UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos aspectos sobre Módulos τ-Plenos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR(A) EN CIENCIAS (Matemáticas)

P R E S E N T A

Marcela González Peláez

DIRECTOR(A) DE TESIS: Dr. José Ríos Montes

MÉXICO, D.F. Abril, 2008

A mi madre,
que me dio las bases y el
apoyo para llegar hasta donde estoy.

A mis hijos,
que han sido la fuerza que me
ha impulsado para seguir adelante.

A Javier,
por estar a mi lado
desde hace muchos años.

A la memoria de Mark L. Teply

Agradecimientos

Agradezco...

profundamente a mi director de tesis, el Dr. José Ríos Montes, por transmitirme parte de sus conocimientos, por sus ideas, por ser una guía para el desarrollo de este trabajo, por su apoyo, por su paciencia y, principalmente, por su amistad y afecto.

la valiosa aportación de ideas y sugerencias de los Doctores Jaime Castro y Robert Wisbauer, mismas que quedaron plasmadas en este trabajo.

a los Doctores Francisco Raggi, Bertha Tomé, Carlos Signoret, Beatriz Rumbos y Rogelio Fernández por el tiempo dedicado para la revisión de esta tesis, por sus correcciones, comentarios y sugerencias.

a mis amigos Carmen López, María Trigueros y Ramón Espinosa, que creyeron en mí y me animaron a seguir adelante con este proyecto.

a todos mis amigos y compañeros de trabajo, que han estado cerca de mi a lo largo de mi vida profesional, de los cuales siempre tengo algo que aprender.

al ITAM, por darme el apoyo para poder continuar con mi tesis. En especial, agradezco a las autoridades que fueron partícipes para que yo recibiera este apoyo: el Dr. Arturo Fernández, rector de la institución, el Dr. Enrique de Alba, Director General de la División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas, la Dra. Beatriz Rumbos, Jefa del Departamento Académico de Matemáticas y el Dr. Guillermo Pastor, Jefe Interino del Departamento Académico de Matemáticas.

Contenido

Introducción

Una de las herramientas más importantes para el estudio de anillos en la segunda mitad del siglo XX fue, sin duda, el álgebra homológica; ya que usando ésta se pudo obtener información sobre el anillo R a partir de la estructura de la categoría de R-módulos derechos asociada a R. Sin embargo, este método tiene la limitante de que esta categoría sólo puede proporcionar información sobre propiedades de anillos que sean invariantes bajo equivalencias de Morita. En épocas más recientes, el estudio de la teoría de anillos y módulos se ha visto enriquecido asociando a la categoría de R-módulos derechos el marco de teorías de torsión hereditarias de tal forma que a través de sus propiedades y elementos se han podido determinar propiedades sobre la estructura interna del anillo y su categoría de módulos. Algunos ejemplos en los que se han obtenido caracterizaciones de distintos anillos en términos de estas teorías de torsión se pueden ver en [3, 6, 7, 9, 13, 22, 24]

Sea R un anillo asociativo con uno. Mod-R denota la categoría de R-módulos derechos y R-tors, el marco de todas las teorías de torsión hereditarias sobre Mod-R.

Una herramienta más para el análisis de la categoría Mod-R y por ende, para obtener información sobre el anillo R, la proporciona el estudio de derivadas sobre R-tors [10]. Algunas derivadas estratifican la categoría Mod-R y definen una dimensión asociada respecto a una teoría de torsión $\tau \in R$-tors; un ejemplo de esto es la τ-dimensión de Gabriel [9, Capítulo 51]. Otras dimensiones, como la dimensión de Cantor-Bendixson en [11, 17], la P-dimensión en [8], la dimensión atómica en [6] y la dimensión decisiva en [7], entre otras, han sido estudiadas y algunas de ellas comparadas entre sí. Así mismo, se ha obtenido información sobre el anillo a través de su dimensión, en caso de existir.

En esta dirección, en el presente trabajo se define una dimensión que se obtiene a partir de una teoría de torsión $\tau \in R$-tors, por medio de una filtración que se construye utilizando módulos plenos respecto a ciertas teorías de torsión. Se estudia su relación con la filtración de Cantor-Bendixson, correspondiente a la derivada del mismo nombre, y la filtración de Gabriel. Antes de llegar al análisis de cuándo existe la dimensión τ-plena para un R-

módulo derecho, se estudian ciertas propiedades de los módulos τ-plenos. Para $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno, se analiza el comportamiento de los submódulos totalmente invariantes N tales que M/N es libre de τ-torsión. Con la condición adicional de que M sea absolutamente τ-puro [9], se establece un isomorfismo de retículas entre el conjunto de estos submódulos y una subretícula de R-tors determinada por τ y M. También se revisa la estructura interna de tales módulos.

Cabe mencionar que los módulos τ-plenos fueron estudiados con anterioridad por Ann K. Boyle [4], William George Lau [16], Mark L. Teply [19], Peter L. Vachuska [20], Jonathan S. Golan [9], Julius M. Zelmanowitz [25, 26, 27] y Robert Wisbauer [22, 24], los dos últimos los estudian bajo el nombre de módulos poliformes.

Este trabajo esta conformado por cuatro capítulos. En el primero se dan las notaciones y terminología que se van a utilizar. Se mencionan los conceptos de retícula y teoría de torsión hereditaria, así como algunos resultados relacionados con éstos que es conveniente tener presente en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se define el concepto de R-módulo τ-pleno para una teoría de torsión hereditaria τ, se ven sus propiedades principales y algunos ejemplos. Se caracteriza a los módulos plenos (módulos que son τ-plenos para alguna teoría de torsión τ). También se dan condiciones necesarias y suficientes para que un módulo pleno sea τ-pleno en términos de la ubicación de la teoría de torsión τ dentro de la retícula R-tors. Así mismo, se dan condiciones necesarias y suficientes respecto a la ubicación de una teoría de torsión τ en la retícula R-tors para que un módulo sea absolutamente τ-puro.

En el capítulo tres se prueban los principales resultados respecto a la estructura reticular del intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, para un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro M, y respecto a la estructura interna de tales módulos. Se prueba que para una teoría de torsión hereditaria τ y un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro M, existe un isomorfismo de retículas completas entre una subretícula de R-tors determinada por τ y M, $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, y los submódulos totalmente invariantes de M cuyo cociente es libre de τ-torsión, $Sub_{P_\tau TI}(M)$. Se prueba que estas retículas forman un Álgebra de Boole. También se dan algunas descomposiciones de la teoría de torsión cogenerada por un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, $\chi(M)$, que están ligadas al hecho de que la subretícula $[\tau, \tau$ _ $\xi(M)]$ sea atómica y la forma que tengan sus átomos. Con base en estos resultados, se ve la estructura de los módulos τ-plenos y absolutamente τ-puros.

Por último, en el capítulo cuatro, para una teoría de torsión τ 2 R-tors, se de?ne la τ-F-?ltración que origina la dimensión plena. Se introduce el concepto de τ-B-módulo y se prueban algunas propiedades de estos módulos. Se de?ne la τ-B-?ltración y se prueba que ésta coincide con la ?ltración de Cantor-Bendixson en R-tors, por lo que da lugar a la dimensión de Cantor-Bendixson. Se hace una comparación de estas dimensiones y se ve su relación con la ?ltración de Gabriel. Se analiza bajo qué condiciones se puede establecer una equivalencia entre éstas. Se dan ejemplos en los que se observan las diferencias entre ellas.

Capítulo 1
Conceptos preliminares y notación

A lo largo de este trabajo, R es un anillo asociativo con uno, no necesariamente conmutativo. Id-R denota el conjunto de ideales derechos de R. Mod-R se refiere a la categoría de R-módulos derechos unitarios. Si $M, N \in$ Mod-R, $N \leq M$ $(N < M)$ indica que N es un submódulo de M (N es un submódulo propio de M). Se señala que N es un submódulo esencial de M usando la notación $N \underset{es}{\leq} M$. Si $M, N \in$ Mod-R, el conjunto de R-homomorfismos de M en N, también llamados R-morfismos de M en N o simplemente morfismos cuando no haya confusión sobre el anillo R, se denota por $Hom_R(M, N)$ y el de R-endomorfismos de M por $End_R(M)$. Si $f \in Hom_R(M, N)$, entonces Nuc(f) denota al núcleo de f y la imagen de f se escribe Im(f). Si $N \leq M$ y $m \in M$, $(N : m)$ denota al conjunto $\{r \in R \mid mr \in N\}$, que es un ideal derecho de R; así, el anulador de M se escribe $(0 : M) = \{r \in R \mid mr = 0, \forall m \in M\}$ y para cada $m \in M$ su anulador es $(0 : m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$.

Si se escribe $X \subseteq Y$, $(X \subset Y)$ significa que X es un subconjunto o una subclase de Y (X es un subconjunto propio o una subclase propia de Y), dependiendo del tipo de objetos que sean X y Y.

La cápsula inyectiva de un R-módulo derecho M se denotará por $E(M)$.

1.1 Retículas

Para el desarrollo de esta investigación es importante tener presente la terminología y conceptos sobre retículas por lo que a continuación se mencionan brevemente. Una *retícula* es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \preccurlyeq)$ en el que cada par de elementos $a, b \in L$ tiene un *supremo*, $a \vee b$, y un *ínfimo*, $a \wedge b$. Si $(L, \preccurlyeq)$ es una retícula y $a, b \in L$ son elementos tales que $a \preccurlyeq b$, el intervalo de a a b,

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$$

es una *subretícula* de L, esto es, un subconjunto de L que es una retícula con la misma relación $\preccurlyeq$ que hay en L. Una *retícula completa* es una retícula $(L, \preccurlyeq)$ en la que cada subconjunto S de L tiene un *supremo*, $\bigvee S = \bigvee_{s \in S} s$, y un *ínfimo*, $\bigwedge S = \bigwedge_{s \in S} s$. En una retícula completa hay un *elemento mayor*: $1 = \bigvee L$ y un *elemento menor*: $0 = \bigwedge L$. Una retícula $(L, \preccurlyeq)$, no necesariamente completa, en la que haya un elemento menor 0 y un elemento mayor 1 se denotará $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$.

Sean $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ y $(L', \preccurlyeq, 0', 1')$ dos retículas completas. Una función $f : L \to L'$ es un *morfismo* de retículas completas si para cada subconjunto S de L

$$f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f(S) \quad \text{y} \quad f\left(\bigwedge S\right) = \bigwedge f(S).$$

Un morfismo de retículas completas preserva el orden, esto es, si $a, b \in L$ son dos elementos tales que $a \preccurlyeq b$, entonces $f(a) \preccurlyeq f(b)$. Un morfismo de retículas completas $f : L \to L'$ es un *isomorfismo* de retículas completas si f es biyectiva; en este caso f^{-1} también es un morfismo de retículas completas.

Una *retícula* $(L, \preccurlyeq)$ es *modular* si $\forall\, a, b, x \in L$ tales que $a \preccurlyeq b$, se da la igualdad:

$$(x \wedge b) \vee a = (x \vee a) \wedge b.$$

Sea R un anillo, $M \in$ Mod-R y S_M el conjunto de submódulos de M. $(\mathsf{S}_M, \subseteq, 0, M)$ constituye una retícula modular completa.

En una retícula $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$, un elemento $a \in L$ tiene un *complemento* si existe $c \in L$ tal que $a \wedge c = 0$ y $a \vee c = 1$. Si $a, b \in L$ son dos elementos tales que $a \preccurlyeq b$ y $x \in [a, b]$, un *complemento relativo* de x en $[a, b]$ es un elemento $y \in [a, b]$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$. La retícula $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ es *complementada* si todo elemento tiene complemento.

Una retícula $(L, \preccurlyeq)$ es *distributiva* si $\forall\, a, b, c \in L$,

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

o, equivalentemente,

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

En una retícula distributiva $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ si un elemento tiene complemento, éste es único; cuando esto suceda el complemento de un elemento $a \in L$ se denotará por a^c.

Proposición 1 *Si $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ es una retícula distributiva y $x \in L$ tiene complemento, entonces x tiene complemento relativo en cada intervalo que lo contenga.*

Demostración.

Sea $x \in [a, b]$, entonces $x' = (x^c \vee a) \wedge b$ es un complemento relativo de x en $[a, b]$.
$\blacksquare$

Una retícula distributiva complementada $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ se llama *Álgebra de Boole* o simplemente se dice que es una *Retícula de Boole*. En una Álgebra de Boole, cada elemento tiene un solo complemento y valen las Leyes de De Morgan, esto es, $\forall\, a, b \in L$,

$$\begin{aligned} (a \wedge b)^c &= a^c \vee b^c \\ \text{y} \quad (a \vee b)^c &= a^c \wedge b^c. \end{aligned}$$

Observación 1 *Si $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ es un Álgebra de Boole y $a, b \in L$ son tales que $a \prec b$, entonces $[a, b]$ es un Álgebra de Boole.*

En una retícula distributiva $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ el complemento a^c de un elemento $a \in L$ es el mayor elemento $x \in L$ tal que $a \wedge x = 0$. En forma más general, si $(L, \preccurlyeq, 0, 1)$ es una retícula modular, un elemento a^* es un *pseudocomplemento* de $a \in L$ si $a \wedge a^* = 0$ y a^* es máximo con esta propiedad, es decir, $x \succ a^*$ implica $a \wedge x \neq 0$. Si la retícula es distributiva un elemento puede tener a lo más un pseudocomplemento. Una *retícula pseudocomplementada* es aquella en la que cada elemento tiene un pseudocomplemento. Toda retícula modular complementada es pseudocomplementada.

Sea $(L, \leq, 0, 1)$ una retícula modular. Un elemento $a \in L$ es *esencial* si $a \wedge c \neq 0$ para cada $c \neq 0$ en L. Si c es un pseudocomplemento de a en L, entonces $a \vee c$ es esencial en L.

Una retícula completa $(L, \leq, 0, 1)$ es un *marco* –o *retícula Brouweriana* o *álgebra de Heyting*– si $\forall \phi \neq U \subseteq L$ y $\forall a \in L$, $a \wedge (\vee U) = \vee (a \wedge U) = \vee \{a \wedge u \mid u \in U\}$, esto es, si se satisface esta propiedad distributiva infinita.

Sea $(L, \leq, 0, 1)$ una retícula. Un elemento $0 \neq a \in L$ es un *átomo* si para $b \in L$ tal que $b < a$ se tiene que $b = 0$. Un *coátomo* es el concepto dual de átomo, es decir, es un elemento $1 \neq c \in L$ tal que si $b \in L$ es tal que $c < b$ se tiene que $b = 1$. Sean $a, b \in L$ con $a \leq b$. Un elemento $x \in [a, b]$ es un *átomo relativo a* $[a, b]$ si $a \leq y < x$ implica $y = a$; y $x \in [a, b]$ es un *coátomo relativo a* $[a, b]$ si $x < y \leq b$ implica $y = b$. La retícula L es *atómica* si $\forall x \in L,\ x \neq 0$, existe un átomo $a \leq x$. L es *localmente atómica* si cada elemento de L es el supremo de un conjunto de átomos, es decir, si $\forall x \in L$ existe $\{a_i \in L \mid a_i$ es átomo, $i \in I\}$ tal que $x = \bigvee_{i \in I} a_i$.

Proposición 2 *Sea $(L, \leq, 0, 1)$ una retícula de Boole completa. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *L es atómica.*

(2) *L es localmente atómica.*

(3) *Existe un conjunto de átomos $\{a_i\}_{i \in I}$ en L tal que $1 = \bigvee_{i \in I} a_i$.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sea $x \in L$ y sea $\mathcal{A} = \{a_\alpha \in L \mid a_\alpha$ es un átomo$\}$. Por (1), el conjunto $\{a_{\alpha_i} \in \mathcal{A} \mid a_{\alpha_i} \leq x\}$ no es vacío; se probará que $x = \vee \{a_{\alpha_i} \in \mathcal{A} \mid a_{\alpha_i} \leq x\}$. Para esto se verá que si $y = \vee \{a_{\alpha_i} \in \mathcal{A} \mid a_{\alpha_i} \leq x\}$, entonces x y y tienen el mismo complemento en L. Sea $z = \vee \left\{ a_{\alpha_j} \in \mathcal{A} \mid a_{\alpha_j} \nleq x \right\}$; entonces $x \wedge z = x \wedge (\bigvee_{a_{\alpha_j} \nleq x} a_{\alpha_j}) = \bigvee_{a_{\alpha_j} \nleq x} \left(x \wedge a_{\alpha_j} \right) = 0$ y $y \wedge z = (\bigvee_{a_{\alpha_i} \leq x} a_{\alpha_i}) \wedge (\bigvee_{a_{\alpha_j} \nleq x} a_{\alpha_j}) = \bigvee_{a_{\alpha_i} \leq x;\ a_{\alpha_j} \nleq x} \left(a_{\alpha_i} \wedge a_{\alpha_j} \right) =$*

0. *Además,* $\vee A = 1$ *ya que en caso contrario* $(\vee A)^c \neq 0$ *y, como* L *es atómica, existiría* $a_\alpha \in A$ *tal que* $a_\alpha \leq (\vee A)^c$, *lo cual no es posible; de aquí que* $(x \vee z)^c = 0$ *y* $(y \vee z)^c = y^c \wedge z^c = 0$ *implica que* $x \vee z = 1 = y \vee z$, *de donde,* z *es complemento de* x *y de* y. *Por lo tanto,* $x = y$.

$(2) \Rightarrow (3)$ *Es inmediato.*

$(3) \Rightarrow (1)$ *Sea* $x \in L - \{0\}$, *entonces* $x = x \wedge 1 = x \wedge (\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge a_i)$, *con* $a_i \in A$. *Como* $x \neq 0$, $x \wedge a_i \neq 0$ *para alguna* $i \in I$ *de donde* $x \wedge a_i = a_i$; *por lo tanto* $a_i \leq x$. $\blacksquare$

Mayores detalles y otros conceptos relacionados con retículas se encuentran en [5] y [14].

1.2 Teorías de torsión hereditarias

Una relación de equivalencia en la clase de los R-módulos derechos inyectivos es la siguiente: dos R-módulos inyectivos E_1 y E_2 son equivalentes si existe un monomorfismo de cada uno de ellos en un producto directo de copias del otro. De aquí resulta que cada uno de ellos es isomorfo a un sumando directo de un producto directo de copias del otro. Esta relación de equivalencia también se puede describir según la siguiente proposición.

Proposición 3 *Los* R*-módulos inyectivos* E_1 *y* E_2 *son equivalentes si y sólo si la clase de los* R*-módulos derechos* M *que satisfacen* $Hom_R(M, E_1) = 0$ *coincide con la clase de los* R*-módulos derechos* M *que satisfacen* $Hom_R(M, E_2) = 0$.

Definición 1 *Una clase de equivalencia de* R*-módulos inyectivos se llama una teoría de torsión hereditaria sobre Mod-*R.

La clase de equivalencia de (0) se llama la *teoría de torsión impropia* sobre Mod-R y se denota por χ. La clase de equivalencia de todos los cogeneradores inyectivos de Mod-R se llama la *teoría de torsión trivial* sobre Mod-R y se denota por ξ. Para cualquier $M \in \text{Mod}-R$, la clase de equivalencia de $E(M)$ se denota por $\chi(M)$.

Nota: Cuando en este trabajo se hable de una teoría de torsión, se entenderá que se trata de una teoría de torsión hereditaria. R-tors denotará la clase de todas las teorías de torsión hereditarias, que de hecho es un conjunto como se verá más adelante.

Definición 2 *Sea $\tau \in R$-tors y sean $M, N \in$ Mod-R.*

Se dice que M es de τ-torsión si $Hom_R(M, E) = 0$ para un $E \in \tau$, y de hecho para cualquier elemento de τ. La clase de todos los R-módulos derechos de τ-torsión se denotará por T_τ.

Se dice que N es libre de τ-torsión si existe un monomorfismo $N \hookrightarrow E$ para algún $E \in \tau$. La clase de todos los R-módulos derechos libres de τ-torsión se denotará por F_τ.

Observación 2 *Si $\sigma, \tau \in R$-tors son distintas, entonces $\mathsf{T}_\sigma \neq \mathsf{T}_\tau$ y $\mathsf{F}_\sigma \neq \mathsf{F}_\tau$.*

De las definiciones de ξ, χ y $\chi(M)$ se deduce que $\mathsf{T}_\xi = \{0\}$, $\mathsf{F}_\xi =$ Mod-R, $\mathsf{T}_\chi =$ Mod-R, $\mathsf{F}_\chi = \{0\}$, y que $M \in \mathsf{F}_{\chi(M)}$.

Proposición 4 *Sea C una clase no vacía de R-módulos derechos.*

(1) *$\mathsf{C} = \mathsf{T}_\tau$ para alguna $\tau \in R$-tors si y sólo si C es cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones.*

(2) *$\mathsf{C} = \mathsf{F}_\tau$ para alguna $\tau \in R$-tors si y sólo si C es cerrada bajo submódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y extensiones.*

Dada $\tau \in R$-tors, en la siguiente proposición se enuncia una forma conveniente de describir a los módulos de τ-torsión y a los módulos libres de τ-torsión.

Proposición 5 *Si $\tau \in R$-tors, entonces:*

(1) $M \in \mathbb{T}_\tau$ *si y sólo si* $Hom_R(M, E(N)) = 0, \forall N \in \mathbb{F}_\tau$.

(2) $N \in \mathbb{F}_\tau$ *si y sólo si* $Hom_R(M, E(N)) = 0, \forall M \in \mathbb{T}_\tau$.

Se puede dar un orden parcial en R-tors considerando que para $\sigma, \tau \in R$-tors, $\tau \leq \sigma$ si se cumplen las condiciones de contención equivalentes que se dan en la siguiente proposición. En este caso se dice que τ es una *especialización* de σ o que σ es una *generalización* de τ. Se denota por $gen(\tau)$ al conjunto de generalizaciones de τ.

Proposición 6 *Sean $\sigma, \tau \in R$-tors. Son equivalentes las siguientes condiciones.*

(1) *Cada R-módulo derecho de τ-torsión es de σ-torsión, esto es,* $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$.

(2) *Cada R-módulo derecho libre de σ-torsión es libre de τ-torsión, es decir,* $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$.

Observación 3

(1) *Para cualquier $\tau \in R$-tors se tiene que $\xi \leq \tau \leq \chi$.*

(2) *Para cualquier $M \in$ Mod-R, $\chi(M) \geq \tau$ para cada $\tau \in R$-tors donde $M \in \mathbb{F}_\tau$.*

Con este orden parcial R-tors constituye un marco donde el ínfimo de cualquier subconjunto no vacío U de R-tors es la teoría de torsión, denotada por $\wedge U$, cuya clase de R-módulos derechos de $\wedge U$-torsión está dada por $\mathbb{T}_{\wedge U} = \{M \in \text{Mod-}R \mid M \in \mathbb{T}_\tau, \forall \tau \in U\}$, y el supremo de U es la teoría de torsión, denotada por $\vee U$, cuya clase de R-módulos derechos libres de $\vee U$-torsión está dada por $\mathbb{F}_{\vee U} = \{N \in \text{Mod-}R \mid N \in \mathbb{F}_\tau, \forall \tau \in U\}$.

A continuación se dan algunos resultados importantes relacionados con el supremo y el ínfimo de subconjuntos de R-tors. Se verá que algunos de ellos dan lugar a teorías de torsión que son de gran interés.

Proposición 7 *Sea U un subconjunto no vacío de R-tors y sea $E_\tau \in \tau$, para cada $\tau \in U$. Si $E = \prod_{\tau \in U} E_\tau$, entonces $E \in \wedge U$.*

Demostración.

Como $\wedge U \leq \tau$, $\forall \tau \in U$ y $E_\tau \in \mathbb{F}_\tau$, entonces $E_\tau \in \mathbb{F}_{\wedge U}$, lo cual implica que $\wedge U \leq \chi(E)$.

Por otra parte, si $M \in \mathbb{T}_{\chi(E)}$ entonces $Hom_R(M, E) = 0$, lo cual implica que $Hom_R(M, E_\tau) = 0\ \forall \tau \in U$; de aquí que $M \in \mathbb{T}_\tau\ \forall \tau \in U$ y por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{\wedge U}$. De esto se deduce que $\chi(E) \leq \wedge U$. Así se tiene que $\chi(E) = \wedge U$, de donde se concluye que $E \in \wedge U$, más aún, $\wedge U$ es la clase de equivalencia de E. $\blacksquare$

También es posible describir la teoría de torsión $\chi(M)$ para $M \in$ Mod-R como el supremo de un subconjunto de R-tors como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 8 *Sea $M \in$ Mod-R, entonces $\chi(M) = \vee \{\tau \in R\text{-tors} \mid M \in \mathbb{F}_\tau\}$.*

Demostración.

Sea $U_M = \{\tau \in R\text{-tors} \mid M \in \mathbb{F}_\tau\}$. Como $M \in \mathbb{F}_\tau$, para cada $\tau \in U_M$ se tiene que $M \in \mathbb{F}_{\vee U_M}$, de donde $\vee U_M \leq \chi(M)$. Además, $E(M) \in \mathbb{F}_{\vee U_M}$ implica que existe $E' \in \vee U_M$ y un monomorfismo $E(M) \hookrightarrow E'$; de aquí que $E(M) \cong E' \in \vee U_M$. Por lo tanto, $\chi(M) = \vee U_M$. $\blacksquare$

$\chi(M)$ se llama *la teoría de torsión cogenerada por M*, la cual es la mayor teoría de torsión donde M es libre de torsión. Es inmediato que $\chi(0) = \vee \{R\text{-tors}\} = \chi$.

Análogamente se puede considerar para cada R-módulo derecho M la menor teoría de torsión tal que M es de torsión. Ésta se denota por $\xi(M)$ y se describe como

$$\xi(M) = \bigwedge \{\tau \in R\text{-tors} \mid M \in \mathcal{T}_\tau\}.$$

El conjunto es no vacío puesto que $M \in \mathcal{T}_\chi$. La teoría de torsión $\xi(M)$ se llama *la teoría de torsión generada por M.* Se deduce fácilmente que $\xi(0) = \bigwedge\{R\text{-tors}\} = \xi$. La siguiente proposición muestra un elemento de la clase $\xi(M)$.

Proposición 9 *Sea $M \in$ Mod-R y sea $I = \{\tau \in R\text{-tors} \mid M \in \mathcal{T}_\tau\}$. Si para cada $\tau \in I$, E_τ es un R-módulo inyectivo tal que $E_\tau \in \tau$, entonces la teoría de torsión $\xi(M)$ es la clase de equivalencia de $\prod_{\tau \in I} E_\tau$.*

Demostración.

Por la Proposición 7, $\chi(\prod_{\tau \in I} E_\tau) = \bigwedge\{\tau \in R\text{-tors} \mid M \in \mathcal{T}_\tau\}$, *de aquí que* $\xi(M) = \bigwedge I = \chi(\prod_{\tau \in I} E_\tau)$. $\blacksquare$

Sea $\mathcal{C} \subseteq$ Mod-R una subclase no vacía. Se denota por $\xi(\mathcal{C})$ a la teoría de torsión $\bigvee\{\xi(C) \mid C$ es un elemento de $\mathcal{C}\}$ y por $\chi(\mathcal{C})$ a la teoría de torsión $\bigwedge\{\chi(C) \mid C$ es un elemento de $\mathcal{C}\}$.

Proposición 10 *Si $\mathcal{C} \subseteq$ Mod-R es una subclase no vacía, entonces*

(a) *$\xi(\mathcal{C})$ es la menor teoría de torsión tal que todo elemento C en $\mathcal{C}$ es de torsión; y se llama la teoría de torsión generada por $\mathcal{C}$.*

(b) *$\chi(\mathcal{C})$ es la mayor teoría de torsión tal que todo elemento C en $\mathcal{C}$ es libre de torsión; y se llama la teoría de torsión cogenerada por $\mathcal{C}$.*

Demostración.

(a) *Sea $S = \{\xi(C) \mid C$ es un elemento de $\mathcal{C}\}$. Como $C \in \mathcal{T}_{\xi(C)}$, entonces $C \in \mathcal{T}_{\bigvee S} = \mathcal{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ para cualquier elemento C en $\mathcal{C}$. Por otra parte, si $\sigma \in R$-tors es tal que $C \in \mathcal{T}_\sigma$ para cualquier elemento C en $\mathcal{C}$, entonces $\xi(C) \leq \sigma$ $\forall C \in \mathcal{C}$, de donde $\bigvee S \leq \sigma$, esto es, $\xi(\mathcal{C}) \leq \sigma$.*

(b) *Sea* $X = \{\chi(C) \mid C$ *es un elemento de* $\mathcal{C}\}$. *Como* $C \in \mathbb{F}_{\chi(C)}$, *entonces* $C \in \mathbb{F}_{\wedge X} = \mathbb{F}_{\chi(\mathcal{C})}$ *para cualquier elemento* C *en* $\mathcal{C}$. *Ahora, sea* $\sigma \in R$*-tors tal que* $C \in \mathbb{F}_{\sigma}$ *para cualquier elemento* C *en* $\mathcal{C}$. *Entonces* $\sigma \leq \chi(C)\ \forall C \in \mathcal{C}$, *de donde* $\sigma \leq \wedge X$, *esto es,* $\sigma \leq \chi(\mathcal{C})$. $\blacksquare$

Usando la Proposición 5 se puede ver que para la teoría de torsión $\chi(\mathcal{C})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{\chi(\mathcal{C})} &= \{M \in \text{Mod-}R \mid Hom_R(M, E(C)) = 0, \forall C \in \mathcal{C}\} \quad \text{y} \\
\mathbb{F}_{\chi(\mathcal{C})} &= \left\{N \in \text{Mod-}R \mid Hom_R(M, N) = 0, \forall M \in \mathbb{T}_{\chi(\mathcal{C})}\right\};
\end{aligned}$$

y para la teoría de torsión $\xi(\mathcal{C})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})} &= \{N \in \text{Mod-}R \mid Hom_R(C, E(N)) = 0, \forall C \in \mathcal{C}\} \quad \text{y} \\
\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})} &= \left\{M \in \text{Mod-}R \mid Hom_R(M, N) = 0, \forall N \in \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}\right\}.
\end{aligned}$$

Los resultados que se señalan en la siguiente observación serán de gran utilidad más adelante.

Observación 4

(1) *Sean* $M, N \in$ *Mod-*R. *Si* $N \leq_{es} M$, *entonces* $\chi(N) = \chi(M)$.

(2) *Sean* $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq$ *Mod-*R. *Entonces* $\chi\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigwedge_{i \in I} \chi(M_i)$.

(3) *Sean* $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq$ *Mod-*R. *Entonces* $\xi\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigvee_{i \in I} \xi(M_i)$.

También se tiene que a cada teoría de torsión $\tau \in R$-tors le corresponde un prerradical –subfuntor de la identidad– denotado por $t_\tau(\ )$, tal que para todo $M \in$ Mod-R, $t_\tau(M / t_\tau(M)) = 0$ –es decir, $t_\tau(\ )$ es radical– y $\forall M, N \in$ Mod-R con $N \leq M$, $t_\tau(N) = N \cap t_\tau(M)$ –es decir, $t_\tau(\ )$ es exacto izquierdo–; y recíprocamente, a cada radical exacto izquierdo r, le corresponde una teoría de torsión hereditaria $\tau(r)$. Estas correspondencias son biyectivas y están dadas de la siguiente manera:

Si $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R, sea $t_\tau(M) = \sum \{N \leq M \mid N \in \mathcal{T}_\tau\}$. Entonces $t_\tau(M) \in \mathcal{T}_\tau$ por ser un cociente de un módulo de torsión y está únicamente determinado como el mayor submódulo de M de τ-torsión. Además, $t_\tau(\ )$ es un prerradical con las características mencionadas. Al submódulo $t_\tau(M)$ se le llama la parte de τ-torsión de M o el submódulo de τ-torsión de M.

Recíprocamente, si r : Mod-$R \rightarrow$ Mod-R es un prerradical que es radical exacto izquierdo, entonces $\mathcal{C}_r = \{M \in \text{Mod-}R \mid r(M) = M\}$ es una clase de R-módulos derechos cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones, por lo que es una clase de $\tau(r)$-torsión para una $\tau(r) \in R$-tors, es decir, $\mathcal{C}_r = \mathcal{T}_{\tau(r)}$ donde los módulos libres de $\tau(r)$-torsión correspondientes se pueden describir como $\mathcal{F}_{\tau(r)} = \{N \in \text{Mod-}R \mid r(N) = 0\}$.

Observación 5 *Si E es un R-módulo derecho inyectivo, entonces para cada $M \in$ Mod-R, $\sum \{N \leq M \mid Hom_R(N, E) = 0\} = \bigcap_{f \in Hom_R(M,E)} Nuc(f)$; de aquí se tiene que $t_\tau(M)$ también se puede obtener como $\bigcap_{f \in Hom_R(M,E)} Nuc(f)$ con E un módulo fijo en τ.*

Ahora se verá que R-tors está en correspondencia biyectiva con el conjunto de filtros de Gabriel de R. Éstos son subconjuntos de ideales de R que cumplen las condiciones de la siguiente definición.

Definición 3 *Un subconjunto no vacío $\mathcal{L}$ de ideales derechos de R que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *Si $I \in \mathcal{L}$ y $r \in R$, entonces $(I : r) \in \mathcal{L}$.*

(2) *Si I es un ideal derecho de R para el cual existe $H \in \mathcal{L}$ con la propiedad de que $(I : x) \in \mathcal{L}$, $\forall x \in H$, entonces $I \in \mathcal{L}$.*

se llama Filtro de Gabriel.

Para ver esta correspondencia se considera el concepto de submódulo τ-denso para una teoría de torsión $\tau \in R$-tors.

Definición 4 *Sea $\tau \in R$-tors y sean $M, N \in$ Mod-R tales que $N \leq M$. Se dice que N es τ-denso en M si $M/N \in \mathbb{T}_\tau$.*

Se denota la familia de todos los submódulos τ-densos de un R-módulo derecho M por $\mathbb{L}_\tau(M)$.

Proposición 11 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R.*

(1) *Si $N \in \mathbb{L}_\tau(M)$ y $N \leq N' \leq M$, entonces $N' \in \mathbb{L}_\tau(M)$.*

(2) *Si $N \in \mathbb{L}_\tau(M)$, entonces $(N : m) \in \mathbb{L}_\tau(R)$, $\forall m \in M$.*

(3) *Si $N, N' \leq M$ son tales que $N' \in \mathbb{L}_\tau(M)$ y $(N : x) \in \mathbb{L}_\tau(R)$, $\forall x \in N'$, entonces $N \in \mathbb{L}_\tau(M)$.*

Demostración.

(1) *$N \leq N'$ implica que existe un epimorfismo $M/N \twoheadrightarrow M/N'$. Como $M/N \in \mathbb{T}_\tau$, se tiene que $M/N' \in \mathbb{T}_\tau$, de donde $N' \in \mathbb{L}_\tau(M)$.*

(2) *Sea $m \in M$. Si $m \in N$, entonces $(N : m) = R \in \mathbb{L}_\tau(R)$. Si $m \in M - N$, el epimorfismo $R \overset{f}{\twoheadrightarrow} (m + N)R$ definido por $f(r) = mr + N$ tiene por núcleo $(N : m)$; de aquí que $R/(N : m) \cong (mR + N)/N \subseteq M/N \in \mathbb{T}_\tau$. Por lo tanto, $(N : m) \in \mathbb{L}_\tau(R)$.*

(3) *Como $N' \leq N' + N$, por (1) $N' + N \in \mathbb{L}_\tau(M)$, esto es, $M/(N' + N) \in \mathbb{T}_\tau$.*

Por otra parte, si $x \in N'$ se tiene el epimorfismo $R \overset{f}{\twoheadrightarrow} (xR + N)/N$ definido por $f(r) = xr + N$ donde Nuc$(f) = (N : x) \in \mathbb{L}_\tau(R)$. De aquí se obtiene que $(xR + N)/N \in \mathbb{T}_\tau$. Como $(N' + N)/N = \sum_{x \in N'} (xR + N)/N$ se deduce que $(N' + N)/N \in \mathbb{T}_\tau$. Así, considerando que son de τ-torsión los extremos de la sucesión exacta

$$0 \to (N' + N)/N \to M/N \to M/(N' + N) \to 0$$

se puede concluir que $M/N \in \mathcal{T}_\tau$, *esto es,* $N \in \mathcal{L}_\tau(M)$. $\blacksquare$

Corolario 12 *Si* $\tau \in R$*-tors, entonces* $\mathcal{L}_\tau(R)$ *es un filtro de Gabriel.*

Por otra parte, como consecuencia de las propiedades que caracterizan a un filtro de Gabriel se tiene la siguiente proposición.

Proposición 13 *Si* $\mathcal{L}$ *es un filtro de Gabriel en* R, *se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $I \in \mathcal{L}$ *y* J *es un ideal derecho de* R *que contiene a* I, *entonces* $J \in \mathcal{L}$.

(ii) *Si* $I, J \in \mathcal{L}$, *entonces* $I \cap J \in \mathcal{L}$.

(iii) *Si* $I, J \in \mathcal{L}$, *entonces* $IJ \in \mathcal{L}$.

Ahora, considerando el Corolario 12 y la siguiente proposición se ve cómo se puede establecer una biyección entre R-tors y el conjunto de filtros de Gabriel de R; de esta forma se concluye que R-tors es un conjunto.

Proposición 14 *Si* $\mathcal{L}$ *es un filtro de Gabriel de ideales derechos de* R, *entonces existe una teoría de torsión* $\tau \in R$*-tors tal que* $\mathcal{L}_\tau(R) = \mathcal{L}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{L}$ *un filtro de Gabriel de ideales derechos de* R *y sea* $\mathcal{C}$ *la siguiente clase de* R*-módulos derechos*

$$\mathcal{C} = \{M \in \text{Mod-}R \mid \forall m \in M,\ (0:m) \in \mathcal{L}\}.$$

$\mathcal{C}$ *es claramente cerrada bajo submódulos.*

Si $M \in \mathcal{C}$ *y* $f : M \to M'$ *es un epimorfismo, entonces* $\forall m' \in M'\ \exists m \in M$ *tal que* $f(m) = m'$ *y* $(0:m) \subseteq (0:m')$. *Como* $(0:m) \in \mathcal{L}$, *por la Proposición 13(i)* $(0:m') \in \mathcal{L}$ *y por lo tanto* $M' \in \mathcal{C}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$ *y sea* $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. *Si* $m \in M$, *entonces* $m = (m_i)_{i\in I}$ *con* $m_i = 0$ *para casi toda* i, *esto es,* $\exists\ \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq I$ *tal que* $m_{i_j} \neq 0$, $\forall j = 1, 2, ..., k$ *y* $m_i = 0$, $\forall i \in I - \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. *Entonces* $(0 : m) = \bigcap_{i\in I}(0 : m_i) = \bigcap_{j=1}^{k}\left(0 : m_{i_j}\right) \in \mathcal{L}$, *por la Proposición 13(ii); de aquí que* $M = \bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{L}$.

Por último, sean $M, N \in$ *Mod-*R *tales que* $N, M/N \in \mathcal{C}$. *Si* $m \in M$, *entonces* $(N : m) = (0 : m + N) \in \mathcal{L}$ *y* $\forall x \in (N : m)$, $((0 : m) : x) = (0 : mx) \in \mathcal{L}$, *de donde* $M \in \mathcal{C}$.

Así se tiene que $\mathcal{C}$ *es cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones. Por la Proposición 4 existe* $\tau \in R$*-tors tal que* $\mathcal{C} = \mathcal{T}_\tau$. *Además,* $I \in \mathcal{L}_\tau(R) \Leftrightarrow R/I \in \mathcal{T}_\tau \Leftrightarrow R/I \in \mathcal{C} \Leftrightarrow I = (0 : 1 + I) \in \mathcal{L}$, *esto es,* $\mathcal{L}_\tau(R) = \mathcal{L}$. $\blacksquare$

Para una teoría de torsión τ el filtro de Gabriel $\mathcal{L}_\tau(R)$ se denota simplemente como $\mathcal{L}_\tau$.

Mayores detalles y otros conceptos relacionados con teorías de torsión hereditarias se encuentran en [9] y [18].

Capítulo 2
Módulos τ-plenos

Dada una teoría de torsión $\tau \in R$-tors y $M \in \mathbb{F}_\tau$, todo submódulo τ-denso de M es esencial en M [9, Proposición 5.7]. Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto. Por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$, $\tau = \chi(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ y $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, se tiene que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{Z}_{p^\infty})}$, el submódulo $\mathbb{Z}_p$ es esencial en M y $M/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty} \in \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{Z}_{p^\infty})}$. Los módulos para los cuales sí se cumple el recíproco respecto a una teoría de torsión $\tau \in R$-tors son los objetos de estudio a partir de este momento y se llamarán τ-plenos.

En 1978, Ann K. Boyle [4] fue la primera en estudiar estos módulos en el contexto de módulos con dimensión de Krull. Más adelante, en 1980, William George Lau trabajó con este tipo de módulos [16], en donde, a la propiedad de que todo submódulo esencial de un R-módulo M fuera τ-denso en M, la llamó la condición τ-grande (τ-large) de M. Otros trabajos relacionados con este tipo de módulos se encuentran en [19] y [20]. Por otra parte, Jonathan S. Golan escribió algunas propiedades que tienen estos módulos en [9, Proposición 5.7]. En 1986, Julius M. Zelmanowitz definió los módulos poliformes [25] y posteriormente, Robert Wisbauer prueba que un módulo es poliforme si y sólo si es un módulo pleno, [24].

Para hacer lo más autocontenido posible este trabajo aquí se mencionarán algunas de las propiedades y resultados, probados previamente, en torno a los módulos τ-plenos, que son requeridas.

Definición 5 *Sean $\tau \in R$-tors y $0 \neq M \in$ Mod-R. Se dice que M es un módulo τ-pleno si $M \in \mathbb{F}_\tau$ y $M/N \in \mathbb{T}_\tau$ para todo $0 \neq N \leq_{es} M$, esto es, todo submódulo esencial es τ-denso.*

En los siguientes ejemplos se incluyen las definiciones de algunos de los conceptos que se mencionan.

Ejemplo 1 *Un R-módulo M es τ-cocrítico si $M \in \mathbb{F}_\tau$ y $M/N \in \mathbb{T}_\tau$ para todo $0 \neq N \le M$, esto es, todo submódulo no nulo de M es τ-denso en M.*

Si $M \in$ Mod-R es τ-cocrítico, entonces M es τ-pleno. Además, como $M \in \mathbb{F}_\tau$, por lo mencionado al inicio de este capítulo, M es uniforme. El recíproco también se cumple, esto es, si M es uniforme y τ-pleno, entonces M es τ-cocrítico. $\square$

Ejemplo 2 *Si M es un módulo semisimple libre de τ-torsión, entonces M es un módulo τ-pleno.*

– Si M es semisimple no tiene submódulos esenciales propios y como $M/M = 0 \in \mathbb{T}_\tau$ se tiene que M es τ-pleno. $\square$

Ejemplo 3 *Sea $\mathcal{E} = \left\{ I \le \text{Id-}R \mid I \le_{es} R \right\}$. Si $M \in$ Mod-R, el submódulo singular de M se define como*

$$Z(M) = \{x \in M \mid (0:x) \in \mathcal{E}\}.$$

Se dice que el módulo M es singular si $Z(M) = M$ y que es no singular si $Z(M) = 0$.

Sea $\mathbb{F} = \{N \in$ Mod-$R \mid Z(N) = 0\}$. Entonces $\mathbb{F} \neq \phi$, puesto que $0 \in \mathbb{F}$, y es una clase cerrada bajo submódulos, cápsulas inyectivas, productos directos y extensiones. Por la Proposición 4 (2), existe una teoría de torsión $\tau_g \in R$-tors tal que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\tau_g}$. Esta teoría de torsión τ_g se conoce como la teoría de torsión de Goldie. En esta teoría de torsión la clase de los módulos de τ_g-torsión se puede describir como $\mathbb{T}_{\tau_g} = \{M \in$ Mod-$R \mid \forall L < M, \exists 0 \neq x \in M - L$ tal que $(L:x) \in \mathcal{E}\}$. Esto se puede ver de la siguiente manera: sean $M \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ y $L < M$; si se supone que $\forall 0 \neq x \in M - L$, $(L:x) \notin \mathcal{E}$, entonces $\forall 0 \neq \bar{x} \in M/L$, $(0:\bar{x}) \notin \mathcal{E}$ lo que implica que $Z(M/L) = 0$, esto es, $M/L \in \mathbb{F}_{\tau_g}$ que es una contradicción. Por lo tanto $\exists 0 \neq x \in M - L$ tal que $(L:x) \in \mathcal{E}$. Recíprocamente, si hubiera un R-módulo derecho M que cumpliera con la condición establecida y $M \notin \mathbb{T}_{\tau_g}$, entonces *existiría* $0 \neq x \in M - t_{\tau_g}(M)$ *tal que* $\left(t_{\tau_g}(M) : x\right) \in \mathcal{E}$, *de donde se tendría que* $0 \neq \bar{x} \in Z\left(M / t_{\tau_g}(M)\right)$ *que no es posible ya que* $M / t_{\tau_g}(M) \in \mathcal{F}_{\tau_g}$.

Ahora, si se considera la teoría de torsión τ_g, *y* $M \in$ *Mod-*R, *entonces* M *es libre de* τ_g*-torsión si y sólo si* M *es un módulo* τ_g*-pleno.*

– *Si* $M \in \mathcal{F}_{\tau_g}$ *y* $N \leq_{es} M$, *entonces* $Hom_R(M/N, E(K)) = 0,\ \forall K \in \mathcal{F}_{\tau_g}$ *ya que si existiera* $0 \neq f : M/N \to E(K)$, *con* $K \in \mathcal{F}_{\tau_g}$, *existiría* $0 \neq \bar{x} \in M/N$ *tal que* $f(\bar{x}) \neq 0$. *Como* $(N : x) = (0 : \bar{x}) \subseteq (0 : f(\bar{x}))$ *y* $(N : x) \leq_{es} R$, *se tendría que* $(0 : f(\bar{x})) \leq_{es} R$, *de donde,* $0 \neq f(\bar{x}) \in Z(E(K))$ *que sería una contradicción porque* $E(K) \in \mathcal{F}_{\tau_g}$. *Así,* $Hom_R(M/N, E(K)) = 0,\ \forall K \in \mathcal{F}_{\tau_g}$ *que significa que* $M/N \in \mathcal{T}_{\tau_g}$ *y por lo tanto* M *es* τ_g*-pleno. El recíproco es inmediato.* –

Dada $\tau \in R$-tors, para cada $M \in$ Mod-R existe su cápsula τ-inyectiva; ésta es el menor submódulo τ-inyectivo de $E(M)$ que contiene a M. Antes de ver el siguiente ejemplo se verá cómo se puede obtener ésta, salvo isomorfismos. Para esto se mencionan los conceptos de módulo τ-inyectivo y módulo τ-puro.

Definición 6 *Sea* $\tau \in R$*-tors. Un* R*-módulo derecho* M *es* τ*-inyectivo si para cualquier monomorfismo* $f : N' \to N$ *con conúcleo de* τ*-torsión y cualquier morfismo* $g : N' \to M$, *existe* $\bar{g} : N \to M$ *tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Si M es un R-módulo derecho inyectivo, entonces M es τ-inyectivo $\forall \tau \in R$-tors. En la teoría de torsión de Goldie, τ_g, los módulos τ_g-inyectivos y los módulos inyectivos coinciden.

Definición 7 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R. Se dice que un submódulo $N \leq M$ es τ-puro en M si $M/N \in \mathbb{F}_\tau$.*

Si $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R, $t_\tau(M)$ es un submódulo τ-puro en M; de aquí que

$$\mathcal{P}_\tau(M) = \{N \leq M \mid N \text{ es } \tau\text{-puro en } M\} \neq \phi.$$

Observación 6

(1) *Si $N \in \mathcal{P}_\tau(M)$, entonces $t_\tau(M) \subseteq N$ ya que $(t_\tau(M)+N)/N \subseteq M/N$ implica que $t_\tau(M)/(t_\tau(M) \cap N) \cong (t_\tau(M)+N)/N \in \mathbb{F}_\tau$. De aquí se tiene que $t_\tau(M)/(t_\tau(M) \cap N) \in \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{T}_\tau$ y por lo tanto $t_\tau(M) = (t_\tau(M) \cap N) \subseteq N$. Así se tiene que $t_\tau(M)$ es el menor submódulo τ-puro de M.*

(2) *Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_\tau(M)$, entonces $\bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{P}_\tau(M)$.*

(3) $t_\tau(M) = \bigcap_{N \in \mathcal{P}_\tau(M)} N$.

Definición 8 *Sean $\tau \in R$-tors y $M, N \in$ Mod-R con $N \leq M$. La τ-purificación de N en M es el menor submódulo τ-puro de M que contiene a N.*

Por la observación anterior se ve que ésta existe ya que se puede obtener tomando $\bigcap \mathcal{S}_N$ con $\mathcal{S}_N = \{K \leq M \mid N \leq K$ y $K \in \mathcal{P}_\tau(M)\}$, que no es un conjunto vacío ya que $M \in \mathcal{S}_N$.

Proposición 15 *Si N' es la τ-purificación de N en M, entonces $N'/N = t_\tau(M/N)$.*

Demostración. [9, Proposición 6.4]. ■

Ahora, si $M \in$ Mod-R y M' es la τ-purificación de M en $E(M)$, por [9, Proposición 8.2] se obtiene que M' es τ-inyectivo y además M es esencial en M'. Resulta que M' es el menor submódulo τ-inyectivo de $E(M)$ que contiene a $M,$ ya que si $E \in$ Mod-R es tal que $M \leq E \leq E(M)$ y E es τ-inyectivo, entonces existe un monomorfismo $f : M' \hookrightarrow E$. Éste se puede obtener considerando i, j las inclusiones respectivas y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & M' \arrow[r] \arrow[dl, "f"] & M'/M = t_\tau(E(M)/M) \\ & E & & \end{tikzcd}$$

Definición 9 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R. La cápsula τ-inyectiva de M es la τ-purificación de M en $E(M)$, y se denota por $E_\tau(M)$.*

Ejemplo 4 *Una categoría $\mathcal{C}$ es Preaditiva si*

i. $\mathcal{C}$ tiene objeto cero;

ii. $Hom(C, C')$ es un grupo abeliano, $\forall C, C' \in obj(\mathcal{C})$.

iii. Las funciones composición $Hom(C', C'') \times Hom(C, C') \to Hom(C, C'')$ son biaditivas, $\forall C, C', C'' \in obj(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría Preaditiva en la que todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo [18, Capítulo IV, §2.], *cada morfismo $\alpha \in Hom(C, C')$ se puede factorizar como lo indica el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Nuc(\alpha) \arrow[r, "\iota"] & C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] & C' \arrow[r, "\eta"] & Conuc(\alpha) \\ & Conuc(\iota) \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & Nuc(\eta) \arrow[u, "\mu"] & \end{tikzcd}$$

donde $\iota : Nuc(\alpha) \to C$ y $\eta : C' \to Conuc(\alpha)$ son un núcleo y un conúcleo de α, respectivamente, y $\overline{\alpha}$ se obtiene de la siguiente manera: $\eta\alpha = 0$ implica que existe $\beta : C \to Nuc(\eta)$ tal que $\mu\beta = \alpha$; de donde, $\mu\beta\iota = \alpha\iota = 0$ que implica $\beta\iota = 0$ puesto que μ es un monomorfismo, de aquí que existe $\overline{\alpha} : Conuc(\iota) \to Nuc(\eta)$ tal que $\mu\overline{\alpha}\lambda = \alpha$.

Una categoría $\mathcal{C}$ *es de Grothendieck si es abeliana, cocompleta, los límites directos son exactos en* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{C}$ *tiene un generador, donde:*

- *Abeliana significa que es preaditiva; cada familia finita de objetos de* $\mathcal{C}$ *tiene un producto y un coproducto; todo morfismo tiene un núcleo y un conúcleo; para cada par de objetos* $C, C' \in obj(\mathcal{C})$ *y cada morfismo* $\alpha \in Hom(C, C')$, *el morfismo* $\overline{\alpha}$ *definido anteriormente es un isomorfismo.*
- *Cocompleta significa que es preaditiva y existe el límite directo* $\varinjlim F$ *para cada funtor* $F : I \to \mathcal{C}$ *con* I *una categoría pequeña, esto es, una categoría en la que* $obj(I)$ *es un conjunto.*
  Cabe mencionar que, considerando $F(i) = C_i$, *el límite directo* $\varinjlim F = \varinjlim \{C_i\}_{i \in I}$ *es un objeto de* $\mathcal{C}$ *junto con una familia de morfismos* $\lambda_i : C_i \to \varinjlim \{C_i\}_{i \in I}$ *donde* $\lambda_j \circ F(\alpha) = \lambda_i$ *para cada morfismo* $\alpha : i \to j$ *en* I *tal que, para cualquier otra familia de morfismos* $\{\mu_i : C_i \to X | X \in obj(\mathcal{C})\}_{i \in I}$ *donde* $\mu_j \circ F(\alpha) = \mu_i$ *para cada morfismo* $\alpha : i \to j$ *en* I, *existe un único* $\nu : \varinjlim \{C_i\}_{i \in I} \to X$ *con* $\nu \circ \lambda_i = \mu_i$ $\forall i \in I$.
- *Que* $\mathcal{C}$ *tenga un generador significa que existe* $G \in obj(\mathcal{C})$ *tal que* $Hom(G, C) \neq 0, \forall C \in obj(\mathcal{C})$.

Un ejemplo de una categoría de Grothendieck es la categoría Mod-R *en la que* R *es un generador.*

Otro ejemplo de categoría de Grothendieck que no es una categoría completa de R*-módulos es la categoría* $\sigma[M]$ *para un* R*-módulo* M*. Ésta corresponde a la clase de* R*-submódulos derechos de módulos* M*-generados, donde un módulo* N *es* M*-generado si existe un conjunto* X *y un epimorfismo* $M^{(X)} \twoheadrightarrow N$*. Para mayores detalles sobre esta categoría se puede consultar* [23].

El Teorema de Popescu y Gabriel, [18, Teorema 4.1], *muestra que toda categoría de Grothendieck se puede ver como una categoría de módulos de cocientes.*

Una categoría $\mathcal{C}$ *es una Categoría Espectral si es una categoría de Grothendieck en la que toda sucesión exacta corta se escinde.*

Por ejemplo, si R es un anillo semisimple, entonces Mod-R es una Categoría Espectral.

Sea $\tau \in R$-tors. Se dice que la teoría de torsión τ es Espectral si la clase de R-módulos derechos τ-inyectivos y libres de τ-torsión es una Categoría Espectral.

Por ejemplo, cualquier generalización τ de la teoría de torsión de Goldie τ_g es una teoría de torsión espectral, puesto que en este caso, los módulos τ-inyectivos coinciden con los módulos inyectivos.

Otros ejemplos de teorías de torsión espectrales que no son generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie pueden verse en [2].

Sea $\tau \in R$-tors una teoría de torsión espectral y sea $M \in \mathcal{F}_\tau$, entonces M es un módulo τ-pleno.

– *Sea $M \in \mathcal{F}_\tau$. Ahora sólo se tiene que ver que todo submódulo esencial de M es τ-denso. Se denota por $Q_\tau(M) = E_\tau(M/t_\tau(M))$ al módulo de cocientes de M* [24, 9.17] *que, en el caso de que M sea libre de τ-torsión, coincide con su cápsula τ-inyectiva. Sea $N \leq_{es} M$. Como $Q_\tau(\_)$ es un funtor exacto izquierdo* [24, 9.18] *se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r] \arrow[d, "k"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_\tau(N) \arrow[r, "f"] & Q_\tau(M) \arrow[r, "g"] & Q_\tau(M/N) &
\end{tikzcd}$$

donde j y k son las inclusiones, y $h : M/N \to \mathrm{Im}(g)$ es la composición de la proyección canónica seguida de la inclusión $M/N \xrightarrow{\pi} (M/N)/t_\tau(M/N) \xrightarrow{\lambda} Q_\tau(M/N)$. Como f es un monomor?smo en la categoría de los módulos τ-inyectivos libres de τ-torsión y τ es espectral, la sucesión $0 \to Q_\tau(N) \xrightarrow{f} Q_\tau(M)$ se escinde; de aquí se sigue que $Q_\tau(N) = Q_\tau(M)$, pues $N \leq_{es} Q_\tau(M)$, lo cual implica que $g = 0$ y por lo tanto $\pi = 0$. Así se tiene que $M/N = t_\tau(M/N)$. –

Como consecuencia de este resultado, se puede probar que un módulo M es τ-pleno si y sólo si la restricción de la teoría de torsión τ a la categoría $\sigma[M]$ es una teoría de *torsión espectral.*

$(\Rightarrow)$ *Sea $\overline{\tau}$ la teoría de torsión hereditaria en $\sigma[M]$ tal que $\mathbb{T}_{\overline{\tau}} = \mathbb{T}_{\tau} \cap \sigma[M]$. Por* [2, Proposición 2.2], *basta probar que si $N \in \sigma[M]$ es $\overline{\tau}$-inyectivo y libre de $\overline{\tau}$-torsión, entonces N es M-inyectivo. Sean $M' \leq_{es} M$ y $f : M' \to N$ un morfismo. Como M es τ-pleno, $M/M' \in \mathbb{T}_{\tau}$; además, $M/M' \in \sigma[M]$, pues $\sigma[M]$ es cerrada bajo cocientes. De aquí que $M/M' \in \mathbb{T}_{\overline{\tau}}$ y por lo tanto existe $\overline{f} : M \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$(\Leftarrow)$ *Si $\overline{\tau}$ es una teoría de torsión espectral y $M \in \mathbb{F}_{\tau}$, entonces $M \in \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$ y, por lo probado anteriormente, se tiene que M es un módulo $\overline{\tau}$-pleno. De aquí que M es τ-pleno, por la Proposición 17 que se prueba más adelante, en la página 34.*

Para mayor información sobre las categorías espectrales y teorías de torsión espectrales se puede consultar [1, Proposition 1.1], [2], *y* [18]. $\square$

Ejemplo 5 *Sea $M \in$ Mod-R. M es un módulo ξ-pleno si y sólo si M es un módulo semisimple.*

– Sea M un módulo ξ-pleno. Entonces $M \neq 0$, $M \in \mathbb{F}_{\xi}$ y todo submódulo esencial de M es ξ-denso en M; esto es, $\forall\, 0 \neq N \leq_{es} M$ se tiene que $M/N \in \mathbb{T}_{\xi}$ que implica $M = N$. De aquí que si $0 \neq M' \leq M$ y $M'' \leq M$ es un pseudocomplemento de M' en M, entonces $M' \oplus M'' = M$ puesto que $M' \oplus M'' \leq_{es} M$. Por lo tanto, M es semisimple. El recíproco se vio en el ejemplo 2. – $\square$

Ejemplo 6 *Sea $\tau_{sp} \in R$-tors la teoría de torsión hereditaria cuya clase de torsión consiste de todos los módulos semisimples y proyectivos. Para cada $M \in$ Mod-R, $t_{\tau_{sp}}(M) = \sum \{S \leq M \mid S$ es simple y proyectivo$\}$.*

Entonces $M \in$ Mod-R es un módulo τ_{sp}-pleno si y sólo si M es semisimple y singular.

– Sea M un módulo τ_{sp}-pleno. Entonces $\forall 0 \neq N \leq_{es} M$ se tiene que $M/N \in \mathcal{T}_{\tau_{sp}}$, de donde M/N es proyectivo que implica que N es sumando directo de M y por lo tanto $M = N$. Así se tiene que M no tiene submódulos esenciales propios y por lo tanto es semisimple. Además, $M \in \mathcal{F}_{\tau_{sp}}$ implica que no contiene submódulos simples proyectivos; de aquí que M es singular. Recíprocamente, si M es singular, entonces $M \in \mathcal{F}_{\tau_{sp}}$ y como es semisimple no contiene submódulos esenciales propios. Por lo tanto es τ_{sp}-pleno. – ■

Ejemplo 7 *En el ejemplo 3 se vio que en la teoría de torsión de Goldie τ_g la clase libre de torsión es $\mathcal{F}_{\tau_g} = \{N \in$ Mod-$R \mid Z(N) = 0\}$. Esta clase se puede describir también como $\{N \in$ Mod-$R \mid Hom_R(R/J, N) = 0,\ \forall J \in \mathcal{E}\}$.*

– Sea $\mathcal{F} = \{N \in$ Mod-$R \mid Hom_R(R/J, N) = 0,\ \forall J \in \mathcal{E}\}$. Sea $N \in \mathcal{F}$ y supóngase que existe $0 \neq x \in Z(N)$, esto es, tal que $(0 : x) \leq_{es} R$, entonces existe un isomorfismo $R/(0 : x) \xrightarrow{f} xR$ que da un morfismo distinto de cero de $R/(0 : x)$ en N que es la composición $i \circ f$ donde $xR \xrightarrow{i} N$ es la inclusión. Esto es una contradicción, de donde $Z(N) = 0$ y por lo tanto $N \in \mathcal{F}_{\tau_g}$. Ahora, sea $N \in \mathcal{F}_{\tau_g}$. Si hubiera un $J \leq_{es} R$ y un $0 \neq g : R/J \to N$, $0 \neq g(1 + J) = n \in N$, y como $(J : 1) = (0 : 1 + J) \subseteq (0 : n)$ se tendría que $(0 : n) \leq_{es} R$, esto es, $0 \neq n \in Z(N)$ lo cual sería una contradicción. Por lo tanto $Hom_R(R/J, N) = 0,\ \forall J \in \mathcal{E}$ que implica que $N \in \mathcal{F}$. –

Tomando esta descripción de $\mathcal{F}_{\tau_g}$ se ve inmediatamente que si $\mathcal{C} = \{R/J \in$ Mod-$R \mid J \in \mathcal{E}\}$, entonces $\mathcal{F}_{\xi(\mathcal{C})} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_g}$ de donde $\tau_g \leq \xi(\mathcal{C})$ y como $R/J \in \mathcal{T}_{\tau_g}$ $\forall J \in \mathcal{E}$ se tiene que $\xi(\mathcal{C}) \leq \tau_g$ de donde $\tau_g = \xi(\mathcal{C})$. Con esto se tiene el siguiente resultado:

Si $\tau \in R$-tors es una teoría de torsión donde R es τ-pleno, entonces $\tau = \tau_g$.

– *Como R es τ-pleno se tiene que $R/J \in \mathbb{T}_\tau$ $\forall J \in \mathcal{E}$ que implica que $\tau_g \leq \tau$. Por otra parte, sea $M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $mR \in \mathbb{T}_\tau$, $\forall m \in M$ y, a través del mor?smo $R \xrightarrow{f_m} mR$ de?nido por $f_m(r) = mr$, se tiene $R/(0:m) \cong mR \in \mathbb{T}_\tau$. Como $R \in \mathbb{F}_\tau$, entonces $(0:m) \leq_{es} R$, por* [9, Teorema 5.7], *lo cual implica que $R/(0:m) \in \mathbb{T}_{\tau_g}$, esto es, $\forall m \in M$, $mR \in \mathbb{T}_{\tau_g}$ que signi?ca que $M \in \mathbb{T}_{\tau_g}$. De aquí que $\tau \leq \tau_g$ y por lo tanto se da la igualdad.* – $\blacksquare$

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en [9, Capítulo 15].

Proposición 16 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) *Si $0 \neq N \leq M$, entonces N también es τ-pleno.*

(2) *Si N es un submódulo τ-puro de M, entonces M/N es τ-pleno.*

Las dos proposiciones siguientes muestran que la propiedad de que un módulo M sea τ-pleno se extiende a cualquier generalización de τ donde M sea libre de torsión y se hereda a especializaciones del tipo $\tau \wedge \sigma$, donde M es de σ-torsión.

Proposición 17 *Sean $\tau, \sigma \in R$-tors tales que $\tau \leq \sigma$. Si $M \in$ Mod-R es τ-pleno y $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces M es σ-pleno.*

Demostración.

Sea $0 \neq N \leq_{es} M$, entonces $M/N \in \mathbb{T}_\tau$, de donde $M/N \in \mathbb{T}_\sigma$ y M es σ-pleno. $\blacksquare$

Corolario 18 *Si $M \in$ Mod-R es τ-pleno para una $\tau \in R$-tors, entonces M es un R-módulo $\chi(M)$-pleno.*

Proposición 19 *Sean $M \in$ Mod-R y $\tau, \sigma \in R$-tors. Si M es τ-pleno y $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces M es $(\tau \wedge \sigma)$-pleno.*

Demostración.

Como $(\tau \wedge \sigma) \leq \tau$ y $M \in \mathbb{F}_\tau$ se tiene que $M \in \mathbb{F}_{\tau \wedge \sigma}$. Si $N \leq_{es} M$, entonces $M/N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma$. Por lo tanto, M es $(\tau \wedge \sigma)$-pleno. ■

Corolario 20 *Sean $\tau \in R$-tors y M un R-módulo τ-pleno, entonces M es $(\tau \wedge \xi(M))$-pleno.*

Definición 10 *Un R-módulo M se llama pleno si existe $\tau \in R$-tors tal que M es τ-pleno.*

Observación 7 *Por el Corolario 18 se tiene que un módulo M es pleno si y sólo si M es $\chi(M)$-pleno.*

La siguiente proposición es una caracterización de los submódulos τ-puros de un módulo que es τ-pleno.

Proposición 21 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno. Entonces $N \leq M$ es τ-puro en M si y sólo si N es esencialmente cerrado en M, esto es, N no tiene extensiones esenciales propias en M.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ *Sea $N \leq M$ τ-puro en M Si $N \leq_{es} N' < M$, entonces $N'/N \in \mathbb{T}_\tau$ ya que N' es τ-pleno; pero $M/N \in \mathbb{F}_\tau$ implica que $N'/N \in \mathbb{F}_\tau$, de donde, $N' = N$.*

($\Leftarrow$) *Sea $N \leq M$ esencialmente cerrado en M y sea $N' \leq M$ un pseudocomplemento de N en M. Se afirma que N también es un pseudocomplemento de N' en M. Por el Lema de Zorn existe un pseudocomplemento, $\overline{N}$, de N' en M tal que $N \leq \overline{N}$. Si $0 \neq x \in \overline{N}$, como $N \oplus N' \leq_{es} M$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr = n + n'$ con $n \in N$ y $n' \in N'$; pero $n' = xr - n \in \overline{N} \cap N' = \{0\}$ implica que $0 \neq xr = n \in N$, de donde se tiene que $N \leq_{es} \overline{N}$. Así, $N = \overline{N}$, pues N es esencialmente cerrado en M. Esto da lugar a un monomorfismo*

$$\begin{array}{rcl} N' \cong N \oplus N'/N & \overset{ess}{\hookrightarrow} & M/N \\ x & \mapsto & x + N \end{array}$$

que es esencial ya que $(M'/N) \cap (N \oplus N'/N) = N \Rightarrow M' \cap N' = \{0\} \Rightarrow M' = N \Rightarrow M'/N = 0$. De aquí se puede concluir que como $N' \in \mathbb{F}_\tau$, entonces $M/N \in \mathbb{F}_\tau$. ■

Ahora, para cada R-módulo M se va a escribir

$$\xi_M = \xi\left(\left\{ M/N \mid N \leq_{es} M \right\}\right).$$

Nótese que si M es un módulo pleno, para cada $N \leq_{es} M$, $M/N \in \mathbb{T}_{\chi(M)}$; de esta manera $\xi_M \leq \chi(M)$.

El siguiente resultado utiliza la hipótesis de que M es un módulo pleno. En el ejemplo 8 se verá que ésta es una condición necesaria ya que sin ella no se tiene, en general, que $\xi_M \leq \chi(M)$ y entonces no se podría hablar del intervalo $[\xi_M, \chi(M)]$.

Proposición 22 *Sea M un R-módulo pleno y sea $\tau \in R$-tors. Entonces M es τ-pleno si y sólo si $\tau \in [\xi_M, \chi(M)]$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) *Sea $\tau \in R$-tors tal que M es τ-pleno, entonces $\tau \leq \chi(M)$, y si $N \leq_{es} M$, se tiene que $M/N \in \mathbb{T}_\tau$; por consiguiente $\xi_M \leq \tau$.*

$(\Leftarrow)$ *Ahora, sea* $\pi \in [\xi_M, \chi(M)]$. *Como* $\xi_M \leq \pi$, $M/N \in \mathbb{T}_\pi$, *para cada* $N \underset{es}{\leq} M$. *Por otra parte,* $\pi \leq \chi(M)$ *implica que* $M \in \mathbb{F}_\pi$. *Por lo tanto,* M *es* π*-pleno.* $\blacksquare$

Por lo que se vio en el Ejemplo 7, $\tau_g = \xi_R$. Así, si R es pleno y $\tau \in R$-tors, R es τ-pleno si y sólo si $\tau = \tau_g = \xi_R$.

Corolario 23 *Sea* $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$*-tors y sea* $M \in$ *Mod-*R*. Si* M *es* τ_α*-pleno para cada* $\alpha \in I$*, entonces* M *es* $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$*-pleno y* $\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$*-pleno.*

Demostración.

Si M *es* τ_α*-pleno, entonces* $\tau_\alpha \in [\xi_M, \chi(M)]$ *para toda* $\alpha \in I$*. Entonces* $\bigwedge_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ *y* $\bigvee_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ *están en el intervalo* $[\xi_M, \chi(M)]$*. El resultado se sigue directamente de la proposición anterior.* $\blacksquare$

Observación 8 *En la siguiente proposición, cuya equivalencia se prueba en* [24, Proposición 11.1]*, la condición* (2) *es la definición que dio Zelmanowitz en* [25] *de módulo poliforme. De esta forma, lo que dice la proposición es que un* R*-módulo derecho* M *es pleno si y sólo si* M *es poliforme. Además, en la misma Proposición 11.1, Wisbauer prueba que estas condiciones también son equivalentes a que* M *es un objeto no singular en la categoría* $\sigma[M]$*.*

Proposición 24 *Sea* $M \in$ *Mod-*R*. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) M *es pleno.*

(2) *Para cada submódulo* N *de* M *y cada morfismo* $f : N \to M$ *tal que* *Nuc*$(f) \underset{es}{\leq} N$*, se tiene que* $f = 0$*.*

En el siguiente resultado se observa que cuando un módulo cogenera la misma teoría de torsión que cogenera un módulo τ-pleno, si bien no es necesariamente τ-pleno, sí se puede asegurar que contiene un submódulo τ-pleno.

Proposición 25 *Sea $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno. Si $N \in$ Mod-R es tal que $\chi(N) = \chi(M)$, entonces N contiene un submódulo τ-pleno.*

Demostración.

Como M es τ-pleno, $\tau \in [\xi_M, \chi(M)]$ por la Proposición 22; de aquí que $\tau \leq \chi(N)$. Por otra parte, como $M \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\chi(N)}$, entonces $Hom_R(M, E(N)) \neq 0$. Sea $0 \neq f : M \to E(N)$. Si $M' = f^{-1}(f(M) \cap N)$, entonces $0 \neq M' \leq M$ y $0 \neq f(M') \leq N \in \mathbb{F}_{\chi(N)} \subseteq \mathbb{F}_\tau$. Como $Nuc(f) \leq M'$ es un submódulo τ-puro en M' y $M'/Nuc(f) \cong f(M')$, por la Proposición 16, se puede concluir que $f(M')$ es τ-pleno. $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo se ilustra el hecho de que la cápsula inyectiva de un R-módulo pleno no es siempre un módulo pleno. Sin embargo, la cápsula τ-inyectiva de un R-módulo τ-pleno M también es un R-módulo τ-pleno, más aún, es el mayor submódulo τ-pleno de $E(M)$.

Ejemplo 8 *Sean $R = \mathbb{Z}$, $p \in R$ un número primo y $M = \mathbb{Z}_p$. M es un R-módulo simple y libre de $\chi(\mathbb{Z}_p)$-torsión; de aquí que es un módulo $\chi(\mathbb{Z}_p)$-pleno. Sin embargo, $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es pleno ya que para cualquier submódulo esencial $\mathbb{Z}_{p^k}$ se tiene que $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^k} \cong \mathbb{Z}_{p^\infty} \notin \mathbb{T}_{\chi(\mathbb{Z}_{p^\infty})}$. También se puede ver en este ejemplo que $\xi_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \nleq \chi(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, puesto que $\xi_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} = \xi(\mathbb{Z}_{p^\infty})$. Así se ve que en la Proposición 22 es necesario pedir que M sea un módulo pleno para que $[\xi_M, \chi(M)]$ efectivamente sea un intervalo.* $\square$

Proposición 26 *Sean $\tau \in R$-tors y M un R-módulo τ-pleno. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(1) *$E_\tau(M)$ es un R-módulo τ-pleno.*

(2) *$E_\tau(M)$ es el mayor submódulo τ-pleno de $E(M)$.*

Demostración.

(1) *Es una consecuencia inmediata de* [9, Proposición 15.4].

(2) *Sea K un submódulo τ-pleno de $E(M)$, entonces $K \neq 0$ y por lo tanto $K \cap M \neq 0$. Además, $K \cap M \leq_{es} K$, de donde $K/K \cap M \in \mathbb{T}_\tau$ puesto que K es un R-módulo τ-pleno. Ahora, se considera el siguiente diagrama donde los morfismos del cuadro de la izquierda son las inclusiones.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K \cap M & \hookrightarrow & K & \to & K/K \cap M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f & & \\
0 & \to & E_\tau(M) & \hookrightarrow & E(M) & \to & E(M)/E_\tau(M) & \to & 0
\end{array}$$

Existe un morfismo $f : K/K \cap M \to E(M)/E_\tau(M)$ definido por $f(x + K \cap M) = x + E_\tau(M)$ que hace que el diagrama conmute; pero $f = 0$ ya que $E(M)/E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\tau$. De esta forma se tiene que la inclusión i tiene su imagen dentro de $E_\tau(M)$. De aquí se deduce que $K \subseteq E_\tau(M)$. $\blacksquare$

A continuación se da la definición de módulo absolutamente τ-puro que se estudiará en los siguientes capítulos en relación con los módulos τ-plenos, y se señala el intervalo en el que debe estar una teoría de torsión τ para que un módulo M sea absolutamente τ-puro. Para mayores detalles sobre este tipo de módulos se puede consultar [9, Capítulo 10].

Definición 11 *Sea $\tau \in R$-tors. Se dice que un R-módulo derecho M es absolutamente τ-puro si es libre de τ-torsión y τ-inyectivo.*

Dada $\tau \in R$-tors y un R-módulo M libre de τ-torsión, su cápsula τ-inyectiva, $E_\tau(M)$ es un módulo absolutamente τ-puro.

Observación 9 *Sean $M \in$ Mod-R y $\sigma = \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)$. Entonces M es absolutamente σ-puro ya que como $\sigma \leq \chi(M)$, se tiene que $M \in \mathcal{F}_\sigma$; por otra parte, $\sigma \leq \chi(E(M)/M)$ implica que $E(M)/M \in \mathcal{F}_\sigma$, i.e. $E_\sigma(M)/M = t_\sigma(E(M)/M) = 0$, que significa que $M = E_\sigma(M)$ y por lo tanto M es σ-inyectivo.*

Así, si $\tau \in R$-tors, entonces M es absolutamente τ-puro si y sólo si $\tau \in [\xi, \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)]$.

– Sea $\tau \in R$-tors. Entonces M es absolutamente τ-puro si y sólo si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y es τ-inyectivo lo cual sucede si y sólo si $\tau \leq \chi(M)$ y $t_\tau(E(M)/M) = E_\tau(M)/M = 0$, esto es, si y sólo si $\tau \leq \chi(M)$ y $\tau \leq \chi(E(M)/M)$, si y sólo si $\tau \in [\xi, \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)]$. –

De la Proposición 22 se concluye que para un módulo pleno M, si $\tau \in R$-tors es tal que M es absolutamente τ-puro y τ-pleno, entonces $\tau \in [\xi_M, \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)]$. Sin embargo, no es suficiente que M sea módulo pleno para que $\xi_M \leq \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)$, como se ve en el siguiente ejemplo. Por lo tanto el recíproco no siempre se cumple.

Ejemplo 9 *Sean $R = \mathbb{Z}$ y $M = \mathbb{Z}$, entonces $E(M) = \mathbb{Q}$, M es τ_g-pleno, $\chi(M) = \chi(\mathbb{Z}) = \tau_g$, $\chi(E(M)/M) = \chi(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \xi$ y $\xi_M = \xi_\mathbb{Z} = \tau_g$. De aquí que $\xi_M \nleq \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)$.* $\blacksquare$

Capítulo 3
Las retículas $Sub_{P_\tau TI}(M)$ y $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$

Dada una teoría de torsión $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno, se estudiarán algunas propiedades de los submódulos totalmente invariantes de M que tengan la propiedad de ser τ-puros en M. Este conjunto se denotará por $Sub_{P_\tau TI}(M)$. Se verá que, con la condición adicional de que M sea absolutamente τ-puro, se puede asegurar que este conjunto es una retícula de Boole. Además, bajo estas hipótesis se obtendrán algunos resultados sobre submódulos τ-puros de M. También se verá que es posible tener una descomposición del módulo M en suma directa de submódulos τ-puros totalmente invariantes. Por otra parte, considerando solamente que M sea un módulo τ-pleno, como consecuencia de que la retícula $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ sea atómica y la forma específica que tengan sus átomos, se obtendrán descomposiciones de la teoría de torsión $\chi(M)$ como el ínfimo de ciertas familias de teorías de torsión.

3.1 Estructura de $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y de $Sub_{P_\tau TI}(M)$

Dada una teoría de torsión $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno, se denotará por $Sub_{P_\tau TI}(M)$ al conjunto

$$\{N \leq M \mid N \text{ es } \tau\text{-puro y totalmente invariante en } M\},$$

esto es, al conjunto de los submódulos N que son τ-puros y que tienen la propiedad de que para cualquier $f \in End_R(M)$, $f(N) \subseteq N$.

En esta sección se establecerá una relación entre los conjuntos $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y $Sub_{P_\tau TI}(M)$ que resultará ser un isomorfismo de retículas completas bajo la condición de que el R-módulo M sea τ-pleno y absolutamente τ-puro. Esto les da a los dos conjuntos la misma estructura reticular bajo estas condiciones.

Antes de ver la relación que existe entre dichos conjuntos se verá que cuando M es un R-módulo derecho τ-pleno, el intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole. Para esto se considera la derivada de Cantor-Bendixson sobre R-tors. Se darán algunas notaciones y terminología basadas en [10] donde se puede consultar si se requiere mayor profundidad en el tema.

Definición 12 *Sean $\tau, \sigma \in R$-tors. Se dice que σ es vasta (large) sobre τ, lo cual se escribe $\tau \ll \sigma$ si $\tau \leq \sigma$ y para cada $\alpha \in R$-tors tal que $\sigma \wedge \alpha \leq \tau$, se tiene que $\alpha \leq \tau$.*

χ es vasta sobre cualquier teoría de torsión $\tau \in R$-tors. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces $\tau_g = \chi(\mathbb{Q})$ es vasta sobre $\chi(\mathbb{Z}_p)$ con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo.

Definición 13 *Una derivada sobre R-tors es una función $d : R\text{-tors} \to R$-tors que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\tau \leq d(\tau)$ $\forall \tau \in R$-*tors;*

(2) *si $\sigma \leq \tau$ en R-tors, entonces $d(\sigma) \leq d(\tau)$.*

Ejemplo 10 *Sea $d_{cb} : R\text{-tors} \to R$-tors la función definida por*

$$d_{cb}(\tau) = \bigwedge \{\sigma \mid \tau \ll \sigma\}.$$

Nótese que el conjunto $\{\sigma \mid \tau \ll \sigma\}$ no es vacío ya que χ es un elemento de éste.

Entonces d_{cb} es una derivada sobre R-tors. Para ver esto se considera, para un par de teorías de torsión $\tau, \sigma \in R$-tors, el pseudocomplemento de σ relativo a τ que es la mayor teoría de torsión γ tal que $\sigma \wedge \gamma \leq \tau$. Esta teoría de torsión se denota por $\sigma_\tau^\perp$ y es

$$\sigma_\tau^\perp = \bigvee \{\tau' \in R\text{-tors} \mid \tau' \wedge \sigma \leq \tau\}.$$

Es inmediato que $\tau \leq \sigma_\tau^\perp$.

Ahora se verá que d_{cb} es un derivada.

– Por definición de una teoría de torsión vasta sobre τ es claro que $\tau \leq \bigwedge \{\sigma \mid \tau \ll \sigma\} = d_{cb}(\tau)$.

Para probar la segunda condición primero se verá que si $\tau \leq \tau'$, entonces $\forall \rho \in R$-tors tal que $\tau' \ll \rho$ se tiene que $\tau \ll \rho$.

Sean $\tau', \rho \in R$-tors tales que $\tau \leq \tau'$ y $\tau' \ll \rho$ Por definición de $\rho^\star_\tau$ se tiene que $\rho^\star_\tau \wedge \rho \leq \tau$ y como $\tau \leq \tau'$, entonces $\rho^\star_\tau \wedge \rho \leq \tau'$. Como $\tau' \ll \rho$, se tiene que $\rho^\star_\tau \leq \tau'$. Entonces $\rho^\star_\tau = \rho^\star_\tau \wedge \tau' \leq \rho^\star_\tau \wedge \rho \leq \tau$. Así, como $\tau \leq \rho^\star_\tau$ se tiene que $\tau = \rho^\star_\tau$. De esta forma, si $\alpha \in R$-tors es tal que $\alpha \wedge \rho \leq \tau$, entonces $\alpha \leq \rho^\star_\tau = \tau$ y por lo tanto $\tau \ll \rho$.

De esta manera se tiene que si $\tau \leq \tau'$, entonces $\forall \rho \in R$-tors tal que $\tau' \ll \rho$, $\rho \in \{\sigma \mid \tau \ll \sigma\}$ que implica que $d_{cb}(\tau) \leq \rho$. De aquí que, como $d_{cb}(\tau')$ es el ínfimo de $\{\sigma \mid \tau' \ll \sigma\}$ se concluye que $d_{cb}(\tau) \leq d_{cb}(\tau')$. $\square$

Definición 14 *La derivada sobre R-tors, d_{cb}, definida al inicio de este ejemplo, se llama la derivada de Cantor-Bendixson.*

Proposición 27 *Si $\tau \in R$-tors, entonces la subretícula $[\tau, d_{cb}(\tau)]$ de R-tors es una retícula de Boole.*

Demostración.

[10, Proposición 1.2] $\blacksquare$

El siguiente resultado fue enunciado en [10, Proposition 1.10], sin embargo, aunque es válido, la demostración que ahí aparece no es correcta; aquí se presenta una prueba distinta.

Proposición 28 *Si $\tau \in R$-tors y M es τ-pleno, entonces $\tau \vee \xi(M) \leq d_{cb}(\tau)$.*

Demostración.

Sea M un módulo τ-pleno. Se probará que $\tau \vee \xi(M) \leq \rho$, para cada $\rho \in R$-tors tal que $\tau \ll \rho$.

Se supone que existe una $\rho \in R$-tors tal que $\tau \ll \rho$ y $\tau \vee \xi(M) \not\leq \rho$. Como $\tau \leq \rho$, entonces $M \notin \mathcal{T}_\rho$. Sea $\overline{M} = M/t_\rho(M)$, entonces $\overline{M} \neq 0$ y $\overline{M} \in \mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_\tau$; de aquí que $\overline{M}$ es τ-pleno y ρ-pleno, por las Proposiciones 16 y 17. Como $\overline{M} \in \mathbb{F}_\rho$, entonces $\tau \vee \xi\left(\overline{M}\right) \not\leq \rho$.

Ahora, se afirma que $\rho \wedge \xi\left(\overline{M}\right) \leq \tau$. *Sea* $L \in \mathbb{T}_{\rho \wedge \xi(\overline{M})}$, *entonces* $L \in \mathbb{T}_\rho$ *y* $L \in \mathbb{T}_{\xi(\overline{M})}$ *que implica* $Hom_R\left(\overline{M}, E(L)\right) \neq 0$. *Entonces existen submódulos* $H \subset T \subseteq \overline{M}$ *y un monomorfismo* $T/H \hookrightarrow L \in \mathbb{T}_\rho$, *de donde* $T/H \in \mathbb{T}_\rho$. *Como* $T \in \mathbb{F}_\rho$, *se tiene que* $H \underset{es}{\leq} T$, *por* [9, Proposición 5.7]. *Como* $\overline{M}$ *es* τ*-pleno,* T *es* τ*-pleno, y entonces* $T/H \in \mathbb{T}_\tau$. *En consecuencia se tiene que* $t_\tau(L) \neq 0$. *De esta manera se ha probado que cualquier módulo de* $\left(\rho \wedge \xi\left(\overline{M}\right)\right)$*-torsión tiene* τ*-torsión diferente de cero. Así, si* $L \neq t_\tau(L)$, *se tiene que* $0 \neq L' = L/t_\tau(L) \in \mathbb{T}_{\rho \wedge \xi(\overline{M})}$ *y, por lo dicho anteriormente,* L' *debe tener* τ*-torsión distinta de cero, lo cual es imposible. De esto se sigue que* $L \in \mathbb{T}_\tau$. *Esto prueba que* $\rho \wedge \xi\left(\overline{M}\right) \leq \tau$, *de donde* $\xi\left(\overline{M}\right) \leq \tau$ *porque* $\tau \ll \rho$; *pero eso es una contradicción puesto que* $\tau \leq \rho$ *y* $\tau \vee \xi\left(\overline{M}\right) \not\leq \rho$. ∎

Corolario 29 *Sean* $\tau \in R$*-tors y* M *un* R*-módulo* τ*-pleno. Entonces* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es una retícula de Boole.*

Demostración.

Se sigue del hecho de que el intervalo $[\tau, d_{cb}(\tau)]$ *es una retícula de Boole, Proposición 27, la Proposición 28 y la Observación 1, pág. 13.* ∎

En el siguiente teorema se establece la relación que existe entre las retículas $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y $Sub_{P_\tau TI}(M)$.

Teorema 30 *Sean* $\tau \in R$*-tors,* $M \in$ *Mod-*R *y* $\varphi : [\tau, \tau \vee \xi(M)] \to Sub_{P_\tau TI}(M)$ *definida por* $\varphi(\sigma) = t_\sigma(M)$. *Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

(1) *Si* M *es un módulo* τ*-pleno, entonces* φ *es inyectiva.*

(2) *Si* M *es un módulo* τ*-pleno y absolutamente* τ*-puro, entonces* φ *es biyectiva.*

Demostración.

(1) *Lo primero que se asegura es que para cada* $\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$, $\sigma = \tau \vee \xi(t_\sigma(M))$. *Sea* $N = t_\sigma(M)$, *entonces* $\tau \le \tau \vee \xi(N) \le \sigma \le \tau \vee \xi(M)$. *Supóngase que* $\tau \vee \xi(N) < \sigma$; *entonces existe* $0 \neq H \in$ *Mod-*R *tal que* $H \in \mathbb{T}_\sigma$ *y* $H \notin \mathbb{T}_{\tau\vee\xi(N)}$; *de hecho, se puede considerar que existe* $0 \neq K \in$ *Mod-*R *tal que* $K \in \mathbb{T}_\sigma$ *y* $K \in \mathbb{F}_{\tau\vee\xi(N)}$ *tomando* $K = H \big/ t_{\tau\vee\xi(N)}(H)$. *De aquí que* $K \in \mathbb{F}_\tau$ *y* $K \in \mathbb{F}_{\xi(N)}$, *y por lo tanto* $Hom_R(N, E(K)) = 0$. *Por otra parte,* $K \in \mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_{\tau\vee\xi(M)}$ *implica que* $Hom_R(M, E(K)) \neq 0$. *Sea* $0 \neq f \in Hom_R(M, E(K))$, *entonces* $N \le \ker(f)$; *de donde, existe un morfismo* $0 \neq \overline{f} : M/N \to E(K)$. *Así, se tiene que existen submódulos* $H/N < L/N \le M/N$ *y un monomorfismo* $L/H \hookrightarrow K \in \mathbb{T}_\sigma$, *y entonces* $L/H \in \mathbb{T}_\sigma$. *Como* $L/N \le M/N = M/t_\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$, *se sigue que* $H/N \le_{es} L/N$ *por* [9, Proposición 5.7], *de esta manera* $H \le_{es} L$. *Como* L *es* τ*-pleno, se tiene que* $L/H \in \mathbb{T}_\tau$; *lo cual es una contradicción porque* $L/H \hookrightarrow K \in \mathbb{F}_\tau$. *Por consiguiente* $\sigma = \tau \vee \xi(t_\sigma(M))$.

Ahora, sean $\sigma, \sigma' \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *tales que* $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma')$; *esto significa que* $t_\sigma(M) = t_{\sigma'}(M)$. *Usando la igualdad probada, se tiene que* $\sigma = \tau \vee \xi(t_\sigma(M)) = \tau \vee \xi(t_{\sigma'}(M)) = \sigma'$. *Por lo tanto* φ *es inyectiva.*

(2) *Por (1) sólo falta probar que* φ *es suprayectiva. Ahora bien, sean* $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ *y* $\sigma = \tau \vee \xi(N)$. *Se afirma que* $t_\sigma(M) = N$.

Como $t_\sigma(M)$ *es* τ*-puro en* M *y* M *es* τ*-pleno y absolutamente* τ*-puro, existe* $L \le M$ *tal que* $M = t_\sigma(M) \oplus L$, *por* [9, Proposition 15.6]. *De aquí se tiene que* $t_\sigma(M)$ *es* τ*-pleno y absolutamente* τ*-puro también. Por otra parte, se puede notar que* N *es un submódulo* τ*-puro de* $t_\sigma(M)$ *puesto que* $t_\sigma(M)/N \le M/N$, *por lo que resulta ser sumando directo de* $t_\sigma(M)$, *esto es, existe* $K \le t_\sigma(M)$ *tal que* $t_\sigma(M) = N \oplus K$. *Como* $K \cong t_\sigma(M)/N \in \mathbb{T}_\sigma$ *y* $K \subseteq M \in \mathbb{F}_\tau$, *entonces* $K \notin \mathbb{F}_{\xi(N)}$, *de aquí que* $Hom_R(N, E(K)) \neq 0$. *Sea* $0 \neq g : N \to E(K)$ *y sea* $N_0 = g^{-1}(K)$. *Si* $g' = g|_{N_0}$, *se tiene el siguiente diagrama conmutativo donde* f *es el monomorfismo definido por* $f(x + N_0) = g(x) + K$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g'"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & N/N_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i'"] & E(K) \arrow[r] & E(K)/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Análogamente, se sigue que K es un submódulo absolutamente τ-puro de M, de donde, K es τ-inyectivo que implica que $t_\tau(E(K)/K) = E_\tau(K)/K = 0$, es decir, $E(K)/K \in \mathbb{F}_\tau$. Así pues, $N/N_0 \in \mathbb{F}_\tau$. Como N es un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, N_0 es un sumando directo de N. En vista de esto, existe un submódulo $N_1 \leq N$ tal que $N = N_0 \oplus N_1$. De esta forma se tiene que $M = t_\sigma(M) \oplus L = N \oplus K \oplus L = N_0 \oplus N_1 \oplus K \oplus L$. Consecuentemente, a no ser que $K = 0$, se podría definir un endomorfismo $0 \neq h : M \to M$ de tal forma que $0 \neq h(N) \subseteq K$ lo cual sería una contradicción ya que N es totalmente invariante. Por lo tanto, $N = t_\sigma(M)$, esto es, φ es suprayectiva. ■

Corolario 31 *Sea $\tau \in R$-tors. Si M es un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, entonces φ es un isomorfismo de retículas completas.*

Demostración.

φ preserva el orden puesto: si $\rho, \sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ son dos teorías de torsión tales que $\rho \leq \sigma$, entonces $\varphi(\rho) = t_\rho(M) \leq t_\sigma(M) = \varphi(\sigma)$.

Sea $\{\sigma_i\}_{i \in I} \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$, entonces $\varphi\left(\bigwedge_{i \in I} \sigma_i\right) = t_{\bigwedge_{i \in I} \sigma_i}(M) = \bigcap_{i \in I} t_{\sigma_i}(M) = \bigcap_{i \in I} \varphi(\sigma_i)$.

Por otra parte, $\sigma_i \leq \bigvee_{i \in I} \sigma_i$ implica $\varphi(\sigma_i) \leq \varphi\left(\bigvee_{i \in I} \sigma_i\right)$, $\forall i \in I$. Ahora, sea $K \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ tal que $\varphi(\sigma_i) \leq K$ $\forall i \in I$. Se sabe que existe $\rho \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ tal que $\varphi(\rho) = t_\rho(M) = K$; de donde, $t_{\sigma_i}(M) \leq t_\rho(M)$ $\forall i \in I$ que implica $\sigma_i \leq \rho$ $\forall i \in I$. De aquí se deduce que $\bigvee_{i \in I} \sigma_i \leq \rho$ y por lo tanto, $\varphi\left(\bigvee_{i \in I} \sigma_i\right) \leq \varphi(\rho) = K$. En consecuencia, $\varphi\left(\bigvee_{i \in I} \sigma_i\right) = \bigvee_{i \in I} \varphi(\sigma_i)$. ■

Corolario 32 *Sea $\tau \in R$-tors. Si M es un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, entonces $Sub_{P_\tau TI}(M)$ es una retícula de Boole.*

Demostración.

Se sigue inmediatamente del corolario anterior y del Corolario 29. $\blacksquare$

Observación 10 *Es importante hacer notar que, por la Proposición 21, que la clase $Sub_{P_\tau TI}(M)$ es independiente de τ siempre y cuando M sea τ-pleno, esto es, $Sub_{P_\tau TI}(M) = \{N \leq M \mid N$ es totalmente invariante y esencialmente cerrado en $M\}$. Considerando esto y la Observación 9 de la 40, se tiene el siguiente corolario del Teorema 30.*

Corolario 33 *Sea $\tau \in R$-tors. Si M es un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, entonces $[\sigma, \sigma \vee \xi(M)] \cong Sub_{P_\tau TI}(M)\ \forall \sigma \in [\xi_M, \chi(M) \wedge \chi(E(M)/M)]$, donde $\xi_M = \xi(\{M/N \mid N \leq_{es} M\})$.*

Ejemplo 11 *Si se considera la teoría de torsión τ_{sp} del ejemplo 6, se tiene que todo módulo derecho es τ_{sp}-inyectivo.*

– Por [9, Proposición 8.2] *basta ver que si $M \in$ Mod-R, cualquier R-mor?smo de un ideal derecho τ_{sp}-denso de R en M se puede extender a un R-mor?smo de R en M. Sean $I \in \mathsf{L}_{\tau_{sp}}(R)$ y $f : I \to M$ un mor?smo. Entonces $R/I \in \mathsf{T}_{\tau_{sp}}$ implica que R/I es semisimple y proyectivo. De aquí que la inclusión $I \overset{i}{\hookrightarrow} R$ se escinde. De esta forma,*

se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[rr, shift left, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & R \arrow[ll, shift left, "j"] \arrow[dl, "g"] \\ & & M & \end{tikzcd}$$

donde $g = f \circ j$. –

Así, si $M \in$ *Mod-*R *es semisimple y singular, entonces* M *es* τ_{sp}*-pleno y absolutamente* τ_{sp}*-puro, de donde,* $[\tau_{sp}, \tau_{sp} \vee \xi(M)] \cong Sub_{P_{\tau_{sp}}TI}(M)$. ■

En los siguientes ejemplos 12, 13 se muestra que en el Teorema 30 se requiere la hipótesis de que M sea τ-pleno, en la parte (1), para tener la inyectividad de φ, y de que M sea absolutamente τ-puro, en la parte (2), para establecer el isomorfismo.

Ejemplo 12 *Sean* $R = \mathbb{Z}$, $\tau = \xi$ *y* $M = \mathbb{Z}$, *entonces* $[\xi, \xi(\mathbb{Z})] = \mathbb{Z}$*-tors. En este caso* M *no es* ξ*-pleno y tampoco es inyectiva la función* $\varphi : \mathbb{Z}$*-tors* $\to Sub_{P_{\tau}TI}(\mathbb{Z})$ *tal que* $\varphi(\sigma) = t_{\sigma}(\mathbb{Z})$ *ya que* $\forall \sigma \in \mathbb{Z}$*-tors tal que* $\sigma < \chi$, $t_{\sigma}(\mathbb{Z}) = 0$. ■

Ejemplo 13 *Sean* F *un campo,* $A = F^{(\aleph_0)}$ *y* P *la subálgebra de* $F^{\aleph_0}$ *generada por* (1) *y* A, *donde* (1) *denota al elemento unitario en el anillo* $F^{\aleph_0}$. *Los elementos de* P *son de la forma* $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x, x, x, ...)$ *con* $x_1, x_2, ..., x_n, x \in F$. *Se escribe para cada* $i \in \mathbb{N}$, $\overline{e_i}$, *el elemento que tiene uno en el lugar* n *y cero en los demás lugares, y* $\overline{e_i^c}$, *el elemento que tiene cero en el lugar* n *y uno en los demás lugares.*

Como se prueba a continuación, A *es un ideal máximo de* P, *que resulta ser el único ideal esencial derecho propio, y* $A \in$ *Mod-*P *es fiel y semisimple.*

– Si se define el morfismo $f : P \to F$ *como* $f(\overline{x}) = x$, *entonces* f *es un morfismo suprayectivo con núcleo* A *por lo que se tiene que* $P/A \cong F$, *de aquí que* A *es un ideal máximo de* P.

Por otra parte, sea $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x, x, x, ...) \in P$ *con* $x \neq 0$. *Si se toma* $\overline{y} \in P$ *con* $y_1 = y_2 = ... = y_{n+1} = 1$ *y* $y_i = 0 \ \forall i > n+1$, *entonces se tiene que* $0 \neq \overline{yx} = (x_1, x_2, ..., x_n, x, 0, 0, 0, ...) \in A$; *de donde,* A *es esencial en* P.

También se tiene que A *es semisimple ya que* F *es un* P*-módulo simple, de hecho* A *es el zoclo de* P, $A = zoc(P)$. *De aquí que si* $I \leq_{es} P$, *entonces* $A \leq I \leq P$. *Además,* $A < I$, *implica* $I = P$, *pues* A *es ideal máximo.*

Por otro lado, todo elemento $\overline{x}$ *en* A *se puede escribir como* $\sum_{i=1}^{n} \overline{e_i} x_i$ *con* $x_i \in F$, *para algún número entero* $n \geq 1$, *y como* $(0 : \overline{e_i}) = \{\overline{y} \in P \mid y_i = 0\} \ \forall i \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $(0 : A) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (0 : \overline{e_i}) = 0$ *y por lo tanto* A *es un* P*-módulo derecho fiel.* ■

Se puede ver a F *como un subanillo unitario de* P *si se considera* $F_0 = \{(a) = (a, a, a, ...) \mid a \in F\}$.

Sean $Q = M_{2 \times 2}(P)$, *el anillo de todas las matrices de* 2×2 *sobre* P, *y* R *el subanillo* $\begin{pmatrix} P & A \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$ *de* Q.

Si $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ *es un ideal derecho de* R, *entonces* $Z = 0$ *o* $Z = F_0$; X *es un ideal de* P; Y *es un* F*-subespacio de* A *y como* $AX \subseteq Y$, *si* $Y = 0$ *entonces* $X = 0$. *De aquí que los ideales derechos de* R *son* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} P & A \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *con* A' *un* F*-subespacio de* $A = zoc(P)$, $\begin{pmatrix} I & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *con* $I \leq P$, A' *un* F*-subespacio de* A, $IA \leq A'$, *y los de la forma* $\begin{pmatrix} I & A' \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$ *con* $I \leq P$, A' *un* F*-subespacio de* A, $IA \leq A'$.

Los ideales derechos mínimos de R *son de la forma* $\begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donde* $S \leq A$ *es un* ideal mínimo de P, y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$. De esta forma se tiene que el zoclo derecho de R es $zoc_d(R) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$; éste es un ideal derecho esencial de R ya que para cada $0 \neq r = \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{0} \\ 0 & (f) \end{pmatrix} \in R$, donde $\overline{x} = (x_1, ..., x_n, x, x, ...)$, $\overline{0} = (y_1, ..., y_m, 0, 0, ...)$ y $(f) = (f, f, f, ...)$, existe un elemento $s = \begin{pmatrix} (0) & (0) \\ 0 & (1) \end{pmatrix} \in R$ tal que $0 \neq rs \in zoc_d(R)$. Además, si $x \in R$ es tal que $x(zoc_d(R)) = 0$, entonces $x = 0$; así, R es un R-módulo no singular derecho. Consecuentemente, $R \in \mathbb{F}_{\tau_g}$, lo que significa que R es τ_g-pleno. Por otra parte, R no es absolutamente τ_g-puro puesto que $M = \begin{pmatrix} F^{\aleph_0} & A \\ 0 & F_0 \end{pmatrix} \in$ Mod-R y $R \underset{ess}{<} M$.

Ahora, sea $H = \begin{pmatrix} P & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. H es un ideal bilateral de R y por lo tanto es un submódulo de R totalmente invariante libre de τ_g-torsión, más aún, H es τ_g-puro en R ya que $R = H \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix}$ como R-módulo derecho. Sea $x = \begin{pmatrix} 0 & \overline{e}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$, y sea $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1) \end{pmatrix} \in R - H$. Se puede verificar que $(0 : x) = \{r \in R \mid xr = 0\} = H = \{r \in R \mid yr \in H\} = (H : y)$, de aquí que $H \neq t_\sigma(R)$ $\forall \sigma \in R$-tors por [15, Corolario de la Proposición 2.1], en particular, $H \neq t_\sigma(R)$ $\forall \sigma \in [\tau_g, \tau_g \vee \xi(R)] = [\tau_g, \chi]$. $\blacksquare$

Ahora, considerando el hecho de que $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole y la correspondencia biyectiva entre $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y $Sub_{P_\tau TI}(M)$ cuando M es un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro se verá que todo submódulo $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ tiene un complemento en $Sub_{P_\tau TI}(M)$. También se verá que bajo estas condiciones de M, una suma ?nita de submódulos τ-puros de M resulta ser un submódulo τ-puro de M.

Proposición 34 *Sea $\tau \in R$-tors, y sea $M \in$ Mod-R un módulo absolutamente τ-puro y τ-pleno. Si $K_1, K_2, ..., K_n$ son submódulos τ-puros de M, entonces $\sum_{i=1}^{n} K_i$ es absolutamente τ-puro.*

Demostración.

Basta probarlo para $n = 2$. Sean K_1 y K_2 submódulos τ-puros de M, entonces existen H_1 y H_2 submódulos de M tales que $M = K_1 \oplus H_1$ y $M = K_2 \oplus H_2$, por [9, Proposición 15.6]. *De aquí que K_1 y K_2 son módulos absolutamente τ-puros y τ-plenos, y $K_1 \cap K_2$ es un submódulo τ-puro de ambos. De esta manera, existen $L_1 \leq K_1$ y $L_2 \leq K_2$ tales que $K_1 = (K_1 \cap K_2) \oplus L_1$ y $K_2 = (K_1 \cap K_2) \oplus L_2$. Entonces $K_1 + K_2 = (K_1 \cap K_2) \oplus L_1 \oplus L_2$. Como $K_1 \cap K_2$, L_1 y L_2 son módulos τ-inyectivos y $K_1 + K_2 \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $K_1 + K_2$ es un módulo absolutamente τ-puro.*
$\blacksquare$

Corolario 35 *Sea $\tau \in R$-tors, y sea $M \in$ Mod-R un módulo absolutamente τ-puro y τ-pleno. Si $K_1, K_2, ..., K_n$ son submódulos τ-puros de M, entonces $\sum_{i=1}^{n} K_i$ es un submódulo τ-puro de M.*

Demostración.

Como $K_1 + K_2$ es absolutamente τ-puro, por la proposición anterior, y $M \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $K_1 + K_2$ es un submódulo τ-puro de M, por [9, Proposición 10.1]. $\blacksquare$

Proposición 36 *Sea $\tau \in R$-tors, y sea $M \in$ Mod-R un módulo absolutamente τ-puro y τ-pleno. Si $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$, entonces existe $N' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ tal que $N \oplus N' = M$.*

Demostración.

Sea $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ y sea $\sigma = \tau \vee \xi(N) \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$. Como $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole, existe $\sigma^c \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$, el complemento de σ en esta retícula. Por el Teorema 30, existe un submódulo totalmente invariante y τ-puro N' de M tal que $\sigma^c = \tau \vee \xi(N')$. Entonces $\tau \vee \xi(M) = \sigma \vee \sigma^c = (\tau \vee \xi(N)) \vee (\tau \vee \xi(N')) = \tau \vee \xi(N \oplus N')$.

Ahora, se afirma que $N \oplus N' = M$. Como N es un submódulo τ-puro de M, existe $K \leq M$ tal que $M = N \oplus K$, por [9, Proposición 15.6]. *Esto implica que $N' = t_{\sigma^c}(M) = t_{\sigma^c}(N) \oplus t_{\sigma^c}(K) = t_{\sigma^c}(K)$ porque $N \in \mathbb{T}_\sigma$; de aquí que N' es un submódulo τ-puro de K. Análogamente, como K es un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, entonces N' es un sumando directo de K, esto es, $K = N' \oplus K'$ donde $K' \leq M$. De esta manera, $M = N \oplus N' \oplus K'$ y por lo tanto $N \oplus N' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$. Como $\tau \vee \xi(N \oplus N') = \tau \vee \xi(M)$, se debe tener que $K' = 0$; así, $N \oplus N' = M$.* $\blacksquare$

Observación 11 *En el Ejemplo 13 se puede ver fácilmente que el único complemento de H en la retícula de ideales derechos de R es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix} \notin Sub_{P_{\tau_g} TI}(R)$, de aquí que no se puede omitir la hipótesis de que M sea absolutamente τ-puro en la Proposición 36.*

3.2 Estructura de $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y descomposiciones de la teoría de torsión $\chi(M)$

Sea $\tau \in R$-tors. En esta sección, nuevamente considerando un módulo τ-pleno M y por lo tanto que el intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ sea una retícula de Boole, se establecerán algunas equivalencias entre la estructura del intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, la estructura interna del módulo M y distintas formas de descomponer la teoría de torsión $\chi(M)$. Se darán condiciones en las que, siendo $[\tau, \tau \_ \xi(M)]$ una retícula atómica, los átomos sean de un tipo especí?co en términos de la estructura interna de M. Estas condiciones llevarán a distintas descomposiciones de $\chi(M)$ como el ín?mo de ciertas familias de teorías de torsión, correspondientes al tipo especí?co de átomos que se considere.

Se empezará por dar algunas condiciones necesarias y su?cientes para determinar que $\tau \_ \xi(M)$ es un átomo en el conjunto de generalizaciones de la teoría de torsión τ. Dentro de éstas se involucra el concepto de τ-A-módulo, que fue estudiado en [6], y el de teoría de torsión irreducible, los cuales se de?nen a continuación.

De?nición 15 *Sean τ 2 R-tors y M 2 Mod-R. Se dice que M es un τ-A-módulo si M 2 F_τ y $\tau \_ \xi(M)$ es un átomo en $gen(\tau)$.*

De?nición 16 *Una teoría de torsión τ 2 R-tors es irreducible si $\sigma_\tau^?$ 2 fτ, χg para cada elemento σ 2 R-tors, donde $\sigma_\tau^?$ es el pseudocomplemento de σ relativo a τ.*

En [9, Proposición 32.1] se prueba que para una teoría de torsión τ son equivalentes las siguientes a?rmaciones:

i. τ es irreducible;

ii. Si τ^0, τ^{00} 2 R-tors, entonces τ^0 ^ τ^{00} · τ =) τ^0 · τ o τ^{00} · τ;

iii. Si τ^0, τ^{00} 2 R-tors, entonces τ^0 ^ τ^{00} = τ =) τ^0 = τ o τ^{00} = τ.

Proposición 37 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *$\tau \_ \xi(M)$ es un átomo en $gen(\tau)$.*

(2) *$E_\tau(M)$ es un τ-A-módulo.*

(3) *$\chi(M)$ es un elemento irreducible de R-tors.*

(4) *Los únicos submódulos τ-puros totalmente invariantes de $E_\tau(M)$ son 0 y $E_\tau(M)$.*

Demostración.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) *Se sigue de* [6, Proposiciones 2.4, 2.9].

(1) $\Rightarrow$ (3) *Por (1) se tiene que M es un τ-$\mathbb{A}$-módulo y por lo tanto cualquier $0 \neq N \leq M$ también lo es, y además $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(N)$* [6, Proposición 2.4]*; así, por* [6, Corolario 2.16] *$\chi(N) = \chi(M)$ $\forall 0 \neq N \leq M$. Entonces $\chi(M)$ es un elemento irreducible de R-tors, por* [6, Corolario 2.17].

(3) $\Rightarrow$ (4) *Supóngase que $0 \leq N \leq E_\tau(M)$ es un submódulo τ-puro totalmente invariante de $E_\tau(M)$. Entonces existe una teoría de torsión $\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(E_\tau(M))]$ tal que $t_\sigma(E_\tau(M)) = N$, por el Teorema 30. Ahora, por el Corolario 29, σ tiene un complemento en $[\tau, \tau \vee \xi(E_\tau(M))]$; sea éste σ^c. Si $N' = t_{\sigma^c}(E_\tau(M))$, entonces $E_\tau(M) = N \oplus N'$, por la Proposición 36. Esto significa que $\chi(M) = \chi(E_\tau(M)) = \chi(N \oplus N') = \chi(N) \wedge \chi(N')$. Como $\chi(M)$ es irreducible, $\chi(M) = \chi(N)$ o $\chi(M) = \chi(N')$.*

Si $\chi(M) = \chi(N)$, entonces $N' \in \mathbb{F}_{\chi(N)}$; de aquí que existe un submódulo $0 \neq N'' \leq N'$ y un morfismo distinto de cero $f : N'' \to N$ tal que $0 \neq f(N'') \in \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{T}_{\sigma^c} = \mathbb{T}_{\sigma \wedge \sigma^c} = \mathbb{T}_\tau$. Entonces $f(N'') \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{F}_\tau = 0$, que es una contradicción a menos que $N' = 0$, y por lo tanto $N = E_\tau(M)$. Análogamente, si $\chi(M) = \chi(N')$, se prueba que $N = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) *Sea $\rho \in [\tau, \tau \vee \xi(M)] = [\tau, \tau \vee \xi(E_\tau(M))]$. Si $N = t_\rho(E_\tau(M))$, entonces N es un submódulo τ-puro totalmente invariante de $E_\tau(M)$. Por consiguiente, $N = 0$ o $N = E_\tau(M)$. De aquí que $\rho = \tau$ o $\rho = \tau \vee \xi(M)$, respectivamente, por el Teorema 30.* $\blacksquare$

Teorema 38 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es una retícula atómica.*

(2) *Existe una familia independiente* $\{M_i\}_{i \in I}$ *de submódulos de* M *tal que* M_i *es un* τ-A-*módulo para cada* $i \in I$, $\tau \vee \xi(M_i) \neq \tau \vee \xi(M_j)$ *si* $i \neq j$, *y* $\bigoplus_{i \in I} M_i \leq_{es} M$.

(3) $\chi(M)$ *es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión* $\{\chi(E_i)\}_{i \in I}$, *donde* $E_i \leq M$ *y* E_i *es un* τ-A-*módulo* $\forall i \in I$.

(4) $\chi(M)$ *es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión irreducibles, y esta descomposición es única.*

(5) *Si* $0 \neq N \leq M$, *entonces* $\chi(N)$ *es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión irreducibles, y esta descomposición es única.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sea* $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ *el conjunto de átomos en* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$. *Si* $M_i = t_{\sigma_i}(M)$, *entonces* $\sigma_i = \tau \vee \xi(M_i)$ *y* M_i *es un* τ-A-*módulo, puesto que* σ_i *es un átomo. Se afirma que la familia* $\{M_i\}_{i \in I}$ *es una familia independiente de submódulos de* M. *Sean* $j \in I$ *y* $N = M_j \cap \sum_{i \neq j} M_i$, *entonces* $N \in \mathbb{T}_{\sigma_j}$ *y* $N \in \mathbb{T}_{\bigvee_{i \neq j} \sigma_i}$, *de aquí que* $N \in \mathbb{T}_{\sigma_j \wedge \bigvee_{i \neq j} \sigma_i} = \mathbb{T}_{\bigvee_{i \neq j} (\sigma_j \wedge \sigma_i)} = \mathbb{T}_\tau$, *porque* $\sigma_j \wedge \sigma_i = \tau \ \forall i \neq j$. *Como* $N \leq M \in \mathbb{F}_\tau$, *se tiene que* $N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{F}_\tau = \{0\}$ *y por lo tanto* $N = 0$. *Consecuentemente se tiene que* $\{M_i\}_{i \in I}$ *es una familia independiente de submódulos de* M *que son* τ-A-*módulos. También se tiene que* $\tau \vee \xi(M_i) \neq \tau \vee \xi(M_j)$ *si* $i \neq j$, *por construcción. Ahora sólo falta probar que* $\bigoplus_{i \in I} M_i \leq_{es} M$.

Supóngase que $\bigoplus_{i \in I} M_i$ *no es un submódulo esencial de* M. *Sea* $0 \neq K \leq M$ *un pseudocomplemento de* $\bigoplus_{i \in I} M_i$, *entonces* $\tau \vee \xi(K) \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$. *Como* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es una retícula localmente atómica, por la Proposición 2, entonces* $\tau \vee \xi(K) = \bigvee_{j \in J} \sigma_j$ *para algún* $J \subseteq I$. *Así,* $K \in \mathbb{T}_{\bigvee_{j \in J} \sigma_j}$, *que significa que existe* $j_0 \in J$ *tal que* $K \notin \mathbb{F}_{\sigma_{j_0}}$. *Pero* $t_{\sigma_{j_0}}((\bigoplus_{i \in I} M_i) \cap K) = t_{\sigma_{j_0}}(\bigoplus_{i \in I} M_i) \cap t_{\sigma_{j_0}}(K) \leq t_{\sigma_{j_0}}(M) = M_{j_0}$, *que implica* $t_{\sigma_{j_0}}(K) = 0$. *De aquí que* $K = 0$, *lo cual es una contradicción. Por lo tanto,* $\bigoplus_{i \in I} M_i \leq_{es} M$.

(2) $\Rightarrow$ (3) *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia independiente de submódulos de* M *tal que* M_i *es un* τ-$\mathcal{A}$-*módulo para cada* $i \in I$, $\tau \vee \xi(M_i) \neq \tau \vee \xi(M_j)$ *si* $i \neq j$, *y* $\bigoplus_{i\in I} M_i \leq_{es} M$. *Por la Observación 4, la última condición implica que* $\chi(M) = \chi(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigwedge_{i\in I} \chi(M_i)$. *Como* $\tau \vee \xi(M_i) \neq \tau \vee \xi(M_j)$ *si* $i \neq j$, *entonces* $\chi(M_i) \neq \chi(M_j)$ *si* $i \neq j$, *por* [6, Corolario 2.16].

Ahora se verá que esta descomposición es irredundante. Si se supone que existe $j \in I$ *tal que* $\bigwedge_{i\neq j} \chi(M_i) = \chi(M)$, *entonces* $M_j \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\bigwedge_{i\neq j}\chi(M_i)}$; *de donde debe existir* $k \in I$ *tal que* $k \neq j$ *y* $M_j \notin \mathbb{T}_{\chi(M_k)}$. *En consecuencia,* $Hom_R(M_j, E(M_k)) \neq 0$, *lo que significa que existen submódulos* $M_j'' < M_j' \leq M_j$ *y un monomorfismo* $M_j' \big/ M_j'' \hookrightarrow M_k \in \mathbb{F}_\tau$. *De aquí se obtiene, por* [6, Proposición 2.4]*, que* $\tau \vee \xi(M_j) = \tau \vee \xi\big(M_j'\big) = \tau \vee \xi\big(M_j' \big/ M_j''\big) = \tau \vee \xi(M_k)$, *lo cual es una contradicción.*

(3) $\Rightarrow$ (1) *Sea* $\chi(M) = \bigwedge_{i\in I} \chi(E_i)$ *con* E_i *un* τ-$\mathcal{A}$-*módulo y* $E_i \leq M$ *para cada* $i \in I$, *una descomposición irredundante. Se probará que* $\tau \vee \xi(M)$ *es el supremo de una familia de átomos en* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$.

Sean $\sigma_i = \tau \vee \xi(E_i)$ *y* $M_i = t_{\sigma_i}(M)$, *entonces* $\sigma_i = \tau \vee \xi(M_i)$, *por el Teorema 30,1; además, si* $N = M_j \cap \sum_{i\neq j} M_i$ *para alguna* $j \in I$, *entonces* $N \in \mathbb{T}_{\sigma_j \wedge (\bigvee_{i\neq j} \sigma_i)} = \mathbb{T}_{\bigvee_{i\neq j}(\sigma_i \wedge \sigma_j)} = \mathbb{T}_\tau$, *i.e.* $N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{F}_\tau = \{0\}$; *de aquí que la suma* $\sum_{i\in I} M_i$ *es directa.*

Ahora se afirma que $\tau \vee \xi(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \tau \vee \xi(M)$. *Sea* $\sigma = \tau \vee \xi(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ *y supóngase que* $\sigma < \tau \vee \xi(M)$. *Como* $\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *y esta retícula es de Boole, existe* $\sigma^c \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$; *y, por el Teorema 30,* $\sigma^c = \tau \vee \xi(K)$ *donde* $K = t_{\sigma^c}(M)$. *Sin embargo,* $K \leq M$ *implica que* $K \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\bigwedge_{i\in I}\chi(E_i)} = \mathbb{F}_{\bigwedge_{i\in I}\chi(M_i)}$, *por* [6, Corolario 2.16]. *Entonces existe* $j \in I$ *tal que* $K \notin \mathbb{T}_{\chi(M_j)}$, *de donde existen submódulos* $K'' < K' \leq K$ *y un monomorfismo* $K'/K'' \hookrightarrow M_j \in \mathbb{T}_\sigma$. *Por otra parte, como* $K \in \mathbb{T}_{\sigma^c}$, *entonces* $K'/K'' \in \mathbb{T}_{\sigma^c} \cap \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau$. *De esta manera se tiene que* $K'/K'' \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{F}_\tau = \{0\}$, *puesto que* $M_j \in \mathbb{F}_\tau$; *de aquí que,* $K' = K''$ *lo cual es una contradicción; así pues,* $K = 0$ *y* $\sigma = \tau \vee \xi(M)$. *Por lo tanto,* $\tau \vee \xi(M) = \tau \vee \xi(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigvee_{i\in I}(\tau \vee \xi(M_i))$ *es el supremo de la familia de átomos* $\{\tau \vee \xi(M_i)\}_{i\in I}$, *lo que es equivalente a que* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *sea atómica, por la Proposición 2.*

(3) $\Rightarrow$ (4) *Una consecuencia inmediata de (3) es que* $\chi(M)$ *es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión irreducibles, puesto que* $\chi(M) = \bigwedge_{i\in I} \chi(E_i)$, *con* $E_i \leq M$ *y* E_i *un* τ-A-*módulo* $\forall i \in I$, *implica que* $\chi(E_i)$ *es un elemento irreducible de* R-*tors* [6, Proposición 2.4, y Corolarios 2.16 y 2.17].

Ahora, se considera $\{\alpha_j\}_{j\in J} \subseteq R$-*tors una familia irredundante de teorías de torsión irreducibles tales que* $\chi(M) = \bigwedge_{j\in J} \alpha_j$. *Para cualquier* $i \in I$, $E_i \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\bigwedge_{j\in J}\alpha_j}$, *que significa que existe* $j_i \in J$ *tal que* $E_i \notin \mathbb{T}_{\alpha_{j_i}}$. *Sea* $\alpha_{j_i} = \chi(L_{j_i})$ *con* L_{j_i} *un* R-*módulo inyectivo. Entonces* $Hom_R(E_i, L_{j_i}) \neq 0$; *de donde se deduce que hay dos submódulos* $E_i'' < E_i' \leq E_i$ *y un monomorfismo* $E_i'/E_i'' \hookrightarrow L_{j_i}$. *Como* $\tau \leq \chi(M) \leq \alpha_{j_i}$ *y* $L_{j_i} \in \mathbb{F}_{\alpha_{j_i}}$, *se tiene que* $L_{j_i} \in \mathbb{F}_\tau$ *y por lo tanto* $E_i'/E_i'' \in \mathbb{F}_\tau$; *además,* M τ-*pleno implica que* E_i' *es* τ-*pleno, y como* E_i'' *es* τ-*puro en* E_i' *se tiene que* E_i'/E_i'' *es* τ-*pleno, por la Proposición 16. Sea* $N_i = E_i'/E_i''$. *Se considera* $N = \sum \{N_\gamma \leq L_{j_i} \mid N_\gamma \text{ es } \tau\text{-pleno}\}$ *y* $K \leq L_{j_i}$ *tal que* $N \oplus K \leq_{es} L_{j_i}$; *entonces* $\chi(N) \wedge \chi(K) = \chi(L_{j_i}) = \alpha_{j_i}$. *Dado que* α_{j_i} *es irreducible,* $\alpha_{j_i} = \chi(N)$ *o* $\alpha_{j_i} = \chi(K)$. *Si* $\alpha_{j_i} = \chi(K)$, *usando un argumento similar al anterior, se puede probar que existe un submódulo* τ-*pleno de* K; *pero esto no es posible, por como está definido* N. *Entonces* $\alpha_{j_i} = \chi(N)$, *esto es,* $\chi(N)$ *es irreducible, de donde* $E_\tau(N)$ *es un* τ-A-*módulo, por la Proposición 37. Como la teoría de torsión cogenerada por cada submódulo de un* τ-A-*módulo es igual a la teoría de torsión cogenerada por el* τ-A-*módulo, se tiene que* $\chi(N_i) = \chi(E_\tau(N)) = \chi(N) = \chi(L_{j_i}) = \alpha_{j_i}$; *pero* $\chi(N_i) = \chi(E_i)$ *implica que* $\chi(E_i) = \alpha_{j_i}$. *Por lo tanto, como ambas descomposiciones son irredundantes se tiene que para cada* $\chi(E_i)$ *existe una* α_{j_i} *tal que* $\chi(E_i) = \alpha_{j_i}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) *Sea* $\chi(M) = \bigwedge_{i\in I} \chi(E_i)$, *donde* $\chi(E_i)$ *es irreducible para cada* $i \in I$, *una descomposición irredundante. Sin pérdida de generalidad se puede tomar cada* E_i *inyectivo.*

Se afirma que $M \notin \mathbb{T}_{\chi(E_i)}$, $\forall i \in I$. *Supóngase que existe* $j \in I$ *tal que* $M \in \mathbb{T}_{\chi(E_j)}$.

Como $M \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\bigwedge_{i \in I} \chi(E_i)} = \mathbb{F}_{\chi(E_j) \wedge (\bigwedge_{i \neq j} \chi(E_i))}$, *entonces* $M \in \mathbb{F}_{\bigwedge_{i \neq j} \chi(E_i)}$; *de donde* $\bigvee_{i \neq j} \chi(E_i) \leq \chi(M)$. *Pero, como* $\bigvee_{i \in I} \chi(E_i)$ *es una descomposición irredundante,* $\chi(M) = \bigvee_{i \in I} \chi(E_i) < \bigvee_{i \neq j} \chi(E_i)$ *lo cual es una contradicción. Por consiguiente* $M \notin \mathbb{T}_{\chi(E_i)}$, $\forall i \in I$. *De esto se deduce que para cada* $i \in I$, $Hom_R(M, E_i) \neq 0$, *y entonces existen submódulos* $K_i < N_i \leq M$ *y un monomorfismo* $N_i / K_i \hookrightarrow E_i$. *Como* M *es* τ*-pleno y* $N_i / K_i \in \mathbb{F}_{\chi(E_i)} \subseteq \mathbb{F}_\tau$, N_i / K_i *es* τ*-pleno; así, cada* E_i *contiene un submódulo* τ*-pleno.*

Sea $M_i = \sum \{L \leq E_i \mid L \text{ es } \tau\text{-pleno}\}$, *entonces* M_i *es el mayor submódulo* τ*-pleno de* E_i [19, Proposición 1.7]. *Se afirma que* $\chi(M_i) = \chi(E_i)$ $\forall i \in I$. *Si* $M_i \leq_{es} E_i$, *la afirmación se satisface. Si* M_i *no es esencial en* E_i, *entonces existe* $0 \neq K_i \leq E_i$ *un pseudocomplemento de* M_i *en* E_i; *de donde* $M_i \oplus K_i \leq_{es} E_i$. *Por lo tanto,* $\chi(M_i) \wedge \chi(K_i) = \chi(M_i \oplus K_i) = \chi(E_i)$. *Como* $\chi(E_i)$ *es irreducible, se tiene que* $\chi(E_i) = \chi(M_i)$ *o* $\chi(E_i) = \chi(K_i)$.

Si $\chi(E_i) = \chi(K_i)$, *entonces* $M \notin \mathbb{T}_{\chi(K_i)}$, *por lo que se probó anteriormente. Entonces, con un argumento similar al utilizado para* E_i, K_i *contiene un módulo* τ*-pleno. Pero esto es imposible, por la definición de* M_i. *De aquí que* $\chi(E_i) = \chi(M_i)$.

Por otra parte, como M_i *es* τ*-pleno y* $\chi(E_i)$ *es irreducible se tiene que* $E_\tau(M_i)$ *es un* τ-$\mathbb{A}$*-módulo, por la Proposición 37. Así,* $\chi(M) = \bigvee_{i \in I} \chi(E_i) = \bigvee_{i \in I} \chi(M_i)$ *es una descomposición irredundante de teorías de torsión cogeneradas por* τ-$\mathbb{A}$*-módulos. Por otro lado,* $M_i \in \mathbb{F}_{\chi(M)}$ *implica que* $Hom_R(M_i, E(M)) \neq 0$, *lo que significa que existen submódulos* $K_i < K_i' \leq M_i$ *y un monomorfismo* $K_i'/K_i \hookrightarrow M$. *Si* $N_i = K_i'/K_i$, *entonces* $N_i \leq M$ *es un* τ-$\mathbb{A}$*-módulo con* $\chi(N_i) = \chi(M_i)$. *Por lo tanto,* $\chi(M) = \bigvee_{i \in I} \chi(N_i)$ *es una descomposición irredundante de teorías de torsión cogeneradas por* τ-$\mathbb{A}$*-módulos que son submódulos de* M.

(1) $\Rightarrow$ (5) *Sea* $N \leq M$, *entonces* N *es* τ*-pleno. Como* $[\tau, \tau \vee \xi(N)] \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$, *entonces* $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ *también es una retícula atómica. De esto se deduce que* $\chi(N)$ *es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión irreducibles, y esta descomposición es única, por* (1) $\Rightarrow$ (4).

(5) $\Rightarrow$ (4) *Es inmediato tomando $N = M$.* $\blacksquare$

Para el caso en el que se tenga una descomposición de $\chi(M)$ como el ínfimo de una familia de teorías de torsión fuertemente irreducibles también se pueden dar condiciones equivalentes. A continuación se menciona este concepto y otros que se consideran en las equivalencias del resultado que se prueba.

Definición 17 *Una teoría de torsión $\tau \in R$-tors es fuertemente irreducible si para cualquier subconjunto no vacío U de R-tors que satisface $\wedge U \leq \tau$ existe un elemento $\sigma \in U$ tal que $\sigma \leq \tau$.*

Es claro que toda teoría de torsión fuertemente irreducible es irreducible.

Definición 18

(1) *Un R-módulo derecho M, distinto de cero, es decisivo si M es de τ-torsión o libre de τ-torsión para cada $\tau \in R$-tors.*

(2) *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R. M es un τ-$\mathcal{D}$-módulo si M es un τ-$\mathcal{A}$-módulo y existe un módulo decisivo D tal que $\chi(M) = \chi(D)$. Ver* [7] *para mayores detalles acerca de estos módulos.*

En [9, Proposición 32.7] se prueba que una teoría de torsión $\tau \in R$-tors es fuertemente irreducible si y sólo si $\tau = \chi(D)$ para algún R-módulo derecho decisivo D.

A continuación se da un resultado que es necesario para la demostración del siguiente teorema.

Lema 39 *Si N es un τ-$\mathcal{D}$-módulo derecho, entonces N contiene un submódulo decisivo.*

Demostración.

Como N es un τ-$\mathbf{D}$-módulo, existe un módulo decisivo D tal que $\chi(N) = \chi(D)$. Entonces $D \notin \mathbb{T}_{\chi(N)}$, lo que significa que $Hom_R(D, E(N)) \neq 0$; de donde existen submódulos $D'' < D' \leq D$ y un monomorfismo $D'/D'' \hookrightarrow N$. Se afirma que D'/D'' es decisivo. Sea $\alpha \in R$-tors; como D es decisivo, $D \in \mathbb{T}_\alpha$ o $D \in \mathbb{F}_\alpha$. En el primer caso, $D' \in \mathbb{T}_\alpha$ y por lo tanto $D'/D'' \in \mathbb{T}_\alpha$. En el segundo caso, $\alpha \leq \chi(D) = \chi(N) = \chi(D'/D'')$ que implica que $D'/D'' \in \mathbb{F}_\alpha$. Así se tiene que D'/D'' es un R-módulo decisivo contenido en N.

Teorema 40 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *$[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula atómica, y cada átomo en esta retícula se puede escribir como $\tau \vee \xi(D)$ con D un módulo decisivo.*

(2) *Existe una familia independiente $\{M_i\}_{i \in I}$ de submódulos de M tal que M_i es τ-$\mathbf{D}$-módulo para cada $i \in I$, $\tau \vee \xi(M_i) \neq \tau \vee \xi(M_j)$ si $i \neq j$, y $\bigoplus_{i \in I} M_i \leq_{es} M$.*

(3) *$\chi(M)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión $\{\chi(D_i)\}_{i \in I}$, donde $D_i \leq M$ y D_i es un τ-$\mathbf{D}$-módulo $\forall i \in I$.*

(4) *$\chi(M)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión fuertemente irreducibles, y esta descomposición es única.*

(5) *Si $0 \neq N \leq M$, entonces $\chi(N)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión fuertemente irreducibles, y esta descomposición es única.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sea $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ el conjunto de átomos en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$. Si $M_i = t_{\sigma_i}(M)$, entonces $\sigma_i = \tau \vee \xi(M_i)$. Por (1), $\sigma_i = \tau \vee \xi(D_i)$ con D_i un módulo decisivo. Como D_i es decisivo, $D_i \in \mathbb{F}_\tau$; de aquí que D_i es un τ-$\mathbf{D}$-módulo. De esta manera se tiene que $\chi(M_i) = \chi(D_i)$, por* [6, Corolario 2.16]. *Así, M_i es un τ-$\mathbf{D}$-módulo. Ahora, la*

condición (2) se prueba usando los mismos argumentos que se dieron en (1) $\Rightarrow$ (2) *del Teorema 38.*

(2) $\Rightarrow$ (3) *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia independiente de submódulos de* M *tales que* M_i *es* τ-$\mathcal{D}$*-módulo para cada* $i\in I$, $\tau\vee\xi(M_i)\neq\tau\vee\xi(M_j)$ *si* $i\neq j$, *y* $\bigoplus_{i\in I} M_i \leq_{es} M$. *Entonces* $\chi(M_i)=\chi(D_i)$ *con* D_i *decisivo* $\forall i\in I$, *y* $\chi(M)=\bigwedge_{i\in I}\chi(M_i)=\bigwedge_{i\in I}\chi(D_i)$, *donde* $\chi(D_i)\neq\chi(D_j)$ *si* $i\neq j$ *por* [6, Corolario 2.16]. *Ahora, se puede usar el mismo argumento que en* (2) $\Rightarrow$ (3) *del Teorema 38 para deducir que esta descomposición es irredundante.*

(3) $\Rightarrow$ (4) *Sea* $\chi(M)=\bigwedge_{i\in I}\chi(D_i)$ *una descomposición irredundante con* $D_i\leq M$ *y* D_i *un* τ-$\mathcal{D}$*-módulo* $\forall i\in I$. *Como* $\chi(D_i)$ *es fuertemente irreducible* $\forall i\in I$, *se tiene que* $\chi(M)$ *es el ínfimo de la familia* $\{\chi(D_i)\}_{i\in I}$ *de teorías de torsión fuertemente irreducibles y ésta es una descomposición irredundante. La unicidad de la descomposición se puede probar con un argumento similar al usado en* (3) $\Rightarrow$ (4) *del teorema anterior.*

(4) $\Rightarrow$ (1) *Por* (4)*, se sabe que* $\chi(M)=\bigwedge_{i\in I}\chi(D_i)$ *con* D_i *un módulo decisivo* $\forall i\in I$. *Se puede usar el mismo argumento que en la prueba de* (3) $\Rightarrow$ (4) *del Teorema 38 para probar que* $M\notin\mathbb{T}_{\chi(D_i)}$, $\forall i\in I$. *Esto significa que* $Hom_R(M,E(D_i))\neq 0\ \forall i\in I$, *lo cual implica que existe un submódulo* N_i *de* D_i *que es* τ*-pleno y que* $\chi(N_i)=\chi(D_i)$ *es irreducible. Entonces* $E_\tau(N_i)$ *es un* τ-$\mathcal{A}$*-módulo, por la Proposición 37, de hecho,* $E_\tau(N_i)$ *es un* τ-$\mathcal{D}$*-módulo. Ahora, se puede argumentar en forma análoga a la que se hizo al final de la demostración de* (4) $\Rightarrow$ (3) *del Teorema 38 para probar que existe un* τ-$\mathcal{D}$*-módulo,* $D_i'\leq M$, $\forall i\in I$ *tal que* $\chi(D_i')=\chi(N_i)$. *De esta manera se tiene que* $\chi(M)=\bigwedge_{i\in I}\chi(D_i')$ *con* $D_i'\leq M$ *y* D_i' *un* τ-$\mathcal{D}$*-módulo* $\forall i\in I$; *por lo tanto la retícula* $[\tau,\tau\vee\xi(M)]$ *es atómica, por el Teorema 38.*

Ahora se verá cómo son los átomos en $[\tau,\tau\vee\xi(M)]$. *Sea* $\sigma\in[\tau,\tau\vee\xi(M)]$ *un átomo. Si* $N=t_\sigma(M)$, *entonces* $\sigma=\tau\vee\xi(N)$ *y* $N\in\mathbb{F}_{\chi(M)}=\mathbb{F}_{\bigwedge_{i\in I}\chi(D_i')}$. *Así, considerando que* $N\notin\mathbb{T}_{\chi(D_j')}$ *para alguna* $j\in I$, *se puede probar que* $\chi(N)=\chi\left(D_j'\right)$. *Entonces* N *es un* τ-$\mathcal{D}$*-módulo. Además, por el Lema 39 existe un submódulo* *decisivo D de N y, de esta forma se puede concluir que $\sigma = \tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(D)$.*

(1) $\Rightarrow$ (5) *Sea $0 \neq N \leq M$. Entonces N es τ-pleno, y $[\tau, \tau \vee \xi(N)] \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ que implica que $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ es atómica, por (1). De hecho, por (1), también se tiene que cada átomo de $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ se puede escribir como $\tau \vee \xi(D)$ con D un módulo decisivo. Por consiguiente $\chi(N)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión fuertemente irreducibles, y esta descomposición es única, por* (1) $\Rightarrow$ (4).

(5) $\Rightarrow$ (4) *Es una consecuencia inmediata de* (5) *ya que se trata de un caso particular.* ∎

Ahora se presenta el caso en el que los átomos en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ se pueden escribir como $\tau \vee \xi(C)$ con C un módulo τ-cocrítico (Ejemplo 1). Entre las equivalencias se consideran teorías de torsión primas para la descomposición de $\chi(M)$; este concepto se define a continuación.

Definición 19 *Una teoría de torsión $\sigma \in R$-tors es prima si $\sigma = \chi(C)$ para algún R-módulo derecho cocrítico C, esto es, $\sigma = \chi(C)$ con C un R-módulo derecho ρ-cocrítico, para alguna $\rho \in R$-tors.*

El concepto de teoría de torsión prima fue introducido por Goldman en [12].

Como los R-módulos derechos cocríticos son uniformes, toda teoría de torsión prima sobre Mod-R es irreducible, por [9, Proposición 32.2].

Teorema 41 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *$[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula atómica, y cada átomo en esta retícula se puede escribir como $\tau \vee \xi(C)$ con C un R-módulo τ-cocrítico.*

(2) *Cada submódulo distinto de cero de M contiene un submódulo uniforme.*

(3) *$\chi(M)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión $\{\chi(C_i)\}_{i \in I}$,*

donde $C_i \leq M$ y C_i es τ-cocrítico $\forall i \in I$.

(4) *$\chi(M)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión primas, y esta descomposición es única.*

(5) *Si $0 \neq N \leq M$, entonces $\chi(N)$ es el ínfimo de una familia irredundante de teorías de torsión primas, y esta descomposición es única.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sea $0 \neq N \leq M$. Como $[\tau, \tau \vee \xi(N)] \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$, entonces $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ satisface las mismas condiciones de* (1) *para $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$.*

Sea $\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(N)]$ un átomo, entonces $\sigma = \tau \vee \xi(t_\sigma(N)) = \tau \vee \xi(C)$ con C un R-módulo derecho τ-cocrítico, por (1) *y Teorema 30. En consecuencia, $t_\sigma(N) \in \mathbb{T}_{\tau \vee \xi(C)}$, de donde $t_\sigma(N) \notin \mathbb{F}_{\xi(C)}$. De aquí que existe un morfismo $0 \neq f : C \to E(t_\sigma(N))$. De esta forma, como C es τ-cocrítico, existe un submódulo C' de C y un monomorfismo $C' \hookrightarrow t_\sigma(N)$. Por* [9, Proposición 14.3], *C' es τ-cocrítico; así, N contiene un submódulo τ-cocrítico y consecuentemente un submódulo uniforme.*

(2) $\Rightarrow$ (3) *Como M contiene un submódulo uniforme, por el Lema de Zorn debe existir una familia máxima independiente $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de submódulos uniformes de M y por lo tanto de submódulos τ-cocríticos. Se afirma que $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es esencial en M, ya que si no fuera esencial habría un pseudocomplemento $K \neq 0$ de $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ en M, el cual contendría un submódulo uniforme. Esto no es posible. Así, por* [6, Corolario 2.6] *la familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ satisface la condición 2 del Teorema 38 que implica que $\chi(M)$ se puede expresar de una manera irredundante como $\chi(M) = \bigwedge_{i \in I} \chi(E_i)$ con E_i un τ-A-módulo y $E_i \leq M$ para cada $i \in I$. Por (2)., cada E_i contiene un submódulo uniforme C_i. Por lo tanto, $C_i \leq M$ es τ-cocrítico $\forall i \in I$ y $\chi(M) = \bigwedge_{i \in I} \chi(E_i) = \bigwedge_{i \in I} \chi(C_i)$ es una descomposición irredundante.*

Ahora, se pueden usar argumentos similares a los dados en los teoremas 38 y 40 para obtener las demostraciones de (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4). $\blacksquare$

Corolario 42 *Sea M un R-módulo τ-pleno. Si $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula atómica, y cada átomo en esta retícula se puede escribir como $\tau \vee \xi(C)$ con C un módulo τ-cocrítico, entonces $\sum \{U \leq M \mid U \text{ es uniforme}\} \leq_{es} M$.*

El siguiente paso en esta investigación es estudiar la interacción que se tiene entre las propiedades de la retícula $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ y la estructura interna de M cuando M es un R-módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro. Lo que resta de este capítulo está dedicado a tal efecto.

Lema 43 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R tales que M es τ-pleno y absolutamente τ-puro. Entonces se satisfacen las condiciones siguientes:*

(1) *Si $K, N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$, entonces $K \cap N \in Sub_{P_\tau TI}(N)$.*

(2) *Si $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$, entonces $Sub_{P_\tau TI}(N) \subseteq Sub_{P_\tau TI}(M)$.*

Demostración.

(1) $N/K \cap N \cong N + K/K \leq M/K \in \mathbb{F}_\tau \Rightarrow K \cap N$ *es τ-puro en N. Por otra parte, si $f \in End_R(N)$, entonces f se puede extender a un endomorfismo $\overline{f} \in End_R(M)$, ya que M es absolutamente τ-puro; de aquí que $f(K \cap N) = \overline{f}(K \cap N) \subseteq K \cap N$. Así se tiene que $K \cap N \in Sub_{P_\tau TI}(N)$.*

(2) *Sea $K \in Sub_{P_\tau TI}(N)$. Como N también es un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro, entonces existe $K' \in Sub_{P_\tau TI}(N)$ tal que $K \oplus K' = N$, por la Proposición 36. Por la misma proposición existe $N' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ tal que $N \oplus N' = M$; de esta forma se tiene que $K \oplus K' \oplus N' = M$. En consecuencia, K es τ-puro en M. Por otro lado, para cualquier morfismo $f : M \to M$, $f(N) \subseteq N$, de donde, si se toma la restricción a N, se puede concluir que $f(K) \subseteq K$. Por lo tanto, $Sub_{P_\tau TI}(N) \subseteq Sub_{P_\tau TI}(M)$.*
$\blacksquare$

Tomando en cuenta esto, se obtienen nuevos resultados que se siguen del Teorema 30.

Proposición 44 *Sea $\tau \in R$-tors y sea $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro. Si $N, K, K' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ son tales que $N \oplus K = N \oplus K' = M$, entonces $K = K'$.*

Demostración.

Sea $\sigma = \tau \vee \xi(N)$. Por el Teorema 30, $K = t_\rho(M)$ y $K' = t_{\rho'}(M)$, donde $\rho = \tau \vee \xi(K)$ y $\rho' = \tau \vee \xi(K')$. Entonces ρ y ρ' son complementos de σ en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, ya que $\rho \vee \sigma = \tau \vee \xi(K) \vee \tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(K) \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(K \oplus N) = \tau \vee \xi(M)$ y $\rho \wedge \sigma = \tau$, puesto que $t_{\rho \wedge \sigma}(M) = t_\rho(M) \cap t_\sigma(M) = K \cap N = 0 = t_\tau(M)$. Como el intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole, $\rho = \rho'$, de donde se deduce que $K = K'$. $\blacksquare$

Corolario 45 *Sea $\tau \in R$-tors y sea $M \in$ Mod-R un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro. Si $N, K, K' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ son tales que $N \oplus K = N \oplus K'$, entonces $K = K'$.*

Demostración.

Sea $L = N \oplus K$, entonces $L \in Sub_{P_\tau TI}(M)$, por el Corolario 35. Como $N \in Sub_{P_\tau TI}(M)$, entonces $N = N \cap L \in Sub_{P_\tau TI}(L)$. Análogamente sucede que $K, K' \in Sub_{P_\tau TI}(L)$. Así, de la proposición anterior, se puede concluir que $K = K'$. $\blacksquare$

Teorema 46 *Sea N un módulo τ-pleno y absolutamente τ-puro tal que $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ es una retícula atómica. Entonces existe una única descomposición de N como $N = K \oplus K'$, donde $K, K' \in Sub_{P_\tau TI}(N)$ y satisface las propiedades siguientes:*

$a)$ K contiene una familia independiente de submódulos uniformes $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $\bigoplus_{\alpha \in A} U_\alpha \leq_{es} K$,

$b)$ K' no contiene submódulos uniformes.

Demostración.

Sea $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ *el conjunto de átomos en* $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$, *entonces* $\sigma_i = \tau \vee \xi(N_i)$ *con* $N_i \leq N$. *Se considera el siguiente conjunto:* $J = \{j \in I \mid$ *existe* U_j *uniforme tal que* $U_j \leq N_j\}$.

Si $J = \phi$, *entonces* N *no contiene submódulos uniformes; de aquí que el resultado se satisface. Ahora, supóngase que* $J \neq \phi$ *y sea* $\sigma = \bigvee_{j\in J} \sigma_j$, *entonces* $N = K \oplus K'$ *donde* $K = t_\sigma(N)$, $K' = t_{\sigma^c}(N)$ *y* $\sigma^c = \bigvee_{i\in I - J} \sigma_i$. *Por consiguiente,* K' *no contiene submódulos uniformes y se afirma que para cada* $0 \neq H \leq K$ *existe un módulo uniforme* $U \leq H$. *Como* $H \in \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\bigvee_{j\in J}\sigma_j}$, *entonces existe* $j_0 \in J$ *tal que* $H \notin \mathbb{F}_{\sigma_{j_0}}$, *donde* $\sigma_{j_0} = \tau \vee \xi(U_{j_0})$ *con* $U_{j_0} \leq N_{j_0}$ *un submódulo uniforme. Además,* $H \in \mathbb{F}_\tau$ *implica que* $H \notin \mathbb{F}_{\xi(U_{j_0})}$ *lo que significa que* $Hom_R(U_{j_0}, E(H)) \neq 0$. *Como* $E(H) \in \mathbb{F}_\tau$ *y* U_{j_0} *es* τ*-cocrítico, se tiene que existe un submódulo* $0 \neq U'_{j_0} \leq U_{j_0}$ *y un monomorfismo* $U'_{j_0} \hookrightarrow H$. *Por lo tanto, cada submódulo distinto de cero de* K *contiene un submódulo uniforme.*

Ahora, sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia máxima independiente de submódulos uniformes de* K, *entonces* $\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha \leq_{es} K$ *porque, como antes, si hay un pseudocomplemento distinto de cero de* $\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha$, *éste contendría un submódulo uniforme, lo cual es imposible.*

Para ver la unicidad, supóngase que $N = L \oplus L'$ *con* $L, L' \in Sub_{P_\tau TI}(N)$ *tales que satisfacen las condiciones a) y b), respectivamente. Entonces se tiene que* $K = t_\sigma(N) = t_\sigma(L) \oplus t_\sigma(L') = t_\sigma(L)$, *por definición de* σ; *así que* $K \leq L$.

Sea $\left\{U'_\beta\right\}_{\beta\in B}$ *una familia independiente de submódulos uniformes de* L *tales que* $\bigoplus_{\beta\in B} U'_\beta \leq_{es} L$; *nuevamente, por definición de* σ, *se tiene que* $U'_\beta \in \mathbb{T}_\sigma$ $\forall \beta \in B$. *Como* L *es* τ*-pleno,* $L / \bigoplus_{\beta\in B} U'_\beta \in \mathbb{T}_\sigma$, *de donde se concluye que* $L \in \mathbb{T}_\sigma$; *y de esta forma se deduce que* $L \leq K$. *Por lo tanto,* $L = K$. *Además se tiene que* $L' = K'$, *por la Proposición 44. Esto prueba que la descomposición es única.* $\blacksquare$

Teorema 47 *Sean* $\tau \in R$*-tors y* M *un* R*-módulo* τ*-pleno y absolutamente* τ*-puro.*

Entonces existen submódulos únicos $N, N' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ *tales que* $M = N \oplus N'$ *con* $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ *atómico y* $[\tau, \tau \vee \xi(N')]$ *sin átomos.*

Demostración.

Sea $\{\sigma_i\}_{i \in I}$ *el conjunto de átomos en* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, *entonces* $\sigma_i = \tau \vee \xi(N_i)$ *con* $N_i = t_{\sigma_i}(M)$. *Sea* $\sigma = \bigvee_{i \in I} \sigma_i = \bigvee_{i \in I} (\tau \vee \xi(N_i))$, *entonces* $\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$. *Así se tiene que* $\sigma = \tau \vee \xi(N)$ *con* $N = t_\sigma(M)$. *Entonces existe* $N' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ *tal que* $N \oplus N' = M$, *por la Proposición 36. Nótese que* $\{\sigma_i\}_{i \in I} \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(N)]$ *y que* $\bigvee_{i \in I} \sigma_i = \tau \vee \xi(N)$, *de donde se tiene que* $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ *es atómico.*

Ahora, se asegura que $[\tau, \tau \vee \xi(N')]$ *no contiene átomos ya que cualquier átomo en esta retícula debe ser un átomo en* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$, *esto es, un* σ_i *para alguna* $i \in I$.

Se puede probar la unicidad con un argumento similar al usado en el Teorema 46.

■

Como una consecuencia de los teoremas 46 y 47 se tiene el siguiente corolario, el cual se puede ver como un teorema de estructura para módulos poliformes autoinyectivos.

Corolario 48 *Sean* $\tau \in R$*-tors y* M *un* R*-módulo* τ*-pleno y absolutamente* τ*-puro. Entonces existen submódulos únicos de* M $N, N', N'' \in Sub_{P_\tau TI}(M)$ *tales que* $M = N \oplus N' \oplus N''$ *donde la retícula* $[\tau, \tau \vee \xi(N'')]$ *no tiene átomos,* N' *no contiene submódulos uniformes y* N *es una extensión esencial de una suma directa de submódulos uniformes.*

Capítulo 4
Dimensión plena

En este capítulo se hablará de la dimensión plena en Mod-R, que se define a partir de los módulos τ-plenos para una teoría de torsión fija $\tau \in R$-tors.

Definición 20 *Sea $\tau \in R$-tors. La F-filtración de τ en R-tors es*

i. $\phi_0 = \tau$.

ii. *Si i no es un ordinal límite, entonces*

$$\phi_i = \phi_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno} \right\}.\text{[1]}$$

iii. *Si i es un ordinal límite, entonces*

$$\phi_i = \bigwedge_{j<i} \phi_j.$$

Como R-tors es un conjunto, existe un ordinal mínimo k tal que $\phi_k = \phi_{k+r}$, para todos los ordinales r.

Definición 21 *Un R-módulo derecho M tiene dimensión τ-plena igual a un ordinal h si M es de ϕ_h-torsión, pero no es de ϕ_i-torsión para toda $i < h$. Se dice que el anillo R tiene dimensión τ-plena si tiene dimensión τ-plena como R-módulo derecho.*

Se denota la dimensión τ-plena (si existe) de $M \in$ Mod-R por τ-F-dim(M). La dimensión ξ-plena se llama simplemente la *dimensión plena* del módulo y se denota F-dim(M).

Observación 12 *Si $\tau \in R$-tors, entonces τ-F-dim$(R) = h$ si y sólo si $\phi_h = \chi$.*

Los módulos de dimensión plena igual a 1 se pueden determinar completamente como lo muestra la Proposición 49.

[1] $\phi_{i-1} \vee \bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno}\}$ se llama la derivada de Boyle de ϕ_{i-1} sobre Mod-R. [10]

Definición 22 *Un R-módulo derecho M es semiartiniano si pertenece a la clase de torsión de la teoría de torsión generada por los R-módulos derechos simples.*

Para mayores detalles sobre estos módulos se puede ver [18].

Proposición 49

(1) *Sea $\tau \in R$-tors. R tiene tiene dimensión τ-plena si y sólo si todo R-módulo tiene dimensión τ-plena.*

(2) *Sea $M \in$ Mod-R. $\mathcal{F}$-dim$(M) = 1$ si y sólo si M es semiartiniano*

Demostración.

(2) *Como se vio en el Ejemplo 5, los R-módulos ξ-plenos son los módulos semisimples, de aquí que $\phi_1 = \xi \vee \bigvee \{\xi(K) \mid K$ es ξ-pleno$\} = \xi \vee \bigvee \{\xi(K) \mid K$ es semisimple$\}$ $= \vee \{\xi(K) \mid K$ es semisimple$\} = \vee \{\xi(S) \mid S$ es simple$\}$. Así, si $M \in \mathcal{T}_{\phi_1}$ y $M \notin \mathcal{T}_{\xi}$, entonces $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\vee\{\xi(S) \mid S \text{ es simple}\}}$, de donde, M es semiartiniano.*

Recíprocamente, si M es semiartiniano, $0 \neq M \in \mathcal{T}_{\vee\{\xi(S) \mid S \text{ es simple}\}}$ que implica que $M \in \mathcal{T}_{\phi_1}$ y $M \notin \mathcal{T}_{\xi}$. ∎

Corolario 50 *El anillo R es semiartiniano derecho si y sólo si $\mathcal{F}$-dim$(R) = 1$.*

Proposición 51 *Si $\tau \in R$-tors es una teoría de torsión espectral, entonces R tiene dimensión τ-plena y τ-$\mathcal{F}$-dim$(R) = 1$.*

Demostración.

En el Ejemplo 4 se probó que si τ es una categoría espectral todo módulo libre de τ-torsión es un módulo τ-pleno; de esto se sigue que $\tau \vee [\vee \{\xi(K) \mid K$ es τ-pleno$\}] = \chi$ ya que si $\tau \vee [\vee \{\xi(K) \mid K$ es τ-pleno$\}] < \chi$

habría un módulo $M \in \mathbb{T}_\chi$ y $M \in \mathbb{F}_{\tau \vee \bigvee \{\xi(K) \mid K \text{ es } \tau\text{-pleno}\}}$ que implica $M \in \mathbb{F}_\tau$ y por lo tanto τ-pleno, esto es, $M \in \mathbb{T}_{\tau \vee \bigvee \{\xi(K) \mid K \text{ es } \tau\text{-pleno}\}}$ lo cual es una contradicción. ■

Corolario 52 *Si $\sigma \in R$-tors es una teoría de torsión tal que $\tau_g \leq \sigma$, entonces σ-$\mathbb{F}$-dim$(R) = 1$.*

Demostración.

Se sigue de la Proposición anterior y del hecho de que τ_g es una teoría de torsión espectral y por lo tanto también lo es cualquier generalización de ésta [1]. ■

Ejemplo 14 *Si se considera el anillo de los números enteros, entonces ξ-$\mathbb{F}$-dim$(\mathbb{Z}) = 2$. En efecto, la $\mathbb{F}$-filtración de ξ en $\mathbb{Z}$-tors es $\phi_0 = \xi$, $\phi_1 = \bigvee \{\xi(S) \mid S$ es simple en Mod-$\mathbb{Z}\}$, $\phi_2 = \phi_1 \vee \bigvee \{\xi(M) \mid M$ es ϕ_1-pleno$\} = \xi(\mathbb{Z}) = \chi$.* ¨

Proposición 53 *Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta en Mod-R. Entonces M tiene dimensión τ-plena si y sólo si M' y M'' tienen dimensión τ-plena.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ *Sea τ-$\mathbb{F}$-dim$(M) = h$. Entonces $M \in \mathbb{T}_{\phi_h} \Rightarrow M', M'' \in \mathbb{T}_{\phi_h}$. Si $h' = \min\{k \mid M' \in \mathbb{T}_{\phi_k}\}$ y $h'' = \min\{k \mid M'' \in \mathbb{T}_{\phi_k}\}$, entonces τ-$\mathbb{F}$-dim$(M') = h'$ y τ-$\mathbb{F}$-dim$(M'') = h''$.*

$\Leftarrow)$ *Sean τ-$\mathbb{F}$-dim$(M') = h'$, τ-$\mathbb{F}$-dim$(M'') = h''$ y $h = \sup\{h', h''\}$. Entonces $h', h'' \leq h \Rightarrow M', M'' \in \mathbb{T}_{\phi_h} \Rightarrow M \in \mathbb{T}_{\phi_h}$. Además, si $i < h$ y $h = h''$, entonces $M \notin \mathbb{T}_{\phi_i}$ ya que en caso contrario $M'' \in \mathbb{T}_{\phi_i}$ lo que sería una contradicción. Análogamente, si $i < h$ y $h = h'$, entonces $M \notin \mathbb{T}_{\phi_i}$ porque de lo contrario $M' \in \mathbb{T}_{\phi_i}$ lo cual no sucede.* ■

Como ya se mencionó anteriormente, dada la $\mathcal{F}$-filtración de τ en R-tors existe un ordinal mínimo k tal que $\phi_k = \phi_{k+r}$, para todos los ordinales r. Ahora se probarán algunos resultados con las teorías de torsión que se encuentran en el intervalo $[\tau, \phi_k]$, de donde se deduce, en particular que dada cualquier teoría de torsión $\sigma \in [\tau, \phi_k]$ siempre existe un módulo σ-pleno.

Proposición 54 *Sean $\tau \in R$-tors, $\{\phi_i\}$ la $\mathcal{F}$-filtración de τ en R-tors y k el ordinal mínimo tal que $\phi_k = \phi_{k+r}$, para todos los ordinales r. Si $\phi = \phi_k$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(1) *Para cualesquiera $\sigma, \sigma' \in R$-tors tales que $\tau \le \sigma < \sigma' \le \phi$, existe un R-módulo σ-pleno M tal que $M \in \mathbf{T}_{\sigma'}$.*

(2) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \le \sigma < \phi$,*

$$\sigma = [\wedge \{\chi(M) \mid M \text{ es un módulo } \sigma\text{-pleno}\}] \wedge \phi.$$

(3) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \le \sigma < \phi$, existe un R-módulo σ-pleno.*

Demostración.

(1) *Como $\sigma < \sigma'$, existe un ordinal mínimo i tal que $\sigma' \wedge \phi_i \not\le \sigma$. Nótese que i no es ordinal límite por la condición de minimalidad. Por otra parte, $\phi_0 = \tau \le \sigma$, de donde, $i \ge 1$. Así, $\sigma' \wedge \phi_i = \sigma' \wedge \left[\phi_{i-1} \vee \xi\left(\{M \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno}\}\right)\right] \not\le \sigma$. Por lo tanto, existe un módulo N tal que $N \in \mathbf{T}_{\sigma' \wedge \phi_i} \cap \mathbf{F}_\sigma$. Además, por la elección de i se tiene que $\sigma' \wedge \phi_{i-1} \le \sigma$ por lo que $N \in \mathbf{F}_{\sigma' \wedge \phi_{i-1}}$ lo cual implica que $N \in \mathbf{F}_{\phi_{i-1}}$ ya que $t_{\phi_{i-1}}(N) \in \mathbf{T}_{\sigma' \wedge \phi_{i-1}} \cap \mathbf{F}_{\sigma' \wedge \phi_{i-1}}$. Ahora, por la definición de ϕ_i, existe K un módulo ϕ_{i-1}-pleno tal que $Hom_R(K, E(N)) \neq 0$; de aquí que existen submódulos $K'' < K' < K$ y un monomorfismo $K'/K'' \hookrightarrow N$. De esta forma, por la Proposición 16, se tiene que $M = K'/K''$ es un módulo ϕ_{i-1}-pleno y $M \in \mathbf{T}_{\sigma'}$; por lo tanto M es un módulo $(\sigma' \wedge \phi_{i-1})$-pleno, por la Proposición 19. Así, como $M \in \mathbf{F}_\sigma$, se puede concluir que M es un módulo σ-pleno, por la Proposición 17.*

(2) *Sea* $\sigma \in R$*-tors tal que* $\tau \leq \sigma < \phi$ *y sea* $\sigma' = [\wedge\{\chi(M) \mid M$ *es un módulo* σ*-pleno*$\}] \wedge \phi$*, entonces* $\tau \leq \sigma \leq \sigma' \leq \phi$*. Si* $\sigma < \sigma'$*, por* (1) *, existe* M *un módulo* σ*-pleno tal que* $M \in \mathbb{T}_{\sigma'}$ *lo cual es una contradicción. Por lo tanto* $\sigma = \sigma'$.

(3) *Es inmediato de* (1). ■

Corolario 55 *Sea* $\tau \in R$*-tors. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) R *tiene dimensión* τ*-plena.*

(2) *Para cualesquiera* $\sigma, \sigma' \in gen(\tau)$ *tales que* $\sigma < \sigma'$*, existe un* R*-módulo* σ*-pleno* M *tal que* $M \in \mathbb{T}_{\sigma'}$.

(3) *Para toda* $\sigma \in gen(\tau)$ *tal que* $\sigma \neq \chi$,

$$\sigma = \wedge\{\chi(M) \mid M \text{ es un módulo } \sigma\text{-pleno}\}.$$

(4) *Para toda* $\sigma \in gen(\tau)$ *tal que* $\sigma \neq \chi$*, existe un* R*-módulo* σ*-pleno.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Si* $\{\phi_i\}$ *es la* $\mathbb{F}$*-filtración de* τ *en* R*-tors y* h *es el ordinal mínimo tal que* $\phi_h = \phi_{h+r}$ *para todos los ordinales* r*, entonces* $\phi_h = \chi$*, de donde, se satisface* (2) *por la proposición anterior.*

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) *Son consecuencia inmediata de la proposición anterior.*

(4) $\Rightarrow$ (1) *Sea* $\{\phi_i\}$ *la* $\mathbb{F}$*-filtración de* τ *en* R*-tors y* h *el ordinal mínimo tal que* $\phi_h = \phi_{h+r}$ *para todos los ordinales* r*. Si* $\phi_h < \chi$*, entonces existe un* R*-módulo* M *que es* ϕ_h*-pleno, de donde* $M \in \mathbb{T}_{\phi_{h+1}} = \mathbb{T}_{\phi_h}$*, lo cual es una contradicción.* ■

A continuación se muestra un ejemplo de un anillo que no tiene dimensión plena.

Ejemplo 15 *Sea* K *un campo y sea* R *la* K*-álgebra conmutativa generada por* $\{x_i\}_{i\in[0,1]}$ *donde* $x_i x_j = \begin{cases} x_{i+j}, & \text{si } i+j < 1 \\ 0, & \text{si } i+j \geq 1 \end{cases}$.

Es inmediato que $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$. Este anillo fue estudiado en [21], *donde la retícula de ideales está completamente descrita; dicha retícula está linealmente ordenada por lo que resulta que el anillo R es local. También se prueba que R-tors consiste de tres elementos: $\xi, \xi(S) = \chi(R)$ y χ, donde S es el único R-módulo simple. Además, es conocido que no existen módulos $\xi(S)$-cocríticos.*

Si existiera un módulo $\xi(S)$-pleno, M, entonces cada submódulo cíclico de M sería $\xi(S)$-pleno y uniforme, por ser linealmente ordenada la retícula de ideales de R. Así, cada uno de estos submódulos sería $\xi(S)$-cocrítico, Ejemplo 1, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, la F-filtración de ξ en R-tors consta solamente de ξ y $\xi(S) \neq \chi$, de donde, R no tiene dimensión plena. $\blacksquare$

4.1 Dimensión plena y dimensión de Gabriel

Ahora se comparará la dimensión plena con la dimensión de Gabriel de una teoría de torsión τ en R-tors. A continuación se mencionan la definición de esta última y algunos resultados necesarios relacionados con la filtración de Gabriel de τ.

Sea $\tau \in R$-tors. La G-filtración de τ en R-tors o filtración de Gabriel de τ en R-tors es

i. $\gamma_0 = \tau$.

ii. Si i no es un ordinal límite, entonces
$$\gamma_i = \gamma_{i-1} \vee [\bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico}\}].$$

iii. Si i es un ordinal límite, entonces
$$\gamma_i = \bigvee_{j<i} \gamma_j.$$

Como R-tors es un conjunto, existe un ordinal mínimo h tal que $\gamma_h = \gamma_{h+r}$, para todos los ordinales r.

Un R-módulo derecho M tiene τ-dimensión de Gabriel o dimensión de Gabriel respecto a τ igual a un ordinal h si M es de γ_h-torsión, pero no es de γ_i-torsión para toda

$i < h$. La τ-dimensión de Gabriel de M se denota por τ-G-dim(M) . La ξ-dimensión de Gabriel de M se llama simplemente la *dimensión de Gabriel* del M y se denota por G-dim(M). El anillo R tiene τ-dimensión de Gabriel derecha si tiene τ-dimensión de Gabriel como R-módulo derecho. Si R tiene τ-dimensión de Gabriel, entonces todo R-módulo derecho también tiene τ-dimensión de Gabriel.

Observación 13 *Si $\{\gamma_i\}$ es la G-filtración de τ en R-tors y $\gamma = \gamma_h = \gamma_{h+r}$, para todos los ordinales r, por* [9, Proposición 51.7] *y con argumentos similares a los de la Proposición 54 se tienen las siguientes condiciones:*

(1) *Para cualesquiera $\sigma, \sigma' \in R$-tors tales que $\tau \leq \sigma < \sigma' \leq \gamma$, existe un R-módulo σ-cocrítico M tal que $M \in \mathbb{T}_{\sigma'}$.*

(2) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \leq \sigma < \gamma$,*

$$\sigma = [\wedge \{\chi(M) | \ M \text{ es un módulo } \sigma\text{-cocrítico}\}] \wedge \gamma.$$

(3) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \leq \sigma < \gamma$, existe un R-módulo σ-cocrítico.*

La siguiente proposición es la clave para hacer la comparación que se quiere entre las mencionadas dimensiones.

Proposición 56 *Sean $\tau \in R$-tors y $\{\gamma_i\}$ la G-filtración de τ en R-tors. Si $\gamma = \gamma_h = \gamma_{h+r}$, para todos los ordinales r, entonces*

$$\tau \vee [\vee \{\xi(M) | \ M \text{ es } \tau\text{-cocrítico}\}] = [\tau \vee [\vee \{\xi(M) | \ M \text{ es } \tau\text{-pleno}\}]] \wedge \gamma.$$ [2]

Demostración.

Si se considera la notación de [10]*:*

$d_g(\tau) = \tau \vee [\vee \{\xi(M) | \ M$ *es τ-cocrítico*$\}]$ *y* $d_b(\tau) = \tau \vee [\vee \{\xi(M) | \ M$ *es τ-pleno*$\}]$, *entonces se va a probar que* $d_g(\tau) = d_b(\tau) \wedge \gamma$.

[2] $\tau \vee [\vee \{\xi(M) | \ M$ es τ-cocrítico$\}]$ se llama la derivada de Gabriel de τ sobre Mod-R.[10]

Como todo módulo τ-cocrítico es τ-pleno, entonces $d_g(\tau) \leq d_b(\tau) \wedge \gamma$.

Ahora, supóngase que $d_g(\tau) < d_b(\tau) \wedge \gamma$. Por la observación 13, existe un R-módulo $d_g(\tau)$-cocrítico M tal que $M \in \mathbb{T}_{d_b(\tau)\wedge\gamma}$; de aquí que si $\rho = d_g(\tau) \vee \xi(M)$, entonces $d_g(\tau) < \rho \leq d_b(\tau) \wedge \gamma$.

Por otra parte, $d_b(\tau) \leq d_{cb}(\tau)$ y por lo tanto, $[\tau, d_b(\tau)]$ es una retícula de Boole, por Proposición 28 y Corolario 29. Como $[d_g(\tau), d_b(\tau) \wedge \gamma] \subseteq [\tau, d_b(\tau)]$, resulta que también $[d_g(\tau), d_b(\tau) \wedge \gamma]$ es una retícula de Boole. Además, si M es $d_g(\tau)$-cocrítico, entonces M es un $d_g(\tau)$-A-módulo, por [6, Corolario 2.6]*; de aquí que $\rho = d_g(\tau) \vee \xi(M)$ es un átomo sobre $d_g(\tau)$. Como $[d_g(\tau), d_b(\tau) \wedge \gamma]$ es de Boole, existe $\rho' \in [d_g(\tau), d_b(\tau) \wedge \gamma]$ un coátomo tal que $\rho \wedge \rho' = d_g(\tau)$ y $\rho \vee \rho' = d_b(\tau) \wedge \gamma$.*

Por otro lado, también el intervalo $[\tau, d_b(\tau) \wedge \gamma]$ es de Boole y $\rho' \in [\tau, d_b(\tau) \wedge \gamma]$ es un coátomo, de donde, existe $\rho'' \in [\tau, d_b(\tau) \wedge \gamma]$ un átomo tal que $\rho'' \wedge \rho' = \tau$ y $\rho'' \vee \rho' = d_b(\tau) \wedge \gamma$. Además, ρ'' átomo en $[\tau, d_b(\tau) \wedge \gamma]$ implica que $\tau < \rho''$ por lo que existe $N \in \mathbb{T}_{\rho''} \subseteq \mathbb{T}_{d_b(\tau)\wedge\gamma}$ tal que $N \in \mathbb{F}_\tau$, de aquí que $\rho'' = \tau \vee \xi(N)$ y N es un τ-A-módulo tal que $N \in \mathbb{T}_{d_b(\tau)\wedge\gamma}$, por [6, Proposición 2.4].

Ahora, $N \in \mathbb{T}_\gamma$ implica que existe un ordinal mínimo (que no es límite) tal que $N \notin \mathbb{F}_{\gamma_i}$, de aquí que, $N \in \mathbb{F}_{\gamma_{i-1}}$. Como $\gamma_i = \gamma_{i-1} \vee \xi\left\{C \mid C \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico}\right\}$, $N \notin \mathbb{F}_{\xi\{C \mid C \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico}\}}$, de aquí que existe un R-módulo C que es γ_{i-1}-cocrítico tal que $Hom_R(C, E(N)) \neq 0$, de donde existen $C' < C$ y un monomorfismo $C' \hookrightarrow N$, ya que C' también es γ_{i-1}-cocrítico. De hecho, C' es un módulo γ_{i-1}-cocrítico contenido en N, y como $N \in \mathbb{T}_{d_b(\tau)}$, entonces $C' \in \mathbb{T}_{d_b(\tau)}$. Además, $C' \in \mathbb{F}_\tau$ y $d_b(\tau) = \tau \vee [\vee\{\xi(M) \mid M \text{ es } \tau\text{-pleno}\}]$ implican que existe un R-módulo τ-pleno L tal que $Hom_R(L, E(C')) \neq 0$, de donde, existen submódulos $L'' < L' < L$ y un monomorfismo $L'/L'' \hookrightarrow C'$, de aquí que, L'/L'' es γ_{i-1}-cocrítico y por lo tanto uniforme (Ejemplo 1, pág. 26). Por otra parte, como L' es τ-pleno y $L'/L'' \in \mathbb{F}_\tau$ se tiene que L'/L'' también es τ-pleno y uniforme, lo cual implica que L'/L'' es τ-cocrítico. Además, $\tau \vee \xi(L'/L'') = \tau \vee \xi(C') = \tau \vee \xi(N) = \rho''$ implica que $\rho'' \leq d_g(\tau) \leq \rho'$, de donde $\rho'' = \rho'' \wedge \rho' = \tau$, lo cual es una contradicción. $\blacksquare$

Proposición 57 *Sea $\tau \in R$-tors. Si $\{\gamma_i\}$ y $\{\phi_i\}$ son la G-filtración y la F-filtración de τ en R-tors, respectivamente, entonces $\gamma_i \leq \phi_i$ para cada ordinal i.*

Demostración. *Por inducción transfinita.*

Si $i = 0$, entonces $\gamma_i = \tau = \phi_i$.

Si i es un ordinal límite y $\forall j < i$ se tiene que $\gamma_j \leq \phi_j$, entonces

$$\gamma_i = \bigvee_{j<i} \gamma_j \leq \bigvee_{j<i} \phi_j = \phi_i.$$

Si i no es ordinal límite entonces $\gamma_i = \gamma_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico} \right\}$. Ahora, por la Proposición 56 se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \gamma_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-cocrítico} \right\} \\ &= \left[\gamma_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-pleno} \right\} \right] \wedge \gamma \\ &\leq \left[\phi_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-pleno} \right\} \right] \wedge \gamma. \end{aligned}$$

Se afirma que

$$\phi_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-pleno} \right\} \leq \phi_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno} \right\} = \phi_i.$$

Efectivamente, si M es γ_{i-1}-pleno y $M \in \mathbb{F}_{\phi_{i-1}}$, entonces M es un módulo ϕ_{i-1}-pleno, por Proposición 17. si M es γ_{i-1}-pleno y $M \notin \mathbb{F}_{\phi_{i-1}}$, sea $N = t_{\phi_{i-1}}(M)$, entonces $M/N \in \mathbb{F}_{\phi_{i-1}} \subseteq \mathbb{F}_{\gamma_{i-1}}$. Como M es γ_{i-1}-pleno, entonces M/N es γ_{i-1}-pleno, por la Proposición 16. Por otra parte, $\gamma_{i-1} \leq \phi_{i-1}$ y $M/N \in \mathbb{F}_{\phi_{i-1}}$ implican que M/N es ϕ_{i-1}-pleno. De esta forma se tiene que M/N y N son de ϕ_i-torsión, de aquí que M es de ϕ_i-torsión; así, $\phi_{i-1} \vee \bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-pleno} \right\} \leq \phi_i$ y por lo tanto, $\gamma_i \leq \phi_i$.
$\blacksquare$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la igualdad probada en la Proposición 56.

Corolario 58 *Sea $\tau \in R$-tors. Si R tiene τ-dimensión de Gabriel, entonces la G-filtración y la F-filtración de τ en R-tors son iguales, es decir, $\gamma_i = \phi_i$, $\forall i$. En particular, R tiene dimensión τ-plena y τ-F-$\dim(R) = \tau$-G-$\dim(R)$.*

Demostración.

Si R tiene τ-dimensión de Gabriel, entonces $\gamma = \chi$. Así, si i no es ordinal límite y $\forall j < i$ se tiene que $\gamma_j = \phi_j$, entonces

$$\begin{aligned} & \gamma_i = d_g\left(\gamma_{i-1}\right) = d_b\left(\gamma_{i-1}\right) \wedge \gamma = d_b\left(\gamma_{i-1}\right) \\ \Rightarrow\ & \gamma_i = \gamma_{i-1} \vee \bigcup \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \gamma_{i-1}\text{-pleno} \right\} \\ \Rightarrow\ & \gamma_i = \phi_{i-1} \vee \bigcup \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno} \right\} = \phi_i. \end{aligned}$$

Si i es un ordinal límite tal que $\forall j < i$ se tiene que $\gamma_j = \phi_j$, es claro que $\gamma_i = \phi_i$.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra un anillo con dimensión τ-plena que no tiene τ-dimensión de Gabriel.

Ejemplo 16 *En este ejemplo se considera R un anillo primo, esto es, un anillo en el que 0 es un ideal primo. Por* [9, Proposición 35.6], *$\chi(R)$ es un coátomo de R-tors y por lo tanto R es un $\chi(R)$-A-módulo. Si R es un dominio que no es un dominio de Ore derecho,*[3] *entonces como se probó en* [9, Ejemplo 51.3] *no hay módulos $\chi(R)$-cocríticos. De aquí que R no tiene $\chi(R)$-dimensión de Gabriel. Por otra parte, como R es un dominio, R es no singular derecho y por lo tanto $\chi(R) = \tau_g$. Así, R sí tiene dimensión τ_g-plena por el Corolario 52.* $\diamond$

En el siguiente resultado se da una condición necesaria y suficiente para que un anillo con dimensión τ-plena tenga τ-dimensión de Gabriel.

Teorema 59 *Sea $\tau \in R$-tors. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *R tiene τ-dimensión de Gabriel.*

(2) *R tiene dimensión τ-plena y todo módulo libre de τ-torsión contiene un submódulo uniforme.*

[3] Ejemplos de este tipo de anillos se encuentran en [18, pág. 53]

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) *Como R tiene τ-dimensión de Gabriel, por el Corolario 58, R tiene dimensión τ-plena. Si $M \in \mathcal{F}_\tau$, entonces M contiene un submódulo cocrítico, por* [8, Lema 3.1], *el cual es uniforme, por* [9, Proposición 14.3].

(2) $\Rightarrow$ (1) *Sea $\sigma \geq \tau$. Como R tiene dimensión τ-plena, entonces existe un R-módulo derecho M que es σ-pleno, por la Proposición 54. Además, por hipótesis, M contiene un submódulo uniforme U el cual también es σ-pleno. De aquí que U es σ-cocrítico (Ejemplo 1). Por lo tanto, R tiene τ-dimensión de Gabriel.* $\blacksquare$

4.2 Dimensión plena y dimensión de Cantor-Bendixson

Con base en lo visto en el Capítulo 3 en donde se probó que para una teoría de torsión τ, un R-módulo derecho τ-pleno M, tiene la propiedad de que el intervalo $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole, ahora se estudiarán los módulos libres de τ-torsión con esta propiedad y, se caracterizarán a través de la derivada de Cantor-Bendixson definida en la página 43. Posteriormente se obtendrá una dimensión relativa a estos módulos y se comparará con la dimensión plena del módulo en caso de que existan.

Definición 23 *Sea $\tau \in R$-tors tal que $\tau \neq \chi$. Un R-módulo derecho M es un τ-$\mathcal{B}$-módulo si $M \in \mathcal{F}_\tau$ y la retícula $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es de Boole.*

Observación 14 *$M \in$ Mod-R es un ξ-$\mathcal{B}$-módulo si y sólo si M es semiartiniano ya que si M es semiartiniano, entonces $M \in \mathcal{T}_{\vee\{\xi(S) \mid S \text{ es simple}\}}$, de donde, $[\xi, \xi(M)] \subseteq [\xi, \vee\{\xi(S) \mid S \text{ es simple}\}]$ que implica que $[\xi, \xi(M)]$ es una retícula de Boole y por lo tanto M es un ξ-$\mathcal{B}$-módulo.*

Recíprocamente, si $M \neq 0$ es un ξ-$\mathcal{B}$-módulo, entonces $[\xi, \xi(M)]$ es una retícula de Boole. Como R-tors es una retícula atómica, el conjunto $X = \{\sigma \mid \sigma$ es átomo de

R-tors y $\sigma \leq \xi(M)\} \neq \phi$. *Sea* $\rho = \vee X$, *entonces* $\rho \leq \xi(M)$. *Si* $\rho < \xi(M)$, *existe* $\rho' \in [\xi, \xi(M)]$ *que es complemento de* ρ *y entonces existe* $\alpha \in X$ *tal que* $\alpha \leq \rho'$ *lo cual no es posible. Así se tiene que* $\rho = \xi(M)$, *de donde,* $\xi(M) \leq \vee\{\xi(S) \mid S$ *es simple*$\}$ *ya que los átomos de* R*-tors son precisamente las teorías de torsión* $\xi(S)$ *con* S *simple. Por lo tanto,* $M \in \mathbb{T}_{\vee\{\xi(S) \mid S \text{ es simple}\}}$, *esto es,* M *es semiartiniano.*

En la siguiente proposición se muestran varios casos de τ-$\mathcal{B}$-módulos.

Proposición 60 *Sea* $\tau \in R$*-tors tal que* $\tau \neq \chi$. *Entonces*

(1) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{A}$*-módulo, entonces* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(2) *Si* M *es un módulo* τ*-pleno, entonces* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(3) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo, entonces* $M^{(X)}$ *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo para cualquier conjunto* X.

(4) *Si* $\sigma \in R$*-tors es tal que* $[\tau, \sigma]$ *es una retícula de Boole y* $M \in \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{F}_\tau - \{0\}$, *entonces* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(5) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo y* $0 \neq N \leq M$, *entonces* N *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(6) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo y* $N < M$ *es un submódulo* τ*-puro de* M, *entonces* M/N *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(7) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo, entonces* $E_\tau(M)$ *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

Demostración.

(1) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{A}$*-módulo, entonces* $M \in \mathbb{F}_\tau$ *y* $\tau \vee \xi(M)$ *es un átomo sobre* τ, *de aquí que la retícula* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es de Boole.*

(2) *Si* M *es un módulo* τ*-pleno, entonces* M *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo, por el Corolario 29.*

(3) *Si* $M \in \mathbb{F}_\tau$, *entonces* $M^{(X)} \in \mathbb{F}_\tau$. *Además,* $\left[\tau, \tau \vee \xi\left(M^{(X)}\right)\right] = [\tau, \tau \vee (\bigvee_X \xi(M))] = [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es una retícula de Boole. Por lo tanto,* $M^{(X)}$ *es un* τ-$\mathcal{B}$*-módulo.*

(4) *Si* $[\tau,\sigma]$ *es una retícula de Boole y* $M \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau - \{0\}$, *entonces* $[\tau, \tau \vee \xi(M)] \subseteq [\tau,\sigma]$ *y por lo tanto* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es una retícula de Boole, de aquí que* M *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo.*

(5) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo y* $0 \neq N \leq M$, *entonces* $N \in \mathcal{F}_\tau$ *y* $[\tau, \tau \vee \xi(N)] \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *de donde se tiene que* $[\tau, \tau \vee \xi(N)]$ *es de Boole y por lo tanto* N *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo.*

(6) *Si* M *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo y* $N < M$ *es un submódulo* τ-*puro de* M, *entonces* $M/N \in \mathcal{F}_\tau$ *y* $M \in \mathcal{T}_{\xi(M)} \Rightarrow M/N \in \mathcal{T}_{\xi(M)} \Rightarrow \xi(M/N) \leq \xi(M)$. *De aquí que* $[\tau, \tau \vee \xi(M/N)] \subseteq [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *que implica que* $[\tau, \tau \vee \xi(M/N)]$ *es de Boole y por lo tanto,* M/N *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo.*

(7) *Como* $M \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$ *y* $E_\tau(M)/M \in \mathcal{T}_\tau \subseteq \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$, *considerando la extensión*

$$0 \to M \to E_\tau(M) \to E_\tau(M)/M \to 0$$

se tiene que $E_\tau(M) \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)}$, *de donde,* $E_\tau(M) \in \mathcal{T}_{\tau \vee \xi(M)} \cap \mathcal{F}_\tau - \{0\}$. *Ahora, como* $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ *es de Boole, por* (4) *se tiene que* $E_\tau(M)$ *es un* τ-$\mathcal{B}$-*módulo..* $\blacksquare$

Como se acaba de probar, si se tiene un τ-$\mathcal{B}$-módulo, su cápsula τ-inyectiva también es τ-$\mathcal{B}$-módulo; sin embargo, esto no sucede en general con la cápsula inyectiva, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17 *Sea* R *la* K-*álgebra conmutativa generada por* $\{x_i\}_{i \in [0,1]}$ *considerada en el Ejemplo 15. Sea* J *el único ideal máximo de este anillo, entonces* R-*tors* $= \{\xi, \xi(R/J), \chi\}$ *y claramente* R/J *es un* ξ-$\mathcal{B}$-*módulo. Nótese que el filtro correspondiente a la teoría de torsión* $\xi(R/J)$ *es* $\mathcal{L}_{\xi(R/J)} = \{J, R\}$ *y* $M \in \mathcal{T}_{\xi(R/J)}$, $M \cong (R/J)^{(X)}$ *para algún conjunto* X. *Ahora, si* $\xi(E(R/J)) = \xi(R/J)$ *se tendría que* $E(R/J) \cong (R/J)^{(X)}$ *y como* R/J *es simple, entonces* $E(R/J) \cong R/J$. *Así, se tendría que el único módulo simple,* R/J, *es inyectivo, de donde,* R *sería un* V-*anillo; pero, en un* V *anillo todo ideal es intersección de ideales máximos, lo cual no sucede* *en este anillo. Por lo tanto,* $\xi(R/J) < \xi(E(R/J))$ *que implica* $\xi(E(R/J)) = \chi$. *Por lo tanto,* $E(R/J)$ *no es* ξ-B-*módulo ya que* $[\xi, \xi(E(R/J))] = [\xi, \chi]$ *no es de Boole.* ¨

A continuación se darán algunos resultados sobre intervalos de Boole que permitirán describir la derivada de Cantor-Bendixson definida en la pág. 43 como el supremo de una familia de teorías de torsión que determinan intervalos de Boole, y más adelante considerar lo que se llamará la dimensión de Cantor-Bendixson.

Lema 61 *Si* $\tau \in R$-*tors y* $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ *es una familia de teorías de torsión tales que* $[\tau, \sigma_i]$ *es una retícula de Boole* $\forall i \in I$, *entonces* $\left[\tau, \bigvee_{i\in I} \sigma_i\right]$ *es una retícula de Boole.*

Demostración.

En vista de que R-*tors es distributiva, basta probar que en el intervalo* $[\tau, \bigvee_{i\in I} \sigma_i]$ *es complementado.*

Sea $\tau \leq \rho \leq \bigvee_{i\in I} \sigma_i$. *entonces para cada* $i \in I$ *se considera* $\rho \wedge \sigma_i \in [\tau, \sigma_i]$ *que tiene complemento* $(\rho \wedge \sigma_i)^c \in [\tau, \sigma_i]$. *Se afirma que* $\bigvee_{i\in I} (\rho \wedge \sigma_i)^c$ *es el complemento de* ρ *en* $\left[\tau, \bigvee_{i\in I} \sigma_i\right]$. *En efecto,* $\rho \wedge \left[\bigvee_{i\in I} (\rho \wedge \sigma_i)^c\right] = \bigvee_{i\in I} [\rho \wedge (\rho \wedge \sigma_i)^c] = \bigvee_{i\in I} [(\rho \wedge \sigma_i) \wedge (\rho \wedge \sigma_i)^c] = \bigvee_{i\in I} \tau = \tau$ *y* $\rho \vee \left[\bigvee_{i\in I} (\rho \wedge \sigma_i)^c\right] = \bigvee_{i\in I} [\rho \vee (\rho \wedge \sigma_i)^c] \geq \bigvee_{i\in I} [(\rho \wedge \sigma_i) \vee (\rho \wedge \sigma_i)^c] = \bigvee_{i\in I} \sigma_i$ *implica que* $\rho \vee \left[\bigvee_{i\in I} (\rho \wedge \sigma_i)^c\right] = \bigvee_{i\in I} \sigma_i$. ¥

Corolario 62 *Sean* $\tau \in R$-*tors y* $D_\tau = \{\sigma \in R\text{-}tors \mid [\tau, \sigma]$ *es retícula de Boole*$\}$. *Si* $\overline{\tau} = \bigvee_{\sigma \in D_\tau} \sigma$, *entonces* $[\tau, \overline{\tau}]$ *es una retícula de Boole, es decir,* $\overline{\tau} \in D_\tau$.

Ahora, con estos resultados, se puede describir de una manera más conveniente la derivada de Cantor-Bendixson de una teoría de torsión τ, $d_{cb}(\tau)$, Definición 14.

Proposición 63 *Para cada* $\tau \in R$-*tors,* $d_{cb}(\tau) = \overline{\tau}$.

Demostración.

Sean $\sigma, \rho \in R$-tors tales que $[\tau, \sigma]$ es una retícula de Boole y $\tau \ll \rho$. Se afirma que $\sigma \leq \rho$. Sea $(\sigma \wedge \rho)^c$ el único complemento de $\sigma \wedge \rho$ en $[\tau, \sigma]$, entonces $\rho \wedge (\sigma \wedge \rho)^c = (\sigma \wedge \rho) \wedge (\sigma \wedge \rho)^c = \tau$ y como $\tau \ll \rho$ se tiene que $(\sigma \wedge \rho)^c \leq \tau$; pero, $\tau \leq (\sigma \wedge \rho)^c$ lo que implica que $(\sigma \wedge \rho)^c = \tau$. Como los complementos son únicos, entonces $\sigma \wedge \rho = ((\sigma \wedge \rho)^c)^c = \tau^c = \sigma$, de donde, $\sigma \leq \rho$. De esto se puede concluir que $\overline{\tau} \leq d_{cb}(\tau)$. Por otra parte, $[\tau, d_{cb}(\tau)]$ es una retícula de Boole, [10, Proposición 1.2], *por lo que $d_{cb}(\tau) \leq \overline{\tau}$. Así se tiene que $d_{cb}(\tau) = \overline{\tau}$.* $\blacksquare$

Esta proposición prueba que el intervalo $[\tau, d_{cb}(\tau)]$ es el máximo intervalo de Boole que inicia en τ y como consecuencia se tiene el siguiente corolario.

Corolario 64 *Un R-módulo derecho M es τ-B-módulo si y sólo si $M \in \mathbb{F}_\tau$ y $M \in \mathbb{T}_{d_{cb}(\tau)}$.*

Observación 15 *Es importante notar que para cada $\tau \in R$-tors,*

$$d_{cb}(\tau) = \tau \vee [\vee \{\xi(M) | M \text{ es } \tau\text{-B-módulo}\}].$$

En efecto, si $\gamma = \tau \vee [\vee \{\xi(M) | M \text{ es } \tau\text{-B-módulo}\}]$, como $\tau \leq d_{cb}(\tau)$ y si M es un τ-B-módulo, $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es de Boole, entonces $\tau \vee \xi(M) \leq d_{cb}(\tau)$ que implica $\xi(M) \leq d_{cb}(\tau)$ y por lo tanto, $\gamma \leq d_{cb}(\tau)$.

Para ver la otra desigualdad, por la Proposición 63, basta ver que para toda $\sigma \in R$-tors tal que $[\tau, \sigma]$ es una retícula de Boole $\sigma \leq \gamma$. Así, sea $\sigma \in R$-tors con esta condición. Si $\sigma = \tau$, entonces $\sigma \leq \gamma$. Si $\tau < \sigma$, entonces existe $0 \neq N \in \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{F}_\tau$ tal que N es τ-B-módulo y $\tau \vee \xi(N) \leq \sigma$. De esta forma, si $X = \{\tau \vee \xi(M) | M$ es τ-B-módulo y $\tau \vee \xi(N) \leq \sigma\}$ es un conjunto no vacío. Considerando un módulo M por cada elemento de X, se prueba que $\vee(\tau \vee \xi(M)) = \sigma$, de donde, $\sigma \leq \gamma$. Por lo tanto, $d_{cb}(\tau) = \gamma$.

Corolario 65 *Si $\tau \in R$-tors y se tiene la sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ con M' submódulo τ-puro de M, entonces M es τ-$\mathcal{B}$-módulo si y sólo si M' y M'' son τ-$\mathcal{B}$-módulos.*

Demostración.

Se sigue de la Proposición 60 y del hecho de que $[\tau, \tau \vee \xi(M)] = [\tau, (\tau \vee \xi(M')) \vee (\tau \vee \xi(M''))]$ y las retículas $[\tau, \tau \vee \xi(M')]$ y $[\tau, \tau \vee \xi(M'')]$ son de Boole. ■

A continuación se prueban algunas propiedades de los τ-$\mathcal{B}$-módulos.

Proposición 66 *Sean $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R un τ-$\mathcal{B}$-módulo Entonces*

(1) *Para cada $\sigma \in R$-tors tal que $\sigma \leq \tau$ y $M \in \mathbb{F}_\sigma$, se tiene que M es un σ-$\mathcal{B}$-módulo.*

(2) *Si $\sigma \in R$-tors es tal que $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces M es un $(\sigma \wedge \tau)$-$\mathcal{B}$-módulo.*

Demostración.

(1) *Como R-tors es una retícula distributiva, para $\sigma \leq \tau$ se tiene:*

$$[\sigma, \sigma \vee \xi(M)] \cong [\sigma \wedge \xi(M), \xi(M)] \subseteq [\tau \wedge \xi(M), \xi(M)] \cong [\tau, \tau \vee \xi(M)].$$

Así, como M es un τ-$\mathcal{B}$-módulo, entonces $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole y por lo tanto también lo es $[\sigma, \sigma \vee \xi(M)]$. De aquí que si $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces M es un σ-$\mathcal{B}$-módulo.

(2) *Si $\sigma \in R$-tors es tal que $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $\xi(M) \leq \sigma$; de aquí que $[\sigma \wedge \tau, (\sigma \wedge \tau) \vee \xi(M)] \cong [\sigma \wedge \tau \wedge \xi(M), \xi(M)] = [\tau \wedge \xi(M), \xi(M)] \cong [\tau, \tau \vee \xi(M)]$. De esta manera, como M es un τ-$\mathcal{B}$-módulo, $[\sigma \wedge \tau, (\sigma \wedge \tau) \vee \xi(M)]$ es de Boole y $M \in \mathbb{F}_{\sigma \wedge \tau}$ y por lo tanto un $(\sigma \wedge \tau)$-$\mathcal{B}$-módulo.* ■

Corolario 67 *Si $\tau \in R$-tors y $M \in$ Mod-R es un τ-$\mathcal{B}$-módulo, entonces M es un $\chi(M)$-$\mathcal{B}$-módulo.*

Definición 24 *Un R-módulo derecho M es un $\mathbb{B}$-módulo si existe $\tau \in R$-tors tal que M es un τ-$\mathbb{B}$-módulo.*

Corolario 68 *$M \in$ Mod-R es un $\mathbb{B}$-módulo si y sólo si M es un $\chi(M)$-$\mathbb{B}$-módulo.*

Observación 16 *Sean $\tau \in R$-tors y M un τ-$\mathbb{B}$-módulo.*

(1) *Si $C_\tau = \{\sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)] \mid t_\sigma(M) = 0\}$ y $[\tau] = \bigvee_{\alpha \in C_\tau} \alpha$, entonces $t_{[\tau]}(M) = 0$. En efecto, como $M \in \mathbb{F}_\sigma\ \forall \sigma \in C_\tau$, entonces $M \in \bigcap_{\sigma \in C_\tau} \mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_{\bigvee_{\sigma \in C_\tau} \sigma}$ de donde, $t_{[\tau]}(M) = 0$. Así se tiene que $[\tau]$ es la máxima teoría de torsión en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ tal que M es libre de torsión. De esto se deduce que si $\sigma \in [[\tau], \tau \vee \xi(M)]$ y $\sigma \neq [\tau]$, entonces $t_\sigma(M) \neq 0$.*

(2) *Por la Proposición 63, $\tau \vee \xi(M) \le d_{cb}(\tau)$, puesto que $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$ es una retícula de Boole. De esta forma se tiene que si $\overline{M} = t_{d_{cb}(\tau)}(E(M))$, entonces $M \subseteq \overline{M}$ y $\left[\tau, \tau \vee \xi\left(\overline{M}\right)\right] \subseteq [\tau, \tau \vee d_{cb}(\tau)]$, de donde, $\left[\tau, \tau \vee \xi\left(\overline{M}\right)\right]$ es de Boole y $\overline{M} \subseteq E(M) \in \mathbb{F}_\tau$ y por lo tanto, $\overline{M}$ es un τ-$\mathbb{B}$-módulo. Además, $\overline{M} \subseteq E(M)$ implica que $E\left(\overline{M}\right) = E(M)$. Así, como $t_{d_{cb}(\tau)}\left(E(M)/\overline{M}\right) = 0$ y $\tau \le d_{cb}(\tau)$, se tiene que $E_\tau\left(\overline{M}\right)/\overline{M} = t_\tau\left(E\left(\overline{M}\right)/\overline{M}\right) = t_\tau\left(E(M)/\overline{M}\right) = 0$ y por lo tanto, $E_\tau\left(\overline{M}\right) = \overline{M}$.*

Ahora, considerando que M es un τ-$\mathbb{B}$-módulo y que $\forall \sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ tal que $\sigma \neq \tau$, $t_\sigma(M) \neq 0$, se tiene la siguiente proposición en la que, según muestra el ejemplo que le sigue, se requiere de esta última hipótesis para su conclusión.

Proposición 69 *Si M es un τ-$\mathbb{B}$-módulo tal que $\forall \sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ con $\sigma \neq \tau$, $t_\sigma(M) \neq 0$, entonces para todo $N \le_{es} M$ se tiene que $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$.*

Demostración.

Sea $N \le_{es} M$; si $\tau \vee \xi(N) < \tau \vee \xi(M)$, entonces $\tau \vee \xi(N)$ tiene complemento en $[\tau, \tau \vee \xi(M)]$. Sea $\rho = (\tau \vee \xi(N))^c$, entonces $\tau < \rho \le \tau \vee \xi(M)$, de aquí que $t_\rho(M) \neq 0$ y por lo tanto, $N \cap t_\rho(M) \neq 0$. Esto implica que $(\tau \vee \xi(N)) \wedge \rho \neq \tau$, lo cual es imposible. De aquí se deduce que $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M)$. $\blacksquare$

Ejemplo 18 *Sea $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$. En este anillo sólo hay dos R-módulos derechos simples: $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $S_2 = R \Big/ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$, donde S_1 es proyectivo y S_2 es singular. La retícula R-tors es $\{\xi, \xi(S_1), \xi(S_2), \chi\}$. Por otra parte, $\mathbb{T}_{\xi(S_1)}$ consiste de módulos no singulares. Como $0 \neq E(S_1)/S_1$ es un módulo singular de $\xi(E(S_1))$-torsión, se tiene que $\xi(S_1) < \xi(E(S_1))$. Si $M = E(S_1)$, entonces $\xi(M) = \chi$ por lo que M es un ξ-$\mathbb{B}$-módulo, y $t_{\xi(S_2)}(M) = 0$. De esta forma se tiene que M es un ξ-$\mathbb{B}$-módulo, $S_1 \le_{es} M$ y $\tau \vee \xi(S_1) < \tau \vee \xi(M)$. Así, este ejemplo muestra que si no se tiene la hipótesis de que $\forall \sigma \in [\tau, \tau \vee \xi(M)]$ con $\sigma \neq \tau$, $t_\sigma(M) \neq 0$ el resultado no se cumple.* $\square$

Observación 17 *En* [6, Corolario 2.16] *se prueba que si $\tau \in R$-tors y M, N son dos τ-$\mathbb{A}$-módulos, entonces $\tau \vee \xi(N) = \tau \vee \xi(M) \Leftrightarrow \chi(N) = \chi(M)$. El ejemplo anterior muestra que esta propiedad no se cumple para dos τ-$\mathbb{B}$-módulos; en el ejemplo, S_1 y $E(S_1)$ son ξ-$\mathbb{B}$-módulos tales que $\chi(S_1) = \chi(E(S_1))$, pero $\xi \vee \xi(S_1) \neq \xi \vee \xi(E(S_1))$.*

Ahora, el siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Proposición 69 no se satisface.

Ejemplo 19 *Si S es un R-módulo simple, entonces $S \oplus S$ es un ξ-$\mathbb{B}$-módulo tal que $\xi(S) = \xi(S \oplus S)$ y $S \leq_{es} (S \oplus S)$.* ¨

4.2.1 Dimensión de Cantor-Bendixson

Ahora se hablará de la dimensión de Cantor-Bendixson la cual se determina a través de una filtración definida utilizando $\mathbb{B}$-módulos, como se hizo para el caso de la dimensión de Gabriel o la dimensión plena, considerando módulos cocríticos y módulos plenos, respectivamente. La filtración de Cantor-Bendixson ha sido trabajada y comparada con la filtración de Gabriel en [11] y [17]. Aquí se comparará la filtración de Cantor-Bendixson con la $\mathbb{F}$-filtración, así como las dimensiones correspondientes a éstas.

Lema 70 *Sea $M \in$ Mod-R un $\mathbb{B}$-módulo. Si $N \in$ Mod-R es tal que $\chi(N) = \chi(M)$, entonces N contiene un $\chi(M)$-$\mathbb{B}$-módulo.*

Demostración.

Como $\chi(N) = \chi(M)$, entonces $M \notin \mathbb{T}_{\chi(N)}$, de donde, existe $0 \neq f : M \to E(N)$ que implica que existen submódulos $M'' < M' < M$ y un monomorfismo $M'/M'' \hookrightarrow N$. Además, $N \in \mathbb{F}_{\chi(M)}$ implica $M'/M'' \in \mathbb{F}_{\chi(M)}$; de aquí que M'/M'' es $\chi(M)$-$\mathbb{B}$-módulo, por Proposición 60. ∎

Definición 25 *Sea $\tau \in R$-tors. La $\mathbb{B}$-filtración de τ en R-tors o filtración de Cantor-Bendixson de τ en R-tors es*

i. $\beta_0 = \tau$.

ii. *Si i no es un ordinal límite, entonces*

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_{i-1} \vee \left[\bigvee \left\{ \xi(M) \mid M \text{ es } \beta_{i-1}\text{-}\mathbb{B}\text{-módulo} \right\}\right] \\ &= \bigvee \left\{ \sigma \in R\text{-}tors \mid \left(\beta_{i-1}, \sigma\right) \text{ es retícula de Boole} \right\} \\ &= d_{cb}\left(\beta_{i-1}\right). \end{aligned}$$

iii. *Si i es un ordinal límite, entonces*

$$\beta_i = \bigvee_{j<i} \beta_j.$$

Como R-tors es un conjunto, existe un ordinal mínimo k tal que $\beta_k = \beta_{k+r}$, para todos los ordinales r.

Definición 26 *Un R-módulo derecho M tiene τ-B-dimensión o τ-dimensión de Cantor-Bendixson igual a un ordinal h si M es de β_h-torsión, pero no es de β_i-torsión para toda $i < h$. Se dice que el anillo R tiene τ-B-dimensión si tiene τ-B-dimensión como R-módulo derecho.*

Se denota la τ-B-dimensión (si existe) de $M \in$ Mod-R por τ-B-dim(M). La ξ-B-dimensión se llama simplemente la dimensión de Boole o dimensión de Cantor-Bendixson del módulo y se denota B-dim(M).

Nótese que R tiene τ-B-dimensión igual a h si y sólo si $\beta_h = \chi$.

En forma análoga a la Proposición 54 para la dimensión τ-plena se tiene el siguiente resultado para τ-B-dimensión, cuya demostración es similar a la de dicha proposición.

Proposición 71 *Sean $\tau \in R$-tors con $\tau \neq \chi$, $\{\beta_i\}$ la B-filtración de τ en R-tors y k el ordinal mínimo tal que $\beta_k = \beta_{k+r}$, para todos los ordinales r. Si $\beta = \beta_k$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(1) *Para cualesquiera $\sigma, \sigma' \in R$-tors tales que $\tau \leq \sigma < \sigma' \leq \beta$, existe un σ-B-módulo M tal que $M \in \mathcal{T}_{\sigma'}$.*

(2) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \leq \sigma < \beta$,*

$$\sigma = [\bigwedge \{\chi(M) \mid M \text{ es un módulo } \sigma\text{-B-módulo}\}] \wedge \beta.$$

(3) *Para toda $\sigma \in R$-tors tal que $\tau \leq \sigma < \beta$, existe un σ-B-módulo.*

En los siguientes resultados se hace una comparación entre la τ-$\mathbb{B}$-dimensión y la dimensión τ-plena de un módulo M, en el caso de que éstas existan.

Proposición 72 *Sean $\tau \in R$-tors y $\{\phi_i\}$ la $\mathbb{F}$-filtración de τ en R-tors. Si $\phi = \phi_h = \phi_{h+r}$, para todos los ordinales r, entonces*

$$\tau \vee [\vee \{\xi (M) |\ M \text{ es } \tau\text{-pleno}\}] = [\tau \vee [\vee \{\xi (M) |\ M \text{ es } \tau\text{-}\mathbb{B}\text{-módulo}\}]] \wedge \phi.$$

Demostración.

Por la Observación 15 y la notación mencionada en la Proposición 56, lo que se quiere probar es que $d_b(\tau) = d_{cb}(\tau) \wedge \phi$.

Claramente $d_b(\tau) \leq d_{cb}(\tau) \wedge \phi$, por la Proposición 60.

Si $d_b(\tau) < d_{cb}(\tau) \wedge \phi$, entonces $\tau < d_b(\tau) < d_{cb}(\tau) \wedge \phi \leq \phi$, por lo que existe un módulo M que es $d_b(\tau)$-pleno y $M \in \mathbb{T}_{d_{cb}(\tau) \wedge \phi}$, de aquí que $d_b(\tau) < d_b(\tau) \vee \xi(M) \leq d_{cb}(\tau) \wedge \phi$.

Por otra parte, $[d_b(\tau), d_{cb}(\tau) \wedge \phi] \subseteq [\tau, d_{cb}(\tau)]$ implica que $[d_b(\tau), d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$ es una retícula de Boole. Así, si $\rho = d_b(\tau) \vee \xi(M)$, entonces $\rho \in [d_b(\tau), d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$ por lo que existe $\rho^c \in [d_b(\tau), d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$, esto es, $\rho \vee \rho^c = d_{cb}(\tau) \wedge \phi$ y $\rho \wedge \rho^c = d_b(\tau)$. Ahora, como $M \in \mathbb{T}_\rho$ y $M \in \mathbb{F}_{d_b(\tau)}$ entonces $M \in \mathbb{F}_{\rho^c}$; además, M es $d_b(\tau)$-pleno y $d_b(\tau) \leq \rho^c$, de donde, M es ρ^c-pleno, por la Proposición 17.

Ahora, nuevamente se tiene que $[\tau, d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$ es una retícula de Boole y como $\rho^c \in [\tau, d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$, entonces ρ^c tiene complemento $(\rho^c)' \in [\tau, d_{cb}(\tau) \wedge \phi]$, de aquí que, $\rho^c \wedge (\rho^c)' = \tau$ y $\rho^c \vee (\rho^c)' = d_{cb}(\tau) \wedge \phi$. Se afirma que $M \notin \mathbb{F}_{(\rho^c)'}$ ya que $M \in \mathbb{T}_{d_{cb}(\tau) \wedge \phi}$ implica que $M \in \mathbb{T}_{\rho^c \vee (\rho^c)'}$, pero como $M \in \mathbb{F}_{\rho^c}$, entonces $M \notin \mathbb{F}_{(\rho^c)'}$. Sea $N = t_{(\rho^c)'}(M) \neq 0$; entonces N es ρ^c-pleno y $N \in \mathbb{T}_{(\rho^c)'}$, de donde, N es $\rho^c \wedge (\rho^c)'$-pleno, por la Proposición 19. Como $\rho^c \wedge (\rho^c)' = \tau$, se tiene que N es τ-pleno y por lo tanto, $N \in \mathbb{T}_{d_b(\tau)}$; pero también $N \in \mathbb{F}_{d_b(\tau)}$ puesto que $M \in \mathbb{F}_{d_b(\tau)}$, por lo que se llega a una contradicción. De esta manera se tiene que $d_b(\tau) = d_{cb}(\tau) \wedge \phi$. $\blacksquare$

Proposición 73 *Sean $\tau \in R$-tors con $\tau \neq \chi$, $\{\beta_i\}$ la $\mathcal{B}$-filtración de τ en R-tors y $\{\phi_i\}$ la $\mathcal{F}$-filtración de τ en R-tors. Entonces $\phi_i \leq \beta_i$ para cada ordinal i.*

Demostración. *Por inducción transfinita.*

Si $i = 0$, $\phi_0 = \tau = \beta_0$.

Si i es un ordinal límite y $\forall j < i$ se tiene que $\phi_j \leq \beta_j$, entonces

$$\phi_i = \bigvee_{j<i} \phi_j \leq \bigvee_{j<i} \beta_j = \beta_i.$$

Si i no es ordinal límite y $\phi_{i-1} \leq \beta_{i-1}$, entonces por la Proposición 72 se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_i &= \phi_{i-1} \vee \bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-pleno}\} \\
&= \left[\phi_{i-1} \vee \bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-}\mathcal{B}\text{-módulo}\}\right] \wedge \phi \\
&\leq \left[\beta_{i-1} \vee \bigvee \{\xi(M) \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-}\mathcal{B}\text{-módulo}\}\right] \wedge \phi,
\end{aligned}$$

donde ϕ es la teoría de torsión donde $\phi_h = \phi_{h+r}$ para todo ordinal r.

Ahora se afirma que

$$\beta_{i-1} \vee \xi\left(\{M \mid M \text{ es } \phi_{i-1}\text{-}\mathcal{B}\text{-módulo}\}\right) \leq \beta_{i-1} \vee \xi\left(\{M \mid M \text{ es } \beta_{i-1}\text{-}\mathcal{B}\text{-módulo}\}\right) = \beta_i.$$

En efecto, sea M un ϕ_{i-1}-$\mathcal{B}$-módulo. Si $M \in \mathbb{F}_{\beta_{i-1}}$, como $\phi_{i-1} \leq \beta_{i-1}$, entonces M es β_{i-1}-$\mathcal{B}$-módulo, por la Proposición 66. Si $M \notin \mathbb{F}_{\beta_{i-1}}$, entonces $0 \neq N = t_{\beta_{i-1}}(M) \in \mathbb{T}_{\beta_i}$ y $M/N \in \mathbb{F}_{\beta_{i-1}} \subseteq \mathbb{F}_{\phi_{i-1}}$. De aquí que M/N es ϕ_{i-1}-$\mathcal{B}$-módulo, es más, M/N es β_{i-1}-$\mathcal{B}$-módulo. Esto implica que $M/N \in \mathbb{T}_{\beta_i}$. De esta forma se tiene que $M \in \mathbb{T}_{\beta_i}$ y por lo tanto, $\phi_i \leq \beta_i$. ■

En el siguiente ejemplo se muestra un anillo que tiene dimensión de Cantor-Bendixson, pero que no tiene dimensión plena.

Ejemplo 20 *Sea R la K-álgebra conmutativa generada por $\{x_i\}_{i \in [0,1]}$, considerada en el Ejemplo 15. En dicho ejemplo se probó que R no tiene dimensión $\xi(S)$-plena, donde S es el único R-módulo simple.*

Sin embargo, R sí tiene $\xi(S)$-dimensión de Cantor-Bendixson ya que R-tors $= \{\xi, \xi(S), \chi\}$ y por lo tanto, $\beta_1 = \chi$.

En el siguiente teorema se establecen condiciones suficientes para que $d_b(\sigma)$ y $d_{cb}(\sigma)$ coincidan sobre cualquier generalización de una teoría de torsión τ. Estas condiciones permitirán establecer una equivalencia sobre las dimensiones de Cantor-Bendixson y plena respecto a una teoría de torsión τ. Antes se prueba un resultado que se va a utilizar.

Lema 74 *Sean $\tau \in R$-tors, $\{\phi_i\}$ la $\mathbb{F}$-filtración de τ en R-tors y $\phi = \phi_k = \phi_{k+r}$, donde k el ordinal mínimo tal que se da la igualdad para todos los ordinales r. Si $\sigma, \sigma' \in R$-tors son tales que $\tau \leq \sigma < \sigma' \leq \phi$ y $[\sigma, \sigma']$ es de Boole, entonces existe una colección $\{M_\alpha\}$ de módulos σ-plenos tales que $\sigma' = \sigma \vee \xi(\{M_\alpha\})$.*

Demostración.

Por la Proposición 54, existe un R-módulo σ-pleno que es de σ'-torsión; de donde, $X = \{\{K \in$ Mod-$R \mid K$ es σ-pleno y $K \in \mathbb{T}_{\sigma'}\} \neq \phi$. Sea $\rho = \sigma \vee \xi(X)$, entonces $\rho \leq \sigma'$.

Si $\rho < \sigma'$, entonces existe $\rho^c \in [\sigma, \sigma']$ y $\rho^c \neq \sigma$, esto es, $\sigma < \rho^c$, y por lo tanto existe N un módulo σ-pleno tal que $N \in \mathbb{T}_{\rho^c} \subseteq \mathbb{T}_{\sigma'}$. De aquí que, $N \in X$ y entonces $N \in \mathbb{T}_\rho$ lo cual es una contradicción. Así, $\rho' = \sigma \vee \xi(X)$. ■

Corolario 75 *Sean $\tau, \sigma \in R$-tors tales que $\sigma \in gen(\tau)$. Si R tiene dimensión τ-plena y M es un σ-$\mathbb{B}$-módulo, entonces M contiene un submódulo σ-pleno.*

Demostración.

Por el lema anterior, $\sigma \vee \xi(M) = \sigma \vee \xi\left(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}\right)$ con M_α módulo σ-pleno $\forall \alpha \in A$. Así, $M \in \mathbb{T}_{\sigma \vee \xi(\{M_\alpha\}_{\alpha \in A})}$ y como $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $M \notin \mathbb{F}_{\vee\{\xi(M_\alpha)\}_{\alpha \in A}}$, de aquí que existe $\alpha \in A$ tal que $M \notin \mathbb{F}_{\xi(M_\alpha)}$. Esto implica que existen submódulos $N' < N \leq M_\alpha$ y un monomorfismo $N/N' \hookrightarrow M$. Por lo tanto, N/N' es un submódulo σ-pleno de M. ■

Corolario 76 *Sea $\tau \in R$-tors. Si R tiene dimensión τ-plena, entonces $d_b(\sigma) = d_{cb}(\sigma)\ \forall\sigma \geq \tau$.*

Demostración.

Es inmediato que $d_b(\sigma) \leq d_{cb}(\sigma)$, $\forall\sigma \geq \tau$. Si M es un σ-$\mathbb{B}$-módulo, entonces existe una colección $\{M_\alpha\}$ de módulos σ-plenos tales que $\sigma \vee \xi(M) = \sigma \vee \xi(\{M_\alpha\})$, por el lema 74. De aquí que, $M \in \mathbb{T}_{d_b(\sigma)}$ y por lo tanto $d_{cb}(\sigma) \leq d_b(\sigma)$. ■

Teorema 77 *Sea $\tau \in R$-tors tal que*

(i) $\forall M \in \mathbb{F}_\tau$, *$M$ contiene un submódulo pleno.*

(ii) $\forall\sigma \in gen(\tau)$ *y M σ-$\mathbb{B}$-módulo pleno se tiene que $t_{\sigma'}(M) \neq 0$, para toda $\sigma' \in [\sigma, \sigma \vee \xi(M)]$ con $\sigma' \neq \sigma$.*

Entonces $\forall\sigma \in gen(\tau)$, $d_b(\sigma) = d_{cb}(\sigma)$.

Demostración.

Sean $\sigma \in gen(\tau)$ y N un σ-$\mathbb{B}$-módulo, entonces $N \in \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$; de aquí que, por (i), existe un submódulo pleno $N' \leq N$. Se afirma que N' es σ-pleno. Efectivamente, si existiera $L \leq_{es} N'$ con $N'/L \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $N' \notin \mathbb{F}_{\sigma\vee\xi(N'/L)}$ por la hipótesis (ii), ya que $\sigma < \sigma \vee \xi(N'/L) \leq \sigma \vee \xi(N')$. Lo que significa que, $N' \notin \mathbb{F}_{\xi(N'/L)}$ que implica que $Hom_R(N'/L, E(N')) \neq 0$, lo cual es una contradicción, pues N' es $\chi(N')$-pleno y $N'/L \in \mathbb{T}_{\chi(N')}$. Por lo tanto, N' es σ-pleno.

Así, la hipótesis permite elegir una familia independiente máxima de submódulos plenos de N, los cuales son σ-plenos por lo probado anteriormente. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una de tales familias; entonces $\bigoplus_{\alpha\in A} N_\alpha \leq_{es} N$. Por la Proposición 69, se tiene que $\sigma \vee \xi(N) = \sigma \vee \xi\left(\bigoplus_{\alpha\in A} N_\alpha\right)$ y como $\sigma \vee \xi(N_\alpha) \leq d_b(\sigma)$, entonces $N \in \mathbb{T}_{d_b(\sigma)}$ y por lo tanto, $d_{cb}(\sigma) \leq d_b(\sigma)$.

Como $d_b(\sigma) \leq d_{cb}(\sigma)$, entonces se da la igualdad. ■

Antes de presentar el teorema que establece las condiciones para que un anillo R tenga dimensión τ-plena cuando tiene τ-dimensión de Cantor-Bendixson se prueba un resultado técnico.

Lema 78 *Sea $\tau \in R$-tors, y sean $\{\phi_i\}$ la $\mathcal{F}$-filtración de τ en R-tors y ϕ donde ésta se estaciona. Si $0 \neq M \in \mathcal{F}_\tau$ es tal que $\chi(M) < \phi$, entonces M contiene un submódulo $\chi(M)$-pleno.*

Demostración.

Como $\tau \leq \chi(M) < \phi$, entonces existe un R-módulo N que es $\chi(M)$-pleno, por la Proposición 54. De aquí que $N \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ y por lo tanto $Hom_R(N, E(M)) \neq 0$, de donde, existen $N'' < N' \leq N$ y un monomorfismo $N'/N'' \hookrightarrow M$. Así, $N'/N'' \in \mathcal{F}_{\chi(M)}$ y como N' es $\chi(M)$-pleno, se tiene que N'/N'' es $\chi(M)$-pleno, por la Proposición 16. $\blacksquare$

Teorema 79 *Sea $\tau \in R$-tors. Las dos condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *R tiene dimensión.τ-plena.*

(2) (a) *R tiene τ-$\mathcal{B}$-dimensión.*

(b) *$\forall \sigma \in gen(\tau)$ y M σ-$\mathcal{B}$-módulo existe $N \leq M$ pleno tal que $t_{\sigma'}(N) \neq 0$, para toda $\sigma' \in [\sigma, \sigma \vee \xi(N)]$ con $\sigma' \neq \sigma$.*

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$ *Por la Proposición 73 se tiene el inciso (a).*

Ahora, sean $\sigma \in gen(\tau)$ y $M \neq 0$, un σ-$\mathcal{B}$-módulo. Entonces M contiene un submódulo σ-pleno N, por el Corolario 75. Sea $\sigma' \in [\sigma, \sigma \vee \xi(N)]$ tal que $\sigma' \neq \sigma$; como N es σ-pleno, entonces $t_{\sigma'}(N) \neq 0$, por el Teorema 30. Así, se satisface la condición (b).

$(2) \Rightarrow (1)$ *Por el Corolario 55, basta probar que existe un R-módulo σ-pleno para cada $\sigma \in gen(\tau)$ tal que $\sigma \neq \chi$.*

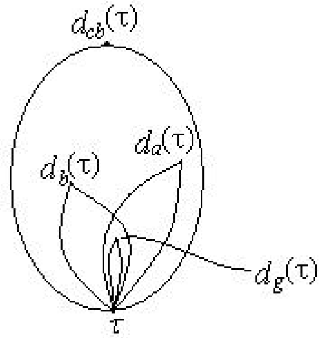
Sea $\sigma \in gen(\tau)$; por la condición (a) y la Proposición 71, existe $M \neq 0$ un σ-$\mathcal{B}$-módulo. Entonces, por (b), M contiene un submódulo pleno $N \leq M$ tal que $t_{\sigma'}(N) \neq 0$, para toda $\sigma' \in [\sigma, \sigma \vee \xi(N)]$ con $\sigma' \neq \sigma$. Así, por los argumentos usados en el Teorema 77 se tiene que N es σ-pleno. Por lo tanto, R tiene dimensión.τ-plena. $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo se muestra un anillo con dimensión plena y por lo tanto con dimensión de Cantor-Bendixson también, pero que no tiene dimensión de Gabriel.

Ejemplo 21 *Sea $R = \mathbb{Z}_2^{\aleph_0} / \mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$. En* [6, Ejemplo 4.11] *se prueba que $gen(\tau_g)$ no tiene átomos por lo que R no tiene dimensión τ_g-atómica y por ende, tampoco tiene tiene dimensión de Gabriel respecto a τ_g, por* [6, Proposición 4.2]. *Sin embargo, sí tiene dimensión τ_g-plena por el Corolario 52.* $\diamond$

Epílogo

En el estudio de derivadas sobre R-tors [10] se prueba que dada una teoría de torsión τ 2 R-tors, las derivadas de Gabriel ($d_g(\tau)$), de Boyle, ($d_b(\tau)$), atómica o derivada zoclo, ($d_a(\tau)$), y de Cantor-Bendixson, ($d_{cb}(\tau)$), quedan relacionadas conforme al siguiente esquema:



De aquí que, esto da lugar a que cuando se consideran la G-?ltración fγ_ig, la F-?ltración fϕ_ig, la A-?ltración [6] fα_ig y la B-?ltración fβ_ig, se dan las relaciones γ_i · ϕ_i · β_i y γ_i · α_i · β_i para cada ordinal i. Además, según se prueba en el Capítulo 4, si un anillo R tiene τ-dimensión de Gabriel, entonces R tiene dimensión τ-plena, en cuyo caso también tiene τ-dimensión de Cantor-Bendixson. En [6] se prueba que si R tiene τ-dimensión de Gabriel, entonces tiene R tiene τ-dimensión atómica, y se puede ver fácilmente que si R tiene τ-dimensión atómica, entonces R tiene τ-dimensión de Cantor-Bendixson.

Según se muestra en este trabajo y en [6] por medio de ejemplos, todas estas dimensiones son distintas.

Esta es una investigación en proceso por lo que varias cuestiones quedan por resolver. Por ejemplo:

a) comparar la dimensión τ-plena con la τ-dimensión atómica.

b) describir la estructura interna de los B-módulos.

Bibliografía

[1] Arroyo, M. J. and Ríos J., “*Some aspects of spectral torsion theories*”, Comm. Algebra 22(12), 4991-5003 (1994).

[2] Arroyo, M. J., Ríos J. and Wisbauer, R., “*Spectral torsion theories in module categories*”, Comm. Algebra 25(7), 2249-2270 (1997).

[3] Arroyo, M. J., Ríos J. and Wisbauer, R., “*Endomorphism Rings of Quotient Modules for Spectral Torsion Theories*”, Comm. Algebra 25(7), 2271-2284, (1997).

[4] Boyle, Ann K., “*The large condition for rings with Krull dimension*”, Proc. Amer. Math. Soc. 72, 27-32, (1978).

[5] C?lug?reanu, G., *Lattice Concepts of Module Theory*, Kluwer Academic Publishers, USA, (2000).

[6] Castro, J., Raggi, F., Ríos J. and Van den Berg, J., “*On the atomic dimension in module categories*”, Comm. Algebra 33, 4679-4692 (2005).

[7] Castro, J., Raggi, F. and Ríos J., “*Decisive dimension and other related torsion theoretic dimensions*”, Journal of Pure and Applied Algebra 209, 139-149, (2007).

[8] Castro, J., Ríos J. and Teply, M. L., “*Torsion theoretic dimensions and relative Gabriel correspondence*”, Journal of Pure and Applied Algebra 178, 101-114, (2003)..

[9] Golan, J., *Torsion Theories*, Longman Scienti? c & Technical, Harlow, (1986).

[10] Golan, J. and Simmons, H., *Derivatives, nuclei and dimensions on the frame of torsion theories*, Longman Scienti? c & Technical, Harlow, (1988).

[11] Golan, J., “*On the Cantor-Bendixson-Simmons ?ltration of a torsion theory*”, Comm. Algebra 16(4), 681-688, (1988).

[12] Goldman, Oscar, “*Rings and modules of quotients*”, Journal of Algebra 13, 10-47, (1969).

[13] Goodearl, K. R., *Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker, Inc., New York, USA, (1976).

[14] Grätzer, G., *General Lattice Theory*, Second edition, Birkhäuser Verlag, Berlin, (1998).

[15] Lambek, J., *Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients*, Lecture Notes in Mathematics #177, Springer-Verlag, Berlin, (1971).

[16] Lau, William G., *Torsion Theoretic Generalizations of Semisimple Modules*, PhD Thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, (1980).

[17] Simmons, H. "*The Gabriel dimension and Cantor-Bendixson rank of a ring*", Bull. London Math Soc. 20, 16-22, (1988).

[18] Stenström, B. *Rings of Quotients*, Die Grundlehren der Math. Wiss. in Eizeld, Vol. 217, Springer-Verlag, Berlin, (1975).

[19] Teply, M. L., *Semicocritical modules*, Secretariado de publicaciones e intercambio cientí? co, Universidad de Murcia, España, (1988).

[20] Vachuska, P., *Applications of the τ-full socle*, PhD Thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, (1992).

[21] Viola-Prioli, A. and Viola-Prioli, J. E., "*Rings whose kernel functors are linearly ordered*", Paci? c J. Math., 132 (1), 21-34, (1988).

[22] Wisbauer, R., "*Localization of Modules and the Central Closure of Rings*", Comm. in Algebra 9(14), 1455-1493, (1981).

[23] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, A handbook for study and research, Algebra, Logic and Application Series, Vol. 3, Gordon and Breach Science Publishers, (1991).

[24] Wisbauer, R., *Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Algebras*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 81, (1996).

[25] Zelmanowitz, J. M., "*Representation of Rings with faithful polyform modules*", Comm. in Algebra 14(6), 1141-1169, (1986).

[26] Zelmanowitz, J. M., "*Weakly semisimple modules and density theory*", Comm. in Algebra 21(5), 1785-1808, (1993).

[27] Zelmanowitz, J. M., "*Density for polyform modules*", Algebra and its applications (Athens, OH, 1999), 563–569, Contemp. Math., 259, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000).

Índice de notación

Índice