



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ARQUITECTURA

Programa de Maestría y Doctorado en Arquitectura
Campo de conocimiento: *Tecnología*

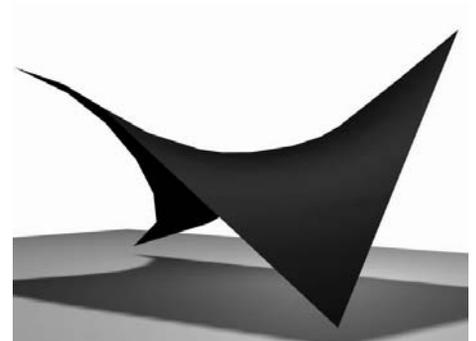
Estudio sobre el diseño del
Paraboloide Hiperbólico

Tesis que presenta:

Arq. Carolina Carmona Aparicio

Para obtener el grado de:

Maestra en Arquitectura





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



México, 2008

Jurado

Director de Tesis: **Dr. Juan Gerardo Oliva Salinas**

Sinodales: **Arq. Juan Antonio Tonda Magallón**
Dr. Agustín Hernández Hernández
M. en Arq. Francisco Reyna Gómez
M. en Arq. Horacio Olmedo Canchola



Agradecimientos

A LA UNAM

Por el apoyo dado a esta investigación, consistente en la beca otorgada por la DGEP (Dirección General de Estudios de Posgrado), material bibliográfico, asesoría de diferentes profesores, y sobre todo por permitirme continuar con mi crecimiento personal y profesional en esta magnífica institución de la cual formo parte desde mis estudios básicos.

Muchas personas piensan que el posgrado te convierte de nuevo en un estudiante. Sin embargo, creo firmemente que **el posgrado es una oportunidad de desarrollo profesional, al generar una investigación que te convierte en especialista y sobretodo te ayuda a identificar y resolver los principales problemas que aquejan a nuestra comunidad. La investigación es el camino para el progreso de nuestro país.**

“Por mi raza hablará el espíritu”

A MIS ASESORES

A mi tutor **Juan Gerardo Oliva Salinas**, por la oportunidad de participar en las clases de Geometría Estructural, impartidas en la facultad de Arquitectura, sin ellas no hubiese sido posible desarrollar esta tesis. También le agradezco por todo el apoyo que me otorgó, pero sobre todo por guiarme y aconsejarme en los momentos más decisivos, además de darme la bienvenida al camino de la investigación.

A mi asesor **Juan Antonio Tonda Magallón**, por el tiempo y la paciencia que me ha dedicado, además de la orientación y experiencia de vida de la cual he aprendido mucho. Gracias por enseñarme que el conocimiento y la sencillez siempre van de la mano y son dos de los valores más grandes del hombre.

A mis asesores, **Agustín Hernández Hernández, Franciso Reyna Gómez y Horacio Olmedo Canchola** por el tiempo y las valiosas observaciones a mi trabajo.

Un reconocimiento especial a **Marcos Ontiveros Hernández**, por proporcionarme el programa GEO, el cual forma una parte importante de la metodología didáctica.



A todos ustedes, mi más profunda admiración.

A MI FAMILIA Y AMIGOS

A mi madre: Mami, eres la mujer más importante en mi vida. Tú me has enseñado la tenacidad y la importancia del trabajo duro, pero sobretodo me has dado tu hombro para llorar y apoyarme en los momentos más difíciles. Siempre estaremos juntas.

A mi padre: Papá, me formaste y sin ti, no sería lo que soy ahora, tus consejos y todas las oportunidades que me has dado, para demostrarme a mi misma que soy capaz. Eres y serás siempre parte de mí.

A mis hermanas Miri, Ale y Lili: son mi ejemplo más grande, ustedes son las mujeres más preparadas que conozco y capaces de ser profesionistas, esposas, madres y sobretodo mis amigas. Las admiro mucho y les agradezco sus consejos tan valiosos y su apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida.

A mis amigos y a Adair: Gracias por todo su apoyo, en este tren de estaciones que es la vida, ésta ha sido una de las mejores para mí. Adair gracias por estar conmigo todo este tiempo y compartir triunfos y tristezas.

Al Laboratorio de Estructuras: A mis compañeros, de quienes he aprendido mucho.

A Dios: porque siempre ha estado y estará en mi corazón, reflejado en el amor que le tengo a todas las personas que son importantes para mí.

Introducción	1
---------------------------	---

CAPÍTULO 1

Problemática y origen del proyecto

1.1 La tecnología, las estructuras y la geometría para los estudiantes de arquitectura.....	3
1.1.1 Valores estéticos y estáticos, la geometría como eje	
1.1.2 Paradigmas y realidades	
1.2 Propuestas para una visión integral.....	6
1.2.1 Un caso concreto: El paraboloides hiperbólico	
1.2.2 Investigaciones previas y panorama actual	
1.2.3 Experiencia con estudiantes de Arquitectura, retos y logros	

CAPÍTULO 2

Antecedentes

2.1 Geometría en la naturaleza.....	8
2.2 Geometría estructural.....	9
2.2.1 La importancia de la geometría	
2.2.2 Estudio de una superficie: el paraboloides hiperbólico	
2.3 El paraboloides hiperbólico y las geometrías complejas. Proyectos materializados.....	12
2.3.1 Las formas de Antoni Gaudí	
2.3.2 Las formas de Pier Luigi Nervi	
2.3.3 Las formas de Félix Candela	
2.3.4 Las formas de Frei Otto	
2.3.5 El caso de la Feria de Comercio de Milán	

CAPÍTULO 3

Definición Geométrica de las superficies

3.1 Clasificación de las superficies por su generación.....	19
3.1.1 Las superficies alabeadas.	
3.1.2 Las cuádricas, aplicaciones en la arquitectura	
3.2 Clasificación de las superficies por su curvatura.....	25
3.3 Curvas generadoras: las cónicas.....	28
3.3.1 La elipse	
3.3.2 La hipérbola	
3.3.3 La parábola	

CAPÍTULO 4

El paraboloides hiperbólico. Definición geométrica y generación.

4.1 Definición por curvas generadoras	33
4.1.1 Construcción por curvas	
4.2 Definición como superficie reglada.....	37
4.2.1 Construcción por rectas	
4.3 Definición por triangulación.....	43
4.3.1 Construcción por triangulación	

NOTA IMPORTANTE: Si el lector requiere de la consulta rápida para el diseño del paraboloides hiperbólico, deberá referirse a la sección de los anexos, donde se encuentra la metodología didáctica. Para versiones digitales contactarme a la dirección electrónica: caro98carmona@hotmail.com

CAPÍTULO 5

El paraboloides hiperbólico. Diseño

5.1 Didáctica en la enseñanza.....	47
5.2 Sistema curvas-rectas.....	48
5.3 Clasificación y combinación de las formas.....	50
5.3.1 Borde curvo	
5.3.2 Borde recto	
5.3.3 Combinaciones ingeniosas en ejemplos construidos	
5.4 Diseño aplicado: Paraguas.....	59

CAPÍTULO 6

El paraboloides hiperbólico. Definición matemática

6.1 Definición canónica.....	61
6.1.1 Ecuación del PH, forma canónica	
6.1.2 Ubicación de puntos	
6.2 Ecuación referida a las generatrices.....	64
6.2.1 Ecuación del PH, sistema de ejes	
6.2.2 Ubicación de puntos	
6.3 Ubicación de ejes y puntos en un Paraguas.....	68

CAPÍTULO 7

El paraboloides hiperbólico. Funcionamiento estructural

7.1 Funcionamiento de las estructuras según su geometría.....	70
7.2 La teoría de la membrana.....	72
7.3 Régimen de esfuerzos.....	73
7.3.1 Cálculo de esfuerzos	
7.4 Documentación del cálculo en un Paraguas.....	75

CAPÍTULO 8

El paraboloides hiperbólico. Ejemplo de aplicación: Paraguas

8.1	
Generalidades.....	83
8.1.1 Historia	
8.1.2 Construcción	
8.2 Diseño y cálculo: Programa GEO.....	87
8.2.1 Diseño	
8.2.2 Cálculo	
8.3 Análisis de sustentabilidad.....	90
8.3.1 Durabilidad, mantenimiento y reutilización	
8.3.2 Factores climatológicos, acústicos y confort	
8.4 ¿Utopía o realidad? Una propuesta de renovación.....	93

Conclusiones.....	94
-------------------	----

Referencias

Libros, Artículos, URL Consultadas, Índice de imágenes.....	95
---	----

ANEXOS.....	99
-------------	----

Metodología didáctica para el diseño del paraboloides hiperbólico	
---	--

INTRODUCCIÓN

La arquitectura se diseña y construye según las circunstancias que enfrente: su tiempo, sus técnicas, sus características sociales; sin embargo ***el arquitecto muchas veces parece estar atado a modelos rígidos y repetitivos, sin atreverse a incursionar en diferentes esquemas de diseño.*** La problemática inicia con los estudiantes que, al desconocer técnicas diferentes a las convencionales, o bien por considerarlas complejas, se limitan a repetir esquemas de diseño y estructura, sin considerar que existen otros que se pueden adaptar mejor a cada caso.

Por otra parte, un factor importante en la falta de incursión de otras formas y estilos, es que aprenden por separado el diseño de la estructura; aunque propongan formas diferentes, no tienen las herramientas para encontrarles un sentido estructural. ***Esta problemática se puede solucionar a partir del uso de la geometría estructural, enfocada al análisis de la forma de los espacios, definiendo su modulación y condiciones de estabilidad.***

Para encontrar estas condiciones tenemos que generar el equilibrio en la estructura, y esto se logra ***contrarrestando los esfuerzos de torsión, flexión, compresión y tracción o una posible combinación de ellos, a los cuales cada geometría se adaptará de diferente manera.***

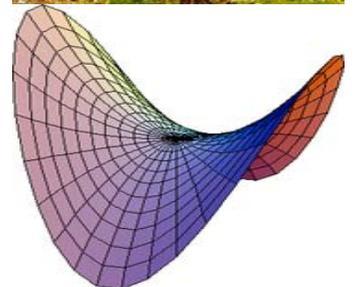
Por ejemplo, existen formas que soportan los esfuerzos engrosando su sección, por lo que están obligadas a conservar una traza recta, como las losas planas. También hay formas que se adaptan curveándose en una o más direcciones para reducir al mínimo la flexión y de ésta manera solo trabajar a compresión o tracción. Un claro ejemplo son las superficies alabeadas. De éstas, las de doble curvatura inversa logran un óptimo trabajo estructural por su capacidad de transmitir y resistir los esfuerzos.

El resultado son estructuras más eficientes que necesitan de menos material para cubrir áreas mayores. Adaptables a los movimientos estéticos modernos, estas superficies tienen dos problemas: su construcción es compleja al igual que su sistema matemático.

Sin embargo ***hay una superficie alabeada que logra superar esta problemática: el paraboloides hiperbólico.*** Esta geometría es una sucesión de parábolas que al corte por un plano horizontal genera hipérbolas, pero para entender de manera clara el concepto, es como una silla de montar.

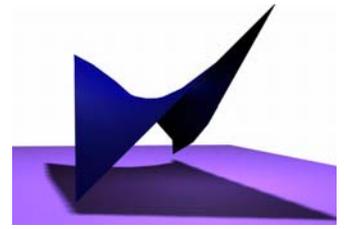
Su estructura transmite los esfuerzos a lo largo de la superficie, hasta sus bordes, de tal manera que es muy eficiente. Tiene tres formas de generación, por rectas, que le permite ser construida en materiales rígidos como el concreto armado, que son los cascarones; por triangulaciones, con las cuales se pueden trazar plantillas para membranas de diferentes materiales, como las velarias, y finalmente por curvas que permiten su construcción en modelos de arcos, que son las redes de cables.

Además de ser muy versátil para su construcción, ***otra ventaja del paraboloides hiperbólico es su cálculo matemático, que actualmente es facilitado por programas de cómputo.***

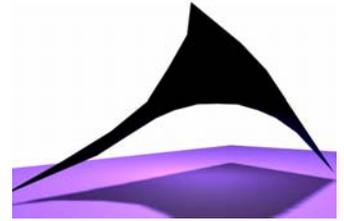


Imágenes, de superior a inferior:
 I-Biblioteca Central UNAM
 II-Calles de Bologna, Italia
 III-Eden Project, Fotografía de Matt Cardy/Getty D.R.
 IV-Museo Guggenheim
 V-Casa de Adobe, Chalco
 VI. Paraboloides Hiperbólico
 Imágenes III, IV, VI extraídas de URL, ver índice en referencias. Reproducción con fines didácticos, Fotografías I, II, V D.R. Carolina Carmona

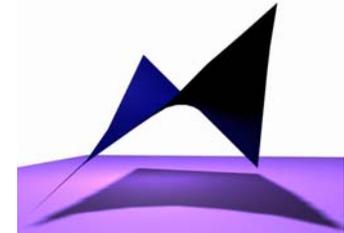
Esta geometría, ha sido estudiada principalmente por **Félix Cándela**, quien logró simplificar el proceso de cálculo. De esta manera construyó una gran cantidad de cascarones de concreto en diferentes combinaciones de paraboloides hiperbólicos, teniendo éxito en factores estéticos y de costo, ya que el funcionamiento óptimo de la forma, le generaba delgados espesores, y una economía implícita al ahorro del material.



Sin embargo, aún con todas las ventajas de esta superficie y que se han desarrollado una gran cantidad de trabajos en México, **su uso actual no es frecuente. Esto es por el desconocimiento de la técnica y la creencia de que su diseño y cálculo son complejos.**



Sabiendo que la estrategia para una estructura eficiente es una geometría bien diseñada, debemos recurrir al uso de recursos tecnológicos y metodológicos que nos ayuden al desarrollo del estudio de geometrías como el paraboloides hiperbólico y sus aplicaciones para la arquitectura.



El propósito de este estudio está encaminado a la documentación y enseñanza del diseño del paraboloides hiperbólico, y sus aplicaciones a la arquitectura, con el objetivo de desarrollar una metodología didáctica apoyada en herramientas digitales.

Otro objetivo importante es la difusión de este material, ya que a partir del conocimiento podemos generar innovación para la arquitectura de nuestro país, formando a la gente que trabajará y construirá en un futuro próximo: los estudiantes.

Abstracciones del paraboloides hiperbólico, generadas en el programa © 3D Max, **Imágenes creadas por Carolina Carmona D.R.**

CAPÍTULO 1

Problemática y origen del proyecto

1.1 La tecnología, las estructuras y la geometría para los estudiantes de arquitectura

“Las personas que de alguna forma tienen que ver con la creación, diseño y materialización de formas nuevas que vienen a satisfacer necesidades del hombre, por costumbre, tradición o simple ignorancia, siguen apegados a viejos patrones o cánones formales, sin atreverse a cuestionar los actuales y a experimentar con las alternativas”¹

La arquitectura es una de las profesiones más antiguas del hombre. Durante cada etapa del desarrollo de las civilizaciones, ha respondido a diferentes momentos históricos, políticos y tecnológicos. Por lo tanto, la enseñanza de esta profesión tiene que generar cambios en su estructura para poder adaptarse a las nuevas condiciones y a las diferentes herramientas que existen actualmente.

La enseñanza de la arquitectura tiene que enfrentar una constante renovación, que permitirá que los estudiantes tengan una mejor preparación con el uso de métodos innovadores.

Aprovechando al máximo las ventajas que nos ofrece nuestro momento histórico, podemos formar profesionistas que tengan un marco más amplio de opciones para los diferentes tipos de proyectos. Nuevas técnicas, materiales y tecnologías, permiten conceptos que antes ni siquiera eran concebidos.

Actualmente se pueden visualizar de manera virtual los diseños arquitectónicos, para identificar posibles errores en su futura construcción. También es posible la incursión de materiales cada vez más ligeros en estructuras eficientes, cuya seguridad sea garantizada por procesos matemáticos de cálculo efectuados por computadora. **Es un hecho que la tecnología y su constante cambio, tienen que formar parte de la arquitectura. Sin embargo los cánones de enseñanza actuales tienen una deficiencia en lo que se refiere a este aspecto.**



Fig. 1- Las presentaciones virtuales, son una de las principales herramientas de la arquitectura actual, en conjunto con programas de cálculo modernos, nos permiten concebir formas y estructuras que antes no hubieran podido ser materializados. En la imagen se ve un cuadro de un recorrido generado en el programa 3d max, para una tesis de licenciatura de la carrera de arquitectura. **Imagen de Carolina Carmona D.R.**

1.1.1 Valores estéticos y estáticos, la geometría como eje.

El problema ocurre principalmente por el ritmo de desarrollo de la ciencia y la tecnología, en donde día con día se dan avances importantes. Pero no por eso dejaremos de buscar alternativas para generar el cambio en la enseñanza de nuestra época. **Una opción para la integración de la tecnología es generar modelos en los que la arquitectura sea un conjunto equilibrado de diferentes conocimientos.** Entonces cada parte (incluyendo a la ciencia y tecnología) deberá formar un todo en donde un elemento es igual de importante que los otros.

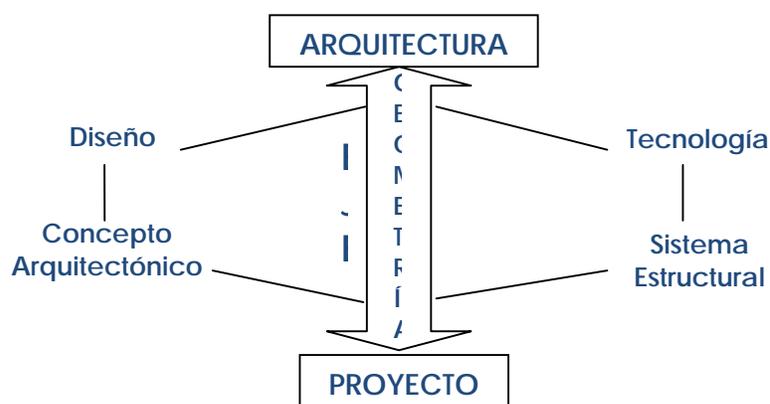
Regularmente, para los estudiantes, este conjunto de conocimientos se ve por separado, tratando de encontrar un eje de integración dentro del desarrollo del proyecto, pero es evidente que dicha integración no ocurre. Las deficiencias están fuertemente reflejadas en elementos esenciales como el diseño conceptual, el sistema estructural, y la geometría, que al no guardar relación alguna, generan proyectos en los que la estructura y el diseño arquitectónico se contraponen.

¹ Raeder Pablo, “La geometría de la forma”

Un ejemplo es cuando existen propuestas de espacios que no corresponden al sistema constructivo, carecen de modulación y elementos de soporte. Son comunes, los claros demasiado grandes, sin contemplar que columnas o vigas sean necesarios; o bien, que tan solo repiten elementos tradicionales porque los consideran más fáciles de diseñar y construir.

A partir de esto, deduzco que **la integración del proyecto desarrollando las partes por separado no es eficiente, por lo que se necesita tomar un eje de diseño para encontrar el equilibrio entre el concepto arquitectónico y el sistema estructural. Este eje es la geometría².**

En los cánones de enseñanza actual, los estudiantes no consideran a la geometría como parte básica para la estructuración y esto les impide darse cuenta que **la estrategia para una estructura eficiente es una geometría bien diseñada**. Se crean estructuras rígidas y forzadas, condicionadas a encajar. *La piel de la arquitectura esconde entonces un esqueleto eficiente, pero sobrecargado*. Un defecto que bien pudo evitarse usando desde el concepto, las herramientas que un buen conocimiento de la geometría nos proporciona, facilitado por los recursos tecnológicos actuales. Entonces, **el uso de la geometría como medio estructurante en el proyecto arquitectónico garantizará la integración de los diferentes elementos de la arquitectura, incluyendo a la tecnología.**



Aunque con este principio se tenga garantizada una estabilidad entre el modelo funcional y la estructura, todavía nos enfrentamos a otro problema que limita la capacidad creativa del estudiante: el cálculo. Los estudiantes se acostumbran a resolver los problemas exactamente como el maestro lo propone, por lo que sistemas que no sean utilizados por los profesores, tampoco lo serán por los alumnos.

Por esta situación, el estudiante no se atreve a incursionar en formas más complejas a su manera de ver, ya que el desconocimiento de ellas los orilla a pensar que su proceso de diseño y cálculo será difícil, situación que se convierte en un mito. **La visión de considerar los marcos ortogonales rígidos como las únicas estructuras eficientes, es nuestro reto a vencer, para esto es esencial la difusión de métodos de diseño y cálculo de estructuras distintas a las convencionales y así ampliar las opciones de solución del proyecto.**

1.1.2 Mitos y realidades

Consideramos un mito como un conjunto de ideas que modifican la percepción de un objeto, en este caso trataré las relacionadas a las cubiertas y superficies. Estos conceptos afectan directamente los procesos de diseño, fijando las condiciones en las cuales los estudiantes se desenvuelven para sus propios proyectos. En general los mitos que analizaré a continuación, son los que limitan la incursión en el diseño de formas diferentes a las ortogonales, tal es el caso de las superficies de doble curvatura como el paraboloides hiperbólico.

² Según la Real Academia Española de la Lengua, entendemos geometría como el estudio de las propiedades y medidas de las figuras en el espacio. Para este estudio, la geometría nos permitirá la comprensión total del espacio y la forma, para así generar las relaciones entre la conceptualización del proyecto arquitectónico y su estructuración.

- **Mitos:**

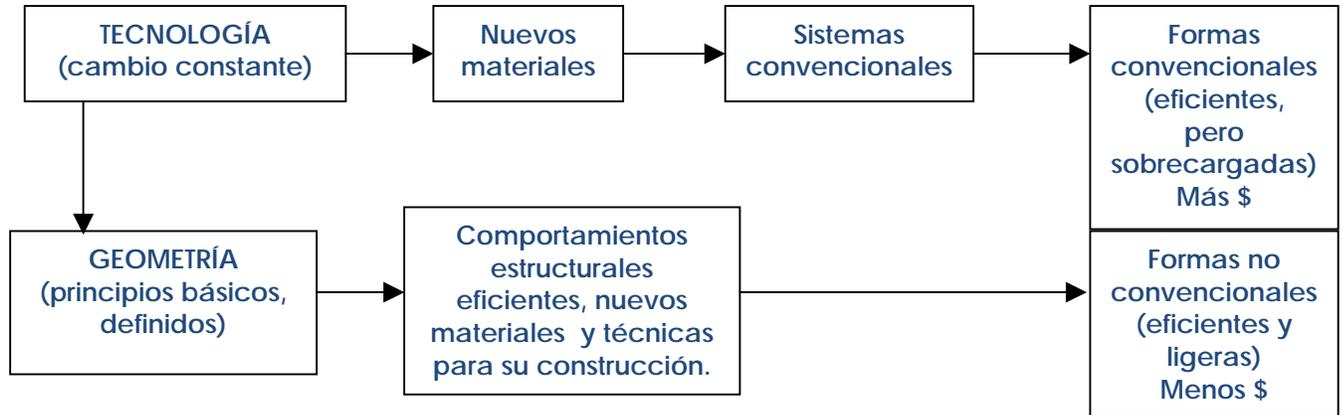
1. Para una cubierta, una superficie plana es estructuralmente más adecuada.
2. El diseño de formas geométricas diferentes a las convencionales representa un mayor esfuerzo del proyectista, más recursos económicos y no atiende a la necesidad primaria de solo cubrir el espacio. Los arquitectos que incursionan en geometrías complejas es porque cuentan con recursos ilimitados, y estas formas solo responden a sus caprichos formales.
3. Es difícil diseñar, calcular y construir cubiertas que no sean planas.
4. La geometría sólo sirve para la representación de montañas y sombras, y la geometría estructural sólo es una herramienta más para los sistemas estructurales.
5. Las superficies con forma de paraboloides hiperbólicos, sólo se pueden construir con concreto o como velarios y son difíciles de calcular, poco eficientes y costosas.
6. Los cascarones sólo respondieron a una moda, y se dejaron de construir porque son poco resistentes al viento y al sismo.
7. Un estudiante de licenciatura no puede diseñar estructuras alternativas o bien no convencionales, ya que es difícil que se interesen en los tediosos procesos de cálculo y diseño de geometrías diferentes.

- **Respuesta a los mitos:**

1. Un sistema estructural adecuado, está definido por la óptima transmisión de esfuerzos. Una cubierta plana tendrá diferentes tipos de esfuerzos que una curva, aunque esta última es más eficiente, ya que puede ser diseñada en correspondencia a su régimen de carga, obteniendo modelos funiculares o antifuniculares³. **En una cubierta plana tendremos que considerar flexiones, torsiones, compresiones y tracciones mientras que gracias al régimen funicular en las curvas solo tendremos compresiones o tracciones según sea el caso**, por lo que su comportamiento estructural es más sencillo.
2. **El diseño de formas geométricas no convencionales no representa mayor esfuerzo, sino un proceso diferente de diseño.** Los recursos económicos, se pueden compensar o incluso superar a los sistemas tradicionales, por cubrir mayores claros, y reducir los espesores. Este diseño tiende a la necesidad primaria de cubrir el espacio al igual que otros sistemas y no puede ser considerado como un capricho usar estas formas, sino como una opción.
3. El diseño, cálculo y construcción de cubiertas no planas, es diferente, pero no por eso más difícil.
4. **La geometría es esencial para que se comprendan las relaciones de proporción, distribución y funcionamiento de los sistemas estructurales**, y un buen estudio de la geometría estructural, nos asegura que diseñaremos elementos que funcionen eficientemente. No sólo es una herramienta, más bien es un eje en el proceso de diseño.
5. **Las superficies con forma de paraboloides hiperbólicos se pueden construir con cualquier material**, los más recurridos son el concreto y los textiles, porque son los que se han construido masivamente. Sin embargo podemos proponer materiales como acero, paneles y plásticos de nueva generación, esto corresponderá a los tipos de creación de la superficie.
6. **Los cascarones se difundieron porque eran un sistema constructivo económico**, y se usaban principalmente en industrias para cubrir grandes claros con bajos costos; además, su cálculo incluye las resistencias al sismo y al viento al igual que otro tipo de sistemas, por lo que no podemos asegurar que sean susceptibles a estos efectos (además de que a 30 años de su construcción muchos elementos siguen resistentes a los factores del medio). **Los factores por los cuáles se dejan de construir responden más a la difusión del sistema, y a que para los recursos de la época se consideraba que el proceso matemático era largo**, situación que en nuestro tiempo es resuelta con el uso de las computadoras.
7. **Un estudiante puede hacer las formas que él se proponga**, salvo dos condiciones: conocer la geometría estructural que le ayude al diseño y entender el proceso de cálculo, aunque en este caso, se puede auxiliar de herramientas actuales como programas de cómputo.

³ Según la Real Academia Española de la lengua, la palabra funicular, viene del latín *funiculus* (cuerda), y se refiere a la tracción que se hace con una cuerda, cable o cadena. En este caso el modelo funicular lo aplicamos suspendiendo una cuerda en sus extremos, si la carga es constante a lo largo de la cuerda su geometría será de una catenaria y si la carga es proyectada a lo largo de un plano, será una parábola. Al invertir el esquema, tendremos un arco antifunicular, y la posibilidad de convertirlo en una bóveda larga o en otro tipo de superficie según sea el caso.

1.2 Propuestas para una visión integral



En el esquema observamos una serie de relaciones entre la aplicación de la tecnología, la geometría y su repercusión en los costos. Si dejamos que se genere un proceso independiente de la geometría, conseguiremos sistemas convencionales que aún con los nuevos materiales, resultan en un mayor costo. En cambio si aplicamos creativamente la tecnología y la geometría, este costo disminuirá.

1.2.1 Un caso concreto: el paraboloides hiperbólico

El estudio de la geometría estructural, es un eje de formación indispensable para los estudiantes de arquitectura. Así mismo, el desarrollo de métodos específicos que ayuden a resolver geometrías básicas, hará que los sistemas estructurales no sean un área de desidia y desinterés.

Durante este estudio, abordaré diferentes geometrías que bien aplicadas pueden mejorar el proceso de diseño para los estudiantes de arquitectura. El enfoque se sitúa en la comprensión de las superficies de doble curvatura, ya que dentro de éstas existen grandes ventajas sobre las convencionales, además de que cumplen las características de soporte y estabilidad estructural.

A partir de esto, la delimitación se enfoca a una geometría específica: **el paraboloides hiperbólico**, ya que representa un fácil acercamiento para el análisis de las superficies de doble curvatura debido a cuatro factores:

1. Las experiencias de diseño, cálculo y construcción con esta forma geométrica, lo que genera imágenes claras para el estudiante en relación a los resultados finales del proyecto.
2. Su cálculo matemático no representa tanta dificultad como el de otras superficies alabeadas, por lo cual es factible el desarrollo en programas de cómputo que los auxilie.
3. Es aplicable a diversos materiales: madera, concreto y plásticos son algunos ejemplos.
4. Su aspecto estético es incluyente a los movimientos contemporáneos, por lo cual el estudiante puede tener amplias opciones para sus diseños.

1.2.2 Investigaciones previas y panorama actual

El paraboloides hiperbólico ha sido motivo de estudio en diferentes partes del mundo. En México, los más importantes son los hechos por **Félix Candela**, quien sentó las bases para la simplificación de la ecuación canónica de la superficie, generando el cálculo por medio de la teoría de la membrana. Pero uno de los factores más importantes es que generó diversas aplicaciones constructivas, certificando que sus modelos experimentales no sólo eran estructuralmente adecuados y de bajo costo, sino también de una impresionante belleza estética.

Uno de los principales herederos de su teoría es **Juan Antonio Tonda**, quien continuó con la construcción de cascarones y desarrolló la investigación del paraboloides hiperbólico, para facilitar a los arquitectos el diseño y cálculo de esfuerzos.

Existen otros estudios más enfocados en el área de la ingeniería, como son los elaborados por **Ignacio Canals, Ramón Guérin, y Alfonso Olvera**, que abordan sobretodo aspectos de análisis estructural. Para hacer más sencillo el proceso matemático que hay que seguir para el cálculo de la superficie, se han usado procesos computarizados, como en los que han incursionado **José Luís Rincón** y **Marcial Escudero**. Ambos generaron modelos de programación en diferentes lenguajes. Actualmente, la facilidad de los cálculos radica en seguir un proceso metodológico en hojas de cálculo (como la de la paquetería de Office, Excel).

Por otra parte, en el terreno de la geometría estructural, **Juan Gerardo Oliva**, genera una importante aportación en el estudio del diseño de paraboloides hiperbólicos en especial para aplicaciones de cubiertas ligeras tipo velaria.

Todos los profesionales mencionados anteriormente, han sentado una importante labor en el estudio del diseño, cálculo y construcción del paraboloides hiperbólico; estamos hablando de más de 50 años de investigación hasta nuestros días, donde se han simplificado los procesos, gracias a las plataformas tecnológicas.

1.2.3 Experiencia con estudiantes de Arquitectura, retos y logros.

Con lo antes expuesto, puedo afirmar que existen bases sólidas para la incursión en superficies con geometría de paraboloides hiperbólico. En el caso específico de la Facultad de Arquitectura de la UNAM, se cuenta por lo menos con dos asignaturas de sumo valor, la clase de la especialización en cubiertas ligeras impartida por Juan Antonio Tonda y el curso optativo de licenciatura Geometría Estructural (mecametría) impartida por Juan Gerardo Oliva.

Sin embargo, la cuestión es: **¿por qué si se tienen opciones para aprender el diseño del paraboloides hiperbólico y de geometrías complejas, no se usan en los proyectos de los estudiantes?** Existe una serie de problemas que he observado en mi experiencia de apoyo a la docencia en la clase de Juan Gerardo Oliva y son las siguientes:

- Las estructuras y la resistencia de materiales se hacen tediosas a los alumnos porque no se analizan cuestiones de ejemplos construidos.
- La formación matemática es deficiente, no obstante al utilizar herramientas como hojas de cálculo, se hace más sencillo el tratamiento matemático.
- Aunque quieran diseñar superficies alabeadas, no están seguros de cómo hacerlo. Es más fácil para ellos cuando existe un programa computacional que los auxilie en el dibujo.
- Es difícil entender la geometría del paraboloides hiperbólico, se necesita de una amplia experiencia para poder dibujar los esquemas en pizarrón, por lo cual un apoyo didáctico ilustrativo es esencial para su enseñanza.

Todas ellas conforman una realidad estudiantil, que es el reto a vencer. Yo he decidido atacarlo por medio de dos estrategias:

- A partir del **estudio sobre el diseño del paraboloides hiperbólico** (esta tesis), generar un documento de recopilación, que explica antecedentes, generación de las superficies, y la conformación, diseño, cálculo y construcción de esta geometría, con un análisis de sustentabilidad en un ejemplo aplicado.
- Asociada a la tesis, está una **metodología didáctica** que extrae las aplicaciones del paraboloides hiperbólico en la arquitectura. Cómo se genera su diseño y cálculo utilizando herramientas computacionales actuales, además de la documentación de ejemplos aplicados y reales de diseños construidos. Es esencial que este documento tenga una libre difusión por internet, ya que actualmente es el medio de comunicación más importante, y es una realidad a la que muchos estudiantes tienen acceso.

Por medio de estas estrategias, es mi intención auxiliar a los estudiantes de licenciatura para el entendimiento de esta geometría y de esta manera enriquecer sus opciones y procesos de diseño.

CAPÍTULO 2

Antecedentes

2.1 Geometría en la naturaleza

Estamos rodeados de la más pura arquitectura, que construye una y otra vez elementos cuya perfección y belleza siempre pasamos por alto. Vemos cada día formas que se repiten con ritmos matemáticos definidos, lenguajes que expresan la mayor adaptación a las leyes de la física, sin perder su capacidad de ser poéticas. **Estructuras bien equilibradas, utilizando el mínimo de recursos. La arquitectura de la naturaleza.**

Y está ahí, fuerte y adaptada, una pequeña hoja vegetal que funciona como todo un organismo complejo. Teniendo un mínimo apoyo, sostiene una estructura de nervios que cubren una gran área. Su función fisiológica es captar la mayor cantidad de luz solar para sus procesos de fotosíntesis. De esa manera tiene que **gastar los menores recursos para cubrir una gran área** (a su propia escala).

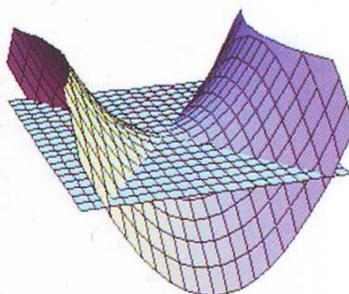
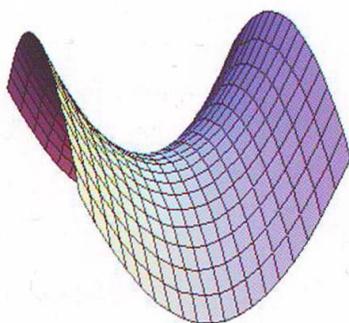
Es una superficie de doble curvatura, ya que si las hojas fueran planas, no habría manera de que el agua llegara a las raíces. Esta planta (Fig. 2) está nervada en sus hojas, generando geometrías y ritmos repetitivos, adecuados para sostener toda la superficie de la hoja y a su vez ramificada para sostener muchas hojas a partir de un solo tallo. Este ser viviente es un buen ejemplo de una estructuración geométrica eficiente.



Fig. 2- Las hojas de esta planta, conocida popularmente como “millonaria”, demuestran la perfección de la geometría de la naturaleza. Foto de Carolina Carmona D.R.



Fig. 3 y 4- Arriba podemos ver la espalda de la jirafa a la derecha, el corte del paraboloid hiperbólico en la famosa forma de la silla de montar. Este animal de gran altura, tiene dos puntos de equilibrio y soporte, las delgadas patas y la resistente espalda. **Imagen extraída del libro: Ritmos, matemáticas e imágenes, reproducción con fines didácticos**



Existen otros cuerpos en los cuales se reproducen formas geométricas. En este caso, es la analogía de los animales donde ésta forma toma su nombre. La famosa “silla de montar” se da al comparar la espalda de algunos animales cuadrúpedos. Y en efecto responde a la parte del cuerpo del animal que necesita de mayor resistencia y soporte a la compresión y al mismo tiempo a la tracción.

De este ejemplo, analizamos el “traje a la medida” de la jirafa (fig. 3 y 4):

“En la espalda, los planos tangentes en cada punto cortan la superficie, sus puntos son puntos de silla, puntos hiperbólicos; en ellos, paradójicamente también se cumple la condición del plano. Ocurre como en el paraboloid hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \dots”^1$$

¹ Borrás Vesés Eliseo, et al. “Ritmos, matemáticas e imágenes”

Con estos casos, deducimos que **para lograr un diseño estructural adecuado, hay que tener en cuenta los principios de la naturaleza y empezar a delimitar de la misma manera que ella lo hace, las formas geométricas más eficientes para cada propósito.** La pregunta aquí es: ¿Por qué para nuestras cubiertas usamos superficies rectas?, si su análisis geométrico estructural, indica que existen deformaciones que las llevan a la forma parabólica. Esto representa un buen punto para entrar al análisis sobre cómo trabaja el cuerpo de la jirafa: esbeltas columnas (sus piernas) que llegan a librar una altura considerable (en promedio 3.5m), las cuales se equilibran en una espalda cuya geometría consiste en un paraboloide hiperbólico, resistente a la compresión y a la tracción. La jirafa, todavía se da el lujo de cargar en uno de sus extremos su largo cuello (de 1.8m) gracias a la distribución de sus vértebras en la geometría ya mencionada.

A partir de esta reflexión, vemos que la geometría en la naturaleza es intrínseca. Las formas que toma en la producción de la vida no son accidentales, sino que responden de la manera más exacta a ritmos geométricos matemáticos. **Entonces habrá que pensar más en la naturaleza y en un comportamiento geométrico estructural para el diseño de nuestros espacios habitables.**

2.2 Geometría estructural

Los principios estáticos se encuentran definidos por las leyes de la física. Éstos nos determinan una serie de condiciones, a las cuales el hombre se ha adaptado para el desarrollo de las civilizaciones. En nuestro tiempo, los constantes avances de la ciencia y la tecnología han dado un amplio marco de conocimiento para comprender, amoldarse e incluso desafiar estas leyes. El resultado se puede observar en la evolución de las técnicas.

Nuevos materiales, procedimientos de cálculo y de construcción, hacen que la arquitectura mute e incluso que cambie sus percepciones. Aunque en su esencia sigue sirviendo al mismo propósito (el cubrir espacios y la generación de confort) ya no se puede concebir igual que hace algunos siglos.

Por ejemplo existen cambios en la idea básica de las edificaciones, en muchos ejemplos de la arquitectura contemporánea (tomando muy en cuenta las influencias directas de la segunda mitad del siglo pasado) ya no se maneja la misma concepción de las diferentes partes del edificio. Plantas, cortes y fachadas se ven ordenadas con lineamientos diferentes a los clásicamente utilizados.



Fig. 5- La torre Eiffel, representa el cambio de materiales y técnicas del siglo pasado. El papel de la ingeniería cobra importancia a finales del siglo XIX y principios del XX, generando estructuras que antes no se hubieran podido construir. Esto representa una revolución en la forma de ver la arquitectura, similar en la que ahora se nos presenta. **Foto de Carolina Carmona D.R.**

Antes, la arquitectura consideraba ciertas partes que un edificio debía contener, el carácter de "esqueleto y "piel", eran inamovibles. Sin embargo la revolución viene con la entrada de la ingeniería, cuando la estructura comienza a tomar un importante papel, hasta que incluso se vuelve lo más importante de la obra.

Las cubiertas por ejemplo, son parte de la fachada y no solo sirven para el propósito básico de la "tapa" de la edificación, sino que forman parte de la estructura y alcanzan el fin estético de la fachada.

Muros y columnas se ven incluidos en la cubierta, generando un concepto donde **la arquitectura ve al edificio como un todo, un ser casi orgánico que funciona gracias el equilibrio de todos sus elementos.** Entonces soportes y cubiertas son un solo elemento de diseño y de cálculo.

Ante esta situación, el cálculo de los elementos estructurales por separado ya no es válido y habrá que ver el comportamiento de todo el módulo. Pandeamientos, tensiones, tracciones y flexiones se ven en modelos computacionales diseñados específicamente para este propósito por lo que facilitan la siempre tediosa tarea de los números.

Sin embargo, no se puede responsabilizar a una máquina del proceso de diseño de una obra humana, tan sólo representa una herramienta que facilita el ejercicio de cálculo. De esta manera los responsables del diseño estructural muchas veces son los ingenieros. Por lo regular se vuelve una tarea conjunta con los arquitectos, en la cual equilibran procesos estéticos y estáticos, para llegar a un mismo fin.

2.2.1 La importancia de la geometría

Las estructuras no se presentan como caprichos estéticos de los arquitectos que deben ser resueltos a toda costa. Dentro del proceso de diseño, la geometría juega un papel sumamente importante, buscando formas que faciliten la construcción y funcionen estáticamente. **Sólo conociendo la geometría a fondo, podremos desarrollar comportamientos estructurales adecuados en los edificios proyectados, e incluso de antemano sabemos que tendrán resultados de belleza y proporción agradables para el usuario.**

Por esto, el dominio de la geometría estructural nos da muchas herramientas para el diseño arquitectónico y la correcta estructuración. Se trata, entonces, de utilizar estas herramientas para lograr resultados óptimos, o sea una estructura eficiente, ligera y económica. Entramos a un concepto que Frei Otto definió como estructura mínima:

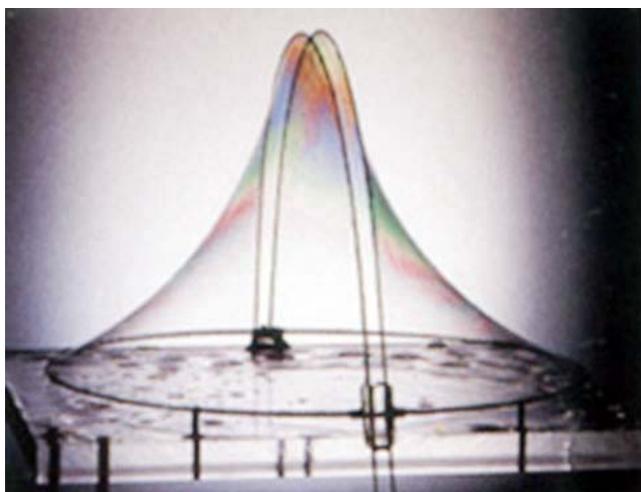


Fig. 7- Cuando a la pompa se le ve sometida con un régimen de apoyos, esta tomará las formas de la superficie mínima, de esta manera se pueden analizar las tensiones. **URL de origen, ver referencias. Reproducción con fines didácticos**



Fig. 6- La figura geométrica que adquiere una pompa de jabón es la superficie mínima que ocupa el material para cubrir el aire que encierra la burbuja. La elasticidad del material nos permite ver este fenómeno. **URL de origen, ver referencias. Reproducción con fines didácticos.**

“Definimos como estructuras mínimas aquellas, que cumpliendo con todas las necesidades que presentan los varios problemas constructivos de una obra, necesitan la mínima cantidad de material empleado (expresado en peso, volumen y costes) y el trabajo (horas de trabajo de fabricación y de montaje). La economía de una estructura se obtiene de su gasto total y su rendimiento efectivo. De tal manera que las estructuras mínimas serían también las más baratas.”²

Pero para poder definir una estructura mínima, habrá que cumplir una condición esencial, y esto radica en encontrar la superficie mínima. Al ver el ejemplo de la jirafa, encontramos una superficie eficiente la cual se adaptaba al funcionamiento natural de la estructura del animal. En analogía sabríamos que **una superficie mínima, es la que se adapta perfectamente a las condiciones de las fuerzas, a las tensiones y compresiones del material.**

² Conrad Roland, “Frei Otto: Estructuras, Estudios y trabajos sobre la construcción ligera”

Frei Otto manejó estudios con pompas de jabón, para que a partir de la elasticidad del material se pudieran medir sus tensiones (Fig. 7), además de experimentar con diferentes geometrías y materiales en “membranas” definidas como: “una lámina semejante a una piel, sin rigidez a la flexión y tensada”³

Para definir una superficie mínima en una membrana, el Ing. Horst Berger define:

*“Superficie mínima es aquella que, dado un perímetro determinado está limitada por éste y su área es la menor posible... Toda **membrana** que presente la misma tensión en cualquier dirección adoptará forzosamente la forma correspondiente a la de la superficie mínima... Si los segmentos del perímetro no son coplanarios y se cruzan en el espacio, la superficie mínima en este caso adoptará siempre la forma de un **paraboloide hiperbólico**.”*⁴

Dado esto, Horst Berger explica que una superficie mínima es una membrana que se adapta a un perímetro dado, y el área menor posible. En las pompas de jabón, el perímetro sería el aro por el cual entra el aire que “infla” la superficie, y el área mínima es la burbuja como tal. Como se ve en la Fig. 7, se delimita la superficie con un arco al centro, que genera que los segmentos del perímetro no sean coplanarios, en consecuencia la superficie mínima toma la geometría de un **paraboloide hiperbólico** espejeado en ambas direcciones del arco.

Esto nos demuestra que esta geometría trabaja como una superficie mínima, y se adapta al trabajo estructural de la membrana, presentando las mismas tensiones en cualquier dirección.



Fig. 8- Horst Berger. **Imágen extraída del libro: Light Structures, Structures of Light.** Reproducción con fines didácticos.

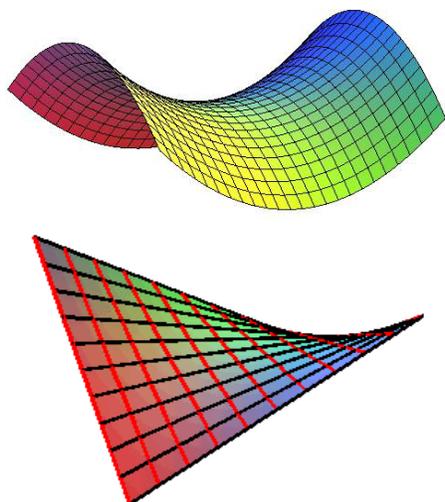


Fig. 9- El paraboloide hiperbólico, formado por curvas en la parte de arriba, y en la de abajo vista de una sección formada por rectas que forman planos desfasados en el espacio. **URL de origen, ver referencias.** Reproducción con fines didácticos.

2.2.2 Estudio de una superficie: el paraboloide hiperbólico

En este apartado trataré las **características generales** del paraboloide hiperbólico, más adelante profundizaré en el análisis de la superficie y su cálculo.

Ya fijé antes el concepto de membrana para el estudio de la superficie mínima, sin embargo el paraboloide hiperbólico también puede ser definido como parte de las estructuras laminares, las cuáles entendemos como: “...todas aquellas en las que el espesor es muy pequeño con respecto a las otras dos dimensiones.”⁵.

De esta manera, un cascarón, una velaria o incluso una losa son estructuras laminares. Pero lo que nos interesa son aquellas que trabajen según el modelo estático en correspondencia con las fuerzas y esto es tomando la forma ideal de la estructura. Esta forma puede ser aquella que disminuya las flexiones al mínimo, y se encuentra dentro de los modelos curvos. Cuando su curvatura es en un sentido, se disminuyen las flexiones, pero cuando es en dos sentidos, **la flexión es mínima**. Con esto llegamos al modelo de estudio: **una lámina que trabaje con doble curvatura, una geometría básica, la del paraboloide hiperbólico.**

⁶ Frei Otto, “Cubiertas colgantes”

⁷ Frei Otto, “Cubiertas colgantes”

⁸ Conrad Roland, “Frei Otto: Estructuras. Estudios y trabajos sobre la construcción ligera”

Es de suma importancia que la forma geométrica no se pierda, ya que si esto pasa, el comportamiento estructural tenderá a cambiar. De esta manera, en la experimentación con estas geometrías, se ha trabajado en materiales indeformables cuya rigidez se mantiene, de aquí sus desarrollos en concreto por una parte, y por otra en materiales ligeros funcionando completamente a tracción, como en las velarias. A continuación, veremos proyectos en los cuáles se ha incursionado en diferentes estructuras laminares, en correspondencia a los conceptos que acabamos de mencionar.



De superior a inferior:

Fig. 10- Arco de arista que sostiene una residencia. Bologna. Italia.

Fig. 11- Estructura piramidal de la entrada del museo de Louvre. Paris. Francia

Fig. 12-. Compañía aseguradora Lloyd's, Londres, Inglaterra

Las imágenes nos muestran una clara evolución en las técnicas de la arquitectura universal. De las estructuras de piedra al uso del vidrio y del acero.

Fotos de Carolina Carmona D.R.

2.3 El paraboloides hiperbólico y las geométricas complejas. Proyectos materializados.

En la evolución de los sistemas de construcción, se pueden ver desde grandes y pesadas bóvedas con gruesos contrafuertes, hasta las estructuras de acero de pequeños grosores que soportan grandes esfuerzos. **El factor principal en la evolución son los cambios graduales en los materiales de construcción, en conjunto con el desarrollo de técnicas más eficientes.**

En el caso de las cubiertas, el empleo de materiales más eficaces, hizo posible la reducción del espesor, y la evolución de las técnicas. De la misma manera, **la concepción de la arquitectura ha cambiado y en el último siglo, el diseño geométrico ha tenido una importancia intrínseca para la estructura.** Cada vez son más los arquitectos, que se inclinan a buscar formas más adaptadas con la naturaleza y con esta idea se despegan de la ortogonalidad, cambiando incluso la concepción de las partes del edificio, convirtiendo muros y techos en un mismo elemento unificado.

Existen antecedentes de construcción y diseño que si bien se han retomado, no se han vuelto del dominio de trabajadores y profesionales, como para incursionar en ellos con facilidad. Arquitectos de este siglo, tienen en común la búsqueda de geometrías bien estudiadas, llegando a superficies de doble curvatura. **De aquí la importancia del paraboloides hiperbólico, que es uno de los elementos geométricos con mejor funcionamiento estructural.**

Por ejemplo, hay casos de superficies alabeadas construidas en piedra, como las de **Antoni Gaudí**, quien desarrolló el arco catenario, el paraboloides de una hoja y el paraboloides hiperbólico. **Pier Luigi Nervi** dió pie a la promoción de nuevas técnicas en el concreto, ferrocemento y sistemas estructurales con base en la modulación y prefabricación.

Otra generación de arquitectos como **Félix Candela** con sus cascarones en México, y **Frei Otto**, con diseños de velarias en Alemania, vienen a retomar los principios geométricos de las superficies alabeadas (con ejemplos de la aplicación estructural del paraboloides hiperbólico en diferentes materiales). Finalmente, arquitectos contemporáneos como Calatrava o Funks, han revolucionado aún más el estudio de la geometría, llevando la construcción a niveles estáticos y estéticos impresionantes.

Se han hecho diferentes obras que demuestran el dominio total de las condiciones geométricas de la estructura. Incluso solo el estudio de esta última, ha permitido que sorprendentes edificios se levanten ante las atónitas miradas de incrédulos de la época.

A cada uno de los arquitectos que analizaré en seguida, se les ha dicho una frase en común: *¿estás seguro de que no se va a caer?*, superando esta frontera con certeros análisis estructurales, que les garantizaban que no sólo no se iba a caer, sino que también representaba una perfecta solución a las condiciones estáticas.

2.3.1 Las formas de Antoni Gaudí

Este arquitecto español de principios del siglo pasado, dejó un legado de impresionantes edificios, donde los juegos escultóricos y detalles del diseño atraen a cualquier espectador. Para lograr las formas de sus edificios, generaba un proceso de diseño geométrico experimentado con los recursos de su época, aunque a veces este no es aparente debido al exuberante escultorismo que recubre a los elementos estructurales, dejándolos casi indescifrables.

Para poder entender el comportamiento estático de la estructura, Gaudí hacía maquetas a escala con modelos invertidos (funiculares), en los cuales representaba las cargas con sacos de arena generando solamente esfuerzos a tracción. Una vez observado el comportamiento de la forma y para que el modelo correspondiera a la realidad, lo espejeaba, dando como resultado un modelo antifunicular, en el que los esfuerzos en este caso fueran de compresión. Las formas resultantes eran arcos catenaroides y parabólicos, pero al parecerse tanto ambas geometrías, optaba por los últimos debido a la complejidad matemática de la catenaria.

Gaudí incursionó en diversas geometrías durante su vida, incluyendo la del **paraboloide hiperbólico**, se podría decir sus obras son las primeras que utilizan esta forma como aplicación constructiva en la arquitectura. Los encontramos en la glorieta del campo de las Higueras de la Finca Güell, al igual que en los acabados de alguna de las chimeneas del Palau Güel, y en las criptas de la colonia Güell.

Sin embargo es en la Sagrada Familia dónde los paraboloides hiperbólicos hallaron su culminación, encontrados en la cubierta superior de las naves y las sacristías, al igual que en los campanarios. Esta obra ubicada en Barcelona, España, se encuentra actualmente en construcción debido a la muerte de Gaudí, quien dejó estudios geométricos para que esta se completara, por lo que en varios momentos, se ha retomado el seguimiento de la mayor obra de la vida de este arquitecto quien cambiara el significado de la arquitectura.



Fig. 13- Izquierda, Fachada de la Sagrada Familia, foto actual, podemos ver las grúas del proceso de construcción.

Fig. 14- Centro, Detalle de los arcos parabólicos de la entrada, el escultorismo casi esconde la geometría.

Fig. 15- Derecha, Cubierta de las naves, se logra ver la geometría de los paraboloides hiperbólicos.

Fig. 13 y 15- URL de origen, ver referencias. *Reproducción con fines didácticos.*

Fig. 14- Foto de Carolina Carmona D.R.



Fig. 16- Vista de uno de los hangares construidos por Nervi en Orbetello, Italia. Se puede ver la estructura geométrica romboidal y la columna inclinada que responde a la resultante de las fuerzas. Libraba sin apoyos grandes claros, por lo que sus obras resultaban muy económicas. **Imagen extraída del libro: Pier Luigi Nervi, Reproducción con fines didácticos.**

Una de las cosas más interesantes en los diseños de Nervi, era que al igual que Gaudí, también estudiaba los efectos de las fuerzas en modelos a escala, y tomaba a la estructura como un organismo integrado. **Nervi tenía la concepción de que cada pieza generaba un funcionamiento individual forjando el equilibrio en el sistema.**

Muchas de sus obras, presentaban organismos nervados y distribuciones geométricas que generaban la estabilidad en el conjunto. Sus nervaduras isostáticas (llamadas así por sus historiadores) respondían a diseños orgánicos resultantes de las líneas de acción de los esfuerzos (Fig. 17). Además gracias al uso del ferrocemento, logra estructuras ligeras, ahorro de material y optimización de recursos.



Fig. 18- Laboratorio de Rayos Cósmicos. C. Universitaria. México. **Foto de Carolina Carmona D.R.**

Las formas de Pier Luigi Nervi

“La obra arquitectónica no se puede considerar como tal si no se hace realidad viva de materiales y organismo apto para satisfacer las finalidades funcionales y económicas para las cuales ha sido construida”⁶

Arquitecto ingeniero italiano, desarrolla su trabajo a mediados del siglo pasado desde los años treinta a los setenta. Sus análisis geométricos y estructurales eran de los más desarrollados en su época. El uso de prefabricados e incluso un sistema patentado por él, hizo que su arquitectura fuera eficiente y económica.

A partir del uso de piezas repetitivas, consigue que su arquitectura sea modulada y estéticamente agradable. A partir de estos prefabricados cubre claros de hasta 100 x 40 m, como en los hangares de Orbetello (Fig. 16), con un mínimo de apoyos y cubiertas nervadas.



Fig. 17 - Esta es una de las nervaduras isostáticas de Nervi, utilizada para el palacio de los deportes en Roma, Italia. **Imagen extraída del libro Pier Luigi Nervi. Reproducción con fines didácticos**

2.3.3 Las formas de Félix Candela

Candela es por mucho el máximo exponente de los cascarones. De origen español, llegó en los años treinta a México, dejando un gran legado de sorprendentes estructuras.

Funda la empresa Cubiertas Ala junto con los hermanos Fernando y Raúl Fernández Rangel, trabajó con económicos pedidos de techumbres para grandes claros. Dejando de legado obras como el laboratorio de Rayos Cósmicos -1952- en Ciudad Universitaria, (Fig. 18) y la iglesia de la Virgen de la Medalla Milagrosa -1953- en la colonia Narvarte.

⁹ Nervi-Desideri, “Pier Luigi Nervi”

Como independiente, construye obras como el mercado de Coyoacán -1955-, la capilla de Nuestra Señora de la Soledad, -1955- también en Coyoacán, la iglesia de San Antonio de las Huertas -1956- en San Cosme, el restaurante Los Manantiales -1957- en Xochimilco (Fig-22), la planta de embotellamiento Bacardí y Compañía -1959- (Fig. 19) en el Estado de México, la capilla de San Vicente Paul, -1959- en Coyoacán, la iglesia de Santa Mónica -1966- en la colonia del Valle, las estaciones del servicio de transporte colectivo Metro de San Lázaro y Candelaria -1968- en la Ciudad de México. (Fig. 20 y 21). Como se puede observar en las imágenes, **muchas de las obras de Candela, esconden en ellas una forma similar, en diferentes e ingeniosas combinaciones. "Ir a la solución más sencilla" era uno de sus paradigmas y aunque sus construcciones parezcan complejas, resultaban del análisis de una geometría de la cual tenía un amplio dominio, y que más adelante mencionaremos.**

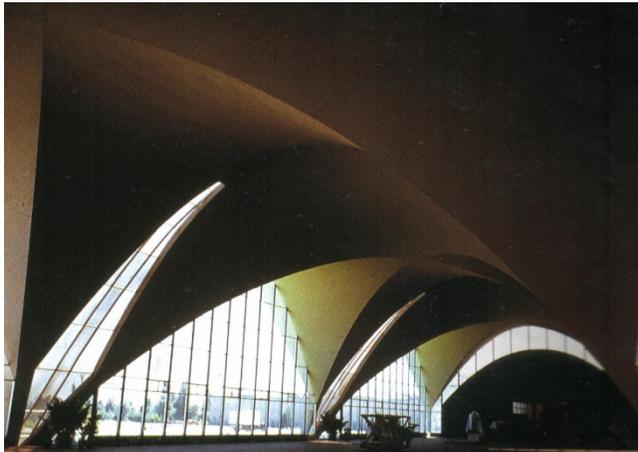


Fig. 19- Almacenes Bacardí, Estado de México, México. **URL de origen ver referencias. Reproducción con fines didácticos.**



Fig. 20- Estación del metro San Lázaro. D.F. México. **Foto de Carolina Carmona D.R.**



Fig. 21- Estación del metro Candelaria. D.F. México. **Foto de Carolina Carmona D.R.**

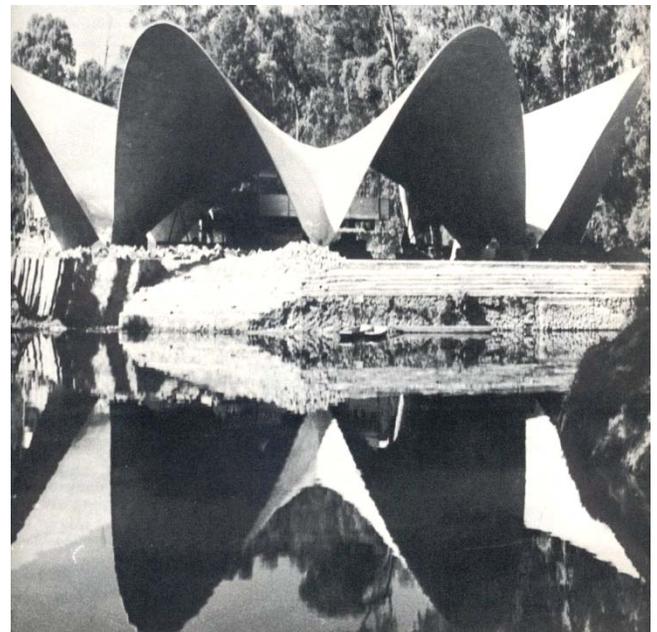


Fig. 22- Restaurant "Los Manantiales. Xochimilco. México. **Imagen extraída del libro: Las estructuras de Candela. Reproducción con fines didácticos**

Una de sus mayores obras de ingeniería, es el Palacio de los Deportes, construido con motivo de los Juegos Olímpicos de 1968, (Fig. 23), proyectado junto con Enrique Castañeda y Antonio Peyrí. Cubierto por una gran cúpula forrada en cobre y sostenida por columnas inclinadas que siguen las resultantes de las fuerzas, muestra del análisis estructural que Candela imprime a sus obras. Para 1971, emigra a Estados Unidos, país en el que desarrolló gran parte de su obra internacional, colaborando en proyectos como en el parque Oceanográfico en Valencia, España, en el cuál trabajó con Santiago Calatrava. (Fig. 24).



Fig. 23- Palacio de los Deportes, México. **URL de origen ver referencias. Reproducción con fines didácticos.**



Fig. 24- Parque Oceanográfico. Valencia, España. **URL de origen ver referencias. Reproducción con fines didácticos.**

El carácter de Candela fue muy cuestionado, debido a la disyuntiva de si era arquitecto o ingeniero, ya que por una parte no sólo hacía el estudio estructural, sino que sus obras tenían bellas y armoniosas formas. Además, se caracterizó por la economía que representaba la técnica constructiva de los cascarones, si bien en un principio el cliente siempre elegía estas cubiertas por su costo y no por su forma, terminaba fascinado al ver los resultados estéticos dentro de bodegas y naves industriales, así mismo en edificios de diferentes tipos. Al final el equilibrio entre la forma, la función y la economía son uno de los grandes legados de este creador.

De todas sus obras cabe resaltar el avanzado análisis estructural y geométrico que Candela imprimía a cada una, llegando a una forma geométrica en especial: el paraboloide hiperbólico.

Solo esta forma le permitió mantener los bordes libres, (forma representativa de su arquitectura) y con este diseño, está el icono más mencionado, el restaurante de los Manantiales (Fig. 25), construido en una zona de lago, concretó su diseño con una cubierta, resultado de la intersección de 4 *hypars*⁷ formando una gran bóveda de arista para cubrir 900 m².

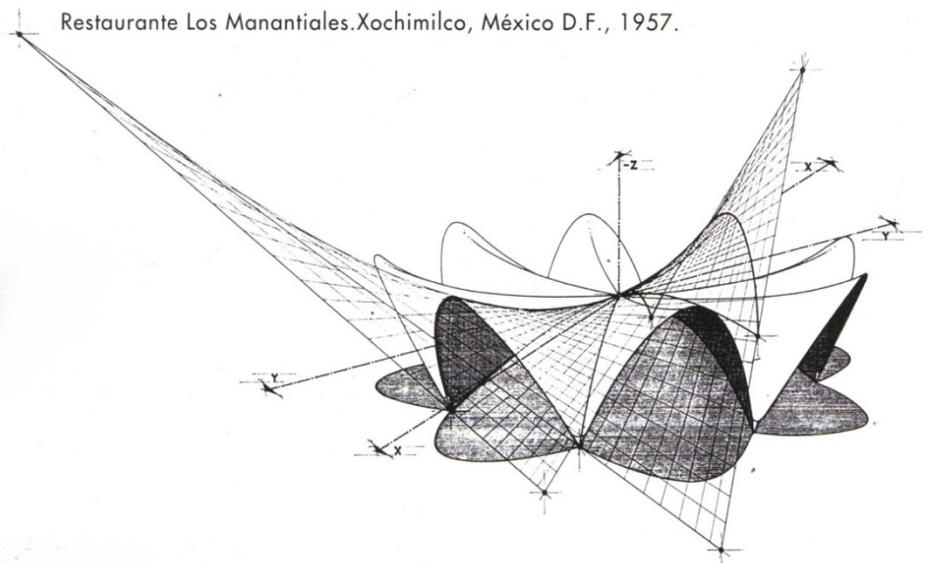
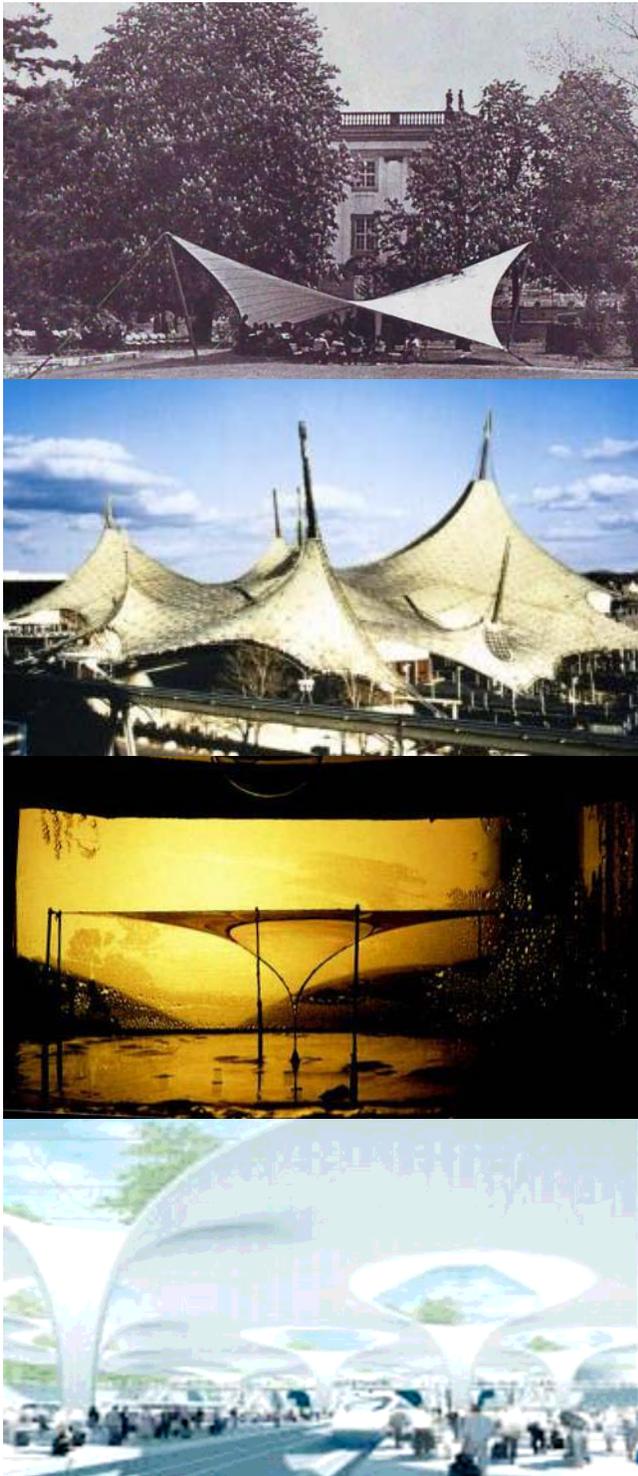


Fig. 25- El restaurante los Manantiales es una de las obras más representativas de Félix Candela, en especial por el acertado uso de la geometría, con paraboloides hiperbólicos. **Imagen extraída del libro: Las estructuras de Candela. Reproducción con fines didácticos**

Esta cubierta, que en sí representa todo el edificio, es uno de los más famosos trabajos de Candela, y sigue en pie a sus 50 años. Con esta funcional y bella arquitectura, **puedo afirmar que las formas geométricas no tienen "modas" o "épocas", sino adaptaciones a las diferentes condiciones para las cuáles se les diseñe, prueba de ellos son estas estructuras, que sobreviven con una atemporalidad absoluta.**

⁷ A los mantos de paraboloide hiperbólico, también se les llama *hypars*, debido a sus siglas en inglés, diminutivo de *hyperbolic paraboloids*.



De superior a inferior:

Fig. 26- Pabellón de Música de Kassel. **Extraída del libro: “Frei Otto, Estructuras”.**

Fig. 27- Pabellón Alemán para la Feria de 1967 en Montreal, Canadá.

Fig. 28- Modelo de pompa de jabón para la estación de trenes de Stuttgart.

Fig. 29- Proyecto de Estación de trenes de Stuttgart.

Fig. 27, 28 y 29. Ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos

2.3.4 Las formas de Frei Otto

Este arquitecto alemán generó estudios de estructuras durante la segunda mitad del siglo XX. Sus primeras investigaciones fueron sobre cubiertas colgantes, en las que se basó en analogías con la naturaleza, y a partir de éstas generó diferentes postulados del funcionamiento de los cables. Su equipo también es responsable del desarrollo matemático que le da sentido a diferentes estudios, por ejemplo la teoría de la superficie mínima, que sirve como parámetro para el desarrollo de las estructuras tensiles. **Básicamente se considera que Otto, es uno de los pioneros en las estructuras ligeras**, en especial de las velarias.

Otro de sus puntos de análisis son las membranas, en las cuales a partir de diferentes tipos de modelos experimentales a escala, observó que el comportamiento estructural óptimo de este sistema, se da cuando funciona por su geometría. La primera obra que llevaría a cabo con los resultados de sus investigaciones, es el Pabellón de Música de Kassel, la cual Conrad Roland describe como:

*“una membrana pretensada, con cables como elementos de borde, con dos vértices altos y dos vértices bajos... Tiene la forma geométrica elemental y exacta de las estructuras laminares traccionadas...”*⁸

Esta geometría de doble curvatura como se puede ver en la Fig. 26, es un **paraboloide hiperbólico**, forma que sería constantemente utilizada por Otto, sin embargo no es la única, ya que también experimentó con arcos, superficies entibadas, de doble inversión, de cojín, fungiformes, estructuras neumáticas, de suspensión, plegables y macrocubiertas.

Las redes o mallas de cables, también forman parte de sus estudios, proponiendo modelos reticulados, cuya aplicación lleva a proyectos como el Pabellón Alemán para la Feria de 1967 en Montreal, Canadá. (Fig. 27).

Una de sus últimas obras, es la estación de trenes de Stuttgart en Alemania, que muestra el grado de conocimiento y dominio de las estructuras por parte de Frei Otto y su equipo. En este proyecto están reflejados los estudios de estructuras tensadas con modelos de pompas de jabón (Fig. 28), que marcan la base del desarrollo final de la estructura (Fig. 29).

⁸ Conrad Roland, “Frei Otto, Estructuras”

Cabe mencionar que sus disertaciones, tienen sólidas bases en el análisis de elementos biológicos, deduciendo la estrecha interrelación entre la geometría y la naturaleza. Esto se da gracias a que equipos de ingenieros, biólogos e incluso filósofos, permiten el carácter interdisciplinario de sus investigaciones. Finalmente, una de sus grandes aportaciones es el desarrollo técnico de piezas y métodos de construcción, así como la fundación del departamento de estructuras de la Universidad de Stuttgart.

2.3.5 El caso de la Feria de Comercio de Milán

En los casos anteriores, los arquitectos daban propuestas estructurales a partir del estudio de la geometría y obtenían resultados estéticos impresionantes. A continuación abordaremos un proyecto en el cuál el arquitecto define condiciones formales y a partir de esta condición, el equipo de ingenieros adapta la geometría estructural para volverlo construible.

La propuesta formal de este proyecto estuvo a cargo de Maximiliano Fuksas, quien inspirado en los Alpes, propone una cubierta de vidrio “vela cubierta”, cuyas ondulaciones recorren los pasillos de la feria (Fig. 30) y para los apoyos dispone de una serie de columnas en forma de “volcanes invertidos” (Fig. 31).

Para materializarlo Jörg Schlaich y el grupo MERO desarrollan (con ayuda de programas de cálculo) una cubierta a partir de elementos cuadrangulares, que en las zonas de curvatura se deforman en diagonales, dando lugar a mallas triangulares (necesarias para la colocación de paneles de vidrio). Por la geometría de los elementos, se genera una doble curvatura transformando la estructura en una cáscara, haciendo que la capacidad para captar cargas se vuelva mayor y permita gran área libre de soporte. Ante los resultados, los calculistas consideraron:

“Aunque este diseño siga una extraña forma y geometría, desde un punto de vista ingenieril, el desarrollo del concepto estructural es concluyente”⁹

Esta obra representa la tendencia de separar al arquitecto de los procesos del diseño geométrico estructural. Sin embargo, nos queda la reflexión de que cuando se diseña con principios geométricos bien definidos, la estructuración y los resultados estéticos están garantizados.



Fig. 30-Superior, se observa el proceso de construcción de la Vela Cubierta, y la generación de la doble curvatura en base a mallas. **Foto extraída de la revista Space Structures,**

Fig. 31- Inferior, aquí se puede ver la columna de “volcán invertido” que soporta la estructura, a partir de una retícula formada por nodos y barras. Se puede observar en la transición de la malla el cambio de retícula cuadrangular a triangular. **URL de origen en referencias. Todas las fotos e imágenes reproducción con fines didácticos**

¹² Schlaich, Shoeber, Kürschner, “New Trade Fair in Milan.”

CAPÍTULO 3

Definición Geométrica de las superficies

En un concepto general definimos la geometría como: “*la rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio*”¹. Entendiendo como espacio todo lo que vemos y en donde nos desarrollamos.

Como parámetro fijemos que al describir gráficamente las propiedades del espacio entramos al campo de la **geometría descriptiva**, y al analizar matemáticamente las propiedades de las formas y superficies, estaremos hablando de **geometría analítica y geometría diferencial**. De esta manera tenemos una convención que nos servirá para fijar las bases de los siguientes conceptos.

En este capítulo, abordaré los conceptos generales para la clasificación de las superficies, para después ver específicamente en el paraboloides hiperbólico. Cabe mencionar que **por cuestiones de claridad y para no repetir las palabras innecesariamente, de ahora en adelante abreviaremos paraboloides hiperbólico como PH**.

3.1 Clasificación de las superficies por su generación



Fig. 33- Punto, Línea y Plano

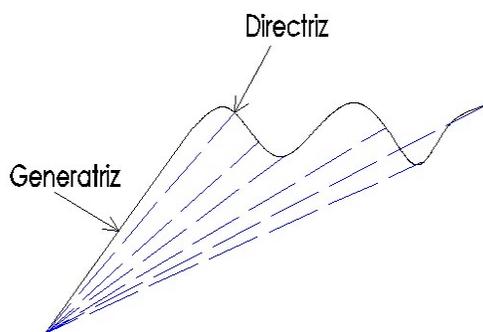


Fig. 32- Se puede ver en este esquema de una superficie curva como la línea azul generatriz va recorriendo la directriz para generar la superficie final

Primero definimos con base en la **geometría descriptiva**, la generación básica de la forma. Contamos con tres elementos fundamentales: el punto, la línea y el plano. El punto al moverse genera la línea, y de la misma manera ésta al moverse genera el plano también llamado superficie. (Fig. 32)

Por otro lado podemos entender como forma geométrica a la infinita combinación de los elementos antes mencionados, de tal manera que todo el mundo que conocemos (en el espacio que nos desenvolvemos), puede ser estudiado y clasificado por la geometría.

A partir de esta clasificación, examinemos más a fondo el concepto de superficie o plano, ya que éste será el principal para el entendimiento de nuestra forma geométrica en específico. Como tal la superficie se puede considerar como:

*“el lugar geométrico de las sucesivas posiciones de una línea, indeformable o no, que se mueve en el espacio, según una ley determinada y continua.”*²

La línea puede ser recta o curva y al desplazarse se llama generatriz de la superficie, a su vez su movimiento estará apoyado en una o varias figuras (ya que puede ser una o más líneas, un punto o incluso una superficie) a las cuales llamaremos directrices. De esta manera la superficie tendrá varios sistemas de generación, y según el carácter de su generatriz, o sea si es recta o curva, las superficies se clasificarán en regladas y no regladas (o curvas). La superficie reglada más sencilla es el plano.

¹³ Biblioteca de Consulta Microsoft ® Encarta ® 2005. © 1993-2004 Microsoft Corporation.

¹⁴ Izquierdo Asensi Fernando, “*Geometría Descriptiva superior y aplicada*.”

Existen muchos tipos de clasificaciones según el autor que las maneje, pero una de las más comunes es en la que se ordenan por su generación. De esta manera las superficies se clasifican en regladas y curvas. Las regladas se clasifican en desarrollables y alabeadas. Las primeras pueden ser desarrolladas sobre un plano sin roturas ni deformaciones. Las alabeadas no. Las formadas por dos o más superficies distintas las denominaremos compuestas.

En el cuadro siguiente podemos ver dicha clasificación, en la cual se citan ejemplos de cuerpos que son formados por estas superficies. Cabe mencionar que ésta clasificación, está basada en la que aparece en libro de *Geometría Descriptiva Aplicada* de Miguel Bermejo Herrera, al cual se le han generado modificaciones para su mejor entendimiento.

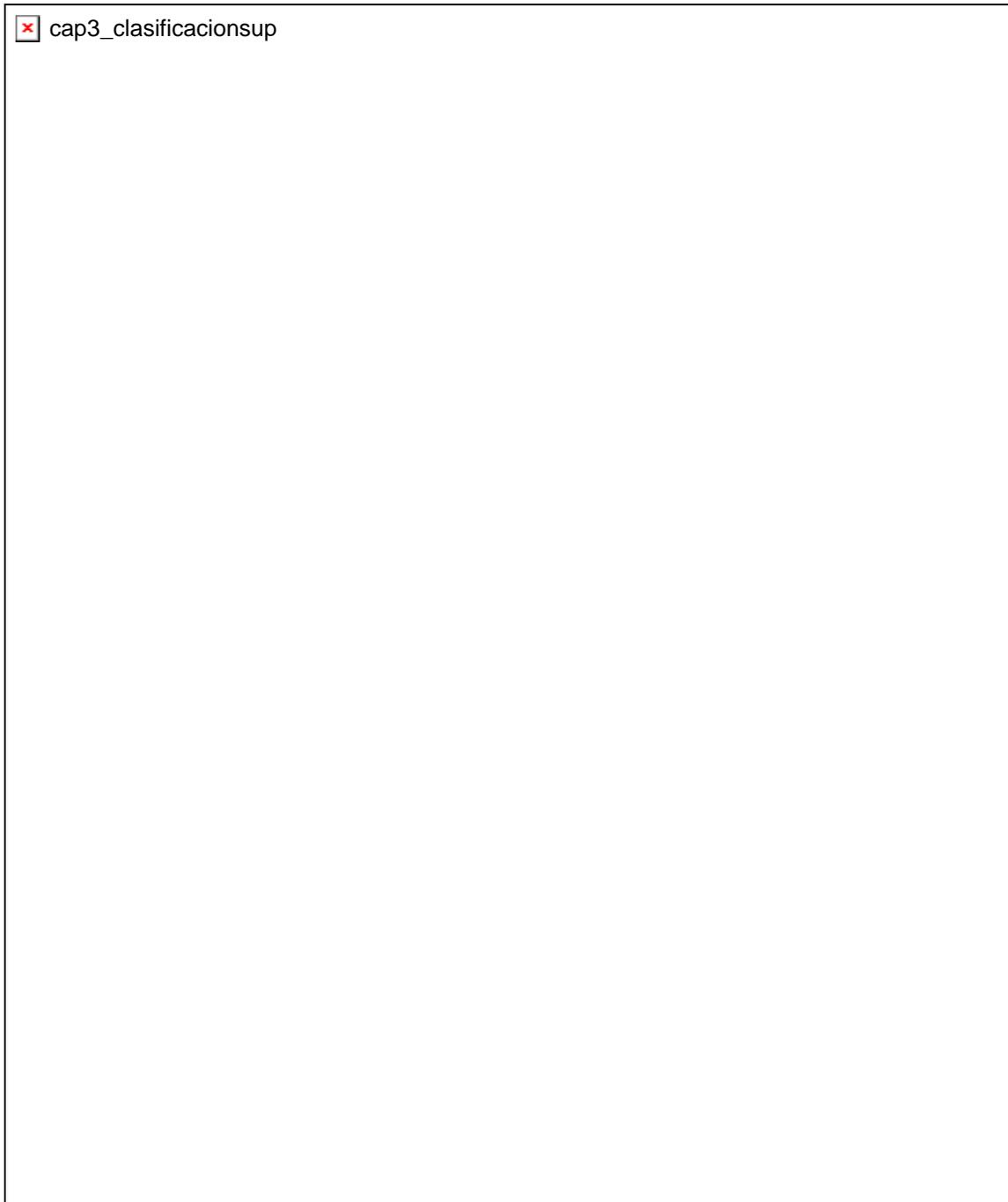


Fig. 33- Basado en el cuadro de clasificación de las superficies, extraído del libro de **Geometría Descriptiva Aplicada** de Miguel Bermejo Herrera, *Reproducción y modificación con fines didácticos*

3.1.1 Las superficies alabeadas.

Como vimos en el cuadro anterior, las superficies se pueden clasificar en regladas, curvas y compuestas. De éstas nos interesa comprender las primeras, que se caracterizan ya que:

“presentan la propiedad de estar engendradas por rectas que se mueven a lo largo de la superficie siguiendo ciertas leyes.”³

Dichas leyes, determinarán de qué tipo de reglada se trata y por donde se desplaza. Dado éste desplazamiento se pueden generar superficies desarrollables y alabeadas. En las primeras, encontramos poliedros regulares de “n” caras, y radiales como conos y cilindros. Mientras que en las alabeadas el desplazamiento se generará con relación con una o más directrices.

Definimos una superficie alabeada de la siguiente forma: *“Son superficies generadas por el movimiento de una recta generatriz que se apoya en tres líneas cualesquiera y un plano director al que permanece paralela.”⁴*

Explicaré este concepto: primero habrá que plantear tres líneas que guarden cualquier posición en el espacio, con la condición de que se unan en un extremo, a éstas las llamaremos 1, 2 y 3. Después tomamos una línea generatriz, que en este caso definiremos como ab, y la desplazamos por el espacio confinado por las líneas 1, 2, 3, de tal manera que con este movimiento se genere la superficie, como se muestra en la Fig. 34. Podemos observar que aquí el plano z-y, se conserva siempre paralelo a la generatriz, por lo que en este caso es el plano director de la superficie. **El plano director es siempre paralelo a la generatriz.**

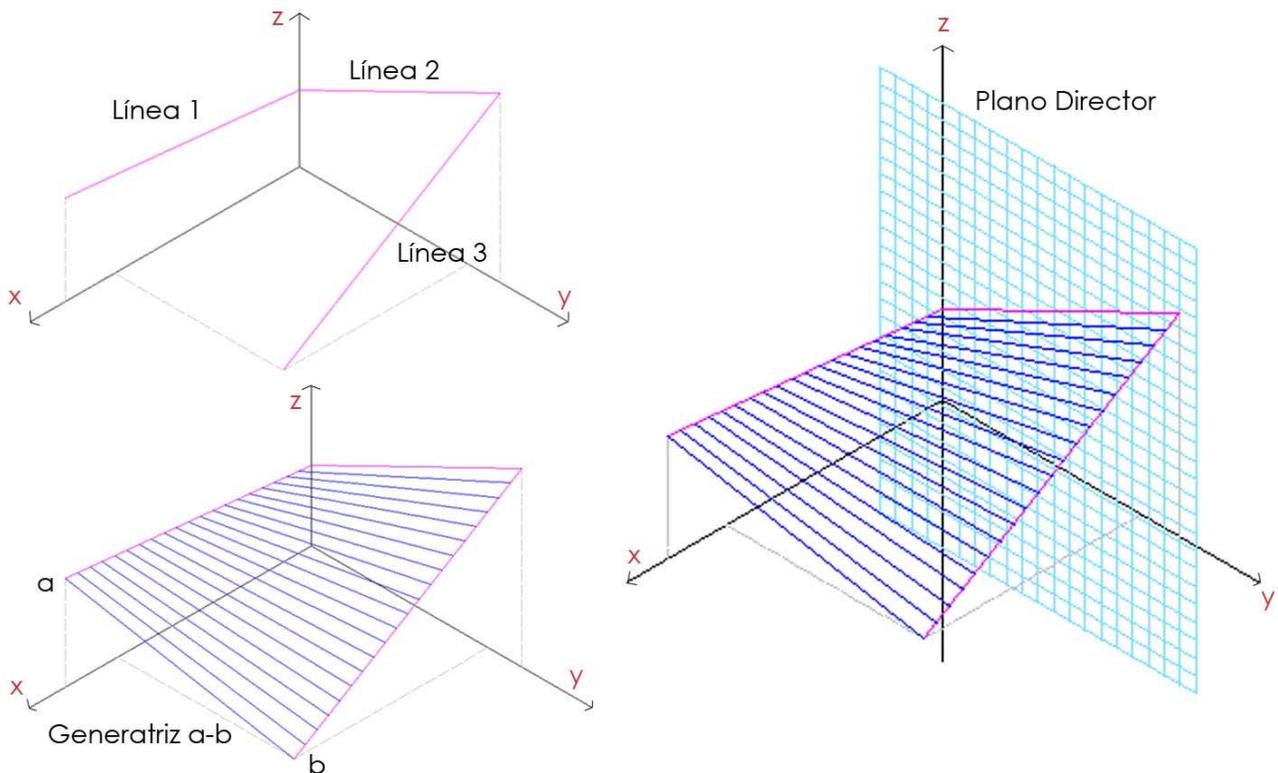


Fig. 34- En la figura, se muestra la generación de una superficie alabeada, en la parte superior izquierda las líneas que confinan la superficie, en la inferior izquierda se ve el movimiento de la línea generatriz a-b, que genera la superficie, y finalmente del lado derecho el plano director z-y, que cumple con la condición de ser paralelo a la generatriz a-b.

Si la superficie alabeada tiene tres directrices, origina el hiperboloide de un manto, si tiene un plano director puede generar el paraboloide hiperbólico y el conoide, y finalmente si cuenta con un cono director se genera el helicoides alabeado.

¹⁵ Faber Colin *“Las estructuras de Candela”*

¹⁶ Diz Finck Hugo Marío, *“Geometría Descriptiva”*

El interés principal en este tipo de formas radica en su función estructural, por lo cual una pregunta es esencial: **¿Qué características tienen estas superficies que otro tipo no tenga?** Una probable explicación nos la da Juan Bassegoda Nonell⁵ en su libro *La catedral de Antoni Gaudí, Estudio analítico de su obra*, en el que hace una mención de esto: “...poseen mayor resistencia, rigidez y estabilidad que las superficies planas comúnmente utilizadas en la composición arquitectónica. Esto es debido a su propia geometría que las hace más resistentes a cualquier tipo de esfuerzo y en cualquier dirección, gracias a su doble curvatura en el espacio.”⁶

Para la **arquitectura**, las superficies alabeadas que nos interesan por sus aplicaciones son: el elipsoide, el hiperboloide de dos mantos o elíptico y el **paraboloide hiperbólico**.

3.1.2 Las cuádricas, aplicaciones en la arquitectura

Anteriormente analizamos una de las clasificaciones de las superficies por su generación, así como la importancia de las alabeadas. En este apartado, con las herramientas que nos da la **geometría analítica**, veremos otra clasificación que se hace por las características matemáticas que describen a las superficies. Existe una familia que toma el nombre de **cuádricas**, esto es porque la ecuación que las describe es de tipo **cuadrático** (elevadas al cuadrado) y su modelo matemático es:

$$Bx^2 + Cy^2 + Dz^2 + Exy + Fxz + Gyz + Hx + Ly + Mz + N = 0$$

Las cuádricas, se clasifican por la manera en la cual se construye la superficie, existiendo dos tipos: las de rotación y las de traslación. Las de **rotación** o revolución (Fig. 35) se forman cuando una curva gira alrededor de una recta fija, donde esta última es el eje de la superficie.

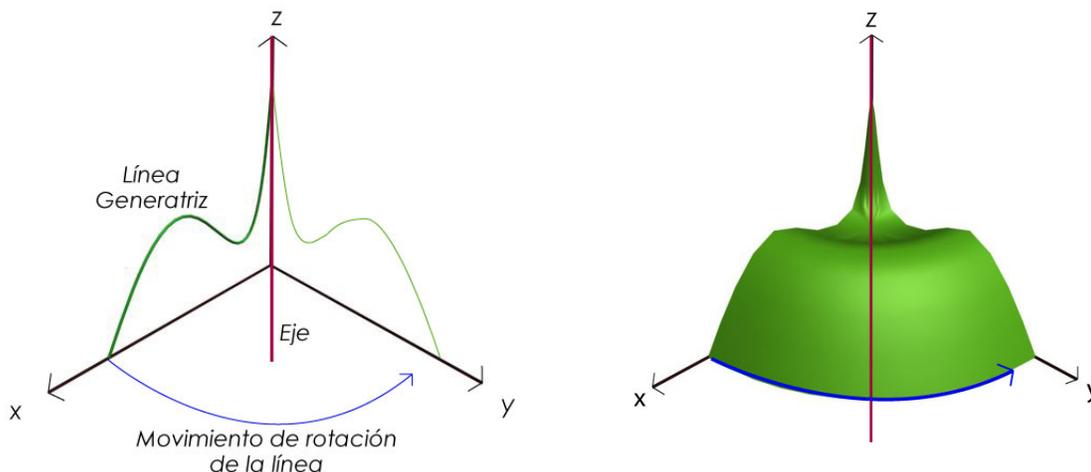


Fig. 35- Generación de una superficie por rotación, en este caso el eje coincidente en z, funciona como eje de rotación, donde la línea generatriz gira para formar la superficie como se ve en la parte derecha.

Las de **traslación**, (Fig. 36) se obtienen del movimiento de una curva o línea sobre otra, de tal manera que encontramos una **directriz** que como su nombre lo indica definirá la dirección de la superficie, y una **generatriz** que le dará su aspecto formal.

¹⁷ Juan Bassegoda Nonell, realizó una investigación doctoral acerca de Gaudí y la catedral que impartía en la escuela técnica de arquitectura en Barcelona España.

¹⁸ Bassegoda Nonell Juan, et al “La catedral de Antoni Gaudí, estudio analítico de su obra”

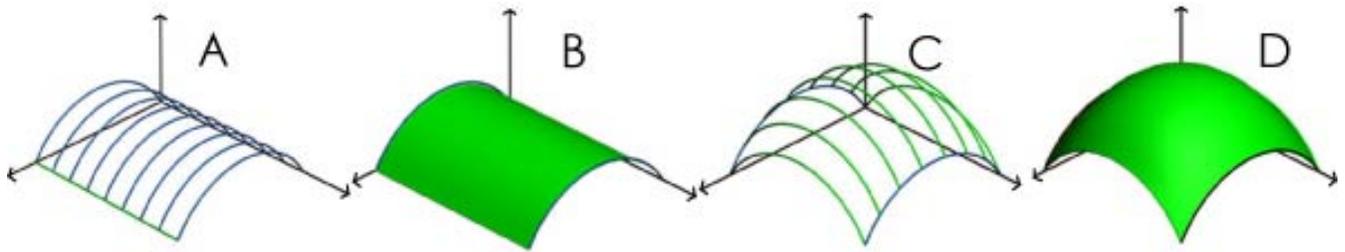


Fig. 36- En la parte A, se muestra la traslación de una curva sobre una línea, dando lugar a superficie que asemeja una bóveda de cañón, en este caso la directriz es la línea y la generatriz la curva. La superficie completa se muestra en B. En la parte C, se ve una traslación de arcos elípticos, en este caso se puede tomar a cualquiera de las curvas como directriz o generatriz, la superficie total mostrada en D, recuerda a una cúpula elíptica.

De esta manera, podemos analizar los diferentes movimientos de rotación y traslación en curvas y rectas, que generan las siguientes superficies:

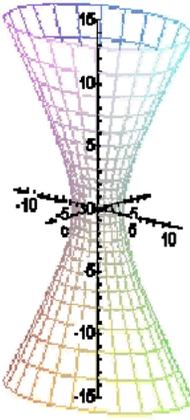
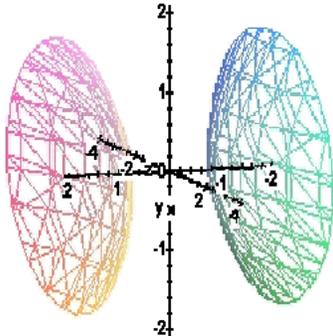
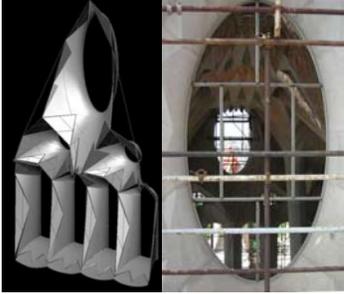
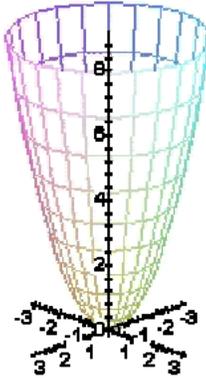
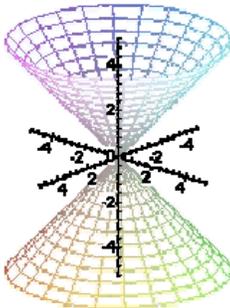
- **Elipsoide:** consideramos que la elipse cuenta con dos ejes, el mayor y el menor, al provocar la rotación en cualquiera de estos, se obtendrá la superficie. La figura aparenta ser un ovoide, en la ejemplificación la rotación se está generando en el eje mayor de la elipse.
- **Hiperboloide de un manto o de una hoja:** visualicemos la hipérbola con dos ejes, pensando que el vértice este ubicado en el origen de un sistema xyz, uno de los ejes se desarrollaría sobre z y es en el que la curva abre, y el otro que se podría decir es la altura. Generando la revolución sobre z, tendremos una superficie parecida a un reloj de arena.
- **Hiperboloide de dos mantos o elíptico:** en este caso la hipérbola es ubicada de la misma manera que en el de una hoja, con la diferencia que la rotación será sobre el eje que marca la altura. El resultado será una cúpula.
- **Paraboloide elíptico:** consideramos que la parábola girará sobre si misma siguiendo una trayectoria elipsoidal, con esto generaremos la superficie que asemeja a una cúpula alargada.
- **Cono elíptico:** tomando de base una elipse, pasamos trazas cuya trayectoria se intercepta en un punto que regularmente coincide con el origen de coordenadas.
- **Paraboloide hiperbólico:** es una traslación de parábolas (generatrices) a través de otra parábola (directriz). En este caso directrices y generatrices pueden ser nombradas arbitrariamente, como se desee, ya que en ambas direcciones cumple con la condición. Al corte por un plano paralelo, generara hipérbolas, de ahí su nombre, encontrando las asíntotas como ejes del paraboloide cuyo origen es su vértice.

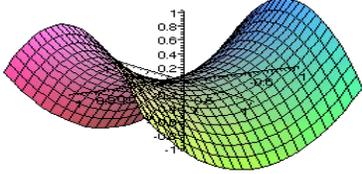
A continuación veremos una tabla en la cual los conceptos antes descritos se ven ilustrados, con sus gráficas y respectivas ecuaciones. También sus ejemplos de aplicación más típicos en la arquitectura. Después analizaremos de manera particular la definición de las curvas que generan estas superficies.

La aplicación de las cuádricas en la arquitectura:

(Ver en referencias, URL y libros de origen de las imágenes de aplicación de esta tabla)

NOMBRE	ECUACIÓN	GRÁFICA	APLICACIÓN
ELIPSOIDE	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		 Massimiliano Fuksas, Centro Ricerche Nardini, Vicenza, Italia

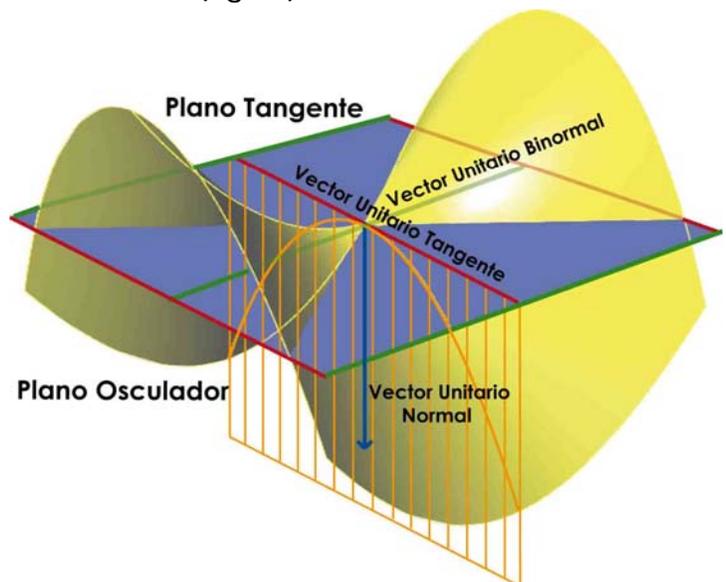
NOMBRE	ECUACIÓN	GRÁFICA	APLICACIÓN
<p>HIPERBOLOIDE DE UN MANTO o DE UNA HOJA</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		 <p>Oscar Niemeyer, Cathedral en Brasília, Brasil</p>
<p>HIPERBOLOIDE ELÍPTICO o DE DOS MANTOS</p>	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		 <p>Ventanales de la Sagrada Familia en Barcelona, España</p>
<p>PARABOLOIDE ELÍPTICO</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$		 <p>Norman Foster St Mary Axe Swiss Reinsurance Headquart, Londres</p>
<p>CONO ELÍPTICO</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$		 <p>Norman Foster Entertainment Center Khan Shatyr, Kasajistán</p>

			Shatyry, Kasajistán
NOMBRE	ECUACIÓN	GRÁFICA	APLICACIÓN
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$		 Feliz Candela, Capilla de Palmira. Lomas de Cuernavaca, México

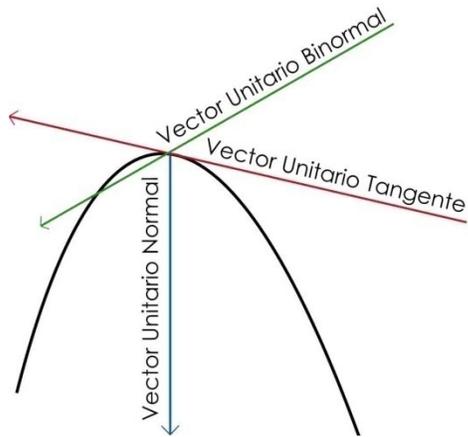
3.2 Clasificación de las superficies por su curvatura

La **geometría diferencial**, que es “*el estudio de las propiedades locales de curvas y superficies.*”. Para poder analizar las superficies, primero abordaremos las curvas en el espacio. Fijamos un punto determinado de la curva en el que podremos obtener su variación con respecto a tres rectas, que llamaremos: vector tangente, vector normal, y vector binormal, todos ellos valdrán una unidad, por lo cual se llamarán unitarios.

El **vector tangente**, es aquel que sólo toca a la curva en un punto, sin cortarlo. El **vector normal** es perpendicular al tangente, y el **vector binormal** es perpendicular a ambos, con lo que se obtiene un sistema de triedro. Considerando el mismo sistema trasladado a una superficie, el vector binormal y el tangente formaran un plano que llamaremos **plano tangente**; mientras que el formado por el tangente y el normal recibirá el nombre de **plano osculador** (Fig. 37).



⁷ Carmo Manfredo P. do “*Geometría diferencial de curvas y superficies*”



Ahora bien, el plano osculador, contendrá un círculo osculador cuyo radio coincide con el **radio de curvatura** de la superficie (Fig. 38). Este último nos determina las propiedades generales de la superficie. En especial **Karl Friedrich Gauss**, fijó los conceptos matemáticos para calcular la variación de las superficies con respecto a sus radios de curvatura. Primero habrá que fijar los principales radios y sus direcciones, siguiendo la convención de que uno será positivo y otro negativo; dicha convención la consideraremos correspondiente al sistema cartesiano, por lo que el desplazamiento del centro hacia arriba será positivo, mientras que el del centro hacia abajo se considerará negativo.

Fig. 37- En esta ejemplificación de los diferentes vectores para estudiar una curva, escogimos una parábola, cuyo punto tangente en este caso se encuentra en su vértice, dando lugar a la posición del sistema triédrico, similar a su posición en el eje cartesiano. Analizando la superficie del paraboloides hiperbólico, la parábola y sus vectores, darán la formación de los planos tangente y osculador que se muestran en la imagen. Hay que hacer notar que en este caso el plano tangente de una de las curvas conformadoras, corta la superficie.

Una superficie puede contener dos o más radios de curvatura. Para poder encontrar su clasificación, contemplamos el mayor y el menor. Hay que recordar que la curvatura se mide según la velocidad de la superficie para alejarse del plano tangente, por lo que una curva cuya trayectoria sea más alargada, se alejará más lentamente y su curvatura será menor, mientras que una menos pronunciada cuya trayectoria sea más corta y por lo tanto su movimiento más rápido, se definirá como una curvatura mayor. Tomando de nuevo la Fig. 38, definiríamos al Radio de curvatura 1 como $R_{máx}$, mientras que el Radio de curvatura 2, vendría siendo R_{min} .

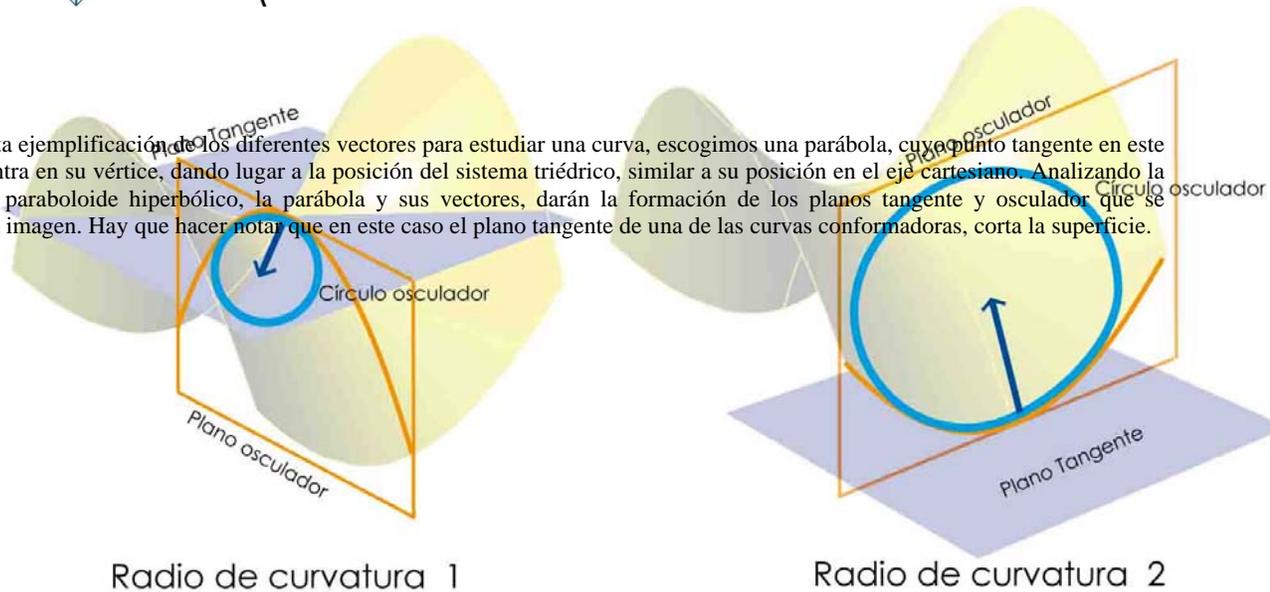


Fig. 38- Para la superficie del paraboloides hiperbólico, encontramos en cada parábola, sus principales radios de curvatura. De ahí tomamos sus vértices como punto para definir los planos tangente y osculador; este último contendrá al círculo osculador. Por la convención antes fijada, el radio de curvatura 1, sería negativo por estar generado del origen hacia abajo, mientras que el radio de curvatura 2, será positivo.

La constante que se refiere a la curvatura la abreviaremos con la letra **k**, y diremos que es igual al **recíproco del producto de los principales radios de curvatura**:

$$k = \frac{1}{R_{min} * R_{max}}$$

Sustituyendo la dirección de los radios, positivos o negativos, cuando en una superficie uno de los radios tenga una dirección negativa y el otro positiva tendremos:

$$k = \frac{1}{- * +} \quad k = - \quad k < 0$$

Cuando el valor de k es **negativo**, y por lo tanto $k < 0$, diremos que el caso corresponde a una **curvatura gaussiana negativa**. En cambio, cuando los dos radios de curvatura son del mismo signo:

$$k = \frac{1}{-* -} \quad k = + \quad k > 0 \qquad k = \frac{1}{+* +} \quad k = + \quad k > 0$$

El valor de k , es **positivo** y por lo tanto $k > 0$, y para este caso, será una **curvatura gaussiana positiva**. En el caso de que $k=0$, se considera una **curvatura gaussiana nula**, esto por lo regular responde a que alguna de las curvaturas valga 0 o bien infinito (∞).

Podemos deducir que **cuando la superficie tenga una curvatura con el mismo signo en ambos sentidos**, entonces el inverso del producto de sus radios será positivo. Esto coincide cuando al pasar el plano tangente por un punto definido de la superficie donde su curvatura sea la mayor posible, la superficie se encontrará hacia un lado del plano. Cuando cumple estas condiciones es **sinclástica**.

En cambio, cuando la superficie tenga **las curvaturas con alguno de sus signos diferente**, entonces el inverso del producto de los radios será negativo. Al pasar el plano tangente por el mismo punto antes mencionado, el resultado en este caso será que la superficie sea cortada por el plano tangente, con lo cual ahora la llamaremos **anticlástica**.

En la Fig. 39, ilustro diferentes superficies aplicables a la arquitectura. En el caso del **paraboloide hiperbólico**, el plano tangente corta la superficie y sus radios de curvatura son de signos diferentes, por lo que la superficie resulta ser **anticlástica**. La **cúpula**, cuya geometría es de media esfera, no es cortada por su plano tangente, y sus radios principales de curvatura coincidirán en el signo, por lo que la superficie es **sinclástica**.

El **toroide**, mejor conocido como dona, es un caso especial, ya que su superficie va cambiando de orientación, al igual que sus radios de curvatura, en este caso el plano tangente cortará y no cortará a la superficie, según el punto en el que se coloque; debido a esto, la curvatura se define **variable**. Finalmente el último ejemplo es una **bóveda de cañón** cuya geometría es la de medio cilindro. En esta geometría tendríamos que determinar la curvatura de la línea que conforma la superficie, y ésta tenderá al infinito. Por otra parte su curvatura de signo positivo, no causará repercusión en el resultado final que se define como curvatura **nula**.

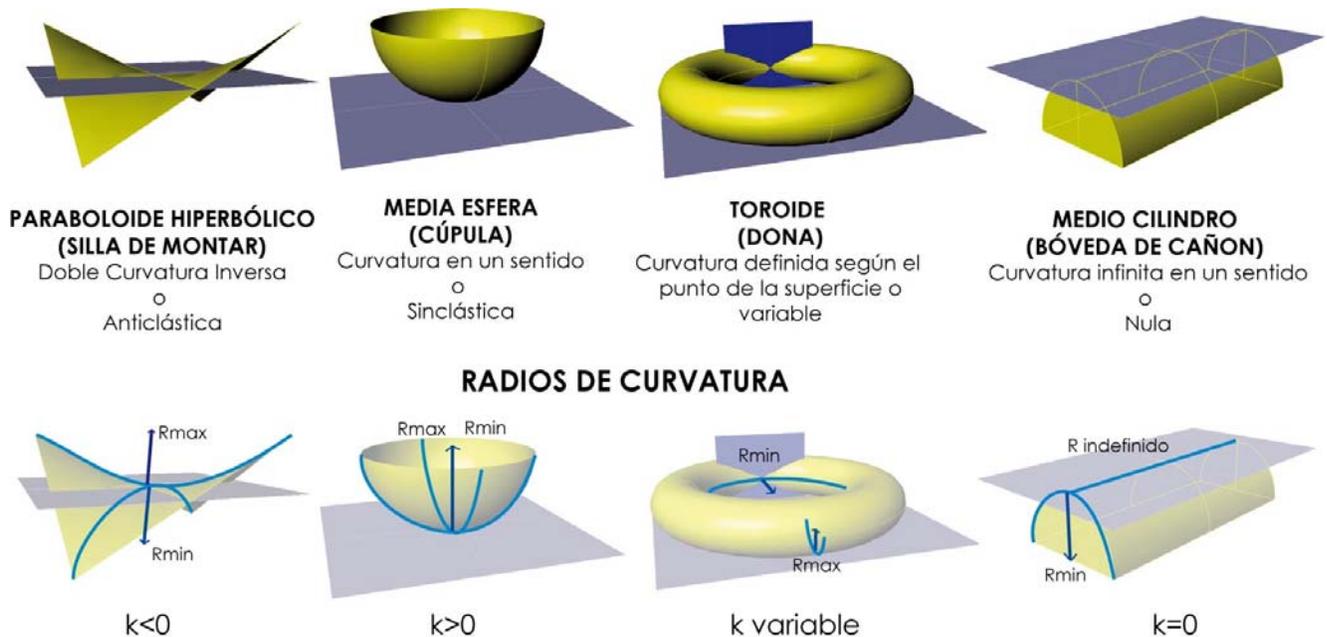


Fig. 39. Las figuras, definen su curvatura según el criterio de la intersección de sus planos tangentes, pero, también por la dirección de sus principales radios de osculadores. Podemos concluir, en que los fundamentos anteriores, nos sirven para **tres objetivos**:

- el primero es el poder identificar a la superficie en un sistema triédrico, esto con correspondencia a la posición de sus curvas conformadoras;

- el segundo es el de identificar elementos como el plano tangente y el radio de curvatura y con su análisis definir orientación de la superficie;
 - y el tercero para analizar como estructuras laminares las diferentes superficies:
- "La curvatura puede ser escogida como la primer clasificación de las láminas, ya que el comportamiento de estas será definido según la curvatura que la conforme..."*⁸

Esto principalmente nos servirá para el estudio integral de las láminas y su funcionamiento estructural.

3.3 Curvas generadoras: las cónicas

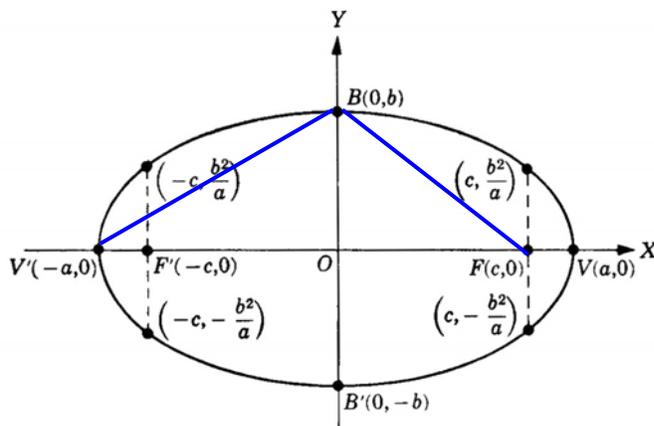
Anteriormente mencioné las características de las superficies a partir de su generación y de su curvatura. En ambos casos la generación de éstas, puede ser por curvas o rectas que tienen cierto movimiento o posición en el espacio. Ahora nos enfocaremos en una familia de curvas llamadas cónicas, cuyo análisis nos permitirá comprender la conformación geométrica del paraboloides hiperbólico.

Primero, vamos a fijar que la intersección del cono por diversos planos, (Fig. 40) resultará en diferentes curvas, llamadas **secciones cónicas**:

- Al intersecar un plano horizontal por el origen del cono, obtendremos un **punto**.
- Al intersecar un plano horizontal en el sentido transversal del cono, obtendremos una **circunferencia** (que es el caso especial en el cual los valores de los focos de la elipse son iguales).
- Al intersecar un plano diagonal en el sentido transversal del cono, obtendremos una **elipse**.
- Al intersecar un plano vertical en el sentido longitudinal del cono, obtendremos una **hipérbola**.
- Al intersecar un plano diagonal en el sentido transversal del cono, obtendremos una **parábola**. Es esencial que el plano guarde el mismo ángulo que las líneas generatrices del cono.



Fig. 40- Secciones cónicas; hay que recordar que la circunferencia es un caso especial de la elipse, y que el punto se muestra como figura esquemática.



3.3.1 La elipse

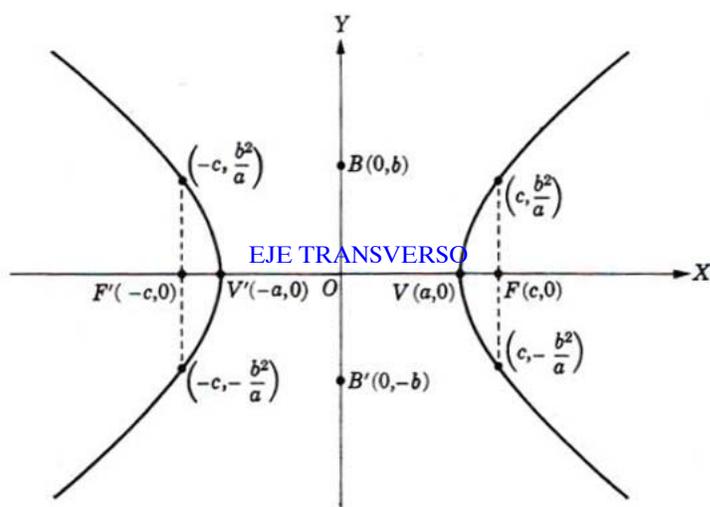
La elipse es una curva cerrada que se define:
*"Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos P de un plano tales que la suma de las distancias de P a dos puntos fijos F' y F del plano es constante."*⁹

Ubicamos dos puntos fijos, F y F' a los cuales llamaremos focos, cada punto de la curva cerrada, se obtiene con un trazo constante entre ellos, como se puede observar en las líneas azules de la Fig. 41. A medida que el trazo se mueve, se va generando la curva. La principal importancia de la elipse con respecto a las superficies, es que en muchas de ellas funge como directriz, en las que se generan por revolución.

3.3.2 La hipérbola

Fig. 41- Graficación y ubicación de puntos de la elipse.
 Imagen extraída del libro: Geometría Analítica, Fuller.
 Reproducción con fines didácticos.

Tomando un plano que corte ambas hojas de la superficie cónica, tendremos dos curvas abiertas extendiéndose ilimitadamente, a las cuales se les llama **hipérbolas**:



“Una **hipérbola** es el conjunto de puntos de un plano tales que la diferencia de las distancias de todo punto del conjunto a dos puntos fijos (focos) del plano es constante.”¹⁰

La hipérbola consiste en dos ramas separadas, que en su vértice V y V', se acercan al origen, pero en cuanto distan de este, las ramas se extenderán infinitamente alejándose de los ejes, como podemos ver en la Fig. 42, se ven ubicadas con la abertura en dirección del eje x, en este mismo, los vértices V y V' forman un segmento que llamaremos **eje transverso**, así mismo, la relación de los puntos B y B' que corren sobre el eje y, será el **eje conjugado**.

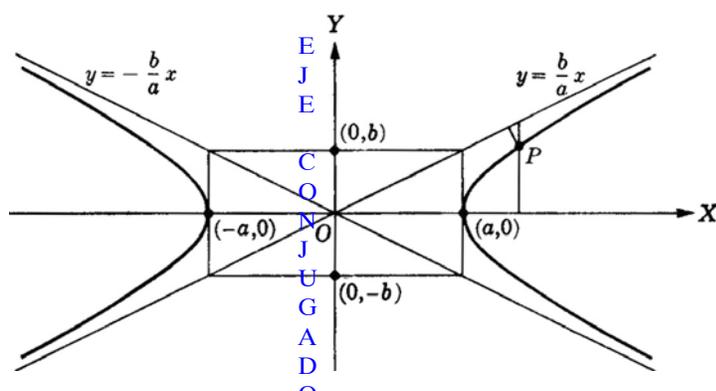


Fig. 42- Superior, Eje transverso, graficación y ubicación de los puntos de la hipérbola.

Fig. 43- Inferior, Eje conjugado, relación de la hipérbola con las rectas asintotas

Imágenes extraídas del libro: Geometría Analítica, Fuller.
 Reproducción con fines didácticos.

Esta sección cónica, está asociada con dos rectas llamadas **asintotas**. (Fig. 43) Estas rectas son diagonales prolongadas de un rectángulo que está definido de la siguiente manera:

- Dos de sus lados pasan por los vértices y son perpendiculares al eje transverso.
- Los otros dos lados pasan por los extremos del eje conjugado.

Las diagonales que se intersecan en el origen, tienen una tendencia a alejarse, que es similar a como lo hacen las ramas de la hipérbola, **en algún punto, la distancia entre la curva y la recta puede ser tan próxima a cero como nosotros lo deseemos, en este momento se dice que la recta es una asíntota de la curva.**

Las asíntotas son muy útiles para el trazo de curva, pues nos dan un parámetro de la trayectoria de la hipérbola, pero en especial veremos que estas rectas son esenciales para la definición y trazado del paraboloide hiperbólico.

3.3.3 La parábola

²² Gordon Fuller, “Geometría Analítica”

Considerando el cono, tomamos un plano que lo corte de forma transversal guardando el mismo ángulo que las directrices del cono, y que atraviese su base, de esta manera se genera una curva abierta que llamamos **parábola**:

*“Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija del plano. El punto fijo se llama **foco** y la recta fija se llama **directriz**.”*¹¹

Podemos construir una parábola, a partir de encontrar una serie de puntos que cumplan la condición de ser equidistantes entre un punto llamado **foco** y una recta llamada **directriz**, siempre y cuando la distancia a esta última sea la más corta (la cual se consigue ubicándola en un ángulo de 90 grados). En la Fig. 44, se puede observar la relación entre el foco y la directriz, los puntos se definen por las equidistancias entre estos.

Existe otro método para el trazado de la parábola, definiendo una determinada curva, la inscribimos en un rectángulo, y sabemos que los puntos de los extremos deberán estar en las esquinas, mientras que el vértice se encontrará en el medio y finalmente dos puntos medios del trazado de la curva se ubicarán dividiendo en cuartos el rectángulo como lo muestra la Fig. 45. En este ejemplo se usó una parábola de 10 unidades de flecha por 20 de base. Los puntos medios de la parábola se encuentran inscribiendo la parábola en un rectángulo de 10, 20, al dividir este a cada 5 unidades.

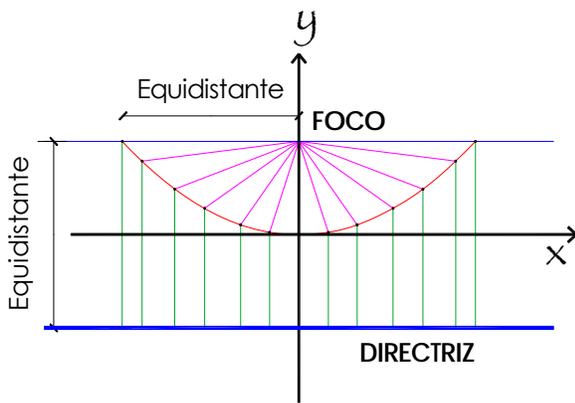


Fig. 44- Relación entre el foco y la directriz. Ubicación de puntos

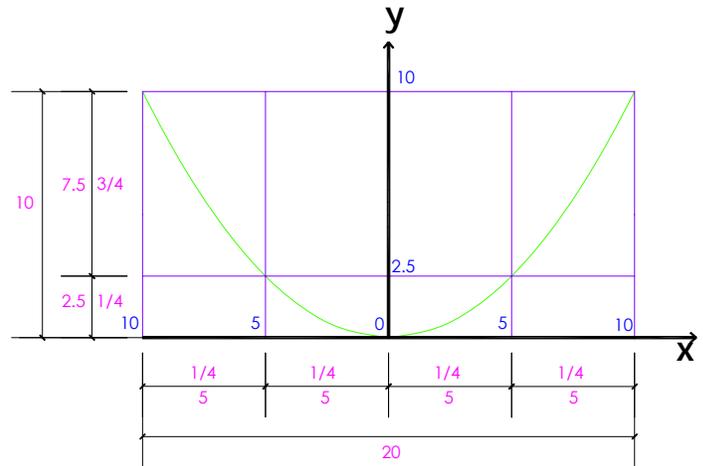
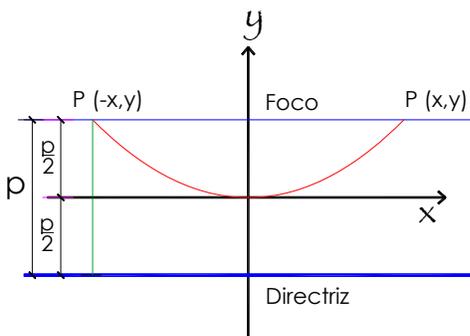


Fig. 45- Parámetro para el trazado de la parábola

Ecuación A

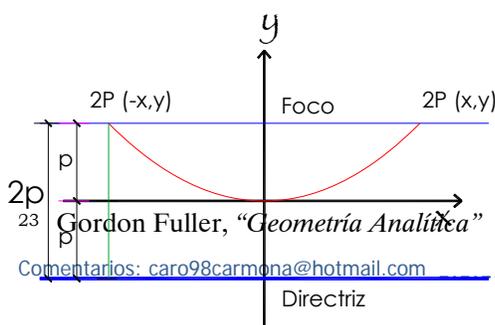


Regresando a la definición analítica de la parábola, podemos obtener la ecuación de la curva a partir de dos parámetros, uno pensando que la distancia del foco a la directriz sea determinada por el factor p, y la otra que sea determinada por 2p, tal como se muestra en la Fig. 46. El resultado serán las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN A: $x^2 = 2py$

ECUACIÓN B: $x^2 = 4py$

Ecuación B



La diferencia en ambas ecuaciones no afectará los datos, ya que sólo se está tomando un numeral diferente para una misma proporción. En los libros de geometría es más usual la fórmula que toma el valor de 4p, y de hecho nosotros consideraremos ambas fórmulas, la ecuación A, por la facilidad para la operación en la graficación, y la ecuación B,

para poder explicar la forma canónica de la superficie que veremos en el capítulo 4.

A continuación tomaremos la ecuación A, para explicar la graficación de la parábola. Considerando una curva cuyo valor desarrollado en el eje y es de 10 unidades, llamaremos a esta **flecha o altura**, mientras que el valor del **claro o anchura**, será la base de la parábola.

Fig. 46- Diferencia de las ecuaciones con base al valor numérico del factor P

Pensando que la curva sea convexa, y esto determine que su abertura se dirija hacia arriba, pondremos el vértice en el origen de coordenadas, para comenzar la graficación.

Tomando la Ecuación A y los datos de unidades, fijamos que:

$$x^2 = 2py$$

- flecha o altura = 10 unidades, por lo tanto el valor de $y=10$
- claro o anchura = 20 unidades, al situar el vértice en el origen de coordenadas $x=10$

Para determinar el valor de p despejamos de la ecuación original:

$$p = \frac{x^2}{2y}$$

Sustituyendo:

$$p = \frac{10^2}{2(10)} \quad p = 5$$

Despejando la x de la ecuación A, tenemos que $x = \sqrt{2py}$, por lo que proponemos valores para y, y calculamos x, de tal manera que podemos graficar la curva como se muestra a continuación:

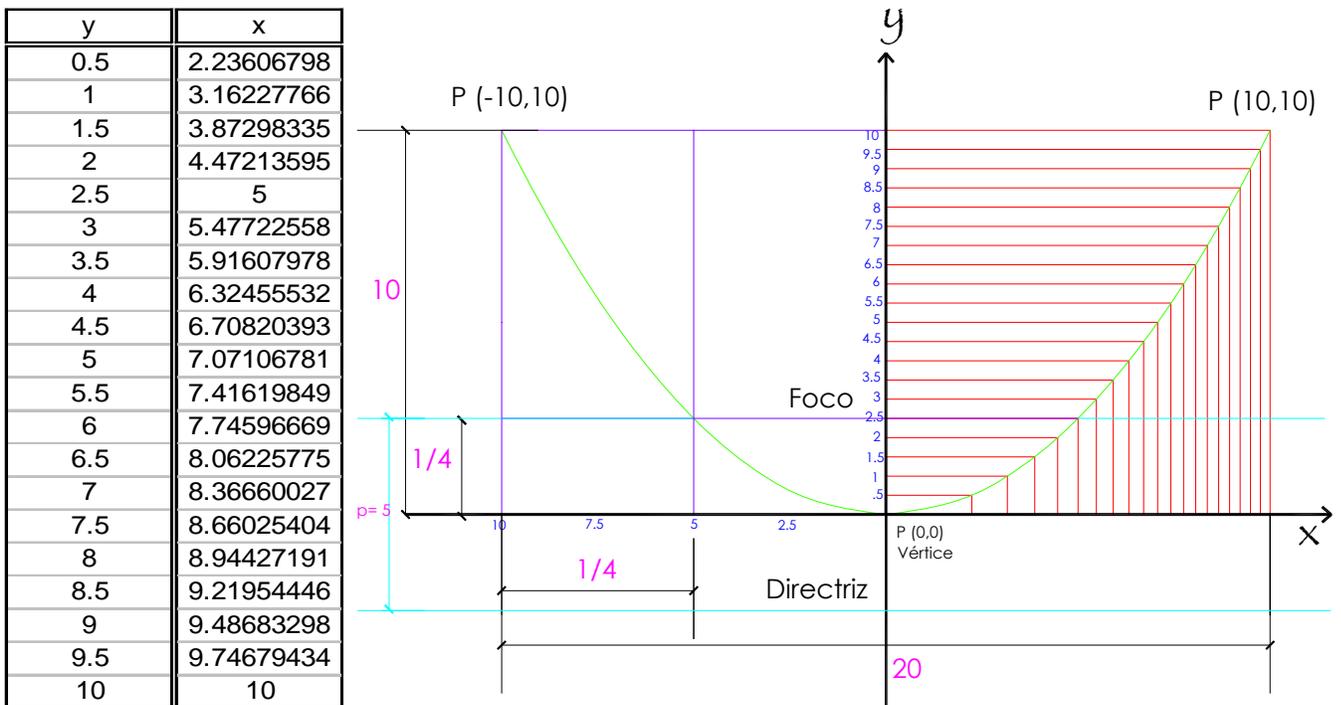


Fig. 47- Graficación de la parábola

Podemos observar, que la curva pasa en dos de sus puntos por un cuarto del rectángulo en el que se inscribe, como habíamos explicado antes. Se marcan también la distancia entre el foco y la directriz, cuyo resultado es 5, fijamos desde el vértice $p/2$ para ubicar por donde pasan este punto y esta línea, y sabemos que todos los puntos descritos por la curva son equidistantes de ellos.

Se omitieron los valores de x en la gráfica, para no saturar la información, pero estos se pueden encontrar en la tabla.

Este es un ejemplo de la graficación cuando la parábola abre de manera convexa, en caso de las aberturas en forma cóncava (apertura hacia abajo), derecha e izquierda, establecemos la siguiente relación de ecuaciones:

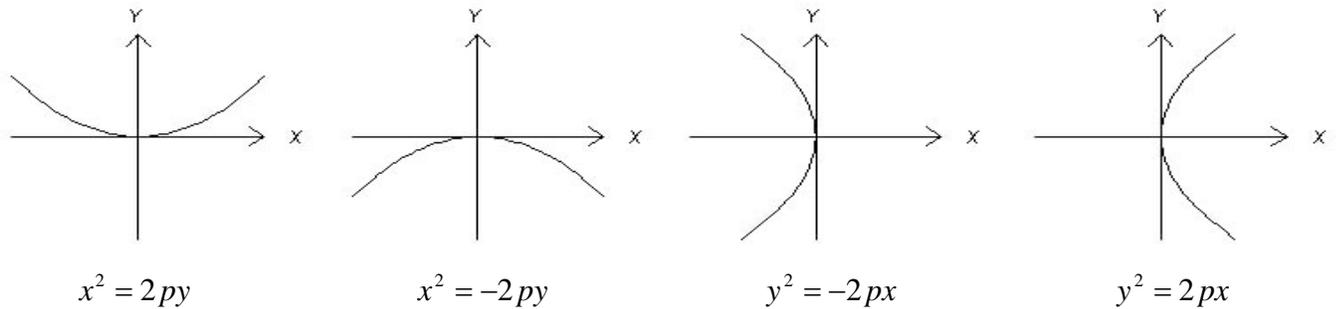


Fig. 48- Ecuación según abertura de la parábola

Existen más variaciones de la ecuación de la parábola, por ejemplo si su vértice no se encuentra en el origen, sin embargo, para los datos usados en arquitectura, podemos manejar el vértice en la posición que nos convenga y no resulta relevante abordar estas especificaciones.

CAPÍTULO 4

El paraboloides hiperbólico. Definición y Generación.

Hasta el momento me he referido a las generalidades de la clasificación de las superficies enfocándome a un grupo en especial, **las alabeadas**. Todas las anteriores nos dan opciones aplicadas a la arquitectura, sin embargo **la construcción y el cálculo en cada una de ellas representa un trabajo difícil**, por lo cual **nos enfocaremos a la que tiene más opciones de construcción física y vastos antecedentes del análisis de cálculo estructural: EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO**, que en lo futuro y para facilitar la lectura, nos referiremos con las siglas **PH**.

El objetivo de este capítulo es que el lector vea las diferentes **formas de diseño geométrico, construcción y materiales** aplicados al paraboloides hiperbólico, de esta manera se ilustrará el amplio alcance que esta geometría tiene, y que para estudiantes y profesionales representa una solución para una gran diversidad de proyectos.

4.1 Definición por curvas generadoras

Como su nombre lo indica, el PH está formado por dos curvas, la parábola y la hipérbola. La primera es la curva que da origen a la superficie, como lo expresa Canals al definir el PH:

“...puede considerarse engendrado por la traslación de una parábola, la cual, conservándose en su desplazamiento constantemente paralela a sí misma, se mueve a lo largo de otra parábola de concavidad opuesta, que se halla contenida en un plano perpendicular al de la primera.”¹

Para explicar este concepto fijemos dos parábolas iguales *A* y *B*. La parábola *A* es cóncava, ya que su curvatura es hacia abajo, y la parábola *B* es convexa de manera que su curvatura es hacia arriba. Movemos la parábola *A*, de manera que esta será la generatriz de la superficie, en una trayectoria a lo largo de la parábola *B* (directriz), como se observa en la Fig. 49, de esta manera obtenemos lo que Canals deduce como *“desplazamiento constantemente paralela a sí misma”*. La condición de que los planos sean perpendiculares se deduce a través de inscribir ambas parábolas en un plano.

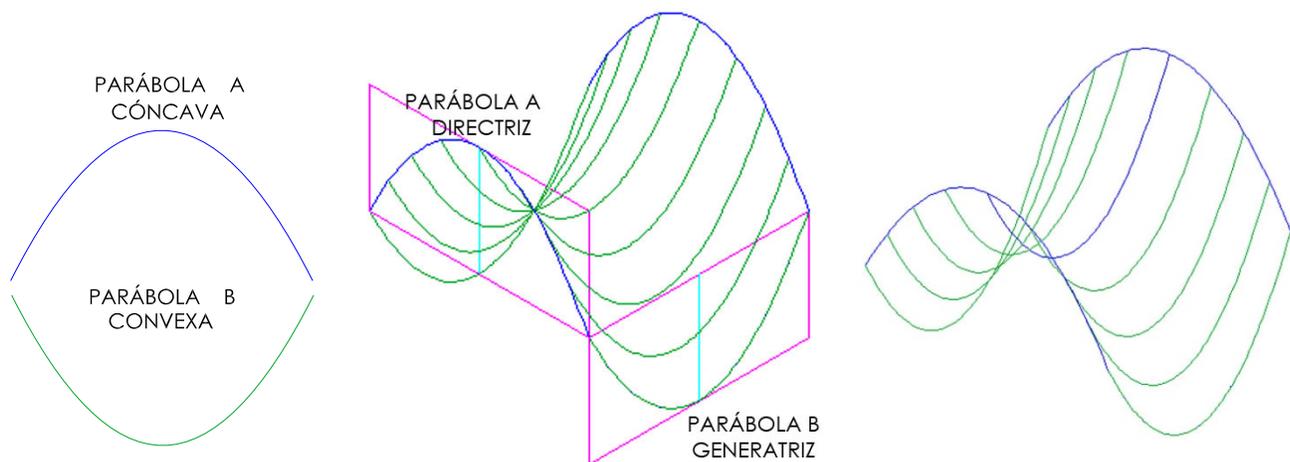


Fig. 49- Formación por curvas del PH, se puede observar el desplazamiento de la parábola, a través de la parábola *B*, las líneas rosas, delimitan la inscripción de la parábola en un plano rectangular, de esta manera se puede notar que son perpendiculares ambos planos. La figura de en medio está en perspectiva a 30 grados, mientras que la figura de la derecha para mostrar bien la geometría, está en perspectiva “orbit” o libre.

¹ Canals-Guerín, “Cascarones Parabólicos Hiperbólicos”

El PH, es una superficie de translación, y podemos reticularla a manera de obtener una malla de arcos, esto lo generamos a partir de la distribución uniforme de las parábolas intercambiando sus papeles de directriz y generatriz como se ve en la Fig. 50:

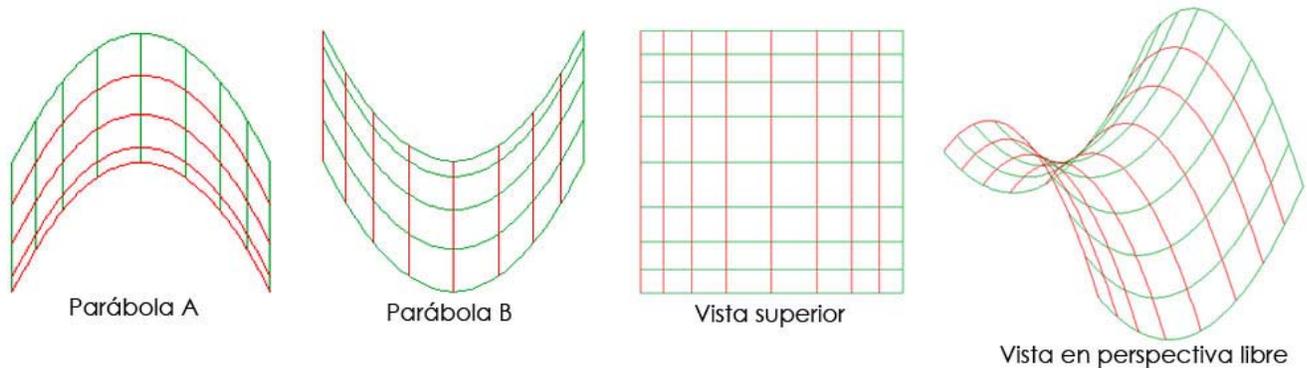


Fig. 50- Aquí se muestra la distribución uniforme de las parábolas que intercambian el papel de generatriz y directriz según sea el caso. Se ven las proyecciones derecha, frontal, superior y en perspectiva libre, para que se vea la colocación de arcos, estos son equidistantes entre ellos, sin embargo por efecto de la curvatura, parece que estuvieran a una distancia diferente.

Para ubicar a la superficie en el plano cartesiano, delimitamos un punto que llamaremos **corona y origen de coordenadas**, hay que tener en cuenta que en el campo de la arquitectura se tiene la versatilidad de proponer este punto según diseño, diferente condición que en las matemáticas, donde este aspecto es más rígido. Considerando un sistema coordenado xyz, que se encuentra en posición, de tal manera que z esta hacia arriba; situamos entonces las parábolas centrales y sus vértices, hallando el punto origen:

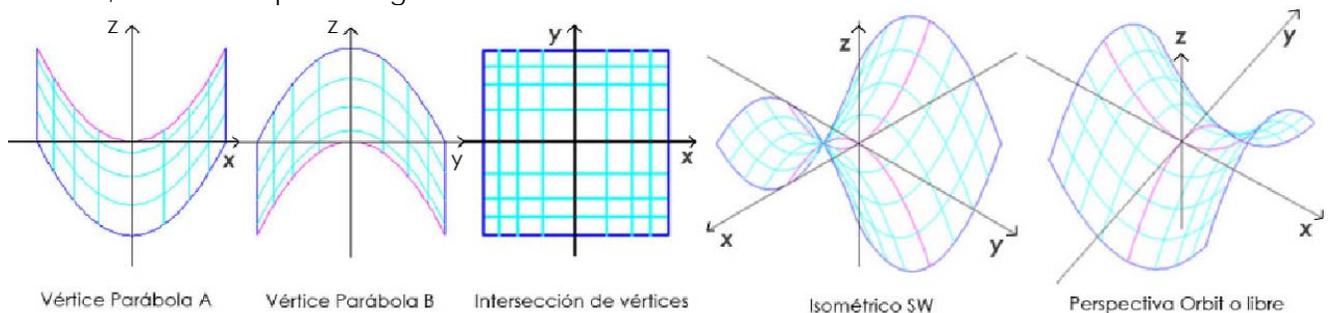


Fig. 51- El punto coordenado de origen 0,0, se encuentra en el vértice de la parábola A y la B, a este punto le llamaremos corona del PH, cualquiera que sea su posición en el espacio, este punto determina la posición de la superficie.

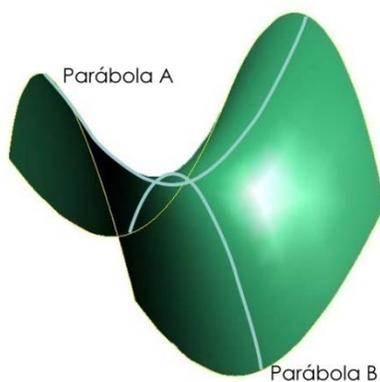


Fig. 52- Vista del PH como superficie sólida. Proyección en perspectiva orbit o libre.

La superficie que se genera a partir de la translación equidistante de arcos, la llamaremos **superficie reticular**, ya que en esta se aprecia implícita la retícula, cuyas capacidades constructivas veremos más adelante.

Considerando un PH cuyas parábolas sean iguales, como en los ejemplos pasados, tomamos su superficie como sólida o continua como se muestra en la Fig. 52, cortamos con un plano que pase por el origen de coordenadas o corona, y que cumpla la condición de ser paralelo a xy.

Generando el corte en la superficie (Fig. 53), encontraremos que este da como resultado dos rectas que se unen al origen y cuya abertura llega a los vértices de las parábolas A y A', (tomar nota de que esta condición está dada en un PH cuyas parábolas son

iguales).

Estas rectas son muy importantes para la descripción geométrica del PH, ya que son parte de la otra familia de curvas que le da el nombre a la superficie: **las hipérbolas**. Aquí encontramos la coincidencia del nombre: paraboloides hiperbólicos, ya que en esta superficie se ven inscritas dos familias de curvas. Las rectas C , C' y D , D' , son las asíntotas de las hipérbolas, que inscriben a cada una de las ramas de las hipérbolas, que son simétricas.

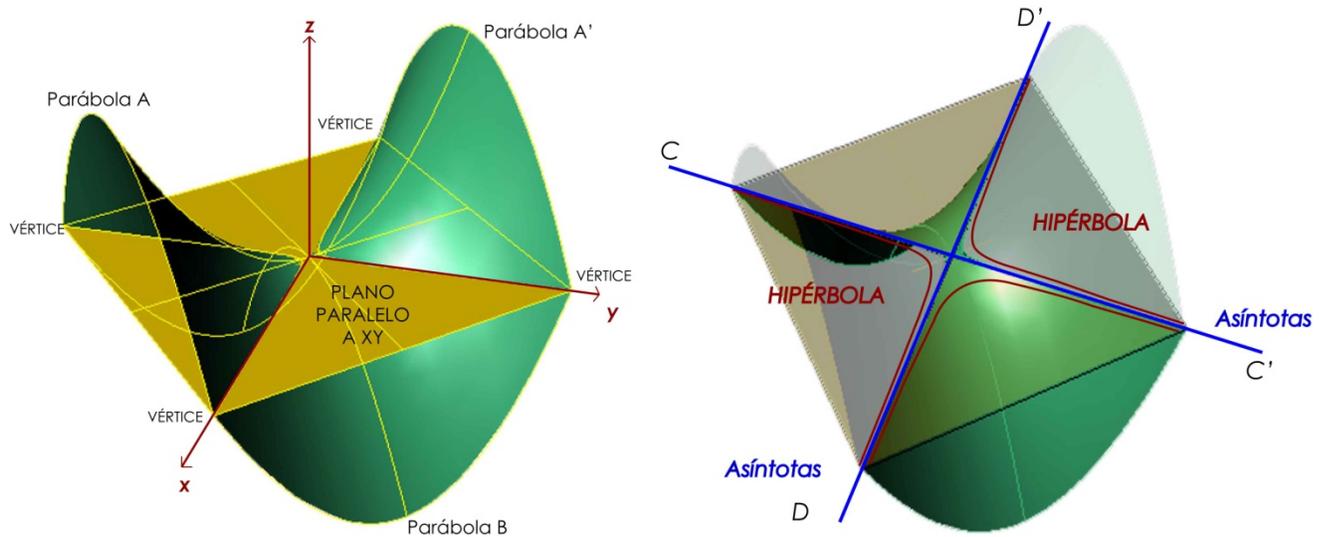


Fig. 53- En la imagen de la izquierda, se muestra la ubicación de la superficie en el sistema de ejes coordenados, donde el origen está en la corona del PH, así mismo se ve la intersección del plano xy , en la figura de la derecha se muestran las rectas asíntotas y las curvas hipérbolas que están inscritas dentro de estas. Cabe mencionar que las perspectivas de ambas figuras son orbitales, con una variación en ambas, para tener libertad de mostrar los elementos en cada figura.

Ahora bien, si cortamos a la superficie por planos paralelos al plano xy , encontraremos en cada corte una serie de hipérbolas, como se muestra en la Fig. 54. Para la ilustración y por fines didácticos, se muestran dos tipos de paraboloides, uno cuyas parábolas son iguales y otros cuyas parábolas son de diferente parámetro, (Fig. 55) esto es porque aunque son la misma superficie, tienen un aspecto algo diferente que se presta a confusiones a la hora de encontrar a las hipérbolas.

El aspecto llega a cambiar tanto según sus formas de generación y construcción, que a lo largo de este capítulo, veremos muchas geometrías que parecieran ser distintas, pero que forman parte de la misma superficie. Esta versatilidad, representa una de las causas de la importancia del estudio del PH.

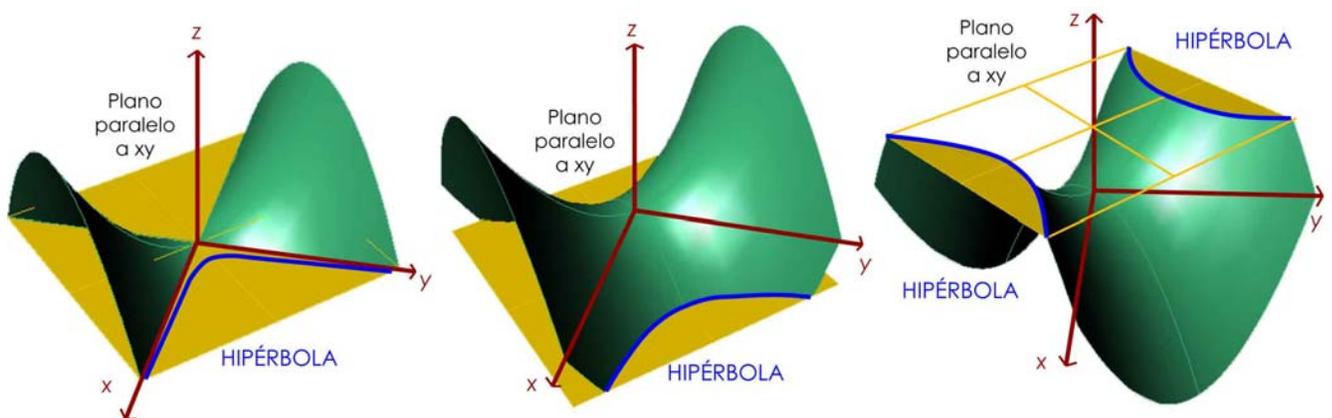


Fig. 54- Esta imagen muestra al PH de parábolas iguales y sus cortes realizados con un plano paralelo a xy , en los diferentes puntos de la superficie, se ven las familias de hipérbolas.

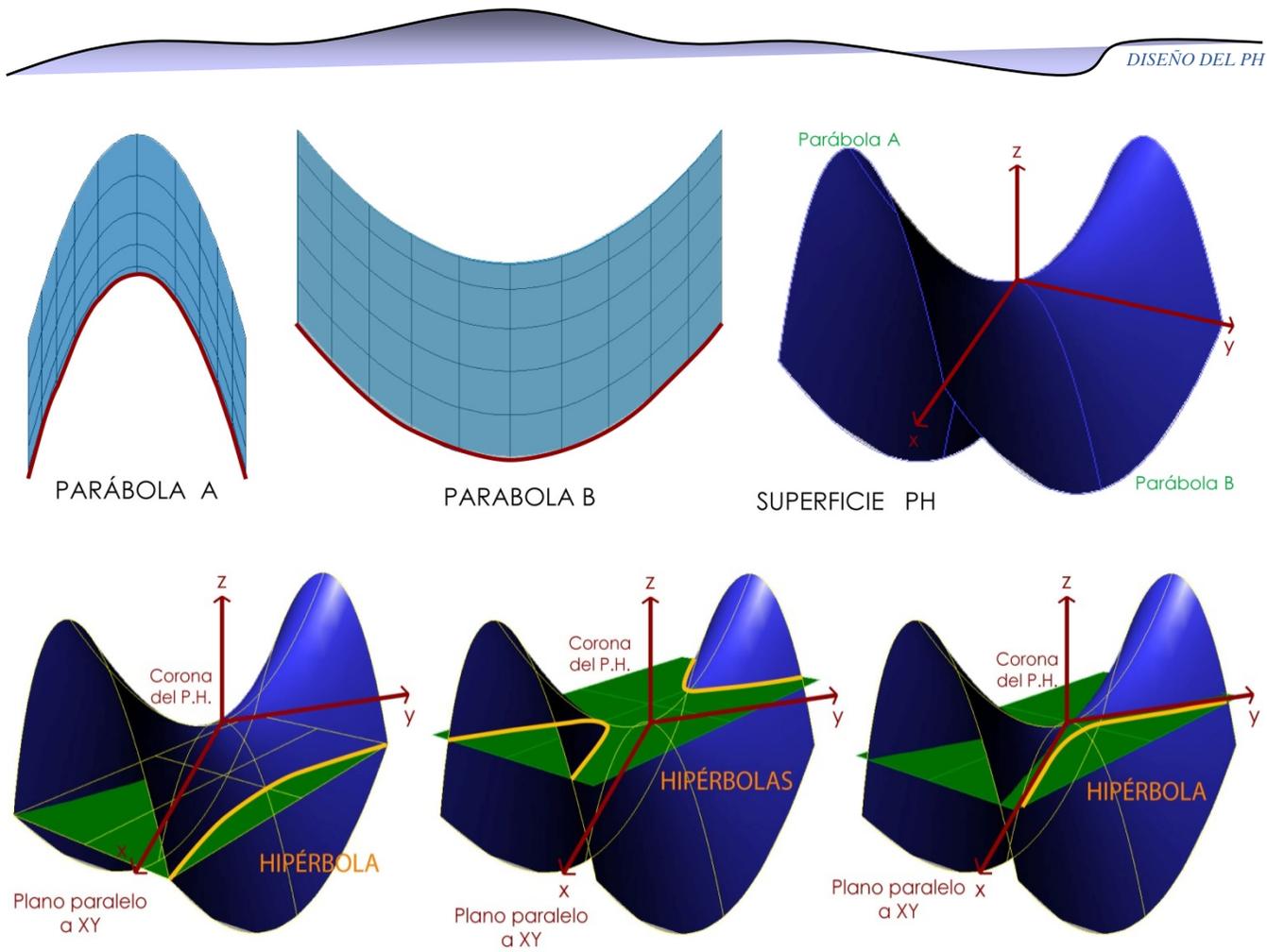


Fig. 55- Esta imagen muestra al PH de parábolas con parámetros diferentes, así como el corte por planos paralelos a xy , el origen de coordenadas en casa delimita la corona del PH. Se puede observar que en este caso las rectas asíntotas son muy cerradas y muy abiertas en comparación del PH cuyas parábolas tenían parámetros iguales.

Hemos definido al PH como una **superficie de traslación**, cuyas curvas van construyendo la superficie a partir de su movimiento. A esta forma comúnmente se le da el nombre de: **silla de montar**, de hecho en muchos libros lo encontraremos así, lo cual confirma el uso como término científico, de tal manera que lo entenderemos como un sinónimo para fines de este estudio. A continuación analizaremos su aplicación para la arquitectura.

4.1.1 Construcción por curvas

Las posibilidades constructivas para la construcción con base en las curvas, se ven en las mallas de redes, que son una superficie de traslación en la cual los arcos construyen la superficie del PH. Para entender el funcionamiento de las mallas, analizaremos una estructura cuya consolidación se forma con arcos de manera similar, y se le da el nombre de cascarones reticulados, los cuales Gerardo Oliva define como:

*"...son estructuras laminares, las cuáles cumplen con las siguientes características esenciales: son cubiertas para grandes espacios libres de apoyos, adaptables a cambios de función, de montaje ligero y con una intención espacial determinadas."*²

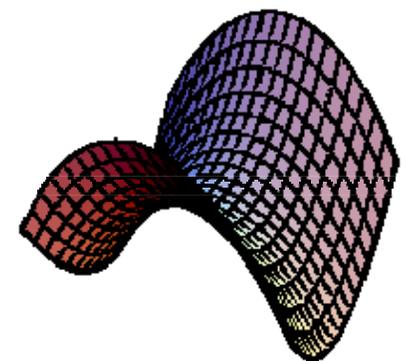


Fig. 56- Silla de montar, sinónimo de PH.

² Oliva Gerardo, "Estudio sobre la construcción de Cascarones Reticulados"



Fig. 57- Estadio Olímpico de Munich. Ver URL de origen en referencias. Reproducción con fines didácticos

Un ejemplo de las mallas de redes, se encuentra en la arquitectura de Frei Otto, donde la estructura de la cubierta se genera a partir de retículas que se someten a tensiones, las cuáles soportan tomando la forma del PH. En este caso, la retícula es desfasada y por lo tanto, diferente a los cascarones reticulados.

Un ejemplo de las mallas lo vemos en el Estadio Olímpico de Munich, en el que agrupa familias de redes tanto de PH como de otras estructuras de membrana para cubrir un amplio espacio, los postes usados para unir cada red, parecen perderse en el conjunto.

Los bordes se ajustan a elementos rígidos llamados relingas, que son el resultado de un corte curvo que permite la tensión necesaria entre los apoyos, estos se ven claramente en la Fig. 57 donde la membrana está formada por una serie de reticulaciones. Por sus características de luminosidad, (ya que toda la luz pasa por la estructura) se le ha llamado estructura de luz: *light structure*, haciendo un juego con la palabra que en inglés también significa ligera.

4.2 Definición como superficie reglada

La definición del PH es la siguiente:

*"...una superficie reglada formada por rectas, que se apoyan en dos rectas que se cruzan en el espacio de una forma ordenada, es decir, haciendo que las rectas generadoras sean todas paralelas a un plano dado, perpendicular a una de las rectas directrices."*³

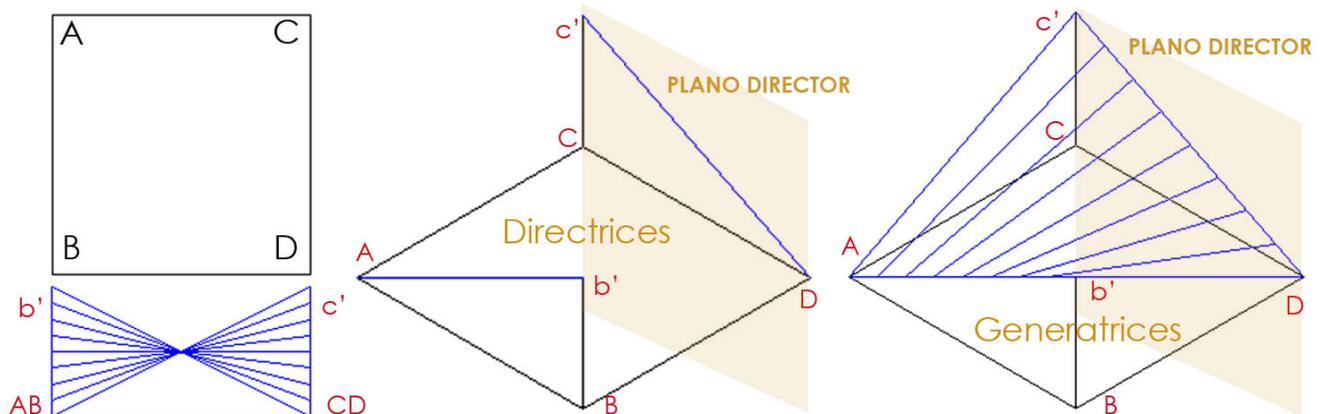


Fig. 58- Formación por rectas del PH

Para explicar este concepto, fijemos un plano horizontal generado por cuatro rectas que nombraremos AB, BD, DC, y CA. Al unirse dibujan un plano cuadrangular cuyas aristas son las intersecciones de las rectas. Considerando una altura cualquiera, fijamos los puntos b' y c' , y trazamos una recta Ab' y otra $c'D$, estas deben ser paralelas a un plano que llamaremos **director**.

³ Bassegoda Nonell Juan, et al "La cátedra de Antoni Gaudí, estudio analítico de su obra"

Ahora bien dividiendo a Ab' , $c'D$, trasladamos una recta Ac' para ir generando una superficie hasta cerrar en $b'D$. Entonces como se muestra en la Fig. 58, habremos construido la superficie a partir de dos rectas que se cruzan en el espacio de manera ordenada, tal como lo dicta la definición que estamos analizando. Estas rectas no son otras sino Ac' , $b'D$, como también se ve en la proyección frontal del rectángulo. Entonces consideramos a Ac' - $b'D$ como **las generatrices** y a Ab' - $c'D$ como las directrices, estos pares de rectas son perpendiculares entre sí, ya que se cruzan en el espacio, al igual que Ab' y $c'D$ son perpendiculares al plano conformado por $ABCD$, y **paralelas al plano director**.

Entonces, para construir un PH por medio de una superficie reglada, primero necesitamos dos rectas cuya posición con respecto al plano será perpendicular. A éstas se les divide trasladando otro par de rectas a través de ellas. **El papel de directriz y de generatriz se intercambia para conformar una red de rectas en las cuales se denota la superficie.** Es importante mencionar que la superficie siempre guardará estrecha relación con el plano inicial (que en este caso es $ABCD$) que le da forma, a éste le llamaremos plano de conformación, siempre perpendicular al plano director. Este par de planos marcarán la posición de un posible sistema de coordenadas para ubicar a la superficie.

Mencioné antes, que el sistema puede ser ubicado según diseño, por lo que nos convendrá marcar **el eje z hacia arriba**, ya que muchos ejemplos en la aplicación a la arquitectura son manejados de esa manera. Así, podemos decir que la ubicación del los ejes siempre será paralela al plano generador, la dirección del eje x entonces, coincide con el de la recta $A-C$ y la dirección del eje y, coincidirá con $A-B$.

El origen, lo ubicaremos en el punto medio de la superficie que llamaremos corona. Como se puede ver en la Fig. 59, mientras más cercanas sean las divisiones más definición tiene la superficie, esto considerándolo de manera gráfica. También notamos que los puntos medios de las rectas del plano de conformación coinciden con los puntos medios de las líneas que delimitan la superficie.

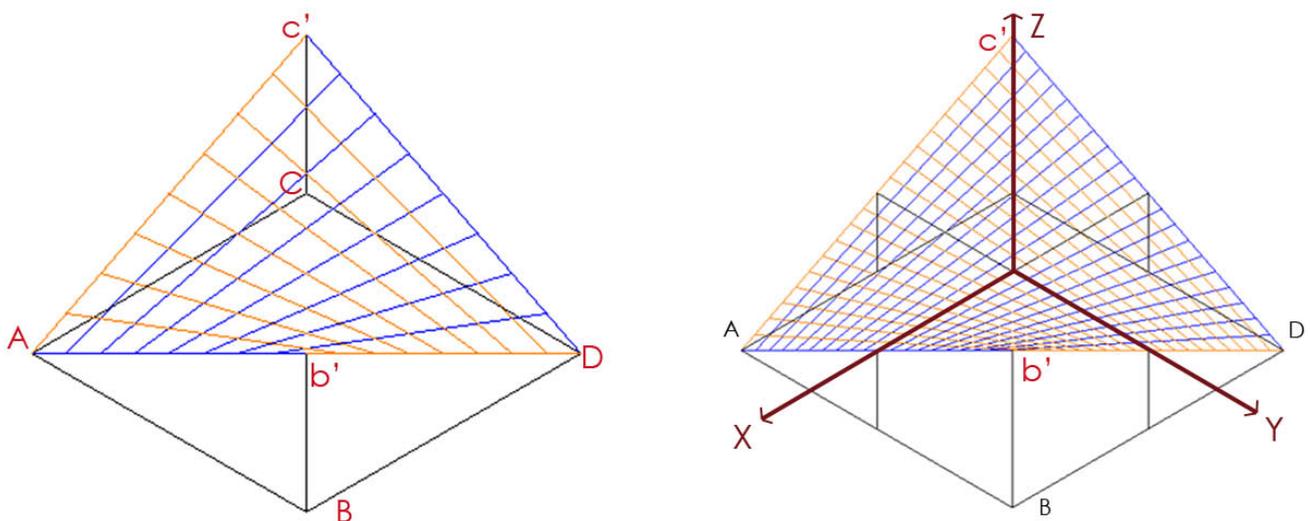


Fig. 59- Podemos ver la ubicación que nosotros tomaremos para el origen y desarrollo del sistema de ejes coordenados, para ubicar a la superficie engendrada por rectas. El centro de la superficie denotará el origen, y las rectas directrices y generatrices la limitarán.

Ya que hemos visto su formación como sistema reglado, una pregunta común es: ¿en dónde está el sistema de parábolas en esta superficie? Esta es una de las confusiones más marcadas en el estudio del PH, ya que incluso se llega a pensar que la formación por curvas y por rectas genera diferentes superficies, mientras que sólo es una, con varios sistemas de generación. Una manera fácil de encontrar la familia de parábolas, es ubicando al paraboloide en sus proyecciones laterales, esto es viendo los puntos $A-D$ de frente.

Como se muestra en la Fig. 60, las dos parábolas entonces pueden ser vistas con facilidad, en este caso, como están originadas de un plano cuadrangular, sus parámetros y aberturas son iguales. También podemos observar que un sutil cambio en la dirección del paraboloides nos dará resultados estéticos impresionantes, sin perder forma, la superficie parece ser distinta, aunque solo es una perspectiva diferente. Se usa la perspectiva libre (*orbit*) para dar este efecto y dejar la curvatura de las parábolas al descubierto, no sin acentuar el sistema de ejes para poder ubicar la superficie.

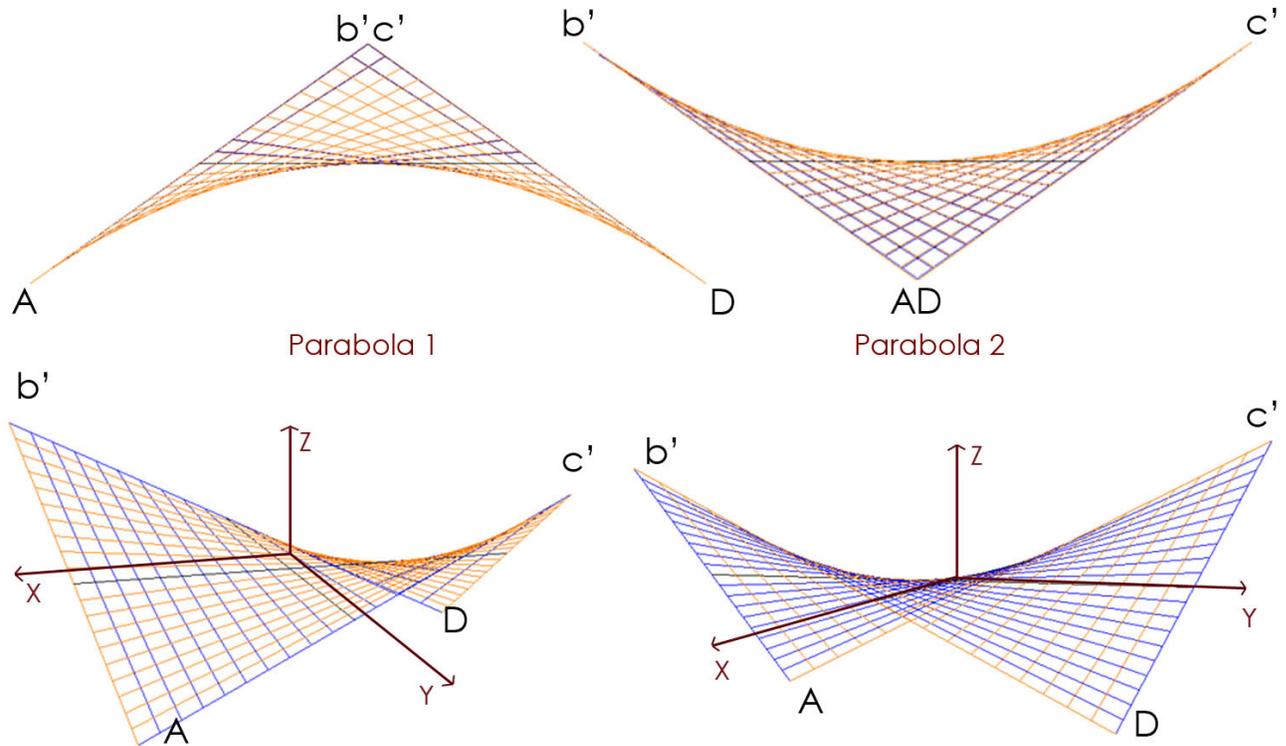


Fig. 60- Ubicación de las parábolas en la superficie, así como vistas en perspectiva libre u orbit.

Al hacer que las rectas sean consecutivas, generamos una red cada vez más cerrada, de tal manera que podemos visualizar la superficie como un sólido, en la Fig. 61 se muestran diferentes posiciones del cuerpo con respecto al espacio. Cabe mencionar que toda la superficie se apoya únicamente en dos puntos, teniendo sus otros dos puntos suspendidos, éste factor es uno de los que más les ha dado facilidad para su diseño en la arquitectura, sumado a que su conformación por rectas, lo hace construible en muy diversos materiales. Es importante señalar que ésta es la vista cuando los parámetros de sus parábolas son iguales, su plano director es cuadrangular y las alturas son iguales. A continuación veremos qué pasa al generar variación en los parámetros.

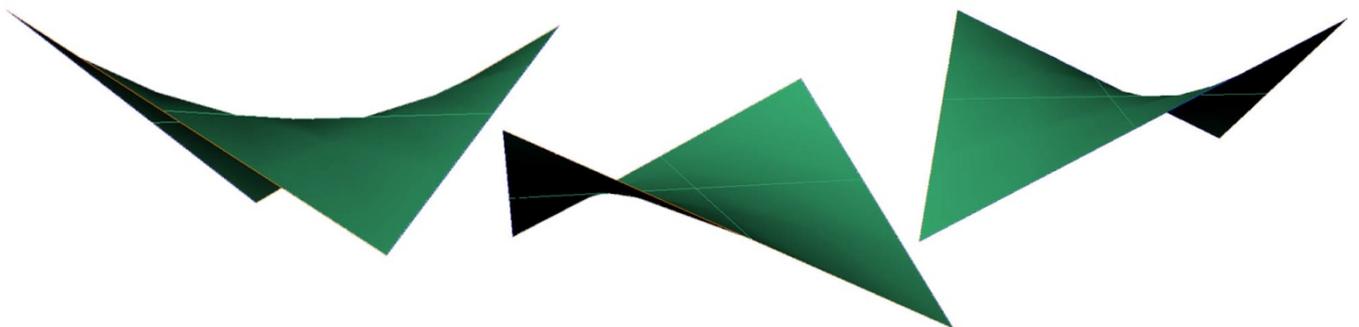


Fig. 61- Diferentes posiciones de la superficie vista como un sólido.

En este caso, construimos la superficie reglada considerando la variación en los parámetros. Las parábolas tienen una altura y abertura diferente, incluso la posición de sus puntos delimitantes es variable, esto es debido principalmente a que el plano de conformación es un rectángulo, cuyas rectas AB Y CD son más largas. También la altura de Ab' y c'D, es diferente, por lo que la superficie se desplaza con una inclinación diferente que en el ejemplo analizado anteriormente.

Sin embargo, la figura resultante, también deja entrever las parábolas de manera aparente en sus alzados laterales, tomados desde AD. En la Fig. 62, podemos ver ilustradas esta serie de variaciones como su resultado. En la parte izquierda se muestran el rectángulo conformador de la superficie (que en este caso es el plano director), y el alzado frontal, en el cual se ve el cruce de las rectas en el espacio y por lo tanto su carácter perpendicular. En la parte inferior se ve una perspectiva a 30 grados en la cual es notable el grado de alabeamiento que presenta la superficie. Este alabeamiento, lo estudiaremos más adelante al ver las ecuaciones canónicas del PH. Finalmente al lado derecho, se muestran las vistas de las parábolas y las diferencias de alturas que son notables en la superficie.

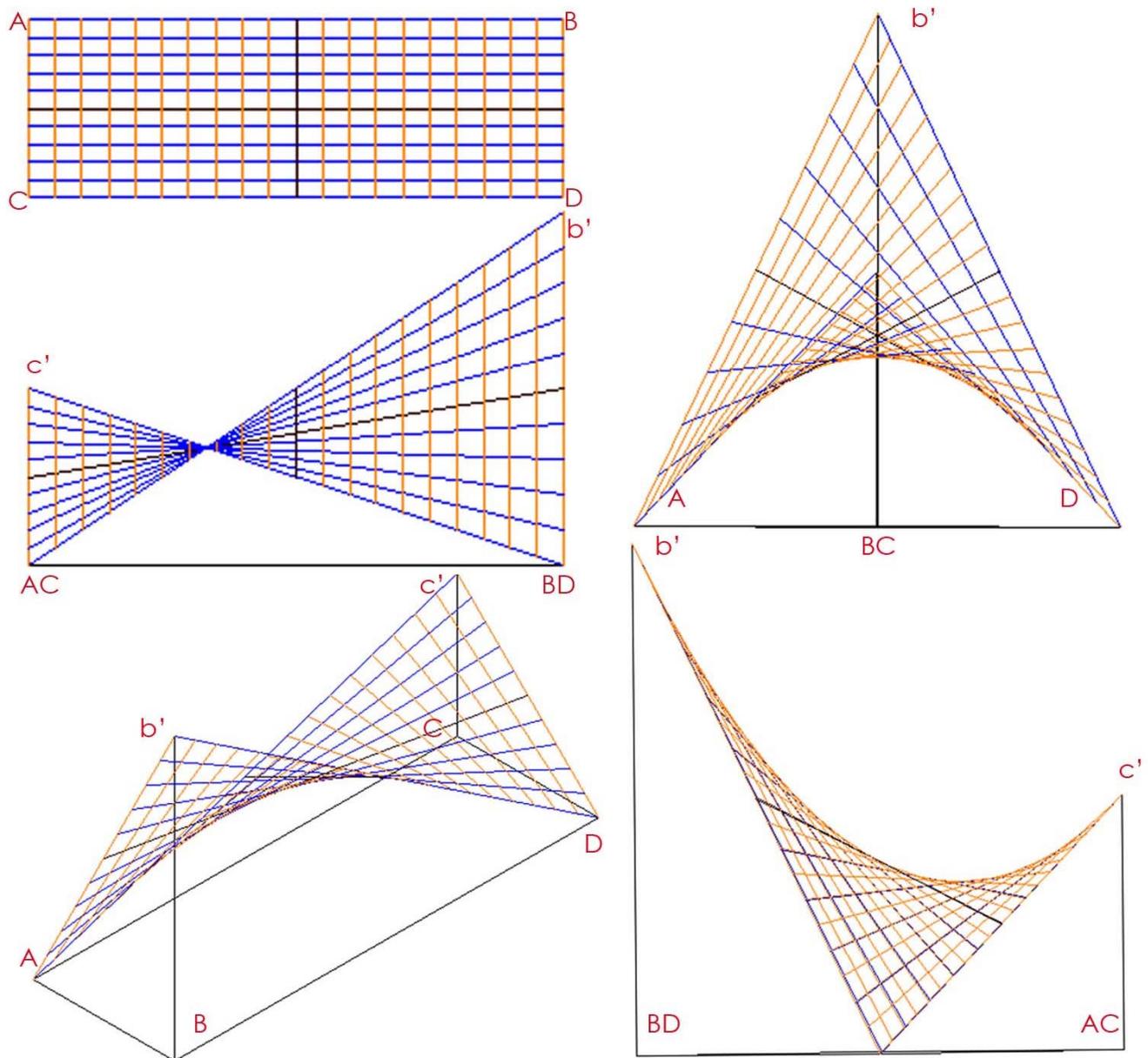


Fig. 62- Consolidación de la superficie con una aparente variación en los parámetros, de altura y abertura tanto del plano de conformación como de las parábolas. El ángulo de desplazamiento de las rectas es diferente al ejemplo anterior.

Al observar como sólido el PH con los parámetros fijados anteriormente, podemos tener diferentes vistas en perspectivas variadas de la superficie. En muchos momentos parece que no es la misma geometría, he aquí una de las versatilidades más importantes del PH su riqueza visual y ligereza plástica.

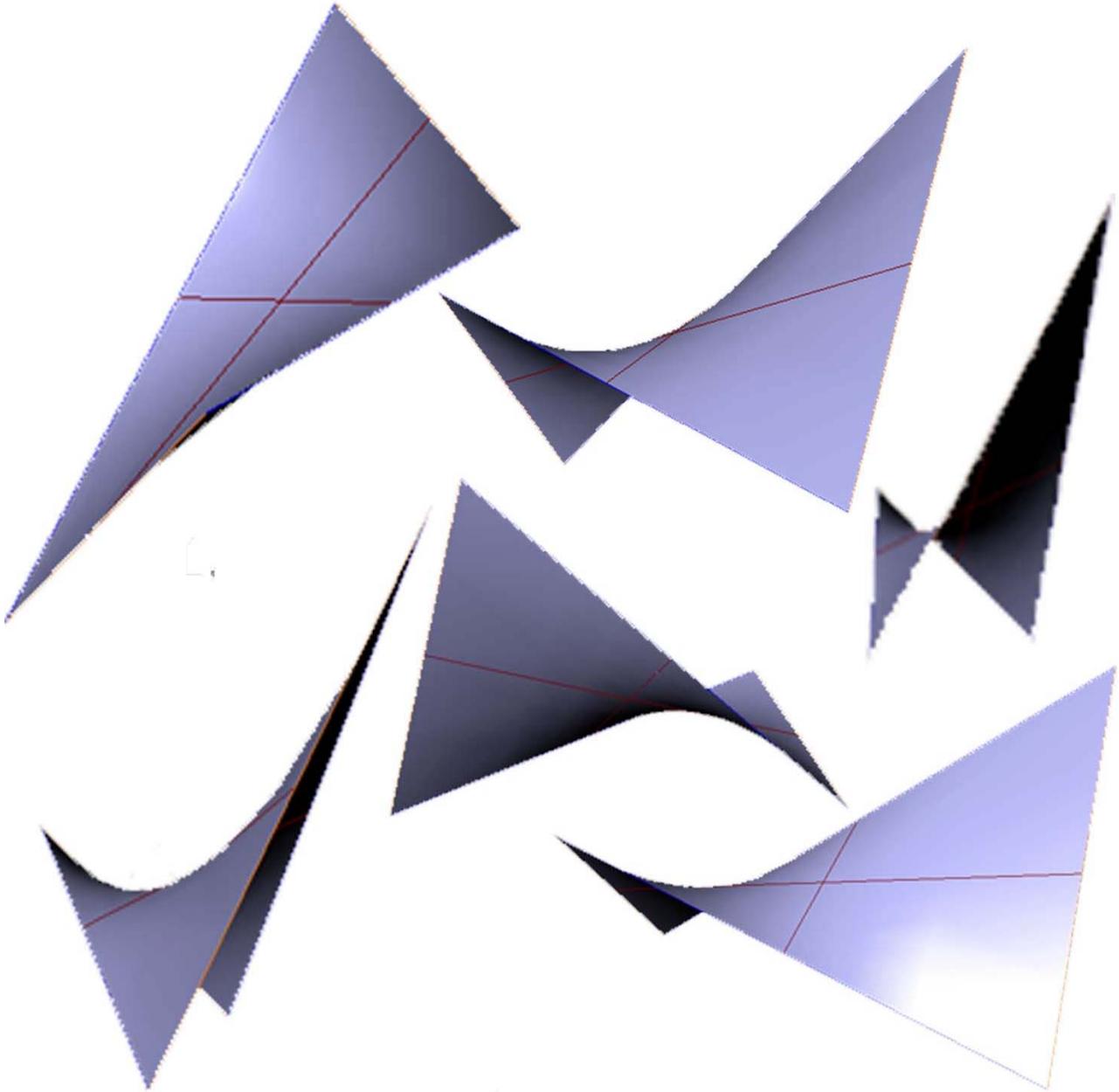
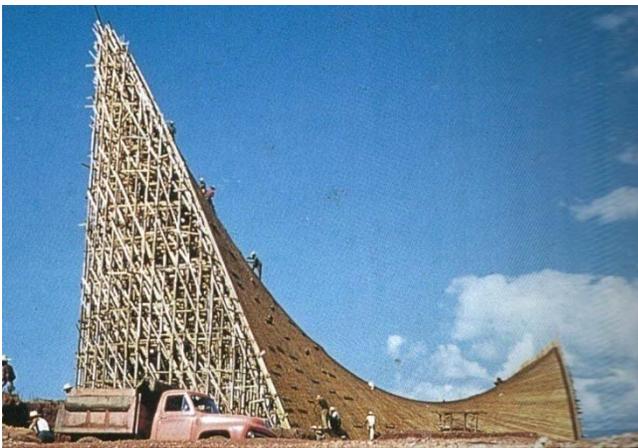
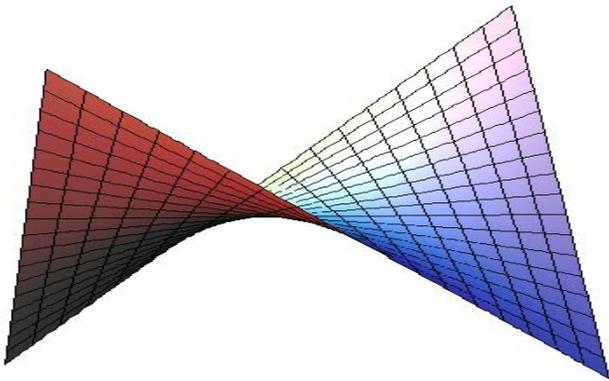


Fig. 63- Diferentes perspectivas, orbit o libres, del PH fijado con parámetros variables. La intención de la imagen es hacer ver al lector, la versatilidad de vistas y configuraciones que finalmente forman parte de la misma geometría. El plano a partir de su alabeamiento, puede ir dando diferentes impresiones estéticas, según como esté colocado, y desde dónde se le observe, podemos ver diferentes objetos, sin embargo forman parte de la misma superficie.

4.2.1 Construcción por rectas

Siendo que el PH es una sucesión de líneas de dos planos desfasados en el espacio, genera una factibilidad consistente en la estructura recta, ya que algunos materiales, como el ferrocemento, el concreto, y los paneles modulares, responden a este tipo de cimbras y estructuras. Un ejemplo que se desarrolló en el siglo pasado, es el de Candela, quien adopta el PH, por encima de otras superficies alabeadas, ya que este le representaba menores gastos de construcción, debido a que su cimbra no era tan complicada (en comparación con otras superficies de doble curvatura).

Como podemos ver en la Fig. 65 y 66, la cimbra preparada para recibir el concreto, consiste en pies derechos que van dando la altura a las rectas que generan la superficie.



Estamos hablando de que en un futuro próximo, la construcción del PH puede hacerse a partir del uso de paneles prefabricados. **La cuestión elemental es conocer las características geométricas de la forma, su trabajo estructural y desarrollar un método para facilitar el cálculo de esfuerzos.**

Aquí existe un debate acerca de la efectividad del PH, ya que pese a ser construible, la cimbra resulta ser más complicada, que la de las estructuras de forma recta. **Sin embargo su capacidad de cubrir grandes claros y de disminuir los espesores del concreto al mínimo, debido a las condiciones estructurales propias del PH, hizo que este fuera el favorito de Candela.**

Por lo regular, en los sistemas reglados, su aplicación más común es con materiales que mantengan intacta su forma geométrica, para que el trabajo estructural sea el adecuado. Candela menciona un empleo probable de los materiales:

"...mientras no se desarrollen nuevos plásticos de bajos costos y características convenientes, el material apropiado para la construcción de cascarones es el concreto armado, por su bajo costo, porque sus materiales básicos pueden encontrarse fácilmente en cualquier lugar y porque puede moldearse para darle la forma adecuada" ⁴

En principio, lo importante es mantener la forma geométrica del material, por lo que en los años en los que Candela construía, el concreto representaba la opción más factible, aunque como vimos en las formas de Frei Otto, también en esos entonces se experimentaba con otros tipos de materiales flexibles que se adaptaban a la geometría del PH.

En la actualidad nos encontramos en un umbral de generación de nuevos materiales. **Existen en el mercado paneles de plásticos de alta tecnología, y otros están a la espera de resultados de investigación para incorporarse.**

De superior a inferior:

Fig. 64- Esquema reglado del paraboloides hiperbólico.

Fig. 65- Construcción de la cimbra de los Manantiales.

Extraída del libro "las estructuras de Candela"

Fig. 66- Cimbrado terminado. Capilla de Lomas de Cuernavaca, "Palmira"

Fig. 64 y 66. Ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos

⁴ Faber Colin, "Las Estructuras de Candela"

4.3 Definición por triangulación

Para fines de este estudio, definiremos la triangulación como el proceso de **encontrar determinadas coordenadas en una superficie, de tal manera que la podamos descomponer y volver a construir en el espacio.**

Para encontrar las coordenadas, necesitamos pensar que la superficie es un conjunto de puntos con diferentes posiciones en el espacio. Al unir estos puntos formaremos planos virtuales, de los cuales nosotros podemos delimitar sus características, es decir, un plano podrá estar conformado desde la unión de 3 puntos, o hasta la cantidad de puntos que nosotros decidamos (si son 3 puntos serán triángulos, si son 4 serán cuadrados, etc), generando así diferentes geometrías que constuirán la superficie.

Para explicar este concepto y relacionarlo a la triangulación, veamos un caso específico en un PH. En la Fig. 67, podemos observar que la formación por curvas, da como resultado un conjunto de planos de cuatro puntos, que se muestran diferenciados por su tonalidad. Si nosotros generamos un corte a la superficie por medio de la intercepción de cilindros, obtendremos una superficie cuyos planos conformadores no son unicamente cuadrados, también encontramos planos triangulares (de tres puntos) y planos de geometrías irregulares pero que guardan la relación de 4 puntos.

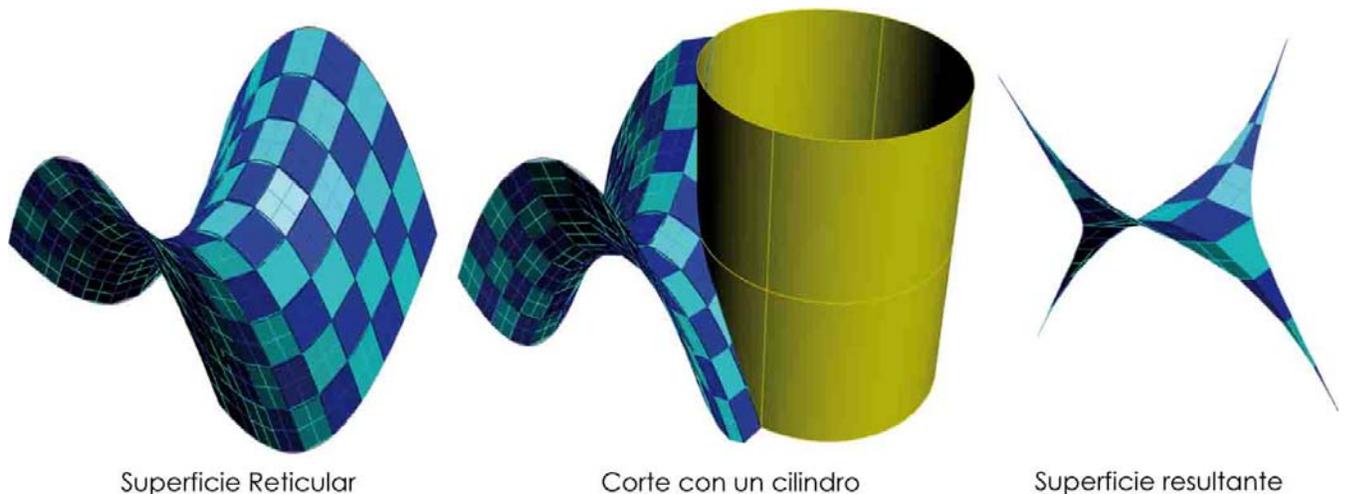


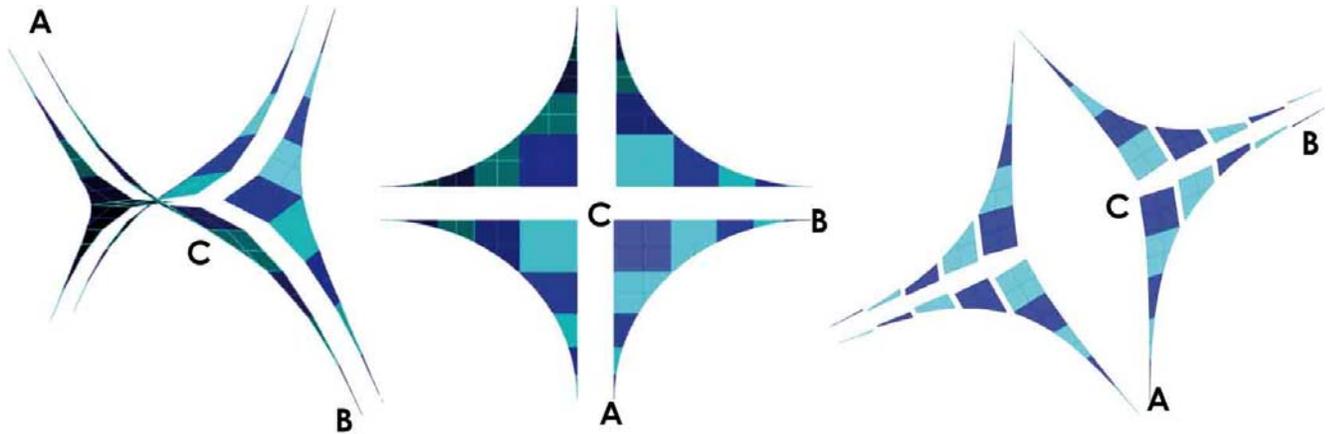
Fig. 67- Izquierda, formación de la superficie del PH por planos en diferentes posiciones, centro corte por cilindro en uno de los extremos de la superficie y conformación final después del corte, ahora la superficie tiene bordes de arco, y está formada por planos de tres y cuatro puntos.

Tendremos que pensar en cada uno de los planos como un elemento independiente, y generar el proceso de triangulación, esto lo logramos tomando un punto determinado del plano en el espacio, y alineandolo al plano horizontal de altura cero. Realizamos el mismo procedimiento con los otros puntos, y así con todos los planos, de tal manera que se genera un proyección plana de la superficie, algo así como un "aplastamiento" .

El resultado permitirá apreciar una serie de planos que podemos ver como plantillas. En la Fig. 68, vemos que un cuarto de la superficie, esta señalado con las letras A, B y C. Estas literales, indican un determinado punto que el PH guardará en el espacio. En planta, forma un romboide de lados curvos, resultado de la intersección y corte de los cilindros. **Al generar el proceso de alineado, el resultado será una proyección alargada, de los planos originales. Esta proyección nos permitirá la construcción de la superficie al unir estas plantillas y darles la forma por medio de la tracción de las piezas.**

El proceso puede ser matemático o geométrico. Sin embargo ambos son complejos, por lo cuál actualmente su generación es con ayuda de programas de cómputo, como **AutoCAD** (comando *align*) y **Rhinoceros** (comando *orient*), que auxiliados de algunas herramientas, generan las diferentes

alineaciones en un proceso relativamente sencillo. En la metodología didáctica, expongo ambos



métodos a detalle.

Siguiendo esta alineación, podemos ir trazando plantillas con la posibilidad de que sean generadas para la construcción de grandes membranas de materiales ligeros. Este es el caso de las estructuras **velarias**, de las cuales ya he hablado de manera general en capítulos anteriores. La geometría del PH aplicada a ellas, da resultados óptimos, ya que **gran parte del funcionamiento estructural de las superficies se debe a su geometría**.

En las prácticas con estudiantes, podemos generar la superficie del PH a partir de una tela flexible y elástica; sin embargo, en la realidad ésta no podrá someterse a los esfuerzos de tracción que caracterizan a las estructuras velarias. De tal manera que **se tienen que ocupar materiales flexibles cuya elasticidad sea mínima**, algunos de los más frecuentes en la construcción son el teflón y el PVC.

Para poder construir una vez de los materiales flexibles no elásticos, necesitamos obtener la curvatura a partir del trazo de las piezas. Estas tienen que ir generando una plantilla que al unirse forme la membrana. Las triangulaciones van dando las piezas que permitirán construir la geometría. La concepción básica de este proceso es primero **construir la superficie, descomponerla en piezas y volverla a armar en la realidad**.

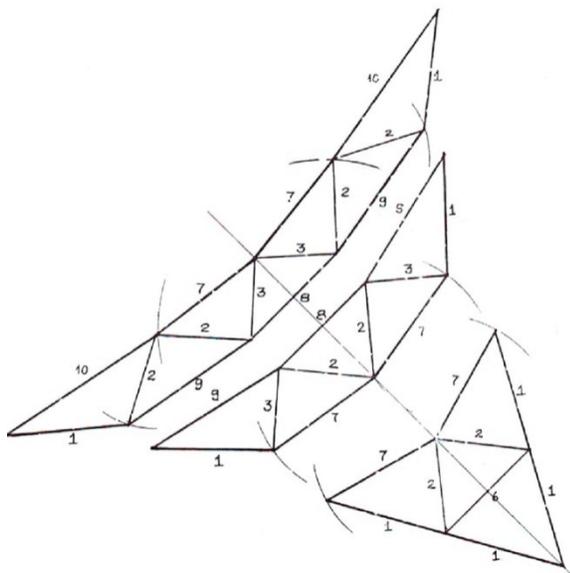


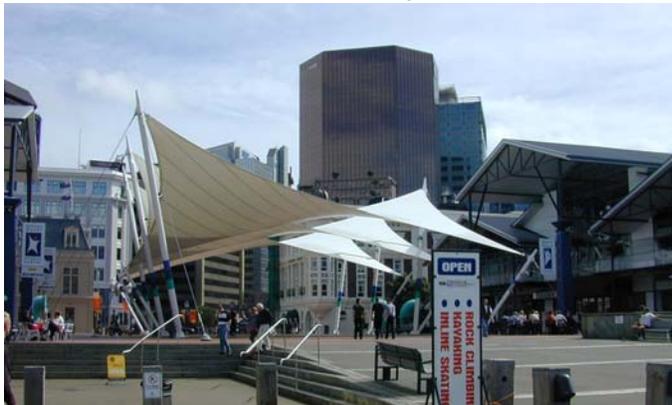
Fig. 69- Triangulación de un PH. **Imagen extraída del libro: La geometría de la forma. Reproducción con fines didácticos**
Comentarios: Caro98carmona@hotmail.com

4.3.1 Construcción por triangulación.

Antes mencioné que para generar la proyección de los puntos de los planos de la superficie, se podían usar dos métodos. Uno de ellos es utilizando la geometría descriptiva: por medio de un compás y un par de escuadras, podemos trasladar los puntos de la superficie del PH, a una plantilla triangulada, que nos permita construir la superficie a partir de la unión de las tiras, como lo podemos ver en la Fig. 69. Sin embargo, este ejercicio escolar solo permitiría construir un PH de muy pequeñas dimensiones.

En el caso de la triangulación, la construcción de la superficie del PH se ve en modelos de velarias, y su desarrollo se debe principalmente a la industrialización del material y al alcance de las herramientas digitales

para el diseño de la superficie, y en su defecto, de las plantillas.



De superior a inferior:

Fig. 70- Velaria en espacio abierto con la geometría del PH, en este caso sus cortes son rectos. **Ver URL de origen en referencias.**

Fig. 71- Desarrollo tecnológico "MODUNAM", creado por el investigador Juan Gerardo Oliva y colaboradores, **foto cedida por el Autor.**

Fig. 72 – Maqueta del proyecto del Palacio de Minería, **imagen extraída de la revista Bitácora, artículo de Gerardo Oliva Salinas. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos**

Cabe mencionar que el PH no es la única geometría usada para las velarias. Existe una gran variedad de formas para estas tenso-estructuras⁵, sin embargo, el PH y su funcionamiento estructural sigue siendo de uso frecuente, principalmente por **la belleza de su forma y estabilidad estructural**. A continuación analizaremos algunos casos constructivos en los que se utiliza al PH.

Las tenso-estructuras, velarias o incluso como algunos las nombran, estructuras textiles, son actualmente un recurso para cubrir grandes extensiones de área, con materiales impermeables y de ligereza extraordinaria. Como se aprecia en la Fig. 70, son adaptables a diferentes tipos de espacios, ya sean abiertos o confinados.

La estructura, por lo regular, se efectúa con piezas de acero y aluminio. Las membranas pueden ser de diferentes materiales como el PVC (cloruro de polivinilo), el PTFE (fibra de vidrio con teflón), lonas plastificadas, entre otros. Este material por lo regular viene en rollos, que son los que delimitan el ancho de la plantilla con la cual se genera la velaria. El material de la membrana es unido por métodos como el termo-sellado, en el cual las dos placas de plástico se integran por calor, o bien otro método es la unión por iones, en el que se obtienen mejores resultados.

Son comunes elementos centrales como las linternillas, ya que pueden ayudar a la unión de las membranas. Se construyen en plásticos rígidos, o bien en vidrio, con un marco de aluminio. Los colores de las velarias varían, según la intensidad de la luz y los requerimientos ambientales que tenga el proyecto, aunque son más comunes los colores claros que generan **ambientes luminosos y agradables**.

Para ilustrar casos construidos, trataré el trabajo del doctor Juan Gerardo Oliva Salinas, quien ha incursionado en diferentes tipos de estructuras, entre ellas las velarias. Trabajos como el MODUNAM, que sirve para casos de desastre natural, aunque por otra parte también puede ser usado para cubrir espacios emergentes para exposiciones, como se puede ver en la Fig. 71. En este trabajo, la geometría del PH es evidente, siendo una intersección de cuatro mantos de PH la que da origen a la cubierta. Cabe mencionar que MODUNAM y el siguiente ejemplo a analizar, la cubierta del Palacio de Minería, (Fig. 72), pertenecen al SUGESTEC, (Sistema Universitario de Gestión Tecnológica), de la UNAM, desarrollos que forman parte de una importante contribución a la ciencia y tecnología de nuestro país.

⁵ Tenso-estructuras, es el término que se usa en centro y Sudamérica para describir el sistema de las velarias.

El proyecto de Juan Gerardo Oliva y colaboradores, es la cubierta del Palacio de Minería (Fig. 73). Esta velaria está específicamente diseñada para no verse desde el exterior del edificio, porque al ser un inmueble catalogado como histórico es importante la preservación de su imagen. El Palacio guarda un estilo neoclásico y fue construido por el arquitecto Manuel Tolsá, actualmente el edificio es propiedad de la UNAM.

La estructura desmontable no interfiere con la propia del edificio, y se puede instalar cada vez que se requiera. Básicamente el proyecto está conformado por geometrías de PH como lo describe Oliva:

“se presenta una propuesta radial de estructura velaria desmontable, formada por mantos con superficies de doble curvatura inversa, trabajando a tracción una linterna central y elementos complementarios constituidos por cables y postes que equilibran el sistema estructural completo”

“La geometría de los mantos alabeados se logró aplicando el seccionamiento y la adición de superficies de paraboloides hiperbólicos”⁶



Fig. 73—Membrana terminada del Palacio de Minería, se ve en especial la linterna del centro de la velaria. Foto proporcionada por Gerardo Oliva. Reproducción con fines didácticos

En general, se puede observar que el proyecto es más que una cubierta, es todo un concepto para un caso dado, donde las necesidades fueron resueltas con una estructura eficiente.

Como acotación final, cabe mencionar, que la geometría del PH, también da una versatilidad para el diseño estético de las velarias, ya que puede sólo apoyarse en dos puntos fijos al piso, y los otros dos se sostienen en diferentes combinaciones de cables y postes, aspecto que ha sido el patrón para el diseño de velarias de diferentes geometrías.

En este aspecto, no sólo las velarias utilizan este principio de alineación geométrica, **la triangulación permite la construcción y cálculo de formas alabeadas aleatorias, es decir que no responden a una curva en específico**, esto lo vimos en el capítulo 2, al analizar las geometrías de Maximiliano Fuksas, ya que él usa las bases de este método, (con un complejo sistema matemático desarrollado por computadora) para generar tanto el trazado de la superficie como el cálculo de la misma.

⁶ Oliva Gerardo, “Cubierta tipo en el Palacio de Minería.”

CAPÍTULO 5

El paraboloide hiperbólico. Diseño

La palabra **diseño** es ampliamente usada en las áreas de arquitectura e ingeniería. **Es un término complejo que engloba una serie de procesos; algunos de ellos se refieren a la creación, conceptualización, formación y delineación de un objeto.** Carreras como diseño industrial y diseño gráfico, basan su concepto en esta serie en interrelaciones alrededor del objeto. En el caso específico de la arquitectura, **el proceso de diseño** lleva como resultado un objeto arquitectónico, que está conceptualizado para su construcción en la realidad.

Para el PH, el diseño radica en los procesos para poder crear, y construir la superficie. En este capítulo abordaré algunas de las didácticas para el proceso de diseño, además de dar la pauta a las diferentes clasificaciones y combinaciones del PH. Esto permitirá ver la gama de posibilidades estéticas que presenta la forma, además de comprender las amplias posibilidades de su aplicación.

5.1 Didáctica en la enseñanza

El lenguaje de la arquitectura es visual. Lo que no se entiende con imágenes, será difícilmente descrito por palabras. Es esencial que los alumnos tengan prácticas constructivas, que les permitan conocer el proceso de las diferentes técnicas.

Dichas prácticas pueden ser en dos niveles, en uno los estudiantes construyen por sí mismos modelos a escala, para que de esta manera puedan comprender el comportamiento real de la estructura; en el otro, se pueden auxiliar de modelos virtuales que representen las diferentes formas que pueda tomar el modelo. Lo ideal es la combinación de ambas.

Los estudiantes tienen cada vez una mayor incorporación de las plataformas tecnológicas. Un ejemplo claro es el programa AutoCAD, que les permite la modelación de estructuras e incluso su construcción a escala, tal como se hace en los procedimientos reales. Ejemplo de esto son los ejercicios estudiantiles de las Fig. 74, 75 y 76, en ellas se ven trabajos realizados por estudiantes de licenciatura en la clase de geometría estructural.

La experiencia en esta clase me ha permitido ver los métodos didácticos con los cuáles se puede facilitar la explicación y entendimiento del PH. A partir de esto, podrán encontrar en los anexos, una metodología que engloba una síntesis del diseño y la construcción del PH, además de procedimientos para AutoCAD y Rhino, que permiten la visualización de modelos y su construcción por medio de plantillas.



Fig. 74, 75 y 76- Ejercicio de velarias, realizado por alumnos de licenciatura en arquitectura. Los alumnos aprenden a generar las plantillas y crean sus propios modelos, los resultados estéticos y a nivel experimentación son notables.
Fotos de Carolina Carmona D.R.

Esta metodología ha sido enriquecida con los comentarios de estudiantes que la han utilizado, permitiendo un proceso de retroalimentación que es esencial para la generación del conocimiento. Gran parte del material se ha diseñado con el objetivo de resolver las principales dudas que se tienen acerca de la superficie del PH, además de enfocarse en sus aplicaciones prácticas.

Dichas aplicaciones se pueden fortalecer con ejercicios en el salón de clase. Este es el caso de maquetas de velarias. Las Fig. 77 y 78, muestran ejemplos de trabajos de alumnos construidos en telas elásticas. Para la colocación de los postes y tensores, parten de conocimientos de resistencia de materiales y estática, que se aprenden previamente. Finalmente, tras un apoyo del diseño de plantillas en AutoCAD, generan los modelos a escala mayor.

En realidad es singular el apropiamiento de los conocimientos por parte de los estudiantes. Aunque se trata solo de un curso selectivo, tienen una gran iniciativa y generan trabajos muy completos. **Combinando, estos ejercicios, con métodos de visualización digitales y apoyos didácticos, se puede tener un mayor dominio, no solo de las velarias, sino en general de varios sistemas estructurales.**



Fig. 77 y 78- Maquetas previas, al ejercicio final de velarias. Se nota la experimentación con materiales flexibles, por lo regular adaptándose a la geometría el PH. **Fotos de Carolina Carmona D.R.**

5.2 Sistema Curvas-Rectas

En los capítulos anteriores, expliqué las formas para generar la superficie del PH. Entre ellas, dos sistemas que al primer juicio son muy diferentes. Estos son las curvas y las rectas. Cabe mencionar que no encontré una bibliografía que diera respaldo a esta sección, ya que las que existen dan por hecho las intersecciones sin explicar cómo se genera el proceso de la división de las parábolas, por lo que a continuación me doy a la tarea de ilustrar este procedimiento, realizado en el programa Rhino.

Hay que recordar que el PH, es una superficie infinita y que para poderla estudiar tenemos que marcar su origen y delimitación. Al considerar una silla de montar, veremos implícita la forma cuya frontera son dos parábolas, si dividimos ambas parábolas en segmentos equidistantes, obtendremos proyecciones de rectángulos desiguales en planta (ver capítulo 4 sección 4.1, definición por curvas generadoras). En cambio, **si tomamos referencia en un par de líneas auxiliares** (líneas A-H, y 1-8, Fig. 79) **para dividir a las parábolas en ambos sentidos, obtendremos segmentos no equidistantes, pero que en su proyección en planta, sí guardarán la misma relación de distancia y formarán cuadrados.**

Ahora generaremos el sistema reglado. Tomando los mismos puntos de división, los reproducimos en el otro par de parábolas delimitantes. Éstas tomarán el nombre de a-h y 1'-8', (Fig. 80) uniendo cada punto con su contrario, para el caso de las literales tendríamos: A-h, B-g, C-f, D-e, E-d, F-c, G-b, H-a y de la misma manera para los números. Al unirlos, veremos los sistemas de rectas que dan origen a la superficie reglada. En planta se verán una consecución de rombos exactamente iguales.

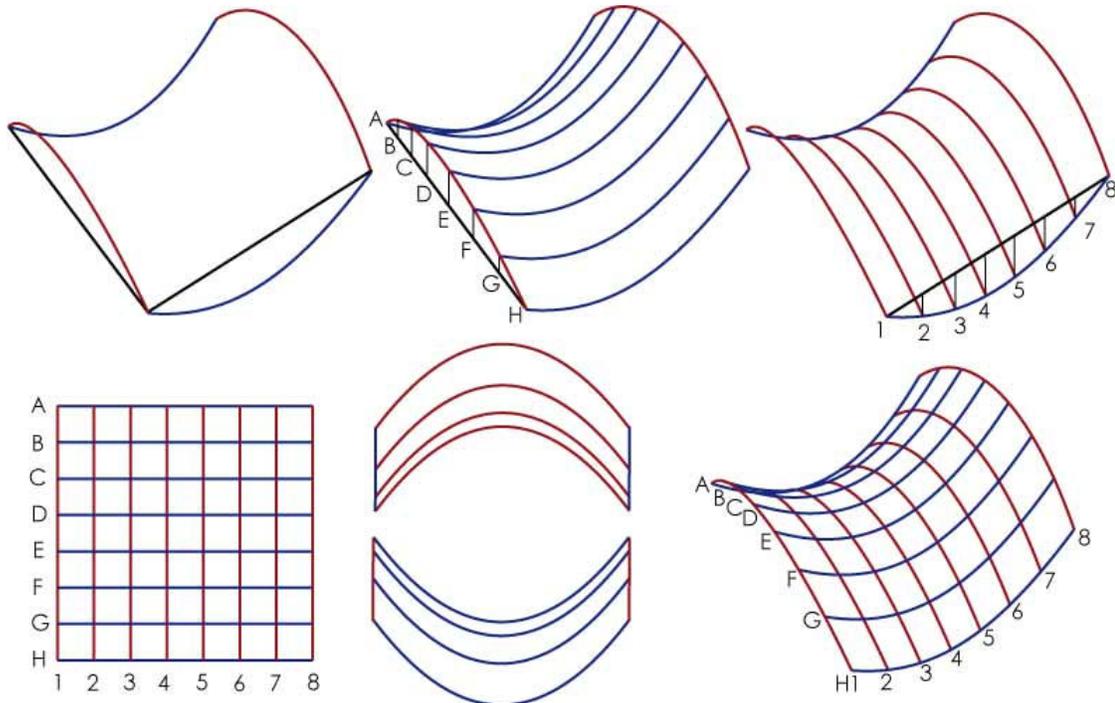


Fig. 79- Se muestra un PH, delimitado por parábolas. Trazando la línea A-H, y dividiéndola en segmentos equidistantes, trasladamos los puntos resultantes hasta que intercepten a la parábola. Estos nos darán un sistema de parábolas que no son equidistantes, pero que en planta forman cuadrados.

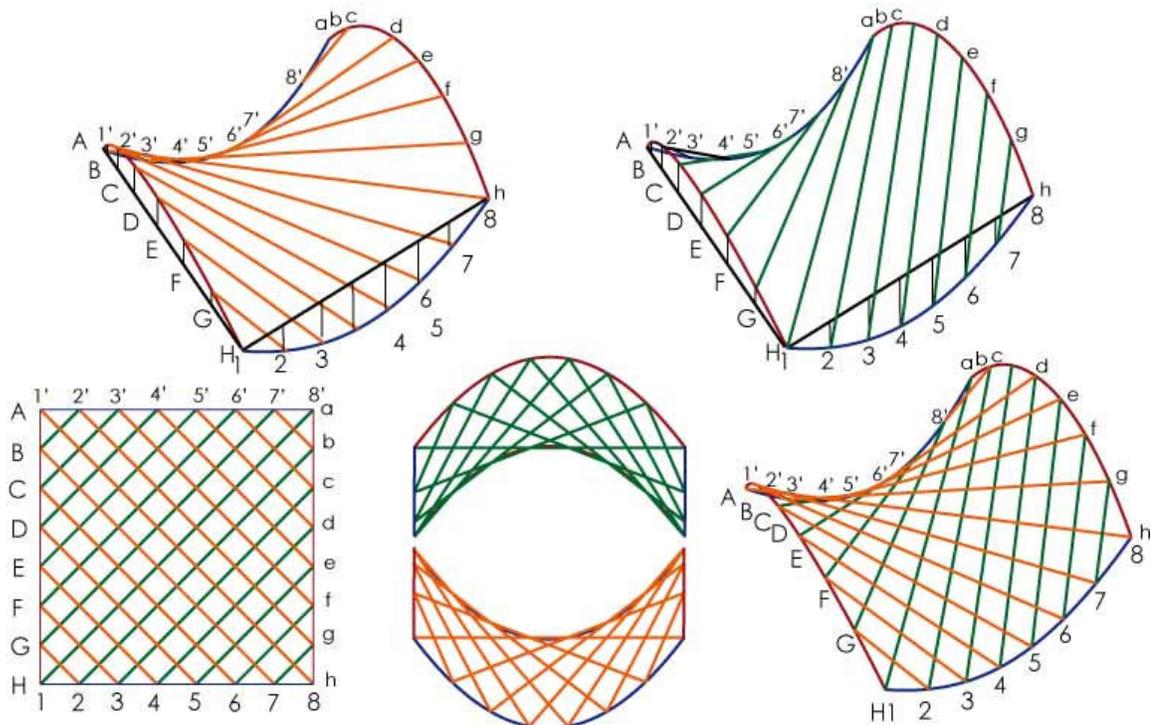


Fig. 80- Subdividiendo las parábolas delimitantes con los mismos puntos que el sistema anterior, se van interceptando las rectas en las parábolas y se genera la superficie con el sistema reglado, que en planta forma rombos.

Una vez trazados ambos sistemas, los juntamos. La coincidencia de los puntos es exacta, y en la proyección en planta, notamos que las aristas de los rombos del sistema reglado coinciden con los puntos cuadrangulares que forman las curvas. **Este fenómeno no sucede cuando la separación entre las curvas es equidistante y, esto es, porque las parábolas se cortarán en un sistema no coincidente con el reglado, salvo en las rectas centrales, que son las asíntotas de las hipérbolas del PH,** (marcadas como las diagonales A1'-8h y 8'a-H1).

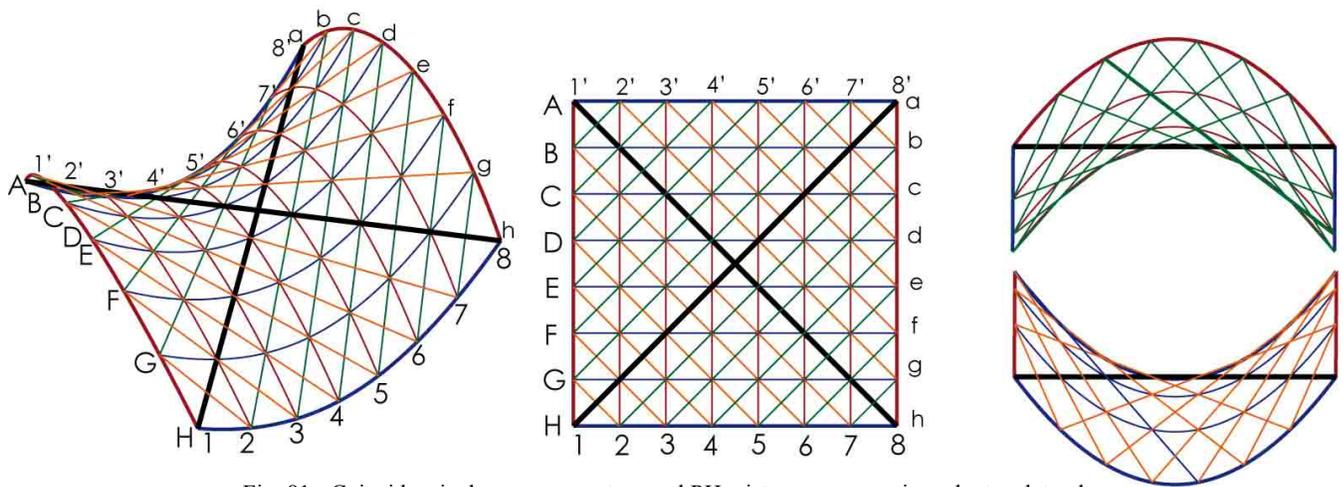


Fig. 81- Coincidencia de curvas y rectas en el PH, vistas en perspectiva, planta y laterales.

Analicé hasta aquí el PH, limitado por curvas, en el caso de la delimitación por rectas, sucede la misma intersección en las familias de generatrices, solo que aquí las parábolas se verán cortadas por el borde recto, como se muestra en la Fig. 82. Principalmente el análisis de estos sistemas de conformación nos servirán para la siguiente sección, donde clasificaré las formas que puede tomar un PH. **Es esencial comprender que los diferentes cortes y su congruencia, son posibles gracias a la coincidencia de los sistemas curvo y reglado.**

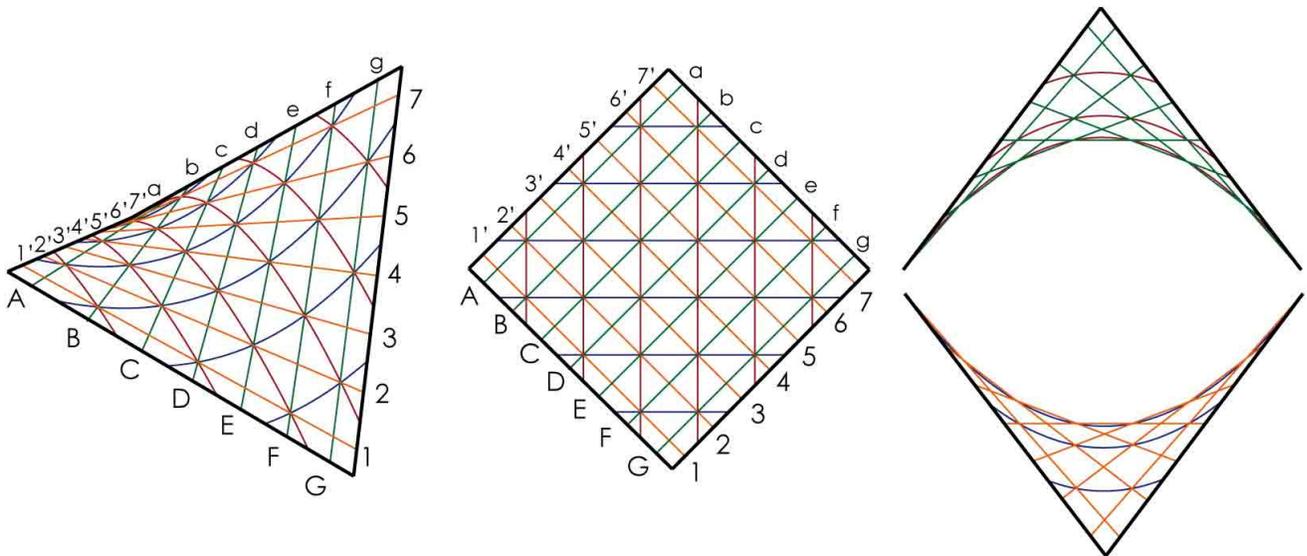


Fig. 82- Coincidencia de sistemas en un PH delimitado por rectas.

5.3 Clasificación y combinación de las formas

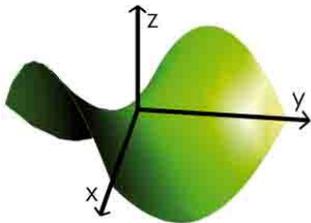
La geometría del PH es tan versátil, que puede parecer en ocasiones que no se trata de la misma forma. Diferentes tipos de delimitación y posiciones en el espacio, generan una gran diferencia entre los aspectos que puede tomar la superficie. Por esta razón y para poder ver una gama de combinaciones existentes, abordaremos los siguientes parámetros de clasificación:

- **Borde curvo:** cuando curvas delimitan su contorno.
- **Borde recto:** cuando rectas delimitan su contorno.
- **Simétrico:** cuando sus parábolas conformadoras tienen las mismas dimensiones
- **Asimétrico:** cuando sus parábolas conformadoras cuentan con diferentes dimensiones.
- **Equilátero:** cuando los planos directores de la superficie cortada forman un ángulo recto (90°)
- **Oblicuo:** cuando los planos directores del corte forman cualquier otro ángulo diferente a 90°
- **Posición de su eje z:** cuando el paraboloides está rotado de su posición original.

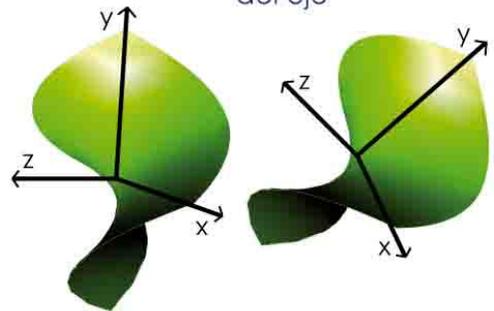
Para analizar con ejemplos gráficos las anteriores condiciones, englobaremos en todas las características dos principales grupos, de borde curvo y borde recto, para dar a partir de ellos sus posibles combinaciones. Cabe mencionar que esta clasificación, es una que estoy proponiendo conjuntando tres clasificaciones: la de **Félix Candela** (extraída del libro: las Estructuras de Candela de Colín Faber); la de **Juan Antonio Tonda**, (extraída del libro: paraboloides hiperbólicos) y la de **Eduardo Catalano** (extraída del libro estructuras de superficies alabeadas).

5.3.1 Borde Curvo MANTO SIMÉTRICO, SIN CORTES

Superficie delimitante

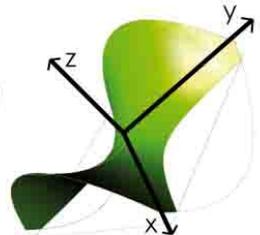
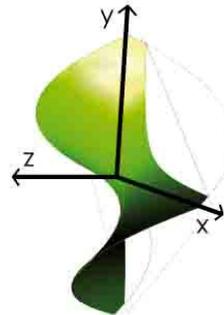
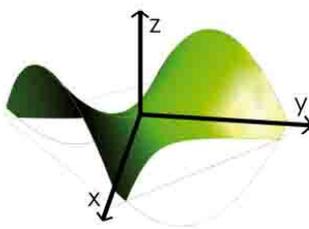
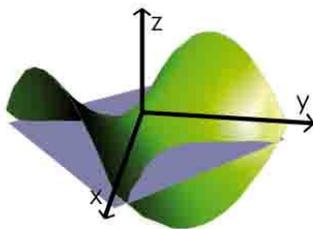


Cortes a la superficie

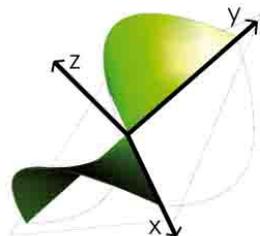
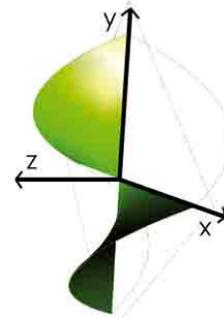
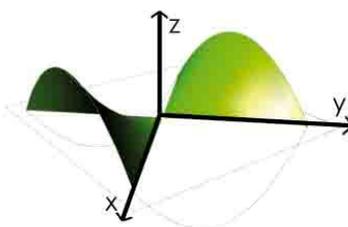
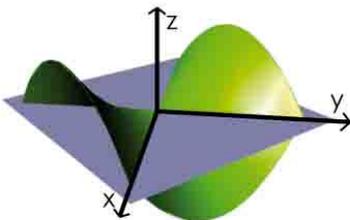


Cambios de posición del eje

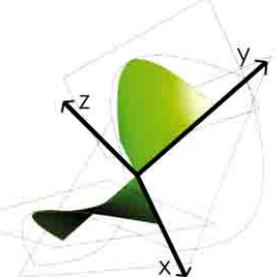
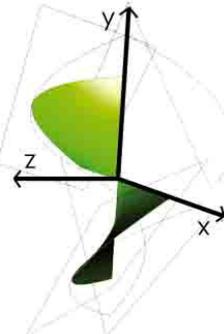
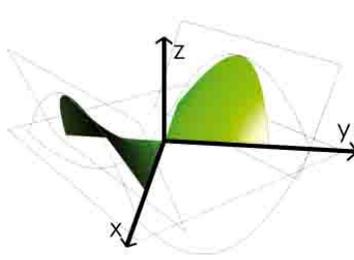
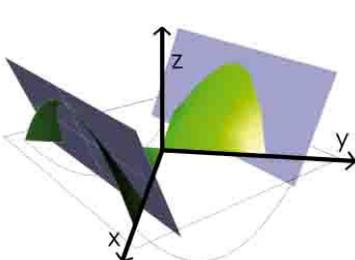
MANTO SIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO POR ABAJO DEL VÉRTICE



MANTO SIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO EN EL VÉRTICE

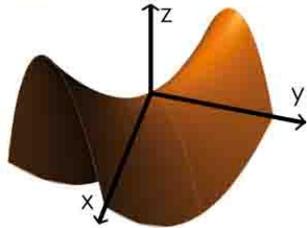


MANTO SIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO EN EL VÉRTICE, CORTE DIAGONAL EN ALA

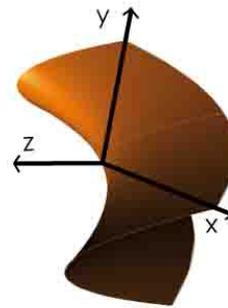


MANTO ASIMÉTRICO, SIN CORTES

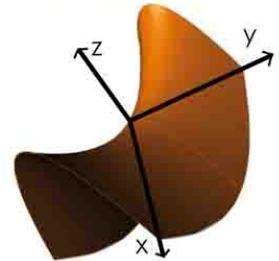
Superficie delimitante



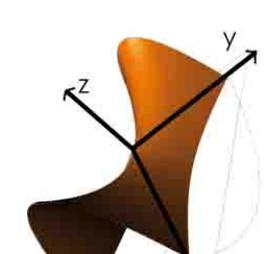
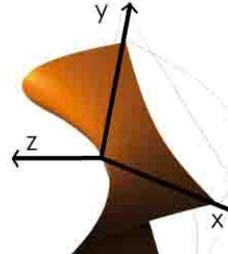
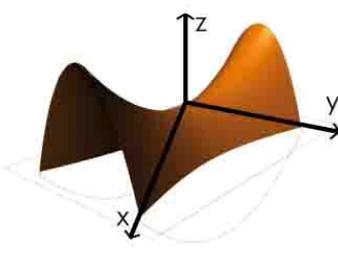
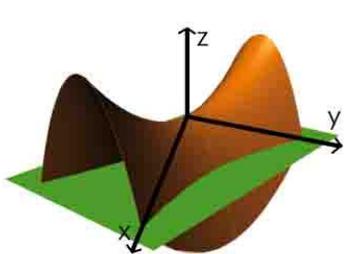
Cortes a la superficie



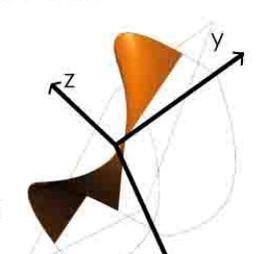
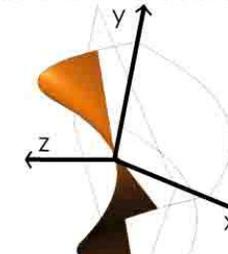
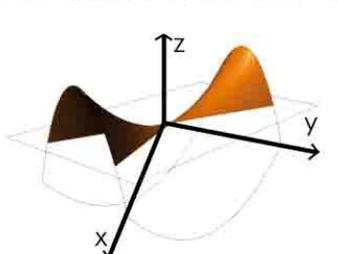
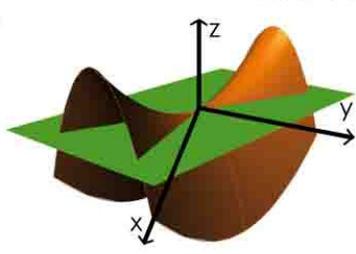
Cambios de posición del eje



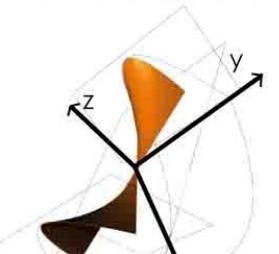
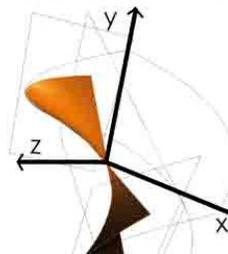
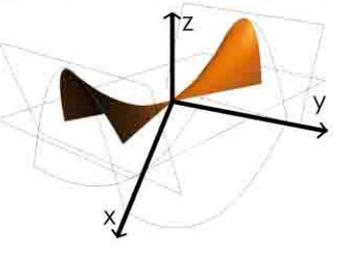
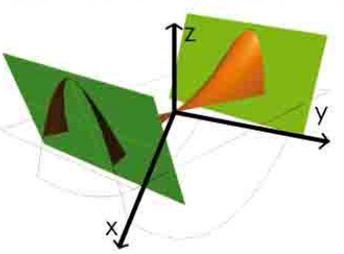
MANTO ASIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO POR ABAJO DEL VÉRTICE



MANTO ASIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO EN EL VÉRTICE

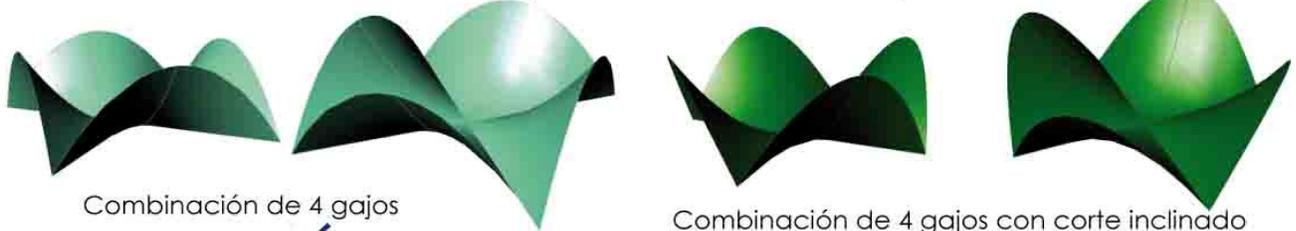


MANTO ASIMÉTRICO, CORTE POR UN PLANO EN EL VÉRTICE, CORTE DIAGONAL EN ALA



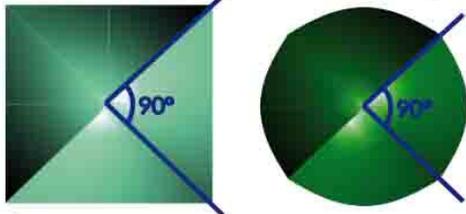
Es fácil observar que la superficie, tiene diversos cambios según los cortes y ángulos de los planos que lo intercepten, así mismo varía con sus posiciones en el espacio, por lo cual quiero hacer una nota aclaratoria. **Los conceptos de concavidad y convexidad vistos en capítulos anteriores, aplican solamente cuando el eje z del paraboloides apunta hacia arriba o hacia abajo.** Se tomaron dichos conceptos para poder explicar la generación de la superficie. **En el caso de las siguientes combinaciones, aunque en la mayor parte se contempla su eje z hacia arriba, existen rotaciones del eje que crean interesantes formas, en ellas el concepto de concavidad y convexidad resulta difícil de utilizar, por lo que nos referiremos a ellas en base a su sistema coordenado.**

COMBINACIONES Y CARACTERÍSTICAS
Mantos simétricos, parábolas con el mismo parámetro



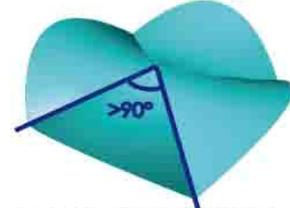
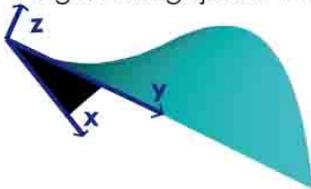
Combinación de 4 gajos

Combinación de 4 gajos con corte inclinado



Ángulo del gajo: 90° PH Equilatero

Corte bajo del vértice, con corte diagonal

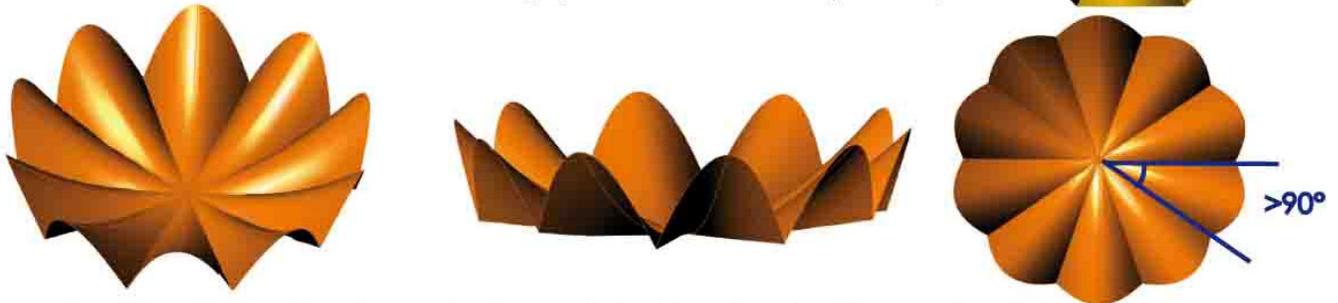


Combinación de 4 gajos, con eje z girado, y ángulo del gajo diferente de 90° (oblicuo)

Mantos asimétricos, parábolas con diferente parámetro



Combinación de 8 gajos, diferente de 90° (oblicuo)



Combinación de 10 gajos, corte diagonal al gajo y ángulo diferente de 90° (oblicuo)



Combinación de 6 gajos, con eje z girado, y ángulo del gajo diferente de 90° (oblicuo)



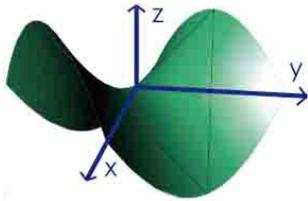
Corte bajo el vértice, con corte diagonal

Corte bajo el vértice, con corte diagonal desigual

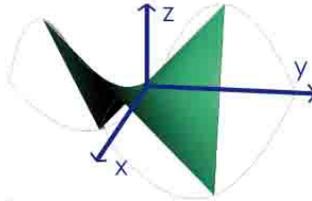
5.3.2 Borde Recto

PARÁBOLAS SIMÉTRICAS, CORTE RECTO

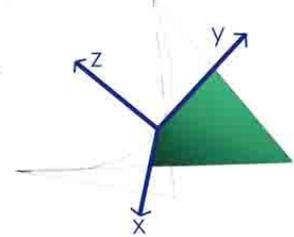
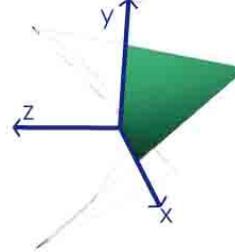
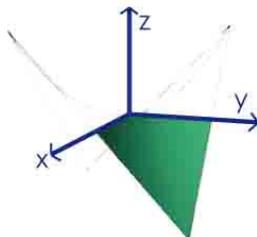
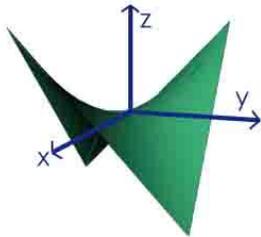
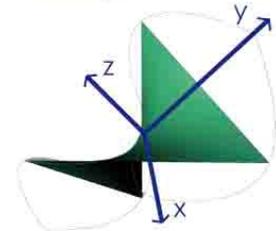
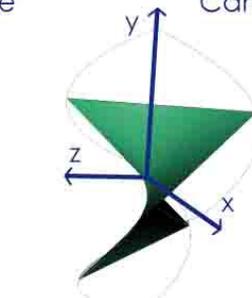
Superficie delimitante



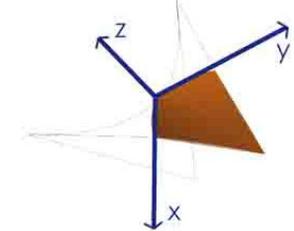
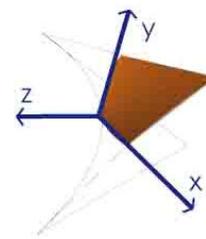
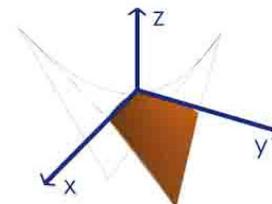
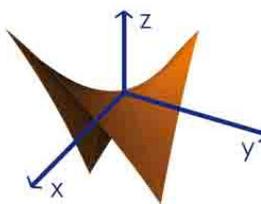
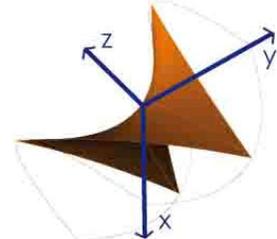
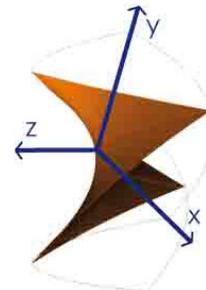
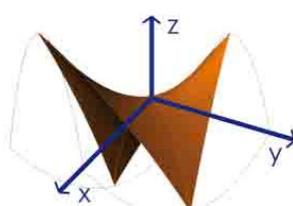
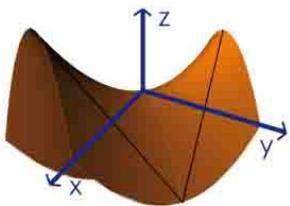
Cortes a la superficie



Cambios de posición del eje



PARÁBOLAS ASIMÉTRICAS, CORTE RECTO



Es muy importante que se entienda que gracias al doble sistema de generación recta-curva, podemos crear diferentes cortes en la superficie. He dado los anteriores ejemplos, para que se vea uno de los principales aspectos del borde recto. Cabe mencionar que la delimitación es la dada por las parábolas, formando la silla de montar. El sistema de ejes coordenados se conserva en el punto de intersección de las parábolas medias (que es el mismo de las asíntotas y del sistema reglado), al cual llamamos corona. **No importa en qué posición se encuentre el PH, la corona será el punto de referencia para la ubicación de la superficie.**

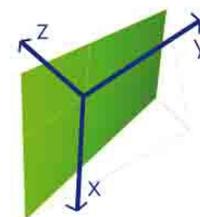
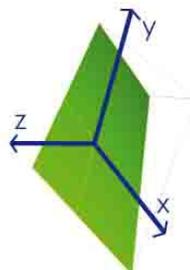
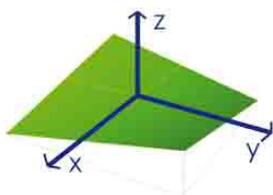
Por otra parte, en el apartado 4.2 de generación por rectas ilustré al PH, formado a partir de rectas en diferentes posiciones, por lo que para denotar la versatilidad de los aspectos estéticos de la superficie, también muestro a continuación algunos cortes dados por el sistema reglado. Cabe mencionar que el rectángulo proyectado en planta, guarda la misma relación de ancho-largo que los cortes de la silla de montar, esto es para dar una uniformidad y un poder de comparación a los esquemas.

ORIGEN EN RECTAS SIMÉTRICAS CON MINIMO APUNTALAMIENTO

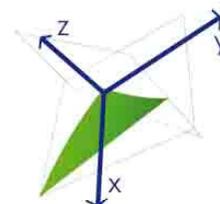
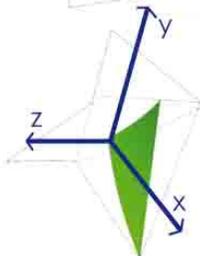
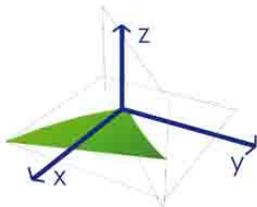
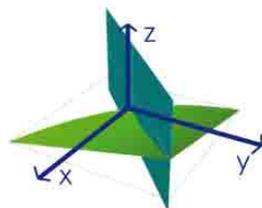
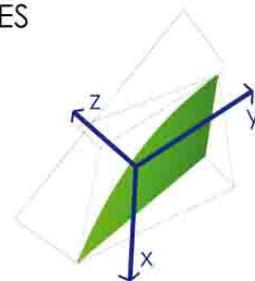
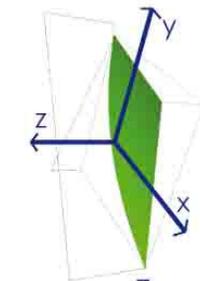
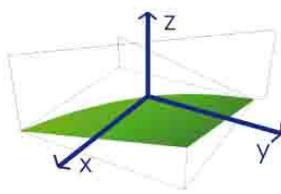
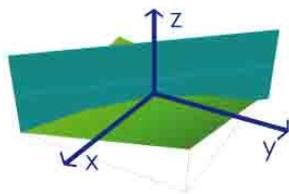
Superficie delimitante

Cortes a la superficie

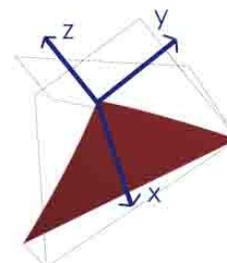
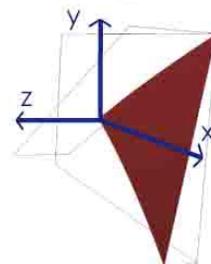
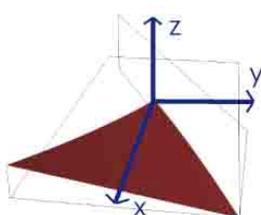
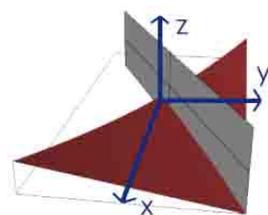
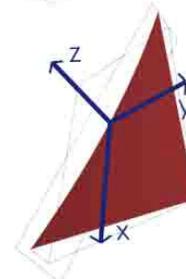
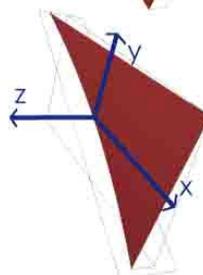
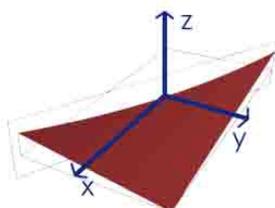
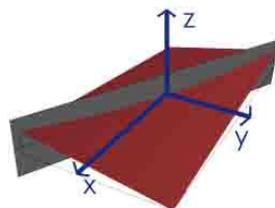
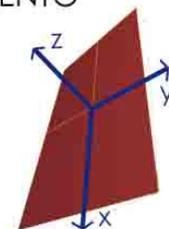
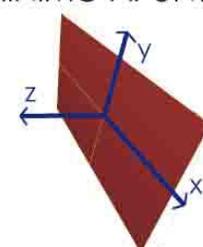
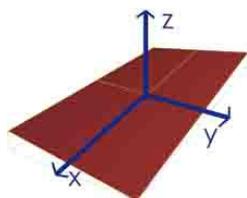
Cambios de posición del eje



CORTE CON PLANOS RECTOS EN DOS DIRECCIONES



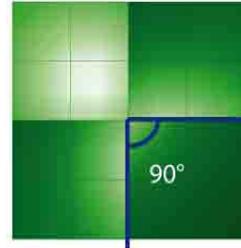
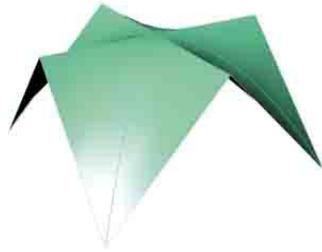
ORIGEN EN RECTAS ASIMÉTRICAS CON MINIMO APUNTALAMIENTO



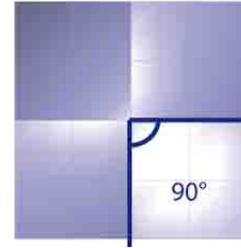
COMBINACIONES Y CARACTERÍSTICAS
Borde Recto, con parámetros simétricos

Apuntalamiento alto

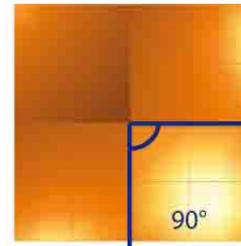
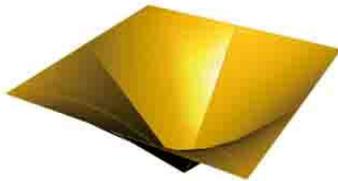
Apuntalamiento bajo



Formación en "fronton"
 Ambos de planta cuadrangular y equiláteros



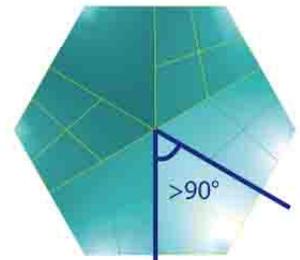
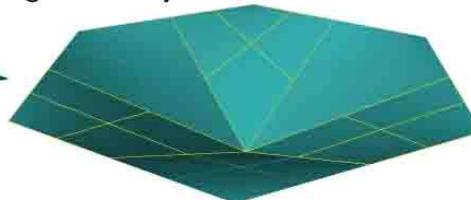
Formación en "Quilla"
 Ambos de planta cuadrangular y equiláteros



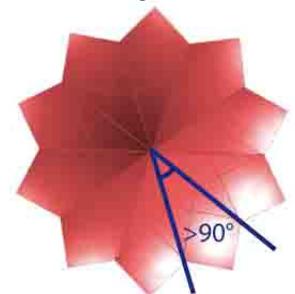
Formación en "Paraguas"
 Ambos de planta cuadrangular y equiláteros

Borde Recto, con parámetros asimétricos

Unión de 6 mantos, planta exagonal. Gajos oblicuos



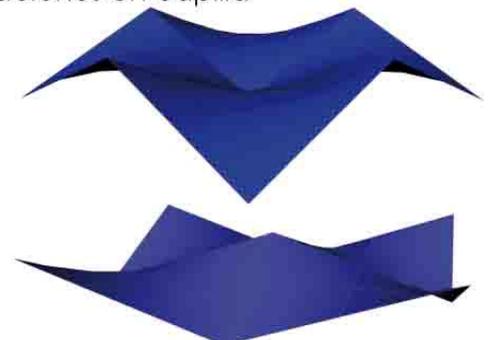
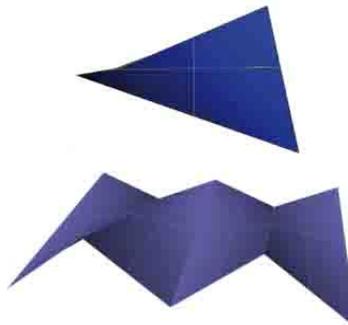
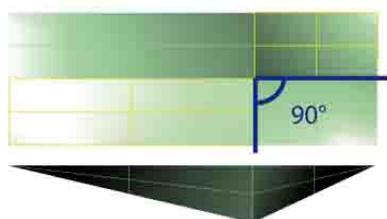
Unión de 10 mantos, planta en flor. Gajos oblicuos



Equilátero de diferente parámetro



Combinaciones en capilla



5.3.3 Combinaciones ingeniosas en ejemplos construidos

Hasta este punto, he ilustrado algunas de las combinaciones del PH, sin embargo, es en realidad responsabilidad del diseñador y su imaginación, delimitar la gama de aspectos formales que puede adquirir un PH. Esta geometría se presenta ideal en cualquier tipo de planta, circular, cuadrangular, e incluso de polígonos regulares e irregulares.

A continuación, muestro algunos ejemplos de combinaciones ingeniosas de diversos arquitectos e ingenieros, que sin duda han puesto un gran empeño en utilizar al límite los beneficios que los PH otorgan a un diseño arquitectónico.



Fig 83- Superior, Pengrowth Saddledome. Construcción del estadio.

Fig. 84- Centro, Vista total del estadio Saddledome.

Fig. 85 y 86- Inferior, Palacio de Justicia, Bélgica. Se muestra la cubierta formada por PH. Vistas delantera y trasera

Ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos

PENGROWTH SADDLEDOME. CANADÁ (1983)

Podría traducirse "saddledome" como domo en forma de silla de montar. El estadio se encuentra en la ciudad de Calgary, en Alberta, Canadá. Nace del diseño del arquitecto Graham McCourt y el cálculo de los ingenieros Jan Bobrowski and Partners; se presume de ser el cascarón de mayor dimensión en el mundo, teniendo un radio de 67.7 m, en una planta circular que es un corte cilíndrico de un PH. El punto más bajo de la parábola se encuentra a 14m de diferencia del más alto.

En su sistema contempla columnas de disposición radial para sostener un anillo de borde de elementos prefabricados, el cual recibe a su vez una retícula de cables postensados, que sostienen 391 paneles prefabricados de concreto, de 6m x 6m. La cubierta salva un claro de 12,000 m², tan sólo con un espesor de 60 cm.

PALACIO DE JUSTICIA. BÉLGICA (2005)

Este edificio, se encuentra en Amberes, Bélgica y está conformado por seis alas con jardines centrales que cubren en total 78 000 m². La cubierta fue diseñada por Richard Rogers and Partners, Ove Arup y VK, usando la geometría del PH, y conformada por 4 secciones de borde recto, dentro de una sección de planta cuadrada.

Para construirlo, se utilizó una cimbra de madera, para sostener capas consecutivas de lámina y aislantes. La cimbra forma parte del acabado final del plafón. Este edificio además de tener un contundente modelo estructural, también tiene un análisis de las características climáticas. La altura de los mantos de PH en la parte posterior, sirven para evitar el soleamiento, y los de la parte anterior, forrados en cristal, sirven para dotar de iluminación al espacio interior.

CATEDRAL ST MARY. EUA (1970)

Está ubicada en San Francisco, Estados Unidos, diseñada por Paul A. Ryan y Jonh Lee, el cálculo estuvo a cargo de Pier Luigi Nervi y Pietro Bellaschi. El techo, consta de una combinación de 4 mantos PH de borde recto, que cubren un volumen total de 60.43 m³. Básicamente es un solo PH alargado, de parámetros distintos, que espejado genera la cubierta. El cascarón de concreto, guarda un acabado cuadrículado en su exterior y en su interior reticulado. La luz entra por medio de una rejilla que separa los mantos del PH, dando un ambiente ideal a la catedral.

CAFÉ SEEROSE. ALEMANIA (1983)

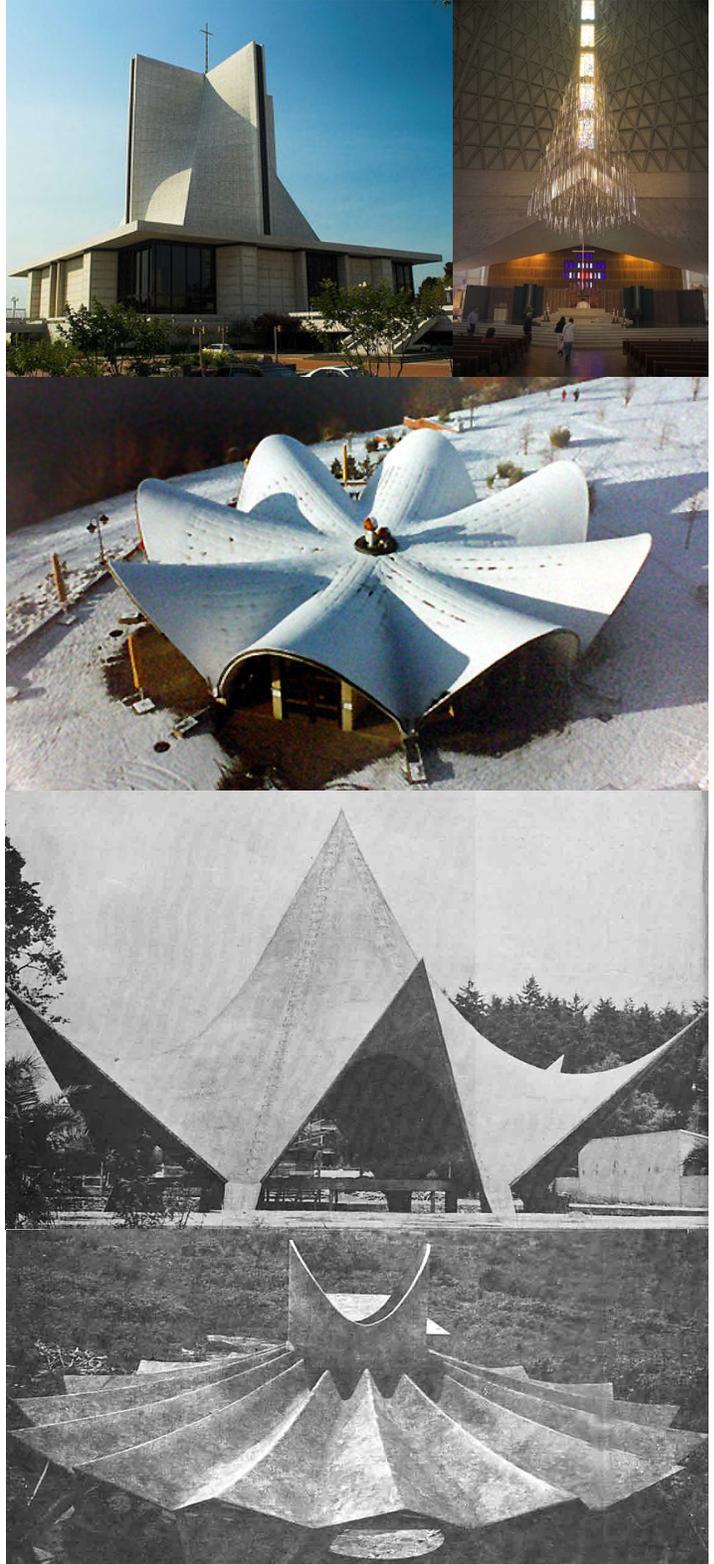
Este café y restaurante se ubica en la ciudad de Postdam, Alemania. El edificio consta de la intersección de 8 gajos de PH de borde curvo con el eje z rotado. Esta obra es del arquitecto e ingeniero alemán Ulrich Müther, quien construyera una gran cantidad de cascarones de concreto armado, utilizando diferentes combinaciones de mantos de PH tanto de borde recto, como de borde curvo. Una de sus principales innovaciones fue el uso de la técnica del concreto lanzado.

SINAGOGA, GUATEMALA (1960)

Ubicada en la Ciudad de Guatemala, Guatemala, el diseño corrió a cargo de Jorge Montes y Carlos Haeussler, la obra fue ejecutada por Cubiertas Ala de Guatemala y Constructora Delta. Tiene una planta de estrella cuyo cuadrado confinador mide 36 m por lado. Su punto más alto se encuentra a los 23 m. Este diseño nos muestra la combinación de 6 mantos de PH de borde recto (específicamente en capilla), con eje z rotado.

BAZAR, MÉXICO (1958)

Este bazar está ubicado en Lomas de Cuernavaca, Estado de Morelos, México. Su diseño fue de los arquitectos Guillermo Rosell y Manuel Larrosa, el cálculo es de Félix Candela. Básicamente la cubierta es formada por 32 mantos de PH de borde recto, llegando a un anillo de compresión circular, las columnas que soportan la cáscara son inclinadas. El edificio forma parte del conjunto "plaza de los abanicos", que es característico por tener esta forma en sus cascarones, los cuales han sido calificados en algún momento por el mismo Candela como "surrealistas".



De superior a inferior:

Fig 87 y 88- Catedral de St. Mary, exterior y altar.

Fig 89- Café y Restaurante Seerose. Imagen aérea.

Fig. 90- Sinagoga en Guatemala, fachada

Fig. 91- Bazar, Lomas de Cuernavaca Vista aérea.

Fig. 90 y 91- Extraídas del libro: "Las estructuras de Candela"

Fig. 87,88 y 89- Ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos

5.4 Diseño aplicado: Paraguas

En las divisiones de borde recto, están las que se refieren a parámetros iguales y desiguales. Los primeros, dan como resultado que el ángulo propio del manto sea equilátero (90°). Dentro de este grupo, encontramos tres casos principales de combinación:

- **Formación en frontón** (llamada así por que recuerda los frontones griegos)
- **Formación en quilla** (cuyo nombre es tomado de la pieza que da soporte a las costillas en las embarcaciones)
- **Formación en paraguas** (similar a una sombrilla invertida, que se apoya en un solo punto).

Cabe mencionar que me enfoco en los equiláteros, ya que su procedimiento de cálculo es más corto, comparado a los oblicuos, situación que analizaré a fondo en el capítulo 7. Entonces regresando a las combinaciones, una de las más eficientes, resulta ser la de paraguas, ya que puede tener un sólo apoyo, permitiendo con esto que en su unión consecutiva, el claro cubierto sea mayor.

En este capítulo en el cual he abordado el diseño, explicaré el trazo de un paraguas; aunque es generable por un corte recto a una silla de montar como se ha visto en esquemas pasados, en este caso tomaremos **la formación reglada**, ya que ella **permite tener una visión más clara del dimensionamiento, asunto que nos interesa en especial a los arquitectos, con fin de cubrir un área determinada.**

Pensemos que tenemos que cubrir un área cuadrada de 10m por lado, esto lo haremos con un solo apoyo al centro, las condiciones de altura, son que el punto más bajo medirá 3.5 m y los más altos 5m. A continuación enumero en seis pasos, una posibilidad de diseño para un paraguas:

1) Delimitación en planta: Pensando que el paraguas está conformado por 4 mantos de PH, los podemos dibujar en planta, cada manto como un cuadrado, ya que en esta ocasión el área a cubrir es de 10m x 10m. En caso de que fuera rectangular, se sigue el mismo proceso, bajo la premisa que un par de mantos tendrá una dimensión diferente a la del otro par. Por otra parte, si la geometría fuese un polígono de más lados, pensaremos en mantos oblicuos que generen la proyección indicada para cada caso, además de que hay que tomar en cuenta que los mantos serán PH oblicuos.

2) Delimitación de la altura: Una vez que hemos definido el área de cada manto, hay que revisar las condiciones de altura, para este ejemplo, las condiciones están dadas en 3.5 m en el punto más bajo mientras que la altura total será de 5m; entonces restando de la altura total la del punto más bajo obtendremos la propia del PH, en este caso 1.5m. Esta situación se nos presenta ideal para la construcción del manto, sin embargo en la mayoría de las condiciones de diseño, esta situación no ocurre, más bien nos darán una altura total, o tal vez solo tendremos la medida que determine el plafón del sitio a cubrir, por lo que en el siguiente capítulo explicaré como determinar estas alturas por medio del cálculo del alabeamiento del PH.

3) Formación del PH: Hasta el momento hemos definido dimensiones en planta, en este caso de 5m x 5m, y también que el manto tendrá una altura de 1.5m. Tomando en cuenta que la superficie deberá cumplir con 3 puntos coplanarios, y uno diferente, sabremos que el cuadrado tendrá su alabeamiento hacia la parte baja, punto donde la columna recibirá a los cuatro PH.

4) Reticulación del PH: Una vez que tenemos las líneas confinadoras de la superficie, las dividimos en un número igual de segmentos. Tomamos un par de las líneas que sean paralelas, y comenzamos a trazar de punto a punto líneas perpendiculares, de tal manera que generemos la superficie reglada. Para entender mejor este concepto, veamos en la Fig. 90 en el paso cuatro, el par de líneas paralelas están divididas en segmentos A-B-C-D y a-b-c-d, y el sistema de perpendiculares une A-a, B-b, C-c, y D-d, generando el sistema reglado. Para encontrar la retícula, tomamos el otro par de líneas cuyos segmentos son 1-2-3-4 y 1'-2'-3'-4', uniendo por perpendiculares 1-1', 2-2', 3-3', 4-4', dando por terminado el cuadrículado.

El sistema reticular nos permitirá una mejor visualización de la superficie, además de que, en cierto momento, facilita la construcción en la realidad.

5) Formación del paraguas: Una vez terminado el manto, empezaremos un proceso de "espejeo" de este, de tal manera que encontraremos la posición en la cual ambos mantos de PH encuentren su punto bajo en el mismo sitio. Este será donde la columna reciba el peso del paraguas. Hacemos lo mismo con los otros dos mantos, hasta acomodar los cuatro.

6) Vistas: Teniendo el manto completo, podemos ir cambiando las vistas para comprender mejor la superficie. Más adelante analizaremos un método para generar esta superficie en AutoCAD.

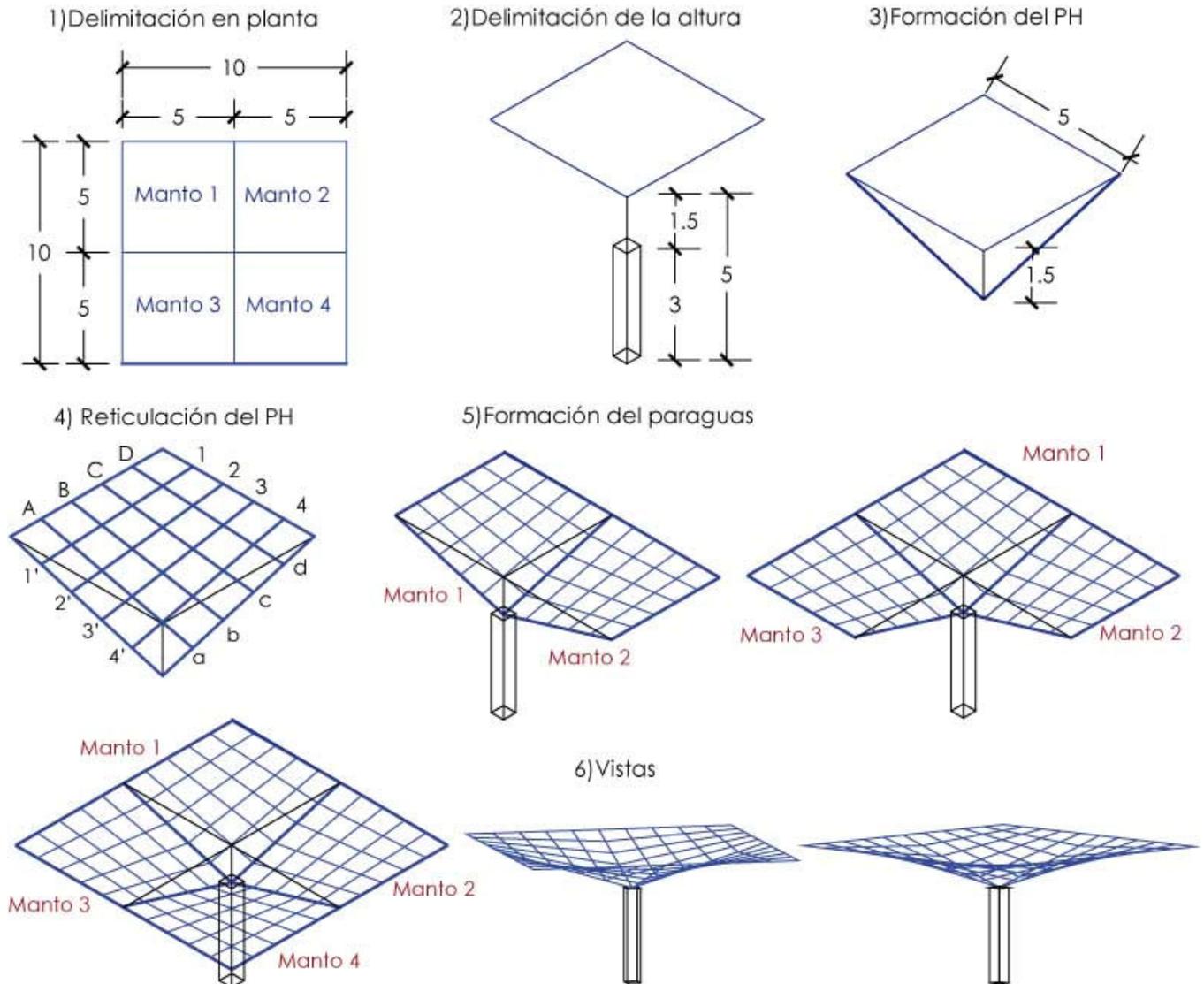


Fig. 92- Diseño de paraguas

CAPÍTULO 6

El paraboloides hiperbólico. Definición matemática.

Una vez visto el diseño de PH, comenzaremos con el análisis matemático. Esto nos servirá para comprender la posición de la superficie, su sistema de coordenadas y ubicación de puntos. Otra temática esencial de este capítulo es que sentará las bases para el cálculo. Básicamente volveremos a abordar el doble sistema de generación curvas-rectas; con las curvas está vinculada la ecuación que definiremos canónica, y con las rectas la ecuación referida a las generatrices.

6.1 Definición canónica

Al definir, como canónica la forma de una ecuación, nos referimos a una terminología matemática que indica que esta es invariable y no dependerá del punto de vista del que la interpreta, teniendo un significado universal. Para el PH, llamaremos canónica a la ecuación de la superficie que tiene que ver con la relación de sus parábolas conformadoras.

6.1.1 Ecuación del PH, forma canónica

Refiriéndonos, al capítulo 3, sección 3.3.3 Parábola, encontramos la relación de la parábola con dos ecuaciones:

$$\text{ECUACIÓN A: } x^2 = 2py$$

$$\text{ECUACIÓN B: } x^2 = 4py$$

Antes, especifiqué que ambas ecuaciones son válidas y que lo único que cambia es la relación con de la distancia entre la directriz y el foco. Para fines de la delimitación de la forma canónica de la ecuación usaremos la forma A: $x^2 = 2py$

En el mismo capítulo 3, mencioné que la ecuación que delimitaba la superficie del PH era:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Ahora, analizaremos cómo se obtiene esta ecuación que resulta ser la forma canónica principalmente estudiada por la geometría analítica. Consideremos un PH conformado por las parábolas 1 y 2 como se muestra en la Fig. 93, definiendo de antemano su sistema coordenado como Canals lo indica:

“El punto 0 y el eje z vértice y eje común de las dos parábolas en su posición inicial, son, respectivamente, el vértice y el eje del paraboloides. Las tangentes a las parábolas 1 y 2 en el punto 0, y el eje z, constituyen un sistema de ejes coordenados ortogonales, que utilizaremos como sistema de referencia en la deducción de la ecuación del paraboloides, considerado como superficie de traslación. Los planos zx y zy son los planos principales y las parábolas en ellos contenidas son llamadas parábolas principales.”¹

Se muestra un punto de coincidencia, llamado punto 0, en él convergerán el eje z, y el vértice de la superficie del PH. Trazaremos la tangente para las parábolas 1 y 2, (este concepto ya lo expliqué en el punto 3.2, clasificación de las superficies por su curvatura) y dichas tangentes, generarán un sistema de ejes coordenados ortogonales, que definirán los planos principales zx y zy. En ellos se desarrollarán las parábolas 1 y 2 respectivamente. A estas parábolas perpendiculares, les llamaremos parábolas principales.

Finalmente, la superficie se genera a partir del traslado de las parábolas, como lo vimos en el capítulo 4 (Definición de curvas generadoras), dando como resultado una superficie de traslación. Una nota importante es mencionar que los ejes para delimitar la ecuación y los mostrados en el capítulo 4, son diferentes.

¹ Canals-Guerín, “Cascarones Parabólicos Hiperbólicos”

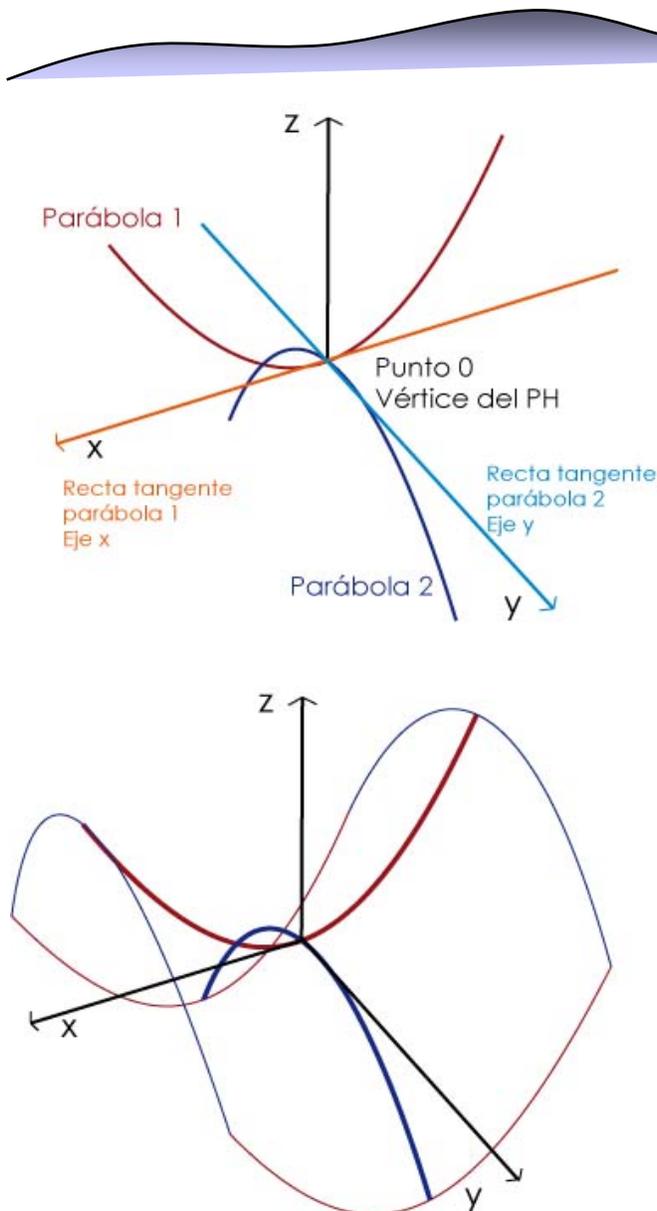


Fig. 93- Parábolas 1 y 2, que dan origen a la ecuación canónica de la superficie

La parábola 1, desarrollada en el plano zx , tendrá la fórmula:

Tomando la fórmula de la parábola: $z = 2px^2$ por medio del despeje donde se contempla el punto a en sustitución de x y el valor de $z=1$, $1 = 2pa^2$ $a^2 = \frac{1}{2p}$ por lo que $2p = \frac{1}{a^2}$, y sustituyendo el valor de $2p$, en la fórmula original $z = 2px^2$ finalmente tendremos que $z = \frac{1}{a^2}(x^2)$

igual a $z = \frac{x^2}{a^2}$ que describirá el movimiento de la parábola 1 dentro de la superficie, y para diferenciarla la llamaremos: $z' = \frac{x^2}{a^2}$

La parábola 2, desarrollada en el plano zy , tendrá la fórmula:

Tomando la fórmula de la parábola: $z = -2py^2$ por medio del despeje donde se contempla el punto b en sustitución de y y el valor de $z=1$, $1 = -2pb^2$ $b^2 = -\frac{1}{2p}$ por lo que $2p = -\frac{1}{b^2}$, y sustituyendo el valor de $2p$, en la fórmula original $z = 2py^2$ finalmente tendremos que $z = -\frac{1}{b^2}(y^2)$

igual a $z = -\frac{y^2}{b^2}$ que describirá el movimiento de la parábola 2 dentro de la superficie, y para diferenciarla la llamaremos: $z'' = -\frac{y^2}{b^2}$

Considerando que ambas comparten el eje z , diremos que $z=z'$ y $z=z''$, por lo que uniendo las dos

ecuaciones nos queda el resultado: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ que consideramos la ecuación canónica del PH.

6.1.2 Ubicación de puntos

Esta ubicación de puntos, está basada en el procedimiento de **Juan Antonio Tonda**, impartido en las clases de especialidad en cubiertas ligeras.

Tomando la ubicación de los ejes anteriores que llamaremos **ortogonales**, determinamos que la fórmula para la parábola 1 $z = 2px^2$ mientras que para la parábola 2 es $z = -2py^2$, como se muestra en la Fig. 94.

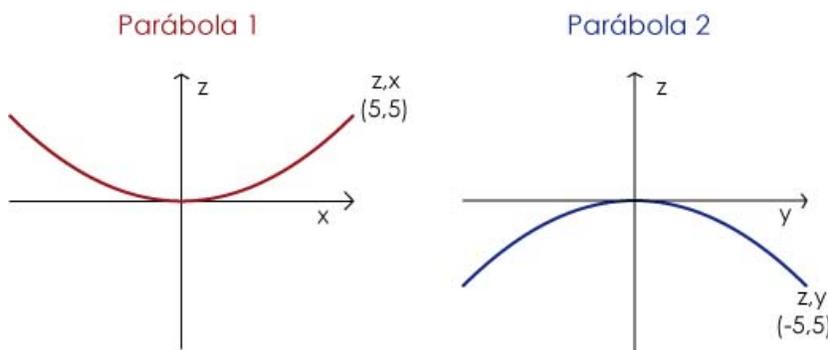


Fig. 94- Parábolas 1 y 2, graficación y valores

Si nosotros relacionamos a $2p$ con la constante a , tendremos las relaciones: $z = ax^2$ y $z = -by^2$ donde despejando a tendremos:

$$a = \frac{z}{x^2} \text{ y } b = -\frac{z}{y^2}$$

Estas relaciones son sustituibles, con los valores que tengamos conocidos en x y y de ambas parábolas. En este caso para la parábola 1 los valores serán z,x (5,5) y para la parábola 2 z,y (-5,5).

Sustituyendo los valores obtenemos para la **parábola 1**: $a = \frac{5}{5^2} \quad a = .2$

Sustituyendo los valores obtenemos para la **parábola 2**: $b = \frac{5}{5^2} \quad b = .2$

Los valores, resultan iguales, ya que las parábolas son simétricas, sin embargo en un PH de parábolas asimétricas, los resultados serán diferentes. Ahora bien, sabiendo el valor de a y b , despejamos en las fórmulas de cada parábola: $z = ax^2$ y $z = -by^2$ obteniendo:

Sustituyendo los valores obtenemos para la **parábola 1**: $z' = .2x^2$

Sustituyendo los valores obtenemos para la **parábola 2**: $z'' = -.2y^2$

Considerando que ambas comparten el eje z , diremos que $z=z'$ y $z=z''$, por lo que uniendo las dos ecuaciones nos queda el resultado: $z = .2x^2 - .2y^2$

Con esta forma simplificada de la ecuación canónica, podemos obtener los puntos de la superficie, a partir de conocer dos puntos definidos. Encontramos por ejemplo, el punto A del PH (Fig. 95), las coordenadas son $x=5, y=5$ sustituyendo en la fórmula obtenemos: $z = .2(5^2) - .2(5^2) \quad z = 5 - 5$ donde el resultado es $z=0$, esto es comprobable, ya que como se ve en la Fig. 95, ese punto se encuentra en el corte por el vértice, donde todos los puntos en z valen 0.

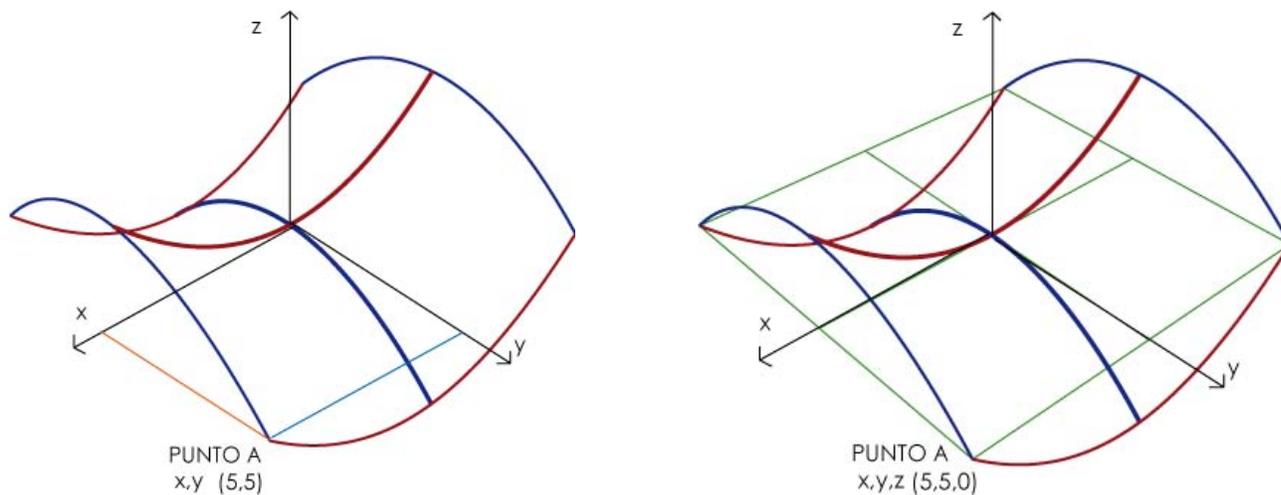


Fig. 95- Izquierda, posición del punto A en la superficie del PH. Derecha, plano que corta al vértice, todos los puntos en z que se encuentren en él valdrán cero.

Ahora pensemos que queremos encontrar un punto que no está implícito en la superficie, como sería el resultante al intersecar al PH por un plano horizontal que toque a la superficie en su punto más bajo. El punto B, (Fig 96) se encuentra en un extremo de la superficie, donde conocemos su coordenada en x, que corresponde a 5, por la distancia que la parábola recorre en x. Conocemos z, cuya distancia resulta ser el punto más bajo de la parábola 2, que se desarrolla en el plano z,y.

Con estos datos y la ecuación de PH, sabemos que: $z = .2x^2 - .2y^2$ siendo que $x=5$ y $z=-5$, nos interesa saber el valor de y, que recorrerá una distancia mayor a la de la parábola 1, como se muestra en la Fig. 96, por lo que despejamos de la ecuación anterior obteniendo que:

$$y = \sqrt{\frac{.2x^2 - z}{.2}} \quad \text{sustituyendo los valores:} \quad y = \sqrt{\frac{.2(5)^2 - (-5)}{.2}} \quad \text{da un resultado de:}$$

$$y = \sqrt{\frac{5+5}{.2}} \quad y = \sqrt{50} \quad \text{finalmente} \quad y=7.07$$

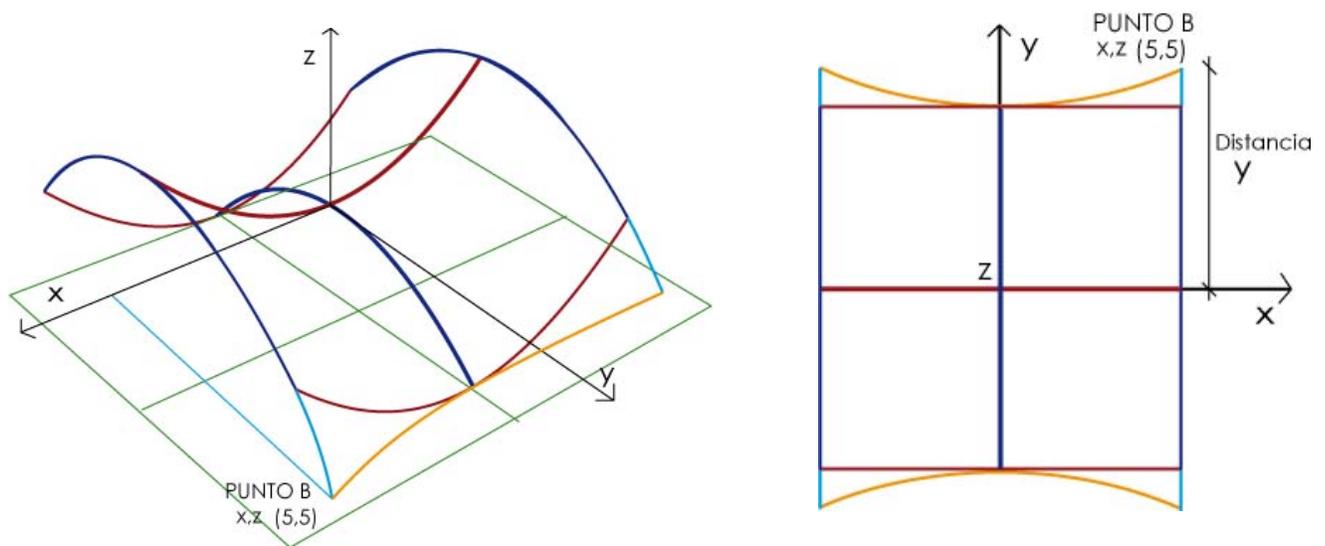


Fig. 96- Izquierda. Posición del punto B, donde sabemos la distancia en x y z, Derecha, Vista en planta de las hipérbolas y la distancia del punto y

El punto B, cuyas coordenadas son $x=5$, $y=7.07$, $z=5$, al representar un corte horizontal al PH, es el punto extremo de una de las familias de hipérbolas que contiene la superficie.

6.2 Ecuación referida a las generatrices

Mientras que el cálculo se ha desarrollado con base a la ecuación canónica, los cambios de posición de la superficie, eran impensables, y solo se presentaba el caso general donde el eje z es vertical. Sin embargo al desarrollar la ecuación de la superficie con base al sistema reglado, es posible generar desplazamientos del eje z, contemplando el traslado y compensación de las cargas gravitacionales a cada caso de estudio, dándonos una versatilidad para el diseño, con opciones creativas ilimitadas.

Es por esto importante el considerar la interpretación de la superficie, donde se mide a través de una constante el grado de alabeamiento o "doblamiento" que va teniendo el PH, dicha constante se interpretará como k, y está en relación de la coordenadas "x , y" de de la superficie, todas ellas definirán la altura z, que va teniendo el manto en cada punto. La relación se conoce como:

$$z = kxy$$

Candela, la explica en relación de dos sistema de rectas cuyas posiciones van cambiando en el espacio como se muestra en la Fig. 97:

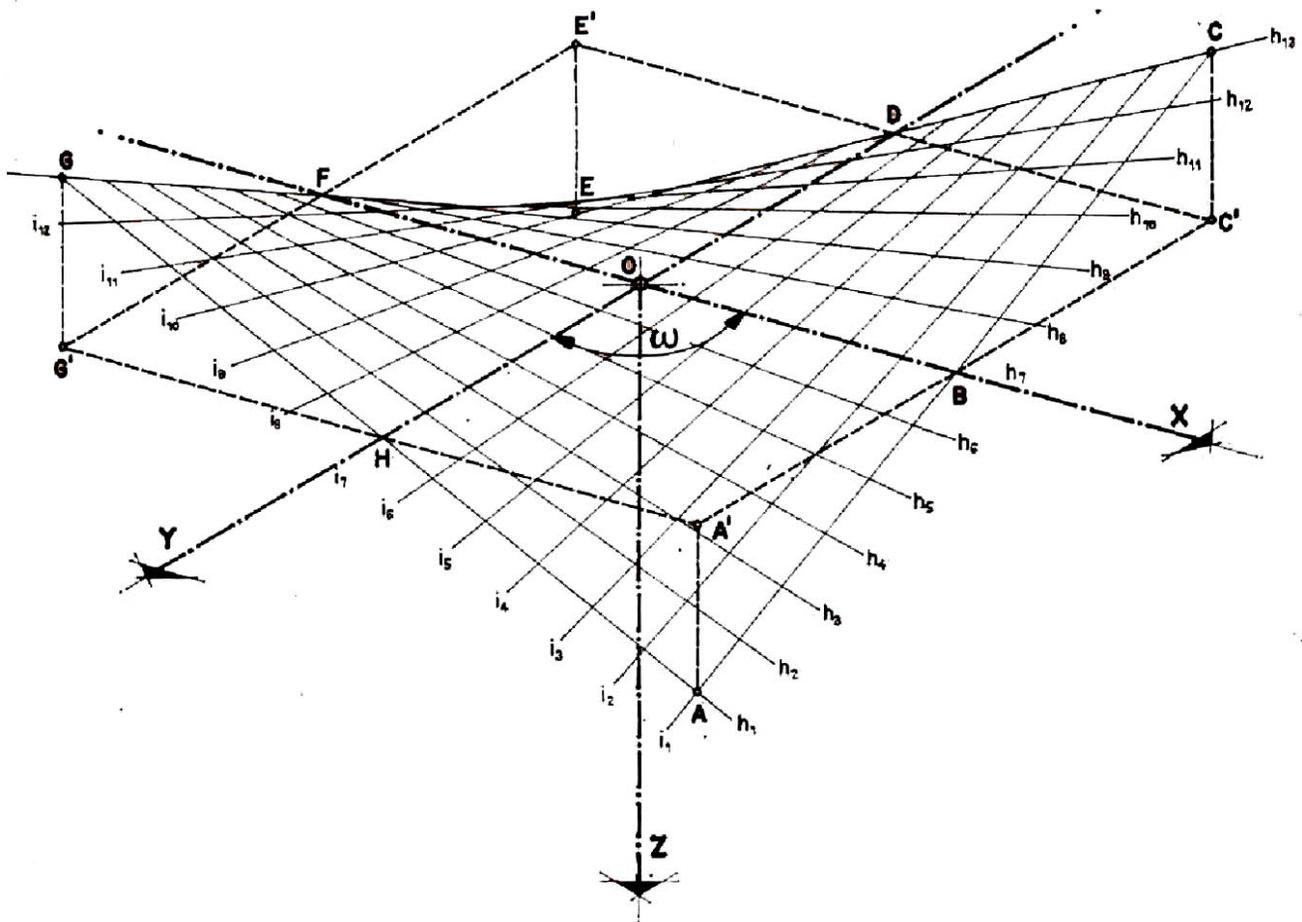


Fig. 97- Sistema generador de la superficie con base a sus rectas conformadoras. **Imagen extraída del libro: “Las estructuras de Candela, rectas sobre una superficie”** *... el hyper contiene dos sistemas de líneas rectas, uno en cada sistema, paralelo a un plano director y ambos planos formando un ángulo arbitrario w . Cada punto de la superficie es la intersección de dos líneas rectas contenidas en la superficie. Es conveniente tomar como ejes coordenados las dos generatrices que pasan por la corona del hyper o la intersección de ambos planos directores, que es siempre normal al plano de los otros dos ejes. En estas coordenadas birrectangulares, la ecuación del hyper es: $z = \kappa xy$, en donde κ es una constante que representa el cambio unitario de pendiente o alabeamiento del hyper...”*²

Los conceptos de generatriz, planos directores y corona, ya los he explicado en el capítulo 4. De aquí lo que nos interesa aclarar es la posición de los ejes que determinan el sistema coordenado de la superficie.

6.2.1 Ecuación del PH, sistema de ejes

Llamaremos **ejes ortogonales**, a los que son determinados por las parábolas principales 1 y 2, recordando que resultan de las tangentes de dichas curvas. En cambio llamaremos **ejes oblicuos** a los que responden al par de generatrices que pasan por el vértice o corona del PH, como se indica en la Fig. 98, estos ejes marcarán el sistema reglado de la superficie, teniendo los ejes oblicuos de la superficie podemos conocer la orientación del par de ortogonales por medio de las siguientes ecuaciones:

$$x = (x + y) \cos \frac{w}{2} \quad y = (y - x) \sin \frac{w}{2}$$

² Faber Colín, “Las Estructuras de Candela”

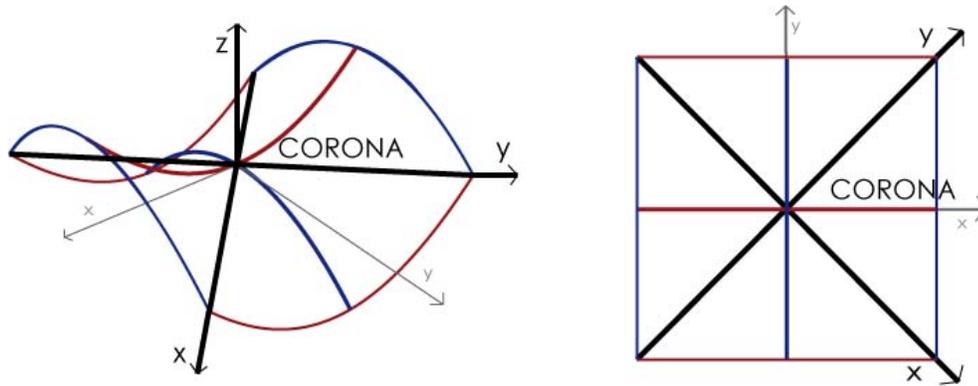


Fig. 98- Relación de los ejes oblicuos con respecto a los ejes ortogonales de la superficie. Cuando el corte corresponde a un borde recto en vez de uno curvo, la relación de los ejes ortogonales y oblicuos será exactamente la misma. Los ejes oblicuos siempre se relacionarán con las asíntotas de la familia de las hipérbolas contenidas en la superficie.

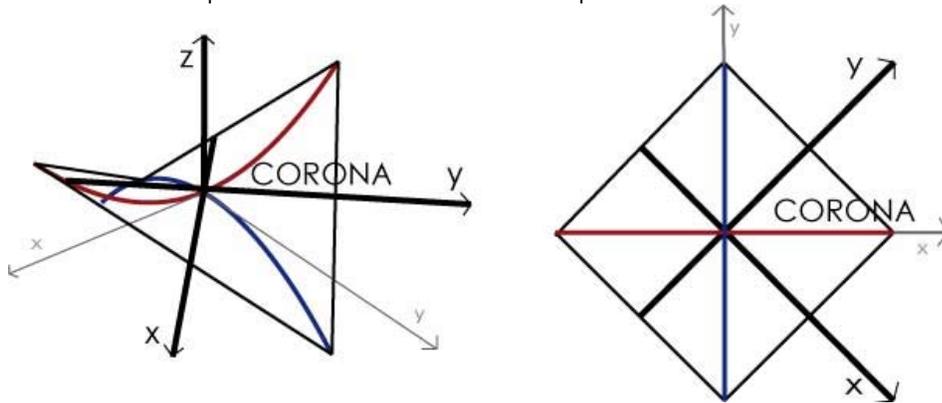


Fig. 99- Relación de los ejes oblicuos y ortogonales con respecto a una superficie de PH de borde recto.

6.2.2 Ubicación de puntos

Una vez ubicados los ejes, y las posiciones, analicemos un caso de borde recto, en el cuál encontraremos la relación y posición de sus puntos. Este ejemplo, está basado en el procedimiento de **Juan Gerardo Oliva**, impartido en las clases de especialidad en cubiertas ligeras y de geometría estructural (mecametria) de licenciatura.

Consideramos un PH de borde recto, cuyas dimensiones y ubicación de ejes son las siguientes:

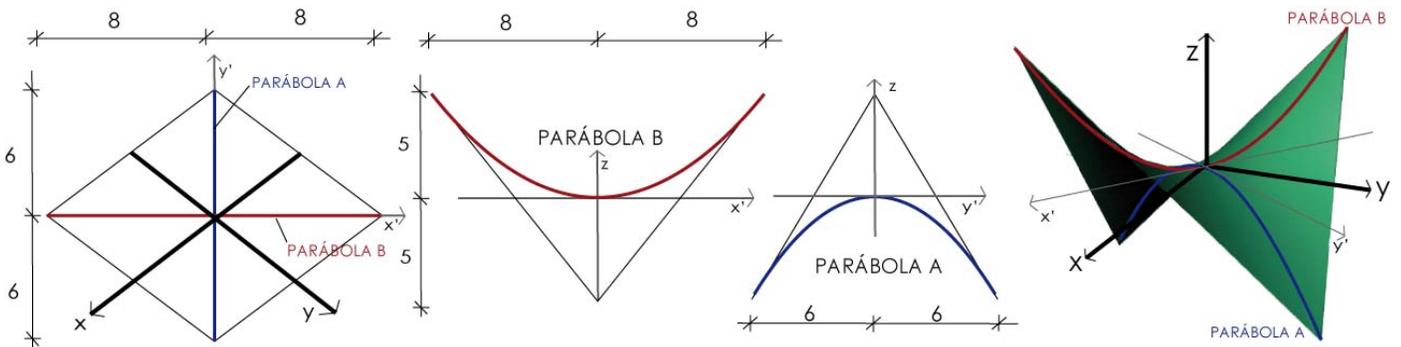


Fig. 100- PH de borde recto

Existen dos sistemas de ejes, el primero $x' y' z'$, que corresponde a la superficie originada por la traslación de las parábolas A y B; y el segundo x, y, z , referido a los ejes propios de las generatrices rectas. Este último sistema, guardará un ángulo determinado entre los ejes $x-y$; y para poder determinarlo, así como deducir la ecuación de la superficie, atenderemos a encontrar un punto de ella que llamaremos "a".

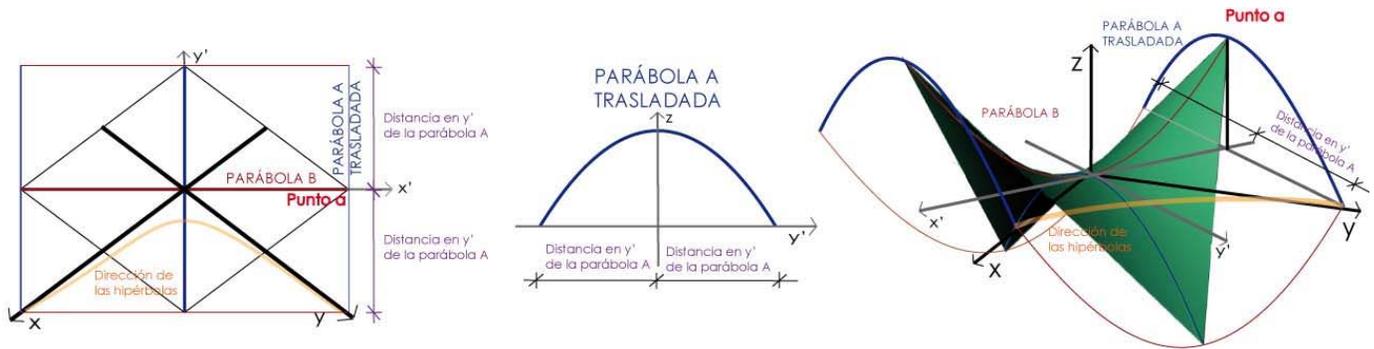
Deducimos que el punto a, tendrá una elevación correspondiente a la altura de la parábola B, en este caso 5 unidades. Considerando esta distancia, trasladaremos la parábola A, al punto a. Desarrollando la parábola trasladada obtenemos su ecuación:

Parábola A, desarrollada en y'-z sus coordenada son $y'=6, z=5$

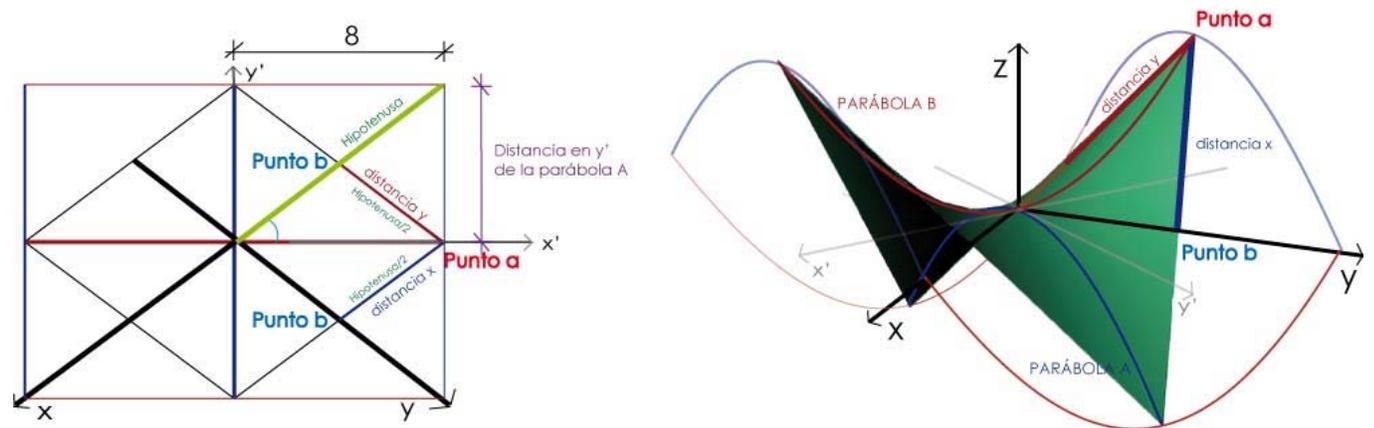
Dada la ecuación de la curva $y'^2 = 2pz$ por lo que $p = \frac{y'^2}{2z}$ sustituyendo $p = \frac{6^2}{2(5)}$ $p = 3.6$

Fijando que la altura del punto a, debe ser la de la parábola trasladada, sustituimos:

Si $y'^2 = 2pz$ con los datos, $p=3.6, z=5$, el valor de y' será $y' = \sqrt{2pz}$ por lo que $y' = \sqrt{2(3.6)5}$ $y' = 6$, este dato es comprobable, como se ve en la Fig. 101, ya que los parámetros de altura de ambas parábolas es igual. Sin embargo, si este no fuera igual cambia la relación de la altura del punto a, generando una distancia en y' distinta.



Una vez obtenida la distancia y' , este nos va a servir para conocer otro punto que llamaremos en caso "b", con que los parámetros de la parábola A. Bajas y divide que estos dos al ser por el mismo, varía su vez por la relación geométrica que guardan entre sí las distancias y' y x' , como se ve en la Fig. 102.



Entonces para obtener el punto b, lo consideramos un triángulo rectángulo, cuyo cateto adyacente vale 8 unidades, mientras que el cateto opuesto vale la distancia $y' = 6$, resolviendo el triángulo rectángulo tendríamos que $hlp = \sqrt{6^2 + 8^2}$ $hlp = 10$, el ángulo que guardan los ejes, lo obtenemos por medio de $\tan = \frac{6}{8}$ resolviendo $\tan = 36.86$, distancia que corresponde solo a la Fig. 102- Ubicación del punto b, que nos permitirá conocer las coordenadas de la superficie en x y y. En la perspectiva el concepto de mitad del ángulo, multiplicada por 2, nos dará el ángulo total que resulta: 73.73 .

Una vez obtenida la hipotenusa al dividirla entre dos, tendremos la ubicación del punto b, $\frac{hlp}{2} = 5$, esta corresponde a las coordenadas x-y del sistema de ejes con relación a las generatrices, la superficie tendrá las coordenadas $x=5, y=5$.

Sustituyendo en la ecuación $z = kxy$ considerando que la altura de $z=5$ despejando k tendremos:
 $k = \frac{z}{xy}$ $k = \frac{5}{(5)(5)}$ $k = .2$ comprobando $z = .2(5)(5)$ $z = 5$. Por medio de este procedimiento, y conociendo la ecuación $z = .2xy$ podremos calcular otros puntos de la superficie.

6.3 Ubicación de ejes y puntos en un Paraguas

En el capítulo pasado, vimos que una de las condiciones esenciales de los paraguas, es que sean PH equiláteros, esto significa, que sus ejes de sistema reglado o también llamados oblicuos, tengan una relación de 90° entre ellos. Para generar el sistema coordenado de un paraguas, habrá que tener la premisa de la dirección de la carga. Si contempláramos ésta con respecto a un eje z , cuya dirección a bajo resulta negativa, entonces toda la carga gravitacional del paraguas sería negativa y por lo tanto difícil de manejar. Por esta razón se rotan los ejes, de tal manera que z , se dirija hacia abajo y solamente tenga representaciones positivas. Por la ley de la mano derecha, los ejes x y y , también cambiarán de posición como se nota en la Fig. 103.

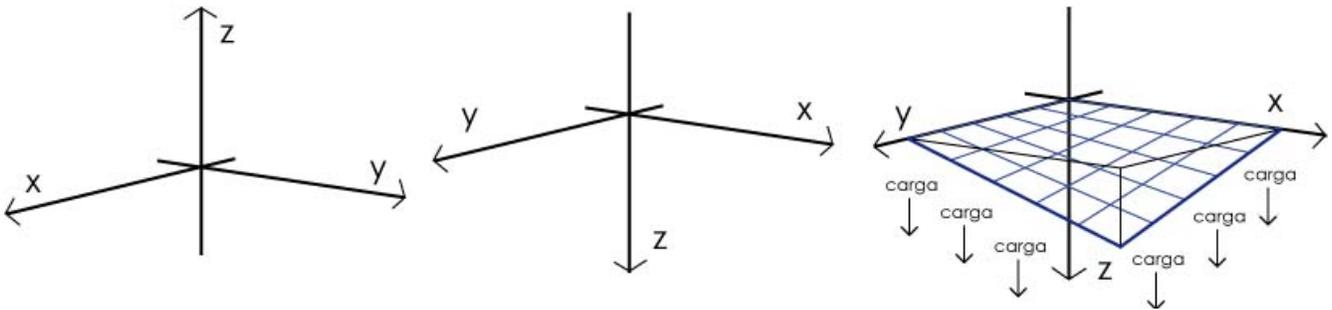
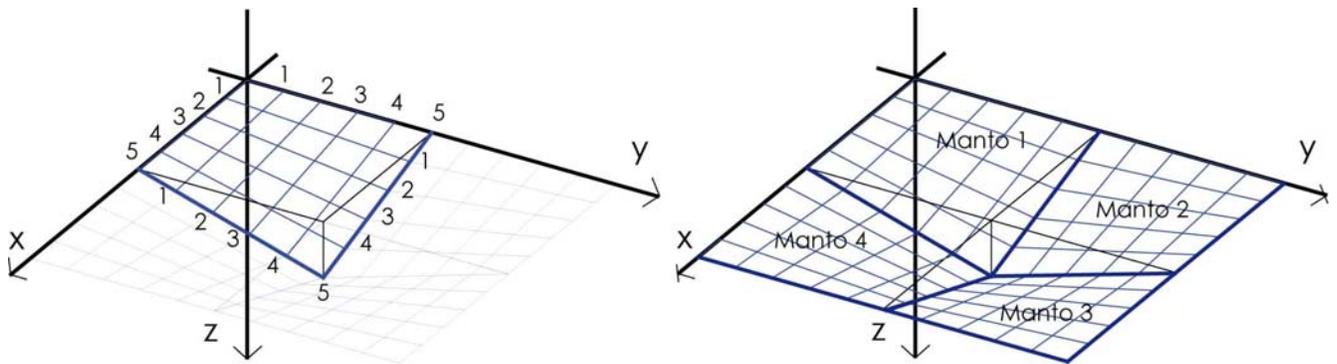


Fig. 103- Cambio en los ejes del paraguas, según la dirección de las cargas

Una vez modificados los ejes coordenados, comenzaremos el orden de los mantos, desde el vértice, mientras más alejados estén, mayor valor numérico tendrán. Como se ve en la Fig. 104 el sistema de numeración nos permitirá identificar cada punto del paraguas.



En especial, e importante, ubicar los bordes, tal como se indica en la fig. 105. He escogido este sistema de paraguas, porque en él, el diseñador tiene la opción de decidir su propio sistema de coordenadas, sin tener problemas con la ubicación de ejes ortogonales u oblicuos. Queda claro, que por ser sistema reglado, los ejes que planteamos en el paraguas son oblicuos, aunque resultan bastante ordenados por ser equiláteros.

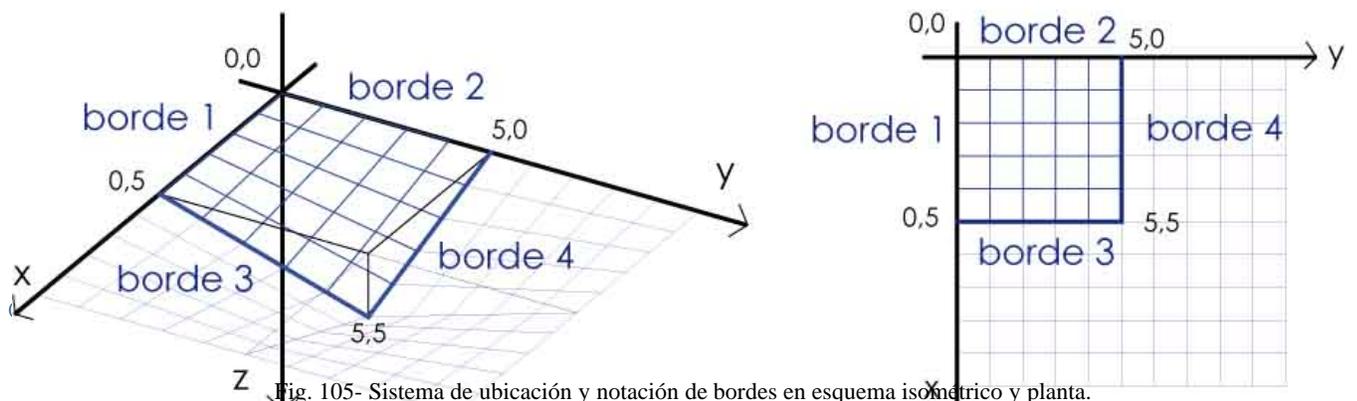


Fig. 105- Sistema de ubicación y notación de bordes en esquema isométrico y planta.

CAPÍTULO 7

El paraboloides hiperbólico. Funcionamiento Estructural

Es de interés de lector saber, que no es mi intención describir paso a paso los procedimientos matemáticos que originan el cálculo del PH. Toda esta serie de formulaciones, se encuentran en tratados específicos, como los de Candela, Tonda, Canals, Quintas, por mencionar los principales. La real intención es dar una idea del procedimiento de cálculo y sobre todo las nociones de cómo se comporta estructuralmente un PH. También explicaré una documentación del cálculo a partir de una hoja de Excel, esto en el caso de estudio: el paraguas.

7.1 Funcionamiento de las estructuras según su geometría

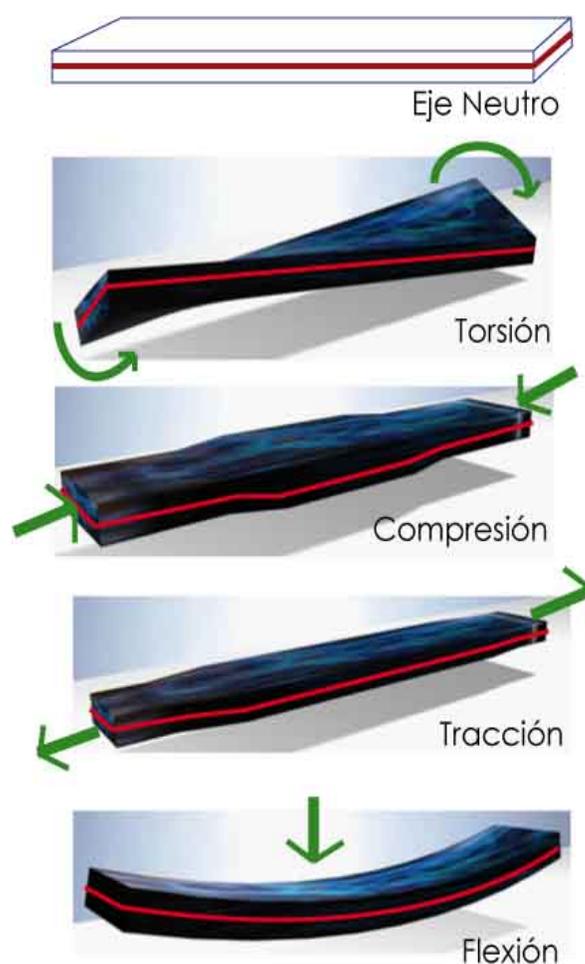
A lo largo de esta investigación he tratado los factores para que una estructura sea eficiente, pero para complementar y entender los conceptos básicos de las acciones que la estática ejerce sobre los cuerpos, hablaré acerca de las principales fuerzas que a las cuáles se somete un elemento sólido.

Reconocemos 4 principales tipos de esfuerzo: **torsión, compresión, tracción y flexión** (Fig. 106). Considerando un eje neutro que pase por el centro de gravedad de la viga, decimos que un cuerpo está sometido a **torsión** cuando gira sobre su eje. Decimos que tiene **compresión** cuando se ve presionado en sus extremos de tal manera que se acumula la tensión en el centro. Tiene **tracción** cuando el cuerpo es estirado en sus extremos y su sección central adelgaza. Y finalmente decimos que tiene **flexión** cuando se genera un pandeamiento sobre su eje neutro.

Todos los cuerpos se ven sometidos a estos esfuerzos, y de aquí que adopten diferentes formas para soportarlos. Acerca de la forma y la estructura Tonda nos dice:

“Si bajo ciertas condiciones de carga usamos formas no relativas a ella y pretendemos solucionar un claro determinado, la estructura trabajará en condiciones difíciles; en cambio si permitimos que el material adopte la forma que piden las cargas, necesariamente la estructura descansará y las secciones serán menores”¹

En este concepto, primero habría que analizar la condición de carga del cuerpo. Si la fuerza es horizontal, vertical o tangencial, afectará de una manera diferente a cada miembro de la estructura. Por lo regular **cuando se trata de salvar un claro, la condición de carga será vertical y aplicada directamente en una cierta área, que corresponde a**



la cubierta.
Fig. 106- Esquema de principales esfuerzos

Esta carga afectará a la superficie, provocándole los esfuerzos de torsión, compresión, tracción y flexión. Resulta esencial, determinar cuáles serían las geometrías en las que un cuerpo que se adapta de manera más eficiente a estos esfuerzos.

¹ Tonda Juan Antonio, “Paraboloides hiperbólicos, nomogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana”

Hay geometrías que encorvan su sección para trabajar bajo un régimen de esfuerzos únicamente de compresión o tracción, evitando la flexión. Estas formas están más adaptadas con el régimen de carga del que habla Tonda y por lo tanto tendrán secciones menores y un mayor “descanso” en su estructura.

En cambio hay otras que para mantener su sección recta, se engrosan para soportar la flexión por medio de su espesor. Al respecto Tonda nos dice:

*“La teoría de la flexión obliga al material a que sufra pequeñas alteraciones para impedir que cambie su forma, siendo que en este cambio, estría la adecuación de la estructura a su modo natural de trabajo. Por lo tanto, todo análisis estructural de cualquier tipo de carga y de formas ya determinadas, como son las piezas rectas producirá **aberraciones estructurales**”²*

Rectificamos que **una geometría flexionada por naturaleza, resulta más eficiente que una que soporta la flexión por medio de su grosor**. Un ejemplo de ésta última es la losa plana de concreto armado, que soporta las compresiones por medio de la resistencia del concreto y las tracciones por medio del acero. Las flexiones serán resistidas por el espesor del material, razón por la cual, mientras más grande sea el claro sin apoyos, mayor será el espesor que adquirirá la losa.

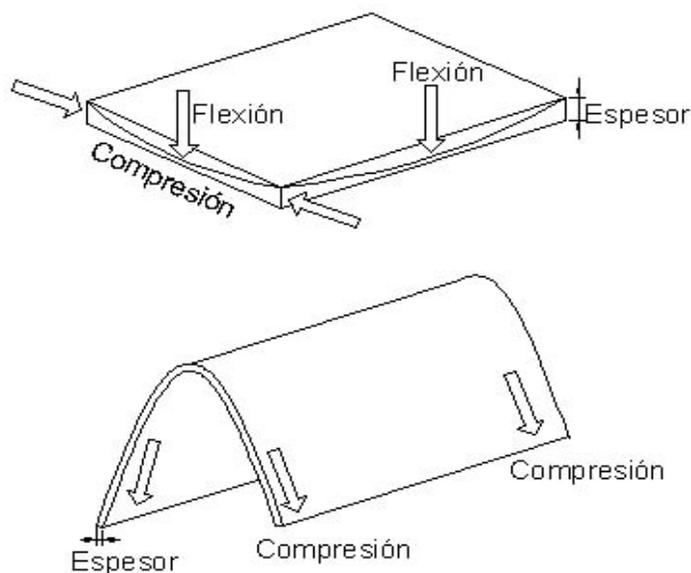


Fig. 107- Geometría según el trabajo

Mientras más inadecuado sea el trabajo estructural en correspondencia con la forma será más difícil su análisis, ya que se atenderá a diferentes regímenes de comportamiento estático. El razonamiento lógico, es proponer estructuras que trabajen con el menor tipo de esfuerzos posibles.

Formas como el PH, permiten este tipo de trabajo, sin embargo, las ventajas de esta geometría no fueron utilizadas hasta el siglo pasado. Las primeras construcciones que usaban al PH, son las de Gaudí, aunque el sentido estructural fue tratado y documentado hasta años después, con las investigaciones de cubiertas de concreto armado de amplios claros, como las de Torroja y Aímond.

Después de ellos, el principal estudioso del PH, es Candela, quien gracias a las simplificaciones de la ecuación de la superficie, logra desarrollar el cálculo por medio de la teoría de la membrana, método que actualmente representa una de las alternativas para el análisis estructural y cálculo de la superficie. Otras alternativas, recaen en métodos como el del elemento finito, que es un procedimiento numérico variacional que analiza desplazamientos, rigideces y esfuerzos en un medio continuo. Programas como el ANSYS, se basan en este método para el cálculo de superficies de PH.

Aunque el elemento finito es una buena opción de análisis, resulta en una complejidad matemática enorme, por lo que en este trabajo, me enfocaré a la descripción del cálculo por medio de la teoría de la membrana, ya que considero que puede resultar más sencilla su explicación, y sobre todo tiene variados antecedentes constructivos: los cascarones. Esta técnica, usada masivamente en los años sesenta y setenta en nuestro país, actualmente se encuentra desplazada por el uso de prefabricados y estructuras metálicas de bajo costo, por lo que habría que analizar nuevos materiales que economizaran los costos y hagan que estructuras eficientes como el PH, tengan competitividad en el mercado.

² Tonda Juan Antonio, “Paraboloides hiperbólicos, nomogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana”

Actualmente, con el desarrollo de polímeros, y plásticos de alta resistencia, el marco de los materiales para desarrollar geometrías como el PH, se ve abierto a una nueva época. Sin embargo, es esencial comprender cómo se genera su **trabajo estructural**, para de esta manera saber qué esfuerzos deberá soportar el material. **Al saber los esfuerzos que la geometría desarrolle, es posible proponer materiales que los soporten. La cuestión básica es comprender como funciona.**

7.2 La teoría de la membrana

Para explicar esta teoría, aclararé los siguientes términos:

Superficie laminar: es aquella cuyo espesor representa una pequeña parte con respecto a sus otras dos dimensiones, aunque técnicamente una losa plana es también una estructura laminar, para nosotros ellas se referirán a las que pueden trabajar bajo esfuerzos de membrana.

Esfuerzos y tensiones: aquí el término a especificar es tensión que resulta diferente de tracción. Las tensiones serán el resultado de los esfuerzos. Es decir, esfuerzo sólo es la fuerza, mientras la tensión representa al material oponiendo resistencia a la transformación. En el área de la ingeniería muchas veces se entiende que las tensiones son similares a las tracciones. Para motivos de este análisis, la tracción resulta de jalar a un cuerpo por sus extremos como vimos en el concepto pasado.

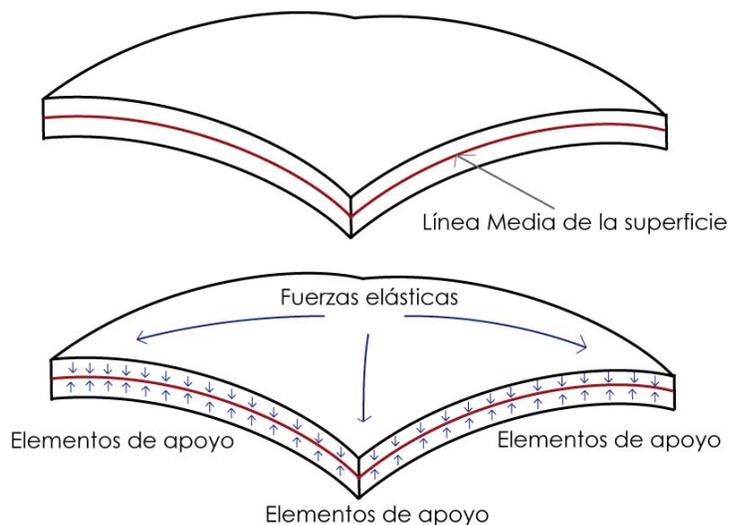


Fig. 108- Modelo conceptual de distribución de fuerzas

Una vez aclarados estos términos, quiero dar un concepto preliminar de la teoría de la membrana, aplicable a las superficies laminares:

“Esta teoría, supone en una superficie laminar, de espesor mínimo, una nulidad en los momentos de flexión y torsión. Las fuerzas elásticas son transmitidas hacia los apoyos o miembros de borde... Los esfuerzos internos se integran al espesor de la lámina y a la línea media de la sección, de tal manera que todos los esfuerzos se pueden estudiar en la superficie media.”³

El estudio de la superficie nos remite a la línea media, donde veremos reflejado todo el comportamiento de la estructura. Además despreciamos la flexión y la torsión, de tal manera que solo encontraremos los esfuerzos de compresión y tracción.

El mayor interés de la aplicación de la teoría de la membrana, es en estructuras cuyo análisis de flexión es complejo, y en las que su funcionamiento está definido por su geometría. Tal es el caso de las superficies de doble curvatura las cuales se adaptan a los esfuerzos por su forma, reduciendo los espesores por el tipo de trabajo estructural. La mayor limitación de estas superficies es la dificultad constructiva, ya que para cálculo existen herramientas como lo son las hojas de cálculo que facilitan el proceso matemático, además de dar claridad y reducir el tiempo que se invierte.

Una vez dada la condición de la forma y considerando la nulidad de la flexión, la esencia de la teoría de la membrana, radica en la proyección de las tensiones a un plano, y en este, previo el desprecio del espesor hacia la línea media de la superficie, se encuentra el equilibrio a partir de la compensación de los esfuerzos.

³ Canals-Guerín, “Cascares Parabólicos Hiperbólicos”

A los esfuerzos analizados por la teoría de la membrana, les llamaremos **esfuerzos de membrana**:

“Los esfuerzos de membrana o esfuerzos directos son aquellos que se encuentran contenidos en el plano tangente a la superficie, por medio de los cuáles se logra equilibrar el efecto de las cargas externas. Estos esfuerzos pueden ser de tracción, comprensión o tangenciales”⁴

En el espesor y bordes se hallarán esfuerzos **tangenciales**, que se reflejan en momentos tensionantes y flexionantes. Sin embargo, estos momentos pueden ser transmitidos hacia los apoyos y de esta manera soportados y equilibrados. Por otra parte los esfuerzos **normales**, perpendiculares a los tangenciales, y que se reflejan a lo largo de la línea media de la superficie, los cuales también veremos la manera de que sean equilibrados.

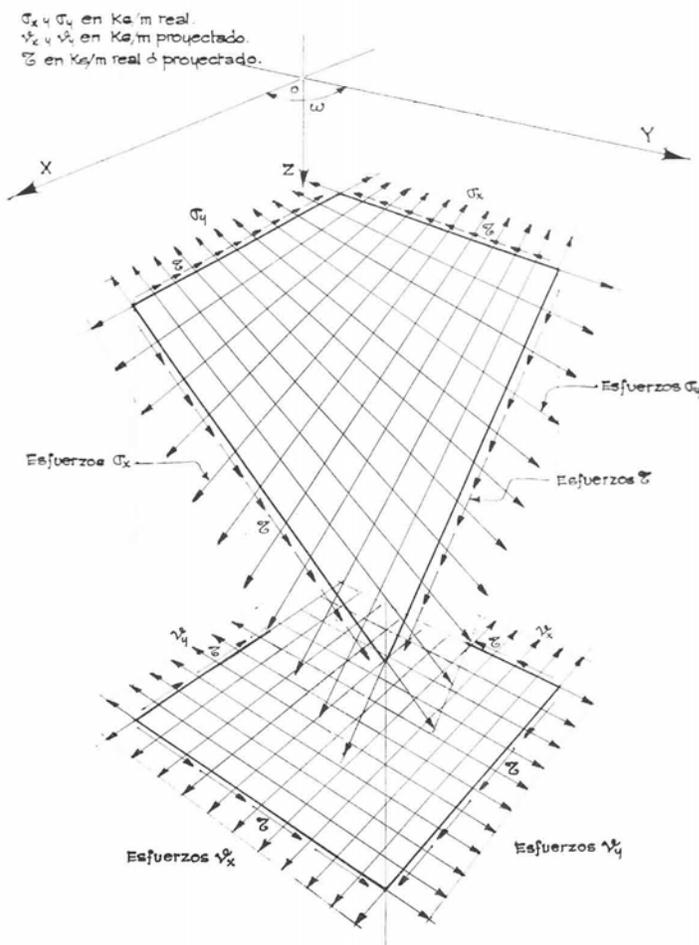


Fig. 109- Proyección del segmento de PH, al plano para el análisis de esfuerzos, **imagen extraída de Extraído del libro “Paraboloides hiperbólicos, nomogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana”.** Reproducción con fines didácticos.

7.3 Régimen de esfuerzos en el PH

Para obtener los esfuerzos, consideramos una membrana cualquiera y un plano paralelo en el que proyectaremos los esfuerzos, tomando en cuenta que estamos despreciando el espesor. En la Fig. 109, se muestra la situación de los ejes en el caso de una superficie de PH cuyos ejes x,y coinciden con la direcciones de los esfuerzos τ (tao) por lo que toman el nombre de τ_x y τ_y ; estos esfuerzos son proyectados hacia un plano en el cual tomarán la nomenclatura de ν (ni) en cada eje serán ν_x y ν_y , según sea el caso. También encontraremos esfuerzos tangenciales a lo largo de todo el borde, a ellos los llamaremos δ (delta). Tiene que ver en gran manera el ángulo que guarde la relación de los ejes del PH, como vimos en el capítulo de diseño, si es diferente de 90° lo llamaremos oblicuo, y si es igual a 90° será equilátero, dicho ángulo será ω .

Todos los elementos anteriores se ven reflejados en el plano, con sus respectivas direcciones, esto es gracias a la relación de esfuerzos reales y proyectados, dada las ecuaciones de transformación que podemos revisar en la bibliografía de Candela y de Tonda. Cabe mencionar que la notación del eje z, es hacia abajo por la dirección de la carga, la cual se contemplará en su sentido real, o sea hacia abajo.

Es necesario entender que el régimen de esfuerzos de membrana, no es otra cosa sino el trabajo ideal de la estructura. Pensemos en un cuerpo recto, esta engrosará su sección para soportar la flexión y mantener su forma intacta.

⁴ Rincón José Luis, “Programa para el cálculo de esfuerzos básicos en los paraboloides hiperbólicos”

Sin embargo, un cuerpo cuya forma sigue su flexión natural, disminuirá su sección. A esto, Tonda resume: *“el trabajo de membrana es aquel en que la estructura realiza el menor esfuerzo”*⁵.

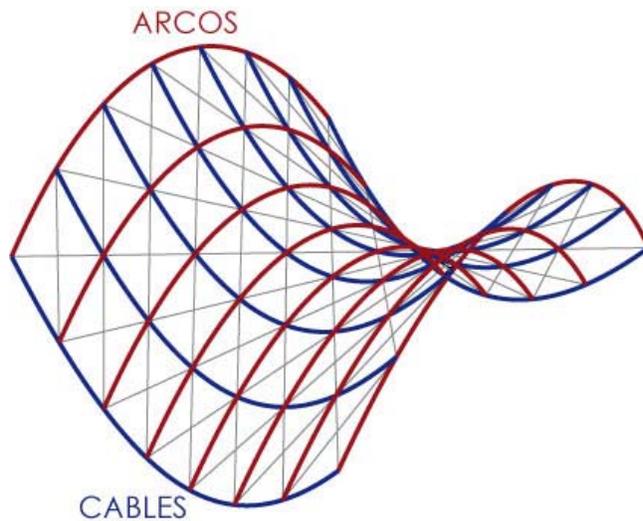


Fig. 110- Direcciones del PH, arcos y cables.

Analizando el trabajo que tiene la parábola como elemento individual, vemos que demuestra regímenes de tracción o compresión pura según sea su condición de apoyo. Candela explica esto:

*“Dicha geometría, ha demostrado que goza de recursos mecánicos para trabajar eficientemente como estructura. Su trabajo en unas direcciones como arcos y en otras como cables, garantiza una transferencia óptima de la carga hacia los apoyos, al tiempo que permite reducir los espesores”*⁶

Así al combinar las dos parábolas en la superficie del PH se obtiene un elemento bastante rígido, los esfuerzos se van transmitiendo hacia el borde donde llega directamente al apoyo, y en consecuencia a los apoyos. Rincón nos habla acerca de las características estructurales con base a la forma geométrica:

*“El comportamiento estructural de los paraboloides hiperbólicos está íntimamente ligado a sus características geométricas, así pues, los esfuerzos internos que se presentan en el PH dependerán de diversas condiciones a saber: el alabeamiento de la superficie, la porción del manto considerado en función de su cercanía a la corona del PH y su posición en el espacio.”*⁷

La razón de comportamiento estructural eficiente, se basa en un análisis originado de su geometría, en general, mientras más flecha exista en un elemento, menor esfuerzo, ya que dicha curvatura, ofrece una forma más acercada a la generada por el modelo funicular de las fuerzas, de tal manera que en la curvatura se genera una fuerza tangencial que se manda a los bordes. Este es el funcionamiento básico de estructuras como los arcos.

Sin embargo para reducir esas tangenciales y que incluso se eliminen las resultantes, lo ideal es un área que conduzca las tensiones de borde al interior de la superficie. Esta idealidad en términos geométricos del PH se traduce en una transferencia de los esfuerzos cortantes a lo largo de las generatrices sumándolos a lo largo del borde, en el cual se absorbe el esfuerzo en una costilla que resista el empuje. De aquí que Candela pudiera dejar los bordes libres en sus más representativas obras.

Cada caso de PH, tendrá una aplicación diferente del régimen de esfuerzos de membrana, siendo las mismas ecuaciones la base para el cálculo. En este trabajo especificaré el caso aplicado del paraguas.

⁵ Tonda Juan Antonio, *“Paraboloides hiperbólicos, nomogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana”*

⁶ Faber Colín, *“Las Estructuras de Candela”*

⁷ Rincón José Luis, *“Programa para el cálculo de esfuerzos básicos en los paraboloides hiperbólicos”*

7.3.1 Cálculo de esfuerzos

Habrá que ver primero, las condiciones de borde del PH, ya que el procedimiento difiere en cada caso de **borde curvo** y recto. En el primero, los esfuerzos se tienen que descomponer en el borde, para que estos se puedan dirigir en cada punto en la dirección de las generatrices. Por otra parte, se tienen que proponer valores arbitrarios, para descubrir la compensación que al final mantenga en equilibrio al sistema.

En cambio en el **borde recto**, las condiciones resultan más definidas, ya que en este caso, cada borde deberá compensar los esfuerzos para generar el equilibrio del sistema final. Si el manto de borde recto, se encuentra asilado, o bien los bordes son libres, se compensan las fuerzas con costillas y elementos estructurales que den como resultado final el equilibrio. Si, en cambio, los bordes resultan continuos como en el caso del paraguas, los esfuerzos se anulan, quedando solo los tangenciales que absorberá finalmente la componente vertical, en este caso la columna.

En el caso de las fuerzas extra a las gravitacionales como **el sismo y el viento**, en el primer tipo, la dirección de la carga se puede incrementar a los elementos verticales, diseñando estos (ya sean muros o columnas) con los parámetros que el reglamento pide. El margen de seguridad del cascarón en caso de ser material rígido, se adquiere con el espesor y resistencia del material. En el caso de elementos ligeros como pueden ser las redes de cables y las velarias, este margen no es del todo esencial por el bajo peso de la estructura; sin embargo a estos últimos se les refuerza por la previsión del viento, que si llega impactar en gran medida a la estructura. Las previsiones de viento en los cascarones, no representan un análisis fuerte dentro del cálculo, y esto se debe a la doble curvatura.

7.4 Documentación del cálculo en un Paraguas

Antes de comenzar el cálculo hare un breve preámbulo de las capacidades estructurales, propias de esta combinación de PH. Al entrar en la clasificación de borde recto, para encontrar el equilibrio en la estructura, tenemos que generar la compensación, donde los principales esfuerzos se encuentran de tracción o compresión según su signo, Candela describe dicho comportamiento:

*"...no hay esfuerzos normales a las generatrices de borde, que son direcciones de corte puro. Los esfuerzos cortantes no equilibrados se acumulan a lo largo de los cuatro lados el cuadrilátero alabeado, dando como resultado fuerzas tangenciales de tensión o de compresión...Estas son las únicas reacciones del cascarón, puesto que éste transforma las cargas verticales en fuerzas tangenciales dirigidas a lo largo de sus cuatro bordes rectos."*⁸

Queda por entendido que todos nuestros valores de esfuerzos resultantes, serán solo con un signo negativo o positivo, para describir la tracción y la compresión correspondientemente. Uno de los puntos esenciales del paraguas es la definición de las condiciones de borde, que son las que garantizan la estabilidad total del sistema.

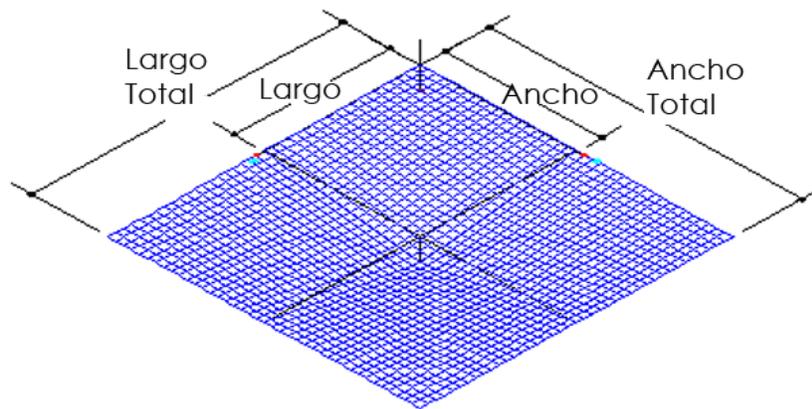
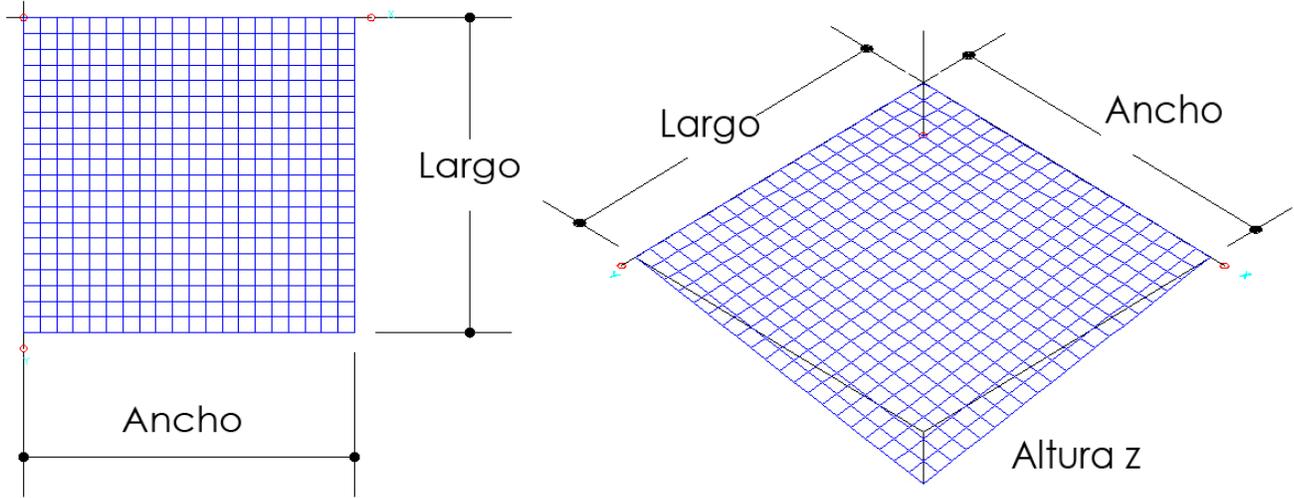
Por otra parte, esta combinación puede funcionar con el eje z rotado, sin embargo, al ya no ser coincidente con la carga, se tendrá que buscar la repartición de esta en los 3 ejes, por esta razón ilustro un caso sencillo con eje z sin rotación, para que no se complique la explicación.

A continuación anexo, una hoja de Excel, que representa el cálculo de esfuerzos en un PH de borde recto, cada fórmula se encuentra desarrollada, si el lector desea una copia del archivo electrónico, remítase a mi correo electrónico: caro98carmona@hotmail.com o kararq@gmail.com

⁸ Faber Colín, "Las Estructuras de Candela"

PARAGUAS

Planteamiento de la geometría



Fórmulas

Esfuerzos Tangenciales τ

FÓRMULA GENERAL

$$\tau = \left(\frac{Y}{2} X + \frac{X}{2} Y - \frac{Z}{2k} \right) \sqrt{\phi}$$

Considerando un manto con eje z vertical y carga solo en sentido z

La fórmula se reduce a:

$$\tau = -\frac{Z}{2k} \sqrt{\phi}$$

Esfuerzos en el sentido de las generatrices ν_x

FÓRMULA GENERAL

$$\nu_x = Z \left[\frac{-\cos \omega}{2k} \sqrt{\phi} + \frac{\sin^2 \omega}{2} \right] y \ln \left(\frac{kx - ky \cos \omega + \sqrt{\phi}}{\sin \omega + \sqrt{1 + k^2 y^2}} \right) + f_1(y)$$

Considerando un manto cuya ω es de 90°

$$kx = q \quad \cos \omega = 0$$

$$ky = p \quad \sin \omega = 1$$

La fórmula se reduce a:

$$\nu_x = \frac{Z}{2} y \ln \frac{q + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + p^2}} + f_1(y)$$

Grado de abeamiento $\sqrt{\phi}$

FÓRMULA GENERAL

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{\sin^2 \omega + ky + kx - 2kykx \cos \omega}$$

Considerando un manto cuya ω es de 90°

$$kx = q \quad \cos \omega = 0$$

$$ky = p \quad \sin \omega = 1$$

La fórmula se reduce a:

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Esfuerzos en el sentido de las generatrices v_y

FÓRMULA GENERAL

$$v_y = Z \left[\frac{-\cos \omega}{2k} \sqrt{\phi} + \frac{\sin^2 \omega}{2} \right] x \ln \left(\frac{ky - kx \cos \omega + \sqrt{\phi}}{\sin \omega + \sqrt{1 + k^2 x^2}} \right) + f_1(x)$$

La fórmula se reduce a:

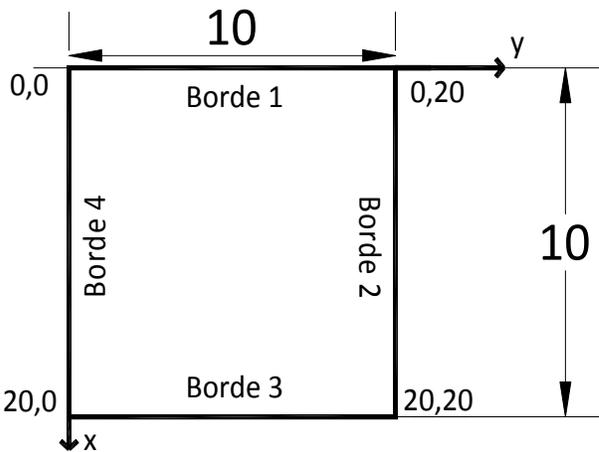
$$v_y = \frac{Z}{2} x \ln \frac{p + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + q^2}} + f_1(x)$$

Considerando un manto cuya ω es de 90°

$$kx = q \quad \cos \omega = 0$$

$$ky = p \quad \sin \omega = 1$$

Datos del Manto



DIMENSIONES (m)

Largo: 10

Ancho: 10

Distancia entre division 0.5

ÁREA DEL MANTO (m2)

100

ALABEAMIENTO:

0.06

PARTIENDO DE LA FÓRMULA $z = kxy$

$z = 6$

Esfuerzos en el sentido de las generatrices

BORDE 1							
PUNTO	x	y	p	q	ϕ	ln (para x)	v_x
1	0	0	0.000	0	1.00000	0.0000	0.0000
2	0	0.5	0.030	0	1.00045	0.0000	0.0000
3	0	1	0.060	0	1.00180	0.0000	0.0000
4	0	1.5	0.090	0	1.00404	0.0000	0.0000
5	0	2	0.120	0	1.00717	0.0000	0.0000
6	0	2.5	0.150	0	1.01119	0.0000	0.0000
7	0	3	0.180	0	1.01607	0.0000	0.0000
8	0	3.5	0.210	0	1.02181	0.0000	0.0000
9	0	4	0.240	0	1.02840	0.0000	0.0000
10	0	4.5	0.270	0	1.03581	0.0000	0.0000
11	0	5	0.300	0	1.04403	0.0000	0.0000
12	0	5.5	0.330	0	1.05304	0.0000	0.0000
13	0	6	0.360	0	1.06283	0.0000	0.0000
14	0	7	0.420	0	1.08462	0.0000	0.0000
15	0	7.5	0.450	0	1.09659	0.0000	0.0000
16	0	8	0.480	0	1.10923	0.0000	0.0000
17	0	8.5	0.510	0	1.12254	0.0000	0.0000
18	0	9	0.540	0	1.13649	0.0000	0.0000
19	0	9.5	0.570	0	1.15104	0.0000	0.0000
20	0	10	0.600	0	1.16619	0.0000	0.0000

DATOS GENERALES:

CARGA (kg) 200

$k = 0.06$

$\frac{Z}{2} = 100$

$kx = q$

$ky = p$

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$v_x = \frac{Z}{2} y \ln \frac{q + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + p^2}} + f_1(y)$$

BORDE 2							
PUNTO	x	y	p	q	φ	ln	vy
1	0	10	0.60	0	1.166190	0.56882	0.00000
2	0.5	10	0.60	0.03	1.166576	0.56859	28.42968
3	1	10	0.60	0.06	1.167733	0.56790	56.79011
4	1.5	10	0.60	0.09	1.169658	0.56675	85.01290
5	2	10	0.60	0.12	1.172348	0.56516	113.03132
6	2.5	10	0.60	0.15	1.175798	0.56312	140.78109
7	3	10	0.60	0.18	1.180000	0.56067	168.20108
8	3.5	10	0.60	0.21	1.184947	0.55781	195.23393
9	4	10	0.60	0.24	1.190630	0.55457	221.82659
10	4.5	10	0.60	0.27	1.197038	0.55096	247.93071
11	5	10	0.60	0.3	1.204159	0.54701	273.50298
12	5.5	10	0.60	0.33	1.211982	0.54274	298.50531
13	6	10	0.60	0.36	1.220492	0.53817	322.90490
14	7	10	0.60	0.42	1.239516	0.52827	369.79113
15	7.5	10	0.60	0.45	1.250000	0.52298	392.23821
16	8	10	0.60	0.48	1.261111	0.51750	414.00301
17	8.5	10	0.60	0.51	1.272831	0.51186	435.07752
18	9	10	0.60	0.54	1.285146	0.50606	455.45791
19	9.5	10	0.60	0.57	1.298037	0.50015	475.14411
20	10	10	0.60	0.6	1.311488	0.49414	494.13949

DATOS GENERALES:

CARGA (kg) = 200

k = 0.06

$\frac{Z}{2} = 100$

kx=q

ky=p

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$v_y = \frac{Z}{2} x \ln \frac{p + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + q^2}} + f_1(x)$$

$$A = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{1 + q^2}}$$

$\Sigma y = A * v_y * \text{Intervalo real de borde}$
Intervalo Real de Borde = 0.58309519

$$\text{sen } \phi = \tan^{-1} q$$

$$\sigma Y = \Sigma y * \text{sen } \phi$$

BORDE 2										
PUNTO	x	y	vy	$\sqrt{1+p^2}$	$\sqrt{1+q^2}$	A	SEN φ	A*vy	Σy	σ y
1	0	10	0.00000	1.16619	1.00000	1.16619	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.5	10	28.42968	1.16619	1.00045	1.16567	0.02999	33.139505	19.323486	0.5794
3	1	10	56.79011	1.16619	1.00180	1.16410	0.05989	66.109188	38.547949	2.3087
4	1.5	10	85.01290	1.16619	1.00404	1.16150	0.08964	98.742126	57.576059	5.1610
5	2	10	113.03132	1.16619	1.00717	1.15788	0.11915	130.87709	76.313803	9.0924
6	2.5	10	140.78109	1.16619	1.01119	1.15329	0.14834	162.36115	94.672007	14.0437
7	3	10	168.20108	1.16619	1.01607	1.14775	0.17715	193.05197	112.56768	19.9417
8	3.5	10	195.23393	1.16619	1.02181	1.14130	0.20552	222.81976	129.92513	26.7019
9	4	10	221.82659	1.16619	1.02840	1.13399	0.23227	251.54885	146.67692	34.0691
10	4.5	10	247.93071	1.16619	1.03581	1.12587	0.26067	279.13876	162.76447	42.4271
11	5	10	273.50298	1.16619	1.04403	1.11701	0.28735	305.50496	178.13847	51.1877
12	5.5	10	298.50531	1.16619	1.05304	1.10745	0.31338	330.57904	192.75905	60.4063
13	6	10	322.90490	1.16619	1.06283	1.09725	0.33872	354.30865	206.59567	69.9780
14	7	10	369.79113	1.16619	1.08462	1.07521	0.38723	397.60189	231.83975	89.7759
15	7.5	10	392.23821	1.16619	1.09659	1.06347	0.41036	417.13517	243.22951	99.8128
16	8	10	414.00301	1.16619	1.10923	1.05135	0.43273	435.26103	253.79861	109.8265
17	8.5	10	435.07752	1.16619	1.12254	1.03888	0.45436	451.99496	263.55609	119.7496
18	9	10	455.45791	1.16619	1.13649	1.02614	0.47515	467.36231	272.51671	129.4860
19	9.5	10	475.14411	1.16619	1.15104	1.01316	0.49520	481.39686	280.70019	139.0036
20	10	10	494.13949	1.16619	1.16619	1.00000	0.51450	494.13949	288.13036	148.2418
									Σvx	1097.7

BORDE 3							
PUNTO	x	y	p	q	ϕ	ln	v_x
1	10	0	0.00	0.60	1.166190	0.5688	0.0000
2	10	0.5	0.03	0.60	1.16658	0.56859	28.42968
3	10	1	0.06	0.60	1.167733	0.5679	56.7901
4	10	1.5	0.09	0.60	1.169658	0.5668	85.0129
5	10	2	0.12	0.60	1.172348	0.5652	113.0313
6	10	2.5	0.15	0.60	1.175798	0.5631	140.7811
7	10	3	0.18	0.60	1.180000	0.5607	168.2011
8	10	3.5	0.21	0.60	1.184947	0.5578	195.2339
9	10	4	0.24	0.60	1.190630	0.5546	221.8266
10	10	4.5	0.27	0.60	1.197038	0.5510	247.9307
11	10	5	0.30	0.60	1.204159	0.5470	273.5030
12	10	5.5	0.33	0.60	1.211982	0.5427	298.5053
13	10	6	0.36	0.60	1.220492	0.5382	322.9049
14	10	7	0.42	0.60	1.239516	0.5283	369.7911
15	10	7.5	0.45	0.60	1.250000	0.5230	392.2382
16	10	8	0.48	0.60	1.261111	0.5175	414.0030
17	10	8.5	0.51	0.60	1.272831	0.5119	435.0775
18	10	9	0.54	0.60	1.285146	0.5061	455.4579
19	10	9.5	0.57	0.60	1.298037	0.5002	475.1441
20	10	10	0.60	0.60	1.311488	0.4941	494.1395

DATOS GENERALES:

CARGA (kg) 200

k= 0.06

 $\frac{Z}{2} = 100$

kx=q

ky=p

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$v_x = \frac{Z}{2} y \ln \frac{q + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + p^2}} + f_{11}(y)$$

$$A = \frac{\sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{1 + p^2}}$$

 $\Sigma x = A * v_x * \text{Intervalo real de borde}$

Intervalo Real de Borde= 0.58309519

$$\text{sen } \phi = \tan^{-1} p$$

$$\sigma_x = \Sigma x * \text{sen } \phi$$

BORDE 3										
PUNTO	x	y	v_x	$\sqrt{1 + p^2}$	$\sqrt{1 + q^2}$	A	SEN ϕ	A*v _x	Σx	σ_x
1	10	0	0.00000	1.00000	1.16619	1.16619	0.000	0.000	0.000	0.000
2	10	0.5	28.42968	1.00045	1.16619	1.16567	0.02999	33.139505	19.323486	0.5794
3	10	1	56.79011	1.00180	1.16619	1.16410	0.05989	66.109188	38.547949	2.3087
4	10	1.5	85.01290	1.00404	1.16619	1.16150	0.08964	98.742126	57.576059	5.1610
5	10	2	113.03132	1.00717	1.16619	1.15788	0.11915	130.87709	76.313803	9.0924
6	10	2.5	140.78109	1.01119	1.16619	1.15329	0.14834	162.36115	94.672007	14.0437
7	10	3	168.20108	1.01607	1.16619	1.14775	0.17715	193.05197	112.56768	19.9417
8	10	3.5	195.23393	1.02181	1.16619	1.14130	0.20552	222.81976	129.92513	26.7019
9	10	4	221.82659	1.02840	1.16619	1.13399	0.23227	251.54885	146.67692	34.0691
10	10	4.5	247.93071	1.03581	1.16619	1.12587	0.26067	279.13876	162.76447	42.4271
11	10	5	273.50298	1.04403	1.16619	1.11701	0.28735	305.50496	178.13847	51.1877
12	10	5.5	298.50531	1.05304	1.16619	1.10745	0.31338	330.57904	192.75905	60.4063
13	10	6	322.90490	1.06283	1.16619	1.09725	0.33872	354.30865	206.59567	69.9780
14	10	7	369.79113	1.08462	1.16619	1.07521	0.38723	397.60189	231.83975	89.7759
15	10	7.5	392.23821	1.09659	1.16619	1.06347	0.41036	417.13517	243.22951	99.8128
16	10	8	414.00301	1.10923	1.16619	1.05135	0.43273	435.26103	253.79861	109.8265
17	10	8.5	435.07752	1.12254	1.16619	1.03888	0.45436	451.99496	263.55609	119.7496
18	10	9	455.45791	1.13649	1.16619	1.02614	0.47515	467.36231	272.51671	129.4860
19	10	9.5	475.14411	1.15104	1.16619	1.01316	0.49520	481.39686	280.70019	139.0036
20	10	10	494.13949	1.16619	1.16619	1.00000	0.51450	494.13949	288.13036	148.2418
									Σv_x	1097.7

BORDE 4							
PUNTO	x	y	p	q	ϕ	ln	v_y
1	0	0	0.000	0	1.000000	0.0000	0.0000
2	0.5	0	0.000	0.03	1.000450	0.0000	0.0000
3	1	0	0.000	0.06	1.001798	0.0000	0.0000
4	1.5	0	0.000	0.09	1.004042	0.0000	0.0000
5	2	0	0.000	0.12	1.007174	0.0000	0.0000
6	2.5	0	0.000	0.15	1.011187	0.0000	0.0000
7	3	0	0.000	0.18	1.016071	0.0000	0.0000
8	3.5	0	0.000	0.21	1.021812	0.0000	0.0000
9	4	0	0.000	0.24	1.028397	0.0000	0.0000
10	4.5	0	0.000	0.27	1.035809	0.0000	0.0000
11	5	0	0.000	0.3	1.044031	0.0000	0.0000
12	5.5	0	0.000	0.33	1.053043	0.0000	0.0000
13	6	0	0.000	0.36	1.062826	0.0000	0.0000
14	7	0	0.000	0.42	1.084620	0.0000	0.0000
15	7.5	0	0.000	0.45	1.096586	0.0000	0.0000
16	8	0	0.000	0.48	1.109234	0.0000	0.0000
17	8.5	0	0.000	0.51	1.122542	0.0000	0.0000
18	9	0	0.000	0.54	1.136486	0.0000	0.0000
19	9.5	0	0.000	0.57	1.151043	0.0000	0.0000
20	10	0	0.000	0.6	1.166190	0.0000	0.0000

DATOS GENERALES:

CARGA (kg) 200

k= 0.06

$\frac{Z}{2} = 100$

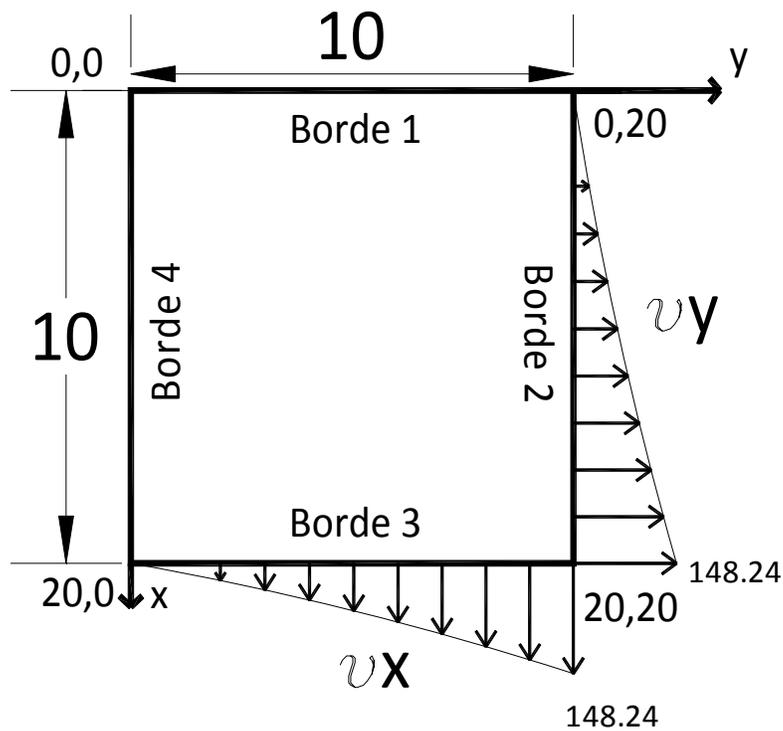
kx=q

ky=p

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

$$v_y = \frac{Z}{2} x \ln \frac{p + \sqrt{\phi}}{\sqrt{1 + q^2}} + f_1(x)$$

Diagrama de esfuerzos en el sentido de las generatrices



Esfuerzos tangenciales τ CARGA (kg)
k=200
0.06

$$\tau = -\frac{Z}{2k} \sqrt{\phi}$$

Para las coordenadas de los bordes @50:

Borde 1				
Punto	x	y	ϕ	τ
1	0	0	1.000000	1666.6667
2	0	0.5	1.000450	1667.4165
3	0	1	1.001798	1669.664
4	0	1.5	1.004042	1673.4031
5	0	2	1.007174	1678.6238
6	0	2.5	1.011187	1685.3124
7	0	3	1.016071	1693.4514
8	0	3.5	1.021812	1703.0202
9	0	4	1.028397	1713.9947
10	0	4.5	1.035809	1726.3481
11	0	5	1.044031	1740.0511
12	0	5.5	1.053043	1755.072
13	0	6	1.062826	1771.3774
14	0	7	1.084620	1807.6996
15	0	7.5	1.096586	1827.6427
16	0	8	1.109234	1848.7233
17	0	8.5	1.122542	1870.9029
18	0	9	1.136486	1894.143
19	0	9.5	1.151043	1918.405
20	0	10	1.166190	1943.6506
$\sum \tau$				33450

Borde 2				
Punto	x	y	ϕ	τ
1	0	10	1.166190	1943.6506
2	0.5	10	1.166576	1944.2936
3	1	10	1.167733	1946.2214
4	1.5	10	1.169658	1949.4301
5	2	10	1.172348	1953.9135
6	2.5	10	1.175798	1959.6627
7	3	10	1.180000	1966.6667
8	3.5	10	1.184947	1974.9121
9	4	10	1.190630	1984.3835
10	4.5	10	1.197038	1995.0634
11	5	10	1.204159	2006.9324
12	5.5	10	1.211982	2019.9697
13	6	10	1.220492	2034.1528
14	7	10	1.239516	2065.8601
15	7.5	10	1.250000	2083.3333
16	8	10	1.261111	2101.851
17	8.5	10	1.272831	2121.3858
18	9	10	1.285146	2141.9098
19	9.5	10	1.298037	2163.395
20	10	10	1.311488	2185.8128
$\sum \tau$				38478

CARGA (kg)
k=200
0.06

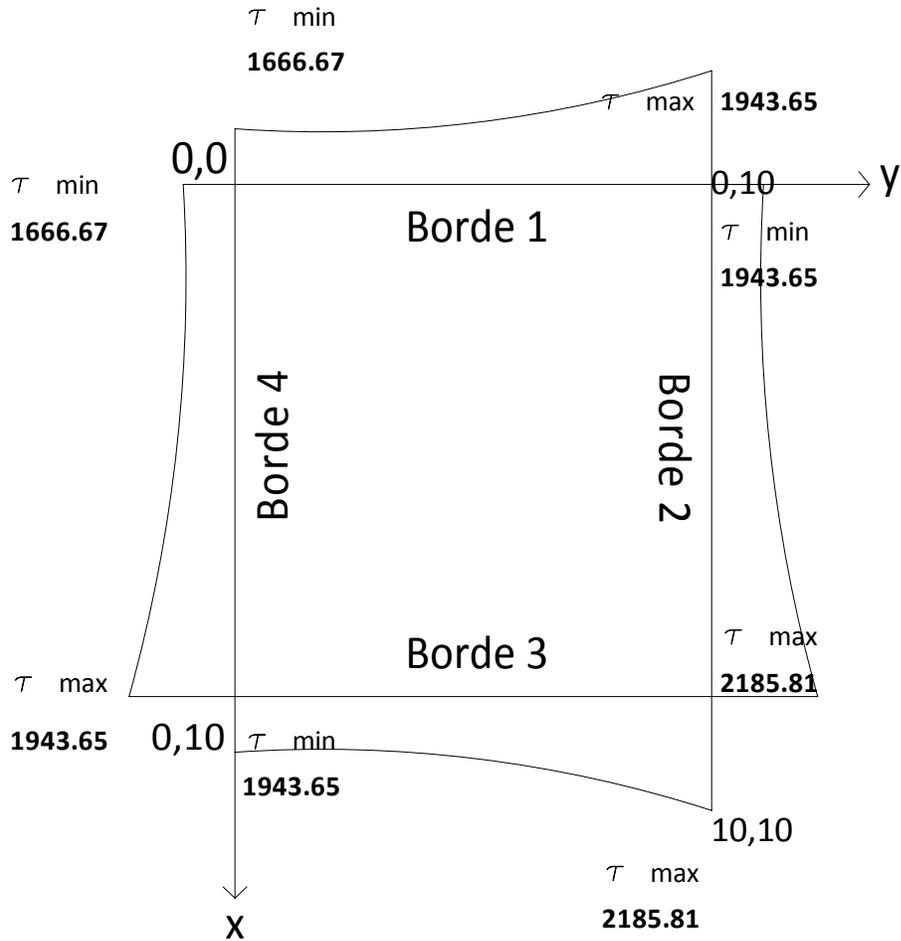
$$\tau = -\frac{Z}{2k} \sqrt{\phi}$$

Para las coordenadas de los bordes @50:

Borde 4				
Punto	x	y	ϕ	τ
1	10	0	1.000000	1666.6667
2	10	0.5	1.000450	1667.4165
3	10	1	1.001798	1669.664
4	10	1.5	1.004042	1673.4031
5	10	2	1.007174	1678.6238
6	10	2.5	1.011187	1685.3124
7	10	3	1.016071	1693.4514
8	10	3.5	1.021812	1703.0202
9	10	4	1.028397	1713.9947
10	10	4.5	1.035809	1726.3481
11	10	5	1.044031	1740.0511
12	10	5.5	1.053043	1755.072
13	10	6	1.062826	1771.3774
14	10	7	1.084620	1807.6996
15	10	7.5	1.096586	1827.6427
16	10	8	1.109234	1848.7233
17	10	8.5	1.122542	1870.9029
18	10	9	1.136486	1894.143
19	10	9.5	1.151043	1918.405
20	10	10	1.166190	1943.6506
$\sum \tau$				33450

Borde 3				
Punto	x	y	ϕ	τ
1	0	0	1.166190	1943.6506
2	0.5	0	1.166576	1944.2936
3	1	0	1.167733	1946.2214
4	1.5	0	1.169658	1949.4301
5	2	0	1.172348	1953.9135
6	2.5	0	1.175798	1959.6627
7	3	0	1.180000	1966.6667
8	3.5	0	1.184947	1974.9121
9	4	0	1.190630	1984.3835
10	4.5	0	1.197038	1995.0634
11	5	0	1.204159	2006.9324
12	5.5	0	1.211982	2019.9697
13	6	0	1.220492	2034.1528
14	7	0	1.239516	2065.8601
15	7.5	0	1.250000	2083.3333
16	8	0	1.261111	2101.851
17	8.5	0	1.272831	2121.3858
18	9	0	1.285146	2141.9098
19	9.5	0	1.298037	2163.395
20	10	0	1.311488	2185.8128
$\sum \tau$				38478

Diagrama de esfuerzos tangenciales



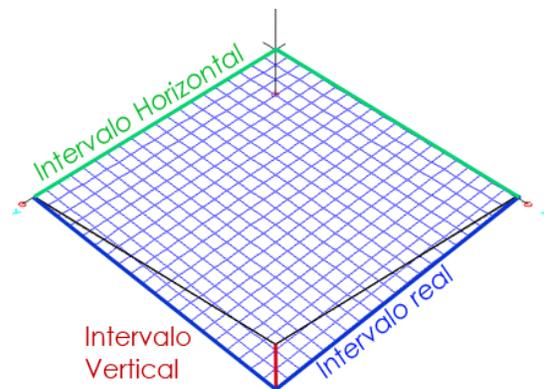
Componentes verticales, horizontales y reales de τ

- ΔH Intervalo Horizontal del borde
- ΔR Intervalo Real del borde
- ΔV Intervalo Vertical

DIMENSIONES

	No. Segmentos	
Horizontal	10	20
Real	11.6619038	20
Vertical	6	20

- TH** Componente Horizontal
- TR** Componente Real
- TV** Componente Vertical



BORDE	$\sum \tau$	ΔH	TH	ΔR	TR	ΔV	TV	σ_{ux}	σ_{uy}
1	33450.4097	0.500000	16725.205	0.5830952	19504.773	0.300000	10035.123	0	0
2	38478.0687	0.500000	19239.034	0.58309519	22436.377	0.300000	11543.421	1097.67239	1097.67239
3	38478.0687	0.500000	19239.034	0.58309519	22436.377	0.300000	11543.421	1097.67239	1097.67239
4	33450.4097	0.500000	16725.205	0.58309519	19504.773	0.300000	10035.123	0	0

TOTAL DE VERTICALES TRANSMITIDOS A COLUMNA 9348.1

CAPÍTULO 8

El paraboloides hiperbólico. Ejemplo de aplicación: Paraguas

A lo largo del estudio, he definido parámetros de diseño, análisis matemático y estructural, para comprender al PH. Para cada uno de los anteriores, también mencioné un caso de aplicación básico: el paraguas, por lo que ahora a lo largo de este capítulo, quiero destacar las generalidades, el diseño por medios computacionales y los factores de sustentabilidad que rodean a esta combinación de PH.

He escogido el paraguas, ya que ha sido un sistema altamente recurrido para muy diversos usos, y representa una visión de la versatilidad del PH, que he resaltado durante el estudio. También al aplicar el análisis a un solo caso, tengo la oportunidad de ver factores como nuevos materiales y prefabricación.



Fig. 111- Superior, Proyecto de *Abacus Shadestructures*, modelo de paraguas a partir de triángulos, en una membrana flexible.

Fig. 112. Inferior, Proyecto de *Abacus Shadestructures* para un restaurante proyecto terminado en 2006. Esquema invertido de paraguas que sirve para la captación de aguas pluviales.

Ambas figuras, ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos

décadas de los sesenta y los setenta en México. Ha sido ampliamente recurrido en una diversidad de proyectos, desde fábricas hasta mercados; y su principal factibilidad radica en que solo tiene un apoyo, cubriendo grandes extensiones de área. A continuación veremos algunos datos importantes de los paraguas.

8.1 Generalidades

Antes que nada habrá que aclarar que el término paraguas, se ha usado en la arquitectura por la similitud que estas estructuras guardan con el objeto para cubrirse de la lluvia: **un apoyo sostiene un manto que cubre de las adversidades del ambiente.**

En el caso de las membranas de materiales flexibles, la estructura de paraguas se puede obtener, a partir de una combinación de triángulos que se adaptan a las condiciones de tensión, en tres puntos de los cuales uno no es coplanario, como se muestra en la Fig. 111. También se puede invertir el modelo si así lo requiere el diseño (por ejemplo para la recolección de aguas pluviales) como se muestra en la Fig. 112. Es importante mencionar que en las membranas la forma podría derivar a embudos o conos siguiendo el esquema de un solo apoyo.

Por otra parte en el caso de las estructuras que usan materiales rígidos, si optamos por un esquema de diseño en el cual solo se tenga un apoyo, podríamos dar como resultado un modelo de triángulos similar a los paraguas antes ilustrados, sin embargo, este se comportaría estructuralmente diferente a como lo hace un PH. Por lo que la mejor opción, se da al combinar mantos de PH de borde recto para obtener un modelo similar al de paraguas invertido.

Este sistema, al que llamaremos solamente paraguas, principalmente se ha usado en cubiertas de concreto, teniendo su auge durante las

8.1.1 Historia

Por comentarios de Colin Faber, podemos considerar que el primero en conceptualizar la combinación de PH que forman un paraguas, fue Aimond, cuyo artículo le dio pauta a Félix Candela para experimentar con lo que fue el primer paraguas de concreto. Esto ocurrió en el año de 1952 en Tecamachalco, donde construyó una estructura con un peralte de 1 m y un claro cubierto de 10m x 10m, el espesor de la cáscara era de 4 cm.

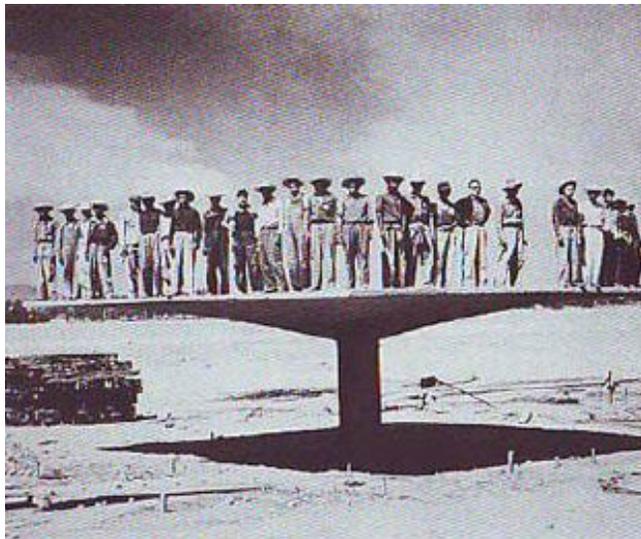


Fig. 113- Trabajadores en el paraguas experimental en Tecamachalco. Foto extraída del libro “Las Estructuras de Candela” Reproducción con fines didácticos

Candela experimentó con diferentes módulos de paraguas, observando que cuando la flecha era muy pequeña, existían flexiones en las orillas de los mantos, por lo cual se fijaría una flecha mínima para que estas no existieran. Como vimos en el capítulo 6, constructores como Juan Antonio Tonda, recomiendan que el alabeamiento del manto sea como mínimo del 6% del área cubierta por el paraguas, por lo cual en futuras construcciones se siguió esta norma.

Después de que Candela empezó a trabajar con el PH en sus diferentes combinaciones, se dedicó de lleno a refinar su técnica, dejando de lado sistemas estructurales en los que había incursionado antes, como las losas plegadas. En el caso específico de los paraguas, estos fueron usados por Candela y Tonda en diferentes tipos de proyectos, utilizando la producción en serie mejorando los factores de costo.

Los ensayos durante 1952 en Tecamachalco y 1953 en Vallejo fueron los primeros de muchos de los que se realizaron con estas cubiertas, hasta llegar a una estructura resistente que logró economizar sus costos por las siguientes razones:

1. Eran estructuras modulares, se generaba un solo diseño que se repetía muchas veces, cubriendo grandes claros.
2. Los espesores del concreto en la cubierta variaban de 4 a 7 cm, según el claro que requerían cubrir.
3. Por los espesores y el sistema constructivo, los costos llegaban a bajar mucho para cubrir grandes naves.
4. Lograban alturas considerables con pocos apoyos, un paraguas podía cubrir un área de incluso más de 100 m con una sola columna.
5. Las estructuras se presentan estéticamente agradables, y por las flechas que tienen logran la adecuada ventilación del aire y por lo tanto condiciones térmicas favorables.

Todos estos factores, contribuyeron en su momento a la gran generalización de la técnica, sin embargo, tiempo después habría una caída dramática del uso de ella y de los cascarones en general. No existe una causa como tal, sino más bien un conjunto de posibles circunstancias que intervinieron; para este punto no puedo nombrar una bibliografía en específico, ya que las siguientes opiniones las he conseguido de entrevistas con las personas que han sido grandes desarrolladores de los cascarones, como Juan Antonio Tonda, Alberto Gonzales, José Luis Rincón y Marcial Escudero. A razón de estos expertos, puedo concluir que:

- La técnica fue favorecida en su momento por los costos de la mano de obra y del acero, haciendo que el ahorro en el material fuera significativo para el costo total, dando como resultado que construir un cascarón fuera la mitad del costo que construir una estructura similar en acero.
- Sin embargo, dada la recesión económica de los años setenta los costos de la varilla y el cemento subieron, al igual que la mano de obra.

- Por otra parte, un factor muy importante fue el alto costo de la madera de la cimbra que empezó a representar una parte sobresaliente del costo del cascarón. Al elevarse todos estos factores económicos, la técnica comenzó un proceso de detrimento.
- La migración de Félix Candela a Estados Unidos, si bien no fue esencial (ya que existían profesionales bien capacitados) marco un punto importante para la comercialización de las estructuras, que sumado al factor económico anterior perdió competitividad en el mercado.
- La carencia de maestros de obra que dominarán la técnica, fue un factor que comenzó por todo lo antes mencionado.
- La falta de enseñanza de la técnica, marcó un punto importante en que los arquitectos e ingenieros dejaron de incursionar en ella, si bien todavía se impartía por profesionales bien preparados, se consideraba que los cascarones sólo eran una moda, por lo que el interés de los estudiantes empezó a disminuir, hasta que actualmente, esta técnica se encuentra reducida a solo algunas clases de carácter selectivo dentro del plan de estudios de la Facultad de Arquitectura de la UNAM.
- La entrada de prefabricados, también juega un papel importante, ya que ante estos elementos, el cascarón se mostraba complejo por los análisis de diseño y cálculo de la estructura.
- Siguiendo en esta línea, el proceso de cálculo pareció ser el freno para muchos, aunque esto es contraproducente, ya que actualmente se puede generar un proceso efectivo con una hoja de Excel.
- La incompreensión en las técnicas de representación gráfica, también marcó un punto en el desuso de estas estructuras por parte de los estudiantes, que luego se convirtieron en profesionales. Este es otro motivo a cuestionar, ya que actualmente este proceso se ve facilitado por programas de dibujo asistido.

Finalmente, cabe destacar que aunque toda esta serie de factores marcan una realidad, esta solo se refiere a la construcción en concreto, ya que las membranas han tenido un desarrollo distinto.

La reflexión queda en comprender la técnica de los paraguas, para aprovechar sus beneficios, generando propuestas distintas en las cuáles se puedan reducir costos. **La clave está en eliminar la cimbra, generar procesos de prefabricación, y evaluar el uso de distintos materiales; propuestas que trataré más adelante.**

8.1.2 Construcción

Candela construyó paraguas en toda la ciudad de México, desde terrenos de consolidación sólida como Coyoacán al sur de la ciudad, hasta en terrenos de constitución fangosa, como Vallejo y Ecatepec. Otro sistema que se llegó a usar fue la cimentación de cascarón de las mismas características de la cubierta.

Estos paraguas de fabricación en serie, fueron recurridos no solo por Candela, sino por otros expertos constructores. El método de fabricación es similar al de una estructura de concreto, de la cual podemos resaltar los siguientes pasos:

- 1) Formulación del proyecto arquitectónico.
- 2) Formulación del proyecto estructural.
- 3) Desplante de cimentación, armado y habilitado de acero en cimentación y columna.
- 4) Instalaciones
- 5) Cimbrado para los mantos de PH. (Fig. 114)
- 6) Armado y habilitado de acero en los mantos.
- 7) Colado de elementos y ajuste de vigas intermedias y de borde.
- 8) Fraguado y cuidados finales
- 9) Descimbrado
- 10) Impermeabilización, y acabados finales.

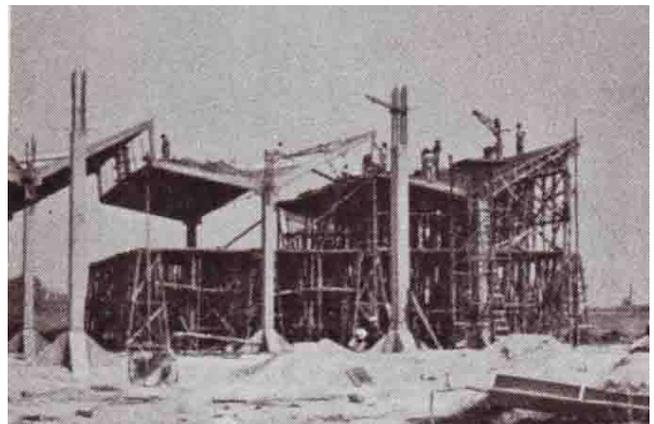


Fig. 114- Cimbrado de un conjunto de paraguas en la fábrica Empaques Modernos San Pablo, Estado de México, obra de Ignacio Canals. **Extraída del libro “Cascarones Hiperbólicos Parabólicos”**

De estos pasos, cabe resaltar las instalaciones, ya que pueden verse como un aspecto de debate el paso de los tubos de desagüe, que se colocaban en el centro de la columna, debido a la inclinación del paraguas.

En años de funcionamiento, han presentado sólo algunos defectos de filtración, principalmente por la falta de mantenimiento. Por otra parte, esto también puede provocar que se tape la salida de agua y que el paraguas sirva como contenedor, llevando los correspondientes aspectos negativos que la acumulación de agua trae consigo en una superficie cuyo destino no es ese.

Una posible solución a esta problemática puede ser bajar las instalaciones de desagüe, por un costado de la columna, para evitar que el elemento estructural ahogue al tubo. Sin embargo, esto queda a elección y criterio del proyectista. También existe la posibilidad de usar paraguas para la recolección de aguas pluviales.

El paraguas, está conformado por una estructura de cuatro tímpanos de un PH. Estos tímpanos son equilibrados uno con otro, de tal manera que transmiten todos sus esfuerzos a un solo lado, lo que les permite tener solamente un apoyo. Los claros y módulos pueden ser variados, según la disposición del diseño que se tenga.

Básicamente se conforman de cuatro elementos de estructura, las trabes de borde, la cáscara, la columna y la cimentación. Para dar la curvatura, se utiliza el carácter reglado de la geometría, esto se consigue con cimbra recta con un alabeamiento o inclinación en el espacio. Los tiempos de obra se volvían reducidos en la construcción de estas estructuras, debido a la modulación y repetición de los elementos del sistema.

Actualmente, sobreviven muchas de estas estructuras en México, siendo el legado de Candela para nuestro país. Sus usos son de los más diversos tipos, como mencionamos anteriormente, y a continuación ilustraré algunos.

Cabe mencionar que su relevancia a nivel internacional es amplia, por lo que también haré mención de algunos proyectos de otros países.



De superior a inferior:

Fig. 115- Colado y ajuste de vigas intermedias.

Fig. 116- Obra negra terminada en Bodegas de Vallejo. Los huecos para iluminación se hicieron con prismáticas, situación que no se repitió, ya que provocaba mucho calor dentro del inmueble.

Fig. 117- Uso actual en una gasolinera. **Ver URL de origen en referencias.**

Fig. 115 y 116. **Extraídas del libro “Las Estructuras de Candela” Todas las imágenes reproducción con fines didácticos**

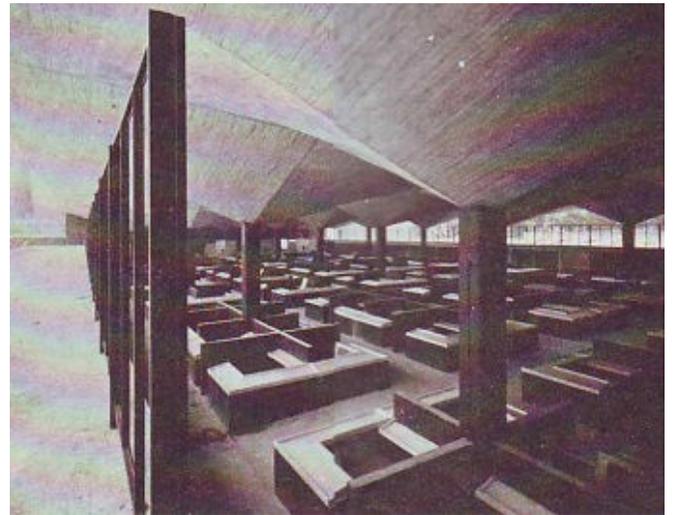
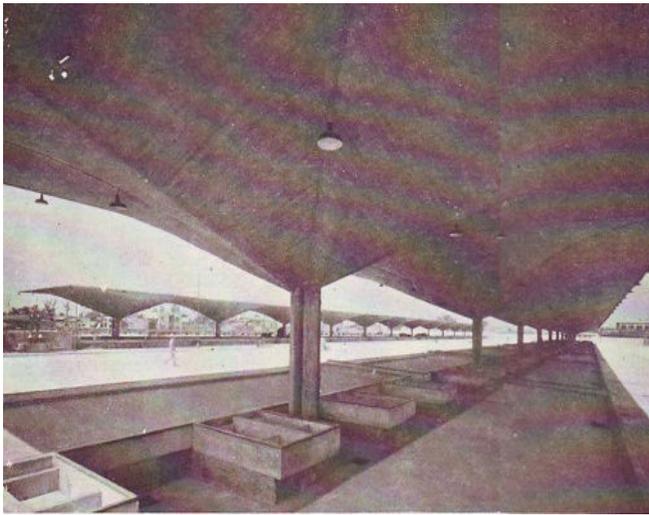


Fig. 118 y 119- Mercados de Jamaica y Coyoacán. Extraídas del libro “Las Estructuras de Candela” *Todas las imágenes reproducción con fines didácticos*



Fig. 120 y 121. Izquierda, Pasillo en la Universidad Berkeley, California. Derecha, Aeropuerto Internacional de Oakland Edificio de la Torre Terminal., *Ver URL de origen en referencias. Todas las imágenes reproducción con fines didácticos*

8.2 Diseño y cálculo. Programa GEO

A continuación, analizaremos el diseño y cálculo de un paraguas, por medio de la herramienta para AutoCAD: GEO

8.2.1 Diseño

GEO, es una aplicación en lenguaje AutoLisp, que funciona como un comando para que AutoCAD, pueda generar **el trazado y cálculo de esfuerzos en un PH de borde recto**. En seguida describiré el proceso, para que el lector pueda observar los resultados.

Primero habrá que copiar la carpeta de archivos de la aplicación GEO, la cual colocaremos en alguna ubicación conocida, de preferencia directo en la carpeta raíz del disco duro (directorio C:/). Abrimos AutoCAD⁴⁰, y creamos un archivo nuevo. Como nuestra aplicación no es un comando regular de AutoCAD, tenemos que cargarla al programa, esto se consigue en el apartado *Tools*, buscando la opción *load application*, como se muestra en la Fig. 122.

⁴⁰ Contemplo, AutoCAD en su versión en inglés más actual la 2008. En versiones anteriores a 2006, el procedimiento de “*load application*” que menciono, no es necesario, por lo que se teclean las instrucciones directo en la barra de comandos.

Una vez que hayamos hecho click, nos aparecerá una ventana (Fig. 123), en la cual tendremos que escoger el archivo para cargar. Iremos a la carpeta de la aplicación y de escogeremos el archivo ph2001.vxl, una vez hecho esto damos "load" y después "close" para cerrar el cuadro de diálogo.

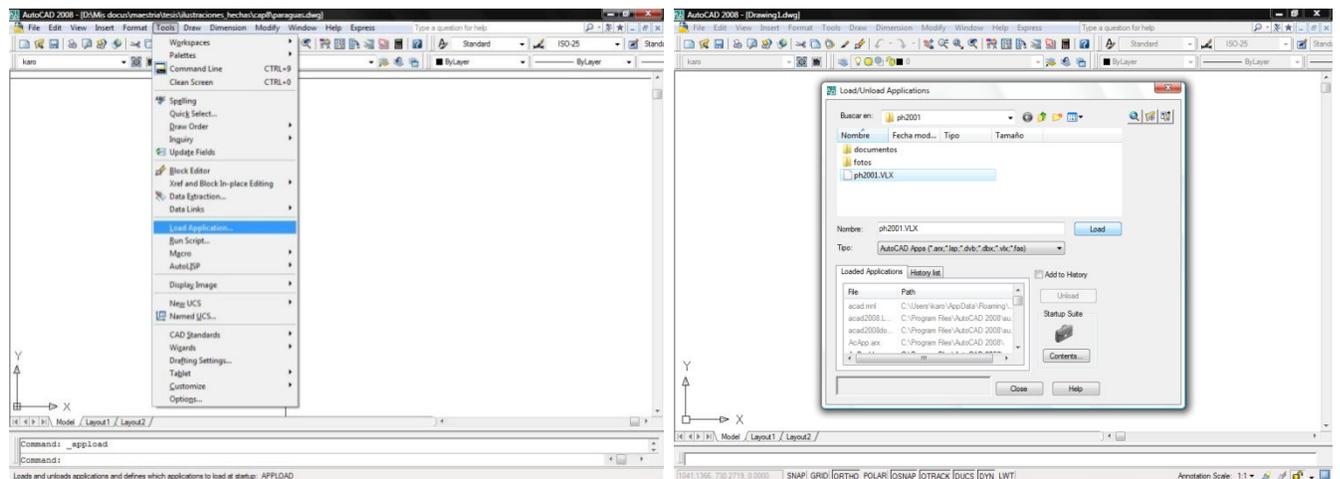


Fig. 122 y 123- Izquierda, proceso para cargar aplicación. Derecha, cuadro de diálogo de selección de archivos de autolisp. **Reproducción de la imagen de AutoCAD con fines didácticos**

Cuando GEO termine de cargar, tecleamos en la barra de comandos la instrucción "geoph", con lo que aparecerá otro cuadro de diálogo que permitirá escoger las características del PH entre las cuales figuran las dimensiones, el ángulo entre ejes, el rango de muestreo y una opción para formar archivos con extensión *.txt con todos los datos de ubicación, tal como se ve en la Fig. 124. Para explicar el procedimiento tomemos un PH de las mismas dimensiones que el referido en el apartado 7.4, el claro a cubrir es de 20m x 20m, el cual será formado por 4 mantos equiláteros de PH. Cada uno será de 10m x 10m. La altura está dada por un 6% del área de cada manto, en este caso 100m², por lo que es de 6m.

Ingresamos primero el ángulo entre los cuadrantes, que en este caso será de 90°, después los rangos para los ejes, en este caso 0.5 para "x" y 0.5 para "y". La altura del manto será de 6m, no hay necesidad de marcar signo negativo ya que la aplicación esta predeterminada con el eje z hacia abajo, después habrá que registrar los intervalos de muestreo, en donde podremos dividir en cuantos puntos queramos, esto nos servirá para ubicar los puntos de nuestro manto, usaremos .5, o sea a cada 50 cm. Finalmente activamos las casillas para que grafique los ejes propios del manto y el archivo de texto con las coordenadas. Una vez que tecleamos ok, nos pedirá la dirección del eje x, que en este caso haremos coincidente con el eje x de AutoCAD, y finalmente el nombre del archivo de texto, el cual nombraremos ph1. El resultado será un manto como el visto en la Fig. 125.

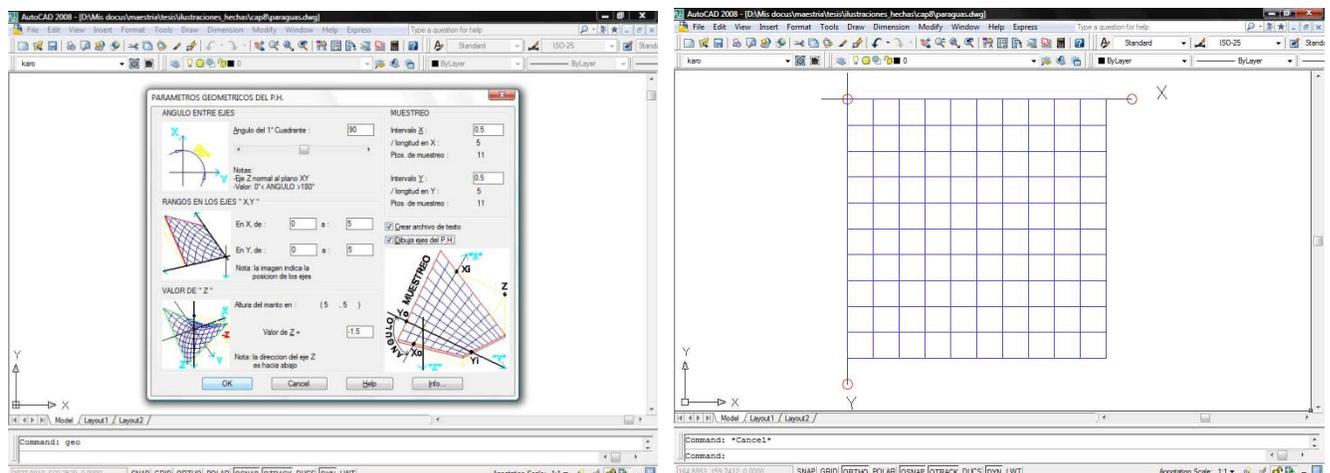


Fig. 124, 125- Izquierda, cuadro de diálogo para determinar las características del manto. Derecha, manto terminado. **Reproducción de la imagen de AutoCAD con fines didácticos**

Para generar el manto de paraguas, hacemos tres vistas en el AutoCAD, por medio del apartado View, seleccionamos el comando *viewport*, escogemos la opción 3 viewports, en una vista tendremos la proyección en planta (*top*), en otra en proyección derecha (*right*), y otra última con el isométrico (*swisometric*), tal como se muestra en la Fig. 126. Comenzamos a espejear el manto de tal manera que los puntos bajos coincidan (Fig. 127), hasta que el paraguas este completo (Fig 128), después incluso podemos trazar la columna y rotar un poco la vista con el comando *orbit* para ver de mejor manera la geometría (Fig. 129).

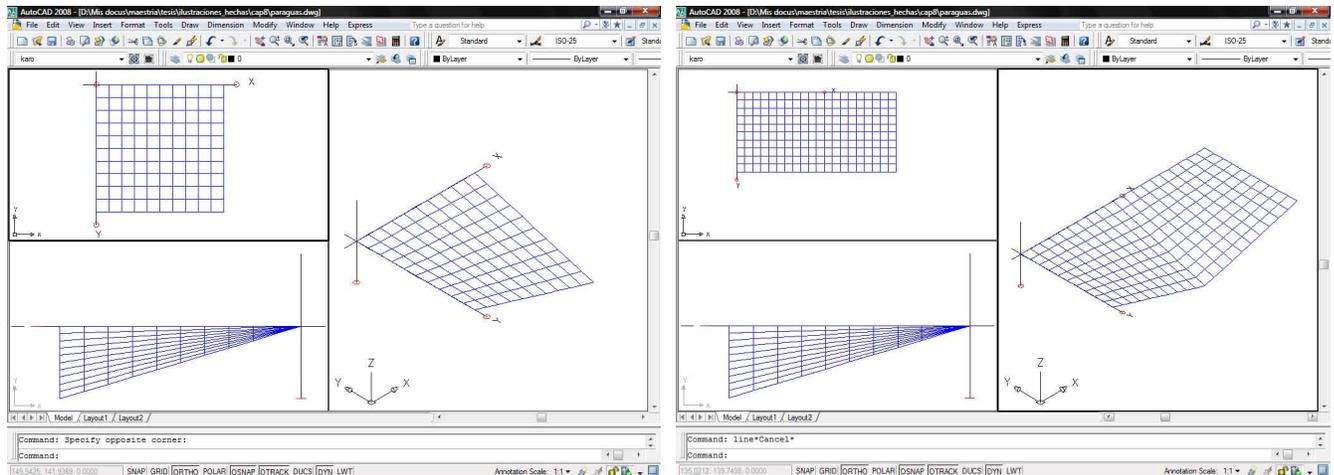


Fig. 126 y 127- Izquierda, vista en planta, derecha e isométrico. Derecha, proceso de espejeo de los mantos para formar el paraguas. **Reproducción de la imagen de AutoCAD con fines didácticos**

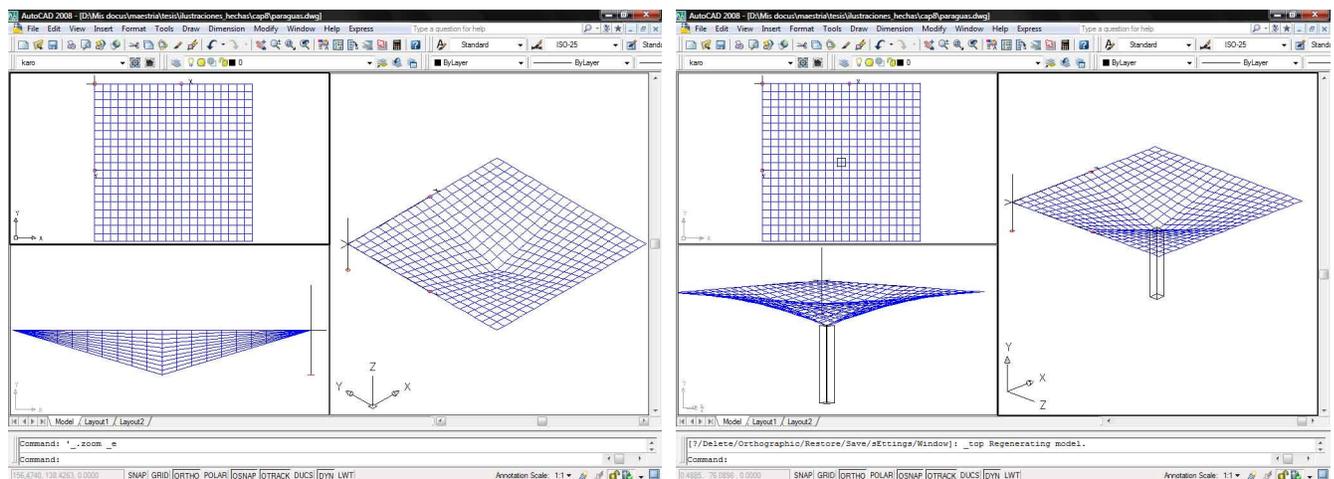


Fig. 128 y 129- Izquierda, paraguas terminado en las tres proyecciones. Derecha, rotaciones por medio de comando *orbit*, y posición de la columna. **Reproducción de la imagen de AutoCAD con fines didácticos**

8.2.2 Cálculo

GEO, genera el proceso de cálculo por manto, por lo que regresaremos a la vista de un solo manto, para observar el comportamiento de los esfuerzos de este. Tecleamos en la barra de comandos "*esfph*", que nos pedirá seleccionemos un objeto, el cual será el manto de PH, con esto obtendremos un cuadro de diálogo (Fig. 130), en el cual nos indicará los parámetros a seguir.

Tenemos que determinar qué bordes libres tendrá el manto. En este caso por ser un paraguas, tendremos dos bordes libres, por lo que escogeremos la opción borde 1 y 4. La carga gravitacional aparece por default en 200 kg, pero podemos ingresar como queramos el dato. Seleccionamos los archivos de texto necesarios que nos ofrece valores de las constantes, esfuerzos de membrana, fuerzas x, y, z y esfuerzos principales. Marcamos todas, porque después analizaré los archivos de texto. En este caso los archivos *.txt, los nombraremos "esf1". Después el comando realizará una graficación de cortantes como se observa en la Fig. 131.

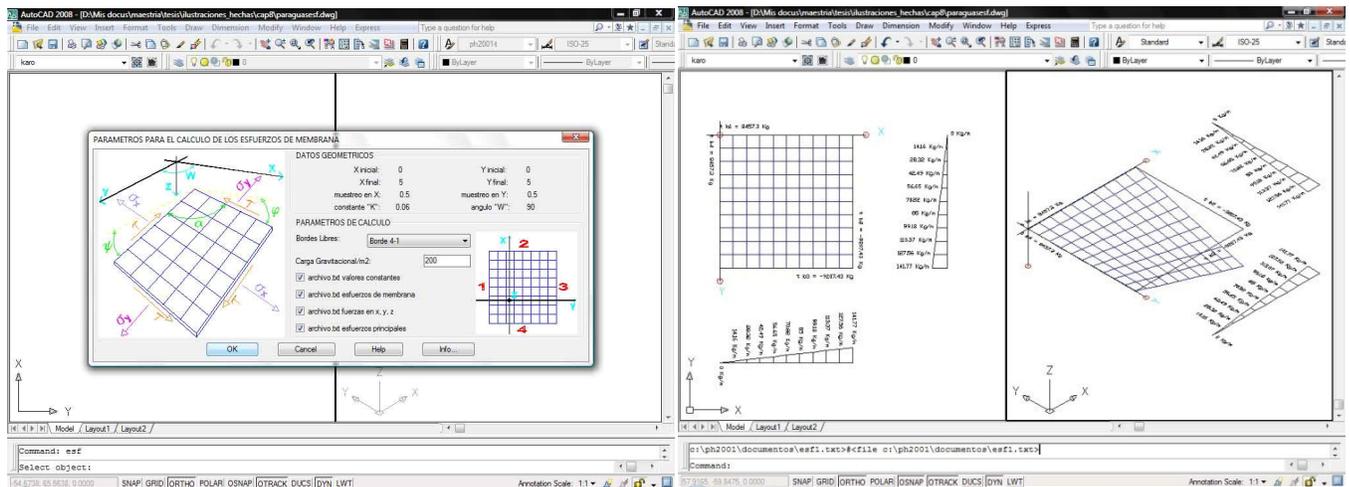


Fig. 130 y 131- Izquierda, cuadro de texto para cálculo de esfuerzos. Derecha, resultados graficados. **Reproducción de la imagen de AutoCAD con fines didácticos**

Al comparar los datos numéricos de esta aplicación de Autolisp, resultan ser los mismos que en la documentación del apartado 7.4. Una vez que hemos analizado este proceso, puedo concluir que **actualmente las herramientas para el cálculo del PH, hacen que el proceso de trazo y la obtención de esfuerzos sean mucho menos complejos**. De esta manera, el estudiante podrá proponer las combinaciones que decida, incluyendo la del paraguas, del cual hemos visto el proceso, sumado a los factores de sustentabilidad que abordaré a continuación.

8.3 Análisis de sustentabilidad

La palabra sustentable ha sido ampliamente definida y comparada con el término sostenible. Para no entrar en controversias, definiremos lo que entendemos como sustentabilidad únicamente aplicable a este estudio: **consideraremos los factores de adaptación con el medio de las estructuras con geometría del PH, es este caso la combinación de los paraguas**. Analizaremos esto en dos rubros principales con elementos ya construidos, primero veremos las posibilidades de adaptación al paso de los años, para después ver las propiedades que afectan directamente al usuario. Cabe mencionar, que los gastos energéticos en la producción no se analizarán en este estudio, dejando la posibilidad para futuras investigaciones.

8.3.1 Durabilidad mantenimiento y reutilización.

Para poder analizar la situación de los paraguas en cuanto a su mantenimiento y durabilidad, tomaré un caso construido en los años setentas, en Ecatepec, Estado de México, a las afueras de la Ciudad de México, dentro de su área metropolitana.

La ubicación del inmueble es sobre una de las avenidas de más afluencia y de ingreso hacia el Distrito Federal, la vía Morelos. En inicio, eran naves industriales, a través del tiempo y del cambio de propietarios, han sobrevivido por la versatilidad de adaptación de su uso.

Actualmente las estructuras se encuentran en dos giros completamente distintos, uno de ellos es un centro comercial, cubriendo toda el área de compras y el estacionamiento, mientras el otro es una tienda de muebles, para este caso estudiaremos el primero.



Fig. 132- Estacionamiento del centro comercial, Ecatepec, Estado de México. Se ven los paraguas y la iluminación natural
Fotos de Carolina Carmona D.R.



Fig. 133- Izquierda, Entrada al centro comercial y vista al fondo del estacionamiento
 Fig. 134- Derecha, Interior del centro comercial, Ecatepec, Estado de México.
Fotos de Carolina Carmona D.R.

Así como este sistema, sobreviven muchos casos en la Ciudad de México, que al igual que el anterior, han tenido la facilidad de cambiar sus usos, lo cual les ha permitido subsistir en el ritmo de una Ciudad constantemente cambiante.

El mantenimiento que se le da a la estructura, es igual que al que se le debe de dar a cualquier estructura de concreto. Las principales fallas se dan por las filtraciones de agua y deterioros en la pintura por las condiciones climáticas.

En el caso de las estructuras estudiadas, vemos desgaste en la pintura, y por la humedad la formación de "bolsas" o abultamientos del acabado exterior, pero que no ponen en riesgo la estabilidad de la estructura. Por otra parte, y la principal causa de incluir la reutilización de este sistema, es su durabilidad, debido a que al parecer la estructura seguirá siendo utilizada durante todo su tiempo de vida.



Fig. 135- El principal deterioro, se debe a la falta de mantenimiento, sobre todo en las áreas semi exteriores como el estacionamiento, donde la humedad ha generado estragos en los recubrimientos, sin embargo estas fallas bien localizadas, no representan un peligro inminente para la estructura en general.

Fotos de Carolina Carmona D.R.



De superior a inferior:

Fig. 136 y 137- Vistas del conjunto de paraguas.

Fig. 138- Vista exterior de los paraguas.

Fotos de Carolina Carmona D.R.

Ahora abordaré otro ejemplo de paraguas, este está ubicado en el Centro Vacacional del IMSS, "Oaxtepec" que se encuentra en el estado de Morelos. Construido durante el sexenio del presidente Adolfo López Mateos, este centro tenía la intención original de ser un centro de descanso para trabajadores y enfermos convalecientes derechohabientes al servicio de salud del estado.

Actualmente, una parte de él se encuentra privatizado y comercializado como parque acuático (PAO), aunque todavía gran parte del centro original se encuentra en uso y remodelado.

Podemos considerar que este Centro Vacacional, cuenta con una considerable infraestructura y un gran plan urbanístico y social, así mismo utilizó muchas de las técnicas innovadoras de su época, encontrándonos con sistemas constructivos como una cúpula geodésica que alberga una pequeña reserva vegetal, y por su puesto nuestro sistema de análisis, los paraguas, que se ubican en el estadio olímpico, cubriendo el espacio de las gradas.

Construidos en la década de los setenta, estas estructuras se levantan orgullosas, aún con el paso del tiempo, el mínimo de mantenimiento que han tenido y sobretodo de estar a la intemperie, en un ambiente cálido húmedo de lluvias constantes. Básicamente, el estado de los paraguas se califica como bueno, teniendo el mínimo de deterioros visibles.

Como se puede ver en la Fig. 138, el conjunto de paraguas es continuo en un sentido, y libre en el otro. Su volado asimétrico, permite que las gradas tengan la mayor cubierta posible, y la estructura es levantada por una subestructura de piedra originaria del lugar.

3.2 Factores climatológicos, acústicos y confort.

Cabe mencionar que los factores en cada caso de estudio fueron diferentes, sin embargo, realizaré un resumen tomando en cuenta los principales de cada uno.

Factores de los paraguas en espacio confinado (centro comercial):

- **Climatológicos:** La capacidad de aislamiento climático, es mayor que en las losas planas del mismo material. Esto se debe a que las alturas son diferenciales y la circulación del aire es mayor. Dado el uso de centro comercial, los intercambios de temperatura en las zonas de refrigeración no son drásticos. Por otra parte, la relación con el exterior resulta no ser óptima, si bien el aislamiento del sol genera un cambio, la temperatura es similar. En el estacionamiento que tiene un menor aislamiento, es agradable incluso en invierno.
- **Acústicos:** Si bien el sistema no está diseñado para guardar una capacidad acústica excelente y una reverberación mínima, los sonidos del centro comercial no son un factor que moleste al usuario.

- **Confort:** Mencioné antes, que la relación con el exterior no es drástica, sumado a otros factores como la iluminación natural y la ventilación adecuada, hacen que los usuarios mantengan un estado de confort en su visita al centro comercial. Cabe mencionar que todas las estructuras están pintadas en colores claros, por lo que la iluminación resulta beneficiada, y mayormente los objetos de exhibición.

Factores de los paraguas en espacio abierto (gradas del estadio):

- **Climatológicos:** Este espacio, incluso en invierno, guarda una temperatura mayor a los 20°, por lo que el espacio con sombra representa una opción de aislamiento de los rayos del sol para el usuario. Por la forma propia de los paraguas y la orientación del estadio, la mayor parte recibe sombra en algún momento, guardando una temperatura agradable para los usuarios. También cabe mencionar que como los elementos no aíslan el viento, este es un factor que ayuda a la frescura del área.
- **Acústicos:** El estadio destinado a eventos deportivos, no guarda una acústica excepcional. Sin embargo, la posición de los aparatos de sonido son convenientes. Por tratarse de un espacio abierto en el área construida, la acústica demuestra ser deficiente.
- **Confort:** El área resulta ser confortable en comparación del exterior, por las temperaturas que se pueden llegar a registrar en verano.

8.4 ¿Utopía o realidad? Una propuesta de renovación

Todo este estudio ha girado en los principales beneficios de usar la geometría del PH, para el diseño arquitectónico. He ilustrado que es versátil, adaptable y su trazo y cálculo pueden ser generados por medios computacionales, facilitándolos y haciéndolos más comprensibles para los estudiantes.

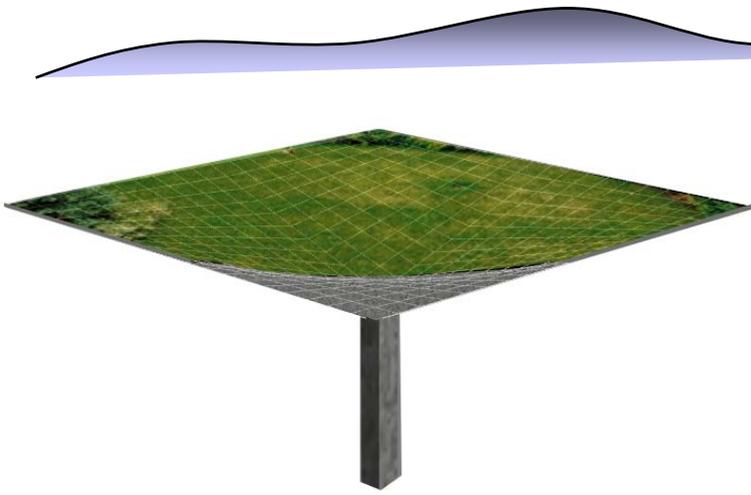
En especial en este último capítulo he hablado acerca de una forma específica que es el paraguas. En un inicio, especifiqué que lo tomé como caso de estudio por la alta adaptabilidad (que ya hemos visto la diversidad de usos para los que puede funcionar esta estructura), también por la facilidad de cubrir grandes claros con pocos apoyos y su combinación para cubrir incluso terrenos irregulares. Pero hay algunos otros factores que quiero resaltar:

- Se puede construir en diversos **materiales**, adaptándose a las necesidades propias de proyecto. Algunos de ellos pueden ser plásticos o bien paneles.
- Si los materiales utilizan cimbra, ésta puede ser hecha repetitiva haciendo un solo molde según sea el diseño.
- Para los materiales que son rígidos, como los paneles u otros industrializados, éstos pueden servir de cimbra muerta, y tener un recubrimiento con algún impermeabilizante plástico.
- Se pueden usar **prefabricados** en su construcción.
- Se pueden hacer con estructura de acero y recubrir con ferrocemento.
- Por su espesor y reducido peso con respecto a otras superficies de concreto, se pueden generar propuestas de **techos verdes** en ellos, mejorando las capacidades de transferencia térmica de la cubierta.
- Así mismo, pueden generar una alta **recolección de aguas pluviales**, e incluso de **celdas solares**, por el ángulo de incidencia.
- Pueden generar una **iluminación y ventilación naturales** con el juego de alturas y posiciones.
- Dan un **aspecto agradable al usuario**, ya que su grado de alabeamiento no es tan pronunciado como el de otras superficies de doble curvatura.

La propuesta es la siguiente:

“EL APROVECHAMIENTO, DE UNA SUPERFICIE CON ALTAS CAPACIDADES ESTÉTICAS Y ESTRUCTURALES, QUE ESTÉ EN EQUILIBRIO CON EL ENTORNO, Y PROPORCIONES CONFORT AL USUARIO”.

Probablemente todavía sea una utopía, sin embargo con el avance de la tecnología, es posible.



CONCLUSIONES

Antes que nada, quiero aclarar que este estudio **no hubiera sido posible sin los tratados previos de autores** mexicanos (y radicados en México cual es el caso de Félix Candela). Citando al arquitecto Marcial Escudero, coincido en que *“México es el semillero para los estudiosos del paraboloide hiperbólico”*. Esto me ha permitido acceder a información específica como tesis, libros, revistas, y sobre todo lo más valioso: experiencias personales de profesionales que han diseñado y construido con la geometría del PH.

A lo largo del estudio, mi interés fue el de **recopilar** información que permita un entendimiento básico de los principios de diseño del PH. A ello le sumé **mi aportación, que es el desarrollo de imágenes y métodos computacionales enfocados a la didáctica de esta geometría**. Considero esencial que los estudiantes mexicanos tengan un dominio pleno de dichos métodos, para lo cual **el internet se ha prestado como una herramienta para su difusión**. He de mencionar que la distribución y retroalimentación de la metodología didáctica para el diseño del PH, ha sido posible gracias a este medio.

Por otra parte, quiero hacer mención de que en mi afán por delimitar el estudio con un caso aplicado, abordé el paraguas, del cual ya he explicado antes sus beneficios sobre otras formas derivadas del PH, no obstante, **creo que otras combinaciones del PH, tienen al igual una gama de posibilidades de aplicación y estudio**, y más con los recursos tecnológicos con los que contamos actualmente.

De la misma manera, he visto, que **existen todavía algunos vacíos en la interpretación estructural de algunas formas del PH**, tal es el caso de las rotaciones del eje z , y los de corte complejo; los cuales incluso podrían tener su propio estudio.

Existe otra área poco explorada, que es **el análisis de sustentabilidad en este tipo de superficies**, refiriendo factores como los procesos para la obtención de su materia prima, los materiales y gastos de construcción, y sobre todo los que derivan en el confort del usuario.

Finalmente, quiero despertar en el lector la conciencia crítica, de que en realidad **esta geometría, tiene un futuro muy prometedor en nuestro país, y este consiste en la utilización de nuevos materiales y técnicas que permitan la reducción de costos y con ello la masificación del sistema; aunque para esto, primero deberemos de tener una plataforma de enseñanza sólida y herramientas didácticas que apliquen métodos digitales**.

REFERENCIAS

Libros:

Bassegoda Nonell Juan, et al. *La cátedra de Antoni Gaudí, Estudio analítico de su obra.* Barcelona, Ed. CPET (Centre de publicacions del campus nord), Febrero 1999. Clasificación NA 1313.63368 cmp1-13560 Existente en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Bermejo Herrero Miguel, *Geometría Descriptiva Aplicada,* México 1999. Ed. AlfaOmega. Clasificación QA501 B45 1999, Existente en la Biblioteca Central UNAM.

Berger Horst, *Light Structures, Structures of light, The art of tensile Architecture.* Suiza. Ed. Basel. 1996. Clasificación TA663 B47 Existente en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Borrás Veses Eliseo, et al. *Ritmos, matemáticas e imágenes,* España. Ed. Nivela. Octubre 2002. Clasificación QA 464 B667 Existente en la Biblioteca Central UNAM.

Canals Navarrete Ignacio, Guerin Marti Ramon, *Cascarones Hiperbólicos Parabólicos,* México, Ed. Limusa, Segunda edición, 1976. Clasificación: QA935 C263 1976 Existente en la Biblioteca Central y en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Carmo, Manfredo Perdigão do, *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Madrid, España. Ed. Alianza. 1990. Clasificación: QA641 C3718 1990, Existente en la Biblioteca Central, UNAM

Catalano Eduardo, *Estructuras de superficies alabeadas. Combinaciones de paraboloides hiperbólicos,* Ed. Universitaria de Buenos Aires. 1962. Clasificación: TH2416 C3718 Existente en la Biblioteca Central, UNAM

Conrad Roland, *Frei Otto: estructuras, Estudios y Trabajos sobre la construcción ligera.* Barcelona Ed. Gustavo Gili, 1965 Traducción Francesc Albardané, Clasificación: TA663R65 CMPI-9810 Existente en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Desiderei Paolo, Nervi Pier Luigi Jr, Positano Guisepe, *Pier Luigi Nervi,* segunda edición, Barcelona, Ed. Gustavo Gili, 1982 Clasificación NA 1123.N4 D47 1982 Existente en la Biblioteca Central y Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Diz Finck, Hugo Mario, *Geometría Descriptiva,* Textos Universitarios, Universidad de Jalapa, 1995, Clasificación: QA501 D59 , Existente en la Biblioteca Central. UNAM

Faber, Colin, *Las estructuras de Candela,* México, Compañía Ed. Continental, Traducido por Miguel Echegaray, 1977

Gordon Fuller, *Geometría Analítica.* México. Ed. Continental, 2002

Izquierdo Asensi Fernando, *Geometría Descriptiva superior y aplicada.* Madrid, Ed. Dossat, S.A. Segunda edición, 1980. Clasificación: QA501 1925 Existente en la Biblioteca Central, UNAM

Jürgen Joedicke, *Estructuras en voladizos y cubiertas.* México, Ed. Hermes, 1967, traducción de Modest Ferrer. Clasificación TH2416 J63 Existente en Biblioteca Lino Picaseño, Facultad de Arquitectura. UNAM

Margarit J, Buxadé, *Cálculo de estructuras en paraboloides hiperbólico,* Barcelona, España, 1969. Editorial Blume. Clasificación TA 646 M34. Existente en la Lino Picaseño, Facultad de Arquitectura UNAM.

Oliva Salinas Juan Gerardo, *Estudio sobre la construcción de cascarones reticulados*, Ciudad Universitaria, México, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Arquitectura, 1989. Clasificación TA 660.G7 O55, Existente Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Olvera López Alfonso, *Análisis cálculo y diseño de las bóvedas de cascara*, Sexta edición, México, Ed. Continental S.A. de C.V. 1982, Clasificación TH2416057 Existente en la Biblioteca Central, UNAM

Otto Frei, *Cubiertas colgantes*, México. Ed. Labor, 1962, traducción de Francisco Folguera. Clasificación: TH 2417 08 1936. Existente Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Quintas Valentín, *Estructuras espaciales en edificación, análisis y cálculo*. Madrid, Ed. Rueda, 1996. Clasificación NA2750 Q85. Existente en la Biblioteca Central UNAM.

Raeder Pablo, *La geometría de la forma*, México, UAM, 1992, Clasificación QA501 R26, Disponible en el catálogo de la Biblioteca Central UNAM. Clasificación QA501 R26

Rincón Medina José Luis, *Programa para el cálculo de esfuerzos básicos en los paraboloides hiperbólicos*. México 1976, Tesis de Licenciatura. Clasificación 001-00121-R15-1976-101, Existente en la Biblioteca Central UNAM.

Seguí Buenaventura Miguel, *Félix Candela arquitecto*, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid España, Clasificación NA 759.C3.S44, 1994 Existente en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM.

Tonda Juan Antonio, *Félix Candela*, México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, Dirección General de Publicaciones, 2000, NA 759.C3 T65. Existente en la Biblioteca Luis Unikel, División de estudios de Posgrado, Arquitectura. UNAM

Tonda Juan Antonio et al, *Paraboloides hiperbólicos, nomogramas para el cálculo de esfuerzos de membrana*, México, Ed. Limusa-Wiley S.A., 1972.

Ventsel Eduard, et al, *Thin Plates and Shells, Theory, Analysis, and Applications*, New York, Ed. Basel 2001. Clasificación QA935 V45, Existente en la Biblioteca Central, UNAM. Traducido por Carolina Carmona.

Artículos:

International Journal of Space Structures, Inglaterra Vol. 20 No. 1 2005, Schlaich, Schober, Kürschner, *New Trade Fair in Milan-Grid Topology and Structural Behavior of a Free-Formed Glass-Covered Surface*. Traducido por Carolina Carmona.

Bitácora, México, No. 5 2001, Basterra Otero Alfonso, *Félix Candela y el borde libre*.

Bitácora, México, No. 5 2001, Oliva Salinas Gerardo, *Cubierta tipo en el Palacio de Minería*.

Bitácora, México, No. 9 2003, Godoy Iliana y Villanova Jorge, *Barcelona y el Año Gaudí*.

URL (Uniform Resource Locator) se refiere al localizador uniforme de recursos, en este caso todos los extraídos de Internet. Imágenes e información han tenido su última actualización en Febrero de 2008.

URL CONSULTADAS

http://es.wikipedia.org/w/gaudi_antonio.html

http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial_de_curvas#Centro_de_curvatura

<http://www.mtas.es/insht/principal.html>

<http://www.encarta.msn.com>

<http://www.artehistoria.com/historia/obras/17004.htm>

http://www.greatbuildings.com/architects/pier_luigi_nervi.html

<http://www.tdx.cesca.exs/tesis.html>
<http://www.detail.de/db>
<http://www.velarias.net>
http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/marco_cuadricas.htm
http://www.biologia.edu.ar/matematica/cuadricas_archivos/frame.htm#slide0022.htm
<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/SUPERIOR/t2-Funciones-de-variasvariables/6-superficiescuadraticas/index.html>
http://personales.unican.es/olazabaj/Docencia/Algebra_Lineal/software/maples/algelin/metricos/cuadricas/cuadricas.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial
<http://mathworld.wolfram.com/GaussianCurvature.html>
<http://www.vialattea.net/curvatura/>
http://www.ual.es/~maguilar/ITI_poliedros.pdf
http://www.theblueplanet.ch/infocenter/seminari2000/geometria_spazio/geometria_spazio.htm
<http://es.wikipedia.org/wiki/Tierra>
<http://www.geocities.com/SoHo/Gallerie/1608>
http://buscon.rae.es/drael/SrvItGUIBusUsual?TIPO_HTML=2&TIPO_BUS=3&LEMA=dise%F1o
<http://www.richardrogers.co.uk/render.aspx?siteID=1&navIDs=1,4,23,409,1205>
<http://www.fpolar.org.ve/matematica3/fasciculo18.pdf>
<http://www.internet-friedhof.de/modules/news/article.php?storyid=131>
http://en.wikipedia.org/wiki/Pengrowth_Saddledome

ÍNDICE DE URL DE IMÁGENES UTILIZADAS

Imagen III- Eden Project, Fotografía de Matt Cardy/Getty D.R. origen:

www.guardian.co.uk/g8/story/0,13365,1520796,00.html

Imagen IV- Museo Guggenheim, origen: **www.fec.unicamp.br/~gigliarq**

Imagen VI- Paraboloide Hiperbólico, origen: **es.wikipedia.org/wiki/Paraboloide**

Figura 6 – Burbuja, origen: **<http://www.metablake.com/photos/pcicture/polarbubbles.final.htm>**

Figura 7- Experimento de pompa de jabón, origen:

<http://www.velarias.net/tensoestructuras.estudioformaldelasvelarias.lonarias.htm>

Figura 9 - Paraboloide hiperbólico, origen:

<http://www.mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic/paraboloidhyperbolic.shtml>

Figura 13- Fachada de la sagrada familia, origen:

<http://www.lugardeorigen.net/blog/wp-content/uploads/2007/06/gaudi08.jpg>

Figura 15- cubierta de la sagrada familia, origen:

<http://www.mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic/paraboloidhyperbolic.shtml>

Figura 19- Almacenes Bacardi, origen:

http://www.anc-d.fukui-u.ac.jp/~ishikawa/Aloss/page/Candela_Work.htm

Figura 23- Palacio de los Deportes, origen:

html.rincondelvago.com/felix-candela.html

Figura 24- Parque Oceanográfico, origen:

<http://www.schlossplatz.net/schalen/bei.htm>

Figura 27- Expo Montreal 1967, pabellón de Alemania, origen:

http://www.architecture.com/go/Architecture/Also/Awards_4396.html

Figura 28- Modelo de pompa de jabón para la estación de trenes en Stuttgart, origen:

<http://freiotto.com/FreiOtto%20ordner/FreiOtto/HauptseiteGross.html>

Figura 29- Estación trenes de Stuttgart, origen:

http://www.holcimfoundation.org/awards/global/DE_booklet.pdf

Figura 57- Estadio Olímpico de Munich, origen:

www.educared.org.ar/tamtam/images/munich.jpg

Figura 64- Esquema reglado del paraboloide hiperbólico. Origen:

<http://www.mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic/paraboloidhyperbolic.shtml>

Figura 66- Cimbrado terminado Capilla Lomas de Cuernavaca, origen:

<http://de.structurae.de/structures/data/index.cfm?id=s0028388>

Figura 70- Velaria en espacio abierto, origen:

<http://www.fabricarchitecture.com/downloads/Signature07USA.pdf>

Figura 83 y 84- Penwroth Saddledome, origen:

<http://www.arcaro.org/tension/album/saddledome.htm>

Figura 85 y 86- Palacio de Justicia Bélgica, origen:

<http://www.plataformaarquitectura.cl/2006/07/09/richard-rogers-palacio-de-justicia-de-amberes-belgica/>

Figura 87 y 88- Catedral de St Mary, origen:

<http://www.flickr.com/photos/lizandcormac/277531236/in/set-72157594341711843/>

Figura 89- Café y Restaurante Seerose, origen:

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Potsdam?uselang=sv>

Figura 110 y 111- Abacus Shadestructures, origen:

<http://www.shadestructures.com.au/project-structures-type.php?ProjectCode=WT027&projectType=B>

Figura 116. Uso actual de gasolinera, origen:

<http://www.flair-twl.de/TWAtlas/Atlas.htm>

Figuras 119 y 120, Pasillo en la Universidad de Berkeley y Aeropuerto Internacional de Oakland, origen:

<http://nisee.berkeley.edu/elibrary/getpkg?id=GoddenE45-65>

TABLA: La aplicación de las cuádricas en la arquitectura, Imágenes:

Elipsoide. Aplicación: Massimiliano Fuksas, Centro Richerche Nardini, Vicenza, Italia

http://www.electaweb.it/electa/ita/etc_libri/22-1455-1.jsp

Hiperboloide de un manto o de una hoja. Aplicación: Oscar Niemeyer, Cathedral en Brasilia, Brasil

http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cathedral_Brasilia_Niemeyer.JPG

Hiperboloide elíptico o de dos mantos. Aplicación: Ventanales de la Sagrada Familia en Barcelona, España:

http://www.facd.ubiobio.cl/2ctv/tema_4.pdf

<http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=184088>

Paraboloide elíptico. Aplicación: Norman Foster St Mary Axe Swiss Reinsurance Headquart, Londres

http://www.freshwatertechnology.com/pr_chloride/PPP030.php

Cono Elíptico. Aplicación: Norman Foster Entertainment Center Khan Shatry, Kasajistán

<http://voragitectionique.wordpress.com/2007/04/11/sir-norman-foster-entertainment-center-khan-shatry/>

Paraboloide Hiperbólico: Aplicación: Iglesia Palmira, Extraída del libro:

Félix Candela de Juan Antonio Tonda (datos completos antes citados en libros)

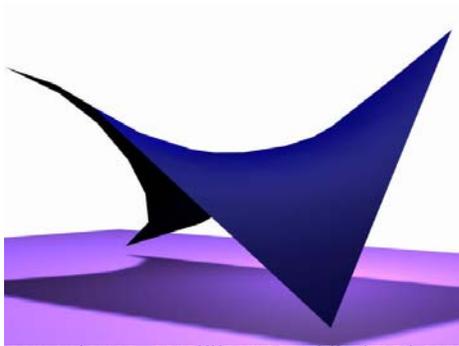


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ARQUITECTURA

Programa de Maestría y Doctorado en Arquitectura
Campo de conocimiento: Tecnología

METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA EL DISEÑO DEL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Elaborado por:
Arq. Carolina Carmona Aparicio



Conceptos:

Metodología: Ciencia del método. Conjunto de métodos que se siguen en una investigación científica o en una exposición doctrinal.

Método: Modo de obrar o proceder, hábito o costumbre que cada uno tiene y observa. Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla.

Didáctica: Pertenece o relativo a la enseñanza, Propio, adecuado para enseñar o instruir, Arte de enseñar.

Según la Real Academia de la Lengua Española, Referencias:

<http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual?LEMA=metodologia>

http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual?TIPO_HTML=2&TIPO_BUS=3&LEMA=m%E9todo

http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual?TIPO_HTML=2&TIPO_BUS=3&LEMA=did%E1ctica

En base a los conceptos antes citados, definimos los siguientes, relativos a este trabajo:

Metodología didáctica: Es el conjunto de métodos y técnicas, que usaremos para generar una herramienta de enseñanza, enfocada al aprendizaje del diseño del paraboloides hiperbólico, aplicado a la arquitectura. Como diseño, entenderemos:

Forma: ¿qué es?

Delineación: ¿para qué nos sirve?

Descripción: ¿cómo se genera?

Proyecto: ¿con qué se construye?

Disposición: ¿quién lo ha construido?, ¿cómo se ve?

Utilidad: ¿por qué nos sirve construirlo?

Estructura metodológica: Se refiere al orden con el cuál abordaremos el conjunto de métodos y herramientas.

Objetivos

A través de la metodología didáctica, se cumplirán los siguientes objetivos:

- Dar una herramienta de diseño a estudiantes de licenciatura en arquitectura, para que conozcan geometrías diferentes de las convencionales.
- Lograr el entendimiento de la geometría, formas de generación y construcción del paraboloides hiperbólico, enfatizando las **aplicaciones para la arquitectura**, esto es la serie de estructuras y materiales a los cuáles se adapta, por ejemplo los diferentes tipos de cubiertas.
- Generar un método que auxilie a los estudiantes en el trazo de la geometría del paraboloides hiperbólico; considerando el uso de programas de diseño y modelado como AutoCAD y Rhino.
- Dar una aproximación sencilla al desarrollo matemático del paraboloides hiperbólico, enfocado al trazo y ubicación de puntos para su construcción.
- Sentar las bases para la comprensión del comportamiento estructural de la superficie y dar a conocer los métodos de cálculo aplicables a estas estructuras.

Herramientas:

- Todos los anteriores objetivos, se alcanzarán con un documento, que por medio de apoyos visuales y gráficos, demuestre las aplicaciones del paraboloides hiperbólico para la arquitectura. Estará enfocado para estudiantes de licenciatura y profesionales del área que estén interesados.

METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA EL DISEÑO DEL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Índice

**Nota: Por razones de claridad, de aquí en adelante abreviaremos paraboloides hiperbólico con las siglas PH*

• Introducción	pp4
• 1. Concepto General del PH	pp5
¿Quién ha usado el PH, cuándo y cómo lo ha hecho?	pp6
• 2. ¿Cómo se genera?	
Parábola e hipérbola.	pp9
Las rectas	pp11
La combinación de líneas y curvas en la superficie.	pp12
• 3. Aplicaciones a la arquitectura, ¿Cómo se construye?	
Rectas, Cascarones.....	pp13
Triangulaciones, Velarias.....	pp15
Arcos, Mallas reticuladas.....	pp16
Tipos de combinaciones para un PH	pp17
• 4. Proyecto	
¿Cómo trazo un PH? Herramienta para AutoCAD	pp19
Herramienta para Rhino	pp25
Uso de la aplicación GEO ¹ , para el trazo de la superficie en AutoCAD	pp26
• 5. Utilidad	
Un caso aplicado: El paraguas.	pp28
¿El PH es sustentable?	pp29
• 6. Aproximación al cálculo	
¿Cómo funciona un PH estructuralmente y por qué es eficiente?	pp30
Documentación: Algunos métodos para calcularlo	pp32
• 7. Conclusión y recursos de utilidad	
Reflexión final.....	pp33
Guía de páginas web y contenidos de interés de estas.....	pp34

¹ El programa GEO, está desarrollado por el especialista en cubiertas ligeras, Marcos Ontiveros, al cual se agradece la facilitación de la aplicación para motivo de este manual.

Introducción

Como arquitectos, construimos lo que diseñamos y diseñamos lo que conceptualizamos. El concepto viene de una mezcla de lo que conocemos y lo que nos imaginamos. Todo esto con el objetivo de cumplir de la manera más eficiente las necesidades de quien acude a nosotros.

Para lograr esta eficiencia, es una **necesidad** que los arquitectos conozcamos formas diferentes para resolver un problema, y escoger la más conveniente. De no ser así, nuestro desconocimiento, nos limita al uso de las formas convencionales y más repetidas, aunque estas no resuelvan de la manera más eficiente las necesidades que se nos presentan.

Por la problemática antes planteada, he analizado un caso particular que enriquecerá el conocimiento de los futuros arquitectos: **el diseño del paraboloides hiperbólico** (que abreviaremos como PH). El uso de esta geometría, por su topología particular, parece ser de difícil trazo y construcción. Sin embargo, por medio de este documento, se demostrará que es una buena opción para la arquitectura, ya que su aplicación existe en diversos materiales y formas, representando una manera eficiente de resolver las necesidades que se le presentan al arquitecto.

Este documento es una **metodología didáctica**, para que se puedan entender los conocimientos básicos de la forma, el diseño y de la construcción del PH. Los conceptos más ampliados, su base científica y el análisis de la problemática de los estudiantes de arquitectura con respecto a la geometría estructural, están incluidos en mi **tesis de maestría**, que lleva por nombre: **Diseño del Paraboloides Hiperbólico**. También es importante agradecer al **Laboratorio de Estructuras** y su responsable el **Dr. Juan Gerardo Oliva Salinas**, por el apoyo, asesoría y revisión del proyecto, así mismo a la UNAM, por proporcionar los recursos para hacer posible la investigación.

Este documento queda dispuesto a su distribución con el libre intercambio de datos por internet bajo el **"GNU Free Documentation License"** quedando con el formato de **"copyleft"** que garantiza el uso de imágenes* y contenido, siempre y cuando se cite la fuente y el año de origen, en este caso: **Metodología Didáctica para el Diseño del Paraboloides Hiperbólico, de Carolina Carmona Aparicio, UNAM, 2007**, y se otorgue crédito a la institución responsable de la investigación que es la Universidad Nacional Autónoma de México.

Fuentes del tratado: <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>

*Las imágenes que ha cedido el autor con D.R. (derechos reservados) son propiedad intelectual de este, y su reproducción solo se puede dar con su previa autorización o bajo la leyenda de reproducción con fines didácticos.

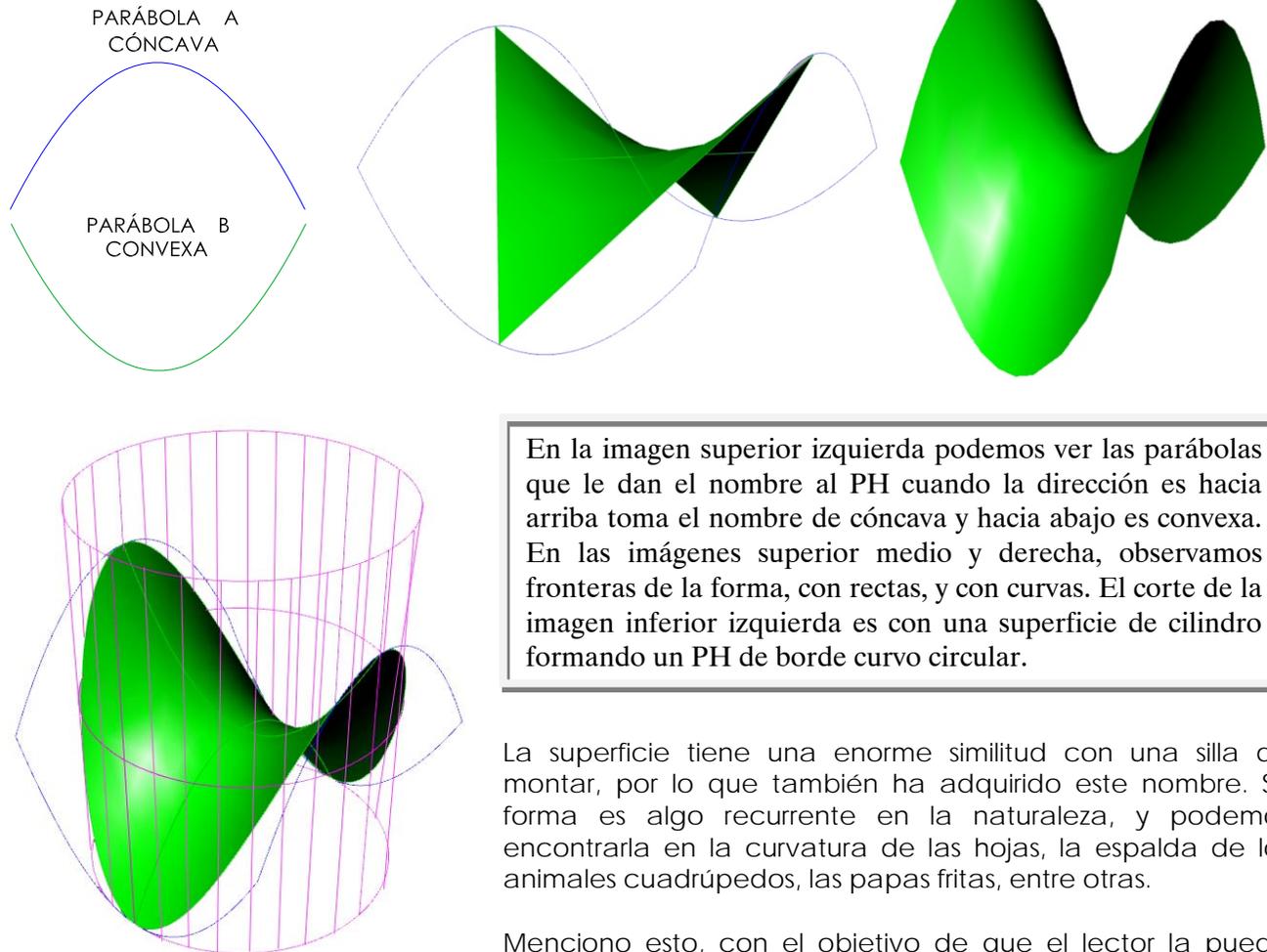
Todas las imágenes extraídas de internet, cuentan con un hipervínculo que lleva a la página de origen, la cual se escogió por tener contenidos referentes a la arquitectura, en el caso de que el documento se presente por medios impresos las URL de origen están al final, justo después de la bibliografía.

Por último, les solicito el fortalecimiento de este material, por medio de sus observaciones. Agradeceré sus comentarios a la dirección electrónica: caro98carmona@hotmail.com

*Arq. Caro Carmona,
México, DF, Febrero 2008*

1. Concepto General del PH

El PH es una **superficie** formada por parábolas con dos curvaturas en direcciones opuestas. Una hacia arriba que llamaremos convexa y la otra hacia abajo que llamaremos cóncava. Como superficie, su manto es infinito, y para poderla estudiar tenemos que conceptualizarla con fronteras. Estas no son otra cosa más que líneas, arcos, o bien otras superficies que cortaran al manto para darle diferentes apariencias.



En la imagen superior izquierda podemos ver las parábolas que le dan el nombre al PH cuando la dirección es hacia arriba toma el nombre de cóncava y hacia abajo es convexa. En las imágenes superior medio y derecha, observamos fronteras de la forma, con rectas, y con curvas. El corte de la imagen inferior izquierda es con una superficie de cilindro formando un PH de borde curvo circular.

La superficie tiene una enorme similitud con una silla de montar, por lo que también ha adquirido este nombre. Su forma es algo recurrente en la naturaleza, y podemos encontrarla en la curvatura de las hojas, la espalda de los animales cuadrúpedos, las papas fritas, entre otras.

Menciono esto, con el objetivo de que el lector la pueda identificar en la realidad, ya que en nuestra vida diaria vemos siempre diferentes combinaciones del PH casi sin saber por qué adquieren esta forma, y es más puedo afirmar que nunca nos detenemos a ver por qué los elementos más esenciales de la naturaleza funcionan como lo hacen.

Para analizar al PH como superficie aplicada a la arquitectura, quiero hacer una analogía con un elemento de la vida diaria que todos conocemos. Tomemos las papas: hay muchas maneras de prepararlas, de las cuáles mencionaré dos, una es en rodajas cortando las papas en finas secciones, con lo cual obtenemos las papas fritas; la otra es cortadas en prismas que tienen la forma rectangular o de paralelepípedo, corte con el cual obtendremos las papas a la francesa.

Hay que tomar en cuenta que para soportar el procedimiento de cocción, ambas toman estrategias diferentes. Las fritas, se curvean hasta tomar una forma que soporte las tensiones a las que la papa se ve sometida por el calor del aceite, mientras que a la francesa soporta por el grosor de su área, sin deformar su corte original.



Si nosotros tuviéramos que cubrir el área de un plato, bajo la condición de usar la menor cantidad de material, en este caso de papa ¿cuál usaríamos? Para usar las fritas tendríamos que ordenar las piezas cubriendo el plato con una membrana delgada que abarca mucho espacio con poco material.



En cambio para usar las papas a la francesa, tendríamos que ordenar un número mucho mayor de piezas, con un gasto mayor de material. Concluyendo para este ejemplo, la forma que adquieren las papas fritas es la más eficiente. La geometría curvada que toma la rodaja al cocerse es la del PH.



Podemos decir, que en este caso, la estructura está adquiriendo la forma que ocupa menos material, para cubrir una mayor área. Para la arquitectura este concepto es esencial en las cubiertas que buscan maximizar su funcionamiento, para ello una buena opción es usar las formas que mejor se adapten al trabajo estructural y, por supuesto tener una reducción de material, situación que repercutirá directamente en los costos de construcción.

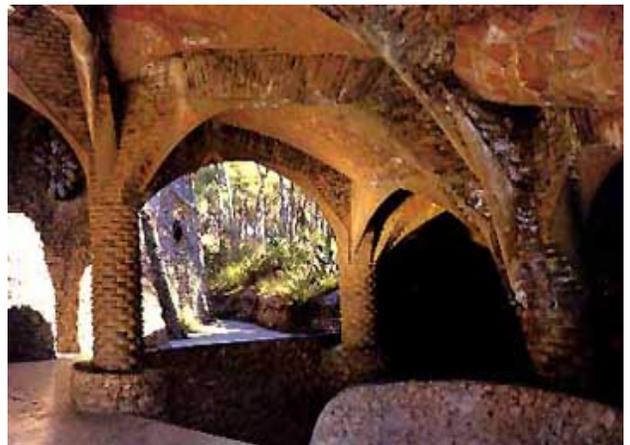
Quiero aclarar, que no es mi intención descalificar algunos tipos de las cubiertas convencionales, como las losas planas, que engrosan su sección para resistir las flexiones propias de su geometría carente de curvatura, más bien quiero hacer del conocimiento del lector la posibilidad que dan otros tipos de formas.

¿Quién ha usado esta forma, cuándo y cómo lo ha hecho?

El uso del PH para la arquitectura es relativamente moderno, esto principalmente se debe al dominio geométrico de la superficie, si bien se han estudiado sus generaciones y fórmulas desde el siglo XVII² (aproximadamente) sus aplicaciones en la arquitectura no son hasta el siglo XX.

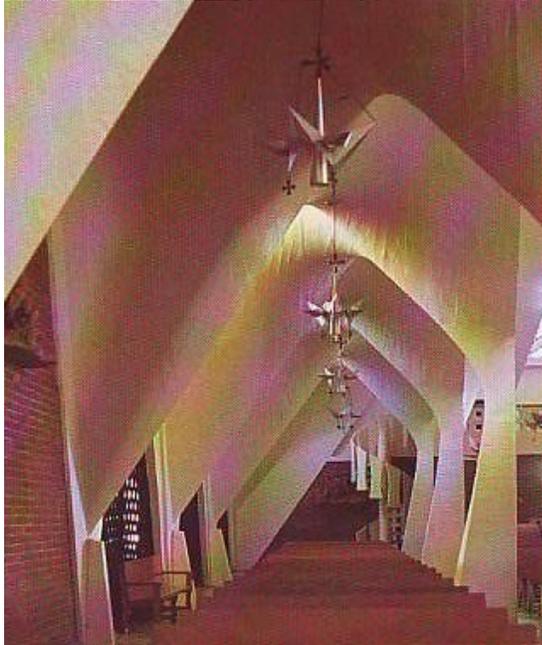
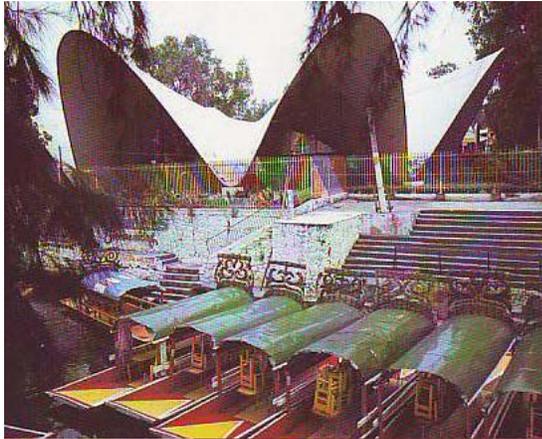
Al primero que podemos encontrar en el uso constructivo del PH es a Antoni Gaudí, quien generaba estas superficies a partir de bóvedas de tabique con cimbra. Aunque no es un aspecto recurrente en todas sus obras, en las últimas anteriores a su muerte es donde podemos encontrar las aplicaciones del PH, por ejemplo en la cripta del la colonia Güell y en los techos de la sagrada familia.

Después de Gaudí, muchos de los estudios de la forma lograron conseguir grandes áreas de cubiertas con pocos apoyos, enfocándose al uso del concreto armado y el ferrocemento.



En esta imagen se ven los PH en la cripta de la colonia Güell. En este caso, el manto está cortado por rectas y apoyado en arcos de borde. Todo construido con piezas cerámicas. La obra quedó inconclusa por la

² Hasta ahora el inicio del estudio del PH no tiene una fecha exacta, esto se puede deber a que la superficie se genera por muchas maneras, y por lo tanto existen diferentes métodos para definir su ecuación y desarrollo.



En la primera imagen superior vemos una de las obras más famosas de Candela, en la que demuestra el dominio de la técnica de los cascarones es en el restaurante “Los Manantiales”, en Xochimilco. En la inferior se muestran los P.H. de la iglesia de la Medalla Milagrosa, en la Colonia Narvarte, ambas se encuentran en el Distrito Federal, México. Las imágenes están extraídas del libro: *Félix Candela*, de Juan

Constructores como Eduardo Torroja, Eugene Freyssinet y Pier Luigi Nervi, aplicaron esta tecnología a diferentes geometrías, sin que la técnica llegara a ser masiva.

Más adelante, **Félix Candela**, dió un gran paso para el desarrollo de las cubiertas ligeras³ y es a partir de la deducción de la forma geométrica del PH que permite simplificar su cálculo, esto básicamente es por la fórmula $z=kxy$. Gracias a esta fórmula, pudo generar el estudio de la teoría de la membrana y deducir la transmisión de esfuerzos para ingeniosas combinaciones de PH.

Es en ese momento, cuando las delgadas láminas de concreto armado dan lugar a una orgullosa etapa que en nuestro país y con ecos en todo el mundo que masifican una técnica que conocemos como “cascarones”. Sin embargo, aunque en su tiempo la numerosa construcción se debió más a factores económicos que a los estéticos, actualmente se reconocen por su calidad plástica y por generar espacios de admirable belleza.

Hay que mencionar que los cascarones son posibles gracias a que el concreto toma la forma que nosotros le queramos dar, en este caso la del PH. Aprovechamos el sistema de generación reglada de la superficie (que más adelante analizaremos) para poder construir la forma de doble curvatura, suena paradójico, pero cierto: **construimos curvas a partir de rectas**. Aunque evidentemente el gasto de cimbra es más que en una estructura convencional plana, este aspecto se compensa por los grandes claros cubiertos.

Sin embargo, el concreto no es el único material para tomar la geometría del PH. Veremos otro sistema de materiales sumamente flexibles a los cuales al aplicarles la tensión adecuada, adquieren la forma del PH. Aunque se les llama de muchas maneras, (tenso estructuras o bien arquitectura textil) para fines de este trabajo usaremos uno de los nombres que más se maneja en México: **velarias**.

Las **velarias**, son delgadas membranas, por lo regular de diferentes materiales plásticos impermeables, que adquieren su geometría final a partir del ensamblado de plantillas. Las piezas de estas se consiguen con la alineación al plano de diferentes geometrías, entre ellas la del PH, y los métodos para unir las varían según el material usado, desde el sellado por medio del calor (termosellado) hasta la unión de sus elementos por medios físicos⁴.

³ El término cubierta ligera, lleva muchas connotaciones, desde la ligereza en comparación con otras estructuras por su delgado espesor, hasta su aspecto visual que aparece mucho menos rígido que otras estructuras.

⁴ Los medios físicos se refieren al método de electro soldado, en el cual por medio de una radio frecuencia, se unen las partículas de las piezas. Este sistema es uno de los más avanzados.

Dicha alineación responde a un principio de la generación de la superficie del PH que se puede nombrar **triangulación**, por el proceso de ubicar coordenadas. Los antecedentes históricos de este sistema, se pueden situar en la antigüedad, desde el uso razonado de textiles para cubrir diversidad de áreas. Sin embargo podemos considerar este sistema como desarrollo tecnológico hasta la segunda mitad del siglo XX, cuando se genera su análisis geométrico y matemático. Representantes como Frei Otto y Horst Berger, son los responsables de generar diversas teorías que son las bases que hoy usamos para el diseño de estas estructuras.



A la izquierda el Estadio Internacional de King Fahd, en Arabia Saudita, diseñado por **Horst Berger** en colaboración con **J. Roberts and partners**, consta de 24 unidades de paraguas, donde la geometría del PH es evidente a primera vista. A la derecha el pabellón *Tanzbrunnen* que cubre una pista de baile en *Bundesgartenschau, Cologne, Alemania*, diseñada por **Frei Otto**, en colaboración con **E. Bubner, S. Lohs y D.R. Frank**. En este último la geometría del manto del PH con borde recto también se renite en secciones enlazadas y de planta radial.

Uno de estos principios es la estructura mínima, en la que el requerimiento es tener la máxima eficiencia, recordemos el concepto de la papa frita, **más área con menos material**, situación posible a partir del uso de la geometría diseñada específicamente para mejorar el funcionamiento estructural.

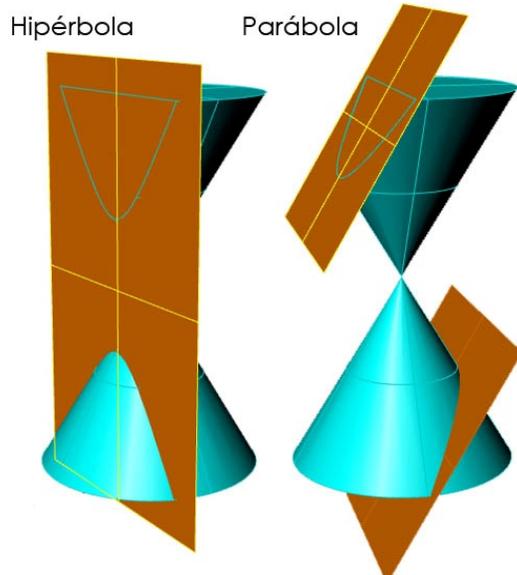
En nuestro país, el diseño de las velarias tiene un papel importante en los desarrollos de la UNAM. Aplicado a proyectos muy diversos, pueden verse en módulos de construcción emergentes o bien para techumbres en edificios históricos. Estos son algunos de los aportes del equipo de colaboradores del laboratorio de estructuras y de su coordinador Gerardo Oliva. La aplicación de la geometría del PH en estos proyectos es esencial para una culminación estructural de los diferentes modelos. Por otra parte, también se aplican otros conjuntos de conocimientos como la mecánica⁵.



A la derecha, vemos el desarrollo tecnológico (Patente Mexicana número: 213'044) cuyo autor es el investigador **J. G. Oliva**, el SUGEST (Sistema Universitario de Gestión Tecnológica) lo describe como un **"módulo desmontable... con capacidad de cubrir una gran área sin apoyos intermedios y con posibilidad de umbrellación"**. En esta imagen aérea es evidente la combinación de 4 mantos de PH.

⁵ Mecánica es un término acuñado por el investigador de la UNAM, Gerardo Oliva Salinas, se refiere a la combinación de la mecánica y la geometría, aplicados al enriquecimiento y la compresión de las estructuras.

Para concluir este apartado, y enfocarnos directamente a los aspectos formales del PH quiero aclarar que el uso de la geometría del PH aplicado a la arquitectura no se reduce a los materiales y técnicas antes vistos. El dominio de la forma y del comportamiento estructural de la superficie, nos garantiza la adaptación a diferentes sistemas y materiales para construirla. Y uno de los propósitos es innovar siguiendo las condiciones de nuestro tiempo histórico y el desarrollo de la tecnología.



En la imagen superior podemos observar dos conos unidos por sus puntos superiores. Si los intersecamos por un plano perpendicular a la base del cono, la curva que se ve es una hipérbola. En cambio si intersecamos por un plano cuya inclinación es igual a la del cono en el corte obtendremos

✘ D:\Mis docus\maestria\tesis\tesisfinal\metod...

2. ¿Cómo se genera?

Parábola e hipérbola.

Una vez fijadas algunas de las aplicaciones de la geometría del PH, ahora analizaremos cuáles son los elementos que lo componen. Para iniciar quiero empezar con el nombre: PARABOLOIDE HIPERBÓLICO, este concepto ya nos denota dos elementos: parábolas e hipérbolas. Ambas curvas son estudiadas por la geometría analítica, y englobadas en dos clasificaciones, la primera es la de las **cónicas**, ya que ambas resultan de la intersección de un cono con un plano en determinada dirección. Y la segunda es la de las **cuádricas**, que nos indica que su ecuación es del tipo cuadrático o bien elevado al cuadrado.

Ahora bien, siendo que estos elementos solo son curvas, la pregunta es: ¿cómo se combinan para dar origen a la superficie? Para definir esta, hay que recordar que en un inicio, hablamos de dos parábolas que están contenidas en el PH, o sea una cóncava (abertura hacia abajo) y una convexa (abertura hacia arriba), estas son las que trasladadas en sí mismas forman la superficie. Por eso se dice que es una **superficie de traslación**.

Para lograr este movimiento tenemos que considerar una parábola que dará la dirección (**directriz**), la dividimos en segmentos equidistantes y fijamos los puntos. Después trazamos otra parábola y la copiamos cada uno de los puntos antes fijados, de tal manera que su repetición generará la superficie (**generatriz**). Hasta aquí, es obvia la posición de las parábolas, pero ¿dónde están las hipérbolas? Para poder encontrarlas, pensemos en la posición de la superficie. Si nosotros vemos al PH como una silla de montar, su posición siempre tendrá que ser la que conocemos que se usa en la vida real.

Ya posicionada, imaginemos que cortamos la silla de montar para que quede totalmente horizontal, como si la fuéramos a colocar en el piso y tuviera que quedar estable. Al hacer esto, nos quedará una figura que al verla desde arriba, nos dibujara dos curvas y dos rectas. Las dos, curvas que vemos son las hipérbolas y las dos rectas las asíntotas.

En este caso, la parábola cóncava **genera** (generatriz) la superficie a partir de su movimiento a lo largo de la parábola convexa que le da la **dirección** (directriz)

En este punto tenemos que tener especial cuidado, ya que según la posición en la cual se encuentre el corte al PH la visión de ambos elementos puede cambiar. A

continuación hay varias vistas que nos aclaran el concepto.

✘ D:\Mis docus\maestria\tesis\tesisfinal\metodologia\imagenes\sillamontar.jpg

a) En la silla de montar encontramos la parábola en el sentido longitudinal.

b) La trazamos en un modelo en el programa Rhino, y consideramos un plano horizontal.

c) Dicho plano cortará la superficie, en los dos extremos superiores.

d) Si la observamos desde arriba, podremos ver dos curvas hipérbolas, que serán consecutivas a cada plano paralelo que corte la superficie.

e) Nos queda una superficie igual a la silla de montar, y las hipérbolas son evidentes en el corte.

f) Fijamos un punto que se encuentra en el punto medio de las dos parábolas que generan la superficie, y le llamaremos **vértice**. Si bajamos más el plano, de tal manera que corte la silla por debajo del vértice, obtendremos la otra familia de hipérbolas.

g) Esto nos indica que al igual que las parábolas, las hipérbolas recorren la superficie en dos direcciones.

h) Si cortamos por el vértice, en lugar de hipérbolas, obtendremos dos rectas llamadas

✘ D:\Mis docus\maestria\tesis\tesisfinal\metodologia\imagenes\sillamontar2.jpg

i) Las asíntotas, se prolongarán hasta donde nosotros las limitemos, y su dirección cambiará según la hipérbola que esté definiendo, una hipérbola siempre estará asociada a este par de rectas.

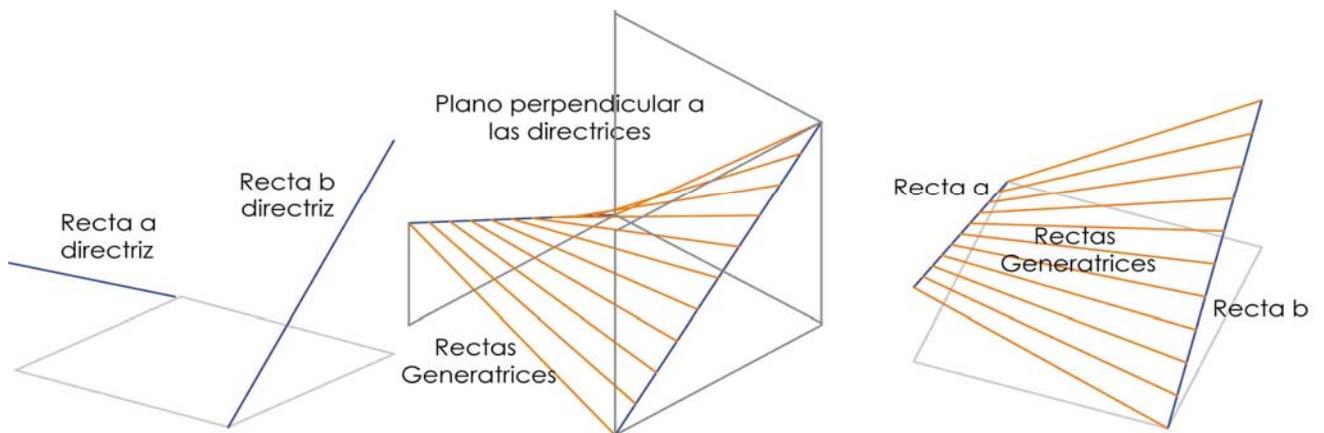
j) Como mencioné antes, el plano con el que se corte y la asíntota, comparten la misma posición en el espacio, que define a su vez la posición de la hipérbola, en sus vistas laterales, cuando las parábolas son evidentes, las hipérbolas se ven como rectas, esto se debe a su posición en el espacio.

Las rectas

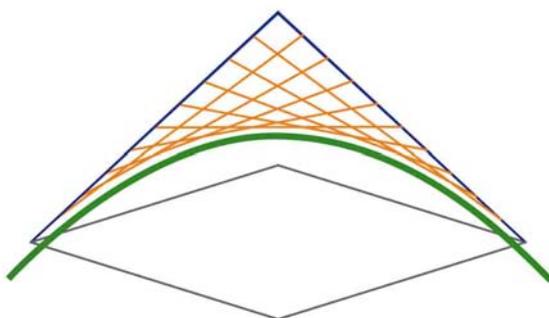
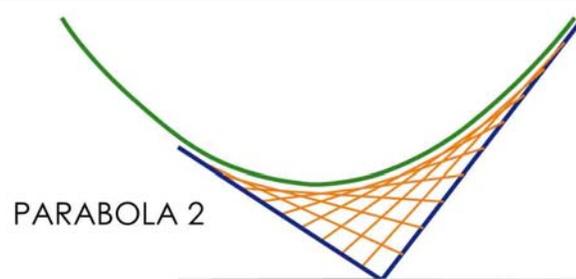
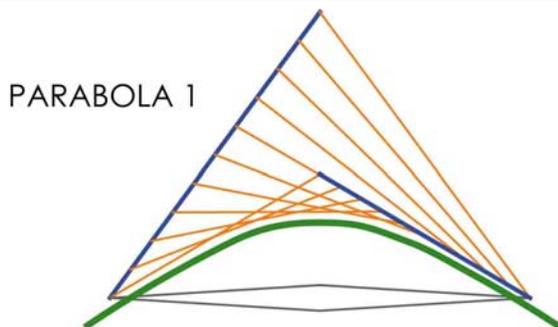
La anterior visión del PH fue considerando el origen de su nombre y su generación por medio de la traslación de las parábolas. Sin embargo no es la única manera de crear la superficie. También hay otro método, en el cual con rectas construimos la superficie, concepto que ya había empezado a comentar cuando hablé de los cascarones.

Para analizar el concepto de la superficie reglada, primero pensemos en el **alabeamiento**. Este lo usaremos para indicar el movimiento de una recta en el espacio; cuando esto sucede la superficie tiende a irse doblando, o dicho en otras palabras, cambiando su posición según cómo va incrementando su dimensión.

Para hacer más claro esto, pensemos en un par de rectas con diferentes posiciones en el espacio que darán la dirección, por lo que las llamaremos **directrices**, cada una será perpendicular a un determinado plano al cual nombraremos **plano director**. Para poder generar la superficie, necesitamos que otro conjunto de rectas vaya uniendo las directrices conformando una sucesión a la cual le llamaremos **generatrices**.



Las rectas A y B, son las directrices y se encuentran en diferentes posiciones en el espacio. Para unir las rectas, la sucesión de generatrices las recorren formando la superficie. El alabeamiento se denota cuando la superficie sube y baja. Si cambiamos de ángulo visual, nos daremos cuenta que desde arriba solo aparecería un rectángulo, pero al ir rotando se empieza a ver la diferencia de alturas en los

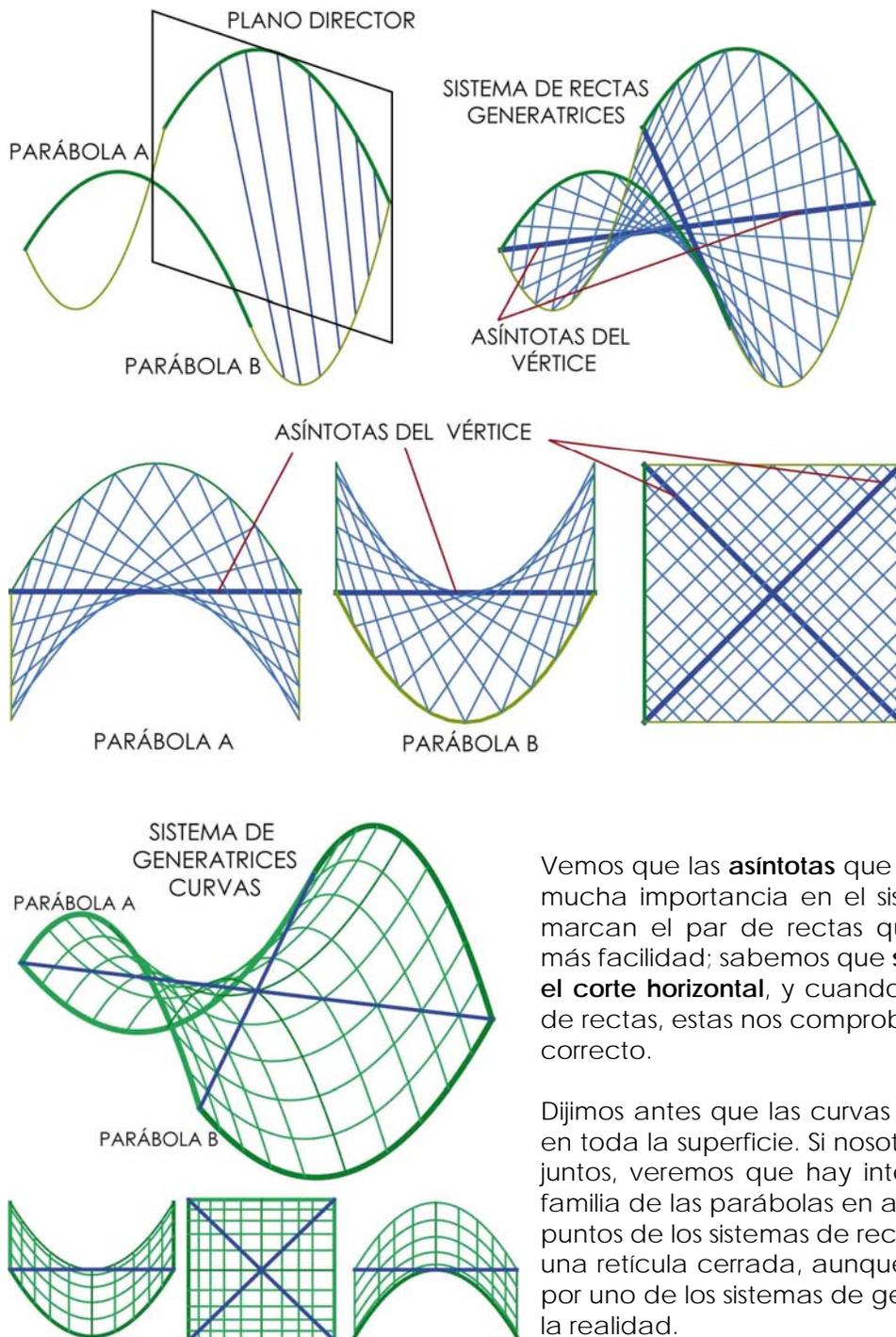


Al seguir rotando la superficie, en ciertas posiciones del PH, podremos observar con claridad las dos parábolas que lo conforman. A su vez también podemos observar que aunque es la misma superficie, su aspecto estético es muy diferente tomando los diferentes ángulos, dando con esto importantes aplicaciones según su

La combinación de líneas y curvas en la superficie.

Ahora bien, ¿en qué se relacionan esta familia de rectas con las curvas que forman al PH? Para responder, tenemos que retomar los conceptos de directriz y generatriz. Si nosotros consideramos la parábola de la silla de montar como directriz, y por lo tanto paralela a un plano director, sabremos que existirán un conjunto de rectas perpendiculares que en sucesión generarán la superficie.

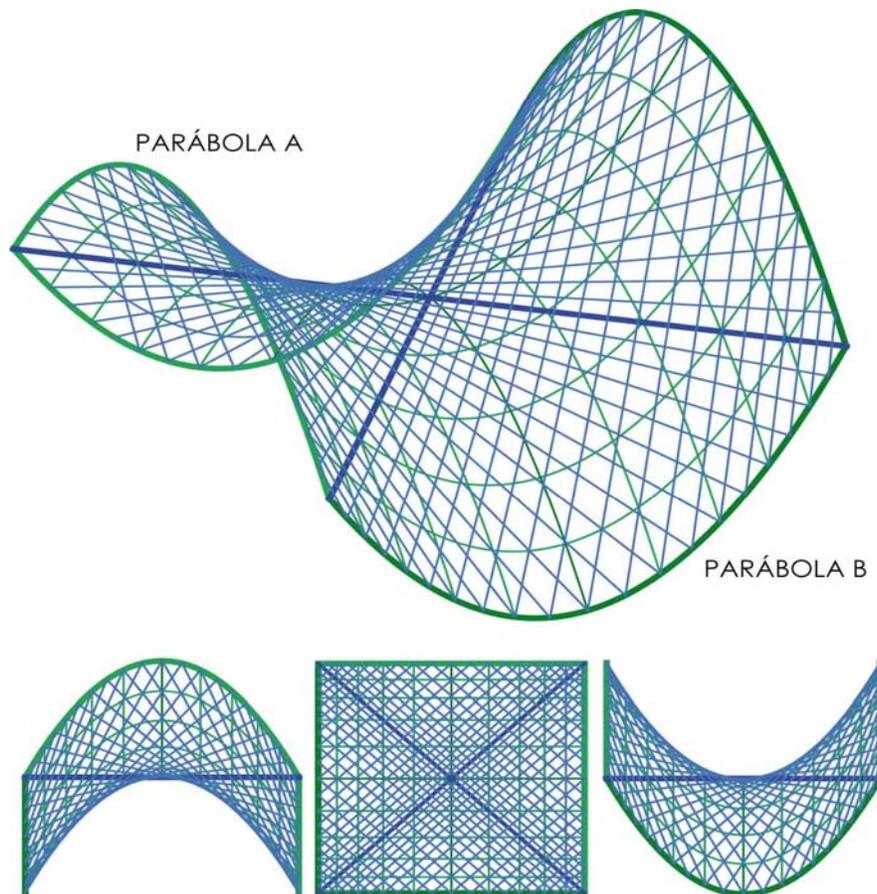
De esta manera, las rectas al moverse en el espacio, construirán al PH, esto es **generar una superficie curva a partir de rectas**. Hay que tener en cuenta que el PH tiene contenidos una infinidad de curvas y rectas, para fines de la explicación, los marcamos en retícula para que se entienda la construcción. A continuación veremos más claro esto.



En las ilustraciones superiores, vemos la conformación de las rectas generatrices, que conectan a las parábolas A y B. Estas se dividen en segmentos equidistantes, en una conformación en dos direcciones en el PH. En las imágenes inferiores, están las diferentes posiciones de la superficie y como se ven los sistemas de rectas generatrices. Algo muy importante es mencionar que en ese sistema se encuentran las **asíntotas** que pasan por el vértice, concepto

Vemos que las **asíntotas** que pasan por el vértice, toman mucha importancia en el sistema reglado, ya que ellas marcan el par de rectas que podemos encontrar con más facilidad; sabemos que **siempre estarán presentes en el corte horizontal**, y cuando generemos nuestro sistema de rectas, estas nos comprobarán que nuestro modelo es correcto.

Dijimos antes que las curvas y las rectas, están presentes en toda la superficie. Si nosotros trazamos los dos sistemas juntos, veremos que hay intersecciones en los cuáles la familia de las parábolas en ambas direcciones encuentra puntos de los sistemas de rectas. Esto nos permitiría formar una retícula cerrada, aunque por lo regular se opta solo por uno de los sistemas de generación para construirlo en la realidad.



Podemos observar el doble sistema de generación, por curvas y por rectas.

Ambos sistemas serán coincidentes en ciertos puntos, esto dependerá de qué tan cerradas o abiertas hagamos ambas retículas.

Los dos sistemas, están generados por la unión de las parábolas directrices A y B, que estarán divididas en segmentos equidistantes, este será un principio básico para que podamos construir la superficie.

Es importante entender que las divisiones de las parábolas, en las vistas laterales y de planta, no guardarán la relación de distancia, por lo cual las veremos más cerradas conforme se aleja de los extremos. Las parábolas, aparecerán como si su

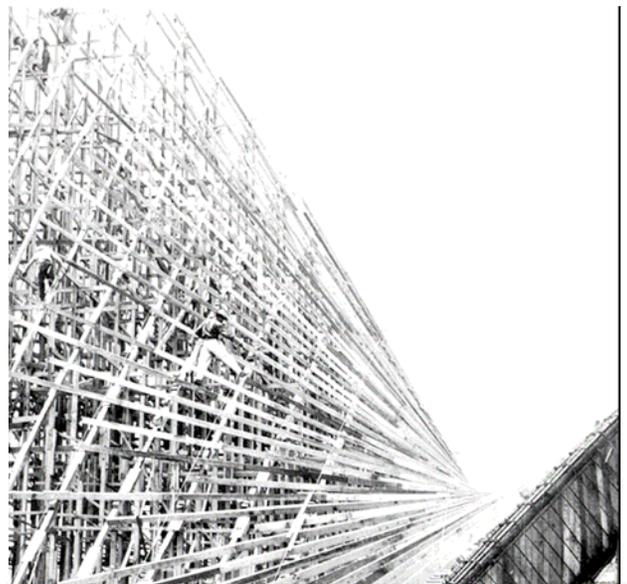
3. Aplicaciones a la arquitectura, ¿cómo se construye?

Rectas. Cascarones

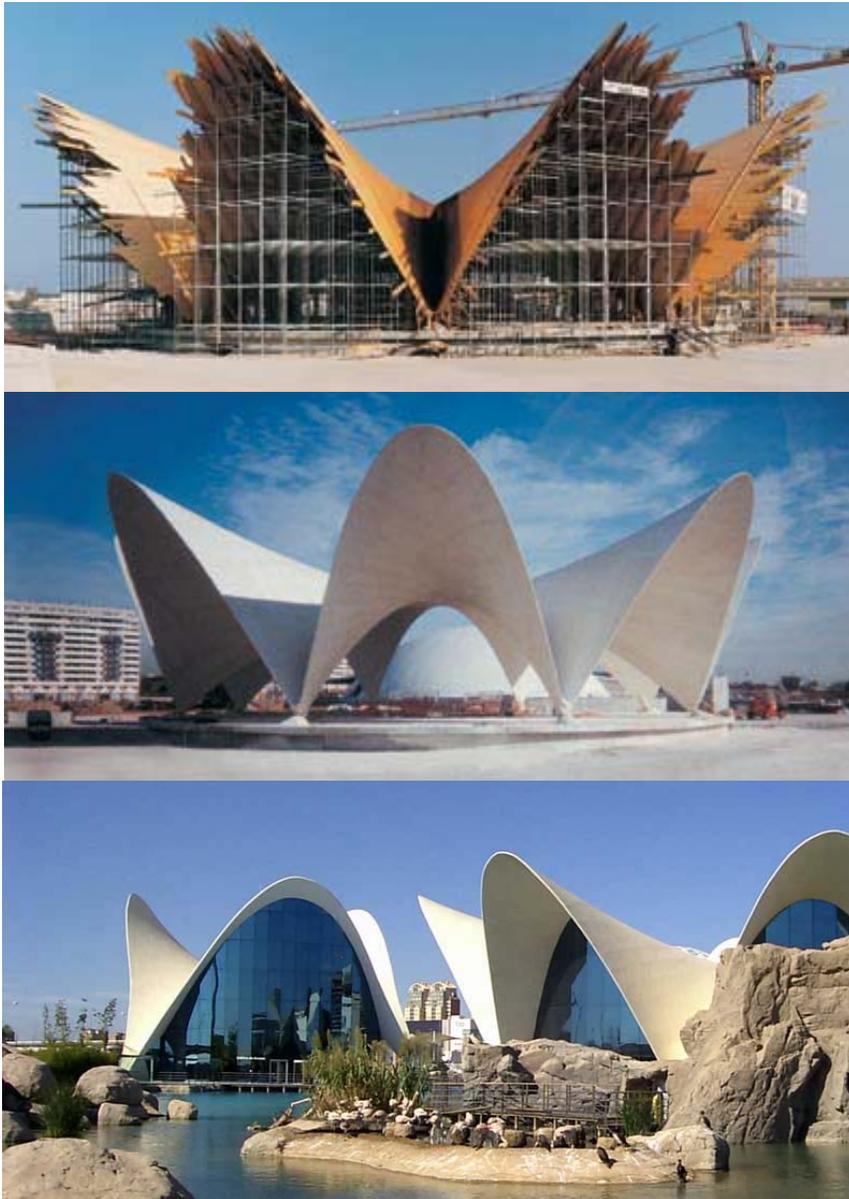
En los conceptos anteriores, vimos que el PH tiene tanto un carácter reglado como una formación por curvas. Esto está directamente ligado a su construcción en el mundo real. Anteriormente hablamos de los cascarones, que no son otra cosa más que la forma que toma el concreto moldeado en un sistema reglado de generatrices.

Para poder hacer los cascarones, lo esencial es encontrar la geometría de la superficie del PH, esto con base a sus **rectas**. De esta manera, fijaremos una altura y posición para cada uno de los puntos, que se construirán con la cimbra a través de los pies derechos.

Para figuras con mucho alabeamiento (o bien doblamiento o pronunciada curvatura) tendremos piezas muy inclinadas, por lo que al lanzar el concreto, tenemos que tener previsto que la superficie tiende hacia la vertical, a raíz de esto técnicas como el concreto lanzado, tuvieron mucha eficiencia con los cascarones.



Cimbra de madera de un cascarón de concreto armado.



El Oceanográfico es la última obra de Félix Candela, la cual fue iniciada antes de su muerte, y se encuentra dentro del conjunto de la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, este último en su mayor parte diseñado por Calatrava.

Este edificio, terminado de construir en 2002, y póstumo a la muerte de Candela (1997), es un conjunto de cascarones de concreto, aunque el acomodo de los mantos lo puede hacer parecerse al restaurante “Los Manantiales”. Los cortes de los PH son diferentes, y su cálculo se hizo a partir de la optimización en el programa de elementos finitos: ANSYS.

Sin embargo, el sistema de cimbra es igual al que Candela usó en toda su vida, un sistema reglado que se puede observar en la imagen superior, salvo que en este caso los pies derechos están conformados con una estructura de acero.

El borde curvo se obtuvo limitando el colado del concreto. En medio se puede observar la estructura sin cancelerías ni

Con el auge de los cascarones también se recurrió al acero pre-esforzado, y a diversas técnicas que permitieron su construcción en serie. Su éxito radicó en cubrir grandes áreas de cubierta con pocos apoyos y un inminente ahorro de material; sin embargo, la entrada del acero y diferentes factores económicos hicieron que disminuyera la generación de estas superficies. Aunque grandes constructores como Juan Antonio Tonda⁶, o Porfirio Ballesteros siguieron conservando esta técnica en México.

Finalmente el secreto para el sistema reglado no es otro sino conocer puntos de la superficie, y la manera en cómo la superficie transmite los esfuerzos para saber cómo podemos hacer los refuerzos y en qué puntos. Actualmente, programas de dibujo como AutoCAD, y plantillas de cálculo como Excel, permiten simplificar en gran manera los procedimientos matemáticos para deducir el PH.

⁶ El arq. Juan Antonio Tonda Magallón, es profesor de la UNAM, teniendo a su cargo una materia de la especialidad en cubiertas ligeras, del posgrado de la Facultad de Arquitectura.

Triangulaciones. Velarias



En este prefabricado tipo “pagoda”, (hypar demountable, Sidney, Canada) se denota que la estructura velaria tiene en sus elementos la membrana, una conformación de plantillas que unidas y tensadas por los elementos de borde, le dan la geometría del PH.

Básicamente son cuatro mantos de borde recto, unidos y dejando el punto más alto al centro. La versatilidad de estos elementos desmontables les permite reinstalarse las veces que sea necesario. cubriendo áreas grandes en poco

Para las velarias, la situación constructiva es muy diferente. Primero hay que hacer notar que a diferencia de los cascarones, estas membranas están formadas por piezas que unidas toman la geometría del PH. Entonces comienza un proceso recursivo, en el cual primero tenemos que diseñar la superficie, alinearla para generar las plantillas, y después volverla a unir para construir el PH en la realidad.

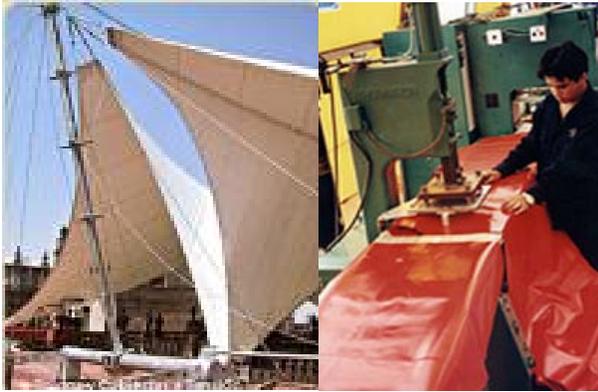
La principal dificultad radica en el diseño de las piezas, que se generan por un procedimiento de alineación que se llama triangulación. Este básicamente consiste en buscar la proyección en el plano de una superficie, y para poder hacerlo necesitamos descomponer una superficie compleja como la del PH, en fragmentos más sencillos. Actualmente, para generar este procedimiento los programas de dibujo como AutoCAD y Rhinoceros, contienen en sus comandos las rutinas para generar el alineamiento.



Sin embargo aunque la membrana es sumamente importante, las velarias engloban un sistema estructural que se compone con los elementos necesarios para mantener la rigidez de la superficie, por lo que postes, cables y en su mayoría piezas que conserven la tensión de la membrana son esenciales para su construcción. Este sistema se caracteriza por su rápida ejecución y por su ligereza. Un punto que puede tener en contra es el diseño de las piezas de la membrana, ya que aunque no es tan complicado el proceso no está difundido.



En las imágenes aparecen piezas que conforman los elementos del sistema estructural de las velarias. En la parte superior, un poste y cables, además donde llega la membrana, esta última necesita un refuerzo por medio de una placa que la tense y que tome los cables que trae en sus bordes la superficie. Estos cables conformarán un elemento llamado relinga, responsable de generar las tensiones necesarias para que la membrana no pierda su geometría. Como se ve en la imagen inferior todos los elementos están



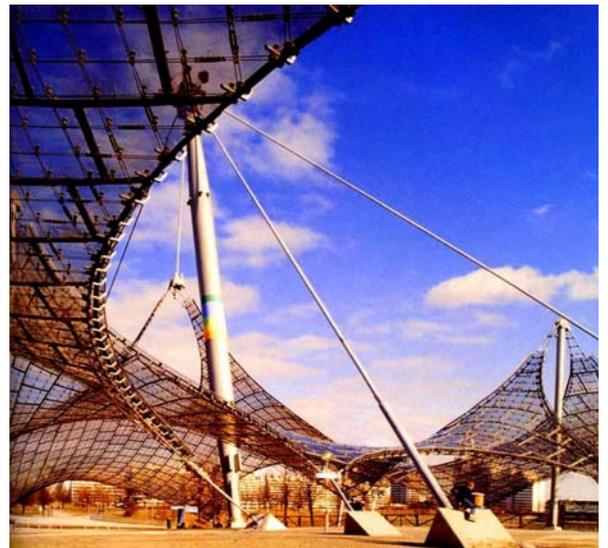
A la izquierda vemos una estructura de poste cable, que como su nombre lo indica combina los dos sistemas, de manera que engrosara su dimensión para soportar mejor las tensiones generadas en la membrana. Las relingas siempre son curvas ya que es una de las maneras más eficientes de tensar la superficie, por lo regular la membrana se refuerza en esa área para resistir las tensiones. Los postes siempre se triangulan para la transmisión de esfuerzos

Arcos. Mallas Reticuladas

Finalmente, existe otro recurso para la construcción de la superficie del PH, y este radica en generar los arcos parabólicos teniendo una malla de redes. Esto nos permitirá construir membranas reticuladas que funcionan como estructura, quedando pendiente el cubrir cada uno de los espacios romboidales generados. Esto se ha hecho con diversos materiales, y aunque representa una buena opción de aplicación, su uso no ha sido tan generalizado como el de los anteriores ejemplos.

En todas las posibilidades de construcción del PH que acabamos de ver, existe un factor que tenemos que tener previsto. Hay que recordar que estos sistemas son la cubierta, por lo que de alguna manera tendremos que proponer sistemas que cierren el espacio. Para los cascarones, habrá que tener bien planeado cuales serán los elementos de muro o cancelería que permitirán confinar el espacio y a su vez que estos permitan la circulación de aire para la correcta ventilación, iluminación y aclimatación del lugar, aunque por la altura que llegan a alcanzar este no es un problema tan significativo. En el caso de las velarias y las mallas de redes, habrá que contemplar en dónde quedan los elementos estructurales de tensión, ya que para que funcionen adecuadamente, se necesita de espacios amplios, o en su defecto, tener bien contemplados donde irán colocados para que no afecten el funcionamiento formal del espacio. Así mismo se tendrá que tener un bloqueo del viento para lugares abiertos.

El estadio Olímpico de Múnich, obra de Frei Otto, es una red o malla de cables, cuyas geometrías se adaptan a la de PH, se le considera una estructura de luz, ya que el material con el que se cierra la malla, es traslucido, dejando casi toda la iluminación natural. Al igual que en las velarias los elementos que conforman el sistema son esenciales, cables y postes dan el equilibrio y la resistencia general de la



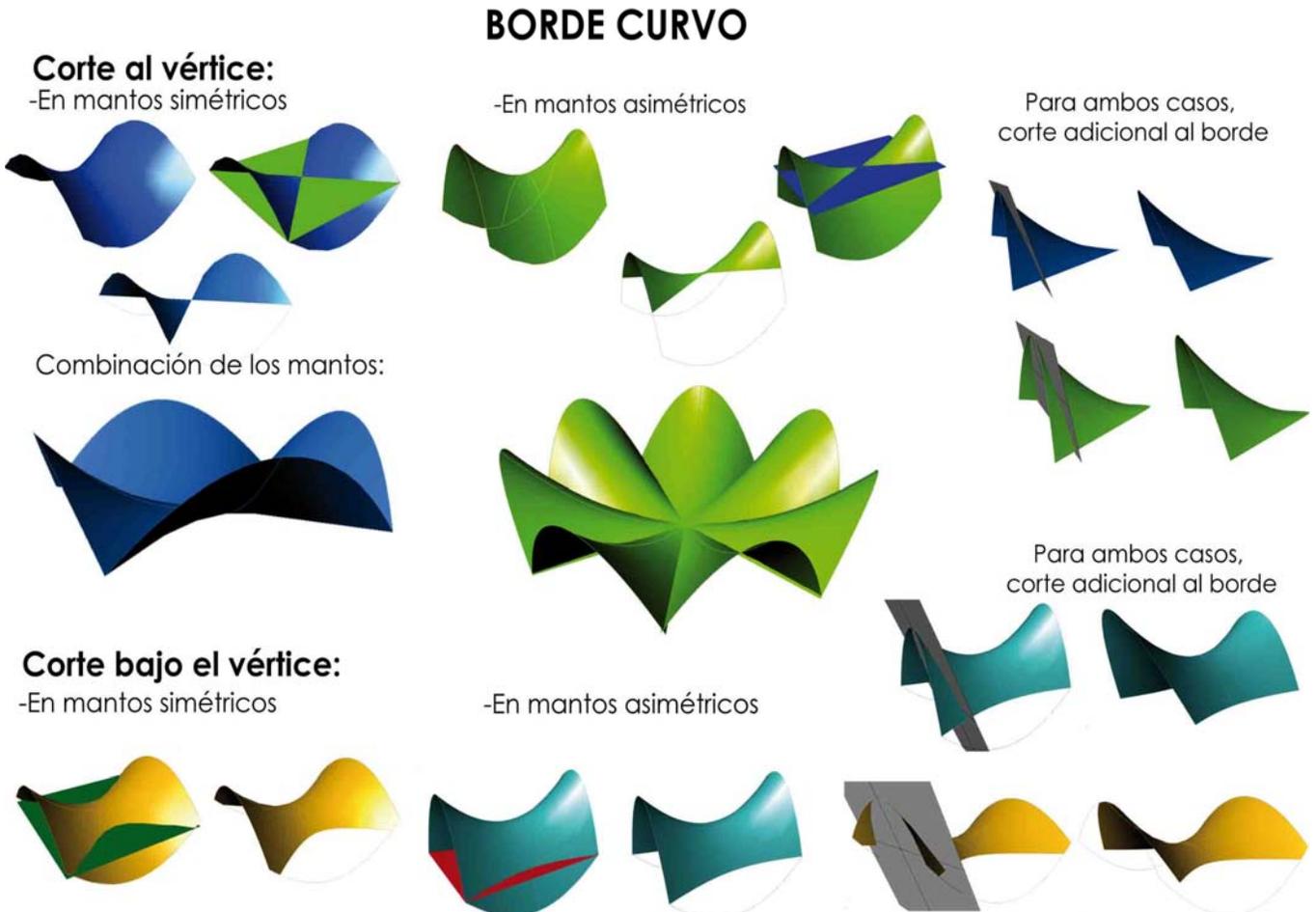
Una de las ventajas estéticas que representa el uso de las superficies del PH, es que generan envolventes curvas, y estas por lo regular hacen parecer que existe más espacio del que en realidad hay, la sensación que el usuario tiene con una cubierta curva, es de amplitud, por lo que si persigue lo contrario con el diseño del espacio habrá que tener especial cuidado. Por otra parte, la combinación de colores en la cubierta y las entradas de luz tendrán una gran importancia en la percepción del espacio.

La incorporación de sistemas de colección de energía solar, es una buena opción, ya que la superficie tendrá diversas inclinaciones, lo cual permitirá una recolección eficiente a varias horas del día. A su vez, el agua se puede canalizar de una manera eficiente hacia sistemas de reutilización. La reflexión que más adelante tomaremos es: **aprovechar este sistema reglado para su construcción en nuevos plásticos y materiales de nueva generación**, y tomar sus características de ligereza para diversos usos hacia una arquitectura

Tipos de combinaciones para un PH

Cabe destacar que la siguiente clasificación de los PH, es una propuesta basándose en los usos para la arquitectura, por lo que formas como el borde curvo de corte cilíndrico (como la papa frita) no están englobados por no ser de uso tan frecuente, también derivaciones como las sillas de mono de una y dos colas no se abarcan por su grado de complejidad.

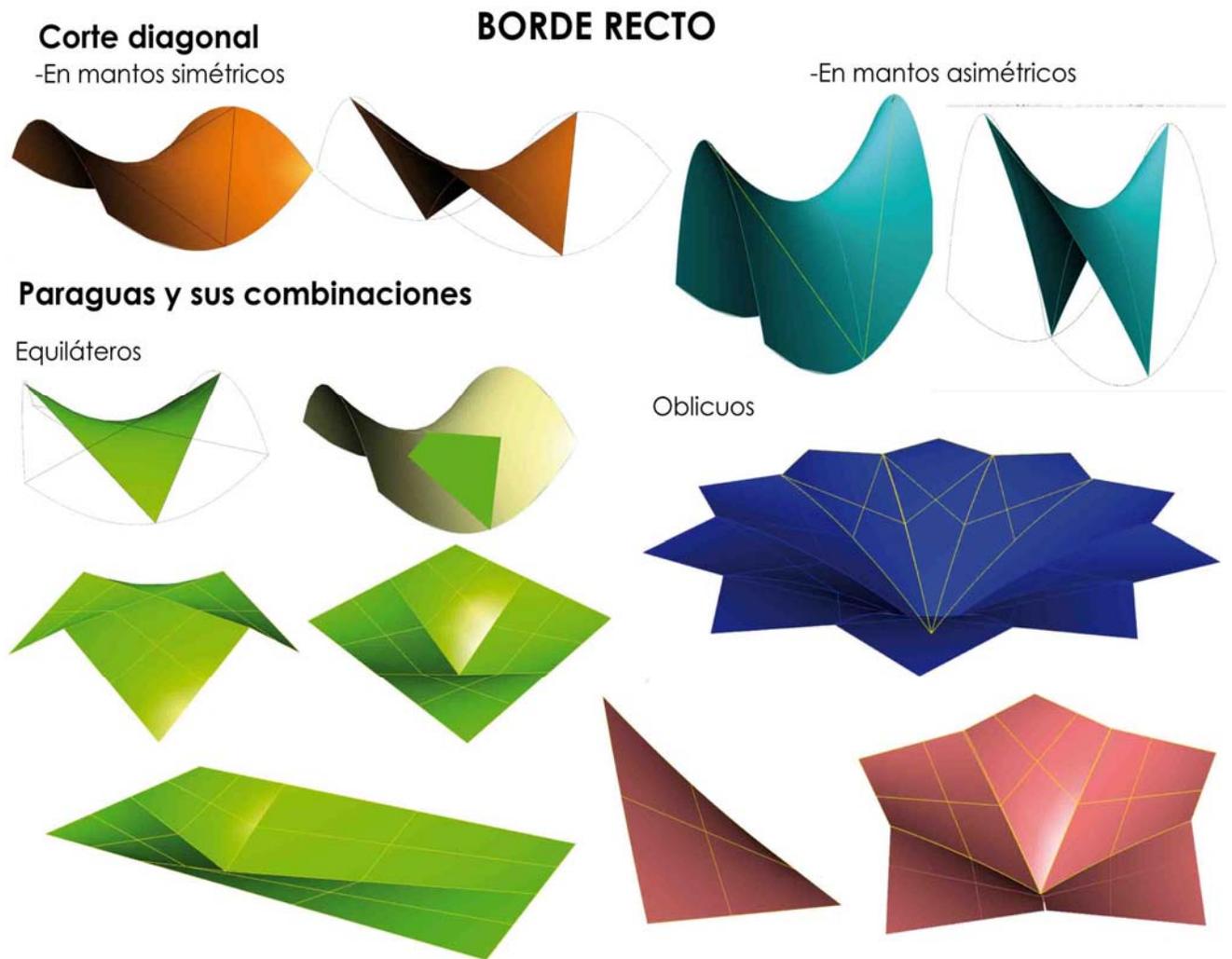
Primero tendremos las clasificaciones de borde curvo, principalmente en dos cortes, al vértice y en cualquier otro punto. Al combinar los diferentes mantos resultantes de los cortes, tendremos estructuras de "gajos" cuyo aspecto variará según los parámetros de las parábolas utilizadas en la conformación del PH.



En el caso del borde recto, las dos principales opciones son el corte diagonal, y un corte secundario a este, generará el paraguas. Para la primera, al igual que en el borde curvo, la diferencia en los parámetros de las parábolas generará un aspecto visual para cada combinación posible. En cambio en el **paraguas**, las divisiones serán en cuanto respecta al ángulo interno de la superficie, clasificándolo en **equilátero**, cuando su ángulo sea igual a 90 grados, y **oblicuo** cuando sea diferente de 90 grados.

Para los paraguas equiláteros, las posibilidades de combinación radican en conjuntar sus lados para darle una dirección superior o inferior. Independientemente, se puede variar la dimensión de dos de los mantos del paraguas. Para los oblicuos, es un poco más restringida esta variación, aunque por sí mismos su combinación resulta en conjuntos de gajos cuyo número depende del ángulo que tenga el manto. Para ambos su aplicación puede ser de un solo manto, dependiendo de su acomodo será el aspecto de la superficie.

Cabe mencionar que los paraguas, son una de las aplicaciones del PH en las cuales, se pueden llevar al límite el grado del alabeamiento, esto es tener solo la altura necesaria para guardar las propiedades de la superficie, permitiendo un ahorro de material, y una posible construcción en serie.



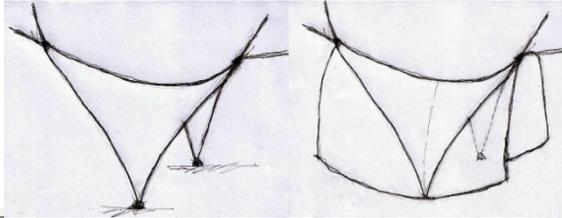
4. Proyecto

¿Cómo trazo un PH? Herramienta para AutoCAD

A partir de los sistemas que vimos anteriormente, vamos a trazar la superficie del PH, este procedimiento es un método usando dos plataformas de dibujo asistido, quiero hacer la mención que todos los dibujos de esta metodología, están elaborados en dichos programas. Utilizaremos las versiones son AutoCAD 2008, y Rhinoceros 4.0 WIP, por ser las más actuales.

1. GENERACIÓN DE LA GEOMETRÍA CONFORMADORA

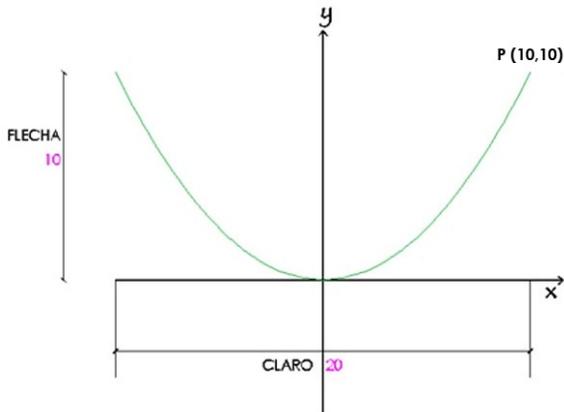
a. Diseño de la superficie que usaremos de base para las plantillas.



Bosquejos de la superficie a mano alzada, determinando la forma que se quiere lograr y su ubicación en el PH.

El diseño, puede ser de diferentes formas, en este caso usaremos el corte de una silla de montar. Sin embargo el método se puede aplicar a diferentes geometrías. Es importante que se tengan los bosquejos o diagramas del tipo de superficie que se quiere diseñar.

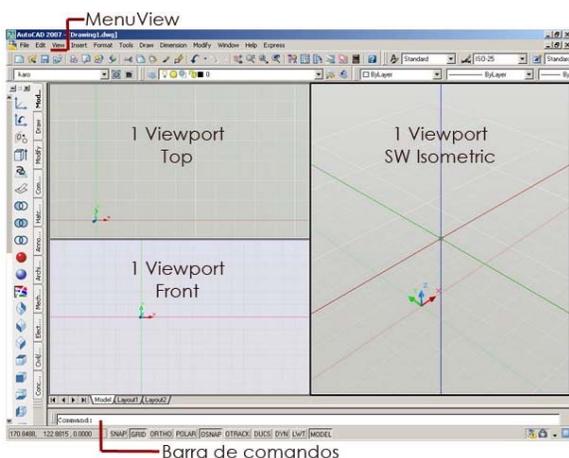
Se identifican las parábolas generadoras de la superficie y se delimitan sus parámetros usando la fórmula $x^2 = 2py$. En este caso, usaremos dos parábolas iguales para facilitar el trazado, donde las dimensiones de la parábola serán 20 unidades de claro y 10 de altura. Se obtendrán puntos para x y y sustituyendo los valores en la fórmula, (para ver el procedimiento completo, consultar la investigación del Diseño del PH⁷).



Características de la parábola a

b. Definición del espacio de trabajo y de las parábolas.

Abriremos un archivo nuevo en la aplicación AutoCAD, en el menú *View*, buscamos el comando *viewports*, y escogemos la opción: 3 viewports. La barra de comandos, pedirá una dirección para desplegar las ventanas, tecleamos "R" en la barra, y después *enter*. La ventana de AutoCAD, se desplegará de manera que tendrá dos *viewports* del lado izquierdo y uno del lado derecho. Presionamos clic en el *viewport* del lado izquierdo superior, en el menú *view* en 3D Views donde estará la opción para manejar la proyección visual, en este caso escogeremos Top.



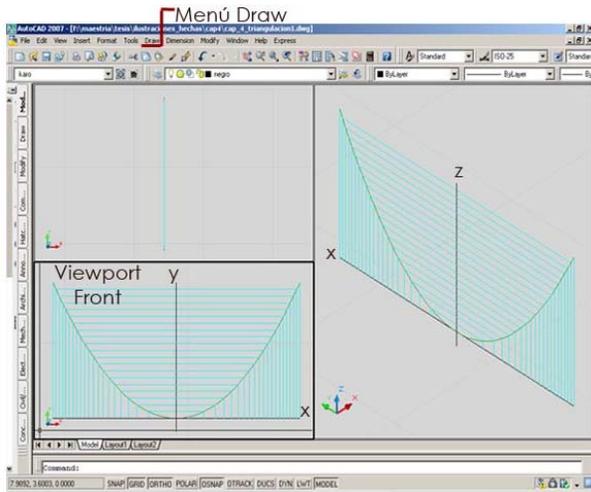
de la imagen, la presentación visual se consigue en el menú *View*, en el comando *Visual Styles*, con la opción 3D Wireframe.

El proceso, se repite con los otros dos *viewport*, en el del lado izquierdo inferior escogeremos Front y para el del lado derecho será SW Isometric.

Hay que recordar, que dentro de la interfaz del AutoCAD 2008, existe una versatilidad para las formas visuales del área de trabajo. Se pueden generar incluso modos personalizados para la manera de visualizar los objetos y superficies.

Para que el ambiente de trabajo sea similar al aspecto de la imagen, la presentación visual se consigue en el menú *View*, en el comando *Visual Styles*, con la opción 3D Wireframe.

⁷ La investigación del Diseño del PH, es mi tesis de maestría.



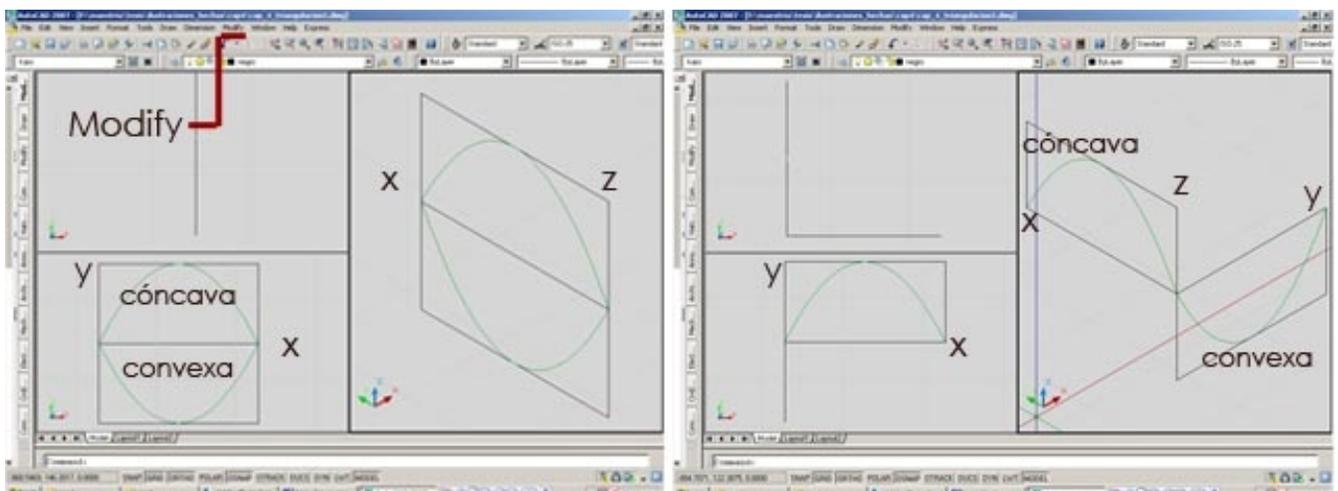
Trazado de la parábola.

Una vez delimitado el espacio del trabajo, hacemos clic en el *viewport Front*, donde dibujaremos dos líneas perpendiculares que en este caso serán los ejes *xy*.

Con ambos ejes, tenemos que realizar la graficación de la parábola, mientras más cercanos sean los valores, la curva será más exacta. El programa no contempla este tipo de curva, por lo que habrá que tener cuidado en la definición, ya que esta puede alterar la geometría de la superficie. Para unir los puntos que forman la parábola, se usa una línea que se puede encontrar en el menú *Draw*, y corresponde al comando *Spline*. Punto a punto se van uniendo las coordenadas en *x* y *y*, para dibujar la curva.

Una vez que tenemos la primer parábola, la delimitaremos en un rectángulo, esto nos ayudara a manipularla. Espejemos la parábola hacia arriba para cambiar la dirección, de tal manera que en lugar de ser cóncava sea convexa. Este procedimiento se logra por medio del comando que se encuentra en el menú *Modify* en el comando *Mirror*. Una vez que lo hayamos hecho, hacemos clic en el *viewport SW Isometric*, para manipular de nuevo la dirección de la parábola.

Cabe aclarar que el AutoCAD, en la vista del *viewport Front*, maneja los ejes *xy*, por lo que la parábola cóncava se encontrará en estos mismos. Sin embargo en la vista *SW Isometric*, los ejes en los que se encuentra inscrita serán *xz*, este cambio de ejes no afecta en nada a la superficie y tan solo es el sistema coordenado que utiliza el programa. Entonces encontrándonos en el *SW Isometric*, rotamos la parábola convexa, de tal manera que gire hacia la dirección de los ejes *yz*. El comando para rotar se encuentra en el menú *Modify* con el comando *Rotate*.

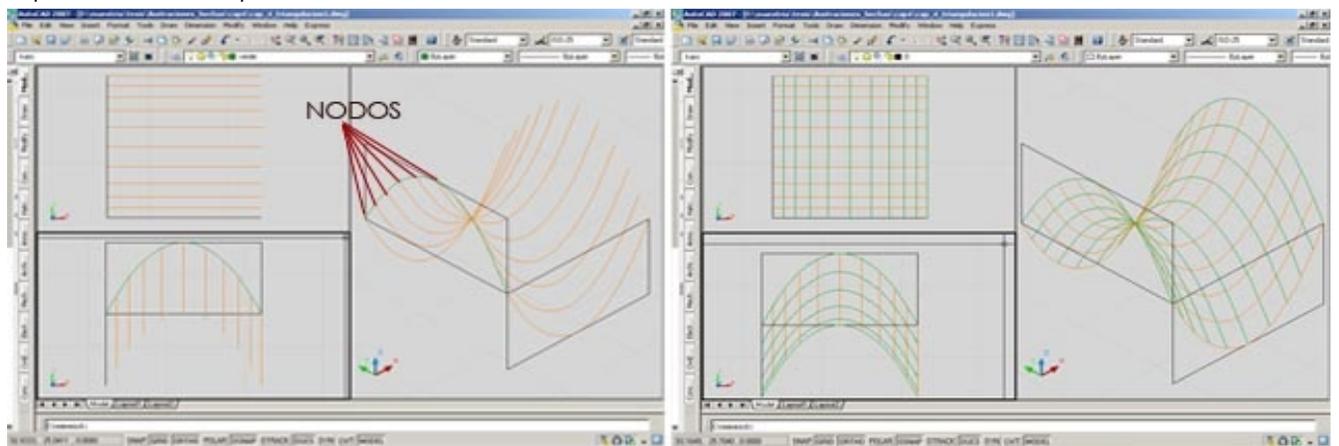


Cambios de espejo y rotación de la parábola cóncava.

2. GENERACIÓN DE LA SUPERFICIE

Una vez que tenemos ambas parábolas, escribimos en la barra de comando, *divide*, inmediatamente nos pedirá que seleccionemos un objeto, el cuál será una de las parábolas. Después requerirá el número de segmentos en los cuales queremos dividir la curva, aquí es importante que el ancho corresponda tamaño del material con el cual se construirá la membrana, obviamente considerando un margen de holgura. Para este ejercicio usaremos 10 secciones.

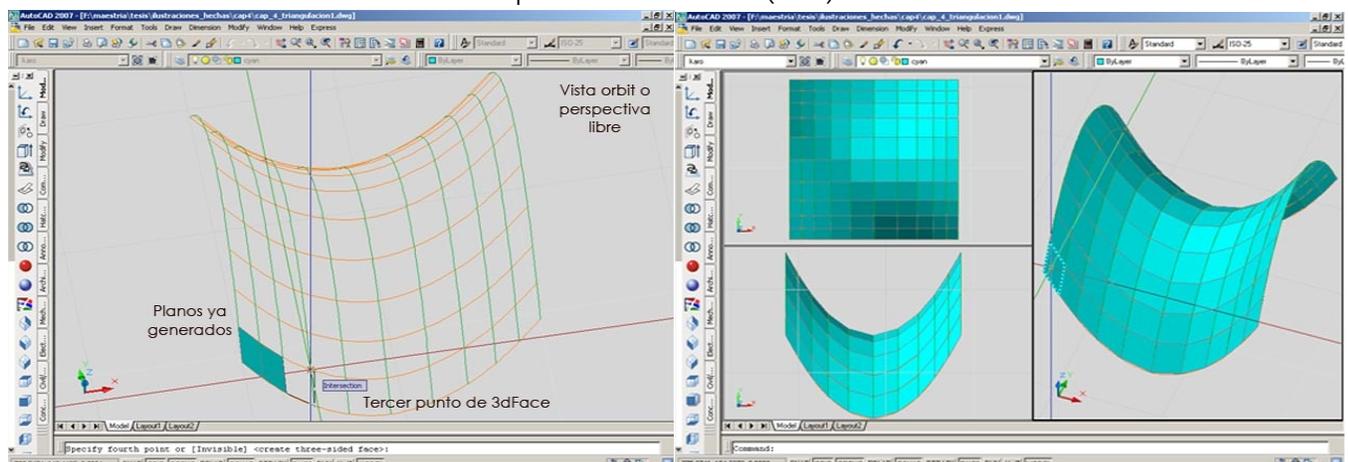
Una vez divididas las parábolas, para poder visualizar los nodos, tenemos que activar la ayuda *node*, (y de preferencia también tener activadas las casillas *endpoint* y *midpoint*) que se obtiene escribiendo en la barra de comandos *osnap*, y activando la correspondiente casilla. Con la ayuda prendida, copiamos una de las parábolas, con el comando *copy*, escrito en la barra de comandos, seleccionando como punto de desplazamiento uno de los extremos de la curva, en la cual se vea activada la ayuda *endpoint*. Como la instrucción del copiado es múltiple, desplazamos la curva ubicándolo donde cada nodo se prende, hasta cubrir todos los nodos. El mismo procedimiento se repite con la otra parábola.



Posición final de las parábolas.

Una vez que se tiene la reticulación, se cambia la vista a *1 Viewport*, manteniendo seleccionado el *SW Isometric*, esto nos ayudará a tener mayor visualización en el siguiente proceso. Para cambiar la orientación de la perspectiva, tecleamos en la barra de comandos *orbit*, estos nos permitirá rotar libremente la vista por medio del mouse.

Acercándonos a cada cuadro de la reticula, podemos convertirlo en un plano, esto lo conseguimos tecleando en la barra el comando *3dface* o bien el comando *_3dpoly*. En las versiones desde el 2005, el AutoCAD, maneja el aspecto tridimensional, por lo que al cualquiera de los comandos hace automáticamente la conversión de los puntos cartesianos (UCS).



Formación de planos en la superficie, y superficie terminada.

Tan solo que escoger los puntos que delimitan al plano, para esto hay que tener habilitada en las ayudas la opción de *intersection*. Es necesario marcar tres puntos para que el comando genere automáticamente el plano. Para el comando *_3dpoly*, marcando 3 puntos se cierran con la instrucción *close*.

Para ver los planos generados, en el menú *View*, podemos escoger en la opción *Visual Styles*, los comandos *Realistic* o bien *Conceptual*. De esta manera, los planos se van viendo en sólido, para facilitar la tarea. Una manera de reducir los pasos, es haciendo un cuarto de la superficie y espejearlo para conseguir la superficie total.

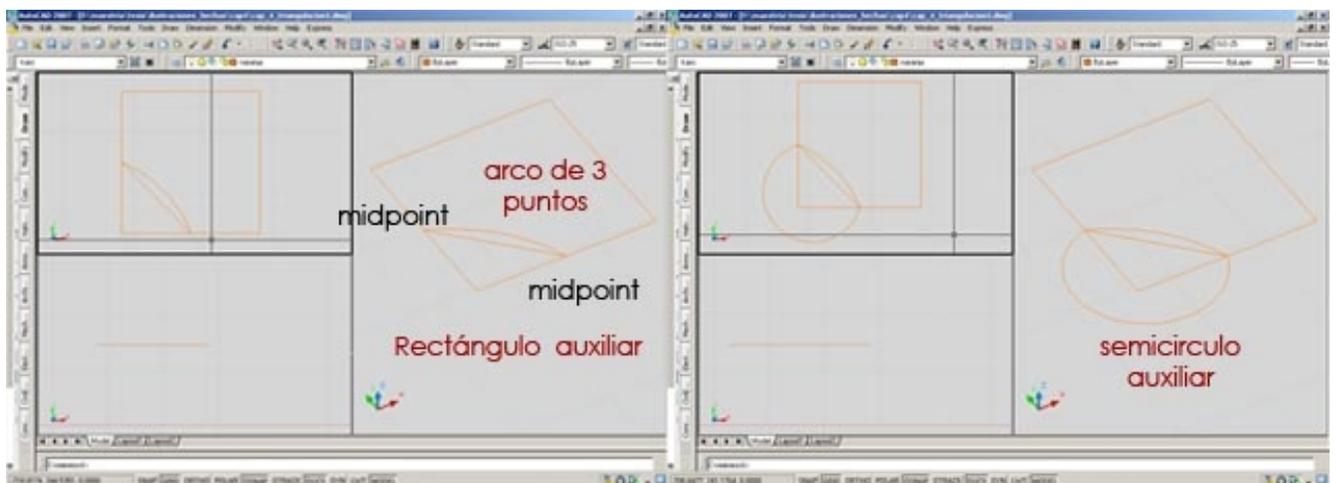
Una vez terminados los planos en toda la superficie, los seleccionamos todos, y tecleando *extrude* en la barra de comandos, se pedirá un espesor, podemos teclear cualquier cantidad que haga visible el sólido que pasa de ser un plano a ser un volumen. En este caso, tomaremos el valor de *.20* para la extrusión. Se recomienda, que a la hora de la extrusión se tenga prendido un *layer* diferente al *layer* de origen de los planos, esto nos servirá para que todos los volúmenes queden agrupados.

Ya efectuada la extrusión, algunos planos se pueden desfasar en el proceso, por lo cual se tiene que tener especial atención en que estos estén alineados para el siguiente paso. Teniendo prendido únicamente el *layer* en el que están contenidos los volúmenes o sólidos, buscamos en el menú *Solid Editing*, el comando *Union*, que nos pedirá seleccionar los objetos para cohesionar, seleccionamos toda la superficie, para que la haga un sólido.

3. CORTES DE LA SUPERFICIE

Los anteriores pasos, nos permiten construir la superficie del PH, de aquí en adelante, el corte será la cuestión del diseño escogido, para este ejercicio, usamos uno de los cortes más comunes del PH dado a que es más eficiente con los elementos de tensión de la velaria.

Volvemos a la vista de *3 viewports*, que teníamos en un inicio, nos posicionamos en la vista *Top*, y con el comando *Rectangle*, ubicado en el menú *Draw*, dibujamos un cuadrado auxiliar que tenga inscrita la superficie, en este caso será de *10 x 10*. Hay que cuidar que este en un *layer* diferente al de la superficie. Una vez dibujamos apagamos el *layer* de la superficie, para solo visualizar el rectángulo auxiliar, nos enfocaremos a una de las esquinas, donde trazaremos una línea tecleando *line*, en la barra de comandos. Esta línea ira del *midpoint* al *midpoint* de dos lados contiguos del rectángulo, en este caso nos enfocaremos a la esquina inferior izquierda.

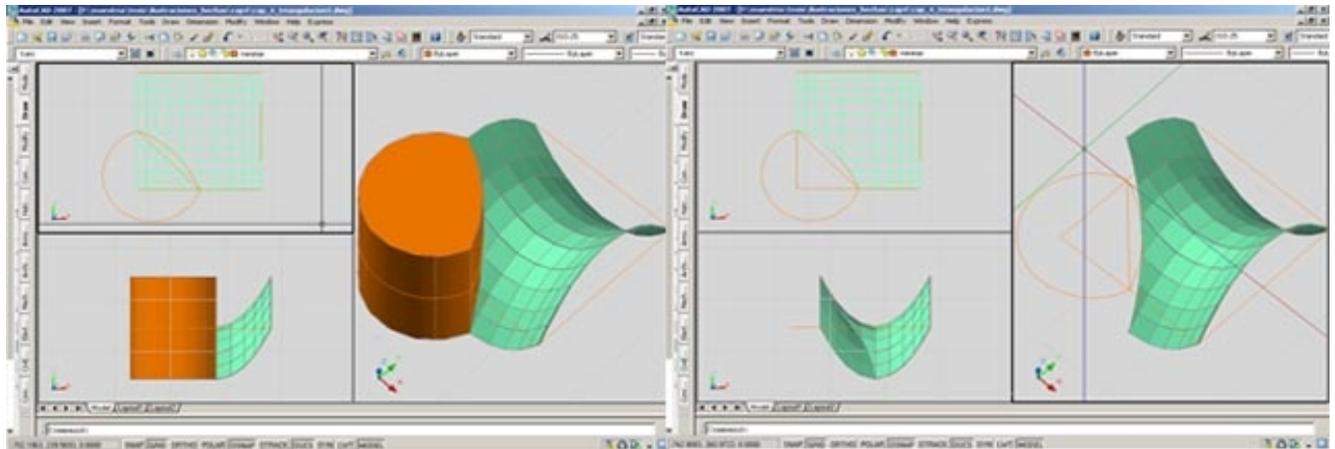


Líneas auxiliares.

Una vez trazada, tecleamos *arc*, en la barra de comandos, para trazar un arco de tres puntos cuyo primer punto será en el inicio de la línea, su punto medio a la altura del *midpoint* de la línea auxiliar que ya trazamos antes, y el último al final de la línea. Este arco nos determinara el corte a la superficie, mientras más pronunciado sea, menor superficie cubrirá, pero tendrá mejor funcionamiento estructural a tensión, esto sucede, porque justo en esta área se pasan los cables llamados relingas, que tensionarán la membrana, para que esta conserve su geometría y funcionamiento estructural.

Trazado este arco, trazaremos otro auxiliar, que completen un círculo (que no es necesario que sea la geometría estricta, tan solo necesitamos completar la curva para la extrusión). Tecleamos en la barra de comandos *_pedit*, y seleccionamos *Multiple*, tan solo escribiendo la *m*, y *enter*, nos pedirá que seleccionemos los objetos, los cuales serán ambos arcos, el comando nos preguntará si deseamos convertirlos a *polyline*, y hay que aceptar, una vez hecho esto, despliega una serie de opciones, de la cual escogeremos *join*, tan solo tecleando *j* y *enter* se logra.

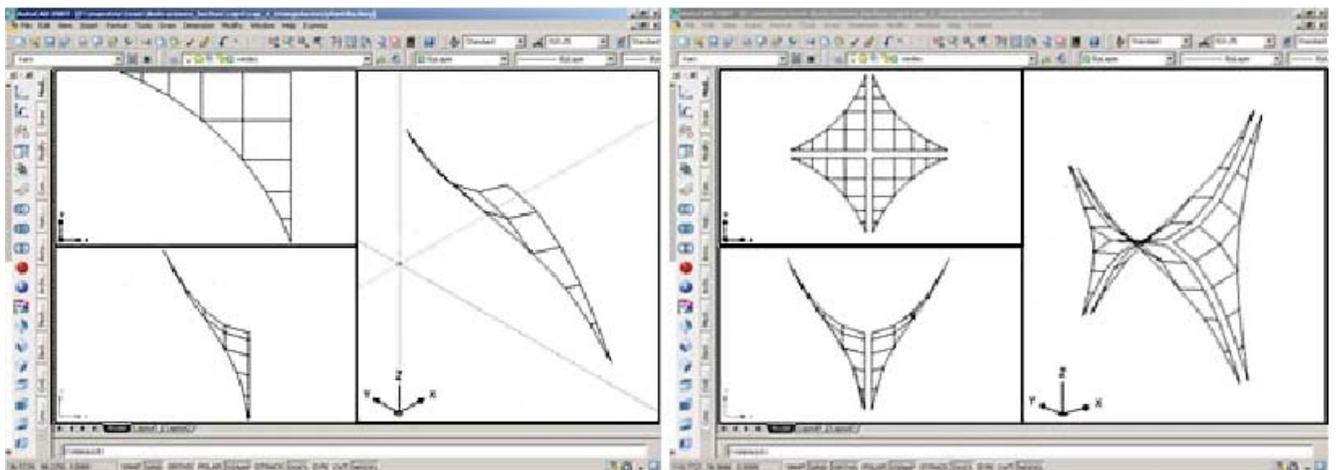
Ahora, escribimos en la barra de comandos, *extrude*, y le indicamos un parámetro que nos permita intersecar a la superficie del PH en este caso damos una extrusión de 20 unidades. Prendemos el *layer* de la superficie, y acomodamos el cilindro, de tal manera que corte al PH. Una vez realizado, deberemos ir al menú *Modify*, en la sección de *Solid Editing*, accionamos el comando *Subtract*, seleccionamos la superficie del PH, hacemos clic, y seleccionamos el cilindro.



Resultado de la substracción de la superficie auxiliar.

4. ALINEACIÓN DE LA SUPERFICIE A UN PLANO XY

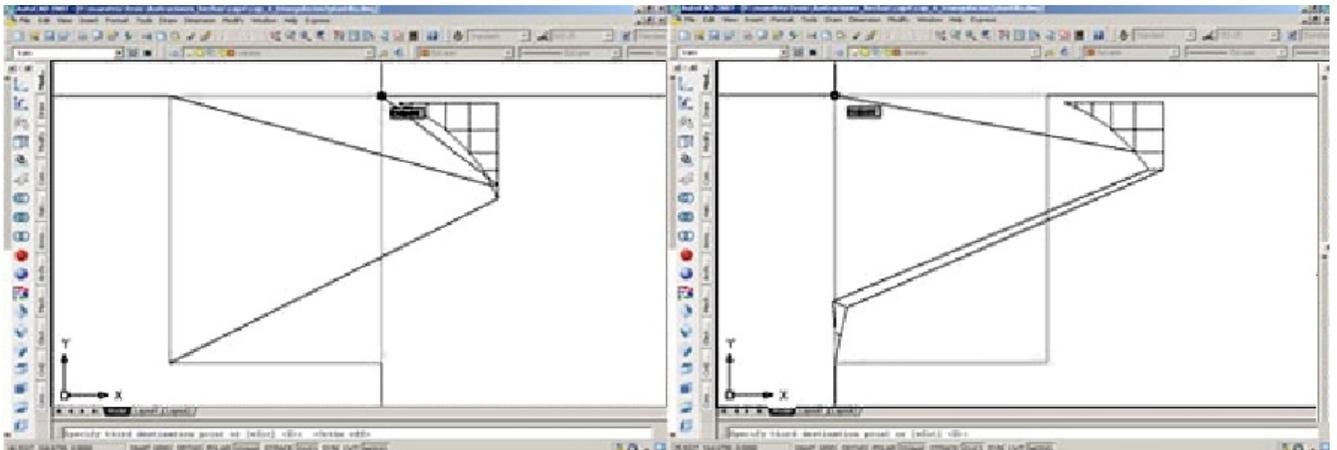
Una vez conseguido el corte de la superficie, vamos a descomponerla, es importante que en este proceso, el *layer* de las líneas este apagado, o bien borremos las líneas para evitar confusiones. Tecleamos *explode* en la barra de comandos y seleccionamos la superficie, tenemos que quitar todas las caras, para solo dejar la cara de los planos que construyen el PH (es recomendable cambiar la vista en el menú *view*, *visual styles* a *2d wireframe* para facilitar la tarea de selección), esto solo en un cuarto de la superficie. Si queremos previsualizar el aspecto final de la membrana, el cuarto de superficie se puede modificar con los comandos *mirror* y *rotate*, reproduciremos esta esquina.



Un cuarto de superficie descompuesto y previsualización.

Una vez realizada la formación de planos, vamos a la vista *top*, trazamos un rectángulo auxiliar, en el menú *Draw* con el comando *rectangle*. Cabe mencionar que este rectángulo puede ser de las dimensiones de la hoja en la cual imprimiremos, en este caso las dimensiones son de 21 por 28 unidades, que escaladas a cm, corresponden a la hoja carta.

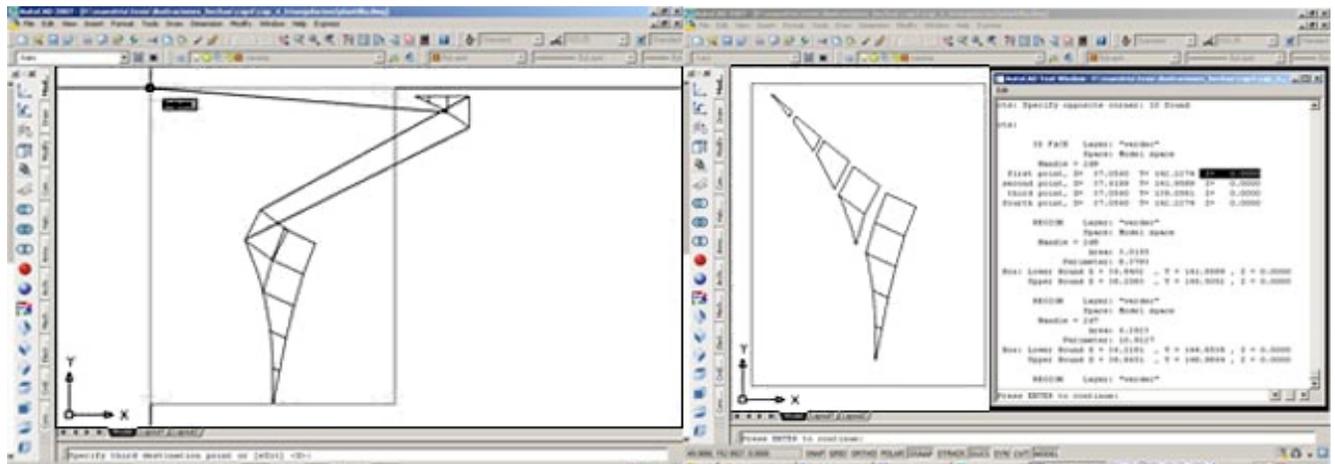
Teniendo las ayudas *endpoint* prendidas, tecleamos en la barra de comandos *align*, primero habrá que escoger el objeto para alinear, que será uno de los planos que forman la superficie del PH, inmediato hay que escoger un punto de este plano, seguido de uno del plano auxiliar, repetido el proceso para 3 puntos, y que de esta manera AutoCAD, genere la alineación al plano. Basándonos en la figura alineada, continuaremos el proceso, pero ahora los puntos se unirán a los del plano ya alineado.



Alineación de los elementos por medio del plano auxiliar y el comando *align*.

Repetimos los pasos hasta haber alineado todos, es importante que durante el proceso se verifiquen las operaciones tecleando *list* en la barra de comandos, que pedirá seleccionar un objeto, el cual será cualquiera de los planos ya alineados, hay que comprobar que su posición en z, sea 0. Así mismo al final del proceso se seleccionan todos, y aplicando *list*, se verifica que su posición en z global sea 0.

5. GENERACIÓN DE PLANTILLAS



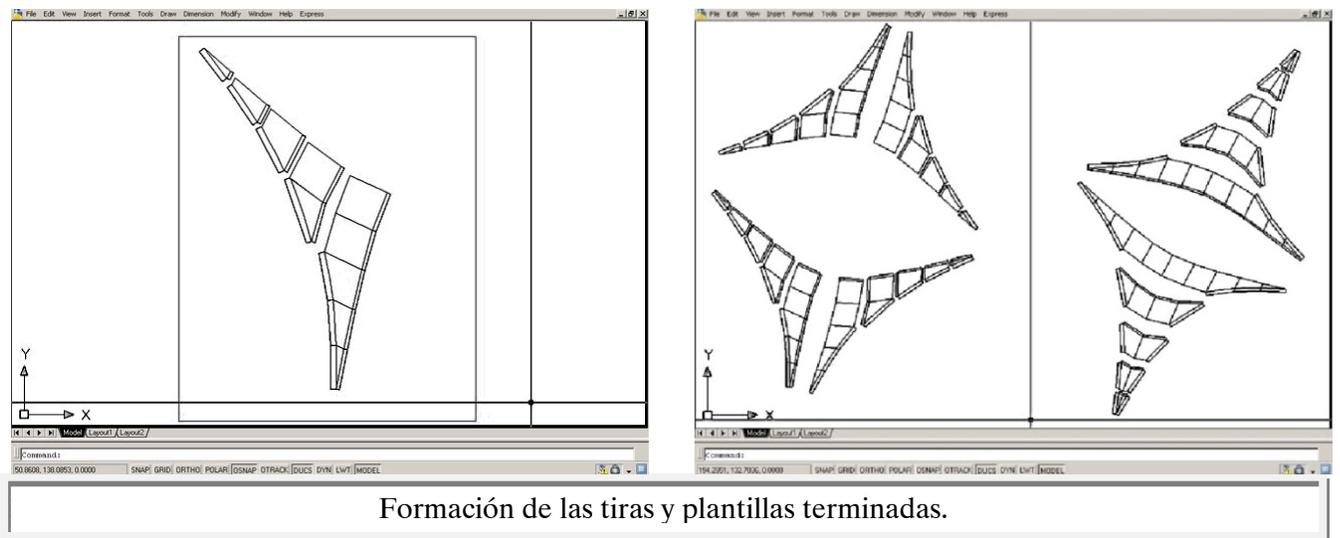
Finalización de alineación y verificación con el comando *list*.

Una vez generada la plantilla, separaremos las hileras de planos alineados, trazando líneas auxiliares que nos permitirán unir las hileras en la realidad. Estas corresponden mucho al tipo de sellado o pegado que tenga la membrana, para este ejercicio, las haremos de .20 cm. Es muy importante que el grado de detallado nos permita un pegado adecuado de las tiras.

Por otra parte, tenemos que tener en cuenta que en las hileras a las cuales les corresponde el corte curvo tendrá una mayor holgura, ya que por estas pasan las relingas, que como habíamos dicho

antes son los cables que mantienen la geometría de la membrana. El proceso se puede hacer en un cuarto de la superficie, y después espejear, por medio de los comandos *mirror*, y *rotate*. Sin embargo es importante tener en cuenta que esto depende mucho del diseño que se esté manejando.

Teniendo esta plantilla solo falta el corte y la unión de los elementos en la realidad. Los diseños de la plantilla dependerán mucho del material y la construcción.

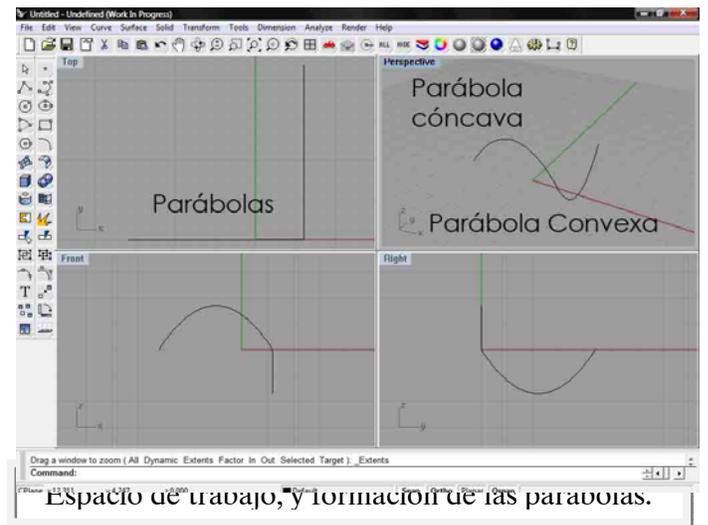


Herramienta para Rhino

En Rhino, recurrimos al comando *_Parabola*, ya sea tecleándolo en la barra de comandos o bien, en el menú *curve*, donde nos desplegara dos opciones: *focus*, *direction* y *vertex*, *focus*, podemos escoger cualquiera de los dos, si queremos hacer la parábola con medida predeterminadas, tenemos que pensar que en el primer caso el foco nos marcara una medida equidistante entre los apoyos y el vértice, para después pedir el claro que cubre la parábola. En cambio cuando ajustamos la segunda opción del vértice, la altura será siempre la misma, y se nos permitirá abrir la parábola cuanto queramos.

Trazamos el par de parábolas situándonos en la vista *Front*, podemos hacer las dos iguales, con la misma posición incluso bajo la condición que una de ellas tendremos que rotarla, tanto la vista *Front*, como en la vista *Perspective*, hasta que quede como en el esquema.

Hay que recordar que los comandos *mirror* y *rotate*, son iguales que en AutoCAD, al igual que la tecla F8, que activa y desactiva la ayuda ortogonal. Para los que por primera vez incursionan en el programa Rhino, no debe de haber la preocupación ya que es muy similar a AutoCAD.

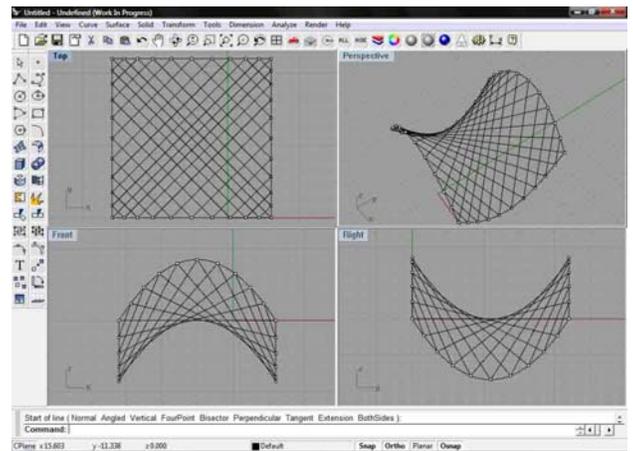
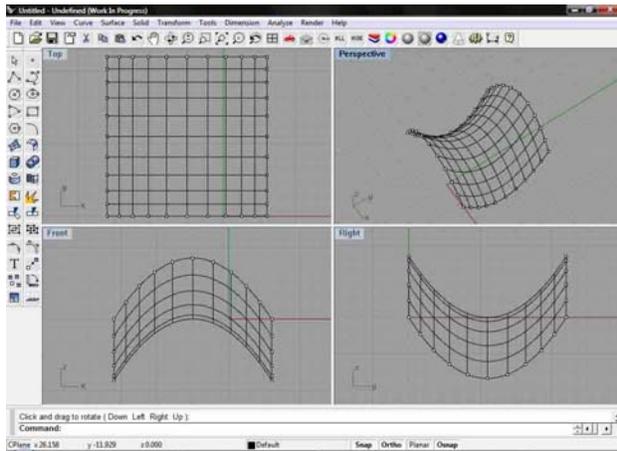


La principal diferencia radica en las superficies NURBS, las cuales guardan un formato de fino mallado lo cual permite su modelación más sencilla que en AutoCAD, sin embargo este último guarda la ventaja de tener más herramientas y sobretodo mayor facilidad para el acotado, instrucción y detallado de los dibujos.

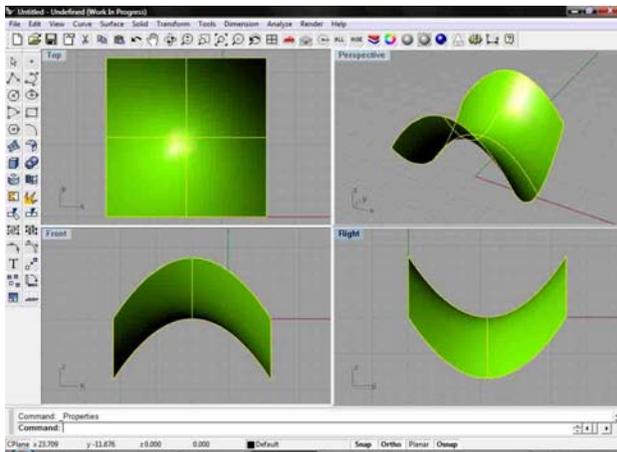
Una vez hecha esta aclaración sigamos en el procedimiento. Una vez trazadas ambas parábolas, podemos unir las de tal manera que tengamos las delimitantes de la superficie. Teniendo las delimitantes de la superficie, en Rhino, podemos teclear en la barra de comandos *divide*, escogiendo

el número de segmentos equidistantes para cada parábola. Y procederíamos a usar rectas o bien curvas que unan cada segmento. En Rhino la navegación en 3d, se realiza con el mouse, en cuanto a AutoCAD respecta, se tiene que usar el comando orbit, para poder mover la ventana de navegación.

En este momento podemos trasladarnos a AutoCAD, guardando el archivo con formato ACIS (*.sat) y escogiendo como tipo de exportación el formato para AutoCAD, que nos aparecerá en un cuadro de dialogo previo a guardar. Al guardar con este formato podemos manipular las curvas en AutoCAD, sin tener problemas como con las *splines*.



Arriba, modelos de curvas y rectas en el espacio, abajo izquierda, visión de la superficie.

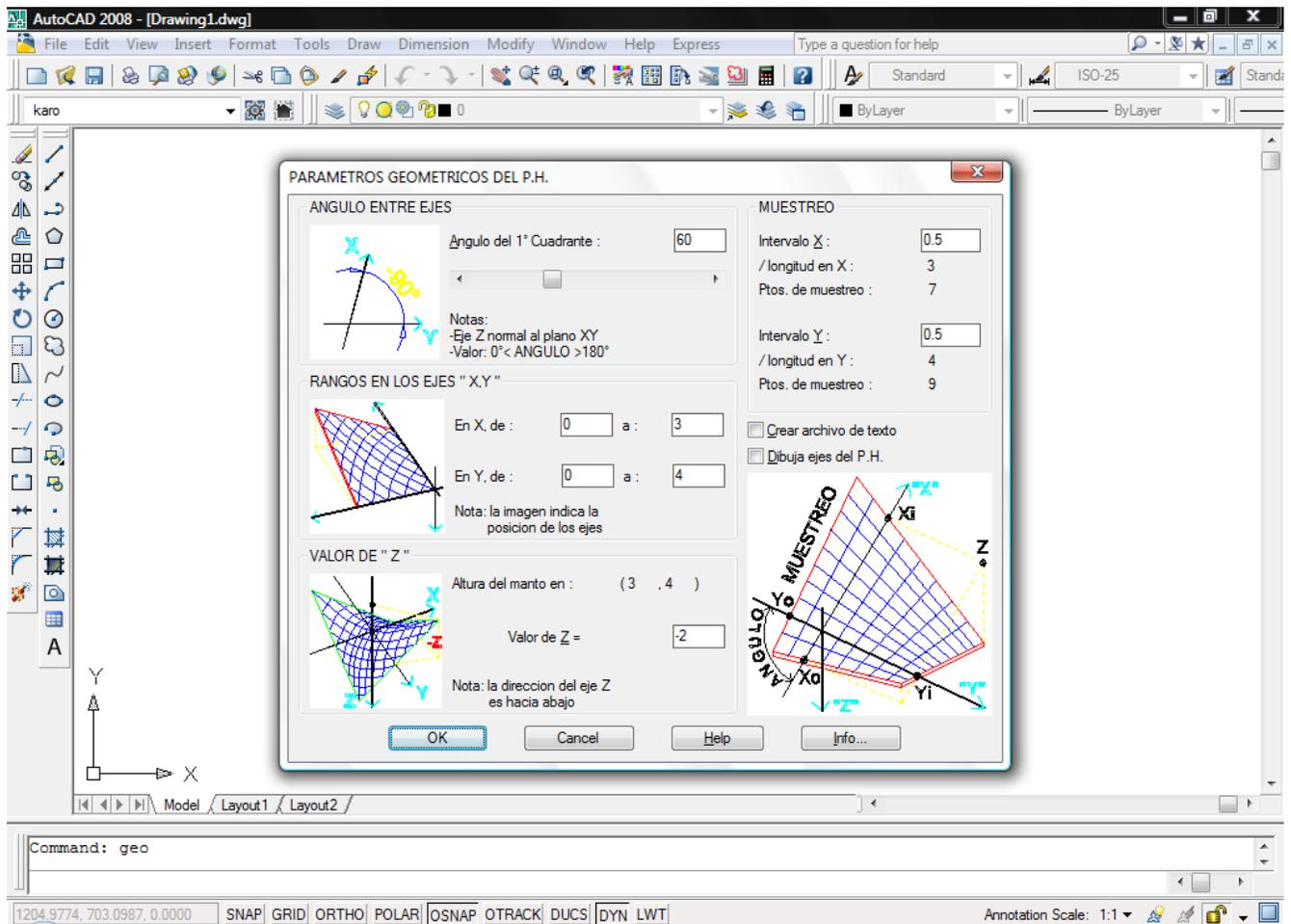


Una de las ventajas de Rhino es que con el comando *Surface*, en el subcomando *edge curves*, al seleccionar las cuatro curvas, la apariencia de la superficie aparecerá de inmediato cuando aplicamos la vista de *render* en las cuatro ventanas de Rhino. Si nosotros queremos modificar la superficie por otros planos o superficies, la facilidad de los comandos *trim*, *union*, *subtract* y en general las operaciones *booleanas* permiten una manipulación eficiente de la superficie.

Aplicación GEO ⁸, para el trazo de la superficie en AutoCAD

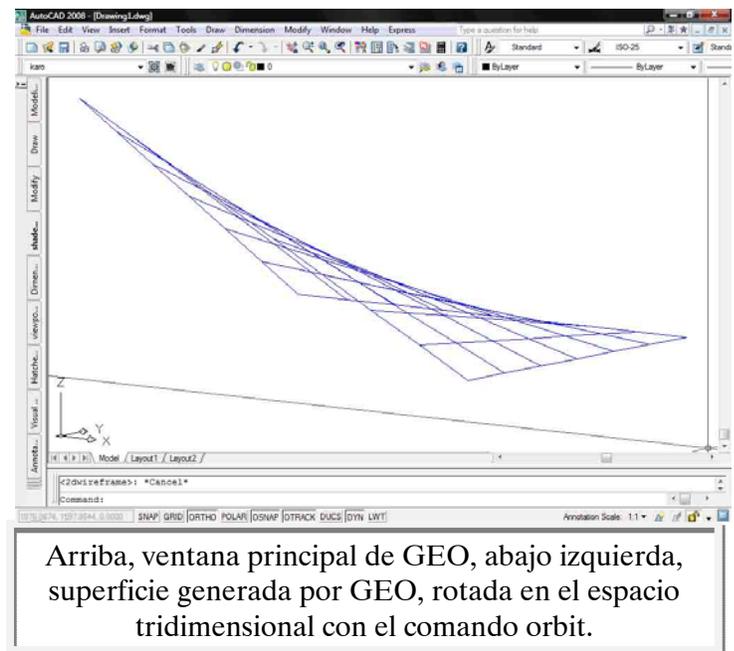
La plataforma funciona con el programa AutoCAD, ya que su programación fue realizada en Autolisp. Primero hay que copiar la carpeta de la aplicación en una carpeta conocida, de preferencia directamente en el disco duro. Una vez instalada, para poder usar la aplicación, tenemos que cargarla, lo cual hacemos buscando en el menú *Tools*, la instrucción "load application", seleccionamos el archivo *ph2001.vxl*, y una vez cargado, en la barra de comandos tecleamos "geoph" y aparecerá la siguiente ventana:

⁸ El programa GEO, está desarrollado por el especialista en cubiertas ligeras, Marcos Ontiveros, al cual se agradece la facilitación de la aplicación para motivo de este manual.



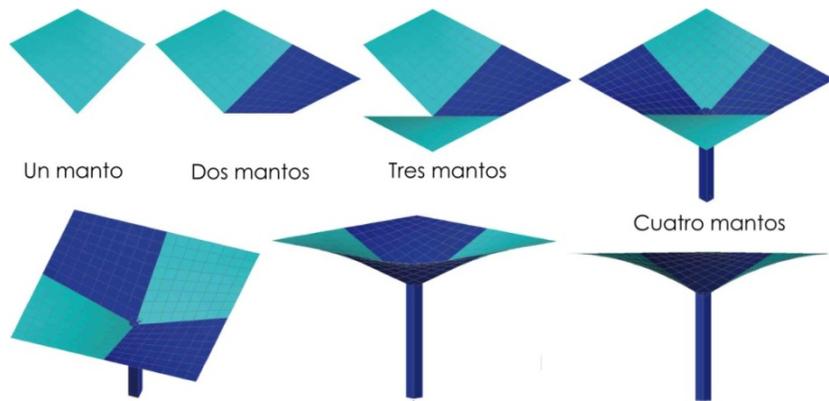
Por medio de esta ventana, podemos trazar la geometría de un PH atendiendo como ejes principales los oblicuos de la superficie. Tenemos la opción de programar las dimensiones del manto, el valor de su punto bajo (valor en z) que determina el grado de alabeamiento, así como el ángulo que tendrán sus ejes (que determina un PH oblicuo o bien equilátero). También podemos seleccionar a cada cuanto se dan las rectas del muestreo, con lo cual podemos ver con claridad la superficie reglada como se muestra en la imagen.

Finalmente están las opciones que al ser activadas dibujan los ejes del PH, y otra en la cual se genera un archivo de extensión *.txt, que contendrá los puntos de graficación de la superficie.



Arriba, ventana principal de GEO, abajo izquierda, superficie generada por GEO, rotada en el espacio tridimensional con el comando orbit.

Una vez revisada esta ventana al teclear ok, nos mandara al entorno de AutoCAD, donde definiremos el punto de inserción y la dirección del eje x. Tendremos entonces un PH, que podemos manipular espacialmente con el comando orbit, para de esta manera experimentar con sus diferentes posiciones y combinaciones.



Combinación de mantos de PH, para formar un paraguas.

5. Utilidad

Un caso aplicado: El paraguas.

El paraguas, es una combinación de 4 mantos de PH de borde recto, estos resultan equiláteros ya que guardan una relación de 90° entre sus ejes. En especial se caracterizan por tener tres puntos altos y uno bajo en el que todos coinciden, en este punto es en el que se ubica el soporte.

Su construcción se puede generar en diversos materiales rígidos como los cascarones y en materiales flexibles como las membranas para velarias, aunque en este último caso, la forma tiende a deformarse y tomar otras geometrías como lo son los hiperboloides o los embudos.

Por esta razón analizaremos las rígidas y la aplicación del paraguas, ya que es una de las más versátiles del PH. El primero en construir un paraguas, fue Félix Candela, con modelos experimentales que generó basado en los diseños previos de Aimond, alrededor de 1952 en Tecamachalco, México.



Mercado de Coyoacán, México, D.F. Obra de Félix Candela y Pedro Ramírez Vázquez.

El sistema consistía en los cuatro mantos del PH de 90° en un acomodo similar al que hemos visto en las ilustraciones anteriores, estos cuatro compartían un punto de alabeamiento inferior que desembocaba finalmente en una columna. Los claros cubiertos variaban de entre los 4 y 7 metros.

A partir de estas pruebas, Candela comenzó a generar una gran cantidad de estas construcciones en la Ciudad de México. Fueron usados para una diversidad de usos, desde bodegas hasta mercados, ya que su bajo costo de producción le hacía los favoritos para cubrir grandes áreas.

Podríamos decir que este auge *cascaroneo*⁹, se extendió a varios países, dejando ecos en todo el mundo. Un aspecto de relevancia, y uno de los principales motivos que nos hacen estudiar estas formas, es que estas estructuras son fácilmente adaptables a las más diversas condiciones de uso.

Dicha adaptabilidad radica en que las estructuras han sido rehusadas en algunas situaciones cambiando por completo el motivo original de su construcción.



Terminal del Aeropuerto de Oakland, California.

⁹ Este término, es dado por los expertos, por la gran técnica constructiva de los cascarones.



Quensgate market, mercado en Inglaterra, obra de J. Seymour Harris, 1970.

Estos re- usos también son posibles debido a la resistencia de la estructura, de tal manera que viejas bodegas pueden ser adaptadas para ser centros comerciales o bien en diferentes usos tal sea el caso.

Otros factores importantes son:

- Gracias a ellos podemos salvar claros muy amplios con un mínimo de apoyos,
- Podemos dar iluminación cenital gracias a las variaciones de altura de los paraguas,
- El agua de lluvia puede ser canalizada y reutilizada gracias a la forma propia del paraguas,
- La ventilación resulta ser eficiente por la altura de la estructura.

¿El PH es sustentable?

En los últimos años, el término sustentable, ha sido motivo de amplias definiciones. Principalmente entenderemos que este concepto se refiere a que la arquitectura tenga una relación equilibrada con el medio que la rodea. Dicho equilibrio es considerando diferentes aspectos, que analizaré enfocados a los paraguas:

- **Adaptación urbana:** es ampliamente adaptable, como vimos anteriormente, esto se debe a la versatilidad de poderse reutilizar como estructura para los más variados usos. Por ser una estructura con una altura media, no contrasta con zonas de uso habitacional.
- **Durabilidad y reutilización:** por ser una estructura de concreto, su durabilidad dependerá de los cuidados y mantenimientos propios del material. Anteriormente vimos las posibilidades de reutilización estando ligada con el hecho de ser estructuras altamente adaptables.
- **Gastos energéticos:** Los gastos están ligados principalmente a su construcción. Los gastos se reducen ya que la misma estructura dura más de 40 años, sin tener que renovar o demoler el sistema.
- **Ahorro de energía:** Debido a su forma, puede permitir la iluminación y ventilación natural, reduciendo los costos en medios artificiales.
- **Factores ecológicos:** Una de las posibilidades más explotables, es aprovechar la ligereza y la pendiente de la cubierta para opciones ecológicas como los techos verdes. Otra es la amplia posibilidad de recolección de aguas pluviales.
- **Nuevas tecnologías de construcción:** Podemos experimentar con nuevos plásticos de alta resistencia, reforzados con algún otro material. Los paneles prefabricados, con el uso de cimbra que se repita en cada paraguas, nos ahorraría costos en mano de obra y energía en el proceso de elaboración del sistema.

6. Aproximación al cálculo

¿Cómo funciona un PH estructuralmente y por qué es eficiente?

Para explicar este punto veamos una comparación entre dos sistemas diferentes que están destinados a cubrir una determinada área. Pensemos en un volumen cuyas dimensiones en largo y ancho son de 10 metros, su altura será de 5 metros. El techo de esta figura, puede ser cubierto por un sistema con una superficie plana o bien con una superficie de PH. Analizaré cada caso por separado:

Sistema con superficie plana:

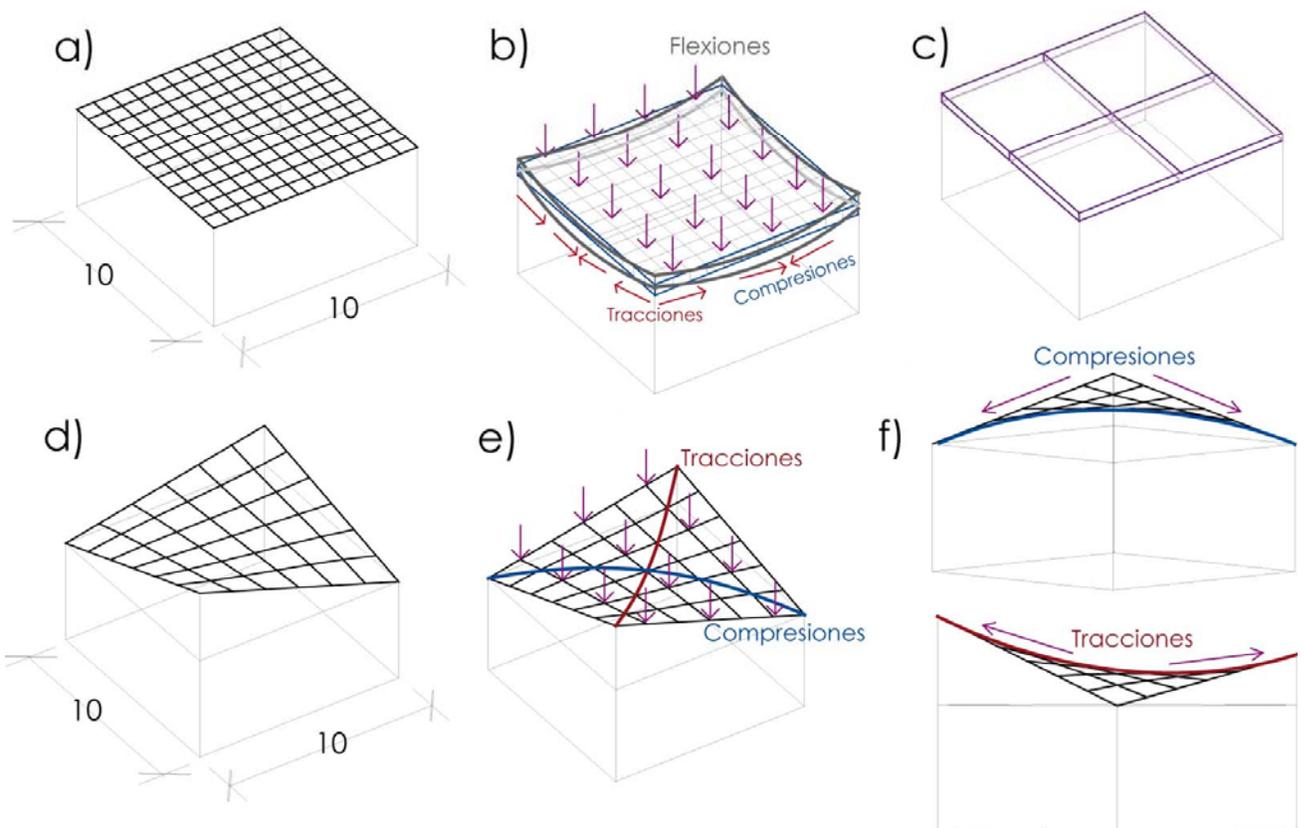
- La techumbre se consigue generando la unión de los cuatro puntos altos de la figura, consiguiendo un plano.
- **Considerando un material rígido** para la cubierta como el concreto (losa plana), sabemos que tanto las fuerzas externas, como el peso propio del material, generarán tensiones sobre la superficie.
- Estas acciones, son compresiones y tracciones, que a su vez crearán flexiones. Para evitar perder su forma y romperse, la superficie tendrá que adoptar el grosor necesario para soportar los esfuerzos, así como tener elementos que funcionen resistiendo la compresión y la tracción específicamente. En el caso del concreto armado, la mezcla de cemento, arena y grava tomará los esfuerzos de compresión, mientras que el acero soportará los elementos a tracción. El armado tomará la posición y dirección de los principales esfuerzos. Todos los elementos serán de diferentes dimensiones según el claro que cubran.
- Siendo que el peso volumétrico del concreto armado es de 2400 kg/m^3 , una sección de $1\text{m} \times 1\text{m} \times 10\text{m}$ (espesor de 10 cm, promedio) pesará 240 kg/m^2 . Por lo que si aumentamos el claro a cubrir llegará un punto en donde el material será tan pesado que no se podrá sostener a sí mismo. La comprobación de este punto y las dimensiones de la losa se generan por los procedimientos estipulados en el Reglamento para Construcciones, aunque como regla de predimensionamiento, si tenemos un claro de $10\text{m} \times 10\text{m}$, por lo menos dividiremos esta área de tal manera que los claros no excedan de 6m, esto para seguir con el espesor de los 10 cm.
- Dada la anterior deducción, **en un espacio de $10\text{m} \times 10\text{m}$, necesitaremos elementos de división como trabes y una columna intermedia que las apoye.**
- **Si cubrimos el área con un material ligero y flexible**, como lo podría ser una lona, necesitaríamos una fuerza de tracción muy grande para que el material no se flexione. Además de tener el inconveniente de la poca resistencia que puede tener a eventos climatológicos; por ejemplo en el caso de la lluvia, tendríamos forzosamente que generar una pendiente para que el agua escurra. En cubiertas con materiales ligeros y flexibles, es esencial un grado de inclinación y curvatura, que nos permita que la estructura funcione por su geometría.

Sistema con superficie de PH:

- La techumbre se consigue generando la unión de dos puntos altos y dos puntos bajos. Los primeros, pueden obtenerse aumentando la dimensión de la altura, mientras los segundos serán dados por la altura original.
- **Considerando un material rígido**, como el concreto (cascarón), tendremos presencia de tensiones sobre la superficie, resultado de las fuerzas externas y el peso propio del material.
- En este caso, dado la geometría de la cubierta, los esfuerzos serán principalmente de compresión y tracción. Las flexiones serán mínimas, por lo que se pueden despreciar.
- Por la doble curvatura de la superficie, se considera que en una dirección tiene arcos, y en la otra cables. Los primeros trabajarán a compresión, mientras que los segundos trabajarán a tracción. Esta idea de funcionamiento estructural se tiene que considerar abstracto, ya que en cualquier punto de la superficie encontraremos la presencia de ambos sistemas.
- El peso propio del material también limitará las dimensiones del claro libre de apoyo. Sin embargo para los cascarones esta área será mayor, debido a que el espesor determinado por el cálculo se encuentra en un promedio de 4 a 6 cm, lo cual se reflejará en un menor peso de la estructura. Los delgados espesores, se deben a la transmisión de los esfuerzos hacia los elementos de borde, situación que se da por la conformación de las tensiones, propia de la geometría de la superficie.

- El concreto también necesitará ser reforzado por elementos de acero, cuya dirección será la del sistema reglado de la superficie.
- Bajo los términos anteriores, **enfocado a nuestro ejemplo de 10m x 10m, el PH, puede librar sin problema el área, sin necesidad de elementos intermedios como traveses y columnas.**
- **Dada la geometría del PH, cubriendo el área con un material ligero y flexible,** necesitaremos que las tensiones se transmitan hacia los elementos de borde, que como explique antes es una característica del comportamiento estructural del PH. Estos elementos, deberán de ser de un material cuyo trabajo sea enfocado a soportar los esfuerzos a tracción, tal es el caso del acero. Con relingas y postes de acero, además de una membrana con geometría de PH, podremos fijar generar un sistema que sea efectivo ante los embates climáticos y fuerzas externas que actúan sobre la superficie. Este sistema es el de las velarias.

Cabe mencionar que ambas geometrías buscan el equilibrio y estabilidad. **No es el objetivo pensar que una es mejor que otra, ya que sus funciones son obviamente diferentes,** la principal ventaja de las losas planas es la posibilidad de ser entresijos, mientras que en las superficies de PH, esto se limita a que su grado de alabeamiento sea reducido. En cambio para cubiertas sin entresijo, el PH, demuestra tener mayor adaptación para abarcar una mayor área. En el siguiente esquema, explico gráficamente los postulados anteriores:

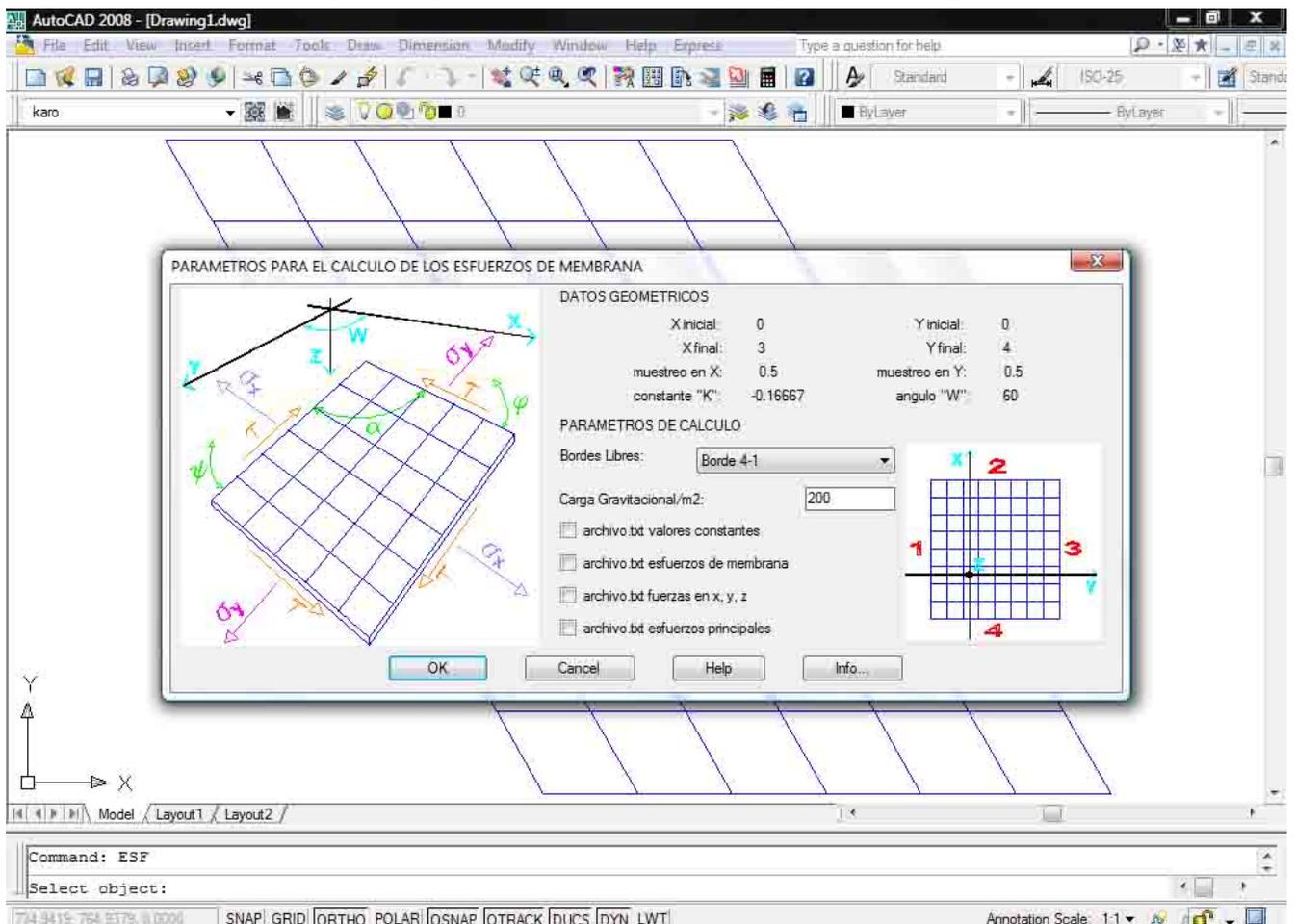


- a) Superficie plana que cubre el espacio de dimensiones 10m x 10m x 5m.
- b) Acciones de las cargas externas en la superficie, generando tensiones. Hacia los extremos de cada lado, se darán tracciones, mientras que al centro compresiones. La superficie se afecta con flexiones.
- c) Finalmente para poder resistir las deformaciones, se tiene que reticular la superficie, generando un apoyo al centro.
- d) Superficie de PH (borde recto), generada por la unión de dos puntos altos y dos bajos.
- e) Acciones de las cargas externas que se distribuyen en la superficie, donde se puede despreciar la flexión, compresiones y tracciones son distribuidas a los bordes.
- f) Principales direcciones de arcos y cables. La dirección de los arcos, transmitirá las **compresiones**, mientras que los cables transmitirán las **tracciones**. Esto se muestra virtual ya que cada punto de la superficie tiene

Documentación: Algunos métodos para calcularlo

Existen varios métodos para calcular los esfuerzos de una superficie con geometría de PH. Uno de los más recurridos en nuestro país es el proceso metodológico generado por Félix Candela, que le permitiría a este la construcción masiva de cascarones usando el PH. Actualmente, profesionales como Juan Antonio Tonda, siguen este mismo proceso, auxiliándose de programas como Excel, en el cual generan las operaciones matemáticas.

A partir de este método, el especialista en cubiertas ligeras, Marcos Ontiveros Hernández, ha desarrollado dentro de su aplicación GEO, un comando para calcular los esfuerzos. Ya había explicado antes, que por medio de la programación Autolisp para AutoCAD, se generaba el proceso para trazar un PH de borde recto. Además podemos saber los esfuerzos de borde de la superficie. Una vez trazada la geometría, tecleamos el comando "esfph", que nos pedirá que seleccionemos un objeto, en este caso la superficie previamente trazada. Nos aparecerá la siguiente ventana:



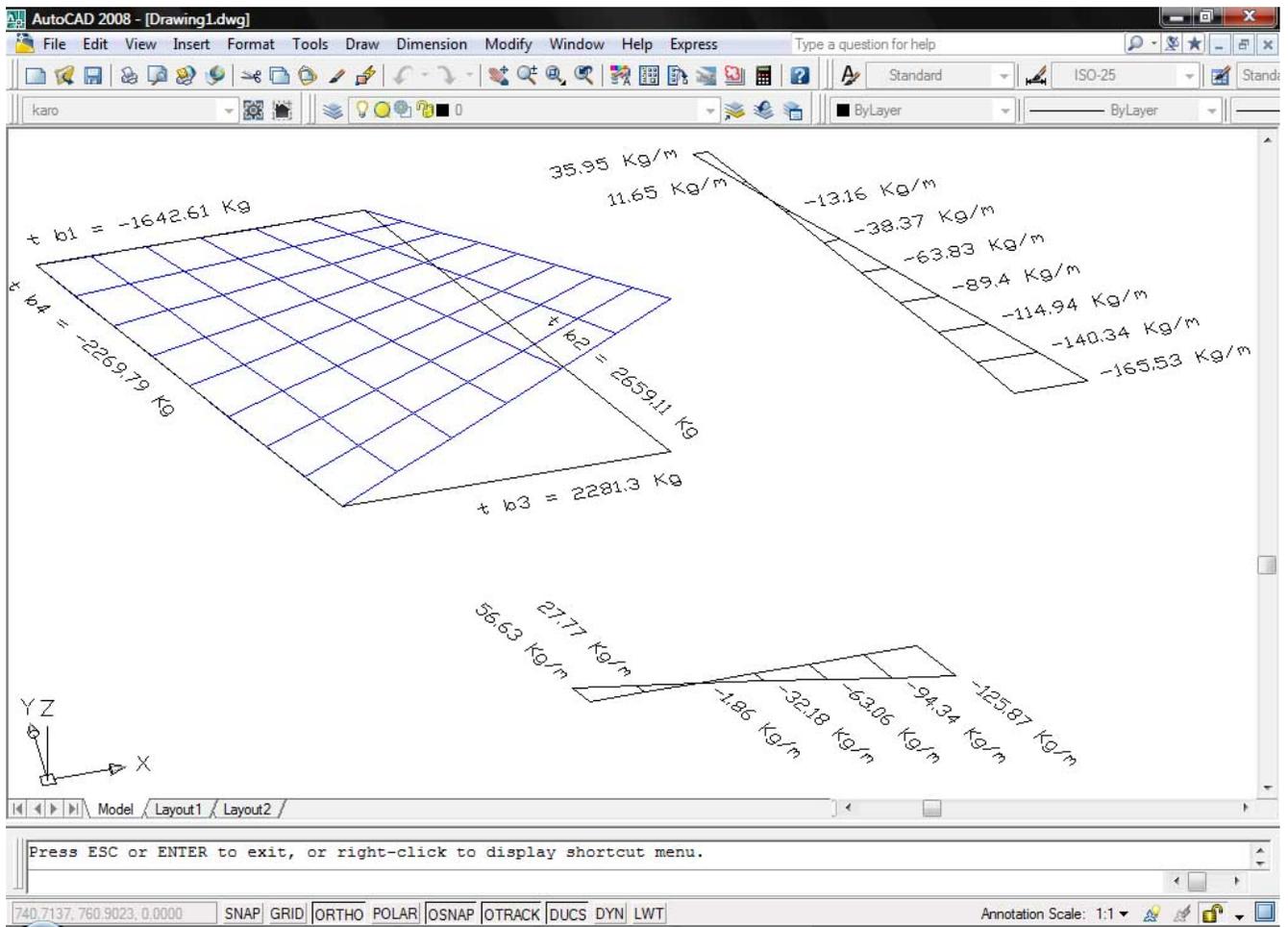
Ventana resultante al ingresar "esf" en la barra de comandos. Se ve en el fondo la superficie de PH, previamente trazada

En ella podremos escoger los bordes libres que llevará el PH, además de la carga gravitacional. La ventana nos da opción a que generemos archivos de texto, para los diferentes datos que da el cálculo. El muestreo, corresponderá al fijado en la primera etapa del trazo.

Quiero aclarar que el método de cálculo está basado en la teoría de la membrana, que considera despreciable la flexión, y únicamente cuentan los esfuerzos de compresión y tracción, que serán

diferenciados por su signo. Para el cálculo se consideran proyecciones al plano, por lo cual "esf" nos indicará los diagramas en el plano.

Cada borde nos indicará la fuerza trasladada al borde, e incluso al apoyo, esto nos servirá para los dimensionamientos de acero y concreto. Si nosotros rotamos espacialmente la superficie, veremos los diagramas cortantes:



Esquema final que nos muestra los diagramas de cortantes y esfuerzos en la superficie, también incluye un total de cada borde. Con la rotación espacial "orbit" se puede ver las proyecciones al plano.

Cabe mencionar que actualmente hay otros programas como el ANSYS, que se basa en la teoría de los elementos finitos para deducir, los desplazamientos, esfuerzos y deformaciones en la superficie.

7. Conclusión y recursos de Utilidad

Reflexión final

Quiero finalizar esta metodología, exhortando al lector que contribuya en el mejoramiento de este material; y dar pie a la generación de más metodologías que traten otras geometrías con amplias aplicaciones para la arquitectura. También es de suma importancia el concientizar que las matemáticas y en especial la geometría, son conocimientos que están constantemente implícitos en nuestra vida diaria.

El PH, es una alternativa valiosa, para quien quiera diseñar formas útiles, flexibles, ligeras y eficientes. Además de su versatilidad en aspectos y materiales, tiene una gran historia en nuestro país. Por lo que

el único límite es nuestra imaginación. **Mientras más recursos tengan los estudiantes, podrán generar diseños más consientes y acordes a su medio.**

Guía de páginas web y contenidos de interés de estas:

Página 6, **Cripta de lo Colonia Güell**: <http://www.red2000.com/spain/images/photo/b-cript.html>

Contenido: Su página madre es: <http://www.red2000.com/spain/> y contiene una guía de España, tanto turística como cultural.

Página 8, **Estadio Internacional de King Fahd**: <http://www.denardis.com/specialimage/fahd.html>

Contenido: La página contiene información de *De Nardis Engineering*, consultores estructurales. Hace una descripción de la obra de Horst Berger.

Página 8, **Pabellón Tanzbrunnen**: <http://pleatedstructures.com/examples/radial/exterior/>

Contenido: La página contiene fotografías de diferentes pabellones de planta circular y similares, cubiertos con velarías.

Página 8, **MODUNAM**: http://www.sugestec.unam.mx/sugestec/galeria_1.jsp?clave=11

Contenido: Describe la información del proyecto y patente de Gerardo Oliva, su página madre: <http://www.sugestec.unam.mx/sugestec/> contiene desarrollos del Sistema Universitario de Gestión Tecnológica.

Nota: Al abrir los archivos pdf, el sistema advierte que las aplicaciones de este tipo pueden contener virus, las ligas son seguras, NO contienen virus.

Página 13, Construcción de cimbra de un cascarón:

<http://www.egrafica.unizar.es/ingegraf/pdf/Comunicacion17102.pdf>

Contenido: **Archivo PDF**, artículo: "Análisis emblemático de obras de Félix Candela" autores: Andrés Martín Francisco y Fadón Salazar Fernando.

Página 14, Oceanográfico de Valencia, primeras dos imágenes:

http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/transparencias/transparencias-raul.pdf

Contenido: **Archivo PDF**, artículo: "El vientre de un arquitecto, (la búsqueda de la forma) autor: Raúl Ibáñez Torres.

Página 14, Oceanográfico de Valencia, tercera imagen:

http://www.ciutatdelesarts.com/Ciutat_de_Les_Arts/Oceanografico/oceanografic_02.htm

Contenido: Esta página española, describe el parque Oceanográfico de Valencia, que forma parte de la Ciudad de las Artes y la Ciencias.

Página 15, Prefabricado con geometría de PH, en Sidney:

http://www.arch.mcgill.ca/prof/sijkkes/D+C-winter-2005/pavillions_tensile/hyparsdemountablesydney1.jpeg

Contenido: La página madre: <http://www.mcgill.ca/architecture/> contiene información de la "McGill School of Architecture", escuela canadiense.

Página 15, Primera imagen en el borde inferior, relingas en una velaria:

<http://www.velarias.net/lonas.velariasenlaactualidad.velarias.htm>

Contenido: Muestra diferentes obras de velarías, su página madre: <http://www.velarias.net/> está destinada al conocimiento e investigación de estos sistemas estructurales, siendo auspiciada por diferentes compañías que diseñan y fabrican "tensoestructuras" (nombre que se le da a las velarías en el centro y sur de América.

Página 15, Segunda imagen en el borde inferior, detalle del refuerzo de acero de una velaria:

<http://www.lonasrodriguez.com.mx/Velarias/images/12.jpg>

Contenido: Su página madre: <http://www.lonasrodriguez.com.mx/> es una empresa dedicada al diseño y construcción de velarias en Iztapalapa, México D.F.

Página 16, Superior Izquierda, Velaria con poste-cable: <http://toldosycubiertas.com/cm/>

Contenido: La empresa: Toldos y cubiertas a tensión: "Spider", hace velarias o como ellos la llaman arquitectura textil, se encuentra en Benito Juárez, México D.F.

Página 16, Superior Derecha, Método de unión por termosellado para una velaria: <http://www.carpaselcarrousel.com.mx/materiales.htm>

Contenido: Su página madre: <http://www.carpaselcarrousel.com.mx>, es una empresa dedicada al diseño y construcción de velarias en Azcapozalco, México D.F.

Página 16, Mallas de redes primera imagen, estadio Olímpico de Munich: http://www.ce.ntu.edu.tw/eng/people/faculty/faculty_sur.htm

Contenido: La página es del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Taiwan.

Página 16, Mallas de redes segunda imagen, estadio Olímpico de Munich: http://www.arch.mcgill.ca/prof/sjpkcs/D+C-winter-2005/pavillions_tensile/municholympics.jpeg

Contenido: La página madre: <http://www.mcgill.ca/architecture/> contiene información de la "McGill School of Architecture", escuela canadiense.

Página 16, Mallas de redes tercera imagen, estadio Olímpico de Munich: <http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/cuadricas.htm>

Contenido: Página que describe y analiza las definiciones matemáticas de las cuádricas, poniendo ejemplos de la vida diaria para entender las superficies.

Página 28, Mercado de Coyoacan: http://www.vitruvius.com.br/arquitextos/arg046/arg046_00_e.asp

Contenido: Arquitectos, " El gato y el ratón. Ambulantes urbanos y poder municipal", autor: Jorge Ramos de Dios.

Página 28, Terminal del aeropuerto en Oakland, California:

<http://nisee.berkeley.edu/elibrary/getpkg?id=GoddenE45-65>

Contenido: La página muestra imágenes del "Earthquake Engineering Research Center" (centro de investigación de ingeniería sísmica)

Página 29, Queensgate Market:

<http://www.monocularartimes.co.uk/huddersfieldgem/gallery/ceiling01.shtml>

Contenido: La página contiene imágenes e información de diversos proyectos arquitectónicos.