

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
FÍSICAS

PRESENTA

L.C. JAIME ARTURO PIMENTEL CABRERA

REDES COMPLEJAS APLICADAS AL ESTUDIO DE TRANSICIONES
DE FASE EN MODELOS DE VOTANTES

DIRECTOR DE TESIS

DR. MAXIMINO ALDANA GONZÁLEZ

COMITÉ TUTORAL

DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA

DR. DENIS BOYER

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MÉXICO, MARZO 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

L.C. JAIME ARTURO PIMENTEL CABRERA.

Redes Complejas Aplicadas al Estudio de Transiciones de Fase en Modelos de Votantes

COMITÉ TUTORAL:

DR. MAXIMINO ALDANA GONZÁLEZ

DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA

Dr. DENIS BOYER

MÉXICO, MARZO 2008.

A Natalia y Jorge, porque con su esfuerzo y cariño
enseñan a vivir...

AGRADECIMIENTOS

- Al Dr. Maximino Aldana por su amistad, asesoría, y apoyo.
- Al Dr. Hernán Larralde por su amistad a la par de su constante asesoría.
- Al Dr. Denis Boyer por su atención y asesoría.
- A los miembros de mi jurado: Dr. Maximino Aldana González, Dr. Octavio Miramontes Vidal, Dr. Mariano López de Haro, Dr. Denis Boyer Pierre y Dr. Gustavo Matínez Mekler, por sus valiosos comentarios y correcciones.

- A Itzel por su cariño y ejemplo.
- Al Dr. Gustavo Martínez Mekler por su amistad y apoyo.
- A todos los amigos que me han ayudado en muchas maneras.
- Al personal del ICF y del PCF de la Universidad Nacional Autónoma de México, por su apoyo, en particular al Dr. Manuel Torres.
- Este trabajo fue realizado con el apoyo de la beca Nacional CONACYT nivel Maestría.
- Agradezco también la beca de tesis de maestría otorgada con cargo al proyecto PAPIIT IN-112407-3 “Fenómenos colectivos en Redes complejas” financiado por la UNAM.

RESUMEN

A pesar de la grán cantidad de investigación sobre procesos fuera del equilibrio, actualmente no existen criterios generales para determinar en que condiciones un sistema de este tipo podría presentar una transición de fase. Una clase de sistemas fuera del equilibrio que presentan transiciones de fase orden-desorden son los procesos de sincronización colectiva de muchas partículas. En ellos, en base a interacciones entre los miembros del grupo, las partículas son capaces de transitar desde un estado desordenado hacia un estado de sincronización colectiva que es resistente a las perturbaciones inducidas por el medio ambiente. Ejemplos de este tipo de sistemas hay muchos: cardúmenes, parvadas, grupos de insectos, materiales magnéticos, etc.

Dada su importancia los procesos de sincronización colectiva se han estudiado desde varias perspectivas, no obstante, la forma en que se origina y mantiene la sincronización entre las partículas es una incógnita en la mayoría de los casos.

En este trabajo usamos un modelo de red compleja conocido como red neuronal o de votantes para analizar las características de las interacciones entre los nodos tal que la red pueda sincronizarse. Este modelo es capaz de reproducir cualitativamente algunos comportamientos que se pueden observar en sistemas sincronizados reales.

En particular, analizamos tres aspectos fundamentales en el proceso de sincronización colectiva: la forma de interacción entre los elementos, la intensidad de las interacciones y la regla dinámica con la que cada elemento define su estado en cada paso de tiempo (ver esquema de la siguiente página).

Nuestros resultados proporcionan una serie de criterios que establecen las condiciones mínimas para que la red de votantes pueda transitar del desorden a comportamientos sincronizados. Estas condiciones reflejan algunos factores esenciales para observar sincronización: el ruido, la cantidad de interacciones entre los elementos y la presencia de conexiones de largo alcance. Además mostramos que tanto la forma en que introducimos las conexiones de largo alcance en la topología de la red, como la manera de añadir el ruido en la regla dinámica del modelo, son factores que pueden afectar la formación de estados sincronizados en la red.

ÍNDICE GENERAL

PARTE I SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS COMPLEJOS.	1
1 SINCRONIZACIÓN COMO PROPIEDAD EMERGENTE.	3
1.1 Introducción.	3
1.2 Modelos clásicos: campo medio y exponentes críticos.	6
1.3 Sistemas biológicos sincronizados.	9
1.3.1 Modelos Fenomenológicos de sincronización.	11
1.4 Medios excitables sincronizados.	14
1.5 Modelo SDPM de Vicsek.	17
1.6 Modelo de sincronización de Grégoire-Chaté.	23
1.7 El modelo vectorial de red.	24
1.8 Del orden al desorden en caminatas de Langostas.	30
PARTE II MODELO DE RED NEURONAL O DE VOTANTES.	37
2 EL MODELO DE VOTANTES.	39
2.1 Definición del modelo.	39
2.1.1 Universalidad de campo medio.	46
2.2 Algunos casos particulares.	48
2.2.1 Conclusiones.	49
PARTE III PROPIEDADES DE SINCRONIZACIÓN DEL MODELO DE VOTANTES.	51
3 CONDICIONES MÍNIMAS PARA TRANSICIÓN DE FASE.	53
3.1 Conectividad tres implica transición de fase.	53
3.2 Simetría de la distribución de pesos.	55
3.2.1 La simetría de $P_\omega(\omega)$ como factor para transición de fase.	56
3.3 Conclusiones	58
4 MUNDO PEQUEÑO EN REDES NEURONALES.	59
4.1 Red de cadena unidimensional tipo Mundo Pequeño.	61
4.1.1 Transitorios en cadena unidimensional de votantes tipo mundo pequeño.	62
4.2 Mundo pequeño en red de votantes cuadrada.	65
4.2.1 Transitorios de mundo pequeño en malla cuadrada.	65
4.3 Conclusiones	71
5 LEY DE POTENCIAS EN UNA RED DE VOTANTES.	73
5.1 Distribución de Inputs libres de escala.	74
5.2 Red de votantes con topología de outputs libre de escala.	76
5.3 Cuando los líderes se sincronizan.	78
5.4 Conclusiones	80
PARTE IV MODELO DE VOTANTES CON RUIDO COMBINADO.	81
6 RED DE VOTANTES CON DINÁMICA COMBINADA DE VICSEK Y GRÉGOIRE-CHATÉ.	83
6.1 Introducción.	83
6.2 Dinámica combinada de Vicsek <i>et al</i> y Grégoire-Chaté.	84

6.3	Conectividad K finita.	86
6.3.1	Ruido de Vicsek <i>et al</i> nulo ($\eta_2 = 0$).	87
6.3.2	Dinámica sin ruido de Grégoire-Chaté ($\eta_1 = 0$).	88
6.3.3	Ruidos combinados de Vicsek y Grégoire-Chaté ($\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$).	88
6.4	Conectividad K divergente.	90
6.5	Conclusiones.	91
7	CONCLUSIONES GENERALES Y PERSPECTIVAS	93
	PARTE V APÉNDICES	95
A	INTRODUCCIÓN A LAS REDES COMPLEJAS.	97
A.1	Topología de redes complejas	97
A.2	Redes de tipo Erdős-Rényi	100
A.3	Crecimiento de redes	102
A.4	Topología exponencial	104
A.5	Topología libre de escala	105
A.6	Nodos que se hacen viejos.	108
A.7	La isla gigante	109
B	REDES CON CONECTIVIDAD LIBRE DE ESCALA EN INPUTS.	113
B.1	Inputs con conectividad libre de escala.	113
C	Dinámica de votantes con ruidos combinados.	115
C.1	Solución analítica.	115
C.1.1	Conectividad finita.	116
C.1.2	Conectividad infinita.	118
	BIBLIOGRAFÍA	121

Parte I

SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS COMPLEJOS.

SINCRONIZACIÓN COMO PROPIEDAD EMERGENTE.

1.1 INTRODUCCIÓN.

El concepto de sincronización puede tener varios significados según el contexto en el que se mencione. Dentro de la literatura uno de los enfoques más populares es el que describen Pikovsky, Rosenblum y Kurths (Pikovsky et al, 2001.) cuando definen sincronización como “un ajuste de los ritmos de objetos oscilantes producido por una interacción débil”. Esta definición implica aclarar conceptos como: objeto oscilante, ritmo, interacción y ajuste de ritmos. Muchos trabajos han sido enfocados en dar respuestas a estas interrogantes, sin embargo, una definición general de sincronización no implica necesariamente objetos oscilantes, sino que se refiere al acoplamiento entre los estados de partículas que interactúan mediante formas muy diversas y sofisticadas.

Particularmente complejos, en la naturaleza existen muchos procesos de sincronización colectiva que son francamente impresionantes. Ejemplos de estos procesos ocurren en muchas escalas: la sincronización en las orientaciones de espines en un material magnético, la acreción de materiales para formar estructuras complejas o el acoplamiento de los movimientos de miles de organismos vivos como en bancos de peces, parvadas de aves, colonias de bacterias, etc.

Para que estos comportamientos se presenten deben combinarse en un balance sutil e intrincado muchos factores entre los que destacan las interacciones entre los individuos del grupo y con el medio ambiente. Desafortunadamente, en la mayoría de los casos no conocemos los mecanismos que permiten transmitir información entre los individuos, partículas u organismos y que les permitan sincronizar sus movimientos. Suponemos que ocurren interacciones a varias escalas y que además el contexto o medio ambiente contribuye de forma importante, pero nuestro conocimiento es limitado y recién comienza a desarrollarse.

Uno de los enfoques para abordar este tipo de problemas es la *teoría de redes complejas*, esquema teórico que suele incluir herramientas de mecánica estadística y sistemas dinámicos para tratar con sistemas de muchos elementos que interactúan en formas no lineales. El formalismo de redes tiene la ventaja de que analiza de forma separada por una parte, la topología de la red de interacciones y por la otra la regla dinámica que propaga las interacciones.

En este trabajo estudiamos la emergencia de comportamientos colectivos (transiciones de fase desorden-orden) en un modelo de red compleja conocido como red neuronal o de votantes. Aunque este modelo es simple, captura cualitativamente algunas características de la dinámica de grupo que se observa en enjambres, manadas, parvadas, cardúmenes, etc. Esta perspectiva nos permite determinar algunas propiedades de la red de votantes que son indispensables para que los elementos que la componen sean capaces de sincronizarse.

Dividiremos el contenido en cuatro secciones principales:

- En la parte I hacemos una revisión de algunos trabajos que desde varias perspectivas analizan comportamientos sincronizados de sistemas reales como peces e insectos.

libre de escala de inputs ² en primer lugar y de outputs ³ en segundo término. Estos casos son representativos de topologías de red donde existen algunos elementos mucho más conectados que otros, característica que en el caso de los inputs quiere decir que algunos elementos toman en cuenta a muchísimos votantes de la red para definir su estado y en el caso de los outputs quiere decir que existen unos pocos elementos (líderes) que son extremadamente influyentes en el sentido que son influencia común a muchísimos de los elementos de la red.

Presentamos también un caso donde hacemos que todos los líderes de la red adopten el mismo estado y veremos lo que ocurre con la sincronización del sistema.

- En la parte IV, en el capítulo 6, proponemos un modelo de sincronización que se basa en el modelo de votantes y permite incluir las reglas dinámicas de Vicsek y Grégoire-Chaté como casos límites de la nueva regla dinámica que planteamos. En este caso obtenemos resultados analíticos y numéricos que nos permiten hacer algunas conclusiones sobre el papel fundamental que juegan las reglas dinámicas en los modelos de sincronización.
- Finalmente, en el capítulo 7 discutimos algunos posibles temas de investigación que pudieran derivarse de este trabajo.

Para comenzar nuestra introducción, en la siguiente sección mencionaremos brevemente algunos conceptos sobre las transiciones de fase en sistemas termodinámicos.

² A lo largo de todo este trabajo, llamamos inputs al conjunto de influencias que actúan sobre un elemento de la red.

³ Definimos como outputs al conjunto de influencias que ejerce un elemento de la red sobre algunos otros elementos.

*grupo de renormalización*⁶. Este desarrollo teórico (además de los adelantos experimentales), permitió conocer el valor de los exponentes que caracterizan cada transición y a partir de estos resultados formular conceptos como el de clases de universalidad, que es la equivalencia entre transiciones de fase de diferentes sistemas.

La mayoría de estos conceptos se desarrollaron para analizar sistemas termodinámicos, sin embargo, veremos que algunos de ellos parecen relacionarse con los modelos de sincronización que aquí presentamos. Modelos aplicables en sistemas tan variados como organismos biológicos, economía, dinámica social, etc.

Antes de comenzar la descripción de nuestro trabajo, es conveniente conocer algunas características de la sincronización colectiva que se presenta en organismos biológicos, sistemas muy representativos de los comportamientos colectivos que aquí estudiamos.

6 La renormalización es una sofisticada técnica donde se propone que un proceso iterativo de escalamiento de las formas funcionales de interacción y de las constantes de acoplamiento que caracterizan un sistema puede tener puntos fijos no triviales que impliquen correlaciones a todas las escalas, situación que caracteriza el punto crítico en una transición de fase

1.3 SISTEMAS BIOLÓGICOS SINCRONIZADOS.

La interacción entre organismos vivos puede generar propiedades emergentes muy complejas, entre ellas, una de las más espectaculares es la formación de grupos de individuos que sincronizan sus movimientos y se desplazan de forma coordinada, en algunos casos a velocidades sorprendentes. En las condiciones adecuadas, este comportamiento se presenta en varias especies biológicas independientemente de sus características como taxonomía, hábitat, historia evolutiva, grado de movilidad, etc. (Parrish y Edelstein-Keshet, 1999, Camazine *et al.*, 2001). En algunas ocasiones estos movimientos colectivos se asemejan considerablemente a lo que observamos en sistemas inanimados que en determinadas condiciones de temperatura, se organizan y adoptan comportamientos colectivos, (ver Fig. 1.1).

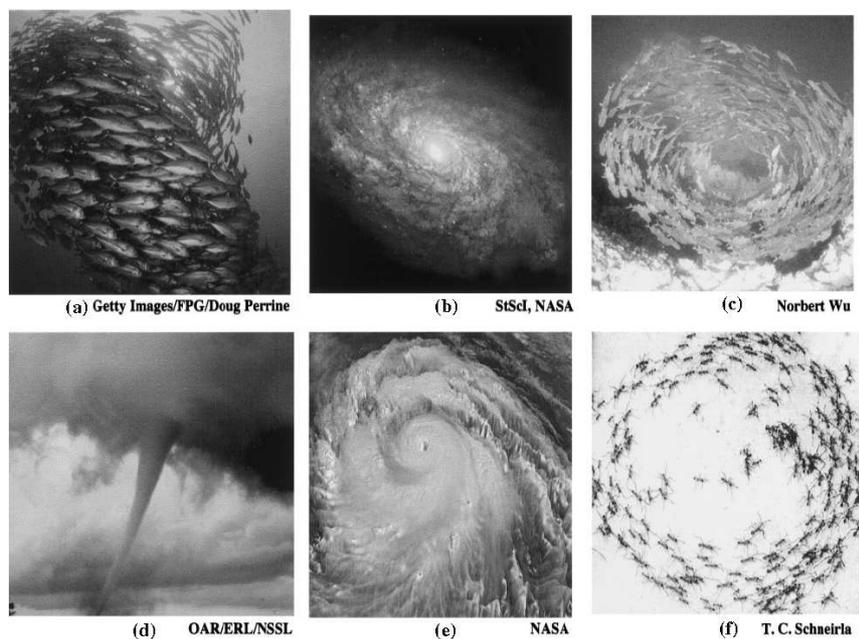


Figura 1.1. Ejemplos en dos y tres dimensiones de propiedades emergentes que se presentan en sistemas animados e inanimados. Estructura de tornado en (a) peces y (d) vapor de agua. Agregaciones en forma de disco en (b) planetas (© NASA), (c) peces (© Norbert Wu 1999.), (e) vapor de agua (© NASA) y (f) hormigas (© T. Schneirla & W.H Freeman and Company.). Figura tomada de J.K. Parrish et. al. 2002.

Durante mucho tiempo y desde enfoques muy variados se han tratado de esclarecer las formas de interacción que permiten la sincronía de organismos biológicos y aunque se han logrado responder algunas cuestiones relevantes, persiste la cuestión central: ¿cómo se combinan los comportamientos individuales para generar sincronía colectiva?.

Una de las perspectivas biológicas de la agregación la supone como una estrategia evolutiva que proporciona beneficios a la mayoría de los organismos del grupo a costa de algunas desventajas. Por ejemplo, en aves migratorias formar grupos funciona para ahorrar energía en desplazamientos

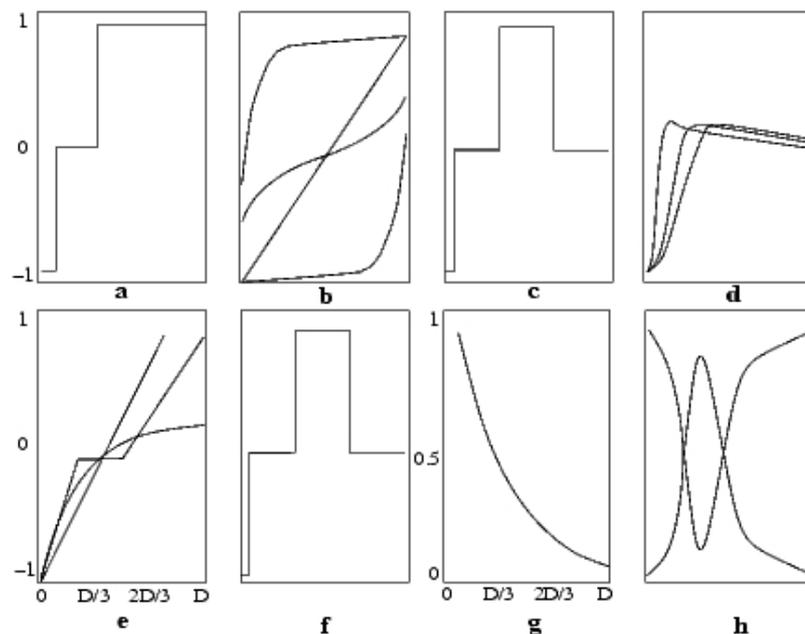


Figura 1.2. Esquema de la fuerza de interacción entre pares de peces como función de la distancia entre ellos (D). En estas funciones las zonas negativas son de repulsión y las positivas de atracción. a) Aoki (1982). b) Warburton y Lazarus (1991). c) Huth y Wissel, (1990), (1992), (1994). d) Reuter y Breckling, (1994). e) Romey, (1996). f) Vabo y Nottestad, (1997). g) Stöcker, (1999), h) Parrish et al, (2002).

3. Los modelos que incluyen componentes estocásticas describen muy pobremente los sistemas reales y no son suficientemente flexibles para manejar factores externos. Hecho que principalmente se debe a que no se conoce la naturaleza del ruido presente en la comunicación de los animales.
4. Las condiciones iniciales asociadas a velocidades, densidades, fuerzas de interacción, etc, que se han explorado típicamente son sólo una pequeña fracción del espacio de parámetros.
5. Como las características que incluye cada uno de los modelos son muy variadas, no es posible compararlos entre sí para dilucidar cuál reproduce características biológicamente relevantes.

A manera de ilustración veremos algunos resultados del trabajo de Julia Parrish (Parrish *et al*, 2002.) donde se propone un mecanismo de interacción para peces en cardúmenes de 128 Danios gigantes ¹⁰. En su modelo se incluyen tres componentes básicos: la atracción/repulsión entre los peces, el tamaño de la vecindad ¹¹ y el tamaño del cardumen. La unidad de medida es el tamaño del pez (*body length*, BL). Las fuerzas atractiva/repulsiva que emplean puede ser lineal, lineal a pedazos o convexa como se muestra en la Fig. 1.2, el origen de estos potenciales de interacción

¹⁰ Los Danios gigantes (*Danio aequipinatus*) son peces que en promedio miden alrededor de 5.3 cm.

¹¹ Se entiende por vecindad el espacio físico que rodea a cada pez tal que los peces que se encuentren dentro de el influencian directamente al elemento al que le asociamos la vecindad.

se centra en la distancia observacional promedio (1.9 BL). La distancia de percepción es de 180 BL y el número de vecinos puede ser de 4, 8, 16, y 24. Salvo datos menos generales que presenta Parrish en su trabajo los resultados que obtiene son los que se muestran en la Fig. 1.3.

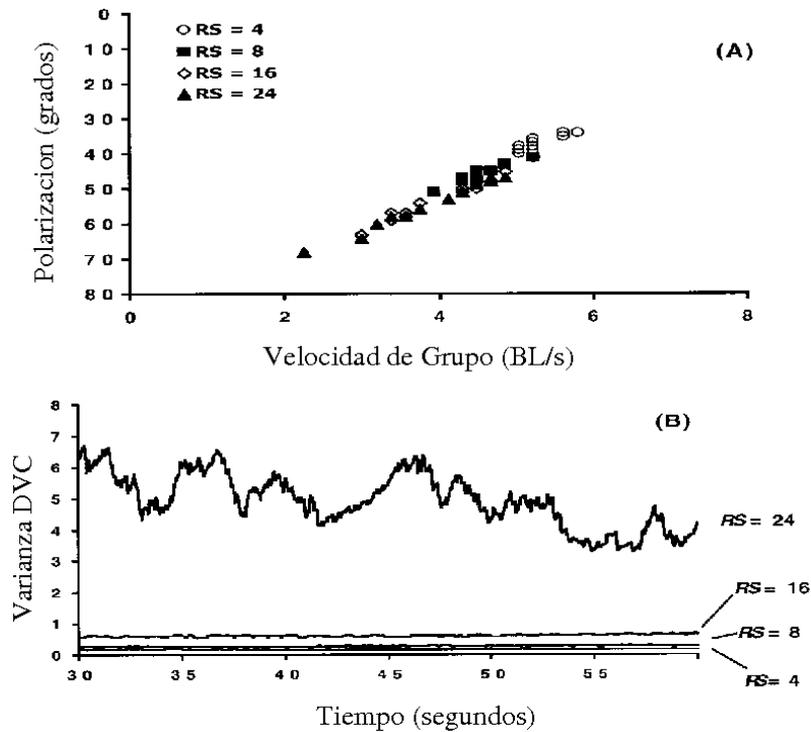


Figura 1.3. A) Velocidad de grupo contra polarización para 4,8,16 y 24 interacciones promedio (RS). B) Varianza de la distancia entre peces medida a partir del centro del cardumen para cuatro números de vecinos (RS). Figura tomada de Parrish *et al*, (2002).

Usando los potenciales de interacción entre peces Parrish *et al* realizan simulaciones computacionales en las que miden el grado de alineamiento colectivo entre los peces. A este parámetro de orden le llaman polarización promedio. En la gráfica de la Fig. 1.3A se muestra la velocidad del grupo de peces contra la polarización promedio. Parrish *et al* concluyen que la orientación promedio de los peces se polariza conforme aumenta la velocidad de desplazamiento, independientemente del número de interacciones que tenga cada pez (RS). En la Fig. 1.3B se muestra la serie temporal de la varianza como índice del cambio en la densidad promedio de los peces centrales con el número de interacciones por pez (RS). Obsérvese que la densidad es más o menos homogénea cuando hay pocas interacciones y fluctúa notablemente cuando se incrementan las interacciones a RS=24. La conclusión del trabajo de Parrish es que la homogeneidad del grupo depende notablemente de la escala de interacción de los peces y parece desordenarse conforme se incrementan las interacciones.

Enseguida veremos otro tipo de tratamiento de colectividad en agregados biológicos, esta vez usando la perspectiva de los medios excitables.

1.4 MEDIOS EXCITABLES SINCRONIZADOS.

En 1986 durante la copa mundial de fútbol realizada en México, saltó a la fama un mecanismo de sincronización colectiva realizada por los espectadores reunidos en un estadio: la famosa "ola". Este mecanismo consiste en que una sección de espectadores ubicados transversalmente al perímetro de la cancha, se pone de pie durante un breve instante, levanta sus manos y momentos después vuelve a sentarse. Inmediatamente sus vecinos cercanos a la derecha o a la izquierda se levantan para repetir el movimiento. Si un número suficiente de espectadores lo repiten, el resultado es una especie de onda que viaja a lo largo de la tribuna o gradería hasta dar una o dos vueltas completas al estadio. Si la secuencia se realiza hacia la izquierda de cada espectador, la onda viajará en el sentido del reloj, y si lo hace hacia la derecha, en sentido contra reloj, (Ver Fig. 1.4).



Figura 1.4. Una "ola" propagándose en un estadio, algunas docenas de espectadores se ponen de pie al mismo tiempo y son imitados por sus vecinos cercanos, si logra propagarse el movimiento, se forma una sincronización colectiva con interacciones de corto y largo alcance. Figura tomada de © Florian K., Frankfurt, Germany, 16. Juni 2005, http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Confed-Cup_2005_-_Laolawelle.JPG

Usando grabaciones de vídeo y encuestas on-line, Illás J. Farkas *et al* (Farkas *et al*, 2002, 2006, <http://angel.elte.hu/wave>.) analizaron 14 "olas" en estadios de fútbol donde participaron al menos 50,000 personas en cada una. Encontraron que las "olas" usualmente circulan en el sentido del reloj a velocidades de 12 metros por segundo con anchos de 6 a 12 m (15 asientos aprox.). A partir de estos datos proponen que, basándose en modelos de medios excitables es posible generar el tipo de sincronización que muestran las "olas", modelos que usualmente se utilizan para describir propagación de impulsos como en incendios forestales u ondas de calcio en corazones.

personas activas dentro del radio de interacción R está por encima del umbral de activación (C) la persona pasará del estado excitado al activo con una probabilidad P . Este resultado se ilustra en la Fig. 1.5.

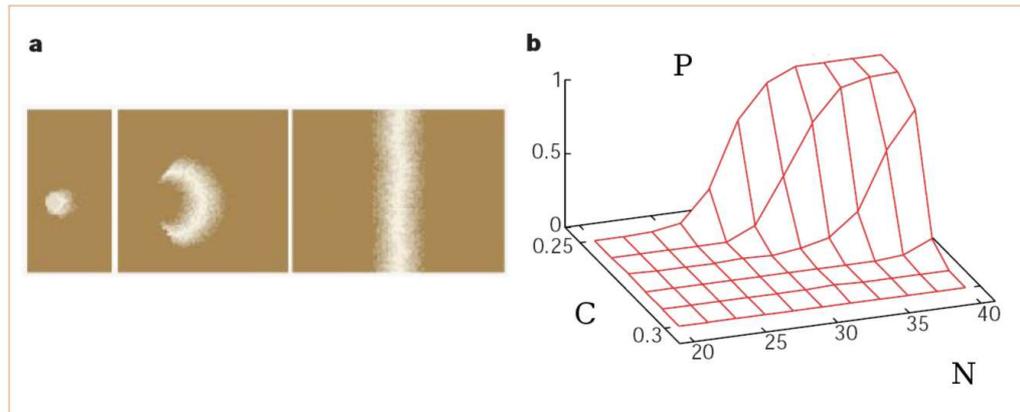


Figura 1.5. Modelo de Farkas *et al* de "Olas" en estadios. a) Secuencia de las tres etapas descritas en el texto (excitable, activo y pasivo) que se presentan en el modelo: n_a pasos activos y n_r pasos de reposición. b) Valor promedio de la probabilidad de activación (P) en función del número de gente (N) que trata de inducir el disparo de activación y del valor del umbral de disparo (C).

Concluyen diciendo que su modelo de activación tiene algunas características similares a transiciones de fase discontinuas, presentando un rompimiento de simetría espontáneo que es estable en el tiempo. Sostienen también que el modelo tiene implicaciones sobre el control de comportamientos colectivos de tipo social y la información obtenida puede usarse para conocer mejor cómo se forman e interaccionan los grupos de personas en multitudes.

El trabajo de Farkas es un ejemplo de cómo una metodología elaborada en un contexto de medios excitables puede ser aplicable en otro tipo de sistemas que poseen ciertas analogías. Debe hacerse notar que el punto clave de este trabajo es mostrar el importante papel de las interacciones a varias escalas en este modelo de comportamientos colectivos estables.

Una perspectiva analíticamente más elaborada para el tratamiento de los agregados biológicos es el modelo de Vicsek para partículas autopropulsadas que mostraremos en la sección siguiente.

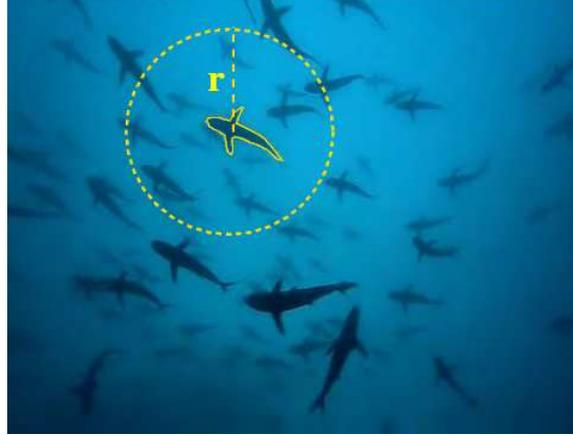


Figura 1.6. Esquema de la interacción tipo Vicsek. Al tiempo t cada elemento acopla su dirección al promedio de las orientaciones de sus vecinos sumada a una componente estocástica η . Sus vecinos son aquellos elementos que al tiempo t están dentro del círculo de radio r .

Donde $\sum_{x_j \in \mathcal{V}_i} \vec{\sigma}_{n_j}(t)$ denota la orientación promedio de las velocidades de sus K vecinos (partículas dentro de la vecindad de radio r) y la variable $\xi_i(t)$ puede tomar cualquier valor en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.

Haciendo una analogía con vectores en el plano complejo, el vector velocidad asociado a cada partícula se puede expresar como,

$$\vec{\sigma}_i(t) = \sigma_0 e^{i \theta_i(t)}. \quad (1.5.3)$$

Calculando la velocidad promedio de todo el sistema podemos obtener el grado de alineamiento entre las partículas del sistema al tiempo t , parámetro al que llamaremos $\psi(t)$,

$$\psi(t) = \frac{1}{Nv} \left| \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i(t) \right|. \quad (1.5.4)$$

En el límite $t \rightarrow \infty$, el parámetro de orden $\psi(t)$ alcanza un valor estacionario Ψ que depende de la intensidad del ruido η ,

$$\Psi(\eta) = \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \right\rangle. \quad (1.5.5)$$

donde los parentesis $\langle \rangle$ denotan el promedio de las realizaciones. Bajo estas definiciones, el modelo de Vicsek tiene cuatro parámetros libres: la intensidad del ruido $\eta \in [0, 2\pi]$, la densidad de partículas $\rho = N/L^2$, el radio de interacción r y la velocidad constante σ_0 .

Usando estas reglas Vicsek *et al.* realizan simulaciones numéricas de las que obtienen datos que muestran la dependencia del alineamiento global Ψ con el parámetro η y con la densidad ρ . En base a estos datos construyen la gráfica que mostramos en la Fig. 1.7.

Nótese los efectos de tamaño finito para valores pequeños de N en la transición de la Fig. 1.7a). A la luz de estos resultados algunos autores argumentan que el modelo de Vicsek *et al* contradice a

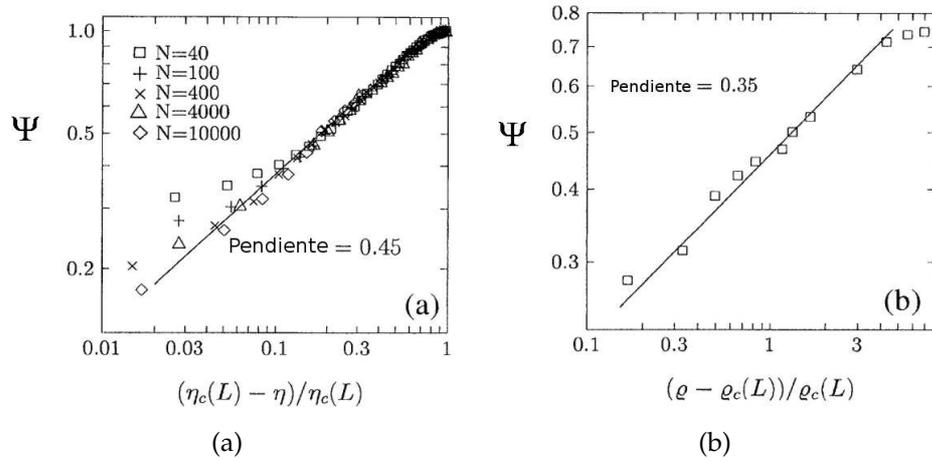


Figura 1.8. a) Gráfica Log-Log del parámetro de alineamiento Ψ como función de la distancia al ruido crítico $[\eta_c(L) - \eta] / \eta_c(L)$, $r=1.0$, $\sigma_0=0.03$, b) Log-Log de la alineación promedio v_a contra la distancia a la densidad crítica. Como en la figura 1.7 se analizan varios tamaños de red conservando la densidad constante $[\rho_c(L) - \rho] / \rho_c(L)$, $r=1.0$, $\sigma_0=0.03$. Figura tomada de Vicsek *et al*, (1995).

posteriores apoyarán esta hipótesis.

Con estos antecedentes podemos añadir un resultado a los de Vicsek *et al* que nosotros obtuvimos. El resultado consiste en analizar la forma en la que el número de interacciones determina el nivel de sincronización. Para ello, calcularemos la dependencia del parámetro de orden Ψ como función del radio de interacción r . Nuestra contribución se muestra en la Fig. 1.9.

Podemos observar que existe un radio de interacción mínimo para lograr que el sistema alcance estados semiordenados o completamente ordenados. Este resultado concuerda cualitativamente con los criterios de transición de fase para redes que mostraremos posteriormente, criterios que proporcionan constricciones para encontrar estados ordenados en modelos esencialmente similares al de Vicsek.

En este punto será muy ilustrativo observar la Fig. 1.10 que contiene la secuencia de una animación numérica que construimos para visualizar la dinámica que siguen las partículas del modelo de Vicsek. Para construir la animación seguimos las reglas definidas en las ecuaciones 1.5.1 y 1.5.2, ajustamos las condiciones de tal forma que no exista ruido ($\eta = 0$), desordenamos completamente el sistema, fijamos un radio de interacción (r) y permitimos la evolución temporal hasta alcanzar el estado estacionario. En la gráfica mostramos los estados inicial y final de tres simulaciones para las que hemos usado radios de interacción distintos:

- Comenzamos con el caso donde no permitimos interacción entre las partículas ($r = 0.0$) y obtenemos las gráficas (a) y (b) que nos muestran que sin interacción el sistema se desordena permanentemente.
- Después cambiamos el radio de interacción a $r = 0.08$ y calculamos las gráficas (d) y (c), en este caso, la dinámica cambia dramáticamente y el sistema comienza a ordenarse hasta que

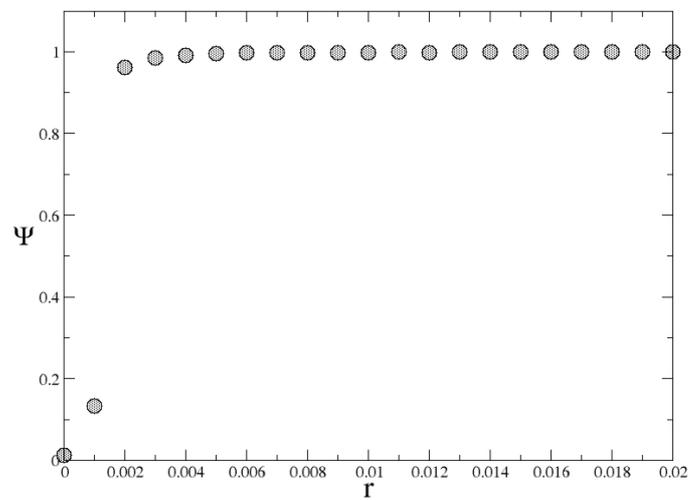


Figura 1.9. Comportamiento del parámetro de alineamiento Ψ como función del tamaño del radio de interacción r . El caso que presentamos corresponde a $N=2000$, $\sigma_0=0.1$, $\eta=0.1$, $L=1.0$.

al cabo de algunos pasos de tiempo obtenemos un estado completamente ordenado que corresponde al estado estacionario del sistema donde el valor del parámetro de orden Ψ es prácticamente constante.

- Finalmente cambiamos el radio de interacción a $r=0.16$, partimos del estado desordenado mostrado en (e) y permitimos la evolución del sistema hacia el estado estacionario (f). Debemos mencionar que por el incremento en el radio de interacción, el estado estacionario se alcanza más rápidamente que en el caso anterior.

Existe un modelo de sincronización distinto al modelo de Vicsek que introduce alguna variación en la regla dinámica con la que interactúan los elementos, estudiaremos este modelo en la sección siguiente.

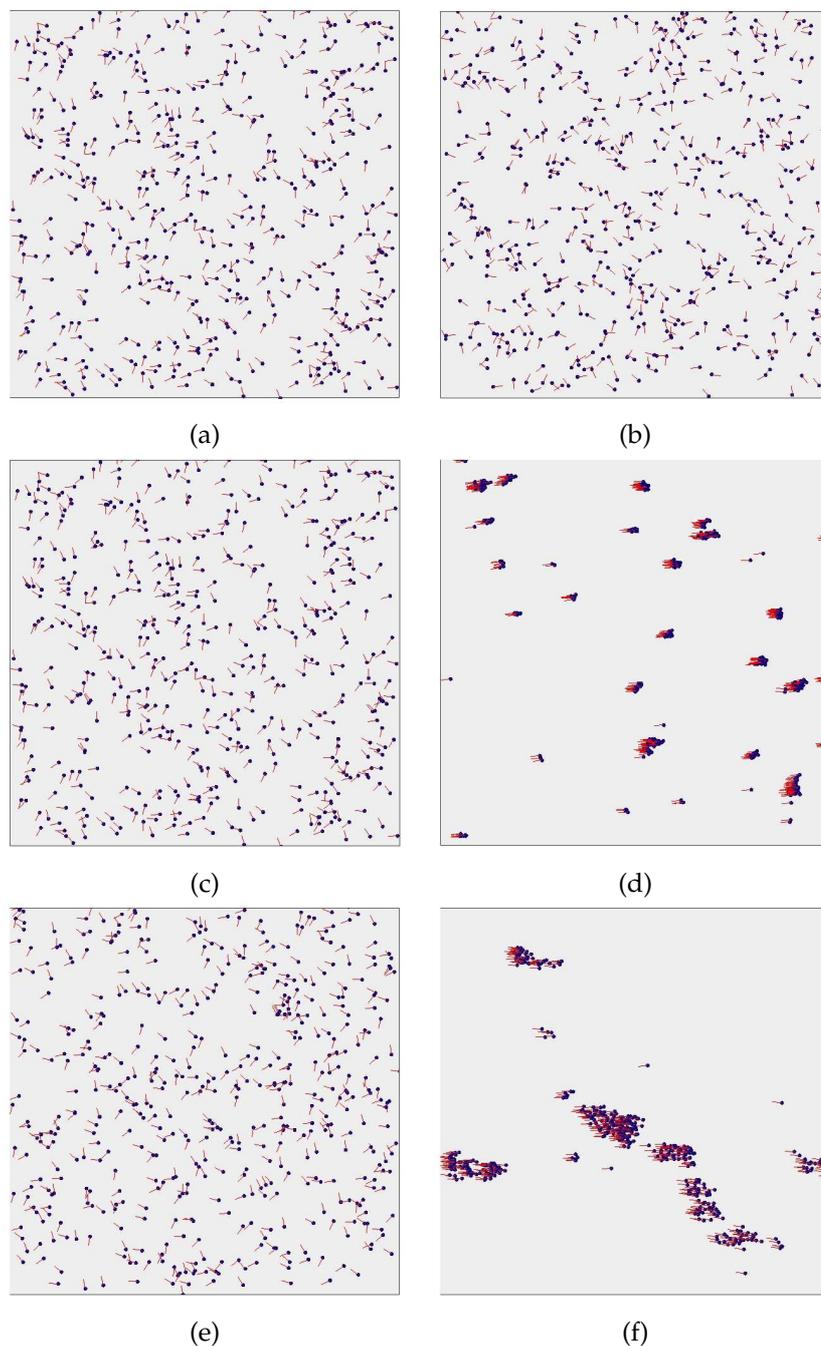


Figura 1.10. Secuencia de la animación para el modelo de Vicsek compuesto por $N=500$ partículas, velocidad $\sigma_0=0.0032$, caja de lado $L=10.0$ y en ausencia de ruido $\eta=0$. Usando un radio de interacción nulo ($r=0$) en (a) mostramos el estado inicial completamente desordenado ($\Psi=0$) y en (b) el estado estacionario con $\Psi=0.034$. Después incrementamos el radio de interacción a $r=0.08$ y partiendo de condiciones iniciales desordenadas (c), dejamos evolucionar el sistema hasta alcanzar su estado estacionario $\Psi=0.998$ (d), Finalmente, cambiamos el radio de interacción a $r=0.016$ y obtenemos las gráficas (e) y (f) que muestran las condiciones iniciales desordenadas y el estado estacionario $\Psi=0.999$, respectivamente. Todos los estados estacionarios del sistema que mostramos corresponden a $T=10000$ pasos de tiempo.

1.6 MODELO DE SINCRONIZACIÓN DE GRÉGOIRE-CHATÉ.

En el año 2004, Guillaume Grégoire y Hugues Chaté propusieron un modelo de partículas autopropulsadas en el que las posiciones y velocidades de los elementos se definen esencialmente igual a las de Vicsek. La diferencia consiste en que la regla dinámica para actualizar la orientación angular de los elementos del sistema se define ahora como,

$$\theta_n(t+1) = \text{Angulo} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{x_j \in \mathcal{V}_i} \sigma_{n_j}(t) + \eta e^{i\xi(t)} \right\} \quad (1.6.1)$$

y como antes, el parámetro de orden del sistema es de la forma definida en la Ec. 1.5.4 y tiene asociado un estado estacionario Ψ definido en la Ec. 1.5.5.

A partir de cálculos numéricos, Grégoire-Chaté determinan que este sistema exhibe la transición de fase de primer orden que se muestra en la Fig. 1.11. Postulan además que la regla dinámica de la Ec. 1.6.1 es equivalente a la de Vicsek (Ec.1.5.2) y que por esta razón las transiciones de fase que se obtienen en ambos modelos deben ser equivalentes. Concluyen diciendo que la transición de fase expuesta por Vicsek no es de segundo orden sino que la aparente continuidad de la curva solamente refleja resultados numéricos con *fuertes efectos de tamaño finito*.

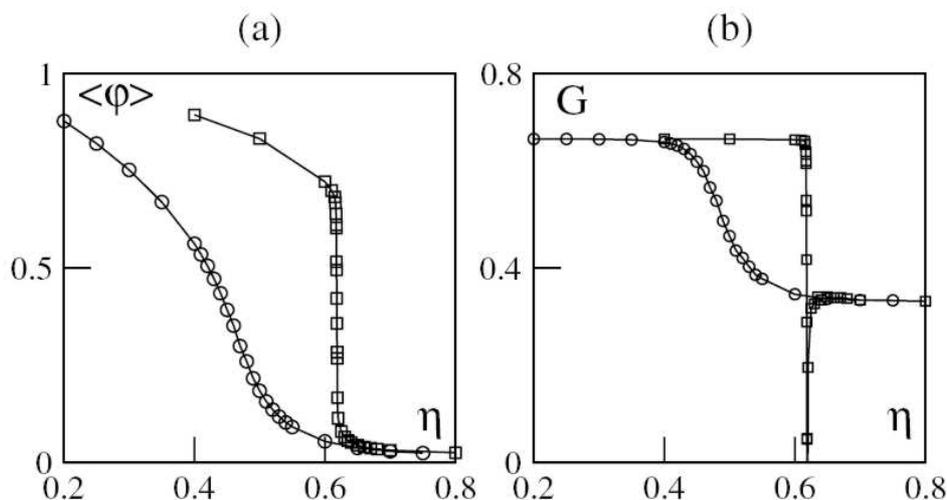


Figura 1.11. a) Comportamiento del parámetro de orden φ como función del ruido η (En este modelo a nuestro parámetro de orden Ψ lo denotan como φ). b) Gráficas del cumulante de Binder $G = 1 - \langle \varphi \rangle^4 / 3 \langle \varphi^2 \rangle^2$ como función del ruido η . Modelo de Vicsek \circ y modelo de Grégoire-Chaté \square .

Como este tipo de sistema es muy susceptible a efectos de tamaño finito, no disponemos hasta el momento de una forma contundente de diferenciar los comportamientos que pueden derivarse de la regla tipo Vicsek *et al* y la regla tipo Grégoire-Chaté.

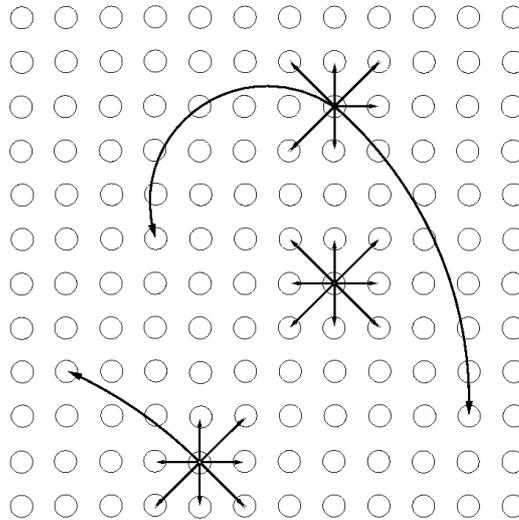


Figura 1.12. Esquema de la red asociada al modelo vectorial (VNM). Cada elemento de la red se conecta con sus primeros vecinos con probabilidad p , y con elementos aleatorios de la red con probabilidad $1 - p$. Este último tipo de conexión es lo que permite las correlaciones de largo alcance.

una probabilidad p y con un elemento aleatorio de la red con probabilidad $1 - p$.

Cuando $p = 1$, la estructura de la red es completamente a primeros vecinos y el sistema es idéntico al modelo X-Y, que dicho sea de paso, no presenta ninguna transición de fase orden-desorden ¹⁵. Conforme el valor de p decrece, aparecen conexiones aleatorias, que como antes mencionamos, se traducen en correlaciones de largo alcance que modifican la dinámica del sistema, que ahora sí presenta transición de fase orden-desorden. Finalmente cuando $p = 0$, todas las conexiones del sistema son aleatorias y la transición de fase sí se presenta. En los resultados que calcularon Aldana-Huepe, todos los elementos tienen el mismo número de inputs, esto es, la distribución $P_K(k)$ está dada por $P_K(k) = \delta(k - 15)$.

Para el modelo SDPM se han obtenido resultados numéricos donde el modelo sufre una transición de fase orden-desorden, transición que en principio podría pensarse contradictoria con las condiciones para sistemas en equilibrio impuestas por el teorema de Mermin-Wagner. Sin embargo la ausencia de equilibrio y la presencia de correlaciones de largo alcance asociadas a la movilidad de los elementos establecen la diferencia que permite esta transición. Por esta razón las interacciones de largo alcance que se presentan en el modelo R-SDPM, también permiten transiciones de fase de este tipo. Numéricamente Aldana y Huepe calculan esta transición que se muestra en la Fig. 1.13.a).

Sabemos que el R-SDPM y el VNM poseen interacciones de largo alcance y aunque sus dinámicas de interacción son diferentes ¹⁶, para determinadas condiciones ambos modelos presentan la

¹⁵ Para ciertos materiales bidimensionales y superfluidos existe una temperatura crítica donde se presentan correlaciones de largo alcance y metaestabilidad (Kosterlitz y Thoules, 1972)

¹⁶ Cada una de las conexiones entre los elementos del VNM une siempre al mismo par de elementos durante toda la

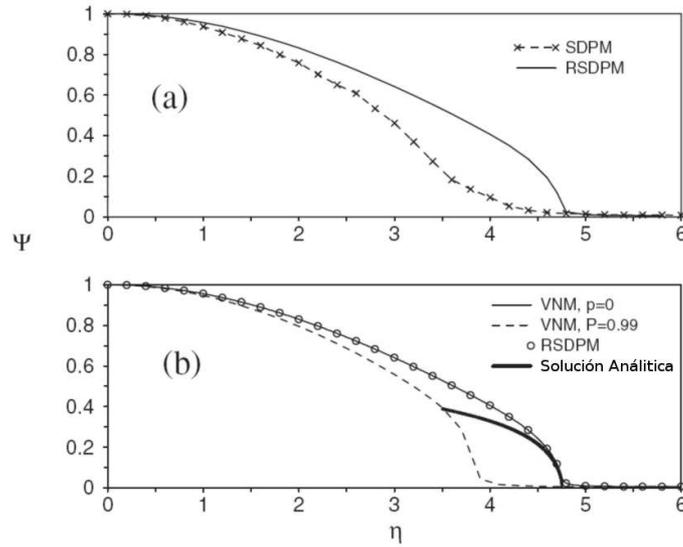


Figura 1.13. (a) Diagrama de bifurcación para el SDPM y el R-SDPM, ambos modelos presentan una transición de fase de segundo orden desde un estado ordenado a uno desordenado, independientemente de sus dinámicas. (b) Diagrama de bifurcación para el modelo VNM con $p = 0$ y $p = 0,99$. Por comparación también se muestra la curva correspondiente al R-SDPM, la figura muestra que las transiciones de fase del R-SDPM y del VNM son idénticas. El segmento de curva continua es la solución analítica propuesta por Aldana *et al* en la Ec. 1.7.4. Figura tomada de Aldana y Huepe (2003).

misma transición de fase. Este hecho sugiere que independientemente de la forma en que se definen las posiciones de los elementos, la transición de fase en los elementos de la familia se presenta siempre y cuando existan interacciones de largo alcance.

En la Fig. 1.13.b se muestra el diagrama de bifurcación $\Psi(\eta)$ para el VNM en los casos donde $p = 0$ y $p = 0,99$ (solo 1% de conexiones aleatorias). Obsérvese que la realización para R-SDPM y el caso donde $p = 0$ siguen la misma transición de fase no obstante las diferencias entre la topologías de ambos casos.

Para generar esas curvas se comienza con todas las partículas orientadas en forma aleatoria. Para cada valor de η , se realiza la simulación un tiempo suficientemente largo T tal que el promedio definido en la Ec. 1.7.2 alcance un valor estacionario. Las curvas que se muestran se realizaron con $N = 2 \times 10^4$ elementos en una caja cuadrada 2D de área $L^2 = 2 \times 10^3$ en un tiempo promedio $T = 10^5$. En el caso del modelo de Vicsek *et al*, el radio de interacción del elemento centrado en $\bar{x}_i(t)$ es de $r = \sqrt{15/10}$. Para estos valores la densidad promedio es $\rho = 10$, y el valor promedio de elementos que interactúan es $\langle K_i(t) \rangle = 15$.

Como lo muestran los resultados anteriores, los modelos de la familia que en sus mecanismos de interacción incluyen la posibilidad de que se presenten interacciones de largo alcance muestran un comportamiento similar. Afortunadamente el VNM puede resolverse analíticamente para

evolución del sistema y son interacciones asimétricas (conexiones dirigidas). Por el contrario, en el R-SDPM los pares de elementos que interactúan cambian a cada paso de tiempo y las interacciones sí son simétricas.

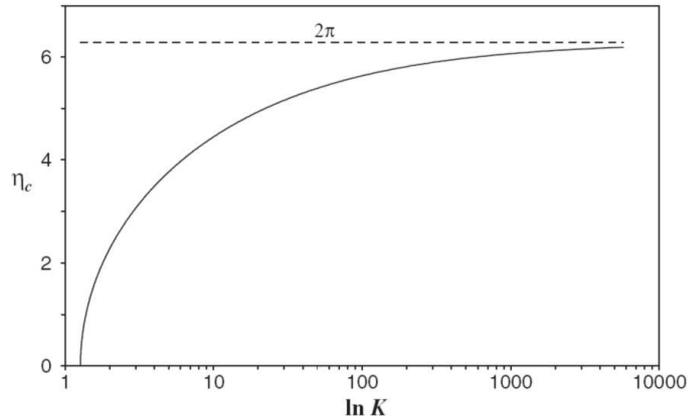


Figura 1.14. Valor de ruido crítico como función de la conectividad obtenido de la condición $\Psi = 0$ aplicada sobre la Ec. 1.7.4. Figura tomada de Aldana-Huepe (2003).

encontrar la forma funcional del parámetro de orden en términos del resto de los parámetros del sistema. En el trabajo de Aldana y Huepe (Aldana-Huepe, 2003) podemos encontrar una descripción detallada de la solución analítica que ellos encontraron. La solución asintótica del parámetro de orden a la que se llega cuando existen K interacciones por elemento y el parámetro p es nulo es la siguiente,

$$\psi^2 \approx \frac{2(\text{sen } \eta - 2\eta)}{(K - 2) \text{sen } \eta - (K - 3)\eta} \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\pi K} \text{sen}(\eta/2)} \right). \quad (1.7.4)$$

Forzando la condición $\Psi = 0$ en esta ecuación es posible obtener la expresión de ruido crítico en el cual ocurre la transición de fase,

$$\eta_c = \sqrt{\pi K} \text{sen} \left(\frac{\eta_c}{2} \right).$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 1.14.

A semejanza de lo que ocurre en el SDPM y el modelo de votantes que presentaremos en la sección 2.1, conforme la conectividad K de cada elemento de red se incrementa es necesario introducir cada vez más ruido para lograr desordenar el sistema. Más aún, el SDPM converge al mismo valor asintótico $\eta_c = 1/2$ y con el mismo exponente crítico $1/2$ de acuerdo a la siguiente forma funcional derivada del desarrollo de la Ec. 1.7.4,

$$\psi \approx \begin{cases} (\eta_c - \eta)^{1/2} & \text{Para } 0 < \eta_c - \eta \ll 1, \\ 0 & \text{Para } \eta > \eta_c. \end{cases}$$

De estos resultados se concluye que,

- Introducir el VNM a la familia de modelos bidimensionales para interacción entre muchos elementos revela la importancia que tienen las interacciones de largo alcance para lograr los comportamientos ordenados que exhiben las transiciones de fase asociadas a los elementos de la familia, ya que para $p = 1$ no hay transición.

- Los cambios en las propiedades estadísticas de las interacciones pueden alterar el exponente de la transición mientras se conserven las interacciones de largo alcance. Cuando no es así, la transición desaparece. Por ejemplo el VNM con $p \neq 1$ exhibe el mismo exponente que el R-SDPM porque en ambos sus conexiones se establecen aleatoriamente, pero no es igual al que se observa en el caso del SDPM que establece sus conexiones por un proceso Markoviano en el tiempo. Finalmente cuando $p = 1$ en el VNM, el modelo corresponde al modelo XY y desaparece la transición orden-desorden.

Podemos concluir diciendo que el modelo vectorial proporciona una base analítica sólida para estudiar sistemas donde las partículas que se sincronizan definen su estado en base a una orientación angular en un espacio bidimensional.

Veamos ahora una magnífica contraparte experimental del modelo SDPM de Vicsek *et al* que se desarrolla usando langostas del desierto.

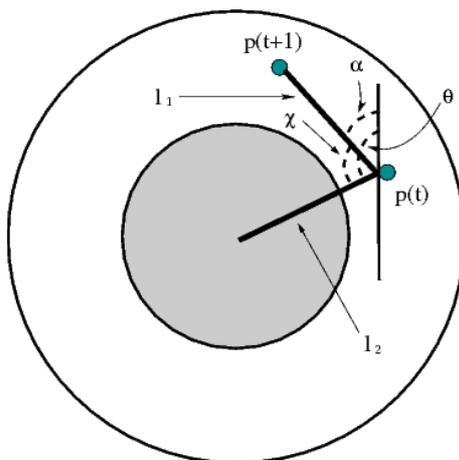


Figura 1.15. Esquema de la "arena" utilizada en el modelo de langostas de Buhl *et al* para medir el ángulo de desplazamiento χ . La etiqueta $p(t)$ denota la posición de la langosta al tiempo t , mientras que $p(t+1)$ la correspondiente al tiempo $t+1$.

al y se define como la suma de los ángulos χ_i ,

$$\psi(t) = \frac{2}{m\pi} \sum_{i=1}^m \chi_i(t).$$

En este caso la variable ψ puede tomar valores entre $[-1, 1]$, intervalo donde los valores extremos indican que el grupo muestra alineamiento colectivo y el cero indica desorden completo. Bajo estas consideraciones modifican ligeramente el modelo SDPM y proponen un modelo lineal de sincronización donde N partículas se desplazan sobre una línea de longitud L avanzando en cada paso de tiempo δt . La posición y velocidad de cada partícula i se definen por las variables x_i y v_i respectivamente.

La evolución temporal de estas variables obedece las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t) \\ v_i(t+1) &= \alpha v_i(t) + (1-\alpha)G(\langle v(t) \rangle_i) + 2\xi_i, \end{aligned}$$

donde $\langle v \rangle_i$ denota la velocidad promedio de todas las partículas (excepto la etiquetada con i) que se ubiquen dentro del dominio de interacción $[x_i - \Delta, x_i + \Delta]$ y ξ es el término de ruido uniformemente distribuido en el intervalo $[-\eta, \eta]$.

El término α determina el peso de su propia contribución al promedio de las velocidades y también el grado de influencia que ejercen sobre él las partículas con las que interactúa, concepto que se expresa como una función de las velocidades de los vecinos $G(\langle v(t) \rangle_i)$ definida como,

$$G(v) = \begin{cases} \frac{(v+1)}{2} & v > 0 \\ \frac{(v-1)}{2} & v < 0 \end{cases},$$

En este modelo se obtienen los resultados que se presentan en la Fig. 1.16.

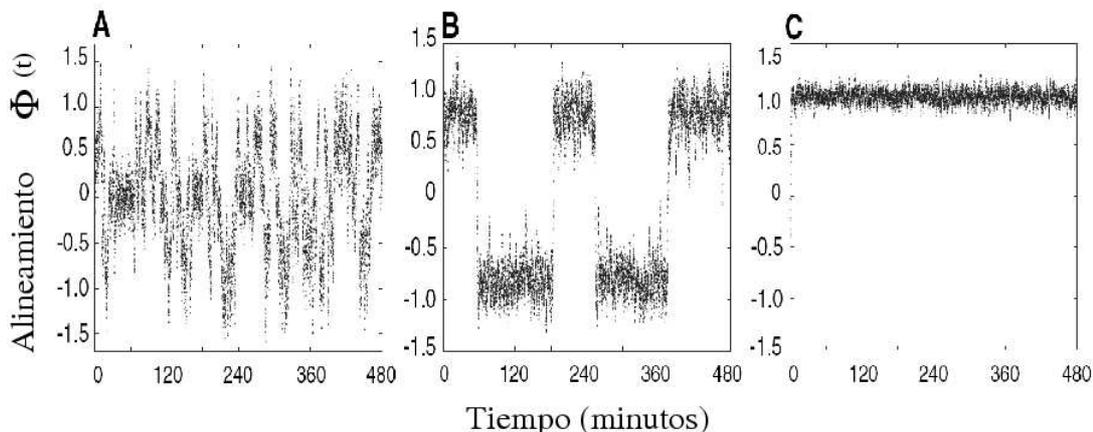


Figura 1.16. Comportamiento del alineamiento $\psi(t)$ para varias densidades de langostas A) 3, B) 11, C) 47 langostas, ilustrada en función del tiempo. $L=251.3$ cm, $v_0=1.9$ cm/s, $\Delta=13.9$ cm, $\alpha=0.66$, $\eta=0.8$. (Figura tomada de Buhl *et al*, 2006.)

Comparemos ahora estos resultados con los que se obtienen del experimento que muestran cómo la coordinación en caminatas de langostas es muy dependiente de la densidad de individuos, (ver Fig. 1.17). A bajas densidades (5.3 - 17.2 langostas/m²), hay poca coordinación entre los individuos, si algún tipo de alineamiento ocurre es esporádico y su duración es breve comparada con los amplios periodos de comportamientos desorganizados. En densidades intermedias (24.6 - 61.5 langostas/m²) el sistema describe largos periodos de sincronización separados por cambios espontáneos de dirección. Para altas densidades (alrededor de 73.8 langostas/m²), los cambios espontáneos de dirección no ocurren dentro de la escala de tiempo observada y las langostas adoptan una marcha sincronizada que persiste en el tiempo.

Las dinámicas descritas por el experimento y por el modelo SDPM son muy similares. Para comparar ambos resultados se grafican los promedios de los alineamientos teórico y experimental para varias densidades, por supuesto, tratando de ajustar los parámetros del modelo para reproducir las condiciones experimentales. En la Fig. 1.18(A) y (D) mostramos las gráficas.

El valor promedio del alineamiento es muy consistente con lo mostrado por el modelo. En primer lugar, conforme se incrementa la densidad, la dispersión del alineamiento va desapareciendo y se van formando dos picos bien definidos. En estas condiciones también se incrementa el tiempo que las langostas permanecen alineadas hasta saturarse en el valor de duración del experimento (ver Fig. 1.18(B) y (E)). También ocurre que la frecuencia con la que cambia de dirección el grupo disminuye hasta anularse (ver Fig. 1.18(C) y (F)).

La inestabilidad dinámica relacionada con la alternancia en la dirección del grupo es una particularidad de los modelos basados en SDPM en la que los cambios se propagan rápidamente en todo el grupo, (Huepe-Aldana, 2004). Los experimentos demuestran que estos cambios son ajenos a condiciones externas y más bien son propiedades inherentes a grupos en movimiento. Por lo tanto, estas inestabilidades tienen implicaciones muy importantes para establecer la forma en que

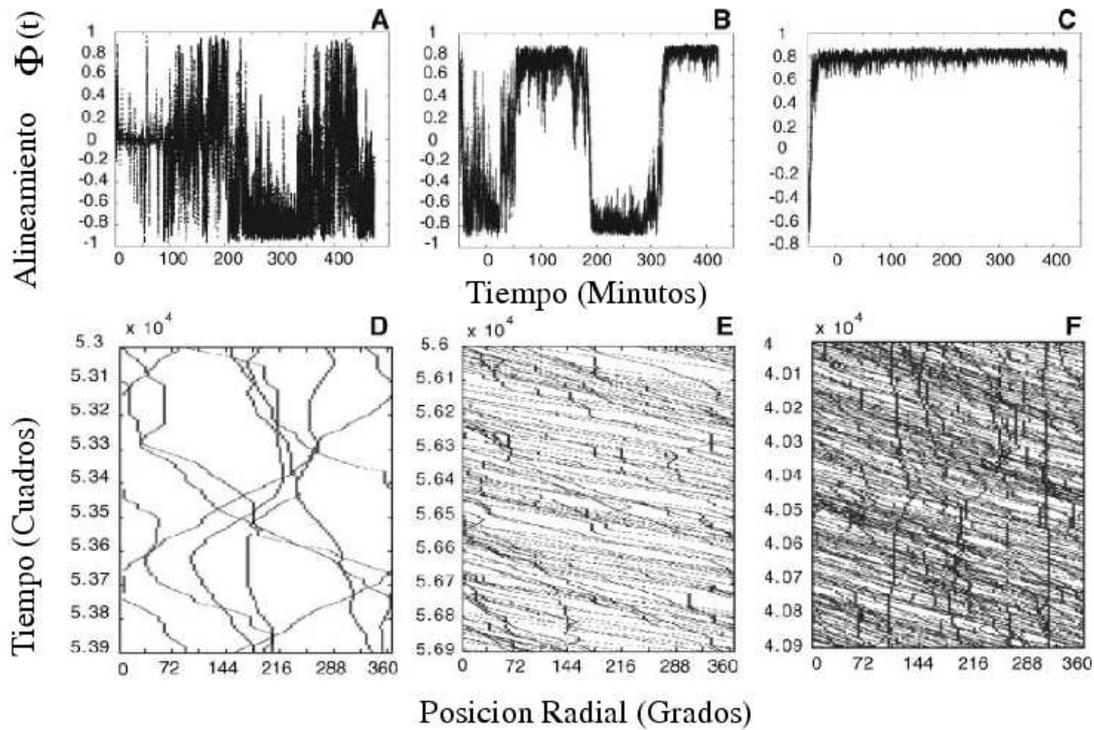


Figura 1.17. Cambio en el parámetro de alineación $\psi(t)$ ($\phi(t)$ en el texto original) en el tiempo para tres diferentes densidades. (A) 7, (B) 20, (C) 60 langostas. En (D) a (F) Mostramos la evolución temporal de la orientación angular respecto al centro de la arena a lo largo de 3 minutos de grabación. (Figura tomada de Buhl *et al*, 2006.)

se transmite la información de forma direccional.

En este sentido, no resulta claro en qué condiciones las inhomogeneidades locales se pueden propagar a todo el grupo y alterar el colectivo. Buhl *et al*, predicen que en el intervalo de 25 a 60 langostas/ m^2 , los grupos son especialmente sensibles a los cambios locales de dirección. Sin embargo, no obtienen conclusiones sobre la propagación de los efectos locales en el colectivo, aunque sí determinan que existe una densidad crítica para que la caminata sincronizada de langostas ocurra. El tamaño más pequeño de grupos de langostas en marchas sincronizadas que reporta la Organización para la Alimentación y la Agricultura de la ONU (FAO) es de 20 langostas/ m^2 , mientras que en el experimento aquí reportado se encuentra que la sincronización ocurre desde 8 langostas puestas en el dispositivo experimental.

Como conclusión del trabajo, Buhl *et al* indican que pese a que es muy complicado comparar los datos reportados en el experimento y en el modelo SDPM con sus análogos en la situación de campo donde las interacciones son muy complejas, es razonable concluir que el comportamiento cualitativo es el mismo en ambos casos y que la concentración de individuos tiene un valor crítico por encima del cual ocurren los comportamientos sincronizados y por lo tanto es el parámetro que determina la dinámica del sistema.

Podemos plantear la interesante propuesta de Buhl *et al* desde otra perspectiva: la de redes complejas, donde en lugar de hablar de densidades críticas trataremos de establecer la naturaleza de las interacciones que poseen los sistemas que exhiben sincronización colectiva. Aunque estas dos perspectivas son equivalentes en algunos sentidos, el planteamiento de red nos permitirá ser más formales en nuestra conceptualización. Para familiarizarnos con esta perspectiva en el apéndice A vemos algunos antecedentes de la teoría de redes complejas.

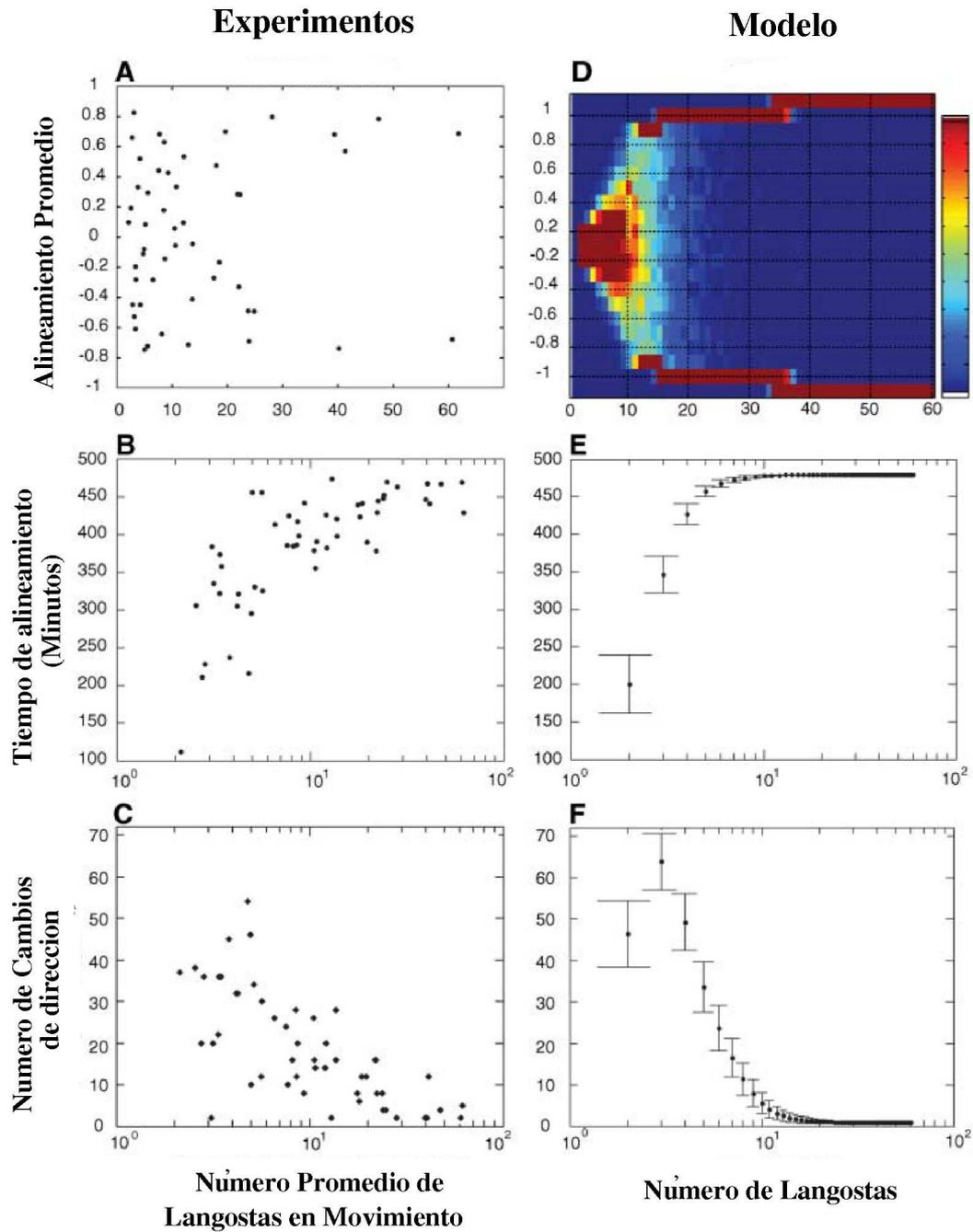


Figura 1.18. Variación del alineamiento $\psi(t)$ en función de la densidad para el modelo y el experimento. Cada punto en las gráficas experimentales corresponde a una realización mientras que los datos del modelo son distribuciones estadísticas obtenidas de 1000 simulaciones. En las Fig. 1.18(A) y (D) se muestran la dependencia del alineamiento promedio con el número de langostas en movimiento. En (B) y en (E) se muestra cuánto tiempo emplean los grupos de langostas en llegar a su estado final de alineamiento promedio, en función del tamaño de los grupos. Finalmente en (C) y (F) Se gráfica el número de cambios de dirección que ocurren en los estados alineados en función del promedio de langostas en movimiento en el caso experimental y del número de langostas en el caso del modelo. (Figura tomada de Buhl *et al*, 2006.)

Parte II

MODELO DE RED NEURONAL O DE VOTANTES.

EL MODELO DE VOTANTES.

Existe una gran variedad de situaciones reales en las que miles de elementos u organismos interactúan entre sí y logran sincronizar sus movimientos o estados en formas realmente asombrosas. Cómo logran sincronizarse es un acertijo que la naturaleza resolvió desde hace mucho tiempo, así que para seguir sus pasos lo más natural es proponer modelos basados en sistemas reales que posean propiedades simples de interacción. Algunos de los modelos más simples para estudiar interacciones de muchos cuerpos están basados en redes complejas, herramienta natural para analizar interacciones entre elementos.

En este capítulo estudiaremos un modelo de red que hace énfasis en el análisis de las propiedades de interacción como fuente de los comportamientos colectivos. Este modelo, conocido como modelo neuronal o de votantes, es probablemente uno de los planteamientos teóricos más simples que es capaz de capturar los aspectos esenciales de las interacciones entre organismos que pertenecen a un grupo capaz de mostrar sincronización colectiva ¹.

2.1 DEFINICIÓN DEL MODELO.

El modelo neuronal o de votantes es un sistema simple de interacción de muchos cuerpos creado por McCulloch y Pitts para estudiar respuestas neuronales Booleanas (McCulloch- Pitts, 1943). En la bibliografía del tema existen varias formas equivalentes para definir las reglas dinámicas asociadas a los estados de los elementos que forman la red. No obstante la gran cantidad de trabajos al respecto, existen pocos tratamientos analíticos del modelo de votantes. El trabajo presentado por Huepe y Aldana (Huepe *et al*, 2002) nos ofrece una serie de criterios que, suponiendo solamente la equivalencia e independencia estadística entre los elementos de la red, establecen las condiciones para observar estados de sincronización colectiva.

Como el modelo de Huepe y Aldana es una base importante para este trabajo, es conveniente describirlo con detalle y para hacerlo usaremos el ejemplo de una competencia electoral.

Imaginemos que estamos interesados en elaborar un modelo teórico para predecir los resultados electorales en una ciudad de N habitantes en la cual se lleva a cabo una elección entre dos únicos candidatos. En esta situación un aspecto fundamental para hacer una predicción razonable consiste en determinar los factores sociales que inclinan las preferencias electorales, o dicho de otra forma, sería muy relevante saber en qué forma la estructura social define el nivel de consenso entre las personas de una sociedad.

En la evolución de las estructuras sociales suelen intervenir mecanismos muy complejos que constantemente crean y destruyen vínculos entre los individuos que la conforman. No obstante, en un lapso de tiempo suficientemente corto el tejido social permanece cuasi-estático y las relaciones que cada persona mantiene son esencialmente las mismas.

Bajo esta suposición plantearemos el problema electoral que analizamos en términos de una red

¹ Existen otros modelos simples basados en redes que muestran comportamientos sincronizados (kuramoto *et al*,1992), (Watts-Strogatz, 1998).

de individuos que interactúan por medio de conexiones que no cambian en el tiempo. Supongamos que existe un tema respecto al cual se pueden tener dos opiniones: o se está a favor o en contra (no existen los indecisos que opinen “no se”). Por ejemplo, el tema del aborto, la privatización eléctrica, etc.

El modelo consistirá entonces de un conjunto de N personas con intención de voto etiquetado por las variables $(\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_N(t)\})$. Al tiempo t cada una de estas variables puede tomar sólo uno de dos estados posibles, $\sigma_i = +1$ (si la persona está a favor) o $\sigma_i = -1$ (si está en contra). Cada una de las personas de nuestro modelo está influenciada por un número k_i variable de amigos que también pertenecen a la red. A este conjunto lo llamaremos las influencias (o los inputs) de σ_i , etiquetándolos como $\{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{k_i}}\}$. El número k_i de amigos de cada individuo es una variable aleatoria cuya función de probabilidad es $P_k(k)$. Es decir, si escogemos a una persona al azar, la probabilidad de que tenga k_i influencias es $P_k(k_i)$ (ver Fig. 2.1).

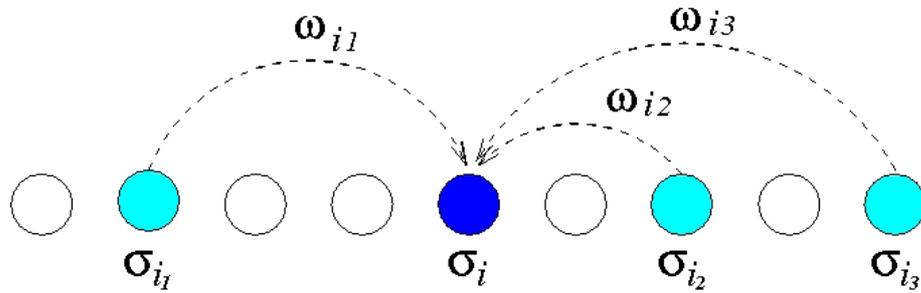


Figura 2.1. Esquema de la interacción entre elementos de red. El número de conexiones se define de acuerdo a la FDP, $P_k(k)$ y el peso sináptico se define de acuerdo a la FDP $P_\omega(x)$.

El estado de σ_i estará determinado por la función

$$f_i(t) = \text{Signo} \left\{ \sum_{j=1}^{k_i} \omega_{ij} \sigma_{ij}(t) \right\}, \quad (2.1.1)$$

donde w_{ij} es una variable aleatoria tomada de una distribución $P_\omega(w)$. Estas variables ω_{ij} , llamadas pesos sinápticos, denotan el hecho de que no todos los “amigos” de σ_i tienen la misma influencia sobre su opinión. La función $f_i(t)$ puede tomar los valores $+1$ o -1 de acuerdo a las tendencias que establezcan las influencias del elemento σ_i . Cuando todos los pesos sinápticos ω_{ij} son igual de importantes ($\omega_{ij} = 1 \forall i, j$) la función f se conoce como *regla de la mayoría*. Cuando los ω_{ij} son distintos para los diferentes individuos decimos que $f_i(t)$ es una regla de la mayoría ponderada. En lo subsecuente nos referiremos a $f_i(t)$ como regla de la mayoría sea ponderada o no.

Ahora introduciremos un escabroso concepto que es fundamental en la dinámica social: la “voluntad”. Para ello dotaremos a los elementos de cierta capacidad para “contradecir” a la tendencia f que establecen sus influencias. Tanto la influencia sobre σ_i , como la tendencia de σ_i a

contradecir dichas influencias quedarán plasmadas en la regla dinámica

$$\sigma_i(t+1) = \begin{cases} f_i(t) & \text{con probabilidad } 1 - \eta \\ -f_i(t) & \text{con probabilidad } \eta, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

donde η es la probabilidad de ir contra la regla de la mayoría.

Es de esperarse que conforme más elementos contradigan de la mayoría, el sistema transite desde una dinámica determinista o predecible ($\eta = 0$) a una dinámica completamente aleatoria o desordenada ($\eta = \frac{1}{2}$).

Una vez que establecimos las reglas con las que los individuos de nuestra población toman sus decisiones, ahora estableceremos la manera de medir la preferencia electoral global por medio de un parámetro de orden instantáneo $\psi(t)$ que reflejará el grado de orden colectivo del sistema al tiempo t ,

$$\psi(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t) \right|. \quad (2.1.3)$$

Este parámetro medirá el consenso que existe en el voto de los individuos de nuestra población. Cuando $t \rightarrow \infty$ el parámetro $\psi(t)$ alcanza un valor estacionario al que llamaremos parámetro de orden estacionario y que definimos como,

$$\Psi = \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \right\rangle. \quad (2.1.4)$$

Bajo las reglas dinámicas que hemos definido, el comportamiento del parámetro de orden dependerá de tres factores: la distribución de conexiones $P_k(x)$, la distribución de pesos sinápticos $P_\omega(x)$ y el nivel de voluntad o ruido η . Hablando más técnicamente, hemos construido un sistema dinámico que se define por una regla dinámica que incluye una componente estocástica, una distribución de conectividad y una distribución de pesos.

Ahora nuestro objetivo es determinar el mapeo dinámico $\mathcal{M}(\psi)$ que genera la evolución temporal del parámetro de orden tal que $\psi(t+1) = \mathcal{M}(\psi(t))$. Además debemos encontrar cuales son las condiciones sobre la estructura de la red tal que $\mathcal{M}(\psi)$ tenga puntos fijos estables. Estos puntos fijos indican en qué situación las preferencias electorales se estabilizarán.

Más adelante veremos que el valor de estos puntos fijos está completamente determinado por las formas funcionales de las distribuciones $P_k(x)$, $P_\omega(x)$, además del ruido η .

Para ilustrar la presencia de puntos fijos en este modelo, construimos una red de votantes caracterizada por la distribución de conectividad $P_k(x) = \delta(x-3)$ y la distribución de pesos $P_\omega(x) = \delta(x-1)$. En estas condiciones calculamos numéricamente la evolución temporal del parámetro $\psi(t)$. El resultado lo mostramos en la Fig. 2.2.

En esta figura podemos ver que independientemente de las condiciones iniciales de red, el parámetro de orden alcanza un estado estacionario semiordenado ($\psi \approx 9/10$) que revela la presencia de sincronización colectiva en un 95 por ciento de la población (ver Ec. 2.1.6).

Enseguida, también en el caso particular cuando $P_k(x) = \delta(k-3)$ y $P_\omega(x) = \delta(x-1)$, analizamos la forma en que las preferencias electorales estacionarias Ψ cambian conforme el valor de η se

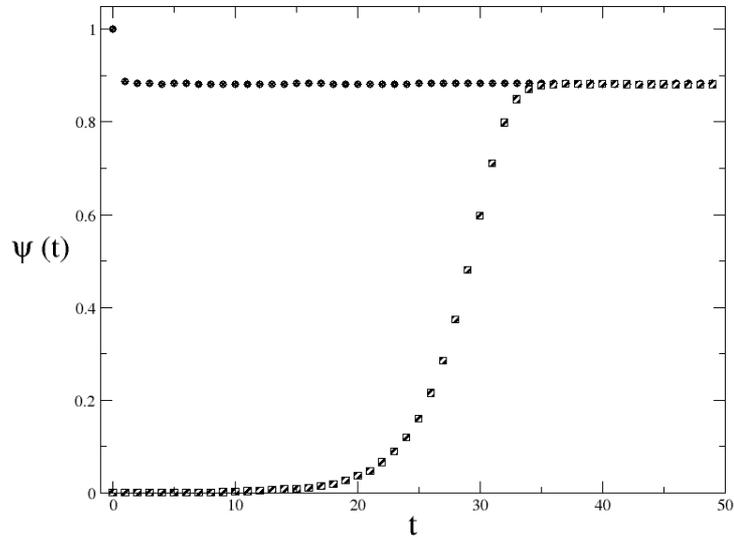


Figura 2.2. Evolución temporal del parámetro de orden $\psi(t)$ asociado a una red de $N = 10^5$ votantes con topología aleatoria. Cada nodo tiene tres conexiones con pesos iguales y un nivel de ruido $\eta=0.05$. Obsérvese que independientemente de las condiciones iniciales de red completamente ordenada (●) o completamente desordenada (×), el valor del parámetro de orden del sistema converge hacia el mismo punto fijo Ψ .

incrementa, obteniendo los resultados que se muestran en la Fig. 2.3.

El comportamiento que vemos corresponde a una transición de fase orden-desorden de segundo orden del parámetro Ψ . El gráfico muestra que los comportamientos ordenados o semi-ordenados son posibles para sistemas con valores de ruido η menores de cierto valor $\eta_c \approx 0.16$. La existencia de esta transición de fase revela que pueden generarse correlaciones de largo alcance y las interacciones entre los elementos se presentan a todas las escalas, resultado que puesto en el contexto de una votación nos indica una alta eficiencia en la propagación de la información.

Aunque en principio podemos establecer cualquier tipo de condiciones en las distribuciones de conectividad y de pesos, el análisis numérico no proporciona datos suficientemente concluyentes sobre los posibles escenarios electorales.

Sin embargo, si pudiéramos obtener la solución analítica de este modelo, podríamos caracterizar completamente el comportamiento dinámico y definir exactamente la forma en que las distribuciones $P_\omega(x)$, $P_k(x)$ y la variable η determinan la sincronización.

Con este fin construiremos una ecuación que establezca la forma funcional del mapeo $\mathcal{M}(\psi)$ en términos de las distribuciones de conectividad $P_k(x)$ y de pesos $P_\omega(x)$. En nuestro análisis sólo estableceremos la hipótesis de independencia y equivalencia estadística entre los elementos de la red. Esto significa que la probabilidad de que dos elementos seleccionados al azar compartan una misma influencia es casi nula cuando el sistema es suficientemente grande. Dicha condición se obtiene en el caso de que los inputs de cada elemento sean seleccionados completamente al azar. Comenzaremos por encontrar la probabilidad de que un elemento arbitrario tome un valor

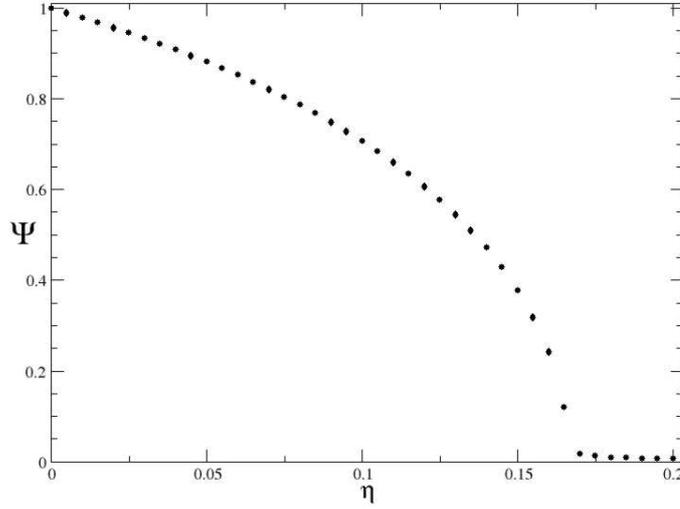


Figura 2.3. Comportamiento numérico del parámetro de orden Ψ en función del ruido η . El número de conexiones se define de acuerdo a la FDP $P_k(x) = \delta(k-3)$ que es el caso donde todos los elementos tienen 3 conexiones y el peso sináptico se define de acuerdo a la FDP $P_\omega(x) = \delta(\omega-1)$ que significa todas las influencias con pesos equivalentes. La red que usamos tiene $N = 10^5$ elementos.

específico, por ejemplo $+1$. Para ello definamos $\phi_N(t)$ como la fracción de elementos en la red que tienen un valor de $+1$ al tiempo t ,

$$\phi_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i(t) + 1}{2}.$$

En el límite cuando la población es muy grande $N \rightarrow \infty$, el parámetro ϕ se convierte en la probabilidad de que al tiempo t cualquier individuo de la población tenga opinión $+1$:

$$\phi(t) \equiv P_t\{\sigma_i = +1\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(t). \quad (2.1.5)$$

Si relacionamos esta ecuación con el parámetro de orden de la Ec. 2.1.3, podemos ver que,

$$\psi(t) = 2\phi(t) - 1. \quad (2.1.6)$$

Bajo esta definición un estado completamente ordenado será cuando $|\psi(t)| = 1$ y $\phi(t) = 0$ o 1 . Por el contrario no hay un ganador cuando el estado es completamente desordenado y tenemos $|\psi(t)| = 0$ y $\phi(t) = 1/2$.

Definamos ahora la variable $\xi_i(t)$ como la suma de las influencias que se ejercen sobre un elemento i y que son el argumento de la función f definida en la Ec. 2.1.2,

$$\xi_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i} \omega_{ij} \sigma_j(t). \quad (2.1.7)$$

Si cada persona establece sus amistades de forma azarosa tal que no hay regularidad espacial, las interacciones de cada nodo se asignan en forma tal que los productos $\omega_{ij}\sigma_i(t)$ son variables aleatorias estadísticamente independientes ², cuya PDF denotaremos como $P_{\omega\sigma(t)}(x)$. En estas condiciones la correspondiente densidad de probabilidad $P_{\xi(t)}(x)$ asociada a la variable $\xi(t)$ está dado por la convolución k_i -ésima de $P_{\omega\sigma(t)}(x)$ consigo mismo,

$$P_{\xi(t)}(x) = \underbrace{P_{\omega\sigma(t)} \star P_{\omega\sigma(t)} \star \cdots \star P_{\omega\sigma(t)}}_{k_i\text{-veces}}(x) . \quad (2.1.8)$$

Por otro lado, la probabilidad condicional $I_k(t)$ de que la función f_i asociada al elemento arbitrario σ_i , adquiera el valor $f_i = +1$ al tiempo t , dado que dicho elemento tiene k_i inputs, es la siguiente,

$$I_k(t) \equiv P_t\{f = +1\} = \int_0^\infty P_{\xi(t)}(x) dx , \quad (2.1.9)$$

donde hemos suprimido el índice i ya que los elementos σ_i son estadísticamente equivalentes. Adicionalmente a partir de la Ec. 2.1.2 que define los estados de los elementos, tenemos que,

$$\phi(t+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \{I_k(t) [1 - \eta] + [1 - I_k(t)] \eta\} P_k(k) . \quad (2.1.10)$$

Esta ecuación describe la evolución del parámetro que mide el grado de orden en la población y está formada de la siguiente manera: el primer término es la probabilidad de que la regla de la mayoría sea positiva y se obedezca, mientras que el segundo término es la probabilidad de de que la regla de la mayoría sea negativa o se viole. En ambos casos $\sigma_i(t+1) = +1$. La suma se hace sobre todas las posibles influencias de σ_i .

Para escribir esta ecuación en forma cerrada es necesario establecer cómo depende la probabilidad $I_k(t)$ del parámetro ϕ o equivalentemente de ψ . Para resolver esta situación regresamos a la Ec. 2.1.8 y la planteamos en el espacio de Fourier donde toma la forma,

$$\widehat{P}_{\xi(t)}(\lambda) = \left[\widehat{P}_{\omega\sigma(t)}(\lambda) \right]^k .$$

Como los pesos sinápticos ω_{ij} se distribuyen de acuerdo a la PDF $P_\omega(x)$ y la variable $\sigma_i(t)$ toma el valor $+1$ con probabilidad $\phi(t)$ y vale -1 con probabilidad $1 - \phi(t)$, se sigue que la FDP de los productos $\omega_{ij}\sigma_i$ está dada por,

$$P_{\omega\sigma(t)}(x) = \phi(t)P_\omega(x) + [1 - \phi(t)] P_\omega(-x) .$$

Tomando la transformada de Fourier de la expresión anterior y sustituyendo el resultado en la transformada $\widehat{P}_{\xi(t)}(\lambda)$, obtenemos,

$$\widehat{P}_{\xi(t)}(\lambda) = \left[\widehat{P}_\omega^*(\lambda) + \left(\widehat{P}_\omega(\lambda) - \widehat{P}_\omega^*(\lambda) \right) \phi(t) \right]^k ,$$

donde (*) denota la conjugación en el plano complejo. Si sustituimos la variable ϕ por su equivalente en términos de Ψ encontraremos que,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\xi(t)}(\lambda) &= \left[\frac{\widehat{P}_\omega^*(\lambda) + \widehat{P}_\omega(\lambda)}{2} + \frac{\widehat{P}_\omega(\lambda) - \widehat{P}_\omega^*(\lambda)}{2} \Psi(t) \right]^k \\ &\equiv \left[\widehat{g}(\lambda) + i \widehat{h}(\lambda) \Psi(t) \right]^k , \end{aligned}$$

² Como veremos posteriormente en el caso de distribuciones libres de escala, si las conexiones no son aleatorias, la situación se complica y la independencia estadística no está garantizada.

donde hemos definido las variables $\hat{g}(\lambda)$ y $\hat{h}(\lambda)$ como la parte real e imaginaria de $\hat{P}_\omega(\lambda)$. Por el teorema del binomio podemos desarrollar esta expresión como,

$$\hat{P}_{\xi(t)}(\lambda) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} [\hat{g}(\lambda)]^{k-m} [i \hat{h}(\lambda) \Psi(t)]^m, \quad (2.1.11)$$

que tiene una transformada de Fourier inversa,

$$P_{\xi(t)}(x) = \sum_{m=0}^k \left[\frac{i^m}{2\pi} \binom{k}{m} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{g}(\lambda)]^{k-m} [\hat{h}(\lambda)]^m e^{-i\lambda x} d\lambda \right] [\Psi(t)]^m.$$

Tenemos entonces una relación entre la $P_{\xi(t)}(x)$ y el parámetro de orden Ψ que podremos sustituir en la integral de la Ec. 2.1.9 que define la probabilidad $I_k(t)$,

$$\begin{aligned} I_k(t) &= \int_0^{\infty} P_{\xi(t)}(x) dx \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{i^m}{2\pi} \binom{k}{m} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{g}(\lambda)]^{k-m} [\hat{h}(\lambda)]^m e^{-i\lambda x} d\lambda dx [\Psi(t)]^m. \end{aligned}$$

Definamos ahora los coeficientes $a(k, m)$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} a(k, m) &\equiv \frac{i^m}{2\pi} \binom{k}{m} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{g}(\lambda)]^{k-m} [\hat{h}(\lambda)]^m e^{-i\lambda x} d\lambda \right] dx \\ &= \frac{-i^{m+1}}{2\pi} \binom{k}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\hat{g}(\lambda)]^{k-m} [\hat{h}(\lambda)]^m}{\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Nótese que en la segunda expresión hemos supuesto que la integral respecto a λ si existe, por lo que podemos intercambiar el orden de integración entre dx y $d\lambda$ e integrar con respecto a dx . Observemos también que si el integrando es una función impar (valores pares de la variable m) el coeficiente $a(k, m)$ se anula y el desarrollo de la Ec. (2.1.4) incluye solamente potencias impares de $\Psi(t)$.

Reescribimos entonces la probabilidad $I_k(t)$ como,

$$I_k(t) = \sum_{m=0}^k a(k, m) [\Psi(t)]^m. \quad (2.1.13)$$

Si sustituimos este resultado en la expresión de la Ec. 2.1.10 y seguimos la definición de la Ec. 2.1.6, podremos cerrar la ecuación maestra del parámetro de orden temporal,

$$\psi(t+1) = 2(1-2\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^k a(k, m) [\psi(t)]^m \right] P_k(k), \quad (2.1.14)$$

expresión donde se ha empleado el resultado que indica que para cualquier función $P_\omega(x)$ "bien portada" el valor del coeficiente $a(k, 0) = 1/2$ (Huepe y Aldana, 2002).

En estas condiciones el mapeo $\mathcal{M}(\Psi)$ toma la forma,

$$\mathcal{M}(\psi(t)) = 2(1-2\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^k a(k, m) [\psi(t)]^m \right] P_k(k) \quad (2.1.15)$$

Los puntos fijos del mapeo quedan determinados por la siguiente ecuación ³,

$$\Psi = 2(1 - 2\eta) \sum_{m=1}^{\infty} b_m \Psi^m, \quad (2.1.16)$$

donde hemos supuesto que las sumas de la Ec. 2.1.14 se pueden intercambiar y hemos definido los coeficientes b_m como

$$b_m \equiv \sum_{k=m}^{\infty} P_k(k) a(k, m). \quad (2.1.17)$$

Cerca de la transición de fase el parámetro de orden es suficientemente pequeño ($|\Psi| \ll 1$) como para quedarnos con los dos primeros términos de la serie tal que,

$$\Psi \approx 2(1 - 2\eta) [b_1 \Psi + b_3 \Psi^3].$$

Además de la solución trivial $\Psi = 0$, esta ecuación tiene dos soluciones de puntos fijos no triviales que son,

$$\Psi^2 \approx \frac{1}{|b_3|} \left[b_1 - \frac{1}{2(1 - 2\eta)} \right]. \quad (2.1.18)$$

A partir de esta ecuación podemos determinar el valor de ruido crítico imponiendo la condición $\Psi = 0$ y despejando el valor de ruido que lo cumple,

$$\eta_c \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2b_1} \right). \quad (2.1.19)$$

Agregando este resultado a la Ec. 2.1.18 podemos ver que cuando se cumple $\eta > \eta_c$ no existen puntos fijos reales diferentes al trivial, por lo que se sigue que cerca de la transición de fase el parámetro de orden se comporta como

$$\Psi = \begin{cases} \frac{2b_1}{\sqrt{|b_3|}} (\eta_c - \eta)^{1/2} & \eta < \eta_c \\ 0 & \eta > \eta_c \end{cases}. \quad (2.1.20)$$

En base a este resultado concluimos que en el punto crítico $\eta = \eta_c$ el sistema muestra una transición de fase de segundo orden con exponente 1/2, el cual caracteriza las transiciones que pertenecen a la *clase de universalidad de campo medio* (Stanley, 1999).

2.1.1 Universalidad de campo medio.

Para concluir la descripción de la solución analítica del modelo de votantes, discutamos un poco más el intercambio de las sumatorias de la Ec. 2.1.14, intercambio que como ya mencionamos es posible solamente si todos los momentos de la distribución $P_k(x)$ son finitos. Justificaremos esta afirmación siguiendo la argumentación que Aldana y Larralde (Aldana-Larralde, 2004) hacen al respecto.

³ Veremos más adelante en la sección 2.1.1 que intercambiar las sumas es posible solamente si todos los momentos de la distribución $P_k(k)$ son finitos.

En el planteamiento del modelo analítico mencionamos que $I_k(t)$ es la probabilidad de que la regla de la mayoría asociada con un elemento arbitrario σ_i con k influencias adquiera el valor $+1$ en el paso de tiempo t y relacionamos esta probabilidad con la suma de las influencias sobre este elemento $\left(\xi_i = \sum_{j=1}^{k_i} \omega_j \sigma_{i_j}\right)$. Estos k_i términos son variables aleatorias generadas por una misma distribución de probabilidad $P_{\omega\sigma}$, distribución que tiene valor promedio $\mu = \Psi \langle \omega \rangle$ y varianza $\Delta^2 = \langle \omega^2 \rangle - \Psi^2 \langle \omega \rangle^2$, donde $\langle \omega \rangle$ y $\langle \omega^2 \rangle$ son el primer y segundo momento de la distribución de pesos sinápticos $P_{\omega}(x)$, respectivamente.

Si aplicamos el teorema del límite central a la distribución ξ para valores grandes de k obtendremos que,

$$\begin{aligned}
 I_k(t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k \Delta^2}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - k\mu)}{2k\Delta^2}\right] d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu k^{1/2}}{\sqrt{2}\Delta}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n+1) n!} \left(\frac{\mu k^{1/2}}{\sqrt{2}\Delta}\right)^{2n+1}.
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Comparando esta expresión con la Ec. 2.1.13 que define la probabilidad $I_k(t)$ como un desarrollo en series de Ψ y haciendo $m = 2n + 1$ y $\Psi = \mu / \langle \omega \rangle$, es posible obtener el comportamiento asintótico del coeficiente $a(k, m) \sim k^{m/2}$ para valores grandes de k . En esta situación y de acuerdo a las expresiones de las Ecuaciones 2.1.16 y 2.1.17, cualquier distribución arbitraria $P_k(x)$ debe tener momentos finitos para que los coeficientes b_m estén siempre definidos. De no ser así las sumas no son intercambiables y los resultados analíticos que conducen a la ecuación 2.1.20 no son válidos.

En la siguiente sección mostraremos algunos resultados analíticos y numéricos que se obtienen a partir de distribuciones de conectividad y distribuciones de pesos particulares.

2.2 ALGUNOS CASOS PARTICULARES.

Para ilustrar los resultados analíticos de la sección anterior mostraremos un par de gráficas que corresponden a redes de votantes donde cada elemento tiene $K = 11$ conexiones por elemento tal que $P_k(k) = \delta(k - 11)$.

La primera red se construye usando una distribución de pesos de la forma,

$$P_w(w) = \delta(w - 1) ,$$

distribución que tiene una transformada de Fourier y coeficientes $a(k, m)$,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_w(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) e^{i\lambda x} dx = \cos(\lambda) + i \operatorname{sen}(\lambda) , \\ a(K, m) &= -\frac{i^{m+1}}{2\pi} \binom{K}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [\cos(\lambda)]^{K-m} [\operatorname{sen}(\lambda)]^m d\lambda . \end{aligned}$$

Por otro lado, en la segunda red usaremos una distribución de pesos uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 1]$,

$$P_w(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases} .$$

La correspondiente transformada de Fourier y el coeficiente $a(K, m)$ son,

$$\begin{aligned} \widehat{P}_w(\lambda) &= \int_0^1 e^{i\lambda x} dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda)}{\lambda} + i \frac{1 - \cos(\lambda)}{\lambda} \\ a(K, m) &= -\frac{i^{m+1}}{2\pi} \binom{K}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{K+1}} [\operatorname{sen}(\lambda)]^{K-m} [1 - \cos(\lambda)]^m d\lambda . \end{aligned}$$

La Fig. 2.4 muestra a Ψ como función de η en dos casos distintos: el primero donde todos los pesos sinápticos son iguales a uno y el segundo cuando todos los pesos se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, 1]$.

De la gráfica podemos observar que efectivamente el parámetro de orden sigue una transición de fase del tipo campo medio y que la distribución de pesos que se le asignó a la red no se refleja en el exponente de la transición, aunque sí afectará el valor del ruido crítico al que la red se desordena.

Para continuar el análisis podemos preguntarnos cómo cambia el valor del ruido crítico con la conectividad de la red. Huepe y Aldana (Huepe-Aldana, 2002) calculan esta dependencia y construyen la gráfica que se muestra en la Fig. 2.5. De la figura observamos que las redes con conectividad mayor o igual que tres tienen un nivel de ruido crítico mayor que cero y que conforme se incrementa la conectividad, este ruido crítico también crece, aunque más lentamente conforme se alcanzan valores grandes de k .

Un importante aspecto del resultado mostrado en esta figura es que en los casos donde las redes sólo tienen elementos con una o dos conexiones el valor crítico η_c es cero, es decir, basta una cantidad infinitesimal de ruido para desordenar completamente la red. En el capítulo 3 estudiaremos más a fondo esta peculiaridad y obtendremos resultados tanto analíticos como numéricos que nos hablarán sobre las dificultades que hay para alcanzar estados ordenados cuando no hay

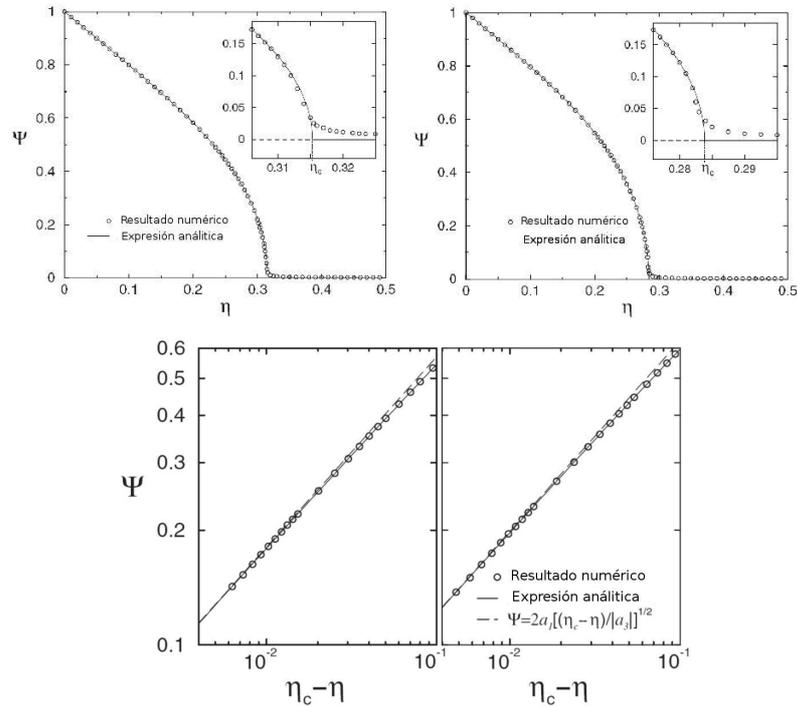


Figura 2.4. Arriba: Comportamiento del parámetro Ψ como función de η para dos distribuciones de pesos distintas. Abajo: Graficas Log-Log del parámetro de orden Ψ como función de la distancia del ruido al punto crítico ($\eta - \eta_c$). Los valores de ruido crítico son $\eta_c = 0.3153$ (Izq.) y $\eta_c = 0.2838$ (Der.) y se determinan con la expresión analítica de la Ec. 2.1.19. Las gráficas del lado izquierdo corresponden al caso donde todos los pesos sinápticos son iguales a uno ($\omega_i = 1 \forall i$), mientras que las del lado derecho muestran el caso donde los pesos se distribuyen uniformemente entre el cero y la unidad $[0, 1]$. La conectividad en ambos casos está definida por $P_k(x) = \delta(x - 1)$ y las redes tienen $N = 10^5$ elementos. Figura tomada de Huepe *et al*, 2002.

elementos con tres conexiones al menos.

Es importante hacer notar que el resultado mostrado en la Fig. 2.5 indica que debajo de un cierto número de interacciones por partícula el sistema no exhibe orden, resultado que ya habíamos obtenido pero en el contexto del SDPM de Vicsek *et al*, donde calculamos la dependencia del parámetro de alineación con el radio de interacción por partícula (véase Fig. 1.9). Como parte final de este capítulo, daremos algunas conclusiones sobre el modelo que hemos presentado.

2.2.1 Conclusiones.

Hemos visto que el modelo de votantes es un planteamiento teórico que basándose en una regla de interacción tipo mayoría entre los elementos de una red, nos permite estudiar los mecanismos de sincronización colectiva de redes que pueden tener distintas topologías caracterizadas por $P_k(k)$. También observamos que en una red de votantes con conexiones azarasas existe una transición de

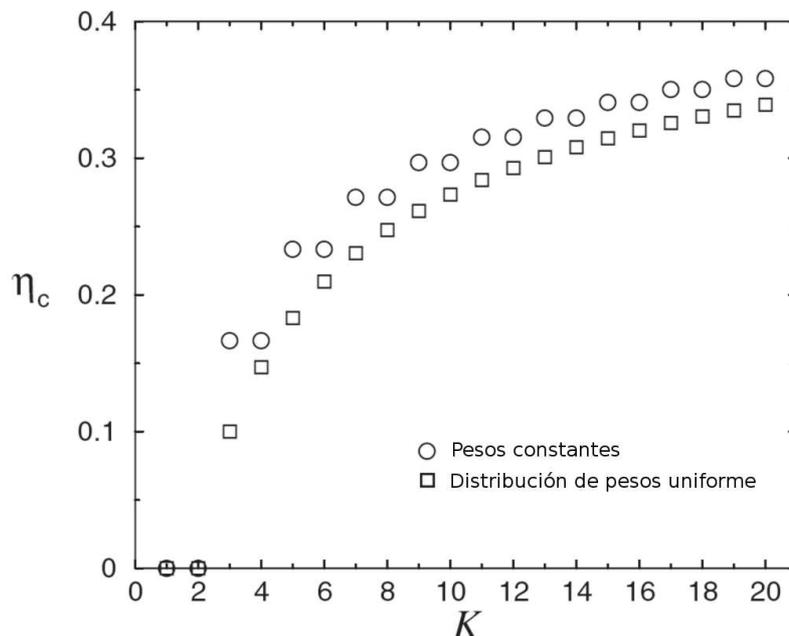


Figura 2.5. Valor del ruido crítico η_c para varias conectividades K , calculados para las dos diferentes distribuciones de pesos ya mencionadas. Conforme se incrementa la conectividad la cantidad de ruido necesaria para desordenar el sistema tiende al valor asintótico de máximo nivel de ruido $\eta_c = 1/2$. Para $K \leq 2$, $\eta_c = 0$ y el sistema permanece desorganizado para cualquier nivel de ruido $\eta > 0$. En el caso de pesos constantes los valores de ruido para conectividades consecutivas pares e impares son iguales. Figura tomada de Huepe-Aldana, 2002.

fase orden-desorden controlada por ruido, transición que según su solución analítica pertenece a la universalidad de campo medio caracterizada por un exponente crítico $1/2$. La única suposición importante para obtener estos resultados es que las conexiones que unen a los nodos de la red se asignan de forma suficientemente aleatoria tal que existe independencia estadística entre los elementos de la red. Entre los efectos que la distribución de conectividad y la distribución de pesos tienen sobre la dinámica del sistema, destacan los siguientes:

- Las redes con distribuciones de pesos $P_\omega(x)$ simétricas no presentan transiciones de fase orden-desorden, conclusión que vista desde la perspectiva del ejemplo de votantes nos indica que cuando un votante recibe tantas opiniones positivas como negativas sobre ambos candidatos, decidirá su estado básicamente en función del ruido del sistema, por lo que no hay algún mecanismo que genere sincronización y cualquier cantidad de ruido desordenará completamente la red.
- Las redes compuestas por elementos con menos de tres conexiones por elemento son susceptibles de desordenarse con cualquier cantidad infinitesimal de ruido.

En los capítulos 3, 4 y 5 mostraremos algunos resultados analíticos y numéricos que obtuvimos. Estos resultados profundizan en la caracterización de los efectos que sobre la dinámica de la red de votantes ejercen las distribuciones de la conectividad y de pesos.

Parte III

PROPIEDADES DE SINCRONIZACIÓN DEL MODELO DE
VOTANTES.

CONDICIONES MÍNIMAS PARA TRANSICIÓN DE FASE.

Como vimos en el capítulo 2, la variedad de comportamientos que se presentan en redes de votantes se relacionan directamente con la distribución de conectividad $P_k(x)$ y la distribución de pesos sinápticos $P_\omega(x)$ que la red posee.

Este capítulo contiene el análisis que realizamos para determinar algunas de las características que deben tener estas funciones para que exista transición de fase orden-desorden de largo alcance.

- En primer lugar, en la sección 3.1 mostraremos analítica y numéricamente que una red donde todos los pesos sinápticos son positivos exhibirá transición de fase siempre y cuando existan elementos con tres o más conexiones en la red.
- Por otro lado en la sección 3.2 veremos que cuando existen pesos negativos se puede frustrar el comportamiento colectivo del sistema y para que esto no ocurra, la distribución de probabilidad de los pesos $P_\omega(x)$, debe satisfacer condiciones no triviales.
- En la sección 3.2.1 estudiaremos el caso particular de una distribución de pesos exponencial asimétrica para la que obtendremos una solución analítica y numérica que nos permitirá determinar la forma en que la simetría de la distribución P_ω contribuye a destruir o robustecer los estados ordenados de la red.
- Finalmente, en la sección 3.3 ofrecemos algunas conclusiones.

3.1 CONECTIVIDAD TRES IMPLICA TRANSICIÓN DE FASE.

En esta sección estudiaremos más a fondo el resultado que muestra la inexistencia de estados estacionarios ordenados en redes de votantes formadas por elementos con menos de tres conexiones (ver Fig. 2.5). Para ello consideremos el caso donde los elementos de red pueden tener una, dos o tres conexiones con probabilidad p_1 , p_2 y p_3 respectivamente. En tal caso la distribución de conectividades se expresa como

$$P(k) = p_1 \delta_{k,1} + p_2 \delta_{k,2} + p_3 \delta_{k,3} . \quad (3.1.1)$$

Nótese que dependiendo de los valores explícitos de las probabilidades p_1 , p_2 y p_3 , la conectividad promedio de la red $\langle k \rangle = p_1 + 2 p_2 + 3 p_3$ puede tomar cualquier valor en el intervalo $[1, 3]$. Si sustituimos la Ec. (3.1.1) en la Ec. (2.1.4) obtenemos la expresión para la evolución temporal del parámetro de orden, parámetro que en el límite $t \rightarrow \infty$ alcanza un valor estacionario Ψ que es la solución de la siguiente ecuación de puntos fijos:

$$\Psi = b_1 \Psi + b_3 \Psi^3 , \quad (3.1.2)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} b_1 &= 2(1 - 2\eta) \left[a(1,1)p_1 + a(2,1)p_2 + a(3,1)p_3 \right] \\ b_3 &= 2(1 - 2\eta) a(3,3) p_3 . \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

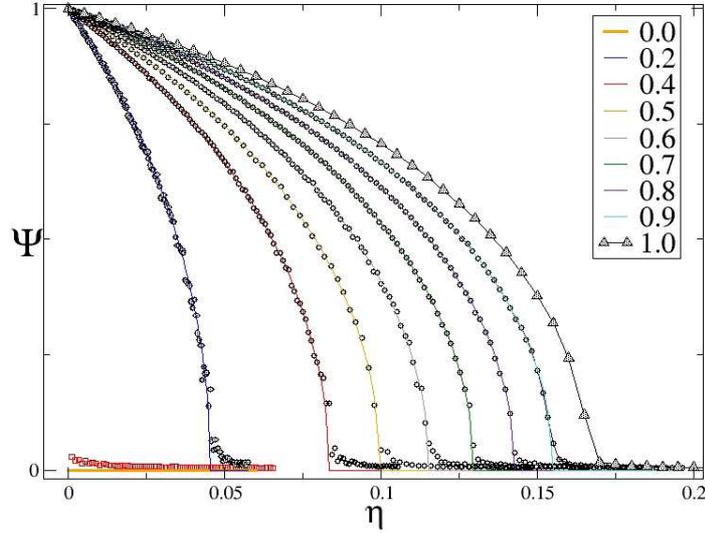


Figura 3.1. Comparación entre resultados numéricos (o) y analíticos (—) para los puntos fijos estables de la red de votantes. Analizamos los casos asociados a diferentes fracciones de elementos con tres entradas, esto es, para varios valores de la variable p_3 . La totalidad de los pesos sinápticos son iguales a uno ($P_w(w) = \delta(w - 1)$).

Los coeficientes $a(k, m)$ se definen en términos de la distribución de pesos sinápticos $P_w(x)$ de acuerdo a la Ec. 2.1.12.

De la Ec. 3.1.2 observamos que si $p_3 = 0$ el coeficiente b_3 se anula para cualquier nivel de ruido ($\eta \geq 0$) y la única solución de la ecuación anterior es la trivial $\Psi = 0$. Este importante resultado indica que, independientemente de la distribución de pesos sinápticos, para que los elementos de la red presenten comportamiento colectivo sincronizado ($\Psi \neq 0$), debe existir al menos un porcentaje de elementos con conectividad tres ($p_3 \neq 0$). Si esta condición se cumple la expresión analítica del parámetro de orden está dada por la Ec. 3.1.4,

$$\Psi = \pm \left(\frac{1 - b_1}{b_3} \right)^{1/2}. \quad (3.1.4)$$

Para mostrar la correspondencia de este resultado con su contraparte numérica, construimos una red donde todos los pesos sinápticos son iguales a uno ($P_w(w) = \delta(w - 1)$) y la distribución de conectividad es la de la Ec. 3.1.1. Numéricamente determinamos los estados estacionarios del parámetro de orden de la red y los comparamos con los puntos fijos estables de la Ec. 3.1.4, todo esto para varios valores de p_3 . Los resultados se muestran en la Fig. 3.1.

Esto confirma que *en ausencia de elementos con conectividad tres o mayor, no existe transición de fase en la red*. Nótese que cuando aumentamos la cantidad de elementos con tres conexiones $p_3 \rightarrow 1$, el comportamiento colectivo del sistema se hace más robusto al ruido η , es decir, se necesita una mayor cantidad de ruido para destruir el orden.

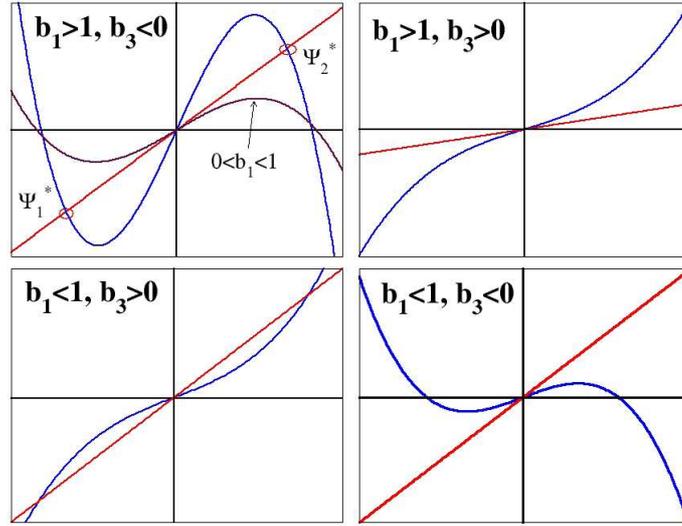


Figura 3.2. Análisis de puntos fijos para la Ec.3.1.2. Las líneas rectas son la identidad en el mapeo. Las intersecciones de las curvas con la recta identidad definen los puntos fijos de la Ec. 3.1.2. Las restricciones sobre los parámetros que son compatibles con transición de fase son $b_1 > 1$ y $b_3 < 0$.

3.2 SIMETRÍA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PESOS.

Aunque los resultados de la sección anterior 3.1 muestran un criterio para transición de fase que es independiente de la distribución de pesos, en esta sección mostraremos que la distribución de pesos sinápticos es un factor que también puede determinar la existencia o ausencia de comportamientos colectivos en el sistema.

Para ello consideremos la ecuación de puntos fijos del parámetro de orden (Ec. 3.1.2 de la sección 3.1) en el caso particular donde los inputs de los elementos se determinan por la FDP de entradas dada en la Ec. 3.1.1.

El mapeo dinámico $\psi(t+1) = M(\psi(t))$, donde $M(\psi) = b_1\psi + b_3\psi^3$, tiene cuatro comportamientos distintos dependiendo de los signos de b_1 y b_3 . Dichos comportamientos se ilustran en la Fig. 3.2. Claramente, sólo cuando $b_1 > 0$ y $b_3 < 0$ se tiene transición de fase. En este caso, si $0 < b_1 < 1$ y $b_3 < 0$, el único punto fijo estable es el trivial, $\Psi = 0$. Por otro lado, cuando $1 < b_1$ y $b_3 < 0$ entonces el punto fijo trivial $\Psi = 0$ se hace inestable y aparecen otros dos puntos fijos Ψ_1^* y Ψ_2^* no nulos. Podemos mostrar si $b_1 > 0$, variando η se puede hacer que $b_1 > 1$. Nótese que Ψ_1^* y Ψ_2^* son antisimétricos, es decir, $\Psi_1^* = -\Psi_2^*$.

Aunque conozcamos las restricciones para la existencia de la transición de fase $b_1 > 0$ y $b_3 < 0$, estos coeficientes se relacionan con la parte real e imaginaria de la transformada de Fourier de $P_\omega(x)$,

$$b_1 = 2(1-2\eta) [a(1,1)p_1 + a(2,1)p_2 + a(3,1)p_3] > 1$$

$$b_3 = 2(1-2\eta) a(3,3) p_3 < 0.$$

donde los coeficientes $a(k, m)$ definidos en la Ec. 2.1.12 involucran relaciones integrales demasiado complicadas como para traducir las desigualdades a restricciones sobre las propiedades de $P_\omega(x)$. En esta situación sería valioso contar con un caso particular suficientemente representativo como para ilustrar la naturaleza de las restricciones relacionadas con los pesos sinápticos. El caso particular que aquí mostraremos nos ayudará a entender los efectos que la simetría de $P_\omega(x)$ tiene sobre la dinámica.

3.2.1 La simetría de $P_\omega(\omega)$ como factor para transición de fase.

Cuando los pesos w_{ij} pueden ser tanto positivos como negativos, entonces cada término $w_{ij}\sigma_{ij}$ que aparece en la Ec. 2.1.1 tendrá un signo determinado no sólo por σ_{ij} , sino también por w_{ij} . Por lo tanto, la influencia del elemento σ_{ij} sobre σ_i dependerá no sólo del estado de σ_{ij} sino también del signo de w_{ij} . Este efecto se traduce indirectamente en condiciones más restrictivas para la formación de estados colectivos ordenados, situación que se reflejará en un aumento en la sensibilidad del sistema a los efectos del ruido.

Para investigar cómo afecta a la transición de fase la existencia de los pesos sinápticos (influencias) negativos, usaremos un caso particular donde la distribución de pesos $P_\omega(x)$ tiene la forma de una exponencial con simetría definida por el parámetro γ :

$$P_\omega(x) = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \begin{cases} e^{\frac{x}{\gamma}} & x < 0 \\ e^{-\gamma x} & x > 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Esta distribución tiene valor promedio,

$$\langle w \rangle = \frac{1}{\gamma} - \gamma.$$

Nótese que el valor promedio de esta distribución puede volverse positivo o negativo dependiendo del valor del parámetro γ . Para ilustrarlo, en la Fig. 3.3 mostramos el comportamiento de esta distribución para dos simetrías distintas.

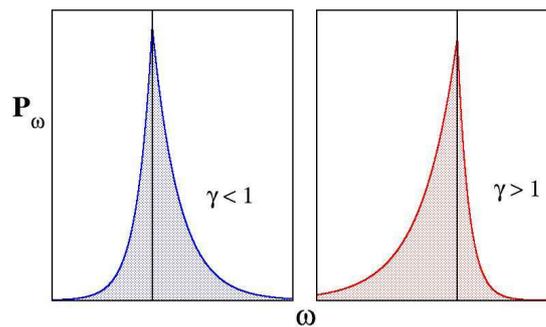


Figura 3.3. Esquema del cambio de la simetría de la distribución de pesos dada en 3.2.1. para valores de $\gamma > 1$ la simetría es negativa, mientras que cuando $\gamma < 1$ la simetría es positiva.

Dado que estamos interesados en determinar la forma en que la simetría de $P_\omega(x)$ afecta la dinámica del sistema, consideraremos el caso simple de la sección 3.1 donde la red solamente tiene elementos con tres conexiones tal que la distribución de conectividad es $P_k(k) = \delta(k-3)$. En estas condiciones, los coeficientes $a(k, m)$ toman la siguiente forma,

$$\begin{aligned} a(1,1) &= \frac{1-\gamma^2}{2(1+\gamma^2)} \\ a(2,1) &= \frac{(1-\gamma^2)(1+4\gamma^2+\gamma^4)}{2(1+\gamma^2)^3} \\ a(3,1) &= \frac{3(1-\gamma^2)(3+17\gamma^2+40\gamma^4+17\gamma^6+3\gamma^8)}{16(1+\gamma^2)^5} \\ a(3,3) &= -\frac{(1-\gamma^2)^3(1+5\gamma^2+\gamma^4)}{16(1+\gamma^2)^5} \end{aligned}$$

Usando estos resultados y sustituyéndolos en la Ec. 3.1.3 obtenemos las formas funcionales de b_1 y b_3 en términos del ruido η y del parámetro de simetría γ .

$$\begin{aligned} b_1(\eta, \gamma) &= 2(1-2\eta) \frac{3(1-\gamma^2)(3+17\gamma^2+40\gamma^4+17\gamma^6+3\gamma^8)}{16(1+\gamma^2)^5}, \\ b_3(\eta, \gamma) &= -2(1-2\eta) \frac{(1-\gamma^2)^3(1+5\gamma^2+\gamma^4)}{16(1+\gamma^2)^5}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. 3.1.4 tenemos finalmente los puntos fijos del parámetro de orden $\Psi = \Psi(\eta, \gamma)$.

$$\Psi = \left| \frac{1-b_1(\eta, \gamma)}{b_3(\eta, \gamma)} \right|^{1/2} \quad (3.2.2)$$

Comparamos este resultado con las simulaciones numéricas de una red de votantes con la topología de conectividad y pesos que ya definimos. El resultado lo mostramos en la Fig. 3.4. Podemos observar que la transición de fase depende en forma no trivial de la intensidad del ruido η y de la simetría de $P_\omega(x)$ determinada por el valor de γ . Podemos determinar la curva crítica que separa la zona desordenada de la zona ordenada haciendo $\Psi = 0$ en la Ec. 3.2.2 y despejando el valor de ruido crítico como función del parámetro γ .

$$\eta_c(\gamma) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3(1-\gamma^2)(3+17\gamma^2+40\gamma^4+17\gamma^6+3\gamma^8)}{32(1+\gamma^2)^5} \right].$$

Es importante hacer notar que el valor crítico del parámetro γ por encima del cual no existen estado ordenados (γ_c) es mucho menor que la unidad, lo que refleja que no es necesaria una fuerte asimetría en la distribución de pesos sinápticos para destruir el orden.

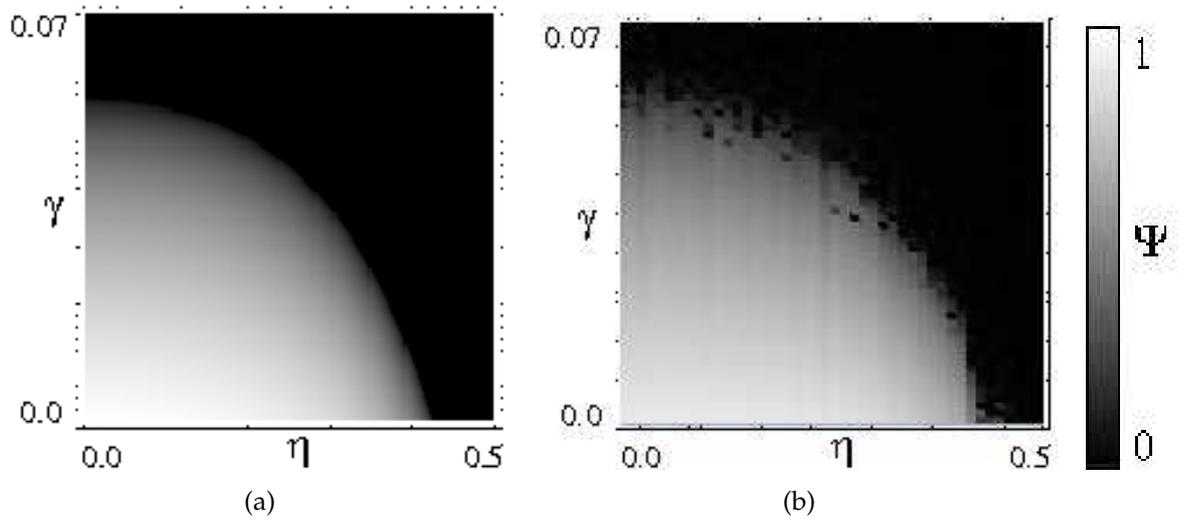


Figura 3.4. Las gráficas de densidades muestran la transición de fase orden-desorden, en dos dimensiones del parámetro de orden $\Psi(\gamma, \eta)$. (a) Resultados analíticos, (b) Simulaciones numéricas.

3.3 CONCLUSIONES

Basados en los resultados que hemos obtenido en la sección anterior, ofrecemos las siguientes conclusiones.

1. Para que la transición de fase ocurra, es necesaria en la red la presencia de elementos con tres o más conexiones.
2. Cuando la conectividad promedio de la red se incrementa también lo hace la tolerancia del sistema al ruido, esto es, la intensidad del ruido necesaria para desordenar completamente a la red es mayor.
3. La presencia de pesos sinápticos negativos también afecta la transición de fase, haciendo al sistema menos robusto al ruido conforme se incrementa la cantidad de elementos con interacciones negativas.
4. Para distribuciones de pesos negativos simétricas ($P_\omega(x) = P_\omega(-x)$) no existe transición de fase ya que el sistema nunca alcanza estados ordenados. Esta conclusión es clara desde la Ec. 2.1.12, ya que si $P_\omega(x) = P_\omega(-x)$ entonces $\hat{h}_\omega(\lambda)$ y por lo tanto $a(k, m) = 0 \forall m \geq 1$. En estas condiciones el único punto fijo estable del mapeo $\mathcal{M}(\psi)$ es $\psi = 0$.
5. Para formas específicas de la distribución de pesos sinápticos $P_\omega(x)$, es posible obtener información importante sobre la existencia de transición de fase.
6. Sin embargo, no hemos podido determinar las restricciones generales sobre $P_\omega(x)$ que garantizan la existencia de comportamiento colectivo en el sistema.

En el capítulo siguiente veremos que, además de las restricciones que hemos visto, existen algunos aspectos interesantes que relacionan la eficiencia de la sincronización colectiva con la topología de red.

MUNDO PEQUEÑO EN REDES NEURONALES.

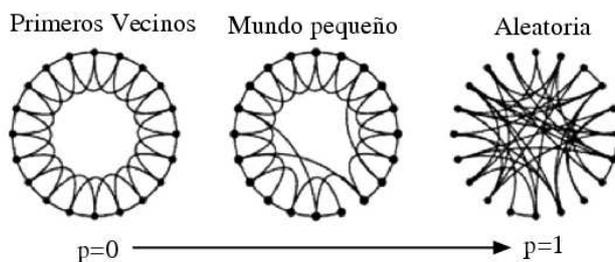
En la sección 2.1 mostramos que una red votantes con conexiones aleatorias exhibe comportamiento sincronizado únicamente si existen elementos con tres o más conexiones ($k \geq 3$) y si la distribución de probabilidad asociada a los pesos sinápticos presenta ciertas características en su simetría. Para que nuestro estudio del comportamiento sincronizado en el modelo de votantes sea más completo debemos analizar la forma en que la topología de la red afecta la capacidad de sincronización de nuestros votantes.

En este capítulo nos ocuparemos de este tema y comenzaremos estudiando las propiedades de sincronización en una red de votantes donde la mayoría de las conexiones entre los nodos son a primeros vecinos excepto por un cierto porcentaje que corresponde a conexiones aleatorias. A este tipo de redes se les conoce como de *mundo pequeño* y se usan para reproducir esquemas de interacción donde cada partícula o individuo establece sus vínculos principalmente con personas o partículas cercanas y en menor medida también lo hace con partículas distantes. Por ejemplo, en un modelo social una persona promedio se relaciona en gran medida con individuos cercanos a su ubicación geográfica, como familiares, vecinos, compañeros de oficina, etc. Pero en ciertas ocasiones establece conexiones más distantes que el promedio porque conoce personas durante viajes, por medio de internet, por cambio de domicilio, etc.

Según el modelo de Watts y Strogatz (Watts-Strogatz, 1998) existe un parámetro p que permite llevar a una red del tipo primeros vecinos hacia una red completamente aleatoria siguiendo estos pasos:

- Se comienza con una red unidimensional de N nodos, donde cada nodo tiene k conexiones a primeros vecinos (la mitad a la izquierda y la mitad a la derecha del nodo) y se ajustan el valor de los parámetros ($N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$) para conseguir que las redes no estén excesivamente conectadas.
- Con cierta probabilidad p cada conexión de la red se reconecta aleatoriamente evitando auto conexiones y duplicaciones. Con este procedimiento se introducen $\frac{pNk}{2}$ conexiones de mediano o largo alcance que conectan nodos ubicados en zonas alejadas de la red. El parámetro p lleva las conexiones de la red de primeros vecinos ($p = 0$) a conexiones totalmente aleatorias ($p = 1$) y representa la fracción de conexiones aleatorias en la red.

La esquematización de este proceso se muestra en la siguiente figura tomada de Albert-Barabási (2002).



Una de las propiedades más importantes de este tipo de red es que la longitud característica l , definida como el número de elementos promedio que hay entre dos nodos arbitrarios, obedece una forma general de escalamiento,

$$l(N, p) \sim \frac{N}{k} f(pkN^d)$$

donde $f(u)$ es una función que depende de la dimensión del sistema y de la geometría de la red, con la siguiente propiedad,

$$f(u) = \begin{cases} \text{cte} & \text{si } u \ll 1 \\ \frac{\ln(u)}{u} & \text{si } u \gg 1 \end{cases}.$$

Este tipo de escalamiento tiene alguna similitud con el formalismo de escalamiento propuesto por Widom (Widom, 1965), en el sentido que aunque la trayectoria más corta tiene una dependencia implícita de los parámetros independientes N , k y p , estará completamente determinada por una variable escalada $u \equiv pkN^d$.

Albert y Barabási nos dicen que la variable u es dos veces el número promedio de conexiones aleatorias en la red (p) y que $f(u)$ es el promedio de la fracción de red por la que la distancia entre dos nodos es reducida por una u dada. Comparado con redes aleatorias, las redes de mundo pequeño están muy conectadas, lo que se refleja en un alto coeficiente de agregación ¹ y como es de suponerse, el valor de este coeficiente dependerá del parámetro p . La forma explícita del coeficiente de agregación estará dada por la geometría de red de que se trate. Algunos ejemplos son,

- Para redes aleatorias se obtiene $C_a = \frac{\langle k \rangle}{N}$.
- Una red unidimensional periódica donde cada nodo tiene k conexiones a vecinos cercanos tiene un coeficiente $C_v = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}$. Este coeficiente converge a $3/4$ en el límite $k \rightarrow \infty$.
- Según el modelo de Newman-Watts (Newman-Watts, 1999) para la red tipo Watts-Strogatz el coeficiente será de la forma,

$$C_{w-s}(p) = \frac{3k(k-1)}{2k(2k-1) + 8pk^2 + 4p^2k^2}.$$

Existen varios trabajos que desde diferentes perspectivas caracterizan las propiedades topológicas de las redes tipo mundo pequeño. Sin embargo, el análisis de modelos de red que introducen reglas dinámicas recién comienza a explorarse.

En este contexto desarrollamos el trabajo que mostraremos en el resto del capítulo donde estudiaremos las propiedades de sincronización de una red de votantes con topología de mundo pequeño. Para ello, analizaremos un par de redes de mundo pequeño compuestas por votantes: una cadena unidimensional y una malla cuadrada. Usando estos casos representativos obtendremos algunos resultados que indican la existencia de una relación entre el valor de p y la capacidad de sincronización que adquieren estos sistemas de votantes:

- Veremos la forma en que el número de conexiones aleatorias en la red afecta la robustez que exhiben los estados colectivos ordenados ante los efectos del ruido dinámico η .

¹ El coeficiente de agregación de una red es la probabilidad de que dada una conexión entre un nodo A con un nodo B y otra conexión entre el nodo B y un nodo C, el nodo A y el nodo C estén conectados.

- Estudiaremos el cambio en la magnitud de los transitorios hacia estados colectivos ordenados conforme se incrementa el número de conexiones aleatorias en el sistema ($p : 0 \rightarrow 1$).

4.1 RED DE CADENA UNIDIMENSIONAL TIPO MUNDO PEQUEÑO.

Comenzamos nuestro análisis de las propiedades de sincronización de una red unidimensional de N votantes con topología de mundo pequeño tratando de determinar el comportamiento de los estados estacionarios del parámetro de orden Ψ conforme cambiamos el valor de p y el valor del ruido η . Como resultado de nuestro procedimiento obtenemos una colección de datos que ilustran la dependencia $\Psi(p, \eta)$.

Como primer paso construimos una red donde cada elemento se conecta con sus dos primeros vecinos y consigo mismo (mundo pequeño $p = 0, k=3$). En esta red todos los pesos sinápticos son unitarios $P_{\omega}(\omega) = \delta(\omega - 1)$. Establecemos condiciones de frontera periódicas y realizamos la simulación de la dinámica de votantes para calcular el valor del parámetro de orden estacionario Ψ definido en la Ec. 2.1.4, de esta simulación obtuvimos la curva $\Psi(p = 0, \eta)$. Después cambiamos el valor de p , generamos una red que ahora tendrá un diez por ciento de conexiones aleatorias ($p = 0,1$) y conseguimos los datos para construir la curva $\Psi(p = 0,1, \eta)$. Repetimos este procedimiento incrementando el porcentaje de conexiones recableadas y obtenemos finalmente una colección de datos que ilustran la dependencia $\Psi(p, \eta)$. Mostramos nuestros resultados en la gráfica de la Fig. 4.1.

Por la tendencia que muestran las curvas podemos ver que las redes con más conexiones recableadas parecen más resistentes al ruido dinámico η . Obsérvese que cuando las conexiones son solamente a primeros vecinos ($p = 0, k = 3$) y no hay ruido ($\eta = 0$), el sistema conserva las condiciones iniciales de red desordenada ($\Psi \sim 0$) independientemente del valor de η . Cuando las conexiones aleatorias están por debajo del 40% ($p \leq 0,4$) los primeros puntos de las curvas $\Psi(\eta)$ ($\eta \sim 0$) no siguen una tendencia bien definida (lucen un poco “desordenadas”), sin embargo, este efecto desaparece cuando se incrementa el número de conexiones aleatorias ($p \in [1/2, 1]$). Es probable que este “desorden” sólo muestre que la magnitud del transitorio temporal para estos estado es mucho más grande de lo que usamos en la simulación. Para probar esta suposición podemos repetir el cálculo de estos estados estacionarios pero ahora partiendo de condiciones iniciales ordenadas, el resultado lo mostramos en la Fig. 4.2.

En este caso ya no aparecen los estados estacionarios “desordenados” de los que hablábamos en la Fig. 4.1 y las tendencias están bien definidas. Podemos entonces confirmar nuestra hipótesis, los transitorios hacia estados ordenados que se presentan en redes con la mayoría de sus conexiones a primeros vecinos son más grandes que los correspondientes a redes con conexiones aleatorias. ¿Qué tanto más grandes?, lo responderemos en breve.

Antes de eso, conviene enfatizar que en una red de votantes unidimensional tipo mundo pequeño, los estados de orden colectivo se hacen más robustos al ruido η conforme se incrementa el número de conexiones que se recablean aleatoriamente.

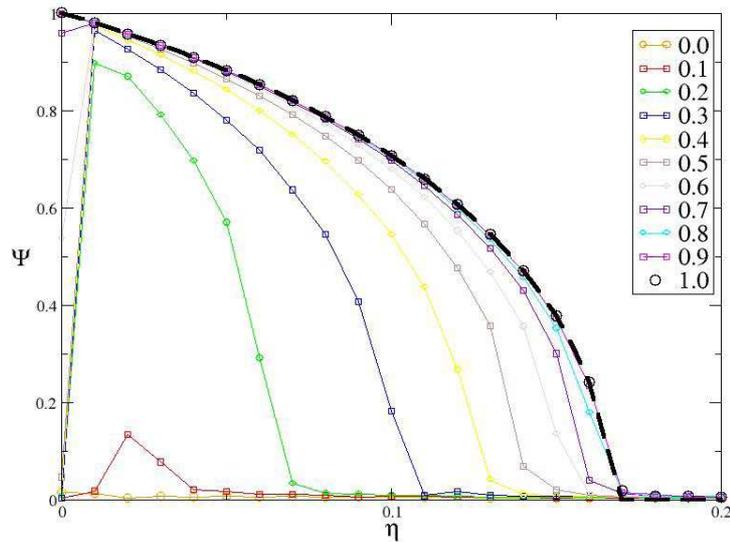


Figura 4.1. Transición de fase del parámetro de orden Ψ controlada por ruido (η) para redes de votantes con conectividad $k = 3$ y topologías de mundo pequeño. Nótese que en el caso de primeros vecinos ($p = 0$), el parámetro de orden muestra que la red no presenta transición de fase orden-desorden. La red se construye con $N = 10^5$ elementos y cada uno de los estados estacionarios se obtiene después de un transitorio de $T = 10^4$ pasos de tiempo. En todos los casos las condiciones iniciales son completamente desordenadas $\psi(t = 0) \sim 0$. En la figura, la línea continua — representa la solución analítica para el caso donde se aplica la teoría de campo medio.

4.1.1 Transitorios en cadena unidimensional de votantes tipo mundo pequeño.

Para comenzar nuestro análisis de los transitorios es importante hacer notar que en muchos sistemas reales resulta muy relevante la magnitud del transitorio hacia estados colectivos ordenados del sistema. Por ejemplo, en bancos de peces o parvadas es fundamental que cada elemento del grupo esté dotado de un mecanismo de sincronización suficientemente rápido como para responder de forma adecuada a los estímulos de su medio ambiente.

En la sección anterior observamos que los transitorios de las redes con $p \leq 0.4$ parecen ser más grandes que los asociados a redes con $p > 0.4$. Aparentemente existe cierta dependencia de la magnitud de este transitorio con el valor del parámetro p , o dicho de otra manera, posiblemente ocurre que las redes con conexiones aleatorias son más eficientes que las redes cableadas únicamente a primeros vecinos para transmitir información útil para la sincronización colectiva.

Con este argumento en mente, usaremos nuestro modelo para determinar numéricamente qué relación existe entre el número de conexiones aleatorias de la red y el tamaño de los transitorios hacia los estados estacionarios. Para hacerlo, construimos varias redes de mundo pequeño usando valores crecientes de p . Eligiendo el estado semi-ordenado que corresponde a $\eta = 0.01$, en base a muchas realizaciones determinamos el número promedio de pasos de tiempo que emplea el sistema en llegar a su estado estacionario partiendo de un completo desorden. En todas las redes

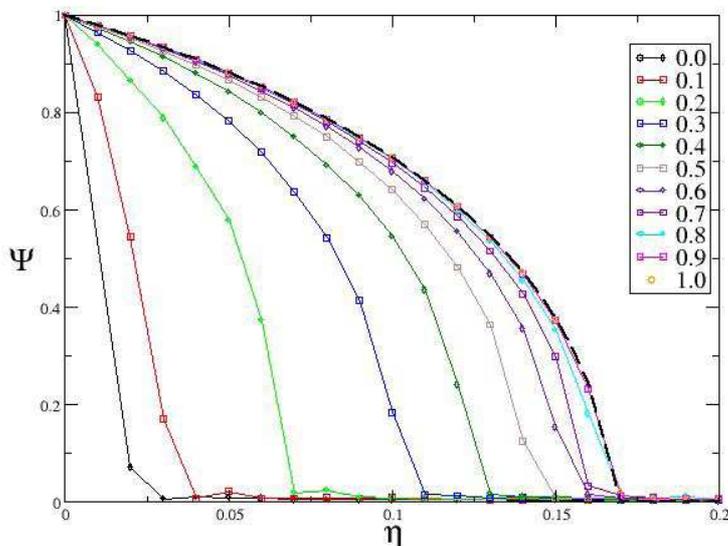


Figura 4.2. Curvas que muestran la transición de fase orden-desorden de varias redes de votantes con topología de mundo pequeño parametrizadas por p . En esta gráfica mostramos la dependencia $\Psi(p, \eta)$. Cada red se construye con $N = 10^5$ elementos con $k = 3$ conexiones por elemento. Los estados estacionarios se obtiene después de un transitorio de $T = 10^4$ pasos de tiempo. En todos los casos las condiciones iniciales son completamente ordenadas $\Psi \sim 1$. En la figura, la línea continua – representa la solución analítica que encontramos en el caso donde se cumple la teoría de campo medio.

cada elemento tiene tres conexiones ($k = 3$) y cada conexión tiene pesos unitarios. En la Fig. 4.3 mostramos un ejemplo de las realizaciones que usamos para calcular el transitorio hacia los estados estacionarios ($\Psi \sim \text{constante}$).

Al final de este procedimiento conseguimos los datos para construir la curva $T(p)$ que mostramos en la gráfica de la Fig. 4.4, donde $T(p)$ es el tiempo transitorio como función de p .

Conforme recableamos más conexiones aleatoriamente ($p \rightarrow 1$) los transitorios hacia estados ordenados disminuyen drásticamente. En particular, cuando existen pocas conexiones aleatorias $p \sim 0$, los transitorios son varios órdenes de magnitud más grandes que los que se asocian a redes con porcentajes altos de conexiones aleatorias. Parecería ocurrir entonces que las conexiones aleatorias permiten un flujo de información más eficiente que las conexiones a primeros vecinos, de tal forma que aceleran la sincronización. Este hecho resulta bastante relevante porque ilustra una de las características de la topología de red que pueden efficientar la transmisión de información en este tipo de sistemas.

En este punto, sin involucrar conceptos como renormalización, podemos preguntarnos qué sucederá si incrementamos el número de conexiones por elemento y a la par aumentamos la cantidad de los elementos presentes en la red. El resultado podría darnos una idea de qué sucede cuando se hace una especie de “crecimiento” del sistema basado en el incremento de los parámetros N y k . En la siguiente sección veremos lo que ocurre con la dinámica de los elementos de una red cuadrada con conexiones tipo mundo pequeño.

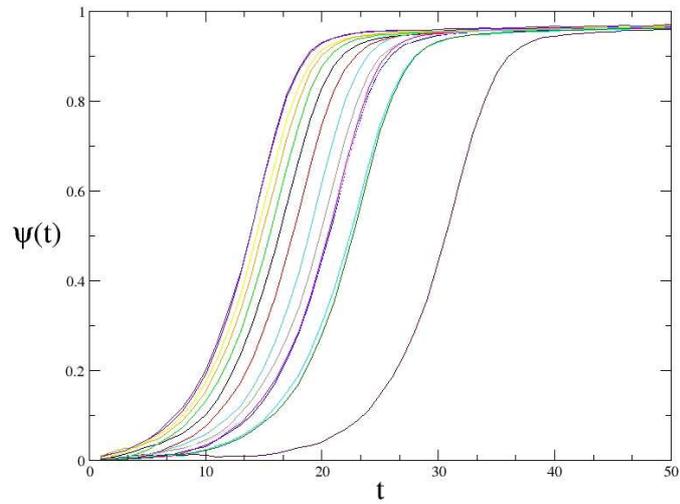


Figura 4.3. Ejemplo de 15 realizaciones que muestran transitorios hacia un estado semi-ordenado $\Psi \sim 0,98$ de los elementos de una red con 70 por ciento de las conexiones entre sus elementos recableadas aleatoriamente ($p=0.7$). Los parámetros del sistema son, $\eta=0.01$ y $K=3$.

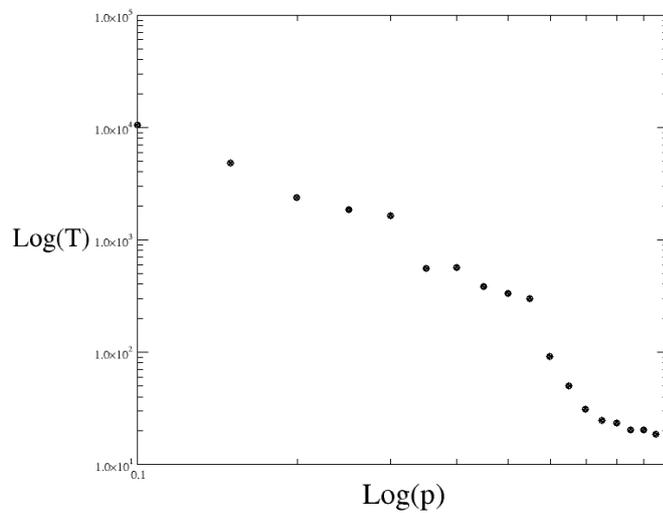


Figura 4.4. Dependencia de la magnitud del transitorio T con el valor del parámetro de mundo pequeño p . Obsérvese la notable diferencia en el orden de magnitud de los transitorios que implican las conexiones aleatorias en la red.

4.2 MUNDO PEQUEÑO EN RED DE VOTANTES CUADRADA.

Las conexiones entre los votantes de la red cuadrada tienen pesos sinápticos unitarios y se establecen a primeros vecinos (5 vecinos en este caso incluyendo al propio elemento) reconectándolas aleatoriamente con probabilidad p (ver Fig. 4.5).

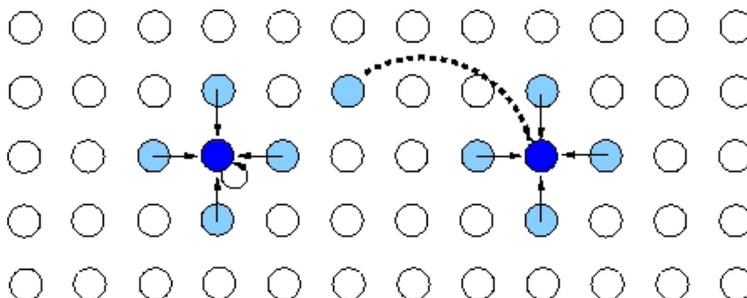


Figura 4.5. Esquema de la malla cuadrada de votantes conectados inicialmente con topología de mundo pequeño. Con probabilidad p , cada conexión se recablea aleatoriamente a otro elemento de la red (por ejemplo, la conexión segmentada en la figura).

Cuando hacemos las simulaciones observamos que en el caso $p = 0$ (conexiones a primeros vecinos) el transitorio que parte de condiciones iniciales es enorme ($T \sim 10^5$) comparado con los pasos de tiempo necesarios para alcanzar el mismo estado cuando comenzamos con condiciones iniciales ordenadas ($T \sim 10^2$). Independientemente de este efecto de las condiciones iniciales, a semejanza de lo que ocurrió en el caso unidimensional, la magnitud de los transitorios disminuye notablemente conforme recableamos conexiones de la red. En la Fig. 4.6 mostramos las curvas $\Psi(p, \eta)$ generadas a partir de condiciones iniciales completamente desordenadas.

Obsérvese que a diferencia de lo que ocurre en las redes con una fracción alta de conexiones recableadas, los estados estacionarios asociados a redes con $p < 0.5$, lucen “desordenadas” en el sentido de que no establecen una tendencia clara a tiempos t́an cortos. Podemos probar que este es un efecto de un largo transitorio asociado a condiciones iniciales desordenadas haciendo la misma simulación pero ahora partiendo de condiciones iniciales completamente ordenadas, resultados que mostramos en la Fig. 4.7. A semejanza de lo observado en el caso unidimensional, las transiciones de fase son más robustas conforme se incrementan las conexiones aleatorias en la red. Nótese también que conforme el valor de p aumenta, las curvas se pegan asintóticamente a la curva teórica calculada usando el resultado analítico del modelo de votantes con $k = 5$ conexiones aleatorias.

4.2.1 Transitorios de mundo pequeño en malla cuadrada.

Como ocurría en el caso unidimensional, los transitorios de la malla conectada a primeros vecinos resultan muy diferentes para condiciones iniciales desordenadas que para condiciones ordenadas. Por lo tanto resulta pertinente reproducir el análisis que realizamos en el caso unidimensional y determinar cómo depende el transitorio del parámetro de mundo pequeño p . Para hacerlo

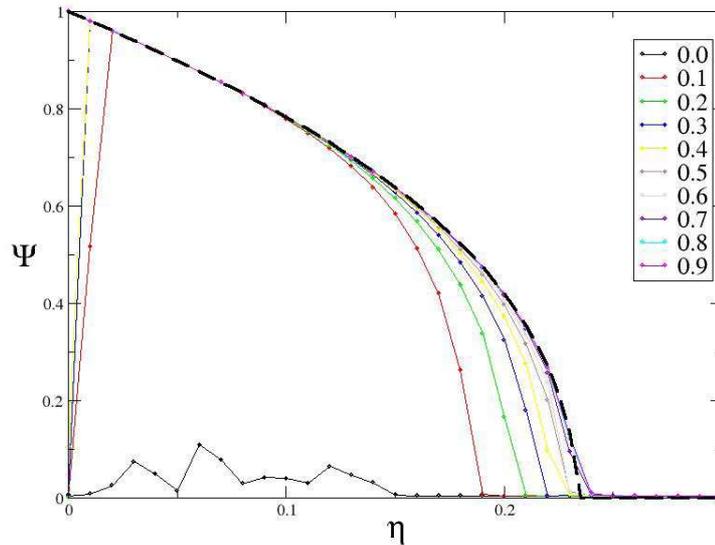


Figura 4.6. Transición de fase orden-desorden para modelo de red cuadrada de votantes con topología de mundo pequeño parametrizada por p . La red contiene $N = 500^2$ elementos y los transitorios para los estados estacionarios son de $T = 1500$ pasos de tiempo, condiciones iniciales desordenadas. En la figura, la línea continua — representa la solución analítica para el caso $p = 1$ y $k = 5$, donde existe independencia y equivalencia estadística entre los elementos de la red.

seguimos un procedimiento idéntico al que realizamos en el caso unidimensional, midiendo los pasos del tiempo que tarda la red para alcanzar un valor del estado estacionario $\Psi \sim 0.98$ y promediando los resultados para varias realizaciones. En la Fig. 4.8 mostramos ejemplos de estas realizaciones. Respitiendo este procedimiento para varios valores de p obtenemos los datos que muestran la dependencia $T(p)$ que graficamos en la Fig. 4.9.

La curva que obtenemos de las simulaciones muestra que existe una dependencia del tipo $\ln(T) = A \ln(p) + B$, donde $A = -2.4$ y $B = 2.3$. Estos datos nos indican que el transitorio de la malla cuadrada depende como una ley de potencias con exponente $A = -2.4$ del valor del parámetro de mundo pequeño p . Cuando las conexiones son a primeros vecinos ($p = 0$), este resultado implica que el transitorio diverge, lo que es correcto en el límite termodinámico. En la simulación vemos que el transitorio asociado a $p = 0$ es varios ordenes de magnitud mayor que los que presentan redes con valores de p más grandes.

Aunque la forma funcional del transitorio que involucra una ley de potencias no es intuitiva, no perdamos de vista el siguiente resultado: la magnitud del transitorio de la malla cuadrada disminuye drásticamente cuando recableamos conexiones aleatoriamente.

Hasta ahora hemos visto cómo depende el orden del sistema de la cantidad de conexiones recableadas y también estudiamos cómo se relaciona el transitorio con el parámetro p , sin embargo, en este análisis no hemos determinado cómo dependen los transitorios de las condiciones iniciales. Hemos visto solamente que los pasos de tiempo necesarios para alcanzar el estado estacionario son mucho menos cuando partimos de completo orden que cuando partimos del desorden, pero

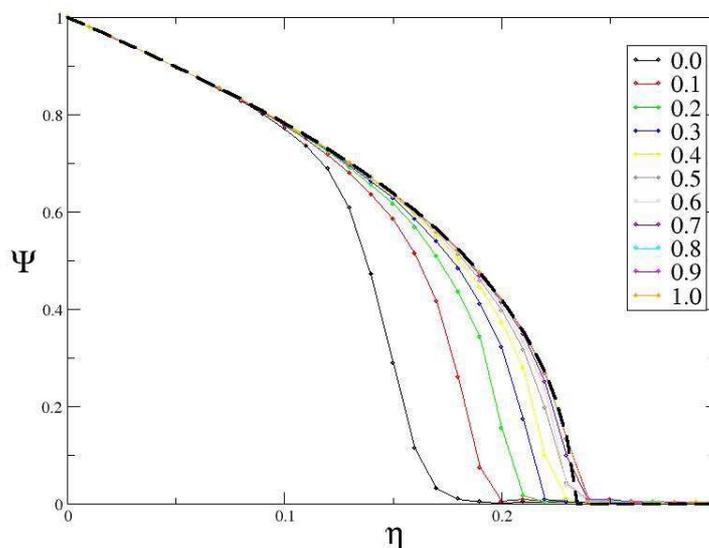


Figura 4.7. Transición de fase orden-desorden para modelo de red cuadrada de votantes con topología de mundo pequeño parametrizada por p . La red contiene $N = 500^2$ elementos y los transitorios para los estados estacionarios son de $T = 200$ pasos de tiempo, condiciones iniciales completamente ordenadas. En la figura, la línea continua — representa la solución analítica para el caso $p = 1$ y $k = 5$ conexiones aleatorias.

para todos los casos intermedios no tenemos información. Para completar nuestro análisis de sincronización en redes de mundo pequeño estudiamos la forma en que el transitorio de la red conectada a primeros vecinos depende de las condiciones iniciales. Para ello modelaremos una red cuadrada compuesta por votantes conectados a primeros vecinos ($k = 5$) como se muestra en la Fig. 4.10 y con un nivel de ruido muy bajo ($\eta = 0.01$). Ajustaremos las condiciones iniciales de tal manera que conozcamos el nivel de orden inicial (Ψ_0) y veremos la evolución del sistema analizando los transitorios.

Para obtener una buena estadística emplearemos el siguiente método,

- Inicializamos todos los elementos de la red al estado $+1$.
- Dividimos la red en celdas de lado N como en la Fig. 4.10 y en cada celda formamos un cuadro compuesto por b^2 nodos que fijamos al estado -1 . El parámetro de orden de la i -ésima celda lo denotaremos por ψ_i .
- Estas condiciones ajustan el valor del parámetro de orden de todas las celdas al valor,

$$\psi_i(t = 0) \equiv 1 - 2 \left(\frac{b}{N} \right)^2. \quad (4.2.1)$$

- Dejamos evolucionar el sistema hasta que todas las celdas alcanzan su estado estacionario y registramos la serie de tiempo del parámetro de orden de cada celda por separado.

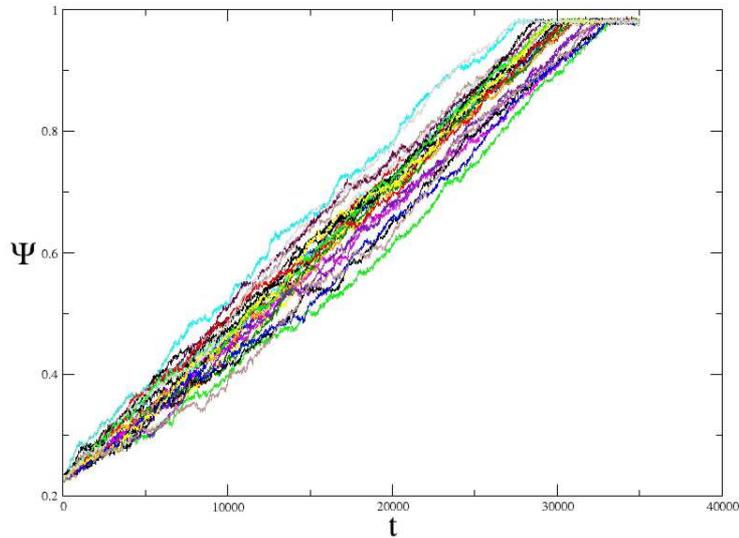


Figura 4.8. Mostramos varias realizaciones del transitorio del parámetro de orden para una red cuadrada de 500^2 votantes con condiciones iniciales desordenadas y conexiones a primeros vecinos ($p = 0$), el nivel de ruido es $\eta=0.01$ para el cual $\Psi \sim 0.98$.

- Como todas las celdas tienen la misma condición inicial pero siguen un transitorio distinto, podemos obtener información estadística del transitorio haciendo un promedio de los transitorios de cada celda,

$$\psi_P(t) = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \psi_i(t)$$

donde N_c es el número de celdas y la suma normalizada es el valor promedio del transitorio $\Psi(t)$ dada una condición inicial específica.

Para ilustrar lo que sucede en la simulación, en la Fig. 4.11 mostramos la evolución temporal de una red formada por $N^2 = 100^2$ elementos con 5 conexiones a primeros vecinos ($p = 0$) cada uno y sujetos a un bajo nivel de ruido ($\eta = 0,01$). La secuencia comienza con la condición inicial $\psi_0 = 0,4168$ que conseguimos colocando 36 celdas cuadradas de lado $b_0 = 9$ formadas por elementos en el estado -1 (cuadro azul). Enseguida dejamos evolucionar al sistema y vamos tomando instantáneas cuando se alcanzan ciertos valores de Ψ .

Este procedimiento nos permite apreciar la evolución de los elementos de la red partiendo de diferentes condiciones iniciales. Repitiendo este experimento para varias condiciones iniciales, que ajustamos usando la magnitud b de las manchas rectangulares obtenemos datos estadísticos de los transitorios y construimos la gráfica de la Fig. 4.12 que muestra el tamaño del transitorio como función del parámetro b .

La ecuación resultante del ajuste cuadrático es, $\Delta T = 7.26 \times b^2$ lo que nos indica que el tamaño del transitorio hacia el estado estacionario es proporcional al área de la mancha, esto es, $\Delta T \sim A_b$.

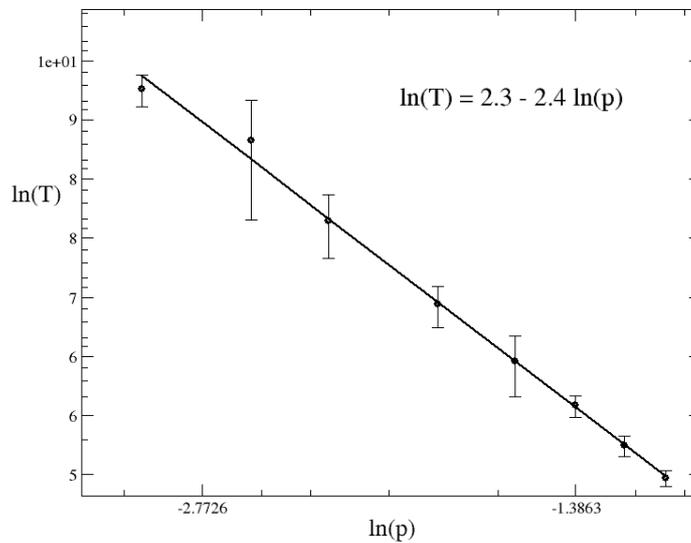


Figura 4.9. Dependencia del logaritmo del transitorio con el logaritmo del parámetro p para una red cuadrada formada por $N = 500^2$ elementos, $\eta = 0.01$, $K = 5$. Las condiciones iniciales son completamente desordenadas en todos los casos. Los círculos \bullet corresponden a los datos de las simulaciones y la línea continua es el ajuste lineal a estos datos.

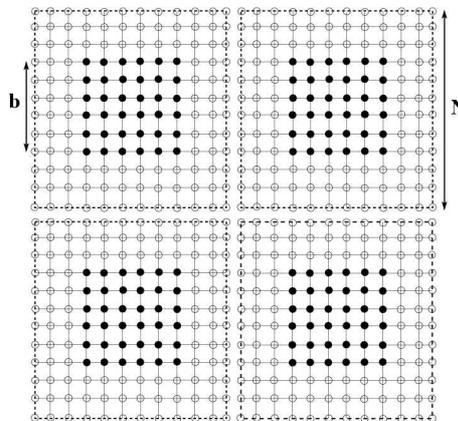


Figura 4.10. Malla bidimensional con condiciones iniciales semi ordenadas. El sistema está formado por cuatro celdas idénticas de lado N formadas por elementos en el estado $+1$ (\circ) y con manchas de lado b formadas por elementos en estado -1 (\bullet).

Este resultado es similar a lo que sucede con el modelo de Ising unidimensional donde la tasa de cambio con la que el área de la mancha A_b se reduce es constante tal que $\frac{dA_b}{dt} \sim \text{cte}$.

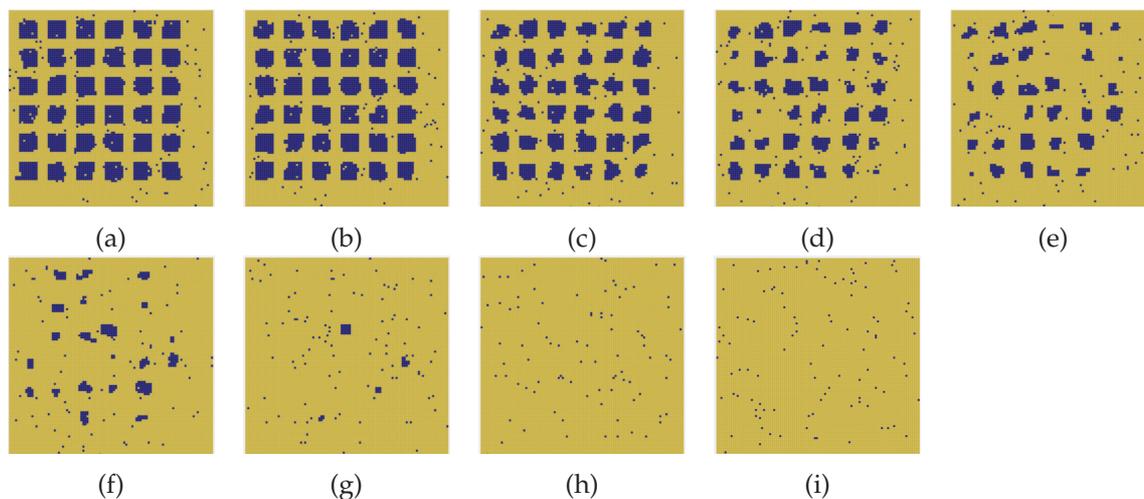


Figura 4.11. Secuencia de la simulación de red cuadrada $N = 100^2$, $K = 5$, $p = 0$, $\eta = 0.01$. La secuencia de valores del parámetro de orden ψ es a) 0.41, b) 0.45, c) 0.57, d) 0.70, e) 0.80, f) 0.90, g) 0.96, h) 0.98, i) estado estacionario $\psi \sim 0.98$. El tiempo transcurrido durante la secuencia completa es de $T = 20000$ pasos de tiempo.

Combinando la caracterización del transitorio que hemos presentado con nuestro resultado previo donde vimos que la formación de orden colectivo puede ser más fácil cuando existe un buen porcentaje de conexiones aleatorias ($p \rightarrow 1$), podemos decir en términos de un sistema social de votantes, que para ordenar las opiniones de todos los individuos de una sociedad y lograr un acuerdo colectivo en un tiempo corto, es fundamental que existan mecanismos de transmisión de información de mediano y largo alcance. Este resultado podría resultar fundamental en sistemas que exhiben sincronización colectiva en tiempos muy cortos como peces, aves, etc.

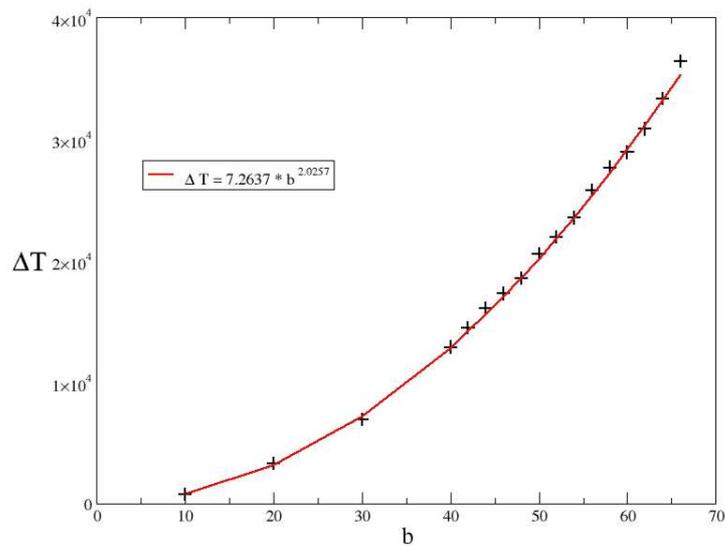


Figura 4.12. Dependencia estadística del transitorio ΔT del modelo de malla cuadrada de votantes con el tamaño de las manchas de lado b para una red con $N = 100^2$ elementos con un nivel de ruido muy pequeño ($\eta = 0,01$) y conexiones a primeros vecinos ($p = 0$). (○) Datos numéricos, (-) Ajuste cuadrático $\Delta T = 7.26 \times b^2$.

4.3 CONCLUSIONES

En este capítulo estudiamos los efectos de la topología mundo pequeño en la dinámica de una red de votantes con ruido y determinamos la forma en que el parámetro p determina la tolerancia de la red a las fluctuaciones estocásticas y la magnitud de los transitorios hacia estados estacionarios semi-ordenados. Vimos además que la magnitud de estos transitorios son dependientes de las condiciones iniciales que se impongan.

Podemos ofrecer las siguientes conclusiones,

1. En el caso unidimensional, cuando la conectividad de la red es a primeros vecinos, el sistema no mostrará estados ordenados, independientemente del nivel de ruido η , comportamiento análogo al que ocurre en el modelo de Ising unidimensional.
2. En el caso de la red cuadrada, por construcción habrá más conexiones que incrementarán la capacidad de la red para transmitir la información y permitirá la formación de estados ordenados. Consecuentemente existirán transiciones de fase orden-desorden controladas por ruido para cualquier valor de p , incluso para $p = 0$.
3. Tanto en la red unidimensional como en la red cuadrada, conforme el número de conexiones aleatorias se incrementa ($p \rightarrow 1$), los estados ordenados de la red se hacen más robustos ante los efectos del ruido. Podemos interpretar este hecho como un aumento en la capacidad que tiene el sistema para disipar las componentes estocásticas y mantener el estado ordenado.

Algunas simulaciones que no presentamos aquí muestran que este comportamiento es el mismo en el caso de una red con forma de cubo (3D).

4. Las redes que tienen pocas conexiones aleatorias tienen transitorios muy largos, resultado de gran importancia si consideramos que en muchos sistemas reales el tiempo de sincronización es fundamental (por ejemplo, un banco de peces que es atacado por un depredador, etc.) y en la medida que nuestro modelo sea representativo del tipo de interacciones que se presentan en estos sistemas reales, podremos ir construyendo un criterio numérico para definir que topologías son incompatibles con dinámicas de reacción rápida.

LEY DE POTENCIAS EN UNA RED DE VOTANTES.

En este capítulo estudiaremos las propiedades de sincronización de una red de votantes en el caso donde las conexiones entre los votantes (inputs o de outputs) se forman siguiendo una topología de red libre de escala.

Las redes con topología libre de escala tienen la propiedad de que la probabilidad $P(k)$ de que un elemento arbitrario esté conectado exactamente con k elementos es de la forma $P(k) = Ck^{-\gamma}$, donde γ es el *exponente de la distribución libre de escala* y C es una constante de normalización. En años recientes se han publicado una gran cantidad de trabajos donde se muestra que muchas redes asociadas a sistemas reales tienen una topología libre de escala ¹. Por ejemplo, la internet (Albert R. *et al*, 1999), las redes sociales (Newman M.E.J, 2001), redes metabólicas y de proteínas (Jeong H.*et al* 2000,2001), redes ecológicas (Camacho *et al*, 2002) y redes genéticas (Fox-Hill ,2001). Existen varios trabajos que proponen diferentes mecanismos para construir este tipo de redes, como ejemplo mostramos sólo dos:

- La propuesta de Albert y Barabási (Albert-Barabási , 2002.) que basándose en *crecimiento y unión preferencial* en t pasos de tiempo puede formar una red libre de escala con exponente $\gamma=3$, compuesta por $N = (t + m_0)$ nodos y mt conexiones, donde m_0 es el número inicial de nodos y $m \leq m_0$ es el número de conexiones que le asignamos a cada nuevo nodo que aparece en cada paso de tiempo t .
- El trabajo de Krapivsky *et al* (Krapivsky *et al*, 2002) donde encuentran una solución para la distribución de conectividad asociada a una red aleatoria en crecimiento. Esta solución es dependiente del tiempo y antigüedad de la red. En este modelo cada elemento nuevo se conectará a la red con cierta probabilidad A_k que depende del número de conexiones preexistentes en el nodo al que se añade el nuevo elemento. Para probabilidades homogéneas $A_k \sim k^\gamma$ aparecen diferentes comportamientos dependiendo de si $\gamma < 1$, $\gamma > 1$ o $\gamma = 1$. Para $\gamma < 1$ el número de sitios con k conexiones N_k varía como una exponencial extendida. Para $\gamma > 1$ aparece un sitio dominante que se conectará con casi todos los demás. En el caso asintótico $A_k \sim k$ la ley de potencias $N_k \sim k^{-\nu}$ aparece, donde el exponente ν toma el valor $\nu = 3$.

Independientemente de la forma en que se construyen las redes libres de escala, cuando se incluyen reglas dinámicas para definir las interacciones entre los elementos de la red se obtienen una gran variedad de comportamientos que pueden modelar sistemas reales. Aldana y Larralde (Aldana-Larralde, 2004) analizaron la dinámica de un modelo de votantes con topología libre de escala en inputs. Esta topología de red es común en redes genéticas, ecológicas, o sociales y representa sistemas donde el número de influencias que determinan el estado de cada nodo se determina por una distribución libre de escala. En este capítulo mostraremos nuestro trabajo para determinar el comportamiento dinámico de una red de votantes con topología libre de escala en outputs. Este modelo describe la sincronización colectiva en las decisiones de una población donde el número de influencias que ejerce cada elemento sigue una distribución libre

¹ En la sección A.1 del apéndice A mostramos una tabla con varios ejemplos de redes reales que tienen topología libre de escala.

de escala. Este tipo de red describe por ejemplo, una población donde existen todos los niveles de influencias, y en particular existen unos pocos elementos muy influyentes (personajes de medios de comunicación electrónicos o escritos, dirigentes empresariales, políticos, religiosos, etc.) a los que llamaremos "líderes". Antes de describir nuestro trabajo es conveniente describir brevemente algunos resultados que Aldana y Larralde (Aldana-Larralde, 2004) obtienen para votantes con topología libre de escala en inputs.

5.1 DISTRIBUCIÓN DE INPUTS LIBRES DE ESCALA.

En su trabajo Aldana y Larralde muestran que en una red de votantes que siguen la regla de la mayoría, cuando todos los momentos de la distribución de conectividad son finitos, la red presenta una transición orden-desorden que pertenece a la clase de universalidad de campo medio, caracterizada porque el exponente β definido por,

$$\Psi \approx (\eta_c - \eta)^\beta . \quad (5.1.1)$$

toma el valor $\beta = 1/2$. En el caso de una distribución libre de escala de inputs, los momentos de la conectividad no siempre son finitos, lo que complica el análisis. Sin embargo, bajo la suposición de que los elementos de la red tienen equivalencia e independencia estadística entre sí, es posible determinar el valor del exponente β como función de γ y obtener el comportamiento del parámetro de orden cerca de la transición de fase ². En su análisis Aldana y Larralde describen el comportamiento del parámetro de orden cerca de la transición de fase para varios intervalos del exponente γ .

En el intervalo $1 < \gamma \leq 3/2$ el sistema no se desordena antes de $\eta = 1/2$ y el parámetro de orden se comporta como $\Psi \sim (1/2 - \eta)^{\frac{1}{3-2\gamma}}$, cuando $\eta \rightarrow 1/2$. En el intervalo $3/2 < \gamma < 5/2$ el parámetro de orden se comporta como,

$$|\Psi| \sim \left[\frac{\sqrt{4\pi}(2\eta - 3)(2\gamma - 2)b_1^2}{\Gamma(5/2 - \gamma)} \left(\frac{2\langle w^2 \rangle}{\langle w \rangle^2} \right)^{\gamma-1} (\eta_c - \eta) \right]^{\frac{1}{2\gamma-3}} \quad (5.1.2)$$

Y asintóticamente a $\gamma = 5/2$,

$$\Psi^2 |\ln \Psi| \sim \frac{6\sqrt{\pi}b_1^2}{C} \left(\frac{2\langle w^2 \rangle}{\langle w \rangle^2} \right)^{3/2} (\eta_c - \eta) \quad (5.1.3)$$

Cuando $\gamma > 5/2$ la transición de fase del sistema se ubica nuevamente dentro de la clase de universalidad de campo medio y el comportamiento del parámetro de orden esta descrito por la Ec. 2.1.20. La siguiente tabla muestra un resumen de estos resultados indicando los valores de los exponentes críticos β y el valor de ruido crítico η_c para diferentes valores de γ .

INTERVALO	EXPONENTE β	P. CRITICO η_c
$1 < \gamma \leq 3/2$	$(3 - 2\gamma)^{-1}$	$1/2$
$3/2 < \gamma < 5/2$	$(2 - 3\gamma)^{-1}$	$\frac{1}{2}(1 - 1/2b_1)$
$\gamma = 5/2$	$1/2 + \text{Log}$	$\frac{1}{2}(1 - 1/2b_1)$
$5/2 < \gamma$	$1/2$	$\frac{1}{2}(1 - 1/2b_1)$

² Los cálculos detallados se muestran en la sección B.1 del apéndice.

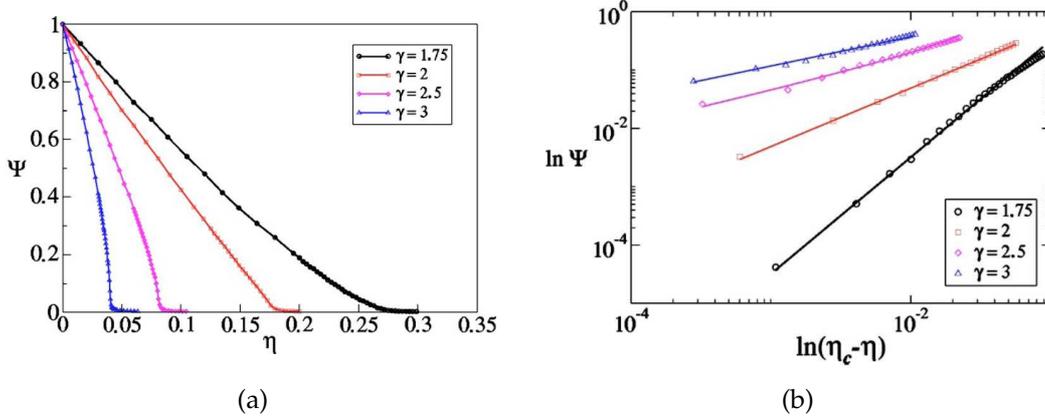


Figura 5.1. (a) Dependencia del parámetro de orden Ψ con el ruido η para diferentes valores de gamma. (b) Gráfica Log-Log de Ψ como función de $\eta_c - \eta$ para diferentes valores del exponente γ . Los símbolos son valores numéricos y las líneas continuas son resultados analíticos, Ec. 5.1.1 para $\gamma = 3$, Ec. 5.1.3 para $\gamma = 2,5$ y Ec. 5.1.2 para $\gamma = 2$ y $\gamma = 1,75$. Figura tomada de Aldana *et al*, 2004.

Para verificar los resultados analíticos que muestra esta tabla, se realizan las simulaciones numéricas correspondientes y se obtienen los resultados de la Fig. 5.1 que muestra el comportamiento del parámetro de orden como función de la distancia al punto crítico ($\eta_c - \eta$). Como puede observarse, el acuerdo entre las simulaciones y los resultados analíticos es bastante bueno. Un aspecto interesante de estos resultados es que para $3/2 < \gamma \leq 2$ aparece una transición de fase para $\eta < 1/2$ no obstante que el primer momento de la conectividad de la red que la sufre diverge. Este resultado es el primer ejemplo de una transición de fase que ocurre a “temperatura finita” en una red con conectividad infinita. En general, en el modelo de votantes con topología libre de escala en inputs la transición de fase puede presentarse en el intervalo solamente cuando el momento $\langle k^{1/2} \rangle$ de la distribución P_k sea finito. Este resultado puede entenderse si consideramos la suma $\xi_k = \sum_{j=1}^k w_{ij} \sigma_{n_j}$, que aparece como argumento de la regla de la mayoría, es una caminata aleatoria de k pasos con primer momento μ_k y varianza $\Delta_k = \sqrt{k (\langle w^2 \rangle - \Psi \langle w \rangle^2)}$. En estas condiciones y de acuerdo al teorema del límite central, la convergencia de la suma $\sum_k \frac{\mu_k}{\Delta_k} P(k) \sim \sum_k k^{1/2} P(k)$ es una condición necesaria para la existencia de la transición de fase. Esta convergencia garantiza que la cantidad,

$$\left\langle \frac{\mu_k}{\Delta_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\Delta_k} P(k),$$

permanecerá finita. En este caso existirá un nivel de ruido menor a $1/2$ en el que el orden del sistema se destruya completamente.

Estos resultados implican la independencia estadística entre los votantes de la red, sin embargo, existen casos como los sistemas sociales por ejemplo, donde existen correlaciones entre los individuos. Para proponer un modelo donde las correlaciones se tomen en cuenta debemos sacrificar la independencia y equivalencia estadística entre los elementos. Nuestra propuesta es el

modelo que presentaremos en la siguiente sección: la topología de red libre de escala en outputs.

5.2 RED DE VOTANTES CON TOPOLOGÍA DE OUTPUTS LIBRE DE ESCALA.

En una red de votantes con topología libre de escala en sus outputs se vuelve mucho más probable que dos elementos arbitrarios compartan un mismo input. A estas influencias comunes que son inputs de muchísimos nodos los llamaremos líderes. La presencia de estos líderes rompe la equivalencia estadística entre los votantes e induce una especie de marcapasos al sistema. Este hecho puede hacer más diversa la dinámica porque, aunque podría pensarse que la acción de los líderes facilitarían la sincronización de los votantes en la red, también podría ocurrir que el grupo de líderes entrarán en contradicción y ejercieran influencias opuestas al resto de la red. No debemos olvidar que cada líder define su estado en base a sus propias influencias y a priori no sabemos cuál será su estado en cada paso de tiempo. En esta situación es muy complicado tener una idea de la dinámica que exhibirá el sistema, aunque como siempre, podemos hacer un experimento numérico que nos proporcione algunas pistas ³.

Para ello calculamos numéricamente el comportamiento del parámetro Ψ en función del ruido η para varias redes de votantes que siguen una distribución de pesos $P_\omega(w) = \delta(w-1)$ y tienen topología libre de escala en sus outputs ⁴.

Para implementar la distribución de outputs libre de escala con exponente γ podemos usar una distribución que numéricamente es fácil de generar y que tiene la forma,

$$P_K(k) = \frac{1}{k^{(\gamma-1)}} - \frac{1}{(k+1)^{(\gamma-1)}}. \quad (5.2.1)$$

distribución que se comporta asintóticamente como $P_K(k) \sim (\gamma-1)k^{-\gamma}$ cuando k es suficientemente grande. Esta distribución aproxima bastante bien a una ley de potencias “pura” $P_K(k) \sim k^{-\gamma}$, sobre todo para valores grandes de k , como lo muestra la gráfica de la Fig. 5.2 donde graficamos ambas distribuciones para el caso particular donde $\gamma = 2.3$ (izquierda) y el valor absoluto de la diferencia entre ambas distribuciones D como función de γ y k (derecha).

Usando la distribución 5.2.1 podemos construir varias redes con topología libre de escala en outputs caracterizadas por su exponente γ y realizar las simulaciones de la dinámica de votantes. En particular, estamos interesados en conocer la forma en que cambia la capacidad de sincronización de los elementos de la red conforme incrementamos el número de líderes $\gamma \rightarrow 1$. Como resultado de nuestras simulaciones obtenemos una colección de curvas $\Psi(\eta)$ para varios exponentes γ , las cuales mostramos en la gráfica de la Fig. 5.3.

De la figura podemos observar que las redes construidas usando un valor de $\gamma < 2.3$, no se desordenan para niveles de ruido menores a $1/2$, es decir, no hay transición de fase en las redes asociadas. Por el contrario, las redes construidas a partir de distribuciones con exponentes $\gamma = 3.5, 3.2$ y 3.0 parecen desordenarse con niveles de ruido $\eta_c < 1/2$. De los casos intermedios poco podemos decir porque no tenemos algún criterio teórico o numérico que nos indique si el sistema exhibe una transición de fase. En esta situación sólo nos resta hacer una interpretación cualitativa de estos resultados.

Cuando formamos una red con distribución de conectividad libre de escala en outputs y con

³ Es importante mencionar que no existen resultados analíticos para el modelo de votantes con topología libre de escala en outputs, ya que las correlaciones inducidas por los líderes de opinión han resultado ser muy difíciles de tratar matemáticamente

⁴ Cuando los outputs de cada elemento se eligen aleatoriamente y con probabilidad uniforme para toda la red, la distribución de inputs que se genera tiene la forma de una distribución de Poisson con primer momento idéntico al de la distribución de outputs. (Aldana, 2003)

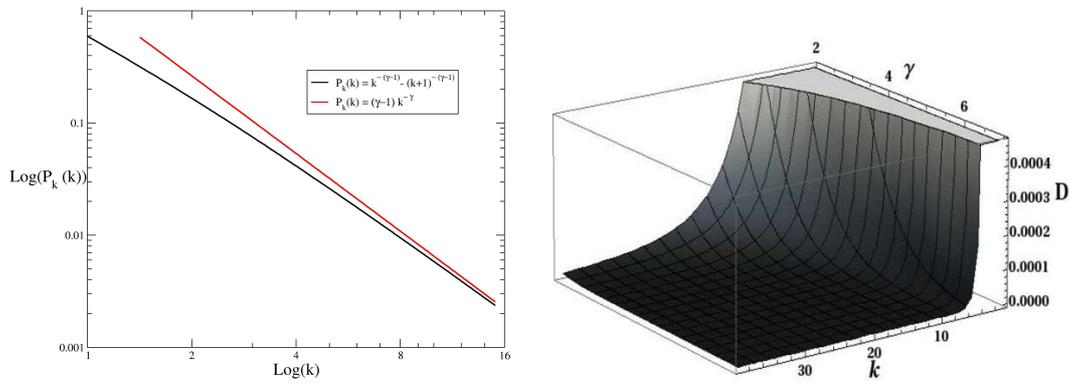


Figura 5.2. Izquierda: gráfica que muestra las distribuciones de conectividad $P_k(k) = k^{-(\gamma-1)} \cdot (k+1)^{-(\gamma-1)}$ y $P_k(k) \sim (\gamma-1)k^{-\gamma}$ como función de la conectividad k para $\gamma=2.3$. Derecha: Valor absoluto de la diferencia entre ambas conectividades como función del exponente γ y de la variable k . Obsérvese que, independientemente del exponente γ , la diferencia es muy pequeña.

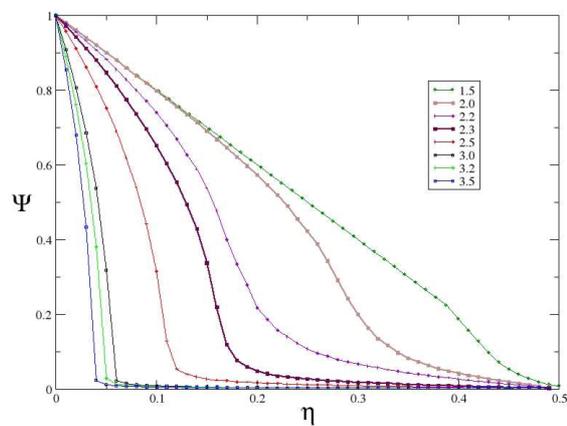


Figura 5.3. Transiciones de fase del parámetro de orden Ψ controlada por el ruido η del modelo de votantes. En la gráfica se muestran los resultados numéricos para diferentes exponentes γ de la distribución de outputs libre de escala. La red que se construyó consiste de $N = 10^5$ nodos y los estados estacionarios calculados se obtienen después de $T = 10^4$ pasos de tiempo.

exponentes suficientemente bajos (~ 2.0) la correspondiente distribución de inputs será una tipo Poisson de alta conectividad muy robusta al ruido y con primer momento idéntico al de la distribución de outputs (~ 10.0). En esta situación sería razonable suponer que la dinámica del sistema es similar a la de una red como las que vimos en el capítulo 2.1 que tiene transición de fase para algún nivel de ruido $\eta_c < 1/2$, sin embargo aparentemente no es así porque parecería mas bien que el nivel de ruido necesario para desordenar la red es $\eta_c = 1/2$, efecto que sin duda se debe a la presencia de las conexiones distintas del promedio, ya sean de corto, mediano o largo alcance.

Por el contrario, para exponentes altos el promedio de la distribución de inputs se va hacia cero lo que hace menos robusta la red, situación que ahora sí nos permite ver curvas que parecen indicar la existencia de transiciones de fase orden-desorden.

La situación que observamos es como la de una votación entre dos candidatos en la que intervienen líderes influyentes a todas las escalas. Estos líderes no toman ninguna decisión en particular, sino que como el resto de los individuos cambian su estado de acuerdo a la influencia de sus inputs y a la de su libre albedrío (ruido η). En estas condiciones, ¿cuales son las suposiciones aplicables que nos pueden ayudar a caracterizar la dinámica del sistema?. La pregunta está abierta. Existe una muy interesante posibilidad que no hemos explorado aún: ¿qué sucedería si todos los líderes se pusieran de acuerdo y adoptarían el mismo estado, ya sea $\sigma = -1$ o $\sigma = +1$?. Responderemos esta pregunta en la siguiente sección.

5.3 CUANDO LOS LÍDERES SE SINCRONIZAN.

La situación donde los elementos más influyentes de una sociedad sincronizan sus opiniones puede describirse razonablemente bien por nuestra red de votantes con outputs libres de escala sin hacer suposiciones demasiado particulares. Consideremos una población de varios miles de habitantes formada por personas que establecen sus amistades siguiendo una ley de potencias en los outputs tal que la mayoría de las personas serán poco influyentes (personas normales) mientras que existen unas pocas personas que son muy influyentes (líderes) y claro, todos los casos intermedios.

En esta situación podemos preguntarnos qué sucedería si en esta ciudad se realizara una votación entre dos candidatos y ocurriera que el grupo de líderes acordarán votar en bloque por uno de los dos candidatos. ¿cómo afectaría esto la elección?. Para tratar de averiguarlo usaremos nuestro modelo de votantes con topología libre de escala en outputs. Estableceremos una red formada por N votantes y diremos que un votante σ_i es influyentes solamente cuando el número de outputs que posee (k_{oi}) (número de personas de las que σ_i es influencia) está por encima de cierto valor al que llamaremos K_c , esto es $k_{oi} > K_c$. Al resto de la población los llamaremos normales y serán aquellos para los que cumplan $k_{oi} \leq K_c$.

La regla dinámica que definirá el estado de las personas normales es la regla de la mayoría en el modelo de votantes (pesos unitarios para toda las conexiones). Por otro lado, para definir el estado de los líderes simplemente les asignaremos de forma arbitraria a todos ellos el mismo estado ($+1$ o -1) y no permitiremos que cambien en ningún momento de la dinámica. Con estas reglas dejamos que el sistema evolucione hasta alcanzar un estado estacionario para cada nivel de ruido η y registramos la sincronización que alcanzan los elementos normales de la sociedad. Esta medida del consenso de los elementos que son normales la conseguiremos calculando el parámetro de orden de los normales, tomando en cuenta solamente a los elementos que cumplan

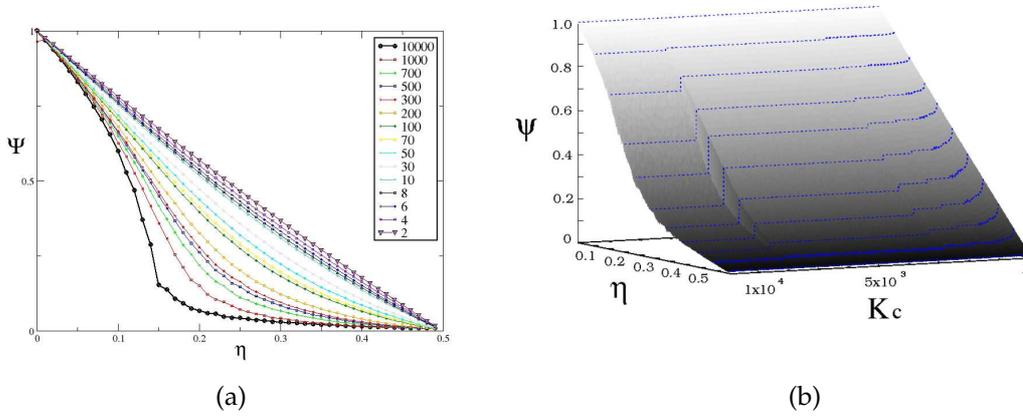


Figura 5.4. Transiciones de fase de la red de votantes con líderes necios. (a) Mostramos varias curvas que describen el parámetro de orden Ψ como función del ruido η para distintos valores de K_c , red con $N = 10^4$ elementos. (b) Gráfica tridimensional que muestra el parámetro Ψ como función de K_c y del ruido η . Obsérvese que conforme se incrementa la cantidad de líderes ($K_c \rightarrow 1$), los votantes ya no pueden alcanzar estados desordenados. La red se construyó con $N = 10^4$ nodos, los estados estacionarios calculados se obtienen después de $T = 10^4$ pasos de tiempo y el estado que se les asigna a los líderes es +1. El exponente libre de escala en ambos casos es de $\gamma = 2.3$.

la condición $k_{oi} \leq K_c$,

$$\Psi_n = \frac{1}{N - N_l} \sum_{i=1}^{N - N_l} \sigma_i.$$

Obtendremos entonces una curva que mostrará el grado de consenso que la población normal puede alcanzar cuando existen N_l líderes que ejercen el mismo tipo de influencia hacia el resto de la sociedad. Si realizamos este procedimiento para varios valores de K_c obtendremos toda la serie de resultados electorales que ocurren en la sociedad de los normales, desde el caso donde hay muy pocos líderes ($K_c \gg 1$) hasta el caso donde la mayoría de los votantes son considerados como líderes ($K_c \sim 1$). Para construir la red que usaremos en las simulaciones podemos elegir entre varios exponentes libres de escala, pero conviene elegir una estructura de red que bajo las reglas dinámicas que ya describimos permita que los votantes alcancen estados completamente sincronizados y también estados completamente desordenados. Observando la gráfica de la Fig. 5.3 podemos ver que para $\gamma = 2.3$ la red de votantes parece describir una transición de fase orden-desorden controlada por el nivel de ruido η . Por lo tanto podemos seleccionar ese exponente de la distribución para construir nuestra red. Ahora que hemos descrito el modelo de votantes con líderes que mantienen el mismo estado durante toda la dinámica (necios), mostraremos la gráfica de la Fig. 5.4 que resume nuestros resultados.

Obsérvese que conforme se incrementa la cantidad de líderes en la red $K_c \rightarrow 1$ la transición de fase desaparece, esto es, los votantes normales ya no pueden alcanzar los estados desordenados que corresponden a empates electorales. Por lo tanto la decisión electoral siempre beneficiará al

candidato de los líderes. Aunque este resultado es más o menos intuitivo, debemos hacer notar que en algunas de las curvas que no exhiben transición de fase, los individuos normales son la mayoría de la población, hecho que refleja la fuerte influencia de los individuos líderes.

5.4 CONCLUSIONES

Para finalizar este capítulo ofrecemos las siguientes conclusiones:

- Las redes con topología libre de escala en outputs son una herramienta muy versátil que pese a su complicado tratamiento analítico nos ofrece la oportunidad de plantear situaciones cercanas a sistemas reales. Por ejemplo una sociedad donde existen relativamente pocos individuos (líderes) que ejercen una gran influencia sobre el resto de las personas y todos los niveles de conectividad en outputs hasta llegar a los elementos que tienen unas pocas conexiones.
- Cuando todos los elementos de la red definen su estado o decisión de acuerdo a la regla de votantes, en las condiciones adecuadas la sociedad podrá alcanzar tanto estados de consenso (completo orden), como estados de completo desorden. Este grado de sincronización estará relacionado con el valor del exponente γ que define la topología de las relaciones sociales y con el nivel de independencia que cada elemento tiene respecto a sus influencias (η).
- En el caso particular donde los líderes de la sociedad se ponen de acuerdo para adoptar el mismo estado, el número de líderes determinará cuándo es posible que su influencia defina el grado de consenso que las personas normales pueden alcanzar.
- Aunque nuestro modelo es conceptualmente simple, nos permite analizar las condiciones bajo las que una población poco influyente puede sincronizar sus opiniones para contraponer la influencia de unos líderes muy influyentes. En una votación por ejemplo, si los comunicadores, empresarios, líderes religiosos o políticos se pusieran de acuerdo para beneficiar un candidato, nuestro modelo podría darnos alguna idea sobre que nivel de organización que el resto de la población podría alcanzar.

Parte IV

MODELO DE VOTANTES CON RUIDO COMBINADO.

RED DE VOTANTES CON DINÁMICA COMBINADA DE VICSEK Y GRÉGOIRE-CHATÉ.

6.1 INTRODUCCIÓN.

En el capítulo 1 presentamos las dos versiones del modelo de movimiento colectivo usando las reglas dinámicas de Vicsek *et al* y de Grégoire-Chaté. En estos casos vimos que la forma de introducir las perturbaciones estocásticas en las reglas dinámicas parecen determinar en gran medida la naturaleza de las transiciones de fase orden-desorden que el sistema presenta.

A partir de resultados que hemos obtenido modificando la regla dinámica del modelo de votantes, en este capítulo mostraremos que en el caso de los votantes las transiciones orden-desorden asociadas a redes con reglas dinámicas tipo Vicsek *et al* y Grégoire-Chaté son casos particulares de una transición orden-desorden bidimensional.

Comenzaremos por contextualizar nuestro trabajo, para ello describiremos brevemente los resultados de Aldana *et al* (Aldana *et al*, 2007) donde adaptan el modelo de votantes para que por separado sigan dinámicas tipo Vicsek *et al* y Grégoire-Chaté.

Cuando a los elementos de una red conectada aleatoriamente se les asigna una regla dinámica del tipo Grégoire-Chaté,

$$\theta_n(t+1) = \text{Angulo} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K v_{n_j}(t) + \eta e^{i\xi(t)} \right\}, \quad (6.1.1)$$

donde $\xi(t)$ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[-1, 1]$ y η es la amplitud de ruido, el sistema exhibe una transición de fase orden-desorden que es discontinua o de primer orden. Por el contrario, si a los votantes se les asigna una regla de la forma de Vicsek *et al*,

$$\theta_n(t+1) = \text{Angulo} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K v_{n_j}(t) \right\} + \eta \xi_n(t). \quad (6.1.2)$$

la transición orden-desorden parece ser continua o de segundo orden.

Aparentemente, la diferencia en las reglas dinámicas de las ecuaciones 6.1.1 y 6.1.2 da lugar a que el orden de las transiciones de fase asociadas a cada modelo sea distinto. Este comportamiento no es exclusivo del modelo de movimiento colectivo sino que también aparece en el modelo de votantes. Para determinar si efectivamente la forma de introducir el ruido cambia la naturaleza de la transición de fase, Aldana *et al* (Aldana *et al*, 2007) modifican la regla del modelo de votantes que vimos en el capítulo 2. Ellos determinan que en una red de votantes donde cada elemento tiene K conexiones elegidas al azar y que usan la regla dinámica tipo Vicsek *et al*,

$$\sigma_n(t+1) = \text{Signo} \left[\text{Signo} \left\{ \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t) \right\} + \frac{\xi_n(t)}{1-\eta} \right], \quad (6.1.3)$$

el sistema describe la transición de segundo orden o continua que mostramos en la gráfica a) de la Fig. 6.1. Por otro lado, si en la misma red usamos la regla tipo Grégoire-Chaté,

$$\sigma_n(t+1) = \text{Signo} \left[\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t) + 2\eta\xi(t) \right], \quad (6.1.4)$$

los elementos de la red reproducen ahora la transición de primer orden del parámetro de orden que mostramos también en la gráfica b) de la Fig. 6.1. Estos resultados indican que existen

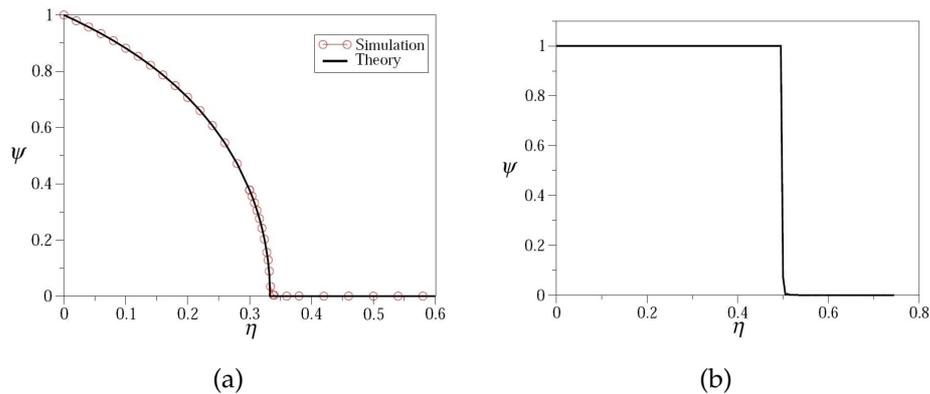


Figura 6.1. a) Transición de fase continua en el modelo de votantes cuando el ruido se añade al sistema de acuerdo a la Ec. 6.1.3. La línea sólida corresponde al resultado teórico y los círculos a la simulación computacional. b) Transición de fase discontinua del modelo de votantes en el caso cuando el ruido se adiciona según la regla de la Ec. 6.1.4.

diferencias esenciales entre la dinámica que se produce usando la regla de Vicsek *et al* (transición de segundo orden) y la contraparte que corresponde a la regla de Gregoiré-Chaté (transición de primer orden). Parece natural que los comportamientos sean distintos. Recordemos que en el contexto de un cardumen la regla de Vicsek *et al* se puede interpretar como la “voluntad” del pez para tomar una decisión diferente a lo que le indica la mayoría de sus vecinos, mientras que la regla de Grégoire-Chaté es mas bien un error en la visión del pez que le impide definir claramente el comportamiento de sus vecinos.

Resulta claro que en un modelo realista ambas formas de introducir ruido al sistema son pertinentes. Por lo tanto es muy razonable proponer un modelo de sincronización que tenga asociada una regla dinámica general que incluya tanto al ruido de Vicsek *et al* como al ruido de Grégoire-Chaté. Este modelo describiría una situación donde nuestro pez no sólo tiene defectos de visión sino que, además es capaz de tomar decisiones independientes a lo que indican sus vecinos. En la siguiente sección veremos el trabajo que realizamos para modelar esta situación.

6.2 DINÁMICA COMBINADA DE VICSEK *et al* Y GRÉGOIRE-CHATÉ.

En esta sección mostraremos evidencia analítica y numérica que indica que las transiciones orden-desorden obtenidas por Aldana *et al* (ver Fig. 6.1), son casos particulares de una transición

de fase bidimensional que se deriva de una regla dinámica más general. Hemos logrado obtener estos resultados asignando a cada uno de nuestros votantes una regla dinámica que combina ambos tipos de ruido.

Consideremos una red de N votantes donde cada elemento σ_n está conectado con otros K nodos de la red elegidos aleatoriamente, cada uno de los elementos de esta red define su estado en función de una señal de entrada $U_n(t)$ asociada a las influencias de sus inputs y que se define como:

$$U_n(t) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t) .$$

Con esta definición, introducimos el ruido dinámico parametrizado por η dentro de la relación que establece la evolución temporal del estado σ_n ,

$$\sigma_n(t+1) = \begin{cases} \text{Signo}[U_n(t)] & \text{Con probabilidad } 1 - \eta \\ - \text{Signo}[U_n(t)] & \text{Con probabilidad } \eta \end{cases} \quad (6.2.1)$$

donde $\text{Signo}[U_n(t)] = 1$ cuando $U_n(t) > 0$ y $\text{Signo}[U_n(t)] = -1$ cuando $U_n(t) < 0$. Si ocurriera que $U_n(t) = 0$ tenemos que $\text{Signo}[U_n(t)] = 0$ y el estado $\sigma_n(t+1)$ toma el valor $+1$ o -1 con la misma probabilidad. El valor del parámetro η es la magnitud del ruido y puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 1/2]$ y, como antes, representa la probabilidad de ir contra a lo que indica la mayoría. Este conjunto de reglas para representar la evolución temporal de los elementos de la red se puede escribir de forma simplificada como,

$$\sigma_n(t+1) = \text{Signo} \left[\text{Signo}[U_n(t)] + \frac{\xi_n(t)}{1 - \eta} \right] . \quad (6.2.2)$$

Ecuación que es completamente equivalente a la regla dinámica que mostramos en la Ec. 6.1.3. De la misma manera, la regla de Grégoire-Chaté también se puede reescribir en estos términos,

$$\sigma_n(t+1) = \text{Signo}[U_n(t) + 4\eta\xi_n(t)] . \quad (6.2.3)$$

Con estas formas alternativas de escribir las reglas dinámicas podemos proponer una nueva dinámica que incluya los efectos de los ruidos de Vicsek *et al* y Gregoiré-Chaté combinados. Esta nueva regla generaliza los modelos de sincronización y resulta en una dinámica más realista que incluye tanto efectos de ruido interno (voluntad) como de ruido externo (ambiente borroso). Definimos la regla dinámica que combina los dos tipos de ruido de la siguiente manera:

$$\sigma_n(t+1) = \text{Signo} \left[\text{Signo}[U_n(t) + 4\eta_1\xi_n(t)] + \frac{\zeta_n(t)}{1 - \eta_2} \right] , \quad (6.2.4)$$

donde ξ_n y ζ_n son distintas variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $[-1, 1]$. Nótese que en esta expresión están involucrados los parámetros independientes η_1 y η_2 que toman valores constantes en el intervalo $[0, 1/2]$. Estos parámetros se asocian a los ruidos de Grégoire-Chaté y de Vicsek *et al*, respectivamente. Cuando η_1 es cero, la Ec. 6.2.4 se reduce a la Ec. 6.2.2 y cuando η_2 se anula se convierte en una equivalente a la Ec. 6.2.3. Los casos intermedios se consiguen cuando tanto η_1 como η_2 son diferentes de cero.

En el apéndice C calculamos la solución analítica que describe el comportamiento del parámetro de orden como función de los parámetros η_1 y η_2 . En este calculo mostramos que existe una solución del parámetro de orden Ψ asociada a conectividad finita ($K < \infty$) y otra solución asociada a conectividad infinita ($K \rightarrow \infty$). Enseguida mostraremos los resultados principales de estas dos soluciones.

6.3 CONECTIVIDAD k FINITA.

En la sección C.1 del apéndice C mostramos que bajo ciertas suposiciones que implican la aplicabilidad de la teoría de campo medio y para conectividad finita ($K < \infty$), el parámetro de orden satisface el siguiente mapeo dinámico,

$$\Psi(t) = \mathcal{M}(\Psi(t)) , \quad (6.3.1)$$

donde,

$$\mathcal{M}(\Psi) = (1 - 2\eta_2) \sum_{m=1}^K \beta_m^K(\eta_1) \Psi^m . \quad (6.3.2)$$

En el caso donde todos los elementos tienen el mismo número de conexiones tal que $P_k(x) = \delta(x - K)$ y los pesos sinápticos son unitarios $P_\omega(w) = \delta(w - 1)$, los coeficientes β_m^K están definidos como,

$$\beta_m^K(\eta_1) = \binom{K}{m} \frac{(-i)^{m-1}}{4\pi K \eta_1} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\lambda)]^{K-m} [\sin(\lambda)]^m \frac{\text{sen}(4K\eta_1\lambda)}{\lambda^2} d\lambda . \quad (6.3.3)$$

Este resultado, que se consiguió bajo suposiciones que involucran la teoría de campo medio, es válido siempre y cuando los K inputs de cada elemento se elijan aleatoriamente dentro del universo de elementos que forman la red, esto es, mientras las conexiones entre los elementos formen una topología homogénea aleatoria. Para otras topologías que introducen correlaciones espaciales entre los elementos de la red como conexiones tipo mundo pequeño, o conexiones libres de escala en outputs, las suposiciones de campo medio no necesariamente se cumplen.

Usando la Ec. 6.3.2 podemos encontrar los puntos fijos estables del mapeo dinámico. Estos puntos corresponden a los valores estacionarios del parámetro de orden $\Psi = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)$. Sabemos que $\Psi = 0$ siempre es punto fijo de esta ecuación. Sin embargo, su estabilidad depende de los valores de η_1 y η_2 . Por otro lado, notando que el integrando de la Ec. 6.3.3 es asimétrico para valores pares de m podremos saber que el coeficiente $\beta_m^K(\eta_1)$ se anula en estas condiciones y por lo tanto las potencias del desarrollo de Ψ de la Ec. 6.3.2 serán todas impares. Este resultado implica que dado cualquier punto fijo Ψ el correspondiente $-\Psi$ también será punto fijo de la Ec. 6.3.1.

Para ilustrar la forma de las soluciones que hemos obtenido, presentaremos el caso particular donde $K = 3$. Los casos con conectividades distintas pero finitas tienen comportamientos análogos. Para $K = 3$ calculamos la forma del mapeo dinámico recién definido y obtenemos,

$$\mathcal{M}(\Psi) = (1 - 2\eta_2) (\beta_1^3(\eta_1) \Psi + \beta_3^3(\eta_1) \Psi^3) . \quad (6.3.4)$$

Los coeficientes de la Ec. 6.3.3 para $K = 3$ son,

$$\beta_1^3(\eta_1) = \frac{4 + 24\eta_1 - |1 - 12\eta_1| - 3|1 - 4\eta_1|}{32\eta_1}, \quad (6.3.5)$$

$$\beta_3^3(\eta_1) = \frac{8\eta_1 - |1 - 12\eta_1| + |1 - 4\eta_1|}{32\eta_1}. \quad (6.3.6)$$

Para determinar la estabilidad de los puntos fijos del mapeo podemos usar el criterio sobre la derivada $\mathcal{M}'(\Psi) \equiv \frac{d\mathcal{M}(\Psi)}{d\Psi}$. Si en el punto fijo ocurre que $|\mathcal{M}'(\Psi)| < 1$, entonces el punto fijo será estable. De cualquier otra manera será un punto fijo inestable.

Podemos ahora analizar los diferentes comportamientos que aparecen conforme cambian los valores de η_1 y η_2 .

6.3.1 Ruido de Vicsek et al nulo ($\eta_2 = 0$).

En esta sección mostraremos que cuando el parámetro η_2 se anula, la transición de fase que exhibe el sistema reproduce la que antes mostraron Aldana *et al* (Aldana *et al*, 2007), transición de primer orden, esto es, discontinua.

Cuando $\eta_2 = 0$ la ecuación de puntos fijos $\Psi = \mathcal{M}(\Psi)$ toma la forma,

$$\Psi = \beta_1^3(\eta_1)\Psi + \beta_3^3(\eta_1)\Psi^3. \quad (6.3.7)$$

Usando las ecuaciones Ec. 6.3.5 y Ec. 6.3.6, podemos mostrar que cuando se cumple $0 \leq \eta_1 < 1/4$ los valores $\Psi = 1$ y $\Psi = -1$ son soluciones de la ecuación de puntos fijos, además de la solución trivial $\Psi = 0$. Por su parte, la derivada del mapeo dinámico evaluada en el punto fijo $\Psi = 1$ tiene la forma $\mathcal{M}'(1) = \beta_1^3(\eta_1) + 3\beta_3^3(\eta_1)$, que escrita en términos de η_1 toma los siguientes valores,

$$\mathcal{M}'(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{12} \\ \frac{12\eta_1 - 1}{8\eta_1} & \text{si } \frac{1}{12} \leq \eta_1 \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4\eta_1} & \text{si } \frac{1}{4} \leq \eta_1 \end{cases}.$$

Por lo tanto, la condición $|\mathcal{M}'(1)| < 1$ que delimita la región donde $\Psi = \pm 1$ son soluciones estables¹ se cumple cuando $0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{4}$. Cuando $\eta_1 > \frac{1}{4}$ los puntos fijos $\Psi \pm 1$ desaparecen ya que en tal caso $\beta_3^3(\eta_1) = 0$ y el único punto fijo que permanece es $\Psi = 0$, punto fijo que es estable.

Por otra parte, cuando evaluamos la derivada en el punto fijo $\Psi = 0$, tenemos que $\mathcal{M}'(0) = \beta_1^3(\eta)$, equivalentemente,

$$\mathcal{M}'(0) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } 0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{12} \\ \frac{12\eta_1 - 1}{16\eta_1} & \text{si } \frac{1}{12} \leq \eta_1 \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4\eta_1} & \text{si } \frac{1}{4} \leq \eta_1 \end{cases},$$

de donde se sigue que $|\mathcal{M}'(0)| < 1$ cuando $\eta_1 > \frac{1}{4}$, mientras que $|\mathcal{M}'(0)| \geq 1$ cuando $0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{4}$.

Este análisis muestra que cuando $\eta_2 = 0$, la dinámica transita en forma discontinua desde el punto fijo estable $\Psi = \pm 1$ hacia el punto fijo $\Psi = 0$. El punto crítico de esta transición está definido por el

¹ El análisis para el punto fijo $\Psi = -1$ es totalmente equivalente.

valor $\eta_1^c = \frac{1}{4}$. En este caso la transición es verdaderamente sorprendente, ya que para $0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{4}$ el sistema está en su máximo grado de orden ($\Psi = +1$ o $\Psi = -1$), mientras que para $\eta_1 > \frac{1}{4}$ es sistema siempre está desordenado ($\Psi = 0$). El sistema transita del orden total al desorden total cuando η_1 pasa por el valor crítico $\eta_c = \frac{1}{4}$.

6.3.2 Dinámica sin ruido de Grégoire-Chaté ($\eta_1 = 0$).

Consideremos ahora el caso donde $\eta_1 = 0$, que corresponde a una dinámica donde solo hay ruido tipo Vicsek *et al.* En el límite $\eta_1 \rightarrow 0$ la Ec.6.3.5 y la Ec.6.3.6 conducen a $\beta_1^3(0) = 3/2$ y $\beta_3^3(0) = -1/2$. Sustituyendo estos resultados en la Ec. 6.3.4 obtenemos la ecuación de puntos fijos,

$$\Psi = \mathcal{M}(\Psi) = (1 - 2\eta_2) \left(\frac{3}{2}\Psi - \frac{1}{2}\Psi^3 \right). \quad (6.3.8)$$

Para analizar la estabilidad del punto fijo $\Psi = 0$ usamos la ecuación anterior y obtenemos

$$\mathcal{M}'(0) = (1 - 2\eta_2) \frac{3}{2}, \quad (6.3.9)$$

de donde se sigue que la condición $|\mathcal{M}'(0)| < 1$ se cumple en el intervalo $\eta_2 > \frac{1}{6}$, donde el estado desordenado caracterizado por el punto fijo $\Psi = 0$ es estable. Por debajo del punto crítico $\eta_2^c = \frac{1}{6}$, la fase desordenada se vuelve inestable y aparecen dos puntos fijos estables diferentes de cero. Suponiendo $\Psi \neq 0$ podemos resolver la ecuación de puntos fijos $\Psi = \mathcal{M}(\Psi)$ obteniendo,

$$\Psi = \pm \left(3 - \frac{2}{1 - 2\eta_2} \right)^{1/2}. \quad (6.3.10)$$

El análisis de la estabilidad de estos puntos fijos indica que son estables cuando $\eta_2 < \frac{1}{6} = \eta_2^c$ e inestables cuando $\eta_2 > \eta_2^c$. En resumen, los puntos fijos estables para el caso $\eta_1 = 0$ son,

$$\Psi = \begin{cases} \pm \left(3 - \frac{2}{1 - 2\eta_2} \right)^{1/2} & \text{si } 0 \leq \eta_2 \leq \eta_2^c \\ 0 & \text{si } \eta_2^c < \eta_2, \end{cases}$$

donde $\eta_2^c = 1/6$. Adicionalmente debemos mencionar que para valores de η_2 por debajo pero muy cercanos a η_2^c donde ocurre la transición de fase, el parámetro de orden se comporta como $\Psi \approx \pm (\eta_2^c - \eta_2)^{1/2}$, consecuentemente la transición pertenece a la clase de universalidad de campo medio.

6.3.3 Ruidos combinados de Vicsek y Grégoire-Chaté ($\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0$).

Cuando tanto el parámetro η_2 asociado al ruido de Vicsek *et al* como el ruido de Grégoire-Chaté η_1 son distintos de cero, la transición de fase que la red de votantes presenta es siempre continua y está acotada por las dos transiciones que mostramos en las secciones anteriores.

Para ilustrar este comportamiento, en la Fig.6.2(a) presentamos la gráfica del mapeo $\mathcal{M}(\Psi)$ (Ec. 6.3.4) en el caso $\eta_1 = 0,1$ y varios valores distintos de η_2 . Nótese que $\mathcal{M}(\Psi)$ es una función convexa y monótonamente creciente, por lo que los puntos fijos estables que corresponden a la intersección de las curvas con la recta identidad (línea segmentada) aparecen de forma continua conforme se incrementa el valor de η_2 . De la misma forma, en la Fig.6.2(b), mostramos el mismo

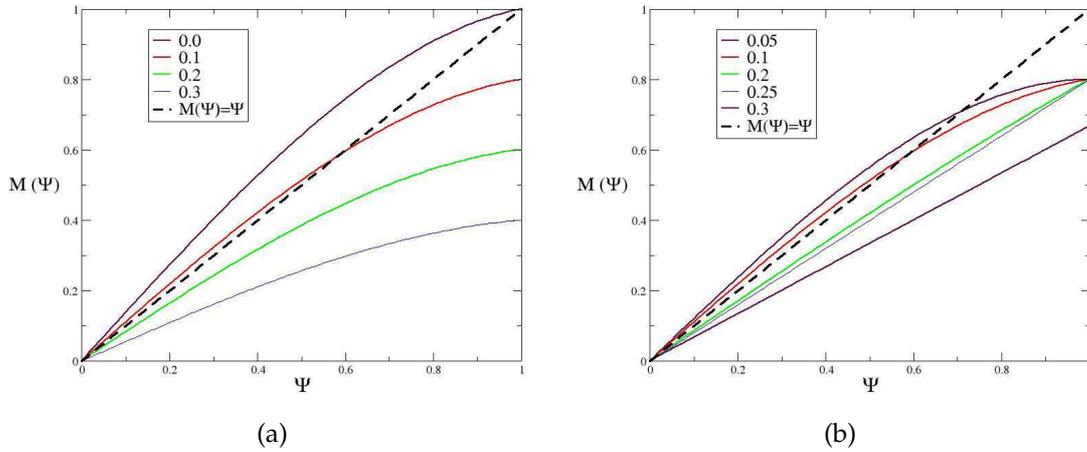


Figura 6.2. Gráfica del mapeo dinámico $\mathcal{M}(\Psi)$ definido en la Ec. 6.3.4 como función de Ψ para $K=3$. (a) $\eta_1 = 0.1$ y diferentes valores de η_2 . (b) $\eta_2 = 0.1$ y diferentes valores de η_1 . Nótese que en ambos casos, conforme decrece la intensidad del ruido, aparece un punto fijo estable de forma continua, comportamiento que siempre es el mismo para valores finitos de K . En ambas gráficas la línea segmentada es la recta identidad.

mapeo pero ahora con $\eta_2 = 0,1$ y diferentes valores de η_1 . En ambos casos aparecen puntos fijos estables de forma continua, un comportamiento típico de una transición de fase continua o de segundo orden.

Determinemos ahora los puntos fijos diferentes de cero. Para ello resolvamos la ecuación de puntos fijos $\mathcal{M}(\Psi) = \Psi$ usando la Ec. 6.3.4 bajo la suposición de que $\Psi \neq 0$. El resultado es el siguiente,

$$\Psi = \pm \left[\frac{1}{\beta_3^3}(\eta_1) \left(\frac{1}{1-2\eta_2} - \beta_1^3(\eta_1) \right) \right]^{1/2}. \quad (6.3.11)$$

Para que Ψ tenga soluciones reales diferentes de la trivial, debe cumplirse que el argumento de la raíz cuadrada sea mayor que cero. De la Ec.6.3.6 se sigue que $\beta_3^3(\eta_1) \leq 0$ para cualquier valor positivo de η_1 . Por lo tanto la Ec. 6.3.11 tiene soluciones reales solamente cuando,

$$\frac{1}{1-2\eta_2} \leq \beta_1^3(\eta_1). \quad (6.3.12)$$

Los valores de η_1 y η_2 para los que se cumple la igualdad de la ecuación anterior, determinan la curva crítica en el plano $\eta_1 - \eta_2$ que delimita la transición de fase.

En la Fig. 6.3 mostramos la forma funcional $\Psi(\eta_1, \eta_2)$ que muestra la dependencia del parámetro de orden en función de la magnitud de los ruidos del tipo Vicsek *et al* y Grégoire-Chaté. Los casos que mostramos corresponden a conectividad $K = 3$, $K = 9$, $K = 15$ y $K \rightarrow \infty$. Es interesante notar que todas las transiciones de fase que describen los votantes son continuas excepto el caso donde $\eta_2 = 0$. Por lo tanto, para cualquier red con conectividad finita K , basta una pequeña cantidad de ruido tipo Vicsek *et al* para hacer que la transición sea continua.

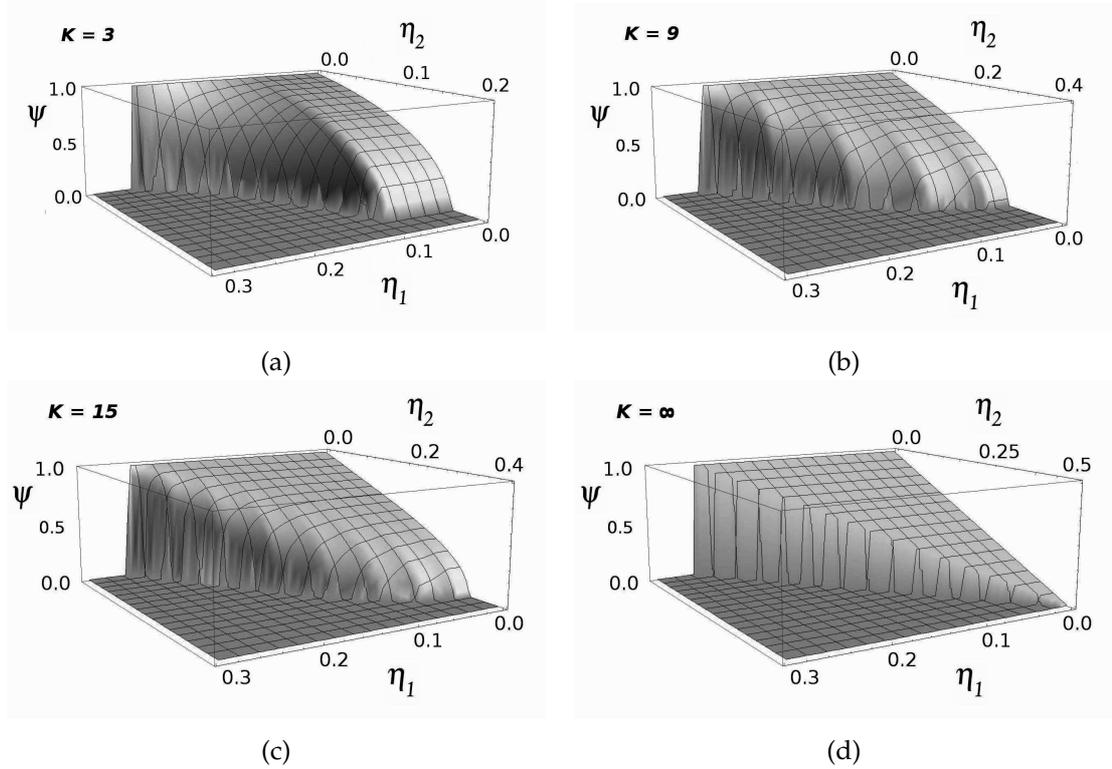


Figura 6.3. Transición de fase en el modelo de votantes. Mostramos el parámetro de orden Ψ como función del ruido tipo Grégoire-Chaté η_1 y del ruido tipo Vicsek η_2 para las redes con conectividad $K = 3, K = 9, K = 15, K \rightarrow \infty$. Nótese que para cualquier valor finito de K la transición de fase siempre es continua o de segundo orden, excepto cuando $\eta_2 = 0$. También vemos que cuando la conectividad diverge $K \rightarrow \infty$, la transición de fase siempre será discontinua.

6.4 CONECTIVIDAD k DIVERGENTE.

En el apéndice C mostramos que cuando $K \rightarrow \infty$ la evolución temporal del parámetro de orden está dada por $\Psi(t+1) = \mathcal{M}(\Psi(t))$, mapeo donde $\mathcal{M}(\Psi)$ tiene la forma,

$$\mathcal{M}(\Psi) = \begin{cases} -(1 - 2\eta_2) & \text{si } \Psi < -4\eta_1 \\ \frac{1 - 2\eta_2\Psi}{4\eta_1} & \text{si } |\Psi| \leq 4\eta_1 \\ 1 - 2\eta_2 & \text{si } \Psi > 4\eta_1 \end{cases} \quad (6.4.1)$$

Como lo hicimos en el caso de conectividad finita, en la Fig. 6.4 mostramos el comportamiento del mapeo dinámico $\mathcal{M}(\Psi)$ para $K \rightarrow \infty$. En la Fig. 6.4(a) usamos $\eta_1 = 0.1$ y varios valores de η_2 , mientras que en la Fig. 6.4(b) tenemos $\eta_2 = 0.1$ y varios valores de η_1 . Nótese que en este caso las transiciones de fase son discontinuas y que conforme η_2 disminuye por debajo del valor crítico $\eta_2^c = 0.3$, el punto fijo estable diferente de cero aparece de forma discontinua.

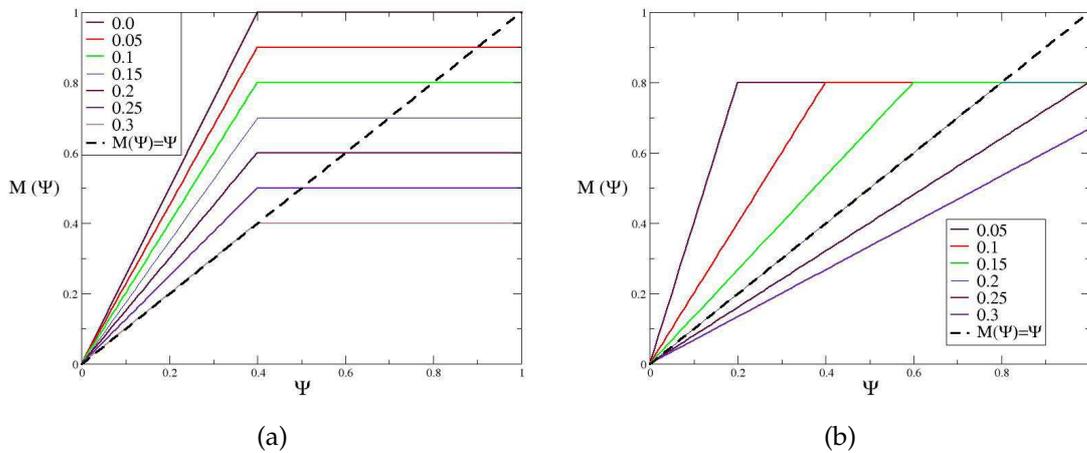


Figura 6.4. Gráfica del mapeo dinámico $\mathcal{M}(\Psi)$ definido en la Ec. 6.3.4 como función de Ψ para $K=3$. (a) $\eta_1 = 0.1$ y diferentes valores de η_2 . (b) $\eta_2 = 0.1$ y diferentes valores de η_1 . Nótese que en ambos casos, conforme decrece la intensidad del ruido, aparece un punto fijo estable de forma discontinua. En ambas gráficas la línea segmentada es la recta identidad.

Tenemos entonces que en el límite $K \rightarrow \infty$ la transición de fase siempre es discontinua, como lo muestra el último caso de la Fig. 6.3. Podemos afirmar entonces que la discontinuidad que observamos en la transición de fase asociada al ruido del tipo Grégoire-Chaté puede considerarse como un límite singular asociado a $K \rightarrow \infty$ o $\eta_2 = 0$ de una transición de fase que, por lo demás siempre es continua.

6.5 CONCLUSIONES.

Usando redes de votantes hemos mostrado que las transiciones de fase orden-desorden que se obtienen a partir de reglas dinámicas tipo Vicsek *et al* y tipo Grégoire-Chaté por separado, son dos casos límites de una transición de fase que se consigue usando una nueva regla dinámica que llamamos dinámica de ruidos combinados. Esta nueva dinámica exhibe transiciones de fase continuas excepto por dos casos particulares: cuando no existe ruido tipo Vicsek *et al* y cuando la conectividad diverge.

Podemos interpretar cualitativamente la transición de fase usando un ejemplo: imaginemos que un cardúmen viaja por aguas turbias y supongamos que en cada paso de tiempo cada pez puede tomar una de dos opciones: avanzar o detenerse. Para evitar choques los peces deben coordinar sus movimientos, pero por la falta de claridad en el agua cada pez comete cierto error cuando define el estado promedio de sus vecinos (ruido tipo Grégoire-Chaté) y además tiene la posibilidad de decidir no seguir a sus vecinos y tomar otra dirección (ruido tipo Vicsek *et al*). En este ejemplo la transición nos indica cuál es el orden que alcanzará el cardúmen dado un nivel de “libre albedrío” en los peces y un cierto grado de suciedad en el agua.

Entre los resultados que mostramos también vimos que cuando la conectividad diverge, la transición de fase es de primer orden para cualquier combinación de ruido. Nuestra experiencia con el modelo de votantes usando ruido tipo Vicsek *et al* nos indica que la robustez de la red al

ruido se incrementa con el número de conexiones, de tal forma que para conectividad divergente, la red sólo se desordena cuando la componente estocástica es la que predomina ($\eta_2 = 1/2$). Cuando agregamos ruido tipo Grégoire-Chaté a la regla dinámica, se produce un cambio que permite una transición abrupta entre orden y desorden en la red.

Una hipótesis del por qué ocurre esto, es la siguiente: si suponemos que el papel fundamental de las conexiones es la transmisión de información, cuando hay muchísimas conexiones significa que cada pez toma en cuenta lo que hacen todos los demás peces del cardumen para definir su estado, permitiendo que el acierto o error que un pez comete al tratar de sincronizarse, repercute en todo el cardumen, lo que resulta crítico si hay errores significativos en la visión del pez.

CONCLUSIONES GENERALES Y PERSPECTIVAS

Durante mucho tiempo y desde muy diversos puntos de vista se ha tratado de definir los mecanismos que les permiten a los sistemas de muchos cuerpos exhibir sincronización colectiva. Ejemplos de este tipo de sistemas abundan:

- La magnetización como una expresión del acoplamiento en las orientaciones de los espines de un material.
- La sincronización que muestran algunas especies de animales para desplazarse coordinadamente a lo largo de cientos de kilómetros.
- Cientos o miles de luciérnagas que se sincronizan para prender y apagar su luz al mismo tiempo.

Obviamente el grado de complejidad en cada uno de estos ejemplos es muy distinto. No obstante, la capacidad de organización colectiva que todos ellos exhiben podría depender sólo de algunos factores básicos, tales como la regla de la mayoría, la presencia de ruido, y la existencia de interacciones de corto y largo alcance. Esta perspectiva pierde de vista los detalles de cada sistema, los cuales pueden ser fundamentales para el tratamiento práctico de algún comportamiento específico. Sin embargo, permite describir los aspectos esenciales que intervienen en la sincronización.

En este trabajo hemos utilizado redes de votantes para estudiar la emergencia de orden colectivo en sistemas de muchas partículas. Este enfoque permite separar claramente la topología de la red de interacciones, por un lado, de la regla dinámica a través de la cual interactúan los elementos de la red, por otro lado. De nuestros resultados se puede concluir que:

- El número de interacciones entre los elementos de un grupo es un aspecto crítico que puede limitar la transmisión de información y dificultar o eficientar la sincronización.
- Los pesos sinápticos pueden afectar la sincronización del sistema. En particular sabemos que la presencia de suficientes pesos negativos puede destruir cualquier tipo de sincronización en el modelo de votantes.
- La presencia de interacciones aleatorias de mediano y largo alcance *permiten* y *facilitan* la transmisión de información que es indispensable para observar comportamientos colectivos ordenados.
 - *Permiten* porque hemos visto que redes unidimensionales con conexiones a primeros vecinos no alcanzan estados ordenados a ningún nivel de ruido.
 - *Facilitan* porque conforme se incrementa el número de conexiones de mediano y largo alcance entre los elementos de la red, los transitorios hacia los estados ordenados disminuyen dramáticamente.
- Cuando hay conexiones aleatorias, el sistema se hace más robusto al ruido, es decir, se necesitan mayores cantidades de ruido para destruir el orden.

- Los transitorios hacia estados ordenados dependen en gran medida de las condiciones iniciales de la red y son significativamente menores cuando ya existe un orden previo al comienzo de la dinámica.
- La topología de interacciones entre las partículas de un grupo es uno de los aspectos más importantes a considerar en la construcción de modelos de sincronización.
- La forma de introducir la componente estocástica en las reglas dinámicas del modelo de votantes juega un papel determinante para definir las posibles formas de sincronización que este modelo presenta. Hemos visto que el ruido tipo Vicsek *et al* dirige la dinámica de la red para que se presente una transición de fase continua o de segundo orden, a diferencia del ruido tipo Grégoire-Chaté que genera una transición de primer orden.
- Establecimos un modelo de votantes donde combinamos ambos tipos de ruido y demostramos que tanto la transición tipo Vicsek *et al* como la de Grégoire-Chaté son casos límites de una nueva transición orden-desorden asociada a esta nueva regla dinámica que proponemos. Si asociamos el ruido Vicsek a la “voluntad” o “libre albedrío” de los votantes, y el ruido tipo Grégoire-Chaté a perturbaciones del entorno, el análisis de nuestros resultados nos indica que la acumulación de ruido externo lleva a que los votantes sufran cambios mucho más drásticos en sus estado colectivos, cambios que se traducen en una transición de primer orden en la sincronización entre los elementos de la red. Sin embargo, excepto por el caso de conectividad infinita, resulta que incluso una cantidad pequeña de “libre albedrío” suaviza la transición de fase convirtiéndola en continua.

Los resultados que hemos presentado en este trabajo se obtuvieron con el modelo de votantes, el cual es tal vez el modelo más simple que genera orden colectivo en sistemas complejos. Sin embargo, tenemos evidencia de que modelos más sofisticados, como el modelo de Vicsek *et al*, o el modelo vectorial introducido por Aldana y Huepe (Aldana-Huepe, 2003), exhiben comportamientos cualitativamente similares a los que ya describimos. La ventaja del modelo de votantes es que puede tratarse analíticamente al menos en la aproximación de campo medio, por lo que es posible conocer el papel que juega cada parte del modelo (ruido, conectividad, pesos sinápticos, etc.) en la generación de orden colectivo. Sin embargo, es claro que no todos los resultados obtenidos con el modelo vectorial podrán extrapolarse a modelos más sofisticados.

Entre los temas a desarrollarse a partir de nuestros resultados se encuentran los siguientes:

- Elaborar un tratamiento analítico para resolver el modelo de votantes con conectividades libres de escala en outputs. Esto requiere una manera para tomar en cuenta las correlaciones inducidas por los líderes de opinión.
- A semejanza de lo que presentamos con el modelo de votantes en redes bidimensionales de mundo pequeño, sería interesante analizar cómo dependen los transitorios de modelos más sofisticados, como el modelo de Vicsek *et al* o el modelo de red vectorial de Aldana y Huepe, con el número de conexiones de largo alcance y para diferentes topologías de red.
- En muchos sistemas de movimiento colectivo, existe un acoplamiento entre el orden global del sistema y la densidad local (número de interacciones por partícula). Esto es claro en el modelo de Vicsek *et al*, donde dicho acoplamiento genera cúmulos de partículas. El modelo de red que hemos estudiado no considera este aspecto. Por lo tanto, es importante tomar en cuenta este acoplamiento entre orden y densidad para determinar cómo afecta la transición de fase.

Parte V

APÉNDICES

INTRODUCCIÓN A LAS REDES COMPLEJAS.

A.1 TOPOLOGÍA DE REDES COMPLEJAS

Existen muchos sistemas reales donde las interacciones entre las partículas que la constituyen pueden ser descritas en términos de redes complejas. Los ejemplos son muchísimos porque las redes se presentan en toda clase de contextos relacionados con muy diferentes disciplinas, como física, biología, sociología, neurología, economía, medicina, etc.

Las múltiples interacciones que se dan en lugar en estos sistemas dan lugar a lo que se conoce como propiedades emergentes que son comportamientos radicalmente diferentes a la suma de los comportamientos individuales .

Para tratar de definir el termino *propiedad emergente* podemos usar la definición propuesta por Jeffrey Goldstein (Goldstein, 1999): el concepto de emergencia se refiere a “La aparición de estructuras, patrones, propiedades nuevas y coherentes durante el proceso de auto-organización en sistemas complejos”.

Las características comunes entre los sistemas que presentan propiedades emergentes son:

1. Están compuestos de muchas partes que interactúan entre sí. De hecho, el adjetivo “Complejo” en este contexto no significa solamente que el sistema sea complicado, sino también que está compuesto de muchas partes, como un complejo industrial.
2. Cada parte tiene su propia estructura interna y está encargada de llevar a cabo una función específica.
3. Lo que ocurra a una parte del sistema afecta de manera altamente no lineal a todo el sistema.
4. Presentan comportamientos emergentes, de tal manera que el todo no es la simple suma de sus partes.

Una de las herramientas que actualmente son más utilizadas para el estudio de las propiedades emergentes son las redes complejas, sistemas de muchos elementos llamados nodos que interactúan entre si bajo reglas bien definidas y que pueden presentar propiedades emergentes. La definición matemática de una red es la siguiente,

DEFINICIÓN: Una red R consiste de un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$, y un conjunto de parejas ordenadas $\varepsilon = \{(v_i, v_j)\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Cada pareja ordenada (v_j, v_i) se llama conexión dirigida del nodo v_i al nodo v_j . La red R se llama no dirigida si para cada pareja $(v_i, v_j) \in \varepsilon$ también existe la pareja $(v_j, v_i) \in \varepsilon$. De lo contrario, la red se denomina dirigida. Llamaremos a todos los nodos que están conectados directamente a un nodo v_i , *los vecinos de v_i* . Finalmente, el número k_i de vecinos del nodo v_i (es decir el número de conexiones de v_i) se llama *la conectividad de v_i* , y el promedio de estas conectividades, $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i$ es *la conectividad de la red*.

Podemos complementar esta definición con la siguientes propiedades de la topología de una red:

1. La distribución de conexiones $P_k(k)$ es la probabilidad de que un nodo seleccionado al azar tenga k conexiones de entrada.

2. El coeficiente de agregación C es la probabilidad de que dos nodos que están conectados a un tercero, están conectados entre sí.
3. La longitud mínima L_{ij} entre dos nodos v_i y v_j es el número mínimo de nodos por los que hay que pasar para llegar del nodo v_i al v_j , pasando claro, a través de las conexiones entre nodos.
4. La longitud promedio de la red L es el promedio de las longitudes mínimas L_{ij} entre todas las posibles parejas de nodos (v_i, v_j) de la red.
5. Existen grupos de nodos muy conectados entre sí a los que llamaremos islas. La distribución de tamaño de las islas $P(s)$ es la probabilidad de que la isla está compuesta por s nodos.
6. El tamaño de la isla más grande se denota por s_∞ .

Si a la red le agregamos una regla dinámica que define el estado de cada elemento en función de la estructura o conectividad de la red y de los estados de los demás elementos, la podemos llamar una red compleja, como se esquematiza en la siguiente figura:



o dicho más detalladamente, una red compleja posee las siguientes características (Aldana, 2006),

- Está constituida por muchos elementos, usualmente iguales, que interaccionan entre si siguiendo una distribución de conectividad $P_k(k)$.
- Cada elemento posee una regla con la que define su estado en función de muchos factores, entre ellos, los estados de los elementos que interaccionan con el.
- El comportamiento colectivo *emerge* como resultado de todas y cada una de las interacciones por pares que se presentan en el grupo.

Se han estudiado muchas topologías o estructuras de redes complejas, entre ellas históricamente se destacan tres,

Topología de Poisson	$P_k(k) = \frac{z^k}{k!} e^{-z}$
Topología Exponencial	$P_k(k) = C e^{-\alpha k}$
Topología Libre de Escala	$P_k(k) = C k^{-\gamma}$

En estas distribuciones los parámetros z , α y γ definen las propiedades estadísticas de la función $P_k(k)$.

En la década de los 50's, Paul Erdős y Alfred Rényi realizaron el primer análisis matemático de redes con topología de Poisson, reportando la primera transición de fase en redes. Por este motivo

es que este tipo de redes se conocen también como redes con topología Erdős-Rényi. Sin embargo, fue hasta 1998 que comenzó el estudio sistemático de propiedades de las redes complejas, en el que contribuyeron Réka Albert y Albert-Laszló Barabási (Albert, Barabási, 2002.), Mark Newman (Newman, M.J., 2003.) y Ricard Solé (Solé R.V, 2001), entre otros.

En estos trabajos se analizaron las propiedades de redes con varias topologías, encontrando que la topología exponencial aparece ocasionalmente en sistemas reales, pero a diferencia de ésta, las redes libres de escala aparecen en muchísimos casos. Numéricamente se han podido obtener los valores de los exponentes en muchos sistemas, como lo muestra el cuadro siguiente,

CLASE DE RED.	NODOS / CONEXIONES	EXPONENTE γ_i
<i>www.nd.edu</i> .	325,729 / 1,469,680	2.1
www encontrados por Altavista.	$2,711 \times 10^9$ / $2,130 \times 10^9$	2.1
Dominios www.	2.60×10^5 /	1.9
Inter-dominio de la red.	4,389 / 8,256	2.2
Sistemas autónomos en internet.	6,347 / 13,641	2.2
Nivel de ruteador en internet.	150,000 / 200,000	2.3
Citas en ISI.	783,339 / 6,716,198	3.0
Citas de <i>Phys. Rev. D</i> .	24,296 / 351,872	2.3
Colab. de actores de Hollywood.	212,250 / 61,085,555	2.3
Colab. en <i>Medline</i> .	1,388,989 / 1.028×10^7	2.5
Colab. en las rev. de matemáticas.	70,975 / 1.32×10^5	2.1
Colab. en las rev. de neurociencias.	209,293 / 1.21×10^6	2.4
Interacc. Metabólicas <i>e-coli</i> .	778 / ~ 1500 - 3000	2.2
Interacc. Proteicas en Levadura.	1870 / 2,240	2.5
Co-ocurrencia de palabras.	470,000 / 17,000,000	2.7
Palabras Sinónimos.	22,311 /	2.8
Circuitos Digitales.	2×10^4 / 4.0×10^4	3.0
Llamadas telefónicas.	47×10^6 / 8.0×10^7	2.1
Interacc. Sexuales en humanos.	2,810 /	3.4
Interacc. Tróficas.	154 / 405	1.0

Estos resultados sorprendieron a mucha gente, porque en la naturaleza existen muchos procesos aleatorios que generan distribuciones de Poisson o distribuciones exponenciales, pero se conocen muy pocos procesos que generan distribuciones libres de escala¹. De hecho, el trabajo de Erdős y Rényi demostró que las redes que se construyen añadiendo nuevos nodos y conexiones al azar presentan topologías de Poisson o exponenciales. Y ésta es precisamente la paradoja, que la red

¹ A las distribuciones libres de escala también se les llama distribuciones de potencia.

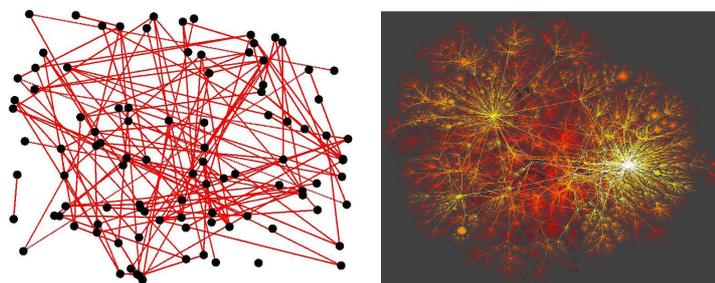


Figura A.1. La figura de la izquierda muestra una red aleatoria con topología de Poisson. La red de la derecha es la red Internet al nivel de ruteadores, la cual es una red con topología libre de escala.

internet, la red de colaboraciones científicas y la red de contactos sexuales, por ejemplo, son redes que se formaron aleatoriamente añadiendo nuevos nodos y nuevas conexiones a lo largo del tiempo. Entonces, ¿cómo es posible que estas redes que se formaron al azar no presenten topologías de Poisson o topologías exponenciales como lo habían predicho Erdős y Rényi?

Las redes con topología de Poisson son muy diferentes estructuralmente a las redes con topología libre de escala. La Fig. A.1 muestra una red de Poisson (izquierda) y una red libre de escala (derecha). Como puede observarse, la red de Poisson se ve más aleatoria y más homogénea que la red libre de escala². En las redes de Poisson todos los nodos tienen más o menos el mismo número de conexiones. Algunos nodos estarán más conectados que otros, pero en promedio todos tienen la misma conectividad, es decir, las conexiones en una red de Poisson están distribuidas homogéneamente entre sus nodos. Por el contrario, la característica más importante de las redes libres de escala es su alta heterogeneidad, ya que existen nodos con muy pocas conexiones, nodos medianamente conectados y nodos extremadamente conectados. Los nodos altamente conectados se denominan los *núcleos* o *centros* de la red. Con una red libre de escala uno no puede decir que todos los nodos tienen “más o menos” la misma conectividad. Por el contrario, hay nodos con una sola conexión y también hay nodos con miles de conexiones.

Todavía no sabemos cuáles son los procesos que conducen a la formación de redes libres de escala. Sin embargo, en los últimos 8 años se han llevado a cabo avances sustanciales en la comprensión de estas redes. En las secciones que siguen veremos algunos de los formalismos matemáticos de crecimiento de redes que se han desarrollado para generar las tres topologías mencionadas con anterioridad (Poisson, exponencial y libre de escala).

A.2 REDES DE TIPO ERDŐS-RÉNYI

Imaginemos un conjunto de N botones de pantalón distribuidos aleatoriamente sobre una mesa e inicialmente desconectados. Al tiempo $t = 0$ escogemos aleatoriamente una pareja de botones y los hilvanamos con un hilo. Después de haber enlazado a esta pareja, la dejamos sobre la mesa y escogemos aleatoriamente otra pareja para hilvanar. Podemos escoger botones que están conectados con otros botones, pero si la pareja que escogemos ya está conectada entre sí, la descartamos y escogemos otra pareja. Lo que no se vale es hilvanar más de una vez a la misma pareja de botones. Repetimos este proceso sucesivamente M veces, escogiendo aleatoriamente

² Las redes con topología exponencial se parecen mucho a las de Poisson.

una pareja de botones cada vez. Al final del proceso habremos establecido M enlaces entre M parejas diferentes de botones, generando así una red de botones. Intuitivamente es claro que si M (el número total de enlaces) es pequeño comparado con N (el número total de botones), entonces la red resultante estará desmembrada en varias islas pequeñas. Dentro de cada isla los botones estarán hilvanados entre sí, pero estarán desconectados de las otras islas. Sin embargo, si M es muy grande comparado con N , terminaremos con casi todos los botones hilvanados unos con otros. Probablemente haya islas muy pequeñas desconectadas de la red principal, pero seguramente la gran mayoría de botones formarán parte de una isla principal: la isla gigante.

Después de haber hilvanado M parejas en un conjunto total de N botones, ¿cuál es la distribución de conexiones $P(k)$ en la red resultante? Como veremos en un momento, la red que resulta de este proceso tiene una distribución $P(k)$ de Poisson. Pero antes de dar la prueba de este resultado, vale la pena mencionar que durante muchos años se pensó que este mecanismo de formación de redes en el cual parejas de nodos se enlazan aleatoriamente, era adecuado para describir el origen de ciertas redes sociales como las redes de amistades o las redes de contactos sexuales. Después de todo, las amistades o los contactos sexuales se dan por el encuentro casual y aleatorio de las personas que viven en una sociedad. Por lo tanto, era natural pensar que el mecanismo de "hilvanar parejas de botones escogidas al azar" reproducía lo que realmente ocurre en las redes sociales. Sí, era "natural" pensarlo, pero también era incorrecto. Calculemos ahora la probabilidad $P(k)$ para nuestra red de botones hilvanados. Para comenzar notemos que el número *total* N_p de parejas que se pueden formar en un conjunto de N botones es

$$N_p = \frac{1}{2}N(N-1)$$

Como enlazamos M parejas de botones, la probabilidad p_e de que una pareja arbitraria seleccionada al azar esté enlazada es

$$p_e = \frac{M}{N_p} = \frac{2M}{N(N-1)} \quad (\text{A.2.1})$$

Ahora enfoquemos nuestra atención sobre un nodo particular v_j de la red, escogido al azar. El número total de parejas que podrían contener a v_j es $N-1$, ya que v_j se podría haber hilvanado con los $N-1$ nodos restantes de la red. Sin embargo, en los M enlaces que se llevaron a cabo, no necesariamente escogimos al nodo v_j todas las veces posibles que se podría haber escogido. Supongamos entonces que de las M parejas que se escogieron, el nodo v_j estaba solamente en k de ellas. La probabilidad de que v_j esté contenido en k parejas de las $N-1$ posibles es

$$P(k) = \binom{N-1}{k} (p_e)^k (1-p_e)^{N-1} \quad (\text{A.2.2})$$

Esta es una distribución binomial para N y M finitas. Pero si consideramos ahora que la red es muy grande y tomamos el límite $N \rightarrow \infty$ y $M \rightarrow \infty$ de tal forma que la cantidad

$$z = \frac{2M}{N}$$

permanezca finita, entonces la distribución (A.2.2) se transforma en

$$P(k) = e^{-z} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{A.2.3})$$

lo cual es la distribución de Poisson con promedio z .

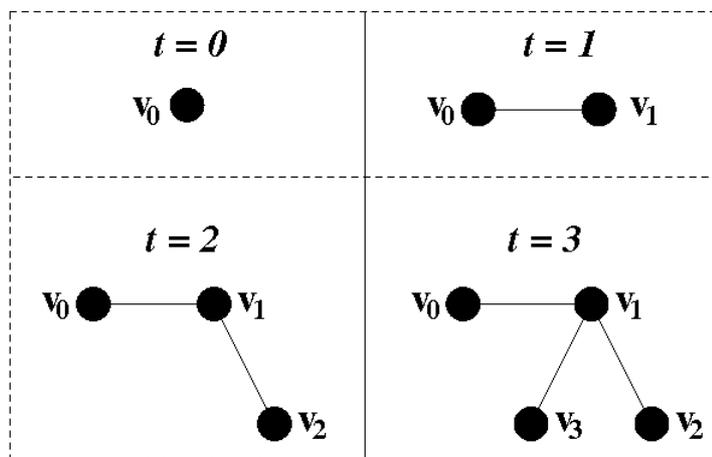


Figura A.2. Crecimiento de redes. Al tiempo $t = 0$ hay un sólo nodo v_0 . En cada paso de tiempo subsecuente añadimos un nuevo nodo que se conectará a alguno de los nodos ya existentes con una probabilidad $\Pi(k, t)$ que depende de la conectividad k al tiempo t del nodo con el que se pretende establecer la conexión.

A.3 CRECIMIENTO DE REDES

En la sección anterior suponíamos que teníamos una población fija de N nodos y un número fijo M conexiones añadidas aleatoriamente. Sin embargo, en la realidad esto no ocurre, las redes no están fijas. Por el contrario, las redes complejas evolucionan y crecen en el tiempo a través de la adición simultánea tanto de conexiones como de nodos. Pensemos por ejemplo que la red internet, las redes metabólicas y las redes genéticas dentro de la célula, y muchas otras redes en la naturaleza, han crecido y evolucionado a lo largo del tiempo. Por lo tanto, es importante que nuestros modelos de formación de redes incorporen el hecho de que nuevos nodos y nuevas conexiones se pueden añadir a la red. También debe tomarse en cuenta el que nodos y conexiones ya existentes pueden eliminarse.

En el modelo más simple de crecimiento de redes añadimos un nuevo nodo en cada paso de tiempo. Este nuevo nodo puede conectarse con alguno de los nodos ya existentes. Cada uno de los nodos ya existentes pueden ser seleccionados para la conexión con una probabilidad $\Pi(k_i, t)$, siendo k_i la conectividad al tiempo t del i -ésimo nodo ya existente. El proceso comienza con un único nodo inicial v_0 al tiempo $t = 0$ (ver la Fig. A.2). Al tiempo $t = 1$ añadimos un nuevo nodo v_1 , que se conectará al único nodo ya existente v_0 con probabilidad 1. Después, al tiempo $t = 2$ añadimos el nodo v_2 que se conectará con cualquiera de los nodos ya existentes v_1 y v_2 con la misma probabilidad $1/2$. En este momento los nodos v_0 , v_1 y v_2 ya no tienen todos la misma conectividad: alguno de ellos tendrá dos conexiones mientras que los otros dos nodos tendrán sólo una conexión. Al tiempo $t = 3$ añadimos al nodo v_3 , que se conectará con alguno de los nodos ya existentes v_0 , v_1 o v_2 con una probabilidad que es función de sus conectividades k_0 , k_1 y k_2 . Continuando con este proceso, al tiempo $t + 1$ añadimos al nodo v_{t+1} que se conectará a cualquiera de los nodos ya existentes v_0, v_1, \dots, v_t , el cual será seleccionado con una probabilidad

$\Pi(k_i, t)$, siendo k_i la conectividad al tiempo t del nodo seleccionado.

Denotemos por $P(k, t)$ a la probabilidad de que al tiempo t un nodo arbitrario de la red tenga k conexiones. Es claro que esta probabilidad depende del tiempo. Sin embargo, si continuamos añadiendo nodos por un tiempo suficientemente largo esperamos que la función $P(k, t)$ alcance un estado estacionario independiente del tiempo. Esto no significa que la red alcance un estado estacionario. La red sigue creciendo mientras continuemos añadiendo nodos. Es únicamente la distribución de conectividades $P(k, t)$ la que llega a un estado estacionario en el cual $P(k, t + 1) = P(k, t) = P(k)$.

Existen varios métodos para calcular la distribución de conectividades $P(k, t)$. En estas notas veremos el método de la *ecuación maestra*, pero existen por lo menos otros dos métodos distintos: el *método continuo*, inventado por Barabási, y el *método cinético*, introducido por Krapivsky, Redner, y Leyvraz (Krapivsky *et al*, 2000). Los tres métodos dan resultados equivalentes.

Denotemos por $P(n, k, t)$ la probabilidad de que el nodo v_n tenga k conexiones al tiempo t . Notemos que esta probabilidad está asociada al nodo específico v_n . Sin embargo, podemos obtener la probabilidad $P(k, t)$ de que un nodo *arbitrario* tenga k conexiones al tiempo t a través de la siguiente ecuación:

$$P(k, t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{n=0}^t P(n, k, t), \tag{A.3.1}$$

donde $N(t)$ es el número total de nodos de la red al tiempo t . La ecuación que determina la evolución temporal de $P(n, k, t)$ se obtiene notando que en cada paso de tiempo hay dos contribuciones a dicha probabilidad:

1. Al tiempo t el nodo v_n tenía $k - 1$ conexiones y fue seleccionado (con probabilidad $\Pi(k - 1, t)$) para conectarse con el nuevo nodo añadido a la red. Por lo tanto, al tiempo $t + 1$ el nodo v_n tendrá k conexiones.
2. El nodo v_n ya tenía k conexiones al tiempo t y *no fue* seleccionado para conectarse con el nuevo nodo añadido (lo cual ocurre con probabilidad $1 - \Pi(k, t)$). Por lo tanto, al tiempo $t + 1$ el nodo v_n seguirá teniendo k conexiones.

Tomando en cuenta estas dos contribuciones, la ecuación maestra que determina la evolución temporal de $P(n, k, t)$ es

$$P(n, k, t + 1) = \underbrace{P(n, k - 1, t)}_{\substack{k-1 \text{ conexiones} \\ \text{al tiempo } t}} \overbrace{\Pi(k - 1, t)}^{v_n \text{ fue seleccionado}} + \underbrace{P(n, k, t)}_{\substack{k \text{ conexiones} \\ \text{al tiempo } t}} \overbrace{[1 - \Pi(k, t)]}^{v_n \text{ no fue seleccionado}}. \tag{A.3.2}$$

Como el nodo v_n "nació" al tiempo $t = n$ con una sola conexión, la condición inicial para resolver la ecuación anterior es

$$P(n, k, t)|_{t=n} = \delta_{k,1}. \tag{A.3.3}$$

Sumando sobre n en la Eq. (A.3.2) desde $n = 0$ hasta $n = t$ y tomando en consideración la Eq. (A.3.1), obtenemos

$$\sum_{n=0}^t P(n, k, t+1) = N(t) \{ P(k-1, t) \Pi(k-1, t) + P(k, t) [1 - \Pi(k, t)] \} \quad (\text{A.3.4})$$

Ahora bien, como en cada paso de tiempo añadimos un nuevo nodo (comenzando con el nodo v_0 al tiempo $t = 0$), entonces $N(t) = t + 1$. Por lo tanto, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^t P(n, k, t+1) = (t+1) \{ P(k-1, t) \Pi(k-1, t) + P(k, t) [1 - \Pi(k, t)] \} \quad (\text{A.3.5})$$

En el lado izquierdo de la ecuación anterior podemos completar la suma hasta $t+1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^t P(n, k, t+1) &= \sum_{n=0}^{t+1} P(n, k, t+1) - P(t+1, k, t+1) \\ &= \sum_{n=0}^{t+1} P(n, k, t+1) - \delta_{k,1} \\ &= N(t+1) P(k, t+1) - \delta_{k,1} \\ &= (t+2) P(k, t+1) - \delta_{k,1} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $P(t+1, k, t+1) = \delta_{k,1}$, tal y como lo establece la Eq. (A.3.3). También utilizamos la Eq. (A.3.1) (evaluada en $t+1$) y el hecho de que $N(t+1) = t+2$. Sustituyendo estos resultados en la Eq. (A.3.5) obtenemos

$$(t+2) P(k, t+1) - \delta_{k,1} = (t+1) \{ P(k-1, t) \Pi(k-1, t) + P(k, t) [1 - \Pi(k, t)] \} \quad (\text{A.3.6})$$

Notemos que para poder resolver la Eq. (A.3.6) necesitamos conocer explícitamente la función $\Pi(k, t)$, que es la probabilidad de que un nodo ya existente con conectividad k sea seleccionado para conectarse con el nuevo nodo que se añade al tiempo t . Como veremos en las siguientes secciones, diferentes formas de la probabilidad $\Pi(k, t)$ conducen a topologías diferentes.

A.4 TOPOLOGÍA EXPONENCIAL

En el caso en que cualquiera de los nodos ya existente pueda escogerse con la misma probabilidad para conectarse con el nuevo nodo añadido, la probabilidad $\Pi(k, t)$ es independiente de k y queda dada por

$$\Pi(k, t) = \frac{1}{N(t)} = \frac{1}{t+1}$$

donde $N(t) = t+1$ es el número total de nodos al tiempo t . Sustituyendo esta forma de $\Pi(k)$ en la Eq. (A.3.6) obtenemos

$$(t+2) P(k, t+1) - \delta_{k,q} = P(k-1, t) + t P(k, t)$$

Después de un tiempo muy largo, la función $P(k, t)$ alcanza un estado estacionario en el que $P(k, t + 1) = P(k, t) = P(k)$. En dicho estado estacionario la última ecuación se transforma en

$$P(k) = \frac{1}{2}(P(k-1) + \delta_{k,1}). \quad (\text{A.4.1})$$

Como todos los nodos de la red tienen por lo menos una conexión, es claro que $P(0) = 0$. Con esta condición inicial, la ecuación de recurrencia anterior tiene la solución

$$P(k) = 2^{-k} \quad (\text{A.4.2})$$

que no es más que la distribución exponencial. Es importante señalar que esta distribución aparece en el contexto del crecimiento de redes como el resultado de lo que se llama *enlace igualitario*, es decir, en una situación en la cual cada nodo nuevo que se añade a la red se puede enlazar a cualquiera de los nodos ya existentes con la misma probabilidad. En este sentido el nuevo enlace que se forma es igualitario, porque no discrimina entre los nodos ya existentes.

A.5 TOPOLOGÍA LIBRE DE ESCALA

En las redes de sistemas reales las conexiones entre diferentes nodos no se dan de manera igualitaria, sino que existen elementos que tienen mayor probabilidad de captar las nuevas conexiones asociadas a los nuevos nodos que aparecen en la red. Por esta razón, Barabási y Albert (Barabási-Albert, 1999) inventaron el concepto de *enlace preferencial* en el cual los nuevos nodos que se añaden a la red se conectarán preferentemente con los nodos ya existentes que tengan el mayor número de conexiones. Intuitivamente podemos pensar que el enlace preferencial consiste en que uno siempre trata de estar conectado con los nodos más "populares", es decir, con los nodos de mayor conectividad. Para incorporar este comportamiento, Barabási sugirió que la probabilidad de enlace $\Pi(k, t)$ debe tomar la forma

$$\Pi(k, t) = \left(\sum_{n=0}^{N(t)} k_n \right)^{-1} k \quad (\text{A.5.1})$$

donde k_n es la conectividad del n -ésimo nodo ya existente al tiempo t . El factor $\left(\sum_{n=0}^{N(t)} k_n \right)^{-1}$ es simplemente para garantizar que la probabilidad $\Pi(k, t)$ esté normalizada. Al hacer que $\Pi(k, t)$ sea proporcional a k , como lo propusieron Barabási-Albert, tenemos enlace preferencial, ya que de esta forma, entre más grande sea la conectividad k de un nodo, mayor será la probabilidad de conectarse con él. Como en cada paso de tiempo añadimos un nuevo nodo con una conexión, comenzando con cero conexiones al tiempo $t = 0$, entonces para cualquier tiempo $t > 0$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{N(t)} k_n = 2t,$$

y por lo tanto

$$\Pi(k, t) = \frac{k}{2t} \quad (\text{A.5.2})$$

Substituyendo este resultado en la Eq. (A.3.6) obtenemos

$$(t+2)P(k, t+1) - \delta_{k,q} = \frac{t+1}{2t} \{ (k-1)P(k-1, t) + [2t-k]P(k, t) \}$$

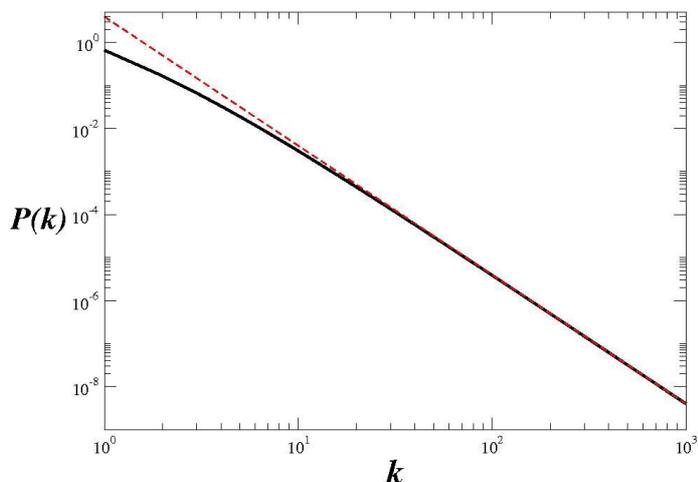


Figura A.3. Gráfica log-log de la distribución de conectividades $P(k)$ dada en la ecuación (A.5.4). La línea punteada roja es la gráfica de la ley de potencias “perfecta” $f(k) = 4k^{-3}$. Nótese que $P(k) \approx 4k^{-3}$ para valores grandes de k .

En el límite $t \rightarrow \infty$ el sistema alcanza el estado estacionario. Por lo tanto, la distribución de conexiones estacionaria $P(k)$ se obtiene de la ecuación anterior tomando el límite $t \rightarrow \infty$, lo que conduce a

$$P(k) + \frac{1}{2} [kP(k) - (k-1)P(k-1)] = \delta_{k,1} \quad (\text{A.5.3})$$

Como todos los nodos tienen por lo menos una conexión, para resolver la ecuación (A.5.3) utilizamos la condición inicial $P(0) = 0$, lo cual nos da la solución

$$P(k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \quad (\text{A.5.4})$$

Aun cuando esta no es una ley de potencias “perfecta”(ver la Fig. A.3), para valores grandes de k la distribución $P(k)$ se comporta como $P(k) \sim k^{-3}$. Por un lado, este es un resultado muy interesante: el enlace preferencial genera distribuciones de conectividades con colas libres de escala. Son estas colas largas las responsables de que existan elementos altamente conectados. Por otro lado, este resultado también es desalentador ya que el proceso de enlace preferencial *siempre* da el exponente $\gamma = 3$, el cual no se encuentra frecuentemente en la naturaleza. En otras palabras, aun cuando el método de enlace preferencial nos da *una* ley de potencias, es incapaz de reproducir la gran variedad de exponentes encontrados en la naturaleza. Por esta razón, se han propuesto diferentes formas de la función $\Pi(k, t)$ que corresponden a diferentes tipos de enlace preferencial. Por ejemplo, Krapivsky, Redner, y Leyvraz (Krapivsky *et al*, 2000) propusieron una función de enlace $\Pi(k, t)$ *no lineal*, de la siguiente forma

$$\Pi(k, t) = \left(\sum_{n=0}^{N(t)} k_n^\alpha \right)^{-1} k^\alpha \quad (\text{A.5.5})$$

donde α es un exponente arbitrario. Desafortunadamente, sólo para $\alpha = 1$ se tiene que la distribución $P(k)$ tiene una cola libre de escala. El trabajo de Krapivsky, Redner, y Leyvraz mostró que la naturaleza libre de escala de la red queda destruida cuando el enlace preferencial obedece una regla no lineal como la dada en la Eq. (A.5.5) cuando $\alpha \neq 1$. Es importante mencionar que todavía no tenemos modelos de crecimiento de redes que generen todos los exponentes listados en el cuadro de la sección A.1.

A.6 NODOS QUE SE HACEN VIEJOS.

Otro problema con el modelo de enlace preferencial propuesto por Barabási es que predice que los nodos más viejos, es decir lo que se añadieron primero a la red, son los que eventualmente adquirirán el mayor número de conexiones. En otras palabras, en una red libre de escala podríamos identificar fácilmente a los nodos más viejos: son aquellos altamente conectados. Y entre más viejo sea un nodo, mayor será su conectividad. Para ver que esto efectivamente es un resultado del modelo de enlace preferencial, consideremos un nodo particular v_n de la red. Su conectividad k_n va a cambiar a una tasa que es proporcional a la probabilidad $\Pi(k_n, t)$ de que este nodo adquiera más conexiones. Es decir,

$$\frac{dk_n}{dt} = \Pi(k_n, t)$$

Para el caso particular en el que $\Pi(k, t)$ está dada como en la Eq. (A.5.2), tenemos

$$\frac{dk_n}{dt} = \frac{k_n}{2t}$$

Como el nodo v_n nació al tiempo $t = n$ con una conexión, la condición inicial para la ecuación anterior es $k_n(n) = 1$, lo cual conduce a la solución

$$k_n(t) = \left(\frac{t}{n}\right)^{1/2} \quad (\text{A.6.1})$$

De la ecuación anterior, es claro que a cualquier tiempo t se cumple la siguiente desigualdad

$$k_1(t) > k_2(t) > k_3(t) > \dots > k_n(t) \quad (\text{A.6.2})$$

lo cual significa que los nodos que nacieron primero tendrán, en promedio, conectividades mayores que los nodos que llegaron después. Sin embargo, este comportamiento predicho por el modelo del enlace preferencial, en el que los nodos más viejos son los más conectados, no siempre se observa en la naturaleza, porque existen ejemplos donde no existe correlación entre la conectividad de los nodos y su edad. Probablemente el contra ejemplo más contundente que contradice los resultados de las Eqs. (A.6.1) y (A.6.2) es Google, el robot buscador de la red WWW. Recordemos que Altavista y Yahoo ya existían y estaban bien establecidos en 1998, año en que apareció Google. Rápidamente Google tomó la delantera, convirtiéndose en el robot buscador más popular en el mundo informático. ¿A qué se debió este éxito repentino de Google?. Probablemente a que estaba mejor diseñado, era más rápido y más eficiente que sus competidores Altavista y Yahoo. En otras palabras, Google nació con características que lo hacían un robot "mejor adaptado" que sus competidores.

Esta observación hizo que Barabási propusiera el concepto de *adaptabilidad* en el contexto de las redes complejas (Barabási-Albert, 1999). Así, cada uno de los nodos v_n , además de tener una conectividad k_n , también tenía un parámetro de adaptabilidad asociado w_n . Este parámetro es una medida de qué tan bien estaba adaptado el nodo v_n a su entorno: entre más grande es el valor de w_n , mayor es el grado de adaptabilidad de v_n . Específicamente, lo que Barabási hizo fue proponer una función de enlace preferencial $\Pi(k, w, t)$ que, además de ser proporcional a la conectividad k de los nodos ya existentes, también es proporcional a su adaptabilidad w . De esta forma, la probabilidad de que un nuevo nodo añadido a la red se conecte con el nodo v_n ya existente, cuya conectividad es k_n y cuya adaptabilidad es w_n , queda dada por

$$\Pi(k_n, w_n, t) = C w_n k_n$$

donde C es una constante de normalización. Las adaptabilidades w_n asociadas a los nodos de la red son variables aleatorias que se escogen de una distribución $A(w)$. Cada nodo nace con su propia adaptabilidad, la cual no cambia en el tiempo. Un resultado sorprendente del modelo de enlace preferencial con adaptabilidad es que puede ser mapeado exactamente a un gas de Bose-Einstein. En este mapeo cada nodo de la red representa un nivel energético del gas, mientras que las conectividades de los nodos representan los números de ocupación de los respectivos niveles de energía. El mapeo entre el modelo de red y el gas de Bose-Einstein es más que una simple metáfora. Es un mapeo matemático preciso y, bajo ciertas condiciones, la red en crecimiento puede presentar "condensación de Bose-Einstein", lo cual significa que repentinamente un nodo puede adquirir la mayoría de las conexiones de la red, independientemente de su edad (como sucedió con Google).

A.7 LA ISLA GIGANTE

Regresemos al modelo de los botones descrito en la sección A.2. Inicialmente todos los botones están sobre la mesa desconectados, pero conforme vamos hilvanando parejas de botones, se comienzan a formar islas de botones conectados. Al principio las islas son pequeñas, pero al ir añadiendo más y más conexiones entre los botones, las islas crecen y se conectan entre sí. Eventualmente se formará una isla gigante, es decir, una isla que es mucho más grande que todas las demás. El tamaño de la isla gigante es importante en el estudio de la propagación de epidemias en una sociedad, en donde en lugar de tener botones hilvanados, tenemos personas que se contagian unas a otras. Las islas consisten en los grupos de personas que están infectadas, y la enfermedad se convierte en una epidemia cuando se forma una isla gigante que abarca a la mayoría de la sociedad.

La pregunta importante es: dado un conjunto de elementos, ¿cuántos enlaces (contagios) tienen que establecerse para que se forme la isla gigante? Esta pregunta fue contestada por Erdős y Rényi, quienes fueron los primeros en mostrar la existencia de una transición de fase en la teoría de redes. Dicha transición de fase consiste precisamente en la formación de la isla gigante. Aunque su trabajo original lo llevaron a cabo para redes con topología de Poisson, es fácil generalizar el análisis que hicieron para extenderlo a redes con topologías arbitrarias.

Para calcular el tamaño de la isla gigante utilizaremos un razonamiento de consistencia. Sea q la probabilidad de que un nodo v_n escogido aleatoriamente *no pertenezca* a la isla gigante. Supongamos que v_n tiene k vecinos. Claramente, v_n no pertenece a la isla gigante si y sólo si ninguno de sus k vecinos tampoco pertenece a la isla gigante. Por lo tanto, la probabilidad q debe satisfacer la ecuación de consistencia

$$q = \sum_k P(k)q^k \quad (\text{A.7.1})$$

El lado izquierdo de esta ecuación es simplemente la probabilidad q de que v_n no pertenezca a la isla gigante. El lado derecho es la probabilidad $P(k)$ de que v_n tenga k vecinos, multiplicada por la probabilidad q^k de que ninguno de estos k vecinos pertenezca a la isla gigante. La suma sobre k toma en cuenta todos los posibles vecinos que v_n pudiera llegar a tener.

En el caso en que $P(k)$ es una distribución de Poisson, la Eq. (A.7.1) se transforma en

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-z} \frac{(zq)^k}{k!} = e^{z(q-1)}$$

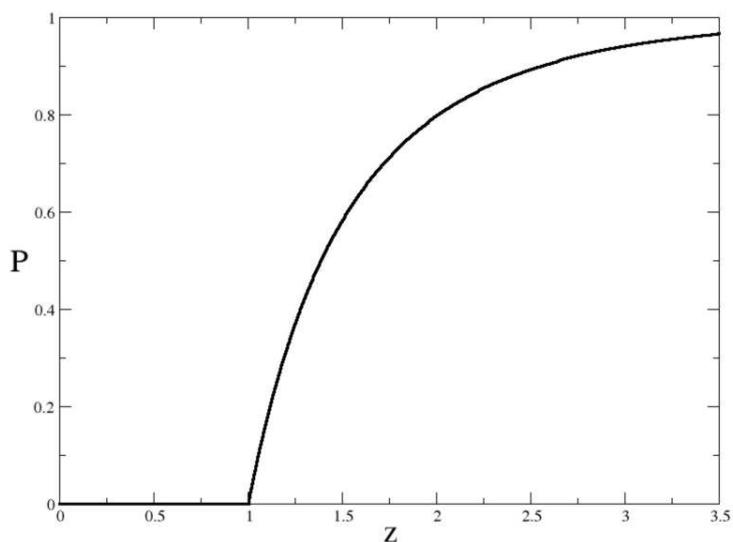


Figura A.4. Probabilidad p de pertenecer a la isla gigante como función de la conectividad promedio z de la red, para el caso de la topología de Poisson.

Denotando como $p = 1 - q$ la probabilidad de que un nodo arbitrario *si* pertenezca a la isla gigante, obtenemos

$$p = 1 - e^{-zp} \quad (\text{A.7.2})$$

La ecuación anterior es trascendental y no puede resolverse de forma analítica. Sin embargo, es fácil resolverla de forma numérica y encontrar p para cada valor de z . La Fig. A.4 muestra p como función de z . Notemos que para $z < 1$ la probabilidad de pertenecer a la isla gigante es cero. En otras palabras, no hay isla gigante para $z < 1$. Conforme aumentamos el valor de z (lo cual es equivalente a añadir más conexiones a la red), la isla gigante comienza a formarse y justo en $z = 1$ aparece. Este es un resultado interesante: se necesita, en promedio, sólo una conexión por nodo para que aparezca la isla gigante. Si seguimos aumentando el valor de z , el tamaño de la isla gigante aumenta más y más, como se puede observar en la Fig. A.4, la cual muestra el comportamiento característico de una transición de fase de segundo orden que ocurre en $z = 1$.

Consideremos ahora el caso de las redes con topología libre de escala, para las que la distribución $P(k)$ toma la forma

$$P(k) = \frac{1}{\zeta(\gamma)} k^{-\gamma}$$

donde $\zeta(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma}$ es la función zeta de Riemann la cual, en este caso simplemente juega el papel de la constante de normalización. Para esta distribución la ecuación de consistencia

Eq. (A.7.1) se convierte en

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\zeta(\gamma)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k^\gamma} \\ &= \frac{1}{\zeta(\gamma)} \text{Li}_\gamma(q) \end{aligned}$$

donde $\text{Li}_\gamma(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} q^k$ es la función poli-logarítmica de orden γ . En términos de la probabilidad $p = 1 - q$, la ecuación anterior queda como

$$p = 1 - \frac{1}{\zeta(\gamma)} \text{Li}_\gamma(1 - p)$$

Como $\text{Li}_\gamma(0) = 0$, es claro $p = 1$ siempre es solución de la ecuación anterior. Por lo tanto, en una red libre de escala *la componente gigante siempre existe y la probabilidad de pertenecer a ella es $p = 1$* . Este interesante resultado es una consecuencia de la existencia de los elementos altamente conectados en redes libres de escala. Dichos elementos mantienen a toda la red conectada, impidiendo que se fracture en pequeñas islas. En este sentido resulta particularmente interesante el trabajo de Pastor-Satorras y Vespignani (Pastor-Satorras y Vespignani, 2001.), donde estudian la propagación de virus en la internet. Ellos definen un modelo dinámico para analizar la propagación de infecciones en redes y muestran que *en redes libres de escala no existe un umbral de nodos infectados por debajo del cual la infección pueda detenerse*. Este resultado es muy importante si consideramos que en gran medida las redes sociales tienen este tipo de topología.

Por ejemplo, en la propagación de epidemias en una sociedad, en la que podemos considerar que la isla gigante es el conjunto de personas que se han contagiado de alguna enfermedad. Los resultados presentados en esta sección muestran que en redes con topología de Poisson siempre podemos vacunar a un número suficiente de personas para garantizar que la conectividad promedio z de la red de individuos infectados se mantenga inferior a 1. En tal caso podemos detener la epidemia, ya que no habrá isla gigante, sólo pequeñas islas de personas infectadas. Sin embargo, las redes sociales no tienen topología de Poisson, sino que exhiben topologías libres de escala. Para tales topologías siempre existe una isla gigante, y la probabilidad de pertenecer a ella es $p = 1$. Por lo tanto, en redes libres de escala las enfermedades tarde o temprano se propagan a todas las personas que no hayan sido vacunadas. Es decir, la única forma de detener la propagación de una epidemia en redes libres de escala es vacunando a *todas* las personas de la sociedad.

En la bibliografía sugerida podemos encontrar revisiones completas con muchísima más información sobre las propiedades derivadas de topologías de redes.

REDES CON CONECTIVIDAD LIBRE DE ESCALA EN INPUTS.

B.1 INPUTS CON CONECTIVIDAD LIBRE DE ESCALA.

Cuando los momentos de una distribución $P_K(k)$ son finitos la transición de fase asociada pertenece a la clase de universalidad de campo medio caracterizada por un exponente $1/2$. Cuando no sucede así debe analizarse el comportamiento asintótico del parámetro de orden cerca del punto crítico ($\Psi \rightarrow 0$) para determinar la forma funcional de la transición si existe. De la forma funcional del parámetro de orden de la Ec. 2.1.6 podemos ver que no es analítica en el punto $\Psi = 0$, para analizar la forma asintótica es necesario eliminar la singularidad y en este sentido, consideremos que asintóticamente $P(k) \sim k^{-\gamma}$ con $\gamma \in (3/2, 5/2)$. Esta situación implica que el coeficiente b_1 de la ecuación 2.1.16 definido como,

$$b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) a(k, 1),$$

converge, pero b_m diverge para $m > 1$. Sustituyendo el desarrollo de $I_k(\Psi)$ en la Ec. 2.1.6 obtenemos a primer orden,

$$\Psi = 2(1 - 2\eta) \left[b_1 \Psi + \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \int_0^{\Psi} \int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 I_k(\varphi', k)}{\partial^2 \varphi'} d\varphi' d\varphi \right] \quad (\text{B.1.1})$$

donde se uso $I_k(0) = 1/2$ y $\frac{\partial I_k(0)}{\partial \Psi} = a(k, 1)$. En el intervalo $\gamma \in (3/2, 5/2)$ la parte no-analítica de la ecuación anterior proviene del segundo término cuando k es grande. En esta situación es conveniente usar la aproximación de límite central que vimos en la sección 5.1, de donde podemos escribir,

$$I_k(\Psi) \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \text{Erf} \left(\frac{\Psi \langle w \rangle k^{1/2}}{\sqrt{2 \langle w^2 \rangle}} \right) \right].$$

Sustituyendo la última expresión en la Ec. B.1.1 tenemos,

$$\begin{aligned} \Psi \approx & 2(1 - 2\eta) \left[b_1 \Psi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\langle w \rangle^2}{\langle w^2 \rangle} \right)^{3/2} \right. \\ & \times \left. \int_0^{\Psi} \int_0^{\varphi} Z \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(k) k^{3/2} e^{-\frac{k \langle w \rangle^2 Z^2}{2 \langle w^2 \rangle}} \right) dZ d\varphi \right]; \end{aligned}$$

sustituyendo $P(k) = Ck^{-\gamma}$ y reemplazando la suma por una integral sobre k se obtiene,

$$\Psi \approx 2(1 - 2\eta) \left[b_1 \Psi - \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\langle w \rangle^2}{2 \langle w^2 \rangle} \right)^{\gamma-1} \frac{\Gamma(5/2 - \gamma)}{(2\gamma - 3)(2\gamma - 2)} \Psi |\Psi|^{2\gamma-3} \right]$$

que es una aproximación para Ψ pequeño en el intervalo $3/2 < \gamma < 5/2$. Para $\gamma > 5/2$ una corrección logarítmica aparece y la ecuación anterior se sustituye por,

$$\Psi \approx 2(1 - 2\eta) \left[b_1 \Psi - \frac{2C}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\langle w \rangle^2}{2\langle w^2 \rangle} \right)^{3/2} \Psi^3 |\ln \Psi| \right],$$

cuando $\gamma > 5/2$, el coeficiente b_3 converge y el comportamiento del parámetro de orden alrededor del punto fijo está descrito por la ecuación análoga de campo medio. Por otro lado, para valores bajos de γ en el intervalo $1 < \gamma \leq 3/2$, el coeficiente b_1 diverge, consecuentemente no existe transición de fase y el sistema permanece ordenado para toda $\eta < 1/2$. Sin embargo, el parámetro de orden se comporta como $\Psi \sim (1/2 - \eta)^{1/(3-2\gamma)}$ cuando $\eta \rightarrow 1/2$.

Por lo tanto, el intervalo importante es $3/2 < \gamma < 5/2$ donde son válidas las aproximaciones recién obtenidas que indican la forma en que el parámetro de orden describe una transición de fase para valores de ruido menores que $1/2$. En estas aproximaciones el valor del ruido crítico estará dado por,

$$\eta_c = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2b_1} \right),$$

Por lo tanto, en el intervalo $3/2 < \eta < 5/2$ el parámetro de orden se comporta asintóticamente a η_c como,

$$|\Psi| \sim \left[\frac{\sqrt{4\pi}(2\eta - 3)(2\gamma - 2)b_1^2}{C\Gamma(5/2 - \gamma)} \left(\frac{2\langle w^2 \rangle}{\langle w \rangle^2} \right)^{\gamma-1} (\eta_c - \eta) \right]^{\frac{1}{2\gamma-3}} \quad (\text{B.1.2})$$

el exponente de la transición es $\beta = (2\gamma - 3)^{-1}$, variable que puede tomar cualquier valor en el intervalo $(\infty, 1/2)$ dependiendo del valor que tome γ desde $3/2^+$ hasta $5/2^-$. Asintóticamente a $5/2$ la forma funcional de la transición cambia y se comporta como,

$$\Psi^2 |\ln \Psi| \sim \frac{6\sqrt{\pi}b_1^2}{C} \left(\frac{2\langle w^2 \rangle}{\langle w \rangle^2} \right)^{3/2} (\eta_c - \eta).$$

que es el resultado que mostramos en el texto principal.

DINÁMICA DE VOTANTES CON RUIDOS COMBINADOS.

C.1 SOLUCIÓN ANALÍTICA.

Para mostrar la solución analítica que obtuvimos combinando los ruidos de Vicsek *et al* y Grégoire-Chaté, comenzaremos por definir las siguientes variables:

$$\chi_n(t) = 4K\eta_1 \xi_n(t), \quad (\text{C.1.1})$$

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^K \sigma_{n_j}(t), \quad (\text{C.1.2})$$

$$s_n(t) = u_n(t) + \chi_n(t). \quad (\text{C.1.3})$$

$$(\text{C.1.4})$$

Con estas definiciones, la Ec. 6.2.4 puede reescribirse en la forma completamente equivalente,

$$\sigma_n(t+1) = \begin{cases} + \text{Signo}[s_n(t)] & \text{Con probabilidad } 1 - \eta_2 \\ - \text{Signo}[s_n(t)] & \text{Con probabilidad } \eta_2 \end{cases}. \quad (\text{C.1.5})$$

Definamos ahora la variables $\phi_n(t)$ como la probabilidad de que $\sigma_n(t) = 1$ y sea $I_k^n(t)$ la probabilidad de que $s_n(t) > 0$. A partir de la Ec. C.1.5 podemos relacionar estas cantidades en la siguiente ecuación:

$$\phi_n(t) = (1 - \eta_2) I_k^n(t) + (1 - I_k^n(t)) \eta_2. \quad (\text{C.1.6})$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación se relaciona con el caso en el cual $s_n(t) < 0$ y la función Signo se elige. El segundo término toma en cuenta el caso donde $s_n(t) > 0$ y se elige $-\text{Signo}$. Ambos casos resultan en un valor positivo de $\sigma_n(t+1)$.

En el desarrollo del cálculo que aquí mostramos hacemos algunas suposiciones que implican que es aplicable la teoría de campo medio:

- Las probabilidades $\phi_n(t)$ y $I_k^n(t)$ son las mismas para todos los elementos de la red. Esto es, todos los elementos de la red son estadísticamente equivalentes y por lo tanto podemos eliminar el subíndice n en todas las expresiones que escribamos de ahora en adelante.
- Todos los elementos σ_n de la red son estadísticamente independientes, por lo tanto, la suma $u_n(t)$ definida en la Ec. C.1.2 puede considerarse como la suma de K variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas.

Nótese que el parámetro de orden $\Psi(t) = \langle \sigma_n(t) \rangle$ puede escribirse en términos de la probabilidad $\phi(t)$ como,

$$\Psi(t+1) = 2(1 - 2\eta_2) I_k(t) + 2\eta_2 - 1. \quad (\text{C.1.7})$$

de donde obtenemos,

$$\phi(t) = \frac{1 + \Psi(t)}{2} \quad (\text{C.1.8})$$

expresión que podemos usar para reescribir la Ec. C.1.9 en términos del parámetro de orden Ψ ,

$$\Psi(t+1) = 2(1 - 2\eta_2) I_k(t) + 2\eta_2 - 1. \quad (\text{C.1.9})$$

El siguiente paso para construir una ecuación maestra del parámetro de orden es expresar la probabilidad $I_k(t)$ como una función de $\phi(t)$, o equivalentemente, como una función de $\Psi(t)$. Para ello, consideremos las siguientes variables y sus correspondientes densidades de probabilidad,

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &\rightarrow P_\sigma(x, t), & u_n(t) &\rightarrow P_u(x, t), \\ s_n(t) &\rightarrow P_s(x, t), & \chi_n(t) &\rightarrow P_\chi(x). \end{aligned}$$

De acuerdo a la Ec. C.1.3 las densidades de probabilidad cumplen la relación de convolución,

$$P_s(x, t) = P_u(x, t) * P_\chi(x, t). \quad (\text{C.1.10})$$

Si recordamos que $u_n(t)$ es la suma de K variables aleatorias independientes, podemos expresar la densidad de probabilidad $P_u(x, t)$ como la convolución de la densidad de probabilidad P_σ K veces, tal que reescribimos,

$$P_s(x, t) = \overbrace{P_\sigma(x, t) * \dots * P_\sigma(x, t)}^{K \text{ Veces.}} * P_\chi(x, t). \quad (\text{C.1.11})$$

Para resolver esta ecuación es conveniente expresarla en el espacio de Fourier donde la convolución entre las densidades de probabilidad se transforma en un producto de las densidades de probabilidad transformadas,

$$\widehat{P}_s(\lambda, t) = \left[\widehat{P}_\sigma(\lambda, t) \right]^K \widehat{P}_\chi(x) \quad (\text{C.1.12})$$

Tenemos ahora dos posibilidades para continuar el desarrollo analítico que involucran la conectividad de los elementos: la conectividad finita ($K < \infty$) y el caso cuando K es infinita.

c.1.1 Conectividad finita.

Usando la definición de ϕ , tenemos que,

$$P_\sigma(x, t) = \phi(t) \delta(x-1) + (1 - \phi) \delta(x+1), \quad (\text{C.1.13})$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. Si reescribimos esta expresión en el espacio de Fourier tenemos que,

$$\widehat{P}_\sigma(\lambda, t) = \phi(t) e^{-i\lambda} + (1 - \phi(t)) e^{i\lambda}. \quad (\text{C.1.14})$$

Usando la Ec. C.1.8 podemos expresar la misma ecuación pero ahora en términos del parámetro Ψ .

$$\widehat{P}_\sigma(\lambda, t) = \cos(\lambda) - i\Psi(t) \sin(\lambda). \quad (\text{C.1.15})$$

Por otro lado, podemos calcular la distribución de probabilidad $P_x(x)$ si recordamos que la variable aleatoria $\chi_n(t)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $[-4K\eta_1, 4K\eta_1]$ de forma tal que,

$$\widehat{P}_x(\lambda, t) = \frac{1}{4K\eta_1\lambda} \text{sen}(4K\eta_1\lambda) . \quad (\text{C.1.16})$$

Sustituyendo esta ultima ecuación y la expresión de la Ec. C.1.15 en la Ec. C.1.12 tenemos el siguiente resultado,

$$\widehat{P}_s(\lambda, t) = [\cos(\lambda) - i\Psi(t)\text{sen}(\lambda)]^K \frac{\text{sen}(4K\eta_1\lambda)}{K\eta_1} . \quad (\text{C.1.17})$$

Expresión que podemos reescribir usando el desarrollo del binomio de la siguiente manera,

$$\widehat{P}_s(\lambda, t) = \left\{ \sum_{m=0}^K (-i)^m \binom{K}{m} [\cos(\lambda)]^{K-m} [\Psi(t)\text{sen}(\lambda)]^m \right\} \frac{\text{sen}(4K\eta_1\lambda)}{4K\eta_1\lambda} . \quad (\text{C.1.18})$$

Tomando en cuenta que la probabilidad $I_k(t)$ de que un elemento arbitrario $\sigma_n > 0$ está dada por,

$$I_k(t) = \int_0^\infty P_\sigma(x, t) dx , \quad (\text{C.1.19})$$

podemos relacionar la expresión $\widehat{P}_\sigma(x, t)$ con esta ecuación. Para ello, tomamos la transformada de Fourier inversa de la Ec. C.1.18 e integramos el resultado en el intervalo $[0, \infty)$, obteniendo,

$$I_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^K \beta_m^K(\eta_1) [\Psi(t)]^m . \quad (\text{C.1.20})$$

donde los coeficientes $\beta_m^K(\eta_1)$ están dados por,

$$\beta_m^K(\eta_1) = \left\{ \binom{K}{m} \frac{(-i)^m}{4\pi K\eta_1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\cos(\lambda)]^{K-m} [\text{sen}(\lambda)]^m \right\} \frac{\text{sen}(4K\eta_1\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda dx \quad (\text{C.1.21})$$

Redefinamos una parte de esta ecuación como la variable \widehat{G} ,

$$\widehat{G}(\lambda) = [\cos(\lambda)]^K \frac{\text{sen}(4K\eta_1\lambda)}{4K\eta_1\lambda}$$

Variable que es una función simétrica con la propiedad $\widehat{G}(0) = 1$. Bajo esta definición, el coeficiente $\beta_0^K(\eta_1)$ se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \beta_0^K(\eta_1) &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{G}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda dx \\ &= 2 \int_0^\infty G(x) dx , \end{aligned}$$

donde $G(x)$ es la transformada de Fourier inversa de $\widehat{G}(\lambda)$. Dado que $\widehat{G}(\lambda)$ es simétrica, también $G(x)$ lo es y consecuentemente $\int_{-\infty}^\infty G(x) dx = 2 \int_0^\infty G(x) dx$. Además, como $\widehat{G}(0) = 1$ ocurre que

$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx = 1$, de donde se sigue que $\beta_0^K(\eta_1) = 1$.

Para $m > 0$ podemos intercambiar el orden de integración en la Ec. C.1.21 multiplicando el integrando por $e^{-\varepsilon x}$. Después resolvemos la integral sobre x y enseguida tomamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ obteniendo,

$$\beta_m^K(\eta_1) = \binom{K}{m} \frac{(-1)^{m-1}}{4\pi K \eta_1} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\lambda)]^{K-m} [\sen(\lambda)]^m \frac{\sen(4K\eta_1\lambda)}{\lambda^2} d\lambda \quad (\text{C.1.22})$$

Usando que $\beta_0^K(\eta_1) = 1$, podemos reescribir la Ec. C.1.20 como,

$$I_k(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{m=1}^K \beta_m^K(\eta_1) [\Psi(t)]^m \right).$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la Ec. C.1.9 obtenemos la ecuación maestra para el parámetro de orden Ψ en el caso $k < \infty$,

$$\Psi(t+1) = (1 - 2\eta_2) \sum_{m=1}^K \beta_m^K(\eta_1) [\Psi(t)]^m \quad (\text{C.1.23})$$

Veamos ahora el desarrollo analítico para el caso donde la conectividad es infinita.

c.1.2 Conectividad infinita.

Por la definición de $u_n(t)$ (Ec. C.1.2) sabemos que esta variable es la suma de K variables aleatorias uniformemente distribuidas, cada una de ellas con valor promedio $\Psi(t)$ y varianza 1. Por lo tanto para valores grandes de la conectividad K , usando el teorema del limite central se puede aproximar la distribución de probabilidad $P_n(x, t)$ por una Gaussiana con promedio $K\Psi(t)$ y varianza $\sigma^2 = K(1 - |\Psi(t)|^2)$ que es de la forma,

$$P_u(t)(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi K(1 - [\Psi(t)]^2)}} \exp\left(-\frac{(x - K\Psi(t))^2}{2K(1 - [\Psi(t)]^2)}\right) \quad (\text{C.1.24})$$

Usando esta expresión, la Ec. C.1.10 toma la siguiente forma,

$$P_s(x, t) = \frac{1}{8K\eta_1 \sqrt{2\pi K(1 - [\Psi(t)]^2)}} \int_{-4K\eta_1}^{4K\eta_1} \exp\left(-\frac{[x - y - K\Psi(t)]^2}{2K(1 - [\Psi(t)]^2)}\right) dy, \quad (\text{C.1.25})$$

donde se usa que $P_x(x)$ es una función constante ya normalizada definida en el intervalo $x \in [-4K\eta_1, 4K\eta_1]$. A partir de esta expresión podemos obtener $I_k(t)$ integrando $P_s(x, t)$ desde 0 hasta ∞ ,

$$I_k(t) = \frac{1}{8K\eta_1 \sqrt{2\pi K(1 - [\Psi(t)]^2)}} \int_0^{\infty} \int_{-4K\eta_1}^{4K\eta_1} \exp\left(-\frac{[x - y - K\Psi(t)]^2}{2K(1 - [\Psi(t)]^2)}\right) dy dx. \quad (\text{C.1.26})$$

antes de integrar realizamos los cambios de variables $x = Kx'$, $y = Ky'$, de forma que la expresión anterior se transforma en,

$$I_k(t) = \frac{1}{8\eta_1 \sqrt{\frac{2\pi}{K} (1 - [\Psi(t)]^2)}} \int_0^\infty \int_{-4\eta_1}^{4\eta_1} \exp\left(-\frac{[x' - y' - \Psi(t)]^2}{\frac{2}{K} (1 - [\Psi(t)]^2)}\right) dy' dx'. \quad (\text{C.1.27})$$

Tomando en cuenta que en el límite $K \rightarrow \infty$, el integrando de la expresión anterior toma la forma,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-\frac{[x' - y' - \Psi(t)]^2}{\frac{2}{K} (1 - [\Psi(t)]^2)}\right)}{\sqrt{\frac{2\pi}{K} (1 - [\Psi(t)]^2)}} = \delta(x' - y' - \Psi(t)).$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. Usando las expresiones anteriores podemos obtener finalmente una expresión más simple para $I_k(t)$,

$$I_k(t) = \frac{1}{8\eta_1} \int_0^\infty \int_{-4\eta_1}^{4\eta_1} \delta(x' - y' - \Psi(t)) dx' dy'. \quad (\text{C.1.28})$$

Realizando las integrales correspondientes podemos obtener el siguiente resultado,

$$I_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } \Psi(t) < -4\eta_1 \\ \frac{1}{8\eta_1} (\Psi(t) + 4\eta_2) & \text{cuando } |\Psi(t)| \leq 4\eta_1 \\ 1 & \text{cuando } \Psi(t) > 4\eta_1 \end{cases}.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. C.1.9 podemos obtener la Ec.6.4.1 que mostramos en el texto principal.

- Albert, R., Barabási, A.L.
Statistical mechanics of complex networks.
Reviews of Modern Physics, Vol. 74, p. 47-97 (2002).
- Albert R., Jeong H., Barabási A.L.
Diameter of the world-wide web.
Nature 401 130-131 (1999).
- Aldana, M., Huepe C.
Phase Transitions in Self-Driven Many-Particle systems and Related Non-Equilibrium Models: A Network Approach.
Journal of Statistical Physics, Vol. 112, No. 1/2. p. 135-153 (2003).
- Aldana, M.
Boolean Dynamics of Networks With Scale-Free Topology.
Physica D, No. 185, p. 45-66, (2003).
- Aldana, M., Larralde, H.
Phase Transitions in Scale Free Networks: Departure From the Mean-Field Universality Class.
Physical Review E No. 70, p. 066130 (2004).
- Aldana, M.
Memorias de la XIV Escuela de verano en Física.
IF-UNAM, ICF-UNAM, México, p. 1-34 (2006).
- Aldana, M., Dossetti, V., Huepe, C., Kenkre, V.M., Larralde, H.
Nature of a Phase Transition in Models For Birds Flocks and Related Systems of Self-Propelled Particles.
Physical Review Letters, No. 98, p. 095702 (2007).
- Ammons A.R., Corson's Inlet.
Birds of a feather.
New Scientist, www.newscientist.com, (23 Enero 1999).
- Aoki I.
A Simulation Study on the Schooling Mechanism in Fish.
Bull. Jpn. Soc. Sci. Fish. 50:751-758. (1982).
- Barabási, A.L., Albert, R.
Emergence of Scaling in Random Networks
Science Vol. 286. No. 5439, pp. 509-512, (1999).
- Berge, B. Diep, H.T., Ghazali, A., Lallemand, P.
Phase Transitions In Two-Dimensional Uniformly Frustrated XY Spin Systems.
Physical Review B. Vol. 34, No. 5, p. 3177-3184 (1986).
- Bethe, H.A.
Statistical Theory of superlattices.
Proc. R. Soc. London A 150, 552. (1935).

- Bragg, W.L. and Williams, E.J.
Effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys I.
Proc. Roy. soc. A, 145, 699. (1934).
- Bragg, W.L. and Williams, E.J.
Effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys II.
Proc. Roy. soc. A, 151,540. (1935).
- Buhl J., Sumpter D.J.T., Couzin I.D., Hale J.J., Despland E., Miller E.R., Simpson S.J.
From Disorder to Order in Marching Locust.
Science Vol. 312, June (2006).
- Camacho J., Guimerá R., Nunues Amaral L.A.
Robust patterns in food web structure.
Phys. Rev. Lett. 88 (22) 228102 (2002).
- Camazine S., Deneubourg J.L., Franks N.R., Sneyd J., Theraulaz G. and Bonabeau E.
Self-Organization in Biological Systems.
Princeton University Press, Princeton, N.J. (2001).
- Carmona, G.
Fenómenos Críticos y el Grupo de Renormalización. 1^a Ed.
© Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM. (2000).
- Curie P. Lois.
Expérimentales du magnétisme. Propriétés magnétiques des corps à diverses températures.
(thesis reprint). Ann. Chim. Phys. 5:289 - 405. (1895).
- Farkas, I., Helbing, D., Vicsek, T.
Mexican Waves in an Excitable Medium.
Brief Communications, Nature Vol. 419, p. 131-132 (2002).
- Farkas, Vicsek, T.
Initiating a Mexican Wave: an instanteneous collective decision with both sorth- and long-range interactions.
Physica A 369, 830-840, (2006).
- Fox J.J., Hill C.C.,
From topology to dynamics in biochemical networks.
Chaos 11 (4), 809-815 (2001).
- Goldstein, J. Emergence as a Construct: History and Issues.
Emergence: Journal of Complexity Issues in Organizations and Management. Vol.1 , No. 1, 49-72 (1999).
- Golinelli, O., Derrida, B.
Barrier heights in the Kauffman model.
J. Phys, Vol. 50, p. 1587-1601, (1989).
- Grégoire, G., Chaté, H.
Onset of Collective and Cohesive Motion.
Phys. Rev. Lett. Vol. 92, No 2, p. 025702-1/025702-4 (2004).

- Gueron S., Levin S.A. and Rubenstein D.I.
The Dynamics of Herds: From Individuals to Agregations.
J. Theor. Biol. 182: 85-98. (1996).
- Huepe C., Aldana, M.
Dynamical Phase Transition in a Neural Network Model with Noise: an Exact Solution.
Journal of statistical Physics, Vol. 108, No. 314. p. 527-540 (2002).
- Huepe C., Aldana, M.
Intermittency and Clustering in a System of Self-Driven Particles.
Phys. Rev. Lett. 92, 168701. (2004).
- Huth A, Wissel C.
The Movement of Fish Schools: a Simulation Model.
Pp. 578-590 in Biological motion: Lectures Notes in Biomathematics, Vol. 89. Ed. Springer.
(1990).
- Huth A, Wissel C.
The Simulation of the Movement of Fish Schools.
J, Theor. Biol. 156:365-385. (1992)
- Huth A, Wissel C.
The Simulation of Fish Schools In Comparison With Experimental Data.
Ecol. Model. 75:135-145. (1994).
- Illés J. Farkas, Tamás Vicsek.
Initiating a Mexican Wave: An instantaneous collective decision with both short- and long-range interactions.
Physica A 369, 830-840. (2006).
- Ising, E.
Beitrag zur theorie des Ferromagnetismus.
Itzykson, C. & Drouffe, J.M. Cambridge Monographs on mathematical Physics.
Statistical Field Theory, Vol. I,II., (1925).
- Jeong H., Tombor B., Albert R., Oltvai, Z.N., Barabási A.L.
The large-scale organization of metabolic networks.
Nature 407 651-654 (2000).
- Jeong H., Mason S., Barabási A.L., Oltvai, Z.N. Lethality and centrality in protein networks.
Nature 411, 41. (2001).
- Kadanoff, L.P.
Scaling laws for Ising models near T_c .
Physics (Long Island City, N.Y.) 2, 263. The new blocking picture. (1966).
- Kadanoff, L., Et. Al.
Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment.
Rev. Mod. Phys. 39, 395. (1967).

- Kessler, D.A., Levine H.
Pattern Formation in *Dictyostelium* via the dynamics of cooperative biological entities.
Physical Review E. Vol. 48, No. 6, 4801-4804, (1993).
- Kosterlitz, J.M., Thouless, D.J.
Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (Application of dislocation theory).
Journal Physics C: Solid State Phys. 5 L124-L126, (1972).
- Krapivsky, P.L., Redner, S., Leyvraz, F.P.
Connectivity of Growing Random Networks.
Physical Review Letters, Vol. 85, No. 21. (2000).
- Kuramoto, Y., Aoyagi, T., Nishikawa, I., Chawanya, T., Okuda, K.
Neural Network Model Carrying Phase Information with Application to Collective Dynamics.
Progress of Theoretical Physics, Vol. 87, No. 5, p. 1119-1126 (1992).
- Landau, Lev Davidovich; Lifshitz, E. M.
Course of theoretical physics.
Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies.
Oxford: Pergamon Press, and Reading: Addison-Wesley, 2nd rev. - enlarg.ed. (1969).
- McCulloch, W.S., Pitts, W.
A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity.
Bull. Math. Biophys. 5, 115-133 (1943)
- Maris, H.J. and Kadanoff, L.P.
Teaching the renormalization group.
Am. J. Phys. 46, 652, (1978).
- Mermin N. D., Wagner H.
Absence of Ferromagnetism or Anti-Ferromagnetism in one- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Model.
Physical Review Letters, Vol. 17, No. 22, p. 1133-1136 (1966)
- Miranda, E.N., Parga, N.
Noise Effects in the Kauffman Model.
Europhys. Lett. Vol. 10, p. 293-298, (1989).
- Newman, M.E.J.
The Structure and Function of Complex Networks.
SIAM Review. Vol 45, No. 2, pp. 167-256. (2003).
- Newman, M.E.J.
The structure of scientific collaboration networks.
Proc. Natl. Acad. Sci. 98 (2) 404-409 (2001).
- Newman, M.E.J., Watts, D.J.
Scaling and percolation in the small-world network model.
Physical Review E, Vol. 60, No. 6, 7332-7342, (1999).

- Onsager, L.
A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition.
Phys. Rev. 65, 117. Crystal Statistics. I. (1944).
- Parrish, Julia K. y Edelstein-Keshet, Leah.
Complexity, Pattern, and Evolutionary Trade-Offs in Animal Aggregation.
Science Vol. 284, p. 99-101 (1999).
- Parrish, Julia K., Viscido S.V., and Grünbaum D.
Self-Organized Fish Schools: An Examination of Emergent Properties.
Biol. Bull. 202:296-305. (June 2002).
- Pastor-Satorras, R., Vespignani A.
Epidemic Spreading in Scale-Free Networks
Physical Review Letters, Vol 86, No 14, p. 3200-3203 (2001).
- Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J.
Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences.
Cambridge University Press. ISBN 0521592852 (2001)
- Reuter, H., and B. Breckling.
Self-organization of fish schools: an object-oriented model.
Ecol. Model. 75: 147-159. (1994).
- Romey, W. L.
Individual differences make a difference in the trajectories of simulated schools.
Ecol. Model. 92: pp. 65-77. (1996).
- Rozenfeld A. F., Gruver, J.L., Albano E.V., Havlin S.
Altruism: A natural strategy for enhancing survival.
Physica A 369, pp. 817-822, (2006).
- Shaw E.
Schooling fishes.
Am. Sci. 66:166-175, (1978).
- Solé R.V.
Complexity and Fragility In Ecological Networks.
Proc. Roy.Soc. London Ser. B. 268, pp. 2039-2045, (2001).
- Stanley, Eugene. H.
Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena.
Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2, (1999)
- Stöcker, S.
Models for tuna school formation.
Math. Biosci. 156: 157-190. (1999).
- Toner, J., Tu Y.
Long-Range Order in a Two dimension Dynamical XY Model: How Birds Fly Together.
Physical Review Letters. Vol 75, No. 23, p.4326-4329 (1995).

- Vabo, R., and L. Nottestad.
An individual-based model of fish school reactions: predicting antipredator behaviour as observed in nature.
Fish. Oceanogr. 6: 155-171. (1997).
- Vicsek T., Czirok A., Ben-Jacob E., Cohen I., Shochet O.
Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles.
Phys. Rev. Lett., 75, 1226 . (1995).
- Watts, D.J, Strogatz S.H.
Collective dynamics of “small-world” networks.
Nature 393 (6684), 440-442, (1998).
- Warburton K, and Lazorous J.
Tendency-Distance Models of Social Cohesion in animal Groups.
J. Theor. Biol. 150: 473-488. (1991).
- Weiss P.
Hypothesis of the Molecular Field and Ferromagnetism.
Journal de Physique, 6, 661, (1907).
- Widom B.
J. Chem. Phys. 43, 3892 (1965).