overline{p_{fD}}(y_D, s) = \mathcal{L} \{p_{fD}\} = 0; \quad (\text{E.40})$$

$$\left(\frac{\partial \overline{p_{fD}}}{\partial y_D} \right)_{y_D=0} = -\frac{\pi}{s} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right); \quad (\text{E.41})$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} \overline{p_{fD}} = 0. \quad (\text{E.42})$$

Para poder evaluar el segundo término del lado izquierdo de la EDP, es necesario analizar el modelo de flujo lineal en la formación, para lo cual se formula el modelo matemático compuesto por la EDP, Condición Inicial y Condición Frontera para este tipo de flujo que es,

La EDP expresada en variables adimensionales,

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{\partial p_D}{\partial t_{fD}} \quad 0 < x_D < \infty, \quad \forall t_D > 0. \quad (\text{E.43})$$

Condición Inicial,

$$p_D = 0 \quad t_{fD} = 0 \quad \forall x_D > 0. \quad (\text{E.44})$$

Condición de Frontera Interior,

$$p_D|_{x_D} = p_{fD}. \quad (\text{E.45})$$

Condición Frontera Exterior,

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_D = 0. \quad (\text{E.46})$$

Aplicando la Transformada de \mathcal{L} aplace con respecto a t_{fD} en la ecuación diferencial parcial, condición inicial y condición de frontera, la cual está definida como,

$$\overline{p_D}(x_D, s) = \mathcal{L}\{p_D(x_D, t_{fD})\}. \quad (\text{E.47})$$

Considerando el teorema de la Transformada de \mathcal{L} aplace de derivadas, se tiene

respectivamente.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 p_D}{dx_D^2} &= s\overline{p_D}; \\ \overline{p_D} &= 0; \\ \overline{p_D}|_{x_D=0} &= \overline{p_{fD}}; \\ \lim_{x_D \rightarrow \infty} \overline{p_D} &= 0.\end{aligned}\tag{E.48}$$

Aplicando la Transformada de Laplace con respecto a x_D en la EDP, Condición Inicial y Condición de Frontera, la misma que está definida como,

$$\overline{p_D}(r, s) = \mathcal{L}\{p_D(x_D, s)\}.\tag{E.49}$$

Y si se considera el teorema de la Transformada de Laplace de derivadas, se tiene para la ecuación diferencial parcial

$$r^2 \overline{\overline{p_D}} - r \overline{p_D}|_{x_D=0} - \left. \frac{d\overline{p_D}}{dx_D} \right|_{x_D=0} = s\overline{\overline{p_D}}.\tag{E.50}$$

Despejando $\overline{\overline{p_D}}$ y considerando que,

$$\overline{p_D}|_{x_D=0} = \overline{p_{fD}},\tag{E.51}$$

$$\overline{\overline{p_D}} = \frac{r\overline{p_{fD}} + \left. \frac{d\overline{p_D}}{dx_D} \right|_{x_D=0}}{r^2 - s}.\tag{E.52}$$

Obteniendo la Transformada Inversa de Laplace se tiene:

$$\overline{\overline{p_D}} = \frac{r}{r^2 - (\sqrt{s})^2} \overline{p_{fD}} + \frac{1}{r^2 - (\sqrt{s})^2} \left. \frac{\partial \overline{p_D}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0}.\tag{E.53}$$

Se obtiene,

$$\overline{p_D} = \overline{p_{fD}} \cosh(\sqrt{s}x_D) + \left. \frac{\partial \overline{p_D}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \sinh(\sqrt{s}x_D).\tag{E.54}$$

Si se considera la condición de frontera exterior del modelo de flujo lineal en la formación y las relaciones siguientes

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D = 0, \quad (\text{E.55})$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (\text{E.56})$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (\text{E.57})$$

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad (\text{E.58})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tanh z = 1. \quad (\text{E.59})$$

Dividiendo la ecuación anterior para \bar{p}_D por $\cosh(\sqrt{s}x_D)$ y tomando límites, se tiene

$$0 = \bar{p}_{fD} + \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad (\text{E.60})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = -\bar{p}_{fD} \sqrt{s}. \quad (\text{E.61})$$

Una vez obtenido esta representación con el modelo lineal de flujo en la formación, se retoma la ecuación y reordenando se obtiene,

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fD}}{dy_D^2} + \left(2 \frac{kd_f}{b_f k_f} \right) [-\bar{p}_{fD} \sqrt{s}] = \frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi c_t} (s) \bar{p}_{fD}, \quad (\text{E.62})$$

$$\frac{d^2 \overline{p_{fD}}}{dy_D^2} = \left[\left(\frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi c_t} \right) s + \left(2 \frac{k d_f}{b_f k_f} \right) \sqrt{s} \right] \overline{p_{fD}}; \quad (\text{E.63})$$

si se consideran

$$\overline{p_{fD}} = a, \quad (\text{E.64})$$

$$y_D = b, \quad (\text{E.65})$$

$$\delta = \left[\left(\frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi c_t} \right) s + \left(2 \frac{k d_f}{b_f k_f} \right) \sqrt{s} \right], \quad (\text{E.66})$$

$$a' - \delta a = 0. \quad (\text{E.67})$$

La solución general es la siguiente

$$a = C_1 \cdot e^{\sqrt{\delta} b} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta} b}. \quad (\text{E.68})$$

A continuación se determina el valor de las constantes considerando las condiciones de frontera.

De la condición de frontera externa:

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \overline{p_D} = 0; \quad \lim_{b \rightarrow \infty} a = 0. \quad (\text{E.69})$$

Obteniendo este límite en la solución general anterior se tiene que:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} C_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta} b} = 0; \quad (\text{E.70})$$

Entonces la solución general puede expresarse:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot e^{\sqrt{\delta}b} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta}b}; \\ 0 &= C_1 \cdot e^{\sqrt{\delta}b} + 0; \\ 0 &= C_1. \end{aligned} \tag{E.71}$$

Tomando en cuenta este resultado, la solución general por la condición frontera exterior queda,

$$a = C_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta}b}. \tag{E.72}$$

Para evaluar esta constante se considera la condición de frontera interna

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)_{b=0} = -\frac{\pi}{s} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right). \tag{E.73}$$

Derivando la ecuación respecto a b se obtiene,

$$a' = \frac{d(a)}{d(b)} = -C_2 \sqrt{\delta} \cdot e^{-\sqrt{\delta}b}. \tag{E.74}$$

Evaluando la ecuación anterior para a' a $b = 0$ se tiene,

$$-\frac{\pi}{s} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right) = -C_2 \sqrt{\delta}; \tag{E.75}$$

$$C_2 = \frac{\pi}{s \cdot \sqrt{\delta}} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right). \tag{E.76}$$

La solución particular es la siguiente:

$$a = \left[\frac{\pi}{s \cdot \sqrt{\delta}} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f} \right) \right] \cdot e^{-\sqrt{\delta}b}. \tag{E.77}$$

Reemplazando las variables a y b se tiene,

$$\overline{p_{fD}} = \left[\frac{\pi}{s \cdot \sqrt{\left(\frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi_{ct}}\right) s + \left(2\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \sqrt{s}}} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \right] \cdot e^{-\sqrt{\left(\frac{k\phi_f c_f}{k_f \phi_{ct}}\right) s + \left(2\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \sqrt{s}} y_D}. \quad (\text{E.78})$$

Tiempos Largos

Para tiempos largos (t_{fD} grandes) el operador s es pequeños, entonces

$$\overline{p_{fD}} = \left[\frac{\pi}{s \cdot \sqrt{\left(2\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \sqrt{s}}} \left(\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \right] \cdot e^{-\sqrt{\left(2\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \sqrt{s}} y_D}. \quad (\text{E.79})$$

E.2. Método Uno, tiempos grandes

De la ecuación (E.79) de presión en la falla para tiempos grandes del flujo bilineal derivamos con respecto a la distancia al contacto, definiendo las siguientes variables adimensionales si $y = d_c$

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{y}{d_f}, \\ y_{CD} &= \frac{d_c}{d_f}, \\ t_D &= \frac{tk}{\mu\phi_{ct}d_f^2} \quad \text{y} \quad F_{CD} = \frac{b_f k_f}{kd_f}. \end{aligned}$$

donde d_c distancia al contacto, b_f es el ancho de la fractura y F_{CD} es la conductividad de la fractura.

$$\overline{p_{fD}} = \left[\frac{\pi}{F_{CD} \times s \cdot \sqrt{\left(2\frac{kd_f}{b_f k_f}\right) \sqrt{s}}} \right] \cdot e^{-y_{CD} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{F_{CD}}\right) \sqrt{s}}}. \quad (\text{E.80})$$

Derivando la ecuación de presión con respecto a y_{CD}

$$\frac{\partial \overline{p_{fD}}}{\partial y_{CD}}(y_{CD}, s) = - \left[\frac{\pi}{s \times F_{CD}} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} \sqrt{s} \right) \right]. \quad (\text{E.81})$$

Expresando la ecuación para la velocidad en función de variables adimensionales:

$$v = \frac{d(d_C)}{d(t)} = - \frac{k_f}{\mu \phi_f} \frac{\partial p_f}{\partial d_C}, \quad (\text{E.82})$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial d_C} = \frac{\partial y_{CD}}{\partial d_C} \frac{\partial p_{fD}}{\partial y_{CD}} \frac{\partial p_f}{\partial p_{fD}}, \quad (\text{E.83})$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial d_C} = - \frac{q_w \mu B}{2\pi k h d_f} \frac{\partial p_{fD}}{\partial y_{CD}}, \quad (\text{E.84})$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial t} = \frac{\partial t_{fD}}{\partial t} \frac{\partial y_{CD}}{\partial t_{fD}} \frac{\partial d_C}{\partial y_{CD}}, \quad (\text{E.85})$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial t} = \frac{k}{\phi_m \mu c_t d_f} \frac{\partial y_{CD}}{\partial t_{fD}}. \quad (\text{E.86})$$

Igualando los términos de la izquierda y de la derecha

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_{fD}} = \frac{\phi_m k_f}{\phi_f k} \left(\frac{q_w B \mu c_t}{2\pi k h} \frac{\partial p_{fD}}{\partial y_{CD}} \right). \quad (\text{E.87})$$

Sustituyendo el gradiente de la presión $\frac{\partial p_{fD}}{\partial y_{CD}}$ en la ecuación (E.87)

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_{fD}} = \frac{\phi_m k_f}{\phi_f k} \left(\frac{q_w B \mu c_t}{2\pi k h} \right) \left(- \frac{\pi}{s \cdot F_{CD}} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} \sqrt{s} \right) \right); \quad (\text{E.88})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_{fD}} = - \frac{\phi_m}{\phi_f} q_D \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \left(\frac{1}{s} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right). \quad (\text{E.89})$$

donde $q_D = \frac{q_w B \mu c_t}{2kh}$ y el ancho adimensional $b_{fD} = \frac{b_f}{d_f}$.

E.3. Método Alternativo

Validación de la Solución de la Ecuación de Velocidad en la Falla

De la ecuación E.80

$$\overline{p_{fD}}(y_{CD}, s) = \left[\frac{\pi}{s F_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{s}}} \exp\left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{s}}\right) \right], \quad (\text{E.90})$$

$$\overline{p_{fD}}(y_{CD}, s) = \left[\frac{\pi}{s^{5/4} \sqrt{2 F_{CD}}} \exp\left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} s^{1/4}}\right) \right]. \quad (\text{E.91})$$

Las variables adimensionales

$$F_{CD} = \frac{k_f b_f}{k d_f}, \quad (\text{E.92})$$

$$y_{CD} = \frac{dc}{d_f}, \quad (\text{E.93})$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t d_f^2}, \quad (\text{E.94})$$

$$p_{fD} = \frac{2\pi kh}{qB\mu} (p_i - p_f). \quad (\text{E.95})$$

De la ecuación E.61

$$\left. \frac{\partial \overline{p_D}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = -\overline{p_{fD}} \sqrt{s}. \quad (\text{E.96})$$

Sustituyendo la ecuación E.90 en E.96, se tiene:

$$\left. \frac{\partial \overline{p_D}}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = -\frac{\pi}{s^{3/4} \sqrt{2 F_{CD}}} \exp\left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} s^{1/4}}\right). \quad (\text{E.97})$$

Definiendo el gasto entre el area de 0 a d_C

$$\frac{q_{d_C-\infty}}{A} = 2 \int_{d_C}^{\infty} q_f(d_C, t) d(d_C), \quad (\text{E.98})$$

$$q_{d_C-\infty} = -2 \int_{d_C}^{\infty} -h \frac{k}{\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} d(dc). \quad (\text{E.99})$$

Expresando el gradiente $\partial p/\partial x$ en variables adimensionales:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial x_D}{\partial x} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \frac{\partial p}{\partial p_D}, \quad (\text{E.100})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q_w B \mu}{2\pi k h d_f} \frac{\partial p_D}{\partial x_D}, \quad (\text{E.101})$$

$$q_{d_C-\infty} = 2 \int_{d_C}^{\infty} h \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} d(d_C), \quad (\text{E.102})$$

$$q_{d_C-\infty} = 2h \frac{k}{\mu} \int_{d_C}^{\infty} \left(-\frac{q_w \mu}{2\pi k h d_f} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \Big|_{x_D} \right) d(d_C), \quad (\text{E.103})$$

$$Q_{y_{CD-\infty}} = \frac{q_{d_C-\infty}}{q_w} = -2 \int_{d_C}^{\infty} \left(\frac{d_f}{d_f} \right) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \Big|_{x_D} dy_{CD}, \quad (\text{E.104})$$

$$Q_{y_{CD-\infty}} = \frac{q_{d_C-\infty}}{q_w} = - \int_{d_C}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \Big|_{x_D} dy_{CD}. \quad (\text{E.105})$$

Pasando a variables adimensionales la ecuación de la velocidad

$$v = \frac{q_{d_C-\infty}}{h b_f}; \quad (\text{E.106})$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial t} = \frac{\partial t_D}{\partial t} \frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} \frac{\partial d_C}{\partial y_{CD}}; \quad (\text{E.107})$$

$$\frac{\partial d_C}{\partial t} = \left(\frac{k}{\phi \mu c_t d_f} \right) \frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D}. \quad (\text{E.108})$$

Si $Q_{y_{CD-\infty}} = \frac{q_{d_C-\infty}}{q_w}$.Sustituyendo las variables de la parte izquierda y la parte

derecha

$$\frac{k}{\phi \mu c_t d_f} \frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = \frac{Q_{y_{CD-\infty}} q_w}{h b_f}; \quad (\text{E.109})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = Q_{y_{CD-\infty}} \cdot q_w \left(\frac{d_f}{b_f} \right) \left(\frac{\phi \mu c_t}{k h} \right); \quad (\text{E.110})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = \left(\frac{q_w \phi \mu c_t}{kh} \right) \left(\frac{d_f}{b_f} \right) \cdot Q_{y_{CD} \rightarrow \infty}; \quad (\text{E.111})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = \left(\frac{q_w \phi \mu c_t}{kh} \right) \left(\frac{d_f}{b_f} \right) \left[- \int_{y_{CD}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \Big|_{x_D} dy_{CD} \right]; \quad (\text{E.112})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = \left(\frac{q_w \phi \mu c_t}{kh} \right) \left(\frac{d_f}{b_f} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \int_{y_{CD}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\pi}{s^{3/4} \sqrt{2F_{CD}}} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right] dy_{CD} \right\}; \quad (\text{E.113})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = - \left(\frac{q_w \phi \mu c_t}{2kh} \right) \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right]; \quad (\text{E.114})$$

$$\frac{\partial y_{CD}}{\partial t_D} = -q_D \left(\frac{1}{b_{fD}} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \exp \left(-y_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}}} s^{1/4} \right) \right]. \quad (\text{E.115})$$

donde $q_D = \frac{q_w \phi \mu c_t}{2kh}$.

Bibliografía

- [1] Trocchio, J.T.: “Investigation of Fateh Mishrif Fluid-Conductive Faults”, J. Pet. Tech. (Agosto 1990) 1038-1047.
- [2] Cinco-Ley, L. H.: “*Apuntes de Análisis de Pruebas de Presión*”, UNAM.
- [3] Bear, J.: “*Dynamics of Fluids in Porous Media*”, Dover , New York, (1998).
- [4] Abbaszadeh, M.D. y Cinco-Ley, H.: “Pressure Transient Behavior in a Reservoir With a Finite-Conductivity Fault”, artículo SPE 24704 presentado en el 1992 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Washington, Oct 4-7.
- [5] Craft, B.C.: “*Ingeniería Aplicada de Yacimientos Petrolíferos*”, Tecnos, 1977.
- [6] Muskat, M.: “*The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*”, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1937).
- [7] Muskat, M.: “*Physical Principles of Oil Production*”, McGraw-Hill Book Company, Inc 1949
- [8] Horner, D. R.: “Pressure Build-Up in Wells,” Proc, Third World Pet. Cong., The Hague

- (1951) Sec. II, 503-523. Also Reprint Series, No. 9 -Pressure Analysis Methods, *Trans.*, AIME, Dallas .45-50 (1967).
- [9] Earlougher, R. C., Jr.; “*Advances in Well Test Analysis*”, Monografía Volumen 5, Society of Petroleum Engineers, (1977).
- [10] Earlougher, R. C., Jr, y Kazemi, H.: “Practicalities of Detecting Faults From Buildup Testing”, *J. Pet. Tech.* (Jan. 1980) 18-20.
- [11] Martínez, R. N. y Cinco, L.H.: “Detection of Linear Impermeable Barriers by Transient Pressure analysis”, artículo SPE 11833, presentado en Society of Petroleum Engineers of AIME 237-244.
- [12] Cinco-Ley, L.H., Samaniego, F.V., y Domínguez, A. N.: “Unsteady-State Flow Behavior for a Well Near a Natural Fracture,” artículo SPE 6019 presentado en el 1976 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Oct 3-6.
- [13] Yaxely, L.M.: “Effect of Partially Communicating Faults on Transient Pressure Behavior,” *SPEFE* (Dec 1987) 590; *Trans.*, AIME, 283.
- [14] Ambastha, A.D., McLeroy, P.G. y Grander, A.S.: “Effects of a Partialy Communicating Fault in a Composite Reservoir on Transiente Pressure Testing,” *SPEFE* (Junio 1989) 210.
- [15] Abbaszadeh, M.D. y Cinco-Ley, H.: “Supplement to SPE 24704, Pressure Transient Behavior in a Reservoir With a Finite-Conductivity Fault”, artículo SPE 30227.
- [16] Abbaszadeh, M.D. y Cinco-Ley, H.: “Interference Testing in Reservoirs With Conduc-

- tive Faults or Fractures”, artículo 66406 presentado en el 1997 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio, Texas, Oct 5-8.
- [17] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/imagenes/imagenes.htm>, 2 julio 2007.
- [18] Santivongskul, M.: “Well Test Analysis for Wells with Finite Conductivity Vertical Fractures”, Tesis Master en Science, Texas A & M University, Agosto 1992.
- [19] Daltaban, T. S. y Wall, C. G.: “*Fundamental and Applied Pressure Analysis*”, Imperial College, 1998.
- [20] Samaniego, F.V.: “*Apuntes de Mecánica de Yacimientos*”, UNAM.
- [21] Craig, F. F.: “*Aspectos de Ingeniería de la Inyección de Agua*”, Monografía Volumen 3, Serie Henry L. Doherty. Pag. 37.
- [22] Cinco, L.H. y Samaniego, V. F.: “Transient Pressure Analysis for Fracture Wells”, *JPT* (Sept. 1981) 1749-66.
- [23] Steffest, H.: “Numerical Inversion of Laplace Transform”, *Communications of the ACM*, Ene. 47-49, 13, No.1 de 1970.
- [24] Matthews, C.S y Russell, D.G.: “*Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*”, Monografía SPE, Richardson, Tex. (1967).
- [25] Carlaw, H.S. y Jaeger, J.C.: “*Conduction of Heat in Solids*”, Oxford at the Clarendon Press, 1950.
- [26] Raghavan, R.: “*Well Test Analysis*”, Prentice Hall Petroleum Engineering Series. 1993

- [27] Chatas, A.T.: “Unsteady Spherical Flow in Petroleum Reservoirs”, artículo SPE 1365, (1966)
- [28] Martinez, R. N. y Samaniego, F.V.: “Desarrollo de una Nueva Técnica para el Análisis de Pruebas de Interferencia y Pulsos con Flujo Radial, Lineal y Esférico”, *Ingeniería Petrolera* (Noviembre, 2001) páginas 8-18.
- [29] Abramowitz, M. y Stegun, I.: “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publications, New York City, 1965.

Índice de figuras

1.1. Modelo físico esquemático del problema [2].	2
2.1. Falla sellante impide el flujo de fluido lateral.	6
2.2. Diferentes geometrías de flujos.	7
2.3. Esquema de un sistema radial.	8
2.4. Coordenadas esféricas.	9
3.1. Comportamiento del gasto y presión en una prueba de incremento.	12
3.2. Gráfica semilog de una prueba de incremento mostrando la influencia de una falla.	13
3.3. Gráfica semilog para una prueba de decremento cerca una barrera lineal. . .	15
3.4. Curva tipo para estimar la distancia a una barrera para una prueba de decremento.	16
3.5. Sector de un yacimiento teniendo un pozo en su centro con una fractura vertical.	17
3.6. Sistema coordinado para un modelo de una falla parcialmente comunicada.	19
3.7. Barrera vertical semipermeable.	19
3.8. Comportamiento de la caída de presión de un pozo cerca de una falla parcialmente comunicante.	20
3.9. Esquema de un yacimiento compuesto con una falla parcialmente comunicante; la falla se modela con daño en la frontera.	20
3.10. Esquema de una yacimiento compuesto con una falla parcialmente comunicante a) yacimiento con dos fronteras paralelas b) yacimiento compuesto infinito.	21
3.11. Esquema típico del flujo de líneas.	23
3.12. Esquema y nomenclatura del sistema.	24
3.13. Esquema del líneas de flujo a diferentes tiempos con una falla conductiva. .	26
4.1. Pozo cercano a una falla.	28
4.2. Concepción de una falla conductiva de fluido [1].	28
4.3. Modelo sistemático del problema.	29
4.4. Modelo físico esquemático del flujo en el yacimiento.	30

4.5. Variación del tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario contra la distancia adimensional, para flujo radial en estado transitorio.	33
4.6. Variación del tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para flujo radial en estado transitorio.	34
4.7. Variación del tiempo adimensional con un gasto adimensional unitario con respecto a la distancia adimensional, para flujo radial en estado estacionario.	35
4.8. Variación del tiempo adimensional con respecto a la distancia adimensional, para flujo radial en estado estacionario.	36
4.9. Comparación de flujo radial en estado estacionario y en estado transitorio para valores de un caso de campo.	37
4.10. Tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario contra la distancia adimensional, para un flujo esférico en un régimen transitorio.	41
4.11. Tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para flujo esférico en un estado transitorio.	42
4.12. Tiempo adimensional para un gasto adimensional unitario con respecto a la distancia adimensional, para un flujo esférico en un estado estacionario.	43
4.13. Tiempo adimensional contra la distancia adimensional, para un flujo esférico en un estado estacionario.	44
4.14. Comparación del comportamiento de flujo esférico en estado estacionario y en estado transitorio para valores reales de campo.	45
4.15. Modelo físico esquemático del problema del flujo en la falla.	46
4.16. Comportamiento del tiempo del flujo del agua el cual viaja desde la distancia al contacto dc hasta el nivel del pozo a través de una falla conductiva.	47
4.17. Comportamiento del fluido a través de la falla, a diferentes gastos adimensionales q_D	48
4.18. Comportamiento del tiempo adimensional con respecto a la distancia adimensional para $q_D = 10^{-4}$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y diferentes F_{CD}	49
4.19. Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $q_D = 10^{-6}$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y diferentes F_{CD}	50
4.20. Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para un $q_D = 10^{-4}$, $b_{fD} = 10^{-4}$ y diferentes F_{CD}	51
4.21. Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 1$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D	52
4.22. Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 100$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D	53
4.23. Comportamiento del tiempo adimensional contra la distancia al contacto agua-aceite para $F_{CD} = 1000$, $b_{fD} = 10^{-2}$ y variando q_D	53
4.24. Esquema propuesto para la comprobación del flujo en la falla.	54
6.1. Plano estructural del campo Jujo-Tecominoacán, el cual indica arealmente el movimiento del agua del acuífero en los pozos de campo.	58
6.2. Presión y derivada de presión para la curva de incremento del pozo T-446.	59
6.3. Esquema del sistema	60
6.4. Presión y derivada de presión para la curva de incremento del pozo T-125.	63

A.1. Esquema propuesto para el flujo radial, hacia un pozo localizado cerca de una falla conductiva.	71
C.1. Esquema propuesto de un pozo cercano a una falla para flujo esférico. . . .	79
E.1. Flujo bilineal en una fractura.	94

Objetivo

El objetivo central de este trabajo es desarrollar un método para calcular el tiempo de invasión temprana de agua en un pozo productor cercano a una falla conductiva no intersectante. Este método presenta soluciones analíticas y numéricas que describen los mecanismos de flujo principal tanto para la parte del yacimiento como la parte de la falla.