



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Iteración de la función \wp de Weierstrass.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Santiago Alonso Palmas Pérez

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. José Antonio Gómez Ortega



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Palmas

Pérez

Santiago Alonso

55 73 00 71

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

300693645

2. Datos del tutor

José Antonio M. en C.

Gómez

Ortega

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rogelio

Valdez

Delgado

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Santiago

López de Medrano

Sanchez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Jefferson Edwin

King

Dávalos

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Ana Margarita

Guzmán

Gómez

7. Datos del trabajo escrito

Iteración de la función φ de Weierstrass.

115 p

2008

Agradecimientos

"El que la ciencia pueda sobrevivir largamente depende de la psicología; es decir, depende de lo que los seres humanos deseen". (Bertrand Russel)

A quien estuvo ahí en mi primer y último paso: **José Antonio Gómez**

A todos mis maestros, sinodales y amigos: Ana Guzmán, Jefferson King, Santiago López de Medrano, Rogelio Valdez.

A quienes me han ayudado a tomar un nuevo camino: Ana Irene Ramírez, Pilar Martínez, Francisco Struck, Julieta Verdugo, Luis Briseño.

A mi Familia, en especial a mi Abuela Bertha.

A Marcela.

A quien no lo tiene todo claro...

Índice general

Introducción	I
Índice general	I
1. Latices en el plano y funciones elípticas	1
1.1. Periodos	1
1.2. Latices y regiones fundamentales	6
1.3. Formas de latices y del grupo modular	13
1.4. Propiedades generales de las funciones elípticas	17
1.5. Latices y toros	25
2. La función $\wp(z)$	31
2.1. La función \wp de Weierstrass	31
2.2. La ecuación diferencial para $\wp(z)$	38
2.3. El campo de las funciones elípticas	42
2.4. Curvas elípticas reales	45
2.5. La función modular J	51
2.6. La superficie de Riemann de $\sqrt{p(z)}$	58
3. Iteración de la función $\wp(z)$	69
3.1. Iteración de funciones meromorfas	69
3.2. Otras propiedades de $\wp(z)$	73
3.3. Puntos fijos	81
3.4. Simetría de los conjuntos de Fatou y Julia	82

3.5. La estructura periódica de las componentes del conjunto de Fatou	86
Bibliografía	109
Índice alfabético	110

Introducción

Este trabajo es sólo uno de los intentos comprender más los sistemas dinámicos y acercarlos al estudio diario de las matemáticas.

Los sistemas dinámicos han sido una gran fuente de trabajo a lo largo de los años, pero desde hace pocos se volteó a verla con mucho más admiración debido a los dibujos artísticos que con ayuda de las computadoras se nos revelan “fácilmente” siendo una vez más lo fascinante de las matemáticas, lo no explicable, lo anormal y sus expresiones matemáticas.

Las funciones elípticas son funciones meromorfas en el plano complejo que pueden ser iteradas (excepto en los polos) y exhiben una dinámica muy peculiar y distinta a la de las funciones racionales. Aquí consideramos la función elíptica \wp de Weierstrass en un intento por entender cómo es la dinámica de las funciones meromorfas.

Discutimos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para la función elíptica \wp de Weierstrass y se dan suficientes condiciones para que el conjunto de Julia sea toda la esfera dependiendo de cómo sea \wp_Ω con respecto de una latiz Ω .

En esta tesis analiza en especial dos textos [7] y [8] y de ellos se desprenden definiciones y resultados que dan un estudio de la iteración de la función \wp de Weierstrass, observando conjuntos de Fatou y de Julia.

El análisis de estos dos textos se hace de manera que en el primer capítulo se analizan las propiedades generales de las latices y de las funciones elípticas.

En el segundo capítulo se analiza la función \wp_Ω y sus principales características como la gran utilidad de su ecuación diferencial. Así mismo se caracteriza la parametrización de las latices con el estudio de la función modular J .

Por último se da a conocer la relación entre las latices rectangulares, triangulares, rombóicas, etc., y la dinámica de \wp_Ω . Observando los conjuntos de Julia y Fatou observamos una simetría interesante así como la estructura de las componentes del conjunto de Fatou.

Al final del texto mostramos varias imágenes con dos formas de latices y sus respectivos conjuntos de Julia y Fatou. Estos dibujos nos muestran que las matemáticas sobrevivirán largamente, ya que estos dibujos vienen del querer desear.

Abril del 08.

Capítulo 1

Latices en el plano y funciones elípticas

En este capítulo se dan las propiedades principales de las funciones elípticas o doblemente periódicas. Veremos que las elípticas son las funciones naturales que se definen en el toro y que juegan un papel similar al que al que juega las meromorfas en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1.1. Periodos

Para una función f definida en el plano complejo \mathbb{C} , un número complejo ω es llamado **periodo** de f si y sólo si:

$$f(z + \omega) = f(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C}$. La función es una **función periódica** si tiene algún periodo $\omega \neq 0$.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ tienen periodo 2π , $\exp(z)$ tiene periodo $2\pi i$ y $\operatorname{sen}(2\pi z/\omega)$ tiene periodo ω para cualquier número complejo $\omega \neq 0$. Toda función es de periodo $\omega = 0$.

El conjunto Ω_f de periodos de una función f tiene dos importantes propiedades, una algebraica y la otra topológica, ambas válidas para funciones meromorfas no constantes. Ambas propiedades se muestran en los siguiente teoremas.

Teorema 1.1.1. *Si Ω_f es el conjunto de periodos de una función f definida en \mathbb{C} entonces Ω_f es un subgrupo del grupo aditivo de \mathbb{C} .*

Demostración. Sea $\alpha, \beta \in \Omega_f$. Entonces $f(z + (\alpha + \beta)) = f((z + \alpha) + \beta) = f(z + \alpha) = f(z)$, entonces $\alpha + \beta \in \Omega_f$. Además, $f(z - \alpha) = f((z - \alpha) + \alpha) = f(z)$, así $-\alpha \in \Omega_f$. Finalmente, $f(z + 0) = f(z)$, y entonces $0 \in \Omega_f$. Entonces Ω_f es un subgrupo de \mathbb{C} . \square

Un subconjunto Δ de un espacio topológico X es llamado *discreto* si para cada $x \in \Delta$ existe una vecindad abierta U tal que $U \cap \Delta = \{x\}$. Por ejemplo:

1. Los enteros \mathbb{Z} forman un subconjunto discreto en \mathbb{R} .
2. Cualquier subconjunto finito de \mathbb{R}^n . es discreto.
3. $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ es un subconjunto discreto de \mathbb{R} .
4. $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \cap \{0\}$ no es discreto en \mathbb{R} , dado que cada vecindad de 0 contiene números reales de la forma $1/n, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.1.2. *Si Ω_f es el conjunto de periodos de una función meromorfa no constante f definida en \mathbb{C} entonces Ω_f es un subconjunto discreto de \mathbb{C} .*

Demostración. Si Ω_f no fuera discreto entonces existe $\omega \in \Omega_f$ tal que cada vecindad U de ω contiene puntos de $\Omega_f \setminus \{\omega\}$. Tomando estas vecindades como discos con centro en ω , con radio tendiendo a 0, obtenemos una sucesión de puntos periódicos $\omega_n \neq \omega$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega$. Como $\omega, \omega_n \in \Omega_f$ se tiene que $f(\omega) = f(\omega_n) = f(0)$. Si $f(0) = \infty$ entonces ω_n es una sucesión de polos que se acumulan en el polo ω , pero

esto llevaría a que $f \equiv \infty$ una contradicción. Si $f(0) \neq \infty$ entonces la función meromorfa $g(z) = f(z) - f(0)$ tiene una sucesión de ceros convergente, esto implica que g es idénticamente cero y entonces f es constante, dando una contradicción. \square

De hecho el conjunto de periodos de una función meromorfa no constante sólo puede ser de tres tipos de subgrupo discreto de \mathbb{C} , isomorfo a $\{0\}$, isomorfo a \mathbb{Z} o isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Teorema 1.1.3. *Sea Ω un subgrupo discreto de \mathbb{C} , entonces una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. $\Omega = \{0\}$,
2. $\Omega = \{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y en este caso Ω es isomorfo a \mathbb{Z} ,
3. $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ para algunos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, donde ω_1 y ω_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , esto es, $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$ y $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, en este caso Ω es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demostración. Suponga que $\Omega \neq \{0\}$. Primero mostraremos que existe $\omega_1 \in \Omega \setminus \{0\}$ con el menor valor para $|\omega|$. Dado que Ω es discreto, existe $\epsilon > 0$ tal que el disco $|z| < \epsilon$ no contiene elementos de $\Omega \setminus \{0\}$. Luego para cualquier $\omega \in \Omega$, el disco $|z - \omega| < \epsilon$ no contiene elementos de $\Omega \setminus \{\omega\}$ en efecto si $u \in \Omega$ satisface $0 < |u - \omega| < \epsilon$, entonces $u - \omega$ es un elemento de Ω (dado que Ω es un grupo) con distancia a cero menor que ϵ . Como se muestra en la figura 1.1, que es imposible. Así cada $\omega \in \Omega$ es centro de un disco de radio ϵ (independiente de ω) que no contiene algún otro elemento de Ω . Por lo tanto discos de radio $\frac{1}{2}\epsilon$, con centro en los elementos de Ω , son ajenos dos a dos. Ahora escojemos un disco de radio $|z| < r$ suficientemente largo para contener por lo menos un elemento de $\Omega \setminus \{0\}$, junto con su disco circundante de radio $\frac{1}{2}\epsilon$; este disco tiene área πr^2 , entonces, como en la figura 1.2, puede contener solo un número finito de discos

ajenos de radio $\frac{1}{2}\epsilon$ (de hecho, a lo más $4r^2\epsilon^{-2}$); por lo tanto existen un numero finito de elementos de $\Omega \setminus \{0\}$ con distancia r de 0, y dentro de este conjunto finito podemos escojer ω_1 con el menor modulo. (Puede ocurrir que no sea el único, de hecho podemos escojer a $-\omega_1$ y sirve igual).

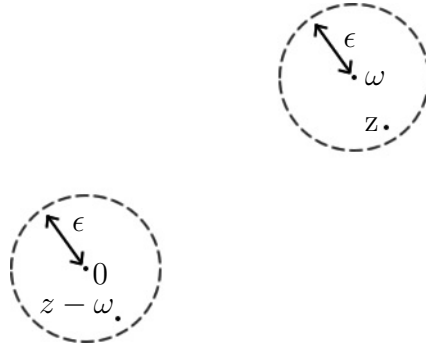


Figura 1.1:

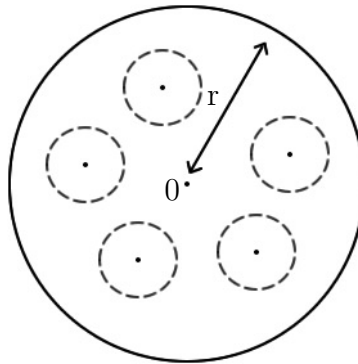


Figura 1.2:

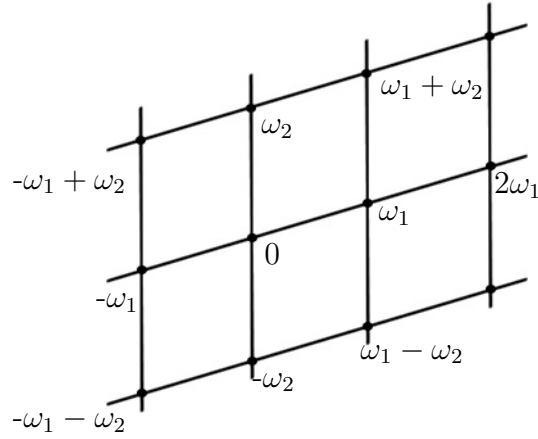


Figura 1.3:

Ahora, sea $L = \{\lambda\omega_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ la recta en \mathbb{C} que pasa por 0 y ω_1 ; entonces Ω contiene $\{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, y este subgrupo se encuentra sobre la recta L . Primero suponga que $\Omega \subseteq L$; y así $\Omega = \{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, y entonces Ω será del tipo **(2)**. Si Ω contiene algún $\omega \neq n\omega_1$, como $\Omega \subset L$ tenemos $\omega = \lambda\omega_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces $n < \lambda < n + 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Dado que Ω es un grupo que contiene a ω y a $n\omega_1$, también contiene $\omega - n\omega_1 = (\lambda - n)\omega_1$. Pero $0 \neq |(\lambda - n)\omega_1| < |\omega_1|$ lo que contradice la minimalidad de $|\omega_1|$. Por lo tanto $\Omega = \{n\omega_1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$, y estamos en el caso **(2)**. Ahora suponga que $\Omega \not\subseteq L$. Por un argumento similar al usado para ω_1 , podemos mostrar que $\Omega \setminus L$ tiene un elemento ω_2 con modulo mínimo. Después, Ω contiene al subgrupo $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, y dado que $\omega_2 \notin L$, ω_1 y ω_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , entonces Λ consiste de los vértices de la teselación de \mathbb{C} de paralelogramos congruentes, como se muestra en la figura 1.3. Ahora mostramos que $\Omega = \Lambda$. Si este no es el caso, entonces existe $\omega \in \Omega$ con $\omega \neq m\omega_1 + n\omega_2$ para cualquier $m, n \in \mathbb{Z}$. Sea $\omega = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces sumando o restando múltiplos convenientes de ω_1 y ω_2 podemos suponer que $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, $|\mu| \leq \frac{1}{2}$.

Si $\mu = 0$ entonces $\omega = \lambda\omega_1 \in L$, con $|\omega| = |\lambda\omega_1| < |\omega_1|$; por la minimalidad de ω_1 tenemos $\omega = 0$ y entonces $\omega \in \Delta$ contradiciendo lo que suponíamos. Si $\lambda = 0$ entonces $\omega = \mu\omega_2$, y de nuevo $\omega = 0$, esta vez por la minimalidad de $|\omega_2|$. Y así $\lambda\omega_1$ y $\mu\omega_2$ son distintas de cero y entonces son linealmente independiente sobre \mathbb{R} , dando

$$|\omega| < |\lambda\omega_1| + |\mu\omega_2| \leq \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq \frac{1}{2}|\omega_2| + \frac{1}{2}|\omega_2| = |\omega_2|,$$

la primera desigualdad es estricta ya que $\lambda\omega_1$ y $\mu\omega_2$ son linealmente independientes. Ahora $\omega \in \Omega \setminus L$ (dado que $\mu \neq 0$), entonces por la minimalidad que $|\omega_2|$ tenemos $\omega = 0$, contradiciendo el hecho de que $\lambda, \mu \neq 0$. Y así $\omega \in \Lambda$, entonces $\Omega = \Lambda$ y estamos en el caso **(3)**. \square

Con estas propiedades de los subconjuntos discretos Ω_f creamos la siguiente definición:

Definición 1.1.4. Si una función f tiene un subconjunto Ω_f de periodos del tipo **(2)** entonces f es **simplemente periódica**, si Ω_f es del tipo **(3)** entonces f es **doblemente periódica** o **elíptica**. Grupos Ω del tipo **(3)** son llamados **grupos latiz** y cualquier par ω_1, ω_2 tal que $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ es llamada una **base de la latiz**.

1.2. Latices y regiones fundamentales

Ahora enfoquémonos en subgrupos discretos Ω de \mathbb{C} con la propiedad de que $\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ para algunos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ donde ω_1 y ω_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} esto es, $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$ y $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$; en este caso Ω es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Una latiz es denotada como $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ donde $\{\omega_1, \omega_2\}$ es base para Ω . Existen otras bases para Ω además de $\{\omega_1, \omega_2\}$, como por ejemplo $\{\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}$ es también base de Ω , pues

$$\omega = m\omega_1 + n\omega_2 = (m - n)\omega_1 + n(\omega_1 + \omega_2),$$

con $m - n, n \in \mathbb{Z}$.

En general si $\omega'_1, \omega'_2 \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ entonces

$$\begin{aligned}\omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1, \\ \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1,\end{aligned}$$

donde a, b, c, d son enteros.

No es difícil ver que $\{\omega'_1, \omega'_2\}$ son base de la latiz $\Omega(\omega'_1, \omega'_2)$ si y sólo si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ cumplen $ad - bc = 1$ o -1 .

Dada una latiz Ω , decimos que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, son congruentes mod Ω , escrito $z_1 \sim z_2$, si $z_1 - z_2 \in \Omega$. La congruencia mod Ω es una relación de equivalencia en \mathbb{C} y las clases de equivalencia son los conjuntos de la forma $z + \Omega$.

Podemos ver a Ω como un grupo actuando sobre \mathbb{C} vía la traslación $T_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T_\omega(z) = z + \omega$, esto es, hay una acción dada por

$$\Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\omega, z) \mapsto z + \omega$$

Definición 1.2.1. Un conjunto cerrado y conexo $P \subseteq \mathbb{C}$ es una **región fundamental** de una latiz Ω si:

1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, P contiene al menos un punto en la misma Ω -órbita que z , (esto es, que todo punto $z \in \mathbb{C}$ es congruente con algún punto en P).
2. Cualesquiera dos puntos en el interior de P no son congruentes. (esto es que ningún par de puntos en el interior de P están en la misma Ω -órbita).

Si P es una región fundamental de Ω , entonces para cada $t \in \mathbb{C}$ fijo, el conjunto

$$P + t = \{ z + t \mid z \in P \}$$

es también una región fundamental. Esto ayuda cuando queremos encontrar regiones fundamentales. De hecho podemos ver que el paralelogramo con vértices en $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ es una región fundamental, y es llamado el **paralelogramo fundamental** de la latiz $\Omega(\omega_1, \omega_2)$.

Usualmente (pero no siempre) escogemos a P un paralelogramo con el 0 en su interior. De hecho podemos escoger regiones fundamentales que no sean paralelogramos; ni siquiera polígonos.

Para obtener una región fundamental que no son polígonos podemos realizar el siguiente procedimiento. Sea P el paralelogramo fundamental de $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ con vértices en $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$. La transformación $z \mapsto z + \omega_2$ transforma el interior de P y lo coloca en el lado opuesto. Si cortamos una sección S de P que interseque un lado y lo pegamos en $S + \omega_2$ en el lado opuesto, entonces tendremos otra región fundamental $(P \setminus S) \cup (S + \omega_2)$. Eso se muestra en la figura 1.4.

Cortando y pegando varios cuadrados, podemos obtener una región fundamental que es la unión de dos cuadrados como se muestra en la siguiente figura 1.5.

Como un ejemplo final de región fundamental de una latiz Ω , consideremos la **región de Dirichlet**

$$D(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z - \omega| \ \forall \omega \in \Omega\}$$

Éste es el conjunto de puntos que están más cerca de 0 que de cualquier otro punto de la latiz. Claramente, $0 \in D(\Omega)$, y como Ω es discreto $D(\Omega)$ contiene una vecindad de 0 . Para cada $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z - \omega|\}$ es un semiplano cerrado acotado por la mediatriz del segmento de recta que une a 0 con ω . Entonces $D(\Omega)$ es una intersección de semiplanos, a lo más 6. Cada uno convexo, entonces $D(\Omega)$ es convexo. Dado que $D(\Omega)$ es la intersección de un número finito de semiplanos, y dado que $D(\Omega)$ tiene interior no vacío (contiene al 0 por ejemplo) se sigue que $D(\Omega)$ es un polígono. Por esta razón se le llama **polígono de Dirichlet**.

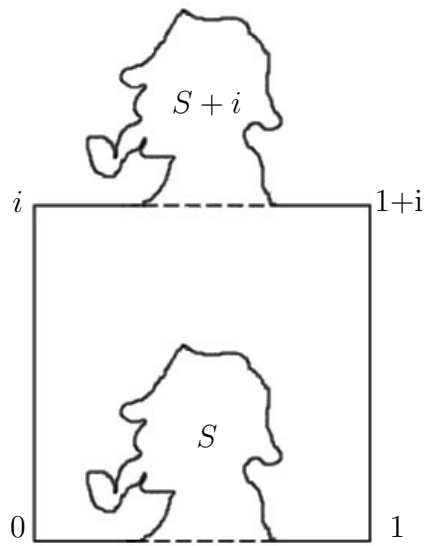


Figura 1.4: Cortamos la sección S y la pegamos.

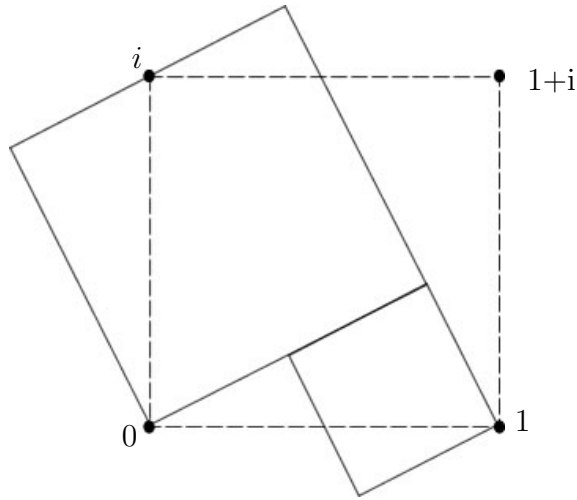


Figura 1.5: Teorema de Pitágoras.

Las siguientes figuras ilustran dos ejemplos de polígonos de Dirichlet. En el caso general, como en la primera figura, $D(\Omega)$ es un hexágono con sus lados opuestos paralelos y de la misma longitud, pero cuando Ω es “rectangular”, esto es, si Ω tiene un par de generadores perpendiculares como en la figura de la derecha, entonces $D(\Omega)$ es un rectángulo.

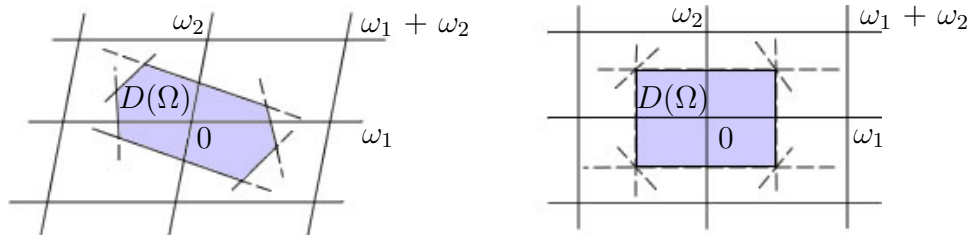


Figura 1.6: Polígonos de Dirichlet

Teorema 1.2.2. $D(\Omega)$ es una región fundamental de Ω .

Demostración. Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ y sea z_0 un punto de la Ω -órbita de z_1 con el menor módulo; este punto existe por el mismo argumento usado para probar las distintas formas de un subconjunto discreto en \mathbb{C} . Entonces $|z_0| \leq |z_0 - \omega|$ para toda $\omega \in \Omega$, y entonces $z_0 \in D$. Así, $D(\Omega)$ contiene por lo menos un punto de cada Ω -órbita. Lo siguiente que veremos es que si z_1, z_2 están en el interior de $D(\Omega)$ entonces no pueden estar en la misma Ω -órbita. Si $|z| = |z - \omega|$ para alguna $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$, entonces o bien $z \notin D(\Omega)$ o z está en la frontera de $D(\Omega)$. Además si z está en el interior de $D(\Omega)$ entonces $|z| < |z - \omega|$ para toda $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$. Si dos puntos del interior z_1, z_2 se encuentran en la misma Ω -órbita esto implica que $|z_1| < |z_2|$ y $|z_2| < |z_1|$ lo cual es una contradicción. Entonces el interior de $D(\Omega)$ contiene a lo más un punto en cada Ω -órbita. Siendo una intersección de semiplanos cerrados, $D(\Omega)$ es cerrado. Dado que $D(\Omega)$ es convexo, es conexo por trayectorias y por lo tanto es conexo. Entonces $D(\Omega)$ es una región fundamental. \square

Hemos visto que la región fundamental para una latiz no es única. Sin embargo el siguiente teorema muestra que el área de cualquier región fundamental es única. Aunque este resultado es verdadero para cualquier región fundamental bien portada sólo veremos la prueba para polígonos fundamentales.

Para cualquier conjunto medible $X \subseteq \mathbb{C}$, sea $\mu(X)$ el área de X . Para una notación conveniente escribiremos $\omega(X)$ para denotar $X + \omega$; dado que la translación $z \mapsto z + \omega$ es una isometría en \mathbb{C} , tenemos $\mu(\omega(X)) = \mu(X)$.

Teorema 1.2.3. Sea P_1 y P_2 dos polígonos fundamentales de una latiz Ω . Entonces $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

Demostración. Si Q_j es el interior de P_j ($j = 1, 2$) entonces $\mu(P_j) = \mu(Q_j)$. Ahora

$$P_1 \supseteq P_1 \cap \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega(Q_2) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (P_1 \cap \omega(Q_2)).$$

Como Q_2 es el interior de una región fundamental, los conjuntos $P_1 \cap \omega(Q_2)$ son ajenos, y entonces

$$\begin{aligned} \mu(P_1) &\geq \sum_{\omega \in \Omega} \mu(P_1 \cap \omega(Q_2)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \mu((- \omega)(P_1) \cap Q_2) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega(P_1) \cap Q_2), \end{aligned}$$

dado que sumar sobre ω o sobre $- \omega$ da la misma suma. Como P_1 es una región fundamental

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega(P_1) = \mathbb{C}$$

y entonces

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega(P_1) \cap Q_2) = Q_2.$$

Entonces

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega(P_1) \cap Q_2) \geq \mu(Q_2) = \mu(P_2),$$

dando la propiedad

$$\mu(P_1) \geq \mu(P_2).$$

Intercambiando P_1 y P_2 tenemos $\mu(P_2) \geq \mu(P_1)$ y entonces $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

1.3. Formas de latices y del grupo modular

Frecuentemente nos referimos a la forma de la latiz por las formas de las correspondientes regiones fundamentales. Para una latiz $\Omega(\omega_1, \omega_2)$, su apariencia es determinada por el cociente $\tau = \omega_1/\omega_2$. Generalmente escogemos los generadores tal manera que $\text{Im}(\tau) > 0$, esto impone orientación. Si $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ es una latiz y $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la latiz $k\Omega$ es $\{k\omega; \omega \in \Omega(\omega_1, \omega_2)\}$, en tal caso diremos que Ω y $k\Omega$ son semejantes; en general $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ y $\Omega'(\omega'_1, \omega'_2)$ son semejantes si para algun $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Omega' = k\Omega$.

Definimos el modulus de la base $\{\omega_1, \omega_2\}$ para la latiz $\Omega\{\omega_1, \omega_2\}$ como $\tau = \omega_2/\omega_1$, con $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ (si no intercambiamos ω_1 y ω_2). Cada latiz Ω determina un conjunto de moduli, los moduli de sus diferentes bases. Como $k\omega_2/k\omega_1 = \omega_2/\omega_1$, se tiene que latices semejantes determinan el mismo conjunto de moduli.

Ahora si $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ y $\Omega'(\omega'_1, \omega'_2)$ son latices con moduli $\tau = \omega_2/\omega_1$, y $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$, se tiene que Ω y Ω' son semejantes si y sólo si $\Omega' = k\Omega$ para algun $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y entonces si y sólo si

$$\omega'_2 = k(a\omega_2 + b\omega_1)$$

$$\omega'_1 = k(c\omega_2 + d\omega_1)$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $ad - bc = 1$ o -1 y en términos de τ y τ' si y sólo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$ o -1 .

Luego τ y τ' están en el semiplano superior $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$ si y sólo si $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$. Así en resumen: $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ y $\Omega'(\omega'_1, \omega'_2)$ son semejantes si y sólo si

$$\omega'_2 = k(a\omega_2 + b\omega_1)$$

$$\omega'_1 = k(c\omega_2 + d\omega_1)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

El **grupo modular** es $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{I, -I\}$ donde $SL(2, \mathbb{Z})$ es el conjunto de transformaciones de Mobius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$.

El grupo modular $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ actúa en \mathbb{H}^+ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{H}^+ &\rightarrow \mathbb{H}^+ \\ (T, z) &\rightarrow T(z) \end{aligned}$$

Como el grupo modular es discreto, actúa discontinuamente y para $u \in \mathbb{H}^+$ se define la región de Dirichlet de Γ centrada en u como

$$D_u(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^+; \rho(z, u) \leq \rho(z, T(\omega)) \text{ para todo } T \in \Gamma\}$$

donde $\rho(z, \omega)$ es la distancia hiperbólica en \mathbb{H}^+ , que se define por

$$\rho(z, \omega) = \log \left\{ \frac{|z - \bar{\omega}| + |z - \omega|}{|z - \bar{\omega}| - |z - \omega|} \right\}.$$

De hecho la acción clásica del grupo modular Γ en el semiplano superior nos da la relación entre las posibles elecciones de τ para una misma forma. Una propiedad de una región fundamental de Γ es que, como es un conjunto simplemente conexo en el plano superior, tiene exactamente un punto de la Γ -órbita para cada τ .

Consideramos la **región fundamental primitiva** definida por:

$$B = \{\tau \in \mathbb{C}; -1/2 \leq Re(\tau) < 1/2, |\tau| \geq 1, \text{ con } |\tau| > 1 \text{ si } Re(\tau) > 0\}$$

Entonces cualquier forma está representada por exactamente un punto en B . La región B se muestra en la siguiente Figura.

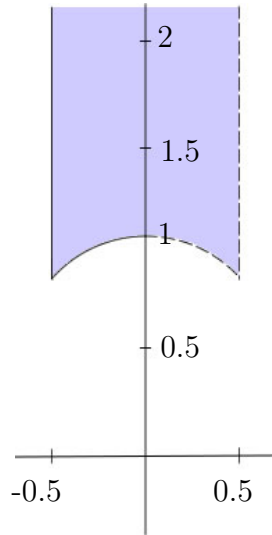


Figura 1.7: La región primitiva fundamental

Definición 1.3.1.

1. Decimos que $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ es una **latiz rectangular real** si tiene generadores ω_1 real y ω_2 imaginario puro.
2. Decimos que $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ es una **latiz rombóica real** si existen generadores tales que $\omega_2 = \overline{\omega_1}$.
3. Una latiz Ω es **cuadrada** si $i\Omega = \Omega$. (Equivalentemente, Ω es cuadrada si es similar a una latiz generada por $\{\omega, \omega i\}$, para algún $\omega > 0$).
4. La latiz Ω es **real** si $\overline{\Omega} = \Omega$.
5. Una latiz es **triangular** si $\Omega = e^{2\pi i/3}\Omega$ (en este caso su polígono fundamental se puede formar con dos triángulos equiláteros).

En los casos 1, 2 y 3, el paralelogramo con vértices en $0, \omega_1, \omega_2$ y $\omega_1 + \omega_2$ es un polígono fundamental y resulta rectangular, rombóica o un cuadrado respectivamente.

Teorema 1.3.2. *Una latiz Ω es real si y solo si es rectangular real o real rombóica*

Demostración: Si $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ es rectangular real, con $\omega_1 \in \mathbb{R}$ y $\omega_2 \in i\mathbb{R}$, entonces $\bar{\Omega} = \Omega(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \Omega(\omega_1, -\omega_2) = \Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega$, entonces Ω es real. Un argumento similar se usa para las latices reales rombóicas. Ahora supongamos que Ω es real. Si $\omega \in \Omega$ entonces $\omega + \bar{\omega}, \omega - \bar{\omega} \in \Omega$, entonces Ω contiene elementos tanto reales como puramente imaginarios, y formemos los subgrupos discretos $\Omega \cap \mathbb{R} = \lambda\mathbb{Z}$ y $\Omega \cap i\mathbb{R} = \mu i\mathbb{Z}$ para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu > 0$. Claramente $\Omega \supseteq \lambda\mathbb{Z} + \mu i\mathbb{Z}$, y si tenemos la igualdad entonces Ω es real rectangular dado que $\lambda, \mu i$ es una base. Entonces suponemos que existe $\omega \in \Omega \setminus (\lambda\mathbb{Z} + \mu i\mathbb{Z})$. Sumando un elemento $\lambda\mathbb{Z} + \mu i\mathbb{Z}$ a ω podemos suponer que $0 \leq \text{Re}(\omega) < \lambda$ y $0 \leq \text{Im}(\omega) < \mu$. Ahora

$$2\omega = (\omega + \bar{\omega}) + (\omega - \bar{\omega}),$$

con $\omega + \bar{\omega} \in \Omega \cap \mathbb{R} = \lambda\mathbb{Z}$ y $\omega - \bar{\omega} \in \Omega \cap i\mathbb{R} = \mu i\mathbb{Z}$, entonces tenemos

$$2\omega = m\lambda + n\mu i$$

para m y n enteros y las condiciones en $\text{Re}(\omega)$ y $\text{Im}(\omega)$ obligan a m y n a tomar los valores 0 y 1. Dado que ω no es ni real ni puramente imaginario, tenemos que $m = n = 1$ y entonces $\omega = 1/2(\lambda + \mu i)$. Entonces todo elemento de $\Omega \setminus (\lambda\mathbb{Z} + \mu i\mathbb{Z})$ tiene la forma

$$1/2(\lambda + \mu i) + a\lambda + b\mu i = (a + b + 1) \left(\frac{\lambda + \mu i}{2} \right) + (a + b) \left(\frac{\lambda + \mu i}{2} \right),$$

para a, b enteros, mientras que cada elemento de $\lambda\mathbb{Z} + \mu i\mathbb{Z}$ tiene la forma

$$a\lambda + b\mu i = (a + b) \left(\frac{\lambda + \mu i}{2} \right) + (a - b) \left(\frac{\lambda - \mu i}{2} \right)$$

Entonces $\Omega = \Omega(1/2(\lambda + \mu i), 1/2(\lambda - \mu i))$, que es un rombóica real. \square

Proposición 1.3.3. *Una latiz Ω es cuadrada si y sólo si tiene generadores de igual longitud y forma, que forman un ángulo recto entre sí. Con más precisión, toda latiz real cuadrada es rectangular y $\Omega = [\omega, \omega i]$ para algún ω positivo, o es rombóica y $\Omega = [e^{\pi i/4}\omega, e^{-\pi i/4}\omega]$ para algún positivo ω .*

Proposición 1.3.4. *Una latiz es triangular si y sólo si tiene sus generadores de la misma longitud y formando un ángulo de $2\pi/3$ entre los dos. Con mas precisión, toda latiz real triangular está dada por $\Omega = [\omega e^{\pi i/3}, \omega e^{-\pi i/3}]$ para algún positivo ω .*

A veces la forma de las latices no es evidente.

Ejemplo. $\Omega = [1, 1 + i]$ es una latiz rectangular cuadrada dado que $\Omega = [1, i]$ también. De aquí en adelante, si Ω es rectangular asumiremos que los generadores han sido seleccionados para que ω_1 sea un positivo real y ω_2 es un imaginario positivo. Si Ω es rombóica asumimos que ω_1 está en el cuadrante I y $\omega_2 = \bar{\omega}_1$.

1.4. Propiedades generales de las funciones elípticas

Si $f : \mathbb{C} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ es una función elíptica con respecto a una latiz $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ podemos también pensar a f como una función $f : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, donde T es el toro $T = \mathbb{C}/\Omega$. Cuando se consideran las funciones meromorfas $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, la compacidad del dominio $\hat{\mathbb{C}}$ nos permite usar el teorema de Liouville para mostrar que si f es analítica entonces f es constante. Aquí el dominio T también es compacto, entonces podremos probar resultados similares para las funciones elípticas, de hecho veremos que las funciones elípticas se comportan en el toro de manera parecida a las funciones racionales con la esfera.

Hasta ahora las únicas funciones elípticas que hemos visto han sido constantes pero es un problema esencial querer hacer funciones elípti-

cas no constantes. Antes de eso podemos ver propiedades generales de las funciones elípticas.

Supongamos que f es elíptica con respecto a la latiz Ω , que $c \in \hat{\mathbb{C}}$ y que f no es idénticamente igual a c . Entonces las soluciones de $f(z) = c$ son aisladas y cada solución tiene un número finito de multiplicidades (valores que trasladados por los valores propios son equivalentes), soluciones congruentes tienen la misma multiplicidad. Dado que la solución es aislada, cualquier paralelogramo fundamental P para Ω contiene sólo un número finito de soluciones (dado que P es compacto) y reemplazando P por $P + t$ ($t \in \mathbb{C}$), si es necesario, podemos suponer que no existen soluciones en la frontera ∂P de P . Sean $z = z_1, \dots, z_r$ las soluciones dentro de P , con multiplicidades k_1, \dots, k_r y $N = k_1 + \dots + k_r$. Entonces decimos que existen N soluciones de $f(z) = c$. Dado que z_1, \dots, z_r son representantes de las clases de congruencia de $f(z) = c$, para $z \in \mathbb{C}$, podemos pensar en N como la suma de las multiplicidades de la solución de $f([z]) = c$, donde $[z] \in T = \mathbb{C}/\Omega$.

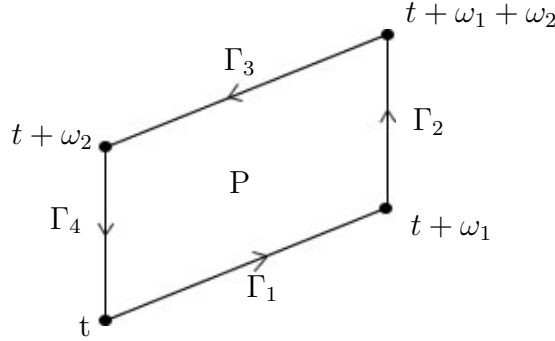
Con todo esto en mente definimos el *orden* de una función elíptica f , $ord(f)$, como el número de soluciones de $f(z) = \infty$; esto es, la suma de los órdenes de las clases de congruencias de polos de f (Esto es análogo al grado de las funciones racionales) que son iguales al número de soluciones de $f(z) = \infty$ contando sus multiplicidades. Supondremos que f es elíptica con respecto a una latiz Ω , que $ord(f) = N$ y que P es un paralelogramo fundamental con vértices $t, t + \omega_1, t + \omega_2, t + \omega_1 + \omega_2$ donde ω_1, ω_2 es base para Ω , t es seleccionado de tal manera que ∂P no contiene polos ni ceros de f .

Teorema 1.4.1. *f es constante si y sólo si $N=0$. (Entonces una función elíptica analítica tiene que ser constante).*

Demostración. Si f es constante y meromorfa entonces no tiene polos en \mathbb{C} y $N = 0$. Si suponemos que $N = 0$, f no tiene polos y entonces f es analítica en \mathbb{C} . Ahora como P es compacto y f es continua, entonces $f(P)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{C} por lo tanto está acotado. Debido a que $f(\mathbb{C}) = f(P)$, se sigue que f está acotada

en \mathbb{C} , el teorema de Liouville implica que f es constante. \square

Teorema 1.4.2. *La suma de los residuos de f en P es cero.*



Demostración. Como f es meromorfa y analítica en ∂P

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f(z) dz$$

es igual a la suma de los residuos de f en puntos de P . Ahora sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 los lados de P desde t hasta $t + \omega_1$, $t + \omega_1$ hasta $t + \omega_1 + \omega_2$ de $t + \omega_1 + \omega_2$ hasta $t + \omega_2$ y $t + \omega_2$ hasta t respectivamente; entonces

$$\int_{\partial P} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} f(z) dz,$$

donde la dirección de la integral a lo largo de Γ_j coincide con la orientación positiva de ∂P (es decir al contrario de las manecillas del reloj)

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_{\Gamma_3} f(z + \omega_2) dz$$

(debido a que ω_2 es periodo de F)

$$= - \int_{\Gamma_1 + \omega_2} f(z + \omega_2) d(z + \omega_2)$$

(debido a que $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \omega_2$ con el sentido contrario)

$$= - \int_{\Gamma_1} f(z) dz$$

(sustituyendo $z - \omega_2$ por z)

De manera similar $\int_{\Gamma_4} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz$ debido a que ω_1 es periodo, entonces $\int_{\partial P} f(z) dz = 0$. Luego la suma de los residuos es cero. \square

Corolario 1.4.3. *No existen funciones elípticas de orden $N = 1$.*

Demostración. Si f fuese una función elíptica de orden $N = 1$, tendría un polo simple de orden 1 en P , digamos en $z = a \in P$, entonces su serie de Laurent alrededor de $z = a$, es

$$f(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j (z - a)^j$$

cerca de $z = a$ con $a_1 \neq 0$. Entonces la suma de los residuos de f en P sería igual a a_1 , que no es cero, contradiciendo el Teorema anterior. \square

Ahora que ya vimos que no existen funciones elípticas de orden 1 podremos continuar nuestro análisis con ver si existen funciones elípticas de orden 2; para esto construiremos una función elíptica \wp de orden 2, y después demostraremos que el orden de las funciones elípticas se puede expresar en términos de \wp , de manera tan simple como todas las funciones con periodos simples se pueden expresar en términos de $e^{2\pi iz}$. Esto lo dejaremos al siguiente capítulo. Por ahora veamos otras propiedades generales.

Teorema 1.4.4. *Si la función elíptica f tiene orden $N > 0$ entonces f toma cada valor de $c \in \hat{\mathbb{C}}$ exactamente N veces.*

Demostración. Ésta es la definición de N si $c = \infty$, entonces podemos suponer que $c \in \hat{\mathbb{C}}$. Reemplazando f por $f - c$ (que tiene el mismo orden que f), podemos suponer también que $c = 0$. Ahora f'/f es meromorfa y dado que ∂P no contiene polos o ceros de f , f'/f es analítica en ∂P . Ahora podemos integrar f'/f alrededor de ∂P . Como f es elíptica entonces f'/f también, y aplicando el mismo argumento del teorema de los residuos igual a cero tenemos que

$$\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

y así la suma de los residuos de f'/f sobre P tiene que ser cero.

Ahora f'/f tiene polos en los ceros y en los polos de f , y en ninguna parte más. Suponga que f tiene un cero de multiplicidad k en $z = a \in P$, entonces $f(z) = (z - a)^k g(z)$ cerca de $z = a \in P$, donde g es analítica y $g(a) \neq 0$. Así $f'(z) = k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)$ cerca de $z = a$, y entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

cerca de $z = a$, entonces f'/f tiene residuo k en $z = a$. Un argumento similar con $f(z) = (z - a)^{-k} g(z)$, muestra que f'/f tiene residuo $-k$ en cada polo de la multiplicidad de k sobre f . Dado que la suma de los residuos de f'/f es cero, el número de ceros de f debe ser igual al número de polos, contando sus multiplicidades, y así la ecuación $f(z) = 0$ tiene N soluciones. \square

Teorema 1.4.5. *Sean f y g funciones elípticas con respecto a Ω con polos en los mismos puntos de \mathbb{C} , y con la mismas partes principales en estos puntos. Entonces $f(z) = g(z) + c$ para alguna constante c*

Demostración La función $f - g$ es elíptica, y su orden es 0 dado que no tiene polos, entonces $f - g$ es constante por el Teorema 1.4.1. \square

Teorema 1.4.6. *Sea f y g funciones elípticas con respecto a Ω , con ceros y polos del mismo orden en los mismos puntos de \mathbb{C} . Entonces $f(z) = cg(z)$ para alguna constante $c \neq 0$.*

Demostración. Reemplazando $f - g$ por f/g en la prueba del teorema anterior. \square

Una función racional $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$, que no es idénticamente cero, debe tener un número finito de ceros (digamos en a_1, \dots, a_r con multiplicidades k_1, \dots, k_r) y un número finito de polos (digamos en b_1, \dots, b_s con sus multiplicidades l_1, \dots, l_s) y recíprocamente, dada una colección de puntos $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in \Sigma$ y sus multiplicidades $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \geq 1$, entonces existe una función racional f con estos ceros y polos con estas multiplicidades, siempre y cuando:

1. $k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_s$ (ambos tienen el mismo grado de f), y
2. los conjuntos a_1, \dots, a_r y b_1, \dots, b_s son ajenos (ceros y polos no coinciden).

En efecto bastará formar $f(z) = \prod_j (z - a_j)^{k_j} / \prod_j (z - b_j)^{l_j}$, donde $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, pero excluye los factores donde $a_j = \infty$ ó $b_j = \infty$.

Si existe una función elíptica $f : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$ que tiene ceros y polos en las clases de congruencia $[a_1], \dots, [a_r]$ y $[b_1], \dots, [b_s]$ con sus multiplicidades k_1, \dots, k_r y l_1, \dots, l_s , entonces la condición 1 es necesaria por el teorema 3.4.4, y correspondientemente para la condición 2 tenemos la siguiente condición necesaria.

- 2'. los conjuntos $[a_1], \dots, [a_r]$ y $[b_1], \dots, [b_s]$ son ajenos.

El siguiente resultado muestra que en comparación con la situación de las funciones racionales, estas condiciones no son *suficientes* para la existencia de f .

Teorema 1.4.7. *Sean $[a_1], \dots, [a_r]$ y $[b_1], \dots, [b_s]$ las clases de congruencia de los ceros y polos de una función elíptica f con sus multiplicidades*

dades k_1, \dots, k_r y l_1, \dots, l_s . Entonces

$$\sum_{j=1}^r k_j a_j \sim \sum_{j=1}^s l_j b_j \pmod{\Omega}$$

Demostración. Como es lo usual, sea P un paralelogramo fundamental para Ω , de manera que no tenga ni ceros ni polos en ∂P . El efecto de reemplazar cualquier a_j o b_j por un punto de congruencia es añadir un elemento de Ω a $\sum k_j a_j - \sum l_j b_j$, y esto no afecta la conclusión del teorema, entonces podemos suponer que $a_j, b_j \in P$ para toda j .

Primero probemos que

$$\sum k_j a_j - \sum l_j b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

Los polos de zf'/f son los ceros y polos de f , y si f tiene un cero de multiplicidad k en $z = a$, entonces $f(z) = (z - a)^k g(z)$ cerca de $z = a$ con g analítica y $g(a) \neq 0$. Así:

$$\begin{aligned} \frac{zf'(z)}{f(z)} &= \frac{z}{(z - a)^k g(z)} (k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)) \\ &= \frac{kz}{z - a} + \frac{zg'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

cerca de $z = a$, con zg'/g' analítica en a , entonces zf'/f tiene residuo ka en $z = a$. De manera similar si f tiene un polo de multiplicidad l en $z = b$, entonces zf'/f tiene residuo $-lb$ en $z = b$. Ahora los ceros y los polos de f dentro de P son a_1, \dots, a_r y b_1, \dots, b_s con multiplicidades k_1, \dots, k_r y l_1, \dots, l_s , que da como resultado que la suma de los residuos sea igual a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz,$$

y toma el valor de $\sum k_j a_j - \sum l_j b_j$.

Si los lados de P tienen el mismo sentido que le dimos anteriormente, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\Gamma_2} \frac{(z - \omega_1)f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\omega_1 f'(z)}{f(z)} dz \\ &= - \int_{\Gamma_4} \frac{zf'(z + \omega_1)}{f(z + \omega_1)} dz + \omega_1 [\log f(z)]_{\Gamma_2} \\ &= - \int_{\Gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + 2\pi n_1 i \omega_2 \end{aligned}$$

para algún $n_1 \in \mathbb{Z}$ usando el hecho de que Γ_4 igual al segmento $\Gamma_2 - \omega_1$, con la orientación en el sentido contrario, que f y f' son periódicos y que $\log f(z)$ cambia su valor por un múltiplo entero de $2\pi i$ mientras z viaja a lo largo de Γ_2 desde $t + \omega_1$ hasta $t + \omega_1 + \omega_2$ (dado que $f(t + \omega_1) = f(t + \omega_1 + \omega_2)$). De manera similar tenemos:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = - \int_{\Gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + 2\pi n_2 i \omega_2$$

para algún $n_2 \in \mathbb{Z}$, y entonces

$$\begin{aligned} \sum k_j a_j - \sum l_j b_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_j} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} (2\pi n_1 i \omega_1 + 2\pi n_2 i \omega_2) \\ &= n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, \end{aligned}$$

que es un elemento de Ω , como se requería. \square

Cuando pidamos construir funciones elípticas, debemos ver que las dos condiciones 1 y 2' junto con la condición que 3 que es $\sum k_j a_j \sim \sum l_j b_j \pmod{\Omega}$, sean suficientes para la existencia de una función elíptica f con ceros y polos predeterminados.

1.5. Latices y toros

En esta sección veremos las relaciones entre los latices y su geometría.

Teorema 1.5.1. *Si Ω es un latiz, entonces \mathbb{C}/Ω es una superficie de Riemann homeomorfa a un toro.*

Demostración. Primero mostraremos que \mathbb{C}/Ω es Hausdorff. Si $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ es la proyección $z \mapsto [z] = z + \Omega$, y $U \subseteq \mathbb{C}/\Omega$ se define que es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C} , entonces p es abierta y continua. Sea $s_1 = [z_1]$ y $s_2 = [z_2]$ dos puntos distintos en \mathbb{C}/Ω . Dado que Ω es discreto existe

$$\mu = \inf_{\omega \in \Omega} |z_2 - (z_1 + \omega)| > 0,$$

entonces sean V_1 y V_2 discos abiertos en \mathbb{C} de radio $\mu/2$ con centro en z_1 y z_2 , respectivamente. Ahora mostraremos que $(V_1 + \omega) \cap V_2 = \emptyset$ para toda $\omega \in \Omega$. Si no, existiría algún $z \in V_1$ y $\omega \in \Omega$ con $z + \omega \in V_2$, y la desigualdad del triángulo daría

$$\begin{aligned} |z_2 - (z_1 + \omega)| &\leq |z_2 - (z + \omega)| + |(z + \omega) - (z_1 + \omega)| \\ &= |z_2 - (z + \omega)| + |z - z_1| < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu \end{aligned}$$

contradiciendo la definición de μ . Dado que p es abierta, $p(V_1)$ y $p(V_2)$ son vecindades abiertas ajenas de s_1 y s_2 en \mathbb{C}/Ω , entonces \mathbb{C}/Ω es un espacio de Hausdorff.

Ahora construiremos un atlas en \mathbb{C}/Ω . Dado que Ω es discreto, entonces existe

$$\delta = \inf_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} |\omega| > 0.$$

Si \mathcal{V} es el conjunto de todos los discos abiertos en \mathbb{C} de diámetro a lo más de $\delta/2$, entonces

1. $V \cap (V + \omega) = \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{V}$, $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$;

2. si $V, V' \in \mathbf{V}$ entonces V tiene una intersección no vacía con a lo más uno de los trasladados $V' + \omega$ de $V' (\omega \in \Omega)$

La desigualdad del triángulo nos da (1). Para probar (2) supongamos que $z_1 \in V \cap (V' + \omega_1)$ y $z_2 \in V \cap (V' + \omega_2)$ con $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, digamos que $z_1 = z'_1 + \omega_1$ y $z_2 = z'_2 + \omega_2$ con $z'_1, z'_2 \in V'$; entonces el elemento $\omega_1 - \omega_2$ de Ω satisface

$$\begin{aligned} |\omega_1 - \omega_2| &= |(z_1 - z'_1) - (z_2 - z'_2)| = |(z_1 - z_2) - (z'_1 - z'_2)| \\ &\leq |z_1 - z_2| + |z'_1 - z'_2| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

entonces $\omega_1 = \omega_2$ por definición de δ .

Por (1), la restricción p_V de p a V es biyectiva, y dado que p es continua, también lo es p_V . Aún más p_V es abierta: si un subconjunto A de V es abierto relativo en V (dado que V es abierto) es entonces A abierto en \mathbb{C} , y $p_V(A) = p(A)$ es abierto en \mathbb{C}/Ω (dado que p es abierta) y entonces es un abierto relativo en $p_V(A) = p(V)$. Por lo tanto p_V es un homeomorfismo de V en su imagen $p(V)$ ($= U_V$, por decir), entonces existe un homeomorfismo $\Phi_V = p_V^{-1} : U_V \rightarrow V$. El conjunto de todas las cartas (U_V, Φ_V) con $V \in \mathbf{V}$ que cumplen esto, forman un atlas de \mathbb{C}/Ω , y entonces \mathbb{C}/Ω es una superficie.

Ahora para mostrar que este atlas es analítico, supongamos que (U_V, Φ) y $(U_{V'}, \Phi_{V'})$ son cartas con $U_V \cap U_{V'} \neq \emptyset$; debemos mostrar que la función de transición de coordenadas

$$\Phi_{V'} \circ \Phi_V^{-1} : \Phi_V(U_V \cap U_{V'}) \rightarrow \Phi_{V'}(U_V \cap U_{V'})$$

es analítica.

Sean $z \in \Phi_V(U_V \cap U_{V'})$ y $z' = (\Phi_{V'} \circ \Phi_V^{-1})(z)$; así $p_V(z') = \Phi_V^{-1}(z) = p_V(z)$, entonces $p(z') = p(z)$ y $z = z' + \omega$ para algún $\omega \in \Omega$ (dependiendo posiblemente de z). Dado que $z \in V$ y $z' \in V'$ tenemos que $V \cap (V' + \omega) \neq \emptyset$, y ω es independiente de z por (2). Ahora $z' = z - \omega$ para una constante $\omega \in \Omega$, entonces z' es una función analítica de z , como se pide.

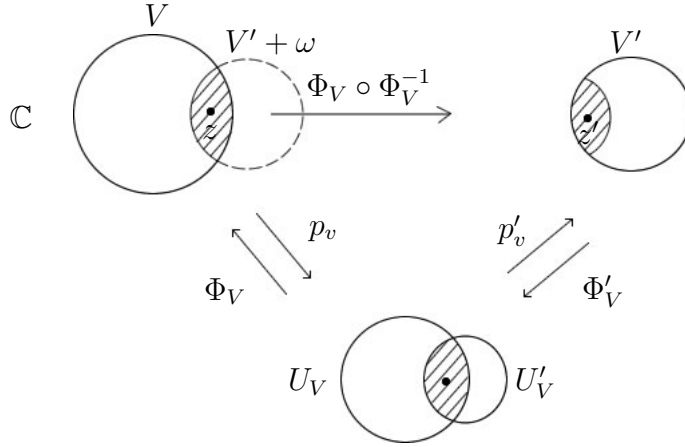


Figura 1.8:

De esta manera identificamos los lados opuestos del rectángulo y así vemos que \mathbb{C}/Ω es homeomorfa a un toro. \square

Ahora haremos algunas observaciones, para Ω una latiz y $a\omega = \{a\omega; \text{ con } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ que resulta ser también una latiz.

Dos latices Ω y Ω' son semejantes si $\Omega' = a\Omega$ para algún $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; esto define una relación de equivalencia. Denotaremos a los elementos de \mathbb{C}/Ω por $[z]$.

Teorema 1.5.2. *Las superficies \mathbb{C}/Ω y \mathbb{C}/Ω' son conformemente equivalentes si y sólo si Ω y Ω' son semejantes. Además si $\Omega' = a\Omega$ con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la función $f_{a,b}([z]) = [az + b]'$ es un homeomorfismo conforme entre \mathbb{C}/Ω y \mathbb{C}/Ω' .*

Demostración. La clave está en mostrar que si $f : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega'$ es una función holomorfa, entonces existe un automorfismo \tilde{f} de \mathbb{C} tal que $f \circ p = p' \circ \tilde{f}$ donde $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ y $p' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega'$ son las proyecciones naturales.

Si $f([z]) = [z]'$ entonces existen discos abiertos V y V' en \mathbb{C} , con centro en z y z' que se transforman de manera holomorfa por p y

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 \mathbb{C}/\Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Omega'
 \end{array}$$

p' en vecindades U y U' de $[z]$ y $[z']'$. Los homeomorfismos inversos $q : U \rightarrow V$ y $q' : U' \rightarrow V'$ son cartas descritas en 1.5.1 y dado que f es holomorfa, la transformación

$$F = q' \circ f \circ p : q(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow q'(U' \cap f(U))$$

que representa el cambio local de coordenadas inducido por f es analítica. Note que F *no* es la única transformación determinada por z , podemos reemplazar V' por cualquiera de sus traslaciones $V' + \omega'$ ($\omega' \in \Omega'$), y esto tiene el efecto de reemplazar F por $F + \omega'$. Además en cada $z \in \mathbb{C}$ tenemos un conjunto de gérmenes analíticos de hojas $[F + \omega']_z$, y se puede observar que si z se mueve en \mathbb{C} , el conjunto \mathcal{G} de todos los gérmenes da una continuación a todo \mathbb{C} . Esto implica que, dado que \mathbb{C} es simplemente conexo, alguno de estos gérmenes se extiende a una función analítica $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaciendo $f \circ p = p' \circ \tilde{f}$ (dado que cada rama F de \tilde{f} satisface $f \circ p' \circ F$ en su dominio). Llamamos a \tilde{f} un **levantamiento** de f .

Dado que $f \circ p = p' \circ \tilde{f}$ tenemos $f([z]) = [\tilde{f}(z)]'$ para toda $z \in \mathbb{C}$, y entonces para cada $\omega \in \Omega$ fijo tenemos que $\tilde{f}(z + \omega) = \tilde{f}(z) + \omega'_z$ donde ω'_z es un elemento de Ω' dependiendo posiblemente de z . Ahora la función

$$z \mapsto \omega'_z = \tilde{f}(z + \omega) - \tilde{f}(z)$$

es continua (dado que \tilde{f} es analítica), y este transforma al espacio conexo \mathbb{C} en un espacio discreto Ω' , entonces tiene que ser constante. Además ω'_z depende solamente de ω , y no de z , entonces podemos

eliminar el subíndice z en ω'_z , y tendremos

$$\tilde{f}(z + \omega) = \tilde{f}(z) + \omega'$$

para toda $z \in \mathbb{C}$, donde $\omega' \in \Omega'$, depende de $\omega \in \Omega$. Al calcular la derivada con respecto a z veremos que $d\tilde{f}/dz$ es elíptica con respecto a Ω ; es también analítica, dado que \tilde{f} lo es. Entonces tiene que ser constante. Luego,

$$\tilde{f}(z) = az + b$$

para constantes $a, b \in \mathbb{C}$, entonces

$$f([z]) = [az + b]'$$

y $f = f_{a,b}$. Para cada $\omega \in \Omega$, $f([z + \omega]) = f([z])$ y $[a(z + \omega) + b]' = [az + b]'$; así $a\omega \in \Omega'$ y también $a\Omega \subseteq \Omega'$.

El regreso; si $a\Omega \subseteq \Omega'$ entonces la transformación $f_{a,b}$ es un homeomorfismo conforme y su inversa holomorfa tiene que tener la forma $[z]' \mapsto [(z - b)/a]$ donde $a^{-1}\Omega' \subseteq \Omega$, para que $\Omega' \subseteq a\Omega$ y entonces $\Omega' = a\Omega$. Si $\Omega' = a\Omega$, entonces esto define una inversa holomorfa, y así f es un homeomorfismo conforme.

Corolario 1.5.3. *Los automorfismos de la superficie de Riemann \mathbb{C}/Ω son de la forma $f_{a,b}([z]) = [az + b]$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a\Omega = \Omega$.*

Capítulo 2

La función $\wp(z)$

2.1. La función \wp de Weierstrass

Sea $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ una latiz con base ω_1, ω_2 y sea P el paralelogramo fundamental de Ω que no tenga elementos de Ω en ∂P . Lo que haremos primero será construir funciones no constantes f que sean elípticas con respecto a Ω . Por el teorema 3.3.1 sabemos que una función de ese tipo no puede ser analítica y debe tener polos en P . Por el teorema 3.3.3 sabemos que f no puede tener un polo simple en P , de modo que las funciones elípticas no constantes más simples tienen orden 2, con dos polos simples ó un polo de orden 2 en P . En esta sección veremos la función de Weierstrass $\wp(z)$ que es una función elíptica de orden 2 con respecto a Ω y tiene un polo de orden 2 en P . Ésta será nuestra función elíptica base en el sentido de que cualquier función elíptica con respecto a Ω es una función racional de \wp y su derivada \wp' .

En vez de construir directamente $\wp(z)$ la deduciremos a partir de la función sigma de Weierstrass $\sigma(z)$, que está relacionada con $\wp(z)$ casi de la misma manera que $S(z) = \pi \operatorname{sen} \pi z$ está relacionada con $P(z) = \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \pi z$. Veremos que la convergencia de los productos y las series que definen a la función de Weierstrass dependen de sumas

similares acomodadas por la latiz Ω . Para aclarar el significado de una suma sobre Ω debemos de definir un orden para Ω . Los conjuntos $\Pi_r = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } \max(|a|, |b|) = r\}$, para enteros $r \geq 1$, son paralelogramos semejantes centrados en 0, como se muestra en la siguiente figura.

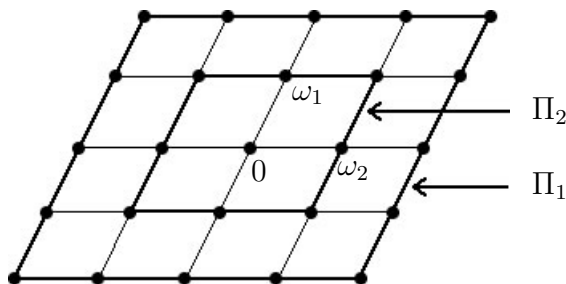


Figura 2.1: Paralelogramos semejantes centrados en 0.

Definiendo $\Omega_r = \Omega \cap \Pi_r$, tenemos

$$\Omega_r = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}, \max(|m|, |n|) = r\}$$

Ahora Ω es una unión ajena $\Omega = \{0\} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots$, y para cada $r \geq 1$ tenemos

$$|\Omega_r| = 8r$$

Entonces podemos ordenar los elementos de Ω comenzando desde el 0 y después listando los elementos $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ rotando alrededor de cada Ω_r en el orden $r\omega_1, r\omega_2 + \omega_2, \dots, r\omega_1 - \omega_2$ para que la sucesión de espirales vaya desde 0.

Si denotamos esta manera de ordenarlos por $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$ entonces $\omega^{(0)} = 0, \omega^{(1)} = \omega_1, \omega^{(2)} = \omega_1 + \omega_2, \omega^{(3)} = \omega_2, \dots, \omega^{(8)} = \omega_1 - \omega_2, \omega^{(9)} = 2\omega_1, \omega^{(10)} = 2\omega_1 + \omega_2, \dots$; claramente $|\omega^{(k)}| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.

$\Sigma_{\omega \in \Omega}$ (y $\Sigma'_{\omega \in \Omega}$) denotan las sumas sobre todos los elementos de la latiz (con apóstrofe significa que sin el cero) tomados en el orden que

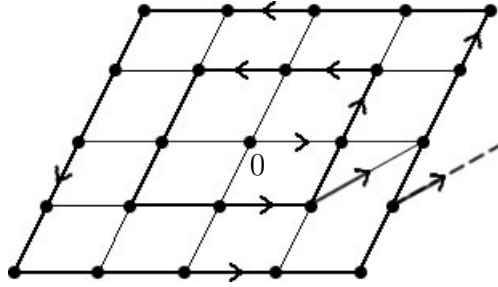


Figura 2.2: Secuencia en espiral para dar orden.

le dimos; de hecho $\sum_{\omega \in \Omega} h(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} h(\omega^{(k)})$ para cada función h , y de manera similar $\sum'_{\omega \in \Omega} h(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} h(\omega^{(k)})$.

$\prod_{\omega \in \Omega} (y \prod'_{\omega \in \Omega})$ denotan los productos sobre los puntos de la latiz (sin el cero respectivamente) en el orden visto anteriormente. Por conveniencia abreviaremos la notación a $\Sigma, \Sigma', \Pi, \Pi'$. En la práctica, un orden particular de Ω no es de suma importancia ya que son usualmente absolutamente convergentes y eso hace que las sumas o productos sean invariantes bajo reordenamientos.

Las propiedades de la convergencia de la función de Weierstrass dependerán del siguiente resultado, que es un análogo en dos dimensiones al hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ que define la función zeta de Riemann es convergente si y sólo si $s > 1$.

Teorema 2.1.1. *Si $s \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{\omega \in \Omega} |\omega|^{-s}$ converge si y sólo si $s > 2$.*

Demostración. Si D y d son el mayor y el menor módulo de los elementos del paralelogramo Π_1 que contiene a Ω_1 , como

$$\Omega_r \subseteq \Pi_r = \{rz \mid z \in \Pi_1\}$$

tenemos que $rD \geq |\omega| \geq rd$ para todo $\omega \in \Omega_r$. Definiendo

$$\sigma_{r,s} = \sum_{\omega \in \Omega_r} |\omega|^{-s},$$

tenemos por las desigualdades anteriores que $\sigma_{r,s}$ se encuentra entre $8r(rD)^{-s} = 8r^{1-s}D^{-s}$ y $8r(rd)^{-s} = 8r^{1-s}d^{-s}$. Entonces $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$ converge si y sólo si $\sum_{r=1}^{\infty} r^{1-s}$ converge lo cual ocurre si y sólo si $s > 2$. Dado que los términos de $\sum' |\omega|^{-s}$ son positivos y se pueden agrupar para obtener $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$, se sigue que $\sum' |\omega|^{-s}$ converge si y sólo si $s > 2$. \square

Ahora será fácil construir funciones elípticas de orden $N \geq 3$.

Teorema 2.1.2. *Para cada entero $N \geq 3$, la función*

$$F_N(z) = \sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-N}$$

es elíptica de orden N con respecto a Ω .

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ entonces los términos de $(z - \omega)^{-N}$ son analíticos y por lo tanto acotados en K . Dado que K es acotado podemos asegurar que para todo $\omega \in \Omega$ salvo un número finito de elementos de Ω se cumple que $|\omega| \geq 2|z|$ para todo $z \in K$. Llamemos $\Phi \subset \Omega$ al conjunto $\Phi = \{\omega \in \Omega; |\omega| \geq 2|z| \forall z \in K\}$. Y ahora, como $|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{1}{2}|\omega|$ para todo $z \in K, \omega \in \Phi$, y entonces $\|(z - \omega)^{-N}\|_K \leq 2^N |\omega|^{-N}$ para todo $\omega \in \Phi$. Si $N \geq 3$ entonces por el teorema anterior y por el criterio de comparación tenemos que $\sum_{\omega \in \Omega} \|(z - \omega)^{-N}\|_K$ converge, y $F_N(z) = \sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-N}$ converge normalmente en K . Como cada término $(z - \omega)^{-N}$ es meromorfo en \mathbb{C} , se tendrá que $F_N(z)$ es meromorfa en \mathbb{C} .¹ Dado que la convergencia normal implica convergencia absoluta, podemos reacomodar la serie que define $F_N(z)$, y entonces si $\omega_0 \in \Omega$ tendremos:

$$F_N(z + \omega_0) = \sum_{\omega \in \Omega} (z + \omega_0 - \omega)^{-N}$$

¹Ver, Singerman pág. 81 y 82: Sea (u_n) una secuencia de funciones analíticas (o meromorfas) en una región $R \subseteq \mathbb{C}$; si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente a $u(z)$ en todos los subconjuntos compactos de R , entonces $u(z)$ es analítica en R y $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(z)$ converge uniformemente a $u'(z)$ en todos los subconjuntos de R .

$$= \sum_{\omega' \in \Omega} (z - \omega')^{-N} = F_N(z),$$

donde $\omega' = \omega - \omega_0$ varía sobre Ω como ω lo hace (pero en diferente orden). Entonces $F_N(z)$ es periódica con respecto a Ω , y por tanto es elíptica. Dado que $F_N(z)$ tiene un polo de orden N , $F_N(z)$ tiene orden N . \square

Este método falla cuando se quiere contruir una función elíptica de orden 2, dado que el teorema 2.1.1 no puede usarse para probar la convergencia de $F_2(z) = \sum (z - \omega)^{-2}$. Para garantizar la convergencia es necesario hacer los términos más pequeños reemplazando $(z - \omega)^{-2}$ por $(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2}$ para cada $\omega \neq 0$. La serie resultante es

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left(\frac{1}{(z - \omega)^{-2}} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

y representa una función elíptica de orden 2 llamada **función P de Weierstrass**. Dado que $\wp(z)$ no tiene la forma $\sum_{\omega \in \Omega} f(z - \omega)$, la periodicidad de \wp no es obvia, pero demostraremos indirectamente integrando la derivada $\wp'(z)$, que es la función elíptica $-2F_3(z)$. Del teorema 2.1.2 podemos deducir que $\wp(z)$ es meromorfa haciendo la comparación de la serie con $\sum' |\omega|^{-3}$, pero lo que vamos a hacer es seguir un enfoque un poco distinto y obtendremos $\wp(z)$ de la *función sigma* de Weierstrass

$$\sigma(z) = z \cdot \prod'_{\omega \in \Omega} g(\omega, z),$$

donde

$$g(\omega, z) = \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) \exp \left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega} \right)^2 \right).$$

(El factor $(1 - (z/\omega))$ aparece en $g(\omega, z)$ para dar a $\sigma(z)$ un cero simple en cada punto latiz ω , mientras que el factor exponencial es incluido para garantizar la convergencia del producto infinito)

Si K es cualquier subconjunto compacto de \mathbb{C} , entonces dado que K es acotado y que $|\omega|^{(k)} \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, se deduce que $g(\omega^{(k)}, z) \rightarrow 1$ uniformemente en K cuando $k \rightarrow \infty$. Luego existe un entero N_1 tal que para todo $k > N_1$, $\text{Log}(g(\omega^{(k)}, z))$ está bien definido para $z \in K$ y satisface

$$\begin{aligned} \text{Log}(g(\omega^{(k)}, z)) &= \text{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + \text{Log}\left(\exp\left(\frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2\right)\right) \\ &= \text{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + \frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2. \end{aligned}$$

Además, dado que K es acotado, existe un entero N_2 tal que $|\omega^{(k)}| > 2|z|$ para todo $z \in K$, $k > N_2$. Entonces para todo $z \in K$ y todo $k > \max(N_1, N_2)$ tendremos

$$\begin{aligned} |\text{Log}(g(\omega^{(k)}, z))| &= \left| \text{Log}\left(1 - \frac{z}{\omega^{(k)}}\right) + \frac{z}{\omega^{(k)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{\omega^{(k)}}\right)^4 + \dots \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \left| \frac{z}{\omega^{(k)}} \right|^3 (1 + 1/2 + 1/4 + \dots) \\ &\leq \left| \frac{z}{\omega^{(k)}} \right|^3. \end{aligned}$$

Se sigue del teorema 2.1.1 que $\sum_k \text{Log}(g(\omega^{(k)}, z))$ converge normalmente en K , y entonces $z \prod_{\omega \in \Omega} g(\omega, z)$ converge normalmente en K . Este producto converge a la función $\sigma(z)$ que es analítica en \mathbb{C} . Dado que $g(\omega, -z) = g(-\omega, z)$ entonces $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ esto significa que $\sigma(z)$ es una función impar. La analogía entre $\sigma(z)$ y la función

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

se vuelve clara si a esta última igualdad la escribimos como

$$S(z) = z \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(\frac{z}{n}\right).$$

con $n \neq 0$.

La derivada logarítmica de $\sigma(z)$ da una serie infinita uniformemente convergente en conjuntos compactos de \mathbb{C} a una función meromorfa, que es denotada por $\zeta(z)$. Ésta es la **función zeta de Weierstrass** (que no se confunda con la función de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$), esto es

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \sigma'(z)/\sigma(z) \\ &= \frac{d}{dz}(\text{Log } \sigma(z)) \\ &= \frac{1}{z} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Dado que $\sigma(z)$ es una función impar, $\zeta(z)$ es también impar. Además $\zeta(z)$ tiene polos simples en los puntos de la latiz, y es analítica sobre $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Como serie $\zeta(z)$ es una función meromorfa que converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} y entonces podemos diferenciar término a término para obtener una función meromorfa $\zeta'(z)$. Escribiendo $\wp(z) = -\zeta'(z)$ tendremos que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

es una función par que es analítica en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ y tiene polos de orden 2 en cada $\omega \in \Omega$.

Teorema 2.1.3. $\wp(z)$ es una función elíptica con Ω como su latiz de Ω_{\wp} periodos.

Demostración. Hemos visto que $\wp(z)$ es meromorfa, entonces es suficiente probar que $\Omega = \Omega_\wp$. Dado que la serie (*) que define a $\wp(z)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{C} , podemos derivar para obtener

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} - \sum'_{\omega \in \Omega} \frac{2}{(z - \omega)^3} \\ &= -2 \sum'_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-3} \\ &= -2F_3(z),\end{aligned}$$

donde $F_3(z)$ es la función elíptica de orden 3 construida en el teorema 2.1.2. Se sigue que para cada $\omega \in \Omega$ la función $\wp'(z + \omega) - \wp'(z)$ es idénticamente cero, y entonces $\wp(z + \omega) - \wp(z)$ es constante, digamos que $\wp(z + \omega) - \wp(z) = c_\omega$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Tomando $z = -\omega/2$ tenemos $c_\omega = \wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = 0$ dado que $\wp(z)$ es una función par. Entonces $\wp(z + \omega) = \wp(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y $\omega \in \Omega$ entonces, $\Omega \subseteq \Omega_\wp$. Dado que 0 es un polo de $\wp(z)$, existe un polo en cada punto en Ω_\wp ; dado que $\wp(z)$ no tiene polos en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ entonces $\Omega_\wp \subseteq \Omega$, entonces $\Omega = \Omega_\wp$. \square

Usaremos este hecho más adelante así como el resultado de que $\wp(z)$ tiene orden 2 y que $\wp'(z)$ tiene orden 3.

2.2. La ecuación diferencial para $\wp(z)$

En esta sección deduciremos una ecuación importante que relaciona $\wp(z)$ y $\wp'(z)$, obtenida de la serie de Laurent para $\wp(z)$ alrededor de $z = 0$.

Iniciamos tomando la serie de Laurent de $\zeta(z)$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \cdots (*)$$

Sean $m = \min \{|\omega|; \omega \in \Omega \setminus \{0\}\}$ y $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < m\}$ que es el disco abierto centrado en 0 más grande que no tiene puntos latices $\omega \neq 0$.

Como

$$\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} = \frac{z^2}{\omega^2(z - \omega)}$$

podemos ver, comparando con $\sum' \frac{1}{|\omega|^3}$, que $\sum' \left(\frac{1}{(z - \omega)} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Además, para cada $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ la serie binomial $\frac{1}{z - \omega} = \frac{-1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} - \frac{z^2}{\omega^3} - \dots$ es absolutamente convergente para $z \in D$. Podemos ahora sustituir esta serie en la ecuación (*) y cambiar el orden de sumar, ya que (*) es absolutamente convergente, para obtener

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum' \left(-\frac{z^2}{\omega^3} - \frac{z^3}{\omega^4} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} - G_3 z^2 - G_4 z^4 - \dots \quad z \in D \end{aligned}$$

y donde $G_k = G_k(\Omega) = \sum'_{\omega \in \Omega} \frac{1}{\omega^k}$.

Las series G_k son absolutamente convergentes para $k \geq 3$, por el teorema 2.2.1. Como para k impar, $(-\omega)^{-k} = -\omega^{-k}$ es claro que $G_k = 0$, luego la serie de Laurent para $\zeta(z)$ alrededor del 0 es:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} G_{2n} z^{2n-1},$$

y entonces

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} z^{2n-2}$$

También se tiene que:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 24\frac{G_4}{z^2} - 80G_6 + z^2\Phi_1(z), \\ 4\wp(z)^3 &= \frac{4}{z^6} - 36\frac{G_4}{z^2} + 60G_6 + z^2\Phi_2(z) \\ 60G_4\wp(z) &= 60\frac{G_4}{z^2} + z^2\Phi_3(z)\end{aligned}$$

donde $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$ son series de potencias convergentes en D . Las últimas tres ecuaciones se pueden acomodar para obtener que:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = z^2\{\Phi_1(z) - \Phi_2(z) + \Phi_3(z)\}$$

Las funciones del lado izquierdo son elípticas, luego $f(z) = z^2\{\Phi_1(z) - \Phi_2(z) + \Phi_3(z)\}$ es elíptica y como $f(0) = 0$, también se tiene que $f(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$. La función f solamente puede tener polos donde \wp o \wp' los tengan esto es en Ω , pero ahí f no tiene polos, por lo que f es constante igual a $f(0) = 0$, luego hemos demostrado

Teorema 2.2.1. *La función \wp cumple $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$.*

□

Ésta es la ecuación diferencial para $\wp(z)$. Se acostumbra escribir

$$\begin{aligned}g_2 &= 60G_4 = 60 \sum' \omega^{-4}, \\ g_3 &= 140G_6 = 140 \sum' \omega^{-6}\end{aligned}$$

por lo que

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Si hacemos $z = \wp(t)$ veremos que

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z^3 - g_2z - g_3.$$

entonces

$$\wp^{-1}(z) = t = \int \frac{dz}{\sqrt{(p(z))}},$$

donde $p(z)$ es el polinomio cúbico $4z^3 - g_2z - g_3$.

Esto muestra cómo las inversas de funciones elípticas aparecen como integrales indefinidas, de la misma manera en que las inversas de funciones trigonométricas lo hacen.

Teorema 2.2.2. *Sea Ω una latiz con base ω_1, ω_2 , y sea $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Si P es un paralelogramo fundamental con $0, \frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2$ y $\frac{1}{2}\omega_3$ en su interior, entonces $\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2$ y $\frac{1}{2}\omega_3$ son los ceros de \wp' en P .*

Demostración. Como sabíamos $\wp'(z)$ tiene tres ceros dentro de P ya que tiene orden 3. Si $\omega \in \Omega$ entonces como $\frac{1}{2}\omega \sim -\frac{1}{2}\omega \pmod{\Omega}$ tenemos que $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = \wp'(-\frac{1}{2}\omega)$; dado que \wp' es una función impar tenemos que $\wp'(-\frac{1}{2}\omega) = -\wp'(\frac{1}{2}\omega)$ y así $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = 0$ ó a ∞ . Dado que el único polo de \wp' en P es el polo triple en 0 tenemos que $\wp'(\frac{1}{2}\omega_j) = 0$ para $j = 1, 2, 3$. \square

Definimos $e_j = \wp(\frac{1}{2}\omega_j)$ para $j = 1, 2, 3$. Dado que $S = [\frac{1}{2}\omega_1] \cup [\frac{1}{2}\omega_2] \cup [\frac{1}{2}\omega_3]$ es el conjunto de ceros de \wp' en \mathbb{C} , tenemos que $\{e_1, e_2, e_3\} = \wp(S)$ es independiente de una base particular $\{\omega_1, \omega_2\}$ elegida en Ω .

Teorema 2.2.3. *Para cada $c \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ la ecuación $\wp(z) = c$ tiene dos soluciones simples, para $c = e_1, e_2, e_3$ ó ∞ la ecuación tiene una solución doble.*

Demostración. Dado que \wp es elíptica de orden 2, toma cada valor $c \in \hat{\mathbb{C}}$ dos veces, dando dos soluciones simples (en z y en $-z$ dado que \wp es par) o una solución doble. Si $c \in \mathbb{C}$ entonces $\wp(z) = c$ tiene una solución doble si y sólo si $\wp'(z) = 0$, luego $z \sim \frac{1}{2}\omega_j (j = 1, 2, 3)$ y entonces $c = e_j$. El polo de orden 2 en $z = 0$ muestra que $\wp(z) = \infty$ tiene una solución doble. \square

Teorema 2.2.4. e_1, e_2 y e_3 son mutuamente distintos.

Demostración. Sea $f_j(z) = \wp(z) - e_j$ para $j = 1, 2, 3$. Como los polos de f_j son los mismos que \wp , f_j es una función elíptica de orden 2 y entonces tiene dos clases de equivalencia de ceros, contando sus multiplicidades. Como

$$f_j(1/2 \omega_j) = f_j'(1/2 \omega_j) = 0,$$

f_j tiene ceros dobles en $[\frac{1}{2}\omega_j]$ y entonces no tiene otros ceros. En particular $f_j(\frac{1}{2}\omega_k) \neq 0$ para $j \neq k$. Dado que

$$\begin{aligned} f_j(1/2 \omega_k) &= \wp(1/2 \omega_j) - e_j, \\ &= e_k - e_j, \end{aligned}$$

entonces $e_j \neq e_k$ para $j \neq k$. □

Y por la ecuación $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$, el polinomio

$$p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$$

tiene ceros en $z = \wp(t)$ donde $\wp'(t) = 0$, entonces $p(z)$ tiene tres ceros distintos, $z = e_1, e_2$ y e_3 .

2.3. El campo de las funciones elípticas

En esta sección consideraremos una latiz fija Ω y una *función elíptica* significará una función elíptica con respecto a Ω . Si f y g son elípticas entonces $f + g$, $f - g$ y fg también son elípticas, y si g no es idénticamente cero entonces $1/g$ es elíptica. Además, el conjunto de todas las funciones elípticas es un campo, que denotaremos por $E(\Omega)$. Este campo contiene al subcampo $E_1(\Omega)$ que consta de las funciones elípticas pares. Las funciones constantes forman un subcampo de $E(\Omega)$ isomorfas a \mathbb{C} . Dado que $E_1(\Omega)$ contiene a $\wp(z) = \wp_\Omega(z)$, contiene a

todas las funciones racionales de \wp (con coeficientes complejos); estas funciones racionales forman un campo $\mathbb{C}(\wp)$, el menor campo conteniendo a \wp y las funciones constantes \mathbb{C} . De manera similar, $E(\Omega)$ contiene a \wp y a \wp' y entonces contiene el campo $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ de funciones racionales de \wp y de \wp' , éste es el menor campo que contiene a \wp, \wp' y a \mathbb{C} .

Teorema 2.3.1.

1. Si f es una función elíptica par, entonces $f = R_1(\wp)$ para alguna función racional R_1 . Luego $E_1(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)$
2. Si f es una función elíptica entonces $f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$, donde R_1 y R_2 son funciones racionales. Así $E(\Omega) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$

Demostración.

1) Sea f una función elíptica par. El resultado es obvio para funciones constantes, así que supondremos que f tiene orden $N > 0$. Si $k \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = k$ tiene raíces múltiples cuando $f'(z) = 0$, y esto ocurre solo en un número finito de clases de congruencia de puntos z , además las soluciones de $f(z) = k$ son simples para todos los valores excepto en un número finito de valores k . Entonces podemos escoger dos números complejos distintos c y d tales que las raíces de $f(z) = c$ y de $f(z) = d$ sean simples y ninguna de estas raíces sea congruente a 0 o a $\frac{1}{2}\omega_j$ ($j = 1, 2, 3$). Dado que f es par, un conjunto completo de raíces de $f(z) = c$ tendrá la forma $a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_n, -a_n$ estas raíces serán simples y mutuamente no congruentes, y de manera similar las raíces $b_1, -b_1, \dots, b_n, -b_n$ de $f(z) = d$. Además la función elíptica

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

tiene ceros simples en $a_1, -a_1, \dots, a_n, -a_n$ y polos en $b_1, -b_1, \dots, b_n, -b_n$ simples.

Como vimos anteriormente, las ecuaciones $\wp(z) = \wp(a_j)$ y $\wp(z) = \wp(b_i)$ tienen raíces simples $z = \pm a_i$ y $z = \pm b_i$ respectivamente ($1 \leq i \leq n$) de modo que la función elíptica

$$h(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

tiene los mismos ceros y polos que g con sus mismas multiplicidades (todas simples). Además por el teorema 1.4.6 si f y g son funciones elípticas con respecto a una misma latiz y con el mismo orden de ceros y polos entonces $g = \mu h$ para alguna constante $\mu \neq 0$. Al despejar $f(z)$ en

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = \mu \frac{(\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

vemos que f es una función racional (con coeficientes complejos) $R_1(\wp)$ de \wp .

2) Si f es impar, entonces f/\wp' es par, entonces por el inciso anterior tenemos que $f = \wp' R_2(\wp)$ para alguna función racional R_2 . En general si f es *cualquier* función elíptica entonces

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)),$$

donde $\frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ es par y elíptica mientras que $\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$ es impar y elíptica, entonces por los argumentos anteriores tenemos

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$$

donde R_1 y R_2 son funciones racionales. \square

Usando la ecuación diferencial $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, podemos reducir cualquier función racional de \wp y \wp' a la forma $R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$ eliminando las potencias de \wp' , por ejemplo

$$\frac{\wp\wp'}{\wp' + 1} = \frac{\wp\wp'(\wp' - 1)}{(\wp')^2 - 1} = \frac{(4\wp^4 - g_2\wp^2 - g_3\wp) - \wp'\wp}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3 - 1}.$$

2.4. Curvas elípticas reales

Hemos visto que \wp satisface la ecuación diferencial $(\wp')^2 = p(\wp)$, donde $p(x)$ es el polinomio cúbico $4x^3 - g_2x - g_3$, de modo que cada punto $t \in \mathbb{C}/\Omega$ determina un punto $(\wp(t), \wp'(t))$ en la *curva elíptica*

$$E = \{(x, y) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid y^2 = p(x)\}$$

Podemos pensar en E como la gráfica de la ecuación $y^2 = p(x)$ para $x, y \in \hat{\mathbb{C}}$. Como subconjunto de $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, E tiene una topología natural; el siguiente resultado mostrará que E es homeomorfo a un toro.

Lema 2.4.1. *La transformación de $\theta : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow E, t \mapsto (\wp(t), \wp'(t))$, es un homeomorfismo*

Demostración. Los puntos $t = [0], [\frac{1}{2}\omega_j]$ (y no otros) son llevados por θ a (∞, ∞) y $(e_j, 0)$, respectivamente para $j = 1, 2, 3$. Para los puntos que quedan $(x, y) \in E$, tenemos que $x \neq \infty, e_j$ y $y \neq \infty, 0$; dado que \wp es par y de orden 2, con un punto regular en cada $t \neq [0], [\frac{1}{2}\omega_j]$, se sigue que para cada $x \neq \infty, e_j$ existen dos soluciones distintas $t = \pm t_1$ de $\wp(t) = x$. Ahora $\wp'(t_1) = -\wp'(-t_1) \neq \wp'(-t_1)$, entonces $\wp'(-t_1)$ toma los dos valores de $\sqrt{p(\wp(t))} = \sqrt{p(x)}$, y uno de estos valores es y . Además existe un único $t (= t_1$ ó $-t_1) \in \mathbb{C}/\Omega$ que satisface $\theta(t) = (x, y)$, entonces θ es una biyección. Siendo meromorfa y no constantes, \wp y \wp' son funciones abiertas y continuas, y entonces también lo es θ , y así, θ es un homeomorfismo. \square

Definimos la *curva elíptica real* E_R como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = p(x)\}$; es decir, la gráfica de $y^2 = p(x)$ como ecuación entre variables reales. E_R es simétrica con respecto al eje x de \mathbb{R}^2 . Otras propiedades de esta curva se puede obtener analizando la gráfica de $p(z)$ y después tomando las raíces cúbicas donde $p(x) \geq 0$. Por ejemplo, un polinomio cubico real sin raíces repetidas $p(x)$ tiene una o tres raíces reales dependiendo se el discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ es negativo o positivo (esto se puede ver considerando las puntos estacionarios de $p(x)$), la curva E_R tiene

uno o dos componentes respectivamente como se muestra en la figura. Las curvas de la izquierda representan a $y = p(x)$, y las de la derecha a $y^2 = p(x)$.

Ahora analizaremos las condiciones bajo las cuales los coeficientes g_2, g_3 son reales.

Definición 2.4.2. Una función meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es **real** si $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ para toda $z \in \mathbb{C}$ (donde $\overline{\infty} = \infty$).

Teorema 2.4.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$;
2. $G_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \geq 3$;
3. \wp es una función real;
4. Ω es una latiz real.

Demostración. (1) \Rightarrow (2). Derivando de cada lado de la identidad, $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, y después dividiendo entre $2\wp'$ (que no es idénticamente 0), tenemos que

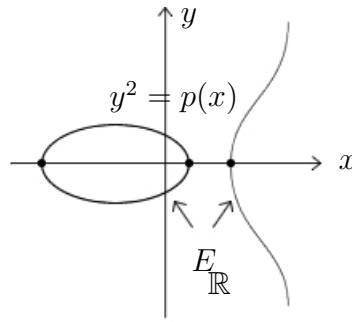
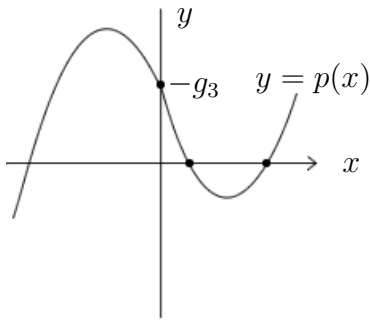
$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}.$$

Consideremos el desarrollo de Laurent de $\wp(z)$,

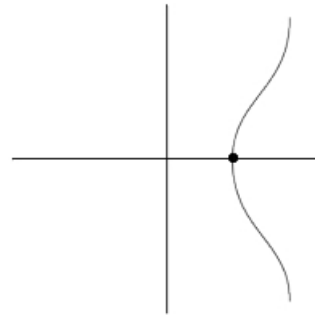
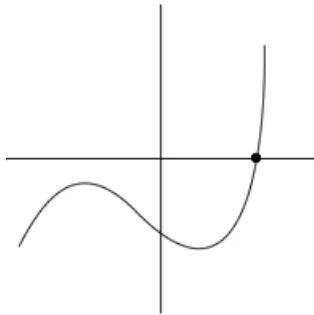
$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n},$$

alrededor de $z = 0$, donde

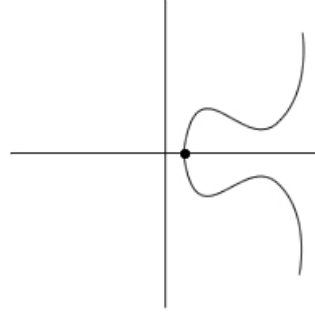
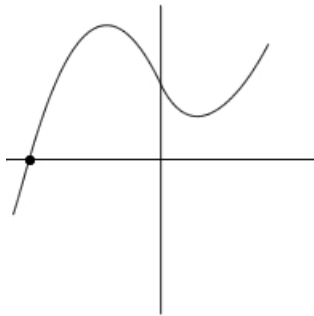
$$a_n = (2n + 1)G_{2n+2} = (2n + 1) \sum_{\omega} \omega^{-2n-2}.$$



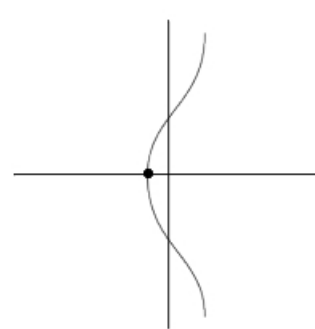
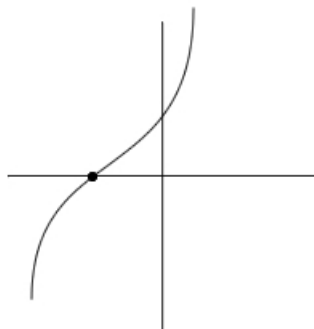
$$\Delta > 0, g_2 > 0$$



$$\Delta < 0, g_2 > 0, g_3 > 0$$



$$\Delta < 0, g_2 > 0, g_3 < 0$$



$$\Delta < 0, g_2 < 0$$

El coeficiente de z^{-2n} en el desarrollo de $\varphi''(z)$ es $(2n+2)(2n+1)a_{n+1}$, mientras que el coeficiente de z^{2n} en $\varphi(z)^2$ es $2a_{n+1} + \sum_{r+s=n} a_r a_s$. Igualando los coeficientes de $\varphi'' = 6\varphi^2 - \frac{G_2}{2}$ tendremos que para cada $n \geq 1$,

$$(2n+2)(2n+1)a_{n+1} = 12a_{n+1} + 6 \sum_{r+s=n} a_r a_s,$$

$$(2n+5)(n-1)a_{n+1} = 3 \sum_{r+s=n} a_r a_s.$$

Para $n \geq 2$ tendremos

$$a_{n+1} = \frac{3}{(2n+5)(n-1)} \sum_{r+s=n} a_r a_s,$$

una expresión de a_{n+1} en términos de a_1, \dots, a_n . Luego

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1^2.$$

$$a_4 = \frac{3}{11}a_1a_2,$$

$$a_5 = \frac{1}{13}(2a_1a_3 + a_2^2) = \frac{1}{39}(2a_1^2 + 3a_2^2), \text{ etc.}$$

Por inducción sobre n , se puede deducir que cada coeficiente a_n es un polinomio en a_1 y a_2 , con coeficientes racionales. Usando $a_n = (2n+1)G_{2n+2}$, $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$, tenemos que cada G_k (k par, $k \geq 4$) es un polinomio en g_2 y g_3 con coeficientes racionales. Si g_2 y g_3 son reales entonces también G_k ; dado que $G_k = 0$ para todos los k impares, entonces (2) está probado.

(2) \Rightarrow (3) Si $G_k \in \mathbb{R}$ para toda $k \geq 3$, entonces los coeficientes de la serie de Laurent para $\varphi(z)$ son reales, entonces $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$ alrededor de $z = 0$. Ahora φ y $\overline{\varphi(\bar{z})}$ son funciones meromorfas, idénticas en una vecindad del 0, entonces son idénticas en \mathbb{C} . Luego φ es una función real.

(3) \Rightarrow (4). Sea $\omega \in \Omega$, entonces $\wp(z+\bar{\omega}) = \overline{\wp(\bar{z} + \omega)} = \overline{\wp(\bar{z})} = \wp(z)$ dado que \wp es real y tiene a ω como periodo; por lo que $\bar{\omega} \in \Omega$, esto nos da que $\bar{\Omega} \subseteq \Omega$. Tomando de nuevo conjugados, tenemos que $\Omega = \overline{\bar{\Omega}} \subseteq \bar{\Omega}$, entonces $\Omega = \bar{\Omega}$ y así Ω es real.

(4) \Rightarrow (1). Si Ω es real entonces $g_2 = 60 \sum'_{\omega} \omega^{-4}$ y de $g_3 = 140 \sum'_{\omega} \omega^{-6}$ son números reales. \square

Recordemos que $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ es rectangular real si $\omega_1 \in i\mathbb{R}$ y $\omega_2 \in i\mathbb{R}$, y es romboica real si $\omega_2 = \bar{\omega}_1$. Y que Ω es real si y sólo si es rectangular real o rombóica real por el Teorema 1.3.3.

Teorema 2.4.4. *Sea Ω una latiz real. Entonces la curva elíptica real E_R tiene uno ó dos componentes según si Ω es rombóica real o rectangular real, respectivamente.*

Demostración. Dado que E_R es la gráfica de $y^2 = p(x)$, podemos contar sus componentes, contando las raíces de $p(x)$, esto es, los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales $y = \wp'(z) = 0$ y $x = \wp(z) \in \mathbb{R}$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Dado que $p(x)$ es un polinomio cúbico con raíces diferentes, existen uno ó tres puntos que son raíces y E_R tendrá dos componentes respectivamente. Las únicas soluciones de $\wp'(z) = 0$ son de la forma $z \sim \frac{1}{2}\omega_j (j = 1, 2, 3)$, entonces es suficiente con determinar cuáles $e_j = \wp(\frac{1}{2}\omega_j)$ son reales.

Supongamos que $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ es rectangular real, con $\omega_1 \in \mathbb{R}$ y $\omega_2 \in i\mathbb{R}$.

Dado que \wp es real, $\wp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $e_1 = \wp(\frac{1}{2}\omega_1) \in \mathbb{R}$. Si $z \in \frac{1}{2}\omega_2 + \mathbb{R}$, entonces $\bar{z} = z - \omega_2$ y entonces $\wp(z) = \wp(z - \omega_2) = \wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}$, entonces $\wp(z) \in \mathbb{R}$; en particular, poniendo $z = \frac{1}{2}\omega_2, \frac{1}{2}\omega_3$ tenemos $e_2, e_3 \in \mathbb{R}$. Luego $p(x)$ tiene tres raíces reales, entonces E_R se intersecta con el eje x en los tres puntos e_1, e_2, e_3 y entonces tiene dos componentes, una no acotada que contiene a $(e_1, 0)$, correspondiente a $z \in \mathbb{R}$, la otra acotada que contiene a $(e_2, 0)$ y $(e_3, 0)$, correspondiente a $z \in \frac{1}{2}\omega_2 + \mathbb{R}$.

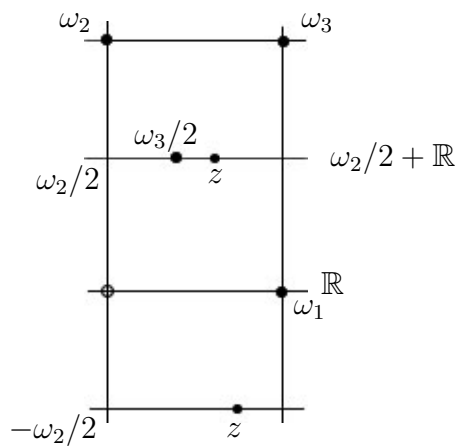


Figura 2.3:

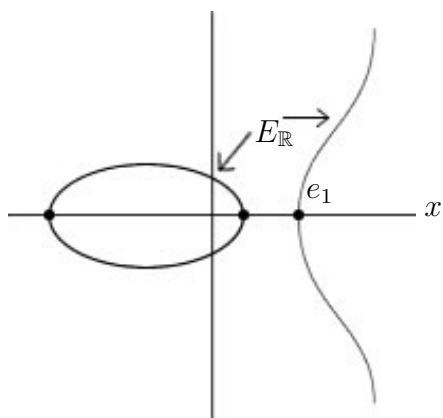


Figura 2.4:

Si $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ es rombóica real, con $\overline{\omega_1} = \omega_2$, entonces de nuevo tendremos $\wp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $e_3 \in \mathbb{R}$. Ahora $\frac{1}{2}\overline{\omega_1} = \frac{1}{2}\omega_2$, y $e_2 = \wp(\frac{1}{2}\omega_2) = \wp(\frac{1}{2}\overline{\omega_1}) = \overline{\wp(\frac{1}{2}\omega_1)} = \overline{e_1}$, dado que e_1 y e_2 son distintas. Ninguna puede ser real, de modo que $p(x)$ tiene una única raíz real, y $E_{\mathbb{R}}$ tiene una sola componente, encontrándose con el eje x en $(e_3, 0)$ y corresponde a $z \in \mathbb{R}$. \square

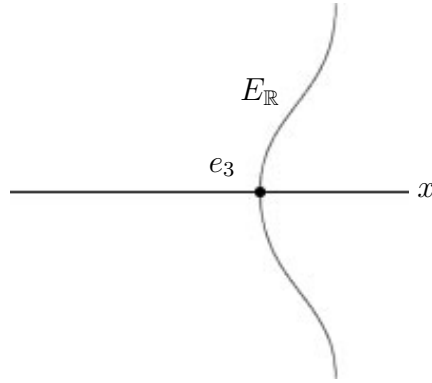


Figura 2.5:

2.5. La función modular J

Anteriormente hemos visto que si $p(z)$ es cualquier polinomio cúbico con distintas raíces entonces la superficie de Riemann S de $\sqrt{p(z)}$ tiene grado 1.

Nuestro objetivo es crear una latiz Ω tal que $S \cong \mathbb{C}/\Omega$, o equivalentemente parametrizar S por medio de funciones elípticas. En esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes para que p tenga raíces distintas. Vimos también que la función \wp de Weierstrass satisface la ecuación diferencial $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$, donde p es un polinomio

cúbico de la forma

$$p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3, (g_2, g_3 \in \mathbb{C})$$

se dice que cualquier polinomio de esta forma tiene la **forma normal de Weierstrass**. Por medio de una sustitución de la forma $\Theta(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$), cualquier polinomio cúbico puede llevarse a esta forma. Como $\Theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una biyección, preserva las multiplicidades de las raíces, sin pérdida de generalidad podemos restringir nuestra atención a los polinomios cúbicos p en la forma normal de Weierstrass. Si e_1, e_2 y e_3 son las raíces del polinomio p , entonces definimos el discriminante de p como:

$$\Delta_p = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2;$$

claramente estas raíces son distintas si y sólo si $\Delta_p \neq 0$.

Teorema 2.5.1. $\Delta_p = g_2^3 - 27g_3^2$.

Demostración. Poniendo $p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$ en la forma

$$p(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3),$$

e igualando coeficientes en las dos expresiones de $p(z)$ obtenemos

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}$$

Otras funciones simétricas de las raíces pueden ser obtenidas de las tres anteriores; por ejemplo

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = \frac{g_2}{2},$$

y

$$e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2 = (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)^2 - 2e_1 e_2 e_3 (e_1 + e_2 + e_3) = \frac{g_2^2}{16}$$

Ahora derivando $p(z)$ y usando la primera fórmula de este teorema evaluada en $z = e_1$, tenemos

$$4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = p'(e_1) = 12e_1^2 - g_2,$$

Con una expresión similar para $p'(e_2)$ y $p'(e_3)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{4} p'(e_1) p'(e_2) p'(e_3) \\ &= -\frac{1}{4} \prod_i (12e_i^2 - g_2) \\ &= -\frac{1}{4} (1728(e_1 e_2 e_3)^2 - 144g_2(e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2) + 12g_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - g_2^3) \\ &= -\frac{1}{4} (108g_3^2 - 9g_2^3 + 6g_2^3 - g_2^3) \\ &= g_2^3 - 27g_3^2 \end{aligned}$$

como se requería. \square

Podemos obtener de esto el siguiente corolario.

Corolario 2.5.2. *p tiene raíces distintas si y sólo si $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.*

Podemos dar una prueba más directa para este corolario sin introducir Δ_p , eliminando z de las ecuaciones $p(z) = 0$ y $p'(z) = 0$ dando una condición necesaria y suficiente para que p y p' tengan una raíz en común.

Hemos visto que podemos sacar información sobre latices y toros estudiando la acción del grupo modular Γ en el semiplano superior \mathbb{U} . Con esto en mente podemos construir una función $J: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ con

la propiedad de que $J(\tau') = J(\tau)$ si y sólo si $\tau' = T(\tau)$ para alguna $T \in \Gamma$; luego J distingue entre clases similares distintas de latiz y entonces entre diferentes clases de equivalencia conformes del toro. La función \wp de Weierstrass asociada a la latiz Ω satisface $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$, donde p es un polinomio cúbico en la forma normal de Weierstrass

$$p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3,$$

con

$$g_2 = g_2(\Omega) = 60 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-4},$$

y

$$g_3 = g_3(\Omega) = 140 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-6},$$

Si escribimos $\Delta(\Omega)$ para el discriminante Δ_p de p , tenemos que

$$\Delta(\Omega) = g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2$$

Esto implica por el corolario anterior que p tiene raíces distintas, si y sólo si $\Delta(\Omega) \neq 0$. Entonces podemos definir la función modular $J(\Omega)$, por

$$J(\Omega) = \frac{g_2(\Omega)^3}{\Delta(\Omega)} = \frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2}$$

Para una latiz similar $\mu\Omega$ ($\mu \neq 0$) tenemos

$$g_2(\mu\Omega) = 60 \sum'_{\omega \in \Omega} (\mu\omega)^{-4} = \mu^{-4}g_2(\Omega)$$

y

$$g_3(\mu\Omega) = 140 \sum'_{\omega \in \Omega} (\mu\omega)^{-6} = \mu^{-6}g_3(\Omega),$$

entonces

$$\Delta(\mu\Omega) = \mu^{-12}\Delta(\Omega).$$

Se sigue que

$$J(\mu\Omega) = J(\Omega)$$

para toda $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de modo que lattices similares determinan el mismo valor para J .

Podemos ver a g_2, g_3, Δ y J como funciones de $\tau \in \mathcal{U}$ evaluadas en la latiz $\Omega = \Omega(1, \tau)$ donde tienen a τ como uno de sus moduli. Entonces

$$g_2(\tau) = 60 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-4}$$

y

$$g_3(\tau) = 140 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-6},$$

donde $\sum'_{m,n}$ denota la suma sobre toda $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ excepto el $(0, 0)$; entonces

$$\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$$

y

$$J(\tau) = \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

Si $\tau' = T(\tau)$ para algún $T \in \Gamma$, entonces las lattices $\Omega = \Omega(1, \tau)$ son similares, y así $J(\tau') = J(\tau)$. Y esto prueba

Teorema 2.5.3. $J(T(\tau)) = J(\tau)$ para toda $\tau \in \mathcal{U}$ y $T \in \Gamma$.

□

Además $J(\tau)$ es invariante bajo la acción del grupo modular Γ ; ahora mostraremos que las funciones $g_2(\tau), g_3(\tau)$ y $\Delta(\tau)$ comparten la siguiente propiedad. Si $T : \tau \mapsto (a\tau + b)/(c\tau + d)$ es un elemento de Γ , entonces

$$g_2(T(\tau)) = 60 \sum'_{m,n} \left(m + n \frac{(a\tau + b)}{(c\tau + d)}\right)^{-4}$$

$$\begin{aligned}
&= 60(c\tau + d)^{-4} \sum'_{m,n} (m(c\tau + d) + n(a\tau + b))^{-4} \\
&= 60(c\tau + d)^{-4} \sum'_{m,n} ((md + nd) + (mc + na)\tau)^{-4};
\end{aligned}$$

dado que $ad - bc = 1$, la transformación $(m, n) \mapsto (md + nb, mc + na)$ sólo permuta los elementos del conjunto de índices $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\})$, entonces por la convergencia absoluta tenemos

$$\begin{aligned}
g_2(T(\tau)) &= 60(c\tau + d)^{-4} \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-4} \\
&= (c\tau + d)^{-4} g_2(\tau).
\end{aligned}$$

De manera análoga

$$g_3(T(\tau)) = (c\tau + d)^{-6} g_3(\tau),$$

y entonces

$$\Delta(T(\tau)) = (c\tau + d)^{-12} \Delta(\tau).$$

En el caso especial donde $a = b = d = 1$ y $c = 0$, tenemos $T(\tau) = \tau + 1$, dando el siguiente teorema:

Teorema 2.5.4. *Las funciones $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$, $\Delta(\tau)$ y $J(\tau)$ son periódicas con respecto a \mathbb{Z} .*

□

Es útil determinar el efecto en las funciones que invierten la orientación, que son las transformaciones de U en U de la forma

$$T(\tau) = \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = -1)$$

Haciendo los cálculos de manera similar a lo anterior tenemos

$$g_2(T(\tau)) = (c\bar{\tau} + d)^{-4} \overline{g_2(\tau)},$$

$$\begin{aligned}g_3(T(\tau)) &= (c\bar{\tau} + d)^{-6} \overline{g_3(\tau)}, \\ \Delta(T(\tau)) &= (c\bar{\tau} + d)^{-12} \overline{\Delta(\tau)}, \\ J(T(\tau)) &= \overline{J(\tau)}\end{aligned}$$

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado.

Teorema 2.5.5. *Las funciones g_2, g_3, Δ y $J : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{C}$ son analíticas en \mathbf{U} .*

Demostración. Sean $\tau_0 \in \mathbf{U}$, $\delta = \frac{1}{2}\text{Im}(\tau_0) > 0$ y $K(\tau_0)$ el disco compacto $\{\tau \in \mathbf{U} \mid |\tau - \tau_0| \leq \delta\}$. Ahora las funciones $(m + n\tau)^{-4}$ y $(m + n\tau)^{-6}$ son analíticas en \mathbf{U} para toda $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$. Entonces si podemos mostrar que las series que definen a $g_2(\tau), g_3(\tau)$ convergen normalmente en cada $K(\tau_0), \tau_0 \in \mathbf{U}$, entonces se tendrá que estas dos funciones son analíticas en \mathbf{U} .

Para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ tenemos $-m/n \in \mathbb{R}$ y entonces

$$\left| \frac{m}{n} + \tau_0 \right| \geq \text{Im}(\tau_0) = 2\delta$$

Luego para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ (incluyendo $n = 0$) y $\tau \in K(\tau_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left| (m + n\tau) - (m + n\tau_0) \right| &= |n| |\tau - \tau_0| \\ &\leq |n| \delta \leq \frac{1}{2} |m + n\tau_0| \tau_0\end{aligned}$$

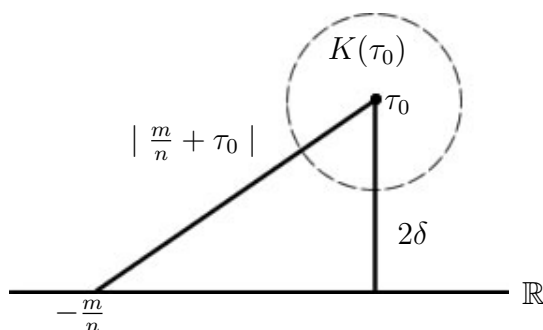
y entonces la desigualdad del triángulo nos da

$$|m + n\tau| \geq |m + n\tau_0| - |(m + n\tau) - (m + n\tau_0)| \geq \frac{1}{2} |m + n\tau_0|$$

Entonces para cualquier $r > 0$ tenemos que

$$|m + n\tau|^{-2r} \leq 2^{2r} |m + n\tau_0|^{-2r}$$

para toda $\tau \in K(\tau_0)$ y $(m, n) \neq (0, 0)$.



Entonces la serie $\sum'_{m,n} |m + n\tau|^{-2r}$ converge para cada $r > 1$ entonces $\sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-2r}$ converge normalmente en $K(\tau_0)$. Tomando $r = 2$ y $r = 3$, vemos que $g_2(\tau), g_3(\tau)$ son analíticas en U . Como $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ es inmediato que Δ es analítica en U . Como las raíces e_1, e_2, e_3 son diferentes se tiene que $\Delta \neq 0$ y entonces $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ está bien definido y por ser cociente de analíticas, J es analítica en U .

2.6. La superficie de Riemann de $\sqrt{p(z)}$

Nuestro objetivo principal en esta sección es mostrar que si $p(z)$ es un polinomio cúbico en $\mathbb{C}[z]$, con raíces distintas, entonces existe un latiz Ω tal que la superficie de Riemann de $\sqrt{p(z)}$ es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Ω . El argumento principal es mostrar que J transforma U sobre \mathbb{C} , un resultado que requiere todo lo aprendido sobre J y $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Lema 2.6.1.

1. Si $2\text{Re}(\tau) \in \mathbb{Z}$ entonces $g_2(\tau), g_3(\tau), \Delta(\tau)$ y $J(\tau)$ son todos reales.
2. Si $|\tau| = 1$ entonces $g_2(\tau) = \tau^4 \overline{g_2(\tau)}$, $g_3(\tau) = \tau^6 \overline{g_3(\tau)}$, $\Delta = \tau^{12} \overline{\Delta(\tau)}$ y $J(\tau) = \overline{J(\tau)}$.

Demostración. Si $2\operatorname{Re}(\tau) = n \in \mathbb{Z}$ entonces $T(\tau) = n - \bar{\tau}$ fija a τ ($T(\tau) = n - \bar{\tau} = \tau \Leftrightarrow n = \tau + \bar{\tau} = 2\operatorname{Re}(\tau)$). Como $T : U \rightarrow U$ es una transformación de la forma $T(\tau) = \frac{a\bar{\tau}+b}{c\bar{\tau}+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = -1$; en este caso $a = -1, b = n, c = 0$ y $d = 1$. Tenemos por las identidades que aparecen después de Teorema 2.6.4, que $g_2(\tau) = g_2(T(\tau)) = \overline{g_2(\tau)}$, luego $g_2(\tau)$ es real. de manera análoga las otras funciones son reales.

Si $|\tau| = 1$, entonces $T(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}}$ fija a τ y es la forma $T(\tau) = \frac{a\bar{\tau}+b}{c\bar{\tau}+d}$ con $a = d = 0, b = c = 1$, de nuevo por las identidades señaladas tenemos por ejemplo que $g_3(\tau) = g_3(T(\tau)) = (\bar{\tau})^{-6} \overline{g_3(\tau)} = \tau^6 \overline{g_3(\tau)}$. Para las otras funciones se puede hacer algo similar. \square

Sabemos que Γ tiene por región fundamental

$$F = \{\tau \in \mathbf{U} \mid |\tau| \geq 1 \text{ y } |\operatorname{Re}(\tau)| \leq 1/2\}.$$

Tenemos entonces

Corolario 2.6.2. $J(\tau)$ es real cuando τ está en el eje imaginario o en la frontera ∂F de F .

Demostración. Si τ está en el eje imaginario $2\operatorname{Re}(\tau) = 0$ y si τ está en la frontera de F entonces cumple con $|\tau| = 1$ o $|2\operatorname{Re}(\tau)| = 1$. \square

Corolario 2.6.3. $g_2(\rho) = g_3(i) = J(\rho) = 0$ y $J(i) = 1$, donde $\rho = e^{2\pi i/3}$.

Demostración. La parte 1) del Lema 2.7.1. muestra que g_2 y g_3 toman valores reales en i y ρ , mientras que la parte 2) muestra que $g_2(\rho) = \rho g_2(\rho)$ y $g_3(i) = -\overline{g_3(i)}$, Entonces $g_2(\rho) = g_3(i) = 0$, entonces $J(\rho) = 0$ y $J(i) = 1$. \square

Sea $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, donde:

$$L_1 = \{\tau \in \mathbf{U} \mid |\tau| \geq 1 \text{ y } \operatorname{Re}(\tau) = -1/2\}$$

$L_2 = \{\tau \in \mathbf{U} \mid |\tau| = 1 \text{ y } -1/2 \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq 0\}$
 $L_3 = \{\tau \in \mathbf{U} \mid |\tau| \geq 1 \text{ y } \operatorname{Re}(\tau) = 0\}$ como se muestra en la figura 2.14.

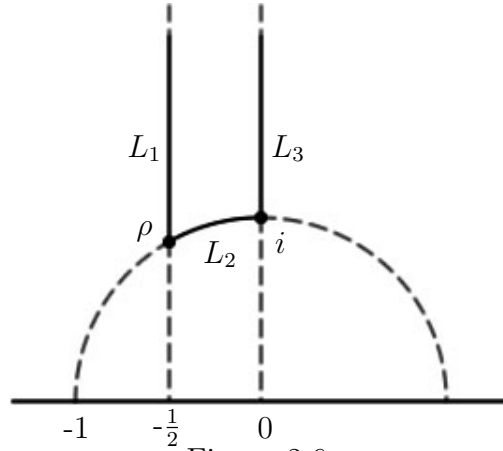


Figura 2.6:

Por el Corolario 2.7.2 tenemos que $J(L) \subseteq \mathbb{R}$, pero de hecho podemos demostrar la igualdad.

Teorema 2.6.4. $J(L) = \mathbb{R}$.

Demostración. Las funciones f con periodo los enteros \mathbb{Z} se pueden escribir de la forma $f(z) = \phi(e^{2\pi iz})$. En particular como $J(\tau + 1) = J(\tau)$, se tiene que $J(\tau) = \phi(q)$ con $q = e^{2\pi i\tau}$, la función ϕ es

$$\phi(q) = \frac{1}{1728} \left(\frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n \right)$$

para algunos enteros $c(n)$, que en este trabajo no encontraremos, ver Apostol.

Si $\tau \in L_3$ entonces $\tau = iy$ con $y \geq 1$ y $q = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi y} > 0$ por lo que $\lim_{y \rightarrow \infty} q = 0$, luego $\lim_{y \rightarrow \infty} J(iy) = \lim_{q \rightarrow 0^+} \phi(q) = +\infty$.

Si $\tau \in L_1$ entonces $\tau = -1/2 + iy$, $q = e^{2\pi i(-1/2+iy)} = -e^{-2\pi y} < 0$ luego $\lim_{y \rightarrow \infty} q = 0$, $\lim_{y \rightarrow \infty} J(-1/2 + iy) = \lim_{q \rightarrow 0^-} \phi(q) = -\infty$.

Luego la función J en L toma valores reales y no está acotada ni por arriba ni por abajo, además J es continua, por lo que la imagen del conexo L es un conexo, esto es $J(L)$ es un conexo no acotado ni por arriba, por abajo, luego deberá ser \mathbb{R} eso es $J(L) = \mathbb{R}$. \square

Por el Teorema 2.6.3, J es constante en cada órbita de Γ en U . Los siguientes dos resultados explican por qué hemos puesto tanta atención a J .

Teorema 2.6.5. *Para cada $c \in \mathbb{C}$ existe exactamente una órbita de Γ en U en la cual J toma el valor c .*

Antes de ver la demostración, veamos su utilidad en el siguiente

Corolario 2.6.6. *Si las latices Ω y Ω' tienen módulo $\tau, \tau' \in U$, entonces los toros \mathbb{C}/Ω y \mathbb{C}/Ω' son conformemente equivalentes si y sólo si $J(\tau) = J(\tau')$.*

Demostración. El teorema anterior y el 2.6.3 garantiza que $J(\tau) = J(\tau')$ si y sólo si $\tau' = T(\tau)$ para alguna $T \in \Gamma$. Y por el Teorema 2.1.4 tenemos que \mathbb{C}/Ω y \mathbb{C}/Ω' son conformemente equivalentes si y sólo si $\tau' = T(\tau)$ para alguna $T \in \Gamma$, luego el resultado. \square

Demostración del Teorema 2.7.5. Cada órbita de Γ se interseca con la región fundamental F en un único punto en su interior \dot{F} , o en uno ó dos puntos equivalentes en ∂F .

Primero supongamos que $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; dado que $J(\partial F) \subseteq \mathbb{R}$ por el Corolario 2.7.2, es suficiente probar que existe una única solución de $J(\tau) = c$ en el interior de F . Por el Teorema 2.6.5. y el corolario 2.7.3, J es analítica y no idénticamente nula en c , entonces la función

$$g(\tau) = \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - c}$$

es meromorfa en \mathbf{U} ; y por un argumento análogo al utilizado en la prueba del teorema que dice que no hay funciones elípticas de orden $N = 1$, $a \in \mathbf{U}$ es una solución de $J(\tau) = c$ con multiplicidad k si y sólo si $g(\tau)$ tiene un polo con residuo k en a . Podemos usar

$$J(\tau) = \phi(q) = \frac{1}{1728} \left(\frac{1}{q} + \sum_{n=0} c(n)q^n \right)$$

para expresar a $g(\tau)$ como función de $q = e^{2\pi i\tau}$. Resulta que $g(\tau)$ es meromorfa en $q = 0$ dado que $J(\tau)$ lo es y $g(\tau)$ es analítica es una vecindad agujerada $0 < |q| < \delta$, lo que obliga a que $\text{Im}\tau \geq k$ para algún $k > 1$.

Además los polos de $g(\tau)$ en F caen en el interior de $G = \{\tau \in F \mid \text{Im}(\tau) \leq K\}$, como se muestra en la figura 2.8.

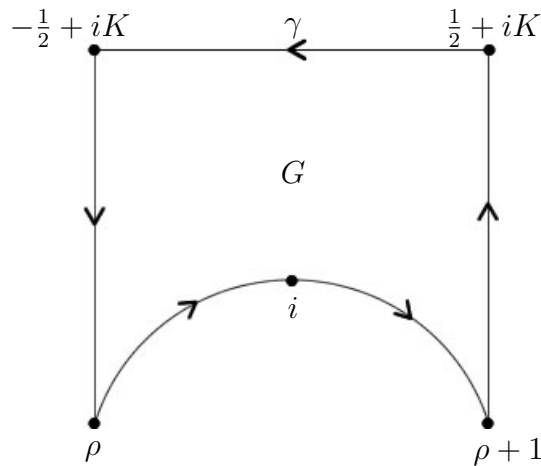


Figura 2.7:

Entonces la suma de los residuos de $g(\tau)$ en F (es decir el número de soluciones contando multiplicidades) es igual a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} g(\tau) d\tau,$$

donde la frontera ∂G tiene orientación positiva.

Ahora los lados $\text{Re}(\tau) = -\frac{1}{2}$ y $\text{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$ de G son equivalentes bajo la transformación $\tau \rightarrow \tau + 1$ de Γ , entonces $J(\tau)$ y $g(\tau)$ toman los mismos valores en puntos equivalentes en los lados; de modo que las integrales de $g(\tau)$ a lo largo de los lados se cancelan en la integral definida anteriormente, y de manera similar la integral a lo largo del círculo unitario de ρ a i se cancela con la integral desde i a $\rho + 1$, usando la transformación $\tau \mapsto -1/\tau$. Así,

$$\int_{\partial G} g(\tau) d\tau = \int_{\gamma} g(\tau) d\tau,$$

donde γ es el lado $\text{Im}(\tau) = K$ de G , orientado desde $\frac{1}{2} + iK$ a $-\frac{1}{2} + iK$. Lejos de los polos de $g(\tau)$, cada rama de la función logarítmica satisface

$$\frac{d}{d\tau}(\log(J(\tau) - c)) = \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - c} = g(\tau)$$

entonces

$$\int_{\gamma} g(\tau) d\tau = [\log(J(\tau) - c)]_{\gamma},$$

el cambio en el valor del $\log(J(\tau) - c)$ salen de la condición de ser analítica y continua a lo largo de γ . Mientras τ recorre a γ , q gira una vez (en la dirección negativa) a lo largo del círculo δ dado por $|q| = e^{-2\pi K}$, comenzando y terminando en $-e^{-2\pi K}$ (Véase Figura).

Como

$$J(\tau) = \frac{1}{1728} \left(\frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n \right)$$

$q(J(\tau) - c)$ es analítica y distinta de cero para $0 \leq |q| \leq e^{-2\pi K}$, y, dado que este conjunto es simplemente conexo se tiene que

$$[\log q(J(\tau) - c)]_{\gamma} = 0,$$

entonces

$$[\log(J(\tau) - c)]_{\gamma} = [\log q(J(\tau) - c) - \log q]_{\gamma}$$

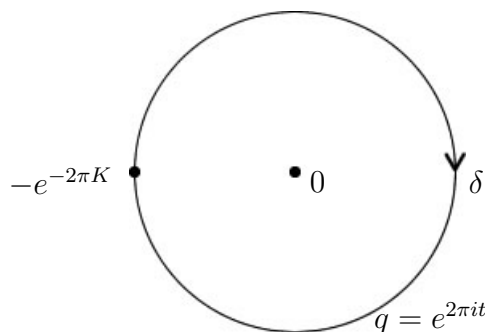


Figura 2.8:

$$= [-\log q]_{\gamma} = 2\pi i$$

De esta manera, la integral definida anteriormente nos muestra que el número de soluciones de $J(\tau) = c$ en F es igual a $(1/2\pi i) \cdot 2\pi i = 1$, como se requiere.

Finalmente, supongamos que $c \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.7.4. existe al menos una órbita de Γ en la cual J toma el valor de c . Si hubiera más de una órbita, existirían dos soluciones no equivalentes τ_1, τ_2 de $J(\tau) = c$, entonces escogiendo $c' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, suficientemente cerca de c tendríamos dos soluciones no equivalentes τ'_1, τ'_2 de $J(\tau) = c'$, cerca de τ_1, τ_2 respectivamente, pero esto es imposible por lo demostrado ya en el caso $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y en consecuencia la órbita es única. \square

Corolario 2.6.7. Si $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ satisface $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, entonces existe una latiz $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $g_k(\Omega) = c_k$ para $k = 2, 3$.

Demostración. Primero supongamos que $c_2 = 0$, entonces $c_3 \neq 0$. Por el Corolario 2.7.3, $g_2(\rho) = 0$ y entonces $g_3(\rho) \neq 0$ dado que $g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = \Delta(\tau)$ no se anula en \mathbb{U} . Entonces podemos escoger $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mu^{-6}g_3(\rho) = c_3$; al hacer

$$\Omega = \mu\Omega(1, \rho)$$

$$= \Omega(\mu, \mu\rho)$$

tenemos $g_2(\Omega) = \mu^{-4}g_2(\rho) = 0 = c_2$ y $g_3(\Omega) = \mu^{-6}g_3(\rho) = c_3$, como se requería. De manera análoga, si $c_3 = 0$ entonces $c_2 \neq 0$. Tenemos que $g_3(i) = 0 \neq g_2(i)$, entonces podemos escoger $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mu^{-4}g_2(i) = c_2$, y así $\Omega = \Omega(\mu, \mu i)$ satisface $g_2(\Omega) = \mu^{-4}g_2(i) = c_2$ y $g_3(\Omega) = 0 = c_3$.

Finalmente consideremos el caso general, donde $c_2 \neq 0 \neq c_3$. Por el Teorema 2.7.5. existe $\tau \in \mathbb{U}$ tal que

$$J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}$$

Para cualquier $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la latiz $\Omega = \Omega(\mu, \mu\tau)$ satisface $g_2(\Omega) = \mu^{-4}g_2(\tau)$ y $g_3(\Omega) = \mu^{-6}g_3(\tau)$, ambas siendo distintas de cero. Dado que

$$\frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2} = J(\Omega) = J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2}$$

no toma los valores 0 ó 1, ya que $c_2 \neq 0 \neq c_3$. Podemos escoger $\mu \neq 0$ para que

$$\mu^2 = \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{g_3(\tau)}{g_2(\tau)},$$

y entonces

$$\frac{g_2(\Omega)}{g_3(\Omega)} = \frac{\mu^{-4}g_2(\tau)}{\mu^{-6}g_3(\tau)} = \frac{c_2}{c_3}$$

Además $g_k(\Omega) = \lambda c_k$ ($k = 2, 3$) para algún $\lambda \neq 0$, entonces substituyendo en $J(\Omega)$ y usando la fórmula para $J(\tau)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2} &= J(\Omega) \\ &= \frac{\lambda^3 c_2^3}{\lambda^3 c_2^3 - 27\lambda^2 c_3^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27\lambda^{-1}c_3^2},$$

Entonces $\lambda = 1$, por lo que $g_k(\Omega) = c_k$ ($k = 2, 3$). □

Y ahora podemos dedicarnos a probar nuestro principal objetivo:

Teorema 2.6.8. *Si $p(z)$ es un polinomio cúbico en $\mathbb{C}[z]$ con raíces distintas, entonces la superficie de Riemann S de $w = \sqrt{p(z)}$ es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Ω para alguna latiz $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

Demostración. Dado que las transformaciones $\theta(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ son automorfismos de \mathbb{C} , dejan invariante la estructura compleja de S . Usando tales transformaciones podemos suponer que $p(z)$ es de la forma normal de Weierstrass

$$p(z) = 4z^3 - c_2z - c_3.$$

Dado que $p(z)$ tiene raíces distintas, se tendrá por el Corolario 2.6.2 que $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$. Entonces el Corolario 2.7.7. implica que existe una latiz $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $g_k(\Omega) = c_k$ ($k = 2, 3$).

Sea \wp la función de Weierstrass asociada a Ω . Sea $\alpha : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow S$ el homeomorfismo, que manda cada $t \in \mathbb{C}/\Omega$ al germen $[f]_c \in S$ donde $c = \widehat{\wp}(t)$ y f es una rama local de \sqrt{p} alrededor de c que satisface $f(c) = \widehat{\wp}'(a)$, tomando $t = [a] \in \mathbb{C}/\Omega$ con $a \in \mathbb{C}$ tenemos que $c = \wp(a)$ y $f(c) = \wp'(a)$. Es suficiente con mostrar que α induce una transformación conforme de coordenadas locales de \mathbb{C}/Ω a S . Las cartas en \mathbb{C}/Ω en t tienen la forma (U_V, Φ_V) donde V es un disco pequeño en \mathbb{C} conteniendo a y Φ_V es la proyección inversa p_V de V sobre su imagen $U_V \subset \mathbb{C}/\Omega$. En S , condicionando a c a que no sea una de los cuatro puntos de ramificación, usamos la proyección $\Psi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \Psi([f]_z) = z$ para dar coordenadas locales alrededor de c . Se sigue que lejos de los puntos de ramificación, α induce la transformación $\Psi \circ \alpha \circ \Phi_V^{-1} = \Psi \circ \alpha \circ p_V = \widehat{\wp} \circ p_V$ de coordenadas locales, y esta es exactamente la restricción de \wp con V . Ahora los puntos de

ramificación en S , se encuentran arriba y las raíces e_1, e_2 y e_3 de p , corresponden bajo α a los puntos $[0], [\frac{1}{2}\omega_1], [\frac{1}{2}\omega_2]$, y $[\frac{1}{2}\omega_3]$ de \mathbb{C}/Ω . Dado que \wp no tiene derivada igual a cero en $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Omega$, α transforma las coordenadas locales conformes lejos de los puntos de ramificación. Cada punto de ramificación tiene orden 1, entonces usamos las coordenadas locales $\zeta = z^{-1/2}$ (cerca de ∞) ó $\zeta = (z - e_i)^{1/2}$ (cerca de e_i), entonces \wp toma los valores ∞ y e_i con multiplicidad 2, entonces las funciones $\wp^{-1/2}$ y $(\wp - e_i)^{-1/2}$, representan las transformaciones de coordenadas locales en los puntos de ramificación y son conformes. \square

Capítulo 3

Iteración de la función $\wp(z)$

3.1. Iteración de funciones meromorfas

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa donde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es la esfera de Riemann. La iterada n -ésima de f denotada por f^n es la composición de f n -veces $f \circ f \circ \dots \circ f$ y está definida en las $z \in \mathbb{C}$ que no son polos de f, f^2, \dots, f^{n-1} . El **conjunto de Fatou** denotado como $F(f)$ es el conjunto de puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ está definida (esto es que no tenga polos de ninguna f^n) y es normal en alguna vecindad de z . Recordemos que una familia F es normal en U si toda sucesión de F tiene una subsucesión que converga uniformemente en cada compacto de U . Así $F(f)$ es el máximo abierto en $\hat{\mathbb{C}}$ donde las iteradas f^n están definidas y la familia $\{f^n\}$ es normal. El **conjunto de Julia** es el complemento de Fatou en la esfera de Riemann, $J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$.

Nota: la condición de que $\{f^n\}$ esta definida en una vecindad de z , sale sobrando en el caso de que f sea racional o cuando f es entera, desde luego en este caso (de f entera), $\infty \in J(f)$. Ahora si f es meromorfa con exactamente un polo z_0 de manera que z_0 no sea un valor omitido (es decir que exista un z_1 con $f(z_1) = z_0$), entonces f^n estará definida para toda $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, \infty\}$ y $\{z_0, \infty\} \subset J(f)$ Además

uno puede mostrar que f tiene la forma

$$f(z) = z_0 + \frac{e^{g(z)}}{(z - z_0)^m}$$

para alguna función entera g y un entero positivo m (el orden del polo).

Pero si f tiene más de 2 polos o tiene un polo que sea un valor omitido, entonces hay una infinidad de puntos que son llevados bajo iteraciones de f a un polo de f .

Si $\theta^-(z_0) := \cup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)$ es la órbita hacia atrás de z_0 bajo f , donde $f^{-n}(z_0) = \{z; f^n(z) = z_0\}$, entonces lo anteriormente dicho (para una función f con un polo que es valor omitido), se puede decir brevemente como $\theta^{-1}(\infty)$ es un conjunto infinito, en efecto por el Teorema de Picard, $f^{-3}(\infty)$ es infinito.

Así el abierto más grande donde las iteradas de f están definidas es $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\theta^-(\infty)} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$ y como $f(\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$ tenemos que f omite 3 o más puntos, por tanto el Teorema de Montel ¹ garantiza que la familia $\{f^n\}$ es normal en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$, por lo que

$$F(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}$$

y

$$J(f) = \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}.$$

Como estaremos interesados en las iteraciones de la función \wp_Ω de Weierstrass, que solo tiene polos dobles en los puntos latiz se tendrá que,

$$F(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\cup_{n \geq 0} \wp_\Omega^{-n}(\infty)}$$

$$J(\wp_\Omega) = \overline{\cup_{n \geq 0} \wp_\Omega^{-n}(\infty)}$$

¹*Teorema de Montel.* Sea F una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio U . Suponga que existen puntos distintos a, b, c en $\hat{\mathbb{C}}$ para toda $f \in F$, $f(U) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ entonces F es una familia normal en U .

Denotamos por $\text{Crit}(f)$ el conjunto de puntos críticos de f , es decir,

$$\text{Crit}(f) = \{z : f'(z) = 0\}.$$

Si z_0 es un punto crítico, entonces $f(z_0)$ es un **valor crítico**. Diremos que w es un **valor asintótico** de f si y sólo si existe una curva continua $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\alpha(t)) = w$. El **conjunto singular** $\text{Sing}(f)$ de f es el conjunto de valores críticos, valores asintóticos finitos y sus puntos límites. Una función es llamada de **clase S** si f tiene sólo un número finito de valores críticos y valores asintóticos. El **conjunto postcrítico** de f es $P(f) = \overline{\cup_{n \geq 0} f^n(\text{Sing}(f))}$. Como la función \wp_Ω solamente tienen 3 valores críticos e_1, e_2 y e_3 , y por ser doblemente periódica no tiene valores asintóticos por lo que \wp_Ω pertenece a la Clase S, el conjunto $\text{Sing}(\wp_\Omega) = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $P(\wp_\Omega) = \overline{\cup_{n \geq 0} f^n\{e_1, e_2, e_3\}}$.

Un punto z_0 es **periódico** si existe $p \geq 1$ tal que $f^p(z_0) = z_0$. Tal punto es llamado **atractor, repulsor o neutro** si $|(f^p)'(z_0)|$ es mayor, menor o igual a 1 respectivamente. Si $|(f^p)'(z_0)| = 0$ entonces a z_0 se le llama punto periódico **superatractor**. Como en el caso de las iteraciones de funciones racionales, el conjunto de Julia es la cerradura de los puntos periódicos repulsores.

Supongamos que F_0 es una componente conexa del conjunto de Fatou. Diremos que F_0 es **preperiódica** si existen $n > m \geq 0$ tales que $f^n(F_0) = f^m(F_0)$, y el mínimo de $n - m = p$ para los enteros n, m que cumplen la igualdad $f^n(F_0) = f^m(F_0)$ es el **periodo del ciclo**. Un componente de F_0 que no es preperiódica se llama **dominio errante**.

La clasificación de las componentes periódicas de Fatou para funciones meromorfas es un poco más complicada que para las funciones racionales en la esfera. Para una función f meromorfa que tenga 2 o más polos o un polo que no es valor omitido las componentes periódicas solo pueden ser de los siguientes tipos: componentes atractoras, dominios parabólicos, discos de Siegel, anillos de Herman o dominios

de Baker (ver, [10] Teorema 2.3). Las definiciones de las cuatro primeras son las mismas que en las funciones racionales, y son así una componente periódica F_0 con periodo p de $F(f)$ es:

a) una **componente atractora** si contiene un punto periódico z_0 atractor de periodo p .

Si para toda $z \in F_0$, el $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = z_0$ se dirá que F_0 es la **cuenca de atracción inmediata** de z_0 . En este caso, si el punto es super atractor se llamará **dominio de Böttcher**, en otro caso se llamará **dominio de Schröder**.

b) una **componente de Leau ó componente parabólico** si existe un punto periódico z_0 de periodo p en la frontera de F_0 y tal que $f^n(z) \rightarrow z_0$ para toda z en F_0 .

c) un **disco de Siegel** si $f : F_0 \rightarrow F_0$ es conjugada analítica a una rotación euclidiana con ángulo irracional del disco unitario en sí mismo.

d) un **anillo de Herman** si $f : F_0 \rightarrow F_0$ es conjugada analítica a una rotación con ángulo irracional de algún anillo en sí mismo.

e) es un **dominio de Baker** si existe $z_0 \in \partial F$. Tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ para $z \in F_0$ pero, $f^p(z_0)$ no está definido.

Si f es de clase S , entonces f no tiene dominios errantes ó dominios de Baker [6].

Sea $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ un ciclo periódico de componentes de $F(f)$. Si C es un ciclo de cuencas de atracción inmediata o dominios de Leau, entonces $U_j \cap \text{Sing}(f) \neq \emptyset$ para algún $0 \leq j \leq p-1$. Si C es un ciclo de un disco de Siegel ó un anillo de Herman entonces $\partial U_j \subset \overline{\cup_{n \geq 0} f^n(\text{Sing}(f))}$, para todo $0 \leq j \leq p-1$. En particular, los puntos singulares siempre están presentes en cualquier tipo de componente preperiódica de Fatou.

3.2. Otras propiedades de $\wp(z)$

Proposición 3.2.1. *Sea Ω una latiz, \wp_Ω la función elíptica de Weierstrass asociada a Ω y $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

$$\wp_{k\Omega}(kz) = \frac{1}{k^2} \wp_\Omega(z), \quad (\text{homogeneidad de } \wp_\Omega),$$

$$\wp'_{k\Omega}(kz) = \frac{1}{k^3} \wp'_\Omega(z), \quad (\text{homogeneidad de } \wp'_\Omega).$$

Demostración.

Para la primera parte:

$$\begin{aligned} \wp_{k\Omega}(kz) &= \sum'_{k\omega} \frac{1}{(kz - k\omega)^2} - \frac{1}{(k\omega)^2} = \sum'_\omega \frac{1}{k^2(z - \omega)^2} - \frac{1}{k^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{k^2} \left\{ \sum'_\omega \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} = \frac{1}{k^2} \wp_\Omega(z) \end{aligned}$$

Para la segunda parte:

$$\begin{aligned} \wp'_{k\Omega}(kz) &= -2 \sum'_{k\omega} \frac{1}{(kz - k\omega)^3} = -2 \sum'_\omega \frac{1}{k^3(z - \omega)^3} \\ &= \frac{1}{k^3} \left\{ -2 \sum'_\omega \frac{1}{(z - \omega)^3} \right\} = \frac{1}{k^3} \wp'_\Omega(z). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.2. *Sea Ω una latiz y \wp su función de Weierstrass*

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2, \quad (\text{propiedad aditiva}).$$

$$\wp(2u) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)} \right)^2 - 2\wp(u), \quad (\text{propiedad duplicativa}).$$

Demostración. Para cualesquiera constantes a, b la función, $f(w) = \wp'(w) - a\wp(w) - b$ es elíptica de orden 3 con polos triples en cada punto de la latiz Ω . Las constantes a, b pueden ser elegidas de manera que $f(w)$ se anule en los valores u y v , o bien que $f(w)$ tenga un cero doble en u . Como $f(w)$ tiene 3 ceros por ser de orden 3 y por el Teorema 1.4.7 la suma de los ceros es congruente a cero módulo Ω ; el otro cero es $-(u + v)$ y $-2u$ en el segundo caso.

Esto lo podemos escribir así:

$$\begin{aligned}\wp'(u) - a\wp(u) - b &= 0 \\ \wp'(v) - a\wp(v) - b &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

o bien

$$\begin{aligned}\wp'(u) - a\wp(u) - b &= 0 \\ \wp''(u) - a\wp'(u) &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Lo que obliga en el primer caso a que:

$$a = \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}, \quad b = \frac{\wp(u)\wp'(v) - \wp(v)\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)}\tag{3.3}$$

y en el segundo caso:

$$a = \frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}, \quad b = \frac{\wp'^2(u) - \wp(u)\wp''(u)}{\wp'(u)}\tag{3.4}$$

Dado que $\wp'(w) = f(w) + a\wp(w) + b$, satisface la identidad

$$(f(w) + a\wp(w) + b)^2 = 4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3,$$

al tomar $f(u) = 0$ nos queda

$$4\wp^3(u) - a^2\wp^2(u) - (2ab + g_2)\wp(u) - (b^2 + g_3) = 0.$$

Así, las raíces de la ecuación

$$4x^3 - a^2x^2 - (2ab + g_2)x - (b^2 + g_3) = 0$$

son $\wp(u), \wp(v), \wp(u+v)$ en el primer caso y $\wp(u), \wp(u), \wp(2u)$ en el segundo caso. Como la suma de las raíces es $\frac{a^2}{4}$ tenemos que

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2$$

en el primer caso, y en el segundo caso

$$2\wp(u) + \wp(2u) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp''(u)}{\wp'(u)} \right\}^2.$$

□

Lema 3.2.3. *Si Ω es real entonces \wp_Ω transforma el eje imaginario en el eje real.*

Demostración. Si $\Omega = \Omega\{\omega_1, \omega_2\}$ es rectangular real ($\omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 \in i\mathbb{R}$) entonces $i\Omega$ está generado por $\{i\omega_1, i\omega_2\}$ como $i\omega_1 \in i\mathbb{R}$ y $i\omega_2 \in \mathbb{R}$, entonces $i\Omega$ es rectangular real. Si $\Omega = \Omega\{\omega, \bar{\omega}\}$ es rombóica real entonces $i\Omega$ está generado por $\{i\bar{\omega}, i\omega\}$ y entonces $i\Omega$ es rombóica real. En cualquiera de los casos $\wp_{i\Omega}$ transforma los reales en reales. Ahora, por la homogeneidad de \wp_Ω se tiene

$$\begin{aligned} \wp_{i\Omega}(-b) &= \sum'_{i\omega} \frac{1}{(i\omega + b)^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} = \sum'_{i\omega} \frac{1}{(i\omega - i(ib))^2} - \frac{1}{(i\omega)^2} \\ &= \frac{1}{i^2} \wp_\Omega(ib) = -\wp_\Omega(ib) \end{aligned}$$

Luego si $b \in \mathbb{R}$, como $\wp_{i\Omega}(-b)$ es real se tiene que $\wp_\Omega(ib)$ es real.

□

Lema 3.2.4. *Si Ω es una latiz cuadrada rectangular real o rombóica real entonces $\wp_\Omega(a+ia)$ y $\wp'_\Omega(a-ia)$ son imaginarios puros, para $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por la propiedad aditiva de \wp_Ω y las propiedades de homogeneidad de \wp_Ω y \wp'_Ω

$$\begin{aligned}\wp_\Omega(a + ia) &= -\wp_\Omega(a) - \wp_\Omega(ia) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'_\Omega(a) - \wp'_\Omega(ia)}{\wp_\Omega(a) - \wp_\Omega(ia)} \right)^2 \\ &= -\wp_\Omega(a) + \wp_\Omega(a) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'_\Omega(a) - i\wp'_\Omega(a)}{\wp_\Omega(a) + \wp_\Omega(a)} \right)^2 \\ &= \frac{-i}{8} \left(\frac{\wp'_\Omega(a)}{\wp_\Omega(a)} \right)^2\end{aligned}$$

pero $\wp_\Omega(a)$ y $\wp'_\Omega(a)$ son ambos reales por el lema previo. Un argumento similar funciona para $a - ia$. \square

Recordemos que los valores críticos de la función elíptica de Weierstrass de una latiz arbitraria $\Omega\{\omega_1, \omega_2\}$ los determinamos así: para $j = 1, 2, 3$ notemos que $\wp_\Omega(\omega_j - z) = \wp_\Omega(z)$ para toda z , donde $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Tomando las derivadas de ambos lados obtenemos que $-\wp'_\Omega(\omega_j - z) = \wp'_\Omega(z)$. Substituyendo $z = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ ó $\frac{\omega_3}{2}$, vemos que $\wp'_\Omega = 0$ en estos valores. Usamos la siguiente notación

$$e_1 = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp_\Omega\left(\frac{\omega_3}{2}\right)$$

para denotar los valores críticos. Como \wp_Ω satisface la ecuación diferencial

$$(\wp'_\Omega(z))^2 = p[\wp_\Omega(z)]$$

donde $p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$ es el polinomio asociado a Ω , tenemos que e_1, e_2, e_3 son ceros distintos del polinomio $4z^3 - g_2z - g_3$, por lo que

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

Al igualar coeficientes en la identidad anterior obtenemos:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = \frac{-g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

El discriminante de $p(z)$ es $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Naturalmente, la forma de las latices está relacionada con las propiedades dinámicas de su correspondiente función elíptica de Weierstrass.

Lema 3.2.5.

1) Si Ω es rectangular real, entonces el discriminante es positivo y $g_2 > 0$; en este caso las tres raíces de p son reales y distintas. Si $g_3 > 0$ entonces los lados verticales del rectángulo son mayores que los horizontales y si $g_3 < 0$ entonces los lados horizontales del rectángulo son mayores que los verticales.

2) Si Ω es rectangular cuadrada, entonces $g_2 > 0$ y $g_3 = 0$; en este caso las raíces de p son $0, \pm\sqrt{g_2}/2$.

3) Si Ω es real rombóica, entonces el discriminante es negativo; en este caso las raíces de p son una real y una pareja de complejos conjugados. Si $g_3 > 0$ entonces la diagonal vertical del rombo es mayor que la diagonal horizontal, y si $g_3 < 0$ entonces la diagonal horizontal es mayor que la diagonal vertical.

4) Si Ω es cuadrada rombóica, entonces $g_2 < 0$ y $g_3 = 0$; en este caso las raíces de p son $0, \pm\sqrt{g_2}/2$.

5) Si Ω es triangular, entonces $g_2 = 0$. En este caso las raíces de p son las raíces cúbicas de $g_3/4$.

Demostración.

1) $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$ y ya que las e_i son reales ($e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ son reales por 3.2.3 y el Lema 3.2.4 y como $e_3 = -e_1 - e_2$, también es real) diferentes el discriminante es real positivo. Además como $g_2^3 = \Delta + 27g_3^2 > 0$, $g_2 > 0$.

2) Si $\Omega = \Omega\{\omega, i\omega\}$, $\omega \in \mathbb{R}$, de nuevo los e_i son reales diferentes, por lo que $\Delta > 0$, $g_2 > 0$ pero como $e_3 = \wp(\frac{\omega+i\omega}{2})$ es imaginario y también real, $e_3 = 0$ luego $g_3 = 0$. Como en éste caso, $p(z) = 4z^3 - g_2z$, se tiene que las raíces son 0 y $\pm\sqrt{g_2}/2$.

3) Si $\Omega = \Omega\{\omega, \bar{\omega}\}$ es rombóica real.

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right), e_2 = \wp\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right), e_3 = \wp\left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{2}\right)$$

Como \wp es real, $e_3 \in \mathbb{R}$ y $\wp\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right) = \overline{\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, luego $e_1 = \bar{e}_2$. Así las raíces de $p(z)$ son una real y dos complejas conjugadas.

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = 16(2i \operatorname{Im} e_1)^2 |e_2 - e_3|^4 < 0.$$

Como $g_3 = 4e_1e_2e_3 = 4|e_1|^2e_3$, g_3ye_3 tienen el mismo signo.

4) Si $\Omega = \Omega(\omega, \bar{\omega})$ es rombóica cuadrada ($\bar{\omega} = i\omega$). Como en (2) $g_3 > 0$ y como en (3) $\Delta < 0$ y entonces $g_2 < 0$. Las raíces de $p(z) = 4z^3 - g_2z$ son 0 y $\pm\sqrt{g_2}/2$.

5) Si $\Omega = \Omega(ae^{\pi i/3}, ae^{-\pi i/3})$ es triangular, la simetría de la latiz Ω , sirve para mostrar que son las raíces cúbicas de $\frac{g_3}{4}$. \square

El siguiente resultado, se sigue del lema anterior, será útil para el estudio del conjunto de Fatou de la función de Weierstrass.

Corolario 3.2.6.

1) Si Ω es rectangular real entonces los valores críticos son todos reales. Si $g_3 > 0$ entonces $e_2 < e_3 < 0 < e_1$, y si $g_3 < 0$ entonces $e_2 < 0 < e_3 < e_1$.

2) Si Ω es una latiz cuadrada rectangular entonces $e_1 = -e_2 = \frac{\sqrt{g_2}}{2} > 0$, y $e_3 = 0$.

3) Si Ω es una latiz rombóica entonces $e_2 = \bar{e}_1$ son las raíces complejas conjugadas, y e_3 es real. Si $g_3 > 0$ entonces $e_3 > 0$, y si $g_3 < 0$ entonces $e_3 < 0$.

4) Si Ω es rombóica cuadrada entonces $e_3 = 0$, y $e_1 = -e_2 = \frac{\sqrt{g_2}}{3}$, son imaginarios puros.

5) Si Ω es triangular entonces $e_3 \neq 0$ es real, $e_1 = e^{4\pi i/3}e_3$, y $e_2 = e^{2\pi i/3}e_3$.

Lema 3.2.7. Si \wp_Ω es real, entonces como función en \mathbb{R} es periódica y tiene una infinidad de puntos críticos reales y por lo menos un valor

crítico real. Si Ω es rombóica, entonces tiene exactamente un valor crítico real e_2 que es negativo si y sólo si $g_3 < 0$. De otro modo existe al menos un valor crítico no negativo. En cualquier caso la imagen de los puntos críticos reales es el mínimo de \wp_Ω en \mathbb{R} . En particular, si e_r denota el valor crítico real, entonces $\wp_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [e_r, \infty]$ es monótona por pedazos y suprayectiva.

Demostración. Por 2.4.3, Ω es rectangular real o rombóica real. Si Ω es rectangular real entonces uno de los generadores es real y así la periodicidad es clara. Si Ω es rombóica entonces tiene generadores que son complejos conjugados. Sean ω_1 y $\omega_2 = \overline{\omega_1}$ los generadores como $\wp_\Omega(x + \omega_1 + \omega_2) = \wp_\Omega(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y como $\omega_1 + \omega_2 \in \mathbb{R}$, \wp_Ω es periódica en \mathbb{R} con periodo $2a = \omega_1 + \omega_2$. Dado que los puntos críticos son la mitad de los puntos latiz y la suma de la mitad de los puntos latices, entonces para una latiz rombóica, todos los puntos de la forma ma , donde m es par, son los puntos críticos. En el caso rectangular, una infinidad de medios puntos medios latiz se encuentran a lo largo del eje real. Dado que hay un número infinito de puntos críticos, uno en cada intervalo periódico, entonces sus valores comunes son valores críticos reales. La última parte se sigue del Lema 3.2.7. Dado que \wp'_Ω es estrictamente creciente y negativa a la izquierda del punto crítico y positiva a la derecha (en cada intervalo periódico), entonces e_r es el mínimo en \mathbb{R} . En particular, si a es el periodo real de \wp_Ω y m es cualquier entero, entonces \wp_Ω restringida al intervalo $(ma, ma + a/2]$ es monótona y suprayectiva sobre $[e_r, \infty)$. De igual manera \wp_Ω restringida al intervalo $[ma + a/2, (m + 1)a)$ es monótona y suprayectiva sobre $[e_r, \infty)$. \square

La simetría de las latices afecta la dinámica de \wp_Ω , en particular al conjunto postcrítico como veremos en la siguiente.

Proposición 3.2.8.

1) Si Ω es rectangular real, entonces el conjunto postcrítico es real y, excepto por a lo más un número finito de puntos (incluyendo posiblemente a ∞), $P(\wp_\Omega)$ está contenido en el semieje real no negativo.

2) Si Ω es rombóica real, entonces $P(\wp_\Omega)$ consiste de una parte real (posiblemente incluyendo a ∞) y dos partes que son conjugadas complejas.

3) Si Ω es rombóica o rectangular cuadrada, entonces $P(\wp_\Omega)$ es real y positivo excepto por un número finito de puntos incluyendo a ∞ . Además $e_3 \in J(\wp_\Omega)$.

4) Si Ω es triangular, entonces $P(\wp_\Omega)$ está contenido en tres rayos invariantes: un rayo es $\alpha = [e_3, \infty]$ sobre el eje real, y los rayos $e^{2\pi/3}$ y $e^{4\pi/3}\alpha$. Note que e_3 puede ser positivo o negativo, si $e_3 < 0$ entonces los tres rayos se intersectan en el origen.

Demostración. En cada caso, usamos los resultados de 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7. En el caso rectangular, dado que las raíces de \wp_Ω son reales se mantienen reales bajo la iteración de \wp_Ω en particular la iteración de los valores críticos, y 3.2.7 garantiza que $P(\wp_\Omega) \subset [e_1, \infty) \cup \{e_2, e_3, \infty\}$. Si Ω es real rombóica entonces la órbita hacia adelante de e_3 se encuentra a lo largo de $[e_3, \infty]$. Dado que $e_2 = \bar{e}_1$ y \wp_Ω es real, la órbita hacia adelante de e_2 consiste de los puntos que son los conjugados de los puntos de la órbita de e_1 . Luego $P(\wp_\Omega)$ tiene una parte real y dos partes conjugadas.

Si Ω es rombóica cuadrada entonces sus partes conjugadas eventualmente coinciden. Sabemos que $e_3 = 0$, que es un prepolo. Por el lema 3.2.6, e_1 y e_2 se encuentran en el eje imaginario y $e_2 = -e_1$. El Lema 3.2.5 implica que $\wp_\Omega(e_2) = \wp_\Omega(e_1)$ es real y negativo, y así $\wp_\Omega^n(e_2)$ se encuentra en la parte real no negativa para $n \geq 2$. Entonces para rombóicas cuadradas tenemos $P(\wp_\Omega) \subset [0, \infty) \cup \{e_1, e_2, \wp(e_1), \infty\}$.

Si Ω es rectangular cuadrada entonces $e_3 = 0$ es un prepolo y tiene que estar en $J(\wp_\Omega)$. Además $P(\wp_\Omega) \subset [e_1, \infty) \cup \{0, e_2, \infty\}$.

Si Ω es triangular entonces la órbita hacia adelante de los valores críticos reales se encuentran sobre el rayo $\alpha = [e_3, \infty]$ que está en el

eje real por 3.2.8. Sea $\epsilon = e^{2\pi i/3}$. Dado que $\epsilon\Omega = \Omega$, la homogeneidad, Proposición 3.2.1. implica que

$$\wp_{\Omega}(\epsilon u) = \wp_{\epsilon\Omega}(\epsilon u) = \frac{1}{\epsilon^2} \wp_{\Omega}(u) = \epsilon \wp_{\Omega}(u).$$

De manera análoga, $\wp_{\Omega}(\epsilon^2 u) = \epsilon^2 \wp_{\Omega}(u)$. Y la órbita hacia adelante de e_1 se mantiene en el rayo $\epsilon^2 \alpha$ y la órbita hacia adelante de e_2 se mantiene en el rayo $\epsilon \alpha$. Note que si $g_3 > 0$ entonces estos rayos solamente se intersectan en ∞ . \square

3.3. Puntos fijos

Para cualquier latiz Ω , \wp_{Ω} es meromorfa con una infinidad de puntos periodicos de periodo n para cada $n \geq 2$ ([3], Teorema 2, página 158). Y en general, una función meromorfa no necesariamente tiene puntos fijos. Por ejemplo $f(z) = z + 1/\text{sen}(z)$. Sin embargo, para latiz reales se puede mostrar que \wp_{Ω} tiene una infinidad de puntos fijos, mas concretamente.

Proposición 3.3.1. *Sea Ω una latiz real y \wp_{Ω} la correspondiente función elíptica. Entonces \wp_{Ω} tiene una infinidad de puntos fijos en \mathbb{R} .*

Demostración Para una latiz real, 3.2.5 implica que \wp_{Ω} tiene puntos críticos en el eje real. Dado que \wp_{Ω} y \wp'_{Ω} son periódicas en \mathbb{R} , existen una infinidad de puntos críticos a lo largo del eje real. Sea e_r el valor crítico de los puntos críticos reales. (Si Ω es rectangular entonces $e_r = e_1$ y si Ω es rombóica entonces $e_r = e_3$). Encontraremos un punto crítico c_m tal que $c_m > e_r$ y $c_m > 0$. Si el periodo a lo largo del eje real es p , entonces consideramos $\wp_{\Omega} : (c_m - p/2, c_m] \rightarrow [e_r, \infty)$ que es continua y monótona decreciente. Consideramos $\wp_{\Omega}(x) - x$, que es positiva alrededor de $c_m - p/2$ y negativa en c_m . Por el teorema del valor intermedio, existe un punto en $(c_m - p/2, c_m]$ donde $\wp_{\Omega}(x) = x$. Esto se cumple para cada segmento de la forma $(c - p/2, c]$ o $[c, c + p/2]$,

donde c es un punto crítico y $c > e_r$, y así como hay una infinidad de puntos críticos, hay entonces una infinidad de puntos fijos. \square

La demostración del siguiente resultado implica que en cada intervalo periódico en \mathbb{R} , existirán 0, 1 o 2 puntos fijos. Después de haber encontrado el primer intervalo periódico L que contiene un punto fijo, todos los intervalos a la derecha de L contendrán dos puntos fijos.

En particular, φ_Ω transforma cada intervalo periódico de la parte no negativa del eje real sobre $[e_r, \infty)$, si elegimos un intervalo periódico L que no tenga polos en su interior, entonces $\varphi_\Omega^2 = \varphi_\Omega \circ \varphi_\Omega$ está definida dentro de L , y lo siguiente se deduce.

Proposición 3.3.2. *Para toda latiz real Ω y para todo intervalo periódico L a la derecha de e_r , que no contiene polos de φ_Ω en su interior, existen una infinidad de ciclos de periodo 2 para φ_Ω . Los extremos de L son puntos de acumulación de los ciclos de periodo 2.*

Demostración. Puntos ω de la forma $\omega = \varphi_\Omega(z)$ con $z \in L$, incluye todos los puntos críticos reales. Entonces φ_Ω^2 como función de L en $[e_r, \infty)$, es monótona por pedazos con una infinidad de pedazos, y cada intervalo de monotonicidad tiene un punto fijo. Este corresponde a un punto periódico de periodo menor o igual a 2. \square

El mismo resultado se mantiene para los puntos periódicos de mayor periodo, pero no existe intervalos periodicos L para φ_Ω tal que φ_Ω^3 está definida en todas partes en L .

3.4. Simetría de los conjuntos de Fatou y Julia

Iniciamos analizando un resultado sobre la simetría de los conjuntos de Fatou y de Julia para una latiz arbitraria. Como siempre $J(\varphi)$

denota el conjunto de Julia de la función \wp y $F(\wp)$ al conjunto de Fatou del \wp .

Teorema 3.4.1. *Si Ω es una latiz entonces*

1. $J(\wp_\Omega) + \Omega = J(\wp_\Omega)$ y $F(\wp_\Omega) + \Omega = F(\wp_\Omega)$.
2. $(-1)J(\wp_\Omega) = J(\wp_\Omega)$ y $(-1)F(\wp_\Omega) = F(\wp_\Omega)$.

Demostración. Supongamos que $z \in F(\wp_\Omega)$ y sea $\omega \in \Omega$. Entonces $\wp_\Omega^n(z)$ está definida para toda $n \in \mathbb{Z}$ y existe una vecindad U de z donde $\{\wp_\Omega^n(U)\}$ es una familia normal. Pero $\wp_\Omega^n(z + \omega) = \wp_\Omega^n(z)$ y $\wp_\Omega^n(U + \omega) = \wp_\Omega^n(U)$, luego $U + \omega$ es una vecindad de $z + \omega$ donde \wp_Ω^n es normal, por tanto $z + \omega \in F(\wp_\Omega)$.

Para la segunda parte sea $z \in F(\wp_\Omega)$. Por definición, $\wp_\Omega^n(z)$ existe para toda n . Sea U una vecindad alrededor de z y sea $V = -U$, dado que \wp_Ω es par, tenemos que $\wp_\Omega^n(V) = \wp_\Omega^n(U)$ para toda $n \geq 1$ y entonces $\{\wp_\Omega^n(U)\}$ es una familia normal si y sólo si $\{\wp_\Omega^n(V)\}$ es una familia normal. Luego si $z \in F(\wp_\Omega)$, hay una vecindad U donde $\{\wp_\Omega^n(U)\}$ es normal, pero entonces como $V = -U$ es vecindad de $-z$ y $\{\wp_\Omega^n(V)\}$ es normal, se tiene que $-z \in F(\wp_\Omega)$ y recíprocamente $-z \in F(\wp_\Omega)$ implica que $z \in F(\wp_\Omega)$. Luego el conjunto de Fatou es simétrico con respecto al origen. Esto obliga al conjunto de Julia ser simétrico con respecto al origen también. \square

Lema 3.4.2. *Para una latiz cualquiera Ω , $\overline{J(\wp_\Omega)} = J(\wp_{\overline{\Omega}})$*

Demostración. Si $\phi(z) = \bar{z}$ es la conjugación, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi \circ \wp_\Omega(z) &= \overline{\frac{1}{z^2} + \sum \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}} = \\ &= \frac{1}{\bar{z}^2} + \sum \frac{1}{(\bar{z} - \bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} = \wp_{\overline{\Omega}} \circ \phi(z). \end{aligned}$$

Luego $z \in J(\wp_\Omega)$ si y sólo si $\bar{z} \in J(\wp_{\overline{\Omega}})$ y entonces $\overline{J(\wp_\Omega)} = J(\wp_{\overline{\Omega}})$. \square

Teorema 3.4.3. *Si Ω es real, entonces $\overline{J(\wp_\Omega)} = J(\wp_\Omega)$, y entonces $\overline{F(\wp_\Omega)} = F(\wp_\Omega)$*

Demostración. Por el Lema anterior $\overline{J(\wp_\Omega)} = J(\wp_{\overline{\Omega}})$ pero como $\overline{\Omega} = \Omega$ se tiene que $\overline{J(\wp_\Omega)} = J(\wp_\Omega)$. \square

Corolario 3.4.4. *Sea Ω una latiz real.*

1) *Si F_0 es una componente del conjunto Fatou que interseca al eje real entonces F_0 es simétrico con respecto al eje real.*

2) *Si F_0 es una componente del conjunto Fatou que interseca al eje imaginario entonces F_0 es simétrico con respecto al eje imaginario.*

3) *Si F_0 es una componente del conjunto Fatou que contiene a un punto crítico c entonces F_0 es simétrico con respecto a c .*

Demostración

1) Dado que F_0 es una componente del conjunto de Fatou que interseca al eje real, entonces su simétrico con respecto al eje real parte del conjunto de Fatou pues $\overline{F(\wp_\Omega)} = F(\wp_\Omega)$ y también interseca al eje real en exactamente el mismo segmento, de modo que la unión de F_0 y su simétrico debe dar la misma componente y entonces F_0 es simétrica con respecto al eje real.

2) Recordemos por 3.4.1 que $F(\wp_\Omega) = -F(\wp_\Omega)$ y como $\overline{F(\wp_\Omega)} = F(\wp_\Omega)$, resulta que el conjunto de Fatou (y también el de Julia) es simétrico con respecto al eje imaginario. Así si F_0 interseca al eje imaginario, su simétrico con respecto al eje imaginario es parte del conjunto de Fatou e interseca al eje imaginario en el mismo conjunto que F_0 , luego F_0 y su simétrico forman una componente por lo que es F_0 y entonces F_0 es simétrico al eje imaginario.

3) Si la latiz es $\Omega = \Omega\{\omega_1, \omega_2\}$ y $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, el punto crítico es de la forma $c = \frac{\omega_i}{2} + \omega$ para algún $i \in \{0, 1, 2\}$ y $\omega \in \Omega$. Si $z \in F_0$ el simétrico de z con respecto a c es $2c - z = \omega_i + 2\omega - z$, por ser $F(\wp_\Omega)$ simétrico con respecto al origen e invariante bajo traslaciones de puntos latiz, se tiene que $2c - F_0$ el simétrico de F_0 con respecto a

c es parte del conjunto de Fatou, luego $F_0 \cup (2c - F_0)$ deberá coincidir con F_0 , por lo que F_0 es simétrico con respecto a c . \square

Si la latiz tiene una forma distinguida entonces los conjuntos de Fatou y Julia exhiben una simetría adicional.

Teorema 3.4.5.

1. Si Ω es cuadrada rectangular o cuadrada rombóica, entonces $e^{\pi i/2} J(\wp_\Omega) = J(\wp_\Omega)$ y $e^{\pi i/2} F(\wp_\Omega) = F(\wp_\Omega)$.
2. Si Ω es triangular, entonces $e^{2\pi i/3} J(\wp_\Omega) = J(\wp_\Omega)$ y $e^{2\pi i/3} F(\wp_\Omega) = F(\wp_\Omega)$.

Demostración. Sea $z \in F(\wp_\Omega)$. Por definición, $\wp_\Omega^n(z)$ existe para toda n . Por las ecuaciones de homogeneidad, $\wp_\Omega(iz) = -\wp_\Omega(z)$ y dado que \wp_Ω es par sabemos que $\wp_\Omega^n(iz) = \wp_\Omega^n(z)$ para toda $n \geq 2$. Entonces $\wp_\Omega^n(iz)$ existe para toda n . Sea U una vecindad de z tal que $\{\wp_\Omega^n(U)\}$ es una familia normal. Sea $V = iU$ que es una vecindad de iz . Repitiendo nuestro argumento, tenemos que $\wp_\Omega(V) = \wp_\Omega(iU) = -\wp_\Omega(U)$ y $\wp_\Omega^n(V) = \wp_\Omega^n(U)$ para toda $n \geq 2$ y además de que $\{\wp_\Omega^n(V)\}$ forma una familia normal por lo que $iz \in F(\wp_\Omega)$. Luego $z \in F(\wp_\Omega) \Rightarrow iz \in F(\wp_\Omega)$, el mismo argumento muestra que $iz \in F(\wp_\Omega) \Rightarrow -z \in F(\wp_\Omega) \Rightarrow z \in F(\wp_\Omega)$.

Entonces $z \in F(\wp_\Omega)$ si y sólo si $iz \in F(\wp_\Omega)$. Luego el conjunto de Fatou es simétrico con respecto a la rotación de $\pi/2$. La segunda parte del teorema se sigue de manera similar usando la propiedades de homogeneidad en latices triangulares forzando así $\wp_\Omega^n(\epsilon z) = \epsilon \wp_\Omega^n(z)$ para toda n , donde $\epsilon = e^{2\pi i/3}$. \square

Existen dos tipos de latices cuadradas. Veremos que si nos dan el tamaño del lado del cuadrado, los conjuntos de Julia de una latiz rectangular real o real rombóica, para las funciones \wp de Weierstrass son bastante diferentes, pero aún así guardan alguna simetría las dos funciones de Weierstrass.

Corolario 3.4.6. *Sea Ω_1 una latiz cuadrada con lado γ_0 , y sea Ω_2 una latiz rombóica con lado γ_0 . Entonces para cada $z \in \mathbb{C}$,*

$$\wp_{\Omega_2}(e^{\pi i/4}z) = -i\wp_{\Omega_1}(z)$$

Más aún,

$$\wp'_{\Omega_2}(e^{\pi i/4}z) = e^{-3\pi i/4}\wp'_{\Omega_1}(z),$$

entonces $|\wp'_{\Omega_2}(e^{\pi i/4}z)| = |\wp'_{\Omega_1}(z)|$. Si los invariantes para \wp_{Ω_1} son $g_2 > 0$ y $g_3 = 0$, entonces para \wp_{Ω_2} son $-g_2$ y $g_3 = 0$.

Demostración. Tenemos que $e^{\pi i/4}\Omega_1 = \Omega_2$. La ecuación de homogeneidad para \wp_{Ω} , da que para cada z , $\wp_{\Omega_2}(e^{\pi i/4}z) = -i\wp_{\Omega_1}(z)$. Las propiedades de homogeneidad para la derivada nos dice que para cada z

$$\wp'_{\Omega_2}(e^{\pi i/4}z) = \frac{1}{e^{3\pi i/4}}\wp'_{\Omega_1}(z).$$

Además, de la ecuación de la diferencial de \wp y del discriminante obtenemos que $g_2 > 0$ y $g_3 = 0$ son invariantes para Ω_1 , y entonces las invariantes para Ω_2 son $-g_2$ y $g_3 = 0$. \square

3.5. La estructura periódica de las componentes del conjunto de Fatou

Ahora estudiaremos la periodicidad de las componentes de Fatou para \wp_{Ω} .

Algunos resultados en la estructura de los conjuntos de Fatou y Julia son consecuencia sencilla de los hechos que conciernen a la topología de la esfera compleja y casi no requiere teoría de iteraciones. Entonces nuestra primer tarea consistirá en recolectar la suficiente información relevante acerca de estos sentidos topológicos.

Iniciamos con resultados sobre regiones simplemente conexas.

Definición 3.5.1. Una región $R \subset \mathbb{C}$ es **simplemente conexa** si para todo punto $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 0$$

donde γ es cualquier curva cerrada simple (de clase C^1) contenida en R .

Proposición 3.5.2. Para una región $R \subset \mathbb{C}$ son equivalentes

- i) R es simplemente conexa
- ii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$ es conexo
- iii) ∂R es conexo

Demostración ([2], página 80-81)

Definición 3.5.3. Una región R es **múltiplemente conexa** si no es simplemente conexa. En cuyo caso $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$ no es conexo, si este conjunto tiene n componentes conexas, diremos que R es de **conectividad n** y tiene **conectividad infinita** si $\hat{\mathbb{C}} \setminus R$ tiene una infinidad de componentes.

Proposición 3.5.4. Sea $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ un abierto, $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ es conexo si y sólo si cada componente de D es simplemente conexa.

Demostración. ([2], página 81)

Ahora los primeros resultados son válidos para cualquier latiz.

Proposición 3.5.5. Para cualquier latiz Ω , la función de Weierstrass \wp_{Ω} cumple.

- i) $F(\wp_{\Omega}) = F(\wp_{\Omega}^n)$, $J(\wp_{\Omega}) = J(\wp_{\Omega}^n)$ para $n \geq 2$.
- ii) $F(\wp_{\Omega})$ y $J(\wp_{\Omega})$ son completamente invariantes.
- iii) $J(\wp_{\Omega}) = \hat{\mathbb{C}}$ o $J(\wp_{\Omega})$ tiene interior vacío.

Demostración. (Ver [3], página 155)

Lema 3.5.6. *Para cualquier latiz Ω , el conjunto $F(\wp)$ de \wp_Ω no tiene dominios errantes y no tiene dominios de Baker.*

Demostración. \wp_Ω sólo tiene tres valores críticos. Dado que \wp_Ω es doblemente periódica, no puede tener valores asintóticos. Entonces la función es de *clase S* y las funciones de ésta clase no tienen dominios errantes ni dominios de Baker. \square

Ahora mencionamos algunos resultados que nos permiten determinar si $J(\wp_\Omega)$ es conexo.

Baker señala (en [10], Teorema 3.1) que una componente invariante F_0 de $F(f)$ para una meromorfa f que tenga dos o mas polos o un polo que no sea valor omitido, solo puede tener conectividad igual a 1, 2, o ∞ . Y que (Corolario 3.2 de [10]) tiene conectividad 2 en el caso que F_0 sea un anillo de Herman. También que conectividad igual a 2 se descarta si F_0 es completamente invariante (Lema 4.1 de [10]), y en tal caso $\partial F_0 = J(f)$ (Lema 4.2 de [10]).

Teorema 3.5.7. *Sea Ω cualquier latiz:*

- 1) *$J(\wp_\Omega)$ es conexo si y sólo si cada componente de $F(\wp_\Omega)$ es simplemente conexa.*
- 2) *Si $F(\wp_\Omega)$ es conexo, entonces es simplemente conexo o infinitamente conexo.*
- 3) *Si \wp_Ω no tiene discos de Siegel, entonces sus componentes invariantes hacia adelante son simplemente conexas o de conectividad infinita; en el segundo caso, $J(\wp_\Omega)$ tiene un número no numerable de componentes.*

Demostración. La primera parte es aplicar la proposición 3.5.4. al abierto $D = F(\wp_\Omega)$. La prueba del segundo punto se sigue de los trabajos de Baker señalados anteriormente. Finalmente como hemos señalado que la componente invariante de $F(\wp_\Omega)$ solo puede ser de 5 tipos. Ya hemos descartado que sea de Baker, más adelante en 3.4.9 se descarta que sea anillo de Herman. Entonces por el trabajo de Baker señalado, la componente es simplemente conexa o de conectividad infinita. \square

Teorema 3.5.8. *Para cualquier latiz Ω , a lo más hay tres tipos diferentes de ciclos de componentes periódicas en el conjunto de Fatou.*

Demostración. La función \wp_Ω tiene tres valores críticos diferentes con a lo más tres órbitas diferentes. \square

Teorema 3.5.9. *Para cualquier latiz Ω , $F(\wp_\Omega)$ no tiene ciclos de anillos de Herman.*

Demostración. Si $\{U_0, \dots, U_{p-1}\}$ es un ciclo de anillos de Herman de periodo p , $\wp_\Omega^p : U_i \rightarrow U_i$ es conjugada a una rotación irracional de un anillo de radios 1 y $R > 1$, además \wp_Ω^p es inyectiva. Sea γ la preimagen bajo la conjugación de una circunferencia del anillo de radio $r \in (1, R)$, y sea B_γ la componente acotada del complemento de γ . Dado que U_i es múltiplemente conexo, sabemos que B_γ contiene un prepolo. Sea n el número no negativo mas pequeño n tal que $\wp_\Omega^n(\gamma)$ contiene un punto latiz ω en $B_{\wp_\Omega^n(\gamma)}$. Sea U_j el anillo de Herman $\wp_\Omega^n(U_i)$. Dado que U_j es homeomorfo a un anillo con el punto latiz ω en $B_{\wp_\Omega^n(\gamma)}$, el Teorema 3.4.1 implica que $-U_j + 2\omega$ es una componente de Fatou tal que ω está en $-B_{\wp_\Omega^n(\gamma)} + 2\omega$. Dado que la topología no cambia en cada región fundamental (trasladando el conjunto si en necesario por $-\omega$), supondremos que $\omega = 0$. Además los anillos U_j y $-U_j$ son tales que cada uno contiene a la curva cerrada simple γ y $-\gamma$ respectivamente, y cada uno tiene a 0 en su complemento acotado. Si mostramos que existe un punto $z \in U_j \cap -U_j$, entonces de la simetría del conjunto de Fatou se seguirá que U_j es simétrica con respecto a 0 y entonces $U_j = -U_j$.

Para cada punto $z \in \gamma$, podemos asignar coordenadas $z = (r, \theta)$. Dado que γ encierra al origen y es simple, cada valor de $[0, 2\pi)$ asigna un solo punto γ . Digamos que $z_0 = (r_0, 0) \in \gamma$ y consideremos $z_1 = (r_1, 0) \in -\gamma$. Si $r_1 = r_0$, entonces ya acabamos dado que $z_0 = z_1$. Entonces supondremos que $r_1 < r_0$. Tenemos $w_0 = (r_0, \pi) \in -\gamma$ y $\omega_1 = (r_1, \pi) \in \gamma$. Ahora consideramos la función continua $r(\theta) = r_+ + r_-$, donde r_+ es la coordenada radial para γ en θ , y r_- es la

coordenada radial para $-\gamma$ en θ , tendremos que $r(0) > 0$ y $r(\pi) < 0$. Por el teorema del valor intermedio, $r(\theta)$ tiene que tomar el valor 0 para algún ángulo $\theta_0 \in (0, \pi)$, así el punto $z = (r(\theta_0), \theta_0)$ está en γ y en $-\gamma$. Ahora, trasladando al original ω , tenemos que si $z \in U_j$, entonces $-z + 2\omega \in U_j$. Sin embargo, dado que $\wp_\Omega(z) = \wp_\Omega(-z + 2\omega)$, \wp_Ω^p no puede ser inyectiva en U_j lo cual es una contradicción. \square

Teorema 3.5.10. *Si Ω es una latiz tal que los valores críticos de \wp_Ω están en el conjunto de Fatou y pertenecen a componentes ajenas de Fatou, entonces $J(\wp_\Omega)$ es conexo.*

Demostración. Si $F(\wp_\Omega) = \emptyset$, entonces $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$ es conexo. Suponemos que existe una componente no vacía del conjunto de Fatou y consideremos una curva cerrada simple γ de alguna componente W de $F(\wp_\Omega)$. Es suficiente mostrar que γ es homóloga a un punto de W , dado que $J(\wp_\Omega)$ es conexo si y sólo si cada componente de $F(\wp_\Omega)$ es simplemente conexa. (3.5.7.) Dado que \wp_Ω tiene sólo un número finito de valores críticos, y no tiene componentes errantes (3.5.6) entonces alguna imagen hacia adelante $\wp_\Omega^k(\gamma)$ está contenida en una región simplemente conexa $U \subset F(\wp_\Omega)$ que es una de las siguientes:

- 1) una vecindad de un punto periódico atractor;
- 2) una vecindad de Böttcher de un punto periódico super atractor;
- 3) un pétalo atractor de Leau para un punto periódico parabólico;
- 4) un disco de un ciclo de Siegel.

Por el Teorema 3.5.9. no hay anillos de Herman. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U \subset Q_0$ donde Q_0 un paralelogramo fundamental (con frontera ajena a ∂U). Además, dado que U es simplemente conexo, podemos escogerlo para que la frontera sea una curva simple que no pase por un valor crítico. Ahora, usando inducción sobre k , podemos mostrar que $\wp_\Omega^{-k}(U)$ consiste de sólo componentes simplemente conexas. De esta manera γ se puede reducir a un punto. Para la parte inductiva, primero mostramos que $\wp_\Omega^{-1}(U)$ tiene una componente simple conexa.

Caso 1: Si U no contiene un valor crítico, entonces cada región fundamental $\wp_\Omega^{-1}(U)$ consta de dos regiones ajenas simplemente conexas.

Caso 2: Si U contiene un valor crítico, entonces $\wp_\Omega^{-1}(U)$ es una región simplemente conexa en cada periodo fundamental, acotada por una curva cerrada simple, además se mapea a U por un cubriente ramificado (doble). Esto se sigue del hecho de que \wp_Ω es localmente dos a uno alrededor de cada punto crítico (en cada periodo fundamental) y el cubriente $\wp_\Omega^{-1}(U) \rightarrow U$ es dos a uno en cada región.

El paso inductivo en k es el mismo. Cada pieza simplemente conexa de $\wp_\Omega^{-1}(U)$ no contiene valores críticos en su frontera y contiene a cero o un valor crítico dentro, entonces podemos repetir el argumento. \square

Corolario 3.5.11. *Si todos los valores críticos de \wp_Ω están en $J(\wp_\Omega)$ entonces $J(\wp_\Omega)$ es conexo.*

Demostración. En este caso el conjunto de Fatou es vacío o tenemos un disco de Siegel y podemos aplicar el teorema anterior. \square

En contra parte al teorema anterior, existen también condiciones para garantizar que $J(\wp_\Omega)$ sea totalmente desconexo, no las veremos aquí, pero existe por ejemplo el siguiente.

Teorema 3.5.12. *Sea \wp_Ω la función de Weierstrass. Si $P(\wp_\Omega) \cap J(\wp_\Omega) = \emptyset$ y todos los valores críticos de \wp_Ω están contenidos en la misma componente de Fatou, entonces $J(\wp_\Omega)$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. ([9], página 17)

\square

Lema 3.5.13. *Para latices rectangulares, rombóicas y triangulares cuando $g_3 > 0$, \wp_Ω no tiene discos de Siegel.*

Demostración. Si $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ es un ciclo de discos de Siegel, entonces $\partial U_j \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n \{e_1, e_2, e_3\}$ para todo $0 \leq j \leq p-1$, ([3], página 164). Luego por la proposición 3.2.8 el conjunto postcrítico para

una latiz rectangular o rombóica esta contenida en la parte no negativa del eje real excepto por un número finito de puntos y así $\partial U_j \subset [0, \infty)$ para toda $0 \leq j \leq p-1$. Dado que la cerradura del conjunto postcrítico es un rayo hay a lo más un disco de Siegel U_0 y $(-\infty, b) \subset U_0$ para algun $b < 0$ finito. Esto contradice al teorema 3.4.1, y así $P(\wp_\Omega)$ no puede acotar a discos de Siegel. Si Ω es triangular y $g_3 > 0$ el corolario 3.2.6 implica que $e_3 > 0$ y la proposición 3.2.8 implica que el conjunto postcrítico se encuentra en los tres rayos $\alpha = [e_3, \infty]$, $e^{2\pi/3}\alpha$ y $e^{4\pi/3}\alpha$, cuyo único punto posible de intersección es ∞ . Si estos rayos estuvieran acotados por discos de Siegel, entonces U_0 debería estar contenido en el complemento de la unión de estos rayos contradiciendo al teorema 3.4.1. Y así \wp_Ω no tiene discos de Siegel. \square

Corolario 3.5.14. *Para una latiz rectangular, rombóica o triangular, cuando $g_3 > 0$, cualquier componente invariante hacia adelante de $F(\wp_\Omega)$ es simplemente conexa o infinitamente conexa.*

Ahora discutamos en detalle los posibles tipos de componentes de Fatou que pueden ocurrir en distintos tipos de latices reales. Para lo cual necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.5.15. *Suponga que Ω es una latiz rombóica, rectangular o triangular tal que $\wp_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [e_r, \infty)$. Sea λ un periodo de \wp_Ω en \mathbb{R} . Suponga que $n\lambda \leq e_r < (n+1)\lambda$; se define $I_{e_r} = \{x \in \mathbb{R} : n\lambda \leq x < (n+1)\lambda\}$ para que sea un intervalo periódico conteniendo a e_r . Suponemos que existe exactamente un ciclo real no repulsor para \wp_Ω . Si $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ denota el ciclo no repulsor, entonces $A \cap I_{e_r} \neq \emptyset$.*

Demostración. Primero supondremos que p es un punto fijo y así $A = \{p\}$. Queremos ver que si hay un punto fijo no repulsor en \mathbb{R} , entonces tiene que haber un punto fijo más pequeño el cual se encuentra a la izquierda. Para la prueba de esto se sabe (por el Lema 3.2.7) que existen sólo un número finito de puntos fijos que están a la izquierda del 0, entonces existe un punto fijo x_1 menor, entonces

$x_1 = \wp_\Omega(x_1) \geq e_r$; si x_2 es un punto fijo tal que $x_1 < x_2$, entonces dado que $\wp_\Omega(x_1) < \wp_\Omega(x_2)$, es necesario discutir el caso en que x_2 se encuentra más cerca de un polo (un punto de la latiz en \mathbb{R}) que de x_1 . De la ecuación diferencial de \wp_Ω se tiene que $\wp_\Omega''(z) = 6\wp_\Omega^2(z) - \frac{g_2}{2}$. La imagen del punto real es el mínimo de \wp_Ω en \mathbb{R} y $\wp_\Omega|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow [e_r, \infty]$ es monótona por pedazos y sobre. Si la latiz es rectangular cuadrada, entonces (Lema 3.2.7) $e_1 = \frac{\sqrt{g_2}}{2} > 0$. Dado que $\wp_\Omega \geq \frac{\sqrt{g_2}}{2}$, tenemos $\wp'' > 6\wp_\Omega^2(z) - \frac{3g_2}{2} \geq 0$ y así \wp'_Ω es estrictamente monótona. Si la latiz es rombóica cuadrada, $g_2 < 0$ y $\wp_\Omega''(z) = 6\wp_\Omega^2(z) - \frac{g_2}{2} > 0$. Si la latiz es triangular entonces $g_2 = 0$ y $\wp_\Omega''(z) = 6\wp_\Omega^2(z) \geq 0$ y $\wp_\Omega''(z) = 0$ solo en raíces aisladas de \wp_Ω . Así en todos los casos, \wp'_Ω es estrictamente monótona. Dado que x_2 se encuentra más cerca de un polo (un punto latiz en \mathbb{R}) que a x_1 y \wp'_Ω es estrictamente monótona, $|\wp'_\Omega(x_1)| < |\wp'_\Omega(x_2)|$. Esto prueba lo que queríamos.

Ahora consideramos el intervalo periódico que contiene a p . Si $e_r = p$ acabamos, entonces podemos suponer que $p > e_r$. Denotamos el intervalo periódico que contiene a p como $I_p = \{x \in \mathbb{R} : k\lambda \leq x \leq (k+1)\lambda\}$; es decir, $k\lambda \leq p < (k+1)\lambda$. Existe un punto crítico contenido en I_p , que es $c_p = (n + 1/2)\lambda$. Notamos que como $p \neq e_p$, se sigue que $p \neq c_p$. Entonces hay dos casos a considerar. Si $p < c_p$, el intervalo $[p, c_p)$ es transformado inyectivamente sobre $(e_r, p]$ sin polos, así $e_r \in I_p$. De otro modo, si $p > c_p$, entonces el intervalo $(c_p, p]$ se transforma inyectivamente en $(e_r, p]$ y otra vez no tiene polos, entonces de nuevo $e_r \in I_p$.

Si p es periódico de un periodo mayor $n \geq 1$, usamos el mismo argumento aplicado a \wp_Ω^n con las adaptaciones necesarias, la mayor iterada de \wp_Ω es monótona por pedazos con un valor mínimo real e_r . \square

Ahora clasificaremos el tipo de comportamiento de las componentes periódicas de Fatou para la función elíptica de Weierstrass en latiz triangulares.

Proposición 3.5.16. *Para cualquier latiz triangular $\Omega\{\lambda, e^{2\pi i/3}\lambda\}$,*

uno de los siguientes puntos ocurren:

- 1) $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$;
 - 2) Para alguna n y para alguna β , $0 \leq \beta \leq 1$ existen exactamente tres ciclos periódicos (super)atractores o tres ciclos periódicos parabólicos en el conjunto de Fatou de periodo n con multiplicador β ;
 - 3) Existe exactamente un ciclo periódico (super)atractor o un ciclo periódico parabólico en el conjunto de Fatou que contiene a los tres valores críticos;
 - 4) Los únicos ciclos de Fatou son discos de Siegel.
- En cualquier caso, no hay dos valores críticos en la misma componente del conjunto de Fatou.

Demostración. Si $J(\wp_\Omega) \neq \hat{\mathbb{C}}$ entonces debe existir un ciclo periódico de Fatou que no contiene anillos de Herman, ni dominios de Baker (3.5.6 y 3.5.9). Si $F(\wp_\Omega)$ tiene un ciclo atractor o componentes parabólicas, entonces el ciclo debe de contener un valor crítico e_i . Por 3.4.1 y 3.2.5 los valores críticos deben de estar en el conjunto de Fatou y sus iteradas convergen a un ciclo atractor o parabólico. Por la preposición 3.2.8 los valores críticos convergen a tres ciclos periódicos o todos convergen a un ciclo periódico. Si hay tres ciclos periódicos, la homogeneidad de la derivada implica que ellos deben de estar en el mismo tipo de componente. Si existe un ciclo de discos de Siegel entonces la frontera del ciclo debe de estar contenida en la cerradura de la órbita de los puntos críticos y entonces debe de haber al menos un punto crítico en $J(\wp_\Omega)$. La proposición 3.2.8 y la homogeneidad de \wp_Ω implica que todos los valores críticos están en el conjunto de Julia, y las únicos posibles ciclos de Fatou son discos de Siegel.

Para terminar la demostración veremos que existe un ciclo atractor parabólico donde e_1, e_2 y e_3 estén en componentes ajenas de $F(\wp_\Omega)$. Sea $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ un ciclo de componentes de Fatou que corresponde al ciclo $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Alguna componente U_j contiene un valor crítico, digamos e_1 . Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \wp_\Omega^{kn}(e_1) = p_j$, y por 3.2.8, $\lim_{k \rightarrow \infty} \wp_\Omega^{kn}(e_2) = e^{2\pi i/3} p_j$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \wp_\Omega^{kn}(e_3) = e^{4\pi i/3} p_j$. Ahora, si e_2 está en U_j , entonces $p_j = e^{2\pi i/3} p_j$, y así $p_j = 0$, es un polo y esto

contradice a la hipótesis. El mismo argumento muestra que no hay valores críticos que se encuentren en la misma componente del ciclo. \square

Corolario 3.5.17. *Si Ω es una latiz triangular, $J(\wp_\Omega)$ es conexo.*

Demostración. Mostramos en 3.5.15. que para cada latiz triangular los valores críticos e_1, e_2 y e_3 se encuentran en componentes ajenas de $F(\wp_\Omega)$ o todos están en $J(\wp_\Omega)$, ahora aplicamos el teorema 3.5.10. \square

Ahora veremos los casos de latices cuadradas, cuyo comportamiento es un poco diferente. En esta parte, a lo más un ciclo periódico de Fatou puede existir. Recordemos que para una latiz cuadrada Ω con invariantes $\{g_2, 0\}$ tenemos siempre que $e_1 = \frac{\sqrt{g_2}}{2}$, donde $g_2 > 0$ para una rectangular cuadrada y $g_2 < 0$ para rombóicas cuadradas.

Proposición 3.5.18. *Para cualquier latiz rectangular cuadrada $\Omega\{\lambda, \lambda i\}$, uno de los siguientes puntos ocurren:*

- 1) $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$;
- 2) *Existe exactamente un ciclo (super)atractor o un ciclo periódico parabólico en el conjunto $F(\wp_\Omega)$;*
- 3) *El único ciclo periódico de Fatou es con discos de Siegel;*

Demostración. La proposición 3.2.5 implica que e_3 está en el conjunto de Julia y las órbitas hacia adelante de e_1 y e_2 coinciden. Entonces existe una sola órbita que está asociada a componentes del conjunto de Fatou. Por 3.5.6 y 3.5.9, \wp_Ω no tiene anillos de Herman, ni dominios de Baker. \square

El teorema para latices rombóicas es similar al de latices rectangulares, además los mismos valores críticos e_1 y e_2 se encuentran en la misma componente de Fatou. Y ningún ciclo superatractor puede ocurrir.

Proposición 3.5.19. *Para cualquier latiz rombóica cuadrada Ω , uno de los siguientes puntos ocurren:*

- 1) $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$;
- 2) Existe exactamente un ciclo atractor de $F(\wp_\Omega)$, y e_1 y e_2 se encuentran en la misma componente del conjunto de Fatou, este es el único ciclo periódico para $F(\wp_\Omega)$;
- 3) Existe exactamente un ciclo racional neutro para \wp_Ω , y e_1 y e_2 se encuentran en la misma componente del conjunto de Fatou, este es el único ciclo periódico para $F(\wp_\Omega)$;
- 4) En los casos 2 o 3, la órbita periódica no repulsora se encuentra completamente contenida en $[0, \infty)$.

Demostración. La prueba de que solamente un ciclo periódico hacía adelante puede existir es la misma que la de las latices rectangulares. Dado que el mínimo de \wp_Ω en \mathbb{R} es $e_3 = 0$, ningún ciclo super atractor puede existir. Dado que cualquier órbita no repulsora se encuentra en el eje real positivo, sabemos que todas las componentes del ciclo de Fatou tienen que intersectar al eje real. Una de estas componentes, digamos U_0 tiene que contener a e_1 . Por el Corolario 3.2.8., U_0 es simétrica con respecto al eje real y $e_2 \in U_0$. \square

Corolario 3.5.20. Si Ω es rombóica cuadrada entonces \wp_Ω no tiene ciclos superatractores.

Para una latiz rectangular real tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.5.21. Para cualquier latiz rectangular real $\Omega\{\omega_1, \omega_2 i\}$, con $\omega_1, \omega_2 > 0$, uno de los siguientes puntos puede ocurrir

- 1) $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$;
- 2) Existen a lo más tres ciclos (super)atractores o ciclos neutros racionales para \wp_Ω ;
- 3) Si ocurre 2, entonces las órbitas periódicas no repulsoras son reales y están completamente contenidas en $[e_1, \infty)$.

Demostración. Para cualquier latiz real, $\wp_\Omega(\mathbb{R})$ es no negativa. Podemos suponer que $g_3 \neq 0$ puesto que esto es tomado en cuenta en los resultados de las latices rectangulares cuadradas en la proposición

3.5.13. Así, ninguno de e_1, e_2 o e_3 es cero. El valor mínimo de \wp_Ω en \mathbb{R} es $e_1 = \wp_\Omega(\frac{\lambda_1}{2})$; al menos uno de e_2 o e_3 tiene que ser negativo. Dado que cada órbita no repulsora está contenida en el conjunto postcrítico de \wp_Ω tenemos que todas las órbitas no repulsoras están contenidas en $[e_1, \infty)$. \square

A continuación discutiremos completamente las componentes invariantes del conjunto de Fatou. Se sabe que las funciones de Clase S tienen un máximo de dos componentes completamente invariantes, y si dos componentes completamente invariantes existen entonces cada una es simplemente conexa. Empecemos con un resultado que funciona para cualquier latiz.

Proposición 3.5.22. *Si Ω es una latiz y F_0 es una componente completamente invariante de $F(\wp_\Omega)$, entonces F_0 contiene una infinidad de puntos críticos y F_0 es no acotada.*

Demostración. Si F_0 es una componente completamente invariante de $F(\wp_\Omega)$, entonces F_0 contiene un valor crítico e_i . Pero entonces hay una infinidad de puntos críticos de la forma $c + \Omega$ que satisfacen $\wp_\Omega(c + \Omega) = e_i$. Dado que F_0 es completamente invariante, entonces todos los puntos $c + \Omega$ están en F_0 , y entonces no está acotada. \square

Teorema 3.5.23. *Si Ω es una latiz real y F_0 es una componente completamente invariante de $F(\wp_\Omega)$, entonces F_0 de conectividad infinita. Además existe al menos una componente completamente invariante.*

Demostración. Es suficiente con eliminar la posibilidad de que F_0 sea simplemente conexo. Cada subconjunto abierto simplemente conexo del plano es conexo por trayectorias. Sabemos que F_0 contiene al menos un valor crítico e_i y un número infinito de puntos críticos $c + \Omega$. Para $i = 1, 2$, sea c_i un punto crítico que se encuentra en el cuadrante i . Tomamos una trayectoria continua α_1 en F_0 que conecta al punto crítico c_1 con c_2 y que se encuentra completamente en el plano

superior. Esto es posible por la simetría de F_0 con respecto al eje real, pues por ejemplo cuando construimos α_1 en el primer intento algún punto de la curva puede quedar debajo del eje x , pero existe un punto que corresponde al conjugado por encima del eje x que escogemos cada vez que la trayectoria pasa por el eje real. De manera similar, podemos encontrar una trayectoria continua α_2 en F_0 que conecta c_2 a $-c_1$ que se encuentra completamente en el segundo y tercer cuadrante. Podemos tomar trayectorias $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$. Estas cuatro forman un lazo γ que encierra al polo 0, entonces γ no se puede contraer a un punto. Entonces F_0 no es simplemente conexa.

Dado que \wp_Ω es de la Clase S, si $F(\wp_\Omega)$ tiene dos componentes completamente invariantes entonces cada componente tiene que ser simplemente conexa. Así tiene que haber al menos una componente invariante en el conjunto de Fatou. \square

Proposición 3.5.24.

1) Si Ω es triangular y $g_3 > 0$ entonces no existen componentes de Fatou completamente invariantes.

2) Si Ω es rectangular cuadrada o rombóica cuadrada y F_0 es una componente completamente invariante del conjunto de Fatou, entonces $F_0 = F(\wp_\Omega)$.

Demostración. Suponga que Ω es triangular y F_0 es una componente completamente invariante. Por la Proposición 3.5.16. F_0 tiene que contener un punto fijo (super)atractor o neutral y un valor crítico, digamos e_3 . Claramente, $e^{2\pi i/3}e_3, e^{4\pi i/3}e_3 \notin F_0$. Pero $e^{2\pi i/3}F_0$ y $e^{4\pi i/3}F_0$ son completamente invariantes y entonces \wp_Ω tiene tres componentes de Fatou completamente invariantes. Esto es una contradicción, entonces no hay componentes de Fatou completamente invariantes. El segundo punto se sigue de las Proposiciones 3.5.18. y 3.5.19. \square

Aún no conocemos un ejemplo donde el conjunto de Fatou contenga una componente completamente invariante. Cuando la latiz es rombóica cuadrada, no sabemos de un conjunto de Julia conexo a

menos de que el conjunto de Fatou sea vacío, como se afirma en la siguiente.

Proposición 3.5.25. *Si \wp_Ω es rombóica cuadrada, entonces el conjunto de Julia es conexo si y sólo si $J(\wp_\Omega) = \hat{\mathbb{C}}$*

Demostración. Suponga que $J(\wp_\Omega) \neq \hat{\mathbb{C}}$. Como en la demostración de la Proposición 3.5.19. tenemos una componente periódica de Fatou, U_1 que contiene puntos en el eje real positivo, e_1 en la parte superior del eje imaginario y e_2 en la parte inferior del eje imaginario. Sabemos que U_1 es simétrico con respecto al eje imaginario. Esto nos permite que construir un lazo en U_1 alrededor del origen, que es un prepolo, y entonces está en el conjunto de Julia. Así, U_1 no es simplemente conexa y por la Proposición 3.5.7 el conjunto de Julia no es conexo.

□

Para latiz rectangulares con un punto fijo super atractor el conjunto de Julia tiene que ser conexo.

Proposición 3.5.26. *Sea \wp_Ω la función elíptica de Weierstrass para una latiz rectangular cuadrada con un punto fijo super atractor. Entonces $J(\wp_\Omega)$ es conexo.*

Demostración. Si p_1 es un punto fijo super atractor entonces $p_1 = e_1 = m\lambda/2$ para algún entero m . Sabemos que $e_2 = -e_1$ y que $\wp_\Omega(e_2) = \wp_\Omega(e_1)$. Sea U_0 una componente invariante del conjunto de Fatou que contenga al punto fijo e_1 por 3.4.4 U_0 es simétrica con respecto a e_1 . Queremos que $e_2 \notin U_0$. Dado que U_0 es una componente superatractora invariante, tenemos que hay un cambio de coordenadas conforme de U_0 hacia al disco unitario abierto \mathbb{D} que conjuga $\wp_\Omega|_{U_0}$ con la función $g(z) = z^2$ definida en \mathbb{D} . Si la conclusión es falsa, el cambio real de coordenadas alrededor de $e_1 \in U_0$ se extiende a una región $V \subset U_0$ y $\partial V \subset U_0$ que contenga el valor crítico e_2 . Sin embargo, e_2 y V no pueden estar en un mismo paralelogramo fundamental, y la

coordenada local no puede ser extendida sobre el paralelogramo adjunto, dado que \wp es periódica pero z^2 no. Así la conclusión es verdadera y U_0 es simplemente conexa.

Dado que U_0 está contenida dentro de un paralelogramo fundamental y es simétrica con respecto a e_1 , además $\wp_\Omega : U_0 \rightarrow U_0$ es dos a uno excepto en e_1 . Más aún, $\wp_\Omega^{-1}(U_0) = \{U_0 + w : w \in \Omega\}$, es un conjunto de trasladadas de U_0 , dos a dos ajenas y así cada componente es simplemente conexo. Sea W la componente de $\wp_\Omega^{-1}(U_0)$ que contiene a e_2 . Por 3.4.4, $W = -U_0$.

Sea $E = iU_0$, entonces E es simplemente conexo y está contenido completamente en un paralelogramo fundamental. Por la ecuación de homogeneidad de \wp_Ω ,

$$\wp_\Omega(E) = \wp_\Omega(iU_0) = -\wp_\Omega(U_0) = -U_0 = W$$

Dado que E contiene el punto crítico $mi\lambda/2$, el corolario 3.4.4. implica que E es simétrico con respecto al punto crítico $mi/2$. De nuevo, tenemos que $\wp_\Omega : E \rightarrow W$ es dos a uno excepto en $mi\lambda/2$. Además $\wp_\Omega^{-1}W = \{E + w : w \in \Omega\}$ es una colección de trasladadas de E que son ajenas dos a dos y entonces es cada trasladada es simplemente conexa. Ninguna otra componente del conjunto de Fatou contiene valores críticos dado que $e_3 \in J(\wp_\Omega)$. Podemos entonces encontrar un inverso local univalente para cualquier componente de Fatou excepto U_0 y W , y así todas las componentes de Fatou son simplemente conexas. Usando la Proposición 3.5.14. se sigue que $J(\wp_\Omega)$ es conexo. \square

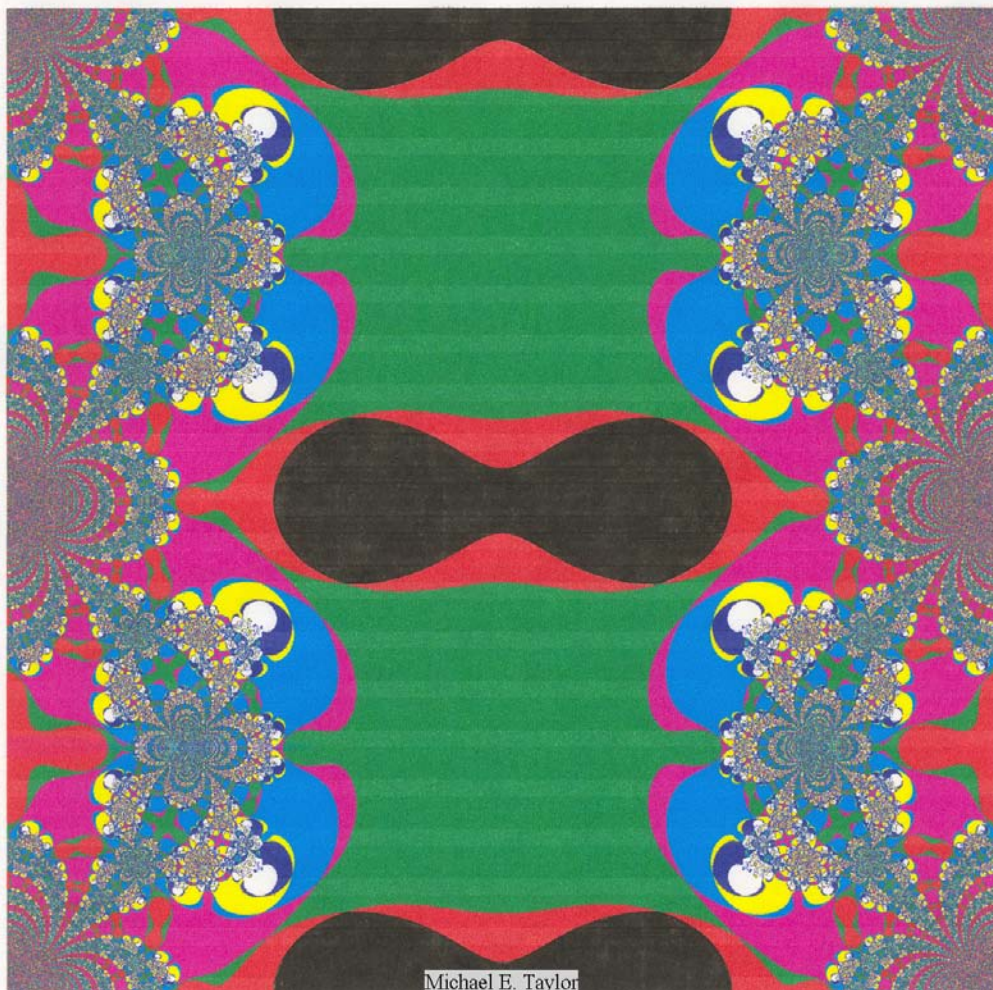


Figura 3.1: Latiz cuadrada, con el doble de ancho que de largo.

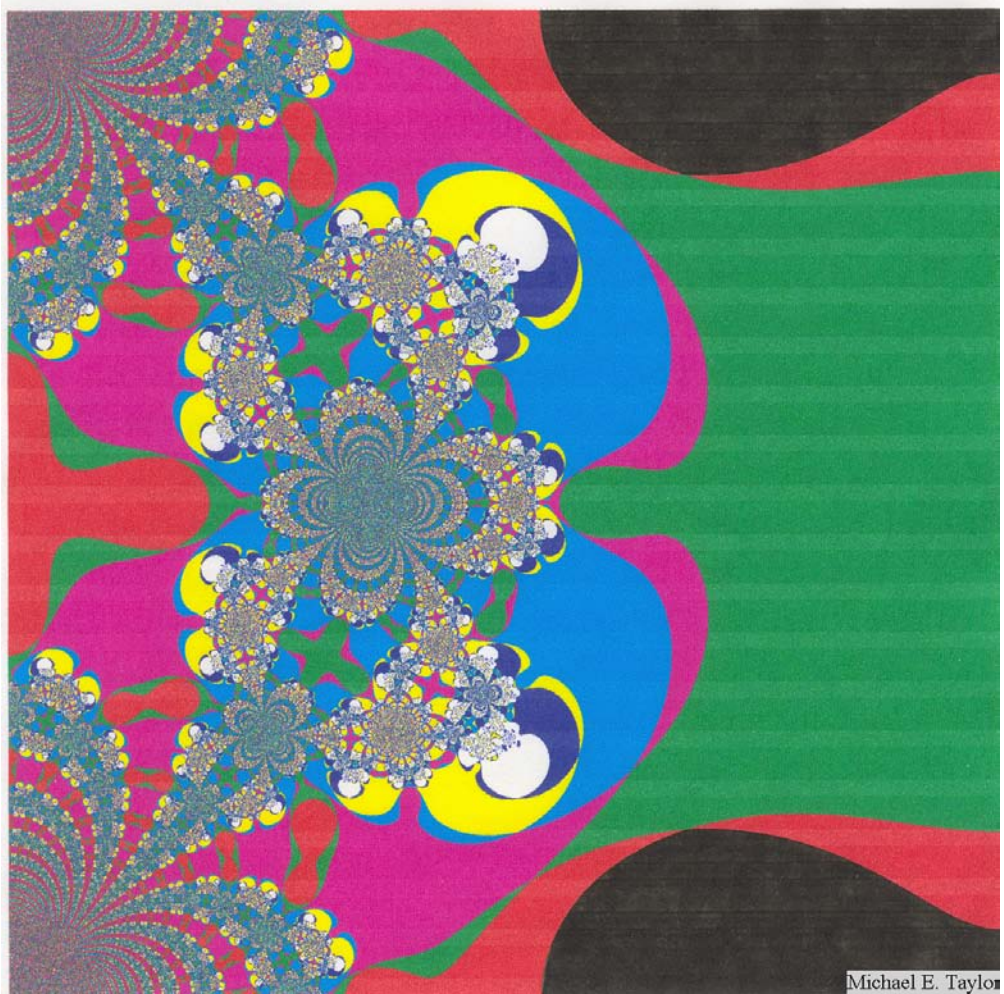


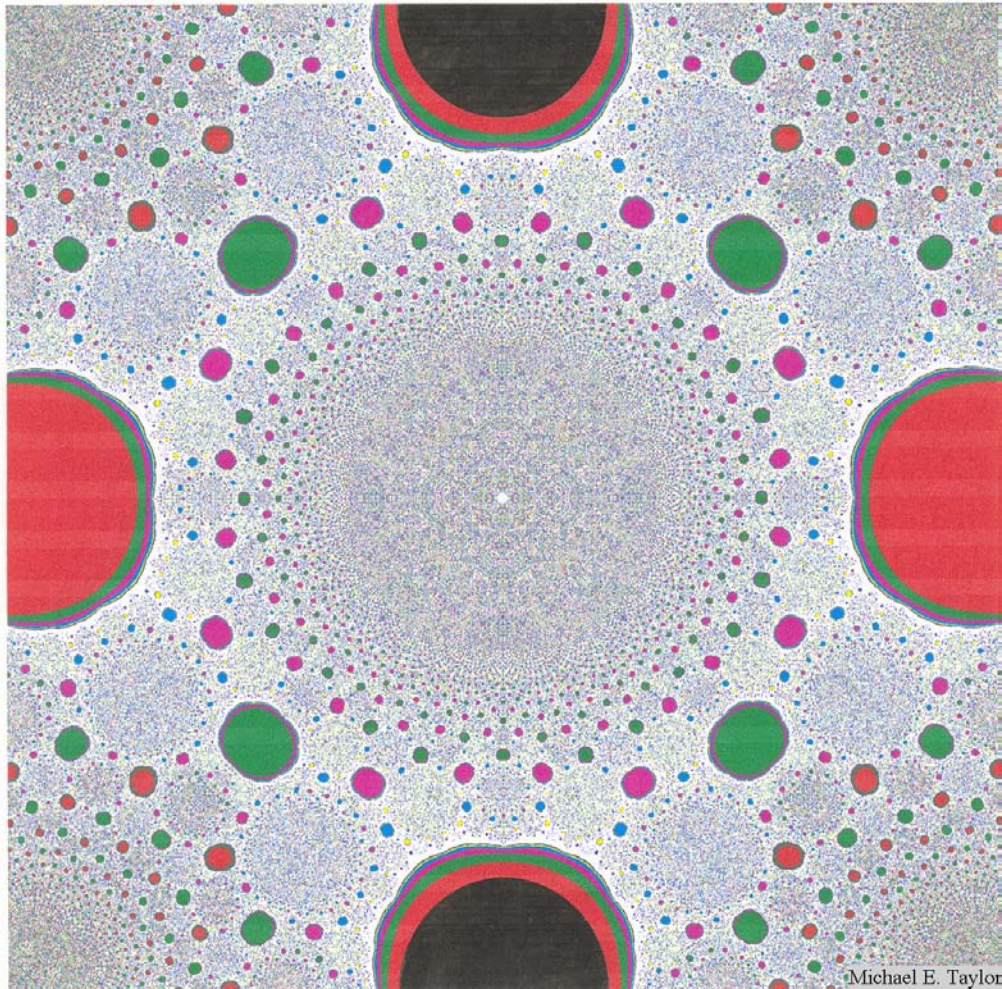
Figura 3.2: Las siguientes figuras son acercamientos.



Figura 3.3:



Figura 3.4:



Michael E. Taylor

Figura 3.5: El conjunto de Julia de la función elíptica \wp de Weierstrass con una latiz cuadrada y un punto super atractor.

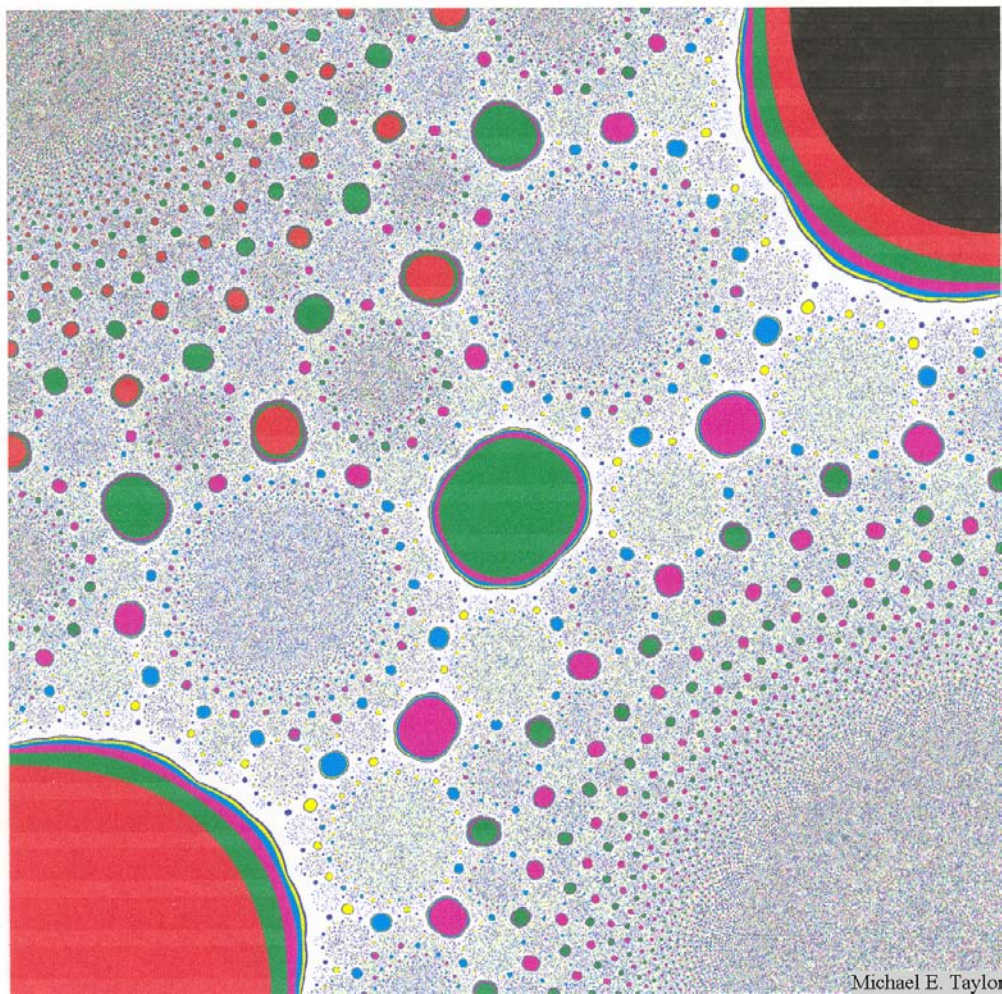


Figura 3.6: El área blanca es el conjunto de puntos en Julia.

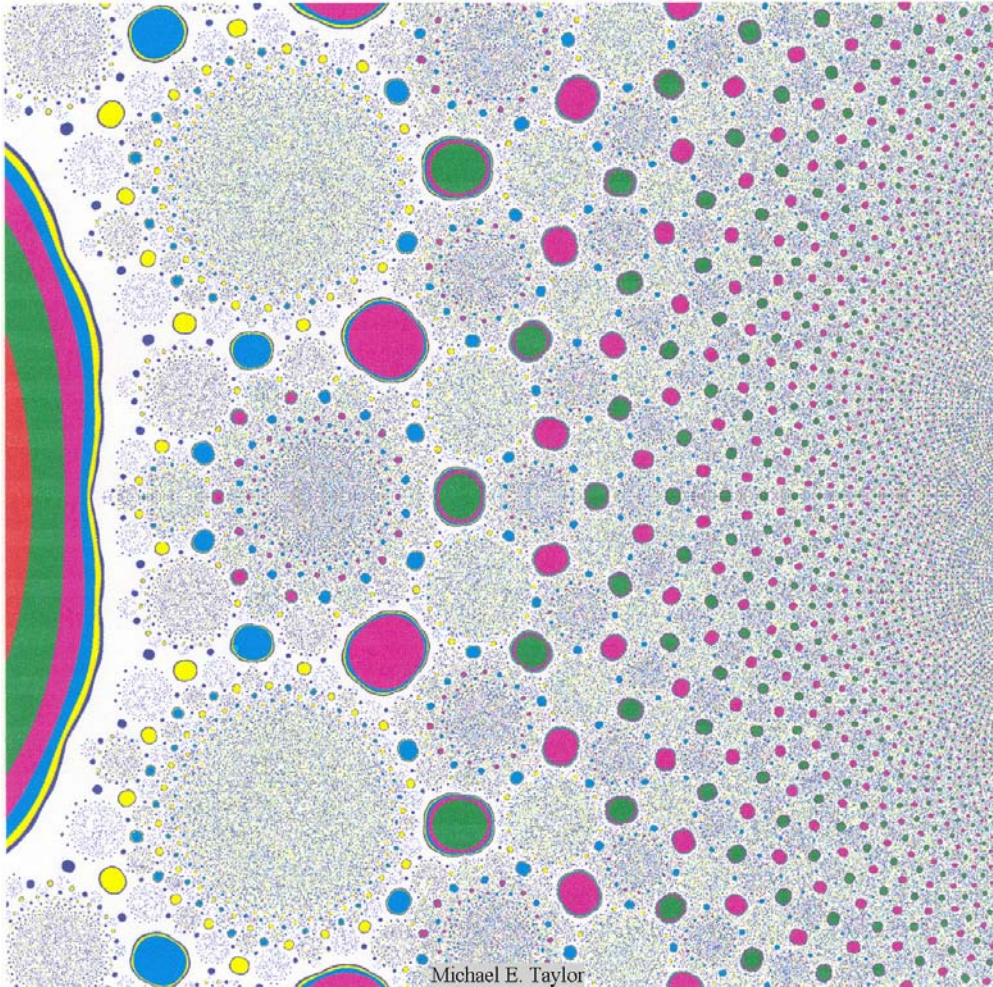


Figura 3.7: Los puntos de colores son parte del conjunto de Fatou y diferentes colores indican diferentes iteradas.

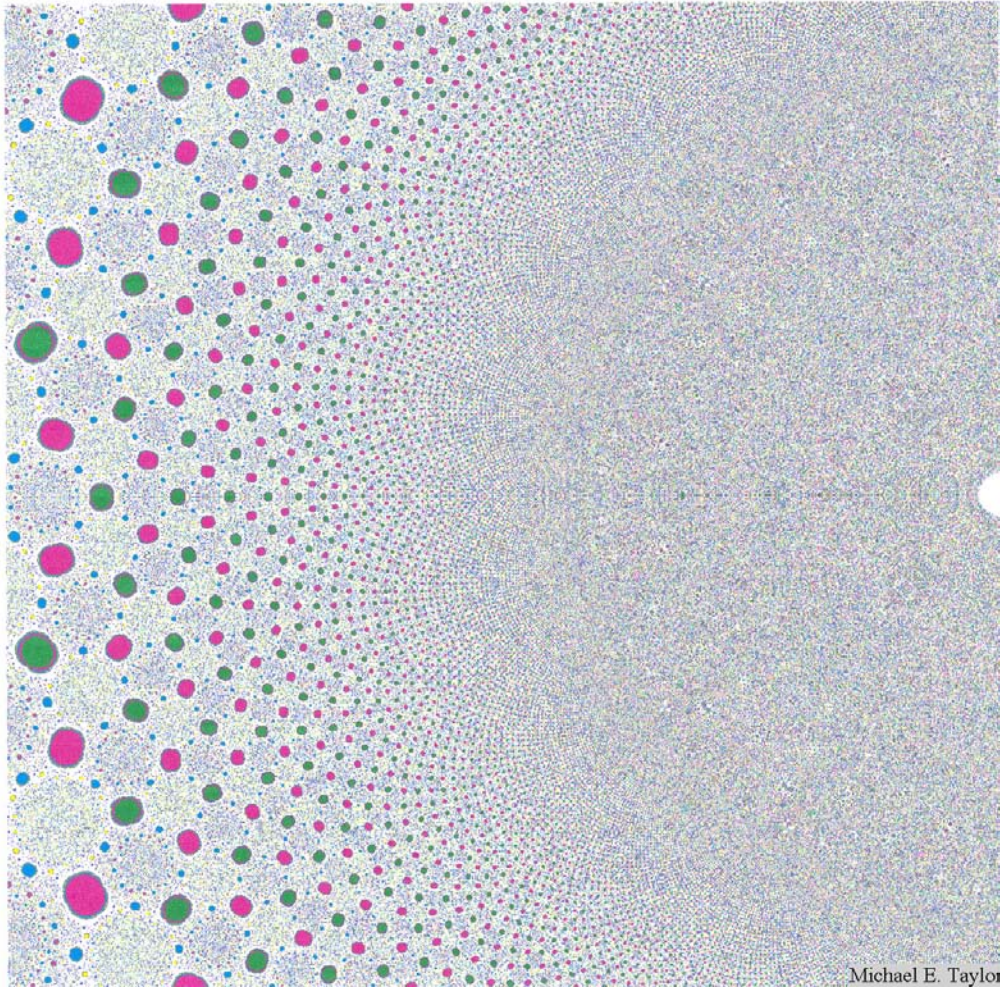


Figura 3.8:

Índice alfabético

- Anillo de Herman, 72
- Base de la latiz, 6
- Componente
 - atractora, 72
- Conjunto
 - de Fatou, 69
 - de Julia, 69
 - postcrítico, 71
 - singular, 71
- Cuenca de atracción, 72
- Curva
 - Curva elíptica real, 45
 - Curva elíptica, 45
- Disco de Siegel, 72
- Dominio
 - Böttcher, 72
 - Baker, 72
 - Leau, 72
 - Schröder, 72
- Función
 - Clase S, 71
 - meromorfa real, 46
 - periódica, 1
- zeta de Weierstrass, 37
- Grupo Modular, 14
- Latiz real, 15
- Latiz
 - cuadrada, 15
 - real, 46
 - rectangular real, 15
 - rombóica real, 15
 - triangular, 15
- Levantamiento, 28
- Orden, 18
- Periodo, 1
- Punto
 - atractor, 71
 - neutro, 71
 - periódico, 71
 - repulsor, 71
 - superatractor, 71
- Región de Dirichlet, 8
- Región fundamental primitiva, 14
- Latiz, 6

Paralelogramo fundamental, 8
Valor
 asintótico, 71

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V., (1979) *Complex Analysis* (tercera edición), McGraw-Hill.
- [2] Beardon, A. F., (1991) *The iteration of rational functions*, Berlin Heidelberg New York, Springer.
- [3] Bergweiler W. (1993) *Iteration of meromorphic functions*. Bull Amer Math Soc **29**: 151-188.
- [4] Devaney, R. L., (1986) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings.
- [5] Du Val, P. (1973) *Elliptic functions and elliptic curves*, Cambridge University Press.
- [6] Eremenko, A. E., Lyubich, M. Y. (1992), *Dynamical properties of some classes of entire functions*, A. Inst. Fourier (Grenoble) **42**: 989-1020.
- [7] Hawkins J., Koss L. (2002) *Ergodic properties and Julia sets of Weierstrass elliptic functions*, Monatsh. Math. 137, 273-300. Springer-Verlag.
- [8] Hawkins J., Koss L. (2003) *Parametrized dynamics of the weierstrass elliptic function*, Conformal geometry and dynamics, American Mathematical Society Volume 8, 1-35.

- [9] Hawkins J., Koss L. (2005), *Conectivity properties of julia sets of Weierstrass elliptic functions first final draft*, preprint.
- [10] Jones G., Singerman D. (1997) *Complex Functions: An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge: Univ Press
- [11] Baker I.N., Kotus J., Lü Y. (1991) Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. *Ergodic Theory Dyn Syst.* **11** 603-618.