



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO GARCH DE VALUACIÓN DE
DERIVADOS: UNA APLICACIÓN A
OPCIONES EUROPEAS SOBRE EL IPC

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

AMBROSIO ORTIZ RAMÍREZ

TUTOR:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ



MARZO 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a Dios la fortaleza, la entereza y todas las bendiciones que me da cada día.

A MI FAMILIA:

Mamá Margarita: gracias por el infinito amor que me has demostrado, gracias por todo. Te extrañó mucho. Te amo Mamá.

Papá Esiquio: gracias por todo tu apoyo. Te amo Papá.

Hermanos: Manuel, Raymundo, Catalina, Luis, Froylan, Aurelia, Patricia, Margarita y Raúl. Los amo.

Tío Angel: muchas gracias por todo tu apoyo.

A MIS AMIGOS:

A todos mis amigos y compañeros de la U.N.A.M., del I.T.E.S.M. y del I.P.N.

A MI JURADO:

Les agradezco sus valiosas observaciones en el desarrollo de este trabajo.

A todos mis maestros que han guiado en mi formación académica, en especial:

Dr. Francisco Venegas Martínez: gracias por todo su apoyo, por sus enseñanzas, sus consejos y su amistad.

Q.F.B. Ricardo Martínez Sobrevilla: gracias por enseñarme a encontrar la motivación en uno mismo.

M.A. Josefina González Olivares: gracias por enseñarme la disciplina y el orden en el trabajo.

Un agradecimiento para:

U.N.A.M. : por la formación, por ser mi segunda casa.

Lizeth Karem: principessa; gracias por ser mi mejor amiga.

Violeta: gracias por haber estado conmigo en las buenas y en las malas.

Juan Salvador Gaviota.

A todas las personas que me faltó mencionar.

Contenido

Agradecimientos	III
Introducción	XIII
1. Introducción al Movimiento Browniano y al Cálculo estocástico	1
1.1. Introducción	1
1.2. Caminata aleatoria	1
1.3. Procesos estocásticos	3
1.3.1. Filtración e información actual relevante	4
1.3.2. Procesos estocásticos adaptados a una filtración	6
1.4. Movimiento Browniano aritmético	6
1.4.1. Movimiento Browniano aritmético como el límite de una caminata aleatoria simple	6
1.4.2. Momentos de un movimiento Browniano aritmético	9
1.5. Movimiento Browniano	11
1.5.1. Proceso de Wiener	11
1.5.2. Las trayectorias no son diferenciables	12
1.5.3. Las trayectorias son continuas	13

1.6. Movimiento geométrico Browniano	13
1.6.1. Momentos de un movimiento geométrico Browniano	16
1.7. Cálculo de Itô	18
1.7.1. Integrales de: Riemann-Stieljes, Stratonovitch e Itô	18
1.7.2. Lema de Itô	22
1.8. Lema de Itô multidimensional	30
1.9. Martingalas	33
1.9.1. Definiciones y ejemplos	34
1.9.2. Martingalas y movimiento Browniano	35
1.10. Notas	36
2. Opciones financieras	37
2.1. Introducción	37
2.2. Derivados	37
2.3. Historia y desarrollo de los mercados de opciones	38
2.4. Opciones financieras	40
2.4.1. Opciones de compra	42
2.4.2. Opciones de venta	42
2.5. Opciones americanas y europeas	42
2.6. Opciones dentro, fuera y en el dinero	43
2.7. Liquidación en efectivo y en especie	44
2.8. Valor intrínseco y valor en el tiempo de las opciones	45
2.9. Factores para la determinación de los precios de las opciones	46
2.10. Opciones sobre acciones que pagan dividendos	47

2.11. Opciones sobre divisas	47
2.12. Opciones sobre futuros	48
2.13. Opciones exóticas	48
2.14. Opciones sobre índices accionarios	49
2.15. Índice de Precios y Cotizaciones	49
2.15.1. Opciones sobre el IPC en el MexDer	51
3. Modelo de Black y Scholes: Enfoque probabilista	53
3.1. Introducción	53
3.2. Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente	53
3.3. Valuación neutral al riesgo	54
3.4. Función de densidad del precio del subyacente neutral al riesgo	55
3.4.1. Media y varianza del precio del subyacente en un mundo neutral al riesgo	56
3.5. Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra	60
3.6. Valuación neutral al riesgo de una opción europea de venta	62
3.6.1. Condición de paridad de opciones de venta y compra	62
3.7. Griegas del modelo de Black y Scholes	63
3.7.1. Lema fundamental de las griegas del modelo de Black y Scholes	63
3.8. Griegas de una opción europea de compra	64
3.9. Griegas de una opción europea de venta	72
4. Modelos Generalizados ARCH(GARCH)	75
4.1. Introducción	75
4.2. Modelos Generalizados ARCH (GARCH)	75

4.3. Extensiones al modelo GARCH	78
4.3.1. Memoria de largo plazo en la varianza	78
4.3.2. El efecto de apalancamiento	79
4.4. Estimación por máxima verosimilitud	80
4.4.1. Estimación estándar por máxima verosimilitud	80
4.4.2. Quasi-Estimación por máxima verosimilitud	82
4.5. Simulación Monte Carlo (SMC)	82
5. Modelo GARCH de valuación de opciones	85
5.1. Introducción	85
5.2. Modelo GARCH de valuación de opciones	85
5.3. Implementación del Modelo: Simulación Monte Carlo	88
5.4. Resultados	91
5.4.1. Análisis de los resultados	91
Conclusiones	97
A. Prueba de Dickey-Fuller	99
A.1. Prueba de Dickey-Fuller	99
B. Salidas de EViews	103
Bibliografía	111

Índice de gráficas

1.1. Caminata aleatoria.	3
3.1. Función de densidad de $S_T S_t$	59
3.2. Δ_c es la pendiente de la recta tangente a c en S_t	65
3.3. Δ_c como función de S_t	66
3.4. Perfiles de ganancia en un portafolio de cobertura Delta.	67
3.5. Γ_c como función de S_t	68
3.6. v_c como función de S_t	69
3.7. Δ_p como función de S_t	73
4.1. Simulación de los rendimientos de $t + 1$ a $t + K$	84
5.1. Simulación de los rendimientos $t + 1$ a $t + T$	89
5.2. Call B-S vs. c_{GH} para $T=20,30,60$	94
5.3. Put B-S vs. p_{GH} para $T=20,30,60$	95
B.1. Comportamiento del IPC de 02/01/2003 al 29/12/2006.	103
B.2. Rendimientos del IPC con $\ln S_t / \ln S_{t-1}$	104
B.3. Correlograma de la serie RIPC.	106

B.4. Correlograma de los residuales estandarizados. 108

B.5. Correlograma de los residuales estandarizados al cuadrado. 109

Índice de cuadros

1.1. Reglas básicas de diferenciación estocástica.	22
2.1. Clasificación de una opción según la relación entre S_t y K	44
3.1. Griegas del modelo de Black y Scholes.	74
5.1. Precios de opciones call europeas simulados.	92
5.2. Precios de opciones put europeas simulados.	93
A.1. Valores críticos en la prueba de Dickey-Fuller.	101
B.1. Prueba de Dickey-Fuller.	105
B.2. Parámetros estimados en <i>EViews</i>	107

Introducción

La incertidumbre, o el riesgo es de suprema importancia en análisis financiero. Por ejemplo, el Capital Asset Pricing Model (CAPM) (Sharpe, 1964; Lintner, 1965; Mossin, 1996; Merton, 1973) postula una relación directa entre el rendimiento de un activo y su riesgo, donde el último es determinado por la covarianza en los rendimientos en un activo particular y un cierto portafolio *benchmark*. Análogamente, el determinante más importante en el precio de una opción es la incertidumbre asociada al precio del activo subyacente, la cual es medida por su volatilidad. Uno de los hechos estilizados más prominentes en los rendimientos de los activos financieros es que su volatilidad cambia con el tiempo. En particular, periodos de movimientos grandes en precios se alternan con los periodos durante los cuales los precios cambian ligeramente. Esta característica se refiere comúnmente como clusters de volatilidad (*volatility clustering*). Aunque la naturaleza estocástica de la volatilidad de activos financieros ha sido ampliamente reconocida (véase Mandelbrot, 1963a, 1963b, 1967; Fama, 1965), la modelación explícita de las características del proceso de la volatilidad se ha considerado recientemente.

La modelación y pronóstico de la volatilidad de los activos financieros que se negocian en los mercados ha sido objeto de vasta investigación empírica y teórica durante la década pasada por académicos y practicantes sin distinción. La volatilidad es una variable clave que esta implícita en la mayoría de los instrumentos financieros y juega un papel central en muchas áreas de las finanzas. Por ejemplo, la volatilidad es crucial en los modelos de valuación de activos y en estrategias de cobertura dinámica. La volatilidad, medida por la desviación estándar de los rendimientos, es usada a menudo como una medida “cruda” del riesgo total de los activos financieros. Muchos modelos de Valor en Riesgo para medir el riesgo de mercado requieren de la estimación o pronóstico de la volatilidad. La volatilidad del precio del activo subyacente en una opción entra directamente en la fórmula de Black y Scholes en la derivación de los precios de las opciones que se negocian en los mercados financieros de todo el mundo.

Desde un punto de vista empírico, por tanto, es de suma importancia modelar cuidadosamente cualquier cambio temporal en el proceso de la volatilidad. El modelo ARCH y algunas de sus extensiones han resultado ser herramientas muy efectivas a este respecto. De hecho, la literatura sobre ARCH se ha expandido dramáticamente desde el artículo seminal de Engle (1982), con su generalización en Bollerslev (1986).

En este contexto el objetivo principal de este trabajo es exponer las características del modelo GARCH de valuación de opciones de Duan, J.-C.,(1995), “The GARCH Option Pricing Model” para luego mostrar una aplicación de este modelo en la valuación de opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Este trabajo esta organizado en cuatro capítulos que se resumen a continuación.

En el capítulo uno se revisan varios conceptos de probabilidad y de procesos estocásticos que se emplean en finanzas modernas en tiempo continuo. Se presentará una introducción al movimiento Browniano, el movimiento Browniano aritmético, así como el lema de Itô y sus aplicaciones en el modelado de diversos fenómenos financieros y económicos con varios ejemplos ilustrativos.

En el capítulo dos, se presentará una introducción a los productos derivados haciendo énfasis en las opciones financieras, su historia y sus características generales.

En el capítulo tres se obtiene bajo el enfoque probabilista la fórmula de valuación teórica para una opción europea que desarrollaron Fisher Black y Myron Scholes en 1973 y que fue extendida por Robert Merton en el mismo año. Asimismo, se obtienen las griegas para una opción de compra y de venta.

En el capítulo cuatro se exponen los modelos Modelos Generalizados ARCH (GARCH), algunas de sus extensiones y su relación con la simulación Monte Carlo con un ejemplo sencillo.

En el capítulo cinco se presenta el modelo GARCH de valuación de opciones con una aplicación a opciones europeas cuyo subyacente es el IPC, se analizan y comparan los resultados obtenidos de la implementación empírica del modelo con la fórmula de valuación de Black y Scholes mediante la construcción de un indicador de desviación sistemática.

Un último apartado mostrará las conclusiones de este trabajo, lo que llevará a presentar algunas de las ventajas del modelo expuesto.

Capítulo 1

Introducción al Movimiento Browniano y al Cálculo estocástico

1.1. Introducción

Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. En este capítulo se revisan varios conceptos de probabilidad y de procesos estocásticos que se emplean en finanzas modernas en tiempo continuo con el objetivo de presentar en forma accesible e intuitiva el cálculo estocástico, sus conceptos básicos y técnicas de análisis. Se presentan algunas de las propiedades del movimiento Browniano aritmético, el movimiento geométrico Browniano, Lema de Itô, así como sus aplicaciones en el modelado de diversos fenómenos financieros y económicos con varios ejemplos ilustrativos.[1] [26]

1.2. Caminata aleatoria

Una metáfora interesante de los rendimientos de un activo en los mercados financieros es la de caminata aleatoria. Un objeto aleatorio no identificado (se puede pensar en un borracho, una partícula, o el rendimiento de un activo) comienza en el punto cero y tiempo cero, y se desplaza a lo largo de una línea. En cada paso, el objeto se mueve hacia adelante una distancia (positiva) pequeña

Δx con probabilidad p , o hacia atrás una distancia (negativa) pequeña; $-\Delta x$ con probabilidad $q = 1 - p$. Formalmente, en cada paso i de la caminata aleatoria donde $i = 1, 2, \dots$, existe una variable aleatoria Z_i que puede tomar los valores $+1$ ó -1 con probabilidades p y q , respectivamente. Las variables Z son independientes e idénticamente distribuidas. El objeto se mueve con regularidad: un paso por unidad de tiempo Δt .

Al tiempo $t = n\Delta t$ es decir, n pasos en el proceso, $X(t)$, la posición del objeto a partir del origen, es la suma de las realizaciones de n pasos, Z_1, Z_2, \dots, Z_n

$$X(t) = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (1.1)$$

Ahora surgen las preguntas: ¿Dónde se espera que el objeto esté después de n pasos? ¿Que tan lejos se alejará del origen?. Estas preguntas pueden ser reexpresadas matemáticamente como: ¿Cuál es la esperanza matemática de $X(t)$, $\mathbb{E}[X(t)]$? ¿Cuál es su varianza, $\text{Var}[X(t)]$? Antes de contestarlas, es útil calcular la esperanza y la varianza si la posición cambia en un paso i como

$$\mathbb{E}(Z_i) = (p - q)\Delta x \quad (1.2)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_i) &= \mathbb{E}(Z_i^2) - [\mathbb{E}(Z_i)]^2 \\ &= (\Delta x)^2 [1 - (p - q)^2] \\ &= 4pq. \end{aligned} \quad (1.3)$$

ya que el operador esperanza es aditivo, la distancia total esperada es n veces la esperanza de Z_i

$$\mathbb{E}[X(t)] = n(p - q)\Delta x \quad (1.4)$$

Cuando $p = q = 1/2$, se espera que el objeto permanezca en el punto cero. Este resultado tiene sentido intuitivo porque el objeto puede moverse en cualquier dirección.

Sin embargo, la esperanza tiene que ser entendida como un promedio sobre una gran cantidad de experimentos. Por supuesto un valor esperado puede nunca resultar. Por ejemplo, cuando $p = q = 1/2$, $X(\Delta t)$, la posición después del primer paso puede ser Δx ó $-\Delta x$, pero nunca será igual a cero, su valor esperado. Una intuición mas profunda sugiere que la variable aleatoria tenderá a moverse lejos del origen mientras el tiempo transcurra. Una medida pertinente de verificar esta intuición es $\text{Var}[X(t)]$. Porque $X(t)$ es la suma de n variables independientes con varianza $4pq(\Delta x)^2$ la varianza de la suma es la suma de las varianzas

$$\text{Var}[X(t)] = 4npq(\Delta x)^2 \quad (1.5)$$

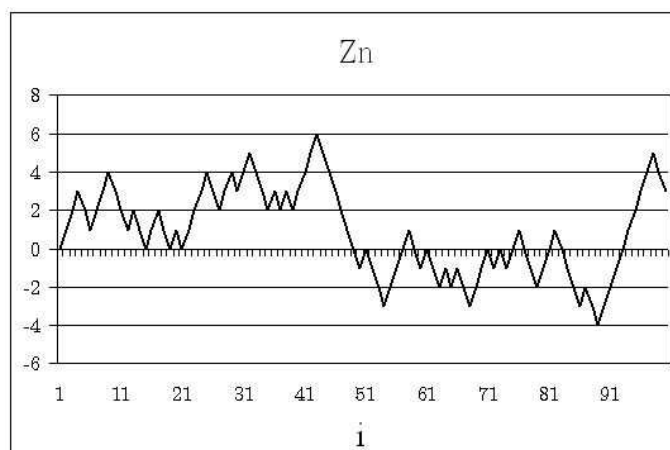
Por lo tanto la varianza de la distancia a partir del origen es proporcional al número de pasos, pero es importante recordar que cada paso corresponde exactamente a una unidad de tiempo, entonces *la varianza de la posición es proporcional al tiempo*.

En el caso especial donde $p = q = 1/2$, tenemos $4pq = 1$. Si se piensa en n como el número de unidades de tiempo, (1.5) puede ser reescrita como:

$$\text{Var}[X(t)] = \text{número de unidades de tiempo} \times (\Delta x)^2 \quad (1.6)$$

y entonces $(\Delta x)^2$ se puede interpretar como la varianza de $X(t)$ por unidad de tiempo, o como la varianza instantánea cuando la unidad de tiempo es muy pequeña. Entonces Δx es la desviación estándar instantánea de $X(t)$.

En la Gráfica 1.1 se muestra la realización de una caminata aleatoria con $p = q = 1/2$ y $n = 100$.



Gráfica 1.1: Caminata aleatoria.

1.3. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad del fenómeno se captura a través de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , es decir, un espacio muestral, o conjunto de posibles resultados, y una σ -álgebra del espacio muestral, o conjunto de eventos o sucesos relevantes. En este contexto, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, donde \mathcal{T} es un conjunto, finito o infinito, de tiempos.

Cada una de estas variables aleatorias X_t está definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y toma valores en otro espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, en donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} . En este caso, el subíndice t se refiere al tiempo. La σ -álgebra de Borel es la mínima σ -álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$.

El concepto de proceso estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes de riesgo e incertidumbre. Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc. A continuación se presenta la definición formal de proceso estocástico en tiempo continuo.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, es decir, Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Sea \mathcal{T} un intervalo de tiempo, específicamente se supone que $\mathcal{T} = [0, \infty)$. Un proceso estocástico (de dimensión 1) es un mapeo $X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in \mathcal{T}$ la función

$$X_t : \omega \rightarrow X(\omega, t) \equiv X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, X_t es una función \mathcal{F} -medible. Si X_t es un proceso estocástico, entonces para cada $\omega \in \Omega$ la función $t \mapsto X(\omega, t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, es llamada una trayectoria del proceso. Por último, se dice que un proceso es continuo si cada trayectoria es continua en cada punto de \mathcal{T} .

1.3.1. Filtración e información actual relevante

Muy frecuentemente, cuando se trabaja con procesos estocásticos, es necesario especificar el tipo de información que está disponible en cada punto en el tiempo. Por ejemplo, si se quiere calcular la esperanza, condicional a la información disponible, de valores futuros de un proceso, entonces es necesario especificar de manera precisa la información que se utiliza en los cálculos. Usualmente, en los modelos financieros se requiere que los precios, presentes y pasados, de los activos sean conocidos para producir un pronóstico, así como los posibles filtros que expliquen sus precios (*v.g.* estructuras de series de tiempo, correlaciones, etc.) Esta idea es formalizada con el concepto de filtración.

Una filtración es una familia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $t \in \mathcal{T}$. La familia \mathbb{F} es creciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ cuando $s, t \in \mathcal{T}$ y $s \leq t$. Una filtración puede ser pensada como una estructura de información

dinámica. La interpretación es que \mathcal{F}_t representa la información disponible al tiempo t . El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida.

A continuación se estudia el concepto de filtración de un proceso estocástico. Para $t \geq 0$ fijo, considere la siguiente familia de subconjuntos de Ω :

$$\mathcal{A}_t = \{A_{x,t} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$A_{x,t} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(s) \leq x, \quad 0 \leq s \leq t\}.$$

La σ -álgebra generada por \mathcal{A}_t , es decir, la mínima σ -álgebra que hace que las funciones W_s , con $0 \leq s \leq t$, sean variables aleatorias, se denota mediante

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(W_s, \quad 0 \leq s \leq t).$$

En este caso \mathcal{F}_0^W contiene sólo conjuntos de probabilidad cero o uno. Claramente, si $t \leq u$, entonces $\mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$. La familia creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ es llamada la filtración natural generada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Si \mathcal{N} es el conjunto de eventos $B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(B)=0$, se define la filtración aumentada de $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ mediante la familia de σ -álgebras

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}).$$

De hecho, basta que este procedimiento se efectúe únicamente para $t = 0$, ya que si $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{F}_0^W \cup \mathcal{N})$, entonces $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$. Por último, observe que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es continua por la derecha, esto es,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u \geq t} \mathcal{F}_u$$

y continua por la izquierda en el sentido de que

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \mathcal{F}_s\right).$$

Sin embargo, $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ es continua por la izquierda, pero no por la derecha.

Los agentes requieren de la información disponible en cada punto en el tiempo para hacer pronósticos. En este caso, \mathcal{F}_t representa la información relevante disponible hasta el tiempo t , ya que si al tiempo t ocurre $\omega \in \Omega$, entonces los agentes saben si ω está o no en $A \in \mathcal{F}_t$, para algún A dado, a fin de efectuar pronósticos. Por último, es importante mencionar que si $s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_s .

1.3.2. Procesos estocásticos adaptados a una filtración

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ se dice que es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es \mathcal{F}_t -medible, es decir, si para cada $t \geq 0$,

$$\{X_t \leq x\} \equiv \{\omega | X_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que el valor que tome X_t en t depende solamente de la información disponible al tiempo t . Como puede observarse, la adaptabilidad es una propiedad muy importante y afortunadamente la mayoría de los procesos que se utilizan en finanzas la tienen. Claramente, todo proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

1.4. Movimiento Browniano aritmético

1.4.1. Movimiento Browniano aritmético como el límite de una caminata aleatoria simple

Regresando a la descripción de la caminata aleatoria simple, donde se había calculado la esperanza y la varianza de la posición del objeto al tiempo $t = n\Delta t$ después de n pasos:

$$\mathbb{E}[X_n] = n(p - q)\Delta x \quad (1.7)$$

y

$$\text{Var}[X_n] = 4npq(\Delta x)^2 = 4\frac{t}{\Delta t}pq(\Delta x)^2 \quad (1.8)$$

Ahora considere las características de una caminata aleatoria en tiempo continuo. Así, para un t dado, la longitud de un intervalo de tiempo Δt y el tamaño del paso Δx serán hechos arbitrariamente pequeños (tienden a cero). Por lo tanto, el número de n pasos correspondientes llega a ser muy grande (tiende a infinito). Entonces ¿Cómo se pueden “calibrar” los parámetros de la caminata aleatoria, p , q y Δx para obtener una distribución en tiempo continuo de $X(t)$ con media constante *instantánea* μ , y varianza σ^2 ? Puesto en ecuaciones, esto es equivalente a

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{t}{\Delta t}pq\Delta x \longrightarrow \mu t \quad (1.9)$$

y

$$\text{Var}[X(t)] = 4\frac{t}{\Delta t}pq(\Delta x)^2 \longrightarrow \sigma^2 t \quad (1.10)$$

Se puede comprobar que la solución de (1.9) y (1.10) está dada por

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \quad (1.11)$$

$$q = \frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \quad (1.12)$$

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (1.13)$$

Observe que todo está expresado en términos del paso de tiempo. En la derivación anterior, se eligen los tamaños de paso y las probabilidades consistentes con el límite en tiempo continuo. El proceso límite para X se llama movimiento Browniano aritmético con tendencia (*drift*) μ y volatilidad σ . Es similar al proceso de caminata aleatoria en tiempo discreto discutido anteriormente. El movimiento Browniano aritmético tiene las siguientes propiedades:

- (i) $X(0) = 0$;
- (ii) Los incrementos son independientes: hasta donde la caminata ha llegado no tiene relación con su trayectoria en el futuro. Equivalentemente: $X(t) - X(0)$ y $X(t+h) - X(t)$ son independientes para todo $h > 0$;
- (iii) $X(t)$ tiene media μt y varianza $\sigma^2 t$ por la construcción anterior. Más aún, se puede demostrar usando el teorema del límite central¹ que $X(t)$ se distribuye normalmente. Se prueba este resultado calculando la función generadora de momentos de $X(t)$. La función generadora de momentos de Z_i es:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Z_i}) = pe^{\lambda\Delta x} + qe^{-\lambda\Delta x} \quad (1.14)$$

La función generadora de momentos de X_n , es la n -ésima potencia de la expresión anterior. Formalmente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda Z_n}] &= \mathbb{E}[e^{\lambda(Z_1+Z_2+\dots+Z_n)}] \\ &= \mathbb{E}(e^{\lambda Z_1}) (e^{\lambda Z_2}) \dots (e^{\lambda Z_n}) \\ &= (pe^{\lambda\Delta x} + qe^{-\lambda\Delta x})^n \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right) e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} \right) e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \right]^n \end{aligned} \quad (1.15)$$

de donde la primera igualdad viene de (1.1), la segunda de la independencia de los pasos, la tercera de (1.14) y la cuarta de la solución a la distribución límite

¹ En forma más precisa, la versión del teorema del límite central de Moivre-Laplace.

en tiempo continuo dada por (1.11), (1.12) y (1.13). Porque Δt puede ser hecha tan pequeña como se quiera (es la unidad más pequeña de tiempo de interés). Cualquier cantidad de orden $(\Delta t)^n$, con $n > 1$, se considera despreciable y se llama $o(\Delta t)$, lo cual significa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t)^n}{\Delta t} = 0, \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0 \quad (1.16)$$

Por ejemplo, $(\Delta t)^2 = o(\Delta t)$, $(\Delta t)^{3/2} = o(\Delta t)$, pero $\sqrt{\Delta t} \neq o(\Delta t)$ porque

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} = \infty, \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0.$$

Hecha esta observación, se puede escribir la expansión de Taylor de los exponentes en (1.15) como

$$e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 + \lambda\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\lambda^2\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t) \quad (1.17)$$

y

$$e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\lambda^2\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t) \quad (1.18)$$

Sustituyendo (1.17) y (1.18) en (1.15), se obtiene

$$\mathbb{E} [e^{\lambda X(t)}] = \left[1 + \left(\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} \right) \Delta t + o(\Delta t) \right]^n \quad (1.19)$$

Pero $\Delta t = t/n$. Porque el número de n pasos tiende al infinito cuando el incremento de tiempo Δt tiende a cero, la función generadora de momentos se transforma en el límite en tiempo continuo expresado de la siguiente manera²

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [e^{\lambda X(t)}] &= \left[1 + \frac{\left(\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} \right)}{n} \right]^n \\ &= e^{\left(\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} \right) t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

La ecuación (1.20) es precisamente la función generadora de momentos de una distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. Según lo afirmado, $X(t)$ se distribuye normalmente y se puede estandarizar restando su media y dividiendo por su desviación estándar

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = \phi \quad (1.21)$$

donde $\phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

² Recuerde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$.

Se puede reescribir el movimiento Browniano aritmético en (1.21) como

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad (1.22)$$

con $X(0) = 0$, como en la caminata aleatoria en tiempo discreto. $W(t)$ se denomina movimiento Browniano estándar -un caso especial del movimiento Browniano aritmético con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ - o un proceso de Wiener³. Por lo tanto, $W(t)$ es el límite en tiempo continuo de una caminata aleatoria discreta donde $p = q = 1/2$ y $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$.

1.4.2. Momentos de un movimiento Browniano aritmético

Como se mostró antes, $W(t)$ se distribuye normalmente con

$$\mathbb{E}[W(t)] = 0 \quad (1.23)$$

$$\text{Var}[W(t)] = t$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[W(t), W(t+h)] &= \text{Cov}[W(t), W(t+h) - W(t) + W(t)] & (1.24) \\ &= \text{Cov}[W(t), W(t+h) - W(t)] + \text{Var}[W(t)] \\ &= 0 \text{ (por incrementos independientes)} + t \\ &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[W(t) - W(t+h)] &= \text{Var}[W(t)] + \text{Var}[W(t+h)] & (1.25) \\ &\quad - 2\text{Cov}[W(t), W(t+h)] \\ &= t + (t+h) - 2t \\ &= h \end{aligned}$$

observe también que de (1.21) con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ que $W(t)$ puede ser escrito como

$$W(t) = \phi\sqrt{t} \quad (1.26)$$

Para calcular momentos de $W(t)$ considere los momentos de orden mayor de una distribución normal estándar y el siguiente resultado

$$\mathbb{E}(\phi^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ (n-1)!! = (n-1)(n-3)\cdots 1, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

³ Norbert Wiener del MIT formalizó la teoría del movimiento Browniano en 1923.

Por lo tanto, los momentos de $W(t)$ son

$$\mathbb{E}[W^n(t)] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ (n-1)!!t^{n/2} = t^{n/2}(n-1)(n-3)\cdots 1, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (1.27)$$

Ejemplo 1.4.1. Suponga que los rendimientos $R(t)$ de una acción siguen un movimiento Browniano

$$R(t) = 0.1t + 0.3W(t), \quad R(0) = 0$$

El rendimiento esperado es

$$\mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}(0.1t) + \mathbb{E}[0.3W(t)] = 0.1t$$

La varianza del rendimiento es

$$\text{Var}[R(t)] = \text{Var}(0.1t) + \text{Var}[0.3W(t)] = 0.09t$$

con una desviación estándar $\sigma = 0.3\sqrt{t}$. Los momentos de orden mayor se pueden calcular expandiendo el polinomio $R(t)$ y usando la ecuación (1.27). Por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R^3(t)] &= \mathbb{E}[0.001t^3 + 3(0.01)t^2(0.03)W(t) \\ &\quad + 3(0.1)t^2 \cdot 0.09W^2(t) + 0.0027W^3(t)] \\ &= 0.001t^3 + 0.0027t^2 \end{aligned}$$

El proceso para $R(t)$ se puede reescribir como

$$R(t) = 0.1t + 0.3\phi\sqrt{t}$$

donde $\phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ¿Cómo inferir las características, por ejemplo, de un rendimiento anual? Se sabe que

$$R(1) = 0.1 + 0.3\phi$$

es la suma de un componente determinista (10%) y de un componente aleatorio ϕ escalado por la desviación estándar por unidad de tiempo (30%). ϕ puede tomar cualquier valor real. Un resultado útil en este caso es que ϕ está en el intervalo $[-1.96, +1.96]$ con una confianza del 95%; en el intervalo $[-1.645, +1.645]$ con una confianza del 90%; y en el intervalo $[-1, +1]$ con una confianza del 68%.

La afirmación correspondiente sobre el rendimiento de un año $R(1)$ es: la realización de $R(1)$ estará en el intervalo $[-48.8\%, +68.8\%]$ con una confianza del 95%; en el intervalo $[-39.35\%, +59.35\%]$ con una confianza del 90%, y en el intervalo $[-20\%, +40\%]$ con una confianza del 68%. Por último, observe que en sentido estricto, el rendimiento de una acción no se puede describir por el proceso anterior porque hay una probabilidad positiva de que éste sea menor de -100%.

1.5. Movimiento Browniano

En esta sección se establece la definición formal del movimiento Browniano y del proceso de Wiener. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo, el movimiento Browniano (estándar y unidimensional) es una función

$$W : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}) . Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$W(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$ es denotada, cuando no exista confusión, en forma breve como $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Las funciones $W(\cdot, \omega)$ son llamadas trayectorias y se denotan por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

(i) $W_0 = 0$ casi dondequiera (o casi en todas partes), es decir,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid W_0(\omega) = 0\} = 1.$$

Es decir, el proceso empieza en $t = 0$ con probabilidad uno;

(ii) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes;

(iii) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

1.5.1. Proceso de Wiener

Sea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ una filtración. Un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a \mathbb{F} si cumple las siguientes condiciones:

(i) $W_0 = 0$ con probabilidad uno, es decir, $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid W_0(\omega) = 0\} = 1$;

- (ii) W_t es continuo en t ;
- (iii) W_t es adaptado a la filtración \mathbb{F} ;
- (iv) Si $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y normalmente distribuido con media cero y varianza $t - s$.

Una primera diferencia entre el proceso de Wiener y el movimiento Browniano es que el primero considera una filtración \mathbb{F} y el segundo no. Es decir, el movimiento Browniano es independiente del concepto de filtración. La segunda diferencia que se observa es la ausencia del requerimiento de incrementos independientes en el proceso de Wiener.

1.5.2. Las trayectorias no son diferenciables

La ecuación (1.22) escrita de otra forma es

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t) \quad (1.28)$$

ó, en su forma diferencial⁴

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.29)$$

donde el $dX(t)$ y $dW(t)$ se definen como⁵

$$dX(t) \equiv X(t + dt) - X(t) \quad (1.30)$$

y

$$dW(t) \equiv W(t + dt) - W(t) = \phi \sqrt{dt} \quad (1.31)$$

La ecuación (1.29) es una ecuación diferencial estocástica⁶. Surge una pregunta básica: ¿Es la variable $X(t)$ diferenciable con respecto a t ? Es decir, ¿ $dX(t)/dt$ converge?. Un cálculo sencillo revela que éste no es el caso:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = \mu + \frac{\sigma \phi}{\sqrt{\Delta t}} \rightarrow \pm \infty \quad (1.32)$$

La expresión anterior tiende a más o menos infinito dependiendo del signo de ϕ . El movimiento Browniano es fundamentalmente imprevisible en intervalos de tiempo cortos. Esto significa que una trayectoria típica –es decir una realización de X como función del tiempo– no es diferenciable. Por lo tanto, la expresión $dX(t)/dt$ no es aceptable.

⁴ La sección de cálculo de Itô en este capítulo explicará la relación entre las versiones integral y diferencial de un proceso.

⁵ Se escribirá alternativamente dX y $dX(t)$; dW y $dW(t)$.

⁶ Consultar [22] para una descripción más detallada del concepto de ecuación diferencial estocástica.

1.5.3. Las trayectorias son continuas

Deseamos probar la continuidad de la trayectoria de un proceso de Wiener. La trayectoria es continua en probabilidad si, y solo si, para cada $\delta > 0$ y t

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left\{|W(t + \Delta t) - W(t)| > \delta\right\} = 0 \quad (1.33)$$

Recordando que, al tiempo t

$$\mathbb{E}_t[W(t + \Delta t)] = W(t) \quad (1.34)$$

Por la desigualdad de Chebyshev⁷

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{|W(t + \Delta t) - \mathbb{E}_t W(t + \Delta t)| > \delta\right\} &\leq \frac{\text{Var}_t[W(t + \Delta t)]}{\delta^2} \\ &= \frac{\Delta t}{\delta^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Esto establece la continuidad del proceso de Wiener.

1.6. Movimiento geométrico Browniano

Aún cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de modelos financieros, éste no puede por sí mismo representar el comportamiento de todas las variables financieras que encontramos. Los precios de los activos, por ejemplo, no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos (y rendimientos) podrían tener media positiva, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente son por unidad de tiempo. En conclusión, los precios de los activos, en general, comienzan en valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas diferentes por unidad de tiempo y covarianzas diferentes de cero.

Una variable $X(t)$ sigue un movimiento geométrico Browniano si obedece una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (1.36)$$

⁷ La desigualdad de Chebyshev afirma que para una variable aleatoria X y $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{\delta^2}$$

Con $X(0) = x_0$, la solución de (1.36) es⁸

$$X(t) = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma\phi\sqrt{t} \right\}. \quad (1.37)$$

$X(t)$ es siempre positivo. Una vez que tome cero, el valor de $X(t)$ será siempre cero⁹.

Ejemplo 1.6.1. El precio de una acción $X(t)$ sigue un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$dX(t) = 0.12X(t)dt + 0.4X(t)dW(t)$$

La acción vale 100 hoy. ¿Cuál es el intervalo al 95 % de confianza para el precio de la acción dentro de tres meses? Se sabe que el precio satisface (1.37). Por lo tanto

$$X(t) = 100 \exp \left\{ 0.04t + 0.4\phi\sqrt{t} \right\}$$

La variable normal estándar ϕ está en el intervalo $[-1.96, +1.96]$ con una confianza del 95 %. Con $t = 0.25$, el precio estará entre 73.20 y 160.32 con una confianza del 95 %.

Observe que de (1.37) que el logaritmo de $X(t)$ está distribuido normalmente (condicional a $X(0) = x_0$) como sigue

$$\ln [X(t)] = \ln x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma\phi\sqrt{t} \quad (1.38)$$

La media y la varianza de $\ln[X(t)]$ son

$$\mathbb{E} \{ \ln [X(t)] \} = \ln x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \quad (1.39)$$

$X(t)$, es obviamente la exponencial de la variable normal definida en (1.38). Por lo tanto, se sigue que una distribución lognormal (una variable lognormal -al grado de ser un nombre poco apropiado- puede ser definida como la exponencial de una

⁸ Se proporciona una prueba en la sección de cálculo de Itô.

⁹ La razón intuitiva por la que cero es un estado absorbente es: si el precio de un activo hoy fuera cero con la expectativa más leve de que tome un valor positivo más adelante, un *arbitrageur* podría comprar el activo a discreción y sin ningún costo, creando una máquina de dinero.

variable aleatoria normal). Específicamente, la función de distribución lognormal es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t) \leq x\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma X}} \\ &\times \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t])^2}{\sigma^2 t}\right\} dX \end{aligned} \quad (1.40)$$

Como una $X(t)$ lognormal también significa una normal $\ln X(t)$, la expresión (1.40) puede redefinirse con una función de densidad de una normal como integrando. De hecho un cambio de variables

$$u \equiv \frac{\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]}{\sigma\sqrt{t}} \quad (1.41)$$

da como resultado

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t) \leq x\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]}{\sigma\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \Phi\left\{\frac{\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]}{\sigma\sqrt{t}}\right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

La función de densidad lognormal se puede obtener como sigue¹⁰, sean $f(X)$ y $g(Y)$, con $Y = h(X)$, entonces

$$f(X) = g(Y) \left| \frac{dY}{dX} \right| = g[h(X)] |h'(x)|$$

En este caso $Y = \ln X$ y

$$g(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t])^2}{\sigma^2 t}\right\}$$

con

$$|h'(x)| = \frac{1}{|X|}$$

se obtiene

$$f(X) = \frac{1}{\sigma X \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\ln X - [\ln x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t])^2}{\sigma^2 t}\right\}$$

para $X > 0$ y $f(X) = 0$, en otro caso.

¹⁰ Utilizando el teorema de cambio de variable, consultar [20].

1.6.1. Momentos de un movimiento geométrico Browniano

La función generadora de momentos de una variable $Y \sim \mathcal{N}(m, v^2)$ es

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Y}] = \exp\left(m\lambda + \frac{1}{2}v^2\lambda^2\right) \quad (1.43)$$

si se define

$$Y = \ln X(t)$$

entonces, la función generadora de momentos de una normal es una expresión directa de los momentos de una distribución lognormal

$$\mathbb{E}[X^\lambda(t)] = \exp\left(m\lambda + \frac{1}{2}v^2\lambda^2\right) \quad (1.44)$$

con

$$\begin{aligned} m &= \ln x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \\ v^2 &= \sigma^2 t. \end{aligned} \quad (1.45)$$

De estas ecuaciones se obtiene el momento de orden λ en t

$$\mathbb{E}[X^\lambda(t)] = x_0^\lambda \exp\left[\lambda\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2 t\right] \quad (1.46)$$

La esperanza de $X(t)$, condicional a $X(0) = x_0$

$$\mathbb{E}[X(t)] = x_0 \exp(\mu t) \quad (1.47)$$

el segundo momento

$$\mathbb{E}[X(t)^2] = x_0^2 \exp[2\mu t + \sigma^2 t] \quad (1.48)$$

y la varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t)] &= \mathbb{E}[X(t)^2] - [\mathbb{E}X(t)]^2 \\ &= x_0^2 \exp(2\mu t) [\exp(\sigma^2 t) - 1] \end{aligned} \quad (1.49)$$

La mediana, es decir, el valor de $X(t)$ en el que la probabilidad acumulada definida en (1.40) es 50 %, es

$$\text{mediana}[X(t)] = x_0 \exp\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \quad (1.50)$$

ésta es la ecuación (1.37) con $\phi = 0$ (el punto mediano de una distribución normal estándar). En general, el cuantil de una distribución lognormal es

$$\text{Cuantil}_k [X(t)] = x_0 \exp \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 + z_k \sigma \right) t \quad (1.51)$$

donde z_k se define como

$$k \equiv \Phi(z_k)$$

En $k = 50\%$, $z_k = 0$, (1.51) se reduce a (1.50). La moda –el punto máximo de la función de densidad– se obtiene al igualar a cero la derivada respecto a X de la función de densidad (es decir, del integrando en (1.40))

$$\text{moda} [X(t)] = x_0 \exp \left(\mu - \frac{3}{2} \sigma^2 \right) t \quad (1.52)$$

Por lo tanto

$$\text{moda} < \text{mediana} < \text{media}$$

La desigualdad mediana $<$ media es solo una expresión del sesgo a la izquierda de la distribución lognormal. Lo que significa que es probable que una realización de $X(t)$ será más pequeña que su esperanza $x_0 e^{\mu t}$.

Reescribiendo la ecuación (1.36) como

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.53)$$

y observando la dinámica de dX/X la media aumentará con el tiempo para una μ positiva. La varianza seguirá aumentando con el tiempo. Cuando el horizonte de tiempo va al infinito, la distribución normal degenera hacia una línea recta, resultando una distribución con varianza infinita.

Observe también que de (1.53) el rendimiento dX/X se distribuye normalmente con media μdt y varianza $\sigma^2 dt$. La comparación de (1.53) y (1.38) muestra que la tendencia dX/X y $d \ln X$ difieren por $1/2 \sigma^2 dt$. A diferencia del cálculo ordinario donde $d \ln X = dX/X$ se necesitan nuevas reglas de cálculo para abordar el movimiento Browniano. La siguiente sección tratará sobre este tema.

1.7. Cálculo de Itô

1.7.1. Integrales de: Riemann-Stieljes, Stratonovitch e Itô

En las secciones (1.4) y (1.6) se presentó el movimiento aritmético Browniano y el movimiento geométrico Browniano ambos en sus formas diferencial e integral, sin explicar la relación entre ambas. Con este objetivo, es necesario dar el significado a la expresión

$$\int_0^t f(s) dW(s) \quad (1.54)$$

donde, para dar ejemplos, $f(s)$ es σ en el modelo del movimiento Browniano aritmético y σS en el modelo del movimiento geométrico Browniano. Tal vez el lector tenga conocimiento del cálculo y puede ser tentado a utilizar la definición convencional de la integral de Riemann-Stieljes para evaluar (1.54). Intente eso. Primero, particione el intervalo de tiempo $(0, t)$ en subintervalos, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = t$. En este contexto la integral se puede definir como

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{\max_i |s_{i+1} - s_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\hat{s}_i) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \quad (1.55)$$

donde $s_i \leq \hat{s}_i \leq s_{i+1}$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Es un resultado bien conocido que en un contexto determinista, no importa donde esté s_i en el subintervalo (s_i, s_{i+1}) , la integral de Riemann-Stieljes converge hacia el mismo valor¹¹. Se puede probar que, mientras f no sea estocástica en (1.55), la posición de \hat{s}_i es irrelevante y la integral de Riemann-Stieljes existe. Por ejemplo, considere la forma diferencial de un movimiento aritmético Browniano

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.56)$$

Porque σ no es estocástica, utilizando la integral de Riemann-Stieljes

$$\int_0^t dX(s) = \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW(s) \quad (1.57)$$

y la forma integral de un movimiento Browniano aritmético es

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t) \quad (1.58)$$

Sin embargo, cuando $f(s)$ es estocástica, por ejemplo, en un movimiento geométrico Browniano donde $f(s) = \sigma S(s)$, el uso de la integral de Riemann-Stieljes puede ser problemático como se muestra en el siguiente ejemplo

¹¹ cuando las condiciones de convergencia se cumplen.

Ejemplo 1.7.1. Se desea evaluar

$$\int_0^t W(s) dW(s)$$

Para que la integral de Riemann-Stieljes converja, es necesario verificar que la posición de \widehat{s}_i en el subintervalo (s_i, s_{i+1}) no afecte el valor de la integral según lo definido en (1.55). Para hacer esto, calcule la diferencia entre la integral –denotada por J – en $\widehat{s}_i = s_{i+1}$, y la integral –denotada por I – en $\widehat{s}_i = s_i$. También, por simplicidad, suponga n subintervalos de igual longitud Δs cada uno, es decir, $\Delta s = s_{i+1} - s_i$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$, y $n\Delta s = t$

$$I \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} W(s_i) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \quad (1.59)$$

$$J \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} W(s_{i+1}) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \quad (1.60)$$

entonces

$$\mathbb{E}(J - I) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) = n\Delta s = t \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \{ [W(s_{i+1}) - W(s_i)]^2 \}^2 \quad (1.62) \\ &= [\phi_1^2(s_1 - s_0) + \phi_2^2(s_2 - s_1) + \dots + \phi_n^2(s_n - s_{n-1})]^2 \\ &= (\Delta s)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^4 + \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} \phi_i^2 \phi_j^2 (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \end{aligned}$$

donde las ϕ 's son variables independientes normales estándares. Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(J - I)^2 &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[(\Delta s)^2 \left\{ \mathbb{E} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^4 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left\{ \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} \phi_i^2 \phi_j^2 (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) \right\} \right] \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} [3n(\Delta s)^2 + n(n-1)(\Delta s)^2] \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} [2t\Delta s + t^2] \\ &= t^2. \end{aligned}$$

Entonces la varianza de la diferencia entre las integrales es

$$\text{Var}(J - I) = \mathbb{E}(J - I)^2 - [\mathbb{E}(J - I)]^2 = t^2 - t^2 = 0 \quad (1.63)$$

La diferencia $(J - I)$ tiene media t y varianza cero. Se dice que converge a t en media cuadrática. Formalmente, se puede definir la convergencia en media cuadrática en este contexto como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{i=0}^{n-1} \{ [W(s_{i+1}) - W(s_i)]^2 - t \}^2 = 0 \quad (1.64)$$

A partir de las definiciones de I y J en (1.63) y (1.64) se concluye que éstas son afirmaciones equivalentes. Los resultados anteriores de convergencia se obtienen aún si los subintervalos de tiempo son desiguales.

Dado que el límite cambia con la posición del \widehat{s}_i , la integral de Riemann–Stieljes no converge. Por lo tanto se debe definir una nueva integral (para pagar el costo). Tal integral –a diferencia de la integral de Riemann–Stieljes– incluye en su definición la posición de \widehat{s}_i . Obviamente, hay un número infinito de posiciones que s_i podría tomar en el subintervalo (s_i, s_{i+1}) ; así pues, técnicamente se podría definir un número infinito de integrales. De hecho, dos de éstas que satisfacen la condición pedida son

(i) La integral de Stratonovitch, donde $\widehat{s}_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})$:

$$S - \int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \quad (1.65)$$

(ii) y la integral de Itô, donde $\widehat{s}_i = s_i$:

$$I - \int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \quad (1.66)$$

Nota: Por conveniencia, se omitirá la “I–” al tratar integrales de Itô en lo que sigue. Todas las integrales estocásticas se supondrá son integrales de Itô a menos que se indique lo contrario.

La integral I en la ecuación (1.59) es un ejemplo de una integral de Itô. La función $f(s_i)$ entonces se dice es no anticipativa, porque se evalúa al inicio del subintervalo del tiempo (s_i, s_{i+1}) . También algo importante de mencionar es la trascendencia del símbolo “=” en (1.65) y (1.66).

A diferencia de la definición de la integral Riemann–Stieljes en un contexto determinista (donde la integral es igual a un número), las integrales de Stratonovitch y de Itô pueden ser aleatorias, y son “iguales” a una cantidad en el sentido que convergen hacia esa cantidad en media cuadrática. Ahora se discuten las integrales de Stratonovitch y de Itô en referencia al ejemplo previo.

Ejemplo 1.7.2. ¿Cómo se puede calcular explícitamente el valor de $\int_0^t W(s)dW(s)$ en el sentido de Itô?. Por la definición de integral de Itô

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} W(s_i) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] = I \quad (1.67)$$

como en la ecuación (1.59). Se sabe ya del ejemplo previo que $J - I$ es igual a t (en el sentido de media cuadrática). Ahora evalúe $I + J$

$$\begin{aligned} I + J &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [W(s_{i+1}) + W(s_i)] [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} [W(s_{i+1})^2 - W(s_i)^2] = W(t)^2 \end{aligned} \quad (1.68)$$

A partir de los valores de $(J - I)$ y de $(J + I)$, se infiere I y J :

$$I = \frac{W(t)^2 - t}{2} \quad (1.69)$$

y

$$J = \frac{W(t)^2 + t}{2} \quad (1.70)$$

Se puede comprobar que la integral de Stratonovitch, evaluada en $\widehat{s}_i = \frac{1}{2}[s_i + s_{i+1}]$, es

$$\begin{aligned} S - \int_0^t W(s)dW(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right) [W(s_{i+1}) - W(s_i)] \\ &= \frac{1}{2}W(t)^2 \end{aligned} \quad (1.71)$$

el cuál es el valor de la integral $\int_0^t W(s)dW(s)$ de cálculo estándar, siendo $W(\cdot)$ una función determinista.

Esta característica de la integral de Stratonovitch –es decir, que preserva las reglas del cálculo estándar– se han visto a menudo como una ventaja. La integral

de Itô, sin embargo, suele adecuarse mejor con la intuición económica. Por ejemplo, la media y la varianza condicional de un proceso son calculadas por los agentes económicos al tiempo t con base al conjunto de información disponible para ellos al tiempo t . Por el contrario, hay un elemento de previsión perfecta en la definición de la integral de Stratonovitch que es difícil de justificar intuitivamente en economía y finanzas. Además, la propiedad de martingala de la integral de Itô –discutida más adelante– muestran tener características deseables para su cálculo. Según lo mencionado antes, se utilizará exclusivamente la formulación de Itô al discutir integrales y diferenciales estocásticas.

1.7.2. Lema de Itô

El lema de Itô será la herramienta a utilizar en un número de desarrollos subsecuentes y, como tal, merece una atención especial. En su formulación heurística¹², es solo una expansión de Taylor *cum* una tabla de reglas de diferenciación estocástica. Se discute ahora esta tabla y el lema, para después dar ejemplos y aplicaciones.

La tabla de multiplicación consiste en los resultados del Cuadro 1.1.

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Cuadro 1.1: Reglas básicas de diferenciación estocástica.

Recordando de la sección movimiento Browniano aritmético que cualquier cantidad más pequeña que dt (denominada $o(dt)$) es despreciable. Con este antecedente, se prueban las reglas de multiplicación:

- Regla 1: $(dt)^2 = 0$

$$(dt)^2 = o(dt) \tag{1.72}$$

ya que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} = 0$, la regla se cumple.

- Regla 2: $dW \times dt = dt \times dW = 0$: $dW \times dt$ es una variable aleatoria con

$$\mathbb{E}(dW dt) = dt \mathbb{E}(dW) = 0 \tag{1.73}$$

¹² es decir, es matemáticamente incorrecto. Como contrapunto, se dice también que un poco de imprecisión ahorra toneladas de explicación.

y

$$\begin{aligned}\text{Var}(dW dt) &= (dt)^2 \text{Var}(dW) \\ &= (dt)^2 \text{Var}(\phi \sqrt{dt}) \\ &= (dt)^3 \\ &= o(dt)\end{aligned}$$

Una variable aleatoria con varianza infinitesimalmente pequeña “igual a” su esperanza, en este caso cero. Porque una variable aleatoria, no puede, en sentido estricto, ser igual a una cantidad conocida, se utilizan comillas. En este contexto “igual a cero” significa que “converge a cero en media cuadrática.”¹³

- Regla 3: $(dW)^2 = dt$: la esperanza de $(dW)^2$

$$\mathbb{E}(dW)^2 = \mathbb{E}(\phi \sqrt{dt})^2 = dt \quad (1.74)$$

y varianza

$$\begin{aligned}\text{Var} [(dW)^2] &= \mathbb{E}(dW)^4 - [\mathbb{E}(dW)^2]^2 \\ &= (dt)^2 \mathbb{E}(\phi^4) - (dt)^2 \\ &= 2(dt)^2 \\ &= o(dt)\end{aligned} \quad (1.75)$$

Por lo tanto, la variable aleatoria $(dW)^2$ converge a dt en media cuadrática (“igual a” dt).

A continuación se establece el lema de Itô. Considere un proceso estocástico general, denominado proceso de Itô de la forma

$$dX(t) = \mu [X(t), t] dt + \sigma [X(t), t] dW(t) \quad (1.76)$$

Considere una función $f[X(t), t]$. f es dos veces diferenciable con respecto a $X(t)$ y t . Debido a la regla $(dW)^2 = dt$ es conveniente calcular la diferencial total de $f[X(t), t]$ considerando los términos de segundo orden en una expansión en serie de Taylor de la siguiente manera

$$\begin{aligned}df [X(t), t] &= \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} dX dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \dots\end{aligned} \quad (1.77)$$

¹³ Véase el ejemplo (1.7.1) para una discusión de la convergencia en media cuadrática.

De acuerdo con las reglas de diferenciación, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \left(\mu [X(t), t] dt + \sigma [X(t), t] dW(t) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \left(\mu [X(t), t] (dt)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\mu [X(t), t] \sigma [X(t), t] (dt)(dW) + \sigma^2 [X(t), t] dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 [X(t), t] dt \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t} dX dt = 0 \quad (1.79)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 = 0 \quad (1.80)$$

Al sustituir (1.76), (1.78), (1.79), y (1.80) en (1.77), se obtiene el lema de Itô

$$\begin{aligned} df [X(t), t] &= \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mu [X(t), t] + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 [X(t), t] \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma [X(t), t] dW(t) \end{aligned} \quad (1.81)$$

El lema expresado en su forma integral es

$$\begin{aligned} f [X(t), t] &= f [X(0), 0] \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mu [X(s), s] + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 [X(s), s] \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X} \sigma [X(s), s] dW(s) \end{aligned} \quad (1.82)$$

Cuando f no es una función explícita de t , se tiene una versión más sencilla de (1.81):

$$\begin{aligned} df [X(t)] &= \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mu [X(t), t] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 [X(t), t] \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma [X(t), t] dW(t) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Las expresiones anteriores aplican a procesos de Itô en general y serán utilizados en el contexto de procesos estocásticos específicos. Por ejemplo, para el movimiento Browniano geométrico, $\mu[X(t), t] = \mu X$ y $\sigma[X(t), t] = \sigma X$. Las ecuaciones (1.81) y (1.83) se transforman en

$$df [X(t), t] = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mu X + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma X dW(t) \quad (1.84)$$

y

$$df [X(t)] = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \mu X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma X dW(t) \quad (1.85)$$

Ejemplo 1.7.3. Forma integral del movimiento geométrico Browniano. Se desea obtener la forma integral correspondiente a la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \mu X(t)dt + X(t)dW(t)$$

Sea $f[X(t)] = \ln X(t)$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{X}, \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}$$

Al sustituir los valores de las derivadas en (1.85) se obtiene

$$d \ln X(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \quad (1.86)$$

Observe que

$$\begin{aligned} d \ln X(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \\ &= \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (1.87)$$

Observe también que si X es una variable real, la derivada $d \ln X = \frac{dX}{X}$. Sin embargo, si $X(t)$ es conducida por un movimiento geométrico Browniano, esta regla no se cumple, porque se tiene un término adicional: $\frac{1}{2} \sigma^2 dt$, como en (1.87).

Integrando (1.86) de 0 a t

$$\int_0^t d \ln X(s) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW(s)$$

se obtiene

$$\ln X(t) = \ln X(0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)$$

aplicando la exponencial de ambos lados se obtiene

$$X(t) = X(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \right].$$

Ejemplo 1.7.4. Paradoja de Siegel. El tipo de cambio US dólar/Euro X sigue un movimiento geométrico Browniano

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$$

Denote por Y el tipo de cambio Euro/US dólar. Entonces $Y \equiv 1/X$, y

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{1}{X^2}, \quad y \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = \frac{2}{X^3}$$

si se sustituyen las derivadas en (1.85) se obtiene la dinámica del tipo de cambio Euro/dólar

$$\begin{aligned} dY &= \left(-\frac{1}{X^2}\mu X + \frac{1}{2}\frac{2}{X^3}\sigma^2 X^2 \right) dt - \frac{1}{X^2}\sigma X dW \\ dY &= \frac{1}{X} [(\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dW] \\ \frac{dY}{Y} &= (\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dW \end{aligned} \tag{1.88}$$

Una comparación de las ecuaciones diferenciales estocásticas para X e Y puede revelar una paradoja de dimensiones interesantes:

1. Si $\sigma^2 > \mu > 0$, entonces $\mathbb{E}(dY/Y)$ y $\mathbb{E}(dX/X)$ son positivas, y X e Y van a infinito cuando el tiempo va al infinito, aunque $Y = 1/X$.
2. Si $\sigma^2 = 2\mu$, entonces $\mathbb{E}(dY/Y) = \mathbb{E}(dX/X)$. Es decir, uno debería esperar que el tipo de cambio Euro/dólar y el tipo de cambio dólar/Euro crezcan a la misma tasa. Por ejemplo, si $\sigma^2 = 2\mu = 0.1\%$, y $X_0 = Y_0 = 1$ en el año cero, entonces uno debe esperar que tanto X como Y sean 1.0005 (ó e^μ) un año después.
3. El resultado “intuitivo”: $\mathbb{E}(dY/Y) = -\mathbb{E}(dX/X)$ (o sea, $\mathbb{E}(Y) = 1/\mathbb{E}(X)$ para toda t) se obtiene solamente cuando $\sigma = 0$, es decir, en un mundo determinista.

La paradoja se llama la paradoja de Siegel y es la expresión de la desigualdad de Jensen¹⁴.

Ejemplo 1.7.5. Funciones potencia. Una variable X sigue un movimiento geométrico Browniano

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$$

Encuentre el proceso seguido por la variable $Y = X^n$. Las derivadas son

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = nX^{n-1} \quad y \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = n(n-1)X^{n-2}$$

En virtud de (1.85), el proceso seguido por Y es

$$\frac{dY}{Y} = \left(n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2 \right) dt + n\sigma dW \quad (1.89)$$

Por lo tanto, una variable aleatoria lognormal elevada a la potencia n es también una variable aleatoria lognormal. Observe dos aplicaciones de (1.89)

1. La esperanza de $Y = X^n$ se sigue directamente:

$$\mathbb{E}[X(t)]^n = X(0)^n \exp \left[n\mu - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2 \right] t. \quad (1.90)$$

Ésta es la fórmula para los momentos de una caminata aleatoria lognormal. Por lo tanto se ha recuperado con el lema de Itô a (1.46), la cual se había obtenido en la sección anterior usando la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal. Resulta que el lema de Itô proporciona una manera de calcular los momentos de procesos más generales. Se tratará sobre este punto en la siguiente sección.

2. La esperanza del valor presente P

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-rt} X^n dt \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(X^n) dt \end{aligned}$$

¹⁴ La desigualdad de Jensen consiste en que para una función convexa f y una variable aleatoria X :

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f[\mathbb{E}(X)].$$

también se puede calcular. De la ecuación (1.90), la esperanza del valor presente es

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty X(0)^n \exp \left[n\mu - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2 \right] t dt \\ &= \frac{X(0)^n}{r - n\mu - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2} \end{aligned}$$

Siempre que el denominador sea positivo y $n > 1$, la esperanza del valor presente aumenta con μ y σ .

Ejemplo 1.7.6. Contratos a plazo. Se sabe que el precio *forward* F al tiempo t de un activo que no paga dividendos con precio X a ser entregado al tiempo $T \geq t$ es

$$F = X e^{r(T-t)}.$$

Suponga que X sigue un movimiento geométrico Browniano

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &= e^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= -r X e^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} &= 0 \end{aligned}$$

En virtud de (1.84), la dinámica para F es

$$\frac{dF}{F} = (\mu - r)dt + \sigma dW.$$

Ejemplo 1.7.7. La integral $\int_0^t W(s)dW(s)$. Recordando el cálculo directo de la integral $\int_0^t W(s)dW(s)$, que se había calculado con algo de trabajo y principios básicos en la subsección anterior. Con este objetivo, se utilizará la forma integral del lema de Itô. Sea

$$X(t) \equiv W(t) \quad y \quad f[X(t)] \equiv W(t)^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} &= 2W \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} &= 2 \end{aligned}$$

De la ecuación (1.82), con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se tiene que

$$W^2(t) = W^2(0) + \int_0^t ds + \int_0^t 2W(s)dW(s)$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{W^2(t) - t}{2}$$

Ejemplo 1.7.8. La integral $\int_0^t s dW(s)$. Sean

$$X(t) \equiv W(t), \quad y \quad f[X(t)] \equiv tW(t)$$

y calculando las derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} &= t \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= W(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la integral bajo estudio se obtiene directamente de (1.82):

$$\int_0^t s dW(s) = tW(t) - \int_0^t W(s)ds.$$

Ejemplo 1.7.9. La expresión

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left[\int_0^t \left(-\frac{1}{2} \lambda^2 ds + \lambda dW(s) \right) \right] \right\}$$

Sea X una variable conducida por un movimiento Browniano aritmético

$$dX = -\frac{1}{2} \lambda^2 dt + \lambda dW$$

con $X(0) = 0$. Según lo mostrado anteriormente, la forma integral para $X(t)$ es

$$X(t) = \int_0^t \left[-\frac{1}{2} \lambda^2 ds + \lambda dW(s) \right]$$

Con $Y(t) \equiv \exp[X(t)]$, se tiene

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = \exp[X(t)]$$

Por la ecuación (1.85)

$$\frac{dY}{Y} = \lambda dW$$

De esta manera la esperanza al tiempo cero es

$$\mathbb{E}[Y(t)] = Y(0) = 1$$

Por sustitución, esto implica la siguiente igualdad al tiempo cero

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left[\int_0^t \left(-\frac{1}{2} \lambda^2 ds + \lambda dW(s) \right) \right] \right\} = 1 \quad (1.91)$$

Como se discutirá más adelante, se dice que $Y(t)$ es una martingala puesto que su valor esperado es siempre 1 en este caso. La ecuación (1.91) es particularmente relevante en el Teorema de Girsanov¹⁵ y temas relacionados. También observe que la ecuación (1.91) habría podido ser deducida directamente de la expresión de la función generadora de momentos del movimiento Browniano aritmético.

A continuación se discutirá la versión multidimensional del lema de Itô y se proporcionan algunos ejemplos ilustrativos.

1.8. Lema de Itô multidimensional

Considere las variables X_1, X_2, \dots, X_n conducidas por procesos de Itô de la forma

$$dX_i(t) = \mu_i[\tilde{X}(t), t]dt + \sigma_i[\tilde{X}(t), t]dW_i(t)$$

para toda $i = 1, 2, \dots, n$. $\tilde{X}(t)$ es un vector renglón de dimensión n definido como X_1, X_2, \dots, X_n . Cada variable X_i es caracterizada por su propia tendencia (*drift*) μ_i , varianza σ_i y procesos de Wiener dW_i . Mientras que estos procesos dW_i siguen distribuciones normales con media cero y varianza dt según lo explicado antes, no son iguales en el sentido de que cada uno se muestrea de diferente distribución normal estándar. Suponga coeficientes de correlación constantes entre los procesos de Wiener, para toda $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$dW_i dW_j = \rho_{ij} dt \quad (1.92)$$

donde $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, y $\rho_{ij} = 1$ cuando $i = j$. Se puede inferir el lema de Itô para una función de la forma $f(X_1, X_2, t)$. Recuerde que:

$$dW_i dt = 0 \quad (1.93)$$

¹⁵ Consultar capítulo 7 de [26].

La expansión de Taylor de la función de f es:

$$\begin{aligned} df(X_1, \dots, X_n, t) &= \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} dX_i dX_j \end{aligned}$$

Esto puede ser reescrito como sigue

$$\begin{aligned} df &= \left[\sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial f}{\partial X_i} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} + \sum_{i \neq j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} \right] dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial f}{\partial X_i} dW_i \end{aligned} \quad (1.94)$$

En el caso particular de un movimiento geométrico Browniano de dos dimensiones

$$\begin{aligned} \mu_1 [\tilde{X}(t), t] &= \mu_1 X_1; & \mu_2 [\tilde{X}(t), t] &= \mu_2 X_2; \\ \sigma_1 [\tilde{X}(t), t] &= \sigma_1 X_1; & \sigma_2 [\tilde{X}(t), t] &= \sigma_2 X_2; \end{aligned}$$

donde $\tilde{X}(t)$ es (X_1, X_2) . Entonces

$$\begin{aligned} df(X_1, X_2, t) &= \left[\frac{\partial f}{\partial X_1} \mu_1 X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \mu_2 X_2 + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} X_1 X_2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} \sigma_1^2 X_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \sigma_2^2 X_2^2 \right] dt \\ &+ \frac{\partial f}{\partial X_1} \sigma_1 X_1 dW_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \sigma_2 X_2 dW_2 \end{aligned} \quad (1.95)$$

Ejemplo 1.8.1. El precio en moneda extranjera de un activo. Se desea identificar, por ejemplo, el proceso estocástico seguido por el precio en dólares de E.U. de un activo Británico. Si X_1 y X_2 , definidos respectivamente como el precio del activo en libras esterlinas y el tipo de cambio (medido como el número de dólares de E.U. por libra esterlina), obedecen los siguientes procesos:

$$\frac{dX_1}{X_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1$$

y

$$\frac{dX_2}{X_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2$$

con

$$dW_1 dW_2 = \rho_{12} dt$$

Sea $Y \equiv f(X_1, X_2) = X_1 X_2$ el precio en dólares de E.U. del activo británico. Entonces se puede utilizar la ecuación (1.95) con

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_1} &= X_2; & \frac{\partial f}{\partial X_2} &= X_1; & \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} &= 1; & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

para obtener el proceso seguido por Y

$$\frac{dY}{Y} = (\mu_1 + \mu_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}) dt + \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2$$

El proceso para Y se puede expresar también en función de un solo proceso de Wiener W :

$$\frac{dY}{Y} = (\mu_1 + \mu_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}) dt + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} dW \quad (1.96)$$

con dW definido como

$$dW = \frac{\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}}. \quad (1.97)$$

Se puede verificar fácilmente que los momentos de dW definido en (1.97), son los momentos de un proceso de Wiener estándar ($\mathbb{E}(dW) = 0$; $\mathbb{E}[(dW)^2] = dt$) como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(dW) &= \mathbb{E} \left[\frac{\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}} \right] \\ &= \frac{\sigma_1 \mathbb{E}(dW_1) + \sigma_2 \mathbb{E}(dW_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(dW)^2 &= \mathbb{E} \left[\frac{\sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}} \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\sigma_1^2 (dW_1)^2 + \sigma_2^2 (dW_2)^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 (dW_1)(dW_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \right] \\ &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}) dt}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} \\ &= dt. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8.2. Regla del cociente de dos movimientos geométricos Brownianos. Suponga que se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} dX_1 = \mu_1 X_1 dt + \sigma_1 dW_1, \\ dX_2 = \mu_2 X_2 dt + \sigma_2 dW_2, \end{cases}$$

con

$$\text{Cov}(dW_1, dW_2) = \rho_{12} dt,$$

y

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Encuentre el proceso seguido por $Y = f(X_1, X_2) = X_1/X_2$. En este caso se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{1}{X_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial X_2} = -\frac{X_1}{X_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{1}{X_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = -\frac{2X_1}{X_2^3},$$

La aplicación de (1.95) conduce a

$$\frac{dY}{Y} = (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2 - \sigma_{12}) dt + \sigma_1 dW_1 - \sigma_2 dW_2 \quad (1.98)$$

ó

$$dY = \frac{X_2 dX_1 - X_1 dX_2}{X_2^2} + Y (\sigma_2^2 - \sigma_{12}) \quad (1.99)$$

Observe que la regla de diferenciación estocástica para el cociente es diferente de la regla de la diferencial de un cociente en el caso de variables reales X_1 y X_2 en el término $(\sigma_2^2 - \sigma_{12})$.

1.9. Martingalas

El concepto de martingala desempeña un papel esencial en el modelado de los mercados financieros y en la valuación teórica de muchos instrumentos financieros. En esta sección se estudia la relación entre martingalas y el movimiento Browniano.

1.9.1. Definiciones y ejemplos

Un proceso estocástico $\{M_n\}_{n \geq 1}$ es una martingala si $\mathbb{E}[M_n]$ es finita para toda n y si

$$\mathbb{E}[M_{n+t} | M_0, M_1, \dots, M_n] = M_n \quad (1.100)$$

Es decir, la observación de hoy del proceso es un estimador insesgado de los valores futuros de M . Si

$$\mathbb{E}[M_{n+t} | M_0, M_1, \dots, M_n] \geq M_n \quad (1.101)$$

entonces $\{M_n\}_{n \geq 1}$ es una *submartingala*. Es una *supermartingala* si

$$\mathbb{E}[M_{n+t} | M_0, M_1, \dots, M_n] \leq M_n. \quad (1.102)$$

Las definiciones anteriores se cumplen para procesos discretos M . Análogamente, se puede definir un martingala en tiempo continuo M como un proceso donde $\mathbb{E}(M_t)$ es finita para toda t y

$$\mathbb{E}_t[M_T] = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] = M_t \quad (1.103)$$

donde \mathcal{F}_t es el conjunto de información acumulada hasta el tiempo t .

Ejemplo 1.9.1. Considere una caminata aleatoria donde

$$M_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$M(t)$ es la suma de variables aleatorias Z_i que toman los valores $\Delta X > 0$ y $-\Delta X > 0$ con probabilidad p y q , respectivamente. De esta manera, $\mathbb{E}(Z_i) = (p - q)\Delta X$. La esperanza condicional de M_{n+1} , es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | M_0, M_1, \dots, M_n] &= \mathbb{E}[M_n | M_0, M_1, \dots, M_n] \\ &\quad + \mathbb{E}[Z_{n+1} | M_0, M_1, \dots, M_n] \\ &= M_n + (p - q)\Delta X \end{aligned} \quad (1.104)$$

La sucesión $[M_n - n(p - q)\Delta X]$ es una martingala porque

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - (n + 1)(p - q)\Delta X | M_0, M_1, \dots, M_n] = M_n - n(p - q)\Delta X \quad (1.105)$$

Esto resulta directamente de (1.104). Claramente, si $p = q = 1/2$, entonces M_n es una submartingala. Si $p > q$, M_n es una submartingala. Si $p < q$, M_n es una supermartingala.

Ejemplo 1.9.2. Considere la sucesión M_n definida por

$$M_n = Z_1 Z_2 \dots Z_n$$

donde

$$\mathbb{E} [Z_i] = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n [M_{n+1}] &= \mathbb{E}_n [M_n Z_{n+1}] \\ &= M_n \mathbb{E}_n [Z_{n+1}] \\ &= M_n \end{aligned}$$

por lo que M_n es una martingala.

Ejemplo 1.9.3. El precio de un activo S es conducido por un movimiento geométrico Browniano

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

Bajo estas condiciones

$$\mathbb{E}_t [S_T] = S_t e^{\mu(T-t)}$$

Se concluye que $S_t e^{-\mu(T-t)}$ es una martingala ya que

$$\mathbb{E}_t [S_T e^{\mu(T-t)}] = S_t.$$

El resultado anterior se debe a que los incrementos son conducidos por un movimiento Browniano, que es una martingala. Si el movimiento Browniano no tiene tendencia ($\mu = 0$), entonces el precio del activo S_t es una martingala.

1.9.2. Martingalas y movimiento Browniano

En esta sección se muestra que algunas expresiones del movimiento Browniano son martingalas. Considere las expresiones

$$M_1(t) = W(t) \tag{1.106}$$

$$M_2(t) = W^2(t) - t \tag{1.107}$$

$$M_3(t) = \exp\left(\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right) \tag{1.108}$$

Se afirma que las expresiones anteriores son martingalas. Considere a (1.106)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [(W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [W_t - W_s | \mathcal{F}_t] + W_s \\ &= 0 + W_s. \end{aligned}$$

Para (1.107)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [W_t^2 - 2W_tW_s + W_s^2 - W_s^2 - W_s^2 + 2W_tW_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 + 2W_tW_s - 2W_s^2 | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2W_s \mathbb{E} [(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [W_{t-s}^2 | \mathcal{F}_s] + 2W_s \mathbb{E} [W_{t-s} | \mathcal{F}_s] \\
 &= t - s.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E} [W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = t - s.$$

Para (1.108)

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda W(t) - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right) | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} [\exp(\lambda W(t)) | \mathcal{F}_s] + \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda^2 (t - s) \right)$$

Se sabe la función generadora de momentos de un proceso de Wiener por (1.15) con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, entonces

$$\mathbb{E} [\exp(\lambda W(t)) | \mathcal{F}_s] = \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda^2 (t - s) \right)$$

lo que resulta en

$$\mathbb{E} [M_3(t) | \mathcal{F}_s] = 1$$

pero $M_3(s) = 1$. Por lo tanto, $M_3(t)$ es una martingala.

1.10. Notas

Los tecnicismos detrás de las integrales de Itô y del cálculo estocástico pueden ser complicados. Øksendahl (2000) es una rigurosa pero accesible introducción a los aspectos matemáticos de los procesos de Itô y el movimiento Browniano. Shreve (2004) es particularmente amigable para estudiantes y tiene varias aplicaciones en finanzas.

Capítulo 2

Opciones financieras

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta una introducción a los productos derivados haciendo énfasis en las opciones financieras, su historia, sus características generales, los factores que intervienen en la determinación de su precio. Asimismo, se presenta un resumen del Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV y las opciones sobre dicho indicador.

2.2. Derivados

Un producto derivado se puede definir como un contrato privado cuyo valor depende de algún activo subyacente como una tasa, una acción, un bono, una divisa o un *commodity*.

Los derivados abarcan desde componentes estructurales simples, como los contratos lineales: contratos adelantados (*forward*), futuros; opciones y *swaps*, hasta productos más complejos como son las opciones exóticas o las notas estructuradas.

Los derivados son activos financieros que tienen una gran importancia en las decisiones financieras actuales, se han convertido en una herramienta indispensable para la administración del riesgo debido a que proveen un método de bajo costo y efectivo para administrar la exposición de las fluctuaciones de las tasas de interés, precios de *commodities*, tipos de cambio e inclusive sobre el clima.

Los dos principales mercados donde se llevan a cabo operaciones con instrumentos derivados son:

- (i) Bolsas;
- (ii) Fuera del mostrador (*Over-the-Counter*)¹.

Los derivados negociados en mercados organizados difieren en dos aspectos de los derivados negociados *Over The Counter* (OTC). La primera diferencia es que los contratos negociados en un mercado organizado son casi siempre estandarizados, es decir, tienen características bien definidas y todos los contratos de un mismo tipo son exactamente iguales. Esto se hace con el objetivo de dar liquidez, los contratos son más baratos. Para algunos participantes del mercado, esta liquidez representa ciertas desventajas porque puede pasar que el activo subyacente no tenga las características deseadas por los participantes del mercado, pero en general la estandarización ha probado ser una característica deseable entre los participantes del mercado.

La segunda diferencia de los contratos negociados en un mercado organizado es que los contratos son realizados con una entidad regulatoria llamada cámara de compensación², y no con un banco. Para garantizar que el contrato se cumpla por las partes, el mercado organizado elimina el riesgo de crédito mediante la figura y los lineamientos de la cámara de compensación, en caso de que alguna de las partes no cumpla con un pago, la cámara interviene y cubre el pago.

2.3. Historia y desarrollo de los mercados de opciones

El inicio de las opciones se dio en los países Bajos. En 1688 un judío español José de la Vega. Fué hasta fines del siglo pasado que se atacó desde el punto de vista matemático el problema de fijar el precio de una opción. Hacia 1900 en Francia, el matemático Louis Bachelier presenta la primera fórmula para calcular el precio de la opción. En 1968 cuando ya se conocía el Chicago Board of Trade por

¹ El mercado *Over The Counter*, OTC, es un sistema de cotización de valores donde los participantes negocian directamente entre ellos, sin la intermediación de una bolsa o de un piso de remate. Las operaciones se realizan a través de redes de cómputo o telefónicas que vinculan entre sí a los agentes de todo el mundo.

² Institución en un mercado de derivados que es la contraparte de cualquier transacción y que asegura el cumplimiento de los contratos. En el MexDer es ASIGNA.

sus contratos de futuros, comenzó un estudio sobre la posibilidad de introducir contratos de futuros sobre acciones de bolsa, pero dicho estudio terminó recomendando opciones sobre acciones. De esta manera surgió en 1972 el Chicago Board Options Exchange (CBOE) que comercializaba opciones sobre acciones en bolsa, teniendo un éxito espectacular. Cinco años después se comenzaron a negociar opciones tipo *put* en nuevas bolsa de valores como AMEX, Philadelphia, Pacific y MidWest. La creación de este mercado permitió que hubiera flexibilidad en estrategias de especulación y cobertura una de las características principales de las opciones.

A pesar del gran desarrollo de las opciones que existió en la década de los 70's, los mercados internacionales se enfrentaron al gran problema de las fluctuaciones en tipos de cambio y tasas de interés. Los mercados vieron la necesidad de introducir instrumentos para especular y cubrirse de dichos movimientos. Esto dio origen al mercado de contratos a futuros y a medida del éxito que tuvieron las bolsas comenzaron a ver la posibilidad de ofrecer opciones sobre contratos de futuros.

En octubre de 1982 el Chicago Board of Trade comenzó a negociar opciones sobre contratos de futuros sobre *T-Bonds*³ Tres años después se introdujeron las opciones sobre un contrato a futuro cuyo subyacente era el eurodólar.

A partir del 15 de diciembre de 1998, con base en diversos estudios de la BMV y el marco regulatorio establecido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), inicia operaciones el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), luego de dos años de negociaciones para su aplicación, con el propósito de incorporar a los participantes nacionales en la creciente industria global de derivados, especialmente los vinculados con valores subyacentes mexicanos. La inversión total para la puesta en marcha del mercado fue inferior a los 14 millones de dólares. El contrato del dólar fue el primero en cotizar con un tamaño adecuado para permitir que tesorerías de empresas medianas y pequeñas, así como personas físicas, pudieran beneficiarse de una mayor certidumbre sobre el tipo de cambio. Las operaciones se realizaron a viva voz.[23]

³ Los *T-Bonds* son los instrumentos que reflejan las tasas de interés de largo plazo en Estados Unidos.

2.4. Opciones financieras

La formación de portafolios con un equilibrio adecuado entre riesgo y rendimiento es un objetivo básico de la ingeniería financiera. Uno de los instrumentos que actúan como seguros contra contingencias financieras son las opciones. En un ambiente de extrema volatilidad, estos instrumentos proporcionan al inversionista un mecanismo para inmunizar un portafolio contra cambios adversos en los mercados financieros con bajos costos de transacción. [17]

Una opción es un producto derivado que por el pago de una prima da a su tenedor (comprador) el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente (bienes, acciones, índices bursátiles, divisas, futuros, tasas de interés, etc.) a un precio determinado, llamado precio de ejercicio. La contraparte, – el emisor –, de estos títulos tiene la obligación de vender o comprar el activo subyacente.

En un contrato de opción se especifican cinco elementos:

- (i) Tipo de opción: opción de compra o de venta (americana o europea),
- (ii) Activo subyacente: es el activo (acciones, divisas, tasas de interés, petróleo, oro, etc.),
- (iii) Cantidad del activo negociado: es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción,
- (iv) Fecha de vencimiento: es la fecha en que se vence el contrato,
- (v) Precio de ejercicio: es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente, según la opción sea de compra o de venta.

Hay otro elemento determinado por el mercado que no figura estipulado en el contrato, que es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado organizado de opciones, siguiendo la ley de la oferta y la demanda. Este precio recibe el nombre de prima.

Un punto importante en un contrato de opción es que sólo se obliga al vendedor, mientras que el comprador tiene el derecho (opción) de ejercer el contrato, pero no está obligado a ello. Esto permite al poseedor de una opción, no sólo a

cubrirse ante posibles pérdidas sino también la posibilidad de obtener un beneficio en caso de que la evolución del precio del activo asociado a la opción sea favorable.

Por otra parte, las opciones, al igual que los contratos futuros son contratos estandarizados, lo cual permite que las transacciones se efectúen en mercados abiertos, organizados y con garantías de su cumplimiento. Esta característica genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión. A diferencia de los mercados de futuros, en las opciones, el comprador del contrato sólo está obligado al pago de una prima (precio de la opción) que recibirá el vendedor, quién aportará el margen inicial y de mantenimiento según la evolución del mercado.

La inversión en opciones también es una alternativa para especular (obtener ganancias extraordinarias asumiendo riesgos sobre tendencias inesperadas). Es también posible realizar operaciones de arbitraje aprovechando desequilibrios temporales en la prima de las opciones.

Las opciones financieras más comunes son las que tienen como subyacente a los títulos de capital (acciones), los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, títulos de deuda gubernamental y futuros. Se distinguen entre sí con base en tres criterios: tipo, clase y serie. El tipo nos indica si la opción es de compra (*call*) o de venta (*put*). Todas las opciones que sean del mismo tipo y que tengan una fecha de vencimiento común determinan una clase. Las opciones que pertenezcan a una clase y que tengan el mismo precio formarán una serie.

En las opciones se presentan dos posiciones, las cuales nos indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato:

Posición larga: es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si ésta es un opción de compra o de venta.

Posición corta: es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Una vez firmado un contrato de opciones, existen tres formas de cerrarlo:

- (i) El comprador ejerce su derecho;
- (ii) El comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, dándose por terminado el contrato;
- (iii) El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir, la opción se liquida.

2.4.1. Opciones de compra

Una opción de compra otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de comprar al emisor el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha predeterminada o antes. El comprador tiene que pagar una prima al emisor en el momento de la realización del contrato. El contrato debe especificar entre otros elementos:

- (i) Concepto a negociar (activo subyacente);
- (ii) La cantidad a negociar;
- (iii) El precio de compra;
- (iv) La fecha de vencimiento.

Este tipo de opciones presentan para el comprador ganancias ilimitadas al mismo tiempo que sus pérdidas se ven reducidas al valor de la prima que paga al firmar el contrato. En cambio el emisor presenta como ganancia máxima el valor de la prima y sus pérdidas son ilimitadas.

2.4.2. Opciones de venta

Una opción de venta otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha preestablecida o antes. El contrato especifica los mismos puntos que el de opciones de compra. En estos contratos al igual que en los de compra el emisor tiene una ganancia reducida a la prima y pérdidas ilimitadas, la situación del comprador es la contraria, es decir, presenta pérdidas reducidas a la prima y ganancias ilimitadas.

2.5. Opciones americanas y europeas

Las opciones también se pueden clasificar de acuerdo al tiempo en que se puede ejercer el derecho que ellas otorgan, siendo éstas:

- i. Opciones americanas: son aquellas en las que se puede ejercer el derecho a comprar o vender en cualquier fecha hasta el día a de vencimiento, es decir, durante la vida de la opción.

- ii.* Opciones europeas: son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

La mayoría de los contratos negociados en todo el mundo se realizan mediante opciones americanas. Pero estas presentan una mayor dificultad para su valuación que las europeas, y por lo mismo las propiedades de las americanas se derivan y explican a través de las propiedades de las europeas⁴.

Ejemplos de las combinaciones de las clasificaciones anteriores son:

- (i)* Opción *call* europea: este contrato obliga al vendedor de la opción a vender el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho de comprar el subyacente en la fecha de vencimiento.
- (ii)* Opción *put* europea: este contrato obliga al vendedor de la opción a comprar el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho de vender el subyacente en la fecha de vencimiento.
- (iii)* Opción *call* americana: este contrato obliga al vendedor de la opción a vender el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho de comprar el subyacente en o antes de la fecha de vencimiento.
- (iv)* Opción *put* americana: este contrato obliga al vendedor de la opción a comprar el activo subyacente en caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho de vender el subyacente en o antes de la fecha de vencimiento.

2.6. Opciones dentro, fuera y en el dinero

Las opciones pueden clasificarse, dependiendo de la relación que exista entre el precio pactado de ejercicio y el precio de mercado de la siguiente manera:

- (i)* Dentro del dinero (*in-the-money*): cuando el precio de mercado excede el precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio para una de venta.
- (ii)* Fuera del dinero (*out-of-the-money*): cuando sucede lo contrario, es decir, cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio en una de venta.

⁴ Para una descripción más detallada de los productos derivados, consultar [15].

- (iii) En el dinero (*at-the-money*): esto se da cuando el precio de mercado y el precio de ejercicio son el mismo, se cumple tanto para opciones de compra, como para las de venta.

El Cuadro 2.1 muestra las condiciones para que una opción se encuentre “in-the-money”, “at-the-money” y “out-of-the-money”.

Cuadro 2.1: Clasificación de una opción según la relación entre S_t y K .

S_t vs K	Opción <i>call</i>	Opción <i>put</i>
$S_t > K$	“in-the-money”	“out-of-the-money”
$S_t = K$	“at-the-money”	“at-the-money”
$S_t < K$	“out-of-the-money”	“in-the-money”

Esta clasificación determina el precio a pagar por comprar la opción, ya que las opciones que se encuentran dentro del dinero van a implicar necesariamente primas más altas, puesto que con estos contratos es muy probable que se logren ganancias si se ejercen al vencimiento, en cambio las opciones que se encuentran fuera del dinero implican primas muy bajas, ya que seguramente terminan sin ser ejercidas.

2.7. Liquidación en efectivo y en especie

Las opciones también pueden clasificarse según su forma de liquidación, es decir, la forma de cumplimiento del contrato por parte de los vendedores de opciones:

- (i) En especie.
- (ii) En efectivo.

Existen cuatro posiciones básicas para un inversionista que está interesado en la negociación de opciones:

- (i) Posición larga en una opción de compra: ésta es una posición que se beneficia con movimientos a la alza en los precios. Ya que sus ganancias aumentan en relación a lo que aumente el mercado.

- (ii) Posición larga en una opción de venta: ésta considera movimientos a la baja en los precios. En esta posición al contrario, las ganancias van en relación a una contracción en los precios del mercado.
- (iii) Posición corta en una opción de compra: con esta posición obtienen beneficios los inversionistas que consideran movimientos moderados a la baja y movimientos neutrales.
- (iv) Posición corta en una opción de venta: con ella se encuentran los inversionistas que consideran movimientos moderados a la alza y movimientos neutrales.

2.8. Valor intrínseco y valor en el tiempo de las opciones

La determinación del precio de las opciones se realiza en los mercados de acuerdo a su oferta y demanda. Varios factores intervienen en dicho proceso. Su dinámica depende del tiempo y de las variaciones del precio del subyacente en el mercado. De ahí que las opciones tienen un valor intrínseco y un valor en el tiempo. El valor intrínseco es el valor que tendría la opción si expirara inmediatamente tomando en cuenta el precio del activo subyacente en el mercado en efectivo. Específicamente, es la cantidad por la cual la opción se encuentra dentro del dinero. Para las opciones de compra es la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y el precio de ejercicio, si la diferencia es positiva, o de lo contrario es simplemente cero (pues al no estar dentro del dinero la opción no tiene ningún valor para el comprador). Por lo tanto, su valor es $c = \max(S_T - K, 0)$. Para las opciones de venta es la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del subyacente, si la diferencia es positiva, o simplemente cero en cualquier otro caso (la opción no tiene valor para el comprador porque no se ejerce). Por lo tanto, su valor es $p = \max(K - S_T, 0)$.

El valor en el tiempo es la cantidad por la cual la prima o valor total de la acción excede el valor intrínseco. Este valor existe porque el precio del subyacente puede cambiar entre el presente y el vencimiento de la opción, existiendo por tanto el potencial de posibles beneficios. Esto es, el valor en el tiempo es la prima que los inversionistas están dispuestos a pagar por dicho potencial. De ahí que el valor en el tiempo sea igual a cero al vencimiento de la opción y el valor máximo de la opción que es ejercida es igual al valor intrínseco. En general, el valor en el tiempo se encuentra en su máximo valor cuando el precio del subyacente es igual al precio de ejercicio.

2.9. Factores para la determinación de los precios de las opciones

En esta sección se explican los factores de los cuales depende el valor de una opción:

- (i) Precio actual del bien subyacente. Es el determinante más importante. Cuanto mayor es el precio del activo subyacente, mayor es el precio de la opción de compra (mayor probabilidad de encontrarse dentro del dinero) y menor el de la opción de venta (menor posibilidad de encontrarse dentro del dinero).
- (ii) Precio de ejercicio de la opción. Cuánto más alto, más barata debe ser la opción de compra y más cara debe ser la opción de venta. Sin embargo, cabe recordar que el precio de una opción de compra no puede ser negativo aún si el precio de ejercicio es muy alto. Mientras la opción tenga aún cierta vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente exceda al precio de ejercicio antes de su vencimiento y la posición tiene algún valor en el tiempo. Análogamente, en el caso de una opción de venta, su valor intrínseco no puede ser negativo, aún si el precio de ejercicio es muy bajo. Y mientras la opción de venta tenga vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente descienda más allá del precio de ejercicio y por tanto la opción tiene al menos cierto valor en el tiempo.
- (iii) Tasa de interés libre de riesgo. Es el costo de oportunidad de la inversión en una opción, a medida que la tasa de interés libre de riesgo se incrementa, el precio de las opciones de compra aumenta y el precio de las opciones de venta disminuye. Este impacto no es tan evidente. Mientras más altas sean las tasas de interés, más bajo es el precio de ejercicio de una opción de compra. Así, las tasas de interés producen el mismo efecto que bajar el precio de ejercicio de la opción de compra.
- (iv) Dividendos. Los pagos de dividendos en efectivo también alteran el precio de las opciones. En relación a las opciones sobre acciones, si se espera que la acción reparta altos dividendos, el valor de la opción de compra disminuye y el valor de la opción de venta aumenta. Esto debido a que el precio del subyacente desciende en el mercado en una cantidad similar al pago de dividendos.
- (v) Plazo al vencimiento. Mientras mayor es el plazo que aún tiene de vigencia la opción, mayor es la posibilidad de ejercer, por lo tanto mayor será el precio de las opciones, tanto de compra como de venta.

- (vi) Volatilidad del activo subyacente. La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Los incrementos en la volatilidad del precio del bien subyacente siempre tienen el efecto de que aumenta el precio de las opciones, sean estas de compra o venta, americanas o europeas, porque aumentan la posibilidad de que el precio del bien subyacente rebase el precio de ejercicio provocando que la opción sea ejercida.

Los cuatro primeros factores están relacionados con el valor intrínseco de la opción, en tanto que los dos últimos con el valor en el tiempo de la opción. Estas variables interactúan entre sí para determinar el valor de las opciones.

En resumen se puede decir que el valor de una opción de compra generalmente aumenta cuando el precio actual de las acciones, el vencimiento, la volatilidad y el tipo de interés libre de riesgo aumentan. El valor de una opción de compra disminuye cuando aumentan el precio de ejercicio y los dividendos esperados. El valor de una opción de venta generalmente aumenta cuando el precio de ejercicio, el tiempo de expiración, la volatilidad, y los dividendos esperados aumentan. El valor de una opción de venta disminuye cuando el precio actual de las acciones y la tasa de interés libre de riesgo aumentan.

2.10. Opciones sobre acciones que pagan dividendos

Considere una acción que paga continuamente una tasa de dividendo (constante). Entonces el precio de una acción que paga este tipo de dividendo es el precio de la acción sin pago de dividendo descontado a dicha tasa de dividendos.

2.11. Opciones sobre divisas

Las opciones sobre divisas pueden ser tratadas de manera análoga a las opciones sobre acciones, la única diferencia es que el activo subyacente es una divisa. Este instrumento tiene la propiedad de transferir el riesgo cambiario entre los participantes del mercado ofreciéndoles una amplia gama de posibilidades de rendimiento además de permitirles crear una cobertura contra el riesgo. Una opción sobre divisas proporciona una especie de seguro cambiario mientras que una cobertura (o un *forward*) cierra la operación futura a un tipo de cambio fijado el día

de la adquisición del contrato. Por supuesto, el seguro no es gratuito y se tiene que pagar una prima por la opción, mientras que en el *forward* no existe tal prima.

2.12. Opciones sobre futuros

Una opción sobre un futuro es una opción donde el subyacente es un futuro. Como en las otras opciones el comprador de la opción tiene el derecho, mas no la obligación, de ejercer la opción. Así, con una opción de compra puede ejercer la opción comprando un contrato de futuros al precio de ejercicio (es decir, tomar una posición larga en los futuros al precio de ejercicio), mientras que el comprador de la opción de venta puede ejercer vendiendo el contrato de futuros al precio de ejercicio. Todos los conceptos típicos de las opciones son válidos, por ejemplo, el tenedor de la opción de compra ejercerá el derecho de comprar un contrato de futuros sólo si eso le representa una ganancia o le reduce una pérdida.

Las opciones sobre los futuros tienen los siguientes beneficios sobre los contratos de futuros:

- (i) Las opciones le ponen un límite a la pérdida mientras que los futuros no lo hacen.
- (ii) Las opciones sobre futuros le permiten a los productores de mercancías cubrir tanto el riesgo precio como el riesgo de cantidad mientras que los futuros permiten solo la cobertura del riesgo precio.

2.13. Opciones exóticas

Los derivados como las opciones *call* y *put* del tipo europeo o americano se denominan productos *plain vanilla*. Tienen propiedades usuales bien definidas y se negocian activamente. Sus precios o volatilidades implícitas están dados por las bolsas o por corredores sobre una base regular. Uno de los aspectos excitantes del mercado de derivados *Over-The-Counter* es el número de productos no estándares que han sido creados por ingenieros financieros. Estos productos se denominan opciones exóticas. Aunque son generalmente una parte relativamente pequeña de sus portafolios, estos productos exóticos son importantes para una institución porque son en general mucho más rentables que los productos *plain vanilla*.

2.14. Opciones sobre índices accionarios

Las bolsas del mundo cotizan opciones sobre índices accionarios. La Bolsa Mexicana de Valores no es la excepción y cotiza opciones sobre el Índice de Precios y Cotizaciones. El mecanismo y la definición es como una opción sobre una acción, la única diferencia es que el subyacente es el índice bursátil. En la valuación de las opciones sobre índices accionarios el supuesto que se hace es el de promediar los dividendos que pagan las acciones que componen el índice (canasta de acciones). En este caso se aplica la fórmula de Black y Scholes adaptada para las opciones sobre acciones que pagan un dividendo conocido.

2.15. Índice de Precios y Cotizaciones

El sector financiero tiene como función concreta hacer que circule el dinero entre todos los participantes de la vida económica diaria. Por otra parte, el dinero es un bien escaso y por ende es también una mercancía y, el dinero como cualquier otra mercancía se compra y se vende en mercados organizados, siendo tan valiosos como escaso sea. Uno de los mercados donde se puede negociar el dinero es la Bolsa, que para términos prácticos no es más que la mezcla de instituciones, actividades, instrumentos y mecanismos a través de los cuales se contactan oferentes y demandantes de recursos, este contacto se puede resumir en negociar títulos de deuda y acciones de empresas. Una interpretación cotidiana de la Bolsa, se liga muy estrechamente con las acciones. Cuando los medios de comunicación difunden que la Bolsa subió o bajó tantos puntos, se refiere, en concreto a las variaciones de un índice que mide los cambios que sufren los precios de las acciones de las empresas.

El Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, (en adelante “IPC” y “BMV” respectivamente), es el principal indicador del comportamiento del mercado accionario de la BMV, el cual expresa el rendimiento de este mercado tomando como referencia las variaciones de precios de una canasta balanceada, ponderada y representativa del total de los títulos accionarios cotizados en la BMV.

La muestra se revisa anualmente en la primera semana del mes de enero, siendo efectiva el primer día hábil de febrero; en caso de que una emisora deje de operar durante el año, por la causa que fuera, es sustituida por otra que el Comité Técnico de Metodologías de la BMV asigne. La muestra se integra por alrededor de 35 emisoras de distintos sectores de la economía. Aplicado en su

actual estructura desde 1978, el IPC expresa en forma fidedigna la situación del mercado bursátil y constituye un indicador altamente confiable.

El IPC es un índice calculado por capitalización de mercado. Pondera la participación de cada una de las empresas que comprende la muestra con base en el valor total de mercado de sus acciones en circulación. La mecánica de cálculo, y ajuste por derechos, es definida por la BMV. El IPC es actualizado automáticamente en tiempo real como consecuencia de las operaciones registradas en los títulos accionarios integrantes de la canasta durante cada sesión de remate. Las variables que se utilizan para describir los niveles de negociación de las series accionarias son: el importe, el número de operaciones y la mediana del importe registrado de cada operación.

La BMV, en el año de 2006, con el apoyo de su Comité Técnico de Metodologías diseñó un nuevo indicador el **IPC CompMX**. Este nuevo indicador nace de la necesidad de crear un indicador que refleje el desempeño del mercado en su totalidad. Esta compuesto por 60 empresas y replica el mercado en un 96.7%.

El nuevo integrante de la familia de índices de la BMV ofrece una forma novedosa de dar seguimiento al mercado al agrupar en su muestra a las 60 empresas más grandes listadas en Bolsa. Su tamaño se determina en función del valor total de capitalización que cada empresa tenga sumando el valor de las series accionarias inscritas en BMV. Cada una de las empresas seleccionadas estará representada por una sola serie, la cual deberá estar ubicada entre los niveles de alta, media o baja bursatilidad de acuerdo con el índice que publica la Bolsa mensualmente en su página y en sus boletines.

El nuevo indicador reflejará el comportamiento de las 60 empresas y a partir del mismo se generaran los tres índices que dividen a las emisoras en rangos de acuerdo al tamaño del valor de capitalización, para así crear los índices de Mediana y Baja Capitalización.

Los índices que nacen a partir del IPC CompMx son:

- IPC LargeCap: Compuesto por las 20 emisoras más grandes considerando su valor de capitalización inscrito en Bolsa.
- IPC MidCap: Compuesto por 20 emisoras cuyo valor total de capitalización inscrito en bolsa se encuentra entre los lugares 21 y 40 en términos de su tamaño.
- IPC SmallCap: Compuesto por 20 emisoras cuyo valor total de capitalización inscrito en bolsa se encuentra entre los lugares 41 y 60 en términos de su

tamaño.

Las muestras de estos índices serán revisadas dos veces al año (Mayo y Octubre) premiando a las empresas cuyo desempeño ha sido valorado por el mercado aumentando su valor de capitalización.

2.15.1. Opciones sobre el IPC en el MexDer

Las primas de las opciones en el caso del Mercado Mexicano de Derivados, MexDer, se cotizan en pesos con dos decimales por cada acción aún cuando el tamaño del contrato sea de 100 acciones. Las primas de las opciones sobre el IPC se cotizan en puntos del IPC, valiendo cada punto 10 pesos, por tanto, para saber su valor monetario final hay que multiplicar por 10 pesos.

La prima es el precio al cual se realiza la operación. Dicho precio es pagado por el comprador de la opción al vendedor de la misma. A cambio de recibir la prima, el vendedor de una opción call está obligado a vender el activo al comprador si éste la ejerce. A cambio de recibir la prima, el vendedor de una opción put está obligado a comprar el activo al comprador si éste la ejerce. El vendedor de la opción siempre se queda con la prima, se ejerza o no la opción.

La prima de una opción se negocia en función de la ley de oferta y demanda que establece el mercado, como con cualquier otro producto. Su precio está en función de una serie de parámetros, unos conocidos de antemano y otros no:

- (i) Precio del activo subyacente: Precio de la acción o valor del IPC. Este es un dato público y conocido;
- (ii) Precio de ejercicio: Se fija en el momento de listar el contrato en la Bolsa y es conocido por el comprador y el vendedor, por lo tanto no hay discrepancias;
- (iii) Tasa de interés: la tasa de interés correspondiente al plazo entre el día de negociación y el día de vencimiento; es un dato fácil de estimar y se considera habitualmente la TIE⁵ llevada al plazo correspondiente; es un dato público;
- (iv) Dividendos a pagar: Sólo para opciones sobre acciones; este dato es el dividendo anunciado a pagar en el futuro o una estimación tanto en la fecha

⁵ Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio. Es el principal parámetro para obtener el precio del crédito en México. Es calculada por el Banco de México a partir del componente de la oferta y la demanda de liquidez en el mercado de dinero. Su publicación es diaria.

de pago como del importe. En el caso de opciones sobre índice se deben considerar los dividendos anunciados a pagar en el futuro o las estimaciones correspondientes para las acciones que conforman la muestra del índice;

- (v) Tiempo a vencimiento: Este dato es el número de días que quedan para el vencimiento de la opción. El paso del tiempo es un dato importante sobre todo en los últimos días antes de vencimiento;
- (vi) Volatilidad futura: La volatilidad o variación que se asume que tendrá un activo desde el día de negociación hasta el día de vencimiento, es el dato más importante para valorar opciones. Cuanto mas volátil se espera que sea una acción o el índice IPC, más cara será la prima y cuánto menos volátil más barata será la prima;

Los parámetros *i,ii,iii* y *iv* son datos en los que no hay discrepancias entre los participantes del mercado, y si las hay serán mínimas, se dice que la volatilidad es el dato que realmente produce el valor de la prima, de tal manera que se asocia “prima a volatilidad” como “volatilidad a prima” como una correspondencia unívoca por la cual dada una prima existe una “volatilidad implícita” única asociada a esa prima. Como se ha mencionado antes, la prima se negocia en el mercado, según la libre oferta y demanda; los intermediarios especializados en Opciones las valúan produciendo “precios teóricos” que pueden o no coincidir con los del mercado. Se dice que una opción que cotiza por debajo de su valor teórico está barata y una que cotiza por encima de su valor teórico está cara. El precio teórico es un punto de referencia para la negociación.

Capítulo 3

Modelo de Black y Scholes: Enfoque probabilista

3.1. Introducción

En este capítulo se obtiene la fórmula de Black y Scholes (1973) para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el enfoque probabilista. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo. El precio, o la prima, de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión. Asimismo, se obtienen las sensibilidades del precio de una opción europea respecto a cambios en las diferentes variables y parámetros que intervienen en el modelo de Black y Scholes, las denominadas griegas.

3.2. Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio de

una acción al tiempo t , S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.1)$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma > 0$ es su volatilidad instantánea, por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente y, como se sabe, satisface: $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, $\mathbb{E}[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = \mathbb{E}[(dW_t)^2] = dt$.

El proceso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. En efecto, una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t, \quad (3.2)$$

lo que, a su vez, implica

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

La expresión anterior es invertible, en el sentido que se puede despejar W_t . Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_t | s \leq t) = \sigma(S_t | s \leq t) = \mathcal{F}_t^S.$$

Por último, es importante recordar que (3.1) es una notación simplificada para la expresión

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, \quad t \in [0, T].$$

Si se discretiza la ecuación (3.2) con $\Delta t = T - t$, entonces

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \quad (3.3)$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico también tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de S_t , pero con parámetro de tendencia, $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ menor al rendimiento medio esperado, μ .

3.3. Valuación neutral al riesgo

Cuenta bancaria:

Suponga que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar

o pedir prestado a una tasa constante a todos los plazos, r , libre de riesgo de incumplimiento, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Si un agente deposita M_0 unidades monetarias, entonces su cuenta bancaria es $M_t = M_0 e^{rt}$. Equivalentemente, el rendimiento en su cuenta bancaria, durante un instante dt , satisface $dM_t = r_t dt$, con la condición inicial M_0 .

Debido a la presencia de μ , la ecuación (3.1) no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ , a fin de que el premio $\nu = \mu - r$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\nu = 0$, así, $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo, r . Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar ν por unidad de varianza, es decir, $\lambda = \nu/\sigma$. Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$, lo cual implica, a su vez, que $\mu = r$. Si se escribe

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t), \end{aligned}$$

bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, es decir, $\lambda = 0$, se tiene que la ecuación (3.1) se transforma en

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.4)$$

en cuyo caso, se dice que el movimiento Browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. El concepto de valuación neutral al riesgo es, sin duda, uno de los más importantes en el estudio de productos derivados.

3.4. Función de densidad del precio del subyacente neutral al riesgo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo.

En vista del resultado (3.3) y en un mundo neutral al riesgo donde se cumple (3.4), se tiene que S_T/S_t tiene una distribución log-normal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T -$

t) y varianza $\sigma^2(T-t)$. Considere $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y su función de densidad

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Si se define ahora

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} \mathcal{E} \right\}, \quad (3.5)$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (3.6)$$

De esta manera, la función de densidad de S_T dado S_t está dada por la expresión

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|. \quad (3.7)$$

Observe, primero, que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia,

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (3.8)$$

Esta función de densidad se utilizará para calcular el valor esperado del valor intrínseco de una opción europea.

3.4.1. Media y varianza del precio del subyacente en un mundo neutral al riesgo

El valor esperado del precio del subyacente es una cantidad que sirve como referencia para calcular el precio de ejercicio de la opción. A continuación se determina la media y varianza de la variable aleatoria S_T . Observe primero que de (3.6) se tiene que

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

lo cual implica que

$$s = S_t e^{\epsilon \sigma \sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la diferencial satisface:

$$\begin{aligned} ds &= S_t e^{\epsilon \sigma \sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= s \sigma \sqrt{T-t} d\epsilon. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dado el cambio de variable anterior, estamos ahora en posición de calcular el valor medio de S_T , dado el valor actual S_t . Así pues,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T | S_t] &= \int_0^\infty s f_{S_T | S_t}(s | S_t) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}(T-t)\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}(T-t)\sigma} e^{-\frac{1}{2} \epsilon^2} S_t e^{\epsilon \sigma \sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \epsilon^2} e^{\sigma \sqrt{T-t} \epsilon + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\sigma \sqrt{T-t} \epsilon + \sigma^2(T-t))} e^{r(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma \sqrt{T-t})^2} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du \\ &= S_t e^{r(T-t)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde u es tal que

$$u = \epsilon - \sigma \sqrt{T-t}.$$

Como puede observarse, el valor esperado de $S_T|S_t$ es simplemente el valor futuro del subyacente. El segundo momento de S_T se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_T^2|S_t] &= \int_0^\infty s^2 f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2[\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 + 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon} e^{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \tag{3.12} \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 4\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + 4\sigma^2(T-t))} e^{2[\sigma^2(T-t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\
&= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} d\epsilon \\
&= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\
&= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} \\
&= S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)},
\end{aligned}$$

donde

$$w = \epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S_T|S_t] &= \mathbb{E}[S_T^2|S_t] - (\mathbb{E}[S_T|S_t])^2 \\
&= S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)} - S_t^2 e^{2r(T-t)} \\
&= S_t^2 e^{2r(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Si se define $\zeta(t, T)$ de tal forma que

$$\ln(1 + \zeta(t, T)^2) = \sigma^2(T-t),$$

entonces se puede escribir que

$$\zeta(t, T) = \frac{\sqrt{\text{Var}[S_T|S_t]}}{\mathbb{E}[S_T|S_t]}.$$

Por último, se determina la moda, m , de la distribución de $S_T|S_t$, es decir, se desea encontrar m tal que

$$\left. \frac{d}{ds} f_{S_T|S_t}(s|S_t) \right|_{s=m} = 0. \tag{3.14}$$

Para ello, primero, la notación se simplifica considerablemente al escribir

$$A(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2$$

y

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma}.$$

Se sigue de (3.8) y (3.14) que

$$-\frac{a}{m^2}e^{A(m)} + \frac{a}{m^2}e^{A(m)}(A'(m)m) = 0,$$

lo cual implica que

$$A'(m)m = 1,$$

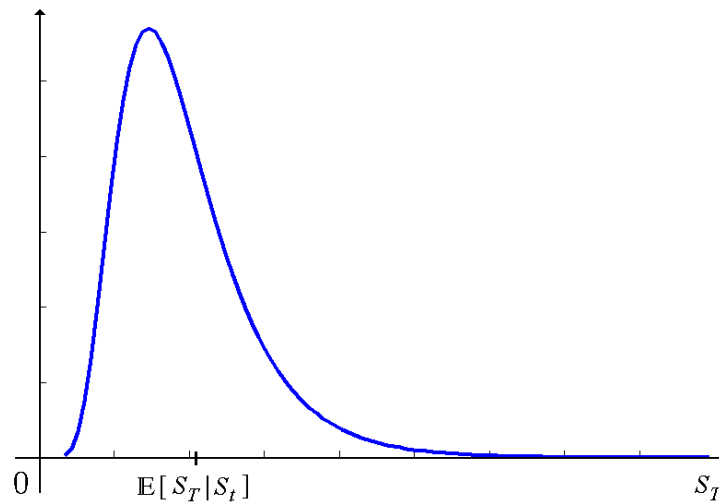
equivalentemente

$$\frac{\ln \left(\frac{m}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = -1.$$

Por lo tanto,

$$m = S_t e^{r(T-t) - \frac{3}{2}\sigma^2(T-t)}.$$

En la Gráfica 3.1 se puede apreciar la gráfica de la función de densidad de S_T , dado S_t , se observa que es positivamente sesgada.



Gráfica 3.1: Función de densidad de $S_T|S_t$.

3.5. Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

El precio de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T , $c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ está dado por el esperado del valor intrínseco:

$$c = \mathbb{E} \left\{ e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \quad (3.15) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \end{aligned}$$

En lo que sigue, las dos integrales de (3.15) se denotarán, respectivamente, mediante \mathcal{I}_1 y \mathcal{I}_2 . Si ahora se utiliza el cambio de variable definido por (3.10), la primera integral se calcula como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= e^{-r(T-t)} S_t \int_{\left\{ \epsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{\left\{ \epsilon - \sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(K/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\epsilon \quad (3.16) \\ &= S_t \int_{\left\{ -\infty < u < \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $-\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y el cambio de variable $u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. Asimismo, a partir del cambio de variable de (3.10), la segunda

integral satisfies

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &:= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{\epsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Escribiendo (3.16) y (3.17) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 &:= S_t \int_{\left\{-\infty < u < \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &\quad - Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Por lo tanto, el precio de la opción está dado por

$$c = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (3.19)$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir,

$$\begin{aligned}\Phi(d) &= \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} \\ &= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= 1 - \Phi(-d),\end{aligned}$$

donde

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.20)$$

y

$$\begin{aligned}d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

3.6. Valuación neutral al riesgo de una opción europea de venta

El precio de una opción de venta europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T , $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ está dado por:

$$p = \mathbb{E} \left\{ e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

A través de un análisis similar al de la sección anterior se puede mostrar que el precio de una opción de venta del tipo europeo, $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por

$$p = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \quad (3.22)$$

Es importante notar que el precio de una opción europea de venta también se puede obtener a través de la condición de paridad “put-call”

$$p + S_t = c + Ke^{-r(T-t)}.$$

3.6.1. Condición de paridad de opciones de venta y compra

A partir de (3.19) y (3.22) se puede establecer la condición de paridad de opciones de venta y compra (put-call):

$$\begin{aligned} p + S_t &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) + S_t & (3.23) \\ &= Ke^{-r(T-t)}(1 - \Phi(d_2)) - S_t(1 - \Phi(d_1)) + S_t \\ &= Ke^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S_t + S_t\Phi(d_1) + S_t \\ &= c + Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

La utilidad de la relación (3.23) radica en que una vez que se ha calculado el precio de opción de compra $c(S_t, t)$, el precio de una opción de venta, $p(S_t, t)$, con características similares se calcula mediante $p = c - (S_t - Ke^{-r(T-t)})$ o bien $p = c - V$, donde $V = V(S_t, t)$ es el precio de un contrato forward.

3.7. Griegas del modelo de Black y Scholes

En esta sección se estudia la sensibilidad del precio de una opción europea ante cambios en las diferentes variables y parámetros que intervienen en el modelo de Black y Scholes. Las razones de cambio del precio de una opción, ya sea de compra o de venta, con respecto a las variables relevantes del modelo, *ceteris paribus*, reciben el nombre de letras griegas porque cada una de estas sensibilidades esta asociada con una letra del alfabeto griego. Estas razones de cambio juegan un papel importante en la administración del riesgo de mercado: coberturas delta, gama y vega.

3.7.1. Lema fundamental de las griegas del modelo de Black y Scholes

Lemma 3.7.1. *Lema fundamental de las griegas del modelo de Black y Scholes.*
Si

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (3.24)$$

entonces

$$S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) = 0 \quad (3.25)$$

donde

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}. \quad (3.26)$$

Demostración. En efecto, en virtud de (3.21), se sigue que

$$\begin{aligned} d_2^2 &= \left(d_1 - \sigma \sqrt{T-t} \right)^2 \\ &= d_1^2 - 2\sigma \sqrt{T-t} d_1 + \sigma^2 (T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \left[\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right] + \sigma^2 (T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) - 2r(T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) - 2 \ln e^{r(T-t)} \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{2}d_2^2 = -\frac{1}{2}d_1^2 + \ln\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right),$$

aplicando la exponencial de ambos lados

$$e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right). \quad (3.27)$$

Si se sustituye (3.26) y (3.27) en (3.25)

$$\begin{aligned} S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) &= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\ &= S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right) \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} - \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} = 0 \end{aligned}$$

se verifica el resultado en (3.25). □

3.8. Griegas de una opción europea de compra

Delta, Δ_c

El cambio del precio de una opción de compra europea con respecto a un cambio en el precio del subyacente, *ceteris paribus*, juega un papel muy importante en la elaboración de estrategias de cobertura con opciones, la llamada cobertura Delta. Esta razón de cambio entre el precio de la opción y el precio del subyacente se denota por $\Delta_c \equiv \partial c / \partial S_t$ y se calcula como

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} = \Phi(d_1) + S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_t}.$$

dado que

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

entonces

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}.$$

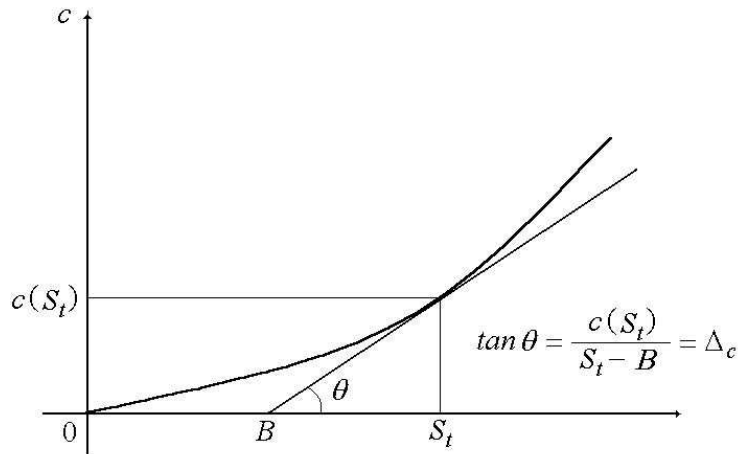
Por lo tanto

$$\Delta_c = \Phi(d_1) + [S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_1}{\partial S_t}.$$

En virtud del lema fundamental de las griegas y de (3.25), se concluye un primer resultado relevante,

$$0 \leq \Delta_c = \Phi(d_1) \leq 1$$

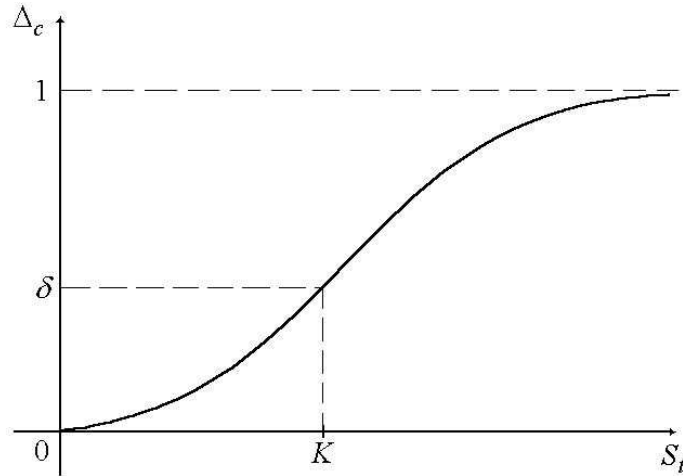
Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y el precio del activo subyacente. Un valor grande de Δ_c significa que el precio de la opción es muy sensible a cambios en el precio del subyacente. Recíprocamente, si la Δ_c es pequeña, entonces un cambio en el precio del activo subyacente afecta poco al precio de la opción. Claramente, la pendiente de la recta tangente a c en S_t está dada por Δ_c , como se muestra en la Gráfica 3.2. Observe también que Δ_c indica la probabilidad de que la opción sea ejercida.



Gráfica 3.2: Δ_c es la pendiente de la recta tangente a c en S_t .

La Gráfica 3.3 muestra a Δ_c como función de S_t . Observe que si $S_t \rightarrow 0$, entonces $d_1 \rightarrow -\infty$, en cuyo caso $\Delta_c = \Phi(d_1) \rightarrow 0$, y que si $S_t \rightarrow \infty$, entonces $d_1 \rightarrow \infty$, así $\Delta_c = \Phi(d_1) \rightarrow 1$. En particular, si $S_t = K$, entonces

$$\delta \equiv \Delta_c(K) = \Phi \left(\frac{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).$$

Gráfica 3.3: Δ_c como función de S_t .

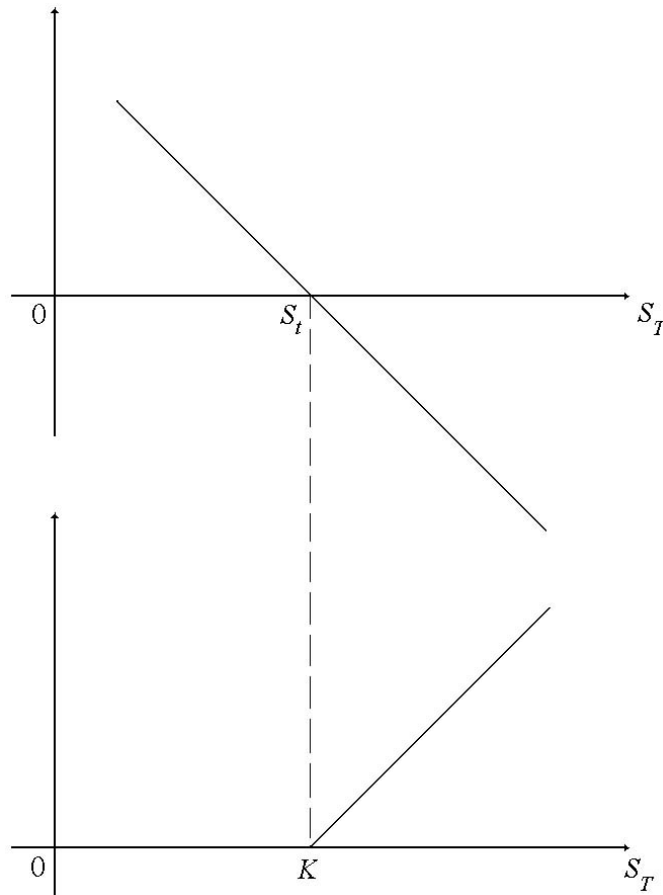
A partir del modelo de Black y Scholes, es posible construir un portafolio libre de riesgo al combinar una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente con una posición larga sobre una opción europea de compra en el mismo subyacente. Si al recomprar el activo subyacente para ser devuelto a la contraparte de la venta en corto, el precio se ha incrementado con respecto al precio inicial pactado en la venta en corto, entonces se produce una pérdida. En este caso, se ejerce la opción a fin de compensar dicha pérdida con una ganancia de magnitud igual al valor intrínseco de la opción. En otras palabras, una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente queda cubierta tomando una posición larga sobre una opción del mismo subyacente (véase la Gráfica 3.4). Ahora bien, dado que $0 < \Delta_c < 1$, se tiene que una opción cubre solamente una fracción Δ_c del subyacente. Por último, es importante destacar que la cobertura es efectiva solamente en un intervalo pequeño de tiempo, de longitud $[t, t + dt]$. Conforme el tiempo transcurre, la cobertura se deteriora y será necesario rebalancear el portafolio.

Observe también que la elasticidad de c con respecto a S_t , es decir la razón de cambios porcentuales entre c y S_t , está dada por

$$\eta_{c,S} = \frac{\partial \ln(c)}{\partial \ln(S_t)} = \frac{\frac{\partial c}{c}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = \Phi(d_1) \frac{S_t}{c}.$$

Análogamente, la razón de cambios porcentuales entre p y S_t , está dada por

$$\eta_{p,S} = \frac{\partial \ln(p)}{\partial \ln(S_t)} = \frac{\frac{\partial p}{p}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = (\Phi(d_1) - 1) \frac{S_t}{p}.$$



Gráfica 3.4: Perfiles de ganancia en un portafolio de cobertura Delta.

La gráfica superior representa una operación de venta en corto, la inferior una posición larga sobre una opción de compra.

Gama, Γ_c

La sensibilidad de la cobertura Δ_c con respecto a un cambio en el precio del subyacente, se define por $\Gamma_c \equiv \partial^2 c / \partial S_t^2$. Claramente, si Γ_c es pequeña, Δ_c cambia lentamente cuando cambia el precio del activo subyacente, en cuyo caso el rebalanceo (cambio en el número de unidades del subyacente y la opción) en el portafolio no tiene que ser frecuente. Si, por el contrario, Γ_c es grande, entonces Δ_c es muy sensible a cambios en el precio del subyacente y el rebalanceo tiene que hacerse frecuentemente. En este caso, existe una exposición importante al riesgo mercado cuando la cobertura Δ_c se mantiene sin cambios durante períodos

prolongados de tiempo. Γ_c se calcula como sigue

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_t} = \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}.$$

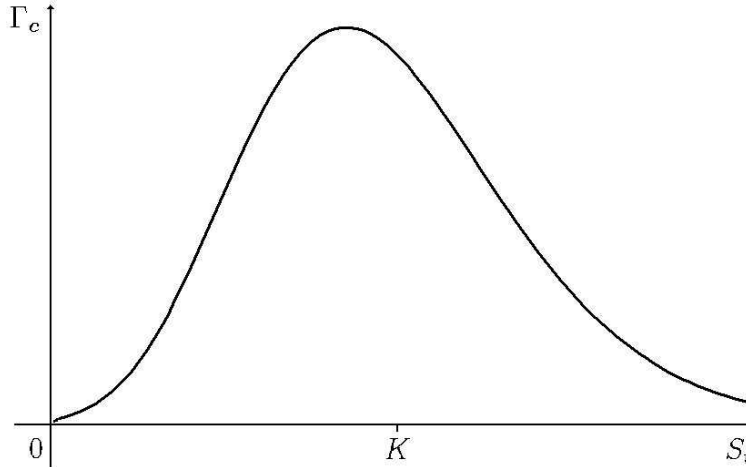
Es decir,

$$\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0. \quad (3.28)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_c}{\partial S_t} &= \frac{\sigma S_t \sqrt{T-t} \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - \Phi'(d_1) \sigma \sqrt{T-t}}{\sigma^2 S_t^2 (T-t)} \\ &= \frac{S_t \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - \Phi'(d_1)}{\sigma S_t^2 \sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

La Gráfica 3.5 muestra Γ_c como función de S_t .



Gráfica 3.5: Γ_c como función de S_t .

Vega, v_c

Uno de los supuestos del modelo de Black y Scholes es que la volatilidad se mantiene constante en el tiempo. Sin embargo, en la práctica la volatilidad casi

nunca es constante. La razón de cambio del precio de una opción europea con respecto a la volatilidad del subyacente, se denota por v_c , se lee la “vega” de la opción, y se calcula como

$$v_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \quad (3.29)$$

y

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}.$$

En consecuencia,

$$v_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = (S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \sqrt{T-t}.$$

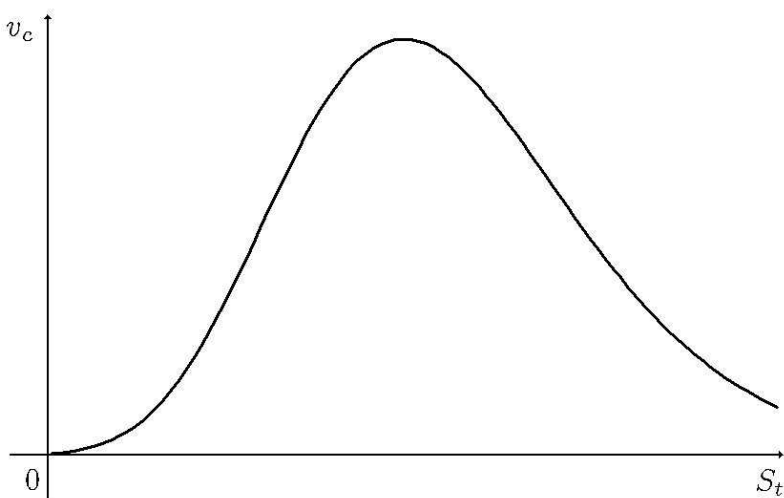
Con base en (3.25), se tiene que

$$v_c = K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \sqrt{T-t}.$$

Equivalentemente,

$$v_c = S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} > 0.$$

Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y la volatilidad del subyacente. Observe que si v_c es grande, entonces un cambio en la volatilidad impacta significativamente al precio de la opción. La Gráfica 3.6 muestra v_c como función de S_t .



Gráfica 3.6: v_c como función de S_t .

Theta, Θ_c

La razón de cambio del precio de la opción y la fecha de vencimiento, manteniendo todas las otras variables fijas, se denota por θ_c y se calcula mediante

$$\frac{\partial c}{\partial T} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial T} + r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2).$$

Ahora bien, como $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$, entonces

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial T} &= (S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)) \frac{\partial d_1}{\partial T} + r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &\quad + \frac{K e^{-r(T-t)} \sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Con base en (3.25) se sigue que:

$$\begin{aligned} \theta_c &\equiv \frac{\partial c}{\partial T} = r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) + \frac{K e^{-r(T-t)} \sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \\ &= K e^{-r(T-t)} \left(r \Phi(d_2) + \frac{\sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

La variación de c al transcurrir el tiempo, denotada por Θ_c , está dada por

$$\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial t} = -K e^{-r(T-t)} \left(r \Phi(d_2) + \frac{\sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.31)$$

En otras palabras, Θ_c es el cambio en el precio de la opción con respecto a una reducción en la vida del contrato. Claramente, se cumple la siguiente igualdad:

$$\Theta_c = -\theta_c. \quad (3.32)$$

El signo de Θ_c es ambiguo, es decir, no se puede determinar de antemano si una disminución en la fecha de vencimiento va a incrementar o disminuir el precio de la opción.

Por último, note que la ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica para el precio de una opción de compra, determinada con la metodología de Black y Scholes

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - r c = 0,$$

se puede reescribir en términos de las griegas Δ_c , Γ_c y Θ_c como sigue

$$\Theta_c + \frac{1}{2}\Gamma_c\sigma^2S_t^2 + \Delta_c r S_t - r c = 0,$$

con la condición $c(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$.

Kappa, κ_c

La razón de cambio del precio de la opción respecto al precio de ejercicio, manteniendo todas las otras variables fijas, se denota por κ_c y esta dada por

$$\begin{aligned}\kappa_c &\equiv \frac{\partial c}{\partial K} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial K} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial K} - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= (S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)) \frac{\partial d_1}{\partial K} - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= -e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) < 0.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Por lo tanto, existe una relación inversa entre el precio de ejercicio y el precio de la opción.

Rho, ρ_c

La razón de cambio del precio de la opción respecto a la tasa de interés, manteniendo todas las otras variables fijas, se denota por ρ_c y se calcula como

$$\rho_c \equiv \frac{\partial c}{\partial r} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) (T - t).$$

Dado que

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$$

y junto con (3.25), se tiene que

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) (T - t) > 0,$$

Es decir, existe una relación directa entre la tasa de interés y el precio de la opción: si r crece, c aumenta, y si r decrece, c disminuye.

3.9. Griegas de una opción europea de venta

En esta sección se calculan las griegas para una opción europea de venta (“put”). En este caso, el precio teórico de una opción de venta obtenido mediante la metodología de Black y Scholes $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ satisface

$$p = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \quad (3.34)$$

Con base en (3.19) y (3.34), se sigue que

$$\begin{aligned} c - p &= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + S_t\Phi(-d_1) \\ &= S_t(\Phi(d_1) + \Phi(-d_1)) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(d_2) + \Phi(-d_2)) \\ &= S_t - Ke^{-r(T-t)}, \end{aligned}$$

es decir

$$p + S_t = c + Ke^{-r(T-t)}. \quad (3.35)$$

La condición de paridad “put-call”. Esta condición permite calcular las griegas de una opción de venta cuando se conocen las griegas de una opción de compra. En efecto, a partir de (3.35), se sigue que

$$\Delta_p = \Delta_c - 1. \quad (3.36)$$

Por lo tanto,

$$-1 < \Delta_p \equiv \frac{\partial p}{\partial S_t} = \Phi(d_1) - 1 < 0.$$

La Gráfica 3.7 muestra a Δ_p como función de S_t .

A continuación se calcula la “gama” de una opción de venta europea denotada por Γ_p . De la condición (3.36), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial p}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right).$$

Es decir,

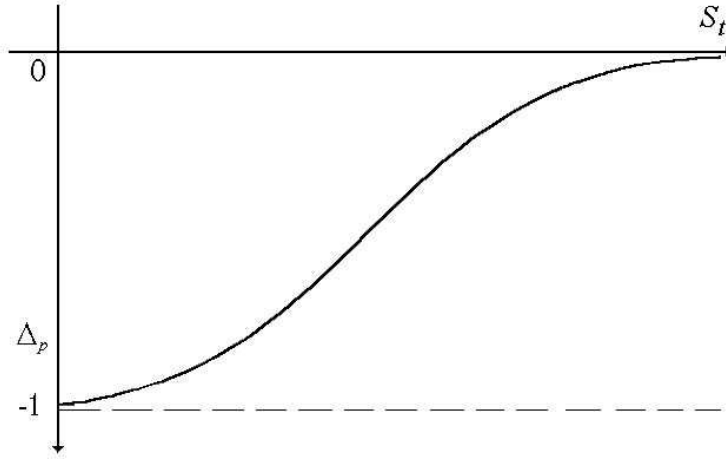
$$\Gamma_p = \Gamma_c = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0. \quad (3.37)$$

Ahora, se calcula la “vega”; v_p , de una opción de venta. A partir de (3.35), se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0.$$

Por lo tanto,

$$v_p = v_c = S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} > 0. \quad (3.38)$$

Gráfica 3.7: Δ_p como función de S_t .

La razón de cambio de p con respecto de T , denotada por θ_p , se calcula como

$$\begin{aligned}
 \theta_p &\equiv \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial c}{\partial T} - rKe^{-r(T-t)} \\
 &= Ke^{-r(T-t)} \left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) - rKe^{-r(T-t)} \\
 &= Ke^{-r(T-t)} \left(r(1 - \Phi(-d_2)) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) - rKe^{-r(T-t)} \quad (3.39) \\
 &= -Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + \frac{Ke^{-r(T-t)}\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \\
 &= -Ke^{-r(T-t)} \left(r\Phi(-d_2) - \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right).
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\Theta_p = -\theta_p = Ke^{-r(T-t)} \left(-r\Phi(-d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right).$$

Con base en (3.35), la variación de p con respecto a variaciones en K , denotada por κ_p , está dada por

$$\begin{aligned}
 \kappa_p &= \kappa_c + e^{-r(T-t)} \\
 &= -e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + e^{-r(T-t)} \quad (3.40) \\
 &= (1 - \Phi(d_2))e^{-r(T-t)} \\
 &= \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0.
 \end{aligned}$$

La variación de p con respecto a un cambio en r , denotada por ρ_p , está dada por

$$\begin{aligned}
 \rho_p &\equiv \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial r} - (T-t)Ke^{-r(T-t)} \\
 &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)(T-t) - (T-t)Ke^{-r(T-t)} \\
 &= (\Phi(d_2) - 1)Ke^{-r(T-t)}(T-t) \\
 &= -\Phi(-d_2)Ke^{-r(T-t)}(T-t) < 0.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

El Cuadro 3.1 muestra las griegas de una opción de compra y de venta.

Cuadro 3.1: Griegas del modelo de Black y Scholes.

	Opción de compra	Opción de venta
Valor V Valor B&S	$S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$	$Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)$
Delta $\frac{\partial V}{\partial S_t}$	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_1) - 1$
Gamma $\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$	$\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}$	$\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}$
Vega $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$	$S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$
Theta $\frac{\partial V}{\partial t}$	$-Ke^{-r(T-t)}\left\{r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right\}$	$Ke^{-r(T-t)}\left\{-r\Phi(-d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right\}$
Kappa $\frac{\partial V}{\partial K}$	$-e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$	$\Phi(-d_2)e^{-r(T-t)}$
Rho $\frac{\partial V}{\partial r}$	$Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)(T-t)$	$-\Phi(-d_2)Ke^{-r(T-t)}(T-t)$

Capítulo 4

Modelos Generalizados ARCH(GARCH)

4.1. Introducción

En este capítulo se da un resumen de los modelos Modelos Generalizados ARCH (GARCH), algunas de sus extensiones y su relación con la simulación Monte Carlo con un ejemplo sencillo. Estos modelos son importantes por el hecho de que permiten modelar la volatilidad de las series de tiempo que se encuentran en finanzas tales como precios de acciones, precios de *commodities*, tipos de cambio, entre otros.

4.2. Modelos Generalizados ARCH (GARCH)

En esta sección se introducen un conjunto de modelos que capturan características importantes de los rendimientos y que son bastante flexibles que capturan aspectos específicos de activos simples. Un inconveniente de estos modelos es que requieren la estimación no lineal de los parámetros, que será discutida posteriormente. El modelo GARCH fue desarrollado independientemente por Bollerslev (1986) y Taylor (1986). En la actualidad, los modelos de la clase GARCH son los más populares modelos de volatilidad entre practicantes. Los modelos GARCH gozan de renombre porque son capaces de describir no solamente la característica de clusters de volatilidad (*volatility clustering*), sino también de algunas otras características de las series de tiempo financieras, tales como su pronunciado exceso

de kurtosis o colas anchas. Todavía el modelo estándar GARCH no puede capturar otras características empíricas relevantes de la volatilidad. Por ejemplo, desde Black (1976), los choques negativos o las noticias se cree afectan la volatilidad en forma absolutamente diferente que los choques positivos de igual tamaño. En el modelo estándar GARCH, sin embargo, el efecto de un choque en la volatilidad depende solamente de su tamaño. El signo del choque es irrelevante. Otra limitación del modelo estándar GARCH es que no implica que el rendimiento esperado y la volatilidad están relacionadas directamente, como en el caso del CAPM.

Se define el rendimiento logarítmico diario, R_{t+1} , usando el precio de cierre diario, S_{t+1} , como

$$R_{t+1} = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t).$$

Se supone que la media de R_t es cero pues es dominado por la desviación estándar de los rendimientos, que las innovaciones o las noticias que golpean el rendimiento del activo están distribuidas normalmente. Note que el supuesto de normalidad no es realista, y puede ser relajado. El supuesto de normalidad permite enfocarse en modelar la varianza condicional de la distribución.

Dados los supuestos anteriores, se puede escribir el rendimiento diario como

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, \quad \text{con } z_{t+1} \sim i.i.d. \quad \mathcal{N}(0, 1)$$

El modelo más simple o estándar *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH) de la dinámica de la varianza se puede escribir como

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad (4.1)$$

con

$$\alpha_1 + \beta < 1.$$

La ecuación (4.1) es un modelo GARCH(1, 1). σ_{t+1}^2 es conocida como la varianza condicional porque es una estimación futura para la varianza calculada, basada en cualquier información pasada relevante. Usando el modelo GARCH es posible interpretar la actual varianza estimada σ_{t+1}^2 como una función ponderada de un valor promedio de largo plazo (dependiente de α_0), la información de los rendimientos al cuadrado durante los periodos previos $\alpha_1 R_t^2$ y la varianza ajustada por el modelo durante los periodos previos $\beta \sigma_t^2$. Se puede definir la varianza incondicional, o varianza de largo plazo, σ^2 , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \mathbb{E}[\sigma_{t+1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}[R_t^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 + \beta \sigma^2 \\ \sigma^2 &= \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

La varianza de largo plazo en el modelo GARCH se obtiene resolviendo para α_0 en (4.2) y sustituyendo en (4.1) para obtener

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha_1 - \beta)\sigma^2 + \alpha_1 R_t^2 + \beta\sigma_t^2 = \sigma^2. \quad (4.3)$$

Así, la varianza del periodo $t + 1$ es un promedio ponderado de la varianza de largo plazo, el rendimiento al cuadrado y la varianza en el periodo t , dicho de otra manera, la varianza en $t + 1$ es la varianza de largo plazo con algo sumado (restado) si el rendimiento al cuadrado en t esta por arriba (debajo) de su varianza de largo plazo, y algo sumado (restado) si la varianza en t esta por arriba (debajo) de la varianza a largo plazo. Una ventaja clave de los modelos GARCH para la administración del riesgo es que el pronóstico un periodo para la varianza, $\sigma_{t+1|t}$, esta dado directamente por el modelo como σ_{t+1}^2 . Considere ahora el pronóstico de la varianza de los rendimientos diarios k periodos adelante, usando solamente la información disponible al final del periodo t . En el modelo GARCH, el valor esperado de la varianza futura en el horizonte k es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sigma_{t+k}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_t \right] &= \alpha \mathbb{E} \left[R_{t+k-1}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_t \right] + \beta \mathbb{E} \left[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \alpha \mathbb{E} \left[\sigma_{t+k-1}^2 z_{t+k-1}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_t \right] + \beta \mathbb{E} \left[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= (\alpha + \beta) \left(\mathbb{E} \left[\sigma_{t+k-1}^2 \mid \mathcal{F}_t \right] - \sigma^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

de donde se sigue que

$$\mathbb{E} \left[\sigma_{t+k}^2 \mid \mathcal{F}_t \right] - \sigma^2 = (\alpha + \beta)^{k-1} \left(\mathbb{E} \left[\sigma_{t+1}^2 \mid \mathcal{F}_t \right] - \sigma^2 \right) = (\alpha + \beta)^{k-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2). \quad (4.5)$$

La esperanza condicional, $\mathbb{E} \left[\cdot \mid \mathcal{F}_t \right]$ se refiere a calcular la esperanza usando toda la información disponible al final del periodo t , que incluye el rendimiento ajustado al periodo t también. El termino $\alpha + \beta$ en (4.5) se conoce como la persistencia del modelo. Una alta persistencia -esto es, un $\alpha + \beta$ cerca de 1- implica que las acciones mueven la varianza de su promedio de largo plazo, lo cual persistirá durante mucho tiempo, pero eventualmente el pronóstico de largo plazo será la varianza de largo plazo promedio, σ^2 . Por lo tanto, El modelo GARCH supone que eventualmente en el futuro, la varianza regresará al valor promedio. Hasta ahora se ha considerado pronosticar la varianza de los rendimientos diarios k periodos hacia adelante. Es más interesante el pronóstico de la varianza de los rendimientos acumulados K periodos adelante

$$R_{t+1:t+k} \equiv \sum_{k=1}^K R_{t+k}$$

bajo el supuesto de que los rendimientos tienen autocorrelación cero; la varianza de los rendimientos acumulados a K periodos es simplemente

$$\sigma_{t+1:t+k}^2 \equiv \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^K R_{t+k} \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right] = \sum_{k=1}^K \mathbb{E} \left[\sigma_{t+k}^2 \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.6)$$

En el modelo GARCH se obtiene

$$\sigma_{t+1:t+K}^2 = K\sigma^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha + \beta)^{k-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2). \quad (4.7)$$

Un inconveniente del modelo es que la distribución conjunta es desconocida incluso si la distribución al periodo $t+1$ se supone normal, como se hace en esta sección. Así, mientras que es fácil pronosticar la varianza del largo plazo en el modelo, no es fácil pronosticar la distribución condicional completa.

4.3. Extensiones al modelo GARCH

Como se observó anteriormente, uno de los distintos beneficios de los modelos GARCH es su flexibilidad. En esta sección, se explora esta flexibilidad y se presentan algunos de los modelos más útiles para la administración del riesgo.

4.3.1. Memoria de largo plazo en la varianza

El modelo GARCH estándar discutido anteriormente se denomina GARCH (1,1) porque está compuesto solamente por un rezago de los rendimientos al cuadrado y un rezago de la varianza. Para el pronóstico a corto plazo de la varianza, este modelo es a menudo suficiente, pero en general podemos tener en cuenta una dinámica de orden mayor considerando el modelo GARCH (p,q), que incluye rezagos de orden mayor como sigue

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (4.8)$$

El modelo GARCH simple supone que la varianza de largo plazo es constante en el tiempo. Los componentes del modelo GARCH, el cual es un GARCH(2,2) restringido, pueden ser vistos al permitir que la varianza de largo plazo cambie en el tiempo y sea capturada por el factor v_{t+1} en

$$\sigma_{t+1}^2 = v_{t+1} + \alpha (R_t^2 - v_t) + \beta (\sigma_t^2 - v_t)$$

$$v_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_v (R_t^2 - \sigma_t^2) + \beta_v v_t \quad (4.9)$$

Este modelo puede capturar potencialmente los patrones del autocorrelación en la varianza, que desaparecen más lento que en el modelo estándar de memoria a corto plazo GARCH (1,1).

4.3.2. El efecto de apalancamiento

Uno de los hechos estilizados que presentan los rendimientos de los activos financieros es que un rendimiento negativo aumenta la varianza más que un rendimiento positivo de la misma magnitud, lo cual se ha denominado como el efecto de apalancamiento, debido a que un rendimiento negativo en una acción implica una caída en el valor del capital (*equity*), lo que implica que una empresa esta más apalancada y por tanto más riesgosa (suponiendo que el nivel de la deuda permanece constante). Se puede modificar el modelo GARCH de tal forma que el peso dado al rendimiento dependa de si el rendimiento es positivo o negativo de la siguiente manera

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (R_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_t^2(z_t - \theta)^2 + \beta\sigma_t^2. \quad (4.10)$$

El modelo en (4.10) se denomina NGARCH¹ (*nonlinear*GARCH). Note que estrictamente se trata de un arribo de noticias positivo, $z_t > 0$, comparado con un rendimiento simple R_t , que tiene menos de un impacto en la varianza que un arribo negativo de noticias, si $\theta > 0$. La persistencia de la varianza en este modelo es $\alpha(1 + \theta^2) + \beta$, y la varianza a largo plazo es $\sigma^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1(1 + \theta^2) - \beta)$. Otra manera de capturar el efecto de apalancamiento es definir una variable indicadora, I_t , que toma el valor de 1 si el rendimiento del día t es negativo y cero en otro caso

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } R_t < 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La dinámica de la varianza se puede especificar como

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \alpha_1 \theta I_t R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad (4.11)$$

Así, un θ mucho mayor que cero capturará de nuevo el efecto de apalancamiento. El modelo definido en (4.11) es conocido como el modelo de GJR-GARCH, por sus autores Glosten, Jagannathan y Runkle (1993). Un modelo diferente que también captura el apalancamiento es el modelo GARCH exponencial o EGARCH (Nelson 1991), en el que la dinámica de la varianza es

$$\ln \sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\phi R_t + \gamma [|R_t| - \mathbb{E} |R_t|]) + \beta \ln \sigma_t^2, \quad (4.12)$$

¹ Véase [12] para una mejor perspectiva de los modelos NGARCH.

el cual exhibe el efecto usual de apalancamiento si $\alpha_1\phi < 0$. El modelo EGARCH tiene la ventaja de que la especificación logarítmica asegura que la varianza sea siempre positiva, pero tiene la desventaja que la varianza esperada futura más allá de un periodo no se puede calcular analíticamente.

4.4. Estimación por máxima verosimilitud

En la sección anterior, se introdujeron una gama de los modelos que deberían ajustarse bien a los datos, pero tienen un número de parámetros desconocidos que deben ser estimados. Para hacer tal estimación, hay que hacer frente al desafío que la varianza condicional, σ_{t+1}^2 , es una variable no observable, que debe ser estimada implícitamente junto con los parámetros del modelo, por ejemplo, α_0 , α_1 y β .

4.4.1. Estimación estándar por máxima verosimilitud

Dado el hecho de que el modelo es no lineal, no se puede usar MCO para la estimación de los modelos GARCH. Hay varias razones para esto, pero la más sencilla y fundamental es que MCO minimiza la suma de los residuales al cuadrado (SRC). La SRC depende solamente de los parámetros en la ecuación de la media condicional, y no de la varianza condicional, y por tanto, la minimización de la SRC no es un método adecuado.

Para estimar modelos de la familia GARCH, se utiliza otra técnica conocida como máxima verosimilitud. Esencialmente, este método funciona hallando los valores más parecidos de los parámetros dados por los datos de una muestra. Específicamente, se plantea una función de verosimilitud logarítmica y se maximiza en forma apropiada. La estimación por máxima verosimilitud es usada para encontrar valores de los parámetros tanto para modelos lineales como no lineales. Se discutirá brevemente el método de estimación por máxima verosimilitud con el siguiente ejemplo. Recuerde el supuesto

$$R_t = \sigma_t z_t, \quad \text{con } z_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$$

El supuesto de v. a. normales *i.i.d.* implica que la función de verosimilitud, o la verosimilitud l_t , de R_t es El supuesto de v. a. normales *i.i.d.* implica que la función

de verosimilitud, o la verosimilitud l_t , de R_t es

$$\begin{aligned} l_t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \\ &= \prod_{t=1}^T (2\pi\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \end{aligned}$$

y la verosimilitud para toda la muestra es

$$L = \prod_{t=1}^T l_t = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{R_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (4.13)$$

Una manera natural de elegir parámetros para ajustar los datos es maximizar la verosimilitud de una muestra observada en (4.13). Recuerde que el maximizar del logaritmo de una función es equivalente a maximizar la función misma, debido que la función logaritmo es monótona y creciente. La maximización del logaritmo es conveniente pues sustituye productos por sumas. Así, se eligen los parámetros (α, β, \dots) , que resuelven

$$\begin{aligned} \max \ln L &= \max \sum_{t=1}^T \ln(l_t) \\ &= \max \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

a los parámetros óptimos obtenidos se les denomina como estimadores máximo verosímiles o EMV's. Estos estimadores tienen características teóricas de que cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande, convergen a sus verdaderos valores y la varianza de estos estimadores será lo más pequeña posible.

Por supuesto no se cuenta con una historia infinita de datos disponibles en realidad. Incluso si hay disponible una serie de tiempo grande, por ejemplo, de rendimientos diarios de algún activo o índice, no está claro si se deben utilizar todos esos datos al estimar los parámetros. A veces cambios estructurales obvios tales como un nuevo tipo de cambio o nuevas regulaciones al *trading* en un mercado particular pueden servir de guía en la elección del tamaño de la muestra. Pero a menudo las fechas de estos cambios estructurales no son conocidos y dejan al administrador del riesgo con tener que ponderar las ventajas de tener una muestra más larga, que implica estimaciones más exactas (suponiendo que no hay cambios), y una muestra más corta, que reduce el riesgo de estimar a través de un cambio estructural. Cuando se estiman modelos GARCH, una regla general de pulgar muy buena es utilizar las últimas 1000 observaciones diarias y actualizar la muestra con mucha frecuencia para permitir que los parámetros cambien con el tiempo.

4.4.2. Quasi-Estimación por máxima verosimilitud

Se puede ahora discutir que los estimadores por máxima verosimilitud se basan en el supuesto de que la distribución condicional es normal, lo cual es falso, mientras este argumento parece ser válido un resultado clave en econometría afirma que incluso si la distribución condicional no es normal, la EMV da como resultado estimadores para los parámetros de la media y la varianza que convergen a los verdaderos parámetros cuando el tamaño de la muestra es muy grande, siempre que las funciones para la media y la varianza sean especificadas en forma apropiada. Este resultado establece lo que se ha denominado quasi estimación por máxima verosimilitud o QEMV, refiriéndose al uso de EMV normal aún cuando el supuesto de distribución normal sea falso. Note que la QEMV nos libera de preocuparnos en la distribución condicional, pero tiene un precio: Los estimadores por QEMV en general son menos exactas que los de EMV. Así se compensa eficacia asintótica teórica del parámetro por un aspecto práctico.

De esta manera, se presenta un truco denominado *variance targeting*. Recuerde que el modelo GARCH simple puede ser escrito como

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2 = (1 - \alpha_1 - \beta) \sigma^2 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2,$$

así, en lugar de estimar α_0 por MV, se puede fijar la varianza de largo plazo, σ^2 , igual a la varianza muestral, que se estima de antemano fácilmente como

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^2.$$

La varianza objetivo tiene la ventaja de imponer directamente la estimación de la varianza de largo plazo en el modelo GARCH. Aún mas, facilita la estimación al reducir en uno el número de parámetros que hay que estimar.

4.5. Simulación Monte Carlo (SMC)

Se ilustra el poder de la simulación Monte Carlo (SMC) con un ejemplo sencillo. Considere el modelo GARCH(1,1) bajo el supuesto de normalidad de los rendimientos, donde

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, \quad \text{con } z_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

y

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

Según lo mencionado anteriormente, al final del periodo t se obtiene R_t y se calcula σ_{t+1}^2 , que es la varianza del periodo $t+1$ en el modelo GARCH. Usando un generador de número aleatorios, que son estándares en la mayoría de los paquetes de software, se puede obtener un conjunto de números aleatorios artificiales

$$\widehat{z}_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

provenientes de la distribución normal estándar, $\mathcal{N}(0, 1)$. M denota el número de muestras, que podría ser, por ejemplo, 5000. Para verificar que los números aleatorios provienen de una distribución normal estándar, se puede construir un histograma de los números aleatorios generados y comparar con la función de distribución normal teórica.

De estos números aleatorios se puede calcular un conjunto de rendimientos hipotéticos para el periodo $t+1$ como

$$\widehat{R}_{i,t+1} = \sigma_{t+1} \widehat{z}_{i,1}$$

Dados estos rendimientos hipotéticos se puede actualizar la varianza para obtener un sistema de varianzas hipotéticas para el periodo $t+2$ como sigue

$$\widehat{\sigma}_{i,t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{R}_{i,t+1}^2 + \beta \widehat{\sigma}_{t+1}^2$$

Dado un nuevo conjunto de números aleatorios de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\widehat{z}_{i,2}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Se puede calcular el rendimiento hipotético al periodo $t+2$ como

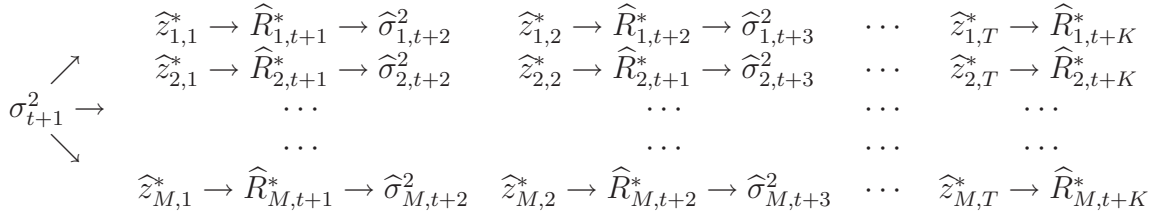
$$\widehat{R}_{i,t+2} = \widehat{\sigma}_{i,t+2} \widehat{z}_{i,2}$$

y ahora la varianza se actualiza por

$$\widehat{\sigma}_{i,t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{R}_{i,t+2}^2 + \beta \widehat{\sigma}_{i,t+2}^2.$$

En la Gráfica 4.1 se puede apreciar la simulación de rendimientos diarios hipotéticos a partir del periodo $t+1$ al periodo $t+K$.

Cada renglón corresponde a la denominada trayectoria de una simulación Monte Carlo, la cual inicia a partir de σ_{t+1}^2 en el primer día o periodo, pero no para los demás periodos. En cada periodo una nueva trayectoria se actualiza con un nuevo número aleatorio, que es diferente del usado en cualquier otro periodo anterior. Finaliza el proceso con M sucesiones de rendimientos hipotéticos comenzando desde el periodo $t+1$ hasta $t+K$. A partir de estos rendimientos futuros hipotéticos es

Gráfica 4.1: Simulación de los rendimientos de $t + 1$ a $t + K$.

posible calcular el K -ésimo rendimiento hipotético de cada trayectoria de Monte Carlo como

$$\widehat{R}_{i,t+1:t+K} = \sum_{k=1}^K \widehat{R}_{i,t+k}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Observe que el método GARCH-SMC descrito anteriormente es condicional en naturaleza porque se construye a partir de la estimación en el periodo t para la varianza del periodo $t + 1$. Otra ventaja dominante de la técnica SMC es su flexibilidad. Se puede utilizar SMC para otra distribución donde el supuesto de rendimientos estandarizados normales no es requerido. Si se asume que la distribución estandarizada $t(d)$ con $d=12$ por ejemplo, describe mejor los datos, entonces simplemente se generan muestras a partir de dicha distribución. Finalmente, la técnica de SMC se puede utilizar para cualquier modelo correctamente especificado para la dinámica de la varianza.

Capítulo 5

Modelo GARCH de valuación de opciones

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta la valuación de opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, bajo la metodología de Duan, J.-C.,(1995), “The GARCH Option Pricing Model”. Este modelo combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, la volatilidad se supone es conducida por un proceso GARCH calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción se basa en argumentos de no arbitraje condicional a la volatilidad del proceso GARCH. En este contexto, el modelo es capaz de reflejar los cambios en la volatilidad condicional del activo subyacente en un forma sencilla. Debido a que no se cuenta con una forma cerrada para encontrar el precio de la opción se recurre a la simulación Monte Carlo. El análisis numérico de los resultados de la implementación empírica del modelo sugiere que éste puede ser capaz de explicar algunas desviaciones sistemáticas asociadas con el modelo de Black y Scholes.

5.2. Modelo GARCH de valuación de opciones

El modelo de Black y Scholes, no obstante su renombre, exhibe algunos sesgos sistemáticos. Puesto que las opciones son activos derivados, el asunto crítico es si o no el proceso asumido en un modelo es consistente con las características de la

distribución de la serie de tiempo del activo subyacente. Dado el hecho de que un cuerpo extenso en la literatura ha demostrado que el *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH) proporciona una descripción excelente de la dinámica del precio de un activo, Duan (*Mathematical Finance*, 1995) desarrolló un modelo GARCH de valuación de opciones y sugirió que puede evitar potencialmente los errores de valuación asociados al modelo Black y Scholes. Debido a que el modelo GARCH de valuación de opciones no tiene una solución en forma cerrada, la afirmación de su superioridad solamente puede ser probada empíricamente.

Suponga que los rendimientos diarios de un activo como independientes e idénticamente distribuidos en forma normal

$$R_{t+1} = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

El rendimiento agregado en T días se distribuye también normal con media μ y varianza σ^2 escaladas de la siguiente manera

$$R_{t+1:t+T} = \ln(S_{t+T}) - \ln(S_t) \sim \mathcal{N}(T\mu, T\sigma^2)$$

y el precio futuro del activo es

$$S_{t+T} = S_t \exp(R_{t+1:t+T}).$$

Ahora considere la valuación de opciones bajo el supuesto de que los rendimientos del activo subyacente siguen un proceso GARCH. El modelo supone que el rendimiento esperado del activo subyacente es igual a la tasa libre de riesgo, r , más un premio al riesgo de la volatilidad, λ , y un término de normalización. El rendimiento diario observado es igual al rendimiento esperado más un término de perturbación. La distribución condicional de este término de perturbación es normal con media cero y la varianza sigue un proceso GARCH (1,1) con apalancamiento. Dejando que el rendimiento pasado entre en la varianza con la magnitud del signo del rendimiento, el efecto de apalancamiento crea una asimetría en la distribución de los rendimientos. Esta asimetría es importante para capturar el sesgo implícito observado en precios de opciones. Específicamente, se puede escribir el proceso de rendimientos como

$$R_{t+1} \equiv \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \quad (5.1)$$

donde

$$z_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

y

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2.$$

Note que el valor esperado y la varianza del rendimiento del periodo siguiente condicional a toda la información disponible al tiempo t son:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] &= r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \\ \text{Var}\left[R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] &= \sigma_{t+1}^2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Para una variable $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, se sabe que $\mathbb{E}[\exp(x)] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, por lo que la esperanza condicional del proceso anterior es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \mathbb{E}\left[\exp(\sigma_{t+1}z_{t+1}) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \exp\left(r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \\ &= \exp(r + \lambda\sigma_{t+1}) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right) \\ &= \exp(r + \lambda\sigma_{t+1}),\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde se ha usado $\sigma_{t+1}z_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La ecuación del rendimiento esperado en (5.3) destaca el papel de λ como la prima al riesgo de la volatilidad. Podemos obtener el valor de la opción bajo neutralidad al riesgo como

$$c = e^{-rT} \mathbb{E}^* \left[\max(S_{t+T} - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \exp(r) \\ \text{Var}^* \left[R_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \sigma_{t+1}^2,\end{aligned}\tag{5.4}$$

de modo que la tasa esperada de rendimiento en el activo con riesgo es igual a la tasa libre de riesgo y la varianza condicional bajo neutralidad al riesgo es la misma que bajo el proceso original. Considere el proceso siguiente

$$R_{t+1} \equiv \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}^*$$

donde

$$z_{t+1}^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

y

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t^* - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2.$$

En este caso, se puede comprobar que la esperanza condicional es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* \left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}^* \left[r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}^* \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \right) \mathbb{E}^* \left[\exp(\sigma_{t+1}z_{t+1}^*) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left(r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \right) \exp \left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \right) \\ &= \exp(r) \exp \left(-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \right) \exp \left(\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 \right) \\ &= \exp(r), \end{aligned} \tag{5.5}$$

lo cuál satisface la primera condición en (5.4). Además, la varianza condicional bajo el proceso neutral al riesgo es

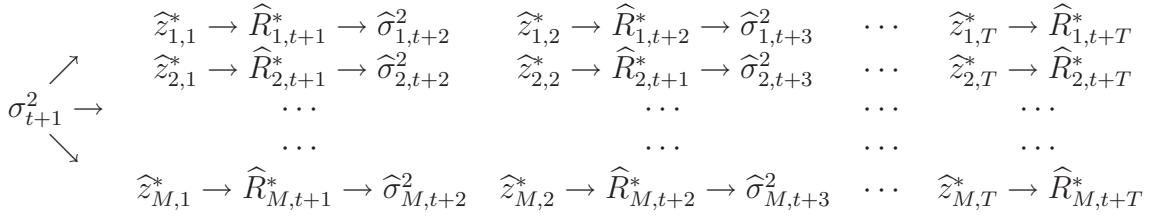
$$\begin{aligned} \text{Var}^* [R_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^* \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(R_t - r + \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t \right)^2 + \beta\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sigma_{t+1}^2, \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde la última igualdad sale de la varianza del período $t + 1$, que es conocida a final del período, t , en el modelo GARCH. Por lo tanto, se puede concluir que las condiciones para un proceso neutral al riesgo se cumplen¹. Una ventaja del enfoque del modelo GARCH de valuación de opciones es su flexibilidad: el análisis anterior se podía hacer de nuevo fácilmente para cualesquiera de los modelos GARCH introducidos en el capítulo anterior.

5.3. Implementación del Modelo: Simulación Monte Carlo

Se ha encontrado una manera de valuar la opción europea bajo neutralidad al riesgo, desafortunadamente, no se tiene una solución en forma cerrada disponible,

¹ Véase [7], pág. 15-16 y 26.

Gráfica 5.1: Simulación de los rendimientos $t + 1$ a $t + T$.

por lo que se recurre a la simulación para calcular el precio

$$c = e^{-rT} \mathbb{E}^* \left[\max(S_{t+T} - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (5.7)$$

La simulación puede ser hecha como sigue: en primer lugar, observe que se puede eliminar un parámetro escribiendo

$$\begin{aligned}
\sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda \sigma - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - (\lambda + \theta) \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2 \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t^* - \lambda^{**} \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2,
\end{aligned}$$

con $\lambda^{**} \equiv \lambda + \theta$. Ahora, para una varianza condicional dada σ_{t+1}^2 , y parámetros, α_0 , α_1 , β , λ^{**} , se puede utilizar simulación Monte Carlo para crear trayectorias hipotéticas de los rendimientos del activo. La estimación de los parámetros será discutida posteriormente. La Gráfica 5.1 ilustra la simulación de los rendimientos diarios hipotéticos a partir del día $t + 1$ hasta el vencimiento en el día $t + T$, donde las $z_{i,j}^*$ se obtienen de un generador de números aleatorios de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ y M es el número de trayectorias de los rendimientos simulados. Es necesario calcular la esperanza en (5.7) usando el proceso neutral al riesgo. Primero se calcula el rendimiento simulado neutral al riesgo en el período $t + j$ para la trayectoria i de la simulación como

$$\widehat{R}_{i,t+j}^* = r - \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_{i,t+j}^2 + \widehat{\sigma}_{i,t+j} \widehat{z}_{i,j}^* \quad (5.8)$$

y la varianza es actualizada por

$$\widehat{\sigma}_{i,t+j+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\widehat{\sigma}_{i,t+j} \widehat{z}_{i,j}^* - \lambda^{**} \widehat{\sigma}_{i,t+j})^2 + \beta \widehat{\sigma}_{i,t+j}^2 \quad (5.9)$$

En el primer período todas las trayectorias simuladas comienzan con la misma σ_{t+1}^2 , por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{i,t+1}^* &= r - \frac{1}{2} \widehat{\sigma}_{i,t+1}^2 + \widehat{\sigma}_{i,t+1} \widehat{z}_{i,1}^* \\
\widehat{\sigma}_{i,t+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_{t+1} \widehat{z}_{i,1}^* - \lambda^{**} \sigma_{t+1})^2 + \beta \sigma_{t+1}^2
\end{aligned} \quad (5.10)$$

Una vez que se han simulado por ejemplo 10000 trayectorias ($M = 10000$) cada día hasta la fecha de vencimiento, T , es posible calcular los precios hipotéticos del activo neutrales al riesgo en el vencimiento como

$$S_{i,t+T}^* = S_t \exp \left(\sum_{j=1}^T \widehat{R}_{i,t+j}^* \right), i = 1, 2, \dots, M \quad (5.11)$$

el precio de la opción call se calcula como el promedio sobre los pagos futuros hipotéticos traídos a valor presente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} c_{GH} &= e^{-rT} \mathbf{E}^* \left[\max(S_{t+T} - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(\widehat{S}_{i,t+T}^* - K, 0), \end{aligned} \quad (5.12)$$

en el caso de la opción put

$$\begin{aligned} p_{GH} &= e^{-rT} \mathbf{E}^* \left[\max(K - S_{t+T}, 0) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(K - \widehat{S}_{i,t+T}^*, 0), \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde GH denota GARCH. Así, estamos utilizando la simulación para calcular pago promedio futuro, que es usado como una estimación del valor esperado en (5.12) y (5.13). A mayor número de realizaciones, el promedio converge a la esperanza. Con base en las ideas anteriores, se puede proponer el siguiente algoritmo para determinar el valor de la opción:

- (1) Elegir y calibrar un proceso GARCH para la volatilidad de los rendimientos del subyacente de la opción;
- (2) Generar muestras del proceso GARCH elegido;
- (3) A partir de las muestras obtenidas, generar rendimientos del subyacente en un mundo neutral al riesgo;
- (4) Repetir (2) y (3) M veces con la función de pago de la opción;
- (5) Calcular el promedio de las M muestras de la función de pago para obtener una estimación de la esperanza del pago de la opción;
- (6) Descontar el promedio obtenido a la tasa libre de riesgo para obtener una estimación del valor de la opción.

Observe que entre mayor sea el número de realizaciones, mayor será la precisión del resultado. Por supuesto, la precisión también depende del método usado para generar los números aleatorios, por lo que es recomendable llevar a cabo una prueba de aleatoriedad.

5.4. Resultados

En esta sección se caracteriza el precio de la opción call y put europea sobre el IPC siguiendo la metodología presentada en la Sección 5.2. En la estimación del modelo se utilizó el paquete econométrico *EViews*. Primero, se calcularon los rendimientos logarítmicos, se hizo la prueba de Dickey-Fuller² de raíz unitaria y se verificó que la serie fuera estacionaria. Las salidas de *EViews* con la estimación del modelo, la significancia estadística de los parámetros, los correlogramas de los residuales estandarizados y de los residuales estandarizados al cuadrado se muestran en el Apéndice B.

5.4.1. Análisis de los resultados

Las características generales de modelo GARCH de valuación de opciones en comparación con la fórmula de Black y Scholes se presentan en los Cuadros 5.1 y 5.2. El tipo de opciones usado para generar estas tablas son de estilo europeo. El modelo GARCH-M (1,1) especificado en (5.1) es ajustado a la serie en forma diaria del IPC del 2 de Enero de 2003 al 29 de Diciembre de 2006. Los valores estimados de los parámetros son $\alpha_0 = 7.40 \times 10^{-6}$, $\alpha_1 = 0.097039$, $\beta_1 = 0.835823$, $\lambda = 0.181029$, con $\theta = 0$, respectivamente. Los valores de los parámetros implican que la desviación estándar estacionaria anualizada (basada en 365 días) es de 20.55%³. La tasa de interés utilizada fue la TIIE correspondiente al plazo. El valor del IPC para el 29 de Diciembre del 2006 fue de $S_0 = 26448.32$ puntos. Se tomaron los precios de ejercicio de 27000, 27500, 28000, 28500, 29000, 29500 y 30000 puntos, para un plazo T de 20, 30 y 60 días, respectivamente. Se construye un indicador de desviación sistemática definido como:

$$DS = \frac{call(put)_{GH} - call(put)_{BS}}{call(put)_{BS}}.$$

Se obtienen los precios de opciones europeas de compra y venta con el método de simulación Monte Carlo para el modelo con $M = 5000$. Se sabe que el modelo de

² Véase el Apéndice A.

³ Véase [7] pág. 19, Teorema 3.1

Cuadro 5.1: Precios de opciones call europeas simulados.

DAV	K	B&S	c_{GH}	D.S. %*
T=20	27000	256.73	308.04	19.99
	27500	124.48	168.66	35.50
	28000	53.32	85.28	59.95
	28500	20.11	40.23	100.08
	29000	6.67	18.73	180.74
	29500	1.95	8.88	355.61
	30000	0.50	4.12	720.87
T=30	27000	385.49	450.66	16.91
	27500	225.22	279.71	24.20
	28000	122.11	164.76	34.92
	28500	61.34	93.94	53.14
	29000	28.54	50.22	75.98
	29500	12.29	25.67	108.77
	30000	4.91	12.89	162.37
T=60	27000	682.02	762.22	11.76
	27500	483.65	574.63	18.81
	28000	331.57	424.13	27.92
	28500	219.65	306.50	39.54
	29000	140.58	217.13	54.46
	29500	86.93	150.95	73.64
	30000	51.97	102.10	96.47

*Desviación Sistemática.

Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero, (véase Black 1975, Gultekin *et al* 1982). Comparado con los precios obtenidos con el modelo GARCH, el Cuadro 5.1 muestra que el modelo de Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero, para T=20, 30 y 60 días. La desviación sistemática encontrada fluctúa entre los rangos de 11.76 % para $T = 60$ hasta 720.87 % para T=20. En promedio dicha desviación sistemática fue de 108.17 % para los plazos considerados, lo cual se puede observar a partir de la Gráfica 5.2. Se concluye que efectivamente, comparado con el modelo GARCH, el modelo Black y Scholes subvalúa opciones fuera del dinero.

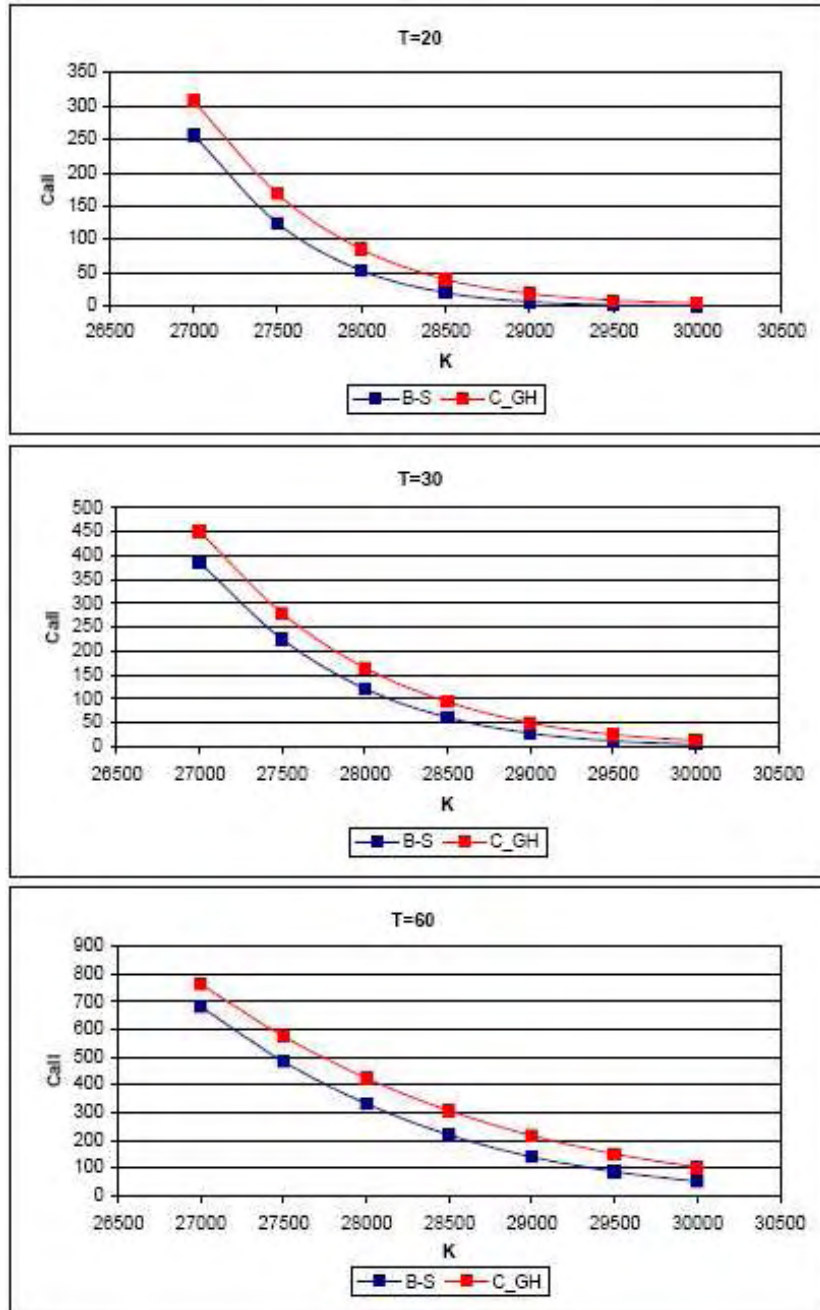
El Cuadro 5.2 muestra los precios obtenidos con el modelo GARCH para el caso de las opciones europeas de venta para T=20, 30 y 60 días. Se observa que

Cuadro 5.2: Precios de opciones put europeas simulados.

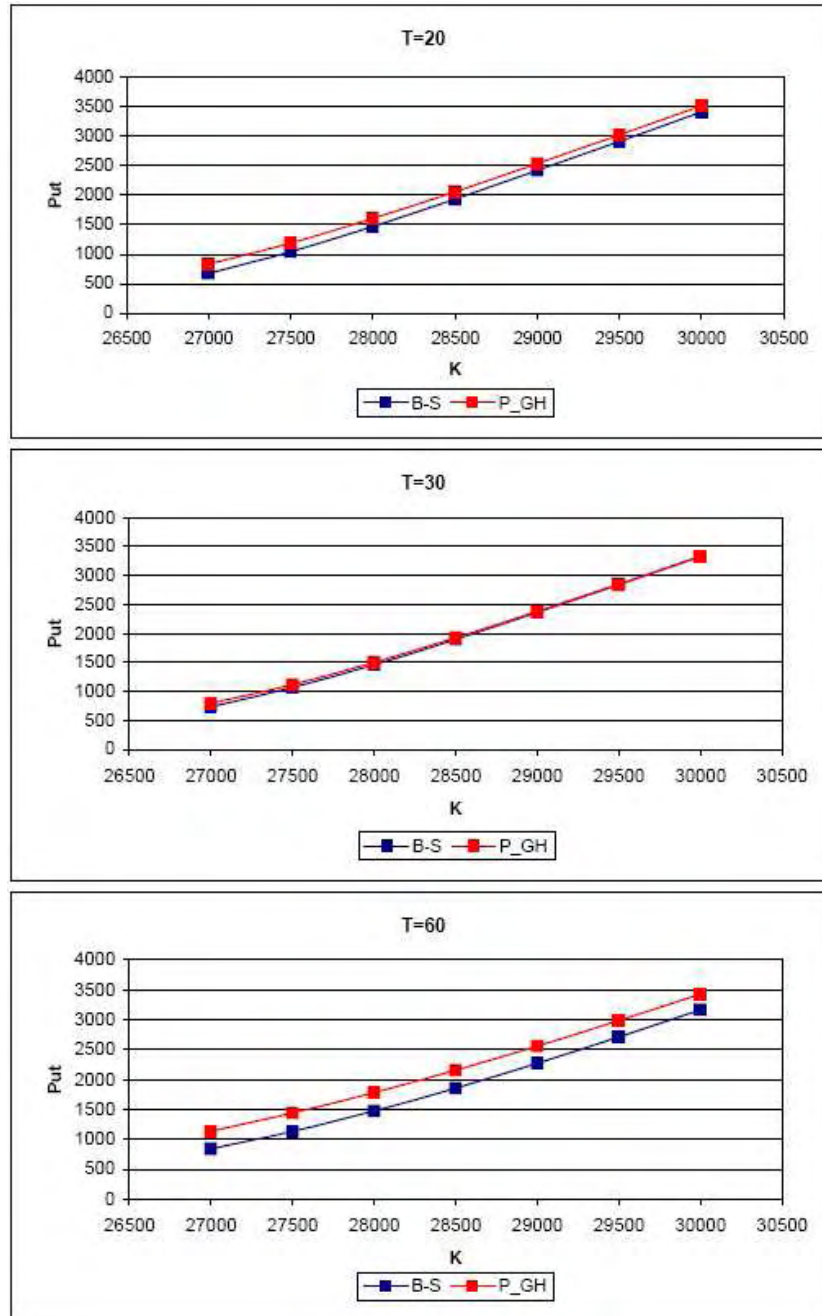
DAV	K	B&S	p_{GH}	D.S. %*
T=20	27000	676.77	829.87	22.62
	27500	1042.09	1188.05	14.01
	28000	1468.49	1602.23	9.11
	28500	1932.84	2054.74	6.31
	29000	2416.97	2530.80	4.71
	29500	2909.81	3018.51	3.74
	30000	3405.92	3511.32	3.09
T=30	27000	732.89	794.05	8.34
	27500	1068.84	1119.44	4.73
	28000	1461.96	1500.83	2.66
	28500	1897.40	1926.35	1.53
	29000	2360.81	2378.96	0.77
	29500	2840.79	2850.75	0.35
	30000	3329.62	3334.31	0.14
T=60	27000	839.91	1132.47	34.83
	27500	1134.25	1437.59	26.74
	28000	1474.87	1779.80	20.67
	28500	1855.66	2154.88	16.12
	29000	2269.29	2558.21	12.73
	29500	2708.36	2984.74	10.20
	30000	3166.10	3428.59	8.29

*Desviación Sistemática.

el modelo Black y Scholes comparado con el modelo GARCH subvalúa opciones dentro del dinero. La desviación sistemática encontrada fluctúa entre los rangos de 0.14% para $T = 30$ hasta 34.83% para $T=60$. En promedio, la desviación sistemática fue de 10.08% para los plazos considerados, lo cual se puede observar a partir de la Gráfica 5.3.



Gráfica 5.2: Call B-S vs. c_{GH} para $T=20,30,60$.

Gráfica 5.3: Put B-S vs. p_{GH} para T=20,30,60.

Conclusiones

En los últimos años la ingeniería financiera ha experimentado profundas transformaciones, sustentadas en la tecnología de la información y en el desarrollo de modelos en tiempo real, facilitando así la toma de decisiones en el sector financiero. El proceso de estas transformaciones causan cambios extremos en la toma de decisiones de los participantes del mercado, razón por la cual resulta necesario tener un sistema eficaz para obtener los precios de los diferentes instrumentos negociados.

Se ha presentado en este trabajo el modelo GARCH de valuación de opciones bajo valuación neutral al riesgo. Este modelo tiene características deseables y presenta una posibilidad real de corregir los sesgos asociados al modelo de Black y Scholes. Sin embargo, esto último, en el caso de la volatilidad debe ser verificado desde el punto de vista empírico. Debido a que la tecnología para los modelos GARCH se ha desarrollado, fue posible diseñar y ejecutar una prueba para el modelo sin mucha dificultad.

Se pudo comprobar que efectivamente el modelo de Black y Scholes comparado con el modelo GARCH, subvalúa opciones de compra (call) fuera del dinero. De manera análoga, se comprobó que el modelo Black y Scholes comparado con el modelo GARCH subvalúa opciones de venta (put) dentro del dinero.

Por último, cabe señalar que este trabajo no pretende ser exhaustivo, pues sabemos que existen en la literatura trabajos en torno a la dinámica de la volatilidad, cuya estimación es la parte más importante en la valuación de opciones, dichos trabajos desarrollan modelos en tiempo continuo para valuar opciones con volatilidad dependiente del tiempo, es decir, estocástica, como los de Hull-White (1987), Heston (1993), Heston-Nandi (2000) así como en Venegas Martínez (2006), entre otros.

Apéndice A

Prueba de Dickey-Fuller

A.1. Prueba de Dickey-Fuller

El trabajo inicial para la prueba de raíz unitaria fue hecho por Dickey and Fuller (Dickey and Fuller 1979, Fuller 1976). El objetivo básico de la prueba es contrastar la hipótesis nula que $\phi = 1$ en:

$$y_t = \phi y_{t-1} + u_t$$

contra la alternativa de un cola $\phi < 1$. Tenemos entonces que:

H_0 : la serie contiene una raíz unitaria *vs.* H_1 : la serie es estacionaria.

Usualmente se usa la regresión:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + u_t$$

Así que la prueba de $\phi = 1$ es equivalente a probar a $\psi = 0$ (porque $\phi - 1 = \psi$).

Formas diferentes de las regresiones para la prueba de D.F.

Las pruebas de Dickey-Fuller se conocen también como pruebas τ : $\tau, \tau_\mu, \tau_\tau$. El segundo y tercero de estas pruebas τ_μ, τ_τ son equivalentes a la primera excepto que agregan una constante, una constante y tendencia determinista respectivamente.

Los modelos de la hipótesis nula (H_0) y la alternativa (H_1) en cada caso son:

(i)

$$H_0 : y_t = y_{t-1} + u_t$$

$$H_1 : y_t = \phi y_{t-1} + u_t, \phi < 1$$

Esta es una prueba de caminata aleatoria contra proceso autorregresivo de orden 1 AR(1).

(ii)

$$H_0 : y_t = y_{t-1} + u_t$$

$$H_1 : y_t = \phi y_{t-1} + \mu + u_t, \phi < 1$$

Esta es una prueba de caminata aleatoria contra proceso autorregresivo de orden 1 AR(1) con *drift*.

(iii)

$$H_0 : y_t = y_{t-1} + u_t$$

$$H_1 : y_t = \phi y_{t-1} + \mu + \lambda_t + u_t, \phi < 1$$

Esta es una prueba de caminata aleatoria contra proceso autorregresivo de orden 1 AR(1) con *drift* y tendencia en el tiempo.

Cálculo del estadístico de prueba D.F.

Sea

$$\Delta y_t = u_t$$

donde $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, y las alternativas pueden ser expresadas como:

$$\Delta y_t = \psi y_{t-1} + \mu + \lambda_t + u_t$$

con $\mu = \lambda = 0$ en el caso (i), y $\lambda = 0$ en el caso (ii) y $\psi = \phi - 1$. En cada caso, las pruebas se basan en el t-ratio sobre el término y_{t-1} en la regresión estimada de Δy_t sobre y_{t-1} , más una constante en el caso (ii) y una constante tendencia en el caso (iii). Los estadísticos de prueba se definen como:

$$\text{Estadístico } -t = \frac{\hat{\psi}}{SE(\hat{\psi})}$$

El estadístico de prueba no sigue la distribución-t usual bajo H_0 , porque la nula es una de no-estacionariedad, en vez de esa sigue una distribución no-estándar. Sus valores críticos se derivan experimentos Monte Carlo en, por ejemplo, Fuller (1976). Ejemplos relevantes de la distribución se muestran en el siguiente Cuadro A.1:

Cuadro A.1: Valores críticos en la prueba de Dickey-Fuller.

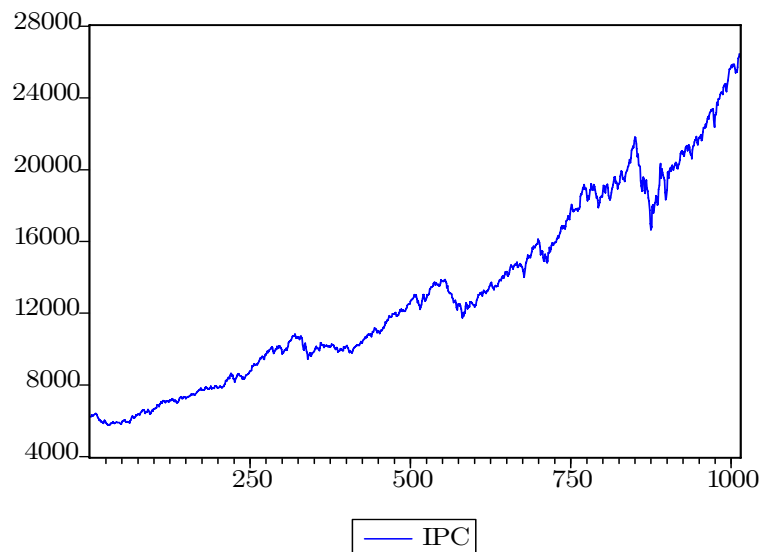
Nivel de significancia	10 %	5 %	1 %
V.C. para una constante pero sin tendencia	-2.57	-2.86	-3.43
V.C. para una constante pero con tendencia	-3.12	-3.41	-3.96

La hipótesis nula de raíz unitaria es rechazada a favor de la alternativa: es estacionaria, en cada caso; si el estadístico de prueba es más negativo que el valor crítico. Las pruebas anteriores son válidas únicamente si u_t es ruido blanco.

Apéndice B

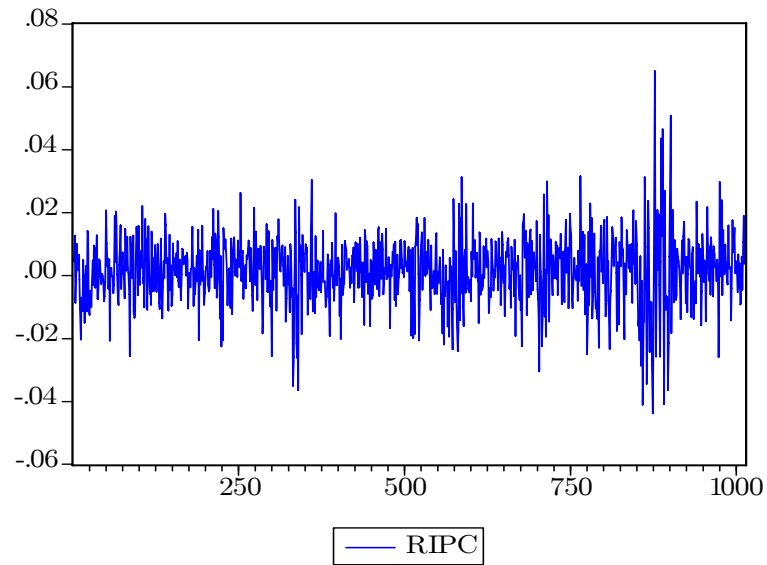
Salidas de EViews

En la Gráfica B.1 se muestra la serie del IPC en forma diaria del 02/01/2003 al 29/12/2006, la muestra esta compuesta por 1013 observaciones. En la Gráfica B.2 se muestran los rendimientos logarítmicos de la serie del IPC, los cuales se obtuvieron con $\ln S_t / \ln S_{t-1}$. Se puede observar que la serie presenta heterocedasticidad.



Gráfica B.1: Comportamiento del IPC de 02/01/2003 al 29/12/2006.

En el Cuadro B.1 se muestra la salida de la prueba de Dickey-Fuller, se observa la serie es estacionaria. La Gráfica B.3 muestra el correlograma de la serie RIPC.



Gráfica B.2: Rendimientos del IPC con $\ln S_t / \ln S_{t-1}$.

En la Gráfica B.4 se muestra el correlograma de los residuales estandarizados con la estadística Q. En la Gráfica B.5 se muestra el correlograma de los residuales estandarizados al cuadrado.

Cuadro B.1: Prueba de Dickey-Fuller.

Null Hypothesis: RIPC has a unit root			
Exogenous: Constant			
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=21)			
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-28.26461	0.0000
Test critical values:	1 % level	-3.436599	
	5 % level	-2.864188	
	10 % level	-2.568232	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.			

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.116	0.116	13.696	0.000
		2	-0.052	-0.066	16.442	0.000
		3	-0.049	-0.035	18.856	0.000
		4	-0.066	-0.061	23.324	0.000
		5	0.023	0.034	23.856	0.000
		6	0.039	0.024	25.378	0.000
		7	-0.022	-0.032	25.879	0.001
		8	-0.061	-0.054	29.678	0.000
		9	0.008	0.025	29.742	0.000
		10	-0.014	-0.024	29.956	0.001
		11	0.013	0.011	30.134	0.002
		12	0.042	0.032	31.953	0.001
		13	-0.002	-0.004	31.956	0.002
		14	-0.004	0.001	31.971	0.004
		15	0.007	0.008	32.016	0.006
		16	0.028	0.029	32.799	0.008
		17	0.009	0.001	32.875	0.012
		18	-0.010	-0.013	32.984	0.017
		19	0.015	0.026	33.215	0.023
		20	0.030	0.032	34.157	0.025
		21	-0.062	-0.074	38.173	0.012
		22	0.004	0.024	38.189	0.017
		23	-0.007	-0.011	38.243	0.024
		24	-0.021	-0.017	38.720	0.029
		25	-0.037	-0.046	40.132	0.028
		26	-0.012	-0.001	40.274	0.037
		27	-0.051	-0.051	42.944	0.027
		28	-0.025	-0.023	43.576	0.031
		29	-0.083	-0.100	50.786	0.007
		30	-0.013	0.012	50.965	0.010
		31	0.002	-0.023	50.970	0.013
		32	0.058	0.050	54.523	0.008
		33	0.014	-0.009	54.726	0.010
		34	0.025	0.036	55.379	0.012
		35	-0.008	-0.018	55.455	0.015
		36	-0.014	-0.002	55.657	0.019

Gráfica B.3: Correlograma de la serie RIPC.

Cuadro B.2: Parámetros estimados en *EViews*.

Dependent Variable: RIPC				
Method:				
ML-ARCH(Marquardt).				
Date:11/19/07 Time:12:43				
Sample(adjusted): 2 1013				
Included observations:1012				
after adjusting endpoints.				
Convergence achieved				
after 10 iterations.				
Bollerslev-Wooldrige				
robust standard				
errors&covariance				
Variance backcast:ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
SQR(GARCH)	0.181029	0.031370	5.770644	7.90E-09
	Variance			
	Equation			
C	7.40E-06	2.71E-06	2.73E+00	0.006247
ARCH(1)	0.097039	2.38E-02	4.09E+00	4.40E-05
GARCH(1)	0.835823	3.53E-02	2.37E+01	3.06E-124
R-squared	-0.00402			
Adjusted R-squared	-0.007009			
S.E. of regression	0.011005			
Sum squared resid	0.122092			
Log likelihood	3206.451			
Mean dep. var	0.001429			
S.D. dep. var	0.010967			
Akaike info criterion	-6.328955			
Schwarz criterion	-6.309509			
Durbin-Watson stat	1.757840			

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.068	0.068	4.7027	0.030
		2	0.021	0.017	5.1627	0.076
		3	-0.044	-0.047	7.1141	0.068
		4	-0.008	-0.003	7.1864	0.126
		5	-0.034	-0.031	8.3458	0.138
		6	0.018	0.021	8.6813	0.192
		7	0.060	0.059	12.342	0.090
		8	0.034	0.022	13.511	0.095
		9	-0.003	-0.008	13.522	0.140
		10	0.010	0.014	13.619	0.191
		11	-0.017	-0.015	13.920	0.237
		12	0.010	0.015	14.020	0.299
		13	-0.003	-0.003	14.027	0.372
		14	0.065	0.060	18.374	0.190
		15	-0.013	-0.023	18.550	0.235
		16	0.089	0.088	26.620	0.046
		17	-0.011	-0.017	26.752	0.062
		18	-0.006	-0.008	26.787	0.083
		19	-0.013	-0.001	26.970	0.105
		20	-0.002	-0.005	26.975	0.136
		21	-0.071	-0.072	32.126	0.057
		22	-0.009	-0.005	32.210	0.074
		23	0.014	0.009	32.412	0.092
		24	0.031	0.019	33.422	0.095
		25	-0.029	-0.030	34.281	0.102
		26	0.014	0.012	34.484	0.123
		27	-0.013	-0.006	34.654	0.148
		28	0.017	0.019	34.947	0.171
		29	-0.025	-0.018	35.579	0.186
		30	0.074	0.062	41.299	0.082
		31	-0.014	-0.017	41.497	0.099
		32	0.084	0.078	48.887	0.028
		33	0.015	0.015	49.123	0.035
		34	0.022	0.018	49.624	0.041
		35	-0.014	0.001	49.841	0.050
		36	-0.006	-0.008	49.885	0.062

Gráfica B.4: Correlograma de los residuales estandarizados.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.031	-0.031	1.0060	0.316
		2	0.017	0.016	1.3020	0.522
		3	0.005	0.006	1.3259	0.723
		4	0.016	0.016	1.5813	0.812
		5	-0.001	0.000	1.5822	0.903
		6	0.023	0.023	2.1274	0.908
		7	0.007	0.008	2.1787	0.949
		8	0.039	0.038	3.7154	0.882
		9	-0.030	-0.028	4.6110	0.867
		10	0.049	0.046	7.1098	0.715
		11	-0.041	-0.038	8.8150	0.639
		12	0.017	0.012	9.1175	0.693
		13	-0.001	0.001	9.1191	0.764
		14	0.033	0.030	10.257	0.743
		15	0.043	0.047	12.148	0.668
		16	-0.039	-0.041	13.677	0.623
		17	-0.006	-0.007	13.714	0.687
		18	-0.003	-0.008	13.720	0.747
		19	-0.020	-0.016	14.153	0.775
		20	0.000	-0.007	14.153	0.823
		21	-0.013	-0.010	14.321	0.855
		22	0.026	0.022	15.013	0.862
		23	-0.007	-0.005	15.071	0.892
		24	0.002	0.004	15.074	0.919
		25	-0.005	-0.007	15.099	0.939
		26	0.001	0.007	15.100	0.955
		27	0.022	0.021	15.611	0.960
		28	0.055	0.055	18.769	0.905
		29	-0.021	-0.019	19.212	0.916
		30	0.016	0.011	19.481	0.929
		31	-0.057	-0.051	22.825	0.855
		32	0.055	0.047	25.952	0.766
		33	0.034	0.043	27.169	0.752
		34	-0.009	-0.011	27.252	0.787
		35	0.010	0.008	27.352	0.818
		36	0.021	0.014	27.815	0.834

Gráfica B.5: Correlograma de los residuales estandarizados al cuadrado.

Bibliografía

- [1] Baz, J. and Chacko G. (2004). Financial derivatives: pricing, applications, and mathematics. Cambridge University Press.
- [2] Black, F. (1975): “Fact and Fantasy in the Use of Options,” *Financial Anal. Journal.*, 31, 36-41 and 61-72.
- [3] Black, F. and M. Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- [4] Bollerslev, T. (1986), “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.
- [5] Brooks, C. (2002) *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [6] Christoffersen, Peter F.(2003) *Elements of Financial Risk Management*, Academic Press.
- [7] Duan, J. (1995). “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5,13-32.
- [8] Engle, R. (1982). “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations”. *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1008.
- [9] Fama, E.F., “The Behavior of Stock Market Prices,” *Journal of Bussiness*, 38 (January 1965): 34-105.
- [10] Glosten, L.,R. Jagannathan, and D. Runkle (1993). “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- [11] Gultekin, B., R. Rogalski, and S. Tinic (1982): “Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results,” *Financial Managment*, 11, 58-69.

-
- [12] Hentschel, L. (1995). "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models," *Journal of Financial Economics*, 39, 71-104.
- [13] Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- [14] Heston, S., and S. Nandi. (2000). "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model," *Review of Financial Studies*, 13, 585-626.
- [15] Hull, John C. (2005). *Options Futures and Other Derivatives*. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.
- [16] Hull, J. and A. White (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, 42, 281-300.
- [17] Jesús Gutiérrez, Raúl de, Modelación de productos derivados aplicando el método de Martingalas, tesis de Maestría, U.N.A.M., México, 2001.
- [18] Mandelbrot, B. (1963). "The Valuation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, 36, 394-419.
- [19] Manual del cálculo del IPC (2005), Bolsa Mexicana de Valores S.A. de C.V.
- [20] Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. 3rd. ed. McGraw-Hill Series in Probability and Statistics. McGraw-Hill.
- [21] Nelson, D. (1991) "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59, 347-370.
- [22] Øksendal, B. (2000). *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Fifth Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [23] Palacios Paz, Ana Bertha, Modelos de Riesgo de Crédito, tesis de Licenciatura, U.N.A.M., México, 2002.
- [24] Shreve, S. E., (2004) *Stochastic Calculus Models for Finance*. Springer. (La versión tipo borrador está disponible en la página de Steven E. Shreve, <http://www.math.cmu.edu/people/fac/shreve.html>)
- [25] Taylor, S.J. (1986) "Forecasting the Volatility of Currency Exchange Rates", *International Journal of Forecasting*, 3, 159-70.
- [26] Venegas Martínez, Francisco, "Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre". 1a. ed., International Thomson Editores, México 2006.