

**“ESTABILIDAD DE MEMS Y NEMS
PARA FUERZAS GENERALES”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIA
E INGENIERÍA DE MATERIALES**

P R E S E N T A

M.A. JESÚS HUMBERTO LUQUE JIMÉNEZ



TUTOR: DR. RAÚL ESQUIVEL SIRVENT



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Al Dr. Raúl Esquivel Sirvent por la dirección, apoyo y motivación para llevar a cabo esta tesis.

A la coordinación del Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales por la orientación y apoyo en todo este tiempo.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales por los recursos facilitados para realizar este posgrado.

Al CONACYT por la beca otorgada durante mis estudios de posgrado.

A la UNAM por tener siempre como uno de sus principales objetivos el desarrollo de la ciencia y la tecnología en México.

A Rosa, Humberto y Carolina

Índice

Prólogo	I
Capítulo I Introducción a los MEMS y NEMS	1
I.1 Historia	1
I.2 Métodos de fabricación	3
I.3 Fuerzas involucradas en los MEMS y NEMS	8
I.4 Fuerza de Casimir	10
I.5 Fuerza de van der Waals	14
Capítulo II Modelación matemática de sistemas micro y nanomecánicos	17
II.1 Modelación de sistemas masa-resorte	17
II.2 Modelación de sistemas electrostáticos-elásticos	23
II.2.1 Caso electrostático	24
II.2.2 Teoría de membranas	26
Capítulo III Modelación de sistemas elásticos para fuerzas generales	28
III.1 Generalización de propiedades	28
III.2 Membranas unidimensionales	39
III.3 Resultados numéricos de membranas unidimensionales	42
III.4 Membrana circular	49
Conclusiones	57
Anexos	58
Referencias	61

Prólogo

Desde el reto inicial de Feynman de otorgar un premio de \$1000 dólares a quien pudiera construir una máquina con partes móviles de un tamaño no mayor a 1/64 in, han pasado casi 50 años.

Hoy día, dispositivos con partes móviles a escalas submicrométricas tienen aplicaciones tan diversas como acelerómetros que controlan las bolsas de aire en los coches, balanzas analíticas en química, giróscopos e inclusive transistores mecánicos que mueven electrones con dispositivos mecánicos como palancas.

Los sistemas micro y nano electromecánicos (MEMS y NEMS por sus siglas en inglés) son ejemplos de micromáquinas que funcionan típicamente con la presencia de fuerzas electrostáticas. La miniaturización de estos dispositivos ha llevado a la necesidad de considerar otras fuerzas que cobran relevancia a distancias pequeñas. Tal es el caso de las fuerzas de Casimir.

Hasta la fecha se ha estudiado la estabilidad en micro y nano máquinas principalmente cuando la fuerza de operación es electrostática o de tipo Casimir. La presencia de estas fuerzas impone una limitación en la operación de los MEMS y NEMS. Esta limitación es conocida como colapso súbito a salto a contacto, que ocurre cuando partes móviles del dispositivo se adhieren permanentemente porque la fuerza de atracción con la que operan supera la fuerza de restitución elástica que trata de mantener a las distintas partes en su posición.

Sin embargo, como se explica en esta tesis, puede haber otro tipo de fuerzas que operan en estos dispositivos y que pueden influenciar de manera importante el funcionamiento de MEMS y NEMS.

La contribución principal de esta tesis es la demostración general de teoremas de estabilidad en MEMS y NEMS para fuerzas proporcionales al recíproco de una potencia de la distancia, quedando algunos resultados previos de la literatura como corolarios que se siguen directamente de nuestros resultados. En particular resolvemos el problema general de micro y nano membranas, estudiando las condiciones de estabilidad para evitar su adhesión o salto a contacto.

Esta generalización permite una visión más global de la dinámica de dispositivos a escalas submicrométricas sin restricción a casos particulares de algún tipo de fuerza, lo que esperamos sea de utilidad en el diseño y control en el futuro desarrollo de MEMS y NEMS.

Capítulo I

Introducción a los MEMS y NEMS

En este capítulo se enuncian los antecedentes y el nacimiento de lo que ahora conocemos como micro y nanotecnología pasando por sus orígenes en la Segunda Guerra Mundial y su concepción teórica por parte de Richard Feynman. También se describe el comportamiento, funcionamiento, así como algunos de los principales y más comunes métodos de fabricación de los micro y nanodispositivos electro-mecánicos, más conocidos como MEMS (Micro Electro-Mechanical System) y NEMS (Nano Electro-Mechanical System) por sus siglas en inglés.

I.1 Historia

Al hablar de los antecedentes de lo que ahora conocemos como micro y nanotecnología, es imposible dejar de mencionar a quien fuera el mayor visionario de todo esto que actualmente tiene tan involucrados a tantos científicos de diferentes áreas: Richard Feynman.

A finales de los años 50 este físico, ganador del premio Nobel, dio el banderazo oficial de salida con su famoso artículo “*There's Plenty of Room at the Bottom*” [34] para toda esta revolución de ideas y propuestas que actualmente generan un sinnúmero de esperanzas sobre los límites del potencial humano, haciendo una invitación (como su mismo artículo lo dice) a entrar a este nuevo campo de la física.

Feynman hizo público el reto de construir un motor eléctrico menor a $\frac{1}{64}$ de pulgada ofreciendo una recompensa de \$1000 dólares (siendo este premio mucho más atractivo de lo que ahora representa esa simple cifra) al primero que lo lograra, siendo el joven William McLellan (figura I.1.1) quien logró dicho cometido después de muchas horas de tedioso y arduo trabajo manual mediante el uso de unas pinzas y un microscopio. Actualmente el motor de McLellan (figura I.1.2) se encuentra en el Instituto de Tecnología de California. El enorme objeto por encima del motor mostrado en la figura I.2 es la cabeza de un alfiler [1].



Fig. I.1.1 Richard Feynman observando el micromotor construido por William McLellan (izquierda)

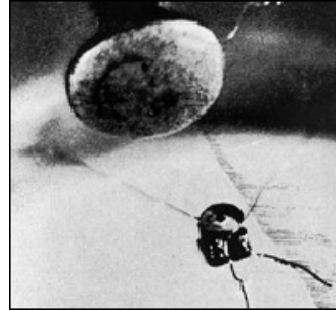


Fig. I.1.2 El motor de 3.81 mm de ancho fotografiado mediante un microscopio óptico (Caltech Archives).

Los MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) y NEMS (Nano-Electro-Mechanical Systems) son micro o nanosistemas en el intervalo de milímetros a micras o de micras a nanómetros respectivamente, que combinan componentes mecánicos y eléctricos y que cuentan con la facultad de servir como sensores, controladores y funcionar a escala micro y nanométrica, siendo una característica importante el que tengan partes móviles.

Muchas de las raíces de la tecnología de microsistemas provienen de avances tecnológicos generados en la Segunda Guerra Mundial. Principalmente el desarrollo del radar estimuló a investigadores en la síntesis de materiales semiconductores puros. Dichos materiales, principalmente el silicio, serían los que darían vida a los circuitos integrados y a la tecnología actual de los MEMS [2].

Aunque las investigaciones en MEMS datan desde los años 50, no fue sino hasta mediados de los años 90 que aparecieron en productos comerciales. Principalmente destacaron sus aplicaciones en biotecnología (microsistemas para la amplificación e identificación de ADN, biochips para la detección de agentes biológicos, sensores de presión para medicina), comunicaciones, acelerómetros en bolsas de aire para automóviles, cabezas de impresoras de inyección, proyectores a color, microposicionadores en sistemas de almacenamiento de información, entre otros [3]-[4].

La realidad es que la historia de los MEMS y NEMS sigue desarrollándose y se tiene aún mucho por descubrir. A continuación se muestra una lista de los acontecimientos que han marcado el desarrollo de esta tecnología [2].

Tabla I.1 Acontecimientos destacados en la historia de los MEMS y NEMS

1940s	Investigaciones en el radar derivan en el desarrollo de semiconductores puros.
1959	Escrito de Richard P. Feynman "There's plenty of room at the bottom".
1960	Invencción del proceso de fabricación planar batch.
1964	H.C. Nathanson y su equipo en Westinghouse producen el transistor de compuerta resonante, siendo el primer dispositivo MEMS fabricado mediante proceso batch.
1970	Invencción del microprocesador debido a la alta demanda de circuitos integrados.
1979	Se desarrolla el primer acelerómetro micromaquinado en la Universidad de Stanford.
1981	Publicación del artículo "Protein design as a pathway to molecular manufacturing" de K. Eric Drexler en los Proceedings of the National Academy of Sciences, considerado como el primero en nanotecnología molecular.
1982	Invencción del microscopio de efecto túnel (scanning tunneling microscope).
1984	Desarrollo del proceso de micromaquinado de superficie de polisilicio (polysilicon surface micromachining) en la Universidad de California, Berkeley. Ahora los MEMS y los circuitos integrados pueden ser fabricados juntos por primera vez.
1985	Es descubierto el "Buckyball".
1986	Invencción del microscopio de fuerza atómica.
1991	Es descubierto el nanotubo de carbono.
1996	Richard Smalley desarrolla una técnica para la producción de nanotubos de carbono de diámetro uniforme.
2000-	El número de dispositivos MEMS y sus aplicaciones siguen en aumento. Muchos recursos están siendo destinados tanto a la investigación como a la educación en nanotecnología.

I.2 Métodos de fabricación

Las técnicas de fabricación de micro y nanodispositivos tienen sus raíces en los métodos de fabricación estándar desarrollados para la industria de semiconductores, tales como litografía, depósito y dopaje de películas delgadas (dopaje, CVD, epitaxia, PVD y electrochapeado), grabado y remoción de sustrato, grabado en seco o húmedo y depósito de sustrato.

En el caso de las técnicas de fabricación de MEMS, éstas generan microestructuras en el intervalo de 1 mm a 1 μ m. En la siguiente tabla se resumen los principales métodos de fabricación [5]:

Tabla 1.2 Técnicas de fabricación de microdispositivos

Micromaquinado de bulto (<i>bulk micromachined</i>)	Es la técnica más antigua y probablemente una de las más desarrolladas siendo la más exitosa comercialmente. Consiste principalmente en remover selectivamente parte del sustrato (silicio, vidrio, GaAs, etc.) para la creación de los componentes micromecánicos que darán forma a una variedad de sensores y actuadores. Las principales variantes de esta técnica son grabado en seco y húmedo y depósito de sustrato.
---	--

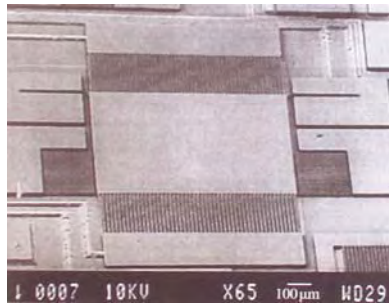


Fig. I.2.1 Fotografía (SEM) de un micro-accelerómetro usando el método de grabado húmedo.

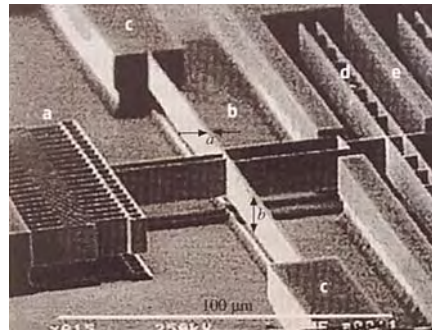


Fig. I.2.2 Fotografía (SEM) de una estructura fabricada usando el método de grabado en seco.

Micromaquinado de superficie	Puede ser utilizada para la creación de microestructuras móviles sobre un sustrato de silicio y consiste en el depósito de películas delgadas como estructura sobre una capa de sacrificio la cual será removida finalmente para obtener componentes móviles, tales como membranas, placas, etc. Su principal ventaja es que se pueden obtener estructuras extremadamente pequeñas.
------------------------------	---

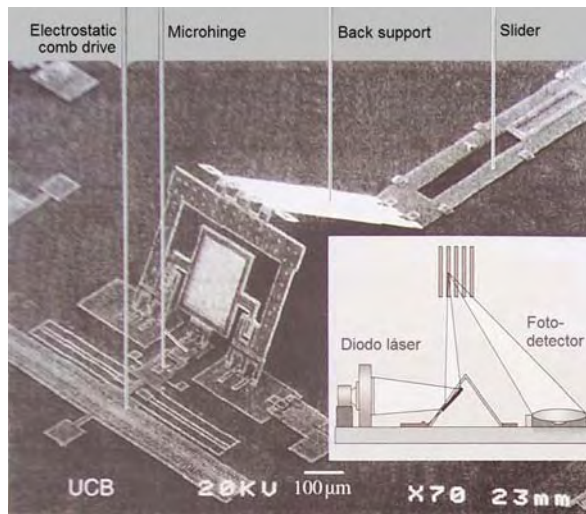


Fig. I.2.3 Visagra de Silicio con estructuras tridimensionales micromaquinadas.

Micromaquinad o HAR (*high-aspect-ratio micromachined*) Se utiliza para fabricar estructuras que no pueden ser obtenidas con las técnicas anteriores tales como estructuras con dimensiones verticales mucho más grandes que las laterales. Sus técnicas principales son: LIGA (del alemán L*ithographie* G*l*vanoformung A**b**formung y se basa en litografía de rayos X y electrochapado), HEXSIL (HEXagonal honeycomb polySILicon) y HARPSS (High-Aspect-Ratio Poly & Single-crystal Silicon)

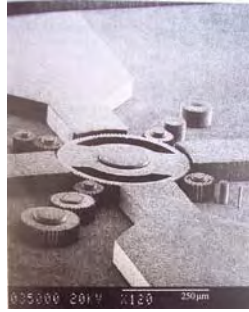


Fig. I.2.4 Estructura de níquel fabricada mediante LIGA.

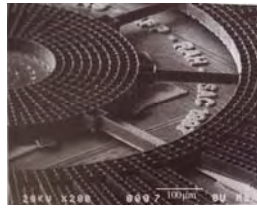


Fig. I.2.5 Microactuador angular fabricado usando HEXSIL

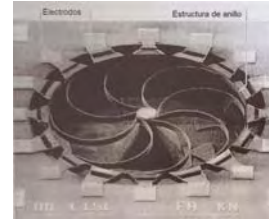


Fig. I.2.6 Microgiroscopio fabricado usando el proceso HARPSS

Es posible obtener estructuras con dimensiones por debajo de $1 \mu\text{m}$ utilizando la técnica HARPSS (mediante una capa dieléctrica de sacrificio) sin embargo, en los últimos años se han enfocado grandes esfuerzos en el desarrollo de nuevas técnicas para la fabricación de sub-microestructuras ($1 \mu\text{m}$ – 100 nm) y nanoestructuras (1 – 100 nm).

Una de las tantas razones en este interés es el que dichas nanoestructuras proveen una herramienta para el estudio de propiedades eléctricas, magnéticas, ópticas, térmicas y mecánicas de la materia a escala nanométrica, además de fenómenos de mecánica cuántica.

Por otro lado, las nanoestructuras pueden lograr significativas mejoras en el diseño de sensores y dispositivos tanto electrónicos como ópticos, trayendo consigo nuevas posibilidades en las siguientes generaciones de la computación y las comunicaciones.

De manera muy general, es posible clasificar la mayoría de las técnicas de nanofabricación en dos grandes grupos: top-down y bottom-up. La primera de ellas comienza con un bulto o una película delgada de algún material del cual se remueven regiones específicas para fabricar las nanoestructuras; mientras que el segundo método

consiste en reconocimiento molecular y autoensamblaje para fabricar nanoestructuras mediante pequeños bloques. La siguiente tabla muestra las principales técnicas utilizadas en la fabricación de nanodispositivos [6]:

Tabla I.3 Técnicas de fabricación de nanodispositivos

Haz electrónico	<p>Utiliza un haz de electrones dirigido a un material sensible a los electrones como polimetil metacrilato (PMMA) disuelto en <i>trichlorobenceno</i> o policlorometilostireno. En la mayoría de los casos, el cañón de electrones es parte de un microscopio electrónico de barrido, pero también puede utilizarse uno de transmisión</p> <p>A pesar de poderse conseguir longitudes de onda del electrón del orden de 1 Å, en el material grabado sólo se puede obtener una resolución mayor a los 10 nm. El control del haz y la generación del patrón se llevan a cabo mediante una interfase computarizada.</p> <p>Esta técnica sirve para producción en serie, pero es limitada para fabricación a gran escala.</p>
Nano-impresión	<p>Utiliza un molde de algún material duro fabricado mediante haz electrónico para grabar y deformar un material polimérico. El siguiente paso es utilizar un ión reactivo para transferir el grabado al sustrato.</p> <p>Esta técnica es sumamente económica ya que un mismo molde (por ejemplo SiO₂) puede ser utilizado repetidamente para fabricar un gran número de nanoestructuras y finalmente se remueven los residuos del material original.</p> <p>Existe una variante de esta técnica que utiliza un láser exímero de XeCl (308 nm) y una máscara de cuarzo tomando un tiempo de sólo 250 ns para sellar el silicio. A esta técnica se le conoce como LADI (laser assisted direct imprint)</p>

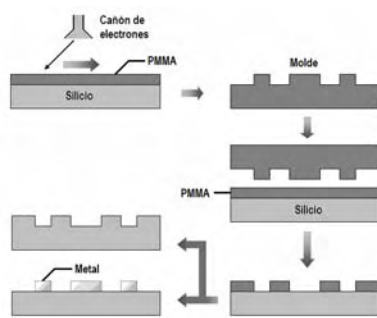


Fig. I.2.7 Esquema del método de fabricación por nano-impresión

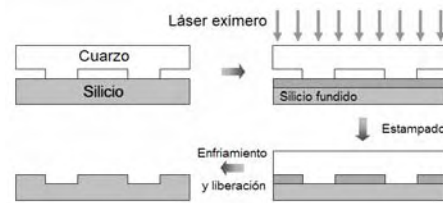


Fig. I.2.8 Método ultrarrápido de nano-impresión de silicio utilizando un láser exímero

Estabilidad de MEMS y NEMS para fuerzas generales

Epitaxia e ingeniería de tensión

Esta técnica consta de dos variantes principales: epitaxia sobre sustrato estampado y usando autoensamblaje inducido por tensión. Se han desarrollado diversos métodos que consisten en el crecimiento de capas epitaxiales sobre superficies no planas tales como step-edge, cleaved-edge y sustrato grabado para la fabricación de alambres y puntos cuánticos sin la necesidad de litografía y grabado de estructuras confinadas cuánticamente.

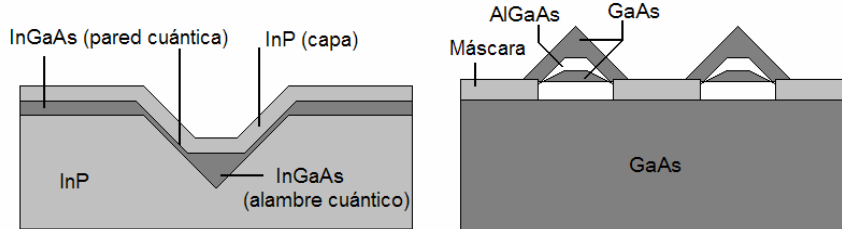


Fig. I.2.9 Alambre cuántico de InGaAs fabricado en una ranura de InP de forma V y un alambre cuántico de AlGaAs fabricado mediante crecimiento epitaxial en un sustrato recubierto de GaAs.

Técnicas de barrido

Sus principales variantes son: oxidación sp inducida, exposición sp resistente, litografía y nanolitografía dip-pen. Para la oxidación de materiales a escala nanométrica es necesario usar técnicas de barrido operados en el aire y a un voltaje suficientemente alto.

Es posible generar diseños en un sustrato de silicio con líneas de hasta 10 nm de ancho mediante esta técnica.

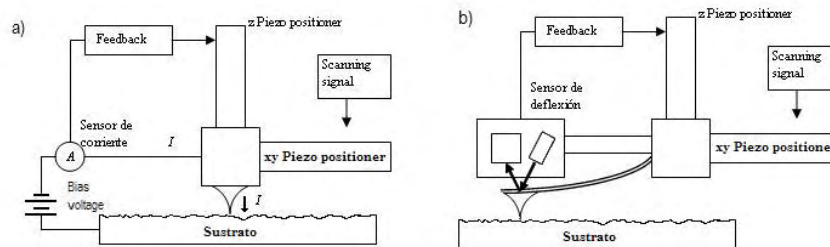


Fig. I.2.10 Sistemas de barrido (a) STM y (b) AFM

Autoensamblaje y manufacturado template
Consiste en agregar nanopartículas coloidales en la estructura final deseada. Esta agregación puede ser espontánea (entrópica) debido a un punto crítico termodinámico (minimización de energía) o químico debido a enlaces complementarios de moléculas orgánicas y supramoléculas. Es utilizada principalmente en aplicaciones de la biología para el desarrollo de estructuras funcionales complejas. Sus principales variantes son: autoensamblaje físico y químico, manufacturado por plantilla.

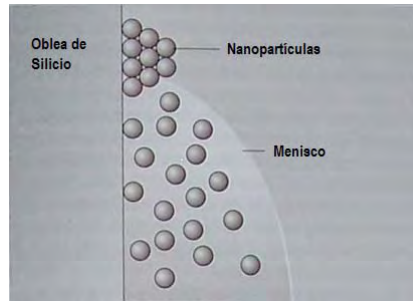


Fig. I.2.11 Autoensamblaje de partículas coloidales sobre un sustrato sólido en posición vertical.

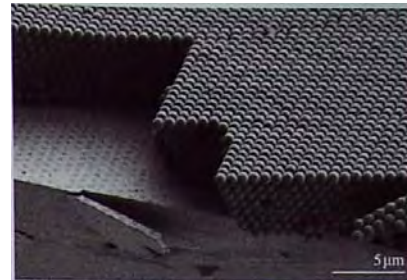


Fig. I.2.12 Imagen SEM de una sección transversal de un template delgado de silicio (esferas de 855 nm de diámetro) ensambladas directamente en una oblea de Si

I.3 Fuerzas involucradas en los MEMS y NEMS

Uno de los aspectos fundamentales a considerar al momento de construir un MEMS es el escalamiento o efecto escala. Esto se debe a que la proporción entre la superficie y el volumen se incrementa cuando las dimensiones del dispositivo disminuyen.

Los tipos de fuerza que influyen los dispositivos a microescala son muy diferentes de aquéllos que afectan los dispositivos de tamaño convencional debido a que dependiendo del tamaño de un sistema físico se determina el fenómeno que describe el comportamiento dinámico del sistema. Por ejemplo, sistemas a gran escala son afectados por efectos de inercia en una mayor medida que sistemas a pequeña escala. Mientras más pequeño sea el sistema, éste será más influido por efectos de superficie. Por ello, fuerzas de superficie inducen una fuerte adherencia, fricción y desgaste los cuales son grandes problemas que limitan tanto la fabricación como el tiempo operativo de vida de muchos dispositivos MEMS.

En consecuencia es importante identificar cuáles son las fuerzas que contribuyen o pueden afectar el funcionamiento adecuado de estos dispositivos. Esto con el objetivo

de realizar una correcta modelación e identificación de problemas tanto en el proceso de fabricación como en el momento de cumplir con su funcionalidad.

Una fuerte adherencia entre los componentes de un micro o nanodispositivo puede ser causada por fuerzas capilares, electrostáticas, Casimir, de van der Waals y otros tipos de fuerzas químicas. Estas enormes fuerzas de adherencia muchas veces conllevan a que los componentes en la superficie de la microestructura se adhieran de manera no intencional y las fuerzas de restitución no sean suficientes para superar las fuerzas interfaciales, dando lugar a lo que se conoce como adhesión (stiction) [7].

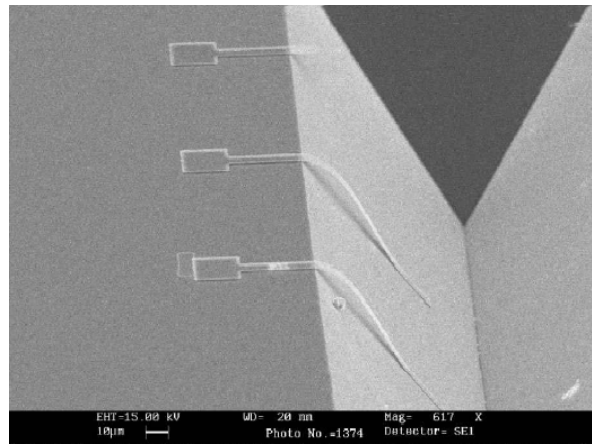


Fig. I.3.1 Adhesión de microcantilevers al sustrato

Por todo esto es muy importante considerar además de la fuerza electrostática, las fuerzas de van der Waals y de Casimir al plantear modelos para describir el comportamiento de los MEMS y NEMS. A continuación se enuncian algunas de sus principales características y sus efectos en estos dispositivos.



Fig. I.3.2 Fotografía de Hendrik B. G. Casimir (1909-2000)

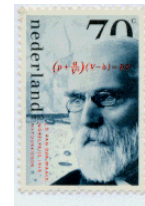


Fig.I.3.3 Estampilla postal con la imagen de Johannes Diderik van der Waals (1837 - 1923)

I.4 Fuerza de Casimir

La forma más elemental del efecto Casimir fue predicha en 1948 por Hendrik B. G. Casimir y consiste en la fuerza de atracción que existe entre un par de placas neutras paralelas puestas en el vacío, mientras realizaba investigaciones en Philips Research Labs [8].

Descubrió que la fuerza es directamente proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la separación entre las placas, es decir, $F \sim A / d^4$, donde A es el área de las placas y d es la distancia entre las mismas.

Esta fuerza tiene un origen meramente cuántico y es consecuencia directa de la existencia de fluctuaciones de punto cero, donde la fluctuación de partículas virtuales generan una "presión de radiación" sobre las placas. Esta presión en promedio es mayor fuera de las placas que en medio de ellas provocando una fuerza de atracción.

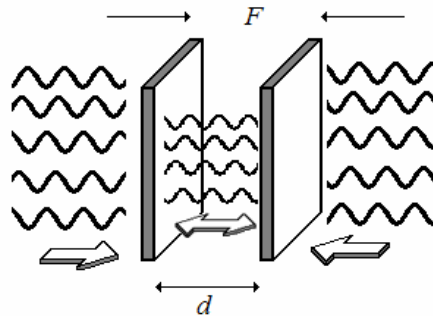


Fig. I.4.1 Diagrama de la fuerza de Casimir

Para ilustrar la magnitud de esta fuerza tomemos el caso de dos placas metálicas paralelas de 1 cm^2 de superficie y separadas a una distancia de $1 \text{ }\mu\text{m}$ (siendo una gran distancia en escala atómica). En este caso la fuerza de atracción es del orden de 10^{-7} N , que es aproximadamente el peso de una gotita de agua de medio milímetro de diámetro.

Es importante no llegar a subestimar esta fuerza, ya que a distancias menores de un micrómetro la fuerza de Casimir se convierte en la mayor fuerza entre dos objetos neutros, llegando a tener valores de 1 atmósfera de presión para separaciones de 10 nm (aproximadamente unas cien veces el tamaño promedio de un átomo).

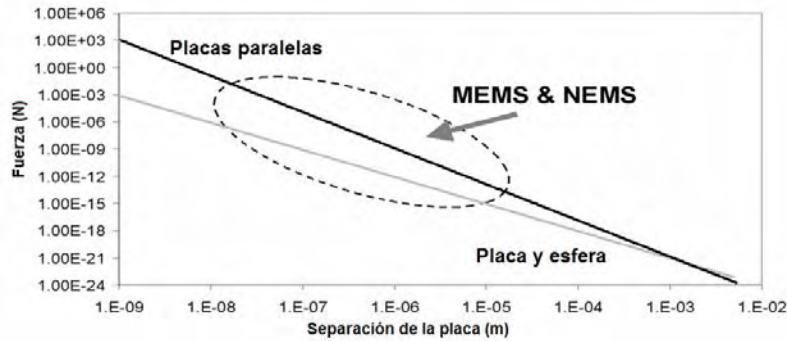


Fig. I.4.2 Fuerza de Casimir entre placas paralelas de 1 mm² (línea negra) y entre una placa y una esfera de 1 mm de radio (línea gris) [9]

Una de las principales características de la fuerza de Casimir es su gran dependencia en la forma de las placas. Incluso se tiene la teoría de que esta fuerza puede cambiar de atractiva a repulsiva en función de la geometría y de la interacción con lo que lo rodea [10]. Esto hace natural su participación en aplicaciones de MEMS y NEMS.

Durante muchos años el efecto Casimir fue poco más que una curiosidad teórica hasta que, después de casi 50 años, se pudieron hacer mediciones de dicha fuerza con considerable precisión.

Tabla I.4 Experimentos para la medición de fuerza de Casimir

1948	Primera predicción del efecto Casimir
1958	Marcus Spaarnay en Philips de Eindhoven investigó la Fuerza de Casimir mediante un delicado y difícil experimento con espejos metálicos planos hechos de aluminio, cromo o acero usando un dinamómetro, cuya extensión estaba determinada por la capacitancia de las placas. Concluyó que sus resultados "no contradecían la predicción teórica de Casimir" pero con grandes errores experimentales [24].
1997	Steve Lamoreaux, en la Universidad de Washington en Seattle, midió la Fuerza de Casimir entre dos lentes esféricas de 4 cm de diámetro y una placa de cuarzo óptico de unos 2,5 cm, bañados en cobre y oro, conectadas a un péndulo de torsión, obteniendo medidas experimentales con una precisión dentro del 5% con respecto a las teóricas [25].

1998 Umar Mohideen, en la Universidad de California en Riverside, unieron una esfera de poliestireno de 200 μm de diámetro a la punta de un microscopio de fuerza atómica, llevando la esfera, bañada en oro o aluminio, a 0,1 μm de un disco plano, el cual también estaba bañado con estos metales, siendo capaces de medir la Fuerza de Casimir dentro del 1% de los valores teóricos esperados [26, 27].

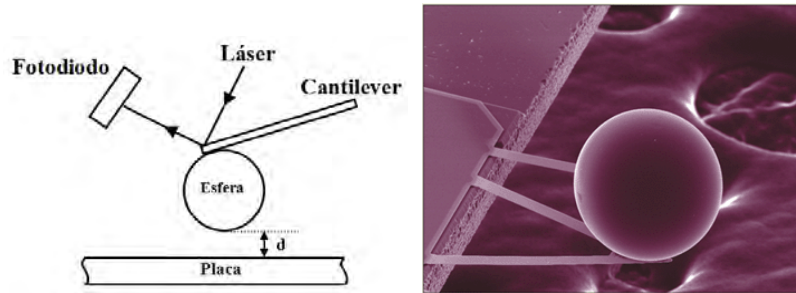


Fig. I.4.3 Método utilizado por Mohideen para medir la fuerza de Casimir

2000 Thomas Ederth del Instituto de Tecnología Real en Estocolmo, Suecia, usando microscopios de fuerza atómica, midió la fuerza entre dos cilindros cubiertos de oro colocados a 90° entre ellos y separados 20 nm. Sus resultados concordaban con la teoría dentro del 1% [28].

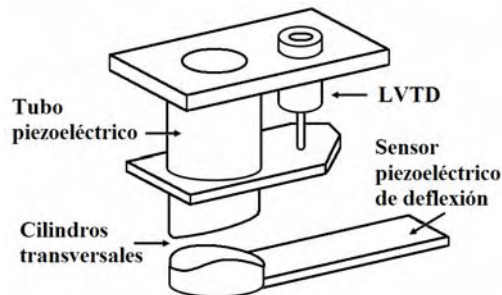


Fig. I.4.4 Método utilizado por Ederth para medir la fuerza de Casimir

2001 Chan y colaboradores, en Bell Labs Lucient Technologies, demostraron por primera vez la interacción entre la fuerza de Casimir y los MEMS. Utilizaron una esfera recubierta de oro de 100 μm de diámetro y la acercaron a una balanza MEMS conformada por una placa de 3.5mm de espesor de polisilicio dopado y 500 mm^2 de superficie, suspendida 2mm por encima del sustrato, en una barra de torsión delgada, siendo capaces de hacer vibrar la placa cuando la esfera se acerca a sólo 100nm [23].

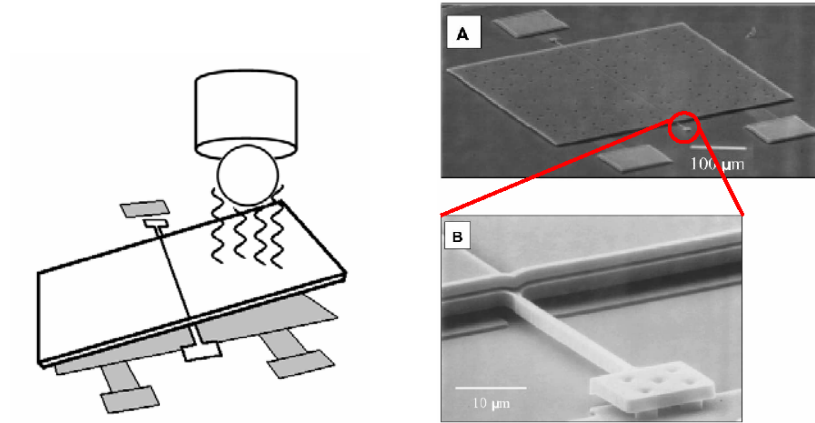


Fig. I.4.5 Método utilizado por Chan para medir la fuerza de Casimir

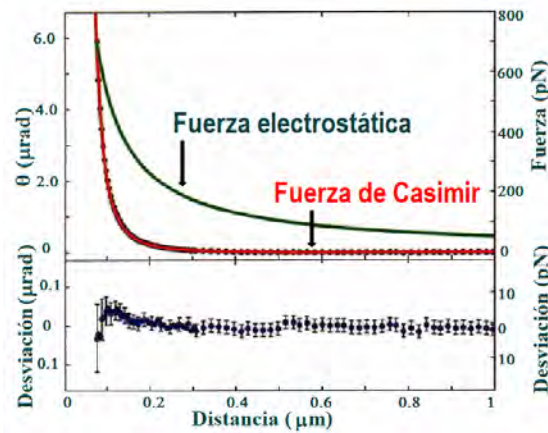


Fig. I.4.6 Comparación entre la fuerza electrostática y la fuerza de Casimir medida mediante esta técnica
La desviación de la barra de torsión está indicada en la parte baja de la gráfica

2002 Gianni Carugno y Roberto Onofrio, en la Universidad de Pádova en Italia, utilizaron una placa rígida bañada en cromo y la superficie plana de una traviesa hecha del mismo material y que es separada a distancias entre 0.5-3 μm , encontrando que la media de la fuerza estaba de acuerdo con el valor teórico esperado dentro de un 15% [29].

Como ya se mencionó anteriormente, una de las principales causas que producen el mal funcionamiento de los MEMS es la adhesión, definida como el colapso de los elementos móviles entre superficies cercanas, dando como resultado su adhesión permanente. Esto puede ocurrir tanto en la fabricación, debido a fuerzas capilares, o durante la operación. El efecto Casimir es potencialmente un causante importante de este fenómeno. Este problema es de gran relevancia tecnológica debido a su repercusión en el rendimiento de la producción en dispositivos fabricados en lote e incluso afecta muchos dispositivos al momento de la operación.

Los efectos perjudiciales de la fuerza de Casimir, tales como adhesión en los dispositivos MEMS, fueron previstos por Serry et al en 1998 [30] y fue ratificado en los experimentos de Chan [23]. Es por ello que se considera a la fuerza de Casimir como una posible solución a las fuerzas de adhesión presentes en los nanosistemas. Teóricamente, se podría generar una fuerza repulsiva mediante la selección del material y la geometría adecuada, sin embargo todavía no existe una demostración experimental para tal predicción.

Uno de los beneficios de la fuerza de Casimir fue descubierto por Federico Capasso [31] y su grupo de Lucent Technologies utilizándola para controlar el movimiento mecánico de un dispositivo MEMS suspendiendo una placa de polisilicio de una barra de torsión y llevando una esfera metalizada a un punto cercano a la placa, haciendo que la fuerza atractiva de Casimir entre los dos objetos hiciera rotar la placa.

Desafortunadamente aun no existe un método general para calcular la fuerza de Casimir (excepto en el caso de placas paralelas [8]), sin embargo existen métodos para ciertas configuraciones específicas. En la actualidad existen principalmente dos métodos numéricos para el cálculo de la fuerza de Casimir para geometrías complejas [8]: las técnicas de red QED (lattice QED techniques) y los métodos fenomenológicos, como el método de fuerza de proximidad (proximity force method) que no serán discutidos en este trabajo.

1.5 Fuerza de van der Waals

La fuerza de van der Waals, llamada en algunas ocasiones fuerza de dispersión de London, es un tipo de fuerza intermolecular que surge de la polarización de las moléculas en dipolos (o multipolos). Esto incluye fuerzas correspondientes a dipolos fijos o promedio de ángulos (fuerzas de Keesom) y dipolos libres o de rotación (fuerzas de Debye) así como cambios en la distribución de nube de electrones (fuerzas de London). Aunque originalmente este término era utilizado para todo tipo de fuerzas intermoleculares, actualmente se refiere de manera más específica a la correspondiente a los dipolos.

Es una fuerza eléctrica relativamente débil que se encuentra en gases, gases solidificados y en la mayoría de los líquidos y sólidos orgánicos.

Las fuerzas de van der Waals consisten en diferentes tipos de interacción. Éstas no siguen la ley del recíproco del cuadrado (como la fuerza electrostática entre cargas puntuales) sino que contribuyen de manera variada sobre toda la fuerza intermolecular. Existen tres contribuciones de atracción:

- El efecto de orientación, o interacción entre dipolos permanentes;
- El efecto de inducción, o interacción entre un dipolo permanente y uno temporal;
- El efecto de dispersión o fuerza de London, que es la interacción entre dipolos temporales y dipolos inducidos.

Tabla I.5 Efectos por fuerza de van der Waals

Efecto	Características	Variación con la distancia
Efecto de orientación (dipolo-dipolo)	Depende de la orientación relativa y en promedio es cero sobre todo el compuesto si todas las orientaciones son posibles. Esto sería posible si las moléculas rotaran libremente pero algunas orientaciones son más recurrentes que otras. Tiene una relación inversa respecto a la temperatura.	La energía de interacción varía como $1/r^6$, y la fuerza entre dipolos como $1/r^7$. En un sólido la energía de interacción varía como $1/r^3$.
Efecto de inducción (dipolo permanente-inducido)	Es independiente de la temperatura y su magnitud depende de la polarizabilidad de la molécula	Ésta también varía como $1/r^6$.
Efecto de dispersión (dipolo temporal-inducido)	Ésta es la única fuerza de interacción en moléculas no polares, y surge de un dipolo temporal que induce un dipolo complementario en una molécula adyacente.	Depende de la polarizabilidad de la molécula y varía como $1/r^6$.
Fuerzas repulsivas	Ésta es de mucho menor alcance que las fuerzas atractivas.	Algunos modelos utilizan una relación $1/r^{12}$ aunque no siempre concuerda con los resultados experimentales. También se utiliza como alternativa una relación exponencial.

Una de las manifestaciones más perceptibles de la fuerza de van der Waals en la naturaleza es aquella que permite al gecko* tener la habilidad de escalar sobre casi cualquier superficie adhiriéndose a ésta [11]. Esta característica ya ha sido probada experimentalmente identificando la adhesión en seco del gecko mediante esta fuerza, descartando efectos de alta polaridad en la superficie o adhesión por fuerzas capilares.

Las mediciones se llevaron a cabo mediante sensores de fuerza MEMS, haciendo resaltar que las propiedades de adhesión del gecko son resultado de la forma y tamaño de sus huellas y no son fuertemente afectadas por las propiedades químicas de la superficie.



Fig. I.5.1 Adhesión de un gecko a una superficie de vidrio

* Lagarto de tamaño pequeño a mediano, del que destacan especialmente las ventosas de sus dedos, que le permiten trepar por techos y paredes.

Capítulo II

Modelación Matemática de Sistemas

Micro y Nanomecánicos

En este capítulo se abordará el modelo electrostático-elástico para describir el comportamiento de un par de placas paralelas dentro de los MEMS y NEMS, además del caso particular del sistema masa-resorte.

Para ambos sistemas se deducirá la ecuación que los modela a partir de considerar cuáles son las fuerzas involucradas en dicho sistema y algunos supuestos de simplificación.

Finalmente se justificará por qué es más conveniente utilizar el sistema electrostático-elástico para modelar el problema de placas paralelas y se generalizará la ecuación del estado de equilibrio para cualquier fuerza cuya magnitud sea proporcional al recíproco de una potencia de la distancia, es decir, $F \sim 1/d^n$.

II.1 Modelación de Sistemas Masa-Resorte

El modelo masa-resorte, basado en un movimiento armónico simple, tiene su principal ventaja en la variedad de campos en los que puede ser utilizado tales como elasticidad, circuitos eléctricos, acústica, mecánica estadística, química, poblaciones biológicas, microsistemas, teoría clásica y cuántica de campos, entre otros.

Este modelo tiene correspondencia con dispositivos MEMS en los que hay una fuerza de restitución elástica y una fuerza de atracción, tales como los *cantilevers* o balanzas de torsión. En este modelo, los efectos producidos por la geometría del objeto son despreciados (torsión de una barra, deflexión de una membrana). En lugar de eso, uno de los supuestos más importantes es que los componentes paralelos del sistema se suponen siempre paralelos durante cualquier deflexión y que se pueden describir por un sistema como el que se muestra en la figura II.1.1.

Esto significa que el estado mecánico del sistema puede ser descrito por una simple variable, u , la posición de la placa unida al resorte, que depende únicamente del tiempo. Desafortunadamente pocas veces esta simplificación está apegada a la realidad.

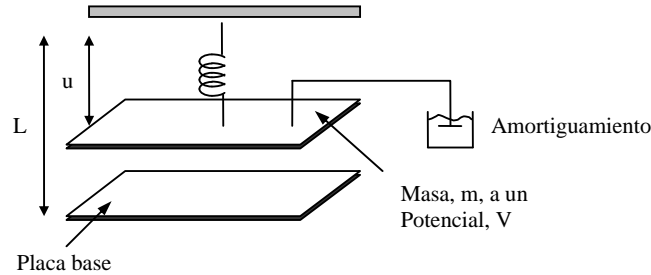


Fig. II.1.1 Representación gráfica de un sistema masa-resorte

Para obtener la ecuación que describe este sistema se parte de la segunda ley de Newton, es decir

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = \sum_i F_i, \quad (2.1.1)$$

donde u es el desplazamiento de la placa superior con respecto a la inferior, m es la masa de la placa superior y F_i es la i -ésima fuerza que actúa sobre la placa. Uno de los supuestos es que la placa inferior se mantiene fija.

Como ejemplo ilustrativo consideremos las ecuaciones para el caso en que la atracción entre las placas es de origen electrostático.

Las fuerzas involucradas en este sistema son la fuerza del resorte, F_s , la fuerza de amortiguamiento, F_d , y la fuerza electrostática, F_e , originada por un voltaje aplicado entre las placas. Si utilizamos la ley de Hooke para describir la fuerza del resorte obtenemos

$$F_s = -k(u - l), \quad (2.1.2)$$

donde l es la distancia en reposo del resorte y k es la constante del resorte. Para la fuerza de amortiguamiento se hace el supuesto de que ésta es linealmente proporcional a la velocidad, es decir

$$F_d = -a \frac{du}{dt'}, \quad (2.1.3)$$

donde a es una constante.

A continuación se presenta el análisis cuando la fuerza de atracción es electrostática ya que es el método más utilizado en los MEMS. El análisis se basa en los resultados de la referencia [2].

Para la fuerza electrostática, se utiliza la expresión para la energía potencial contenida en un campo eléctrico y una aproximación de la magnitud del campo E entre las placas de la siguiente forma:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV, \quad (2.1.4)$$

$$E \approx \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \quad (2.1.5)$$

$$\Rightarrow U = \frac{Q^2(u-L)}{2\varepsilon_0 A}, \quad (2.1.6)$$

donde ε_0 es la constante dieléctrica del vacío, Q es la carga total en la placa y A es el área de la placa. Además, la carga puede ser expresada en función del voltaje y la capacitancia:

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 AV}{(u-L)} \quad (2.1.7)$$

$$\Rightarrow U = \frac{\varepsilon_0 V^2 A}{2(u-L)}. \quad (2.1.8)$$

Para obtener la fuerza electrostática, simplemente se deriva la energía potencial con respecto a la separación entre las placas, es decir

$$F_e = -\frac{\partial U}{\partial(u-L)} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{(L-u)^2}. \quad (2.1.9)$$

El caso en el que la fuerza electrostática varíe en el tiempo de manera armónica y tenga la forma $V\cos(\omega t')$ la expresión se modifica simplemente agregando el término armónico, es decir

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{(L-u)^2} \cos(\omega t'). \quad (2.1.10)$$

Por lo tanto, la ecuación que describe el sistema masa-resorte es

$$m \frac{d^2 u}{dt'^2} + a \frac{du}{dt'} + k(u-l) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{(L-u)^2} \cos(\omega t'). \quad (2.1.11)$$

Para esta ecuación se pueden definir nuevas variables adimensionales dependiendo de si es un sistema dominado por fuerzas inerciales o por la viscosidad del medio:

Tabla II.1 Tipos de sistemas masa-resorte dependiendo de la fuerza dominante

Inercial	$\frac{d^2 v}{dt^2} + \alpha \frac{dv}{dt} + v = \frac{\lambda}{(1-v)^2} \cos(\Omega_1 t) \quad (2.1.12)$ <p>donde</p> $v = \frac{u-l}{L-l}, \quad t = \sqrt{\frac{k}{m}} t', \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \Omega_1 = \omega \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{k(L-l)^3}$ <p>pero podemos observar que</p> $\lambda = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{k(L-l)^3} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{(L-l)^2} \times \frac{1}{k(L-l)} = \frac{\text{Fza. electrostática}}{\text{Fza. del resorte}} \quad (2.1.13)$
Viscoso	$\frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + v = \frac{\lambda}{(1-v)^2} \cos(\Omega_2 t) \quad (2.1.14)$ <p>donde</p> $v = \frac{u-l}{L-l}, \quad t = \frac{k}{a} t', \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{mk}}, \quad \Omega_2 = \omega \frac{k}{a}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{k(L-l)^3}$

En el estado de equilibrio podemos observar que tanto la ecuación para el caso inercial como para el caso viscoso (suponiendo $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$) deben satisfacer la condición:

$$v = \frac{\lambda}{(1-v)^2}, \quad 0 \leq v < 1. \quad (2.1.15)$$

Es importante señalar que existen valores de λ (mayores que un cierto valor crítico λ^*) para los cuales la restricción anterior no tiene solución, como podemos ver en el siguiente diagrama de bifurcación correspondiente a la expresión (2.1.15):

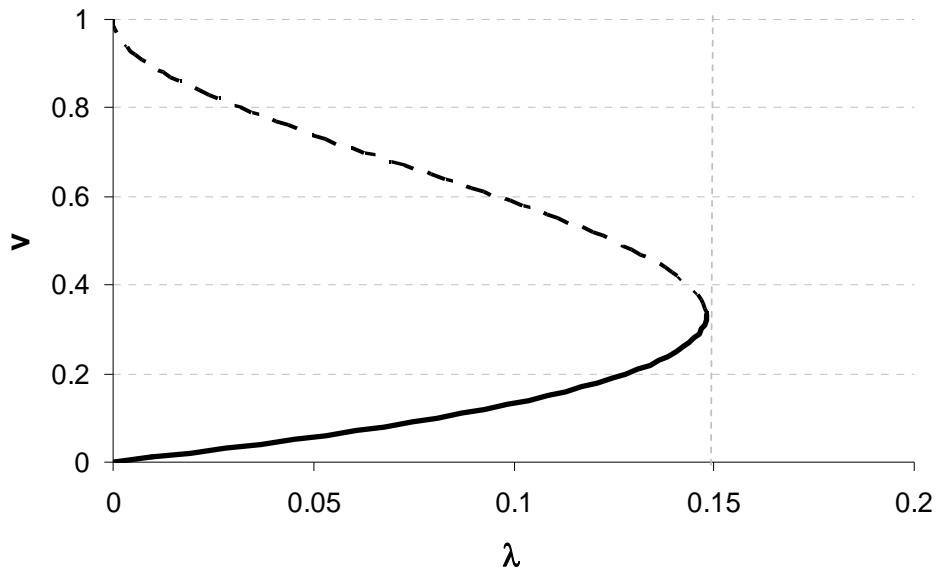


Fig. II.1.2 Diagrama de bifurcación del sistema masa-resorte

Podemos interpretar que si el valor de λ se incrementa, la fuerza electrostática también se incrementa, superando la fuerza del resorte, haciendo que el estado de equilibrio se pierda, trayendo consigo lo que se conoce como colapso súbito a salto a contacto (pull-in voltage instability) significando que la placa superior se ha colapsado sobre la placa inferior.

En este ejemplo, es sencillo obtener que $\lambda^*=4/27$ y se obtiene cuando $v^*=1/3$. Como podemos ver en la figura II.1.2, existen 2 soluciones para cada valor de λ , pero a continuación se probará que para valores mayores a v^* se obtienen soluciones inestables mientras que para los menores a v^* se dan soluciones estables.

Para el caso viscoso tenemos que la condición (2.1.14) se puede reescribir como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv}{dt} = w \quad (2.1.16)$$

$$\frac{dw}{dt} = \alpha^2 f(v; \lambda) - \alpha^2 w, \quad (2.1.17)$$

$$\text{donde } f(v; \lambda) = \frac{\lambda}{(1-v)^2} - v. \quad (2.1.18)$$

Podemos ver que los valores de λ y v que satisfacen la condición (2.1.15) son justamente las raíces de la función $f(v; \lambda)$ la cual tiene la siguiente gráfica:

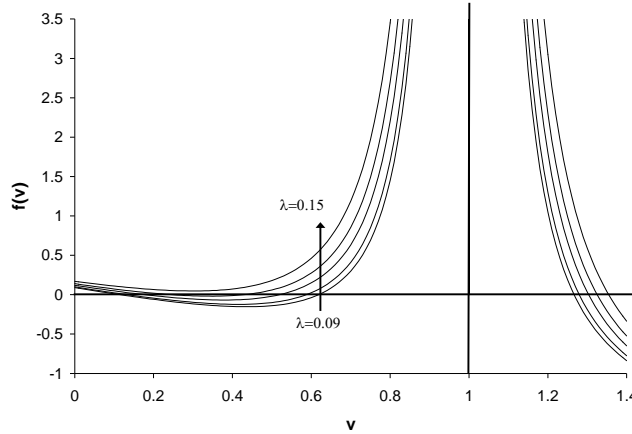


Fig. II.1.3 Obtención de los valores críticos de λ

Si linealizamos el sistema definido por las ecuaciones (2.1.16) y (2.1.17) alrededor de un valor v_0 tal que dicho valor es una raíz de la función f obtenemos el sistema:

$$\frac{dv}{dt} = w \quad (2.1.18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \alpha^2 f'(v_0)(v - v_0) - \alpha^2 w, \quad (2.1.19)$$

donde la matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 f'(v_0) & -\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1.19)$$

cuyos valores propios son

$$\beta = -\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{\alpha^2}{2} \sqrt{1 + \frac{4f'(v_0)}{\alpha^2}}. \quad (2.1.20)$$

Analizando cada una de las posibilidades para el valor de $f'(v_0)$ se llega a las siguientes conclusiones:

- Si $f'(v_0) < -\frac{\alpha^2}{4}$ entonces $\text{Re}(\beta) < 0$ y la solución es estable
- Si $-\frac{\alpha^2}{4} < f'(v_0) < 0$ entonces $\text{Im}(\beta) = 0$, y $\beta_1, \beta_2 < 0$ y la solución es estable
- Si $f'(v_0) > 0$ entonces $\beta_1 < 0$ y $\beta_2 > 0$ por lo que la solución es un punto silla

Esto significa que de los dos valores de v que se obtienen para cada valor de λ en el diagrama de bifurcación de la figura II.1.2, únicamente aquél que tiene la característica de que $f'(v_0) < 0$ es estable. Basándonos en la gráfica de f de la figura II.1.3 podemos concluir que la menor de las dos raíces es la que satisface la condición de pendiente negativa haciendo que la separación máxima sea $v^* = 1/3$.

II.2 Modelación de Sistemas Electrostáticos-Elásticos

La principal desventaja del modelo masa-resorte de actuación electrostática es su insensibilidad ante cambios en la geometría del sistema y su incapacidad de reflejar los efectos elásticos realistas. Este modelo es utilizado para describir sensores de presión, microbombas, actuadores termoneumáticos, sistemas de despliegue electrostático y dispositivos MEMS y NEMS.

Nuevamente consideremos el modelo general de un sistema electrostático-elástico como el que se muestra en la figura II.2.1.

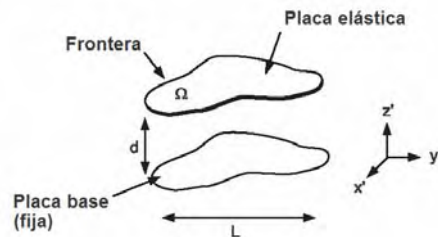


Fig. II.2.1 Representación gráfica de un sistema electrostático-elástico

La geometría del sistema se deriva al permitir que la placa flexible se pueda deformar, haciendo esto que el campo eléctrico se distorsione. Para los efectos elásticos

se incorporará en el modelo la teoría de membranas para modelar la deformación de la placa elástica.

II.2.1 Caso electrostático

Utilizando la ecuación que modela el comportamiento de un sistema de placas, la ecuación que describe la magnitud de la deflexión de la placa no rígida, w' , satisface la ecuación*

$$\rho h \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + a \frac{\partial w'}{\partial t} - b \nabla_{\perp}^2 w' + D \nabla_{\perp}^4 w' = -\frac{\epsilon_0}{2} |\nabla \phi|^2 \quad (2.2.1)$$

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\phi = V \text{ en la placa elástica,} \quad (2.2.3)$$

$$\phi = 0 \text{ en la placa base (fija),} \quad (2.2.4)$$

donde:

- ρ : Densidad
- h : Grosor de la placa
- w' : Deflexión
- t' : Tiempo
- a : Constante de amortiguamiento
- b : Módulo elástico
- ϵ_0 : Permisibilidad del espacio vacío
- ϕ : Potencial electrostático
- D : Rigidez flexural

$$\nabla_{\perp}^2: \text{ Operador laplaciano respecto a } x' \text{ y } y', \text{ es decir } \nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$$

$$\nabla_{\perp}^4: \text{ Operador biarmónico (bilaplaciano) respecto a } x' \text{ y } y' \text{ [A1].}$$

Para simplificar esta ecuación, es posible reescribirla de manera adimensional mediante los cambios de variable

* La derivación de esta expresión puede ser revisada en la referencia [19]

$$w = \frac{w'}{d}, \quad \psi = \frac{\phi}{V}, \quad x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad z = \frac{z'}{d}, \quad t = \frac{bt'}{aL^2},$$

obteniendo como resultado la ecuación

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 w + \delta \nabla_{\perp}^4 w = -\lambda \left[\varepsilon^2 |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.2.5)$$

$$\varepsilon^2 \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\psi = 1 \text{ en la placa elástica}, \quad (2.2.7)$$

$$\psi = 0 \text{ en la placa base (fija)}, \quad (2.2.8)$$

donde

α : Inverso del factor de calidad del sistema
(también conocido como factor Q [13])

$$\alpha = \frac{aL}{\sqrt{\rho hb}},$$

δ : Mide la importancia relativa de la tensión
y rigidez

$$\delta = \frac{D}{L^2 b},$$

ε : Razón de orientación (aspect ratio) del
sistema

$$\varepsilon = \frac{d}{L},$$

λ : Proporción entre la fuerza electrostática y
la fuerza elástica

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2d^3 \mu}.$$

Debido a que éste es un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, es difícil encontrar soluciones exactas, incluso para geometrías relativamente simples, por lo que será necesario hacer algunas restricciones en los parámetros para simplificar el sistema.

En primer lugar, es posible considerar el caso límite de una razón de orientación pequeña, el cual implica que $\varepsilon \ll 1$, lo cual significa físicamente que la longitud lateral del dispositivo es mucho más grande que la separación entre las placas base y la elástica. Por lo tanto, si consideramos ε muy cercana a cero obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.2.9)$$

lo cual puede ser resuelto para aproximar el potencial y así obtener

$$\psi \approx Az + B, \quad (2.2.10)$$

y utilizando las condiciones $\psi(x, y, w, t) = 1$ y $\psi(x, y, 0, t) = 0$ obtenemos

$$\psi \approx \frac{z}{w}. \quad (2.2.11)$$

El uso de esta aproximación es equivalente a ignorar el campo en los bordes. Por lo tanto, nuestra ecuación diferencial principal nos queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla_{\perp}^2 w + \delta \nabla_{\perp}^4 w = -\frac{\lambda}{w^2}, \quad (2.2.12)$$

la cual ya es independiente de la ecuación del potencial pero sigue siendo no lineal.

II.2.2 Teoría de membranas

Si consideramos el caso en el que la placa no tiene rigidez, es decir $\delta=0$, significa que únicamente serán considerados los efectos de tensión. Por lo tanto, la ecuación correspondiente a la deflexión w en el estado de equilibrio, es decir

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \text{ es}$$

$$\nabla_{\perp}^2 w = \frac{\lambda}{w^2} \text{ en } \Omega, \quad (2.2.13)$$

donde Ω es el dominio determinado por la geometría de la placa, además de hacer el supuesto de que la membrana se mantiene fija en la frontera lo cual implica que

$$w = 1 \text{ en } \partial\Omega. \quad (2.2.14)$$

Estos resultados están orientados principalmente para el caso electrostático, lo cual puede ser identificado en la relación con el inverso del cuadrado de la distancia [2]. Para el caso general en el que la fuerza dominante dependa del inverso de una potencia distinta de dos de la distancia, la ecuación para describir la deflexión sería de la forma

$$\nabla_{\perp}^2 w = \frac{\lambda}{w^n}, \quad (2.2.15)$$

donde n , en principio, puede tomar cualquier valor positivo quedando las fuerzas de van der Waals ($n=3$) o de Casimir ($n=4$) como casos particulares del problema.

Capítulo III

Modelación de sistemas elásticos para fuerzas generales

En este capítulo se enunciarán y demostrarán algunas propiedades importantes de la ecuación 2.2.15 que servirán para analizar sus valores críticos y su interpretación en el fenómeno de adhesión. Para ello se utilizará el cambio de variable $w=1+u$ resultando la expresión a analizar de la forma

$$\begin{aligned} -\nabla_{\perp}^2 u &= -\frac{\lambda}{(1+u)^n}, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Además se obtendrá la solución analítica para el caso de una membrana unidimensional y se compararán las deformaciones y valores críticos para varios valores de la potencia n , incluyendo el caso electrostático, fuerza de van der Waals y de Casimir.

Por último se analizará el caso bidimensional en el que la membrana tiene una forma circular* el cual se resolverá de manera numérica.

III.1 Generalización de propiedades

Propiedad 1

Si consideramos el problema de encontrar las soluciones a la ecuación

$$u = -\frac{\lambda}{(1+u)^n}, \quad (3.1.1)$$

restringido a que $-1 < u \leq 0$ y $n \geq 1$, entonces para cada valor de n existe un valor λ^ para el cual la ecuación no tiene solución si $\lambda > \lambda^*$.*

* Es importante recordar que el problema es sumamente sensible a la forma de la membrana por lo que los resultados bidimensionales obtenidos para el caso circular no se pueden generalizar para otras geometrías.

Demostración:

Sabemos que u_0 es una solución de la ecuación si satisface $-u_0(1+u_0)^n = \lambda$. Analizando la función $f(u) = -u(1+u)^n$ podemos observar que su gráfica, dependiendo del valor de n , es la siguiente:

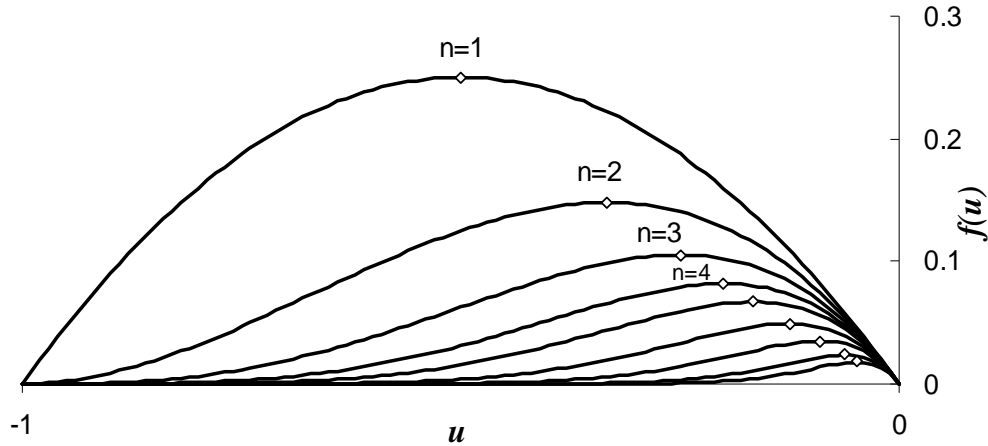


Fig. III.1.1 Obtención de los valores críticos de λ

Podemos observar que como $f(u) = \lambda$ y para cada valor de n la función f tiene un máximo, entonces la ecuación $-u(1+u)^n = \lambda$ no tiene solución si λ es mayor que ese valor máximo de f .

Dicho valor máximo satisface que $f'(u^*) = 0$, por lo tanto el punto máximo de f es el siguiente:

$$f'(u) = -nu(1+u)^{n-1} - (1+u)^n = -(1+u)^{n-1}(nu + u + 1),$$

$$f'(u^*) = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{n+1} \Rightarrow f(u^*) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Por lo tanto, si tomamos $\lambda^* = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ es evidente que la ecuación original no tendrá solución si $\lambda > \lambda^*$.

■

Es importante resaltar que el hecho de que los valores del parámetro λ estén restringidos, tanto en la propiedad 1 como en resultados posteriores, tendrá importantes interpretaciones físicas sobre el comportamiento de la membrana, principalmente en la identificación de los límites máximos de deflexión antes de que ocurra el colapso entre las placas.

Teorema 1

Sea Ω un dominio acotado en \mathbf{R}^2 con frontera acotada $\partial\Omega$. Si se considera el problema

$$-\nabla_{\perp}^2 u = -\frac{\lambda}{(1+u)^n}, \quad (3.1.2)$$

$$u=0 \text{ en } \partial\Omega \quad (3.1.3)$$

(i.e. la frontera de la membrana).

entonces existe una λ^* tal que no existe solución u para cualquier valor $\lambda > \lambda^*$.

Demostración:

Sea κ_1 el menor valor propio del problema

$$-\nabla_{\perp}^2 u = \alpha u, \quad (3.1.4)$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad (3.1.5)$$

con u_1 su función propia asociada. Se sabe que el valor propio κ_1 es simple, es decir, su correspondiente función propia es única[†]. Además u_1 debe ser elegida estrictamente positiva en Ω .

Ahora reescribimos la ecuación del problema original de la forma

$$-\nabla_{\perp}^2 u - \kappa_1 u = -\frac{\lambda}{(1+u)^n} - \kappa_1 u. \quad (3.1.6)$$

Esta ecuación tendrá solución si y sólo si la expresión del lado derecho es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea, es decir, la condición para poderla resolver es

[†] Para mayores detalles en los argumentos de la demostración, revisar las referencias [20] y [21]

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{(1+u)^n} + \kappa_1 u \right) u_1 = 0. \quad (3.1.7)$$

Como u_1 es estrictamente positiva entonces la expresión que está entre paréntesis debe ser siempre cero o cambiar de signo. Pero es claro que no puede ser siempre cero por lo que debe existir algún valor de u para el cual ocurra el cambio de signo, es decir:

$$\frac{\lambda}{\kappa_1} = -u(1+u)^n. \quad (3.1.8)$$

Utilizando el resultado de la Propiedad 1 sabemos que si definimos $\Lambda = \frac{\lambda}{\kappa_1}$

podemos concluir que $\Lambda = \frac{\lambda}{\kappa_1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Por lo tanto, si $\lambda \geq \kappa_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ entonces no existe solución u del problema original.

■

Dada la forma de la demostración del Teorema 1, es fácil observar que el valor $\kappa_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ es una cota superior para λ^* , lo cual se enuncia en el siguiente corolario.

Corolario 1

El valor crítico λ^ para el problema anterior satisface la condición*

$$\lambda^* \leq \kappa_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

A continuación se define lo que es una solución superior y una inferior al problema definido por las expresiones (3.1.2) y (3.1.3), lo cual servirá para demostrar la existencia de la solución.

Definición 1

La función $\bar{u} \in C^2(\Omega)$ se define como una solución superior al problema planteado por las expresiones (3.1.2) y (3.1.3) si

$$-\nabla_{\perp}^2 \bar{u} \geq -\frac{\lambda}{(1+\bar{u})^n} \text{ en } \Omega \tag{3.1.9}$$

$$\bar{u} \geq 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{3.1.10}$$

La definición de una solución inferior es análoga a la de una solución superior.

Lema 1

Cualquier constante C positiva es una solución superior de las ecuaciones (3.1.2) y (3.1.3) para cualquier valor $\lambda \geq 0$.

Demostración:

La gráfica de la función $f(u) = -\frac{\lambda}{(1+u)^n}$, $-1 < u \leq 0$ es

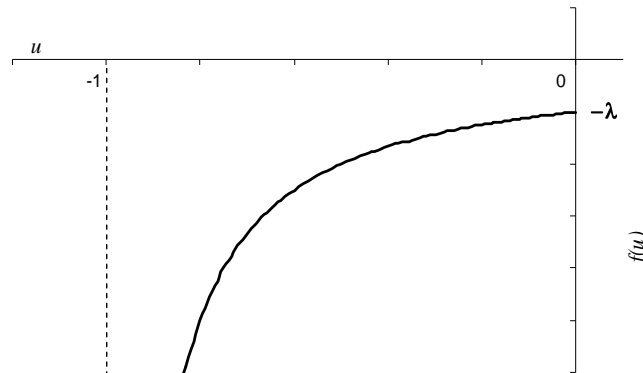


Fig. III.1.2 Obtención de una solución superior

Por lo tanto, es evidente que cualquier función de la forma $u(x)=C$ con $C > 0$ satisface las condiciones (3.1.2) y (3.1.3). ■

Para obtener una solución inferior, se debe definir el dominio Ω' como un dominio acotado con frontera suave y que contiene a Ω como un subconjunto propio.

Ahora consideremos resolver el problema de valores propios

$$-\nabla_{\perp}^2 u = \mu u \text{ en } \Omega', \quad (3.1.11)$$

$$u=0 \text{ en } \partial\Omega', \quad (3.1.12)$$

sobre este dominio *agrandado* y sea μ_1 el valor propio más pequeño con w_1 su correspondiente función propia. Hay que destacar que como Ω es un subconjunto propio de Ω' , entonces w_1 será escogida estrictamente positiva en Ω .

Ahora se propone Aw_1 como una solución inferior donde A es un escalar. Será necesario que $Aw_1 \leq 0$, lo cual implica que $A < 0$. Además se requiere que

$$-\nabla_{\perp}^2 (Aw_1) \leq -\frac{\lambda}{(1+Aw_1)^n} \quad (3.1.13)$$

en el dominio Ω . Pero como el operador laplaciano es lineal y w_1 es una función propia, podemos reescribir la restricción anterior como

$$-\mu_1 Aw_1 - \frac{\lambda}{(1+Aw_1)^n} \geq 0. \quad (3.1.14)$$

Para obtener A , es necesario que $1+Aw_1 > 0$. Si la función w_1 está normalizada de tal forma que su máximo sea 1 y su mínimo en Ω sea un cierto valor m , podemos satisfacer la condición anterior pidiendo únicamente que $1+A > 0$, o lo que es lo mismo, $A > -1$ (recordando además que $A < 0$).

Ahora, para que el valor de A también satisfaga la condición (3.1.14), podemos reescribir ésta como

$$\lambda \leq -\mu_1 Aw_1 (1+Aw_1)^n. \quad (3.1.15)$$

Pero si restringimos los valores tanto de A como de m de tal forma que

$$m > \frac{1}{n+1}, \quad (3.1.16)$$

$$-1 < A < -\frac{1}{(n+1)m}, \quad (3.1.17)$$

obtenemos que $-1 < Aw_1 < -\frac{1}{n+1}$ y utilizando la demostración de la propiedad 1 podemos ver que la función $f(u) = -u(1+u)^n$ se puede utilizar en la desigualdad ya que

$$\lambda \leq -\mu_1 Aw_1(1 + Aw_1)^n = \mu_1 f(Aw_1), \quad (3.1.18)$$

la cual tiene su máximo en $-\frac{1}{n+1}$ (lo cual justifica la selección de dicho valor en la propuesta de m) y es de $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Podemos concluir que

$$\lambda \leq \mu_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \quad (3.1.19)$$

Todo esto implica que la selección del dominio Ω' debe ser de tal forma que el mínimo de su primer función propia, w_1 , sea mayor a $\frac{1}{n+1}$ sobre Ω para poder cumplir la restricción (3.1.14). Siguiendo este procedimiento podemos encontrar una solución inferior y justificar el siguiente lema.

Lema 2

Existe una constante A tal que la función Aw_1 es una solución inferior para toda

$$\lambda \leq \mu_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

El siguiente teorema es simplemente una consecuencia de los lemas 1 y 2 y del teorema de existencia de una solución entre un par ordenado de soluciones inferior y superior.

Teorema 2

Existe una solución para las condiciones (3.1.2) y (3.1.3) si se satisface que

$$\lambda \leq \mu_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Corolario 2

El valor crítico λ^ satisface la condición $\lambda^* \geq \mu_1 \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.*

A partir de estos teoremas no sólo se garantiza la existencia de soluciones al problema determinado por las condiciones (3.1.2) y (3.1.3), sino que además se dan cotas tanto inferior como superior para el valor crítico λ^* , indispensable para obtener la deflexión máxima de la membrana. Además, el valor de μ_1 hace explícita la dependencia del valor crítico con la geometría de la membrana.

Como ejemplo de estos resultados, tomemos el caso unidimensional (visto con más detalle en la siguiente sección) en donde el problema a resolver es

$$-u'' = \alpha u, \quad (3.1.20)$$

$$u(-1/2) = u(1/2) = 0. \quad (3.1.21)$$

Analizando el caso en que $\alpha=0$ tenemos que la solución debe ser de la forma $u(x) = Ax + B$ y utilizando las condiciones de frontera tendríamos que $A=B=0$ por lo que obtendríamos la solución trivial al problema.

Para el caso en que $\alpha>0$, supongamos que $\alpha=\beta^2$, tendríamos que la solución es de la forma

$$u(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x). \quad (3.1.22)$$

Al considerar la restricción 3.1.21 tenemos que necesariamente los valores propios α son

$$\alpha = (2m-1)^2 \pi^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1.23)$$

Para el caso en que $\alpha<0$, supongamos que $\alpha=-\beta^2$, tendríamos que la solución es de la forma

$$u(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}. \quad (3.1.24)$$

Al considerar nuevamente la restricción 3.1.21 tenemos que necesariamente $C_1 = -C_2$ y en consecuencia

$$u(x) = 2C_1 \sinh(\beta x). \quad (3.1.25)$$

Pero como $\beta \neq 0$ entonces la condición $u(1/2) = 2C_1 \sinh(\beta/2) = 0$ implica que $C_1=0$ por lo que nuevamente obtenemos que la solución es la trivial.

Con este resultado podemos concluir que el valor propio más pequeño, κ_1 , del problema (3.1.20) y (3.1.21) es

$$\kappa_1 = \pi^2. \quad (3.1.26)$$

Este resultado y el teorema 1 servirán para definir una cota superior para los valores críticos de λ .

Ahora se define como Ω' el intervalo $[-c, c]$ con $c > 0.5$ en principio, el cual claramente tiene como subconjunto propio a Ω . Si ahora resolvemos el problema

$$-u'' = \alpha u, \quad (3.1.27)$$

$$u(-c) = u(c) = 0, \quad (3.1.28)$$

tenemos nuevamente que para el caso en que $\alpha = 0$, la solución es la solución trivial $u(x) = 0$.

Para el caso en que $\alpha > 0$, supongamos que $\alpha = \beta^2$, tendríamos que la solución es de la forma

$$u(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x). \quad (3.1.29)$$

Al considerar la restricción 3.1.28 tenemos que necesariamente los valores propios α son

$$\alpha = \left(\frac{2m-1}{2c} \right)^2 \pi^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1.30)$$

Finalmente, para el caso en que $\alpha < 0$, supongamos que $\alpha = -\beta^2$, tendríamos que la solución es de la forma

$$u(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}. \quad (3.1.31)$$

Al considerar nuevamente la restricción 3.1.21 tenemos que necesariamente $C_1 = -C_2$ y en consecuencia

$$u(x) = 2C_1 \sinh(\beta x). \quad (3.1.32)$$

Pero como $\beta \neq 0$ entonces la condición $u(c) = 2C_1 \sinh(c\beta) = 0$ implica que $C_1=0$ por lo que nuevamente obtenemos que la solución es la trivial.

Nuevamente podemos concluir que el valor propio más pequeño, μ_1 , del problema (3.1.27) y (3.1.28) es

$$\mu_1 = \frac{1}{4c^2} \pi^2. \quad (3.1.33)$$

En conclusión, el valor crítico de λ está acotado por

$$\frac{1}{4c^2} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \pi^2 \leq \lambda^* \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \pi^2. \quad (3.1.34)$$

Es importante resaltar que para obtener el valor de c , es necesario satisfacer las condiciones que se establecieron en la discusión previa al lema 2, donde se requiere que la función propia $w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2c}x\right)$ correspondiente a μ_1 esté normalizada y acotada inferiormente en Ω por $\frac{1}{n+1}$. Esto implica que el valor c debe satisfacer que

$$c > \frac{\pi}{4 \cos^{-1} \frac{1}{n+1}}. \quad (3.1.35)$$

Utilizando estas cotas con los valores críticos de λ (que serán obtenidos en la siguiente sección) obtenemos la siguiente gráfica:

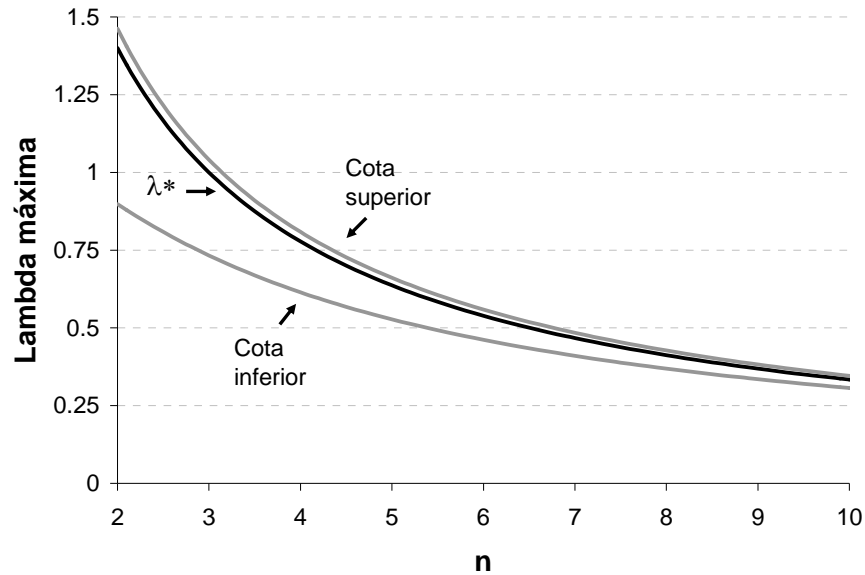


Fig. III.1.3 a) Comparación entre los valores críticos de λ y su cota inferior y superior obtenidas en los teoremas 1 y 2 para $n \leq 10$

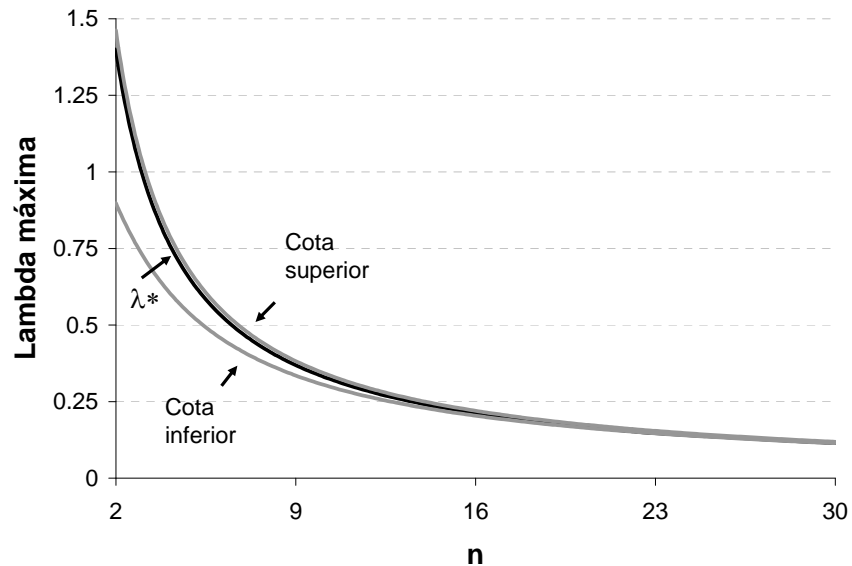


Fig. III.1.3 b) Comparación entre los valores críticos de λ y su cota inferior y superior obtenidas en los teoremas 1 y 2 para $n \leq 30$

Es importante señalar que el valor de c para definir la cota inferior puede ser definido de manera aun más precisa para el caso de la membrana unidimensional (utilizando $c=0.512$ para cualquier valor de n), pero hay que recordar que el resultado obtenido en el teorema 2 es mucho más general y abarca los casos bidimensionales en los que la forma de la membrana puede ser casi arbitraria.

El siguiente paso será analizar el caso de la membrana unidimensional a detalle para el cual se obtendrá de manera analítica la solución general de (3.1.2) y (3.1.3).

III.2 Membranas unidimensionales

Al generalizar la expresión $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda}{(1+u)^2}$ para fuerzas diferentes a la electrostática (órdenes diferentes a 2) para el caso unidimensional obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda}{(1+u)^n}, \quad (3.2.1)$$

(generalización de la condición de equilibrio para fuerzas del tipo $F \sim 1/r^n$)

$$u(-1/2) = u(1/2) = 0, \quad (3.2.2)$$

(condición de frontera para hacer simétrica la solución respecto a $u=0$)

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (3.2.3)$$

(condición para que la solución u sea suave en el punto de máxima deflexión)

Para el caso electrostático $n=2$ la solución analítica [2] es

$$\sqrt{\frac{(u+1)(u+1-\lambda/E)}{2E}} + \frac{\lambda}{E\sqrt{2E}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{u+1-\lambda/E}{u+1}} = x, \quad (3.2.4)$$

donde el valor de E debe satisfacer la condición

$$\sqrt{\frac{1-\lambda/E}{2E}} + \frac{\lambda}{E\sqrt{2E}} \tanh^{-1} \sqrt{1-\lambda/E} = \frac{1}{2}, \quad (3.2.5)$$

obtenida de la condición de frontera $u(1/2)=0$, la cual se resolverá numéricamente.

Para el caso general, también es posible encontrar la solución analítica de la membrana unidimensional con el mismo procedimiento utilizado para resolver el caso electrostático.

En primer lugar, la ecuación (3.2.1) se multiplica por du/dx y se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{(n-1)(1+u)^{n-1}} \right] = 0. \quad (3.2.6)$$

Al integrar una vez esta expresión obtenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{(n-1)(1+u)^{n-1}} = E. \quad (3.2.7)$$

En este caso la constante de integración se ha denominado E , ya que representa la energía del sistema, donde el primer sumando de la expresión a la izquierda de la ecuación representa la energía elástica mientras que el otro sumando es la energía correspondiente al valor de n (i.e. electrostático para $n=2$, van der Waals para $n=3$, Casimir para $n=4$, etc.).

Si ahora despejamos du/dx obtenemos

$$\frac{du}{dx} = \pm \sqrt{2E - \frac{2\lambda}{(n-1)} \cdot \frac{1}{(1+u)^{n-1}}}, \quad (3.2.8)$$

$$\frac{du}{\sqrt{2E - \frac{2\lambda}{(n-1)} \cdot \frac{1}{(1+u)^{n-1}}}} = \pm dx. \quad (3.2.9)$$

Para poder obtener la solución analítica haremos el siguiente cambio de variable:

$$w = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^{n-1}}, \quad (3.2.10)$$

$$dw = \frac{1}{(1+u)^n} du \Rightarrow \left(-\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{w^{\frac{n}{n-1}}} dw = du, \quad (3.2.11)$$

obtenemos que la solución a la integral $\int \frac{du}{\sqrt{2E - \frac{2\lambda}{n-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^{n-1}}}}$ es

$$= \left(-\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \int \frac{dw}{w^{\frac{n}{n-1}} \sqrt{2E + 2\lambda w}} \quad (3.2.12)$$

$$= - \frac{\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[-2(n-1) \left(-\frac{\lambda w}{E}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} (E + \lambda w) + (n-3) \lambda w \sqrt{1 + \frac{\lambda w}{E}} \text{Beta}\left(-\frac{\lambda w}{E}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2}\right) \right]}{2\sqrt{2}(n-1)Ew^{\frac{n-2}{n-1}} \left(-\frac{\lambda w}{E}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \sqrt{E + \lambda w}} + C \quad (3.2.13)$$

$$= \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot (-w)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{E + \lambda w} + \frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \text{Beta}\left(-\frac{\lambda w}{E}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2}\right) \right] + C, \quad (3.2.14)$$

donde $Beta(x, z, w)$ es la función *Beta incompleta*[‡] definida como

$$Beta(x, z, w) = \int_0^x t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (3.2.15)$$

Para obtener el valor de la constante de integración C se utiliza la restricción

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0 \text{ obteniendo:}$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \text{Beta}\left(\frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2}\right), \quad (3.2.16)$$

donde $Beta(z, w)$ es la función *Beta* definida como

$$Beta(z, w) = Beta(1, z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt. \quad (3.2.17)$$

Por lo tanto, la solución de la integral queda de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot (-w)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{E + \lambda w} + \frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \text{Beta}\left(-\frac{\lambda w}{E}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2}\right) \right] + \\ & - \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \text{Beta}\left(\frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2}\right) \right] = |x|, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

[‡] El cálculo de las funciones Beta y Beta incompleta se realiza en Matlab por lo que no hubo necesidad de definir algún metodo de aproximación para dichas funciones.

y con las condiciones $u(-1/2)=u(1/2)=0$, o en términos de w equivalen a

$w(-1/2) = w(1/2) = -\frac{1}{n-1}$ obtenemos que los valores de λ y E que las satisfacen son

los siguientes:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \left(\frac{1}{n-1} \right)^{-\frac{1}{n-1}} \sqrt{E - \frac{\lambda}{n-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \text{Beta} \left(\frac{\lambda}{E(n-1)}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2} \right) \right] + \\ & - \left(\frac{1}{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \text{Beta} \left(\frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

La cual puede ser simplificada hasta obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2E}} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \left(\frac{\lambda}{E(n-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left[\text{Beta} \left(\frac{\lambda}{E(n-1)}, \frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2} \right) - \text{Beta} \left(\frac{n-2}{n-1}, \frac{1}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \sqrt{E - \frac{\lambda}{n-1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

III.3 Resultados numéricos de membranas unidimensionales

Como se pudo ver en la sección anterior, a pesar de haber encontrado una solución analítica al problema de la membrana unidimensional, uno de los primeros problemas con los que hay que enfrentarse es resolver la ecuación implícita 3.2.20 para encontrar el valor de E correspondiente a un valor determinado de λ . Para ello se utilizó el método numérico de bisección con una precisión de 10^{-12} para el valor de E (ver Anexo 4).

Una vez resuelto este problema, la gráfica de la función implícita entre λ y E para cada valor de n queda de la siguiente forma:

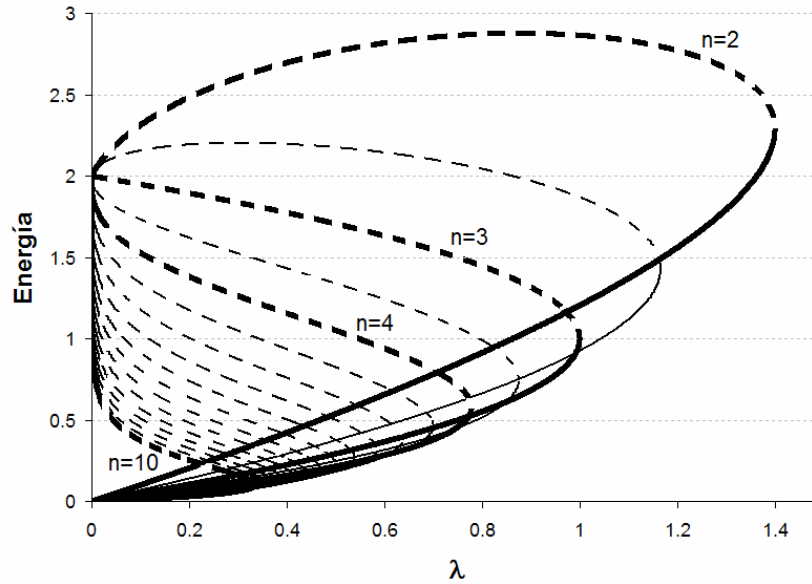


Fig. III.3.1 Condición de frontera entre E y λ para diferentes valores de n

Podemos ver en la figura III.3.1 que, a medida que aumenta el orden de la fuerza n , las combinaciones de valores de λ y E que satisfacen las condiciones de frontera se restringen cada vez más.

Esto se puede interpretar como que a medida que la fuerza dominante es de mayor orden (i.e. aumenta el valor de n) el parámetro λ deberá disminuir para evitar el fenómeno de adhesión (i.e. que el problema definido por las expresiones (3.2.1)-(3.2.3) no tenga solución) y la energía del sistema también será cada vez menor (figuras III.3.2 y III.3.3).

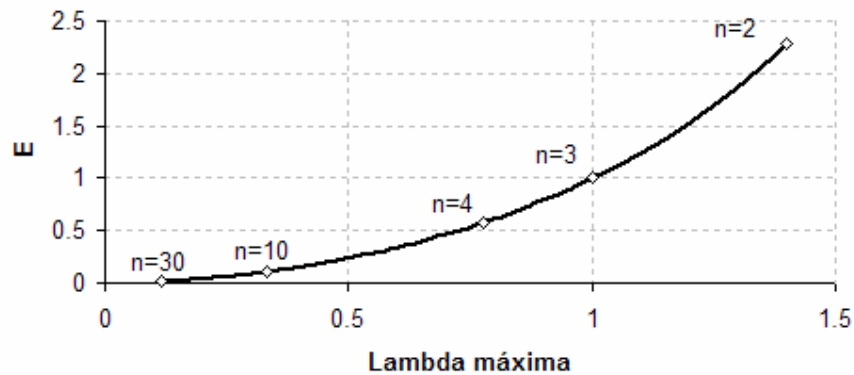
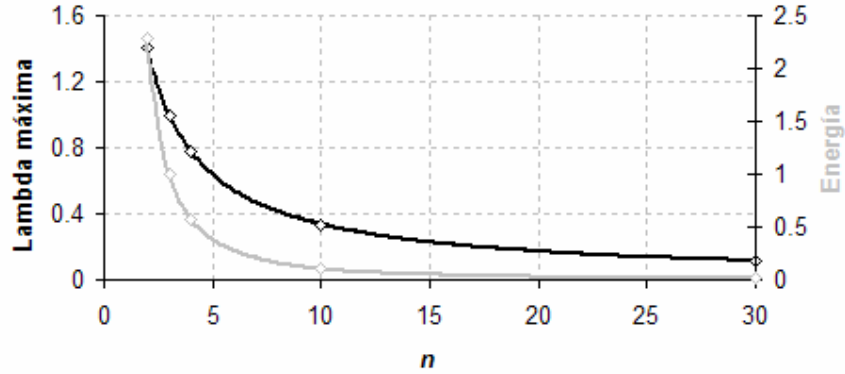


Fig. III.3.2 Valores críticos de λ con su correspondiente energía


 Fig. III.3.3 Valores críticos de λ y energía para cada valor de n

Además, independientemente del valor de n , estas curvas pasan por el punto $(0, 2)$ y tienen como límite el $(0, 0)$ (ya que no está definida para $E=0$). Para demostrar esto, basta con sustituir $\lambda=0$ en (3.2.20) y resolver para E :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \sqrt{E} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{E} - \sqrt{2E} = 0 \Rightarrow \sqrt{2E}(\sqrt{2} - \sqrt{E}) = 0 \\ &\Rightarrow E = 0, \quad E = 2. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Otro resultado interesante es que algebraicamente para cada valor de λ se tienen dos valores diferentes de E que satisfacen la restricción (3.2.20), a los que podemos denotar por E_* y E^* donde $E_* < E^*$.

Haciendo el análisis con ambos valores de E podemos obtener la gráfica de la deflexión de la membrana correspondiente a un mismo valor de λ y diferentes valores de n como se muestra a continuación:

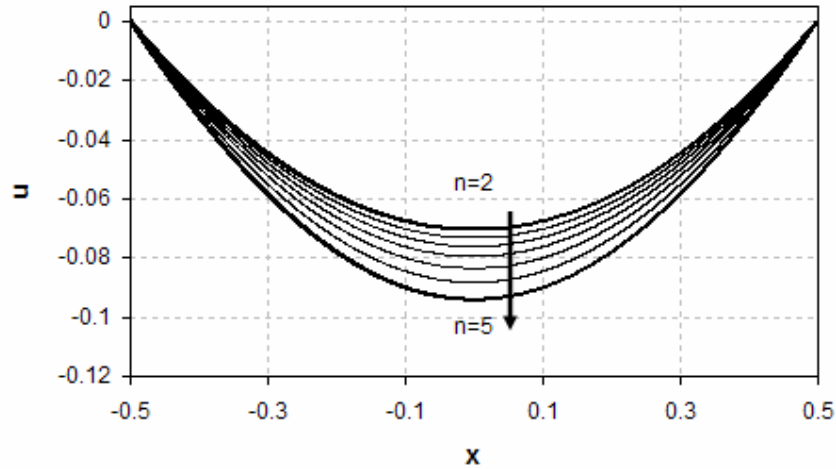


Fig. III.3.4 Comparación de membranas utilizando E_* para diferente n y $\lambda=0.5$

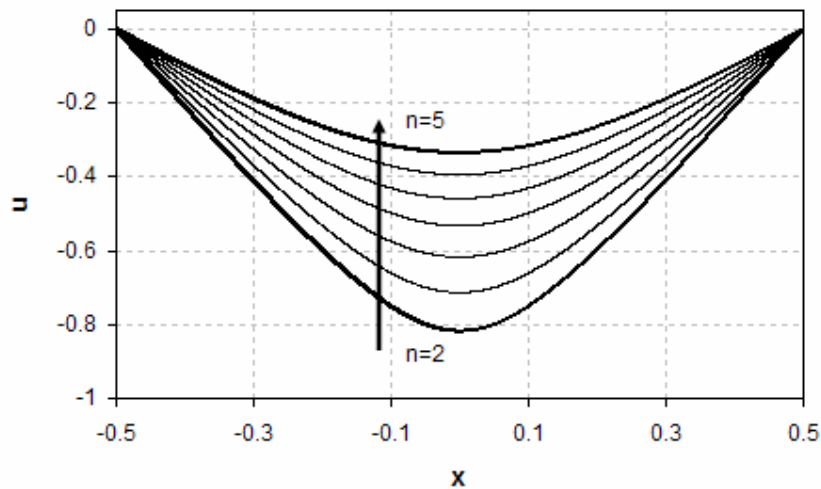


Fig. III.3.5 Comparación de membranas utilizando E^* para diferente n y $\lambda=0.5$

Dado un valor fijo de λ , a medida que aumenta n la membrana debe deformarse cada vez más con respecto a su estado inicial (debido a que la fuerza de atracción es más fuerte). Esto es físicamente congruente con el uso de E_* en lugar de E^* .

Además, el valor de E^* permite teóricamente que la membrana tienda a hacer contacto en su punto medio con la placa inferior (ubicada en $u=-1$) a medida que disminuye λ , sin importar el valor de n , como se ve en la figura III.3.6. Esto es imposible físicamente ya que uno de los supuestos es que la fuerza atractiva es inversamente proporcional a una potencia de la distancia entre las placas haciendo que en ese punto la fuerza sea infinita y no podría ser una solución estable.

Este resultado también es compatible con estudios hechos en modelos en los que se consideran los efectos conjuntos de la fuerza electrostática y de Casimir [17] en donde también se demuestra que, a pesar de que el diagrama de bifurcación da más de una solución para cada valor de λ , únicamente se toma la parte inferior del diagrama.

Por lo tanto, únicamente son soluciones estables aquellas correspondientes a los de menor energía, es decir, E_* .

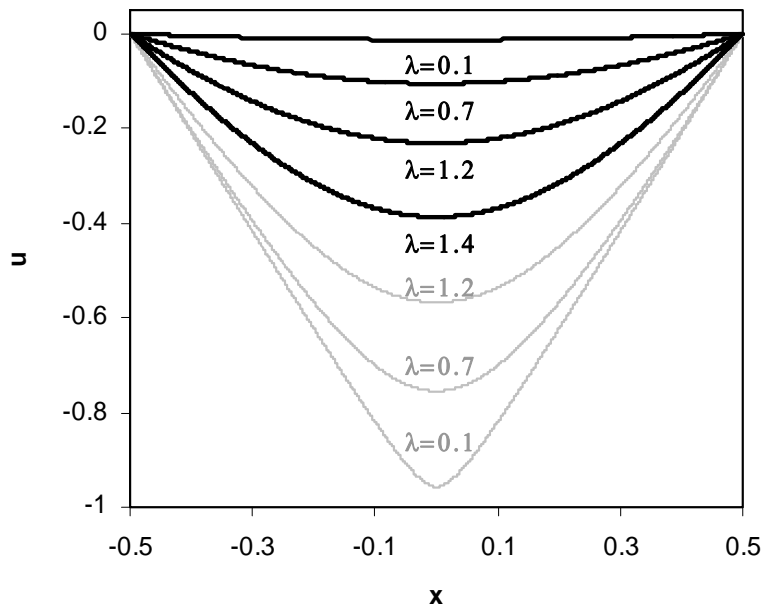


Fig III.3.6 a) Comportamiento de la membrana para $n=2$ con diferentes valores de λ

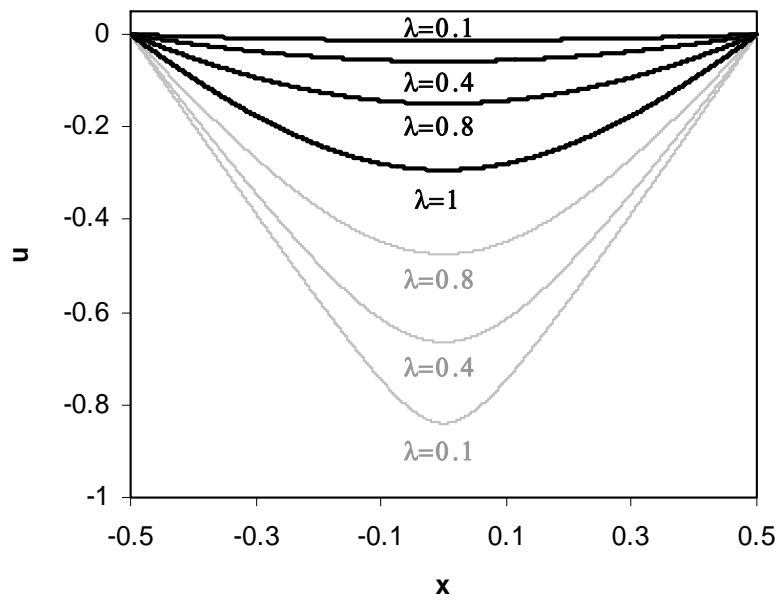


Fig III.3.6 b) Comportamiento de la membrana para $n=3$ con diferentes valores de λ

Para el caso en el que se considera un mismo tipo de fuerza (es decir n fija, y diferentes valores de λ) tenemos que la deflexión de la membrana es cada vez mayor a medida que λ aumenta y se acerca a su valor crítico (figura III.3.7).

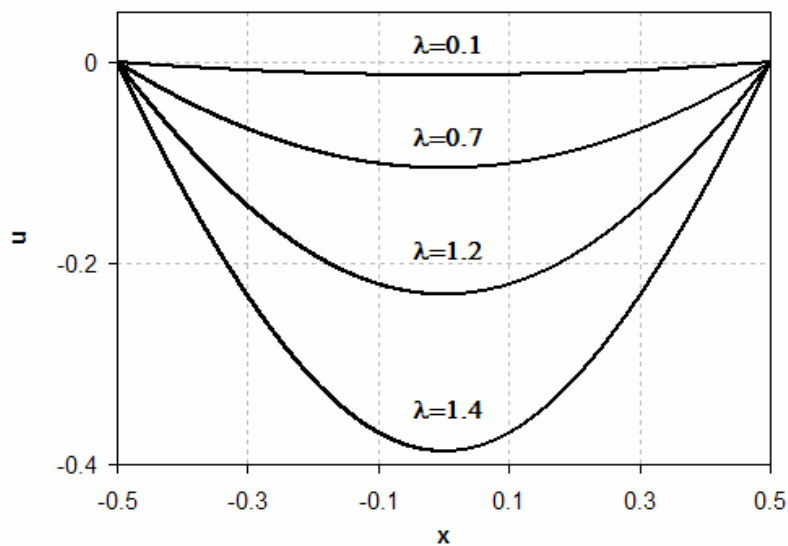


Fig. III.3.7 a) Deflexión de la membrana para el caso de fuerza electrostática ($n=2$) para diferentes valores de λ .

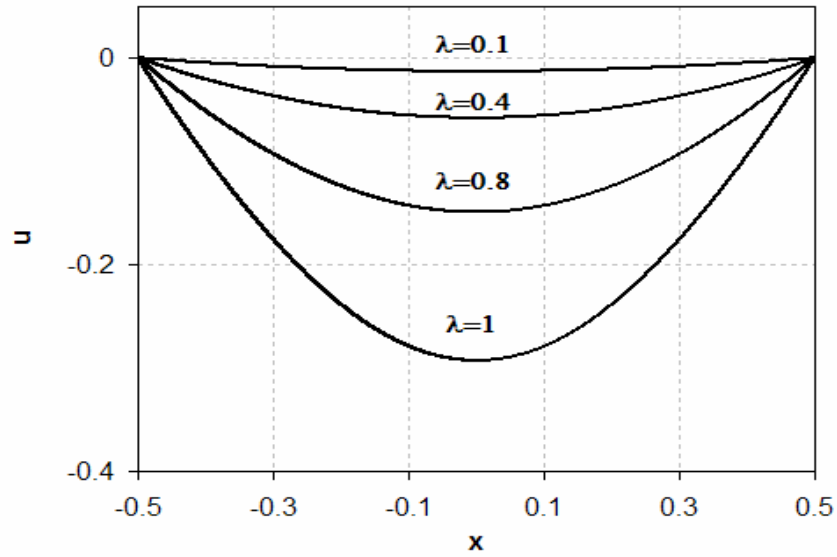


Fig. III.3.7 b) Deflexión de la membrana para el caso de fuerza de van der Waals ($n=3$) para diferentes valores de λ .

Si graficamos la membrana con la máxima deformación (correspondiente a la máxima λ) para cada n (figuras III.3.8 y III.3.9) podemos ver que, a medida que aumenta n , la máxima deformación alcanzada es menor ya que los valores permitidos de λ y E que satisfacen las condiciones de frontera están más restringidos.

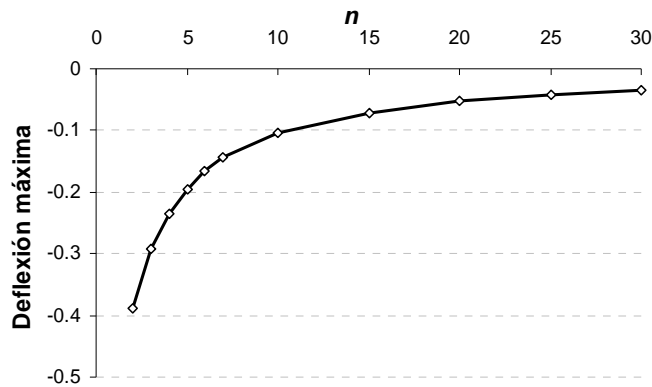
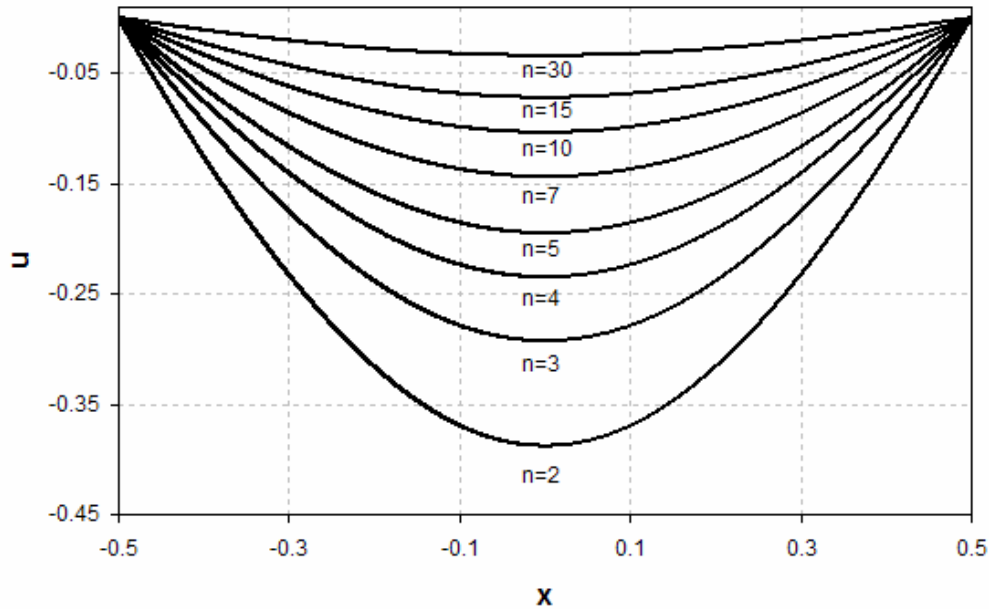


Fig. III.3.8 Deflexión máxima de la membrana en función de n

Fig. III.3.9 Membrana con su deflexión máxima para cada valor de n

III.4 Membrana Circular

En el caso de que sea necesario considerar dos dimensiones para la geometría de la membrana, debemos recordar la relevancia que tiene ésta en la resolución del problema definido por las expresiones (3.1.2) y (3.1.3), principalmente en la segunda de ellas.

En el caso de que la membrana sea circular, la ecuación a resolver en coordenadas polares es

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{\lambda}{w^n}, \quad (3.4.1)$$

$$w(1)=1, \quad (3.4.2)$$

$$\frac{dw}{dr}(0)=0, \quad (3.4.3)$$

donde $w=1+u$.

Es relativamente fácil de comprobar que el cambio de variable $\bar{w} = e^\varepsilon w$, $\bar{r} = e^{\frac{n+1}{2}\varepsilon} r$ es invariante ante la ecuación (3.4.1). A esta familia de transformaciones que cuentan con un grado de libertad, el parámetro ε , se les conoce como grupo de Lie, por

lo que el problema de las ecuaciones (3.4.1)–(3.4.3) puede ser convertido de un problema de condiciones de frontera a uno de valores iniciales haciéndolo más fácil de resolver.

Por lo tanto, podemos concluir que $w(r)$ es una solución si y sólo si

$$w(r) = \alpha y(\gamma r), \quad (3.4.4)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{y(\gamma)}, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{\lambda}{\alpha^{n+1} \gamma^2} = 1, \quad (3.4.6)$$

y donde la función $y(r)$ satisface el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} = \frac{1}{y^n}, \quad (3.4.7)$$

$$y(0) = 1, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{dy}{dr}(0) = 0. \quad (3.4.9)$$

El problema de obtener la función $y(r)$ a partir de las condiciones (3.4.7)–(3.4.9) es relativamente fácil de resolver utilizando el método numérico de Runge-Kutta (ver Anexo 3) y así obtener las siguientes soluciones dependiendo del valor de n :

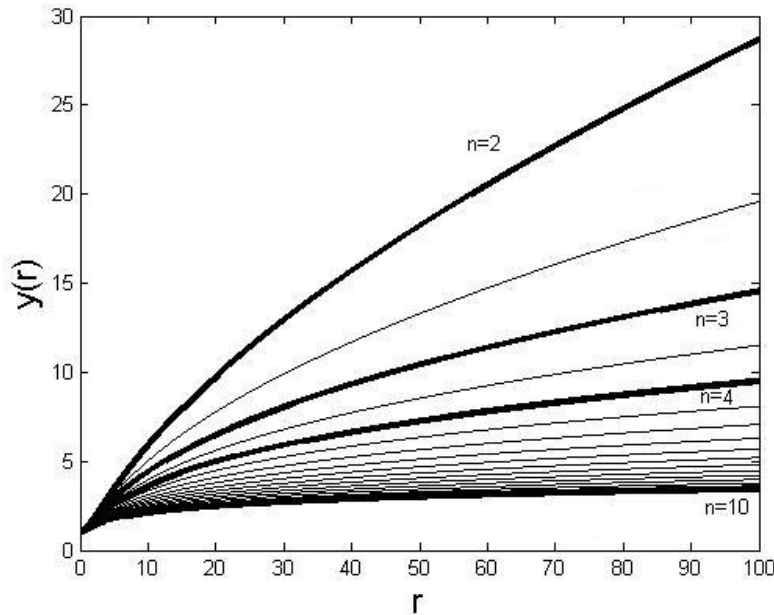


Fig. III.4.1 a) Solución numérica a las ecuaciones (3.4.7)–(3.4.9)

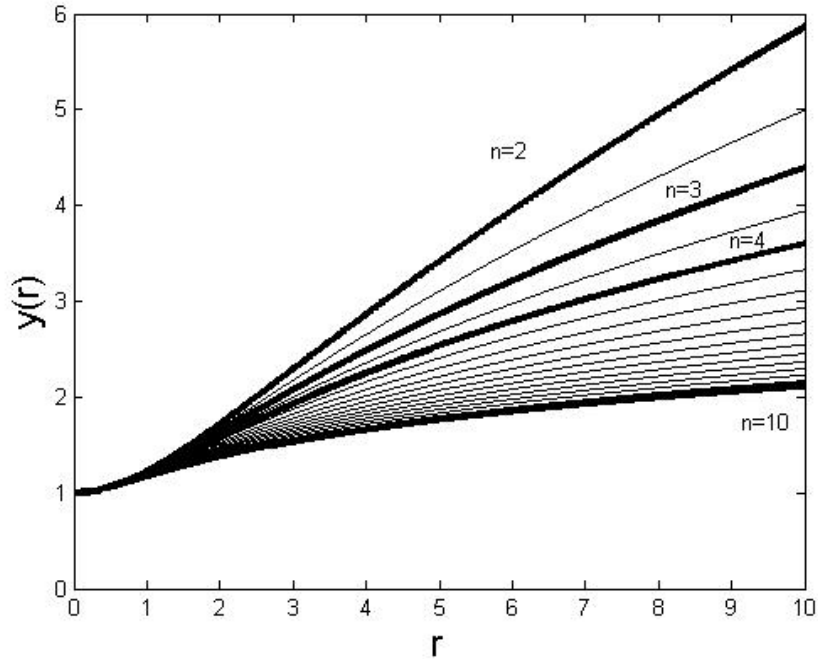


Fig. III.4.1 b) Acercamiento de la figura III.4.1 a).

Para resolver ahora las condiciones (3.4.5) y (3.4.6) y así obtener los valores de α y γ , se puede replantear de la manera siguiente: dado un valor de λ y n , debemos encontrar el valor de γ que satisfaga la condición de que $y(\gamma) = g(\lambda, n, \gamma)$ donde

$$g(\lambda, n, \gamma) = \left(\frac{\gamma^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Como ejemplo, tomemos el caso electrostático, es decir, $n=2$. Si comparamos gráficamente la función $y(r)$ contra una familia de funciones $g(\lambda, n = 2, \gamma)$ variando los valores de λ , podemos observar (figura III.4.2) que existen valores de λ (mayores a un valor λ^*) para los cuales no hay solución a la condición de que $y(\gamma) = g(\lambda, n, \gamma)$. Este valor λ^* es nuevamente el valor crítico de λ .

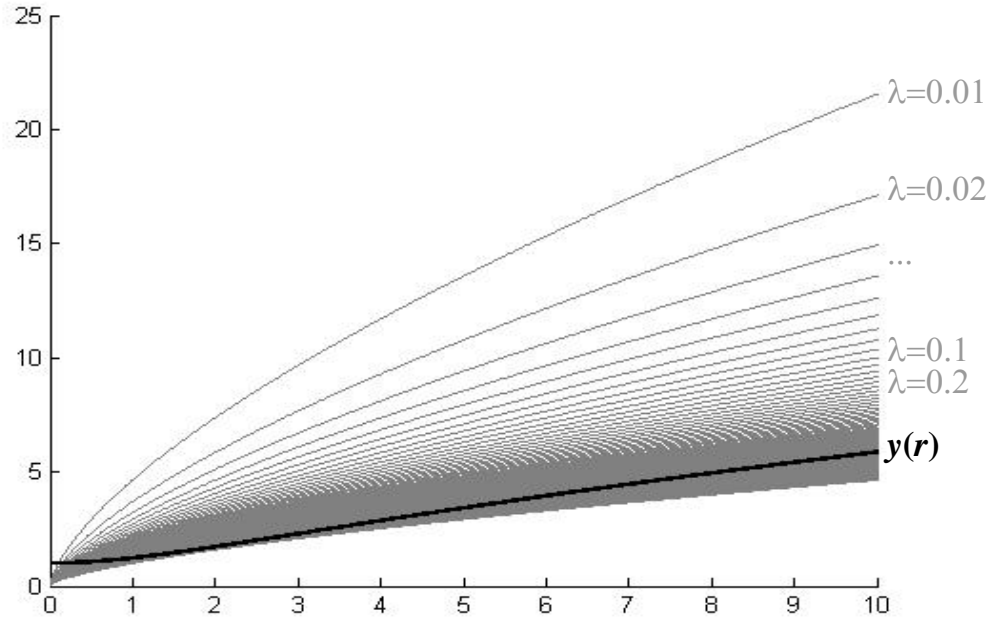


Fig. III.4.2 Obtención del valor crítico de λ

Además, podemos observar que existen valores de λ para los cuales la solución γ no es única:

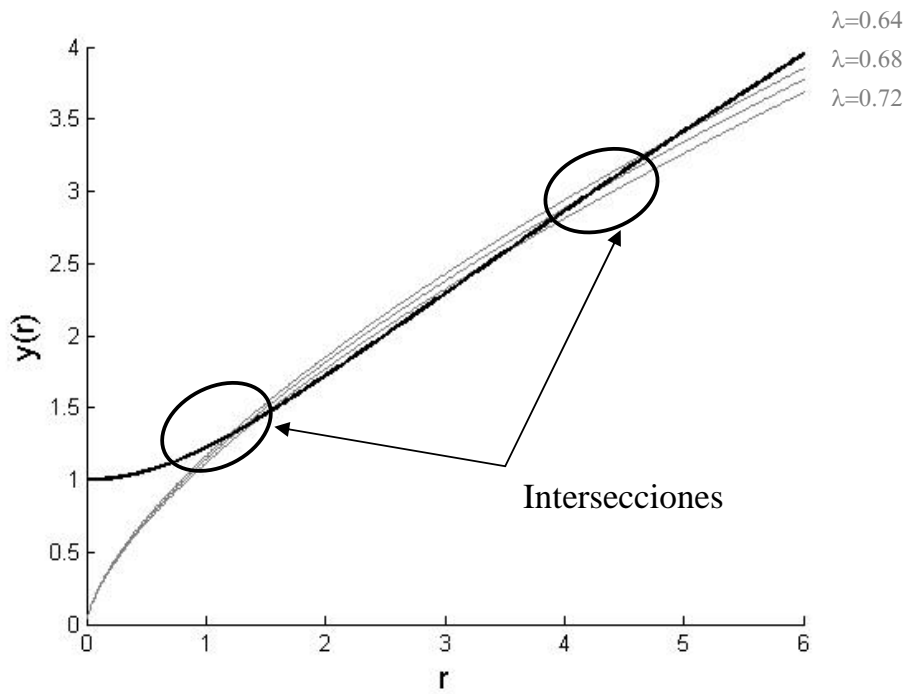


Fig. III.4.3 Obtención de los valores de γ que satisfacen las restricciones (3.4.5) y (3.4.6)

Para poder identificar directamente el intervalo de valores permitidos para λ será necesario definir el parámetro

$$\|w\|_{\infty} \equiv 1 - w(0), \quad (3.4.10)$$

el cual podemos interpretar como la máxima deflexión de la membrana. Utilizando las ecuaciones (3.4.4)–(3.4.9) podemos reescribirlo como

$$\|w\|_{\infty} = 1 - \frac{1}{y(\gamma)}. \quad (3.4.11)$$

Por lo tanto, al repetir este procedimiento para diferentes valores de n podemos graficar el valor de $\|w\|_{\infty}$ en función de λ :

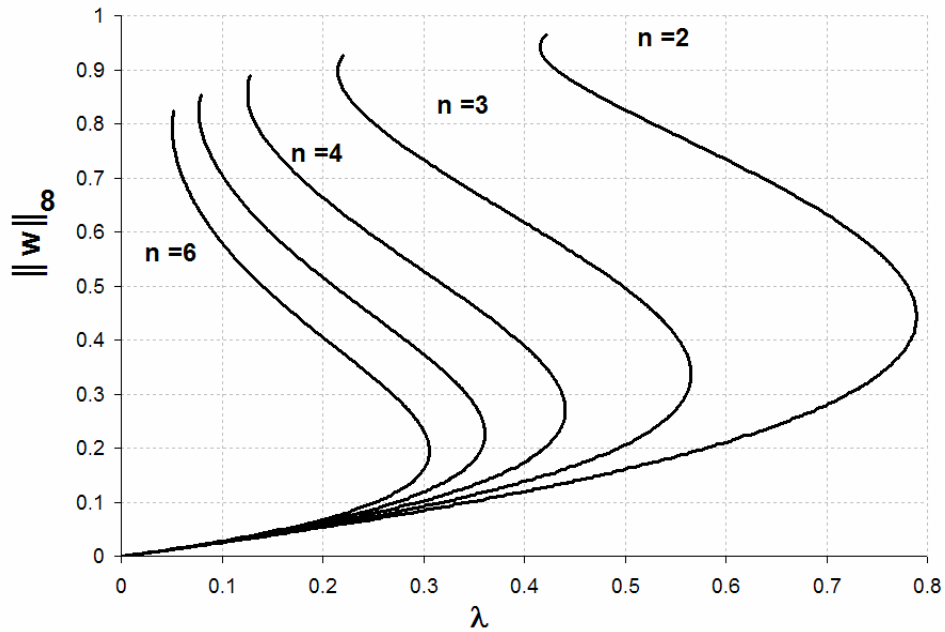


Fig. III.4.4 Obtención del valor crítico de λ para diferentes valores de n

Las propiedades teóricas que podemos encontrar entre $\|w\|_{\infty}$ y λ son diversas, empezando por el comportamiento asintótico cuando $\|w\|_{\infty} \rightarrow 1$ ya que la gráfica sigue teniendo el mismo comportamiento ondulatorio observado en la gráfica anterior y en una infinidad de veces.

Desafortunadamente es difícil ver esto utilizando un método numérico para obtener $y(r)$, pero es posible si para la ecuación (3.4.7) se define el cambio de variable

$$\eta = \log r \text{ y } y(r) = r^{\frac{2}{n+1}}v(\eta) \text{ para obtener la ecuación autónoma}$$

$$\frac{d^2v}{d\eta^2} + \frac{4}{n+1} \frac{dv}{d\eta} + \frac{4}{(n+1)^2} v - \frac{1}{v^n} = 0, \quad (3.4.12)$$

la cual se puede reescribir como el sistema

$$\frac{dv}{d\eta} = h, \quad (3.4.13)$$

$$\frac{dh}{d\eta} = -\frac{4}{n+1} h - \frac{4}{(n+1)^2} v + \frac{1}{v^n}. \quad (3.4.14)$$

Analizando el sistema, encontramos que el punto de equilibrio es $h=0$ y

$v = \left[\frac{(n+1)^2}{4} \right]^{\frac{1}{n+1}}$. Si ahora linearizamos alrededor de este punto obtenemos que los

valores propios del sistema son

$$\mu = -\frac{2}{n+1} \pm \frac{2\sqrt{n}}{n+1} i. \quad (3.4.15)$$

Por lo tanto el punto de equilibrio es un *sumidero* y el plano fase alrededor de él tiene el comportamiento de una espiral atractora y el comportamiento de la función $v(\eta)$ cuando $\eta \rightarrow \infty$ se puede aproximar como

$$v(\eta) \approx \left(\frac{n+1}{4} \right)^{\frac{1}{n+1}} + A e^{\frac{2\eta}{n+1}} \cos \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} \eta + B \right). \quad (3.4.16)$$

La ecuación (3.4.16) y el cambio de variable $\eta = \log r$ y $y(r) = r^{\frac{2}{n+1}} v(\eta)$ nos permiten obtener una expresión para $y(r)$ cuando $\eta \rightarrow \infty$

$$y(r) \approx \left(\frac{n+1}{4} \right)^{\frac{1}{n+1}} r^{\frac{2}{n+1}} + A \cos \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} \log r + B \right). \quad (3.4.17)$$

La expresión (3.4.17) nos permite demostrar que cuando $\eta \rightarrow \infty$ se tiene que $y \rightarrow \infty$ y en consecuencia $\|w\|_{\infty} \rightarrow 1$.

Además, utilizando la expresión (3.4.6) vemos que cuando $\gamma \rightarrow \infty$, el valor de $\lambda = \frac{\gamma^2}{y(\gamma)^{n+1}}$ tiende a $\frac{4}{n+1}$ lo cual justifica el comportamiento de la gráfica III.4.4 y dando el valor exacto del límite de cada gráfica correspondiente a un valor de n .

Al igual que en el caso de la membrana unidimensional, únicamente utilizamos la zona inferior de la gráfica III.4.4 (del origen al punto donde λ alcanza su máximo valor) para obtener que la relación entre r y w es de la siguiente forma:

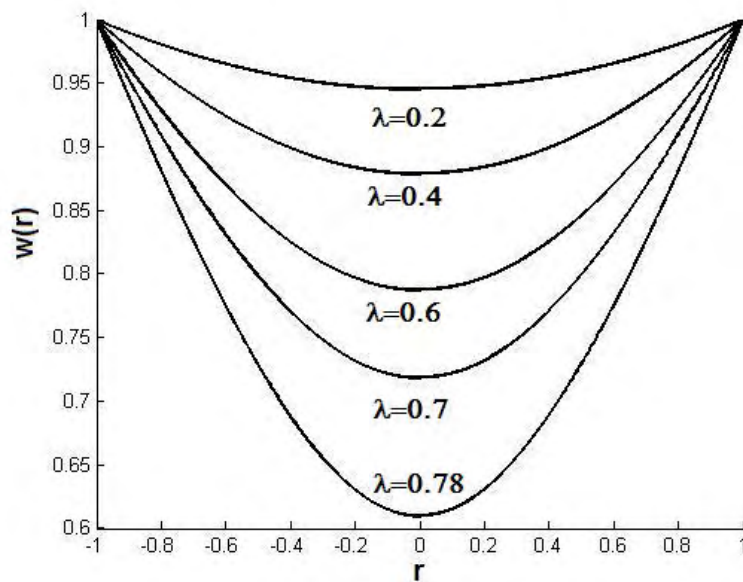


Fig. III.4.5 Deflexión de la membrana circular para el caso $n=2$

Dado que este resultado es independiente del argumento θ , la solución agregando esta dimensión se obtiene haciendo girar la gráfica anterior utilizando como eje de rotación $r = 0$.

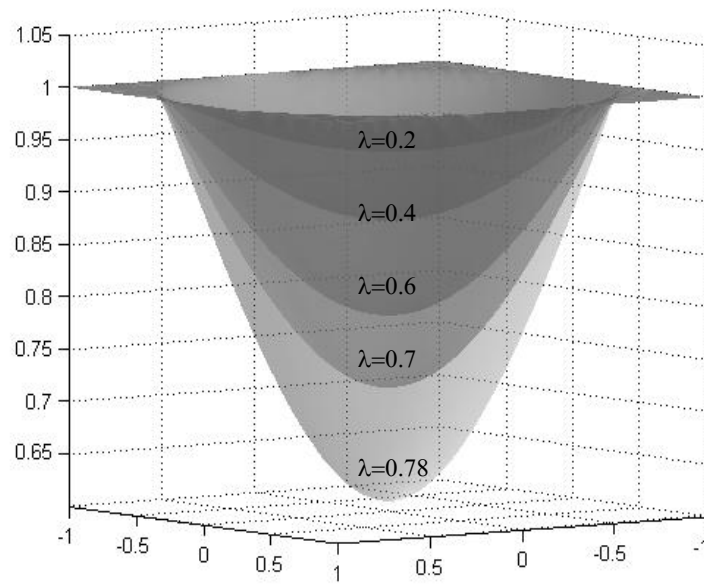


Fig. III.4.6 Gráfica de la membrana circular agregando la dimensión θ

Si comparamos distintas deflexiones de la membrana variando únicamente el valor de n y dejando fijo λ tenemos el siguiente comportamiento:

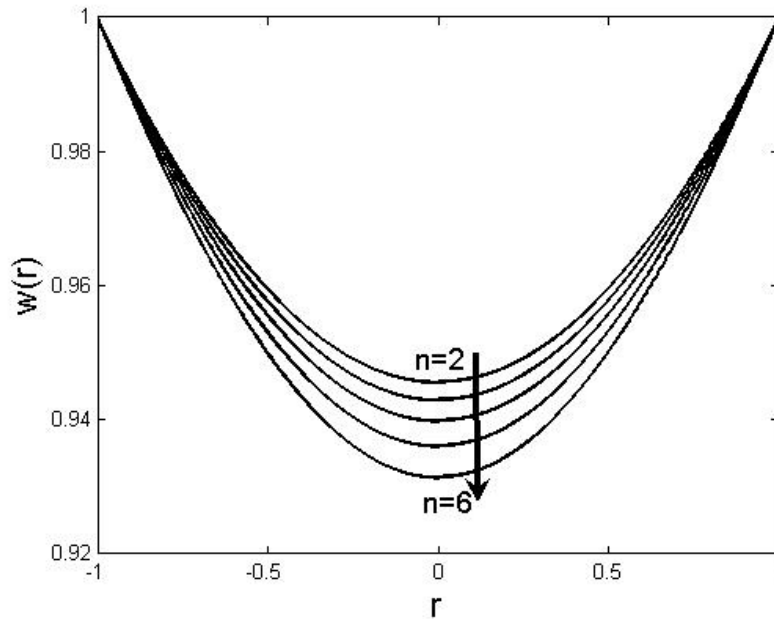


Fig. III.4.7 Comparativo de deflexión de la membrana circular para $\lambda=0.2$ y $n=2, 3, \dots, 6$

donde podemos observar un comportamiento análogo al de la membrana unidimensional, aunque con distinta magnitud en la deflexión.

Conclusiones

Para el problema de placas paralelas (donde una de ellas es fija y la otra es flexible) dominadas por una fuerza atractiva que es inversamente proporcional a una potencia de la distancia entre ellas se encontró una solución analítica para el caso de membranas unidimensionales mientras que para el caso bidimensional con membrana circular, la solución se obtuvo de manera numérica.

Además, se identificaron las relaciones entre el valor de n (exponente de la distancia en su relación con la fuerza que se esté considerando) y los valores críticos de λ , la máxima deformación de las membranas para cada tipo de fuerza y la energía involucrada en cada una de las soluciones.

También se demostraron algunos teoremas para acotar el valor crítico de λ , garantizar la existencia de la solución al problema de la membrana y su dependencia de la geometría de ésta. Desafortunadamente esto no implica que resolver el problema particular dada una geometría de la membrana sea sencillo ni indica la forma en que hay que hacerlo.

De igual forma, y para interpretar más claramente los resultados, se obtuvieron representaciones gráficas tanto de la relación entre los diferentes parámetros del sistema (λ , λ^* , energía, n , $\|w\|_\infty$, etc.) como del comportamiento de la membrana tanto para el caso unidimensional como para el bidimensional.

Es importante resaltar que este problema aun ofrece alternativas o complementos en su estudio pero que por falta de tiempo y recursos ya no se atacaron. Una de estas opciones es utilizar valores de parámetros reales correspondientes a materiales específicos y comparar estos resultados tanto entre ellos como lo que se esperaría que ocurriera en el laboratorio. También sería interesante considerar fuerzas tipo Yukawa relacionadas no sólo con el recíproco de una potencia de la distancia sino también con la exponencial de un múltiplo negativo de ésta.

Aunque el método es análogo, también es posible considerar membranas diferentes a la circular y ver cómo variar dicha forma para obtener ciertos resultados teóricos deseados u óptimos para cubrir cierta necesidad en los valores críticos del dispositivo.

Anexos

A [1] Definición del operador biarmónico

En coordenadas rectangulares (cartesianas) el operador biarmónico o bi-Laplaciano se define como:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} \right). \quad (\text{A.1.1})$$

A [2] Ecuación de la membrana vibrante

La ecuación que describe el movimiento de una placa delgada vibrante [14] es

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_0 \nabla^4 u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{para toda } t), \quad (\text{A.2.1})$$

donde

a : Cociente de masa por unidad de área

D_0 : Rigidez flexural

Ω : Región en el plano xy definida por la membrana.

A [3] Método de Runge-Kutta para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Consideremos el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0. \quad (\text{A.3.1})$$

Para resolver este sistema numéricamente, el método de Runge-Kutta [15] inicia con el siguiente paso: dado un punto (t_k, \mathbf{Y}_k) y Δt se calculan los siguientes vectores

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_k, \mathbf{Y}_k), \quad (\text{A.3.2})$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t/2, \mathbf{Y}_k + (\Delta t/2)\mathbf{K}_1), \quad (\text{A.3.3})$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t/2, \mathbf{Y}_k + (\Delta t/2)\mathbf{K}_2), \quad (\text{A.3.4})$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(t_k + \Delta t, \mathbf{Y}_k + \Delta t\mathbf{K}_3). \quad (\text{A.3.5})$$

Una vez obtenidos estos vectores, se obtiene un promedio ponderado de éstos para obtener el vector

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4}{6}, \quad (\text{A.3.7})$$

y se utiliza este vector \mathbf{K} para hacer el paso del punto (t_k, \mathbf{Y}_k) al punto

$$(t_{k+1}, \mathbf{Y}_{k+1}) = (t_k + \Delta t, \mathbf{Y}_k + \Delta t\mathbf{K}). \quad (\text{A.3.8})$$

A [4] Método de bisección para resolver la ecuación

$$f(x)=0$$

A este método también se le conoce como búsqueda binaria [16] y se basa en el teorema del valor intermedio que dice

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo I con $a, b \in I$. Entonces, si y_0 es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un número c entre a y b tal que $f(c) = y_0$.

El método supone que se conocen valores a y b tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, por lo que el teorema del valor intermedio me garantiza que existirá al menos una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a, b) .

Los siguientes pasos son dividir varias veces a la mitad los subintervalos de $[a, b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contenga a dicha raíz.

Para empezar, sean $a_1 = a$ y $b_1 = b$, y sea p_1 el punto medio de $[a, b]$, es decir

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}. \quad (\text{A.4.1})$$

Si $f(p_1) = 0$ entonces la raíz es p_1 ; de no ser así entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o que $f(b_1)$. En caso de que $f(p_1)$ tenga el mismo signo que $f(a_1)$, entonces significa que la raíz está en el intervalo (p_1, b_1) y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$; si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces la raíz está en el intervalo (a_1, p_1) y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Después se aplica el mismo proceso al intervalo $[a_2, b_2]$ hasta obtener una cierta precisión predefinida para el valor de la raíz.

Referencias

- [1] <http://physicsweb.org>
- [2] J. A. Pelesko and D. H. Bernstein, *Modeling MEMS and NEMS* (Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2003)
- [3] <http://www.memsnet.org>
- [4] X. Zhao, *Tesis: Modeling and simulation of MEMS devices, 2004*
- [5] B. Bhushan, *Springer Handbook of Nanotechnology 2nd Edition* (Springer, 2006)
- [6] H. Singh Nalwa, *Encyclopedia of NANOSCIENCE and NANOTECHNOLOGY, vol. 5 y 6* (American Scientific Publishers, 2004)
- [7] X. Zhao, *Mechanics of adhesion in MEMS –a review*, J. Adhesion Sci. Technol., vol. 17, No. 4, pp. 519-546 (2003)
- [8] <http://www.casimir.rl.ac.uk>
- [9] A. R. N. S. Guerreiro, B. J. Kellett, B. J. Kent, R. Bingham, M. C. W. Sandford, *Calculating the Casimir Force on MEMS and NEMS*,. Space Science and Technology Department, Rutherford Appleton Laboratory
- [10] E. Buks, M. L. Roukes, *Casimir force changes sign*, Nature. 2002 Sep 12;419(6903):119-120
- [11] K. Autumn, M. Sitti, *Evidence for van der Waals adhesion in gecko setae*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 2002, 99, 12252-12256
- [12] X. Zhao, *Stiction and anti-stiction in MEMS and NEMS*, Acta Mechanica Sinica Vol. 19, No. 1 / Febrero, 2003
- [13] K. L. Ekinici, M. L. Roukes, *Nanoelectromechanical systems*, Review of Scientific Instruments 76 061101 JUN 2005
- [14] R. Weinstock, *Calculus of variations* (Dover, 1974)
- [15] P. Blanchard, R. Devaney, G. Hall, *Differential Equations* (Brooks/Cole 1998)
- [16] R. Burden, J. Faires, *Análisis Numérico* (Thompson 2002)
- [17] R. C. Batra, M. Profiri, D. Spinello, *Effects of Casimir force on pull-in instability in micromembranes*, EPL 77 (2007) 20010
- [18] J. A. Pelesko, *Electrostatic deflections of circular elastic membranes*, Journal of electrostatics 2003, vol. 57, no1, pp. 1-12

- [19] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley 1975)
- [20] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equation*, (Plenum Press 1992)
- [21] I. Stackgold, *Green's functions and boundary value problems* (Wiley 1998)
- [22] M. Boström, B. E. Sernelius, *Fractional van der Waals interaction between thin metallic films*, Physical Review B, Enero 15 2000-I Vol. 61, No. 3
- [23] H B Chan, V A Aksyuk, R N Kleiman, D J Bishop, F Capasso, Science 291, 1941 (2001) and Physics Today Oct. 2001 p.43by
- [24] M. J. Sparnaay, Physica XXXIV, 751 (1958).
- [25] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev Lett. 78, 5 (1997).
- [26] U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. 81, 4549 (1998).
- [27] A. Roy and U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. 82, 4380 (1999).
- [28] T. Ederth, *Template-stripped gold surfaces with 0.4 nm rms roughness suitable for force measurements. Application to the Casimir force in the 20-100 nm range*, Physical Review A 62, 62104 (2000).
- [29] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, *Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces*, Phys.Rev.Lett. 88 (2002)
- [30] Serry F M, Walliser D and Maclay G J 1998 J. Appl. Phys. 84 2501
- [31] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleinman, D.J. Bishop, F. Capasso, *Nonlinear micromechanical Casimir oscillator*, Physical Review Letters 87, 211801 (2001)
- [32] R. Feynman, *There's Plenty of Room at the Bottom*, Lecture at American Physical Society meeting at Caltech on December 29 in 1959.