UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta para el aprendizaje significativo de la función cuadrática para el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

Presenta:

Roberto Pedro Robledo Arana

Director de Tesis: M. en C. Alejandro Raúl Reyes Esparza

México, D.F. **Abril de 2008**

Dedico este trabajo con mucho cariño a:

Mis hijos: Diana Cristina, Karla Fabiola y Roberto, quienes son la fuente inagotable de mi inspiración, alegría y esfuerzo.

A mi esposa María del Carmen, que ha tenido la entrega y fortaleza en todo momento para mi plena realización.

A mis padres Concepción y Pascual, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de este proyecto.

A mis hermanos Ernesto, Isabel, Martha y Ana Alicia, quienes me han acompañado en todo momento a lo largo de mi vida.

Agradecimientos

De entre las muchas personas que de una, u otra, manera contribuyeron en la realización de este trabajo, quiero brindar mi más sincero agradecimiento a los maestros: Alejandro Raúl Reyes Esparza, Martha Diana Bosco Hernández, Juan Bautista Recio Zubieta, Marcela B. González Fuentes y al Dr. Alejandro Javier Díaz Barriga Casales, ya que con su gran disponibilidad, dirección y apoyo he tenido la oportunidad de llevarlo a cabo.

También quiero hacer un explícito reconocimiento al M. en C. David Vázquez Santa Ana, por sus valiosas sugerencias y comentarios que me permitieron enriquecer, ampliar y profundizar lo que en un principio era un proyecto.

ÍNDICE

Pág.

Introducción.		iv
Planteamiento del problema y tesis.		xi
Capítulo 1. Marco teórico-metodológico y práctico.		1
1.1	Elementos para desarrollar una propuesta educativa constructivista y colaborativa para el aprendizaje de las matemáticas.	1
1.1.1	Elementos del aprendizaje significativo.	2
1.1.2	Elementos del aprendizaje colaborativo.	6
1.2	Tecnología informática contemporánea y su relación con el aprendizaje de las matemáticas. .	8
1.3	Elementos constructivistas y colaborativos para el diseño de una unidad didáctica mediada con la computadora.	10
1.3.1	El alumno.	11
1.3.2	El profesor.	13
1.3.3	Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios.	19
1.3.4	Hojas de trabajo impresas.	20
1.3.5	Evaluación.	20
Capítulo 2. Marco teórico matemático		22
2.1	La red matemática formal actual.	22
2.2	Exigencias tecnológicas: actividades matemáticas humanas y cuestiones científicas.	23
2.2.1	La escala universal de los números reales y la moderna noción de función.	24
2.3	Procedimientos y problemas. Ideas.	27
2.4	Manual del usuario: estrategias para aprender matemáticas.	28
2.5	La función cuadrática.	31
2.5.1	La noción de función como proceso.	32

2.5.2 Procesos algebraicos para el tratamiento de las funciones polinomiales de segundo grado. 32

2.5.3 Procesos analíticos para el tratamiento de las funciones cuadráticas. 33

2.5.4 Procesos aritméticos que emergen en la caracterización de las funciones cuadráticas. 37

2.5.5 Procesos geométricos que emergen en la caracterización de las funciones cuadráticas. 45

Capítulo 3. Diseño, descripción y puesta en escena de la propuesta: unidad didáctica: funciones cuadráticas. 47

3.1 Diseño de la unidad didáctica: funciones cuadráticas. 47

3.2 Desarrollo de la unidad didáctica: funciones cuadráticas. 48

3.3 Infraestructura y cronograma. 50

3.4 Descripción de cada uno de los nodos. Hojas de trabajo. 50

3.5 Proyectos. 72

Capítulo 4. Datos relevantes observados en el desarrollo de la unidad didáctica. 99

4.1 Pre-concepciones de los estudiantes. 99

4.2 Desarrollo de los proyectos. 102

Conclusiones y perspectivas. 103

Conclusiones. 103

Perspectivas. 105

Bibliografía 107

Anexo. Diagnóstico de pre-concepciones para el tema de función cuadrática. 110

Índice de tablas y mapas conceptuales. 112

Índice de figuras. 114

Introducción

El problema que se aborda en este trabajo es, en cierta medida, el problema general del área de investigación conocida como *matemática educativa*; es decir, la *búsqueda de formas de enseñar y aprender matemáticas de manera institucional y efectiva*. En particular, aquí se establece una propuesta didáctica con la que se pretende que los estudiantes del bachillerato universitario del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, logren *aprender significativamente* los *contenidos actitudinales, conceptuales* y *procedimentales*, de la Unidad 1, del curso de Matemáticas II, *Funciones cuadráticas*. Con ello se ponen en práctica los presupuestos constructivistas y se analiza su viabilidad en nuestro contexto, es decir, se coteja en nuestra experiencia si es posible cumplir, bajo una propuesta constructivista, los objetivos institucionales de la educación matemática del bachillerato CCH-UNAM.

Así, hemos echado mano de dos de las principales perspectivas del aprendizaje del constructivismo, a saber, el *aprendizaje significativo* y el *aprendizaje colaborativo*. La primera, apela al individuo como el constructor propiamente dicho del entorno que lo rodea, cuestión que, a pesar de su subjetivismo, permitiría en última instancia que el individuo mismo estuviera en posibilidad de inventar o construir la mejor forma de existencia en cada momento y lugar. La segunda, en cambio, no sólo sería un complemento de la primera, sino le proporcionaría los elementos suficientes para reconocer sus posibilidades y limitaciones a partir del reconocimiento de los demás y del entorno en donde esté situado: "a través de otros llegamos a ser nosotros mismos".[1]

Por otra parte, siendo la tecnología informática uno de las componentes principales de esta época, resulta imprescindible hacer uso de ella pero, ¿de qué manera? Esta sin duda es una de las principales preocupaciones de la matemática educativa actual y es una cuestión que ha venido recibiendo diferentes respuestas que pueden englobarse en las tres posiciones siguientes:

- *No*, rotundo: el uso de la tecnología informática en la educación matemática *entorpece* el desarrollo de habilidades, estrategias, etc., requeridas para aprender matemáticas.

[1] L. S. Vigotsky. Citado por [Gutiérrez; 2006].

- *Sí*, a medias: emplear tecnología pero paralelamente, o de manera subordinada, al aprendizaje de las matemáticas con lápiz y papel.
- *Sí*, contundente: la tecnología informática, matemática en esencia, es un medio interactivo invaluable para aprender matemáticas y desarrollar la imaginación matemática de los estudiantes.

Nuestra propuesta camina sobre la tercera postura. Al respecto, podríamos esgrimir gran cantidad de hechos que rebaten a las dos primeras actitudes; sin embargo, creemos más conveniente destacar lo siguiente con relación a este *sí contundente* en el empleo de la tecnología informática como medio interactivo en el aprendizaje significativo y colaborativo de las matemáticas.

- Tradicionalmente, las matemáticas se describían (y todavía son descritas por algunos) como la ciencia *del número*, *el espacio* y *el tiempo*. Esto se observa todavía en los planes de estudio de muchas instituciones, incluyendo el bachillerato aquí considerado. Sin embargo, el territorio explorado por las matemáticas se ha extendido enormemente haciendo desaparecer aquellas demarcaciones y, en el caso de las llamadas "aplicaciones", éstas se han confundido con aquellas: las matemáticas ya no sólo son el "lenguaje de la física" o de "la ingeniería", son ahora herramientas esenciales para la economía, las ciencias sociales, la medicina, etc. Al contemplar las matemáticas en este amplio contexto podemos decir que las matemáticas no sólo tratan del "número", el "espacio" y el "tiempo", sino que constituyen algo así como las *instrucciones de uso de las cosas*[2], de todas las cosas, incluyendo al humano mismo cuando se le mira de manera "objetiva".
- La computadora ha venido a cambiar de manera decisiva a todos los ámbitos, sean tecnológicos, científicos, económicos, sociales, culturales o artísticos, cuestión que incluye el quehacer matemático mismo, así como su aprendizaje y enseñanza. Con relación a esto último, caben destacar los siguientes puntos.
    - La graficación por computadora, que incluye animación, es una herramienta de visualización en extremo útil y no tiene comparación con otras formas anteriores de realizarla.

[2] [Vázquez Santa Ana, D. 2001]

- o La modelación por computadora, que incluye no sólo elementos gráficos o visuales, sino también elementos sonoros (audio digital), o el empleo de señales a través de sensores, resulta un elemento útil para que alguien comprenda de qué se trata la objetivación del mundo o, en otras palabras, para que vea "en vivo" cuál es el afán de esta época, de la llamada época moderna.
- o La aparición de "calculadoras" no sólo aritméticas sino algebraicas (los sistemas de cómputo algebraico, en inglés, *Computer Algebraic Systems*), cuyo propósito es facilitar los cálculos numéricos y simbólicos, además de hacerlos más eficientes, plantea la siguiente interrogante: ¿es conveniente emplearlos en el bachillerato, o sólo son para los que ya saben matemáticas? La respuesta hasta ahora es que esas calculadoras deben usarse hasta que los estudiantes ya hayan aprendido (de "memoria") las rutinas o algoritmos bajo consideración, quitándole la posibilidad a los estudiantes de ir más allá de esas rutinas, por ejemplo, en cuestiones que para ellos sean de mayor interés.
- o En este sentido, la hoja de cálculo parece tener una mejor aceptación pero no pasa de seguirla viendo como una hoja de cálculo aritmético, siendo que se pueden explorar sus posibilidades para desarrollar las habilidades algebraicas "básicas" como son la traducción de "lenguaje natural" a "lenguaje algebraico", amén de sus posibilidades básicas, pero limitadas, de graficación.
- o Las interfaces interactivas de geometría se usan, pero desde mi punto de vista, muy poco. Como se verá, en este trabajo echamos mano de un programa libre, GeoGebra, que consiste de una interfaz geométrica y una interfaz algebraica, de manera que todo lo geométrico tiene un trasunto algebraico que se hace explícito inmediatamente y, recíprocamente, para cada cuestión algebraica se muestra su trasunto algebraico, lo que hace tener un ambiente geométrico-algebraico muy parecido a la forma en que Descartes (y todos los modernos) ven al mundo.

- Por otra parte, se habla mucho de que hay que llevar a los estudiantes al "buen uso" de la internet pero, ¿qué puede significar esto? Me parece que esta cuestión, tan poco estudiada o analizada por la matemática educativa, es una de las cuestiones centrales planteadas en estos tiempos acerca de lo que es el entendimiento humano. Para autores como [Pozo; 2003], el *entendimiento* es sinónimo de "adquisición", en este caso de "una adquisición de conocimiento", y que actualmente nos encontramos ante la disyuntiva de aspirar a vivir en una "sociedad del conocimiento" o seguir viviendo en "una sociedad de la información", debido, continúa, a que "quién no puede acceder a las múltiples formas culturales de representación simbólica (numéricas, artísticas, científicas, gráficas, etc.) está social, económica y culturalmente empobrecido, además de vivir confundido, agobiado y desconcertado ante una avalancha de información que no puede traducir en conocimiento, a la que no puede dar sentido". Como se desprende de estas afirmaciones, resulta no sólo necesario, sino que resulta impostergable, el *enseñar* a nuestros congéneres a interpretar todo ese "universo de información" para que pueda conducirse con "buenos" criterios en el actual contexto globalizado.

Sin embargo, ¿acaso nuestra interpretación, sea como especialistas, matemáticos, profesores, adultos, será la que le otorgue el mejor sentido a lo que tenemos enfrente? Me parece que no y, además, con este tipo de "orientaciones" para acercarnos a la red, sea internet, sea la red actual de matemáticas, sólo estaríamos quitándonos, de nuevo, la creatividad de cada uno de nosotros. Cabe decir, me parece conveniente la elaboración de hipertextos pero sólo con la finalidad de que los individuos naveguen por donde se crucen sus horizontes de interpretación, cuestión que es posible incluso en el aprendizaje de las matemáticas debido sobre todo a los dos factores siguientes:

- De acuerdo con Heidegger la esencia de esta época es técnica, lo que no quiere decir que se trate de algo técnico, esencia a la que las matemáticas han acudido a su llamado. En efecto, de lo que se trata en esta época es de hacer de todo algo *objetivo*, *re-presentable*, es decir, *algo que se pueda traer a la presencia cuando así le sea solicitado*, para lo que *contar*, *medir*, *algebrizar*, *geometrizar*, etc., son interpretaciones que han convenido a ese afán moderno o interpretación técnico-científica del mundo. Tal parece que en la actualidad todo está regido por lo matemático, aunque en realidad está regido por lo técnico; en todo caso, las matemáticas han devenido instrucciones de uso de las cosas, de los *objetos*, y pareciera que todo se encuentra bajo esta categoría.

- Parece que esta objetivación del mundo, llamada pomposamente por algunos "reificación", han colocado a las matemáticas en una posición en donde:[3]
    - la verdad matemática no es una verdad ontológica, simplemente es la adecuación o el llevar a cabo algo de acuerdo con ciertas reglas preestablecidas;
    - las matemáticas han devenido apretada red formal de conceptos, ideas, métodos, etc., y su motivo es el afán moderno, técnico, de transformar racionalmente al mundo.

De lo anterior se desprenden muchas cuestiones todavía no explicitadas o difundidas entre las que quiero señalar las siguientes:[4]

- dado que en el contexto actual todo está referido a una cuestión matemática, ya no es difícil comenzar cualquier tema de "matemáticas elementales" haciendo referencia a algo "tangible" al aprendiz, por lo que su aprendizaje puede ser referido, desde el comienzo, a la existencia propia de aquel;
- puesto que el aprendiz no es un ermitaño o eremita, sus interpretaciones son puestas en juego con otras interpretaciones, incluyendo las de sus compañeros de clase, lo que permitirá ampliar o depurar el sentido que le haya otorgado a tal o cual cuestión;
- con lo anterior se hace evidente que alguien que está aprendiendo matemáticas se asemeja a un escritor: "éste comienza inventado sus personajes pero llega un momento en la creación de la obra que los personajes se levantan, por así decirlo, y son ahora los que le dictan al autor el devenir de la misma";[5]
- más aún, dada la diversidad de interpretaciones de los aprendices y, por otra parte, dada la abundancia de interpretaciones matemáticas interconectadas para una misma cuestión, se presenta el problema de exponerlas a todas, sin que con ello todos los estudiantes tengan que recorrer todo lo que allí aparece, ni que tampoco se limite a otras interpretaciones no contempladas, cuestión para la que la elaboración de hipertextos multimediales sería una de esas posibilidades;

[3] [Mac Lane, S. 1986]
[4] [Vázquez Santa Ana, D. 2001]
[5] [Vattimo, Cap. 1: 1998]

- finalmente, bajo esta idea el enseñar se torna más difícil que aprender, pues "quien de verdad enseña, sólo aventaja a sus discípulos en que tiene que aprender aún mucho más que ellos, es decir, tiene que *aprender a dejar aprender*."

Para llevar a cabo estas ideas fue necesario *diseñar*, *elaborar y poner en escena, secuencias didácticas* para la *Unidad 1*, de *Matemáticas II, "Funciones Cuadráticas"*, con el propósito de posibilitar un mejor aprendizaje, o sea, un aprendizaje que fuese adquiriendo un significado propio en los procesos prácticos cercanos a los estudiantes, con vistas a alcanzar los objetivos actitudinales, conceptuales y procedimentales del área de matemáticas del CCH y, específicamente, aquellos que atañen a esta unidad temática.

Al respecto, cabe señalar que los estudiantes tienen mejor comprensión cuando los contenidos se tratan en *su contexto* y, más todavía, si ese aprendizaje es significativo [Ausubel. D. et al., 1983]. Por ello, en el diseño de las experiencias didácticas aquí expuestas, se tuvo que permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno, pues el individuo debe desarrollar una serie de estrategias que le permitan adquirir un conocimiento, colocarlo en su lenguaje y saber manejarlo cuando sea necesario. La eficiencia de este aprendizaje, si es que se puede hablar de algo así, se encuentra en función de su *significatividad*, no de las técnicas memorísticas, lo cual es acorde con las ideas sobre el aprendizaje bajo un enfoque constructivista. Por ello es que sustentamos esta propuesta en las perspectivas del aprendizaje constructivista y colaborativo, así como en el empleo de la computadora como herramienta para lograr aprendizajes significativos, lo que ha quedado establecido en el primer capítulo.

Por otra parte, el sustento matemático de esta propuesta lo encontramos en los dos hechos matemáticos siguientes:

- las funciones cuadráticas son funciones analíticas; y,
- el teorema fundamental del álgebra,

de donde se derivan las diferentes actividades diseñadas para nuestros propósitos. Este marco matemático se expone sucintamente en el segundo capítulo y se complementa con algunas de las actitudes o habilidades que son empleadas en el quehacer matemático y que se sugiere establecer o impulsar en la enseñanza de las matemáticas.

En el tercer capítulo, se expone la experiencia didáctica que sustenta la tesis aquí presentada. Comenzando con el diseño de la *Unidad didáctica: Funciones cuadráticas*, se continúa con su desarrollo en el marco de su realización con un grupo de estudiantes del CCH-Sur, exponiendo con todo detalle las componentes de esa unidad didáctica. Finalmente, en el cuarto capítulo, presentamos algunos datos que he considerado relevantes para establecer las conclusiones generales de este trabajo, así como sus posibles perspectivas, cuestiones, estas últimas, que exponemos al término del cuarto capítulo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y TESIS

A. Planteamiento del problema

Durante mi experiencia docente con estudiantes del nivel medio superior, con los que he estado trabajando en diversos cursos de matemáticas (álgebra, geometría analítica, etcétera), he venido observando grandes deficiencias en el aprendizaje de los contenidos de esos cursos, lo que desde mi punto de vista corresponde a diferentes factores entre los que caben destacar los siguientes.

- La no contextualización del uso del álgebra en acciones o actividades cercanas a los estudiantes.
- Los conocimientos –actitudinales, conceptuales y procedimentales– generalmente se tratan *fuera de contextos* apropiados. Así, cuando se pretende mostrar a los estudiantes la utilidad de los contenidos que se estudian, a lo más que se llega es a resolver los llamados *problemas de aplicación* que se proponen en los libros de texto, que la mayoría de las veces son ajenos a la realidad propia de los estudiantes o, en otro caso, no la amplían o extienden por carecer de algún vínculo importante con ella.
- La ausencia de metodologías específicas, aplicadas para el desarrollo de los temas de matemáticas.
- El deficiente uso de los medios informáticos actuales como herramientas interactivas para la construcción del conocimiento matemático.
- La falta de materiales (libros de texto, apuntes, antologías, etcétera) acordes con las necesidades e intereses del estudiante, que le permitan avanzar de manera significativa.

Esta situación me llevó a estudiar algunas metodologías en las que se propone lograr aprendizajes efectivos y significativos, siendo las metodologías derivadas de la perspectiva constructivista de aprendizaje las que considero más adecuadas para su aplicación en el aula. Más aún, con el uso de las actuales tecnologías informáticas, me parece que se puede facilitar el aprendizaje de los contenidos de los cursos de matemáticas en el nivel medio superior.

B. Tesis

A través de una metodología constructivista y haciendo uso de una interfaz algebro-geométrica (GeoGebra), y una hoja de cálculo (Excel), es posible que los estudiantes logren aprendizajes significativos de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales establecidos en el Bachillerato del Colegio de Ciencia y Humanidades, en particular, la Unidad 1 de Matemáticas II[6] del sistema educativo mencionado.

[6] Cf. CCH-UNAM. Área de Matemáticas. Programa de Estudios de Matemáticas I-IV. 2006.

CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO Y PRÁCTICO

En este capítulo se exponen los elementos metodológicos y prácticos más relevantes empleados en el diseño, elaboración y puesta en práctica de esta propuesta educativa. Estos elementos son los siguientes.

1. Los *aprendizajes significativo* y *colaborativo*, que constituyen el marco metodológico para la propuesta aquí presentada.
2. La tecnología informática y su relación con en el aprendizaje de las matemáticas.
3. Con base en este marco exponemos un modelo educativo práctico en el que la computadora interviene de manera decisiva para dar lugar a un ambiente interactivo que favorece estos dos tipos de aprendizajes bajo las condiciones establecidas líneas arriba.

1.1 Elementos para desarrollar una propuesta educativa constructivista y colaborativa para el aprendizaje de las matemáticas.

Las perspectivas constructivistas del aprendizaje se han fundado principalmente en las investigaciones psicológicas de David Ausubel. Sin embargo, actualmente no se puede hablar de una única propuesta constructivista, pero se puede decir que en todas ellas se destaca la *condición de aprendizaje propia de cada individuo o aprendiz,* en el sentido que a esto le otorga Ausubel:[7]

> Si tuviese que reducir toda la sicología educacional a un sólo principio, diría lo siguiente: el factor aislado más importante que influencia el aprendizaje, es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñese de acuerdo a ello.

Por otra parte, en el aprendizaje colaborativo la condición del aprendizaje de un sujeto está determinada por *la red de relaciones económicas, sociales, culturales, etc.,* en la que se encuentra inmerso, pues su comprensión e inteligencia "filtra", por así decirlo, lo que

[7] Cf. [Novack; 1988]

aprende con base en las ideas, prejuicios, conocimientos, etc., dados ínsitamente en esa red de relaciones.

En muchos aspectos estas teorías coinciden y se complementan, pues en ninguna se duda de la importancia que tiene la construcción que el individuo hace de las cosas y del mundo en su relación con él. En la siguiente tabla se exponen los aspectos generales de ambos tipos de aprendizaje pues con ellos será fundamentada nuestra propuesta.

Tabla 1. Dos tipos complementarios de aprendizaje.		
Clase	**Premisas sobre el aprendizaje y el conocimiento**	**Representantes**
Aprendizaje significativo	Los individuos construyen su propio conocimiento al transformar y reorganizar las estructuras cognoscitivas que ya poseen.	David Ausubel Marco Antonio Moreira
Aprendizaje colaborativo	El conocimiento se construye sobre la base de las interacciones sociales y la experiencia. El conocimiento refleja el mundo externo filtrado e influido por la cultura, el lenguaje, las creencias, las relaciones con los demás y la enseñanza directa. El descubrimiento guiado, la enseñanza, los modelos y el entrenamiento, así como el conocimiento previo, las creencias y el pensamiento influyen en el aprendizaje.	Lev S. Vygotsky

1.1.1 Elementos del aprendizaje significativo.

El planteamiento base del enfoque constructivista es que el *aprendizaje* es un aprendizaje de alguien (de un *sujeto Cognoscente*) y, más aún, es una *construcción individual* que se produce como resultado de la interacción de las disposiciones internas y contexto de ese individuo, por lo que el conocimiento no es una copia o reflejo de la realidad, sino una *construcción* que cada persona lleva a cabo *significativamente*.

Esta construcción parte de la representación inicial de la información y de la actividad, externa o interna, que desarrolla el individuo al respecto [Carretero, 1994]. Esto significa que el aprendizaje no es un asunto sencillo de transmisión, internalización y acumulación de conocimientos, sino un proceso activo por parte del individuo que consiste en enlazar, extender, restaurar e interpretar y, por lo tanto, *construir* conocimiento desde los recursos de la experiencia y la información que recibe: *la persona debe relacionar, organizar y extrapolar los significados de éstas*. [Chadwick, C. B; 2001].

La influencia de los conocimientos previos sobre los nuevos aprendizajes es una de las máximas constructivistas, y un hecho constatado por la mayoría de las actuales teorías del aprendizaje. Sin embargo, en ocasiones esta máxima no se desarrolla consecuentemente con los otros principios del constructivismo dando lugar más bien a una asociación de conocimientos o representaciones que a una construcción de las mismas, de manera que resultará conveniente aclarar la diferencia entre *procesos de aprendizaje asociativo* y *procesos de aprendizaje constructivo*.

El aprendizaje asociativo tiende a reflejar la estructura del mundo extrayendo u optimizando las regularidades que hay en él, por lo que si así se adquiriera, el conocimiento no podría ser sino un reflejo más o menos preciso del mundo. En cambio, el aprendizaje constructivo genera nuevos mundos, nuevas formas de conocer, que no se limitan a recoger el orden externo, sino a generar nuevas formas de organización cognitiva, en suma, *nuevos significados*. Según esta concepción, sería el mundo el que constituiría un reflejo del conocimiento y no al revés. Estas concepciones del aprendizaje difieren entre sí no sólo en este supuesto epistemológico sobre la naturaleza del conocimiento, sino en algunos otros supuestos que se muestran en la tabla 2 [Pozo, 2003].

Tabla 2. Principales diferencias entre concebir el aprendizaje como un proceso asociativo o constructivo. (Adaptada de Pozo 1989)

	Asociacionismo	**Constructivismo**
Unidad de análisis:	Elementos	Estructuras
Sujeto:	Reproductivo Estático	Productivo Dinámico
Origen del cambio:	Externo	Interno
Naturaleza del cambio:	Cuantitativa	Cualitativa
Aprendizaje por:	Asociación	Reestructuración

En general, los modelos de aprendizaje asociativo se basan en un enfoque analítico, descomponiendo cualquier ambiente en un conjunto de elementos asociados entre sí con distinta probabilidad, de manera que aprender es detectar con la mayor precisión posible las relaciones de contingencia entre esos elementos o hechos, por lo que los procesos de aprendizaje consisten esencialmente en mecanismos de cómputo de esas contingencias [Pearce y Bouton, 2001]. Las teorías asociativas del aprendizaje parten de los principios siguientes [Bolles, 1975; Pozo, 1989]:

- *principio de equipotencialidad*, según el cual todos los ambientes se computan igual, ya que todos los elementos que los componen son inicialmente intercambiables;
- *principio de correspondencia*, que mantiene que los conocimientos o conductas así generados se corresponden con el ambiente, en el sentido de que son un reflejo de él.

Por su parte, la perspectiva constructivista está caracterizada por su enfoque holista[8], organicista y estructuralista, vinculando el aprendizaje al significado que el organismo atribuye a los ambientes con los que se ve enfrentado, en función de las estructuras cognitivas y conceptuales desde las que interpreta ese ambiente. Las teorías constructivistas niegan los dos principios señalados de las teorías asociacionistas [Carretero, 1993; Pozo, 1989], ya que todo aprendizaje se basa en los *conocimientos previos del sujeto*, que son específicos de dominio y propios de cada sujeto, en contra de la equipotencialidad de los aprendizajes, y además es un proceso de *construcción personal*, por lo que no necesariamente es un reflejo del mundo, contraviniendo con el principio de correspondencia. Más aún, en el enfoque constructivista sujeto y objeto se construyen mutuamente [Pozo, 2003], de modo que no es sólo que la representación que el sujeto tiene del mundo sea una construcción personal, sino que, a su vez, cada persona se construye a partir de la interacción con diferentes mundos (verbigracia otras personas) y objetos, de tal modo que las estructuras cognitivas desde las que nos representamos nuestro mundo son, en buena medida, el resultado de ese proceso de construcción:

> *No construimos sólo los* ***objetos****, el mundo que vemos, sino también la mirada con la que lo vemos. Nos construimos también a nosotros mismos en cuanto* ***sujetos*** *de conocimiento* [Pozo, 2003].

Aunque ambas formas de aprender, asociando o construyendo, están ampliamente sustentadas tanto empíricamente como teóricamente, sus diferencias resultan menos claras

[8] El Holismo (del griego *holos* que significa *todo*, *entero*, *total*) es la idea de que todas las propiedades de un sistema (biológico, químico, social, económico, mental, lingüístico, etc.) no pueden ser determinadas o explicadas como la suma de sus componentes. El sistema completo se comporta de un modo distinto que la suma de sus partes.

de lo que al principio pudiera parecer. De hecho, se puede pensar que algunos de los mecanismos que permiten construir esas representaciones del mundo pueden tener una naturaleza asociativa, basándose en cómputos de las regularidades observadas en el mundo a partir de ciertas restricciones impuestas por el propio sistema cognitivo, sean preformadas o producto de anteriores aprendizajes o construcciones [Pozo, 2003]. Por lo que se puede afirmar que la diferencia central entre ambos tipos de aprendizaje estriba en que el constructivismo –epistemológico, según [Pozo, 2003]- niega rotundamente el principio de correspondencia.

Sabemos que el aprendizaje significativo se caracteriza por la interacción entre el nuevo conocimiento y el conocimiento previo. En ese proceso, que no es literal ni arbitrario, el nuevo conocimiento adquiere significados para el aprendiz en tanto el conocimiento previo se enriquece, se hace más diferenciado, más elaborado en relación con los significados ya presentes y, sobre todo, deviene conocimiento más estable. Sabemos también que el conocimiento previo es, de forma aislada, la variable que más influye en el aprendizaje. En última instancia, sólo podemos aprender a partir de aquello que ya conocemos. Ya en 1963, Ausubel resaltaba esto. Hoy todos reconocemos que nuestra mente es conservadora, es decir, aprendemos a partir de lo que ya tenemos en nuestra estructura cognitiva, por lo que, como decía este autor, si queremos promover el aprendizaje significativo hay que averiguar dicho conocimiento y enseñar a partir de él mismo.

En el aprendizaje significativo el aprendiz no es un receptor pasivo. Por el contrario, debe hacer uso de los significados que ya internalizó, para poder captar los significados de los materiales educativos. En ese proceso, al mismo tiempo que está progresivamente diferenciando su estructura cognitiva, está también haciendo reconciliación integradora para poder identificar semejanzas y diferencias y reorganizar su conocimiento. O sea, el aprendiz *construye* su conocimiento, *produce* su conocimiento.

En contraposición al aprendizaje significativo, en el otro extremo de un continuo, está el aprendizaje mecánico, en el cual nuevas informaciones son memorizadas de manera arbitraria, al pie de la letra, no significativa. Ese tipo de aprendizaje, bastante estimulado en la escuela, sirve para "pasar en las evaluaciones", pero tiene poca retención, no requiere comprensión y no da cuenta de situaciones nuevas.

Diferenciación progresiva y reconciliación integradora.[9]

El aprendizaje significativo, se basa en dos principios rectores que se conocen como *diferenciación progresiva* y *reconciliación integradora*. Por un lado, la diferenciación progresiva es el principio según el cual las ideas más generales e inclusivas del contenido deben presentarse al comenzar la instrucción y, progresivamente, deben ser diferenciadas en términos de detalle y especificidad. Por otro, en la construcción de un aprendizaje significativo no sólo se van estableciendo diferenciaciones, entre el conocimiento actual y el conocimiento anterior, sino también debe llevarse a cabo una exploración que relacione diferencias y similitudes relevantes, así como el reconocimiento de inconsistencias reales y aparentes, proceso que se denomina reconciliación integradora.

La diferenciación progresiva y la reconciliación integradora son dos procesos relacionados que ocurren en el aprendizaje significativo. Todo aprendizaje que resulte en una reconciliación integrada es ya una diferenciación progresiva adicional de conceptos y proposiciones. La reconciliación integradora es una forma de diferenciación progresiva de la estructura cognitiva, por lo que se puede decir que es un proceso cuyo resultado es el delineamiento explícito de diferencias y similitudes entre ideas relacionadas.

1.1.2 Elementos del aprendizaje colaborativo.

Como está expuesto en la tabla 1, el aprendizaje colaborativo, está caracterizado por lo siguiente:

- El conocimiento se construye sobre la base de las interacciones sociales y la experiencia.
- El conocimiento refleja el mundo externo filtrado e influido por la cultura, el lenguaje, las creencias, las relaciones con los demás y la enseñanza directa.
- El descubrimiento guiado, la enseñanza, los modelos y el entrenamiento, así como el conocimiento previo, las creencias y el pensamiento influyen en el aprendizaje.

De acuerdo con Vigotsky,[10] todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, etc.) se adquieren primero en un contexto social y luego se *internalizan*: *Un proceso interpersonal queda transformado en otro intra-personal*. De esta manera, en el aprendizaje social los logros se construyen conjuntamente, en un contexto social específico, con la ayuda de herramientas culturales (verbigracia, la televisión, el

[9] [Moreira; 1988]
[10] [Vygotsky; 1979]

teléfono, la computadora, etc.), por lo que ese contexto viene a ser parte integral de la adquisición de conocimientos y no, como se observa en muchos casos, como un mero contexto que lo rodea [Resnick, 1991].

De los conceptos más importantes en la obra de Vygotsky retomaremos el de "zona de desarrollo próximo", pues nos parece que éste permite vincular las características constructivas y colaborativas dadas en la adquisición de conocimiento. Por *zona de desarrollo próximo,* Vygostky entiende la "distancia" entre el *nivel real de desarrollo,* determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el *nivel de desarrollo potencial*, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de alguien más [Chadwick, 2001]. Esta zona delimita el margen de incidencia de la acción social (la cultura, la economía, etc.), no para instalarse en la persona, sino para hacerla progresar a través de su desarrollo próximo, ampliándola y generando eventualmente nuevas zonas de desarrollo próximo. Lo "próximo" es, por así decirlo, aquello de lo que la persona ya se dio cuenta que necesita pero que no sabe "a ciencia cierta" cómo llevar a cabo. De esta manera, la persona sigue construyendo individualmente su conocimiento, lo que no interfiere en que sus construcciones sean unas veces útiles a su contexto y otras veces no, de manera que, si tiene interés, acomodará o integrará esos otros conocimientos a su propia condición:

> a una temperatura adecuada un huevo se convertirá en pollo, en tanto que una piedra a ninguna temperatura lo hará [Mao Tse Tung].

Cabe destacar que en la perspectiva de la zona de desarrollo próximo, ésta no apela a ninguna proximidad lógica o lineal en la construcción de conocimiento [Chadwick, 2003]. En realidad, bajo el punto de vista constructivista no hay nada que impida la construcción de conocimiento en perspectivas no lógicas o, inclusive, *a-lógicas*, por lo que la subordinación de unas formas de aprendizaje a otras carece de sentido, pues llevando la posición constructivista a uno de sus extremos ésta toca, por así decirlo, al pensamiento posmoderno, en particular, al pensamiento heideggeriano, para el que:

> *Comprender* no significa ya un comportamiento del pensamiento humano entre otros que se pueda disciplinar metodológicamente y conformar en un método científico, sino que constituye el movimiento básico de la existencia humana. [Gadamer, 2002]

de manera que realmente es difícil, sino imposible, crear una metodología general para la adquisición humana de conocimiento, pues deberá contemplar los rasgos individualísimos de cada uno de los humanos que estamos, que han estado y que estarán sobre la faz de la Tierra, o de algún otro lugar.

Por todo lo anterior, podemos decir que la máxima educativa que se puede desprender del constructivismo es la siguiente:

> [Que] El enseñar es más difícil que el aprender. [Pues] Quien de verdad enseña, sólo aventaja a sus discípulos en que tiene que aprender aún mucho más que ellos, es decir, tiene que aprender a dejar aprender. [Heidegger, 1993-94]

1.2 Tecnología informática contemporánea y su relación con el aprendizaje de las matemáticas.

La tecnología informática contemporánea permite la expresión de diversas representaciones de la realidad, de tal forma que éstas pueden encausarse hacia los diversos contenidos matemáticos que han sido establecidos en los diferentes niveles educativos. Así, la actual tecnología permite una contextualización eficiente de dichos contenidos además de dar paso a elaboraciones contextuales en forma fácil y atractiva.

La enseñanza de las matemáticas es una actividad sumamente compleja. A través de la historia el hombre ha experimentado diversos métodos y procedimientos con el propósito de lograr en forma efectiva tanto su enseñanza como su aprendizaje. Por esta razón, desde la aparición de los computadores hasta nuestros días se buscan formas de aprovechar didácticamente en el campo educativo el gran potencial que ellas representan.

Si bien es cierto, el objeto de introducir las nuevas tecnologías en el sistema escolar, debe ser el de mejorar la educación; esto no debe conllevar a la implementación en el uso de las computadoras solamente porque están de moda. Por tanto, se deben buscar aquellos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje donde el uso de las nuevas tecnologías contribuya con algún ingrediente especial que las haga convenientes.

Mediante la utilización de software o programas educativos que se han popularizado con la aparición de nuevas tecnologías, el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas encuentra herramientas que facilitan su proceso de construcción.

Estudios realizados en los últimos años[11] han demostrado que el uso de la computadora en el aula abre perspectivas interesantes para la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias. Entre los beneficios que nos brinda, podemos mencionar que: ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje, provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados, elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas, da un soporte basado en la retroalimentación y reduce el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y, por lo tanto, se aventura más a explorar sus ideas.

Por ello, el objetivo principal del empleo de la computadora en el aula, no debe reducirse a practicar algoritmos, sino que debe ayudar al alumno a describir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión. Así, las matemáticas pasan a ser mucho más que una simple mecanización de procedimientos.

Asimismo, el uso de este medio tecnológico en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas ofrece tanto a docentes como estudiantes ventajas sobre otras didácticas de las matemáticas, tales como: la participación activa del alumno en la construcción de su propio aprendizaje, la interacción entre el alumno y la máquina, la posibilidad de crear micromundos que le permitan explorar y conjeturar. Así también, permiten el desarrollo cognitivo del estudiante, y por medio de la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

Paralelamente existen ventajas para el docente al utilizar las diversas aplicaciones interactivas de computadora en el área de matemáticas, tales como: el aprovechamiento del tiempo a la hora de presentar cualquier contenido curricular, permiten una mayor estética al momento de la presentación de la clase, aumentan la motivación y el estado de ánimo, así como la atención y disposición del alumno al presentar un determinado material. Asimismo, la rapidez para impartir la cátedra, otorgando menos desgaste físico en cuanto a la voz y otros aspectos del ser humano, por otro lado la mayor cantidad de tiempo para llevar a cabo una retroalimentación de los temas tratados, y con ello, estudiarlos con mayor profundidad, proporcionando una mayor organización al docente en la forma en cómo

[11] Cf. www.unitec.com.mx

estructurar sus clases y otorgando una mayor integración de todas las componentes que intervienen en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas.

Por tanto, asentimos que los programas que hemos seleccionado para la ejecución de nuestra propuesta y que en este caso son: la interfaz algebro-geométrica GeoGebra, una hoja de cálculo (Excel) y applets (escenarios interactivos) elaborados en Flash; reúnen las características antes descritas para la comprensión y tratamiento del tema *La función cuadrática*, así como para la descripción de conceptos matemáticos involucrados con este contenido, tales como *variable*, *fórmula*, *gráfica*, *parámetro*, entre otros.

1.3 Elementos constructivistas y colaborativos para el diseño de una unidad didáctica mediada con la computadora.

En general, la *unidad didáctica* de una *unidad temática* (de algún plan y programa de estudios particular), debe contemplar aspectos como la organización de las sesiones de aprendizaje ("clases"), el papel que desempeñarán el profesor y el alumno en esas sesiones y fuera de ellas (por ejemplo en asesorías, etc.), los medios o recursos que la institución ofrece, los medios o recursos que el profesor o los alumnos pueden poner en juego, así como los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales que se puedan distinguir en la misión, objetivos generales, objetivos particulares, etc., que la institución bajo consideración haya establecido.

Ahora bien, todo esto se puede ir especificando en *secuencias didácticas* que serán las partes constituyentes de la unidad didáctica en realización. Su diseño, así como el de la misma unidad didáctica, es una de las principales tareas del profesor contemporáneo, independientemente de la interpretación que del aprendizaje tenga. Nosotros, en particular, hemos elegido las interpretaciones constructivista y colaborativa del aprendizaje para elaborar nuestra unidad didáctica, así como sus secuencias didácticas. Más aún, nuestra propuesta agrega la computadora como uno de sus recursos esenciales, dado que con los medios de representación que ofrece, el estudiante tiene la posibilidad de construir y re-construir el conocimiento matemático "viendo" y "palpando", literalmente, sus construcciones, las de sus compañeros, así como la de los matemáticos que lo han ido estableciendo en la historia de las matemáticas. De allí que llamemos a este tipo de unidades y secuencias didácticas, *unidades o secuencias didácticas mediadas con la* *computadora*. Los componentes básicos de una unidad o secuencia de este tipo son los siguientes:

- *El alumno*.
- *El profesor*.
- *Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios*.
- *Las hojas de trabajo impresas*.
- *La evaluación*.

A continuación describimos a cada uno de estos componentes así como su organización e interacción al seno de una unidad didáctica.

1.3.1 El alumno.

Sin duda, el principal actor de una unidad didáctica, diseñada bajo los preceptos constructivistas, es el alumno o aprendiz. Ahora, puesto que es de suma importancia conocer su contexto, aunque sea de manera general, conviene echar mano de la información disponible acerca de esta cuestión. Por ejemplo, la experiencia educativa presentada en este trabajo, fue llevada a cabo con estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, Plantel Sur, por lo que algunos de los datos que nos dieron un primer acercamiento al contexto de estos estudiantes fueron los aportados por [Santillán R., y López, D. 2006], de donde hemos obtenido la información presentada en la siguiente tabla.

Tabla 3. Características socio-económicas de los estudiantes del bachillerato CCH-UNAM, generación 2006, son las siguientes.[12]		
Características de la población escolar.	*Datos escolares de secundaria.*	*Familia.*
Género. Una de las características de la generación 2006 es que existe mayor porcentaje de mujeres inscritas: 52.79%, en tanto que la población masculina es de 47.21%. Cabe destacar que en el plantel Sur este porcentaje se invierte, de manera que se tiene: sexo femenino 48.51% y sexo masculino 51.49%.	**Tipo de secundaria.** En lo que se refiere al tipo de secundaria a la que asistieron estos alumnos, 81.04% realizó sus estudios en la escuela secundaria pública; 10.82% en escuela secundaria privada y 8.14% en ambos tipos de escuela. Cabe destacar que esta generación presentó, respecto a la generación 2005, un incremento	De los estudiantes de primer ingreso 9.01% no tienen hermanos; 83.33% tiene entre 1 y 3 hermanos; 6.75% tiene de 4 a 6 hermanos; y 0.91% tiene 7 o más hermanos. El lugar que ocupa el alumno entre sus hermanos es el siguiente. El 50% ocupan del segundo al cuarto lugar; 45.71% son los

[12] [Santillán R., y López, D. 2006].

Edad. Respecto a la edad de los alumnos de la generación 2006, a su ingreso 93.93% tenían 16 años de edad o menos; 5.17% entre 17 y 20 años y 0.91% eran mayores de 21 años. De estos últimos, 4 estudiantes tenían 40 años o más. Por plantel no se encontraron diferencias en esta variable.	de 10 puntos porcentuales en cuanto a los alumnos que provienen de escuela secundaria particular. En el plantel Sur 17.52% son estudiantes provenientes de escuelas secundarias particulares, siendo en este plantel en donde hay mayor número de estudiantes con esta característica. En cuanto al tiempo en que los alumnos concluyeron sus estudios de secundaria, se aprecia que el 94.50% la realizó en 3 años; 1.86% no la cursó en 3 años porque reprobó; 1.80% no especificó la naturaleza del problema que le impidió cursar la educación media básica en el periodo citado; 0.46% mencionó haber tenido problemas emocionales y el 0.37% dijo que la realizó en más de 3 años por problemas económicos.	primogénitos o son hijos únicos. A su ingreso el 94.92% de los estudiantes mencionó que vivían con su padre, madre y/o hermanos; 2.25% vivía con otros familiares; 1.22% vivía con otras personas y el resto vive solo, con su cónyuge o pareja, o bien, con compañeros. La insistencia de los padres para que sus hijos terminen los estudios es la siguiente. El 89.47% de los padres insiste mucho en que sus hijos estudien; el 2.23% no insiste o desea que su hijo haga o estudie otra cosa.
Actividad desarrollada por los padres de los estudiantes.	*Tipo de vivienda.*	*Ingreso mensual familiar*
El 88.03% de los padres tienen una actividad remunerada[13], mientras que las madres con este tipo de actividad constituyen el 61.64%. De los padres sin actividad remunerada se tiene el 3.09%, mientras que las madres el 36.01%. El resto de los estudiantes no supo decir qué tipo de actividad realizaban sus padres.	El 63.65% de los estudiantes vive en casa propia; 13.83% vive en casa rentada; 12.28% comparte su casa con algún familiar; y 8.10% posee una vivienda que se está pagando.	Finalmente, el ingreso familiar de los estudiantes está repartido como sigue: 41.7% de las familias de los estudiantes percibe de 2 a 4 salarios mínimos; 20.5% de 4 a 6 salarios mínimos; 17.5% menos de 2 salarios; 9.4% de 6 a menos de 8 salarios mínimos; y 8.9 % más de 8 salarios mínimos. Todos están referidos a salarios mensuales. Cabe señalar que en el Plantel Sur alrededor del 29% de las familias de los alumnos perciben 6 o más salarios mínimos.

[13] Las ocupaciones remuneradas incluyen: jubilados, labores que apoyan en el ingreso familiar, trabajador doméstico, labores relacionadas con el campo, obrero, empleado, comerciante, trabajador de oficio o por su cuenta, ejercicio libre de la profesión, empresario, directivo o funcionario.

Cabe destacar que el 60% de la población estudiantil del CCH-Sur tiene en su casa una computadora conectada a Internet.[14] Este dato permite, pues, intentar esta experiencia educativa, en donde, como ya hemos mencionado, la computadora ocupa un papel principal.

Por otra parte, en este tipo de unidades y secuencias didácticas, los alumnos deberán tomar un papel activo en la construcción de su propio conocimiento destacándose las siguientes formas:

Participación individual. El estudiante tendrá plena libertad para participar abiertamente en las sesiones ("clases"), en sus tareas, etc., externando sus opiniones, aciertos y dudas, con lo que deberá ir adquiriendo una responsabilidad cada vez mayor con sus propios aprendizajes.

Participación en colectivos. La construcción del conocimiento no sólo depende de las propias estructuras cognitivas sino también de su interacción con otras percepciones, ideas, planteamientos, etc., en suma, con la interacción con otras personas implicadas en una empresa común, en este caso, y de manera directa, con sus compañeros de clase y el profesor, por lo que en el modelo aquí presentado el estudiante deberá trabajar en equipo con lo que coadyuvará al aprendizaje de sus compañeros como en el suyo propio.

Las construcciones conceptuales de los alumnos, si bien no tienen porque coincidir con la realidad, si se les debe exigir una gran concordancia entre ellas, siendo el parámetro de validación la elección de aquellas construcciones que, dadas en un grupo, sean las más útiles.

Finalmente, cabe destacar que una de las características más importantes del constructivismo es que este no se centra tanto en el resultado del aprendizaje, sino en el proceso de la adquisición de conocimiento y, como una de sus consecuencias, no debemos creer que el aprendizaje sea alguna forma de descubrimiento auto-guiado.

1.3.2 El profesor.

Algunos creen que bajo las propuestas educativas de corte constructivista el profesor deja de existir. Esto es cierto sólo en parte, pues si seguimos teniendo en mente al profesor como aquella persona poseedora de la verdad absoluta, además de ser el juez supremo, entonces

[14] Cabe agregar que en el plantel CCH-Sur hay todas las posibilidades para que sus estudiantes accedan a una computadora conectada a Internet. (Cf. Página 50).

no hay duda: el profesor bajo esta figura desaparece. En realidad, en esta propuesta el principal papel del profesor consistirá en *diseñar y generar espacios de aprendizaje* que faciliten la construcción de los conocimientos establecidos institucionalmente. De hecho, esos espacios de aprendizaje deben ser la consecuencia y conclusión del desarrollo de las unidades y secuencias didácticas para las que, como hemos venido señalando, el profesor es el principal encargado de su diseño y realización.

Ahora bien, para el diseño de estas unidades y secuencias, que en nuestro caso están contemplando a la computadora como recurso esencial, conviene dividir a la misión, objetivos generales, objetivos del área de matemáticas, así como el plan y programas de estudio de matemáticas, de acuerdo con su contenido en las tres categorías siguientes:

- Contenidos actitudinales.
- Conocimientos conceptuales.
- Conocimientos procedimentales.

En nuestro caso, para establecer estos tres tipos de contenidos nos hemos basado en los siguientes documentos proporcionados por el CCH-UNAM:[15]

- Antecedentes.
- Origen del Colegio de Ciencias y Humanidades.
- Misión y Filosofía.
- Modelo Educativo.
- Planes y Programas de Estudio y, de manera particular, el Plan y los Programas de Estudio del Área de Matemáticas.[16]

Contenidos actitudinales. De acuerdo con el Plan y los Programas de Estudio del CCH-UNAM, los contenidos actitudinales que deben promoverse a lo largo de la educación matemática de sus estudiantes son los siguientes:

- *formación de una actitud positiva hacia las matemáticas*, lo que equivale a que el estudiante vaya modificando positiva y responsablemente su posición en la relación *matemáticas-ciencia-tecnología-sociedad*;
- *formación de una actitud matemática en la construcción del conocimiento*, cuestión que exige que el estudiante adquiera una *actitud moderna* ante él mismo y su entorno, de manera que a lo

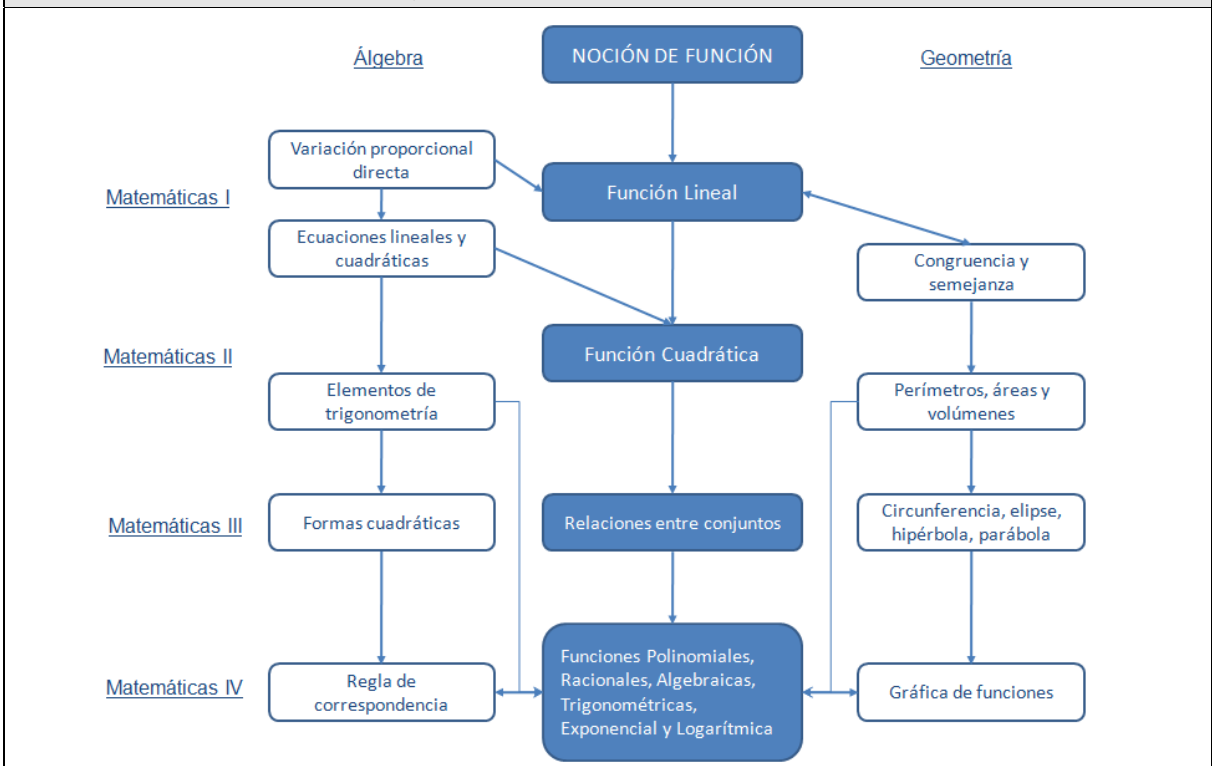
[15] http://www.cch.unam.mx/index.php
[16] [Programa de Estudios de Matemáticas. 2003]

largo de su formación científica desarrolle y amplíe las formas fundamentales del pensamiento matemático tales como el pensamiento analógico, inductivo, deductivo;

- *formación de una actitud positiva hacia la temática de la matemática*, lo que apunta hacia cuestiones en donde el estudiante reconozca la importancia dentro del contexto social, económico y cultural en donde vivimos actualmente.

Contenidos conceptuales. Los contenidos conceptuales provienen, principalmente, del Plan y Programas de Estudio de Matemáticas (CCH-UNAM), plan y programas que los hemos estructurado en torno a la noción de función como se muestra en el siguiente mapa conceptual.

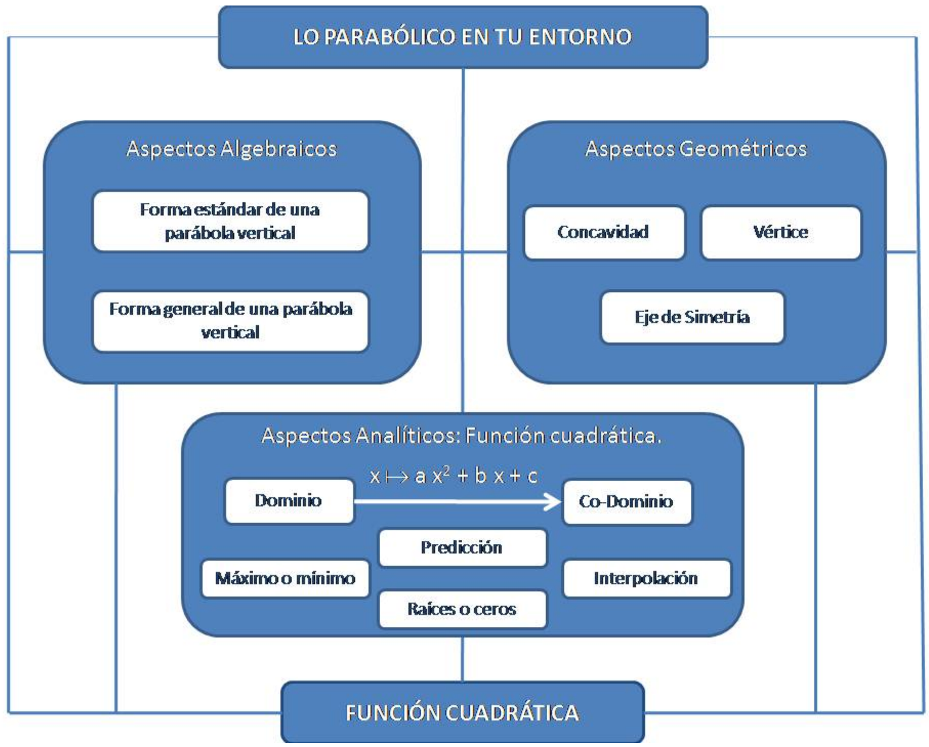
Mapa conceptual 1: la noción de función como eje estructurador del Programa de Matemáticas del CCH-UNAM.



Mapa conceptual 1. La estructuración del Plan de Estudios de Matemáticas a través de la noción de función es, desde nuestro punto de vista, una exigencia de la técnica moderna o, mejor dicho, de la interpretación técnico-científica de nuestro tiempo.

Ahora, de manera particular, estos contenidos conceptuales los hemos extraído del Programa de Matemáticas II, *Unidad (temática) 1: Funciones cuadráticas*, a partir del cual hemos elaborado el siguiente mapa conceptual que nos permitirá no sólo organizar la unidad didáctica y sus secuencias componentes, sino también las rutas de aprendizaje que hemos elegido para desarrollarla.[17]

Mapa conceptual 2: Función cuadrática.



Mapa conceptual 2. La estructuración de los contenidos conceptuales de la unidad temática considerada, corresponde a diferentes representaciones que la función cuadrática tiene y que están al alcance de un estudiante de nivel medio superior.

Finalmente, se puede decir que en el diseño de las unidades y secuencias de aprendizaje, los contenidos conceptuales deben recibir el siguiente tratamiento metodológico.

- *Actualización de los contenidos*. Los contenidos de enseñanza deben ser coherentes con las actuales concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas (Hodson 19988, Gil 1986). En nuestro caso hemos elegido algunas observaciones que hace el matemático norteamericano Saunders Mac Lane en su libro *Mathematics, Form, and Function.*[18]

- *Epistemología de la investigación científica*. Dado que la naturaleza de un conocimiento está determinado por su epistemología, debemos atender lo que caracteriza a la investigación matemática, de manera muy particular, lo que corresponde a las estrategias generales dadas en la construcción del conocimiento matemático. Estas estrategias las hemos recogido principalmente del quehacer matemático descritas por Mac Lane, entre las que se destacan las siguientes, así como de algunas observaciones de investigadores de la interpretación constuctivista del aprendizaje. Entre ellas se destacan las siguientes.

[17] Cf. Cap. 3. Pág. 49.
[18] [Mac Lane. 1988]

- Las matemáticas modernas han devenido red formal de ideas, conceptos y métodos, vinculada a cuestiones técnicas, científicas, o propias de este devenir de las matemáticas.
- se realza el papel que el conocimiento inicial juega en la producción del conocimiento;
- se destaca el papel que juegan los procesos matemáticos: los contenidos conceptuales de las matemáticas se describen mediante un *conjunto de procesos*, que se pueden clasificar en *básicos* e *integrados*.

• *Adecuación a los objetivos institucionales*. Los contenidos conceptuales deberán en todo momento ajustarse a los objetivos programáticos institucionales. En nuestro caso, estos objetivos no son otros sino los objetivos establecidos para la Unidad 2, de Matemáticas II y son los siguientes.

Objetivos generales.

- Continuar con el estudio de funciones a partir de comportamientos que varían en forma cuadrática.
- Contrastar este tipo de variación con la lineal.
- Analizar el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros.
- Iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos

El estudiante deberá construir la noción de función cuadrática a partir del desarrollo de las siguientes habilidades, estrategias y competencias.

- Explorará, en una situación o problema que dé lugar a una función cuadrática, valores, condiciones, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etc. que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica.
- Diferenciará dos tipos de variación fundamentales (lineal y cuadrática).
- Reconocerá en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas.
- Obtendrá el modelo de la función cuadrática de una situación dada.
- Diferenciará entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática.
- Relacionará el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje x, con la naturaleza de las raíces; en particular identificará su ausencia con la existencia de raíces complejas.
- Transitará por los diferentes tipos de registro de la función cuadrática (tabular, algebraico y gráfico).
- Dará significado al papel que juegan los parámetros en el comportamiento de una gráfica.
- En el modelo $y = ax^2$, analizará el impacto de la constante a, y deducirá la orientación de la parábola, según la constante a sea mayor o menor que cero.
- En el modelo $y = ax^2 + c$ comprenderá el papel del parámetro c, en la traslación de la gráfica $y = ax^2$ hacia arriba o hacia abajo del eje x, según se le asignan valores positivos o negativos a c.
- En el modelo $y = a(x - h)^2$, interpretará el papel del parámetro h, como la forma para desplazar la parábola $y = ax^2$ a la derecha o la izquierda, según el valor de h sea positivo o negativo.
- En el modelo $y = a(x - h)^2 + k$, deducirá que el impacto de los parámetros h y k es el de trasladar y desplazar la parábola $y = ax^2$.
- Integrará a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría.

- Expresará una función cuadrática escrita en la forma general $y = ax^2 + bx + c$, a la forma estándar $y = a(x - h)^2 + k$; y podrá describirla a partir del análisis de sus parámetros.
- Dará significado a las coordenadas del vértice en términos del valor máximo o mínimo de la función.
- Resolverá problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.
- Interpretará el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada.

La fundamentación matemática de estos contenidos la hemos expuesto en el siguiente capítulo, mientras que su estructuración en una unidad didáctica se presenta en al capítulo3.

Contenidos procedimentales. En nuestro caso, los contenidos procedimentales deben generar habilidades y destrezas para el eficiente empleo de la computadora y, de manera particular, para el uso de software de (para) matemáticas insistiendo en su interpretación.
En la actualidad hemos observado dos tendencias acerca del empleo de las actuales tecnologías en el aprendizaje-enseñanza[19] de las matemáticas que me han parecido relevantes para ponerlas en juego en el modelo y propuesta didáctica aquí presentada. Estas son, por una parte, aquella tendencia que considera a las *tecnologías informáticas* como *elementos que exigen cada vez más aprendizajes efectivos de nuestros estudiantes* de forma tal que sean individuos capaces de adaptarse sin problemas a los acelerados cambios que estas tecnologías vienen imponiendo en la vida de cada uno de nosotros. Por la otra, se encuentra la concepción de Seymour Papert en la que la llamada "era de la información" permite:

> la creación de medios personalizados capaces de dar cabida a una amplia gama de estilos intelectuales… (Papert; 1997).

Ahora bien, teniendo en cuenta estas dos tendencias y siendo estos dispositivos informáticos un producto matemático en el que se pueden establecer representaciones, estáticas o dinámicas, de las principales ideas, conceptos y métodos matemáticos del nivel de enseñanza que nos ocupa, me parece que el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas ya no puede seguirse realizando sin la ayuda de estas herramientas. En nuestro caso, los contenidos procedimentales son los siguientes.

[19] En lo que sigue me referiré al acto educativo bajo el binomio "aprendizaje-enseñanza" dado que en este trabajo, como ya he indicado, el papel central del mismo lo viene a ocupar el aprendiz.

El estudiante deberá desarrollar las siguientes habilidades.

- Manejo eficiente del programa GeoGebra en lo relacionado con:
  - Diversas construcciones con "regla" y "compás" de una parábola.
  - Edición y animación de parámetros algebraicos.
  - Edición de funciones cuadráticas: en forma normal y en forma general.
  - Determinación geométrica y algebraica del vértice (máximo o mínimo) de una parábola.
  - Concavidad de una parábola.
  - Obtención geométrica y algebraica de las raíces o ceros de una función cuadrática.
- Buen manejo de la hoja de cálculo Excel en lo relacionado con:
  - Tratamiento de pares de datos que corresponden a una función cuadrática:
    - interpolación de Lagrange;
    - método de diferencias finitas.
  - Marcado de pares de puntos en un plano cartesiano.
  - Ajuste de una curva (por el método de mínimos cuadrados).
- Manejo general del programa PowerPoint para hacer sus presentaciones.

1.3.3 Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios.

Las experiencias de aprendizaje en el aula de medios, experiencias completamente diferentes a lo que han sido las "clases" de la enseñanza tradicional, son la realización de nuestra unidad y secuencias didácticas, es decir, son nuestros espacios de aprendizaje. En ellas ha lugar para la interacción entre estudiantes, el profesor y las tecnologías informáticas contemporáneas, por lo que son el lugar propicio para la construcción de conocimiento matemático conjugando el análisis, la síntesis, la modelación, la representación, etc., así como la evaluación del conocimiento construido por todos los participantes.

En nuestro caso, la generación de estas experiencias de aprendizaje presume tener un lugar (aula) equipado con computadoras con los programas siguientes:[20]

- Generales.
  - Procesador de textos.
  - Programa para el tratamiento de imágenes.
  - Hoja de cálculo.
- Matemáticos.
  - *GeoGebra*: interfaz algebro-geométrica.

Estas experiencias de aprendizaje en el aula de medios, tienen como eje las hojas de trabajo impresas que para ello se han elaborado, y son organizadas y administradas por el profesor.

[20] Cf. Pág. 50.

1.3.4 Hojas de trabajo impresas.

Este material resulta un instrumento de aprendizaje invaluable, pues en él se organizan los tres tipos de contenidos por aprender, destacándose el desarrollo de habilidades matemáticas, destrezas procedimentales, así como la motivación del estudiante. Cabe señalar que con las hojas de trabajo las actividades muestran un orden lógico en las acciones de apertura, desarrollo y cierre, de una secuencia didáctica; más aún, promueven el desarrollo de competencias, favorecen el logro del propósito planteado (para la secuencia y, en general, para la unidad didáctica) y, por último, su evaluación ofrece elementos para determinar el nivel de desarrollo de las competencias.

Estas hojas de trabajo las irán resolviendo los estudiantes de acuerdo a la forma en que el profesor organice la unidad o secuencia didáctica; en particular, las hojas de trabajo de esta propuesta se exponen completamente en el capítulo 3.

1.3.5 Evaluación.

A lo largo del desarrollo de cada hoja de trabajo, se deberá ir determinando la adecuación y pertinencia de las construcciones conceptuales de los alumnos a través de los siguientes “evaluadores” para que se vaya confrontando a cada estudiante con sus nuevas adquisiciones y ello le permitirá ir diferenciando aquellas interpretaciones no matemáticas de las que sí lo son para que, en última instancia, reconcilie las interpretaciones matemáticas con las restantes de manera que las nuevos conocimientos queden integrados en su acervo lingüístico de manera permanente y estable. Estos “evaluadores” deben tener siempre presente el trabajo cotidiano que desarrollan los alumnos a través de las secuencias didácticas.

En particular, la evaluación que llevaremos a cabo en esta propuesta la trataremos de sustentar más en el esfuerzo, trabajo, participación y actitud (disposición para aprender) de cada estudiante, que en las “respuestas rápidas y/o correctas” de “los estudiantes brillantes”. El aprendizaje es todo un proceso del que no se puede soslayar lo anterior, antes al contrario, habría que estimular a los estudiantes en la cultura del esfuerzo.

Bajo este punto de vista existen diferentes evaluadores y estrategias de evaluación de las que hemos retomado y puesto en juego las siguientes:

- *Diagnóstico de preconcepciones.* Este consiste en ser un testimonio de los sentidos y significados con los que cada aprendiz comienza a elaborar nuevos contenidos.
- *Evaluación de hojas de trabajo.* Este consiste en evaluar las actividades desarrolladas con los estudiantes en el aula, así como de las actividades extra-clase surgidas en esta práctica. De esta manera se va dando un seguimiento individual y colectivo de las diferenciaciones progresivas dadas en este acto.
- *Evaluación de la actitud de los aprendices hacia los nuevos conocimientos.* Para llevar a cabo esto se considera la participación individual y colectiva tanto en el aula, como las tareas extra-clase, que se han sugerido para la elaboración de los nuevos contenidos; estos no están referidos únicamente a los contenidos conceptuales de la materia, sino también, y de manera muy importante, a los contenidos actitudinales y procedimentales que están establecidos anteriormente.
- *Examen escrito.* Con este tipo de evaluación se pretende poner en relieve, de manera puntual, los errores de los aprendices para, con ellos, incidir en la diferenciación progresiva de su significado de partida con lo nuevo.
- *Evaluación de proyectos.* Esta estrategia consiste en ir evaluando de manera permanente el diseño, organización y elaboración de los proyectos propuestos en cada secuencia didáctica, en relación a los contenidos en desarrollo.

Cabe destacar que el proceso de evaluación culmina con la presentación de los proyectos ya elaborados, cuestión que proporciona, según creemos, una idea clara de hasta donde ha sido alcanzada la reconciliación entre los sentidos y significados de partida con los tres tipos de conocimiento elaborados o construidos por los aprendices, pues a través de ellos podemos observar hasta donde han sido colocados estos contenidos en el lenguaje cotidiano del estudiante.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO

> Matemáticas.- Queremos introducir en lo posible, en todas las ciencias, la precisión y el rigor de las matemáticas, sin advertir que así no llegaremos a conocer las cosas, sino únicamente a determinar nuestras humanas relaciones con las cosas. Lo matemático no es más que el medio de la ciencia última y general de los hombres.
>
> [Nietzsche, GC; No. 246]

El marco teórico matemático en el que está sustentada la tesis de este trabajo es, en términos generales, el *funcionalismo formal* del matemático norteamericano Saunders Mac Lane, [Mac Lane, 1985], del que a continuación exponemos sus principales rasgos.

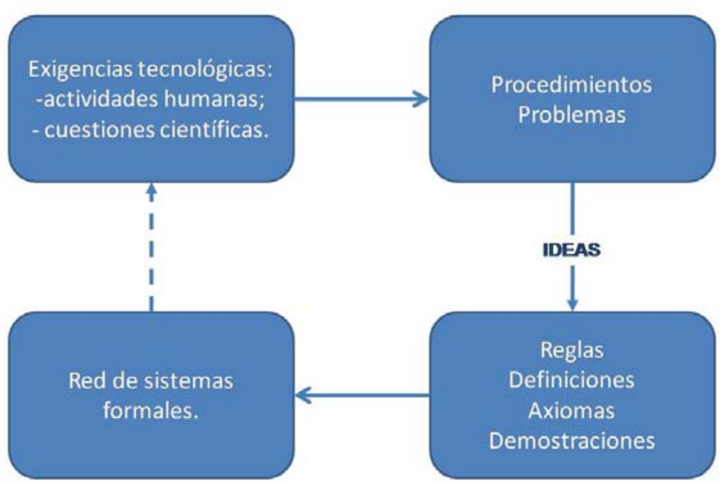
2.1 La red matemática formal actual.

De acuerdo con el funcionalismo formal[21], las matemáticas han devenido

> … apretada red de reglas, conceptos y sistemas formales. Los nodos de esta red se encuentran estrechamente relacionados con procedimientos útiles a la actividad humana y a cuestiones científicas. La transición de las actividades humanas está guiada por una gran diversidad de "insights" e ideas. Dentro de ésta red formal, los nuevos desarrollos son estimulados y guiados por conjeturas, problemas, abstracciones y el constante deseo de comprender [saber] más.

Estas observaciones se pueden resumir por medio del siguiente mapa conceptual.

Mapa conceptual 3. Las matemáticas modernas de acuerdo con el funcionalismo formal.



[21] [Mac Lane, 1985; pág. 409]

2.2 Exigencias tecnológicas: actividades matemáticas humanas y cuestiones científicas.

La mayoría de las formalizaciones en las matemáticas están basadas en alguna idea subyacente, una noción "intuitiva" que les da guía y propósito. No es fácil dar una descripción precisa de la naturaleza de una idea pero, como señala [Mac Lane, 1985], un buen número de las ideas más generales de las matemáticas son estimuladas más o menos directamente por *actividades matemáticas humanas*. Ahora bien, como expusimos en el primer capítulo, nuestra época está signada por su técnica, la tecnología, de suerte que no es casual que gran parte de las actividades humanas estén determinadas por ella, por la *provocación técnica del mundo*, es decir, por el llamado a su *calculabilidad* (Cf. Capítulo 1), y así observamos que las actividades humanas actuales requieren de actividades matemáticas específicas como las que se muestran en la siguiente tabla y que hemos referido a los contenidos y habilidades matemáticas del bachillerato.

Tabla 4. ACTIVIDADES MATEMÁTICAS HUMANAS MODERNAS

Actividad	Idea	Formalización matemática
Contar	**El que sigue**	Sucesor, procesos iterativos.
Calcular	**Combinar números**	Reglas de la adición, reglas de la multiplicación: grupos aditivo y multiplicativo de los números reales.
Medir	**Distancia, extensión**	Números reales. Cálculo integral.
Construir, delinear	**Figura, simetría**	Gráficas. Secciones cónicas.
Agrupar	**Coleccionar**	Conjunto de elementos: de números reales, de puntos de la recta, de puntos del plano, de puntos del espacio.
Reacomodar	**Permutar**	Técnicas elementales de conteo.
Mover	**Cambio**	Cálculo diferencial. Movimientos rígidos.
Seleccionar	**Parte de**	Subconjunto, secciones de figuras.
Argüir	**Demostración**	Conectivos lógicos, sentencias condicionales.

Cabe insistir en que estas actividades se llevan a cabo de manera y forma muy diferente a como se realizaban en otras épocas o contextos. En nuestra época se trata de proveer de *sistemas* para objetivizar al "mundo", para "cosificarlo" o, como se dice modernamente, para *re-presentarlo y disponer de él*; sin embargo, habrá que distinguir a estas matemáticas de las matemáticas de otras épocas y desprendernos del prejuicio de que las matemáticas de esta época son el producto de una "evolución" y "progreso" milenarios, pues como aclara [Heidegger; IM] cada época precisamente se distingue de otra por su apertura a lo que lo rodea, a lo que tiene enfrente:

> En la actualidad, cuando empleamos la palabra ‘ciencia’ ésta significa algo tan esencialmente diferente de la doctrina y *scientia* de la Edad Media como de la *∞πιστ→μη* griega. La ciencia griega nunca fue exacta, porque según su esencia era imposible que lo fuera y tampoco necesitaba serlo.
>
> Por eso, carece completamente de sentido decir que la ciencia moderna es más exacta que la de la Antigüedad. Del mismo modo, tampoco se puede decir que la teoría de Galileo sobre la libre caída de los cuerpos sea verdadera y que la de Aristóteles, que dice que los cuerpos ligeros aspiran a elevarse, sea falsa, *porque la concepción griega de la esencia de los cuerpos, del lugar, así como de la relación entre ambos, se basa en una interpretación diferente de lo ente y, en consecuencia, determina otro modo distinto de ver y cuestionar los fenómenos naturales*.
>
> A nadie se le ocurriría pretender que la literatura de Shakespeare es un progreso respecto a la de Esquilo, pero resulta que aún es mayor la imposibilidad de afirmar que la concepción moderna de lo ente es más correcta que la griega. Por eso, si queremos llegar a captar la esencia de la ciencia moderna, debemos comenzar por librarnos de la costumbre de distinguir la ciencia moderna frente a la antigua únicamente por una cuestión de grado desde la perspectiva del progreso.
>
> [Heidegger, IM]

Para aclarar esta afirmación, y para dar algunas características de las actividades matemáticas modernas, describiremos dos cuestiones de suma importancia en nuestra época, a saber, lo concerniente a la *escala universal* de los números reales, así como la moderna noción de *función*.

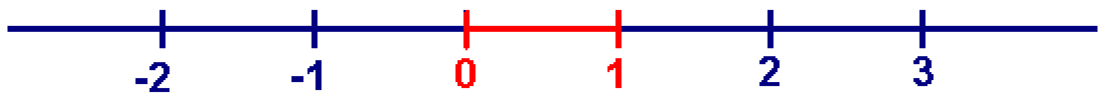
2.2.1 La *escala universal* de los números reales y la moderna noción de *función*.

Números reales y escalas de medición.

La comparación de magnitudes, en su forma más simple, permite hacer afirmaciones como la siguiente: “A es más grande (o mayor) a B”. Sin embargo, con este tipo de proposiciones no podemos llevar a cabo comparaciones cuantitativas, exigidas por la tecnología y la ciencia.

Sin embargo, con la *escala universal de los números reales* es posible medir todas las magnitudes físicas o técnicas como masa, temperatura, voltaje, distancia, tiempo, etcétera, y, lo que es más sorprendente, es que esta escala es una línea recta en la que se ha elegido un punto de partida (origen), así como una unidad (arbitraria), con los que es posible ubicar cualquier medición de este tipo, o dicho con exactitud, cualquier medida escalar[22].

Fig. 1. Escala universal de los números reales.



Actualmente, ésta escala no sólo puede verse como una recta, con un punto seleccionado (0) y una unidad de longitud (1), sino también, y esto se remonta a fines del siglo XVI con el texto *De Thiende* -traducido al francés como *La dîme*, "el décimo"- del ingeniero y matemático flamenco Simon Stevin (1548-1620), como una colección (infinita) de expresiones decimales que se dividen en dos subconjuntos.

- Números racionales: cuya expansión decimal es periódica; y,
- Números irracionales: cuya expansión decimal no es periódica.

Un ejemplo de expansión decimal periódico (número racional) es la siguiente:

$(17/11)^2$ = 2.388429752066115702479338842975206611570247 93
388429752066115702479338842975206611570247 93
388429752066115702479338842975206611570247 93
38842975206 ...

Por otro lado, un ejemplo de expansión decimal a-periódica (número irracional) es la siguiente:

π = 3. 14159265358979323846264338327950288419 7
16939937510582097494459230781640628620 8
99862803482534211706798214808651328230 6
64709384460955058223172535940812848111 7
45028410270193852110555964462294895493 0
3819644288109756659 3 ¿?

[22] [Mac Lane, 1986; Cap. IV]

La moderna noción de función.

> … me siento tentado a ver el origen de la ciencia moderna (que nace con Galileo a principios del siglo XVII) desde una perspectiva muy distinta, a saber, la lenta maduración en el espíritu humano de una noción matemática fundamental, la noción de función, y = f(x). Desconocida para la antigüedad greco-romana, la noción de función se esbozó en el álgebra árabe; se precisó con los desarrollos de los algebristas italianos del siglo XVI, y aunque se desarrolló en el siglo XVII con Viète, Descartes y Newton (entre otros), no encontró su expresión definitiva sino con Leibniz (1695).
>
> …
>
> Únicamente la noción matemática de función permitió la elaboración del concepto general de "ley científica", y esta noción complementada por la invención del cálculo diferencial (Newton y Leibniz) condujo más tarde a ese ideal insuperable de legalidad científica que es el determinismo laplaciano. Y, entonces, ¿en qué se convierte la experimentación en todo esto? Koyré mostró el carácter extremadamente sospechoso de los experimentos de Galileo sobre la caída de los cuerpos. Pero quisiera insistir aquí en un punto: en cuanto una ley científica hace intervenir una función y = f(x) dependiendo de una variable x, entonces una verificación experimental completa de la ley es estrictamente imposible [hay una infinidad (¡continua!) de valores de x]: y esta consideración vale a fortiori para los fenómenos descritos por un sistema diferencial (mecánica celeste) –o para una ecuación con derivadas parciales. Por ello verificar una ley cuantitativa no es posible más que como módulo de las hipótesis sobre la naturaleza de la función, que debe ser bastante regular. Esto es, sólo las hipótesis (en general implícitas) de continuidad o de analiticidad permiten afirmar que tal ley está enteramente "verificada por la experiencia".
>
> [René Thom, 1989]

Este exergo no sólo pretende llamar la atención acerca de que la noción de función es una creación propia de esta época, *la época moderna* o *modernidad*, sino también a su señalado origen no únicamente científico sino, en un sentido más profundo, a su origen decididamente técnico. En efecto, la noción de función, definida por vez primera por Leibniz, y que hasta ahora no ha encontrado una formalización que logre el acuerdo total de la comunidad matemática, ha sufrido diferentes modificaciones hasta llegar a la siguiente definición establecida por el matemático norteamericano W. Lawvere:

> Un morfismo [función] de conjuntos es un ***proceso*** para ir de un conjunto a otro. [Lawvere y Schanuel, 2002; p. 11]

Con esta definición se hace evidente la influencia de la técnica moderna en el devenir de las matemáticas modernas, pues en ella se destaca una de las principales características de las re-presentaciones y disponibilidad de todo lo accesible (objetivamente) en esta época, a saber, que la gran mayoría de tales re-presentaciones son realizadas a través de diversos y variados procesos que tienen un carácter matemático eminente, tal y como lo hacen evidente los actuales medios de comunicación y la computadora. Más aún, de acuerdo con [Steen, 1990; p. iii]:

> Las fuerzas creadas por las computadoras, las aplicaciones, la demografía y las escuelas mismas, han cambiado profundamente la manera y forma en que las matemáticas son practicadas.

Con lo dicho hasta ahora sólo hemos indicado de manera muy general el origen técnico de la moderna noción de función, y su incidencia en la ciencia moderna, dejando para una sección posterior precisar algunas actividades humanas y cuestiones científicas relacionadas con funciones específicas.

2.3 Procedimientos y problemas. Ideas.

Una de las fuerzas conductoras del desarrollo de las matemáticas lo constituye, sin duda, la resolución de problemas matemáticos "determinantes". Un buen ejemplo de este tipo, que a nosotros nos puede parecer trivial, son los problemas que resolvieron los algebristas italianos, en los que se descubre a los números complejos. Otro caso, es la solución dada por Galois al problema de la resolución de ecuaciones polinomiales por medio de radicales, en donde aparece la noción de grupo (entre otras). En la actualidad, una fuente de problemas "determinantes" está dado en el enfoque constructivista de las matemáticas, enfoque en el que a diferencia del punto de vista clásico, en el que se trata de describir a un universo matemático estático, se dirige la atención a la interacción dinámica del individuo con el universo matemático (red actual de matemáticas); en palabras de Hao Wang[23]:

> … it is a mathematics of doing, rather than a mathematics of being.
> [… es una matemática del hacer, más que una matemática del ser.]

La mayoría de las formalizaciones en las matemáticas están basadas en una idea subyacente, una noción intuitiva que las guíe y les dé un propósito. En el caso de esta concepción constructivista de las matemáticas se hace necesaria la elaboración de procedimientos que permitan exhibir, o hacer explícitos, a los entes matemáticos.

Por otra parte, las ideas de algún área de las matemáticas también pueden tener un origen en ideas o procesos provenientes de otras regiones de la red como se muestra en la siguiente tabla.

[23] [Mines, CA; p.1]

Tabla 5. Algunas ideas que surgen dentro de las matemáticas.		
ORÍGENES	**IDEA**	**VERSIONES FORMALES**
polinomios sin, cos, tan exp, log variables dependientes	Función	Expresión formal Tabla completa de valores Conjunto de pares ordenados Morfismo
variación proporcional velocidad aceleración recta tangente	Razón de cambio	Derivada
lugar geométrico congruencia "… está entre … y …"	Relación	Relación binaria Conjunto de pares ordenados Relación ternaria
suma, producto, resta, división, potenciación, radicación traslación, reflexión, rotación, homotecia, corte en cizalla	Operación	Operaciones unarias Operaciones binarias Transformación lineal

La génesis de estructuras matemáticas más complejas casi siempre tiene lugar dentro de las matemáticas mismas. Podemos concluir, por lo tanto, que la mayoría de las formalizaciones en las matemáticas están basadas en alguna idea subyacente, una noción intuitiva que les da guía y propósito. Sin embargo, no es fácil dar una descripción precisa de la naturaleza de una idea; en realidad, una idea profunda puede ser casi imposible de comunicar y sólo puede ser reconocida después de que se ha formalizado. De acuerdo con [Vázquez, 2001], alguien que está comprendiendo matemáticas se parece a un escritor, al igual que éste, comienza inventando sus propios personajes los que, en algún momento, acaban imponiéndole su propio destino.

2.4 Manual del usuario: estrategias para aprender matemáticas.

Existen diversas estrategias generales para navegar en la red matemática contemporánea o, si se prefiere, para entender las matemáticas modernas. Entre estas estrategias se encuentran las siguientes[24].

[24] [Mac Lane, 1986; pp. 431-440]

La verdad matemática.

La verdad matemática no es una verdad ontológica, sino simplemente es la pertinencia y adecuación a las reglas de un cálculo.

El mundo es comprendido en términos de mucha formas matemáticas diferentes.

Por ejemplo, el chorro de agua de una fuente, el clavadista de la Quebrada, las antenas parabólicas, los antiguos faros de los automóviles, las construcciones arquitectónicas parabólicas, etc., pueden ser interpretados matemáticamente como funciones cuadráticas $f(x) = a x^2 + bx + c$, polinomios de segundo grado p = a x2 + bx + c, "parábolas" mismas, o sea, gráficas de este tipo de funciones, etc., muestran que las "cosas" reciben una interpretación matemática rica y diversa debido, en gran parte, a la característica técnica de nuestra época en la que las matemáticas han permitido la "cosificación" o "reificación"[25] de la realidad.

Analogías.

Según [Heidegger, 1927] Aristóteles identificó la unidad de la analogía con la unidad del "ser", por lo que no resulta extraño que la analogía sea una de las estrategias generales para elaborar cualquier conocimiento. En particular, en las matemáticas resulta una de las principales estrategias no sólo para aprender matemáticas, sino inclusive para su invención:

> Throughout mathematics, analogies are powerful sources of development. [Mac Lane, 1986; p.432]

A continuación muestro algunos ejemplos.

La escala universal de los números reales. En los comienzos de la cultura occidental se emplearon mediciones. Las analogías entre la medición de distancias, áreas, volúmenes pesos, etc., llevaron gradualmente a la formulación de los números reales como el medio general para manejar magnitudes como, por ejemplo, la medida angular en radianes.

[25] Cosificar o reificar algo es asumirlo como ente, como objeto, como "cosa", de manera que puede ser representado o traído a la presencia cada vez que se le solicite. Verbigracia, un individuo se ha cosificado cuando su cuerpo se ve como un almacén de órganos intercambiables.

Formas cuadráticas y procesos de optimización. Resulta que las funciones cuadráticas de una variable real, son el prototipo de modelos de optimización de suerte que al tratar con procesos de varias variables se trata siempre de llegar a una forma cuadrática para así emplear, de forma análoga, las ideas adquiridas con las funciones cuadráticas de una variable.

El estudio de ejemplos.

La elección de un ejemplo específico, pero determinante, puede servir para indicar la dirección en la que toda una teoría sea desarrollada. La siguiente tabla muestra ejemplos específicos que han dado lugar al devenir de la moderna noción de número o, de manera equivalente, de la moderna teoría de ecuaciones.

Tabla 6. Historia de los números = Historia de la teoría de ecuaciones		
Ecuación típica:	**Solución:**	**Requiere de:**
$x + 2 = 5$	$x = 3$	números naturales
$x + 5 = 2$	$x = -3$	números enteros
$2x = 1$	$x = 1/2$	números racionales
$x^2 = 2$	$x = \sqrt{2}$	números irracionales
$x^2 = -1$	$x = \boldsymbol{i}$	números complejos
¿?	¿?	¿?

Se puede decir que, en cierto sentido, las teorías generales de las matemáticas se hacen con el propósito de describir convenientemente las características comunes a una multitud de casos especiales, por lo que un caso crucial puede llegar a ser la clave de una teoría general.[26]

Problemas. El análisis de las soluciones o demostraciones.

Sin duda, el planteamiento y la resolución de problemas es uno de los elementos principales para entender matemáticas pero, además de eso, también el análisis de las soluciones a los problemas planteados, con la intención de destacar aspectos matemáticos relevantes,

[26] [Mac Lane, 1986; p. 432]

también es una estrategia harto provechosa para el buen entendimiento de las matemáticas y para el desarrollo de habilidades heurísticas.[27]

Existe una continua investigación para dar mejores soluciones o demostraciones de teoremas conocidos, no sólo demostraciones más breves, sino aquéllas que revelen el porqué la solución o el teorema es correcto. Para nosotros, el mejor ejemplo de esto es el esfuerzo emprendido por la matemática constructiva, pues ahí no sólo se busca establecer la validez de una solución o teorema, sino que se trata de proporcionar un proceso para construirlo.

Tomar otro rumbo.

La comprensión de un problema, así como su solución, puede progresar cuando nuestra atención cambia de foco. Podemos cambiar nuestro actual enfoque hacia otro, por ejemplo, cambiar nuestro punto de vista algebraico por uno geométrico u aritmético, etc.

2.5 La función cuadrática.

Los siguientes aspectos matemáticos sustentan la propuesta aquí presentada.

- La noción de función como proceso.

- Procesos algebraicos para el tratamiento de las funciones polinomiales de segundo grado.
  - Polinomios con coeficientes reales como sucesiones de números reales.
  - Relación entre polinomios y funciones polinomiales.

- Procesos analíticos para el tratamiento de las funciones cuadráticas.
  - Las funciones cuadráticas son funciones analíticas.
  - Propiedades locales de una función cuadrática.
  - Propiedades globales de una función cuadrática.
  - Convexidad y concavidad en las funciones cuadráticas.
  - Puntos críticos de una función cuadrática.
  - Teorema fundamental del álgebra.
    - Las raíces de un polinomio de segundo grado, con coeficientes reales, siempre aparecen en pares.

- Procesos aritméticos dados en la caracterización de las funciones cuadráticas.
  - Interpolación de datos a través de un polinomio de segundo grado.
    - Fórmulas de interpolación de Lagrange y de Newton.
    - Interpolación de datos con el método de diferencias finitas de segundo orden.
    - Ajuste de datos con el método de regresión cuadrática. Coeficiente de correlación.
  - Métodos de aproximación a los raíces de un polinomio de segundo grado.
    - Algoritmo babilonio para calcular la raíz cuadrada de un número real positivo.

[27] Cf. [Polya, 2005; p. 53]

- Método de bisección.
- Método de Newton.

- Procesos geométricos dados en la caracterización de las funciones cuadráticas.
  - Construcción de de una parábola a partir de sus elementos geométricos.
  - Relación entre los parámetros de las ecuaciones canónica y general con la gráfica de una parábola vertical.

2.5.1 La noción de función como proceso.

En este trabajo asumiremos la siguiente definición de "función" dada por [Lawvere y Schanuel; 2002]:

> Un morfismo [función] de conjuntos es un proceso para ir de un conjunto a otro.

Explícitamente una *función f* consiste de lo siguiente:

(a). Dos conjuntos A y B, el primero llamado el *dominio* de la función, en tanto que el segundo se llama su *co-dominio*.
(b). Un *proceso* que transforma o hace corresponder a cada elemento del dominio de la función un (único) elemento del co-dominio. Este proceso se conoce usualmente como *regla de correspondencia de la función*.
(c). La notación que emplearemos para las funciones es la siguiente:

$$f\colon A \longrightarrow B \qquad\qquad a \mapsto b$$

que se lee: la función f "va del dominio A al co-dominio B"; "al elemento $a \in A$ se le hace corresponder el elemento $b \in B$".

En nuestro caso, estamos interesados en las funciones cuadráticas reales[28], o sea, en las funciones de la forma siguiente:

$$y = c + b\,x + a\,x^2 \tag{1}$$

en donde a, b, c son números reales, con $a \neq 0$.

2.5.2 Procesos algebraicos para el tratamiento de las funciones polinomiales de segundo grado.

Usualmente se señala que hay una distinción entre la función cuadrática y el polinomio de segundo grado que aparece en su regla de correspondencia[29]; sin embargo, esta distinción no se hace lo suficientemente evidente, por lo que nosotros lo haremos con base en [Mac Lane y Birkhoff, 1979].

De acuerdo con estos autores, un polinomio con coeficientes reales es una sucesión $p\colon N \longrightarrow R$, en la que, a partir de cierto $n \in N$, $p_m = 0$, para todo $m > n$. Así, los polinomios de segundo grado son listas de la forma siguiente:

$$p = [c, b, a, 0, \ldots, 0, \ldots] \tag{2}$$

en donde a, b, *c son números* reales, con $a \neq 0$. Por lo que la *indeterminada* "x" y sus potencias son las siguientes listas de números reales:

---

[28] En todo lo que sigue trabajaremos únicamente con funciones cuadráticas *reales*, por lo que nos referiremos a ellas con el término de *funciones cuadráticas*, salvo que se especifique otra cosa.
[29] En general, sólo se dice que una función polinomial es diferente al polinomio que está en su regla de correspondencia.

$$x^0 = 1 = [1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots]$$
$$x^1 = [0, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots] \qquad (3)$$
$$x^2 = [0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots]$$

• • •

Es claro que el nombre de la indeterminada puede ser "t", "y_1", etc. Más aún, bajo esta forma las operaciones entre polinomios se realizan como operaciones entre listas de números reales, de acuerdo con los siguientes algoritmos que ejemplifican estas operaciones para polinomios de segundo grado.

Suma de polinomios.

$$\begin{array}{rc} & [a_0, a_1, a_2, 0, \ldots, 0, \ldots] \\ + & \\ & [b_0, b_1, b_2, 0, \ldots, 0, \ldots] \\ \hline & [a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0, \ldots, 0, \ldots] \end{array} \qquad (4)$$

Multiplicación de polinomios.

$$\begin{array}{rc} & [a_0, a_1, a_2, 0, \ldots, 0, \ldots] \\ \times & \\ & [b_0, b_1, b_2, 0, \ldots, 0, \ldots] \\ \hline \end{array} \qquad (5)$$

$$[a_0\, b_0,\ a_0\, b_1 + a_1\, b_0,\ a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0,\ a_1\, b_2 + a_2\, b_1,\ a_2\, b_2,\ 0, \ldots, 0, \ldots]$$

La *evaluación* de un polinomio en algún número $r \in R$ se realiza a través del siguiente producto de matrices $1\times\infty$ (listas):

$$E_r(a) = [a_0, a_1, a_2, 0, \ldots, 0, \ldots]\, [r^0, r^1, r^2, 0, \ldots, 0, \ldots]^T \qquad (6)$$

en donde el operador $[\ ]^T$ produce la matriz transpuesta.

Formalmente hemos introducido a los polinomios como sucesiones, es decir, como expresiones en una indeterminada "x", que pueden sumarse y multiplicarse de forma que constituyen un anillo. Sin embargo, estas mismas sucesiones pueden interpretarse como funciones a través del operador de evaluación E_r, pues dado cualquier polinomio a, la asignación $r \mapsto E_r(a)$, es la función $R \longrightarrow R$, que usualmente se le llama función polinomial y que, abusando de la notación, recibe el mismo nombre. En otros términos se tiene lo siguiente:

polinomio $\mapsto$	**función polinomial**
$a = [a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0, \ldots]$	$a(r) = a_0 + a_1\, r + a_2\, r^2 + \ldots + a_n\, r^n$

2.5.3 Procesos analíticos para el tratamiento de las funciones cuadráticas.

Los procesos analíticos empleados en nuestro tratamiento de las funciones cuadráticas están sustentados en los dos teoremas siguientes.

Teorema 1. Las funciones cuadráticas son *funciones analíticas*.

En otras palabras, cuando el dominio de una función cuadrática es abierto, la función no sólo es continua sino n-veces diferenciable, para cualquier entero positivo n. Esta propiedad se extiende cuando el dominio es el campo de los números complejos o, también, cuando es un intervalo cerrado, teniendo en consideración que en sus extremos se toman los límites laterales adecuados.

Teorema 2. *Teorema fundamental del álgebra*. Cualquier polinomio con coeficientes números complejos que, además, no sea constante, tiene una raíz en el campo complejo.

Este teorema tiene consecuencias algebraicas, numéricas, geométricas y analíticas, muy importantes no sólo para las funciones cuadráticas sino para todas las funciones polinomiales con coeficientes reales (y complejos), como expondremos subsecuentemente.

Propiedades locales de las funciones cuadráticas.[30]

Corolario 3.[31] Si f: $[a, b] \longrightarrow R$ es una función cuadrática, entonces, puesto que f es continua, se cumple lo siguiente.

(a).	Si $f(a) < c < f(b)$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.	Si $f(a) > c > f(b)$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.
(b).	Existe $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in [a, b]$.	Existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Corolario 4. Todo número real positivo α posee una raíz cuadrada.

Propiedades globales de las funciones cuadráticas.[30]

Corolario 5. Las funciones cuadráticas de la forma f: $R \longrightarrow R$, $x \mapsto x^2 + b\,x + c$, poseen un mínimo absoluto, es decir, para ellas existe un número x_m tal que $f(x_m) \leq f(x)$. En otro caso, las funciones cuadráticas de la forma f: $R \longrightarrow R$, $x \mapsto -x^2 + b\,x + c$, poseen un máximo absoluto, es decir, para ellas existe un número x_m tal que $f(x_m) \geq f(x)$.

Corolario 6. Consideremos la siguiente ecuación:

$$x^2 + b\,x + c = d$$

Entonces existe un número x_m para el que esta ecuación posee una solución cuando $d \geq x_m$, y ninguna para $d < x_m$. En otro caso, para la siguiente ecuación:

$$-x^2 + b\,x + c = d$$

existe un número x_m tal que esta ecuación posee una solución para $d \leq x_m$, y no posee ninguna para $d > x_m$.

Corolario 7. Las funciones cuadráticas $R \longrightarrow R$, cuya regla de correspondencia es de la forma siguiente:

---
[30] Cf. [Spivak, 1992]
[31] Esta es una instancia del Teorema de Bolzano.

$$x \mapsto x^2 + b\,x + c$$

tienen el siguiente comportamiento al infinito:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 + bx + c = \infty$$

En otro caso, para las funciones cuadráticas $R \longrightarrow R$, cuya regla de correspondencia es de la forma siguiente:

$$x \mapsto -x^2 + b\,x + c$$

tienen el siguiente comportamiento al infinito:

$$\lim_{x \to \infty} -x^2 + bx + c = -\infty$$

Convexidad y concavidad de una función cuadrática.

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia Española (vigésima segunda edición), la palabra *cóncavo* (va), proviene del latín *concăvus*, y es un adjetivo que dicho de una curva o de una superficie significa "que se asemeja al interior de una circunferencia o una esfera". Por su parte, el adjetivo *convexo* (del latín: *convexus*), se emplea en geometría para decir de una curva o superficie "que se asemeja al exterior de una circunferencia o de una esfera". De esta manera, la palabra concavidad está derivada de la palabra latina *cavus*: hueco, de forma que podemos decir *con-cavidad*. Sin embargo, el término original en geometría parece provenir de Arquímedes (287 - 212 a. d. c.), pues en su tratado *De la esfera y el cilindro*, introdujo los conceptos de *concavidad* y *convexidad*, para referirse al *interior* (del griego: *endo*) y al *exterior* (del griego: *exo*) de una circunferencia.

En las matemáticas contemporáneas, en particular en el Cálculo, estos dos términos, concavidad y convexidad, no corresponden completamente con este origen filológico, puesto que la *parte cóncava* ("hacia arriba" o "hacia abajo") de la gráfica de una función viene a ser un *conjunto de puntos convexo*, pues dados dos puntos de esa parte se puede demostrar que el segmento de recta que los une está completamente contenido en esa parte. Debido a lo anterior hemos decidido quedarnos con el término de *con-cavidad* bajo la siguiente descripción y definición debida a [Simmons, 2002].

Una de las características más distintivas de la gráfica de una función es la dirección en la que se curva o dobla. La primera gráfica de la figura 2a tiene su cavidad o hueco por arriba de la recta tangente al punto que la va trazando de izquierda a derecha. En el caso de la segunda gráfica ocurre que su cavidad o hueco queda por debajo de la recta tangente al punto que la traza de izquierda a derecha. Así, diremos que la primera es la porción cón-cava hacia arriba de la gráfica bajo consideración, mientras que la segunda será su porción cón-cava hacia abajo.

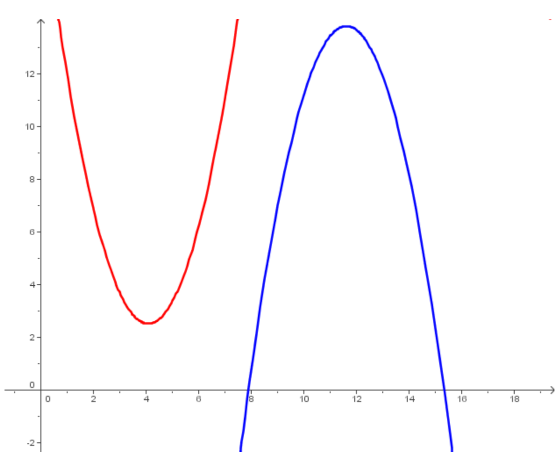


Fig. 2a Con-cavidad hacia arriba y hacia abajo.

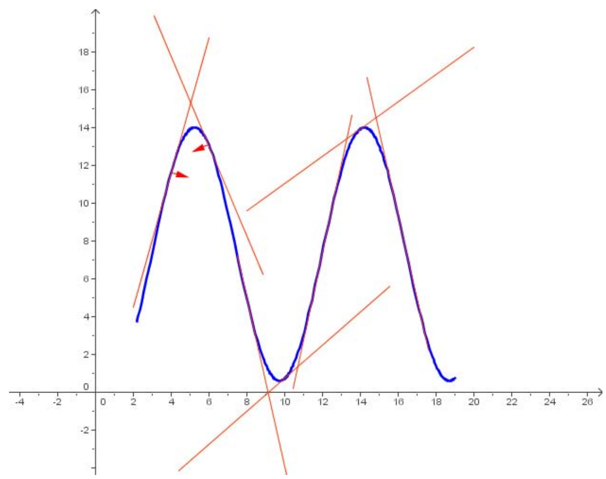


Fig. 2b Con-cavidad hacia arriba y hacia abajo.

Estas situaciones quedan completamente aclaradas con la segunda derivada de la función en cuestión. En efecto, en aquellas regiones (intervalos por lo general) en donde la segunda derivada sea positiva, la primera derivada será una función creciente por lo que irá perfilando una curva doblando hacia la izquierda, cuando va de izquierda a derecha; en cambio, cuando la segunda derivada sea negativa en alguna región, entonces la primera derivada será decreciente por lo que irá perfilando una curva que doble hacia a la derecha cuando vamos de izquierda a derecha.

Corolario 8. En nuestro caso se tiene lo siguiente.

función cuadrática:	**primera derivada:**	**segunda derivada:**		**con-cavidad**
$y = a\,x^2 + b\,x + c$ $a \neq 0$	$y' = 2\,a\,x + b$	$y'' = 2\,a$	$a > 0$	**hacia arriba**
			$a < 0$	**hacia abajo**

De esto se desprenden varias consecuencias importantes para nuestro estudio.

Corolario 9. Cuando a > 0, la función es cóncava hacia arriba. (Cuando a < 0, la función es cóncava hacia abajo).

Corolario 10. El único punto crítico de la función se obtiene de la raíz o cero de la siguiente ecuación:

$$2\,a\,x + b = 0$$

es decir, en $x = -b/(2\,a)$, por lo que si $a > 0$ la función tiene un *mínimo*; y en el caso en que $a < 0$, la función tiene un *máximo*. Estos extremos son, por supuesto, absolutos.

Corolario 11. El comportamiento al infinito está dado en los siguientes límites.

Si a > 0: $\lim_{x\to\infty} ax^2 + bx + c = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} ax^2 + bx + c = \infty$

Si a < 0: $\lim_{x\to\infty} ax^2 + bx + c = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} ax^2 + bx + c = -\infty$

Recapitulando, cabe destacar que las funciones cuadráticas, con $a > 0$ y $a < 0$, muestran los comportamientos generales de las funciones reales con segunda derivada continua. En particular, gracias a su comportamiento son las funciones prototipo en los problemas de optimización.

Teorema fundamental del álgebra.[32]

"Toda función polinomial de grado mayor que cero, con coeficientes complejos, tiene por lo menos un cero complejo".

Proposición 12. Las raíces complejas, no reales, de un polinomio con coeficientes números reales ocurren en pares conjugados.

Corolario 13. En cualquier polinomio cuadrático, con coeficientes reales, las raíces son dos (contando su multiplicidad) y, o bien ambas son reales, o bien son complejas conjugadas.

Corolario 14. Cualquier polinomio con coeficientes reales puede factorizarse de forma única por medio de polinomios reales lineales o cuadráticos. En este último caso, el discriminante de estos polinomios es negativo.

Corolario 15. Un polinomio con coeficientes reales es irreducible si, y sólo si, o bien es lineal, o bien es cuadrático con discriminante negativo.

2.5.4 Procesos aritméticos que emergen en la caracterización de las funciones cuadráticas.

De manera parecida a las características analíticas de la función cuadrática con relación a las funciones analíticas reales, los procesos aritméticos involucrados en el tratamiento de este tipo de funciones muestra una riqueza conceptual para el tratamiento de diversos problemas propios de los métodos numéricos.

Forma anidada de Newton de un polinomio.[33]

La expresión algebraica usual de un polinomio real es su *forma en potencias*:

$$a = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{7}$$

en donde los coeficientes a_i son números reales y $a_n \neq 0$. Esta forma, útil en muchos contextos de las matemáticas, no es muy conveniente cuando se trata de hacer cálculos aritméticos con ella, incluso si se usa su expresión como lista (2). De hecho, para los algoritmos computacionales se emplea esta forma polinomial de lista pero expresando cada polinomio en la forma siguiente:

$$a = a_0 + (x - c_1)\ \{\ a_1 + (x - c_2)\ [a_2 + (x - c_3) < a_3 + \ldots + (x - c_{n-1})\ (a_{n-1} + \quad a_n\ (x - c_n))\ \ldots >]\} \tag{8}$$

en donde los números reales c_i se llaman centros de la forma de Newton y son elegidos, en principio, de manera arbitraria. Verbigracia, los polinomios de segundo grado tienen la siguiente forma de Newton:

$$a = a_0 + (x - c_1)\ [a_1 + a_2\ (x - c_2)] \tag{9}$$

Entre las propiedades específicas de la forma de Newton de un polinomio se encuentra la siguiente:

[32] Cf. [Mac Lane y Birkhoff, 1979; pp. 276 – 281]
[33] Cf. [Conte y de Boor, 1980; pp. 31 – 37]

Proposición 16. Sea a un polinomio expresado en la forma de Newton (8). Entonces la evaluación del polinomio a en algún número x, $E_x(a)$, requiere exactamente de $2n$ sumas y de n multiplicaciones.

Por ejemplo, para evaluar el polinomio $a = 1 + 2\,(x - 1) + 3\,(x - 1)\,(x - 2)$, en algún número x, digamos $x = 4$, el proceso requerirá de 4 sumas y de 2 multiplicaciones, como se muestra a continuación.

$E_4(a) = 1 + 2\,(4 - 1) + 3\,(4 - 1)\,(4 - 2)$	**sumas**	**multiplicaciones**
$= 1 + (4 - 1)\,[2 + 3\,(4 - 2)]$		
$= 1 + 3\,[2 + 3\,(2)]$	2	
$= 1 + 24$	1	2
$= 25$	1	
	4	**2**

Interpolación de una función por medio de un polinomio (cuadrático).[34]

En general, este problema consiste en calcular un polinomio a, de grado menor o igual a n, que coincida con los valores de una función f (desconocida usualmente) en n+1 puntos distintos x_0, x_1, .., x_n. Es decir, que satisfaga las ecuaciones siguientes:

$$a(x_i) = f(x_i), \qquad 0 \leq i \leq n$$

El siguiente teorema garantiza la unicidad de un polinomio con tales características; su existencia, por otra parte, se hará explícita construyendo ese polinomio por medio de los métodos de Lagrange, Newton y diferencias finitas.

Teorema 17. Unicidad del polinomio de interpolación. Dados n+1 puntos distintos x_0, x_1, .., x_n. Sean a, b, dos polinomios de grado menor o igual a n tales que:

$$a(x_i) = b(x_i)$$

para cada i = 0, 1, …, n. Entonces $a(x) = b(x)$ para todo x.

Proposición 18. Fórmula de interpolación de Lagrange[35]. Dados n+1 puntos distintos x_0, x_1, .., x_n, y n+1 números reales $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, no necesariamente distintos, existe un polinomio a, y sólo uno, de grado menor o igual a n tal que:

$$a(x_i) = f(x_i)$$

para cada i = 0, 1, …, n. Este polinomio viene dado por las fórmulas siguientes:

$$a(x) = f(x_0)\,b_0(x) + f(x_1)\,b_1(x) + \ldots + f(x_n)\,b_n(x) \qquad b_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{10}$$

En nuestro caso, la interpolación de una función, o de una serie de datos, a través de un polinomio de grado a lo más 2, sólo requiere de tres puntos, dando lugar a la siguiente expresión:

[34] Cf. [Apostol, 2002; pp. 705 – 720] y [Conte y de Boor, 1980; pp. 38 – 51].

[35] Esta fórmula fue publicada primeramente por Waring (1779), redescubierta por Euler en 1783, y publicada por Lagrange en 1795 (Jeffreys and Jeffreys 1988).

$a(x) = f(x_0)\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Corolario 19. Fórmula de interpolación de Newton. Si $x_0, x_1, .., x_n$, son distintos números, mientras que $y_0, y_1, .., y_n$, es una lista cualesquiera de valores, entonces existen polinomios $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tales que:

$a_n(x) = a_{n-1}(x) + c_n\,(x - x_0)$	
$a_0(x) = y_0$	$c_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f(x_k)}{A_k(x_k)}$ $\quad$ $A_k(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)$

Por ejemplo, a partir de tres puntos (x_i, y_i), $0 \le i \le 2$, el polinomio interpolante, de grado a lo más 2, se calcula de la siguiente manera.

Paso:	Polinomio:
1	$a_0(x) = y_0$
2	$a_1(x) = a_0(x) + c_1\,(x - x_0) = y_0 + c_1\,(x - x_0)$
	En donde: $c_1 = \sum_{i=0}^{1} \dfrac{f(x_i)}{A_i(x_i)} = \dfrac{y_0}{A_0(x_0)} + \dfrac{y_1}{A_1(x_1)} = \dfrac{y_0}{x_0 - x_1} + \dfrac{y_1}{x_1 - x_0}$
3	$a_2(x) = a_1(x) + c_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$
	En donde: $c_2 = \sum_{i=0}^{2} \dfrac{f(x_i)}{A_i(x_i)} = \dfrac{y_0}{A_0(x_0)} + \dfrac{y_1}{A_1(x_1)} + \dfrac{y_2}{A_2(x_2)} = \dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \dfrac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ Por lo tanto, al sumar los tres polinomios anteriores obtenemos el polinomio interpolante, de grado a lo sumo 2, cuyos términos son los siguientes:

Término constante:

$$y_1 - \frac{x_1\,y_1}{x_1 - x_2} + \frac{x_1\,x_2\,y_1}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)} - \frac{x_1\,y_2}{-x_1 + x_2} + \frac{x_1\,x_2\,y_2}{(-x_1 + x_2)\,(x_2 - x_3)} + \frac{x_1\,x_2\,y_3}{(-x_1 + x_3)\,(-x_2 + x_3)}$$

Término lineal:

$$x\left(\frac{y_1}{x_1-x_2}-\frac{x_1\,y_1}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}-\frac{x_2\,y_1}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{-x_1+x_2}-\frac{x_1\,y_2}{(-x_1+x_2)\,(x_2-x_3)}\right.$$
$$\left.-\frac{x_2\,y_2}{(-x_1+x_2)\,(x_2-x_3)}-\frac{x_1\,y_3}{(-x_1+x_3)\,(-x_2+x_3)}-\frac{x_2\,y_3}{(-x_1+x_3)\,(-x_2+x_3)}\right)$$

Término cuadrático:

$$x^2\left(\frac{y_1}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(-x_1+x_2)\,(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(-x_1+x_3)\,(-x_2+x_3)}\right)$$

Cálculo de los coeficientes del polinomio interpolante para el método de Newton por medio de diferencias finitas divididas.[36]

Proposición 20. Si $x_0, x_1, .., x_n$, son distintos números, mientras que $y_0, y_1, .., y_n$, es una lista cualesquiera de valores, entonces existe un (único) polinomio a_n, de grado a lo más n, que interpola estos datos y tiene la forma siguiente:

$$a_n(\mathrm{x}) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x-x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en donde:

$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

A manera de ejemplo calcularemos los polinomios de interpolación para 1, 2, y 3 pares de datos.

Datos:	**Polinomio:**
$lx = \{x_1\}$ $ly = \{y_1\}$	$a_0 = y_1$
$lx = \{x_1, x_2\}$ $ly = \{y_1, y_2\}$	$a_1 = y_1 + \dfrac{(x-x_1)\,(-y_1+y_2)}{-x_1+x_2}$
$lx = \{x_1, x_2, x_3\}$ $ly = \{y_1, y_2, y_3\}$	$a_2 = y_1 + \dfrac{(x-x_1)\,(-y_1+y_2)}{-x_1+x_2} + \dfrac{(x-x_1)\,(x-x_2)\left(-\frac{-y_1+y_2}{-x_1+x_2}+\frac{-y_2+y_3}{-x_2+x_3}\right)}{-x_1+x_3}$

Métodos para calcular la raíz cuadrada de un número positivo.

Uno de los algoritmos más frecuentemente empleados para calcular la raíz cuadrada de un número real positivo, y tal vez el más eficiente, es el llamado *método babilonio*, mismo que exponemos a continuación

[36] Cf. [Conte y de Boor, 1980; pp. 38 – 51]

Pseudocódigo del algoritmo babilonio.

```
Input: α, α0, error
Output: xn (raíz de α)

N. B. α es el número,
α0 es la primera aproximación que se hace,
y el "error" es el número de lugares decimales
con el que se ha de calcular la aproximación a √α.

xn:= α0

while abs(xn^2 – α) ≥ 10^error do
 xn:= (xn + α/xn)/2
endWhile
```

Como ejemplo aproximaremos la raíz cuadrada de $\alpha = 125348$, comenzando en $\alpha_0 = 3^6 = 729$, *error*= 6, y empleando una calculadora TI-89 Titanium, con el modo de cálculo en Float6, y en modo Approximate. Los resultados son los siguientes.

Paso:	Aproximación:
1	729.
2	450.473
3	364.366
4	354.191
5	354.045

Por lo que concluimos que $\sqrt{125348} \approx 354.045$.

Muchos de los métodos empleados actualmente para calcular las raíces reales de un polinomio[37], en particular los de grado dos, están basados en el siguiente teorema[38].

Teorema.[39] Si f: $[a, b] \longrightarrow R$ es una función cuadrática y, además, $f(a)\ f(b) < 0$, entonces, puesto que f es continua, existe c $\in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Estrategia general.

Cualquier algoritmo de este estilo, basado en el teorema de Bolzano, tiene los rasgos generales siguientes.

1. Se selecciona un intervalo inicial [a, b] en donde los valores extremos del polinomio *f* tengan signos contrarios.

2. Se elige un punto $c \in (a, b)$ como primera aproximación de la raíz de *f*.
3. Se evalúa el polinomio *f* en el punto c.

4. Si $f(c) = 0$, entonces c es una raíz de *f*.[40]

---

[37] En esta discusión si pone en lugar de "polinomio", "función continua", todo sigue teniendo lugar.
[38] Cf. Corolario 3 (a), página ___.
[39] Instancia del Teorema de Bolzano.

5. En caso contrario, i. e., $f(c) \neq 0$, el algoritmo sigue aquella condición que sea verdadera de las dos siguientes.

   5.1. Si $f(a)\, f(c) < 0$, entonces se redefine el extremo $b := c$.

   5.2. Si $f(c)\, f(b) < 0$, entonces se redefine el extremo $a := c$.

6. Se reinicia (itera) el proceso en el paso 2.

Como se observa, este algoritmo se realiza al iterar el teorema de Bolzano.

A. Método de bisección.

La estrategia general expuesta anteriormente se puede emplear de la siguiente forma. En cada iteración se toma al número c como la media aritmética de los a's y los b's que van resultando:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

B. Método de la regla falsa (regula falsi).

En este método se va tomando el valor de c como el valor de la abscisa que resulta de la intersección entre la cuerda que une los puntos de $f(x)$ en los extremos a's y b's y el eje x.

Así, puesto que la ecuación que une los puntos de $f(x)$ en los extremos a's y b's está dada por medio de la siguiente fórmula:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

y, por otra parte, la condición para que c sea la abscisa del cruce de esta recta con el eje x es:

$y(c) = 0$

se tiene que el valor de c, en cada iteración, es el siguiente:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

C. Método de Newton. Método de Newton-Raphson.

En ambos métodos se va tomando el valor de c como la abscisa en que alguna de las rectas tangentes a f, que pasan por los a's y las b's respectivamente, corta al eje x dentro del intervalo que esos extremos definen.

Ahora, siendo las ecuaciones de estas dos rectas tangentes las siguientes fórmulas:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	$y = f(b) + f'(b)(x - b)$

entonces las intersecciones con el eje x están dadas por medio de las fórmulas:

[40] En la práctica no se considera la condición "$f(c) = 0$", sino más bien una condición de la forma *abs*($f(c)$) < 10^{-error}, en donde "*error*" es el número de dígitos que se requieren en la aproximación.

$c = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$	$c = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$

cayendo alguna de ellas dentro del intervalo $[a, b]$ en cada iteración.

El teorema de punto fijo. Método de las aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación f(x) = 0.

Definición. Si $f: R \longrightarrow R$, se dice que un punto x_0 es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Cuando la función f es derivable, como en el caso de una función cuadrática, se cumple el siguiente teorema.

Teorema[41]. Si $f: [a, b] \longrightarrow R$, entonces:

(a). Si f es continua y, además, $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene puntos fijos.

(b). Si f es diferenciable y $f'(x) \neq 1$, para todo $x \in$ R, entonces f tiene a lo más un punto fijo.

(b). Si f es diferenciable y es tal que $|f'(x)| \leq k < 1$, para alguna constante k, entonces f tiene un único punto fijo. Más aún, este punto es igual al límite siguiente:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

en donde x_1 es cualquier punto tomado en el intervalo $[a, b]$.

(c). El proceso descrito en el inciso (c) puede visualizarse con la siguiente trayectoria en zigzag:

$$[x_1, x_2] \to [x_2, x_2] \to [x_2, x_3] \to [x_3, x_3] \to [x_3, x_4] \to \ldots$$

Este diagrama recibe el nombre de *diagrama de red de las aproximaciones sucesivas*.

Método de aproximaciones sucesivas.

El teorema de punto fijo anterior se aplica para obtener las soluciones de una ecuación de la forma siguiente:

$$f(x) = 0, \qquad (*)$$

en donde f es diferenciable. Esto se hace derivando de la ecuación (*) alguna ecuación de la forma siguiente:

$$x = \varphi(x), \qquad (*)$$

de manera que si φ satisface las condiciones del teorema de punto fijo, entonces se obtiene una solución para la ecuación (*). Los siguientes ejemplos muestran algunas formas de emplear este método.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Despejando x de la siguiente ecuación:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$$

obtenemos la siguiente función:

$$\varphi(x) = (x^2 + 1) / 3$$

[41] Cf. [Rudin, 1976; p. 117]

Ahora bien, resulta que si φ tiene algún punto fijo, éste será una solución de la ecuación $f(x) = 0$, como se muestra en las siguientes imágenes.

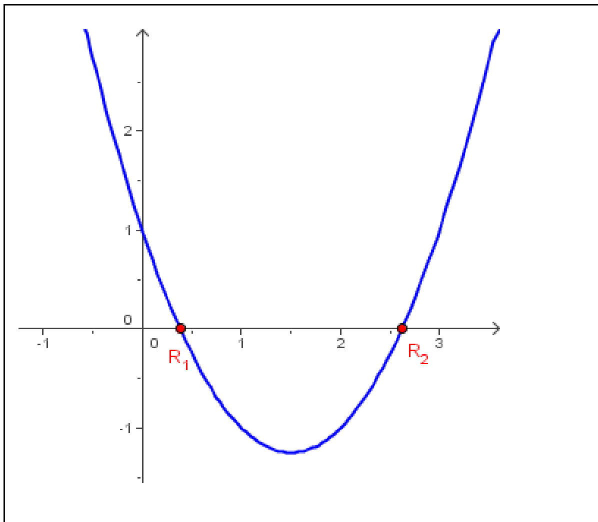


Fig. 3a. Ceros de $f(x) = x^2 – 3x + 1$

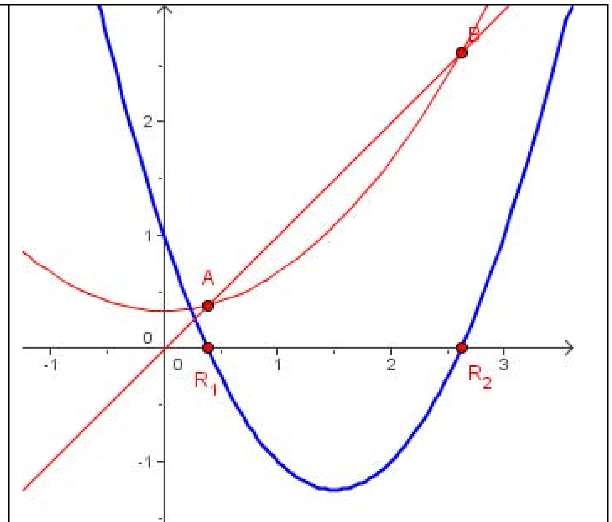


Fig. 3b. Puntos fijos de $\varphi(x) = (x^2 + 1) / 3$

Puesto que $\varphi'(x) = 2x / 3$, entonces en el intervalo [0, 1] la función φ satisface la siguiente desigualdad:

$$| \varphi(x) | \leq 2/3 < 1$$

por lo que tiene un único punto fijo en ese intervalo. Para calcularlo, tomemos cualquier $x_1 \in [0, 1]$, e iteremos este punto como se muestra en la siguiente tabla.

No. Iteración:	Punto:
1	$x_1 = 1/2$
2	$x_2 = \varphi(x_1) = 5/12$
3	$x_3 = \varphi(x_2) = 169/432$
…	…
∞	$x = 0.381966112$

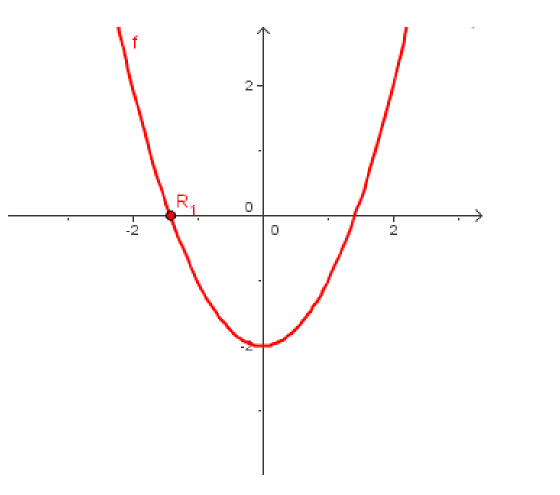
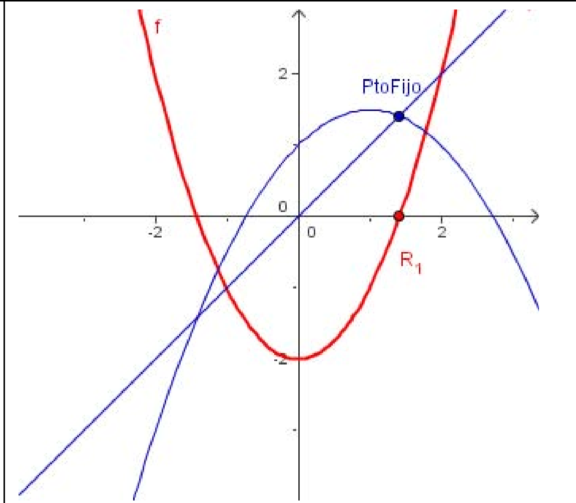
Ejemplo 2. Sea $f(x) = x^2 – 2$. En este caso tomamos a la función φ como,

$$\varphi(x) = x – f(x)/2$$

La derivada de esta función es: $\varphi'(x) = 1 - x$, por lo que en el intervalo [1, 3/2] esta derivada satisface lo siguiente:

$$| \varphi'(x) | \leq ½ < 1$$

Por lo tanto, φ tiene un único punto fijo en [1, 3/2]. Este punto fijo, solución en ese intervalo de la ecuación $f(x) = 0$, se puede calcular tomando cualquier $x_1 \in [1, 3/2]$, e iterando este punto como se muestra en la siguiente tabla.

Fig. 4a. Cero de $f(x) = x^2 - 2$	Fig. 4b Punto fijos de $\varphi(x) = x - f(x)/2$
	
No. Iteración:	**Punto:**
1	$x_1 = 1$
2	$x_2 = \varphi(x_1) = 3/2$
3	$x_3 = \varphi(x_2) = 11/8$
…	…
∞	$\sqrt{2}$

2.5.5 Procesos geométricos que emergen en la caracterización de las funciones cuadráticas.

Dado que la gráfica de una función cuadrática es una parábola (vertical), los procesos geométricos involucrados con ellas serán principalmente los relacionados con la construcción y caracterización de los elementos geométricos de una parábola.

Métodos de construcción de una parábola.

Método con regla y compás de acuerdo a la definición.

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a una recta fija llamada *directriz* es igual a la distancia a un punto fijo llamado *foco*.

Para construir una parábola bajo esta definición se puede hacer lo siguiente.

Construcción de una parábola de acuerdo con su definición.		
No.	**Nombre**	**Definición**
1	Recta Directriz	recta que pasa por Z paralela a Eje x
2	Punto Foco	

3	Recta a	recta que pasa por Foco perpendicular a Directriz
4	Punto A	Punto en a
5	Recta b	recta que pasa por A paralela a Directriz
6	Punto B	punto de intersección Directriz, a
7	Segmento c	Segmento[B, A]
8	Círculo d	Círculo con punto medio Foco y Radio c
9	Punto C	punto de intersección d, b
	Punto D	punto de intersección d, b

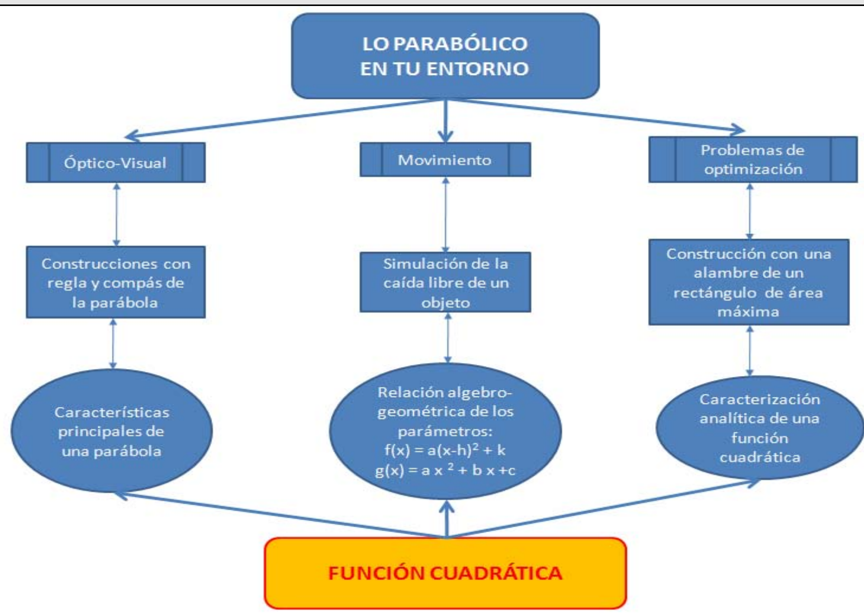
CAPÍTULO 3. DISEÑO, DESCRIPCIÓN Y PUESTA EN ESCENA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: FUNCIONES CUADRÁTICAS.

En este capítulo hacemos una descripción de la *Unidad didáctica: Funciones cuadráticas*, en el marco de su realización o puesta en escena con un grupo de estudiantes del CCH-UNAM, Plantel Sur, durante el año escolar 2006-2007. Cabe destacar que esta unidad didáctica, llevada a la práctica con el *modelo colaborativo e interactivo* descrito en el capítulo 1, es la experiencia educativa que sustenta la tesis aquí propuesta, por lo que hemos considerado conveniente detallar su diseño, además de exponer sus partes constituyentes o "nodos".

3.1 Diseño de la unidad didáctica: funciones cuadráticas.

La *unidad didáctica* que se presenta a continuación ha sido diseñada para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de los contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales de la *Unidad Temática 1: Funciones cuadráticas*, del curso de Matemáticas II, con vistas a lograr los objetivos de la misma. Esta unidad didáctica se ha estructurado conforme al siguiente mapa conceptual.

Mapa conceptual 4: Lo parabólico y las funciones cuadráticas.



De acuerdo con este mapa conceptual, el diseño de nuestra unidad didáctica se ha organizado en torno a un término no definido, a saber, "lo parabólico" que, no obstante, adquiere un significado particular para cada uno de los participantes a partir de diversas situaciones, verbigracia, los arcos parabólicos del Palacio de las Teresianas (Gaudí), el arco que forma una pelota de béisbol al ser bateada, la gráfica del movimiento de un cuerpo en caída libre, diseños gráficos basados en formas parabólicas, etcétera. (Vea las siguientes imágenes).

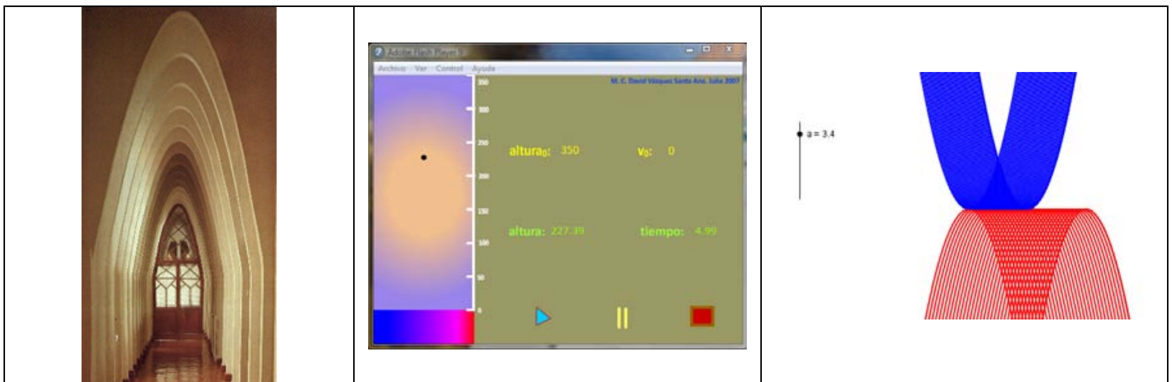


Figura 5. "Lo parabólico"

A partir de esto, el estudiante comenzará a ir precisándole un sentido matemático a "lo parabólico", a través del recorrido que haga de las partes o "nodos" expuestos en el mapa conceptual 4. En este sentido, este mapa permite trazar diversas rutas de aprendizaje, tantas como recorridos entre los nodos haya, más o menos $7! = 5040$ o, si se permiten las repeticiones, hay hasta $7^7 = 823543$ rutas posibles. Sin embargo, sólo destacaremos tres rutas, que son las que hacen más eficiente el aprendizaje de esta unidad didáctica,[42] a saber, las rutas que hemos llamado "ruta óptico-visual", "ruta del movimiento" y la "ruta de la optimización".

3.2 Desarrollo de la unidad didáctica: funciones cuadráticas.

El desarrollo de esta unidad didáctica comienza al realizarse el nodo "Lo parabólico en tu entorno", con lo que cada uno de los estudiantes elige alguna de las tres rutas de aprendizaje propuestas y, en consecuencia, realiza lo siguiente.

[42] Conviene señalar que esta unidad didáctica fue experimentada no sólo con el grupo escolar referido al principio de este capítulo, sino que previamente se experimentó con dos grupos de estudiantes en ciclos escolares anteriores a éste.

Ruta óptico-visual. Esta tiene lugar con aquellos estudiantes que tengan cierta predilección por la geometría, las artes visuales (diseño gráfico, por ejemplo), la arquitectura, etc. Por lo que inmediatamente se les remite a diversas construcciones de una parábola y a la caracterización de sus principales elementos geométricos[43]. De aquí, los estudiantes tienen plena libertad para navegar por los nodos restantes, de manera que puedan llevar a cabo alguno de los proyectos finales que tendrán que presentar al resto de sus compañeros.

Ruta del movimiento. Esta ruta se abre para aquellos estudiantes con inclinaciones más hacia la física, a la animación por computadora, etc. Una vez que se sabe que tienen estas preferencias, se les remite a la simulación y modelación de un cuerpo en caída libre,[44] en donde se desarrolla, grosso modo, el método científico en forma "virtual": se parte de un experimento virtual, se recaban los datos, se organizan, se estructuran en un modelo algebraico y en uno geométrico, y se hacen las interpolaciones o extrapolaciones propias a la especulación científica. Esto permite introducir al estudiante a la representación algebro-geométrica de las funciones cuadráticas.[33] Después, los estudiantes que han seguido esta ruta pueden desplazarse a los demás nodos de suerte que obtengan los elementos necesarios para realizar uno de los proyectos finales propuestos.

Ruta de la optimización. Hay muchos estudiantes con preferencias algebraicas, administrativas o comerciales, por lo que a éstos se les sugiere seguir esta ruta. Se comienza con un problema de optimización en donde lo cuadrático surge como modelo matemático inmejorable para realizarlo, cuestión que requiere de las principales características analíticas para interpretarlo.[45] Una vez hechas estas dos partes, se deja al estudiante en libertad de recorrer los demás nodos para que tenga las herramientas matemáticas suficientes para desarrollar alguno de los proyectos finales, cuestión que requiere del desarrollo de los nodos restantes expuestos en el mapa conceptual 3. *Sin embargo, debido a la dificultad que este tipo de problemas presenta para el alumno, hemos decidido ponerlo como proyecto*.

Finalmente, la evaluación de esta unidad didáctica se hace de manera continua y permanente a través de la evaluación de las hojas de trabajo[46] realizadas por los estudiantes, la interacción cotidiana del profesor con los estudiantes, etc., en donde el profesor va teniendo una idea clara de lo que sus estudiantes van diferenciando con relación a sus pre-concepciones acerca de "lo parabólico" y el sentido matemático que se le va imponiendo a esta cuestión. Sin embargo, la evaluación "real" de esta unidad didáctica, es decir, en donde el profesor sabrá si el estudiante ha logrado reconciliar sus ideas, prejuicios, etc., acerca de

[43] Desarrollo de los nodos: "Construcciones con regla y compás de la parábola" y "Características principales de una parábola", vea el mapa conceptual 4.
[44] Desarrollo de los nodos: "Simulación de la caída libre de un objeto" y "Relación algebro-geométrica de los parámetros de las familias de funciones $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y $g(x) = ax^2 + bx + c$", vea el mapa conceptual 4.
[45] Desarrollo de los nodos: "Problemas de optimización" y "Caracterización analítica de una función cuadrática", vea el mapa conceptual 4.
[46] Dicha evaluación no solamente incluye los contenidos conceptúales, sino también los contenidos actitudinales y procedimentales.

"lo parabólico" con su sentido matemático, se da hasta el final de la misma unidad didáctica, con la presentación de proyectos por parte de los alumnos, en donde podrá observar si ellos ya han integrado "lo parabólico", en un sentido matemático, a su lenguaje usual. En éste caso, ¡felicidades!, en otro caso, habrá que trabajar en aquellas partes que, en el momento de realizar esta unidad didáctica, el profesor atento observará "ciertas" fallas.

3.3 Infraestructura y cronograma.

La experiencia didáctica aquí presentada, se ha llevado a cabo con la siguiente infraestructura.

- Aula equipada con pizarrón, cañón y computadoras conectadas a Internet. En el plantel Sur del CCH se cuenta con el Aula de Vanguardia y que cumple con estas características; más aún, este plantel cuenta con un edificio de cómputo con cuatro salas de computadoras al servicio de sus estudiantes.

- Los programas siguientes: GeoGebra, Excel, PowerPoint.

La duración de esta unidad didáctica es de 15 horas-clase que serán realizadas de acuerdo con el siguiente cronograma:

Nodo:	Aula de vanguardia:	Aula normal:
Lo parabólico en tu entorno.	1 horas	----
Óptico-Visual	2 hora	2 hora
Movimiento	2 horas	3 horas
Proyectos: problemas de optimización.	5 horas	

3.4 Descripción de cada uno de los nodos. Hojas de trabajo.

A continuación presentamos cada uno de los nodos por separado. Es decir, explicitaremos las hojas de trabajo que conforman a cada uno de ellos, así como la forma de trabajo, individual o colectiva,[47] sugerida para llevarlos a cabo.

Nodo: Lo parabólico en tu entorno.

[47] Por forma de trabajo colectiva se entiende la realización de alguna actividad en equipos de, a lo más, cinco personas.

Uno de los principales objetivos de este nodo introductorio, es que los estudiantes volteen a su entorno y distingan formas parabólicas (anuncios, fuentes, movimientos parabólicos, etc.), por lo que para esta sesión deberán haber realizado previamente las siguientes actividades (extra-clase):

- Los estudiantes (de manera individual) recolectarán imágenes, videos, etc., de formas parabólicas en su entorno.
- Realizarán una exploración en Internet para bajar imágenes, videos, etcétera, de formas parabólicas en la arquitectura, en la ingeniería civil, en la pintura, etc.

Estas imágenes, videos, etc., acerca de "lo parabólico" serán exhibidas en el aula de medios, pues con la computadora es más fácil destacar "lo parabólico" en donde ellos lo hayan encontrado. El profesor, en este caso, irá destacando "lo parabólico" en las dos situaciones antes señaladas, a saber, en lo óptico-visual y en los movimientos de esta forma. Esta discusión concluye con una breve descripción del mapa conceptual 4 para que se constituyan equipos de trabajo (de a lo más cinco personas) que desarrollarán alguna de las dos rutas de aprendizaje ya señaladas líneas arriba.

Esta sesión concluye con un diagnóstico escrito, en donde se tendrá un primer acercamiento a los estudiantes en cuanto a los pre-requisitos matemáticos requeridos para esta unidad.[48]

A. Ruta óptico-visual.

Los estudiantes, agrupados en equipos de cinco personas, desarrollarán la siguiente hoja de trabajo.

Secuencia didáctica 1: las parábolas de un arcoíris.

En esta secuencia didáctica el alumno construye y caracteriza las formas geométricas de un arcoíris, en particular, los arcos parabólicos que forma. Para ello realizará la siguiente hoja de trabajo, en la que los estudiantes tendrán que recolectar datos (puntos) de cada una de estas situaciones para que después los procesen ajustando una parábola.

[48] Cf. Anexo 1.

Hoja de trabajo 1. Las parábolas de un arcoíris.

En esta hoja de trabajo observarás matemáticamente un arcoíris (ver figura 1) empleando para ello la interfaz algebro-geométrica GeoGebra.

Figura 1. Arcoíris cercano a Prince Ruppert BC Canadá.

Inserción de la imagen en GeoGebra.

Para insertar una imagen en la interfaz geométrica de GeoGebra puedes hacer lo siguiente.

1. Abre el menú "Intercala imagen", que está en el menú de elementos geométricos como se muestra en la siguiente figura.

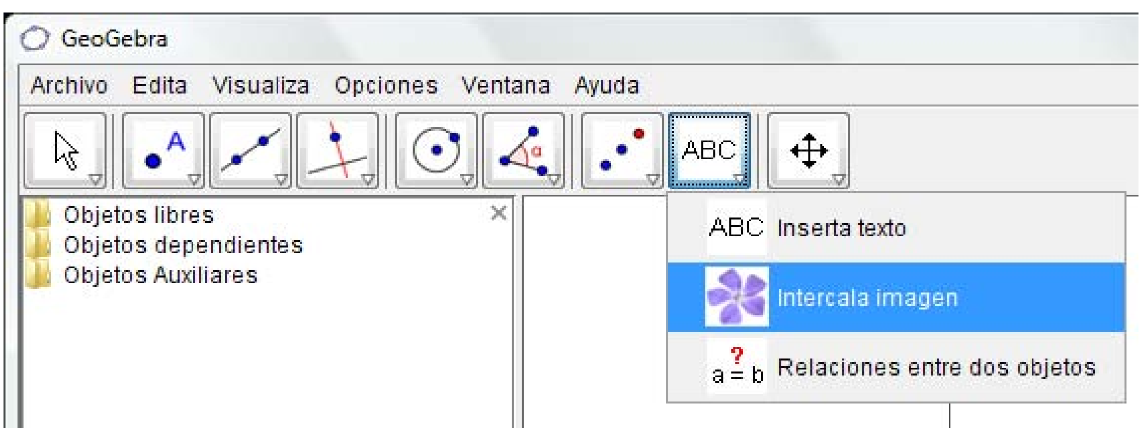


Figura 2. Comando para insertar una imagen en la interfaz geométrica de GeoGebra.

2. Con el puntero (la flecha) acomoda la imagen en la interfaz geométrica.

Recolección de datos.

3. Ahora observaremos matemáticamente la forma del arcoíris y, para ello, colocaremos cinco puntos sobre alguna de las curvas que están en la imagen del arcoíris completando la siguiente tabla.

abscisa (X)	ordenada (Y)

Ajuste de los datos a una curva con la hoja de cálculo Excel.

4. Abre la hoja de cálculo Excel y copia estos cinco datos (respetando las columnas).

5. Copia estos datos en una tabla de Excel y haz lo siguiente.

   a. Con el comando de graficación "XY Dispersión", marca los pares de datos (tiempo, altura) como puntos de un plano cartesiano.

   b. Ahora ajusta tus datos a una curva de la mejor manera posible (optimizando este ajuste).
   Para ello selecciona uno de los puntos y elige el comando "Agregar línea de tendencia", seleccionando la curva que creas que pasa lo más cercanamente por todos tus puntos. Marca las opciones "Presentar ecuación en el gráfico" y "Presentar el valor R cuadrado en el gráfico" y escribe estos valores

   función (ecuación): y = ________________________________.

   R^2 = ____________.

   El valor de R^2 es un indicador numérico de qué tan bien se ajusta la curva a tus datos y éste se interpreta como sigue: entre más cercano a 1 sea este valor mejor es el ajuste.

   Traza la gráfica de esta función en GeoGebra (en el archivo en donde está la imagen).

   c. Haz lo mismo que en el inciso (b) pero eligiendo la opción "Polinomial", de segundo grado, y escribe tus resultados.

   función (ecuación): y = ________________________________.

   R^2 = ____________.

   Traza la gráfica de esta función en GeoGebra (en el archivo en donde está la imagen).

   Compara este valor de R^2 con el que obtuviste en el inciso anterior. ¿Cuál de estos dos valores es más cercano a 1? ¿Puedes ver gráficamente por qué? Escribe.

Modelos algebraico y geométrico de la forma de un arcoíris.

De lo anterior podemos concluir que el modelo algebraico de línea que hace un arcoíris se puede ajustar a la gráfica de una función polinomial de segundo grado cuya forma general es la siguiente:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

en tanto su modelo geométrico se puede decir que es una parábola. Ambos modelos tienen la finalidad de representar el fenómeno, es decir, traerlo a nuestra presencia cuando así lo requiramos.

Ejercicio.

6. Determina el modelo algebraico y geométrico de la otra curva del arcoíris mostrada en la imagen dada. Responde las siguientes preguntas.

   a. Ecuación de la línea: y = ___________________________________.
   b. ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la partícula? ¿Cuál el mínimo?
   c. ¿En qué tiempo la partícula toca el suelo?
   d. ¿La velocidad de caída de la partícula es constante o va cambiando conforme aquella va cayendo (subiendo)?
   e. Suponiendo que los valores negativos del tiempo indican tiempos pasados, haz una descripción del movimiento de la partícula en el pasado (bajo este modelo).

Secuencia didáctica 2: construcciones de parábolas y caracterización de sus elementos geométricos básicos.

En esta secuencia didáctica el alumno construirá y caracterizará los elementos básicos de una parábola (ver figura 1) a través de diversas construcciones dadas en las hojas de trabajo aquí expuestas. Esta secuencia se realiza en dos partes. En una, los estudiantes en equipo eligen una de las siguientes construcciones y la llevan a cabo en el aula de medios, con el auxilio del profesor. Las construcciones restantes las realizarán los estudiantes (individualmente o en equipo) como actividades extra clase.

Hoja de trabajo 2. Construcción con GeoGebra de una parábola envolviéndola con rectas.

A. Construcción.

1. Con GeoGebra realiza la siguiente construcción.

Paso:	Nombre:	Definición:
i	Punto A	Punto auxiliar para construir la recta "a".
ii	Recta a	Recta que pasa por el punto A.
iii	Punto Foco	Punto fuera de la recta "a" y que será el foco de la parábola.
iv	Recta EjeSimetría	Recta que pasa por el Foco y que es perpendicular a la recta "a".
v	Punto Vértice	Vértice de la parábola y que es el punto de intersección de la recta "a" con el EjeSimetría.
vi	Punto Generador	Punto (móvil) colocado sobre la recta "a".
vii	Segmento c	Segmento[Foco, Generador]
viii	Recta Tangente	Recta que pasa por el punto Generador y es perpendicular al segmento "c".

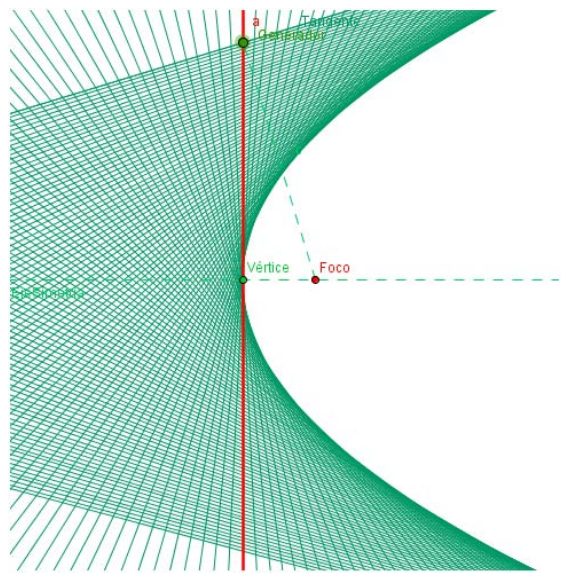


Figura 2. Construcción de una parábola al envolverla con sus rectas tangentes.

2. Selecciona la recta "tangente" y marca el comando "Activa traza".

3. Selecciona el punto "Generador" y muévelo.

4. Describe lo que obtuviste.

B. Elementos de una parábola.

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

• Foco. • Directriz.	• Vértice. • Eje de simetría.	• Lado recto. • Parámetro p.

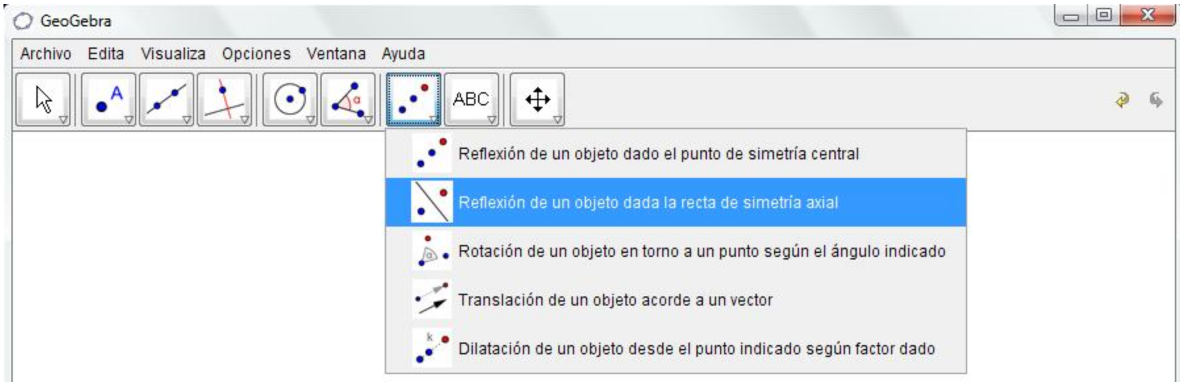
Con la construcción que acabas de realizar ya determinaste el foco de tu parábola. Ahora, para obtener los demás elementos haz lo siguiente.

5. Eje de simetría: por el foco traza la recta perpendicular a la recta "a". Renombra como "EjeSimetría" a la recta así obtenida.

6. Vértice: es el punto de intersección entre el "EjeSimetría" y la recta "a".

7. Directriz: es a recta paralela a la recta "a" que está del "otro lado" del foco y a una distancia igual a la que está el foco de la recta "a". Una manera sencilla de trazarla es la siguiente.

   a. Marca el punto simétrico al foco con respecto a la recta "a". Para ello usa el comando "Reflexión de un objeto, dada la recta…" (renombra este punto como "F1"):



   b. Levanta la perpendicular al eje de simetría por el punto "F1". Esta recta es la directriz de tu parábola. Renómbrala como "Directriz".

8. Parámetro p: este número es la distancia que hay del foco al vértice, o de la directriz al vértice (¿por qué?), por lo que para determinar su valor sólo tenemos que trazar el segmento que va del foco al vértice. Hazlo y escribe su valor:

   p = _________.

9. Lado recto (latus rectum): este es el segmento (y su longitud) de la parte de la recta perpendicular al eje de simetría de la parábola que está "dentro" de la parábola, de manera que para trazarlo puedes hacer lo siguiente:

   a. levanta la perpendicular al eje de simetría de forma que pase por el foco;

   b. marca los puntos de intersección de esta perpendicular con la parábola;

   c. finalmente, traza el segmento que une a esos puntos de intersección.

   Escribe el valor del lado recto:

   Lado recto = _________.

Hoja de trabajo 3. Construcción con regla y compás de una parábola: dobleces.

Material:

- Hoja de papel tamaño carta (u oficio).
- Regla (de preferencia sin graduación).
- Compás.
- Lápiz y goma.

A. Construcción.

1. Para construir una parábola con regla y compás en una hoja haz lo siguiente en tu hoja de dibujo.

Paso:	Construcción:	Definición:
i	Traza una recta que llamaremos "a".	Una recta cualquiera en el plano (de dibujo).
ii	Marca un punto fuera de la recta "a".	Este punto es el foco de nuestra parábola.
iii	Marca un punto sobre la recta "a" que llamaremos "generador".	Con este punto generaremos las rectas que envolverán a nuestra parábola.
iv	Traza el segmento que una al foco con el punto generador. Lo llamaremos "c".	Segmento auxiliar de nuestra construcción.
v	Levanta la perpendicular al segmento "c" que pasa por el punto generador.	Esta recta es una tangente a nuestra parábola, de manera que la irá envolviendo.
vi	Repite los pasos iii-v un número suficiente de veces de manera que se vea la parábola.	

B. Elementos de una parábola.

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

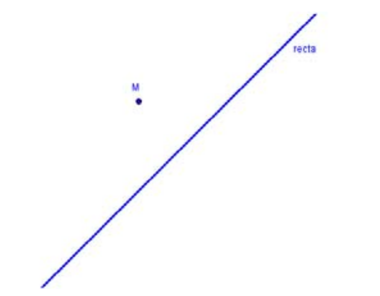
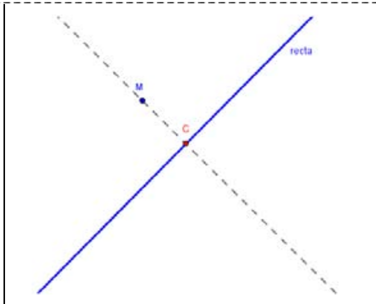
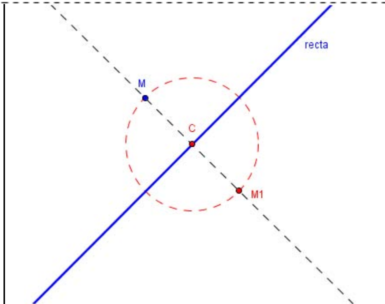
• **Foco.** • **Directriz.**	• **Vértice.** • **Eje de simetría**.	• **Lado recto.** • **Parámetro p.**

Para obtener los elementos geométricos básicos de tu parábola sigue la construcción dada en la parte B de la secuencia didáctica 1a y ve respondiendo las preguntas. Habrá varias construcciones que tal vez no sepas como hacerlos con regla y compás y tendrás que preguntarle a tu maestro.

En particular, aquí te damos una idea para construir con estos instrumentos de dibujo la imagen simétrica de un punto con respecto a una recta.

Construcción con regla y compás de la imagen simétrica de un punto con respecto a una recta.

2. Suponiendo que tienes una recta y un punto fuera de ella (ver figura 1a), y que quieres marcar el punto imagen que obtendrías al suponer que la recta es un espejo, entonces debes considerar lo siguiente: *el punto imagen deberá estar a una misma distancia de la recta que el punto original lo está con relación a ella*.

		
1a. Punto recta dados.	**1b.** Perpendicular a la recta que pasa por el punto.	**1c.** Circunferencia con centro en la intersección que pasa por el punto dado. El otro punto de intersección, M1, es la imagen simétrica de M.

De esta manera sólo hay dos detalles:

a. ¿Cómo conozco la distancia entre un punto y una recta?

Respuesta: es la longitud del segmento perpendicular a la recta que pasa por el punto.

b. ¿En dónde tengo que colocar al punto imagen?

Respuesta: en la misma recta que contiene al segmento perpendicular con el que mediste la distancia a la recta.

3. Bien, con estas aclaraciones entonces procedemos como sigue.

   a. Trazamos la perpendicular a la recta que pasa por el punto dado. Marcamos su punto de intersección (vea figura 1b).
   b. Trazamos la circunferencia con centro en el punto de intersección y que pase por el punto dado (vea figura 1c).
   c. Marcamos el otro punto de intersección de la recta con la circunferencia (uno es el punto original). Este otro punto de intersección es la imagen simétrica del punto dado con respecto a la recta también dada.

Hoja de trabajo 4. Construcción de una parábola con una tabla, tachuelas e hilo envolviéndola con rectas.

Material:

- Tabla de 20 cm x 20 cm (más o menos).
- Martillo, tachuelas e hilo (cáñamo de preferencia).
- Regla (de preferencia sin graduación), compás, lápiz y goma.

A. Construcción.

1. Para construir una parábola con estos materiales haz lo siguiente en sobre la tabla.

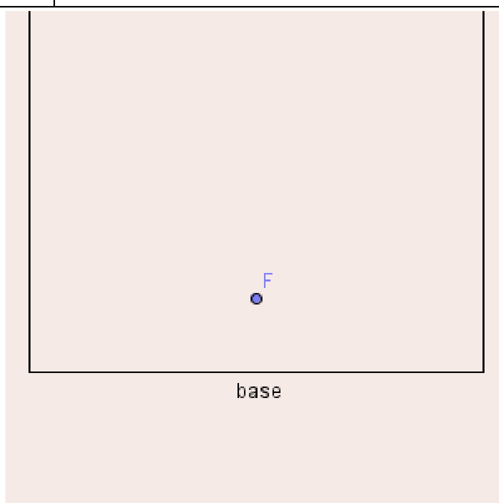
<table>
<tr><th>Paso:</th><th>Construcción:</th><th>Definición:</th></tr>
<tr><td>i</td><td>Traza tres segmentos de recta y un punto fuera de ellos (vea figura 1a).</td><td>Uno de los segmentos lo llamaremos la "base" de la parábola. Al punto lo llamaremos "F", este punto será el foco de la parábola que vamos a construir.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

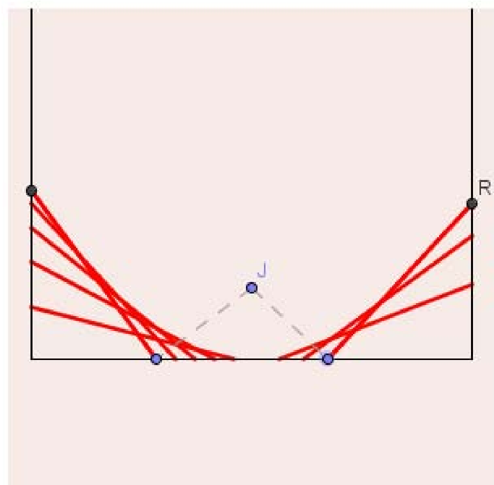
Figura 1a. Tabla con un punto marcado y tres segmentos de recta trazados-</td><td>

Figura 2b. Los puntos sobre los segmentos son tachuelas clavadas, en tanto los segmentos son hilos que unen las tachuelas.</td></tr>
<tr><td>ii</td><td>Clavamos una tachuela sobre el segmento "base", en cualquier lugar (vea figura 2b).</td><td>La tachuela, vista como punto, permitirá generar una recta que envolverá a nuestra parábola.</td></tr>
<tr><td>iii</td><td>Traza el segmento que una al foco con el punto generador. Lo llamaremos "c".

Levanta la perpendicular al segmento "c" que pasa por el punto generador.

Clava una tachuela en donde esta perpendicular corte a uno de los lados (vea figura 2b).

Une con un pedazo de hilo las dos tachuelas clavadas.</td><td>Los hilos que unen las tachuelas son tangentes a la parábola que estamos construyendo, por lo que la irán envolviendo.</td></tr>
<tr><td>iv</td><td colspan="2">Repite los pasos ii-iii un número suficiente de veces de manera que se vea la parábola.</td></tr>
</table>

B. Elementos de una parábola.

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

• **Foco.** • **Directriz.**	• **Vértice.** • **Eje de simetría**.	• **Lado recto.** • **Parámetro p.**

Para obtener los elementos geométricos básicos de tu parábola sigue la construcción dada en la parte B de la hoja de trabajo 1a y ve respondiendo las preguntas. Habrá varias construcciones que tal vez no sepas como hacerlos con regla y compás y tendrás que preguntarle a tu maestro.

En particular, puedes revisar en la hoja de trabajo 1b para que aprendas a trazar la imagen simétrica de un punto con relación a una recta.

B. Ruta de movimiento.

Los estudiantes, agrupados en equipos de cinco personas, desarrollarán la siguiente hoja de trabajo.

Secuencia didáctica 3: caída libre de un objeto.

En esta secuencia didáctica el alumno construye y caracteriza los elementos funcionales básicos del movimiento de una partícula en caída libre a través de la simulación de este fenómeno en un escenario interactivo (applet) diseñado *ex-profeso*. Para ello el estudiante tendrá que resolver la siguiente hoja de trabajo.

En la primera parte (recolección de datos) se realiza con el applet, en tanto que la segunda parte, el tratamiento de la información será hecho con la hoja de cálculo Excel con la que se marcarán los puntos en un plano cartesiano, se ajustará a una curva polinomial de segundo grado obteniendo, además, su expresión algebraica.

Hoja de trabajo 5. Caída libre de un objeto.

En esta hoja de trabajo realizarás un estudio, breve y general, de la caída de un objeto cuando este se deja caer desde una altura determinada. Para ello emplearás el escenario (applet) que hemos diseñado ex profeso y que hemos llamado "caída libre".

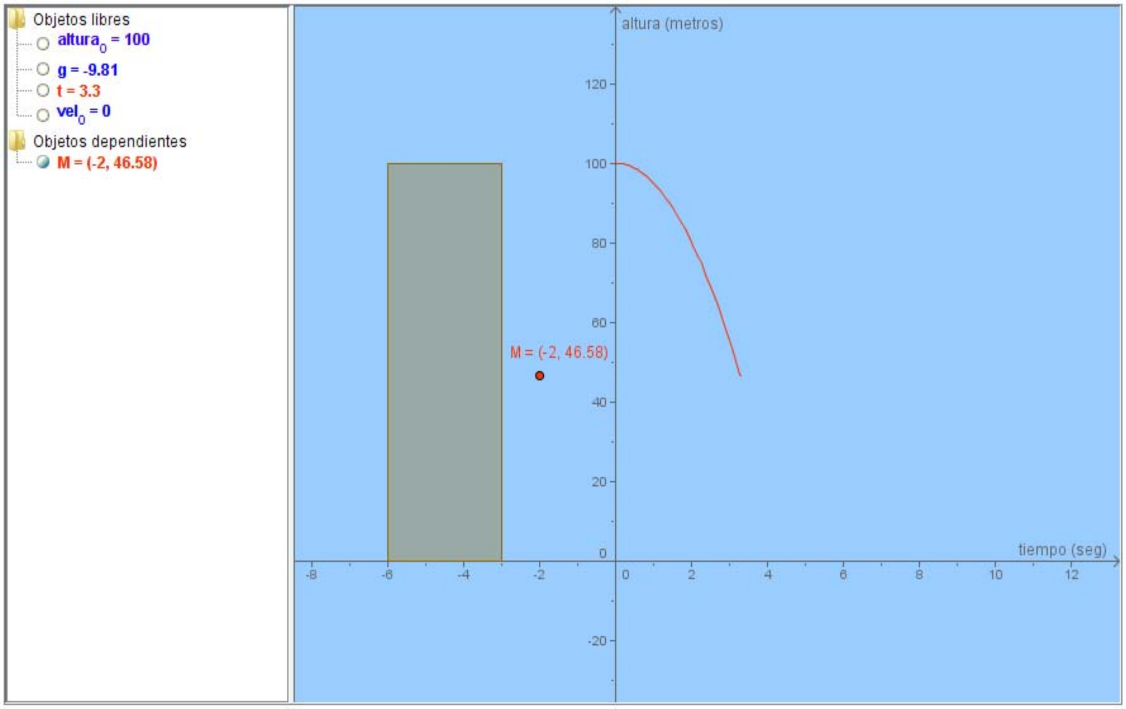


Figura 1. Imagen del escenario (applet) de simulación de la caída de un objeto.

Exploración.

Desarrolla las siguientes actividades para que explores el fenómeno de la caída de la *partícula* M bajo la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

1. Varía el parámetro t, que en este caso representa al tiempo transcurrido de la caída de M. Escribe lo que observas.

2. Cambia la altura del edificio (rectángulo) variando el parámetro $atura_0$ y mueve la partícula M variando el tiempo. Haz una breve descripción de lo que observas.

3. Ahora simularemos que el objeto es lanzado (hacia arriba o hacia abajo) y que no sólo lo dejamos caer. Para ello cambia la velocidad inicial del lanzamiento vel_0 y mueve la partícula M. Describe lo que observas.

4. Finalmente, la aceleración debida a la fuerza de gravedad de la Tierra es, al nivel del mar, igual a g = $-9.81 m/s^2$. El signo negativo indica que la aceleración está dirigida hacia abajo (jalando al objeto). Cambia este valor y describe lo que observas.

Recolección de datos.

Ahora estudiaremos matemáticamente este fenómeno, por lo que buscaremos re-presentarlo a través de su gráfica (que aparece en el applet) y de su expresión algebraica.

5. Con los siguientes datos, completa la tabla.

6. g = -9.81 $altura_0$= 100 m. vel_0 = _______ m/s.

tiempo (segundos)	**altura** (metros)	**tiempo** (segundos)	**altura** (metros)
0			0
0.2			10
0.5			50
1			100

7. Copia estos datos en una tabla de Excel y haz lo siguiente.

   a. Con el comando de graficación "XY Dispersión", marca los pares de datos (tiempo, altura) como puntos de un plano cartesiano.

   b. Ahora ajusta tus datos a una curva de la mejor manera posible (*optimizando* este ajuste). Para ello selecciona uno de los puntos y elige el comando "Agregar línea de tendencia", seleccionando la curva que creas que pasa lo más cercanamente por ***todos*** tus puntos. Marca las opciones "Presentar ecuación en el gráfico" y "Presentar el valor R cuadrado en el gráfico" y escribe estos valores

   función (ecuación): y = ________________________________.

   R^2 = ____________.

   El valor de R^2 es un indicador numérico de qué tan bien se ajusta la curva a tus datos y éste se interpreta como sigue: entre más cercano a 1 sea este valor mejor es el ajuste.

   Traza la gráfica de esta función en GeoGebra (en el archivo en donde está la imagen).

   c. Haz lo mismo que en el inciso (b) pero eligiendo la opción "Polinomial", de segundo grado, y escribe tus resultados.

   función (ecuación): y = ________________________________.

   R^2 = ____________.

   Traza la gráfica de esta función en GeoGebra (en el archivo en donde está la imagen).

   Compara éste valor de R^2 con el que obtuviste en el inciso anterior. ¿Cuál de estos dos valores es más cercano a 1? ¿Puedes ver gráficamente por qué? Escribe.

Modelos algebraico y geométrico del fenómeno de caída libre.

De lo anterior podemos concluir que el modelo algebraico de la caída libre de una partícula es una función polinomial de segundo grado cuya forma general es la siguiente:

$$y = a\,\mathrm{x}^2 + b\,\mathrm{x} + c$$

en tanto su modelo geométrico es una parábola. Ambos modelos tienen la finalidad de re-presentar el fenómeno, es decir, traerlo a nuestra presencia cuando así lo requiramos y, también, para predecir el comportamiento de la partícula bajo condiciones que podamos pre-establecer. Para aclarar esto, hagamos lo siguiente.

8. Establece las siguientes condiciones (iniciales):

g = ___________ m/s^2 altura0 = ___________ m   vel0 = ___________ m/s

y responde las siguientes preguntas.

d. ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la partícula? ¿Cuál el mínimo?

e. ¿En qué tiempo la partícula toca el suelo?

f. ¿La velocidad de caída de la partícula es constante o va cambiando conforme aquella va cayendo (subiendo)?

g. Suponiendo que los valores negativos del tiempo indican tiempos pasados, haz una descripción del movimiento de la partícula en el pasado (bajo este modelo).

Después de haber realizado la hoja de trabajo anterior, los estudiantes, en equipos, realizarán las dos secuencias didácticas siguientes.

Secuencia didáctica 4: ecuación estándar (ordinaria) de una parábola vertical.

Con esta secuencia el estudiante interpretará geométricamente la expresión funcional:

$$y = a\,(x - h)^2 + k \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

así como la relación que existe entre los valores de los parámetros *a*, *h*, *k*, y la gráfica de esta función. La expresión algebraica (1) es la *ecuación estándar u ordinaria de una parábola vertical*.

Hoja de trabajo 6. Ecuación estándar u ordinaria de una parábola vertical.

En esta hoja de trabajo harás una interpretación algebro-geométrica de una ecuación polinomial de segundo grado de la siguiente forma:

$$y = a\,(x - h)^2 + k \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

Esto es, observarás la curva a que da lugar una expresión algebraica como la anterior y conocerás la relación entre la forma de esa curva y los parámetros *a*, *h*, *k*. Para ello emplearemos el programa GeoGebra.

***Edición en GeoGebra de la ecuación estándar de una parábola vertical*.**

La ecuación (1) es la *ecuación estándar de una parábola vertical*. Nuestro interés es ver qué modificaciones obtenemos al hacer variar los parámetros numéricos *a*, *h*, *k*, empleando para ello el programa GeoGebra.

1. Puesto que queremos poder cambiar los valores numéricos de los parámetros a, h, k, los editamos al principio de nuestra actividad. Esto lo llevamos a cabo escribiendo en la línea de edición algebraica lo siguiente:

   ```
   a = 1
   k = 0
   h = 0
   ```

   Estos valores iniciales pueden ser otros, lo importante es tenerlos definidos desde el principio.

2. Ahora editamos la ecuación (1) escribiendo, de nuevo en la línea de edición, la siguiente expresión:

   ```
   y = a (x – h)² + k
   ```

3. Mueve los parámetros a, h, k, de cualquier manera y describe la curva que obtienes. ¿Qué pasa cuando *a* = 0? ¿Esta condición está dentro de nuestra definición? Explica.

***Abertura de la parábola y el parámetro a*.**

Veamos la forma de la parábola que obtenemos cuando hacemos variar al parámetro *a*.

4. Con valores cualesquiera de los parámetros *h* y *k* completa la siguiente tabla.

a	**la parábola abre hacia (arriba/abajo):**
> 0 (mayor que 0)	
< 0 (menor que 0)	
= 0	

***Vértice de la parábola y los parámetros h, k*. *Máximos y mínimos*.**

5. Puesto que la gráfica de la expresión (1) es siempre una parábola, entonces ésta debe tener un (único) vértice. Marca el punto:

`V = (h, k)`

y explica en dónde queda ubicado. ¿Será este punto el vértice de la parábola? Explica.

El valor de "y", para un "x" particular, se dice que es un máximo de la expresión algebraica (1) si este valor es el mayor posible. En forma análoga, el valor de "y", para un valor numérico particular de "x", se dice que es un mínimo de (1) si este es el menor valor numérico posible de todas las "y".

6. Con valores cualesquiera de los parámetros *h* y *k* completa la siguiente tabla. ¿Qué pasa cuando *a* = 0?

a	**la parábola tiene un (mínimo/máximo):**
> 0 (mayor que 0)	
< 0 (menor que 0)	

***Traslación horizontal de la parábola con el parámetro h*.**

Puesto que *h* es la abscisa del vértice de la parábola, entonces al variarlo la parábola se moverá horizontalmente. Para comprobarlo haz lo siguiente.

7. Con valores cualesquiera $a \neq 0$ y *k* completa la siguiente tabla.

h	**la parábola se mueve hacia la (derecha/izquierda):**
al aumentarlo	
al disminuirlo	

***Traslación vertical de la parábola con el parámetro k*.**

Puesto que *k* es la ordenada del vértice de la parábola, entonces al variarlo la parábola se moverá verticalmente. Para comprobarlo haz lo siguiente.

8. valores cualesquiera $a \neq 0$ y *h* completa la siguiente tabla.

k	**la parábola se mueve hacia:**
al aumentarlo	
al disminuirlo	

***Eje de simetría de una parábola vertical*.**

La ecuación de una *recta horizontal* tiene la forma algebraica siguiente:

$$y = h \qquad (2)$$

en donde *h* es la ordenada que tienen todos sus puntos. De manera análoga, a ecuación de una *recta vertical* tiene la forma algebraica siguiente:

$$x = k \qquad (3)$$

en donde k es la abscisa que tienen todos sus puntos.

9. Con GeoGebra traza las siguientes rectas horizontales y verticales.

(a). $x = 1$ (b). $x = 0$ (c). $y = -3$

(d). $y = \sqrt{5}$ (e). $x = -\pi$ (f). $y = 0$

Por otra parte, como habrás notado, las parábolas tienen un eje de simetría o recta que las "parte" en dos ramas iguales, como si una fuera la imagen en el espejo (el eje) de la otra.

10. ¿Cuál recta crees que sea el eje de simetría de una parábola? ¿Tiene alguna relación con su vértice? Explica.

11. Traza las siguientes parábolas y determina la ecuación de su eje de simetría.

Parábola:	**Eje de simetría (ecuación):**
$y = 3\,(x - 1)^2 + 5$	
$y = 3\,(x - 1)^2 + 5$	
$y = 3\,(x - 1)^2 + 5$	

12. ¿Cuántas parábolas tienen como eje de simetría a la recta $x = 0$? Explica.

Ejercicios.

Determina la abertura, las coordenadas del vértice y si es máximo o mínimo, así como la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas verticales.

13. $y = 3\,(x - 1)^2 + 5$

14. $y = -\,(x - \pi)^2 + 5$

15. $y = \sqrt{2}\,(x + 9)^2 - 7$

16. $y = 3/2\,(x + 1)^2 + 0.87$

17. $y = x^2 + 6\,x + 9$

18. $y = x^2 - 2\,x + 1$

Comprueba tus resultados con GeoGebra.

Secuencia didáctica 5: ecuación general de una parábola vertical.

Con esta secuencia el estudiante interpretará geométricamente la expresión funcional:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad\qquad a \neq 0 \tag{1}$$

así como la relación que existe entre los valores de los parámetros *a*, *b*, *c*, y la gráfica de esta función. La expresión algebraica (1) es la *ecuación general de una parábola vertical*. Más aún, relacionará esta expresión con la forma estándar de una parábola vertical para determinar los elementos básicos analíticos de la función, es decir, el vértice (máximo o mínimo) y la concavidad.

Hoja de trabajo 7. Ecuación general de una parábola vertical.

En esta hoja de trabajo harás una interpretación algebro-geométrica de una función polinomial de segundo grado escrita en su forma general:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad\qquad a \neq 0 \tag{1}$$

Esto es, observarás la curva a que da lugar una expresión algebraica como la anterior y conocerás la relación entre la forma de esa curva y los parámetros *a*, *b*, *c*. Más aún, a partir de los parámetros *a*, *b*, *c*, determinarás las coordenadas del vértice de la parábola, su concavidad y determinarás si el vértice es un máximo o un mínimo. Para ello emplearemos el programa GeoGebra.

***Edición en GeoGebra de la ecuación estándar de una parábola vertical*.**

La ecuación (1) es la *ecuación general de una parábola vertical*. Nuestro interés es ver qué se modifica al hacer variar los parámetros numéricos *a*, *b*, *c*, empleando para ello el programa GeoGebra.

1. Puesto que queremos poder cambiar los valores numéricos de los parámetros *a*, *b*, *c*, los editamos al principio de nuestra actividad. Esto lo llevamos a cabo escribiendo en la línea de edición algebraica lo siguiente:

   ```
   a = 1
   b = 0
   c = 0
   ```

   Estos valores iniciales pueden ser otros, lo importante es tenerlos definidos desde el principio.

2. Ahora editamos la ecuación (1) escribiendo, de nuevo en la línea de edición, la siguiente expresión:

   ```
   y = a x² + b x + c
   ```

3. Mueve los parámetros *a*, *b*, *c*, de cualquier manera y describe la curva que obtienes. ¿Qué pasa cuando $a = 0$? ¿Esta condición está dentro de nuestra definición? Explica.

Variación del coeficiente a.

Veamos la forma de la parábola que obtenemos cuando hacemos variar al parámetro *a*.

4. Con valores cualesquiera de los parámetros *b* y *c* completa la siguiente tabla.

cuando a:	**la parábola abre hacia (arriba/abajo):**
> 0 (mayor que 0)	
< 0 (menor que 0)	
= 0	

Variación del coeficiente b.

Para determinar el efecto que tiene la variación del parámetro b haz lo siguiente.

5. En GeoGebra, marca el vértice de la parábola y selecciona su traza. ¿Qué curva forma el vértice al mover b?

   ____.

Ahora, para determinar la fórmula de esta curva haz lo siguiente.

6. Escribe en su forma ordinaria la parábola $y = ax^2 + b x + c$, y determina las coordenadas del vértice.

   V: (_______,_______)

7. Considera $z = –b/2a$, como una nueva variable. Sustituye z en la expresión de la ordenada de V. ¿Observas que obtienes la ecuación ordinaria de una nueva parábola? Escríbela:

   w = _____ z^2 + _____

8. Traza esta parábola en GeoGebra y verifica que esta es la curva que traza el vértice de la parábola original al variar el parámetro b.

Variación del coeficiente c.

Para conocer la relación que hay entre el parámetro c y la parábola $y = a x^2 + b x +c$, haz lo siguiente.

9. Para valores cualesquiera de $a \neq 0$ y *b*, describe el comportamiento de la gráfica de $y = a x^2 + b x +c$, variando el valor de c.

cuando c:	**la parábola se mueve hacia:**
aumenta	
disminuye	

Máximo o mínimo.

10. Puesto que la gráfica de la expresión (1) es siempre una parábola, entonces ésta debe tener un (único) vértice. ¿Puedes determinar si la parábola tiene un máximo o un mínimo dependiendo del valor de *a* (sin importar los valores de *b* y *c*)? Explica.

11. Con base en tu afirmación determina cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tienen un máximo o un mínimo. Comprueba tus respuestas con GeoGebra.

función cuadrática:	**mínimo/máximo:**
$f(x) = x^2$	
$f(x) = –x^2$	
$f(x) = x^2 – x – 2 – 5x^2$	
$f(x) = x^2 + x – 2$	

Coordenadas del punto extremo (vértice).

Como viste en la hoja de trabajo 3, cuando se tiene escrita una parábola en forma estándar es muy fácil determinar las coordenadas de su vértice. Por ello, para obtener las coordenadas del vértice de una parábola escrita en forma general lo que haremos será llevarla a su forma estándar. Hay muchas maneras de hacer esto, sin embargo, el siguiente algoritmo te permitirá que fácilmente lo hagas.

Ejemplo. Calcular las coordenadas del vértice de la siguiente parábola vertical:

$$y = \mathbf{-7}\, x^2 + \mathbf{3}\, x - \mathbf{2} \qquad (2)$$

Solución.

La forma estándar de una parábola vertical es la siguiente:

$$y = \boldsymbol{a}\,(x - \boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a} \neq 0 \qquad (3)$$

Ahora, para poder establecer los valores de a, h y k primero desarrollamos esta expresión (3), con lo que obtenemos lo siguiente:

$$y = \boldsymbol{a}\,(x - \boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{k}$$

$$y = \boldsymbol{a}\,(x^2 - 2\,x\,\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^2) + \boldsymbol{k}$$

$$y = \boldsymbol{a}\,x^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h}\,x + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{k}$$

$$y = \boldsymbol{a}\,x^2 + (\mathbf{-2}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h})\,x + (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{k})$$

Ahora igualamos los coeficientes de esta última expresión con los de la ecuación dada (2), con lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{a} = -7$$

$$\mathbf{-2}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h} = 3$$

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{h}^2 + \boldsymbol{k} = -2$$

La primera nos da directamente el valor de *a*, por lo que para calcular *h* sustituimos el valor de *a* en la segunda ecuación lo que nos queda como sigue:

$$\mathbf{-2}\,(\boldsymbol{-7})\,\boldsymbol{h} = 3 \quad \therefore \quad \mathbf{14}\,\boldsymbol{h} = 3 \quad \therefore \quad \boldsymbol{h} = 3/14$$

Finalmente, sustituyendo estos valores de *a* y *h* en la tercera ecuación podemos calcular *k*, pues se tiene lo siguiente:

$$(-7)\,(3/14)^2 + \boldsymbol{k} = -2 \quad \therefore \quad (-9/28) + \boldsymbol{k} = -2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{k} = -2 - (-9/28) \quad \therefore \quad \boldsymbol{k} = -\,47/28$$

Por lo tanto, la forma estándar de la parábola vertical dada por la ecuación (2) es la siguiente:

$$y = \boldsymbol{-7}\,(x - \boldsymbol{3/14})^2 \; \mathbf{-\,47/28}$$

De ahí que las coordenadas del vértice son las siguientes:

Vértice: (3/14, –47/28)

Puesto que el coeficiente *a* es negativo, el vértice de la parábola es un máximo. Finalmente, de acuerdo con lo analizado para la forma estándar de una parábola vertical, el eje de simetría de la parábola bajo consideración es la siguiente recta vertical:

Eje de simetría: x = 3/14

12. Siguiendo este algoritmo, o cualquier otro que conozcas, determina la concavidad, las coordenadas del vértice, si éste es un máximo o un mínimo, así como el eje de simetría de las siguientes funciones cuadráticas.

función cuadrática:	**concavidad (*a*)**	**coordenadas del vértice:**	**mínimo/máximo:**
$f(x) = x^2$			
$f(x) = -x^2$			
$f(x) = x^2 - x - 2 - 5\,x^2$			
$f(x) = x^2 + x - 2$			
$f(x) = x - 3x + 5$			
$f(x)= 8x^2 + 5$			
$f(x)= -5x^2 + 15x +9$			

13. Escribe la ecuación general de las parábolas con eje de simetría igual a la recta x = 0? Explica.

Ejercicios.

Determina la abertura, las coordenadas del vértice y si es máximo o mínimo, así como la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas verticales.

14. $y = 8 - 6x + 3x^2$

15. $y = 1 - \pi^2 + 2\pi x - x^2$

16. $y = -3 + 81\sqrt{2} + 18\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,x^2$

17. $y = 2.356 + 3x + 1.25x^2$

18. $y = (x + 3)^2$

19. $y = x^2 - x + 1$

Comprueba tus resultados con GeoGebra.

3.5 Proyectos.

En esta sección se exponen los proyectos que los estudiantes, organizados en equipos de cinco, tendrán que realizar a lo largo de esta unidad didáctica. Estos proyectos pretenden orientar al estudiante para que construya algunos de los significados más importantes a los que remite la noción de función cuadrática, verbigracia, aquellos fenómenos o procesos en los que se busca su optimización. Bajo esta orientación, se plantea un problema de esta naturaleza, es decir, un problema que puede modelarse con una función cuadrática, con lo que al irlo desarrollando los estudiantes se van viendo involucrados en los elementos generales de una función: su dominio, co-dominio y regla de correspondencia, además de las características propias de las funciones polinomiales de segundo grado, a saber, que son el modelo básico para optimizar procesos.

Estos proyectos les son planteados a los estudiantes en cualquier lugar de esta unidad didáctica y su evaluación se hará al final de la unidad didáctica con la exposición del mismo, por equipo, a sus demás compañeros. El proyecto será supervisado todo el tiempo por el profesor, con lo que tendrá la oportunidad de ir viendo el avance de sus estudiantes a lo largo del desarrollo de esta unidad didáctica.

Proyecto A. Cálculo de las dimensiones del rectángulo de mayor área construido con un alambre de 18 cm.

Esta secuencia está dividida en las dos secciones siguientes:

Hoja de trabajo 1: Funciones lineales: construcción de un rectángulo con un alambre de 18 cm de longitud.
Hoja de trabajo 2. Funciones cuadráticas: cálculo del área máxima de un rectángulo (cuadrado) construido con un alambre de 18 cm.

Problema: ***Construir el rectángulo de mayor área con un alambre de 18 cm de longitud.***

Para resolver este problema resuelve las siguientes hojas de trabajo.

Hoja de trabajo 1. Funciones lineales: construcción de un rectángulo con un alambre de longitud igual a 18 cm.

1. Dobla un alambre de 18 cm de longitud y construye rectángulos que tengan una base igual a la dada en la primera columna de la tabla 1. Mide la altura del rectángulo formado colocándolo sobre la cuadrícula de la figura 1 y escríbela en la segunda columna.

Tabla 1. Construcción de cuadriláteros con un alambre de 18 cm de longitud.		
base (cm)	**altura (cm)**	**pares de la función altura: (base, altura)**
2		
4		
6		
8		
0		
9		
10		

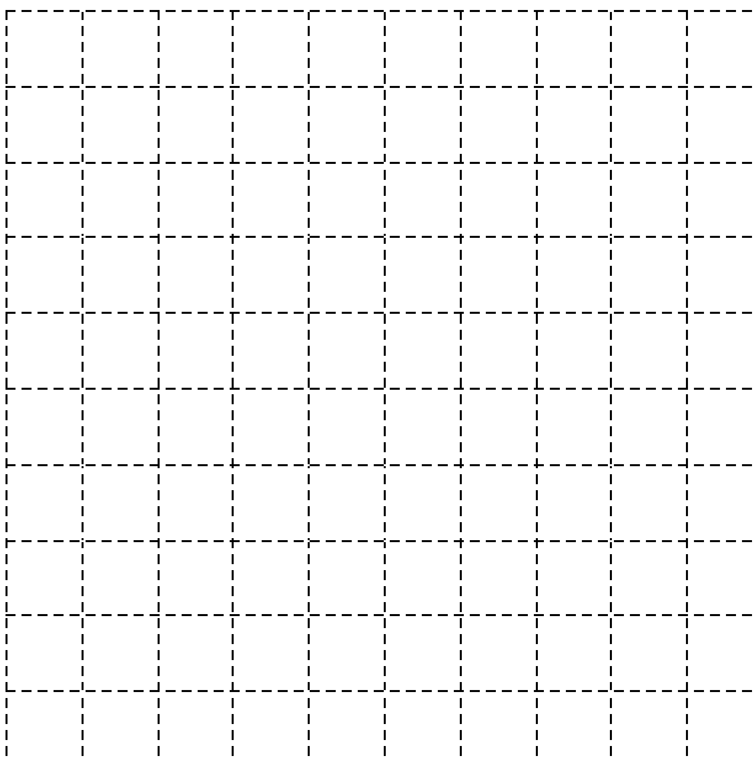


Figura 1. Cuadrícula para medir elementos de rectángulos. Cada segmento mide 1 cm.

2. ¿Puedes construir cuadrados con el alambre? Si es así, escribe sus dimensiones:

3. ¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es mayor que 9 cm? Explica.

¿Existe algún valor para la altura cuando la longitud de la base es menor que 0 cm? Explica.

De lo anterior se puede concluir que sólo es posible formar rectángulos con el alambre cuando su base es mayor o igual a 0 cm, pero menor o igual a 9 cm, pues dentro de este ***dominio de valores*** habrá una altura posible para construir un rectángulo con el alambre, mientras que fuera de ese dominio no es posible construir rectángulo alguno.

4. Para construir rectángulos con el alambre hemos procedido de la siguiente manera. Fijamos o predeterminamos la longitud de la base, construimos el rectángulo y medimos la longitud de su altura. De esta manera podemos decir que ***la longitud de la altura depende de la longitud de la base*** y que, además, ***la longitud de la base no puede ser menor que 0 cm ni mayor que 9 cm***.

   En matemáticas a este tipo de dependencias se les llama ***funciones*** y es común escribir sus elementos como pares ordenados. En nuestro caso, tendremos pares ordenados de la forma siguiente:

   función altura: (base, altura),

   en donde $0 \leq base \leq 9$. Con las mediciones de la primera y segunda columna de la tabla 1, y tomando en cuenta las restricciones de medida de la base, completa la tercera columna de la tabla 1, con ello tendrás sólo 6 pares de la función altura.

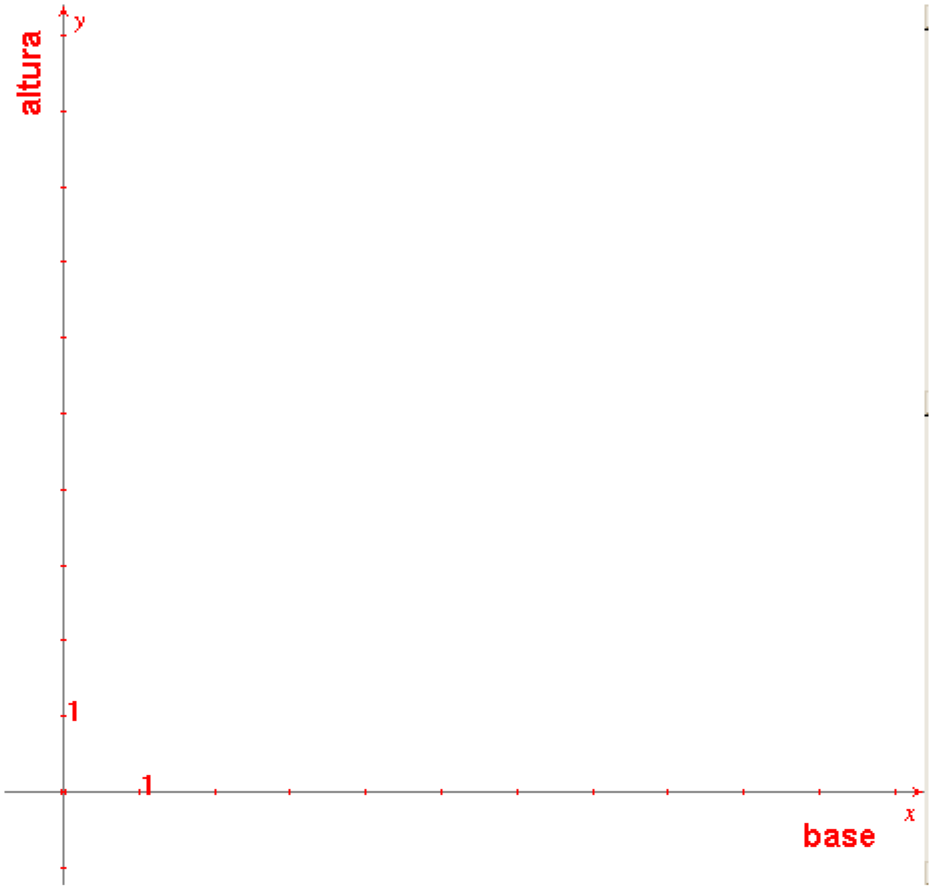


Figura 2. Plano cartesiano.

5. Marca los puntos de la tercera columna de la tabla 1 en el plano cartesiano de la figura 2. Estos puntos pertenecen a la ***gráfica de la función*** altura, ¿qué curva crees que delineen? Explica.

6. Para percibir con mayor precisión la gráfica de la función altura podemos calcular más pares ordenados de números o puntos de la forma *(base, altura)*, a condición solamente de que la longitud de la *base* esté entre *0 cm* y *9 cm*. Con esto en mente, completa la siguiente tabla y marca los puntos de la tercera columna en el plano cartesiano de la figura 2.

Tabla 2. Función altura.		
base (cm)	**altura (cm)**	**pares de la función altura: (base, altura)**
0.5		

1		
1.5		
2.5		
3		
3.5		
4.5		
5		
5.5		
6.5		
7.5		
8.5		

7. Para saber exactamente qué curva define la gráfica de la función altura podríamos continuar dividiendo el intervalo [0, 9] con más y más puntos, pero, ¿este proceso tiene fin? Explica.

8. Si tu respuesta a la pregunta anterior fue que el proceso de división anterior no tiene fin, o sea, es ***infinito***, entonces tenemos que usar otros medios para conocer de manera precisa la forma geométrica que tiene la gráfica de la función altura. En este caso se trata, al parecer, de un segmento de recta. ¿Crees, en efecto, que así sea? Explica.

9. En el caso de que la gráfica de la función altura sea un ***segmento de recta***, entonces deberá quedar completamente caracterizada por dos de sus puntos. Elige dos de los puntos marcados en el plano cartesiano de la figura 2 y traza una recta que los una. ¿Quedan todos los puntos alineados con respecto a esa recta? Explica.

10. Empleando la gráfica de la función puedes calcular las alturas correspondientes a longitudes de base prefijadas. Para ello sólo tienes que ubicar la abscisa de la base dada en el eje X del plano cartesiano de la figura 2 y elevar la perpendicular a ese eje que pase por la abscisa ubicada. La distancia que hay del punto ubicado a la gráfica de la función, a lo largo de la perpendicular trazada, será el valor de la altura del rectángulo que puedes construir con el alambre. Emplea este método para calcular las alturas correspondientes a las siguientes bases.

Tabla 3. Cálculo (geométrico) de alturas correspondientes a bases dadas.	
base (cm)	**altura (cm)**
1.7	
3.9	
5.6	
7.1	
8.75	

11. Por otra parte, podemos caracterizar a la función altura de manera algebraica. Para ello tenemos que generalizar las operaciones aritméticas que empleamos para calcular la altura cuando prefijamos la longitud de alguna base. Explica brevemente cómo obtienes la *altura* de un rectángulo cuando la *base* es dada (suponiendo, además, que ésta base no es menor que *0 cm* ni mayor que *9 cm*).

12. Escribe una fórmula que permita calcular la altura de un rectángulo construido con tu alambre a partir de la longitud de la base.

    altura =

13. Comprueba que tu fórmula es correcta calculando las alturas de los rectángulos que se obtienen con bases dadas en la tabla 3.

14. Finalmente, calcula la pendiente del segmento de recta que has dibujado y compáralo con el coeficiente de la variable "base" de la fórmula que has dado. Con esta comparación estás vinculando el aspecto geométrico de la gráfica de la función con su fórmula algebraica. Escribe tus conclusiones.

    Gráfica de la función altura:

    Dominio de la función altura:

    Co-dominio de la función altura:

    Fórmula de la función altura:

    Valor mínimo de la función altura:

    Valor máximo de la función altura.

    Otras características de la función altura:

Hoja de trabajo 2. Funciones cuadráticas: cálculo del área máxima de un rectángulo (cuadrado) construido con un alambre de 18 cm.

1. Dobla un alambre de 18 cm de longitud y construye rectángulos o cuadrados, mide el área de las figuras construidas con ayuda de la cuadrícula de la figura 1 y completa la siguiente tabla.

Tabla 4. Construcción de rectángulos y cuadrados con un alambre de 18 cm de longitud.

longitud de la base (cm)	altura (cm)	área del rectángulo construido (cm^2)	pares de la función área: (base, área)
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

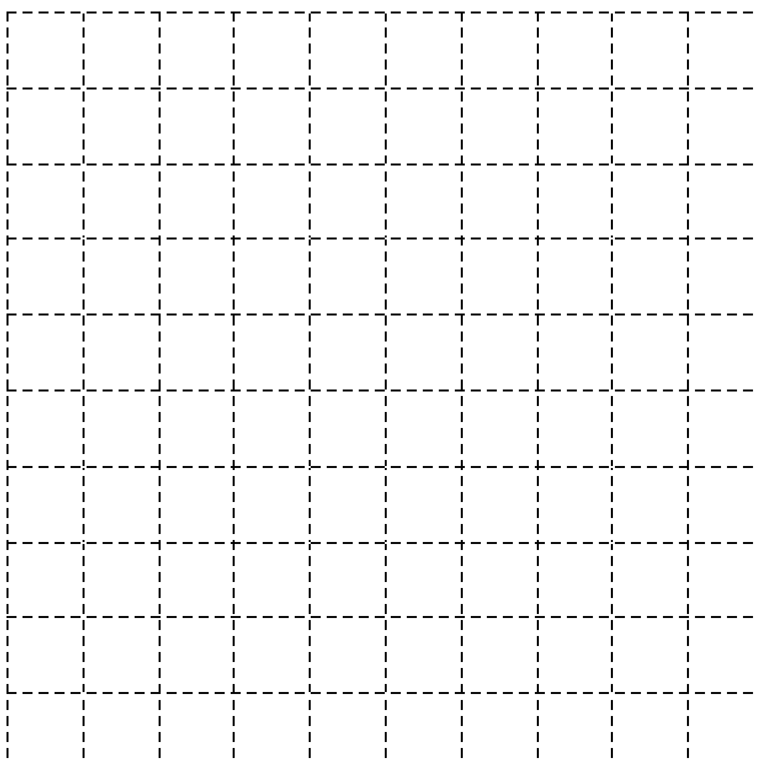


Figura 1. Cuadrícula para medir áreas de rectángulos. Cada cuadrado mide 1 cm^2.

2. ¿Puedes construir rectángulos en los que la longitud de su base sea menor que *0 cm*? Explica.

¿Puedes construir rectángulos en los que la longitud de su base sea mayor que *9 cm*? Explica.

De lo anterior se puede concluir que sólo es posible formar rectángulos con el alambre cuando su base es mayor o igual a 0 cm, pero menor o igual a 9 cm, pues dentro de este ***dominio de valores*** habrá una altura posible para construir un rectángulo con el alambre. Fuera de éste dominio no es posible construir rectángulo alguno.

3. Para medir el área de los rectángulos construidos con el alambre hemos procedido de la siguiente manera. Fijamos o predeterminamos la longitud de la base, construimos el rectángulo y medimos su área empleando la cuadrícula de la figura 1. De esta manera podemos decir que ***el área de cada rectángulo depende de la longitud de la base*** y que, además, ***la longitud de la base no puede ser menor que 0 cm ni mayor que 9 cm***. De esta manera tenemos ante nosotros la función área de un rectángulo (construido con un alambre de 18 cm), de manera que podemos escribirla de la manera siguiente:

   función área: (base, área),

   en donde $0 \leq base \leq 9$. Ahora, con las mediciones de la primera y tercera columna de la tabla 1, y tomando en cuenta las restricciones de medida de la base, completa la cuarta columna de la tabla 1, con ello tendrás sólo 10 pares de la función altura.

4. Marca los puntos de la tercera columna de la tabla 1 en el plano cartesiano de la figura 2. Estos puntos pertenecen a la ***gráfica de la función*** área, ¿qué curva crees que tracen? Explica.

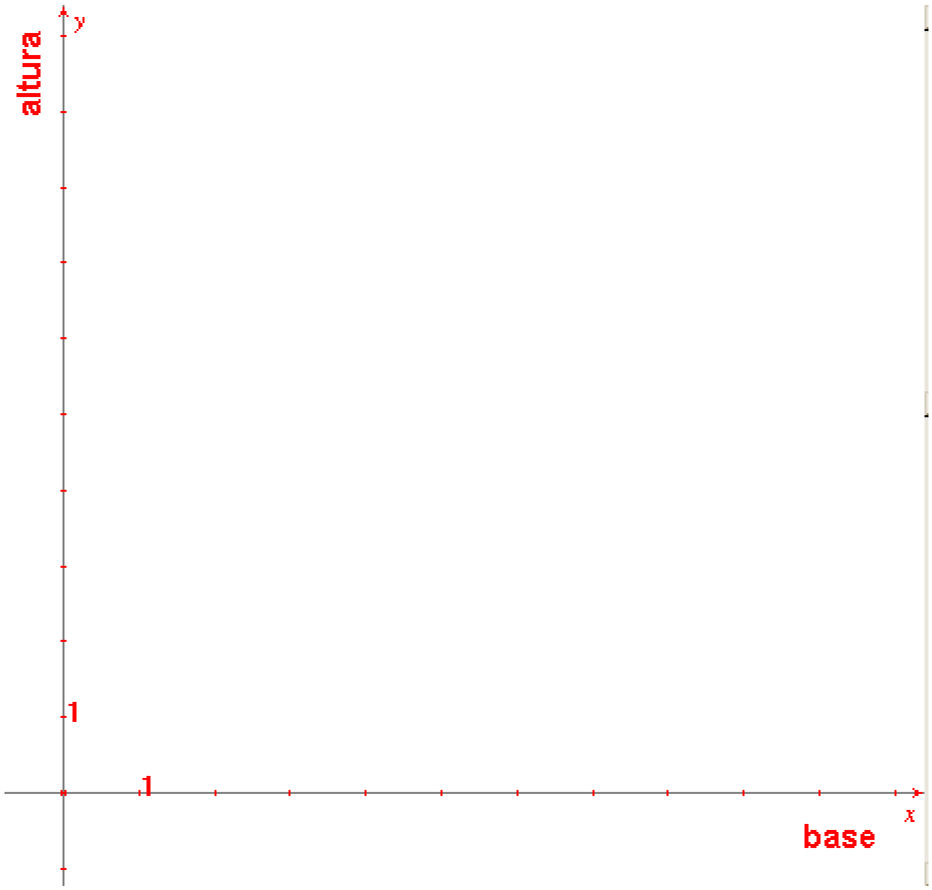


Figura 2. Plano cartesiano.

5. Para percibir con mayor precisión la gráfica de la función área podemos calcular más pares ordenados de números o puntos de la forma *(base, área)*, a condición solamente de que la longitud de la *base* esté entre *0 cm* y *9 cm*. Con esto en mente, completa la siguiente tabla y marca los puntos de la tercera columna en el plano cartesiano de la figura 2.

Tabla 5. Función área.		
base (cm)	**área (cm)**	**pares de la función área: (base, área)**
0.5		
1.5		
2.5		
3.5		
4.5		
5.5		
6.5		
7.5		
8.5		

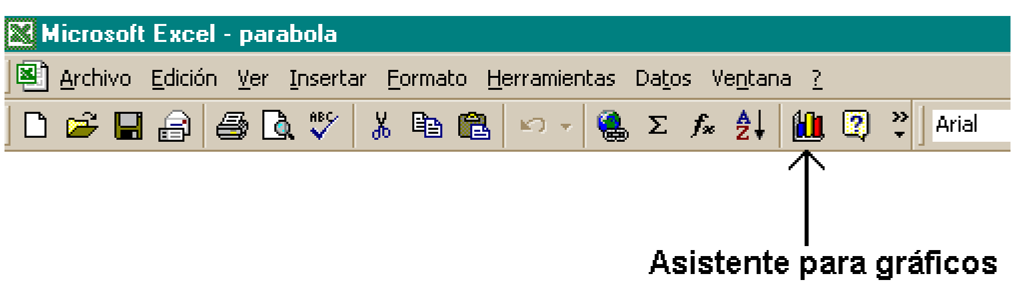
6. Para saber exactamente qué curva define la gráfica de la función altura podríamos continuar dividiendo el intervalo [0, 9] con más y más puntos, pero, ¿este proceso tiene fin? Explica.

7. Si tu respuesta a la pregunta anterior fue que el proceso de división anterior no tiene fin, o sea, es ***infinito***, entonces tenemos que usar otros medios para conocer de manera precisa la forma geométrica que tiene la gráfica de la función altura. En este caso ya no se trata, al parecer, de un segmento de recta, sino de otra curva. ¿qué curva (o parte de) crees que sea? Explica.

En el caso de que la gráfica de la función área sea una parte de una ***parábola vertical***, o de cualquier otra curva de segundo orden (circunferencia, elipse hipérbola o parábola), entonces la gráfica de la función deberá quedar completamente caracterizada por cinco puntos de la misma. Sin embargo este método geométrico es un poco más laborioso y se hará en las actividades extra clase. Aquí vamos a emplear un método mucho más eficiente que es el ***análisis de regresión***, método que sirve no sólo para funciones polinomiales de segundo grado sino, en general, para una amplia gama de funciones y que es empleado con frecuencia en estadística y que la mayoría de las hojas de cálculo como Excel lo llevan a cabo como parte de su menú de opciones.

8. La manera de proceder con un análisis de regresión, a partir de los datos (base, área) ya recabado en las tablas 1 y 2, con el programa Excel es como sigue.

    a. Abrimos una hoja de cálculo en Excel.
    b. En la primera columna (columna A), editamos las longitudes de las bases de las tablas 1 y 2.
    c. En la segunda columna de la hoja, editamos los valores correspondientes a las áreas de la bases del rectángulo que les correspondan.
    d. Una vez que hayamos hecho lo anterior, tendremos en la hoja de cálculo dos columnas con 19 datos cada una. Ahora las sombreamos y seleccionamos de la barra de tareas "Asistente para gráficos", como se muestra en la imagen siguiente:



    e. Al elegir el "Asistente para gráficos" se abre una ventana como la siguiente. En esta ventana se debe elegir el tipo de gráfico XY (Dispersión).

f. Después, simplemente vaya aceptando las demás instrucciones hasta que llegue a la ventana en donde se van a editar el título de la gráfica ("Función área"), el nombre de los valores del eje X ("longitud de la base") y el nombre de los valores del eje Y ("área del rectángulo"). Por último, Excel pregunta si quieres que la gráfica aparezca en una nueva hoja o en donde están tus datos. Esto tú lo eliges.

Al hacer lo anterior te quedará una gráfica parecida a la siguiente:

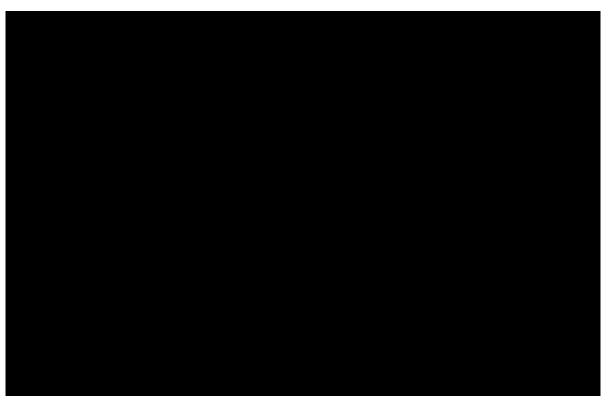
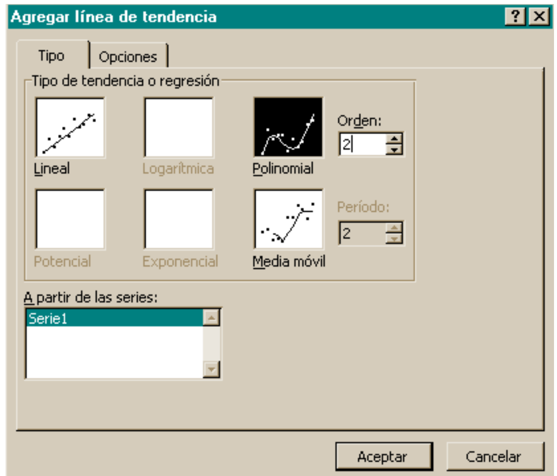
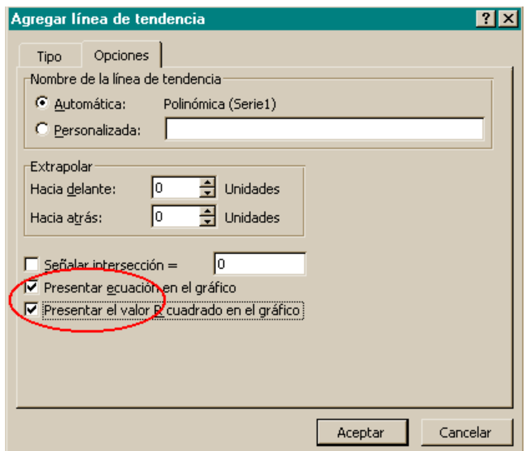


Figura 3. Puntos de la función área establecidos en las tablas 1 y 2.

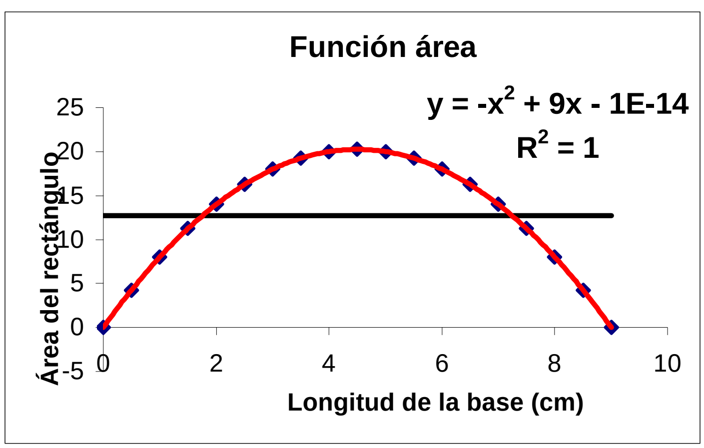
g. Ahora, para "ajustar" nuestros datos, abre el menú "Gráfico" (no el "Asistente para gráficos") y elige la opción "Agregar línea de tendencia". Al hacerlo se abrirá la ventana siguiente, en donde elegirás el Tipo Polinomial, de Orden 2. ¡Todavía no cierres esta ventana!



h. Ahora selecciona la carpeta Opciones de esta ventana y marca las opciones "Presentar ecuación en el gráfico", así como "Presentar el valor R", como se muestra a continuación:



i. Al hacer lo anterior obtendrás finalmente una gráfica de la función área como la siguiente:



Pero no sólo has obtenido la gráfica, sino también su expresión algebraica (al ordenarle a Excel que presente la ecuación del análisis de regresión), a saber, la fórmula $y = -x^2 + 9x - 1E-14$ que, en última instancia podemos tomar como la fórmula siguiente:

$$y = -x^2 + 9\,x$$

pues el valor *1E-14* es una forma abreviada de escribir el número siguiente:

$$1E-14 = \frac{1}{1\underbrace{00000000000000}_{14\ ceros}} = 0.\underbrace{0000000000000}_{13\ ceros}1 \approx 0$$

Por último, cabe comentarte que el valor R^2, que también calculó el programa, se llama ***coeficiente de correlación*** y es una medida de lo "lejano" o "cercano" que están los datos con relación a la curva ajustada, o sea, la co-relación entre los datos y la curva que les imponemos para "ajustarlos". Más aún, en la medida en que R^2 esté cercano a *1*, mejor será está aproximación.

9. Por otra parte, la fórmula calculada por medio del análisis de regresión la podemos obtener algebraicamente (exactamente) de la siguiente manera.

a. Con el alambre hemos construido los rectángulos predeterminando la longitud de la base (vea tabla 1), y ésta longitud la elegimos de manera arbitraria, aunque dentro del rango que va de *0 cm* a *9 cm*. Por esa razón diremos que la longitud de la base es la ***variable independiente*** de la *función área* y emplearemos la letra "***x***" para referirnos a ella.

b. Una vez elegida la longitud de la base "x" construimos el rectángulo y, con ayuda de la cuadrícula (o de otra manera), medimos el área del rectángulo que se obtiene al doblar el alambre, de manera que ésta área se puede considerar como un resultado de haber doblado el alambre con una longitud determinada (la base), por lo que llamaremos a el área así obtenida la ***variable dependiente***, pues ésta depende de la longitud de la base elegida al principio del proceso de doblez. Más aún, llamaremos a cada una de esas áreas el ***valor de la función área***, correlativa con su longitud de base respectiva y nos referiremos a ella con la letra "***y***".

c. Ahora bien, ¿cómo están relacionadas las cantidades "*x*" y "*y*"? La respuesta a esta pregunta la proporcionarán los cálculos que hemos realizado para completar la segunda y tercera columna de la tabla 1 o, de manera abreviada, los cálculos realizados para completar la segunda columna de la tabla 2. Recordando la manera en que hemos realizado los cálculos de la primera tabla tenemos lo siguiente.

   i. Dada una longitud para la base del rectángulo, calculemos su altura "*y*", en términos de la longitud del alambre (18) y de la longitud de la base "*x*", de la manera siguiente:

      altura = y = ____.

   ii. Después calculemos el área del rectángulo obtenido y, como tanto la base "x" como la altura "y" están dados por la base misma "x", encontramos que el área queda en dependencia únicamente de "x":

      área = base*altura = xy = ____________________________________.
      De esta manera, la ***función área*** tiene la siguiente forma:

y = ______________________________

10. Compara la fórmula de la función área que obtuviste en la pregunta anterior con la fórmula que se obtuvo por medio del análisis de regresión hecho por el programa Excel. Escribe tus conclusiones al respecto.

____

____

11. Ahora calcula las dimensiones de los rectángulos (cuadrados) que puedan construirse con alambre de 18 cm de largo y que tengan el área mayor posible.

12. Por último, escribe tus conclusiones generales acerca de la función área analizadas en esta secuencia didáctica.

Gráfica de la función área:

Dominio de la función área:

Co-dominio de la función área:

Fórmula de la función área:

Valor mínimo de la función área:

Valor máximo de la función área.

Otras características de la función área:

Proyecto B. Cercado del máximo terreno rectangular con un lado en la ribera de un río.

Este proyecto consiste en resolver el siguiente problema, para lo que se sugiere realices la hoja de trabajo dada a continuación.

Problema:

> ***Se desea cercar un campo rectangular situado en la ribera de un río. El material para la cerca cuesta $80.00 por metro, para los dos extremos laterales, mientras que el costo del material para el lado paralelo al río (frente del terreno) es de $120.00 por metro. Si se tienen $36,000.00, ¿de qué dimensiones tienen que ser los lados y el frente para obtener un área máxima cercada?***

1a. Parte. Acercamiento al problema.

A. Haz un croquis de la situación planteada en este problema.

i. ¿Los lados laterales deben ser iguales? ____ .

ii. ¿El frente tiene necesariamente la misma longitud que alguno de los lados?
____ .

B. Modelación del problema con GeoGebra.

Traza con GeoGebra la situación planteada en el problema. Para ello considera lo siguiente.

1. ¿Cómo modelarías la ribera del rio?

   a. Con un segmento de recta. b. Con una semirrecta. c. Con una recta.

2. ¿Cómo acomodarías la ribera del rio en el plano de GeoGebra?

   a. En cualquier posición. b. Horizontalmente. c. Verticalmente.

3. ¿Cuántos lados de la cerca rectangular tienes que construir?

Número de lados por construir = ________________________.

4. Haz un rectángulo en donde uno de sus lados sea fijo (la ribera del rio), mientras que los tres lados restantes sean movibles.
5. Con este modelo, y moviendo los lados de la cerca, completa la siguiente tabla.

longitud del lateral (m)	longitud del frente (m)	costo de la cerca ($)
100	50	
100		36 000
150	200	
	250	36 000

C. Modelación algebraica del problema.

¿Qué variables de este problema pueden ser tomados como variables independientes?

____.

a) ¿Cómo están relacionados los lados, el frente y la cantidad de dinero que vas a invertir en la cerca?

____.

b) De esta manera el frente (o el lado) queda en dependencia del lado (frente). Despeja el frente, para que el problema quede en dependencia de la variable independiente "lado".

frente =

c) ¿Cuál crees que es la función o modelo matemático de la situación planteada en el problema? Escríbelo en la siguiente línea.

área terreno = ____ .

d) Compara tu modelo con el de los demás equipos y escribe el modelo que se concluye después de esta discusión:

Cálculo del área máxima posible bajo las condiciones del problema.

e) ¿Qué valor tiene el coeficiente de x^2? $x =$_____ .

f) Este valor proporciona un máximo o un mínimo. ____________________________ .

g) Como te podrás dar cuenta, la función anterior es una parábola. Escríbela en su forma estándar (o normal):

(Sugerencias: puedes emplear las fórmulas de la generalización del problema anterior, la cual se anexa al final del documento).

h) ¿Qué representan las coordenadas (h, k) del vértice de la parábola? (Nota: toma en cuenta que no se te pregunta el valor de h y k, sino su significado).
h: _______________________ ;

k: ______________________ .

i) ¿Cuánto tiene que medir el lado y el frente para esta área máxima?

lado = ___________ , frente = __________ .

Observaciones y conclusiones.

Escribe sucintamente tus observaciones y tu conclusión acerca del tema expuesto.

____
____
____
_____________________________________.

Generalización.
Lo anterior es una conclusión cuya formulación general es la siguiente. Si un fenómeno o situación está modelado por medio de una función cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Entonces dicha situación alcanza su valor extremo $y = k,$ para $x = h$, en donde (h, k) son las **coordenadas del vértice de la parábola** que describe esta función. Para calcularlas se expresa a esta función en su forma estándar (o normal) que es la siguiente:

$$y = a(x - h)^2 + k,$$

En donde:

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a}$$

El valor $x = h$ da lugar a un **mínimo** de la función, cuando $a > 0;$ y un valor **máximo** cuando $a < 0.$

En nuestro caso la función que modela el área del rectángulo construido por la cerca es:

Por lo que:

y, puesto que $a = -1 < 0,$ se tiene un valor máximo.

Proyecto C. Cálculo del volumen máximo al doblar una lámina.

Este proyecto se basa en la resolución del siguiente problema.

> ***De una pieza de metal de 40 cm de ancho por 3m de largo, se va a construir un canal para la lluvia doblando una lámina de la forma siguiente:***

> ***¿Que altura debe tener el doblez para que el volumen sea máximo?***

La finalidad de este proyecto es hacer visible al estudiante diversas situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas, para lo cual el alumno usará la siguiente hoja de trabajo.

1a. Parte. Acercamiento al problema.

A. Haz un croquis de la situación planteada en este problema.

i. ¿Los lados laterales deben ser iguales? ____ .

ii. ¿La base tiene necesariamente la misma longitud que alguno de los lados?
____ .

2a Parte. Exploración del problema con un modelo virtual.

i. Empleando el modelo virtual (VolumenCanal), completa la siguiente tabla.

ancho de la base (m)	**área de la base (m^2)**	**altura (m)**	**volumen del canal (m^3)**
0.40			
		0.08	
	0.95		
			0.04

3a Parte. Modelación algebraica del problema.

i. Escribe una fórmula para calcular el área de la base del canal de acuerdo con la longitud de su ancho.

área de la base = ______________________.

ii. ¿Qué ocurre con la altura del canal, cuando cambias el ancho de su base? Explica brevemente.

____
____
____

iii. Establece una fórmula para obtener la altura del canal a partir del ancho que elijamos para su base.

altura del canal = ______________________.

iv. Escribe una fórmula para calcular el volumen del canal a partir del ancho que elijamos para la base.

volumen del canal = ______________________. **(1)**

v. A partir de esta fórmula, que es una función cuadrática, calcula el valor del ancho de la base para obtener el volumen máximo del canal.

ancho para el volumen máximo = ______________________ m.

volumen máximo = ______________________ m^3.

4a Parte. Modelación geométrica del problema.

i. Traza la gráfica de la función del volumen (1) en GeoGebra.

ii. ¿Cuáles son los valores que el ancho de la base del canal puede tomar? Es decir, ¿cuál es el dominio de la función volumen?

ancho mínimo = ______________ m. ancho máximo = ______________ m.

iii. ¿Cuáles son los valores, mínimo y máximo, que puede alcanzar el canal? Es decir, ¿cuál es el rango de la función volumen?

volumen mínimo = ______________ m^3. volumen máximo = ______________ m^3.

iv. En GeoGebra, *encuadra* la gráfica de esta función de acuerdo a su dominio y rango.

v. ¿Qué tipo de curva corresponde a la gráfica de esta función?

____
____
____

vi. Describe la(s) *simetría(s)* de esta gráfica anterior. ¿Con respecto a qué objeto geométrico se obtiene(n) esta(s) simetría(s)?

____
____
____

vii. ¿En qué punto de esta gráfica encuentras su valor máximo?

____
____
____

viii. Escribe las coordenadas del punto máximo:

M:(_____, _____)

iv. ¿Qué relación hay entre las coordenadas del punto M y el ancho de la base y el volumen del canal?

____
____
____

Proyecto D. Cerca de un terreno rectangular de área máxima.

Este proyecto se basa en la resolución del siguiente problema.

> ***Pedro tiene 100 m de malla de alambre y va a cercar un terreno rectangular para usarlo como espacio de juegos ¿Cuáles son las dimensiones del terreno a fin de que el área encerrada sea la mayor posible.***

1a. Parte. Acercamiento al problema.

Para resolver este problema, como cualquier otro, conviene imaginarnos la situación planteada bajo las condiciones del mismo. En este caso, por ejemplo, comencemos por hacer un esbozo o esquema del problema.

a) Completa la siguiente tabla.

Tabla 1. Experimento con el área de un rectángulo.		
largo (m)	**ancho (m)**	**Área (m^2)**
5		
	40	
0		
	60	
25		
	2	
50		

b) Describe brevemente la situación cuando la longitud es igual a 0.

____ .

c) Describe brevemente la situación cuando la longitud es igual a la mitad de la longitud del alambre.

____ .

d) ¿Qué ocurre si queremos que el ancho del terreno sea mayor que la mitad de la longitud de la malla de alambre? Explica brevemente.

____
____.

e) ¿Qué ocurre con el ancho y el área del rectángulo que formas cuando primero fijas la longitud? ¿Puede ser del tamaño que quieras? Explica brevemente.

____
____.

Como puedes observar, el ancho queda automáticamente determinado cuando se fija la longitud. Esto se debe a que la longitud, el ancho y la longitud de la malla de alambre satisfacen la siguiente relación:

Longitud de la malla de alambre = perímetro del rectángulo = 2*largo + 2*ancho.

De esta manera, podemos asumir que la longitud es la **variable independiente** del problema, mientras que el ancho y el área quedan completamente (automáticamente) determinadas a partir de aquélla; o sea, son **variables dependientes.**

a). Completa la siguiente tabla:

Tabla 2. Área de un rectángulo con la longitud de la base como variable independiente.		
largo (m)	**ancho:**	**área =**
0		
5		
7		
10		
12		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		

b). Marca los puntos **(longitud, área)** que obtuviste en la actividad anterior en el siguiente plano cartesiano.

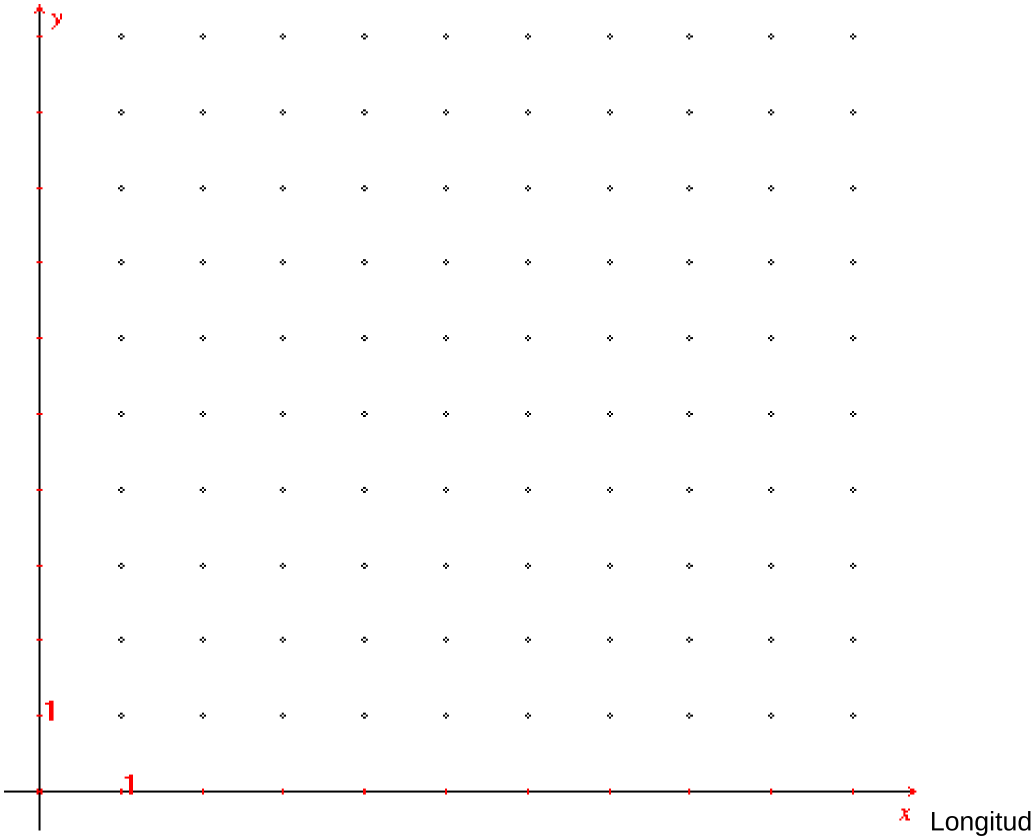


Figura 1. Puntos de la gráfica de la función longitud vs área de un rectángulo con perímetro fijo.

c) ¿Encuentras alguna *simetría* con los puntos marcados en la gráfica anterior? En tal caso, ¿con respecto a qué o quién está dada? Explica.

____

____ .

d) ¿Hay algún punto en donde la función tiene un valor máximo? ____________________ .

e). Escribe las coordenadas del punto extremo; o sea, escribe la longitud y el área para la cual ésta es máxima: **(,   ).**

Ahora obtengamos el modelo completo de la situación bajo consideración. Para ello, basta considerar cómo esta dependiendo el área a partir de la base.

Recapitulando tenemos lo siguiente:

- la altura calculada a partir de la base:
- el área de un rectángulo:
- Por lo que se tiene lo siguiente:

área =

Esta última expresión, se suele expresar matemáticamente de la siguiente manera:

	(1)

Como sabes, ésta última ecuación representa una parábola y. como hemos visto, ésta es el modelo matemático del problema del rectángulo construido con una malla de alambre. Ahora, para concluir nuestro estudio del área máxima de esos rectángulos hagamos lo siguiente.

a) Determina la forma estándar (o normal) de la parábola dada por la ecuación (1).

b) ¿Qué representan las coordenadas (h , k) del vértice de la parábola? (Nota: se te pregunta el significado de estos números, no su valor.)

h = ____ ;

k = ____ .

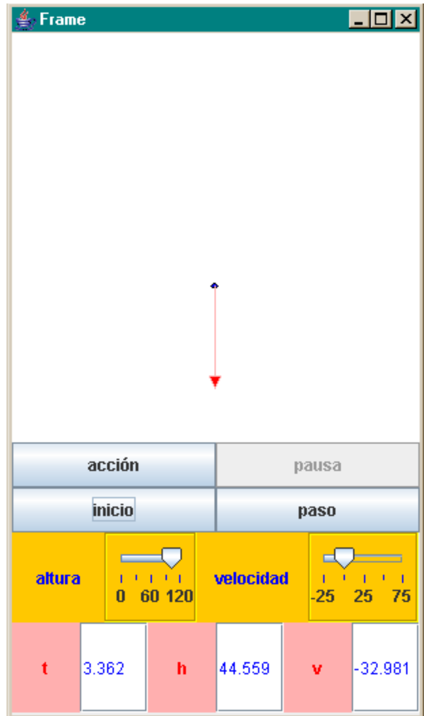
Proyecto E. La caída libre de un objeto.

Esta actividad consiste en reforzar el concepto de función y comparar las funciones lineal y cuadrática a través de un applet que simula la caída libre de un cuerpo, utilizando GeoGebra.

1a. Parte. Exploración del problema.

Descripción del applet[49] que simula la caída libre de un objeto:

- Botones: *acción* o ejecución de la simulación, *pausa* del movimiento, *paso a paso* de la animación y un botón de *inicio* que restablece las condiciones iniciales y por defecto establecidas en la applet.
- Reglas para que el estudiante pudiera establecer las condiciones iniciales del movimiento de la partícula: altura y velocidad inicial.
- Cuadros de texto de datos de salida (output) en donde se van mostrando las características físicas del movimiento: tiempo, altura y velocidad.



Con esta simulación, y haciendo uso de las operaciones de corte y pegado con el Clipboard (Bloc de notas), además de la hoja de cálculo Excel, los estudiantes, en grupos de trabajo de 3 o 4 integrantes, establecerán los registros aritmético, geométrico y algebraico del movimiento del objeto en caída libre como se muestra a continuación.

Registros aritméticos de un objeto en caída libre			
t (seg.)	**h (metros)**	**t (seg.)**	**v (m/s)**

[49] Interacción de los alumnos con una simulación de un cuerpo en caída libre.

- Investigación de fenómenos lineales y cuadráticos.
- Presentación de funciones lineales y cuadráticas en los registros aritmético, geométrico y algebraico.

Tabla: tiempo-altura		**Tabla: tiempo-velocidad**	

Registros geométricos de un objeto en caída libre: relación tiempo-altura	
Muestra de datos (discreta y finita)	**Ajuste de los datos (continuo e infinito)**

Registro algebraico de la relación tiempo-altura.

Registros geométricos de un objeto en caída libre: relación tiempo-velocidad.	
Muestra de datos (discreta y finita).	**Ajuste de los datos (continuo e infinito).**

Registro algebraico de la relación tiempo-altura.

Una nota acerca de los comandos empleados con Excel.

En Excel fueron registrados los datos muestreados "virtualmente", graficados con el comando Dispersión xy y ajustados por el método de regresión. Con respecto a este último sólo se describió la finalidad de este método de ajuste y se les pidió que observaran el coeficiente de correlación, aclarándoles que mientras este coeficiente, R^2, sea lo más cercano a 1, el ajuste es óptimo. En nuestro caso, todos los ajustes tuvieron $R^2 = 1$, pues se les comentó que era una simulación y no una toma empírica de datos.

CAPÍTULO 4. DATOS RELEVANTES OBSERVADOS EN EL DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

A continuación exponemos información que nos ha parecido relevante al momento de realizar la experiencia didáctica detallada en el capítulo anterior. Al respecto, cabe destacar que esta experiencia didáctica fue realizada con un grupo de 23 alumnos del quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Sur, durante cuatro semanas, en dos sesiones por cada una de ellas con el siguiente horario: lunes de 9:00 a 11:00 y viernes de 9:00 a 11:00. Cabe mencionar que esta unidad didáctica fue experimentada con dos grupos académicos anteriores a éste (de tercero y segundo semestre respectivamente), cuestión que me permitió ir ajustando y mejorando sus contenidos.

4.1 Pre-concepciones de los estudiantes.

Como se ha insistido, las pre-concepciones de los aprendices son el punto de partida de la construcción de cualquier conocimiento, así como su interés por aprender tal o cual cosa. Bajo estos preceptos, es que consideramos importante dar noticia de ambas cuestiones en esta sección. Así, por ejemplo, con la finalidad de empatar con los intereses o preferencias de los estudiantes, abrimos dos rutas de aprendizaje obteniendo los siguientes datos.

Tabla 7. Preferencias de los alumnos para la elección de algún nodo sobe la Función cuadrática[50]	
Óptico-Visual (No. Alumnos)	**Movimiento (No. Alumnos)**
14	**9**

Con base en estas preferencias se formaron tres equipos de trabajo que siguieran la primera ruta de aprendizaje y dos equipos por la segunda. Cabe aclarar que la integración y el trabajo en equipo se fue depurando paulatinamente, sobre todo al estar haciendo hincapié en la necesidad del trabajo colaborativo o en equipo, con lo que adquirieron un sentido de responsabilidad más amplio.

[50] Ver Página 48.

Por otra parte, en cada momento estuvimos hurgando en las pre-concepciones de los estudiantes de diferentes maneras, comenzando con un examen diseñado para tal fin. Con este *examen,* obtuvimos una idea general acerca de los antecedentes matemáticos que están directamente vinculados con los contenidos conceptuales de la unidad temática bajo estudio. En él, los estudiantes tenían que señalar si un evento es lineal o no, resolver un sistema de ecuaciones 2x2, además de resolver un problema lineal. La segunda parte del cuestionario requería que los participantes resolvieran una ecuación de segundo grado, dos problemas de optimización y señalar cuando un evento es cuadrático o no. El desempeño de los estudiantes se muestra en la Tabla 8 y en la gráfica 1.

Tabla 8. Resultados obtenidos en la primera etapa respecto al Diagnóstico de las pre-concepciones de la función cuadrática.

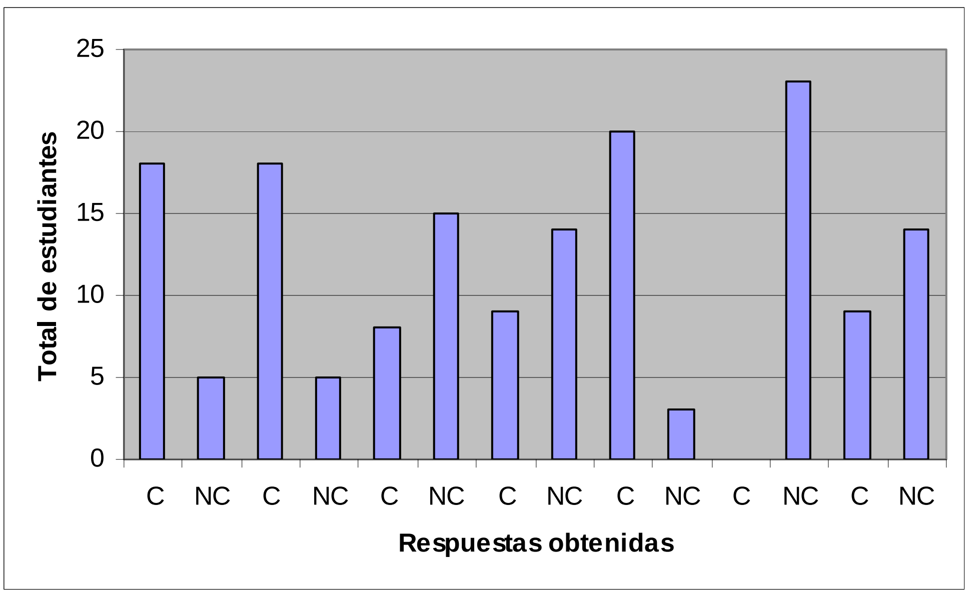
	Aspectos Analizados sobre las funciones lineal y cuadrática						
	Aspectos lineales			**Aspectos cuadráticos**			
Alumno	Lo lineal en su entorno pregunta 1 (P1)	Aspectos algebraicos de la función lineal		Lo cuadrático en su entorno pregunta 4 (P4)	ecuaciones de segundo grado pregunta 5 (P5)	Problemas de optimización	
		P2	P3			P6	P7
1	NC	NC	C	C	C	NC	NC
2	C	C	NC	C	NC	NC	NC
3	C	C	NC	NC	C	NC	C
4	NC	NC	C	NC	C	NC	NC
5	C	C	NC	NC	C	NC	C
6	C	NC	C	NC	C	NC	NC
7	C	C	NC	NC	C	NC	NC
8	C	C	NC	C	C	NC	C
9	C	C	NC	NC	NC	NC	NC
10	C	C	NC	NC	C	NC	C
11	C	C	NC	NC	C	NC	NC
12	NC	C	NC	NC	C	NC	NC
13	C	C	NC	NC	C	NC	C
14	C	C	NC	NC	C	NC	NC
15	C	C	NC	C	C	NC	NC
16	C	C	C	C	C	NC	C
17	NC	C	NC	C	C	NC	C

18	NC	NC	C	NC	C	NC	NC
19	C	C	C	C	C	NC	NC
20	C	NC	C	NC	C	NC	NC
21	C	C	C	C	C	NC	NC
22	C	C	NC	C	C	NC	C
23	C	C	NC	NC	NC	NC	C

Notación: C = señala que el estudiante determinó correctamente la pregunta. NC = indica que no realizó ningún procedimiento para resolver la pregunta, no la contesto, o lo que realizo no corresponde a lo pedido. MM = indica que el estudiante iba por el camino correcto pero tuvo alguna falla en el procedimiento (algebraico, aritmético, gráfico).

La gráfica correspondiente a estos resultados es la siguiente.

Gráfica 1. Resultados obtenidos en la primera etapa de la propuesta



A partir de este diagnóstico, así como de las evaluaciones continuas (con hojas de trabajo, pláticas con los estudiantes, etc.), las deficiencias conceptuales observadas se fueron subsanando de diferentes maneras, siendo las más importantes las siguientes.

- Retroalimentación a través de asesorías grupales o personalizadas.
- A través de hojas de trabajo "remediales".
- A través de diversos recursos institucionales tales como Asesorías, Guías de estudio, Antologías, etc.

4.2 Desarrollo de los proyectos.

Una vez que los estudiantes, en equipos, desarrollaron las partes básicas de cada ruta de aprendizaje, se les invitó a que eligieran la forma de trabajo (individual o en equipo) para desarrollar el proyecto de su elección. Determinaron que era más conveniente el trabajo en equipo y se formaron cuatro nuevos equipos de trabajo, conformados por estudiantes con interés en un mismo proyecto.

Cada uno de estos equipos desarrolló los nodos restantes, realizando las hojas de trabajo respectivas, y comenzaron a elaborarlo. Al final, estos proyectos fueron expuestos ante el grupo, obteniendo los logros mostrados en la siguiente tabla, tanto en exposición como comprensión de los contenidos actitudinales, conceptuales, procedimentales, así como de la problemática particular de cada uno de los proyectos referidos.

Tabla 9. Logros en la exposición y comprensión obtenidos en la elaboración y presentación de proyectos.

PROYECTOS DE TRABAJO			
Equipo 2 (6 integrantes) proyecto A	**Equipo 1 (6 integrantes) Proyecto C**	**Equipo 4 (6 integrantes) Proyecto D y E**	**Equipo 3 (5 integrantes) Proyecto B**
Este equipo mostró comprensión en todos los aspectos tanto en las investigaciones desarrolladas por ellos, así como en la organización y exposición, la cual se llevo a cabo por medio de acetatos. Este equipo utilizó la hoja de cálculo (Excel), donde la mayoría del equipo sabia trabajar, solamente se les orientó de como obtener una aproximación de la interpretación algebraica, la cual se obtuvo a partir de un comando denominado línea de tendencia.	Durante su exposición los integrantes del equipo mostraron fluidez sobre el tema, seguridad y sobre todo motivación de lo que estaban desarrollando. En lo que respecta al manejo algebraico con fracciones hubo problemas que se pudieron enmendar a través de mi intervención. La participación de los otros equipos fue dinámica.	Este equipo realizó una buena investigación que se vio reflejada en el trabajo con sus compañeros, ya que realmente los enseñaron a trabajar en equipo, repartiendo de manera adecuada el trabajo de este proyecto. Situación que puede ser utilizada como ejemplo para los demás equipos del grupo, ya que en ellos se hizo notar el orden, la disciplina, el interés, la motivación y la determinación de cumplir un objetivo: desempeñar un buen papel durante la exposición.	Al igual que todos los equipos anteriores, mostraron una buena investigación, organización y exposición de las actividades escritas en este proyecto.

Por último, se observó que el 75% de los estudiantes lograron aprendizajes significativos en los tres tipos de contenidos.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Conclusiones.

Con esta experiencia de aprendizaje, se ha pretendido poner a disposición de cada alumno los recursos, habilidades, estrategias y formas matemáticas de pensar, para que resuelvan problemas prácticos a través del trabajo colaborativo e individual en donde las matemáticas hagan acto de presencia. Más aún, se ha pretendido también que el alumno aprenda a utilizar las matemáticas en situaciones en donde no sólo ponga en práctica los procedimientos y las técnicas adquiridas sino, sobre todo, su curiosidad e imaginación creativa pues, retomando parte del pensamiento de uno de los máximos exponentes del constructivismo, a saber, al filósofo alemán I. Kant, podemos considerar que:

> El razonamiento es una facultad dialéctica que opera sobre conceptos, a la que no le interesa ni utilidad ni fin alguno, simplemente es generadora de ilusión[51].

En este sentido, y dado que el 75% de los estudiantes que participaron lograron aprendizajes significativos en los tres tipos de contenidos, a saber, actitudinales, conceptuales y procedimentales, podemos concluir que esta propuesta educativa logra mejores resultados que otras en donde, o no hay una metodología de fondo o, si la hay, muestra resultados más pobres que ésta, pues, de acuerdo con los datos proporcionados por los Servicios Estudiantiles del Colegio, sólo se logra un *aprovechamiento* que va del 55% al 60%.

Por otra parte, pudimos constatar que la utilización de aplicaciones interactivas ("matemáticas") dentro del aula escolar, facilitó un aprendizaje activo y creativo, cuestión que a su vez motivó y enriqueció la capacidad del pensamiento matemático de los estudiantes. Más aún, este ejercicio o práctica cambió radicalmente la perspectiva de los alumnos con respecto a su forma de ver a las matemáticas a tal punto que, al entrar de lleno en su aplicación y contexto, a través de estos medios, los estudiantes le otorgaron una valoración positiva al conocimiento matemático.

---

[51] Sánchez Meca, D. (1989). *En torno al super hombre*. Nietzsche y la crisis de la modernidad. Anthropos Universidad de Murcia, España.

Con esta experiencia, también podemos concluir que una propuesta didáctica orientada por la interpretación constructivista del aprendizaje, o por cualquier otra teoría, requiere del interés del estudiante por aprender, así como del profesor por enseñar. Esto implica, creemos, un compromiso entre ambas partes en donde la comunicación debe abrirse con amabilidad y respeto mutuo, pues sin esta componente simplemente es imposible dar lugar a un aprendizaje, o una enseñanza. El uso de los medios tecnológicos, por ejemplo, no obvia o quita al profesor, pues no se trata sólo de informar, sino de comunicar, para lo que se requiere de cierta disposición y participación real de todos los involucrados. En este sentido, cabe destacar que pudimos comprobar que el uso de hojas de trabajo, la organización en equipos o el trabajo individual, deben estar en la perspectiva de una comunicación constante, alumno-alumno, alumno-profesor, pues de otra manera no permitirían el logro de una propuesta tan ambiciosa como la aquí presentada. En efecto, fue así, creemos, que se logró que los alumnos aprendieran a trabajar de forma colectiva y reflexionaran acerca de las ventajas del trabajo por equipo, pues se puso en juego las repercusiones que ello tendrá en su futura práctica y desenvolvimiento profesional al permitirles incorporarse en la formación de grupos interdisciplinarios de trabajo. Asimismo, a través de propiciar confrontaciones de ideas y resultados, los estudiantes paulatinamente fueron perdiendo el miedo de exponer sus propias ideas e ir argumentando su capacidad de análisis, a la vez que se realizaba una adquisición de lo expuesto.

Por otra parte, podemos agregar que los alumnos pudieron entender las potencialidades del manejo de los programas GeoGebra y de la hoja de Cálculo Excel, observando que éstos no sólo pueden utilizarse como herramienta para la resolución de problemas matemáticos, sino también para ser usados en contextos reales que involucren el empleo de las matemáticas. Al mismo tiempo los estudiantes tuvieron la oportunidad de explorar ambientes visuales interactivos con los cuales podían deducir el comportamiento gráfico de los parámetros de una parábola, así como también la aplicación de imágenes, fotos y videos que reflejaban la trayectoria de una parábola.

Por último, considero que esta experiencia de aprendizaje-enseñanza se realizó con éxito, aún cuando se presentaron situaciones que nos hicieron reflexionar y replantear los esquemas de trabajo, cuestión que tratamos en la siguiente sección.

Perspectivas.

Los siguientes puntos resumen, en gran medida, las perspectivas que alcanzamos a vislumbrar a partir de esta experiencia educativa.

- Es impostergable la inserción de los nuevos campos de las matemáticas que se han venido dando a partir de la extensión de las aplicaciones matemáticas en todas las esferas de actividad humana. Un ejemplo de esto es la urgencia de integrar, como aspectos geométricos, aquellos elementos matemáticos dados en la base del diseño gráfico pues, en la actualidad, cobra igual o tal vez mayor importancia el uso de la forma geométrica parabólica para fines de diseño que su propia construcción, cuestión que lejos de apartarse de los contenidos matemáticos los exige pero en un sentido diferente al dado tradicionalmente.

- En este mismo sentido, se deben analizar las actividades culturales "pre-matemáticas", como *contar*, *medir*, *configurar*, etc., pues ya es evidente que las nuevas generaciones no "cuentan", "miden" o "configuran", ni como nosotros, los viejos profesores, ni como los griegos o mayas. En este sentido cabe citar lo que es contar para el matemático alemán Richard Dedekind:

  > Veo a toda la aritmética como una consecuencia necesaria, o al menos natural, del acto aritmético más simple, el de contar, y al contar mismo como no otra cosa que la creación sucesiva de la progresión infinita de los enteros positivos en la que cada individuo se define por el que le precede inmediatamente; el acto más simple es, pues, el de pasar de un individuo ya formado a uno nuevo y consecutivo que se forma con aquél.
  >
  > Continuity and Irrational Numbers. Zürich, 1858

  Esta idea de lo que es contar no se parece en nada a la forma en que nos han enseñado a las viejas generaciones y, parece, es la que más se acerca a la que "ya traen", por así decirlo, las nuevas generaciones. Bajo esta idea, contar ya no sólo se debe hacer con la sucesión 1, 2, 3, ..., sino con cualquier sucesión de objetos, cuestión que puede hacerse patente con el uso de las computadoras.

- En el mismo sentido, cabe preguntarnos si enseñar álgebra en la forma tradicional tiene alguna ventaja o al menos se acerca a las motivaciones propias de los estudiantes actuales. En este sentido, habrá que explorar el uso de interfaces aritmético-algebraicas (hojas de cálculo), algebraicas-geométricas (GeoGebra), etc., y ponerlas en juego para lograr aprendizajes significativos no sólo algebraicos, sino matemáticos en este nuevo contexto.

Bibliografía Básica.

Aho, A., et al. *The Design and Análisis of Computer Algorithms.* Addison-Wesley Publishing Company. USA. 1974.
Apostol, T. M. Calculus. Vol. I. Reverté Ediciones S. A. de C. V. Barcelona. 2002.

Ausubel, D. et al. Psicología educativa. Ed. Trillas. México. 1983.

Banach, S. Cálculo diferencial e integral. UTEHA. México. 3ª reimpresión 1973.

Bosco, H., M.D. *Selección de lecturas Didáctica general I.* Facultad de filosofía y letras, Mayo de 2003.

Carretero, M. y Palacios, J. *Los estilos cognitivos. Introducción al problema de las diferencias cognitivas individuales*, p. 20-28. Infancia y Aprendizaje, No. 17, España 1982.

Chadwick, C. B. La psicología de aprendizaje del enfoque constructivista. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Año/Vol. XXXI, número 004. Centro de Estudios Educativos. México. 2001.

Coll, C. *Estructura grupal, interacción entre alumnos y aprendizaje escolar,* p. 119-138. Infancia y Aprendizaje No. 27-28, España 1984.

Conte, S. D. y de Boor, C. *Elementary Numerical Analysis.* McGraw-Hill. Singapore. 6a impression. 1981.

CCH UNAM. *Guía para el profesor de matemáticas IV (Rubro 2)*. México. 2000.

Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. México. 2002.

Dedekind, R. *Essays on the Theory of Numbers.* Dover Publications, Inc. New York. 1963.

Gil, P. *Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza-aprendizaje de las ciencias.* 20(5). 1999.

Heisenberg, W. *La imagen de la naturaleza en la física actual*. Planeta-Agostini. Barcelona. 1993.

Kleene, S. C. *Introducción a la metamatemática*. Editorial Tecnos. Madrid. 1974

Lawvere, F. W. y Schanuel, S. H. *Matemáticas conceptuales.* Una primera introducción a categorías. Siglo XXI. México. 2002.

Mac Lane, S. *Mathematics, Form, and Function.* Springer-Verlag. New York. 1986.

Moreira, M. A.

[1983] Uma Abordagem Cognitivista ao Ensino da Física. Editora de la Universidad. Porto Alegre, Brasil. 1983.

[1988] Mapas conceptuales y aprendizaje significativo en ciencias. ENSINO. Revista Galáico Portuguesa de Sócio Pedagogia y Sócio-Lingüística, Pontevedra/Galícia/España y Braga/Portugal, Nº 23 a 28: 87-95, 1988.

Newman, D. *El impacto del ordenador en la organización: perspectivas para la investigación,* p.23-35. Comunicación, Lenguaje y Educación, No, 13, España. 1992.

Novack, J. *Constructivismo humano: un consenso emergente.* Enseñanza de las ciencias, 1988, 6(3).

Novak,J. y Gowin,D. *Aprender a aprender.* Editorial Martínez Roca, Barcelona.1988.

Pozo, J. I.

Adquisición del conocimiento. Ediciones Morata. Madrid. 2003

Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio conceptual. Revista Enseñanza de las Ciencias, 1999, 17 (3), 513-520.

Rees, P. K y Sparks, F. W. *Algebra and Trigonometry*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1962.

Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis (Third Edition).* Mc-Graw Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo. 1976.

Scharlau, W. y Opolka, H. *From Fermat to Minkowski. Lectures on the Theory of Numbers and its Development.* Springer-Verlag. UTM. New York. 1984.

Simmons, G. F. *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas.* España. 1993.

Spivak, M. Calculus. Cálculo Infinitesimal. Editorial Reverté Colombiana S. A. Colombia. 1978.

Steen, L. A. et al. On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy. National Academic Press. Washingnton, D. C. 1990.

Swokowsky, E. W. y Cole, J. A. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores. México. 1998.

Urzúa, R. *Aprendizaje colaborativo*. Centro de Innovación y Tecnología Educativa. Monterrey, México. 2000.

Vattimo, G.

[1998] La secularización de la filosofía. Hermenéutica y posmodernidad. GEDISA. Barcelona. 1998. Compilador: G. Vattimo.

[2002] El fin de la modernidad. Nihilismo y hermenéutica en la cultura posmoderna. GEDISA. Barcelona. Octava reimpresión, octubre 2000.

Vázquez Santa Ana, D. Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV, IPN. México, 2001.
Vigotsky,L. Pensamiento y lenguaje. Editorial Pueblo y Educación, La Habana. 1980.
Woolfolk, A. *Constructivismo y aprendizaje situado*. Mc-Graw Hill. México. 1995.
Zeldovich, Y. B. Higher Mathematics for Begginers. Mir. Moscow. 1973.

Bibliografía Virtual. Sitios consultados.

Gutiérrez, L. El aprendizaje colaborativo en los espacios electrónicos en ambientes de educación a distancia. CONEVyT, Biblioteca Digital. SEP.
http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/colecciones/documentos/somece2002/Grupo3/Gutierrez.pdf. 5-12-07.

Heidegger, M. (Artículos bajados de:)
http://egresados.udp.cl/humanidades/pensamiento/docs/03/mundo.pdf. 25-10-07
La época de la imagen del mundo.
La pregunta por la técnica.
La proveniencia del arte y la determinación del pensar.
Lenguaje tradicional y lenguaje técnico.

UNAM-Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

Página web: http://www.cch.unam.mx/. 20-01-08
Misión y filosofía del CCH
Modelo Educativo del CCH
Plan de Estudios General del CCH
Objetivo General

http://www.cch.unam.mx/index.php. 11-12-08

[2003] Programa de Estudios de Matemáticas. 2003] Semestres I a IV. CCH-UNAM. México, 2003.

Young. *Enseñanza y aprendizaje con la INTERNET*.
http://www.distea.com/arte/artnntedu/cdumedia.htm. 12-11-07.

El enfoque cognitivo del aprendizaje y la informática educativa en la educación superior. Emilio Ortiz Torres. eortiz@uho.hlg.edu.cu. 5-08-07

Trabajo de Ausubel, véase www.davidausubel.org. 20-02-08.

Anexo 1. Diagnóstico de pre-concepciones para el tema de *funciones cuadráticas*.

El siguiente conjunto de preguntas permite ubicar las ideas previas de cada estudiante en torno a los conceptos de la *función cuadrática*. Esta se puede realizar de dos maneras posibles, a saber, como examen diagnóstico respondido por cada uno de los estudiantes o, también a manera de entrevista individual, conducida por el profesor.

Con el siguiente cuestionario se pretende tener una idea general acerca de los antecedentes inmediatos que requieres para desarrollar la Unidad 1 de Matemáticas II. Es importante destacar que con las respuestas que proporciones podremos darnos una idea para colaborar en tu aprendizaje de esta unidad. *Finalmente, conviene aclararte que este cuestionario no es parte de tu calificación, ni para esta unidad en particular, ni para el curso en general.*

1. Determina, con un (SI) o un (NO), cuáles de los siguientes *eventos* son *lineales*.

   a. El cambio de divisas. (___)
   b. La trayectoria de una pelota de béisbol. (___)
   c. El crecimiento humano. (___)
   d. La repetición de las estaciones del año. (___)

2. Resuelve *solo uno* de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$2x + y = 1$ $3x - 2y = -9$	$y = 3x + 2$ $x = 3y + 2$	$3x - y = 12$ $-\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = -2$
x = _________. y = _________.	x = _________. y = _________.	x = _________. y = _________.

3. Resuelve el siguiente problema.

   En México, cuando pides un préstamo a un agiotista, digamos $5000 a un interés de 15% mensual, a pagar en un año, lo que hacen es lo siguiente.

   Calculan el total de tu deuda sumando al capital pedido el porcentaje del préstamo. En este caso, ¿cuánto sería?

   capital acumulado = $______________.

   Después dividen este capital acumulado entre el número de pagos en los que has convenido, con lo que obtienen el valor de la renta del préstamo. Calcúlalo.

renta = $ ______________.

Suponiendo ahora que vas pagando puntualmente tu préstamo, ¿cómo calculas lo que te resta pago tras pago? Explica.

____

____

____

Marca en un plano cartesiano los puntos (#mes, saldo).

¿Qué curva pasa por esos puntos? ________________________________.

Finalmente, escribe una fórmula que determine lo que te resta pagar después de x meses.

saldo = _____________________________.

4. Determina, con un (SI) o un (NO), cuáles de los siguientes *eventos* son *cuadráticos*.

   (a). El chorro de una fuente. (___)

   (b). La variación de la distancia con respecto al tiempo de un móvil a velocidad constante. (___)

   (c). El lanzamiento de un cohete de juguete en sentido vertical. (___)

5. Resuelve *solo una* de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

$-7x^2+8x=-8$	$-9x^2=3x+9$	$6=9x^2+6x$
x_1 = _________. x_2 = _________.	x_1 = _________. x_2 = _________.	x_1 = _________. x_2 = _________.

6. Roberto tiene 50 m., de tela de alambre para cercar una cancha de fútbol rectangular. Si su área fuera de 150 m^2.

   a) Si $f(x)=área$, ¿cuál es la función que representa esta situación?
   b) ¿Cuánto medirá el largo y cuanto el ancho?

7. Determina las coordenadas del vértice (h, k) de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 8$. (Sugerencia: expresa f(x) en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$).

h = ____________ k = ____________

Índice de tablas, mapas conceptuales y hojas de trabajo. Pág.

Tabla 1. Dos tipos complementarios de aprendizaje. 2

Tabla 2. Principales diferencias entre concebir el aprendizaje como un proceso asociativo o constructivo. (Adaptada de Pozo 1989). 3

Tabla 3. Características socio-económicas de los estudiantes del bachillerato CCH-UNAM, generación 2006 (Santillán R., y López, D. 2006). 11

Mapa conceptual 1: la noción de función como eje estructurador del Programa de Matemáticas del CCH-UNAM. 15

Mapa conceptual 2. Función cuadrática. 16

Mapa conceptual 3. Las matemáticas modernas de acuerdo con el funcionalismo formal. 22

Tabla 4. Actividades matemáticas humanas modernas. 23

Tabla 5. Algunas ideas que surgen dentro de las matemáticas. 28

Tabla 6. Historia de los números = Historia de la teoría de ecuaciones. 30

Mapa conceptual 4. Lo parabólico y las funciones cuadráticas. 47

Hoja de trabajo 1. Las parábolas de un arcoíris. 52

Hoja de trabajo 2. Construcción con GeoGebra de una parábola envolviéndola con rectas. 55

Hoja de trabajo 3. Construcción con regla y compás de una parábola (dobleces). 57

Hoja de trabajo 4. Construcción de una parábola con una tabla, tachuelas e hilo. 59

Hoja de trabajo 5. Caída libre de un objeto. 61

Hoja de trabajo 6. Ecuación estándar u ordinaria de una parábola vertical. 64

Hoja de trabajo 7. Ecuación general de una parábola vertical. 67

Proyecto A. Cálculo de la dimensiones del rectángulo de mayor área construido con un alambre de 18 cm. 72

Proyecto B. Cercado del máximo terreno rectangular con un lado en la ribera de un río. 86

Proyecto C. Cálculo del volumen máximo al doblar una lámina. 89

Proyecto D. Cerca de un terreno rectangular de área máxima. 92

Proyecto E. La caída libre de un objeto. 96

Tabla 7. Preferencias de los alumnos para la elección de algún nodo sobe la Función cuadrática. 99

Tabla 8. Resultados obtenidos en la primera etapa respecto al Diagnóstico de las pre-concepciones de la función cuadrática. 100

Tabla 9. Logros en la exposición y comprensión obtenidos en la elaboración y presentación de proyectos. 102

Índice de figuras. **Pág.**

Fig. 1. Escala universal de los números reales.	25
Fig. 2a Con-cavidad hacia arriba y hacia abajo. Fig. 2b Con-cavidad hacia arriba y hacia abajo.	36
Fig. 3a. Ceros de $f(x) = x^2 – 3 x +1$ Fig. 3b. Puntos fijos de $\varphi(x) = (x^2 + 1) / 3$.	44
Fig. 4a. Cero de $f(x) = x^2 – 2$ Fig. 4b. Punto fijos de $\varphi(x) = x – f(x)/2$	45
Fig. 5. Lo parabólico.	48