UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA PROGRAMACION LINEAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

NOMBRE DEL ALUMNO
BRENDA ZAVALA LÓPEZ

TUTOR
MAT. ADRIÁN GIRARD ISLAS

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Zavala
   López
   Brenda
   52 03 89 18
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   099335720

2. Mat.
   Adrián
   Girard
   Islas

3. Act.
   Germán
   Valle
   Trujillo

4. Act.
   Leonardo
   López
   Monroy

5. Act.
   Claudia Orquídea
   López
   Soto

6. M. en I.
   Nereo
   Elías
   Mata

7. Introducción al estudio de la Programación Lineal
   342p
   2008

Agradecimientos

A mis padres por darme la oportunidad de estudiar, pero sobretodo amor y cuidado.

A mi hermano por su cariño y compañia.

A Edna Araúz por ser la hermana que nunca tuve.

A mis tías Martha, María de la Luz y Virginia y mis primos Alejandra y Edgar.

A Leoncio Rodrigo Luna Martínez gracias por todos los años de felicidad que me has dado y la esperanza de un futuro juntos.

A mi tutor Adrián Girad Islas por que sin su ayuda y conocimientos este trabajo no podría haber sido posible.

A Leonardo López Monroy por ser mi jefe y amigo.

A mis sinodales Germán Valle Trujillo, Claudia Orquídea López Soto y Nereo Elías Mata.

Índice general

1. Conceptos Básicos **5**
1.1. El Espacio de las Matrices 5
1.2. Repaso de Álgebra Lineal 13
1.3. Introducción a Matlab 18
1.4. Ejercicios 22

2. El Problema de Programación Lineal **25**
2.1. ¿Qué es la Investigación de Operaciones? 25
2.2. El Planteamiento de un ppl 29
2.3. La Región de Soluciones Factibles 34
2.4. Graph 44
2.5. El Espacio de Requerimientos 53
2.6. Ejercicios 58

3. Los Métodos Geométrico y Gráfico **61**
3.1. El Teorema de Representación 61
3.2. El Método Geométrico 66
3.3. La Forma Canónica y la Estándar 71
3.4. El Método Gráfico 75
3.5. Ejercicios 82

4. El Algoritmo Simplex **85**
4.1. El Cálculo de las Bases 85
4.2. El Algoritmo Simplex Rudimentario 90
4.3. Aplicación del Algoritmo Simplex
Rudimentario 96
4.4. El Algoritmo Simplex 101
4.5. Casos Especiales 108
4.6. El Algoritmo Programado Simplex 113
4.7. Otra representación: *Tabla de Tucker* 114
4.8. Tablas de Tucker y Tablas Simplex 121
4.9. Ejercicios 127

5. Encontrando una Solución Inicial **129**
5.1. El Método de las Dos Fases . . . 129
5.2. Programa para el Método de las Dos Fases . . . 132
5.3. El Método de la Gran M . . . 140
5.4. Programa para el método de la gran M . . . 144
5.5. La Regla Lexicográfica . . . 147
5.6. La Regla de Bland . . . 152
5.7. Ejercicios . . . 157

6. Dualidad y Análisis de Sensibilidad **159**
6.1. Dualidad . . . 159
6.2. La construcción del problema dual . . . 164
6.3. Teorema Fundamental de Dualidad . . . 167
6.4. Teorema de Holguras Complementarias . . . 172
6.5. El Algoritmo Dual Simplex . . . 179
6.6. El Algoritmo Dual Simplex Programado . . . 185
6.7. Análisis de Sensibilidad I . . . 189
6.8. Análisis de Sensibilidad II . . . 196
6.9. Ejercicios . . . 202

7. Reduciendo el Número de Operaciones **205**
7.1. El Algoritmo Simplex Revisado . . . 205
7.2. Aplicación Algoritmo del Simplex Revisado . . . 209
7.3. El Algoritmo Dual Simplex Revisado . . . 218
7.4. Forma Producto de la Inversa . . . 223
7.5. Aplicación de la Forma Producto de la Inversa . . . 230
7.6. La Forma Producto de la Inversa y el Simplex Dual . . . 236
7.7. Ejercicios . . . 243

8. Conclusiones **247**

A. Demostraciones Importantes **251**

B. Algoritmos Programados en Matlab **263**

C. Soluciones a los ejercicios **289**
C.1. Capítulo 1 . . . 289
C.2. Capítulo 2 . . . 293
C.3. Capítulo 3 . . . 298
C.4. Capítulo 4 . . . 301
C.5. Capítulo 5 . . . 307
C.6. Capítulo 6 . . . 317
C.7. Capítulo 7 . . . 325

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo primordial auxiliar a los alumnos de las asignaturas de Programación Lineal e Investigación de Operaciones en la comprensión y repaso de temas relacionados con la Programación Lineal, tomando como base los temarios de las asignaturas antes mencionadas para el Plan de Estudios de la carrera de Actuaría del año 2000 de la Facultad de Ciencias, de la UNAM.

El segundo objetivo es dividir la información necesaria para cumplir con los temarios de las asignaturas en 40 sesiones teóricas y 7 prácticas, cada una con un objetivo claro y concreto. Además la extensión de cada una de las sesiones es corta a fin de que no implique al lector invertir mucho tiempo en su lectura y comprensión, como una sesión en el aula.

El trabajo cuenta con siete capítulos, cada uno con un objetivo y con secciones que se relacionan con el tema del capítulo y que representan en sí mismas una sesión.

El primer capítulo, *Conceptos Básicos*, es un breve repaso de las herramientas de Álgebra Lineal que se requieren para la resolución de problemas; se proporcionan también las instrucciones básicas de Matlab, puede considerarse como opcional para el lector.

En el segundo capítulo, *El Problema de Programación Lineal*, se definen términos importantes como Investigación de Operaciones, Programación Lineal, región de soluciones factibles, espacio de requerimientos, entre otros, para introducir al lector al tema de estudio.
Se utiliza un programa de software libre llamado *Graph* para generar imágenes en $\mathbb{R}^2$ que permitan visualizar los conjuntos de soluciones que puede tener un problema para hacer conciencia en el lector de la necesidad de un método o algoritmo para la solucionar el problema.

En el tercer capítulo, *Método Geométrico y Gráfico*, se resuelven problemas usando el método gráfico que es muy visual e intuitivo y el método geométrico en el cual se analizan todas las posibles soluciones al problema, se observa la clara limitación de estos métodos aún con el uso de la computadora.

El cuarto capítulo, *El Algoritmo Simplex*, es el centro del trabajo, no solo por que en él se desarrollan las nociones que llevan a la construcción del algoritmo Simplex y sus diferentes enfoques, sino porque se requiere que el lector haya asimilado el algoritmo Simplex y lo pueda aplicar correctamente para la comprensión de los siguientes capítulos.

Además el capítulo presenta diferentes formas de representación para las tablas Simplex así como su relación entre ellas, lo que permite al lector consultar con facilidad cualquier otro material o libro relacionado con la programación lineal.

El quinto capítulo, *Encontrando una solución inicial*, se explica como encontrar una solución básica factible inicial a cualquier problema factible o bien a concluir que el problema no tiene solución, se analizará por medio de algunos ejemplos en que casos el algoritmo Simplex no llega a una solución óptima, es decir no converge.

En el sexto capítulo, *Dualidad y Análisis de Sensibilidad*, se estudian más propiedades de la tabla Simplex y de la solución encontrada, se dan las herramientas para utilizar una solución para obtener otra nueva.

En el séptimo capítulo, *Reduciendo el Número de Operaciones*, se explican algunos métodos para la resolución de problemas a fin de realizar solo los cálculos necesarios para llegar rápidamente al resultado, estos métodos son más prácticos cuando el lector hace los cálculos manualmente.

El tercer objetivo del material es incitar al lector a auxiliarse de la computadora para realizar cálculos y proporcionar algunos programas que solucionen los problemas.

Cabe resaltar que no es necesario leer todos los capítulos para llegar a una comprensión de los temas, aún cuando es recomendable, para los lectores que tengan un primer acercamiento con la Programación Lineal pueden excluir de su estudio el capítulo 7, la parte de Análisis de Sensibilidad del capítulo 6 y el Apéndice A en el cual se encuentran algunas de las demostraciones más importantes de la programación lineal, por ser estos tópicos un poco más formales y enfocados también a la minimización del tiempo invertido en la solución de problemas y no en la explicación del Algoritmo Simplex en sí.
En el Apéndice B se encuentran las líneas de código en Matlab de los algoritmos que se explican a los largo de los siete capítulos que abarca este texto a fin de que si el lector los utilice para corroborar resultados y facilitarse cálculos.
Para los lectores que cuenten con nociones claras de Programación Lineal no será necesario resolver las secciones de ejercicios que aparecen al final de cada uno de los capítulos, ya que estás solo sirven para que el lector evalúe su aprendizaje por lo que se proporcionan las respuestas a los ejercicios en el Apéndice C.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

El objetivo de este capítulo es repasar los conceptos de Espacio Vectorial y Transformaciones Lineales, revisados en las materias de Geometría y Álgebra Lineal, que son necesarios para comprender y resolver problemas de optimización lineales que se presentan en los cursos de Investigación de Operaciones y Programación Lineal.

1.1. El Espacio de las Matrices

Objetivos: Definir Espacio Vectorial, operaciones básicas en el Espacio de las Matrices de $m \times n$. Para matrices cuadradas se explica el cálculo de la inversa y el determinante.

Definición 1.1.1 *Un Espacio Vectorial sobre un campo K es un conjunto no vacío V con una operación binaria*

$$+ : V \times V \to V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

y una función

$$\mu : K \times V \to V$$

$$(\alpha, v) \mapsto \mu(\alpha, V) = \alpha v$$

que cumple los siguientes axiomas:

1. $u + v = v + u$ *Conmutatividad*

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *Asociatividad*

3. $\exists\ 0 \in V$ *tal que* $v + 0 = v$ *Neutro Aditivo*

4. *Para cada* $v \in V$ *existe un elemento, denotado por -v tal que v+(-v)=0 Inverso Aditivo*

5. $\alpha(u+v) = \alpha v + \alpha u$ *Distributividad del producto*

6. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ *Distributividad del producto por escalares*

7. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ *Asociatividad del producto*

8. *Para* $1 \in K$ *1v=v; Neutro Multiplicativo* $\alpha, \beta, 1 \in K, u, v, w \in V$

Los elementos del Espacio Vectorial sobre K se denominan *vectores*, los elementos del campo K son los escalares y la función μ se llama multiplicación escalar. Para nuestro estudio en particular nos enfocaremos en el Espacio Vectorial sobre el campo de los números Reales.

$$Sea \qquad + : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$(A, B) \mapsto A + B$$

y una función

$$\cdot : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$$

$$(\lambda, A) \mapsto \cdot(\lambda, A) = \lambda \cdot A$$

llamado Espacio de Matrices de $m \times n$ $(M_{m\times n})$ cada elemento de este espacio es denominado Matriz, sin embargo cuando m=1 o n=1, se nombran vector renglón o vector columna respectivamente.

Definición 1.1.2 *Sean A,* $B \in M_{mxn}$*, con* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ *se define la suma de matrices como:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad\qquad ie. \quad (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo 1.1 *Sean A=* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *, B=* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$A{+}B= \begin{pmatrix} 2+1 & 3-2 & 4+3 \\ 7+0 & 1+6 & 5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.3 *Sean* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $A \in M_{m\times n}$ *el producto por un escalar se define como:*

$$\lambda A{=}\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} {=}(\lambda a_{ij})$$

Ejemplo 1.2 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ *y* $\lambda = -2$

$$\lambda \cdot A = -2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -4 & -2 & -16 \end{pmatrix}$$

Otra operación útil es la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} * : M_{m\times n} \times M_{n\times l} &\to M_{m\times l} \\ (A, B) &\mapsto A * B \end{aligned}$$

Definición 1.1.4 *Sea* $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times l}$ *se define el producto de matrices como:*

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{il} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{il} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{il} \end{pmatrix}$$

es decir

$$(A * B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo 1.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 7\cdot 3 & 1\cdot 5 + 3\cdot 7 + 7\cdot 9 & 1\cdot 3 + 3\cdot 4 + 7\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 6\cdot 2 + 5\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 7 + 5\cdot 9 & 2\cdot 3 + 6\cdot 4 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 28 & 89 & 8 \\ 29 & 97 & 25 \end{pmatrix}$$

Definición 1.1.5 *La transpuesta de una matriz es la operación definida como:*

$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Ejemplo 1.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Para las matrices cuadradas ($M_{n\times n}$) se tienen las operaciones Inversa y Determinante; con estas operaciones se pueden definir Grupos[1] o Espacios Vectoriales, como el Grupo Lineal Especial (GL), con la siguiente operación binaria:

$$* : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$(A, B) \mapsto A * B$$

y con elemento neutro $\mathrm{I}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Definición 1.1.6 *El determinante de una matriz de* $M_{n\times n}$ *es una función que va de* $M_{n\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ *y que se calcula como:*

$$Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} a_{ij}$$

donde α_{ij} *es el determinante de la matriz formada al suprimir la fila i y la columna j, nombrado el "menor" de* a_{ij}*,cuando incluimos el factor* $(-1)^{i+j}$ *al menor de* a_{ij} *se dice que es el cofactor de* a_{ij}*.*

Si el determinante de la matriz A es cero se dice que A es no invertible, lo que implica que no existe A^{-1} tal que $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$ donde A^{-1} es la inversa o inverso multiplicativo de A.

Ejemplo 1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$Det(A) = \begin{array}{c} \\ - \\ + \\ - \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} - & + & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} a_{ij} \quad \begin{array}{l} \textit{sin pérdida de} \\ \textit{generalidad} \\ \textit{sea } i = 1 \end{array}$$

[1] Un Grupo es un conjunto no vacío con una operación binaria que satisface: la asociatividad, existe el neutro y los inversos.

[2] Al elemento neutro I se le denomina matriz identidad.

$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} a_{1j} = (-1)^2 \alpha_{11} + 3 \cdot (-1)^3 \alpha_{12} + 4(-1)^4 \alpha_{13}$$

$$= \alpha_{11} - 3\alpha_{12} + 4\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \quad 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 3(2 \cdot 2 - 5 \cdot 4) + 4(2 \cdot 3 - 4 \cdot 7)$$

$$= 14 - 15 - 3(4 - 20) + 4(6 - 28) = 1 + 48 - 88 = -41$$

$$\therefore |A| = -41$$

La importancia del determinante[3] no solo indica si existe o no la inversa de una matriz, sino también sirve para su cálculo.

$$A^{-1} = \widetilde{A}/|A|$$

Donde $\widetilde{A}$ es la transpuesta de matriz formada por los cofactores, *ie.* $(\widetilde{A})_{ji} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, $\widetilde{A}$ se denomina la Matriz Adjunta Clásica.

Ejemplo 1.6 *Calcular la inversa de A usando la Matriz Adjunta Clásica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\widetilde{A}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad \widetilde{A}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad \widetilde{A}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$\widetilde{A}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 \quad \widetilde{A}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14 \quad \widetilde{A}_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$\widetilde{A}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -22 \quad \widetilde{A}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad \widetilde{A}_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -13 \\ 16 & -14 & 3 \\ -22 & 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad Det(A) = -41$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/41 & -6/41 & 13/41 \\ -16/41 & 14/41 & -3/41 \\ 22/41 & -9/41 & -1/41 \end{bmatrix}$$

Otro método para cálcular la inversa, es el Método de Gauss-Jordan.
Sea $A = (a_{ij})$ invertible y k=0;

1. Construimos B=(A$\vdots$I)

[3] El determinante de A se denota como $|A|$.

2. Sea k=k+1
   - Si $a_{kk} \neq 0$ dividimos el renglón k-ésimo entre a_{kk} y hacemos cero las entradas a_{kj} con $j \neq k$ mediante operaciones elementales[4] entre renglones.
   - Si a_{kk}=0 permutamos[5] la k-ésima columna con la j-ésima, donde $a_{kj} \neq 0$ y $j > k$

3. Si k=n+1 terminar, se ha encontrado la inversa (I$\vdots A^{-1}$), si no regresar al paso 2

Ejemplo 1.7 *Calcular la inversa de A usando Gauss-Jordan*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Det(A) \neq 0 \quad \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -14 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nótese que el resultado es igual al obtenido por el Método de la Adjunta Clásica

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -41 & -22 & 9 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/41 & -6/41 & 13/41 \\ 0 & 1 & 0 & -16/41 & 14/41 & -3/41 \\ 0 & 0 & 1 & 22/41 & -9/41 & -1/41 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/41 & -6/41 & -13/41 \\ -16/41 & 14/41 & -3/41 \\ 22/41 & -9/41 & -1/41 \end{pmatrix}$$

Otro método poco frecuente pero bastante práctico es

La Inversión de Matrices por Partición

Con una matriz $A \in M_{n\times n}$ no singular, se particiona en cuatro bloques según la descomposición n=p+q para filas y columnas

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

[4] La suma de renglones y la multiplicación por escalares(distintos de cero) no afecta las propiedades de la matriz.

[5] Se deben guardar los cambios en una matriz permutada.

En consecuencia $B \in M_{p\times p},\ C \in M_{p\times q},\ D \in M_{q\times p}\ y\ E \in M_{q\times q}$.
Supongamos que E es no singular y con una inversa fácil de calcular, proponemos la inversa de A con el mismo esquema de partición

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$$

donde X, Y, Z y U son matrices a determinar y del mismo tipo que B, C, D y E, respectivamente.
de forma que debe verificarse

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & \overline{0} \\ \overline{0} & I_q \end{pmatrix}$$

es decir

$$BX + CZ = I_p \tag{1.1}$$
$$DX + EZ = \overline{0} \tag{1.2}$$
$$BY + CU = \overline{0} \tag{1.3}$$
$$DY + EU = I_q \tag{1.4}$$

De (1.2) $EZ = -DX$ multiplicando por E^{-1}

$$Z = -E^{-1}DX \tag{1.5}$$

Sustituyendo(1.5) en (1.1)

$$BX + C(-E^{-1}DX) = I_p$$
$$(B - CE^{-1}D)X = I_p$$
$$X = (B - CE^{-1}D)^{-1} \tag{1.6}$$

De (1.4)

$$EU = I_q - DY$$
$$U = E^{-1} - E^{-1}DY \tag{1.7}$$

Sustituyendo (1.7) en (1.3)

$$BY + (CE^{-1} - CE^{-1}DY) = \overline{0}$$
$$(B - CE^{-1}D)Y = -CE^{-1}$$
$$X^{-1}Y = -CE^{-1}$$
$$Y = -X^{-1}CE^{-1} \tag{1.8}$$

Con las ecuaciones (1.5)-(1.8) se pueden determinar X, Y, Z y U.

Ejemplo 1.8 *Determinar la inversa de A utilizando el método de partición de matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces de acuerdo con la partición anterior

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}, E = (2)$$

$$X = (B - CE^{-1}D)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 10 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -8 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{41} & \frac{-6}{41} \\ \frac{-16}{41} & \frac{14}{41} \end{pmatrix}$$

$$Z = -E^{-1}DX = -\frac{1}{2}(4\ 3) * \begin{pmatrix} \frac{1}{41} & \frac{-6}{41} \\ \frac{-16}{41} & \frac{14}{41} \end{pmatrix} = \left(\frac{22}{41}, \frac{-9}{41}\right)$$

$$Y = -XCE^{-1} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{41} & \frac{-6}{41} \\ \frac{-16}{41} & \frac{14}{41} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} * \frac{1}{2}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{26}{41} \\ \frac{-6}{41} \end{pmatrix} * \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{13}{41} \\ \frac{-3}{41} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(4\ 3) * \begin{pmatrix} \frac{13}{41} \\ \frac{-3}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{41} \\ \frac{-3}{41} \end{pmatrix} = \frac{-1}{41}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/41 & -6/41 & 13/41 \\ -16/41 & 14/41 & -3/41 \\ 22/41 & -9/41 & -1/41 \end{pmatrix}$$

1.2. Repaso de Álgebra Lineal

Objetivo: Definir combinación lineal, dependencia e independencia lineal, subespacio generado, dimensión, base y rango de una matriz.

Definición 1.2.1 *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\widetilde{u}$ se dice que es una combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ números reales tales que*

$$\widetilde{u} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m$$

Ejemplo 1.9 *Sean u_1=(1,2,0), u_2=(3,0,1), u_3=(1,1,1) y $\widetilde{u}$=(4,5,2). Demuestre que $\widetilde{u}$ es combinación lineal de u_1, u_2, u_3.*

$$(4,5,2) = \lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(3,0,1) + \lambda_3(1,1,1)$$

$$(4,5,2) = (\lambda_1, 2\lambda_1, 0 \cdot \lambda_1) + (3\lambda_2, 0 \cdot \lambda_2, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3)$$

$$(4,5,2) = (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \lambda_3, 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \quad 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 &= 5 \\ 0 \cdot \lambda_1 + \quad \lambda_2 + \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\widetilde{u}}$$

Calculando la inversa por alguno de los métodos revisados anteriormente

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -3/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 1/5 & 6/5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = A^{-1} * \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -3/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 1/5 & 6/5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 1/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ *$\widetilde{u}$ es una combinación lineal de u_1, u_2 y u_3.*

Definición 1.2.2 *Sean* $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$*. El subespacio generado por* $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ *es el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de los vectores* u_i*,* $i = 1, \ldots, m$ *ie..*

$$\left\{ \overline{X} \in \mathbb{R}^n | \overline{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición 1.2.3 *Un conjunto de vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *son linealmente independientes(li), si el vector* $\overline{0}$ *es una combinación lineal de éstos con* λ_i*=0 para toda i, es decir:*

Nótese que: si un conjunto es *li* y le quitamos un elemento el subespacio generado es menor

$$Si \;\; \overline{0} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m \quad \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

Ejemplo 1.10 *Demuestre que el conjunto* u_1, u_2, u_3 *del ejemplo 1.9 genera el espacio* $\mathbb{R}^3$ *y que los vectores dados son linealmente independientes.*

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(3, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\overline{X}}$$

$$\lambda_1 = \frac{x + 2y - 3z}{5}$$
$$\lambda_2 = \frac{2x - y - z}{5}$$
$$\lambda_3 = \frac{-2x + y + 6z}{5}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *están bien definidas* $\forall$ *x,y,z* $\in$ $\mathbb{R}$. $\therefore \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *generan* $\mathbb{R}^3$.

PD. que $u_1, u_2, u3$ *son linealmente independientes.*
Si (x,y,z)=(0,0,0) entonces

$$\lambda_1 = \frac{0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{5} = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{2 \cdot 0 - 0 - 0}{5} = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{-2 \cdot 0 + 0 + 6 \cdot 0}{5} = 0$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$*=0, los vectores son linealmente independientes*

Definición 1.2.4 *Un conjunto de vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *son linealmente dependientes si no son linealmente independientes es decir:*

$$\exists \lambda_k \neq 0 \quad tal\ que\ \ \overline{0} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m$$

Ejemplo 1.11 *Muestre que u_1=(1,0,1), u_2=(0,2,0) y u_3=(-2,2,-2) son linealmente dependientes*

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 2, 0) + \lambda_3(-2, 2, -2)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\overline{X}}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x + 2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= \frac{y - 2\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 &\in \mathbb{R} \quad z = x \end{aligned}$$

Todos los vectores de la forma (x,y,z) con $z \neq x$ no están en el subespacio generado por u_1, u_2, u_3 por lo tanto el conjunto no genera a $\mathbb{R}^3$

PD. u_1, u_2, u_3 son linealmente dependientes

$$\begin{aligned} \lambda_1 = &\ 0 + 2\lambda_3 = \ 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = &\ \frac{0 - 2\lambda_3}{2} = -\lambda_3 \\ & \qquad\qquad \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si $\lambda_3 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ de forma que los vectores son linealmente dependientes.

Definición 1.2.5 *Sea U un espacio vectorial,su dimensión, dim(U), es el número mínimo de vectores necesarios para generar el espacio.*

Ejemplo 1.12

$$\textit{Sea } U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^3 | 4x + y = 0, x + y + z = 0\right\} \textit{ calcule la dimensión de } U$$

$$\begin{aligned} 4x + y + 0 \cdot z = 0 \rightarrow & \quad y = -4x \quad \textit{sustituyendo} \\ x + y + z = 0 \rightarrow & \quad -3x + \ z = 0 \rightarrow \quad z = \ 3x \end{aligned}$$

$$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^3 | \overline{X} = (x, -4x, 3x) \quad x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^3 | \overline{X} = \ x(1, -4, 3) \quad x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\therefore (1, -4, 3) \textit{ genera } U \qquad \therefore dim(U) = 1$$

Definición 1.2.6 *Una base de un espacio E^n es un conjunto de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ que generan E^n de forma que si cualquiera de ellos es removido los restantes no generan E^n.*

Ejemplo 1.13 *Encuentre una base para*

$$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - z + 0 \cdot w = 0, \quad x + 2y + z + w = 0, \ x, y, z, w \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{array}{rrr} & 2x + \ \ y - z = 0 \rightarrow & z = \ \ 2x + \ \ y \\ x + 2y + (2x + y) + w = 0 \rightarrow & 3x + 3y + w = 0 \rightarrow & w = -3x - 3y \end{array}$$

$$(x, y, z, w) = (x, y, 2x + y, -3x - 3y) = x(1, 0, 2, -3) + y(0, 1, 1, -3)$$

$$\therefore \{(1, 0, 2, -3), (0, 1, 1, -3)\} \quad \textit{es una base para } U$$

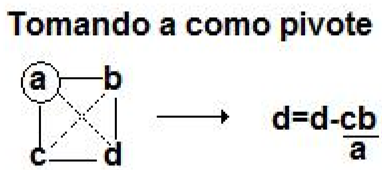
Definición 1.2.7 *El rango de una matriz $A_{m\times n}$ es el número de renglones o columnas linealmente independientes, de donde rang(A)$\leq$ min$\{$n,m$\}$,si el rang(A)=min$\{$n,m$\}$ decimos que A es de rango completo,en particular si m=n la matriz A es invertible.*

Una forma de encontrar el rango de una matriz es mediante los siguientes pasos

1. Se elige cualquier elemento no cero de la matriz dada como pivote y se divide por este elemento la fila correspondiente.

2. Los restantes elementos de la columna pivote se transforman en ceros mediante operaciones elementales.

3. El transformado de todo elemento que no figure en la fila ni en la columna pivote se determina siguiendo la regla del rectángulo.



4. Se repite el mecanismo eligiendo como pivote un elemento que no pertenezca ni a las filas ni a las columnas de los pivotes anteriores.

5. el número de vectores canónicos es el rango de la matriz.

Ejemplo 1.14 *Calcule el Rango de* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$rango(A) \leq min\{2,4\} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

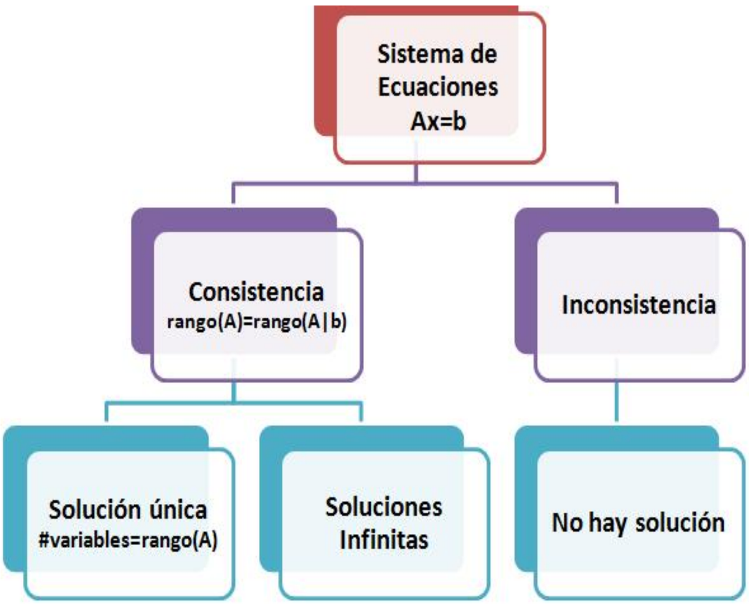
Tiene 2 vectores canónicos, la columna 1 y 2 ,entonces el rang(A)=2

ó bien $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ y \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes el rango(A)=2.

El concepto de rango puede ser extendido a los sistemas de ecuaciones, para determinar el rango de un sistema $Ax = b$ el vector de coeficientes b se aumenta a la matriz A para formar la matriz $A|b$ el rango de ésta es el rango del sistema de ecuaciones.
El rango sirve para definir la consistencia ó inconsistencia[6] de un sistema mediante las reglas

1. Un sistema de ecuaciones es consistente si y sólo si el rango de la matriz aumentada $A|b$ es igual al rango de la matriz A. Si un sistema es consistente entonces tiene solución.

2. Un sistema de ecuaciones tiene solución única si y sólo si el rango del sistema de ecuaciones es igual al número de variables.



[6]Decimos que sistema es inconsistente si no es consistente

1.3. Introducción a Matlab

Objetivo: Conocer como introducir a Mtalb algunas de las instrucciones más usadas para los cálculos de álgebra lineal realizados en las secciones 1.1 y 1.2.
Las definiciones antes mencionadas serán utilizadas en las siguientes lecciones. Se pretende encontrar solución de problemas concretos mediante algoritmos que requieren cálculos matriciales y no acentuar la mecanización de operaciones matriciales.

Resultará de gran ayuda para el lector auxiliarse de programas matemáticos que le permitan resolver los problemas de una forma más fácil y rápida, a continuación se da una breve introducción al Programa Matlab.

- Introducir una matriz:

$$Sea\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Para introducir en Matlab la matriz A escribimos en la ventana de comandos la instrucción:

$$\gg A = [a_{11}, a_{12} \dots, a_{1n}; \dots; a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}] \hookleftarrow$$

  donde las a_{ij} son los valores numéricos de las entradas de la matriz.
  Los corchetes indican que es una matriz y el punto y coma marca el inicio de un nuevo renglón

- Visualizar el i-ésimo renglón ó la j-ésima columna de una matriz:

$$\gg A(i,:) \hookleftarrow$$

  Los dos puntos le indican la programa que muestre todas las entradas de ese renglón.

$$\gg A(:,j) \hookleftarrow$$

  Los dos puntos le indican la programa que muestre todas las entradas de esa columna.

- Ver el valor de la entrada a_{ij}:

$$\gg A(i,j) \hookleftarrow$$

Ejemplo 1.15 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

Introduciendo en la ventana de comandos de Matlab

$\gg A = [7, 8, 9, 5; 4, 1, -9, 0] \hookleftarrow$

$A = \begin{matrix} 7 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -9 & 0 \end{matrix}$

$\gg A(1, :) \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} 7 & 8 & 2 & 5 \end{matrix}$

$\gg A(:, 2) \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} 8 \\ 1 \end{matrix}$

$\gg A(1, 3) \hookleftarrow$

ans= 2

Las operaciones elementales de Matrices están definidas en Matlab, basta con dar la instrucción adecuada.
Suponemos A,B$\in M_{m\times n}$ y ambas previamente introducidas en la ventana de comandos de Matlab.

- Suma de Matrices
$$\gg A + B \hookleftarrow$$
- Multiplicación de Matrices
$$\gg A * B \hookleftarrow$$
- Transpuesta
$$\gg A' \hookleftarrow$$
- Determinante
$$\gg det(A) \hookleftarrow$$
- Inversa
$$\gg inv(A) \hookleftarrow$$
- *Tamaño*
$$\gg size(A) \hookleftarrow$$
Regresa [m,n]=[número de renglones, número de columnas]

- Rango

$$\gg rank(A) \hookleftarrow$$

- La mínima entrada de un vector

$$\gg min(A) \hookleftarrow$$

Regresa [r,k]=[la mínima entrada del vector,posición]

- Matriz Identidad de $m \times n$

$$\gg eye(m,n) \hookleftarrow$$

genera una matriz identidad de $(m \times n)$

- Matriz Cero

$$\gg zeros(m,n) \hookleftarrow$$

genera una matriz cuyas entradas son todas cero.

- Matriz Uno

$$\gg ones(m,n) \hookleftarrow$$

genera una matriz cuyas entradas son todas uno.

Ejemplo 1.16
Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$

Introduciendo en la ventana de comandos de Matlab

$\gg A = [1,3,7;2,6,5] \hookleftarrow$

$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 5 \end{matrix}$

$\gg B = [1,5,3;2,7,4;4,3,2] \hookleftarrow$

$B = \begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{matrix}$

El carácter ";" al final de la instrucción evita que el resultado se muestre en la pantalla, pero éste se almacena en la memoria

$\gg C = [1,-2,3;0,6,8]; \hookleftarrow$

$\gg A + C \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} 2 & 1 & 10 \\ 2 & 12 & 13 \end{matrix}$

$\gg A * B \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 35 & 47 & 29 \\ 34 & 67 & 40 \end{matrix}$$

$\gg A' \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 7 & 5 \end{matrix}$$

$\gg det(B) \hookleftarrow$

ans=-4

$\gg inv(B) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -3 & 5/2 & -1/2 \\ 11/2 & -17/4 & 3/4 \end{matrix}$$

$\gg zeros(2,3) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\gg ones(1,4) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$\gg eye(2,3) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\gg eye(3) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Si sólo se da un número, se asume que la matriz es cuadrada.

1.4. Ejercicios

Objetivo: Reafirmar los conocimientos aprendidos en las secciones 1.1, 1.2 y 1.3.

1. Sea $U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y + z = 5 \quad x - y + 3z = 1\right\}$
   ¿Qué tipo de región es?
   a) Un punto
   b) Una recta
   c) Un plano
   d) $\mathbb{R}^3$

2. Demuestre que los vectores encontrados en el ejemplo 4.5 son linealmente independientes.

3. Encuentre el rango del sistema U, concluya entonces si el sistema es consistente o inconsistente.
   $$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6\right\}$$

4. Encuentre una base para el espacio U y muestre que cualquier vector de la base puede ser reemplazado por (-55,-25,23,23).
   $$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^4 | 92x_1 + 69x_2 + 226x_3 + 69x_4 = 0, \right.$$
   $$\left. 115x_1 - 92x_2 + 143x_3 - 32x_4 = 0\right\}$$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ calcule usando Matlab
   a) A+B^t
   b) $A * B$
   c) Rango A
   d) Rango B
   e) Determinante(A*B)
   f) $(A * B)^{-1}$
   g) $(A * B)^{-1} * A$
   h) $B * (A * B)^{-1}$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ introduzca las matricez y escriba las siguientes instrucciones en la ventana de comandos de

Matlab.
$\gg A * x \hookleftarrow$
$\gg B = [A(:,1), A(:,2)], XB = [x(1) : x(2)] \hookleftarrow$
$\gg N = [A(:,3), A(:,4)], XN = [x(3) : x(4)] \hookleftarrow$
$\gg B * XB + N * XN \hookleftarrow$
¿Hay alguna relación entre A*x y B*XB+N*XN ? ¿Cuál? ¿Siempre sucede esto?

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ divida A en dos submatrices B,N
y X en dos vectores XB,XN de tal forma que:

   - B sea cuadrada
   - Det(B)$\neq$0
   - Ax=BXB+NXN

   ¿Es posible encontrar $w \neq x$ tal que $Aw = Ax$ y w contenga al menos dos ceros? Si la respuesta es afirmativa proporcione w.

8. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Existe B submatriz de 3x3 que sea invertible? Justifique su respuesta.

Capítulo 2

El Problema de Programación Lineal

El objetivo de este capítulo es introducir al lector a los conceptos de Investigación de Operaciones y Programación Lineal, para el planteamiento de problemas, así como presentar definiciones que se ocupan en las lecciones subsecuentes para la solución de problemas.

2.1. ¿Qué es la Investigación de Operaciones?

Objetivos: Definir los conceptos de Investigación de Operaciones y Programación Lineal. Proporcionar los pasos para el planteamiento de un Problema de Programación Lineal y los supuestos en los que se incurre.

Las actividades militares requieren una gran coordinación para la implementación de planes y estrategias, al comenzar la Segunda Guerra las autoridades estadounidenses de la Comandancia Suprema, quienes se encargaban de tomar las decisiones, señalaron que esta tarea era cada vez más ardua por lo que se busco la ayuda de expertos para obtener reglas y técnicas que fueran consistentes para programar los procesos militares.

Se tuvieron dos factores importantes para la creación de estas técnicas: el primero es el desarrollo de un modelo inter-industrial por parte de W. Leontief y el segundo es el desarrollo en gran escala de las computadoras.

Comenzó entonces en junio de 1947 el proyecto SCOOP (Cálculo Científico de Programas de Optimización) cuyos principales miembros eran Marshall Wood, John Norton, Murray Geisler y George B. Dantzing; su objetivo era generalizar la aproximación del problema inter-industrial, el resultado de éste proyecto se dio en Julio de 1947 con el Método Computacional Simplex. En el siguiente diagrama podemos resumir los eventos históricos que llevaron a la creación de la Investigación de Operaciones.


Orígenes de la Programación Lineal
Militar
Económico
Industrial
Matemático
Comandante Supremo hacía los planes personalmente
Staff General de Emergencia Expertos planeaban los procesos(1860)
Subdivisión de programación de procesos(1917)
Central de Monitoreo de la programación de procesos(1942)
Mecanización, Programación Lineal(1947)
Modelo triangular (1948)
Códigos de la fuerza área (1949)
Aplicación en la industria, distribución de comida, energía eléctrica, etc.
Aplicación de la programación lineal (1952)
Asignación de Personal (1952)
Aplicación
Tableau Economique(Quesnay 1759)Primer ejemplo de modelo de un ppl
Estudios Gubernamentales a gran escala(1932)
Modelo Ingreso-egreso de Leontief(1936)Construcción de un modelo cuantitativo de la economía Americana
Programación de la producción de la guerra(1940)
Koopmans Modelo Económico General (1948)
Dorfmans Teoría de la Firma(1951)
Dorfmans, Samuelson, Solows "PL y Análisis Económico(1958)
Teoría
Sistema Walrasiano (1874)
Modelo de Equlibrio de Von Neuman
Modelo de Transportación de Koopmans
Método Simplex (Dantzig 1947)
Dualidad(Von Neuman 1947)
Teoría (Tucker, Gale, Kuhn, Koopmans, 1948)
Simposio de PL(1951)
Desarrollos de la URSS(1957)
Teoría de Redes (Ford Fulkerson 1956)
Teoría
Fourier(1823) Primero en estudiar desigualdades lineales y teoría de la probabilidad
Gauss(1873) Métodos de solución para sistemas lineales
Farkas(1903) Teoremas de la alternativa
Motzkin(1936) Método de Relajación y Método de doble descripción
Kantorovich (1939) Representación de ppl como problemas de redes
Hitchcock Problema de Transporte
Von Neuman Teoría de Juegos
Programación Entera El agente viajero(Dantzig, Fulkerson, Johnson(1954), Teoría General (Gomory 1958)
Avance Computacional
Abaco (600 a.c.)
Sumadora de pascal(1642)
Hollerith´s Máquina perforadora(1890)
Computadora 1946
ENIAC Computadora electrónica(von Neuman 1945)
Problema de Transporte (Dantizig, 1949)
Código Simplex

Veamos algunas de las definiciones más comunes de Investigación de Operaciones:

Definición 2.1.1 *La Investigación de Operaciones se describe como la utilización del método científico para la toma de decisiones que involucran operaciones en el sistema organizacional.*

Definición 2.1.2 *La Investigación de Operaciones es la aplicación de la ciencia para la toma de decisiones basándose en modelos matemáticos que se obtienen de agrupar simbolos que representan objetos de acuerdo con ciertas reglas.[6,]*

Las contribuciones del estudio de la Investigación de Operaciones son:

1. Estructurar una situación de la vida real en un problema matemático[1] abstrayendo sus elementos esenciales para obtener una solución relevante que permita la toma de decisiones.

2. Contar con procedimientos sistemáticos para obtener las soluciones a los problemas.

3. Desarrollar soluciones, basándose en teoría matemática y si es necesario tasar el valor óptimo del sistema .

En la Investigación de Operaciones se formulan problemas de Programación Matemática partiendo de los siguientes supuestos:

- Se conocen las limitaciones o restricciones, generalmente relacionadas a recursos económicos o humanos.

- Se cuenta con un objetivo, entre los que se encuentran maximizar ganancias o minimizar costos.

- Se pueden generar diversas alternativas para solucionar el problema.

Para plantear un Problema de programación Matemática seguiremos los siguientes pasos:

1. **Definición de las variables de decisión**: el tomador de decisiones tiene el control sobre la forma como son asignados los recursos, es decir que se relaciona directamente con el hecho de que existen diversas alternativas para solucionar el problema.

2. **Establecimiento de las restricciones:** Los recursos están limitados y este hecho debe representarse matemáticamente en términos de las variables de decisión.

[1] Un problema matemático consiste en buscar una determinada entidad matemática entre un conjunto de entidades del mismo tipo que además satisfaga las llamadas *condiciones del problema.*

3. **Definición de la función objetivo:** La evaluación de una solución en la función objetivo proporciona el criterio de comparación entre diversas soluciones.

La clasificación de los problemas de Programación Matemática los divide en dos grupos principales: *Determinísticos* si es posible predecir con certeza los coeficientes del problema y *Probabilísticos* cuando los coeficientes dependen de alguna clase de eventos. La clasificación se puede observar en el siguiente diagrama:

En este trabajo nos enfocaremos en los *Problemas de Programación Lineal*(ppl) en los que:

- La función objetivo es una función lineal[2] que se desea optimizar minimizando o maximizando.
- Las restricciones están represetados por igualdades o desigualdades lineales.
- Las variables de decisión son números reales.

Definición 2.1.3 *La Programación Lineal*[3] *es el conjunto de técnicas matemáticas que resuelven problemas de la forma:*

$$Max\ f(x) = cx$$

[2]Una función lineal es una función f(x) tal que si $x, y \in V,\ \lambda, \mu \in K$
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

[3]El término Programación Lineal fue sugerido por el autor T.C. Koopmans en 1951 como una alternativa a la antigua forma de "programación en una estructura lineal."

$$Ax \leq \ b$$
$$x \geq 0$$

Los supuestos de la Programación Lineal son:

- *Proporcionalidad:* Sea x_j una variable del problema. Su contribución a la función objetivo está dada por cx_j y su contribución a la i-ésima restricción está dada por $a_{ij}x_j$.
- *Aditividad:* El costo total expresado en la función objetivo es la suma de los costos individuales.
- *Divisibilidad:* La variable de decisión x_j puede dividirse en cualquier nivel fraccionario.
- *Determinística:* Todos los valores de A,b y c se encuentran de manera determinística, es decir estos valores no corresponden a variables o funciones aleatorias.

2.2. El Planteamiento de un ppl

Objetivo: Ilustrar mediante dos ejemplos la forma de plantear un ppl.
El Problema de la Mezcla
La señora Marcela vende bolsas de botanas de un kilogramo. El primer tipo de bolsa contiene al menos un 30 % de pistaches, al menos 25 % de nueces de la India y el resto son cacahuates.Cada bolsa se vende a $120. El segundo tipo de bolsa contiene al menos 35 % de pepitas, a lo más 50 % de cacahuates y el resto de pistaches.Cada bolsa se vende a $95.
En la siguiente tabla se muestra la disponibilidad de los ingredientes y su costo por kilogramo.

Ingrediente	Costo x Kg	Disponibilidad
Pistaches	150	20
Cacahuates	80	40
Nueces de I	75	18
Pepitas	50	50

Plantear el problema de maximizar la ganancia de la Sra Marcela.

Paso 1. Definición de las Variables de Decisión

¿Sobre qué tiene control la Sra. Marcela?
Veamos algunas opciones erróneas que pudiesen ser propuestas.

- Sobre los porcentajes de producto en cada mezcla(o tipo de bolsa).
  Si damos un valor a los porcentajes de cada producto en la mezcla no nos dicen cuantas bolsas se están produciendo.

- Sobre el número de bolsas a producir.
  Al saber cuantas bolsas se produjeron se calcularía la ganancia. Sin embargo no estaríamos especificando si se cumplieron los porcentajes requeridos.

Analicemos otra opción

- La Señora Marcela tiene control sobre la cantidad de kilogramos a comprar de cada producto.
  Tomando en cuenta que el peso es una medida continua, podemos dividir en cualquier cantidad de partes el Kg no se desperdicia nada de la matería prima por lo que la suma de Kg de pistache+Kg de cacahuate+Kg de nueces+ Kg de pepitas=Total de Kg de bolsas de botanas. Considerando que las mezclas para las bolsas son distintas, tenemos que especificar cuánto de cada producto se usa para cada mezcla.

Utilizando esta información podemos definir las variables:

$x_{ij} = \#$ *de Kg del producto i usado en la mezcla j.*

$$i = 1(pistache), 2(cacahuate), 3(nueces), 4(pepitas)$$
$$j = 1(Bolsa\ tipo\ 1), 2(Bolsa\ tipo\ 2)$$

Paso 2.Establecimiento de las restricciones

¿Qué recursos están limitados?

- Cada uno de los ingredientes está limitado a cierta cantidad disponible. (Disponibilidad)

- Porcentaje de cada ingredientes en cada una de las mezclas no puede exceder cierto nivel.

Restricciones de disponibilidad:

$$\underbrace{\underset{\substack{pistaches\\ en\ la\ mezcla\ 1}}{x_{11}} + \underset{\substack{pistaches\\ en\ la\ mezcla\ 2}}{x_{12}}}_{total\ de\ Kgs\ de\ pistache\ usados\ en\ ambas\ mezclas} \leq \underset{\substack{pistaches\\ disponibles}}{20}$$

Similarmente

$$x_{21} + x_{22} \leq 40$$
$$x_{31} \leq 18$$
$$x_{42} \leq 50$$

Restricciones sobre el porcentaje

¿Cuántos Kg de la Mezcla 1 se producirán ?

La mezcla 1 está formada por pistaches, cacahuates y pepitas, entonces:

$\#Kg\ Mezcla\ 1 = pistache\ en\ M_1 + cacahuate\ en\ M_1 + pepitas\ en\ M_1.$

$\#Kg\ Mezcla\ 1 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$

Analogamente $\#Kg\ Mezcla\ 2 = x_{12} + x_{22} + x_{42}$

Como $\frac{100x_{ij}}{x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}}$ es el % del producto i en la mezcla j

Entonces $\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}+x_{31}} \geq \frac{30}{100} \rightarrow \frac{30}{100}(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq x_{11}$

Las demás restricciones sobre el porcentaje son[4]:

$$\frac{25}{100}(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq x_{31} \quad \rightarrow \quad x_{11} + x_{21} - 3x_{31} \leq 0$$

$$\frac{35}{100}(x_{12} + x_{22} + x_{42}) \leq x_{42} \quad \rightarrow \quad 7x_{12} + 7x_{22} - 13x_{42} \leq 0$$

$$x_{22} \leq \frac{1}{2}(x_{12} + x_{22} + x_{42}) \quad \rightarrow \quad x_{12} - x_{22} + x_{42} \leq 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \textit{Los kilogramos son cantidades no negativas}$$

Paso 3.Definición de la función objetivo

Ganancia o pérdida = ingresos por la venta de las bolsas - costos por compra de los ingredientes

$$\begin{aligned} Maximizar\ z = {} & 120(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 95(x_{12} + x_{22} + x_{42})(Ingresos) \\ & -150(x_{11} + x_{12}) - 80(x_{21} + x_{22}) - 75x_{31} - 50x_{42}(Costos) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Maximizar\ z = {} & 120x_{11} - 150x_{11} + 120x_{21} - 80x_{21} + 120x_{31} - 75x_{31} \\ & +95x_{12} - 150x_{12} + 95x_{22} - 80x_{22} + 95x_{42} - 50x_{42} \end{aligned}$$

[4]Las escribimos de esta forma para notar claramente que son funciones lineales.

Modelo Completo

$Maximizar\ -30x_{11}+40x_{21}+45x_{31}-55x_{12}+15x_{22}+45x_{42}$
sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12} &\leq 20\\
x_{21}+x_{22} &\leq 40\\
x_{31} &\leq 18\\
x_{42} &\leq 50\\
x_{11}+\ x_{21}-\ \ 3x_{31} &\leq 0\\
7x_{12}+7x_{22}-13x_{42} &\leq 0\\
x_{12}-\ \ x_{22}+\ \ x_{42} &\leq 0\\
x_{ij}\geq 0 \quad i=1,2,3,4 \quad j &= 1,2
\end{aligned}$$

Un Problema de Flujo Máximo

Se desea enviar agua de la Ciudad A a la Ciudad B por medio de un conjunto de tuberías que se muestran en la siguiente figura:

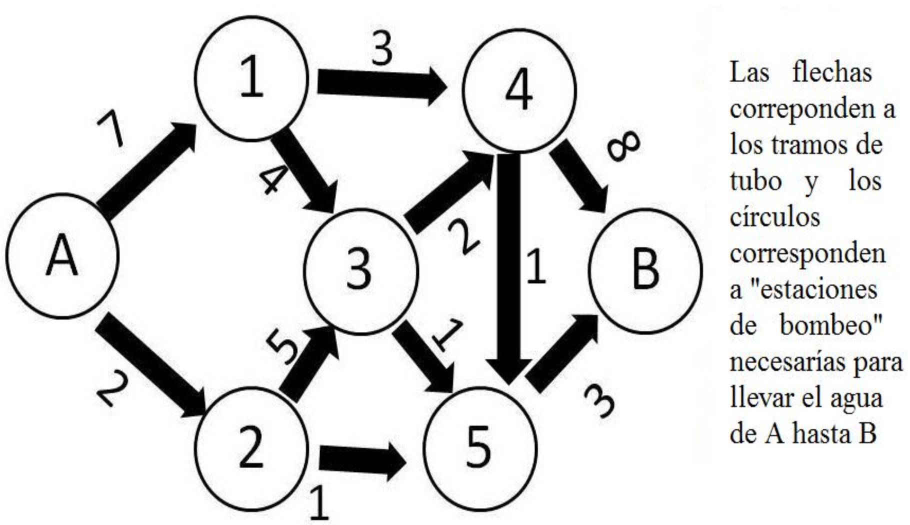


Figura 2.1: Sistema de Tuberías

El número asociado a cada tramo de tubería es la cantidad de agua en m^3 que puede pasar por el segmento de tubo. Tomando en cuenta que la Ciudad B desea recibir la mayor cantidad de agua posible y que el agua no puede quedarse en puntos intermedios de la red.

Planteamiento del Problema de Programación Lineal.

Paso 1. Definición de las variables de decisión

x_{ij} está definido si existe el tramo de tubería que une al punto i con el j.

En este problema se observa que se tiene el control sobre la cantidad de agua a enviar en cada tramo de tubería.

$x_{ij} = \#$ *de* m^3 *de agua a ser enviados del punto i al punto j.*
$i = A, 1, 2, 3, 4, 5 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, B.$

Paso 2. Establecimiento de las restricciones

Capacidad de las tuberías

$$x_{A1} \leq 7 \qquad x_{A2} \leq 2 \qquad x_{14} \leq 3 \qquad x_{13} \leq 4 \qquad x_{23} \leq 5$$

$$x_{34} \leq 2 \qquad x_{25} \leq 1 \qquad x_{35} \leq 1 \qquad x_{45} \leq 1 \qquad x_{4B} \leq 8 \qquad x_{5B} \leq 3$$

Evitar pérdida en los puntos intermedios, es decir el total de agua que llega a cada punto es igual al total de la que sale.

$$x_{A1} = x_{14} + x_{13}$$

$$x_{A2} = x_{23} + x_{25}$$

$$x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35}$$

$$x_{14} + x_{34} = x_{45} + x_{4B}$$

$$x_{35} + x_{25} + x_{45} = x_{5B}$$

x_{ij} es no-negativo por ser un volumen.

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = A, 1, 2, 3, 4, 5 \;\; j = 1, 2, 3, 4, 5, B$$

Paso 3. Definición de la función objetivo

Como el total que se envía de A es igual al total que se recibe en B por que no se pierde agua en la red de tuberías entonces:

$$Maximizar\ z = x_{A1} + x_{A2} \quad = \quad Maximizar\ z = x_{4B} + x_{5B}$$

Resumiendo la información, el ppl es:

$$\begin{aligned}
Maximizar\ x_{4B} + x_{5B} \\
x_{A1} \leq 7 \\
x_{A2} \leq 2 \\
x_{14} \leq 3 \\
x_{13} \leq 4 \\
x_{23} \leq 5 \\
x_{34} \leq 2 \\
x_{25} \leq 1 \\
x_{35} \leq 1 \\
x_{45} \leq 1 \\
x_{4B} \leq 8 \\
x_{5B} \leq 3 \\
x_{A1} = x_{14} + x_{13} \\
x_{A2} = x_{23} + x_{25} \\
x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35} \\
x_{14} + x_{34} = x_{45} + x_{4B} \\
x_{35} + x_{25} + x_{45} = x_{5B} \\
x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

2.3. La Región de Soluciones Factibles

Objetivo: Definir y proporcionar las principales propiedades de la región de soluciones factibles, al igual que la forma de graficarla.
Una vez que se cuenta con un modelo matemático para resolver el problema podemos comenzar a buscar la solución óptima.

Definición 2.3.1 *La Región de Soluciones Factibles S es el conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfacen todas las restricciones de un ppl.*

Definición 2.3.2 *Sea $x \in S$ tal que x maximiza(minimiza) la función objetivo entonces x es una solución óptima.*

Definición 2.3.3 *Si $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$, z es una Combinación Lineal convexa de $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ si:*

$$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Definición 2.3.4 *Un conjunto U es convexo si para cualesquiera $u_1, u_2 \in U$*

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in U \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

ie. el segmento de recta que une u_1 con u_2(incluyéndolos) está completamente contenido en S.

Definición 2.3.5 *H es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ cuando*

$$H = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\right\} \text{ con } (a_1, \cdots, a_n) \neq 0$$

Es un semiespacio cerrado cuando tiene cualquiera de las formas siguientes

$$H = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b\right\}$$

$$H = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b\right\}$$

Usaremos la norma Euclideana $\|\|$

Definición 2.3.6 *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es acotado si $\exists\ r > 0$ tal que*

$$\left\|\overline{X}\right\| \leq r \qquad \forall \overline{X} \in S$$

Si r no existe decimos que S es no-acotado.

Definición 2.3.7 *Dado un conjunto convexo S, x es un punto extremo de S si no puede ser expresado como combinación lineal convexa estricta de dos puntos $y, w \in S$.*

Pasos para Graficar un ppl en $\mathbb{R}^2$

1. Suponemos la igualdad en las restricciones.
2. Encontramos 2 puntos que pertenezcan a cada restricción, existe una única recta que pasa por estos dos puntos y divide el espacio en 2 partes.
3. Sea $\overline{X} \in \mathbb{R}^2$. Si $\overline{x}$ satisface la restricción sombreamos el semiespacio que lo contiene, si no la satisface entonces sombreamos el otro semiespacio.
4. S es la intersección de todos los semiespacios[5].

Ejemplo 2.1 *Dibuje la región de soluciones factibles del siguiente ppl*

$$\begin{aligned} Min\ z = -x_1 + 3x_2 & \\ -x_1 + \ x_2 \leq \ 4 & \qquad (1) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 12 & \qquad (2) \\ x_1 + \ x_2 \leq 10 & \qquad (3) \\ x_1 \geq \ 0 & \qquad (4) \\ x_2 \geq \ 0 & \qquad (5) \end{aligned}$$

[5] S puede ser vacia en cuyo caso no existe ningún punto factible.

$S = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 | -x_1 + x_2 \leq 4,\ -x_1 + 2x_2 \leq 12,\ x_1 + x_2 \leq 10\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

Observamos que las restricciones del problema son semiespacios cerrados y como $\overline{X} \in \mathbb{R}^2$ entonces podemos graficar.

Paso 1 *Suponemos:*

$$
\begin{aligned}
-x_1 + \ x_2 &= \ 4 && (1)\\
-x_1 + 2x_2 &= 12 && (2)\\
x_1 + \ x_2 &= 10 && (3)\\
x_1 &= \ 0 && (4)\\
x_2 &= \ 0 && (5)
\end{aligned}
$$

Paso 2 *Encontramos 2 puntos en c/u de las rectas*

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 4 + x_1 && \textit{pasa por } \{(0,4),(2,6)\} && (1)\\
x_2 &= \frac{12 + x_1}{2} && \textit{pasa por } \{(0,6),(2,7)\} && (2)\\
x_2 &= 10 - x_1 && \textit{pasa por } \{(3,7),(10,0)\} && (3)\\
& && x_1 = 0 \textit{ es el eje } x_1 && (4)\\
& && x_2 = 0 \textit{ es el eje } x_2 && (5)
\end{aligned}
$$

Paso 3 *Evaluamos si el punto $\overline{X} = (0,0)$ está en los semiespacios*

$$
\begin{aligned}
-0 + \ 0 \ &= 0 \leq \ 4 && (1)\\
-0 + 2 \cdot 0 &= 0 \leq 12 && (2)\\
0 + \ 0 \ &= 0 \leq 10 && (3)
\end{aligned}
$$

Además $x_1, x_2 \geq 0$ es sólo el primer cuadrante. *(4),(5)*

Sombreando los semiespacios que contienen al $\overline{X} = (0,0)$ correspondientes a cada una de las restricciones tenemos la siguiente gráfica:

Los puntos extremos de S son $\{(0,0),(0,4),(3,7),(10,0)\}$

$$S = \left\{ \overline{X} = (x_1, x_2) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(0,4) + \lambda_3(3,7) + \lambda_4(10,0), \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1 \ \lambda_i \geq 0 \right\}$$

porque S es acotada y cada par de vértices se unen por un segmento de recta, es equivalente a decir que dos puntos extremos son adyacentes si el segmento de recta que los une es una arista de S.
De la expresión anterior tenemos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Para escribir $(x_1, x_2) \in S$ como una combinación lineal convexa se deben encontrar valores para $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ y\ \lambda_4$. De la expresión anterior se tiene:

$$A\lambda = b \quad \to \quad B^{-1}A\lambda = B^{-1}b$$

$$Si \;\; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{35}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} + 1 \\ \frac{x_1}{4} - \frac{7x_2}{12} \\ \frac{x_1}{3} \end{pmatrix}$$

Escribiendo como ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \frac{7}{2}\lambda_4 + \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \\ \lambda_2 &= \frac{35\lambda_4}{6} + \frac{x_2}{4} - \frac{7x_1}{12} \\ \lambda_3 &= \frac{x_1 - 10\lambda_4}{3} \\ & 0 \leq \lambda_4 \leq 1 \end{aligned}$$

Para dar un valor a λ_4 podemos tomar en cuenta las restricciones de no negatividad combinadas con las anteriores:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{7\lambda_4}{2} + \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \geq 0 \quad \to \quad \lambda_4 \leq \frac{4 + x_1 - x_2}{14}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{35\lambda_4}{6} + \frac{x_2}{4} - \frac{7x_1}{12} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_4 \geq \frac{7x_1 - 3x_2}{70} \\
\lambda_3 &= \frac{x_1 - 10\lambda_4}{3} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_4 \leq \frac{x_1}{10} \\
& \qquad 0 \leq \lambda_4 \leq 1
\end{aligned}$$

Expresemos $(5, 2) \in S$ como una combinación lineal convexa de los puntos extremos

$$\lambda_4 \leq \frac{4+5-2}{14} = \frac{1}{2} \qquad \lambda_4 \geq \frac{7 \cdot 5 - 3 \cdot 2}{70} = \frac{29}{70} \qquad \lambda_4 \leq \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{29}{70} \leq \lambda_4 \leq \frac{1}{2}$$

Cualquier valor en el intervalo anterior cumple las restricciones, sin pérdida de generalidad $\lambda_4 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = 0 \\
\lambda_2 &= \frac{35(\frac{1}{2})}{6} + \frac{2}{4} - \frac{7 \cdot 5}{12} = \frac{1}{2} \\
\lambda_3 &= \frac{5 - 10(\frac{1}{2})}{3} = 0
\end{aligned}$$

$$(5, 2) = 0 \cdot (0, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 4) + 0 \cdot (3, 7) + \frac{1}{2}(10, 0)$$

El punto $(7, 4) \notin S$. PD. que no es una combinación lineal convexa de los puntos extremos

$$\lambda_4 \leq \frac{4+7-2}{14} = \frac{1}{2} \qquad \lambda_4 \geq \frac{7 \cdot 7 - 3 \cdot 4}{70} = \frac{37}{70} > \frac{1}{2}!$$

$\therefore \nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

Ejemplo 2.2 *Dibuja la región de Soluciones Factibles del siguiente ppl*

$$\begin{aligned}
Min\ z = -x_1 + 2x_2 & \\
-x_1 + 2x_2 &\leq 10 \qquad (1) \\
3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \qquad (2) \\
x_2 &\geq 1 \qquad (3) \\
x_1 &\geq 0 \qquad (4) \\
x_2 &\geq 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

Cuando se cumple la restricción (3) también lo hace la restricción (5), por lo tanto no es necesario gráficar ésta última.

Grafiquemos la región de soluciones factibles

Paso 1 *Suponemos:*

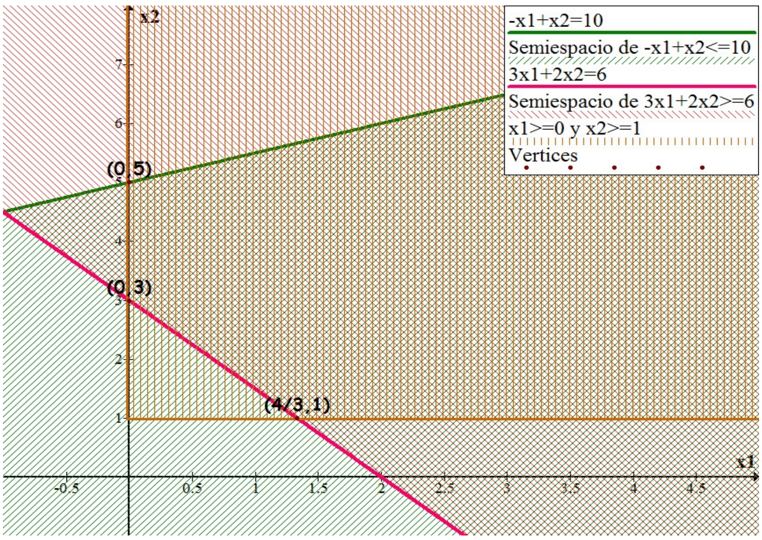
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 10 && (1) \\ 3x_1 + 2x_2 &= \ 6 && (2) \\ x_2 &= \ 1 && (3) \\ x_1 &= \ 0 && (4) \end{aligned}$$

Paso 2 *Encontramos 2 puntos en c/u de las rectas*

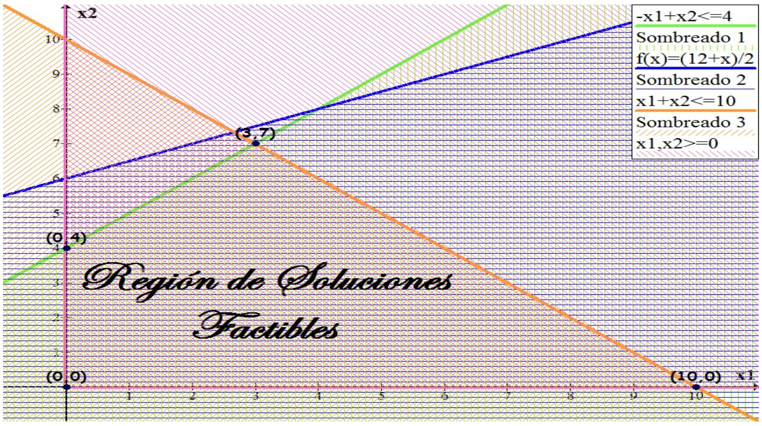
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{10 + x_1}{2} && \textit{pasa por } \{(0,5),(2,6)\} \\ x_2 &= \frac{6 - 3x_1}{2} && \textit{pasa por } \{(0,3),(2,0)\} \\ x_2 &= 1 && \textit{pasa por } \{(0,1),(1,1)\} \end{aligned}$$

Paso 3 *Evaluamos si el punto* $\overline{x} = (0,0)$ *está en los semiespacios*

$$\begin{aligned} -0 + 2 \cdot 0 &\leq 10 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 &\ngeq \ 6 \\ 0 &\ngeq \ 1 \end{aligned}$$

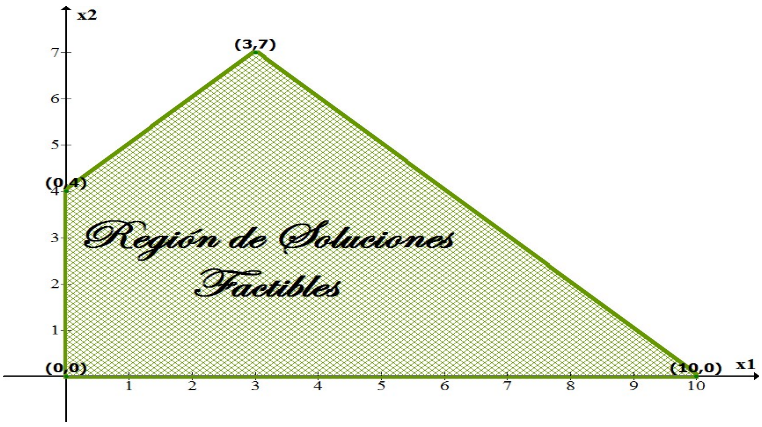


La región S es no-acotada, pero es poliédrica por tanto $\left\{(0,5),(0,3),(\frac{4}{3},1)\right\}$ *son los puntos extremos del conjunto.*



Por lo tanto S es

S es acotada por que existe r=10 tal que $\left\|\overline{X}\right\| < 10\ \forall \overline{X} \in S$



La región S es poliédrica porque es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados y todo vértice del poliédro satisface

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j \quad i = 1, \cdots, m \quad (1)$$

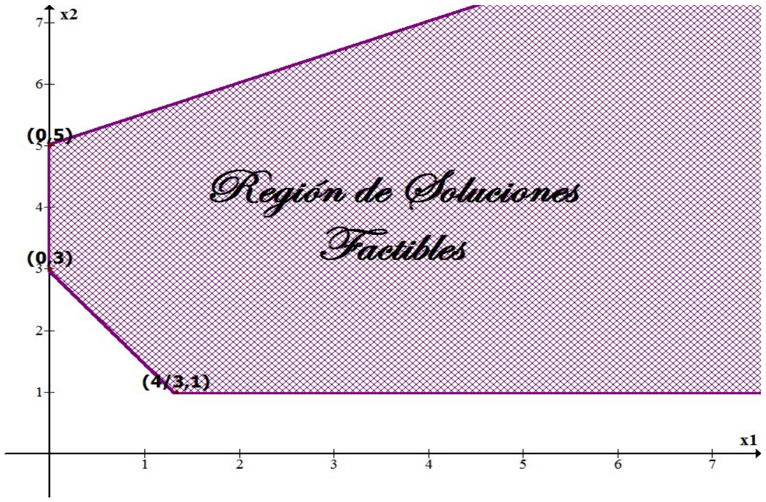
y es la única solución del sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b \quad i \in I \qquad (2)$$

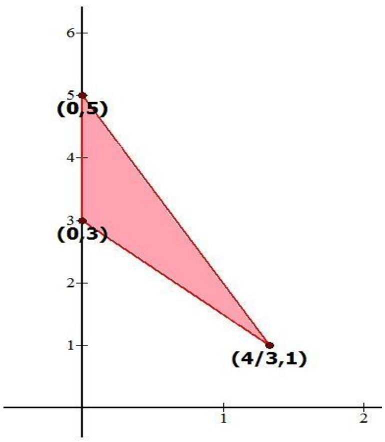
decimos entonces que cada vértice es un punto extremo[6].

[6] Ver demostración en el Apéndice A.

Por lo tanto S es:



En el ejemplo anterior expresamos todo punto en la región de soluciones factibles como una combinación lineal convexa de sus puntos extremos.
¿Es posible hacer lo mismo con este ejemplo?
No, la región generada por las combinaciones lineales de $\left\{(0,5),(0,3),(\frac{4}{3},1)\right\}$ es un poliédro acotado contenido en S.



¿Qué hacemos? Las caras del poliédro que no están acotadas son los hiperplanos correspondientes a las restricciones 1 y 3, debemos construir 2 direcciones que nos permitan movernos sobre los hiperplanos, pero sin salir de S.

Sea H_i el hiperplano asociado a la restricción i-ésima.

$$H_1 \cap S = \left\{\overline{y} \in \mathbb{R}^2 | -y_1 + 2y_2 = 10 \;\; y_1 \geq 0\right\}$$

El punto $\overline{x} = (0,5)$ es el extremo donde comienza $H_1 \cap S$, entonces para todo punto $\overline{y} \in H_1 \cap S$ existe $d = (\mu_2, \mu_1)$ tal que

$$(y_1, y_2) = (0,5) + (\mu_2, \mu_1) = (\mu_2, 5 + \mu_1)$$

Sustituyendo en H_1

$-\mu_2 + 2(5 + \mu_1) = 10 \quad \rightarrow \quad \mu_2 = 2\mu_1 \qquad además \quad \mu_2 \geq 0$

$(y_1, y_2) = (0,5) + (2\mu_1, \mu_1) = (0,5) + \mu_1(2,1) \qquad sea\ \overline{d} = (2,1)$

$\therefore H_1 \cap S = \{(0,5) + \mu_1(2,1) \quad \mu_1 \geq 0\}$

Similarmente

$$H_3 \cap S = \left\{ \overline{y} \in \mathbb{R}^2 | y_2 = 1 \quad y_1 \geq \frac{4}{3} \right\}$$

El punto $\overline{x} = (\frac{4}{3}, 1)$ es el extremo donde comienza $H_3 \cap S$, entonces para todo punto $\overline{y} \in H_3 \cap S$ existe $\widetilde{d} = (\mu_2, \mu_1)$ tal que

$$(y_1, y_2) = \left(\frac{4}{3}, 1\right) + (\mu_2, \mu_1) = \left(\frac{4}{3} + \mu_2, 1 + \mu_1\right)$$

Sustituyendo en H_3

$1 + \mu_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mu_1 = 0 \qquad además \quad \mu_2 \geq 0$

$(y_1, y_2) = \left(\frac{4}{3} + \mu_2, 1\right) = \left(\frac{4}{3}, 1\right) + \mu_2(1,0) \qquad sea\ \widetilde{d} = (1,0)$

$\therefore H_3 \cap S = \left\{ \left(\frac{4}{3}, 1\right) + \mu_2(1,0) \quad \mu_2 \geq 0 \right\}$

Si $\overline{X} \in S$

$$\overline{X} = \lambda_1(0,5) + \lambda_2(0,3) + \lambda_3\,(4/3, 1) + \mu_1(2,1) + \mu_2(1,0)$$

$$con\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

De la expresión anterior tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$A\beta = b \quad \rightarrow \quad B^{-1}A\beta = B^{-1}$$

$$Si \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x_1+2x_2-6}{4} \\ \frac{-3x_1-x_2+5}{2} \\ \frac{3x_1}{4} \end{pmatrix}$$

Escribiendo como ecuaciones

$$\lambda_1 = \frac{-6+3x_1+2x_2-8\mu_1-3\mu_2}{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{5-3x_1-x_2+7\mu_1+3\mu_2}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{3x_1-6\mu_1-3\mu_2}{4}$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Para dar un valor a μ_1, μ_2 utilizamos las restricciones de no-negatividad combinadas con las ecuaciones anteriores.

$$\lambda_1 = \frac{-6+3x_1+2x_2-8\mu_1-3\mu_2}{4} \geq 0 \to -6+3x_1+2x_2 \geq 8\mu_1+3\mu_2$$

$$\lambda_2 = \frac{5-3x_1-x_2+7\mu_1+3\mu_2}{2} \geq 0 \to 7\mu_1+3\mu_2 \geq -5+3x_1+x_2$$

$$\lambda_3 = \frac{3x_1-6\mu_1-3\mu_2}{4} \geq 0 \quad \to \quad x_1 \geq 2\mu_1+\mu_2$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Expresemos $(6,5) \in S$ como una combinación lineal convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal positiva de las direcciones $\overline{d}, \widetilde{d}$.

$$8\mu_1+3\mu_2 \leq -6+3\cdot 6+2\cdot 5 = 22$$

$$7\mu_1+3\mu_2 \geq -5+3\cdot 6+ \quad 5 = 18$$

$$6 \geq 2\mu_1+\mu_2$$

Sin pérdida de genaralidad $\mu_1 = 2$

$$\begin{aligned} 8\cdot 2 + 3\mu_2 \leq 22 &\quad\rightarrow\quad \mu_2 \leq 2 \\ 7\cdot 2 + 3\mu_2 \geq 18 &\quad\rightarrow\quad \mu_2 \geq \frac{4}{3} \\ 6 \geq 2\cdot 2 + \mu_2 &\quad\rightarrow\quad \mu_2 \leq 2 \end{aligned}$$

La variable μ_2 puede tomar cualquier valor en el intervalo $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$.
Sin pérdida de generalidad sea $\mu_2 = 2$, sustituyendo los valores de μ_1, μ_2

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-6 + 3\cdot 6 + 2\cdot 5 - 8\cdot 2 - 3\cdot 2}{4} = 0 \\ \lambda_2 &= \frac{5 - 3\cdot 6 - 5 + 7\cdot 2 + 3\cdot 2}{2} = 1 \\ \lambda_3 &= \frac{3\cdot 6 - 6\cdot 2 - 3\cdot 2}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (6,5) = 0\cdot(0,5) + 1\cdot(0,3) + 0\cdot(4/3,1) + 2\cdot(2,1) + 2\cdot(1,0)$$

El punto $(1,7) \notin S$. PD. que no se puede escribir como una combinación lineal convexa de los puntos extremos más una combinación positiva de $\overline{d}, \widetilde{d}$

$$\begin{aligned} 8\mu_1 + 3\mu_2 &\leq -6 + 3\cdot 1 + 2\cdot 7 = 11 \\ 7\mu_1 + 3\mu_2 &\geq -5 + 3\cdot 1 + \quad 7 = \ 5 \\ 1 &\geq 2\mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

Realizando algunas multiplicaciones

$$\begin{array}{lr} 1 \geq 2\mu_1 + \mu_2 \ \ \textit{por}\ (-7) & -14\mu_1 - 7\mu_2 \geq -7 \\ 7\mu_1 + 3\mu_2 \geq 5 \ \ \textit{por}\ (\ 2) & \underline{14\mu_1 + 6\mu_2 \geq 10} \\ & 0\cdot\mu_1 - \mu_2 \geq 3 \ ! \end{array}$$

$\therefore \nexists \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \mu_1,\ \mu_2$

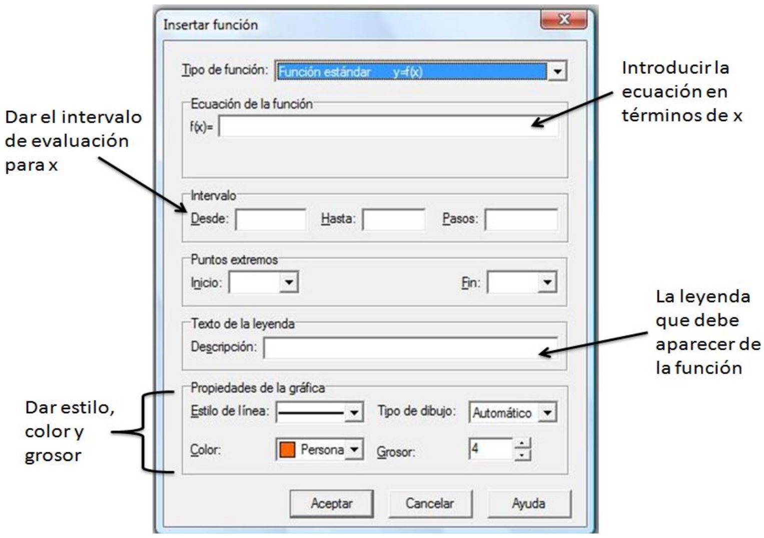
2.4. Graph

Objetivo Conocer el programa Graph que realiza gráficas en $\mathbb{R}^2$ y su utilidad para explicar conceptos de la Investigación de Operaciones.

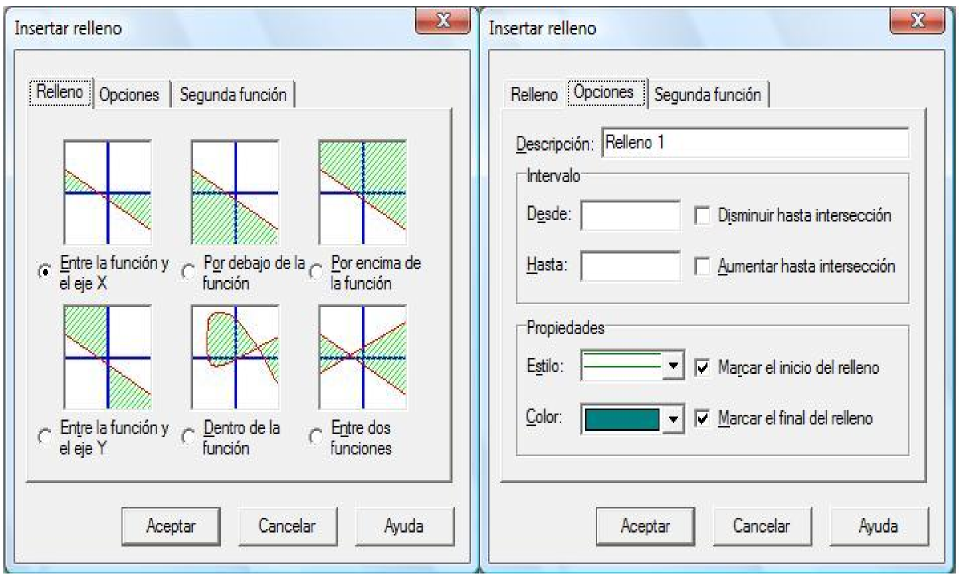
Graph es un programa de software libre que hace gráficas en $\mathbb{R}^2$, evalúa funciones, encuentra intersecciones, colorea semiespacios, entre otras funciones.

En el ambiente de Graph veamos la forma de introducir algunas instrucciones básicas:

- Para introducir una función sleccionamos en el menú la opción **Función** e *insertar función* o bien utilizamos la tecla **INS**.
  Visualizaremos el ménu siguiente:

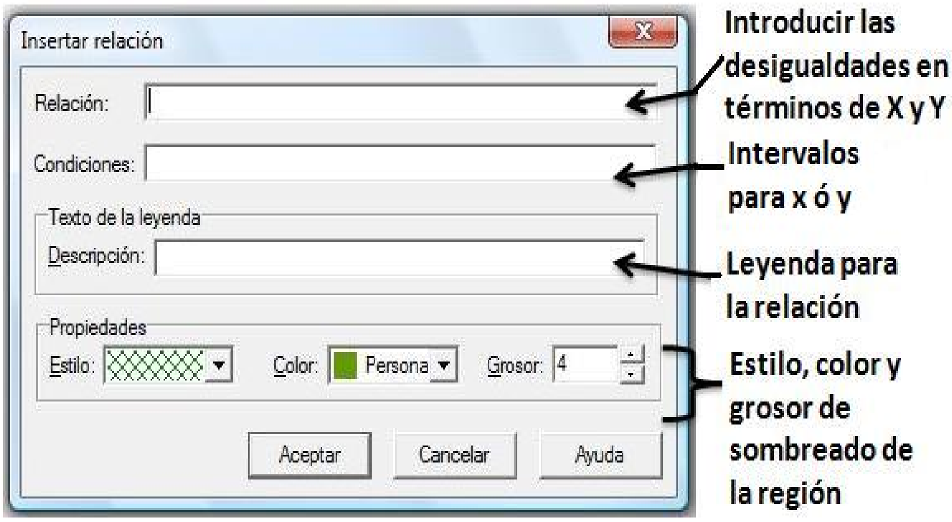


- Para graficar semiespacios acceder a menú "**Función**" seleccionar "***Insertar sombreado***" o accionar la tecla ***F3***, en esta opción el usuario debe escoger entre las diversas posibilidades de sombreado, el estilo y el color.



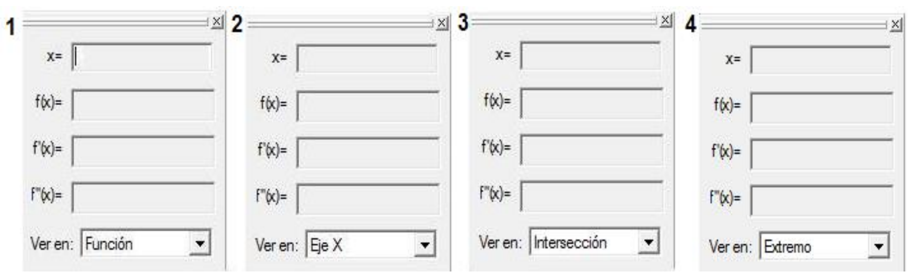
- Para visualizar la región de soluciones factibles como la intersección de todos los hiperplanos, existe la opción ***Insertar relación*** donde se pueden introducir diversas desigualdades y condiciones de las variables.

  Para esto ir al menú "**Función**" seleccionar ***Insertar relación*** ó accionar la tecla ***F6***. Se observará en el siguiente menú:



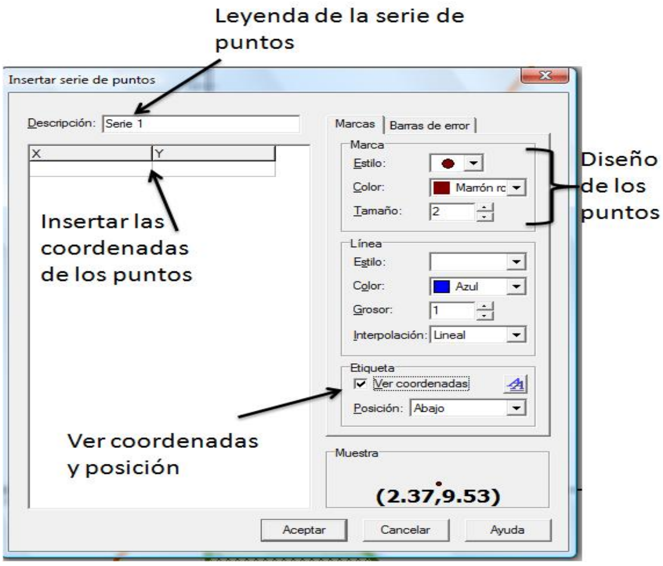
- Una vez que se han introducido funciones en el ambiente de Graph, seleccionamos la opción "**Evaluar**" ó al accionar **CTRL+E** es posible calcular las siguientes opciones:

  1. El valor de la función en algún punto.
  2. Intersección de la función con los ejes.
  3. El ó los puntos de intersección entre funciones.
  4. El extremo, encuentra valor mínimo o máximo de la función usando la derivada.



Es importante mencionar que, como la función f(x) se puede intersectar con más de una función, entonces la intersección que nos proporciona es la más cercana al cursor del mouse. Por esta razón lo que tenemos que hacer es accionar el botón izquierdo del mouse(click) cerca del punto de intersección que deseamos conocer y el programa lo calculará.

- Para definir las coordenadas de los puntos de intersección o algunos otros puntos en el plano, se utiliza la opción ***Insertar serie de puntos*** ó **F4**. El programa muestra una tabla para introducir las coordenadas de los puntos, las opciones de forma del punto, el tamaño y la posición de las coordenadas, etc.



Ejemplo 2.3 *Graficar la región de soluciones factibles con Graph*

$$
\begin{aligned}
Min \ &= x_1 - 2x_2 \\
\frac{x_1}{2} + \ & x_2 \leq 3 \\
-x_1 + \ & x_2 \geq 1 \\
4x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
x_1 \geq 0, \quad & x_2 \geq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

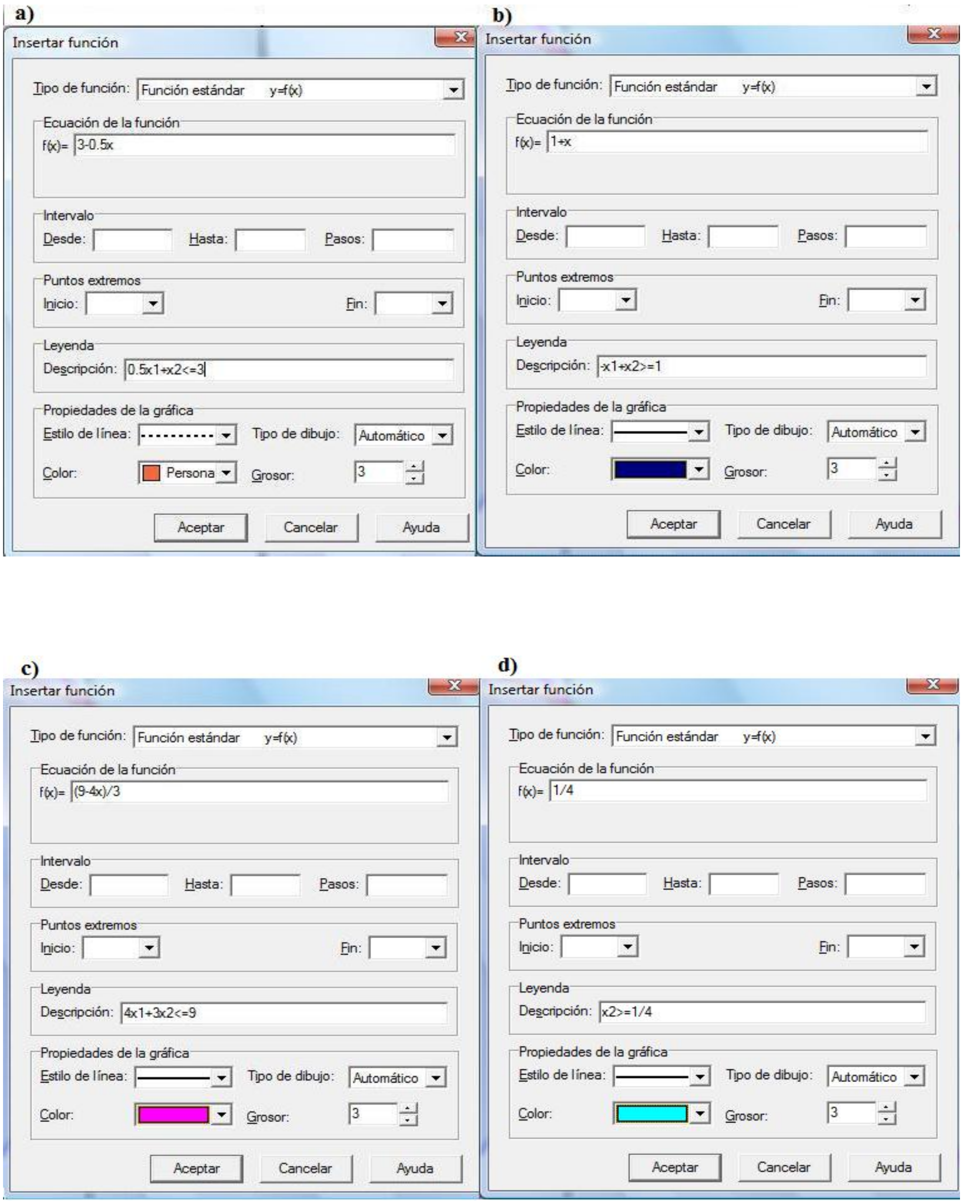
Cada una de las restricciones tiene un hiperplano asociado que define las funciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 + \frac{x}{2} \qquad a) \\
f(x) &= 1 + x \qquad b)
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0$ se entenderá como el eje f(x).

$$f(x) = (9 - 4x)/3 \qquad c)$$
$$f(x) = \ \ 1/4 \qquad d)$$

Se realizan las siguientes instrucciones en la ventana de comando de Graph, ***Insertar función***:

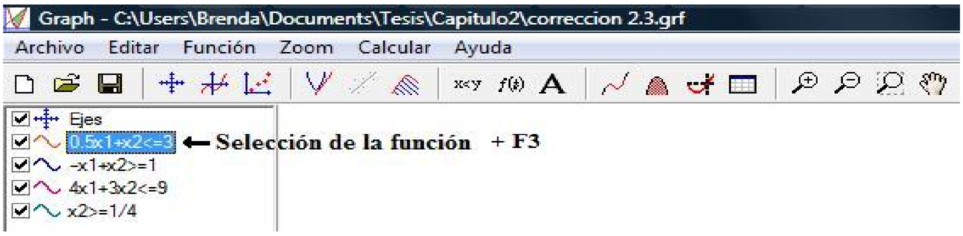


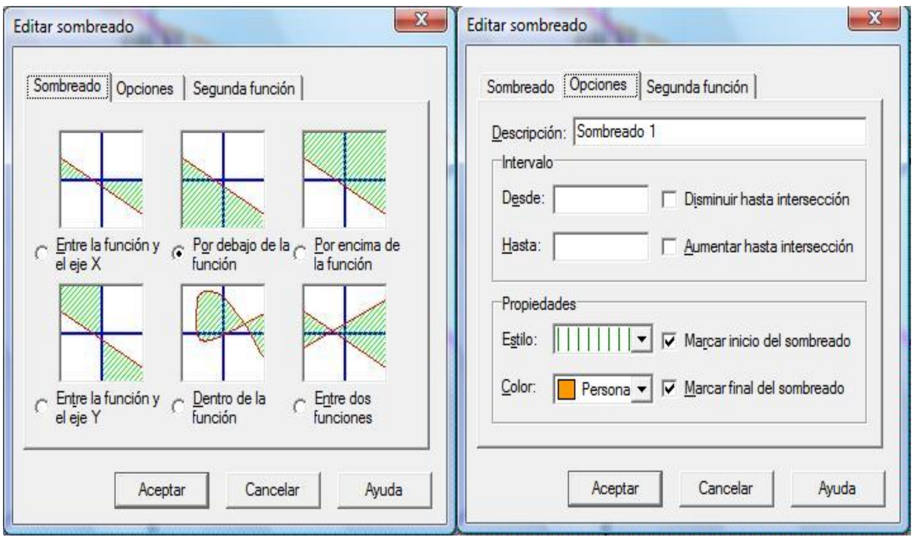
Hasta ahora, se han definido las rectas generadas por las restricciones, pero no se han obtenido todavía los semiespacios correspondientes.

Primero se determina el semiespacio a sombrear utilizando como referencia al origen $\overline{X} = (0,0)$ sustituyéndolo en las restricciones:

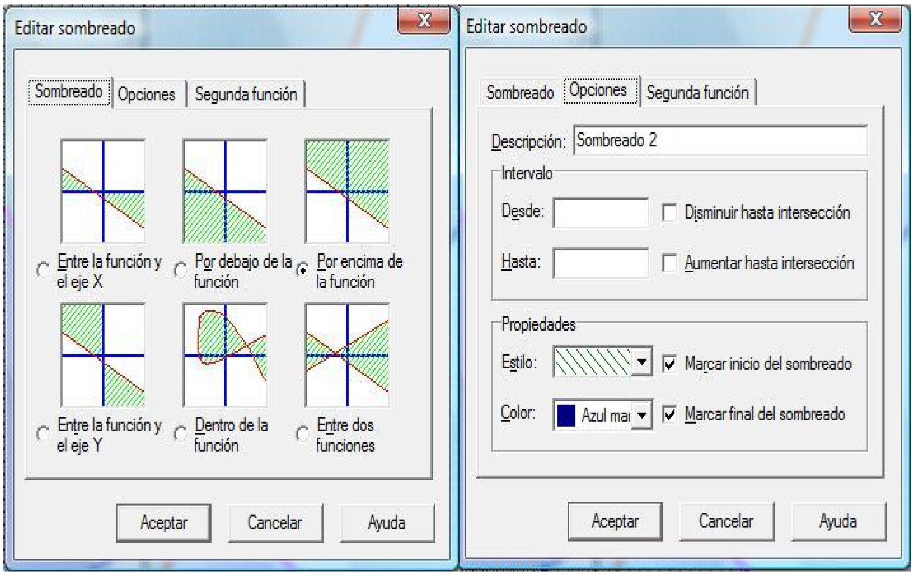
$$\begin{aligned} \frac{0}{2} + \quad 0 &= 0 \leq 3 \\ -0 + \quad 0 &= 0 \not\geq 1 \\ 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0 \leq 9 \\ 0 &\not\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

a) Para la restricción $\frac{x_1}{2} + x_2 \leq 3$, como $\overline{X} = (0,0)$ satisface la primera restricción se selecciona en la ventana izquierda la función 0.5x1+x2<= 3 y se oprime la tecla **F3**. En el menú se selecciona el botón correspondiente a *"por debajo de la función"* por ser el semiespacio que contiene a $\overline{X}$.

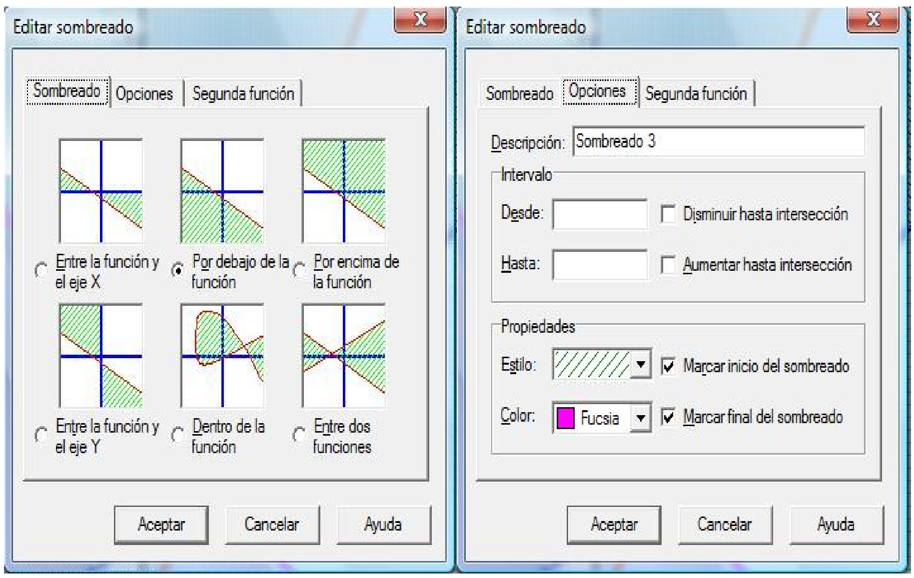




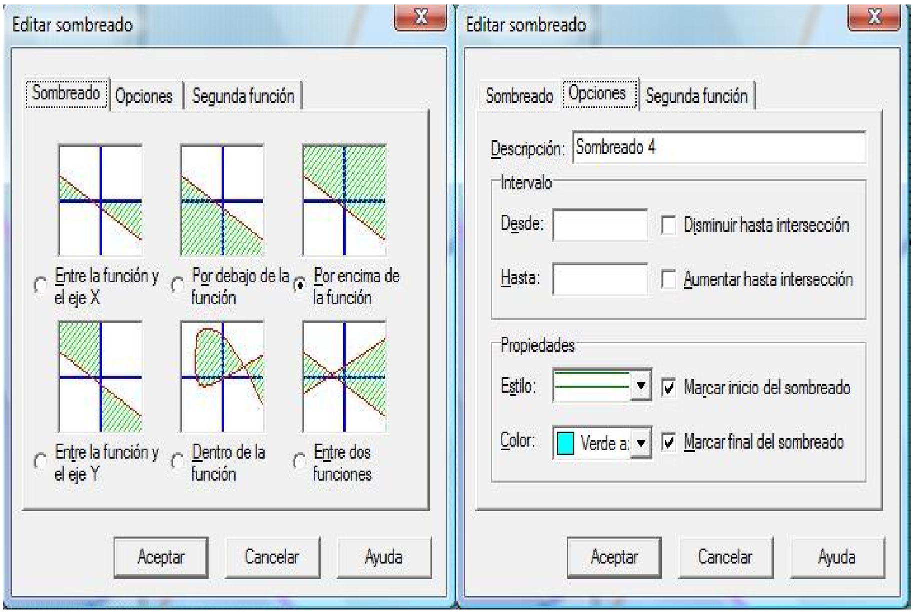
b) Para la restricción $-x_1 + x_2 \geq 1$, como $\overline{X} = (0,0)$ no satisface la restricción se selecciona en la ventana izquierda la función -x1+x2>= 3 y se oprime la tecla **F3**. En el menú se selecciona el botón correspondiente a *"por encima de la función"* por ser el semiespacio que contiene a $\overline{X}$.



c) Para la restricción $4x_1 + 3x_2 \leq 9$, como $\overline{X} = (0, 0)$ no satisface la restricción se selecciona en la ventana izquierda la función 4x1+3x2<= 9 y se oprime la tecla **F3**. En el menú se selecciona el botón correspondiente a *"por debajo de la función"* por ser el semiespacio que contiene a $\overline{X}$.

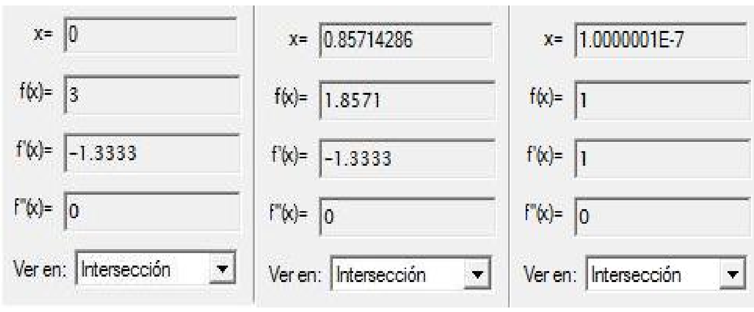


d) Para la restricción $x_2 \geq \frac{1}{4}$, , como $\overline{X} = (0, 0)$ no satisface la restricción se selecciona en la ventana izquierda la función x2>= 1/4 y se oprime la tecla **F3**. En el menú se selecciona el botón correspondiente a *"por encima de la función"* por ser el semiespacio que contiene a $\overline{X}$.



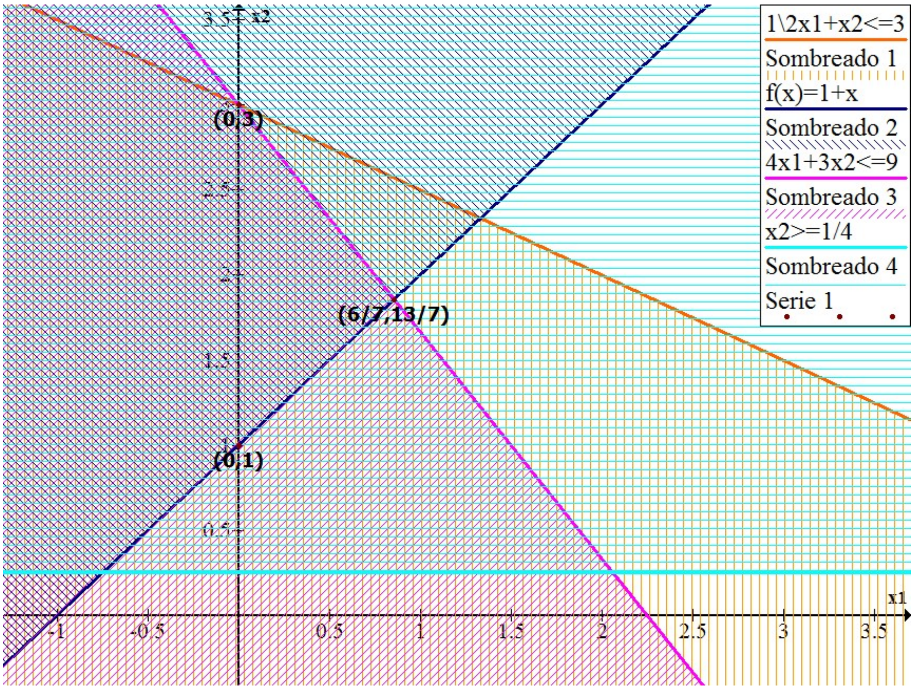
Luego de indicar las regiones para cada una de las restricciones, sabemos que la región de soluciones factibles es la intersección de todos los semiespacio definidos por las restricciones, así que tenemos que tomar en cuenta también la restricción $x_1 \geq 0$ lo cual nos ubica en los cuadrantes 1 y 4 definida la región factible S de este ejemplo.

Como la región factible S existe entonces los puntos extremos están definidos por la intersección de dos restricciones. Usando la opción de **Calcular** y luego ***Evaluar*** o accionando la tecla **F4** es sencillo localizar los puntos extremos de este conjunto:



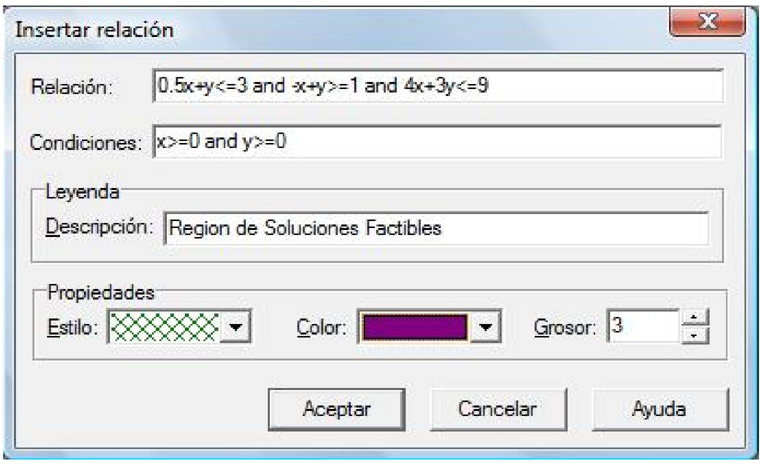
A saber (0,3), (0,1) y (6/7,13/7)

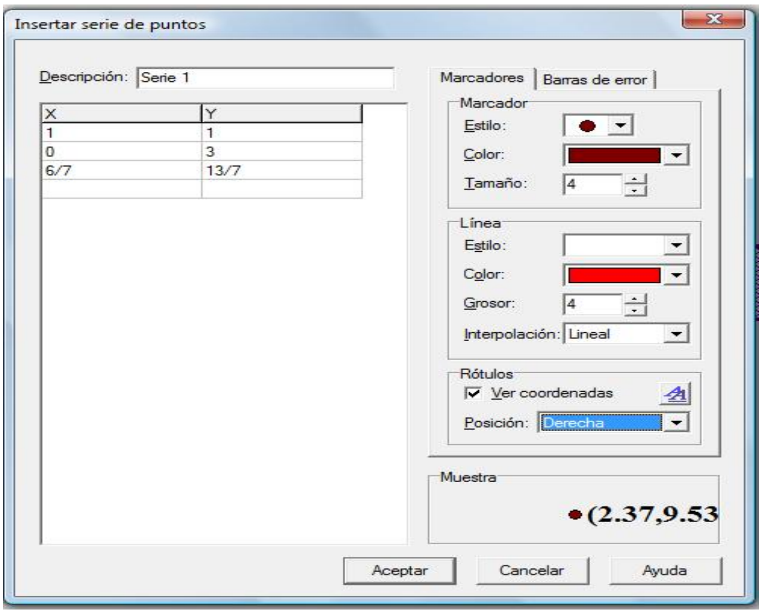
Después de llevar a cabo las instrucciones anteriores la gráfica resultante es la siguiente:



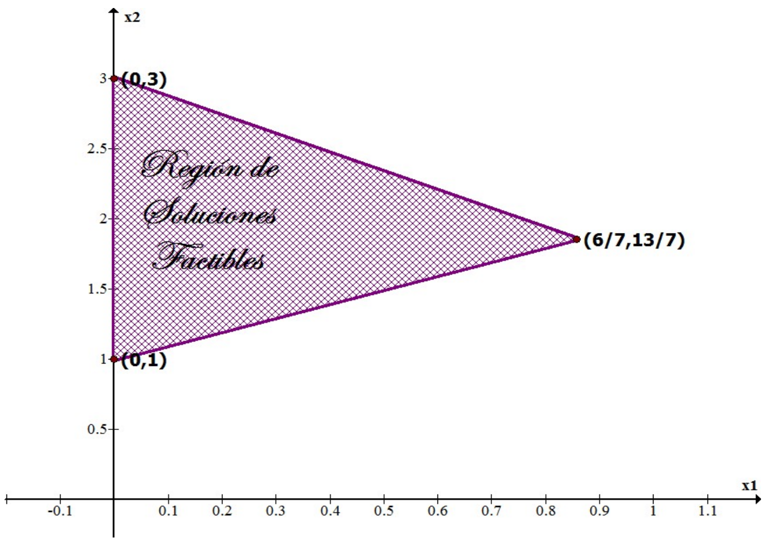
Ejemplo 2.4 *La región de soluciones factibles es la intersección de todos las regiones en el primer cuadrante, utilizando Graph existe una forma más sencilla de encontrar S.*

En un archivo nuevo en el menú **Función** elegimos *Insertar Relación* o **F6**, con las siguientes instrucciones:





Luego de introducir la relación y los puntos extremos que habían sido calculados en el ejemplo anterior será necesario en este ejemplo especificar que $x_1 \geq 0$ en la parte de condiciones.



2.5. El Espacio de Requerimientos

Objetivo: Definición del espacio de requerimientos e interpretación de la factibilidad por medio de éste.

Graph es una herramienta útil para graficar en $\mathbb{R}^2$

¿Qué pasa con los problemas que no se pueden graficar?

Ejemplo 2.5 *Dadas las siguientes restricciones*

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{11x_1}{2} + 5x_2 + 2x_3 + \quad x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

¿Existe la región de soluciones factibles?

Reescribiendo el problema:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$x_1 \left(7, \frac{11}{2}\right) + x_2 (3, 5) + x_3 (-5, 2) + x_4 (8, 1) = \left(\frac{7}{2}, 4\right)$$

Entonces el problema se reduce a encontrar $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ como una combinación lineal no negativa de $\left\{\left(7, \frac{11}{2}\right), (3, 5), (-5, 2), (8, 1)\right\}$.

Al multiplicar un vector por una constante pasa uno de los siguientes casos:

- Si $1 > \lambda > 0 \rightarrow \lambda V$ es un vector en la misma dirección de V, pero su magnitud disminuye.
- Si $\lambda > 1 \rightarrow \lambda V$ es un vector en la misma dirección de V, pero su magnitud se incrementa, es decir que el vector se elonga.
- Si $\lambda = 1$ el vector es el mismo.

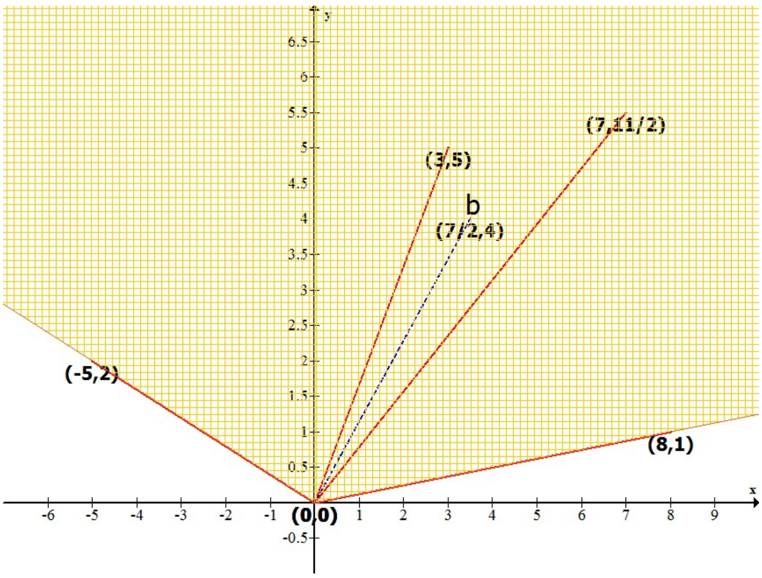
Definición 2.5.1 *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vectores. Se llama cono convexo, al conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas de los a_i's.*

$$Cono = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \qquad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

El cono convexo generado por los vectores es:

$$U = \left\{\overline{X} = x_1 \left(7, \tfrac{11}{2}\right) + x_2 (3, 5) + x_3 (-5, 2) + x_4 (8, 1) \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\right\}$$

que gráficamente se ve como:



Como b se encuentra en el cono generado por los vectores a_i, el problema es factible.

Lema 2.1 *El Problema de Programación Lineal tiene solución si y sólo si, el vector b pertenece al cono convexo generado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ al que también se le llama espacio de requerimientos*[7].

Ejemplo 2.6 *Analice la factibilidad del problema siguiente, usando el espacio de requerimientos*

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Reescribiendo el problema

$$x_1 \underbrace{(1,2)}_{a_1} + x_2 \underbrace{(3,1)}_{a_2} + x_3 \underbrace{(-1,5)}_{a_3} + x_4 \underbrace{(1,2)}_{a_4} \leq \underbrace{(3,6)}_{b}$$

Observamos que tenemos una desigualdad, podemos utilizar dos métodos:

1. *Sumamos los vectores a_5 y a_6 a fin de obtener la igualdad*

$$x_1(1,2) + x_2(3,1) + x_3(-1,5) + x_4(1,2) + x_5(1,0) + x_6(0,1) = (3,6)$$

[7]Recibe ese nombre por que se analizan los requerimientos del vector b para que exista la factibilidad.

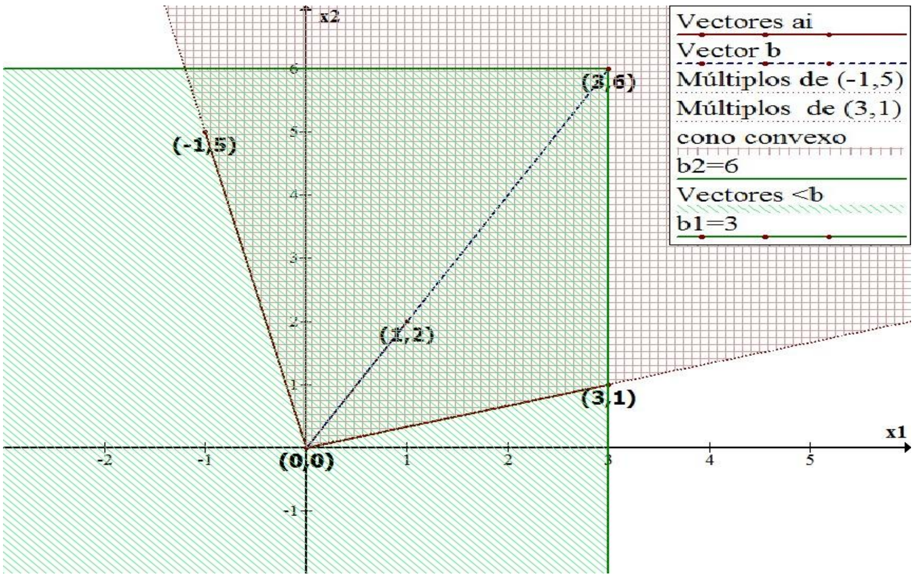
No es necesario dibujar el espacio de requerimientos pues si $x_5 = 3$ *y* x_6 *tenemos:*

$$3(1,0) + 6(0,1) = (3,6)$$

ya que a_5, a_6 *son los vectores canónicos, entonces tenemos una combinación lineal no negativa.*

$\therefore$*El problema es factible.*

2. *Dejamos la desigualdad, pero como nos interesan los vectores* $b \leq (3,6)$ *sombreamos el conjunto donde* $b_1 \leq 3, b_2 \leq 6$ *e intersectamos con el cono convexo generado por* a_1, a_2, a_3 *y* a_4*.*



Debido a que se intersectan ambas regiones podemos concluir que el ppl es factible.

Ejemplo 2.7 *Determine si el siguiente problema es factible*

$$6x_1 + 8x_2 + \quad x_3 + 5x_4 = 4$$

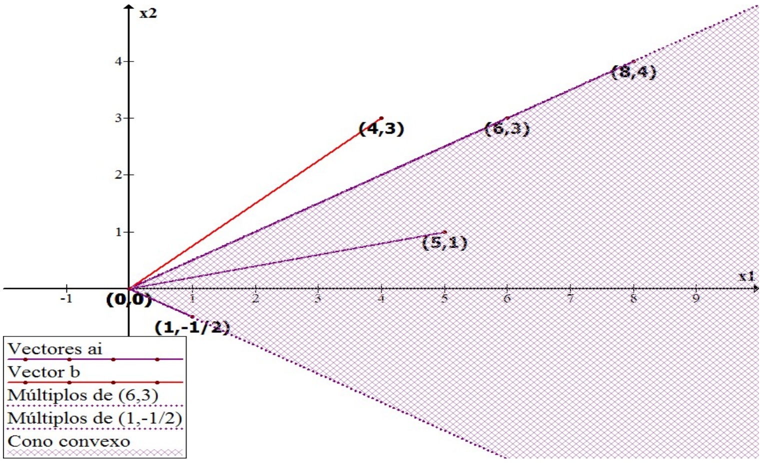
$$3x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \ x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Reescribiendo el problema

$$x_1(6,3) + x_2(8,4) + x_3(1,-1/2) + x_4(5,1) = (4,3)$$

Dibujando el espacio de requerimientos



El vector b no pertenece al cono convexo. $\therefore$ *El problema es infactible.*

2.6. Ejercicios

Objetivo: Reafirmar los conocimientos aprendidos en las lecciones 2.2, 2.3 , 2.4 y 2.5, permitir al lector familiarizarse con el uso de Graph para la solución a los ejercicios dados e invitarlo a plantear ppl para que evalué su capacidad de abstraer problemas y plantearlos con un modelo matemático.

1. Una fábrica de harina para pasteles desea planificar su producción para los próximos 3 meses, se sabe que la demanda del mes 1 es 50 toneladas, la del mes 2 es de 70 toneladas y la del mes 3 es de 35 toneladas.
   A lo má se pueden producir 65 toneladas de harina por mes y el costo mensual de almacenamiento por tonelada es \$200.
   Cada tonelada se vende en \$5000.
   Plantee el problema que maximice la ganancia en los 3 meses.

2. Una refinería puede comprar dos tipos de petróleo crudo: ligero ó pesado. Los costos por barril son de \$11 y \$9 respectivamente.
   Cada tipo de petróleo se produce por barril las siguientes cantidades de gasolina, keroseno y combustible para reactores:

	Gasolina	Keroseno	Combustible
Crudo Ligero	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$
Crudo Pesado	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

   El petróleo crudo ligero ó pesado que no se convierte en gasolina, keroseno ó combustible para reactores se pierde en el proceso de refinación.
   La refinería tiene un contrato para entregar al menos un millón de barriles de gasolina , 400 mil barriles de keroseno y 250 mil barriles de combustible para reactores.

   a) Formular el problema de encontrar el número de barriles de cada tipo de petróleo que satisfagan la demanda y minimicen el costo total.
   b) Dibuje la región de soluciones factibles, S, del problema
   c) La región S ¿es acotada o no-acotada?

3. Dado el siguiente ppl

$$\begin{aligned} Max\ z &= 25x_1 + 23x_2 \\ \frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{20}x_2 &\leq 11 \\ \frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{10}x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{20}x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Dibuje la región de soluciones factibles usando Graph

b) Encuentre todos los puntos extremos de la región S.

4. Dado el siguiente ppl

$$\begin{aligned} Max\ z = 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 + \ x_2 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Dibuje la región S.

b) Determine si S es o no acotada.

c) ¿Qué pasa con la región S si eliminamos la restricción $6x_1+3x_2 \geq 9$?.

d) ¿Cómo se modifica S si invertimos la desigualdad en la segunda restricción, *ie.* $6x_1 + 3x_2 \leq 9$?

5. Interprete la factibilidad del siguiente problema usando el espacio de requerimientos.

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + \ 7x_2 - \ 3x_3 + x_4 \\ x_1 + \ \ x_2 \ - \ 2x_3 + x_4 \leq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Los Métodos Geométrico y Gráfico

Objetivo: Enunciar el Teorema de Representación y su importancia para solucionar los problemas de Programación Lineal.
Explicar el Método Geométrico y el Método Gráfico y aplicarlos para la solución de algunos problemas, utilizar Graph como una herramienta para facilitar del procedimiento el Método Gráfico.

3.1. El Teorema de Representación

Objetivo: Enunciar el Teorema de Representación, definir dirección, dirección extrema y calcular la solución óptima de los ejemplos 2.1 y 2.2.

Hemos graficado problemas de programación lineal en $\mathbb{R}^2$(aunque también se puede hacer en $\mathbb{R}^3$) para encontrar la región S. Si ésta existe, tiene un punto o una infinidad de ellos, los cuales tendríamos que evaluar en la función objetivo para determinar la mejor solución, pero esto no siempre es posible.

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(0,4) + \lambda_3(3,7) + \lambda_4(10,0) \qquad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$$

S es un conjunto cerrado y acotado entonces la función objetivo alcanza su máximo (o mínimo) en un punto del conjunto, *ie.* $\exists\ x^* \in S$ tal que $z(x^*) = -x_1^* - 3x_2^*$ es mínimo

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) &= (3\lambda_3 + 10\lambda_4, 4\lambda_2 + 7\lambda_3) \\
z(x) &= -(3\lambda_3 + 10\lambda_4) - 3(4\lambda_2 + 7\lambda_3) \\
z(x) &= \quad -3\lambda_3 - 10\lambda_4 - 12\lambda_2 - 21\lambda_3 \\
z(x) &= \qquad\qquad -24\lambda_3 - 10\lambda_4 - 12\lambda_2
\end{aligned}$$

El problema se transformó en :

$$Min\ z = -24\lambda_3 - 10\lambda_4 - 12\lambda_2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$
$$\lambda_i \geq 0$$

Nos conviene aumentar el valor de λ_3, despejando $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4$ y sustituyendo en la Función Objetivo obtenemos:

$$Min\ z = -24 + 24\lambda_1 + 24\lambda_2 + 24\lambda_4 - 10\lambda_4 - 12\lambda_2$$
$$Min\ z = \quad -24 + 24\lambda_1 + 12\lambda_2 + 14\lambda_4$$

Si las variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ son positivas la función objetivo aumenta, como el objetivo es minimizar, entonces $\lambda_1, \lambda_2\ y\ \lambda_4$ deberán tomar su valor mínimo

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0 \rightarrow \lambda_3 = 1$

$\therefore\ x^* = (3, 7) \qquad z(x^*) = -24$

¿Qué pasa con el ejemplo ?
El conjunto S es cerrado pero no es acotado entonces ¿Cómo demostramos que existe el óptimo?
$Min\ z = x_1 + 2x_2$

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \rightarrow z = x_1 + 2x_2 \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \geq 0$$

$\therefore$ z es acotada inferiormente, como el objetivo es minimizar entonces existe el mínimo.

$(x_1, x_2) = \lambda_1(0, 5) + \lambda_2(0, 3) + \lambda_3(4/3, 1) + \mu_1(2, 1) + \mu_2(1, 0)$

$(x_1, x_2) = (4/3\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_2, 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1)$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$

Sustituimos en la función objetivo

$$Min\ z = \frac{4\lambda_3}{3} + 2\mu_1 + \mu_2 + 10\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\mu_1$$
$$Min\ z = \qquad 10\lambda_1 + 6\lambda_2 + \frac{10\lambda_3}{3} + 4\mu_1 + \mu_2$$

Reformulamos el problema

$$Min\ z = 10\lambda_1 + 6\lambda_2 + \frac{10\lambda_3}{3} + 4\mu_1 + \mu_2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1, \lambda_2\lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Despejando λ_3 de la ecuación $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$
Sustituimos en z

$$z = 10\lambda_1 + 6\lambda_2 + \frac{10}{3} - \frac{10\lambda_1}{3} - \frac{10\lambda_2}{3} + 4\mu_1 + \mu_2$$
$$z = \frac{10}{3} + \frac{20\lambda_1}{3} + \frac{8\lambda_2}{3} + 4\mu_1 + \mu_2$$

Para minimizar la función $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$

$\therefore \lambda_3 = 1 \qquad x^* = (4/3, 1)$

En ambos problemas la solución óptima es un punto extremo, ¿Pero esto siempre sucede? ¿Qué pasa si se eligen otras direcciones?

Definición 3.1.1 *Sea S un conjunto convexo, un vector $d \neq 0$ es llamado dirección del conjunto si $\forall\ \overline{X} \in S$, $\left\{\overline{X} + \lambda d \quad \lambda > 0\right\}$ también está contenido en el conjunto.*

Existen una infinidad de direcciones en los conjunto no-acotados ya que si d es una dirección αd también lo es $\forall \alpha > 0$; para evitar la duplicación tomaremos $d_1 + d_2 + \cdot + d_n = 1$, es decir normalizaremos el vector d con la norma 1.
El conjunto de direcciones normalizadas tiene una infinidad de elementos. Definimos a continuación un criterio para la elección de direcciones.

Definición 3.1.2 *Una dirección extrema del conjunto, es una dirección del conjunto que no puede ser expresada como una combinación lineal positiva de otras dos direcciones del conjunto.*

Dos vectores d' y d" son distintos ó no equivalentes, si d' no puede ser representada como un múltiplo positivo de d"; cualquier dirección que no sea un múltiplo de d' y d" puede ser expresada como: $\lambda_1 d' + \lambda_2 d''\ \lambda_1, \lambda_2 > 0$

Ejemplo 3.1 *Encuentre las direcciones extremas del ejemplo 2.2.*

Sea d una dirección y $\overline{X} \in S \rightarrow \overline{X} + \lambda d \in S \ \ \forall \lambda > 0$

$$-x_1 + 2x_2 + \lambda(-d_1 + 2d_2) \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + \lambda(\ 3d_1 + 2d_2) \geq\ 6$$

$$x_2 + \lambda d_2 \geq\ 1$$

Pero $\overline{X} \in S$ entonces

$-d_1 + 2d_2 \leq 0$	*Es un nuevo problema de programación lineal.*
$3d_1 + 2d_2 \geq 0$	*Los puntos extremos de éste son las direcciones*
$d_2 \geq 0$	*extremas del ejemplo* 2,2.

Aumentamos la restricción $d_1 + d_2 = 1$

$-d_1 + 2d_2 \leq 0$	*Graficaremos el problema*
$3d_1 + 2d_2 \geq 0$	*utilizando Graph para*
$d_1 + \ d_2 = 1$	*encontrar los puntos*
$d_1, d_2 \geq 0$	*extremos.*

En la ventana de comandos de Graph introducimos las instrucciones:

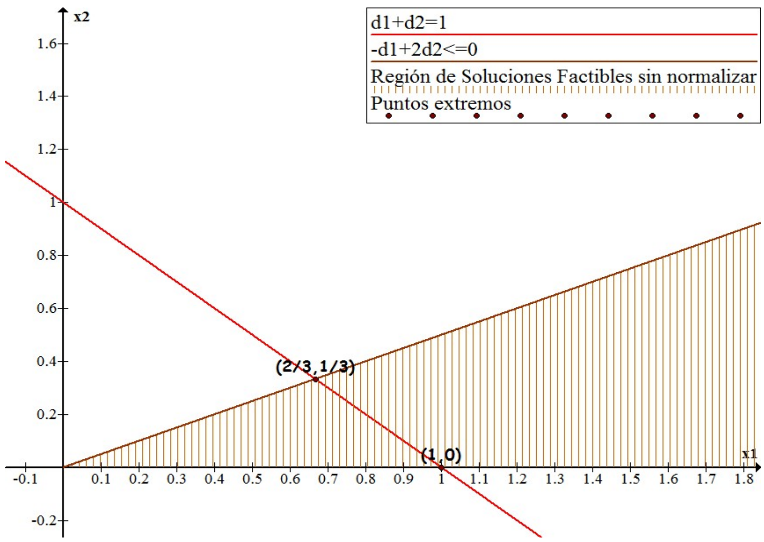
Insertar función
f(x)=1-x
Descripción:d1+d2=1

Insertar función
f(x)=x/2
Descripción:$-d1 + 2d_2 <= 0$

Insertar sombreado
Entre la función y el eje X.
Descripción:Región de Soluciones Factibles sin normalizar
Intervalo: Desde 0

$3d_1 + 2d_2 \geq 0$ es redundante, por esta razón no se graficó.

Estas instrucciones nos muestran la región de soluciones factibles del problema $Ad \leq 0$ y la recta $d1 + d_2 = 1$, los puntos de intersección son los puntos extremos, para encontrarlos seguimos las siguientes instrucciones:
Señalando la función f(x)=1-x seleccionamos en Evalúa
Ver en Intersección, aparece x=2/3 , f(x)=1/3
Ver en Eje X, se despliega x=1 f(x)=0
La figura que se obtiene es:



$\therefore$ Las direcciones extremas del conjunto son: $d' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ *y* $d'' = (1, 0)$

Definición 3.1.3 *El vector $\overline{X}$ es un punto extremo, si $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ y es la intersección de un conjunto de n hiperplanos de definición*[1] *linealmente independientes.*

Definición 3.1.4 *Dos puntos extremos son adyacentes si comparten (n-1) hiperplanos de definición.*

Podemos concluir que para obtener una dirección extrema de un ppl $Ax \leq b$ es necesario encontrar los puntos extremos del ppl:
$Ad \leq 0$ más la restricción $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$.

Ahora que conocemos los conceptos de punto extremos y direcciones extremas podemos enunciar un teorema muy importante en la Programación Lineal.

Teorema 3.1.1 ***Teorema de Representación***[2]
Sea $S = \{x : Ax \leq b \;\; x \geq 0\}$ un conjunto poliédrico no vacío[3].
Entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de elementos: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
El conjunto de direcciones extremas es vacío si y sólo si S es acotado. Si S es no-acotado entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y tiene un número finito de elementos $d_1, d_2, \ldots, d_l$.
Además $\overline{x}$ $\in$S si y sólo si puede ser representado como una combinación lineal convexa de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ más la combinación lineal no-negativa de $d_1, d_2, \ldots, d_l$ esto es:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \;\; \lambda_i, \mu_j \geq 0 \;\; \forall i, j$$

De este teorema se desprende que *si el óptimo existe se encuentra en un punto extremo.*

Teorema 3.1.2 *Si la región de soluciones factibles es acotada, entonces el valor máximo o mínimo de la función objetivo se alcanza en al menos un punto extremo.*

Teorema 3.1.3
- *Si la región de soluciones factibles es no-acotada en un ppl de maximización y $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que*

  $$f(\overline{x}) \leq M \qquad \forall \overline{x} \in \mathbb{R}$$

  la solución óptima existe y se encuentra en al menos un punto extremo.

[1] Un hiperplano es de definición si éste define la región de soluciones factibles.
[2] La demostración del Teorema se incluye en el Apéndice A.
[3] En la página 71 se muestra como todo ppl puede tener esa forma.

- *Si la región de soluciones factibles es no-acotada en un ppl de minimización y* $\exists M \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$g(\overline{x}) \geq M \qquad \forall \overline{x} \in \mathbb{R}$$

entonces existe un punto extremo óptimo.

3.2. El Método Geométrico

Objetivo Describir el Método Geométrico y calcular los puntos extremos de un ppl usando Matlab.
No todos los ppl se pueden graficar para encontrar los puntos extremos, así que tenemos que mostrar otra forma de identificarlos.

Ejemplo 3.2 *Encuentre todos los puntos extremos del siguiente problema:*

$$\begin{aligned} Max\ z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + \ x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos las restricciones de no negatividad por (-1) para que todas sean de menor o igual y así realizar algunas comparaciones en las posteriores líneas de código.

$$\begin{aligned} Max\ z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &\leq 5 \\ -x_1 + \ x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 &\leq 6 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$n = 3,\ Los\ hiperplanos\ de\ definición\ son:$$

$$\begin{aligned} H_1:\ x_1 + \ x_2 + x_3 = 5, &\qquad H_2: -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ H_3: 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 &\qquad H_4: -x_1 = 0 \\ H_5: -x_2 = 0, &\qquad H_6: -x_3 = 0 \end{aligned}$$

Tenemos 6 hiperplanos y tres variables, el número de intersecciones es:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Existen a lo más 20 puntos extremos dados por las intersecciones de los Hi_s. Auxiliándonos de Matlab analicemos como encontrar las combinaciones de 6 en 3.
Sean $c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $b = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $a = \{3, 4, 5, 6\}$ los conjuntos de los cuales tomamos 1 elemento para formar el conjunto $\{a,\ b,\ c\}$ con $b \geq c$ y $a \geq b$, decimos entonces que $\{a,\ b,\ c\}$ es una combinación, al hacerlo de todas las formas posibles obtendremos las combinaciones de 6 en 3 .

La estructura **"for"** ejecuta una instrucción o conjunto de instrucciones un número específico de veces.
Tiene la forma:
for "variable"="valor inicial" : "valor final"
instrucción 1
⋮
instrucción 1
end

Así aseguramos que a,b,c toman valores en su conjunto con b>c, a>b.

Tenemos que movernos en tres espacios, los correspondientes a,b y c.

$$\begin{array}{ll} c & va\ del\ 1\ al\ 6 \\ b & de\ c+1\ al\ 6 \\ a & de\ b+1\ al\ 6 \end{array}$$

Escribiremos las combinaciones con la estructura de un vector, por ejemplo: combinación=$[1, 2, 3]$.

$\gg for\ c = 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ b = c + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ a = b + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg combinacion = [a, b, c] \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$

Introduzca las líneas anteriores en Matlab y observará que aparecen las 20 combinaciones de 6 en 3, sin embargo nuestro problema principal es calcular las intersecciones de los hiperplanos, por ejemplo:
combinación=[1,2,3]$\rightarrow H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b1}$$

$$X = B^{-1} * b1 \qquad si\ el\ determinante(B) \neq 0$$

Dada una combinación, podemos introducir la matriz B y el vector b1 para realizar el cálculo, pero no es necesario hacerlo en cada iteración, escribamos el problema en forma matricial.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{d}$$

En la sección 1.3 se muestra que H(i,:) nos proporciona el renglón i-ésimo de H.

Para la combinación=[a,b,c], la matriz asociada es B=[H(a,:);H(b,:);H(c,:)] y b1=[d(a);d(b);d(c)].
Regresemos a la ventana de comandos de Matlab

$\gg H = [1\ 1\ 1; -1\ 1\ 2; 2\ \ -3\ 1; -1\ 0\ 0; 0\ \ -1\ 0; 0\ 0\ \ -1]; \hookleftarrow$
$\gg d = [5; 4; 6; 0; 0; 0]; \hookleftarrow$
$\gg for\ c = 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ b = c + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ a = b + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg combinacion = [a, b, c] \hookleftarrow$
$\gg B = [H(a, :); H(b, :); H(c, :)] \hookleftarrow$
$\gg b1 = [d(a); d(b); d(c)] \hookleftarrow$
$\gg if(det(B) \backsim= 0) \hookleftarrow$
$\gg X = inv(B) * b1 \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$

Utilizando el código anterior podemos encontrar todas las intersecciones que existen; no todas ellas corresponden a puntos extremos ya que podrían encontrarse fuera de la región S, debemos verificar cumpla con las restricciones[4] *ie.* $HX \leq d$.

Definamos dos funciones

- **fprintf**$('texto')$ despliega en la pantalla el texto que aparezca entre comillas

[4] Es el formato que tiene el problema en la página 64.

- **if** es una función condicional de la forma:
  if expresión
  enunciados
  elseif expresión
  enunciados
  else
  enunciados
  end

En nuestro código la condición está dada por $HX \leq d \rightarrow X$ es un punto extremo, en caso contrario X no es un punto extremo.
Regresando a la ventana de comandos[5]

$\gg H = [1\ 1\ 1; -1\ 1\ 2; 2\ \ -3\ 1; -1\ 0\ 0; 0\ \ -1\ 0; 0\ 0\ \ -1]; \hookleftarrow$
$\gg d = [5; 4; 6; 0; 0; 0]; \hookleftarrow$
$\gg for\ c = 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ b = c + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg for\ a = b + 1 : 6 \hookleftarrow$
$\gg combinacion = [a, b, c] \hookleftarrow$
$\gg B = [H(a, :); H(b, :); H(c, :)]\,; \hookleftarrow$
$\gg b1 = [d(a); d(b); d(c)]\,; \hookleftarrow$
$\gg if(det(B) \backsim= 0) \hookleftarrow$
$\gg X = inv(B) * b1 \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg if(H * X <= 0) \hookleftarrow$
$\gg fprintf('Es\ un\ punto\ extremo \diagdown n') \hookleftarrow$
$\gg else \hookleftarrow$
$\gg fprintf('No\ es\ un\ punto\ extremo \diagdown n') \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$
$\gg end \hookleftarrow$

Note que la forma en que escribimos H nos permite asegurar que el problema tiene la estructura $HX \leq d$.

$\diagdown$ n es el equivalente al salto de línea.

Al introducir las instrucciones anteriores Matlab despliega:

$combinacion = [3\ 2\ 1]$

$$x = \begin{pmatrix} 25/23 \\ 3/13 \\ 37/13 \end{pmatrix}$$

Es un punto extremo

[5] En el apéndice B aparece este código con la estructura de una función.

$combinacion = [4\ 2\ 1]$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

No es un punto extremo

$\vdots$

De donde podemos concluir que:

$$\{(25/13, 3/13, 37/13), (1/2, 9/2, 0), (0, 0, 2), (0, 4, 0), (3, 0, 0), (0, 0, 0)\}$$

son los puntos extremos del conjunto S.

Utilizando los teoremas 3.1.2 y 3.1.3 resolvemos el problema

$$0 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \rightarrow 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 5$$

Si cada una de las variables está acotada, entonces la región S está acotada; por lo tanto existe el máximo y se alcanza en al menos en un punto extremo.

Punto Extremo (x_1, x_2, x_3)	**Función Objetivo** $-x_1 + 3x_2 + 5x_3$
$(25/13, 3/13, 37/13)$	$-25/13 + 3(3/13) + 5(37/13) = 13$
$(1/2, 9/2, 0)$	$-1/2 + 3(9/2) + 5 \cdot 0 = 13$
$(0, 0, 2)$	$-0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$
$(3, 0, 0)$	$-3 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = -3$
$(0, 0, 0)$	$-0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$\therefore$Los puntos extremos (25/13,3/13,37/13) y (1/2, 9/2,0) son óptimos, por que su valor, 13, de la función objetivo es el mayor posible.

La forma de resolver el ejemplo anterior es un método llamado

"El Método Geométrico" que consiste :

1. Encontrar todos los puntos extremos del conjunto, la cota para el número de candidatos está dada por:

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \qquad k = \#de\ restricciones \quad n = \#de\ variables$$

2. Aplicar los Teoremas 3.1.2 o 3.1.3

3. Si el óptimo existe evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos extremos e identificar la solución óptima.

3.3. La Forma Canónica y la Estándar

Objetivo: Definir la forma canónica y la estándar de un ppl y analizar algunas propiedades de la región de soluciones factibles como conjunto convexo.

Para resolver un ppl se utilizan algoritmos, sin embargo todos parten de que el ppl esté expresado en cualquiera de las 2 formas siguientes:

- Forma Canónica de un ppl

$$\begin{array}{ccc} Max\ z = cx & \qquad & Min\ z = cx \\ Ax \leq b & & Ax \geq b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

- Forma Estándar de un ppl

$$\begin{array}{ccc} Max\ z = cx & \qquad & Min\ z = cx \\ Ax = b & & Ax = b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

Todo ppl se puede transformar a cualquiera de estas formas mediante operaciones sencillas. Suponemos un problema de minimización que deseamos llevar a la forma canónica.

- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ multiplicamos por -1
  $- a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n \geq -b$

- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ tenemos un hiperplano definido por la intersección de dos semiespacios:

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq \ b \ \text{ y } \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \rightarrow \\ -a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n \geq -b \text{ y } \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \end{array}$$

- Si $x_i \leq 0$ hacemos un cambio de variable $x_i' = -x_i \rightarrow x_i' \geq 0$

- Si x_i no tiene restricción de signo (SRS ó NR) hacemos un cambio de variable $x_i = x_i' - x_i''$ $\ con\ x_i', x_i'' \geq 0$, por que:

$$\begin{array}{cc} x_i' > x_i'' & x_i \in \mathbb{R}^+ \\ x_i' = x_i'' & x_i = 0 \\ x_i' < x_i'' & x_i \in \mathbb{R}^- \end{array}$$

- Si la función objetivo esta expresada como Max z=cx, multiplicamos por (-1)$\rightarrow$ Min -z=-cx

Ejemplo 3.3 *Escriba en forma canónica de minimización el siguiente ppl.*

$$\begin{aligned}
Max\ z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 0 \cdot x_4 - x_5 & \\
x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 &\geq 3 \\
0 \cdot x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 &= -1 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 - x_5 &\leq 8 \\
x_1, x_3, x_5 &\geq 0 \\
x_2 \leq 0 \quad x_4 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- $2x_3 - x_5 \leq 8$ se sustituye por $-2x_3 + x_5 \geq -8$
- $x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1$ *y* $x_2 + 2x_3 + x_4 \leq -1$ cambiamos la segunda desigualdad por $-x_2 - 2x_3 - x_4 \geq 1$.
- Se sustituye en las desigualdades x_2'=-x_2 $\qquad x_4 = x_4' - x_4''$
- Max z=$4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5$=Min -z=$-4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_5$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}
Min\ z = -4x_1 - 2x_2' - 7x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + x_5 & \\
x_1 + x_2' + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + 0 \cdot x_5 &\geq 3 \\
0 \cdot x_1 - x_2' + 2x_3 + x_4' - x_4'' + 0 \cdot x_5 &\geq -1 \\
0 \cdot x_1 + x_2' - 2x_3 - x_4' + x_4'' + 0 \cdot x_5 &\geq 1 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + x_5 &\geq -8 \\
x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

En forma matricial

$$Min\ z = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_3 \\ x_4' \\ x_4'' \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$X^T = (x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5) \geq 0$$

Para llevar un ppl a la forma estándar de minimización:

- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ sumamos una variable[6] $x_{n+k} \geq 0$ $\rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+k} = b$
- Si $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b$ restamos una variable $x_{n+k} \geq 0$ $\rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - x_{n+k} = b$
- Si $x_i \leq 0$ cambiamos la variable por $x_i' = -x_i$
- Si $x_i \in \mathbb{R}$ $x_i = x_i' - x_i''$ con $x_i', x_i'' \geq 0$
- Si la función objetivo es Max cx sustituimos por Min -cx

Ejemplo 3.4 *Escriba el ppl del ejemplo 3.3 en forma estándar de minimización.*

- Sustituimos $x_1 - x_2 \geq 3$ por $x_1 - x_2 - x_6 = 3$
- Sustituimos $2x_3 - x_5 \leq 8$ por $2x_3 - x_5 + x_7 = 8$
- Cambiamos $x_2 \leq 0$ por $x_2' = -x_2 \geq 0$
- Cambiamos $x_4 \in \mathbb{R}$ por $x_4 = x_4' - x_4''$
- Max z=$4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5$=Min -z=$-4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_5$

Reescribiendo:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
Min\ z = & -4x_1 + & 2x_2' - & 7x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + & x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 & & \\
& x_1 + & x_2' + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + 0 \cdot x_5 & - & x_6 + 0 \cdot x_7 = & 3 \\
& 0 \cdot x_1 - & x_2' + & 2x_3 + & x_4' - & x_4'' + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = & -1 \\
& x_1 + 0 \cdot x_2 + & 2x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' - & x_5 + 0 \cdot x_6 + & x_7 = & 8 \\
& & & & x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6, x_7 \geq & 0
\end{array}
$$

En forma matricial

$$
Min\ z = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_3 \\ x_4' \\ x_4'' \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

$$
X^T = (x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6, x_7) \geq 0
$$

[6] A la que llamaremos variable de holgura.

Proposición 3.3.1 *La región de soluciones factibles S de un ppl es un conjunto convexo.*

Suponemos un ppl canónico de maximización

Sean $\overline{X}, \overline{Y} \in S$. Por definición $A\overline{X} \leq b, \overline{X} \geq 0$ y $A\overline{Y} \leq b,\ \overline{Y} \geq 0$

Sea $\overline{Z} = \lambda\overline{X} + (1-\lambda)\overline{Y}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ una combinación lineal convexa de $\overline{X}$ *y* $\overline{Y}$.

Se demostrará que $\overline{Z} \in S$, es decir que todo punto en el segmento de recta que une $\overline{X}$ *y* $\overline{Y}$ está contenido en S.

$$\left.\begin{array}{rcr} \overline{X} \geq 0 & \rightarrow & \lambda\overline{X} \geq 0 \\ \overline{Y} \geq 0 & \rightarrow & (1-\lambda)\overline{Y} \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda\overline{X} + (1-\lambda)\overline{Y} \geq 0$$

$A\overline{X} \leq b$ $\qquad$ $A\overline{Y} \leq b$

$\lambda A\overline{X} \leq \lambda b$ $\qquad$ $(1-\lambda)A\overline{Y} \leq (1-\lambda)b$

Sumando ambas desigualdades

$\lambda A\overline{X}\ +\ (1-\lambda)A\overline{Y} \leq \lambda b + (1-\lambda)b$

$A(\lambda\overline{X}) + A(1-\lambda)\overline{Y} \leq b$

$A(\lambda\overline{X}\ +\ (1-\lambda)\overline{Y}) \leq b$

$A\overline{Z} \leq b$

$\therefore A\overline{Z} \leq b \quad \overline{Z} \geq 0 \qquad \therefore \overline{Z} \in S$

$\therefore S$ es un conjunto convexo

Proposición 3.3.2 *Un ppl tiene cero, una o una infinidad de soluciones óptimas.*

- Si S=$\emptyset$ no existe óptimo debido a que no hay región factible,*ie*. no existe una solución.
- Si S$\neq \emptyset$ pero la función objetivo no está acotada, no existe el óptimo finito pues $Z \rightarrow \infty$
- Si S$\neq \emptyset$ con Z acotada existe el óptimo y se encuentra en un punto extremo
    1. Existe un único óptimo.
    2. Existen al menos 2 puntos óptimos $\overline{X}, \overline{Y}$ tal que $C\overline{X} = C\overline{Y} = Z^*$.

       PD $\overline{Z} = \lambda\overline{X} + (1-\lambda)\overline{Y}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ es una solución óptima.

       $C\overline{Z} = C(\lambda\overline{X}+(1-\lambda)\overline{Y}) = \lambda C\overline{X}+(1-\lambda)C\overline{Y} = \lambda Z^*+(1-\lambda)Z^* = Z^*$

$\therefore \overline{Z}$ es óptima y por la proposición 3.3.1 $\overline{Z} \in S$

$\therefore$ Si existen al menos 2 soluciones óptimas, existen una infinidad de soluciones óptimas en la recta que los une.

$\therefore$Un ppl tiene cero, una o una infinidad de soluciones óptimas.

Ejemplo 3.5 *Escriba el conjunto de soluciones óptimas del ejemplo 3.2*

$\overline{X} = (25/13, 3/13, 37/13)$ *y* $\overline{Y} = (1/2, 9/2, 0)$ son soluciones óptimas del ppl, por la proposición 3.3.2.

$$\overline{Z} = \lambda(25/13, 3/13, 37/13) + (1-\lambda)(1/2, 9/2, 0) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

es una solución óptima de problema.

$$\mathcal{C} = \left\{\overline{Z} \in \mathbb{R}^3 | \overline{Z} = \lambda(25/13, 3/13, 37/13) + (1-\lambda)(1/2, 9/2, 0), 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

es el conjunto de óptimos del problema. ¿Por qué existe una infinidad de óptimos en este problema?

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 & \rightarrow & -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ \cline{3-3} z & = & -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 13 \end{array}$$

La función objetivo es una combinación lineal positiva de dos restricciones, además nuestro objetivo es maximizar por lo que toma su valor máximo en 13, si hubieramos deseado minimizar, el óptimo sería x=(0,0) y no existirían soluciones infinitas.

3.4. El Método Gráfico

Objetivo Describir el Método Gráfico y utilizar Graph para la aplicación de este método.

Definición 3.4.1 *El gradiente de un campo escalar en un punto es un vector definido como el único que permite hallar la derivada direccional en cualquier dirección como:*

$$\frac{\delta\phi}{\delta n} = (grad\phi) * \hat{n} = \bigtriangledown\phi\hat{n}, \qquad \textit{donde } \hat{n} \textit{ es un vector unitario.}$$

Se verifica que el gradiente:

- Es ortogonal[7] a las superficies equiescalares definidas por ϕ=cte.

[7] Dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$, con el producto interno usual $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = 0$

- Apunta en la dirección en la que la derivada direccional es *máxima*

Los ppl se limitan a funciones del tipo z=cx
$\therefore \bigtriangledown z = c$ e indica la dirección de crecimiento.
$\therefore$ c es ortogonal a las superficies definidas por z=cte.
De esto deducimos que la dirección de crecimiento de la función objetivo es señalada por el gradiente. Con esta información contamos con otro método de solución para problemas en $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$.

Método Gráfico

1. Dibuje la región de soluciones factibles.
2. Identifique los puntos extremos.
3. Dibuje Z=cte para diferentes constantes (en dirección $\bigtriangledown_{max}$ ó$-\bigtriangledown_{min}$) mientras que la superficie definida tenga intersección con S.
4. Encuentre si existe él o los puntos donde se intersecta la última superficie para la cual se tienen los valores Z_{max} *o* Z_{min}. Si no existen y $S \neq \emptyset$ concluya que el problema es no-acotado pues $Z_{max} \to \infty$(ó $Z_{min} \to -\infty$).

Ejemplo 3.6 *Resuelva por el Método Gráfico el ejemplo 2.2 utilizando Graph para las siguientes funciones objetivo.*

$a)Min\ z = x_1 + 2x_2 \qquad b)Max\ z = -2x_1 + 4x_2$

$c)Min\ z = 3x_1 \qquad d)Max\ z = x_1 - 3x_2$

Paso 1
En el ambiente de trabajo de Graph realizamos las siguientes instrucciones para dibujar S:

Insertar relación $\hookleftarrow$

Relación:-x+2y<=10 and 3x+2y>=6

Condiciones: x>=0 and y>=1

Descripción:-x1+x2<=10 , 3x1+2x2>=6, x1>=0,x2>=1

Paso 2
Identificamos los puntos extremos, para este ejemplo en particular es fácil ubicarlos si utilizamos la cuadrícula (o bien los señalamos).
Para visualizar la cuadrícula damos click en Ejes:
Eje X Ver cuadrícula
Eje Y Ver cuadrícula
Los puntos extremos son $\{(0,3),(0,5)\ y\ (4/3,1)\}$

Paso 3

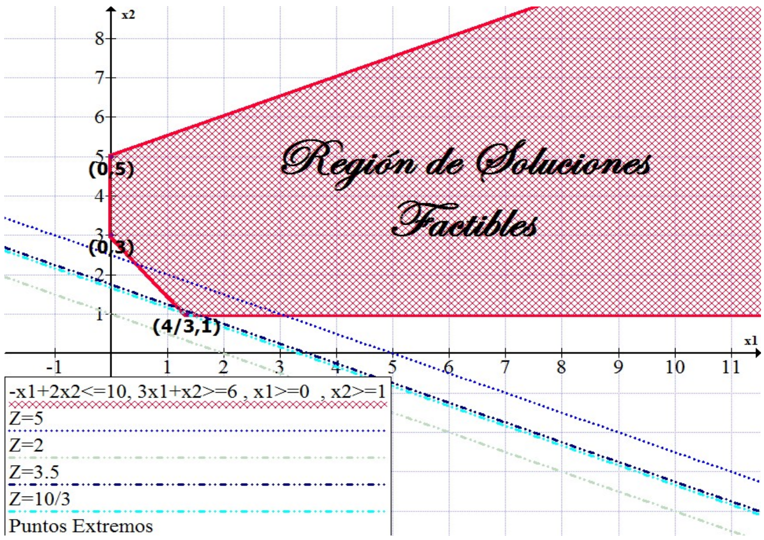
a) $Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow x_2 = (Z - x_1)/2$ Damos valores a Z

INS
f(x)=(5-x)/2
Descripción Z=5

INS
f(x)=(2-x)/2
Descripción Z=2 Cae fuera de S intentamos con $Z > 2$

INS
f(x)=(3.5-x)/2
Descripción Z=3.5 Disminuimos un poco Z

INS
f(x)=(10/3-x)/2
Descripción Z=10/3



Encontramos el óptimo único $x^* = (\frac{4}{3}, 1)$ $cx^* = \frac{10}{3}$.

Paso 3

b) $Z = -2x_1 + 4x_2 \rightarrow x_2 = (Z + 2x_1)/4$ Damos valores a Z

INS
f(x)=(4+2x)/4
Descripción Z=4

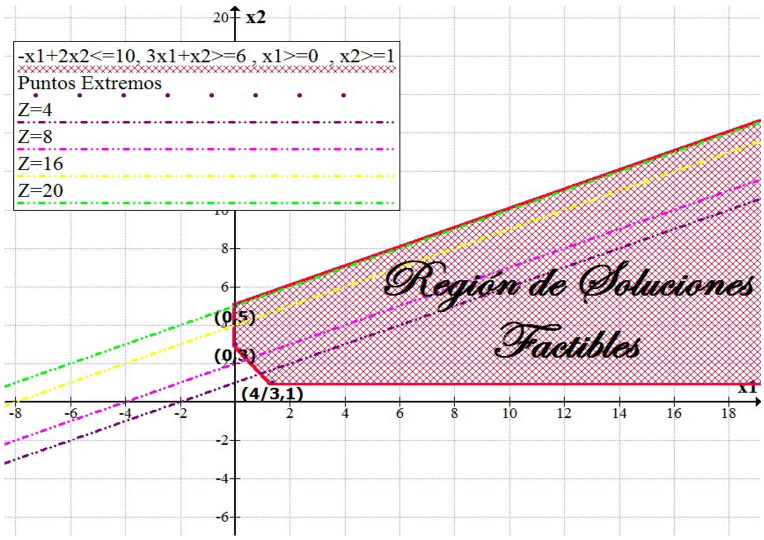
INS
f(x)=(8+2x)/4
Descripción Z=8

INS
f(x)=(16+2x)/4
Descripción Z=16

INS
f(x)=(20+2x)/4
Descripción Z=20

El óptimo es un rayo que comienza en $x^* = (0, 5)$ y sigue sobre la recta $-x_1 + x_2 = 10$.

$$\therefore \mathcal{C} = \left\{ \overline{X} \in \mathbb{R}^2 | \overline{X} = (0, 5) + \lambda(2/3, 1/3), \quad \lambda \geq 0 \right\}$$



Paso 3

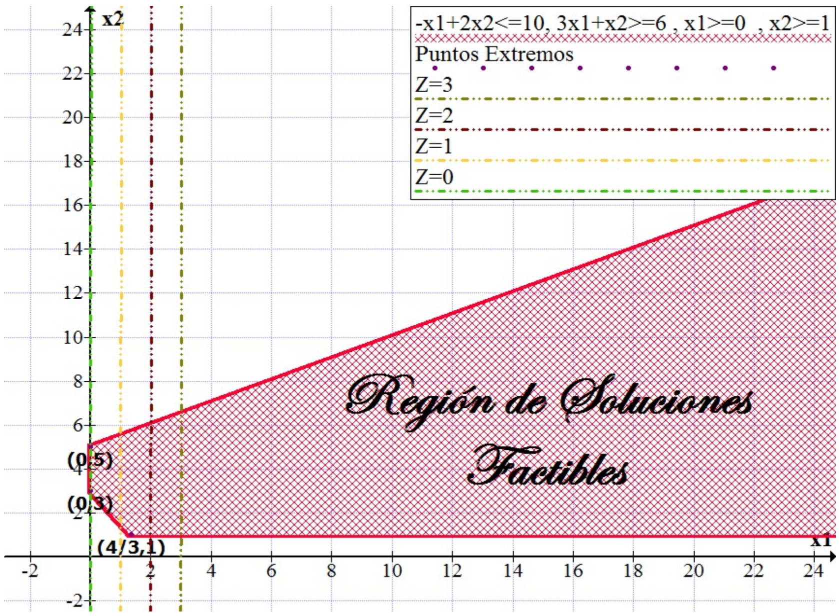
c) $Z = 3x_1 \rightarrow x_1 = Z/3$ pero esto no es una función, así que utilizamos un truco, para dibujar una línea vertical, *ie.* $x_1 = k$ definimos f(x)=1000(x-k), donde f(k)=0 y la pendiente es muy grande por esta razón en el programa parece una línea vertical.

INS
f(x)=1000(x-3)
Descripción Z=3

INS
f(x)=1000(x-2)
Descripción Z=2

INS
f(x)=1000(x-1)
Descripción Z=1

INS
f(x)=1000x
Descripción Z=0



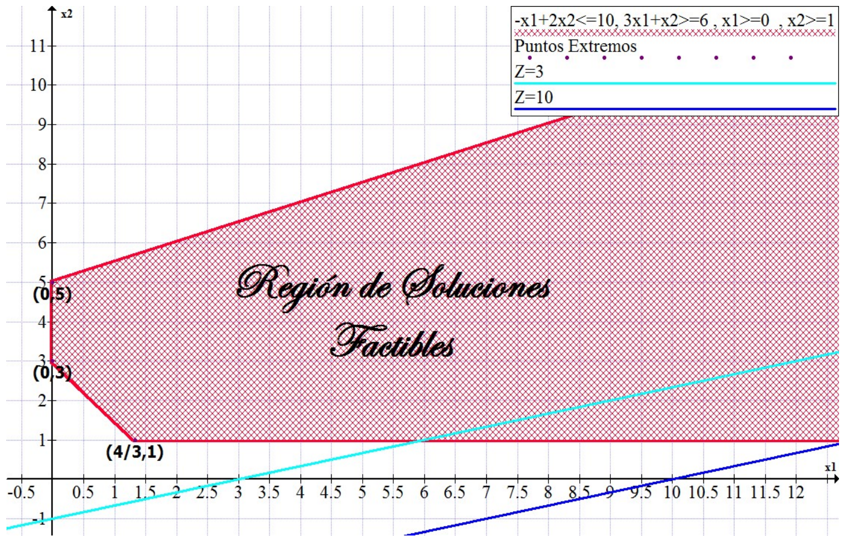
El óptimo es un segmento de recta que comienza en (0,5) y termina en (0,3).

$$\therefore \mathcal{C} = \left\{ \overline{X} \in \mathbb{R}^2 | \overline{X} = \lambda(0,5) + (1-\lambda)(0,3), \quad 0 \le \lambda \le 1 \right\}$$

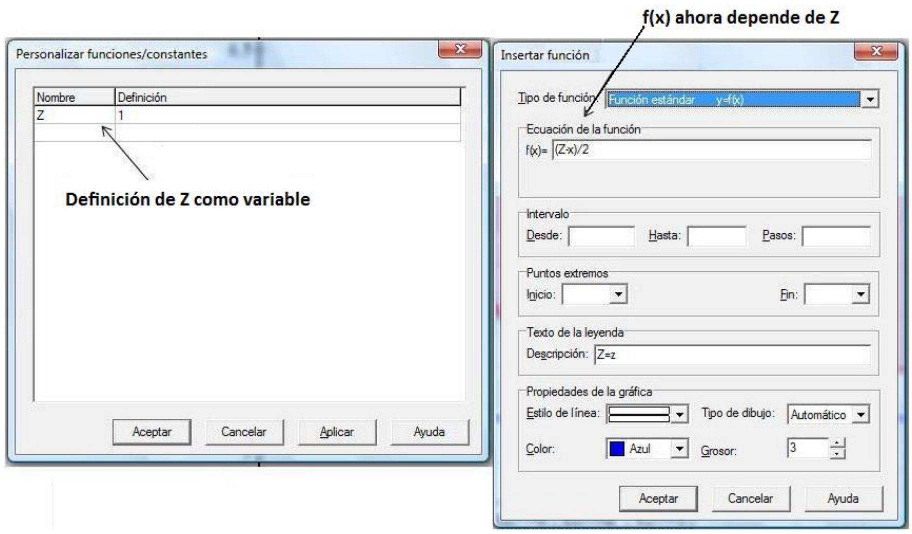
Paso 3

d) $Z = x_1 - 3x_2 \rightarrow x_2 = (x_1 - Z)/3$
INS
f(x)=(x-3)/3
Descripción Z=3

INS
f(x)=(x-10)/3
Descripción Z=10
No hay ningún hiperplano que acote a la función objetivo.
∴El problema es no acotado.

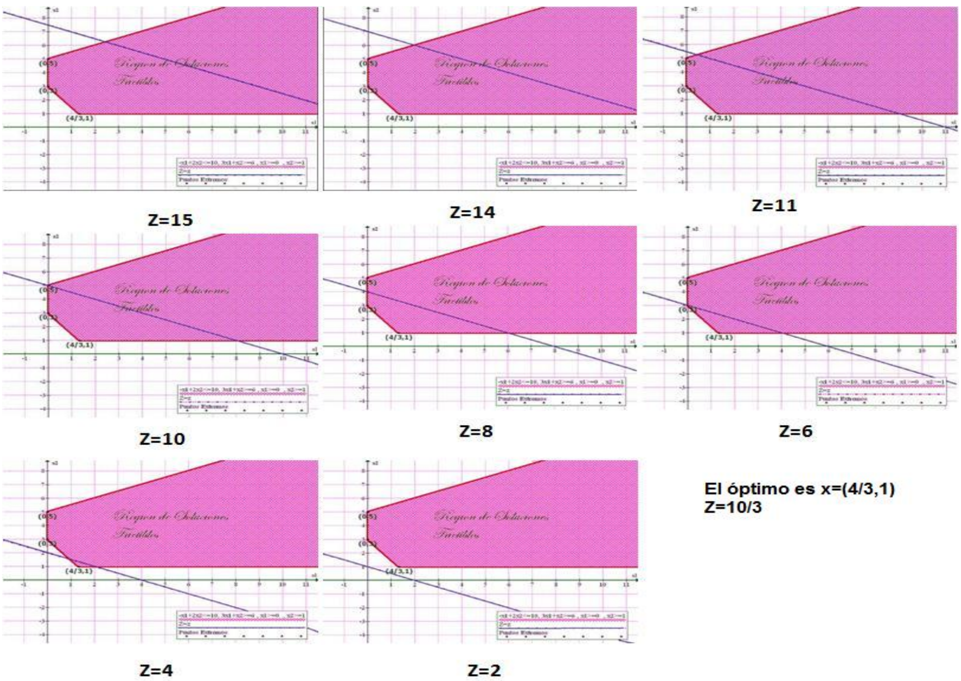


Otra herramienta de Graph que podemos usar para resolver problemas por el Método Gráfico es la opción de *animación*, la cual genera un archivo de video que reproduce los movimientos de la función objetivo, para una serie de valores dados.
Primero tenemos que definir a Z como una variable que pueda ser utilizada en las funciones f(x).



Ahora podemos activar en el menú **Calcular** la opción *Animación*, se elige el intervalo de valores para Z y también el tamaño de los pasos en el intervalo.

El resultado es un archivo de video que muestra los movimientos de la función objetivo en el intervalo dado. De esta forma también es posible encontrar el óptimo.



Las imágenes muestran la solución al ejercicio 3.6 a).

3.5. Ejercicios

Objetivo: Repasar la introducción de instrucciones en Matlab para la resolución de problemas, utilizar Graph para la graficación y acercar al lector a la forma de solución de algunos problemas.

1. Resuelva el problema por el Método Geométrico. Utilice para esto el código *combinación3(H,d)* que aparece en la página 263.

$$Min\ z = -x_1 - x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 &\leq 5 \\ 5x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Utilizando el Método Geométrico resuelva

$$Max\ z = 3x_1 + 0 \cdot x_2 + 3x_3 - 3x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 &= 3 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva gráficamente el ppl

$$\begin{aligned} Min\ z &= -x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva gráficamente el ppl

$$\begin{aligned} Max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Si S es no-acotada encuentre sus direcciones extremas.

5. Escriba el siguiente problema en forma canónica de maximización y estándar de minimización.

$$
\begin{aligned}
Min\ z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 & \\
x_1 - x_2 \geq & \ 3 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 = & -1 \\
2x_3 - x_5/4 \leq & \ 8 \\
x_1, x_3, x_5 \geq & \ 0 \\
x_2 \leq 0 \qquad x_4 \in & \ \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

6. Lleve a la forma canónica

$$
\begin{aligned}
Min\ z = x_1 + x_2 & \\
|x_1 - 3| + |x_2| \leq & \ 3/2 \\
0 \leq x_1 \leq & \ \ 2 \\
0 \leq x_2 \leq & \ \ 1
\end{aligned}
$$

7. Sin graficar, establezca si las siguientes restricciones determinan una región acotada o no acotada.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 \leq 4 \\
\frac{2x_1}{5} + x_2 \geq 2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Justifique su respuesta.

Capítulo 4

El Algoritmo Simplex

Objetivos: Mostrar diferentes enfoques del algoritmo Simplex partiendo de las nociones más elementales a aquellas que son más prácticas, para que el lector conozca la esencia del algoritmo Simplex y el concepto de cada uno de sus pasos.
Construir programas en Matlab para cada algoritmo con la finalidad de realizar los cálculos en menor tiempo.

4.1. El Cálculo de las Bases

Objetivo: Definir base factible para un ppl y su relación con los puntos extremos.

Recordemos que una base de E^n es un conjunto de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ que generan E^n y si cualquiera de ellos es removido los restantes no generan E^n.
Todo ppl de la forma

$$\begin{aligned} Min\ z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Se puede escribir como

Con B una matriz cuadrada de $m \times m$

$$\begin{aligned} Min\ z &= c_B x_B + c_N x_N \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0 \end{aligned}$$

Decimos que B es una base factible si

- B es una base
- $B^{-1}b \geq 0$

Ejemplo 4.1 *Dado el ppl*

$$
\begin{aligned}
Max\ z &= 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
3x_1 + 2x_2 + \quad x_3 + 0 \cdot x_4 &= 9 \\
4x_1 - \quad x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad x_4 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Construya todas las bases posibles y diga si son o no factibles.

$$
1) \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}
$$

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}
$$

$$
x_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}
$$

$\therefore$B es una base factible

$$
2) \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}
$$

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 21/4 \end{bmatrix}
$$

$$
x_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/4 \\ 21/4 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 11/4 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}
$$

$\therefore$B es una base factible

$$
3) \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}
$$

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

$$
x_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -11/3 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}
$$

$\therefore$B es una base, pero no es factible

$$4)\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B}+\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_N}=\underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad B^{-1}b=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$x_B=\underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 19 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b}-\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}$$

$\therefore$B es una base, pero no es factible

$$5)\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_B}+\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N}=\underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix},\quad B^{-1}b=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9/2 \\ 19/2 \end{bmatrix}$$

$$x_B=\underbrace{\begin{bmatrix} 9/2 \\ 19/2 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b}-\underbrace{\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 11/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}$$

$\therefore$B es una base factible

$$6)\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_B}+\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_N}=\underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_B=\underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b}-\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{B^{-1}Nx_N}$$

$\therefore$B es una base factible

Recordemos que un punto extremo es la intersección de n hiperplanos de definición, al calcular para una base factible B, $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ estamos encontrando la intersección de m hiperplanos , si $m < n$ nos faltarían intersectar n-m hiperplanos de definición con los utilizados en B.
Si se verifica que se cumplen las restricciones principales, $Ax = b$, para el punto x entonces solo hace falta revisar si se cumplen las restricciones de no-negatividad $x \geq 0$.

Si $Ax = b \rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$,por lo que x_N tiene n-m variables y necesitamos intersectar n-m hiperplanos

$\therefore$Si $x_N = \overline{0}$ y B es factible $\rightarrow x_B$ es un punto extremo.[1]

Ejemplo 4.2 *Encuentre todos los puntos extremos generados por las bases factibles del ejemplo 4.1.*

$$1) \qquad x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$Si\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = (19/11, 21/11, 0, 0)$

$$2) \qquad x_B = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 21/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 11/4 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$Si\ x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 21/4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = (5/4, 0, 21/4, 0)$

$$3) \qquad x_B = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 19/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 11/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Si\ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 19/2 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = (0, 9/2, 0, 19/2)$

$$4) \qquad x_B = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Si\ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = (0, 0, 9, 5)$

$$\therefore \mathcal{X} = \{(19/11, 21/11, 0, 0), (5/4, 0, 21/4, 0), (0, 9/2, 0, 19/2), (0, 0, 5, 9)\}$$

Ejemplo 4.3 *En la base [x_1, x_2] del ejemplo anterior calcule los valores que puede tomar x_N tal que $x_B \geq 0$.*

[1] Ver en el Apéndice A en la página 252 la demostración de la equivalencia entre puntos extremos y bases factibles.

$$x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}$$

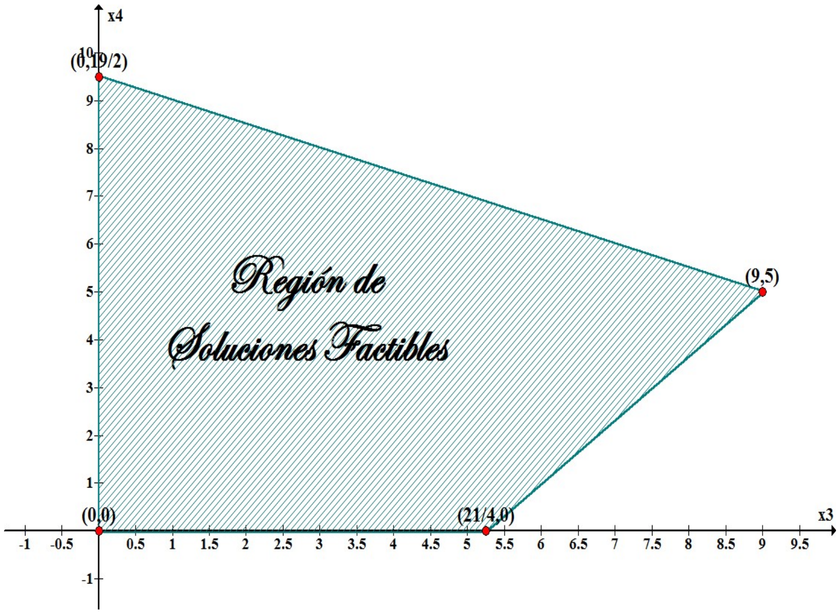
$$\begin{bmatrix} x_3/11 + 2x_4/11 \\ 4x_3/11 - 3x_4/11 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por 11 la desigualdad y tomando en cuenta que x_3, x_4 son no negativas por definición, el problema queda.

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_4 &\leq 19 \\ 4x_3 - 3x_4 &\leq 21 \\ x_3, x_4 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Los valores que pueden tomar x_3, x_4 son los puntos en la región de soluciones factibles del problema.

Graficamos la región de soluciones factibles para encontrar los puntos extremos del conjunto.



El conjunto de puntos $(x_3, x_4) \in S$ es infinito, por el Teorema de Representación todo punto en S se escribe como una combinación lineal convexa de los punto extremos, *ie*.

$$S = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^2 | \overline{x} = \left(\frac{21\lambda_3}{4} + 9\lambda_4, \frac{19\lambda_2}{2} + 5\lambda_4 \right), \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

Evaluando la base $[x_1, x_2]$ en los puntos extremos

$\mathcal{X}_1 = \{(0,0), (0,19/2), (9,5), (21/4,0)\}$

$$x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 19/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto al evaluar en los puntos extremos del problema encontramos los puntos extremos del ejemplo 4.1.

$\therefore$ Para encontrar todas las bases del ejemplo 4.1 podemos

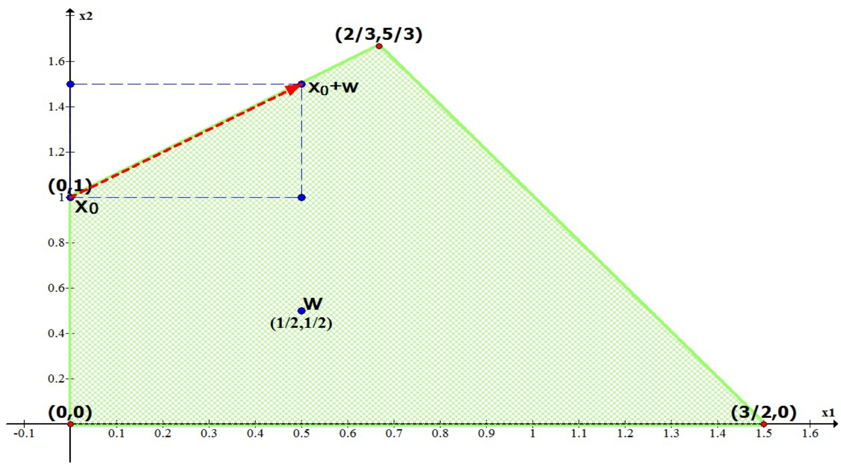
- Calcular $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ para alguna base factible.
- Encontrar los puntos extremos $\mathcal{X}_1$ del problema $B^{-1}Nx_N \leq B^{-1}b$, $x_N \geq 0$
- Evaluar $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\hat{x}$ con $\hat{x} \in \mathcal{X}_1$

Pero el hecho de resolver $B^{-1}Nx_N \leq B^{-1}b,\ x_N \geq 0$ para encontrar la solución de $Bx_B + Nx_N \leq b, x_B, x_N \geq 0$ podría generar demasiados cálculos, por ésta razón en la siguiente sección proponemos otra forma de encontrar el valor de $x_3,\ x_4$.

4.2. El Algoritmo Simplex Rudimentario

Objetivo: Describir el algoritmo Simplex Rudimentario, la construcción de sus pasos en búsqueda de la optimalidad y resumir éstos en un algoritmo.

Por el Teorema de Representación, el óptimo si existe se encuentra en al menos un punto extremo. Dado un punto extremo x_0 es posible encontrar un vector w tal que al sumarlo con x_0 éste se mueve en dirección del siguiente punto extremo; como se observa en la figura.



A continuación definimos la forma de encontrar el vector w dado x_0.

Definición 4.2.1 *Dada una base factible B de un ppl, definiremos una direccción de movimiento $\Delta_i x$ como:*

$$\Delta_i x_k = \begin{cases} \eta_k & Si\ x_k \in x_B \\ 1 & Si\ k = i \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

donde

$$\sum_{x_j \in B} a_j \eta_j = -a_i$$

Ejemplo 4.4 *Calcule $\Delta_3 x,\ \Delta_4 x$ para $x_B = [x_1, x_2]$ del ejemplo 4.1*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 19/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}}_{B^{-1}b} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1/11 & 2/11 \\ 4/11 & -3/11 \end{bmatrix}}_{B^{-1}N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x_N}$$

Para $\Delta_3 x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/11 \\ 4/11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/11 \\ -4/11 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Delta_3 x = (-1/11, -4/11, 1, 0))$

Para $\Delta_4 x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2/11 \\ -3/11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/11 \\ 3/11 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Delta_4 x = (-2/11, 3/11, 0, 1))$

Además, como $\Delta_3 x, \Delta_4 x$ son direcciones de movimiento que parten del punto (19/11,21/11,0,0), entonces existen $\lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tal que:

$$\{(19/11, 21/11, 0, 0) + \lambda_3(-1/11, -4/11, 1, 0)\} \subseteq S$$

$$\{(19/11, 21/11, 0, 0) + \lambda_4(-2/11, 3/11, 0, 1)\} \subseteq S$$

¿Cómo calculamos el valor máximo de λ_i?
Sea $\widetilde{x} = x + \lambda_i \Delta_i x$ con x un punto extremo, existe $\lambda_i \geq 0$ tal que $\widetilde{x} \in S$ y λ_i es máxima.

$$A\widetilde{x} = A(x + \lambda_i \Delta_i x) = Ax + \lambda_i A \Delta_i x = b$$
$$\widetilde{x} = x + \lambda_i \Delta_i x \geq 0 \leftrightarrow \lambda_i \Delta_i x \geq -x$$

- Si $\Delta_i x_k = 0$ λ_i toma cualquier valor en los reales positivos
- Si $\Delta_i x_k > 0 \rightarrow \lambda_i \geq -x_k/\Delta_i x_k$, por lo tanto $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$
- Si $\Delta_i x_k < 0 \rightarrow \lambda \leq -x_k/\Delta_i x_k$ en este caso el valor de λ_i se encuentra limitado y tenemos que tomar el menor valor para asegurarnos que se cumple la restricción para toda k.

$$\therefore \lambda_i = min\,\{-x_j/\Delta_i x_j : \Delta_j x_j < 0\}$$

Ejemplo 4.5 *Calcule λ_3 y λ_4 para las direcciones del ejercicios anterior, verifique además que si λ_i es máximo el punto $\widetilde{x}$ es un punto extremo.*

$$\lambda_3 = min\left\{\frac{19/11}{1/11}, \frac{21/11}{4/11}\right\} = min\,\{19, 21/4\} = 21/4$$

$$\therefore \widetilde{x} = (19/11, 21/11, 0, 0) + 21/4(-1/11, -4/11, 1, 0) = (5/4, 0, 21/4, 0)$$

$$\lambda_4 = min\left\{\frac{19/11}{2/11}\right\} = min\,\{19/2\} = 19/2$$

$$\therefore \widetilde{x} = (19/11, 21/11, 0, 0) + 19/2(-2/11, 3/11, 1, 0) = (0, 9/2, 0, 19/2)$$

Los puntos obtenidos corresponden a los puntos extremos calculados[2].
Las direcciones $\Delta_i x$ nos permiten movernos de un punto extremo a otro y el óptimo, si existe, se encuentra en al menos un punto extremo.
¿Pero es necesario encontrar todos los puntos extremos?
Analicemos la función objetivo

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad si\ \widetilde{x} = x + \lambda_j \Delta_j x$$

[2]Vea página 90.

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \lambda_j \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta_j x_i$$

Si $\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta_j x_i = \bigtriangledown z \cdot \Delta_j x > 0$ el valor de la función objetivo aumenta.

Definición 4.2.2 *El coeficiente de costo reducido* $\overline{c}_j$ *asociado a* $x_j \in x_N$ *es*

$$\overline{c}_j = c \cdot \Delta_j x$$

donde $\Delta_j x$ *es la dirección que incrementa* x_j

Ejemplo 4.6 *Calcule z para la base* $[x_1, x_2]$ *del ejemplo 4.1*

Primero encontramos los coeficientes de costo reducido para x_3, x_4

$$\overline{c}_3 = c\Delta_3 x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-1}{11} \\ \frac{-4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-6}{11}$$

$$\overline{c}_4 = c\Delta_4 x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{11}$$

Además

$$cx = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{19}{11} \\ \frac{21}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{59}{11}$$

$$z = \frac{59}{11} - \frac{6x_3}{11} - \frac{x_4}{11}$$

Si deseamos maximizar z$\rightarrow$ x_3, x_4 deben ser cero

$\therefore x^* = (19/11, 21/11, 0, 0)$

Ejemplo 4.7 *Si la función objetivo del ejemplo 4.1 se cambia a* *Min z=*$-x_1 + x_2$ *¿El óptimo sigue siendo el mismo? si no es así encuentre el óptimo.*

Recalculamos los coeficientes de costo reducidos para x_3, x_4 y cx.

$$\bar{c}_3 = c\Delta_3 x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-1}{11} \\ \frac{-4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-3}{11}$$

$$\bar{c}_4 = c\Delta_4 x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{11}$$

Además

$$cx = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{19}{11} \\ \frac{21}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{11}$$

$$z = \frac{2}{11} - \frac{3x_3}{11} + \frac{5x_4}{11}$$

Si deseamos minimizar z $\rightarrow x_3$ debe aumentar su valor[3].

$\widetilde{x} = (19/11, 21/11, 0, 0) + \lambda_3(-1/11, -4/11, 1, 0) = (5/4, 0, 21/4, 0)$

El punto extremo cambió, en consecuencia se ven afectadas las direcciones de movimiento, obtenemos $\Delta_2 x, \Delta_4 x$ para el punto (5/4,0,21/4,0)

Para $\Delta_2 x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/11 \\ 0 & 4/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -11/4 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Delta_2 x = (1/4, 1, -11/4, 0))$

Para $\Delta_4 x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/11 \\ 0 & 4/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2/11 \\ -3/11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Delta_4 x = (-1/4, 0, 3/4, 1))$

[3] El calculo de λ_3 se encuentra en el ejemplo 4.5.

Una vez más calculamos los $\overline{c}_j$'s

$$\overline{c}_2 = c\Delta_2 x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{-11}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{c}_4 = c\Delta_4 x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

Además

$$cx = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ \frac{21}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{5}{4}$$

$$z = \frac{-5}{4} + \frac{3x_2}{4} + \frac{x_4}{4}$$

Para minimizar el valor de z, las variables no básicas toman su valor mínimo. *ie.* $x_2 = x_4 = 0$

$\therefore x^* = (5/4, 0, 21/4, 0)$

No fue necesario conocer todos los puntos extremos para encontrar el óptimo de problema, basto con tener B, una base factible inicial, $\Delta x, \lambda, c\Delta x$. Estos pasos constituyen un algoritmo al que llamaremos

"Algoritmo Simplex Rudimentario"

1. Obtener una base factible B y calcular $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$
   $x^{(t)} = B^{-1}b$ con t=0.

2. Calcular $\Delta_i x^{(t+1)} \qquad \forall x_i \in x_N$ como

$$\Delta_i x_k^{(t+1)} = \begin{cases} \eta_k & Si\ x_k \in x_B \\ 1 & Si\ k = i \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

   donde

$$\sum_{x_j \in B} a_j \eta_j = -a_i$$

3. Calcular $\overline{c}_i = c * \Delta_i x^{(t+1)} \quad \forall x_i \in x_N$

4. Si $c_i \geq 0, \quad \forall x_i \in x_N$ terminar, el problema es óptimo.
   Si no, $\overline{c}_k = min\{\overline{c}_i\}$, calculamos $\lambda_k = min\left\{\frac{-x_j^{(t)}}{\Delta_k x_j^{(t+1)}} : \Delta_k x_j^{(t+1)} < 0\right\}$

   - Si λ_k no existe, terminar el problema es no acotado
   - Si existe, actualizar $x^{(t+1)} = x^{(t)} + \lambda_k \Delta_k x^{(t+1)}$,
     t=t+1 e ir al paso 2.

Para un problema de minimización

4.3. Aplicación del Algoritmo Simplex Rudimentario

Objetivos: Dar ejemplos del Algoritmo Simplex Rudimentario y construir las líneas de código en Matlab que nos permite resolver problemas por este algoritmo.

Ejemplo 4.8 *Resuelva con el Simplex Rudimentario el ejemplo 2.1.*

Escribiendo el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned}
Min\ z = & -x_1 - 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 + 0\cdot x_5 = 12 \\
& x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + x_5 = 10 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

El punto extremo que genera es (0,0,4,12,10)

Comencemos por la base factible dado por $[x_3, x_4, x_5]$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	4
-1	2	0	1	0	12
1	1	0	0	1	10

$t=0$	N	N	B	B	B	
$x^{(0)}$	0	0	4	12	10	$cx = 0$
$\Delta_1 x$	1	0	1	1	-1	$\overline{c_1} = -1$
$\Delta_2 x$	0	1	-1	-2	-1	$\boxed{\overline{c_2} = -3}$
	$-$	$-$	$\frac{4}{1}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{10}{1}$	$\lambda_2 = 4$
$\lambda_2\Delta_2 x$	0	4	-4	-8	-4	$\overline{c_2}\lambda_2 = -12$

$Si\ x_1 = 1, x_2 = 0$
$-1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 1$
$-1 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 1$
$1 + x_5 = 0 \rightarrow x_5 = -1$
$\overline{c_1} = c * \Delta_1 x = -1$

$Si\ x_1 = 0, x_2 = 1$
$1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -1$
$2 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = -2$
$1 + x_5 = 0 \rightarrow x_5 = -1$
$\overline{c_2} = c * \Delta_2 x = -3$
$\overline{c_k} = min\{\overline{c_1}, \overline{c_2}\} = -3$
$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_2 \Delta_2 x$

$t=1$	N	B	N	B	B	
$x^{(1)}$	0	4	0	4	6	$cx=-12$
$\Delta_2 x$	1	1	0	-1	-2	$\boxed{\overline{c_1}=-4}$
$\Delta_3 x$	0	-1	1	2	1	$\overline{c_3}=3$
	$-$	$-$	$-$	$\frac{4}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\lambda_1=3$
$\lambda_1\Delta_1 x$	3	3	0	-3	-6	$\overline{c_1}\lambda_1=-12$

$Si\ x_1=1, x_3=0$
$-1+x_2=0\rightarrow x_2=1$
$-1+2x_2+x_4=0$
$\rightarrow x_4=-1$
$1+x_2+x_5=0\rightarrow x_5=-2$
$\overline{c_1}=c*\Delta_1 x=-4$

$Si\ x_1=0, x_3=1$
$x_2+1=0\rightarrow x_2=-1$
$2x_2+x_4=0\rightarrow x_4=2$
$x_2+x_5=0\rightarrow x_5=1$
$\overline{c_3}=c*\Delta_3 x=3$
$\overline{c_k}=min\{\overline{c_1},\overline{c_3}\}=-4$
$x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda_1\Delta_1 x$

$t=2$	B	B	N	B	N	
$x^{(2)}$	3	7	0	1	0	$cx=-24$
$\Delta_3 x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\overline{c_3}=1$
$\Delta_5 x$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\overline{c_5}=2$

$Si\ x_3=1, x_5=0$
$1-x_1+x_2=0\rightarrow x_1=\frac{1}{2}$
$0-x_1+2x_2+x_4=0$
$\rightarrow x_2=\frac{-1}{2}$
$0+x_1+x_2=0\rightarrow x_4=\frac{3}{2}$
$\overline{c_3}=c*\Delta_3 x=1$

$Si\ x_3=0, x_5=1$
$-x_1+x_2=0\rightarrow x_1=\frac{-1}{2}$
$-x_1+2x_2+x_4=0$
$\rightarrow x_2=\frac{-1}{2}$
$x_1+x_2+1=0\rightarrow x_4=\frac{1}{2}$
$\overline{c_5}=c*\Delta_5 x=2$
$\overline{c_k}=min\{\overline{c_3},\overline{c_5}\}=1\geq 0$

$\therefore$La solución óptima es $x^*=(3,7,0,1,0)$ con z^*=-24.

Ejemplo 4.9 *Resuelva por el Algoritmo Simplex Rudimentario el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} Max\ z = 3x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - \ \ x_4 \\ x_1 - \ \ x_2 + 0\cdot x_3 + \ \ x_4 = 3 \\ 0\cdot x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3\ - 2x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Comenzando por la base factible dada por $[x_1, x_3]$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	0	1	3
0	1	1	-2	1

$t=0$	B	N	B	N	
$x^{(0)}$	3	0	1	0	$cx = 9$
$\Delta_2 x$	1	1	-1	0	$\boxed{\overline{c_2} = 3}$
$\Delta_4 x$	-1	0	2	1	$\overline{c_4} = -4$
	$-$	$-$	$\frac{1}{1}$	$-$	$\lambda_2 = 1$
$\lambda_2\Delta_2 x$	1	1	-1	0	$\overline{c_3}\lambda_3 = 3$

$t=1$	B	B	N	N	
$x^{(1)}$	4	1	0	0	$cx = 12$
$\Delta_3 x$	-1	-1	1	0	$\overline{c_3} = -3$
$\Delta_4 x$	1	2	0	1	$\boxed{\overline{c_4} = 2}$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$\lambda_4 \to \infty$

$\therefore$ El problema es no-acotado en dirección de x_4 *ie.*

$$\widetilde{x} = (4,1,0,0) + \lambda_4(1,2,0,1) \subseteq S \quad \forall \lambda_4 \geq 0$$

Otra forma de expresarlo es

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + x_4 \\ x_2 &= 1 + 2x_4 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Los valores que pueden tomar x_3, x_4 se pueden obtener gráficando el espacio de las variables no básicas.

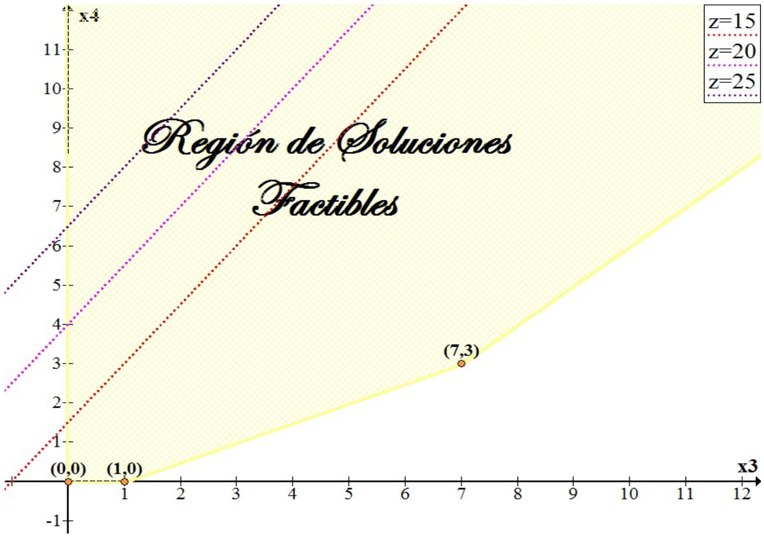
$$\begin{array}{rcr} & & z = 12 - 3x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_3 - \ x_4 = 4 & \to & x_3 - \ x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 & \to & x_3 - 2x_4 \leq 1 \\ & & x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Dibujando la región de soluciones factibles
Suponemos la igualdad en las restricciones

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 = 4 \quad &\to \quad \textit{pasa por } \{(4,0),(3,7)\} \\ x_3 - 2x_4 = 1 \quad &\to \quad \textit{pasa por } \{(1,0),(3,7)\} \\ x_3 = x_4 = 0 \quad &\textit{son los ejes} \end{aligned}$$

Evaluamos en el punto $\overline{x} = (0,0)$

$$\begin{aligned} 0 - 0 = 0 &\leq 4 \\ 0 - 2\cdot 0 = 0 &\leq 1 \end{aligned}$$



Expresemos los pasos del algoritmo Simplex Rudimentario[4] con su equivalente en instrucciones computacionales que puedan se utilizadas en la ventana de comandos de Matlab.

w es la variable que le indica al programa cuando dejar de realizar las iteraciones en la instrucción *while*

La variable Aux es la matriz en la que se guardan las direcciones

En la matriz E se actualiza en valor de la base B en cada paso, *ie.* tiene despejadas las entradas en términos de las variables básicas

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
$Min\ cx$	$\gg c \hookleftarrow$
$Ax \leq b$	$\gg A, b \hookleftarrow$
$x \geq 0$	$\gg n = size(A);$
$En\ forma\ estándar$	$\gg B = eye(n(1));$
$Min\ cx + 0 \cdot \overline{x}$	$\gg c = [c, zeros(1, n(1))]\,;$
$Ax + I\overline{x} = b$	$\gg A = [A, B]\,;$
$x, \overline{x} \geq 0$	$\gg base = [n(2) + 1 : n(2) + n(1)]\,;$
	$\gg w = 0;$
$En\ la\ base\ es\ \ B = Identidad$	
$X = (x, \overline{x})$	$\gg x = [zeros(n(2), 1); b]\,;$
	$\gg m = n(1); n = n(1) + n(2);$
$La\ primera\ tabla\ es$	$\gg fprintf('La\ tabla\ Inicial\ es')$
$\boxed{A\vert I\vert b}$	$\gg disp([A, b])$
	$while(w == 0)$
	$E = inv(B) * [A, b]\,;$
$x^{(0)} = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$	

[4]En el Algoritmo en particular se supone un problema de minimización donde la base esta dada por las variables de holgura en restricciones de menor o igual, en el siguiente capítulo se muestra como encontrar una base factible.

E(j,i) es el valor de la a_i en su entrada j-ésima.

Al calcular las direcciones para todas las variables quitamos aquellas que son básicas.

Multiplicamos lambda por realmax para que al hacer la prueba del radio míni-. mo queden excluidas las variables con $\Delta_k x^{(t+1)} \geq 0$

El símbolo de % en la función fprintf es el lugar en donde será sustituida la variable que aparece después de las comillas

En la actualización de la base, una vez encontradas las x_k y x_l se sustituyen en la base la columna a_l por la a_k.

Cálculamos Δx *para las* $x \in x_N$ $\sum a_j \Delta_i x_j = -a_i \;\; con\; \Delta_i x_i = 1$ $y\; \Delta_i x_k = 0 \;\; \forall x_k \in x_N \;\; (k \neq i)$	$Aux = [\;\;];$ $for\ i = 1:n$ $IX = zeros(n,1); for\ j = 1:m$ $IX(base(1,j),1) = E(j,i);$ $IX(i,1) = 1; end$ $Aux = [Aux, IX]\,; end$ $fprintf('Las\ direcciones\ son: \setminus n')$ $disp(Aux)$
Calculamos $\overline{c_k} = c\Delta_k x \;\; \forall x_k \in x_N$	$\gg C = c * Aux;$ $for\ i = 1:m$ $C(1, base(1,i)) = 0; end$ $fprintf('Los\ coeficientes\ de$ $costo\ son: \setminus n') \;\; disp(C)$
Por el criterio de optimalidad si todos los coeficientes de costo reducidos son positivos terminar, el problema es óptimo.	$if(C >= 0)$ $fprintf('El\ problema\ es\ optimo \setminus n')$ $w = 1;$
si no $\overline{c_k} = min\{\overline{c_i}\}$	$else$ $[r,k] = min(C);$ $fprintf('El\ min\ de\ los\ coeficientes$ $es \%g \;\; x \%i\ a\ la\ base \setminus n', r, k)$
y la variable que entra es x_k	$\gg lambda = ones(n,1) * realmax;$
Si $\Delta_k x \geq 0$ *el problema es no acotado*	$if(Aux(:,k) >= 0)$ $fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado')$ $return \;\; end$
si no, calculamos $\lambda_l = min\left\{ \frac{-x_i^{(t)}}{\Delta_k x_i^{(t+1)}} : \Delta_k x_i^{(t+1)} < 0 \right\}$	$for\ i = 1:n$ $if(Aux(i,k) < 0)$ $lambda(i,1) = -x(i,1)/Aux(i,k);$ $end \;\; end$ $\gg [r,l] = min(lambda);$ $fprintf('El\ min\ de\ las\ lambdas$ $es \%g\ x \%i\ sale\ de\ la\ base \setminus n', r, l)$
x_k *sale de la base* *Actualizamos el punto* $x^{(t+1)} = x^{(t)} + \lambda \Delta_k x$ *Evaluamos en* z $z = cx^{(t+1)}$ *regresar al paso* 1	$fprintf('El\ punto\ extremo\ es \setminus n')$ $x = x + r * Aux(:,k); disp(x')$ $fprintf('El\ valor\ de\ la\ funcion$ $objetivo\ es\ z = \ \%g', c * x)$ $for\ i = 1:m$ $if(base(1,i) == l)$ $B(:,i) = A(:,k);$ $base(1,i) = k;$ $end\ endend\ end$

El código del algoritmo con estructura de función está en el Apéndice B.

4.4. El Algoritmo Simplex

Objetivo: Desglosar la forma en que se construye la tabla Simplex, dar interpretación a sus entradas para concluir que el Algoritmo Simplex es una versión mejorada del algoritmo Simplex Rudimentario.

En el algoritmo Simplex Rudimentario tenemos que calcular una dirección $\Delta_i x$ antes de saber si tenemos que movernos en dirección de x_i, es más conveniente primero conocer el valor de $\overline{c}_i$ para elegir la variable que al aumentar su valor mejora el valor de la función objetivo antes de construir su dirección de movimiento asociada $\Delta_i x$.

Recordemos que $z = cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N$ si conocemos B^{-1} ó $c_B B^{-1}$ es más sencillo encontrar $\overline{c_i}$ y posteriormente encontrar $\Delta_i x$

A continuación veremos otra forma de presentar la tabla Simplex, que nos ayuda a encontrar $\overline{c_i}$ sin calcular Δx.

Suponemos un ppl en forma estádar de minimización que tiene al menos una solución factible.

$$\begin{aligned} Min\ z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$\exists\ B\ tal\ que\ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$$\begin{aligned} Min\ z &= c_B x_B + c_N x_N \\ Bx_B + Nx_N &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

I es la matriz identidad de $m \times m$

sustituyendo x_B

$$\begin{aligned} Min\ z &= c_B B^{-1} - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N \\ Ix_B + B^{-1} N x_N &= B^{-1} b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$\overline{0}$ es el elemento neutro de $\mathbb{R}^n$, mientras que 0 es el vector columna con todas sus entradas cero.

Es equivalente a

$$\begin{aligned} Min\ z + \overline{0} \cdot x_B + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N &= c_B B^{-1} b \\ 0 \cdot z + Ix_B + B^{1-} N x_N &= B^1 b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

LD es abreviatura para expresar el lado derecho de una ecuación.

Construimos una tabla Simplex de la forma

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x_B & x_N & LD \\
\hline
z & 1 & \bar{0} & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1} b \\
\hline
x_B & 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\
\hline
\end{array}
$$

decimos que tanto z, como el vector x_B son variables dependientes porque están expresadas en términos de x_N.
Definamos algunos cambios de variable:

$$w = c_B B^{-1}, \quad \bar{b} = B^{-1}b, \quad y_k = B^{-1}a_k$$

$$z_k = wa_k = c_B y_k = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik}$$

Redefiniendo la tabla con las nuevas variables

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x_B & x_N & LD \\
\hline
z & 1 & \bar{0} & wN - c_N & wb \\
\hline
x_B & 0 & I & B^{-1}N & \bar{b} \\
\hline
\end{array}
$$

ó bien $z = wb - \sum_{i \in x_N} (c_i - z_i) x_i$

Observemos que:

- z es una función de x_i y b

$$\rightarrow \frac{\delta z}{\delta x_j} = \frac{\delta \left(wb - \sum_{i \in x_N} (c_i - z_i) x_i \right)}{\delta x_j} = -c_j + z_j$$

$\therefore$ $-c_j + z_j$ es la tasa de cambio de z con respecto a x_i

$$\rightarrow \frac{\delta z}{\delta b} = \frac{\delta (wb - \sum_{i \in x_N} (c_i - z_i) x_i)}{\delta b} = w$$

- x_B también es dependiente de x_N

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{i \in x_N} y_i x_i$$

$$\rightarrow \frac{\delta x_B}{\delta x_j} = \frac{\delta \left(B^{-1}b - \sum_{i \in x_N} y_i x_i \right)}{\delta x_j} = -y_j$$

$\therefore -y_j$ es la tasa de cambio de x_B con respecto a la variable x_j.

A continuación proporcionaremos el Algoritmo Simplex, que fue creado por George Dantzing en 1947 para resolver los problemas de programación lineal.

Algoritmo Simplex

1. Dado un problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{aligned} Min\ z = cx + 0 \cdot \widetilde{x} \\ Ax + \ I\widetilde{x} = b \\ x, \widetilde{x} \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} Max\ z = cx + 0 \cdot \widetilde{x} \\ Ax + \ I\widetilde{x} = b \\ x, \widetilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

   Se identifica una solución inicial básica factible. Las variables de decisión correponden a variables no básicas (x=0) y las variables de holgura corresponden a las variables básicas iniciales ($\widetilde{x}$).

2. **Prueba de optimalidad:** la solución básica factible actuales óptima si y sólo si todos los coeficientes en el renglón z(las $z_j - c_j$) son positivos para un problema de maximizar o negativos para un problema de minimizar, si es así terminar.

3. Se determina la variable no-básica entrante x_k tal que

   - $\overline{c_k} = min\,\{c_j - z_j \;\; x_j \in x_N\}$ para un problema de maximizar, y_k es la columna pivote.
   - $\overline{c_k} = max\,\{c_j - z_j \;\; x_j \in x_N\}$ para un problema de minimizar, y_k es la columna pivote.

4. Se determina la variable que sale de la base aplicando la **prueba del cociente mínimo**

   - Se eligen los coeficientes de la columna pivote que son estrictamente positivos, *ie.* $y_{ik} > 0$
   - Se divide el elemento del lado derecho(vector $\overline{b}$) entre cada coeficiente, *ie.*
   $$\left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} \quad \forall y_{ik} > 0 \right\}$$
   - Se identifica el reglón que tiene la menor de estas razones
   $$\frac{b_j}{y_{ik}} = min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} \quad \forall y_{ik} > 0 \right\}$$
   - La variable básica para este renglón *ie.* x_Bj sale de la base.

   El renglón correspondiente es el renglón pivote.
   El número en la intersección de la columna pivote y el reglón pivote es el elemento pivote y_{ik}, si no es posible elegir un elemento pivote (*ie* $y_k \leq 0$) terminar el problema es no-acotado.

5. Se calcula la nueva solución factible usando operaciones elementales con los renglones[5]. Se regresa al paso 2.

$R^{(i-1)}$ simboliza el renglón i-ésimo de la tabla Simplex, para i=1 diremos $R^{(z)}$

Ejemplo 4.10 *Resuelva utilizando el algoritmo Simplex*

$$\begin{aligned} Max\ z &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + \ \ x_3 &\leq 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial y estándar

$$Max\ z - (2, 1, -2, 0, 0)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Paso 1 Construimos la tabla Simplex inicial

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-2	-1	2	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	1	4	0	1	2

Iteración 1
Paso 2 Criterio de optimalidad

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= -2 \ngeq 0 \\ z_2 - c_2 &= -1 \ngeq 0 \\ z_3 - c_3 &= \ \ 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 3

$$\overline{c_k} = min\{z_1 - c_1, z_2 - c_2, z_3 - c_3\} = min\{-2, -1, 2\} = -2 \quad k = 1$$

la variable entrante es x_1

Paso 4

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{b_j}{y_{i1}} = min\left\{\frac{1}{1}\right\} \quad j = 1,\ x_{B1} = x_4$$

la variable básica que sale es x_4 y el pivote es $y_{11} = 1$

[5]Suma de renglones y multiplicación por escalares distintos de cero.

Paso 5 Realizamos operaciones elementales con los renglones

$$R_Z^{(1)} = 2R_1^{(0)} + R_Z^{(0)} = 2(0,1,1,1,1,0,1) + (1,-2,-1,2,0,0) = (1,0,1,4,2,0,2)$$

Reescribimos la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	1	4	2	0	2
x_1	0	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	1	4	0	1	2

Iteración 2
Paso 2 Criterio de optimalidad

$$z_2 - c_2 = 1 \geq 0$$
$$z_3 - c_3 = 4 \geq 0$$
$$z_4 - c_4 = 2 \geq 0$$

$\therefore$ La solución óptima es x^*=(1,0,0,0,2) cx^*=2

Ejemplo 4.11 *Resuelva utilizando el algoritmo Simplex y muestre en la región S el movimiento sobre los puntos extremos del problema.*

$$\begin{aligned} Min\ z &= -2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 &\leq 10 \\ 2x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma estándar

$$\begin{aligned} Min\ z + 2x_1 + \ x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= \ 0 \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 0 \cdot x_4 &= 10 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + \ x_4 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 1 Construcción de la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	2	1	0	0	0
x_3	0	1	-1	1	0	10
x_4	0	0	2	0	1	40

Iteración 1
Paso 2 Criterio de optimalidad

$$z_1 - c_1 = 2 \nleq 0$$
$$z_2 - c_2 = 1 \nleq 0$$

$\therefore$ la solución x=(0,0,10,40) no es óptima.

Paso 3

$$\overline{c_k} = max\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = max\{2, 1\} = 2 \quad k = 1$$

la variable entrante es x_1

Paso 4 Prueba de radio mínimo

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{b_j}{y_{i1}} = min\left\{\frac{10}{1}\right\} \quad j = 1 \quad x_{B1} = x_3$$

la variable básica que sale es x_3, el pivote es $y_{11} = 1$

Paso 5 Operaciones elementales

$R_z^{(1)} = -2R_1^{(0)} + R_z^{(0)}$=-2(0,1,-1,1,0,10)+(1,2,1,0,0,0)=(1,0,3,-2,0,-20)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	3	-2	0	-20
x_1	0	1	-1	1	0	10
x_4	0	0	2	0	1	40

Iteracion 2
Paso 2 Criterio de optimalidad

$$z_2 - c_2 = \quad 3 \nleq 0$$
$$z_3 - c_3 = -2 \leq 0$$

$\therefore$La solución, x=(10,0,0,40) no es óptima.
Paso 3

$$\overline{c_k} = max\{z_2 - c_2, z_3 - c_3\} = max\{3, -2\} = 3 \quad k = 2$$

La variable entrante es x_2
Paso 4 Prueba del radio mínimo

$$y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{b_j}{y_{i2}} = min\left\{\frac{40}{2}\right\} = 20 \quad j = 2 \quad x_{B2} = x_4$$

la variable básica que sale es x_4, el pivote es y_{22}=2

Paso 4 Operaciones elementales

$R_2^{(2)} = \frac{R_2^{(1)}}{2} = \frac{1}{2}(0,0,2,0,1,40) = (0,0,1,0,\frac{1}{2},20)$

$R_1^{(2)} = R_1^{(1)} + R_2^{(2)} = (0,0,-1,1,0,10) = (0,1,0,1,\frac{1}{2},30) + (0,0,1,0,\frac{1}{2},20)$

$R_Z^{(2)} = -3R_2^{(2)} + R_z^{(1)} = (0,0,-3,0,\frac{-3}{2},-60) + (1,0,3,-2,0,-20)$

$R_Z^{(2)} = (1,0,0,-2,\frac{-3}{2},-80)$

En la tabla

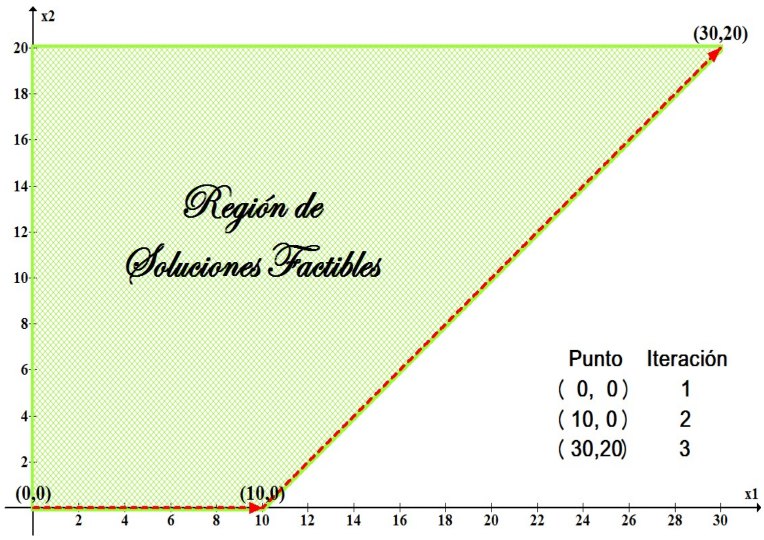
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	-2	$\frac{-3}{2}$	-80
x_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	30
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	20

Iteración 3

Paso 2 Criterio de optimalidad

$$z_3 - c_3 = -2 \leq 0$$
$$z_4 - c_4 = \frac{-3}{2} \leq 0$$

$\therefore$La solución óptima es $x^* = (30,20,0,0)$ $\;z^* = -80$



Para los ejemplos anteriores enunciamos el paso 5 como sigue:
Se calcula la nueva solución básica factible usando operaciones elementales con los renglones.

Las operaciones consisten en convertir la columna y_k de la siguiente tabla en un vector e_j y el coeficiente $z_k - c_k$ en 0; todas las operaciones se pueden efectuar al mismo tiempo mediante lo que denominamos pivoteo.

e_j representa al vector canónico j-ésimo en $\mathbb{R}^m$, *ie*. el vector que tiene ceros en sus entradas y un 1 en la j-ésima.

Sea el pivote y_{jk}

1. Se divide el reglón R_j entre y_{jk}
2. Para $i = 1, \ldots, m$ *con* $i \neq j$, se actualiza sumándole el renglón R_j multiplicado por $-y_{ik}$, *ie*. $R_i = R_i - y_{ik}R_j$
3. Se cambia R_Z por $R_Z = R_Z - (z_j - c_j)R_j$

Al realizar estas operaciones y solo escribir los datos actualizados se facilita la escritura de las tablas Simplex.

4.5. Casos Especiales

Objetivo: Presentar ejemplos de degeneración, óptimos alternativos y problemas sin óptimo finito.

Analicemos algunos casos especiales que se presentan al aplicar el Algoritmo Simplex

1. $z_j - c_j \leq 0 \ \ \forall x_j \in x_N$ (para un problema de minimización); pero existe $x_k \in x_N$ tal que

   $$z_k - c_k = 0 \rightarrow \frac{\delta z}{\delta x_k} = 0 \qquad z \ no\ cambia\ si\ modificamos\ el\ valor\ de\ x_k$$

   Pero $\frac{\delta x_B}{\delta x_k} = -y_k$; *ie*. los valores de las variables básicas se ven afectados, éste se derivan otros subcasos:

   a) Si $\frac{b_j}{y_{jk}} = min\left\{\frac{b_i}{y_{ik}} \ \ \forall y_{ik} > 0\right\}$ es positivo existe al menos $\overline{x}$ un punto extremo diferente de x^* tal que $c\overline{x} = cx^*$

   $$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda x^* + (1-\lambda)\overline{x} \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad son\ óptimas$$

   decimos entonces que existen óptimos alternativos

   b) Si $\frac{b_j}{y_{jk}} = min\left\{\frac{b_i}{y_{ik}} \ \ \forall y_{ik} > 0\right\} = 0$ entonces $b_i = 0$ para alguna i y al pivotear no nos movemos del punto x^*.

   $\therefore$ No existen óptimos alternativos y decimos que x^* es una solución óptima degenerada porque el punto x^* está generado por más de una base.

c) Si $\frac{b_j}{y_{jk}}$ no está determinada es decir $y_k \leq 0$ entonces todos los elementos del conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = x^* + \mu \Delta x_k \quad \mu \geq 0\}$$

son soluciones óptimas, decimos que existe un rayo óptimo.

2. Existe al menos una $x_{Bi} = 0$, *ie*. una variable básica es cero decimos entonces que x es una solución degenerada.

3. Si $z_j - c_j \geq 0$ (problema de minimización) para alguna j y $y_{ik} \leq 0$ el problema es no acotado.

Ver dirección de movimiento en página 91.

Ejemplo 4.12 *Identifique el caso especial que se presenta en el ppl siguiente*

$$\begin{aligned} -5x_2 + 4x_2 &\leq 16 \\ -3x_1 + \ x_2 &\leq \ 4 \\ x_2 &\leq \ 9 \\ x_1, x_2 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

cuando la función objetivo es

$$a) Max\ z_1 = -10x_1 + 8x_2 \qquad b) Max\ z_2 = x_2 \qquad c) Max\ z_3 = x_1 + x_2$$

El problema está diseñado para que los pivotes sean los mismos en cada iteración para las funciones z_1, z_2, z_3, ya que esto no siempre sucede.

Escribiendo en forma estándar

$$\begin{aligned} -5x_2 + 4x_2 + \quad x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 &= 16 \\ -3x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad x_4 + 0 \cdot x_5 &= \ 4 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \quad x_5 &= \ 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Tenemos la base factible dada por las variables de holgura x_3, x_4, x_5

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z_1	1	10	-8	0	0	0	0
z_2	1	0	-1	0	0	0	0
z_3	1	-1	-1	0	0	0	0
x_3	0	-5	4	1	0	0	16
x_4	0	-3	1	0	1	0	4
x_5	0	0	1	0	0	1	9

Pasos 2 y 3

$$Para\ z_1 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = min\,\{10, -8\} = -8 \quad k = 2$$

$$Para\ z_2 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = min\,\{\ \ 0, -1\} = -1 \quad k = 2$$

$$Para\ z_3 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = min\,\{-1, -1\} = -1 \quad k = 2$$

La variable que entra a la base es x_2

Paso 4

$$\frac{b_j}{y_{i2}} = min\left\{\frac{16}{4}, \frac{4}{1}, \frac{9}{1}\right\} = 4$$

$\therefore$ j=1ó 2 sin pérdida de generalidad j=2, la variable que sale es $x_{B2} = x_4$

Reescribiendo la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z_1	1	-14	0	0	8	0	32
z_2	1	-3	0	0	1	0	4
z_3	1	-4	0	0	1	0	4
x_3	0	7	0	1	-4	0	0
x_2	0	-3	1	0	1	0	4
x_5	0	3	0	0	-1	1	5

Pasos 2 y 3

$$Para\ z_1 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_4 - c_4\} = min\,\{-14, 8\} = -14 \quad k = 1$$

$$Para\ z_2 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_4 - c_4\} = min\,\{\ \ -3, 1\} = -3 \quad k = 1$$

$$Para\ z_1 \quad \overline{c_k} = min\,\{z_1 - c_1, z_4 - c_4\} = min\,\{\ \ -4, 1\} = -4 \quad k = 1$$

$\therefore$ x=(0,4,0,0,5) no es óptimo para ninguna z.
La variable que entrará a la base es x_1

Paso 4

$$\frac{b_j}{y_{i1}} = min\left\{\frac{0}{7}, \frac{5}{3}\right\} = 0$$

$\therefore$ j=1 $x_{B1} = x_3$, sale x_3 y entra x_1 a la base.
La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z_1	1	0	0	2	0	0	32
z_2	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0	4
z_3	1	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{-9}{7}$	0	4
x_1	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-4}{7}$	0	0
x_2	0	0	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0	4
x_5	0	0	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	5

Paso 2

Para z_1 tenemos $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j \quad \therefore \quad x$=(0,4,0,0,5) es óptimo y $x_1 = 0$ con $x_1 \in x_B$, podemos decir que la solución óptima es degenerada. Además $z_4 - c_4 = 0$ es decir la variable x_4, que es no básica tiene coeficiente cero. $\therefore$ Existen óptimos alternativos.

$$Para\ z_2 \quad \overline{c_k} = min\left\{\frac{3}{7}, \frac{-5}{7}\right\} = \frac{-5}{7} \quad k = 4$$

$$Para\ z_3 \quad \overline{c_k} = min\left\{\frac{4}{7}, \frac{-9}{7}\right\} = \frac{-9}{7} \quad k = 4$$

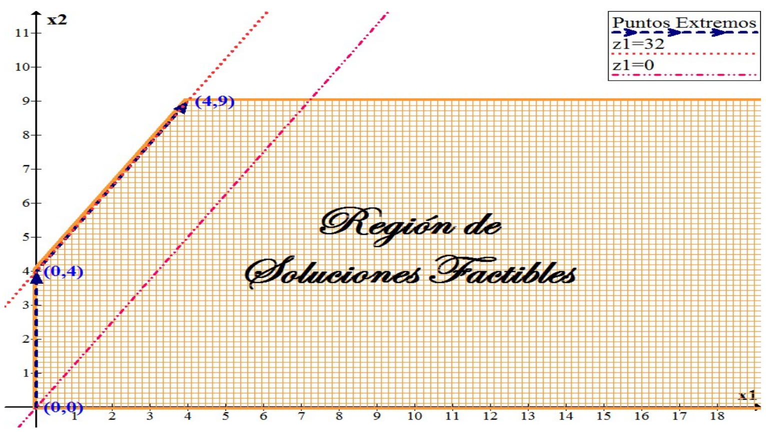
Paso 4

$$\frac{b_j}{y_{j4}} = min\left\{\frac{5}{\frac{5}{7}}\right\} = 7 \quad j = 3 \quad x_{B3} = x_5$$

$\therefore$ Entra x_4 y sale x_5 de la base.
La tabla Simplex es

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z_1	1	0	0	2	0	0	32
z_2	1	0	0	0	0	1	9
z_3	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$	13
x_1	0	1	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	4
x_2	0	0	1	0	0	1	9
x_5	0	0	0	$\frac{-3}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	7

$*$)Para z_1:
La función z_1 es óptima en $\overline{x} = (0,4,0,0,5)$ *y en* $x^* = (4,9,0,7,0)$ existen óptimos alternativos en el segmento de recta que une a los dos puntos.

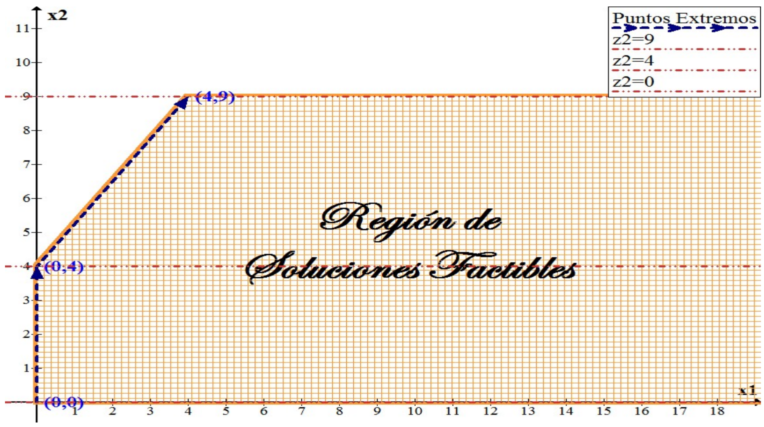


El conjunto de las soluciones óptimas es:

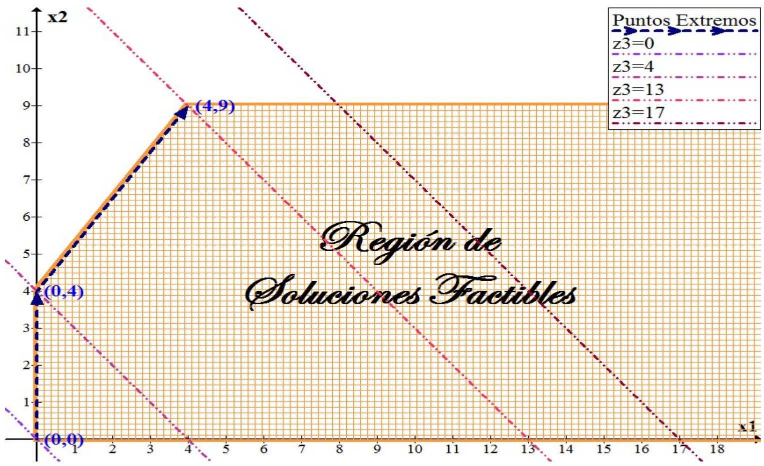
$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | x = \lambda(0,4,0,0,4) + (1-\lambda)(4,9,0,7,0) \quad 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

$*$)Para z_2:
La función z_2 es óptima en $x^* = (4,9,0,7,0)$ pero como $z_3 - c_3 = 0$ y $y_3 \leq 0$ existe un rayo óptimo, todos los elementos del conjunto **C** son soluciones óptimas.

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | x = (4,9,0,7,0) + \mu(\frac{1}{5},0,1,\frac{3}{5},0) \quad \mu \geq 0\right\}$$



$*$)Para z_3:
La función z_3 no es óptima por que $z_3 - c_3 = \frac{-1}{5}$ pero $y_3 \leq 0 \rightarrow$ el problema es no-acotado.



4.6. El Algoritmo Programado Simplex

Objetivo: Programar en Matlab del Algoritmo Simplex para problemas con una base factible dada por las variables de holgura.

A' es la matriz del problema luego de incluir a las variable de holgura.

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
$Min\ cx$	$\gg c \hookleftarrow$
$Ax \leq b$	$\gg A, b \hookleftarrow$
$x \geq 0$	$\gg n = size(A);$
$En\ forma\ estándar$	$\gg B = eye(n(1));$
$Min\ cx + 0 \cdot \overline{x}$	$\gg c = [c, zeros(1, n(1))]\,;$
$Ax + I\overline{x} = b$	$\gg A = [A, B]\,;$
$x, \overline{x} \geq 0$	$CB = zeros(1, n(1))$
	$\gg w = 0;$
	$\gg m = n(1); n = n(2);$
	$while(w == 0)$
$La\ \ tabla\ es$	$\gg fprintf('La\ Tabla\ Simplex\ es\backslash n')$
$\begin{array}{c\|c} C_B \cdot B^{-1}A' - c & C_B \cdot B^{-1}b \\ \hline B^{-1}A' & B^{-1}b \end{array}$	$\gg T = [CB * inv(B) * A - c,$ $CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];$ $disp(T)$
$Si\ todos\ c_B * B^{-1}A - c \leq 0$	$if(CB * inv(B) * A - c <= 0)$
$el\ problema\ es\ óptimo$	$fprintf('Es\ optimo\backslash n'); w = 1;$
$Si\ no$	$else$
$Calculamos\ \overline{c_k} = max\,\{z_j - c_j\}$	$[r, k] = max(CB * inv(B) * A - c);$
$Hacemos\ la\ prueba\ del$	$radio = ones(1, m) * realmax;$
$radio\ mínimo$	$for\ i = 1 : m$
$\frac{\overline{b_j}}{y_{ik}} = min\left\{\frac{\overline{b_i}}{y_{ik}}\ \ y_{ik} > 0\right\}$	$if(T(i+1, k) > 0)$
	$radio(i) = T(i, n+m+1)/T(i+1, k);$
	$end\ \ end$
	$[r, j] = min(radio);$
$Si\ no\ existe\ el\ pivote\ terminar$	$if(r == realmax)$
$el\ problema\ es\ no-acotado$	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado\backslash n')$
	$return$
$si\ existe\ el\ pivote$	$else$
$Actualizamos\ la\ base$	
$entra\ x_k$	$B(:.j) = A(:, k);$
$sale\ x_{Bj}$	$CB(:, j) = c(:, k);$
	$end\ \ end\ \ \ end$

Este algoritmo con estructura de función se encuentra en el Apéndice B.

B es la matriz que representa a la base, $\therefore$ B=I en la primera iteración.

w es la variable que le indica al problema cuando terminar las iteraciones.

La entrada T(i+1,k) es equivalente a y_{ik}, se aumenta el subíndice en uno por que el primer renglón de T contiene a $zj - cj$, entonces se recorre un renglón más hacia abajo.

n+m es el número de columnas del ppl luego de añadir las variables de holgura.

Si r=realmax no existe ninguna $y_{ik} > 0$

Al asignar B(:,j)= A(:,k) estamos cambiando la columna j-ésima de la base por la columna k-ésima de A'.

Ejemplo 4.13 *Resuelva con el programa del Simplex el siguiente problema*

$$\begin{aligned} Min\ z &= x_1 - 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando el algoritmo Simplex con estructura de función

$\gg A = [1\ 1; 3\ \ -1]$;
$\gg b = [5; 3]$;
$\gg c = [1\ \ -4]$;
$\gg tablasimplex(A, b, c)$

La tabla Simplex es :

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & LD \\ \hline z & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ x_4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

La tabla Simplex es :

$$\begin{array}{ccccc} -5 & 0 & -4 & 0 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & LD \\ \hline z & -5 & 0 & -4 & 0 & -20 \\ \hline x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ x_4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

El problema es óptimo

En las tablas del algoritmo tablasimplex(A,b,c) no aparecen las variables, esto se debe a que el algoritmo ocupado no cuenta con las líneas de código de imprimir las variables, por esto se incluye una versión ligeramente modificada que permita esta opción en el Apéndice B.

4.7. Otra representación: *Tabla de Tucker*

Objetivo: Definición de las tablas de Tucker, reglas de pivoteo y algoritmo Simplex para las tablas de Tucker.

En todas las tablas Simplex donde existe una factible las expresamos.

$$\begin{array}{|c|ccc|c|} \multicolumn{1}{c}{z} & x_B & x_N & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{LD} \\ \hline 1 & 0 & c_B B^{-1} N - c_N & & c_B B^{-1} b \\ \hline 0 & I & B^{-1} N & & B^{-1} b \\ \hline \end{array}$$

es equivalente a:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline (c_B B^{-1}N - c_N)x_N - c_B B^{-1}b & -z \\ \hline B^{-1}Nx_N - B^{-1}b & -x_B \\ \hline \end{array}$$

despejando z y x_B

$$\begin{array}{|ccc|cc} (c_B B^{-1}N - c_N)x_N & \vdots & -c_B B^{-1}b & = & -z \\ \hline B^{-1}Nx_N & \vdots & -B^{-1}b & = & -x_B \\ \end{array}$$

Intercambiando el orden de los renglones y dividiendo la matriz

$$\begin{array}{c|c|cc} x_N & -1 & & \\ \hline B^{-1}N & B^{-1}b & = & -x_B \\ \hline c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b & = & -z \\ \hline \end{array}$$

Esta última tabla se conoce como tabla condensada y sirve para definir un nuevo modelo de Tabla Simplex.

Definición 4.7.1 *Sean* $\{x_1, \cdots, x_k, x_{B1}, \cdots x_{Bm}\}$ *variables que representan en cierto orden a los elementos del conjunto* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$*.*
Entonces la tabla de Tucker[5].

$$\begin{array}{cccc|c|cc} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & -1 & & . \\ \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 & = & -x_{B1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 & = & -x_{B2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & b_m & = & -x_{Bm} \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & d & = & -z \\ \hline \end{array}$$

Representa el problema de programación lineal de maximización con función objetivo z definida como:

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_kx_k = d$$

con restricciones

$$\begin{aligned} x_{B1} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k &= b_1 \\ x_{B2} + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2k}x_k &= b_2 \\ &\vdots \\ x_{Bk} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k &= b_m \end{aligned}$$

también

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

Definición 4.7.2 *Un problema de programación lineal en forma Simplex puede ser representados por la tabla de Tucker siguiente con todas las constantes del lado derecho no negativas.*

$$\begin{array}{cccc|c|cc}
x_1 & x_2 & \cdots & x_k & -1 & & . \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 & = & -x_{B1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 & = & -x_{B2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & b_m & = & -x_{Bm} \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & d & = & -z
\end{array}$$

$$\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_m} \geq 0$$

Un problema de programación lineal esta en forma Simplex si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. *Existen restricciones de no negatividad en todas las variables*
2. *Todas las restricciones principales son igualdades, y éstas forman una base de un sistema lineal.*
3. *La función objetivo, a maximizar esta expresada solo en términos de las variables no-básicas del sistema lineal.*
4. *Todas las constantes del sistema lineal son no negativas.*

Ejemplo 4.14 *Construya la tabla de Tucker del ejercicio anterior*

Transformamos la función objetivo en una función de maximización[6]

$Min\ z = x_1 - 4x_2 \rightarrow Max\ z = -x_1 + 4x_2$
Reformulando el ppl

$$\begin{aligned}
Max\ z + x_1 - 4x_2 &= 0 \\
x_3 + \ x_1 + x_2 &= 5 \\
x_4 + 3x_1 - x_2 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Podemos escribir la tabla

$$\begin{array}{cc|c|cc}
x_1 & x_2 & -1 & & . \\
\hline
1 & 1 & 5 & = & -x_3 \\
3 & -1 & 3 & = & -x_4 \\
\hline
-1 & 4 & 0 & = & -z
\end{array}$$

[6]Vea la sección forma canónica y estándar.

$\therefore$ Las Tablas de Tucker son una forma de expresar los ppl en forma estándar como si las variables básicas estuvieran despejadas: sirve para compactar la escritura del ppl, pero también para redefinir el pivoteo.

Suponga que entrará la base la k-ésima variable y saldrá de la base la j-ésima variable básica, tomando como pivote y_{jk}.

En una tabla Simplex definida como en el Capítulo 3, se observa que **Antes de un pivoteo** se tiene la siguiente forma:

	$\cdots$	x_{Bj}	$\cdots$	x_{Bm}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_r	$\cdots$	LD
z	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_r - c_r$	$\cdots$	$c_B\overline{b}$
x_{B1}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1r}	$\cdots$	$\overline{b_1}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{Bj}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{jk}	$\cdots$	y_{jr}	$\cdots$	$\overline{b_j}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{Bm}	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	y_{mr}	$\cdots$	$\overline{b_m}$

Después del pivoteo se llega a la siguiente tabla [11]

	...	x_{Bj}	...	x_{Bm}	...	x_k	...	x_r	LD
z	...	$\frac{c_k - z_k}{y_{jk}}$	...	0	...	0	...	$z_r - c_r - \frac{y_{ir}(z_k - c_k)}{y_{jk}}$	$c_B\overline{b} - \frac{(z_k - c_k)\overline{b_j}}{y_{jk}}$
x_{B1}	...	$\frac{-y_{1k}}{y_{jk}}$	...	0	...	0	...	$y_{1r} - \frac{y_{jr}y_{1k}}{y_{jk}}$	$\overline{b_1} - \frac{y_{1k}\overline{b_j}}{y_{jk}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	...	$\frac{1}{y_{jk}}$	...	0	...	1	...	$\frac{y_{jr}}{y_{jk}}$	$\frac{\overline{b_j}}{y_{jk}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{Bm}	...	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...	1	...	0	...	$y_{mr} - \frac{y_{jr}y_{mk}}{y_{jk}}$	$\overline{b_m} - \frac{y_{mk}\overline{b_j}}{y_{jk}}$

Analicemos la Tabla Simplex después del pivoteo

- La columna de la j-ésima variable básica

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{c_k - z_k}{y_{jk}} \\ \hline \frac{-y_{1k}}{y_{jk}} \\ \vdots \\ \frac{1}{y_{jk}} \\ \vdots \\ \frac{-y_{mk}}{y_{jk}} \end{pmatrix} = \frac{-columna\ j - ésima}{y_{jk}}$$

- La columna k-ésima

$$\begin{pmatrix} z_k - c_k \\ \hline y_{1k} \\ \vdots \\ y_{jk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_k$$

- El renglón j-ésimo

$$\left(0, \cdots, 1, \cdots, 0, \cdots, y_{rk}, \cdots, y_{rj}, \cdots, \overline{b_k}\right)$$

$$\Rightarrow \left(0, \cdots, \frac{1}{y_{jk}}, \cdots, 0, \cdots, 1, \cdots, \frac{y_{rj}}{y_{jk}}, \cdots, \frac{\overline{b_k}}{y_{jk}}\right)$$

o bien

$$\frac{\text{renglón } j\text{−ésimo}}{y_{jk}}$$

- La entrada i-ésima del renglón r-ésimo

$$y_{ir} \Rightarrow \frac{y_{jk} \cdot y_{ir} - y_{jr} \cdot y_{ik}}{y_{jk}}$$

Una manera de recordar la expresión anterior es:

$$det \begin{vmatrix} y_{ik} & y_{ir} \\ y_{jk} & y_{jr} \end{vmatrix} \left(\frac{-1}{y_{jk}}\right)$$

Las expresiones anteriores se pueden recordar utilizando el diagrama mnemotécnico conocido como la regla del rectángulo:

$$\begin{array}{c|cc|} & x_k & x_r \\ \hline x_{Bj} & y_{jk} & y_{jr} \\ x_{Bi} & y_{ik} & y_{ir} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc|} & x_{Bj} & x_r \\ \hline x_k & \frac{1}{y_{jk}} & \frac{y_{jr}}{y_{jk}} \\ x_{Bi} & \frac{-y_{ik}}{y_{jk}} & y_{ir} - \frac{y_{jr}y_{ik}}{y_{jk}} \\ \hline \end{array}$$

Para los problemas que cumplen con la definición anterior, de la regla del rectángulo, se utilizan las reglas de pivoteo para las tablas de Tucker:

- Sea p el pivote elegido
- Reemplazamos p por $\frac{1}{p}$
- Cada entrada q en la columna que contiene a p cambia a $-\frac{q}{p}$.
- Cada entrada r en el renglón que contiene a p cambia por $\frac{r}{p}$.

- Si s no está en el renglón o columna que contienen a p existen elementos únicos elementos q y r tal que q está en el mismo renglón que s y r en la misma columna que s.
  s es reemplazado por $\frac{ps-qr}{p}$

De estas reglas se deriva el siguiente teorema.

Teorema 4.7.1 *Sea una tabla de un ppl de maximización de la forma*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|cccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & x_i & \cdots & x_k & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{-1} \\
\hline
\cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} & \cdots & & \overline{b}_1 \\
\cdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jk} & \cdots & & \overline{b}_j \\
\cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & & \vdots \\
\cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mk} & \cdots & & \overline{b}_m \\
\hline
\cdots & c_i & \cdots & c_k & \cdots & & d \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ = -x_{B1} \\ \\ = -x_{Bj} \\ \\ = -x_{Bm} \\ = -z
\end{array}
\end{array}$$

con $a_{jk} \neq 0$*, la tabla que resulta después del pivoteo usando a* a_{jk} *como pivote:*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|cccccc|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & x_i & \cdots & x_{Bj} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{-1} \\
\hline
\cdots & \frac{a_{1i}a_{jk}-a_{ji}a_{1k}}{a_{jk}} & \cdots & \frac{-a_{1k}}{a_{jk}} & \cdots & & \frac{\overline{b_1}a_{jk}-\overline{b_j}a_{1k}}{a_{jk}} \\
\cdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\cdots & \frac{a_{ji}}{a_{jk}} & \cdots & \frac{1}{a_{jk}} & \cdots & & \frac{\overline{b_j}}{a_{jk}} \\
\cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & & \\
\cdots & \frac{a_{mi}a_{jk}-a_{ji}a_{mk}}{a_{jk}} & \cdots & \frac{-a_{mk}}{a_{jk}} & \cdots & & \frac{a_{jk}\overline{b_m}-a_{mk}\overline{b_j}}{a_{jk}} \\
\hline
\cdots & \frac{c_ia_{jk}-a_{ji}c_k}{a_{jk}} & \cdots & \frac{-c_k}{a_{jk}} & \cdots & & \frac{da_{jk}-c_k\overline{b}_j}{a_{jk}} \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ = -x_{B1} \\ \\ = -x_k \\ \\ = -x_{Bm} \\ = -z
\end{array}
\end{array}$$

Además se puede concluir que:

- *La región factible, S, representada por las dos tablas es la misma*
- *El valor de las funciones objetivo de ambas tablas coincide en cada punto de la Región S*

Ejemplo 4.15 *Aplique las reglas de pivoteo a la tabla de Tucker del ejercicio 4.14 tomando como pivote* $a_{21} = 3$

$$\begin{array}{|cc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & \multicolumn{1}{c}{-1} \\
\hline
1 & 1 & 5 \\
3 & -1 & 3 \\
\hline
-1 & 4 & 0 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
= -x_3 \\ = -x_4 \\ = -z
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{|cc|c|}
\multicolumn{1}{c}{x_4} & x_2 & \multicolumn{1}{c}{-1} \\
\hline
-\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 4 \\
\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\
\hline
\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
= -x_3 \\ = -x_1 \\ = -z
\end{array}$$

Debido a que las tablas de Tucker tienen la misma estructura que las Tablas Simplex, entonces siguen los mismos criterio de óptimización y de radio mínimo, para un problema de maximización que cuenta con una base factible explícita.

Algoritmo Simplex con tablas de Tucker

Sea un ppl de maximización representada con la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{(variables independientes)} \\ \boxed{\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & d \end{array}} = \text{(variables dependientes)} \end{array}$$

$$\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_m} \geq 0$$

1. Si $c_1, c_2, \cdots, c_n \leq 0$ terminar la tabla óptima
   Si no $c_k = max\{c_j\}$

2. Si $a_{1k}, \cdots, a_{mk} \leq 0$ terminar el problema es no-acotado

   Si no $$\frac{\bar{b}_j}{a_{jk}} = min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \ : \ a_{ik} > 0\right\}$$

   Hacemos a_{jk} el elemento pivote y aplicamos las reglas de pivoteo. Regresamos 1.

Ejemplo 4.16 *Resuelva el ejemplo 4.14 utilizando el Algoritmo Simplex para las Tablas de Tucker*

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & -1 \end{array}$$
$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 1 & \mathbf{1} & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 0 \end{array}} \begin{array}{l} = -x_3 \\ = -x_4 \\ = -z \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & -1 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc|c} \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{5}{1} \\ \frac{3\cdot1-1(-1)}{1} & \frac{-1}{-1} & \frac{1\cdot3-5(-1)}{1} \\ \hline \frac{-1\cdot1-4\cdot1}{1} & \frac{4}{-1} & \frac{1\cdot0-4\cdot5}{1} \end{array}} \end{array} \begin{array}{l} = -x_2 \\ = -x_4 \\ = -z \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & -1 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ \hline -5 & -4 & -20 \end{array}} \end{array} \begin{array}{l} = -x_2 \\ = -x_4 \\ = -z \end{array}$$

$\therefore$ La tabla es óptima. La solución óptima es $(x_1, x_2, x_3, x_4)^* = (0, 5, 0, 8)$ con valor de la función objetivo $z^* = 20$.

4.8. Tablas de Tucker y Tablas Simplex

Objetivo: Proporcionar el Programa en Matlab para aplicar el Algoritmo Simplex con las tablas de Tucker y mencionar su relación con las tablas Simplex.
Escribimos el código en Matlab para las tablas de Tucker .

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
$Max\ cx - d$	$\gg c \hookleftarrow$
$Ax \leq b$	$\gg A, b \hookleftarrow$
$x \geq 0$	$\gg n = size(A);$
	$\gg w = 0;\ m = n(1);\ n = n(2);$
$\boxed{\begin{array}{cc} A & b \\ \hline c & d \end{array}}$	$\gg T = [A, b; c, d];$
$x_N = x_1, \cdots, x_n$	$nobase = 1 : n;$
$x_B = x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$	$base = n + 1 : 1 : m + n$
	$while(w == 0)$
	$nobase, base$
$La\ \ tabla\ es$	$\gg fprintf('La\ tabla\ Simplex\ es \setminus n')$
$\boxed{\begin{array}{cc} B^{-1}A & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B * B^{-1} * b + d \end{array}}$	$disp(T)$
$Si\ todos\ c_B * B^{-1}A - c \leq 0$	$if(T(m + 1, 1 : n) <= 0)$
$el\ problema\ es\ óptimo$	$fprintf('Es\ optimo\ \setminus n')\ w = 1;$
$Si\ no$	$else$
$Calculamos\ \overline{c_k} = max\,\{z_j - c_j\}$	$[r, k] = max(T(m + 1, 1 : n));$
$Hacemos\ la\ prueba\ del$	$radio = ones(1, m) * realmax;$
$radio\ mínimo$	$for\ i = 1 : m$
$\frac{\overline{b_j}}{y_{ik}} = min \left\{ \frac{\overline{b_i}}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0 \right\}$	$if(T(i, k) > 0)$
	$radio(i) = T(i, n + 1)/T(i, k);$
	$end\ \ end$
	$[r, j] = min(radio);$
$Si\ no\ existe\ el\ pivote\ terminar$	$if(r == realmax)$
$el\ problema\ es\ no - acotado$	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado \setminus n')$
	$return$
$si\ existe\ el\ pivote$	$else$
$Aplicamos\ las\ reglas\ de\ pivoteo$	$for\ i = 1 : m + 1$
$Por\ la\ regla\ del\ rectángulo$	$for\ r = 1 : n + 1$
$a_{ir} = \frac{a_{ir}a_{jk} - a_{jr}a_{ik}}{a_{jk}}$	$AT(i, r) = (T(j, k) * T(i, r)$
	$-T(j, r) * T(i, k))/T(j, k);$
	$end\ \ end$
$\frac{renglón\ j}{pivote}$	$AT(j, :) = T(j, :)/T(j, k);$
$\frac{-columna\ k}{pivote}$	$AT(:, k) = -T(:, k)/T(j, k);$
$\frac{1}{pivote}$	$AT(j, k) = 1/T(j, k);$

w es la variable que le indica al problema cuando terminar las iteraciones.

T(m+1,1:n) es el vec-tor de los coeficientes de costo reducidos.

T(i,n+1)=$\overline{b_i}$, T(i,k)=y_{ik}.

Los índices se mueven hasta m+1, n+1 por que aumentamos la columna del vector b y el renglón de los coeficientes de costo.

La matriz AT es auxiliar para guardar las entradas calculadas por la regla del rectángulo.

La variable aux sirve para guardar el índice de la variables que entra a la base.

$$\begin{array}{r|l} & T = AT; \\ x_{Bj} \text{ sale de la base} & aux = nobase(k); \\ x_k \text{ entra a la base} & nobase(k) = base(j) \\ & base(j) = aux; \\ & end\ \ end\ \ end \end{array}$$

Se transforma la función objetivo en $Max\ -z = -x_1 + x_2 + 3x_3$

Ejemplo 4.17 *Resuelva el siguiente problema utilizando el programa en Matlab para las tablas de Tucker*[7]

$$\begin{aligned} Max\ z = x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 & \\ x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &\leq \ 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

$\gg A = [1\ 1\ -2; -1\ 2\ 3];$
$\gg b = [4;\ 10];$
$\gg c = [-1\ 1\ -2];$
$\gg d = 0;$
$\gg tablatucker(A, b, c, d)$
$nobase = 1\ \ 2\ \ 3$
$base = 4\ \ 5$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 10 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ = x_4 \\ = x_5 \\ = -z \end{array}$$

$nobase = 1\ \ 4\ \ 3$
$base = 2\ \ 5$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 7 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_4 & x_3 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 7 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 0 & -4 \end{array} \begin{array}{l} \\ = x_2 \\ = x_5 \\ = -z \end{array}$$

Observe que en la última tabla el coeficiente de costo de x_3 es cero, por lo tanto existen óptimos alternativos.

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_4 & x_5 & -1 \\ \hline \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{32}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \hline -2 & -1 & 0 & -4 \end{array} \begin{array}{l} \\ = x_2 \\ = x_3 \\ = -z \end{array}$$

[7] El algoritmo de las tablas de Tucker con estructura de función se encuentra en el Apéndice B.

Ejemplo 4.18 *Se resuelve el ejemplo 4.11 usando tablas de Tucker y se compara cada tabla con la correspondiente tabla Simplex.*

$$
\begin{aligned}
Min\ z = -2x_1 - x_2 & \\
x_1 - x_2 &\leq 10 \\
2x_2 &\leq 40 \\
x_1, x_2 &\geq\ 0
\end{aligned}
$$

Primero cambiamos la función objetivo del problema a una función de maximización

$$Min\ z = -2x_1 - x_2 \ \rightarrow\ Max\ -z = 2x_1 + x_2 \ \rightarrow\ Max\ -z - 2x_1 - x_2 = 0$$

Tablas Simplex

	z	x1	x2	x3	x4	LD
x3	0	1	-1	1	0	10
x4	0	0	2	0	1	40
z	1	2	1	0	0	0

	z	x1	x2	x3	x4	LD
x1	0	1	-1	1	0	10
x4	0	0	2	0	1	40
z	1	0	3	-2	0	-20

	z	x1	x2	x3	x4	LD
x1	0	1	0	1	1/2	30
x2	0	0	1	0	1/2	20
z	1	0	0	-2	-3/2	-80

Tablas de Tucker

x1	x2	-1	
1	-1	10	=-x3
0	2	40	=-x4
2	1	0	= -z

x3	x2	-1	
1	-1	10	=-x1
0	2	40	=-x4
-2	3	-20	= -z

x3	x4	-1	
1	1/2	30	=-x1
0	1/2	20	=-x2
-2	-3/2	-80	=- z

Las tablas son equivalentes. Lo único que se omite de la tabla Simplex a la tabla de Tucker son las columnas correspondientes a la submatriz identidad y los $z_j - c_j = 0 \ \ \forall x_j \in x_B$.
Veamos como pasar de la tabla Simplex a la tabla Tucker

	z	x_B	x_N	LD
z	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Dando otro orden a los renglones

$$\begin{array}{c} \\ x_B \\ z \end{array}\begin{array}{c|c|c|c} z & x_B & x_N & LD \\ \hline 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 1 & 0 & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \end{array}$$

Eliminamos las columnas correspondientes a x_B y z; colocamos estas variables del lado derecho con signo negativo.

$$\begin{array}{c|c} x_N & -1 \\ \hline B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \end{array}\begin{array}{l} \\ = -x_B \\ = z \end{array}$$

Queda establecida la tabla Tucker.

Antes de pasar a ppl donde no hay una base explícita, veamos una propiedad más de este tipo de problemas.

$$Min\ z = cx + \overline{0}\widetilde{x}$$

$$Ax + I\widetilde{x} = b$$

$$x, \widetilde{x} \geq \overline{0}$$

Sea B una base factible

$$Min\ (c_B B^{-1}A - c)x + (c_B B^{-1} - \overline{0})\widetilde{x} = c_B B^{-1}b$$

$$B^{-1}Ax + B^{-1}\widetilde{x} = B^{-1}b$$

$$x, \widetilde{x} \geq 0$$

Con el cambio de variable $w = c_B B^{-1}$

Es equivalente a

$$Min\ z = (wA - c)x + (w - \overline{0})\widetilde{x} + wb$$

$$B^{-1}Ax + B^{-1}\widetilde{x} = B^{-1}b$$

$$x, \widetilde{x} \geq 0$$

Escribiendo la tabla Simplex

$$\begin{array}{c} \\ z \\ x_B \end{array}\begin{array}{c|c|c|c} z & x & \widetilde{x} & LD \\ \hline 1 & wA - c & w & wb \\ \hline 0 & B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \end{array}$$

Las variables de holgura $\widetilde{x}$ en sus columnas nos proporcionan la inversa de B y en el renglón z el valor de w.

Ejemplo 4.19 *Resuelva el siguiente ppl e identifique B^{-1} y w en cada tabla.*

$$\begin{aligned} Max\ z = 4x_1 + \ 2x_2 - x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 & \\ 4x_1 - \ \ x_2 + x_3 + \ \ x_4 + 0\cdot x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + \ \ x_5 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Por tener una base factible dada por las variables de holgura en restricciones de menor o igual, B^{-1} estará representada por las columnas de $x_4,\ x_5$ y w por los coeficientes de costos de $x_3,\ x_4$.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-4	-2	1	0	0	0
x_4	0	4	-1	1	1	0	8
x_5	0	2	0	1	0	1	6

$$w = (0,0) \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-3	2	1	0	8
x_1	0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	2
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	2

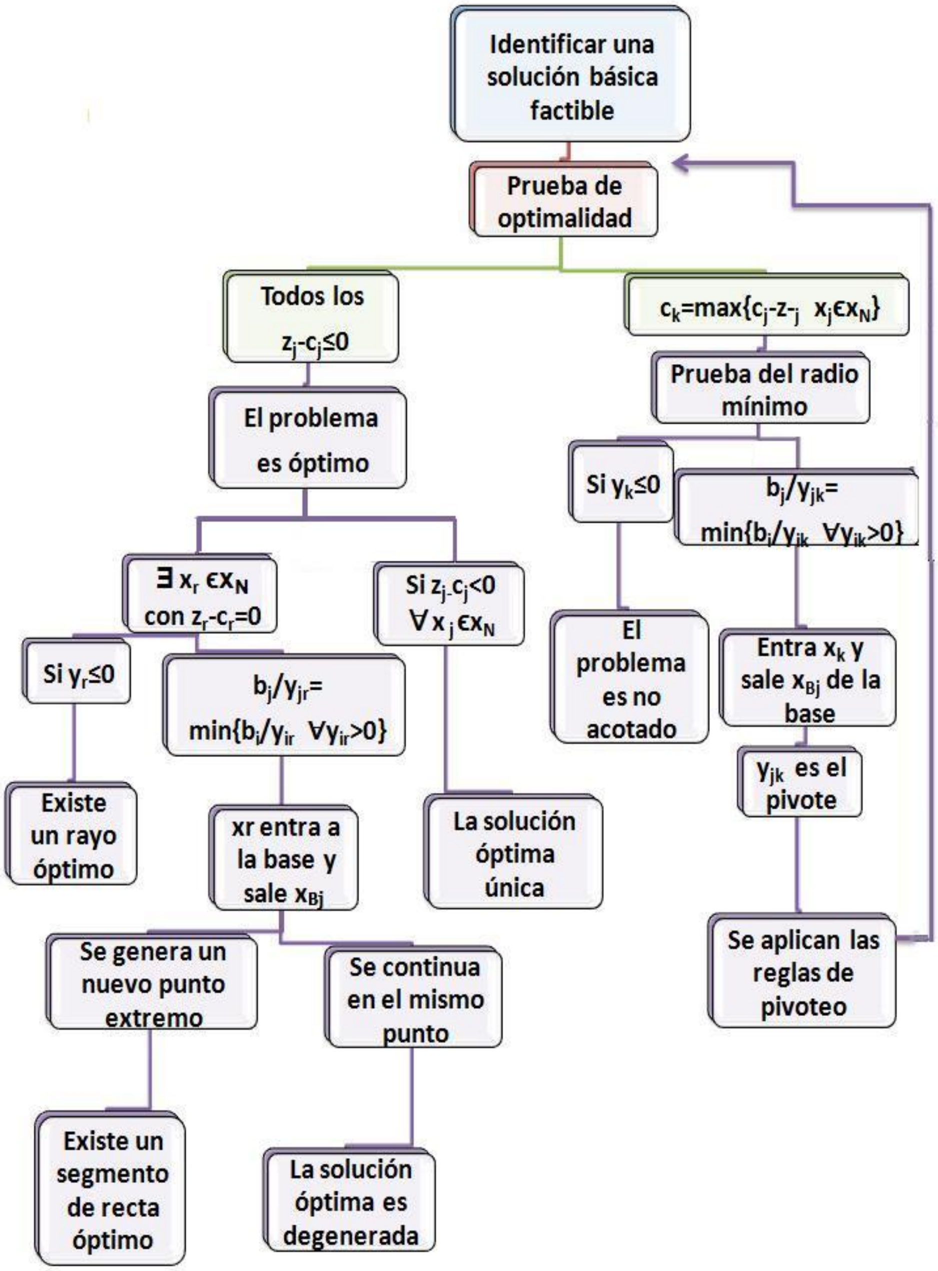
$$w = (1,0) \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	5	-2	6	20
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_2	0	0	1	1	-1	1	4

$$w = (-2,6) \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

No hay pivote.
$\therefore$ El problema es no-acotado.

El Algoritmo Simplex y sus casos especiales para un problema de minimización pueden ser resumidos en el siguiente diagrama.



Identificar una solución básica factible
Prueba de optimalidad
Todos los z_j-c_j≤0
c_k=max{c_j-z_j x_j∈x_N}
Prueba del radio mínimo
El problema es óptimo
Si y_k≤0
b_j/y_{jk}= min{b_i/y_{ik} ∀y_{ik}>0}
∃ x_r ∈x_N con z_r-c_r=0
Si z_j-c_j<0 ∀ x_j ∈x_N
El problema es no acotado
Entra x_k y sale x_{Bj} de la base
Si y_r≤0
b_j/y_{jr}= min{b_i/y_{ir} ∀y_{ir}>0}
y_{jk} es el pivote
Existe un rayo óptimo
xr entra a la base y sale x_{Bj}
La solución óptima única
Se aplican las reglas de pivoteo
Se genera un nuevo punto extremo
Se continua en el mismo punto
Existe un segmento de recta óptimo
La solución óptima es degenerada

4.9. Ejercicios

1.

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 10x_4 + 0 \cdot x_5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5 &= -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) Encuentre todas las posibles bases del problema.

   b) Encuentre los puntos extremos generados por las bases factibles.

   c) Resuelva el problema.

2. Escriba las líneas de código que permitan encontrar todas las posibles bases factibles con su tabla Simplex asociada usando Matlab

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 - x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 &\leq 5 \\ 5x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Utilizando el Simplex Rudimentario resuelva:

$$\begin{aligned} Max\ z = 2x_1 - x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 &= 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva con el Algoritmo Simplex

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + 7x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 - x_4 &\geq 3 \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Hint $[x_1, x_2]$ es una base factible.

5. Resuelva con Tablas de Tucker

$$\begin{aligned} Max\ z = x_1 + x_2 - \ x_3 & \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 + \ x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Resuelva usando el Algoritmo Simplex

$$\begin{aligned} Max\ z = x_1 + \ \ x_2 + \ x_3 & \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + \ x_3 &\leq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Proporcione un ejemplo donde la solución óptima sea degenerada.

8. El ejemplo 4.12c) es un ppl no-acotado, encuentre una solución factible $\overline{x}$ tal que $c\overline{x} = 413$

Capítulo 5

Encontrando una Solución Inicial

Objetivo: Mostrar los métodos de las Dos Fases y la Gran M utilizando las diversas versiones del Algoritmo Simplex del capítulo anterior.

5.1. El Método de las Dos Fases

Objetivo: Presentar las ideas intuitivas que llevan a la construcción del método de las Dos Fases.

Sea un ppl en forma estándar que no cuenta con una base explícita y con $b \geq 0$ como:

$$\begin{aligned} Min\ z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} Max\ z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponemos que en un problema de maximización:

$$Ax - b = Ax - b + Ia \quad \leftrightarrow \quad Ia = \overline{0} \quad \leftrightarrow \quad a_i = 0 \;\; \forall i = 1, \cdots, m$$

Si agregamos la matriz identidad de dimensión m al problema necesita que todas las variables a_i sean iguales a cero

$$Ax + Ia = b \qquad x, a \geq 0$$

¿Cómo forzamos a las variables a_i a tomar el valor cero?

Definimos $z_a = \sum_{i=1}^{m} a_i$ una función objetivo auxiliar que sólo depende de las variables a_i a las cuales llamaremos variables artificiales.

$$Si \;\; a_i \geq 0 \qquad \rightarrow z_a = \sum_{i=1}^{m} a_i \geq 0 \;\; la\ función\ alcanza\ su\ mínimo\ en\ a = \overline{0}$$

Definimos el ppl

$$\begin{aligned} Min\ z_a &= \sum_{i=1}^{m} a_i \\ Ax + Ia &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

con B = I una base factible $x_B = a$

Fase I

Resolver el ppl

$$P(a): \qquad \begin{aligned} Min\ z_a &= \sum_{i=1}^{m} a_i \\ Ax + Ia &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

La función z_a está acotada inferiormente y por Teorema 3.1.3 el óptimo existe y se alcanza en al menos en un punto extremo, entonces el sistema siempre tiene solución.

De esto se desprenden 2 casos:

1. Si $z_a(x^*) > 0$, existe al menos una a_i tal que $a_i > 0 \ \therefore a_i \in x_B$.

   $a_{1i}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_i = b_i$
   Si restamos a_i de ambos lados de la igualdad

   $a_{1i}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_i - a_i < b_i \quad \forall x \geq 0$

   $\therefore S = \emptyset$, debido a que ninguna solución x cumple la i-ésima restricción.
   $\therefore$El problema es infactible.

2. Si $z_a(x^*) = 0$ tenemos los subcasos:

   a) Existe al menos una $a_i = 0$ tal que $a_i \in x_B$ de donde el problema P(a) es degenerado, es decir existen diferentes bases que generan el mismo punto.

      - Si es posible tomar una base B que genere x^* tal que todas las x_B sean variables x_i, B será la base factible inicial del problema, además concluimos que la restricción i-ésima es redundante.
      - Si no existe B con las condiciones anteriores entonces $rang(A) < m$, es decir existe al menos un renglón linealmente dependiente, que contiene a a_i.
        Eliminamos los renglones linealmente dependientes y continuamos con la fase II.

En ambos casos la base B tal que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ es una base factible para el problema.

b) Ninguna de las a_i estan en la base entonces existe B submatriz de A tal que B es una base factible y $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ donde $x_{Bj} = x_{kj} \quad \forall j = 1, \cdots, m$.

Fase II

Al eliminar las columnas correspondientes a a_i y el renglón z se tiene la tabla

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x_B & x_N & LD \\
\hline
z & 1 & & & \\
\hline
x_B & 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\
\hline
\end{array}
$$

Para el renglón z:

- El coeficientes de costo es cero para toda x que esté en la base.
- Calculamos $c_B B^{-1}N - c_N$ para todas las variables no-básicas.
- Calculamos $c_B B^{-1}b$ como el valor de la función objetivo.

Completando la tabla

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x_B & x_N & LD \\
\hline
z & 1 & 0 & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \\
\hline
x_B & 0 & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\
\hline
\end{array}
$$

Aplicar el algoritmo Simplex a esta tabla.
Fin del Algoritmo de las dos Fases.

Ejemplo 5.1 *Resolver el siguiente problema por el método de las dos fases aplicando el algoritmo Simplex Rudimentario.*

$$
\begin{aligned}
Max\ z\ &= x_1 + 2x_2 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
-x_1 + x_2 &\geq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

En forma estándar

$$
\begin{aligned}
Max\ z\ &= x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
x_1 + \ x_2 + \ x_3 + 0 \cdot x_4 &= 1 \\
-x_1 + \ x_2 + \ 0 \cdot x_3 - \ x_4 &= 2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

No existe una base explícita para el problema, aumentamos las variables artificiales a_1, a_2.

Fase I Resolver

$$Min\ z_a = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + a_1 + a_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$x, a \geq 0$$

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a_1 & a_2 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$
.

$t=0$	N	N	N	N	B	B	
$x^{(0)}$	0	0	0	0	1	2	$cx^{(0)} = 3$
$\Delta_1 x$	1	0	0	0	-1	-1	$\overline{c_1} = 0$
$\Delta_2 x$	0	1	0	0	-1	-1	$\boxed{\overline{c_2} = -2}$
$\Delta_3 x$	0	0	1	0	-1	0	$\overline{c_3} = -1$
$\Delta_4 x$	0	0	0	1	0	1	$\overline{c_4} = 1$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\lambda_2 = 1$
$\lambda_2 \Delta_2 x$	0	1	0	0	-1	-1	$\lambda_2 \overline{c_2} = -2$
$t=1$	N	B	N	N	N	B	
$x^{(1)}$	0	1	0	0	0	1	$cx^{(1)} = 1$
$\Delta_1 x$	1	-1	0	0	0	1	$\overline{c_1} = 1$
$\Delta_3 x$	0	-1	1	0	0	1	$\overline{c_3} = 1$
$\Delta_4 x$	0	0	0	1	0	1	$\overline{c_4} = 1$
$\Delta_1 a$	0	-1	0	0	1	1	$c\Delta_1 a = 1$

$\therefore$El problema es óptimo $x^* = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ $\quad cx^* = 1$

Pero $z_a = 1 > 0 \quad \rightarrow$ El problema es infactible debido a que a_2 no sale de la base.

5.2. Programa para el Método de las Dos Fases

Objetivo: Presentar ejemplo de degeneración, infactibilidad, redundancia utilizando el Algoritmo de las Dos Fases y presentación del Programa en Matlab.

Ejemplo 5.2 *Resolver el siguiente problema por el algoritmo de las dos fases y las tablas de Tucker*

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Escribimos el problema P(a)

$$Max\ z_a = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - a_1 - a_2 - a_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$x, a \geq 0$$

$$\begin{array}{cccc|c|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -1 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & = & -a_1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 2 & = & -a_2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 12 & = & -a_3 \\ \hline 5 & 1 & 5 & 1 & -19 & = & -z_a \end{array}$$

z_a en términos de x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5 \\ -a_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2 \\ -a_3 &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 12 \\ \hline -a_1 - a_2 - a_3 &= 5x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 19 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cc} a_2 & x_2 & x_3 & x_4 & -1 & & \\ \hline -1 & \mathbf{2} & 0 & 2 & 3 & = & -a_1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & = & -x_1 \\ -3 & 4 & 0 & 4 & 6 & = & -a_3 \\ \hline -5 & 6 & 0 & 6 & -9 & = & -z_a \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c|cc} a_2 & a_1 & x_3 & x_4 & -1 & & \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & = & -x_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{7}{2} & = & -x_1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & = & -a_3 \\ \hline -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & = & -z_a \end{array}$$

La solución óptima es $x^* = (7/2, 3/2, 0, 0, 0, 0, 0)$ $\quad cx^* = 0$
$z_a = 0$ con $a_3 = 0$ en la base. Estamos en el caso 2a), pero no es posible introducir alguna x_i a la base, por tanto la tercera restricción $3x_1+x_2+3x_3+x_4 = 12$ es combinación lineal de las otras 2 restricciones lo que hace que A no sea de rango completo.
Eliminamos entonces el tercer renglón de la tabla y comenzamos la fase II

$$\begin{array}{cc|c|cc} x_3 & x_4 & -1 & & \\ \hline 0 & 1 & \frac{3}{2} & = & -x_2 \\ \mathbf{1} & 0 & \frac{7}{2} & = & -x_1 \\ \hline 2 & 2 & -5 & = & -z \end{array}$$

expresando z en términos de x_1, x_2

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + \tfrac{7}{2} \\ x_2 &= -x_4 + \tfrac{3}{2} \\ \hline x_1 + x_2 &= 5 - x_3 - x_4 \\ -z &= -5 + 2x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
x_1 & x_4 & -1 \\
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
x_1 & x_2 & -1 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cc|c|}
\hline
0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} \\
1 & 0 & \frac{7}{2} \\
\hline
-2 & 2 & -2 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
= -x_2 \\
= -x_3 \\
= -z
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
0 & 1 & \frac{3}{2} \\
1 & 0 & \frac{7}{2} \\
\hline
-2 & -2 & -5 \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{l}
= -x_4 \\
= -x_3 \\
= -z
\end{array}$$

$\therefore$La tabla es óptima $x^* = (0, 0, \frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ $\quad cx^* = 5$

Ejemplo 5.3 *Resuelva el siguiente ppl utilizando el Algoritmo de las 2 fases con el Algoritmo Simplex e identifique los movimientos en la gráfica de la región factible S.*

En forma estándar

$$\begin{aligned}
Min\ z = 3x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 & \\
x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 &= 3 \\
3x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - \quad x_4 + 0 \cdot x_5 &= 5 \\
x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - \quad x_5 &= 2 \\
x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Fase I Resolver el sistema

$Min\ z_a = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + a_1 + a_2 + a_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x, a \geq 0$

	z_a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z_a	1	5	1	1	-1	-1	0	0	0	10
a_1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	3
a_2	0	**3**	1	0	-1	0	0	1	0	5
a_3	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	2
z_a	1	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	-1	0	-$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
a_1	0	0	$\frac{2}{3}$	**1**	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
a_3	0	0	-$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

	z_a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z_a	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	-1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
a_3	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_3	0	0	2	1	0	1	1	0	-1	1
x_1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	0	-1	3	1

$x^* = (2,0,1,1,0,0,0,0)$ $cx^* = 0$ y no hay variables artificiales en la base, eliminamos las últimas 3 columnas.

Fase II

Calculemos el renglón z para la base factible dada por x_3, x_1, x_4

$c = (3,1,0,0,0)$ $\qquad$ $c_B = (0,3,0)$

$z + (c_B B^{-1}A - c)x = c_B B^{-1}b$

$$donde \quad B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z + \left[(0,3,0) * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - (3,1,0,0,0) \right] x = (0,3,0) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

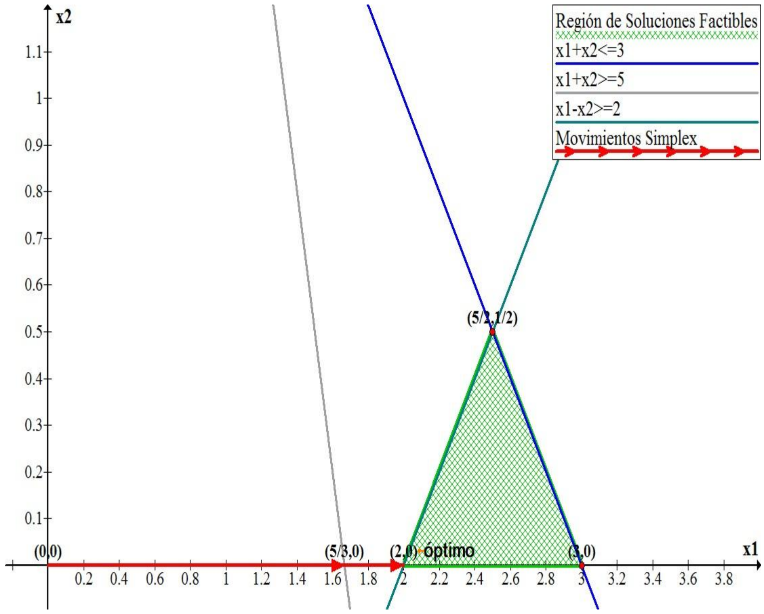
$\rightarrow z + (0,-4,0,0,-3)x = 6$

La tabla Simplex asociada es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-4	0	0	-3	6
x_3	0	0	2	1	0	1	1
x_1	0	1	-1	0	0	-1	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	1

$\therefore$ La tabla es óptima $x^* = (2,0,0,0)$ $\quad cx^* = 6$.

Los movimientos en el espacio x_1, x_2, realizados por el Algoritmo de las Dos Fases se observan en la gráfica



Ejemplo 5.4 *Resuelva el siguiente problema por el método de las dos Fases*

$$
\begin{aligned}
Max\ z = x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 - \quad x_4 + 0 \cdot x_5 \\
2x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 + \ 2x_4 + \quad x_5 = 9 \\
x_1 - \quad x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad x_4 + 0 \cdot x_5 = 2 \\
x_1 + 0 \cdot x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 + 0 \cdot x_5 = 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

No es necesario añadir siempre la matriz identidad sólo la cantidad de vectores necesarios para formar la base.

Resolvemos el P(a)

$$
\begin{aligned}
Min\ z_a = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + \quad a_1 + \quad a_2 \\
2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 9 \\
x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + a_1 + 0 \cdot a_2 = 2 \\
x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot a_1 + a_2 = 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	z_a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	LD
z_a	1	2	-1	1	2	0	0	0	9
x_5	0	2	-1	1	2	1	0	0	9
a_1	0	**1**	-1	0	1	0	1	0	2
a_2	0	1	0	1	1	0	0	1	7
z_a	1	0	1	1	0	0	-2	0	5
x_5	0	0	1	1	0	1	-2	0	5
x_1	0	1	-1	0	1	0	1	0	2
a_2	0	0	1	**1**	0	0	-1	1	5
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_5	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0
x_1	0	1	-1	0	1	0	1	0	2
x_3	0	0	1	1	0	0	-1	1	5

La solución óptima es $x_a^* = (2,0,5,0,0,0,0)$ $cx_a^* = 0$ y el problema es degenerado pues $x_5 = 0$ y es básica.

Fase II

Eliminamos las columnas de a_1, a_2

Calculamos el renglón z con la función objetivo original

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-1	0	2	0	7
x_5	0	0	0	0	0	1	0
x_1	0	1	-1	0	1	0	2
x_3	0	0	**1**	1	0	0	5
z	1	0	0	1	2	0	12
x_5	0	0	0	0	0	1	0
x_1	0	1	0	1	1	0	7
x_2	0	0	1	1	0	0	5

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (7,5,0,0,0)$ $z(x*) = 12$ y es una solución degenerada.

El algoritmo aumenta una variable artificial por cada restricción.

Escribamos el Programa en Matlab de este Algoritmo.

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
Añadimos las variables artificiales	$n = size(A); m = n(1\ :)$
$Si\ Ax = b$	$n = n(2);$
$Ax + Ia = b$	$B = eye(m);$
$[A\ I]\, X' = b$	$E = [A, B]\,;$
Escribimos la función z_a	$d = [zeros(1, n), ones(1, m)]\,;$
$Min\ z_a = \bar{0}x + \sum_{i=1}^{n} a_i$	$CB = ones(1, m);$
Construimos la tabla Simplex	$w = 0;\ \ while(w == 0)$
$x \qquad a \qquad LD$	$T = [CB * inv(B) * E - d,$
$\boxed{\begin{array}{ccc} c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} - e & c_B B^{-1}b \\ B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \end{array}}$	$CB * inv(B) * b;$
	$inv(B) * E, inv(B) * b]$
	$fprintf('La\ tabla\ Simplex\ es\ \setminus n')$
	$disp(T)$
Criterio de Optimalidad	
$Si\ z_j - c_j \leq 0$	$if(CB * inv(B) * E - d <= 0)$
El problema auxilar es	$fprintf('El\ problema\ auxiliar$
óptimo	$es\ optimo \setminus n')w = 1;$
si no	$else$
$z_k - c_k = max\,\{z_j - c_j\}$	$[r, k] = max(CB * inv(B) * E - d);$
x_k *entra a la base*	$radio = ones(1, m) * realmax;$
Calculamos	$for\ i = 1 : m$
$\frac{\overline{bj}}{y_{jk}} = min\left\{\frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\}$	$if(T(i + 1, k) > 0)$
	$radio(i) =$
	$T(i + 1, m + n + 1)/T(i + 1, k);$
x_{Bi} *sale de la base*	$end\ \ end$
	$[r, j] = min(radio);$
Convertimos $z_k - c_k = 0$	$B(:\ .j) = E(:, k);$
$y\ y_k = e_j$	$CB(:, j) = d(:, k);$
Regresar a 1	$end\ \ end$
$FaseII$	
$Si\ z > 0$	$if(CB * inv(B) * b > 0)$
el problema no tiene	$fprintf('El\ problema\ no\ tiene$
solución factible, pues existe	$solucion\ factible,\ pues\ existe$
una variable artificial en la base	$variable\ artificial\ en\ la\ base)$
Si no	$else$
existe una base factible	$fprintf('Existe\ una\ base\ factible,$
inicia la fase II	$empieza\ la\ fase\ 2 \setminus n')$
Eliminamos las variables artificiales	$basesimplex(A, B, b, c)$
Calculamos $C_B * B^{-1}A - c$ *y* $C_B B^{-1}b$	end
para la nueva tabla	
Utilizamos el método Simplex	

d es el vector de la función z_a

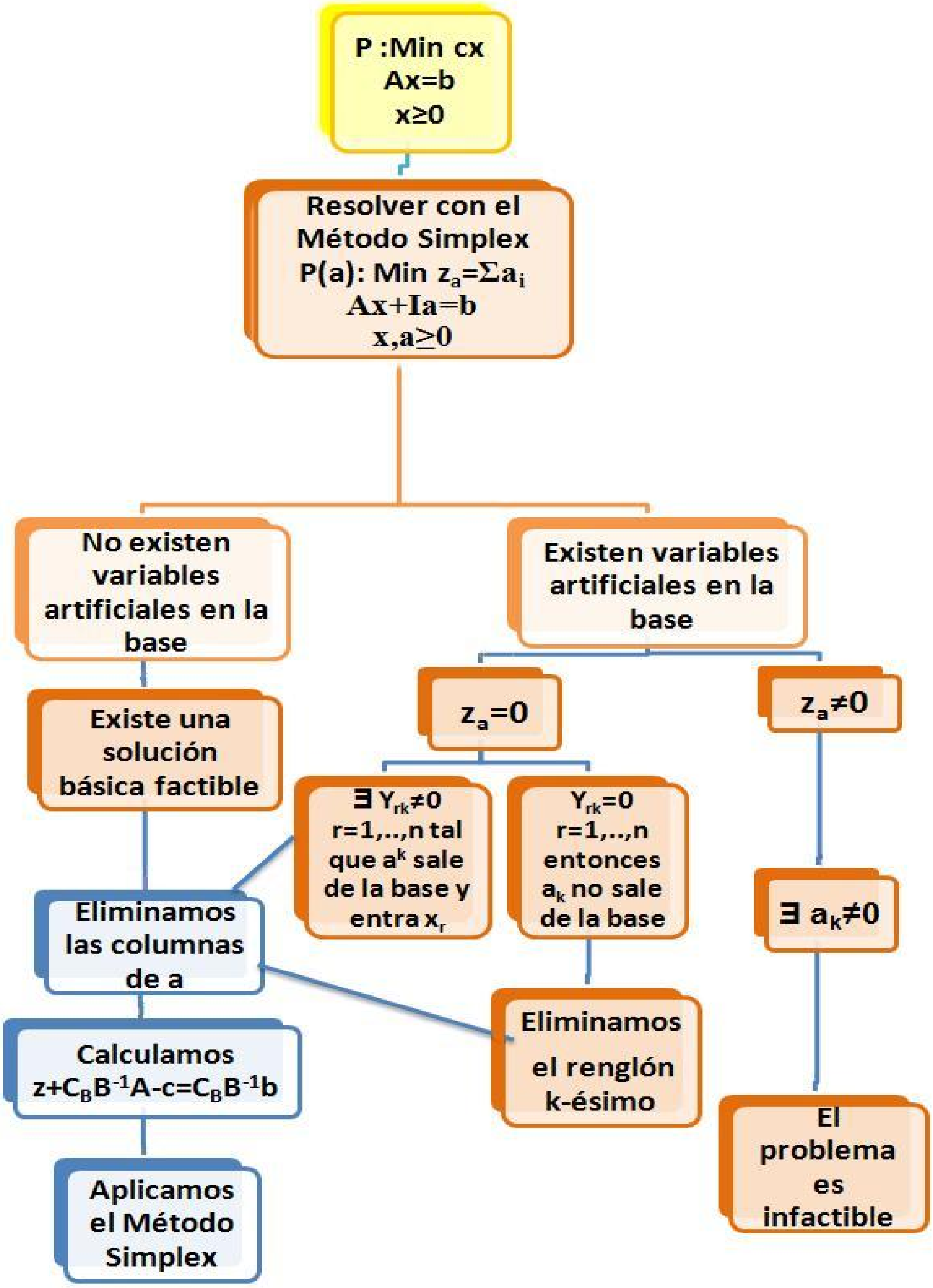
a es el vector de las variables artificiales.

e es un vector con todas sus entradas iguales a 1.

E es la matriz asociada al problema P(a) *ie*. al problema que contiene las variables artificiales.

La función basesimplex(A,B,b,c) se encuentra en el Apéndice B, utiliza el Algoritmo Simplex a partir de una base factible dada.

Podemos resumir el Algoritmo de las dos Fases en el siguiente diagrama:



5.3. El Método de la Gran M

Objetivo: Presentación del método de la gran M y los posibles casos que podemos encontrar al aplicarlo.

El siguiente método es el llamado Método de Penalización o Método de la gran M.
Como se mencionó en la sección anterior

$$Ax - b = Ax - b + I\widetilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad I\widetilde{x} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{x}_i = 0 \ \ \forall i$$

Forzaremos a las $\widetilde{x}_i's$ a ser cero penalizando a la función objetivo original.
Si el problema es Max z=cx haremos Max z_M= cx -M $\sum_{i=1}^{m} \widetilde{x}_i$. Para que todas las $\widetilde{x}_i = 0$ sean 0 asignamos a M un valor positivo muy grande.
Si el problema es Min z=cx entonces cambia a Min z_M=cx+M $\sum_{i=1}^{m} \widetilde{x}_i$

Al resolver el problema P(M)

$$\begin{aligned} Min\ z_M = cx + M\sum_{i=1}^{M}\widetilde{x}_i \\ Ax + I\widetilde{x} = b \\ x, \widetilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Es posible encontrar dos casos principales:

1. El óptimo es no-acotado es decir, $z \to -\infty$
   a) $\widetilde{x}_i = 0 \ \ \forall i$; el problema original es no-acotado.
   b) $\exists\ \widetilde{x_k} > 0$, que no sale de la base por lo que el problema es inconsistente.
2. El óptimo es finito z es constante
   a) Si $\widetilde{x}_i = 0 \ \ \forall i$, se encontró la solución óptima.
   b) Si $\exists\ \ \widetilde{x_k} > 0$, el problema no tiene soluciones factibles.

Ejemplo 5.5 *Resuelva los problemas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 utilizando el método de la gran M y determine el caso al que corresponde cada uno.*

Ejemplo 5.1 Aplicando el algoritmo Simplex Rudimentario

x_1	x_2	x_3	x_4	$\widetilde{x_1}$	$\widetilde{x_2}$	b
1	1	1	0	1	0	1
-1	1	0	-1	0	1	2

$$\begin{array}{ccccccccc}
t=0 & N & N & N & N & B & B & \\
x^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & cx^{(0)} = -3M \\
\Delta_1 x & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \overline{c_1} = 1 \\
\Delta_2 x & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & \boxed{\overline{c_2} = 2M+2} \\
\Delta_3 x & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \overline{c_3} = M \\
\Delta_4 x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \overline{c_4} = -M \\
 & - & - & - & - & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \lambda_2 = 1 \\
\lambda_2\Delta_2 x & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & \lambda_2\overline{c_2} = 2M+2 \\
t=1 & N & B & N & N & N & B & \\
x^{(1)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & cx^{(1)} = 2-M \\
\Delta_1 x & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{c_1} = -2M-1 \\
\Delta_3 x & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \overline{c_3} = -2-M \\
\Delta_4 x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \overline{c_4} = -M \\
\Delta_1 \widetilde{x} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & c\Delta_1\widetilde{x} = -2M-2
\end{array}$$

El problema es óptimo, pero no es finito $z = 2 - M \to -\infty$,
$\widetilde{x_2} = 1$, el problema es inconsistente, por tanto corresponde al caso 1 b)

Ejemplo 5.2 Utilizando el método de las dos fases con las tablas de Tucker

Expresando z_M *en términos de* x_1, x_2, x_3, x_4

$-M\widetilde{x_1} = Mx_1 + Mx_2 + Mx_3 + Mx_4 - 5M$ *de la primera restricción*

$-M\widetilde{x_2} = Mx_1 - Mx_2 + Mx_3 - Mx_4 - 2M$ *de la segunda restricción*

$-M\widetilde{x_3} = 3Mx_1 + Mx_2 + 3Mx_3 - Mx_4 - 12M$ *de la tercera restricción*

$-M\widetilde{x}_1 - M\widetilde{x}_2 - M\widetilde{x}_3 = 5Mx_1 + Mx_2 + 5Mx_3 + Mx_4 - 19M$

$-z_M = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - M\widetilde{x}_1 - M\widetilde{x}_2 - M\widetilde{x}_3$

$-z_M = (5M-1)x_1 + (M-1)x_2 + (5M+1)x_3 + (M+1)x_4 - 19M$

. x_1	x_2	x_3	x_4	-1		
1	1	1	1	5	=	$-\widetilde{x}_1$
1	-1	**1**	-1	2	=	$-\widetilde{x}_2$
3	1	3	1	12	=	$-\widetilde{x}_3$
$5M-1$	$M-1$	$5M+1$	$M+1$	$19M$	=	$-z_M$

. x_1	x_2	$\widetilde{x}_2$	x_4	-1		
0	2	-1	**2**	3	=	$-\widetilde{x}_1$
1	-1	1	-1	2	=	$-x_3$
0	4	-3	4	6	=	$-\widetilde{x}_3$
-2	$6M$	$-5M-1$	$6M+2$	$9M-2$	=	$-z_M$

$$
\begin{array}{cccc|cl}
x_1 & x_2 & \widetilde{x}_2 & \widetilde{x}_1 & -1 & \\
\hline
0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & = \ -x_4 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & = \ -x_3 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & = \ -\widetilde{x}_3 \\
\hline
-2 & -2 & -2M & -3M-1 & -5 & = \ -z_M
\end{array}
$$

La solución óptima $x_M^* = (0, 0, 7/2, 3/2, 0, 0, 0) \quad cx^* = 5$
como $\widetilde{x} = 0$ se encontró la solución óptima del problema[1] se trata del caso 2 a).

Ejemplo 5.3 Utilizando el Algoritmo Simplex

$$
\begin{array}{l}
M\widetilde{x}_1 = 3 - Mx_1 - Mx_2 - Mx_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\
M\widetilde{x}_2 = 5 - 3Mx_1 - Mx_2 + 0 \cdot x_3 + Mx_4 + 0 \cdot x_5 \\
M\widetilde{x}_3 = 2 - Mx_1 + Mx_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + Mx_5 \\
\hline
M\widetilde{x}_1 + M\widetilde{x}_2 + M\widetilde{x}_3 = 10M - 5Mx_1 - Mx_2 - Mx_3 + Mx_4 + Mx_5
\end{array}
$$

$$z_M = 3x_1 + x_2 + M\widetilde{x}_1 + M\widetilde{x}_2 + M\widetilde{x}_3$$

$$z_M + (5M-3)x_1 + (M-1)x_2 + Mx_3 - Mx_4 - Mx_5 = 10M$$

	z_M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	LD
z_M	1	5M-3	M-1	M	-M	-M	0	0	0	10M
$\widetilde{x}_1$	0	1	1	1	0	0	1	0	0	3
$\widetilde{x}_2$	0	**3**	1	0	-1	0	0	1	0	5
$\widetilde{x}_3$	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	2
z_M	1	0	$-\frac{2}{3}M-1$	M	$\frac{2}{3}M-1$	-M	0	-$\frac{5}{3}M+1$	0	$\frac{5}{3}(M+1)$
$\widetilde{x}_1$	0	0	$\frac{2}{3}$	**1**	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
$\widetilde{x}_3$	0	0	-$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	1	$\frac{1}{3}$
z_M	1	0	$-\frac{4}{3}M-1$	0	$\frac{2}{3}M-\frac{4}{3}$	-M	-M	-M+1	0	$\frac{1}{3}M+\frac{5}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
$\widetilde{x}_3$	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

[1] No hubo necesidad de eliminar el tercer renglón de la matriz, como sucede en el método de las dos fases.

	z_M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	$\widetilde{x}_3$	LD
z_M	1	0	-4	0	0	-3	-M	-M	3-M	6
x_3	0	0	2	1	0	1	1	0	-1	1
x_1	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	0	-1	3	1

$\therefore$La solución óptima es $x^* = (2, 0, 1, 1, 0)$ $cx^* = 6$
Se encontró la solución óptima del problema de P y corresponde al caso 2 a) ya que todas las variables $\widetilde{x}_i$ son ceros y el valor óptimo de z es una constante.

Ejemplo 5.4 Aplicando el Algoritmo Simplex

$$M\widetilde{x}_1 = 2M - Mx_1 + Mx_2 - 0 \cdot x_3 - Mx_4$$

$$M\widetilde{x}_2 = 7M - Mx_1 + 0 \cdot x_2 - Mx_3 - Mx_4$$

$$M\widetilde{x}_1 + M\widetilde{x}_2 = 9M - 2Mx_1 + Mx_2 - Mx_3 - 2Mx_4$$

$$z_M - x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + M\widetilde{x}_1 + M\widetilde{x}_2 = 0$$

$$z_M + (-2M - 1)x_1 + (M - 1)x_2 + (-M - 1)x_3 + (-2M + 1)x_4 = 9M$$

	z_M	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\widetilde{x}_1$	$\widetilde{x}_2$	LD
z_M	1	-2M-1	M-1	-M-1	-2M+1	0	0	0	9M
x_5	0	2	-1	1	2	1	0	0	9
$\widetilde{x}_1$	0	**1**	-1	0	1	0	1	0	2
$\widetilde{x}_2$	0	1	0	1	1	0	0	1	7
z_M	1	0	-M-2	-M-1	2	0	2M+1	0	-5M+2
x_5	0	0	1	1	0	1	-2	0	5
x_1	0	1	-1	0	1	0	1	0	2
$\widetilde{x}_2$	0	0	**1**	1	0	0	-1	1	5
z_M	1	0	0	1	2	0	M-1	M+2	12
x_5	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0
x_1	0	1	0	1	1	0	0	1	7
x_2	0	0	1	1	0	0	-1	1	5

La solución óptima es $x^*_M = (7, 5, 0, 0, 0)$ $cx^*_M = 12$, el problema es degenerado pues $x_5 = 0$ y estamos en el caso 2 a).

El método de la gran M utiliza la función objetivo original con algunas modificaciones lo que permite escoger la columna que mejor optimiza la función, por esta razón en el ejemplo 5.4 se consigue llegar al óptimo en un menor número de iteraciones con el método de la gran M que con el método de las Dos Fases, este último es más útil cuando lo que interesa saber si hay degeneración o redundancia en el problema.

5.4. Programa para el método de la gran M

$\overline{M}$ es un vector con sus entradas con valor M.

Objetivo: Revisar la forma de construcción del método de la gran M, presentar un programa en Matlab y dar ejemplos de su aplicación.
El método de la gran M es un caso más del algoritmo Simplex en el que M es una variable con un valor positivo muy grande. Debido a que Matlab no reconoce variables como M es complicado introducirlo en el código computacional, para resolver esta complicación expresaremos cada $\overline{c}_i$ como si fuese un polinomio de grado 1 .

D,F,G,z son variables auxiliares para facilitar la construcción de la tabla Simplex.

G es la matriz que tiene en su primer renglón las constantes de la función y en el segundo los coeficientes que multiplican a M.

fprintf imprime en la pantalla la M para continuar con el formato manejado anteriormente.

1000*G(2,:) sirve para darle a M el valor d 1000, para cuando se haga la comparación entre los renglones de la matriz G se marque el hecho de que M es un valor muy grande.

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
$Min\ cx \Rightarrow Min\ cx + \overline{M}\widetilde{x}$	$n = size(A); w = 0; k = 1;$
$Ax = b \qquad Ax + \widetilde{x} = b$	$B = eye(n(1));$
$x \geq 0 \qquad \widetilde{x} \geq 0$	$A = [A, B];$
	$c = [c, zeros(1, n(1));$
$Min\ \left[c, \overline{M}\right] x'$	$zeros(1, n(2), ones(1, n(1))]$
$[A, I]\, x' = b$	$CB = [zeros(1, n(1); ones(1, n(1)))]\,;$
$x'' \geq 0$	$n = size(A);$
Construimos la tabla Simplex	$while(w == 0)$
$x \quad \widetilde{x} \quad LD$	$D = inv(B) * A;$
$\begin{array}{c\|c} C_B B^{-1}[A\ I] - [c\ \overline{M}] & C_B B^{-1} b \\ B^{-1}A \quad B^{-1} & B^{-1}b \end{array}$	$f = inv(B) * b;$
	$g = CB * D - c;$
	$z = CB * F;$
	$fprintf('La\ tabla\ simplex\ es\backslash n')$
	$T = [G\ z; D\ F]; m = size(T);$
	$for\ i = 1 : m(2)$
	$if(T(1, i) > 0)$
	$fprintf('\ \%gM\ +\ \%g', T(2, i), T(1, i))$
	$else$
	$fprintf('\ \%M\ \%g', T(2, i), T(1, i))$
	$end\quad end$
	$disp([D, F])$
$Si\ z_j - c_j \leq 0\ \ \forall j$ *terminar* $P(M)$ *es óptimo*	$if(1000 * G(2, :) + G(1, :) <= 0)$

.

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
Si $C_B B^{-1} b$ *depende de* M *el problema es infactible*	$if(z(2)>0)$ $fprintf('El\ resultado\ optimo\ es\%gM+\%g,' z(2), z(1))$ $fprintf('\ el\ problema\ es\ infactible')$
si no	$else$
El resultado es óptimo	$fprintf('El\ resultado\ optimo\ es')$ $disp(z(1))\ \ end\ \ \ return$
si no	$else$
$z_j - c_j = max\,\{z_i - c_i\}$ x_r *entra a la base*	$[w,r]=max(G(2,:));$ $if(w<=0)$ $[v,r]=max(1000*G(2,:)+G(1,:));$ $if(v>0)$ $w=[G(1,r)]\,;$ $else$ $fprinft('El\ problema\ es\ óptimo')$ $return\ \ end\ \ end$
si $\frac{\overline{b_p}}{y_{pk}}$ *no existe el problema es no acotado*	$if(D(:,r<=0))$ $fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado')$ $return$
$\frac{\overline{b_p}}{y_{pr}} = min\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ir}}\ \ y_{ir}>0\right\}$ x_{Bp} *entra a la base*	$else$ $for\ i=1:n(1)$ $if(D(:,r)>0)$ $p(i)=F(i)/D(i,r);$ $else$ $p(i)=100000;$ end end $fprintf('el\ pivote\ es\ \%g'\ T(p+2,r))$
Realizamos operaciones elementales para construir la nueva tabla que tenga x_r *en lugar de* x_{Bp}	$B(:,p)=A(:,r);$ $CB(:,p)=c(:,r);$ $k=k+1;$ end $end\ \ w=1$

El código con formato de función se encuentra en el Apéndice B.

D(:,r) es la columna résima, si todas las entradas son negativas no existe el pivote.

El vector p guarda las entradas del radio mínimo dando un valor de 100000 a los que no son candidatos a pivote por que $y_{ir} <= 0$.

T(P+2,r) es y_{pr}.

Ejemplo 5.6 *Resuelva utilizado el programa en Matlab para el método de la Gran M*

$$\begin{aligned} Min\ z = 4x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Construimos P(M)

$$\begin{aligned} Min\ z_M = 4x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + M\cdot \overline{x}_1 + M\cdot \overline{x}_2 \\ x_1 + \ 3x_2 - \quad x_3 + 0\cdot x_4 + \quad \overline{x}_1 + \ 0\cdot \overline{x}_2 = 5 \\ x_1 + \quad x_2 + 0\cdot x_3 - \quad x_4 + \ 0\cdot \overline{x}_1 + \quad \overline{x}_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\gg A = [1\ 3\ \ -1\ 0; 1\ 1\ 0\ \ -1]; \hookleftarrow$

$\gg b = [5; 1]; \hookleftarrow$

$\gg c = [4\ 2\ 0\ 0]; \hookleftarrow$

$\gg penalizacion(A, b, c) \hookleftarrow$

$La\ tTabla\ Simplex\ es:$

	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$x6$	LD
	$2M-4$	$4M-2$	$-M$	$-M$	0	0	$6M$
$x5$	1	3	-1	0	1	0	5
$x6$	1	1	0	-1	0	1	1

$La\ tabla\ Simplex\ es:$

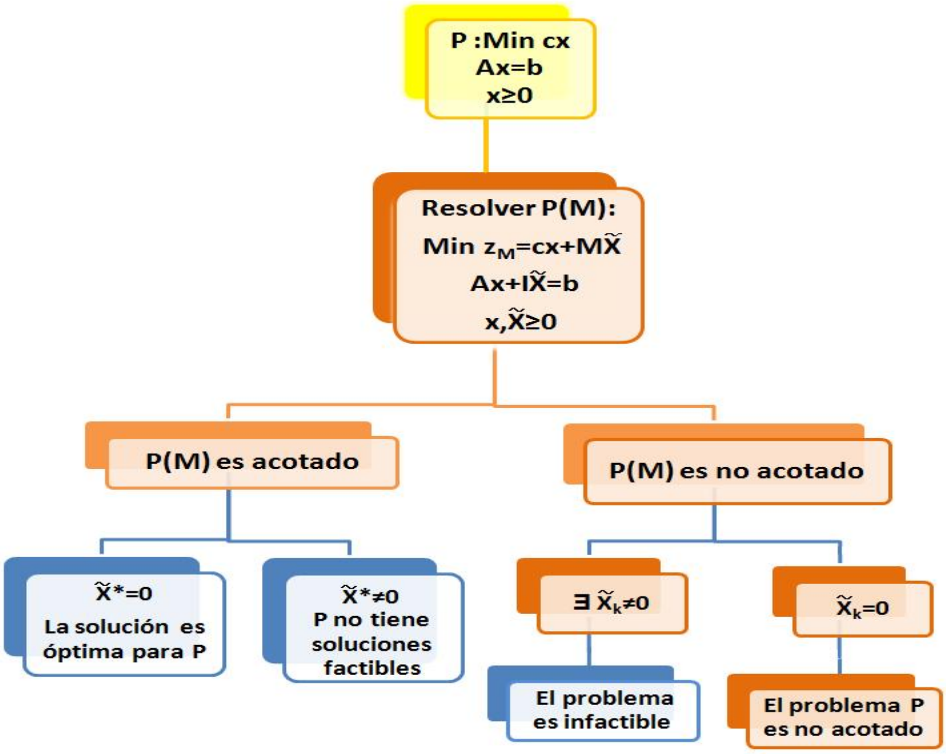
	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$x6$	LD
	$-2M-2$	0	$-M$	$3M-2$	0	$-4M+2$	$2M+2$
$x5$	-2	0	-1	3	1	-3	2
$x2$	1	1	0	-1	0	1	1

$La\ tabla\ Simplex\ es:$

	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$x6$	LD
	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-M+\frac{2}{3}$	$-M$	$\frac{10}{3}$
$x4$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$
$x2$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$

El problema es óptimo $x^* = (0, 5/3, 0, 2/3) \quad cx^* = 10/3$
La función utilizada es penalizacion(A,b,c), la cual permite al programa imprimir las variables x_i, esto se consigue aumentando algunas líneas de código al algoritmo anterior y se encuentra en el Apéndice B.

Los resultado posibles del método de la gran M se pueden expresar en el siguiente diagrama



5.5. La Regla Lexicográfica

Objetivo: Presentar un ejemplo de ciclado en las tablas Simplex y el uso de la Regla Lexicográfica para prevenir este problema. Mostrar el programa en Matlab.

Si revisamos los programas del apéndice B algunos de ellos cuentan con variables que limitan el número de iteraciones realizadas por la máquina, aún cuando sabemos que el algoritmo Simplex converge, entonces ¿Por qué introducir estas variables?

Ejemplo 5.7 *Resolver el siguiente ppl (Problema de Beale)*

$$Min\ z = -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7$$
$$x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$
$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_1	0	1	0	0	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	-8	-1	9	0
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	0	1	0	0	0	0	1
z	1	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33	0
x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	0	-2	1	0	0	**4**	$\frac{3}{2}$	-15	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	-1	-1	0	0	0	2	-18	0
x_4	0	-12	8	0	1	0	**8**	-84	0
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Regresamos a la tabla original y cada una de las tablas corresponden a la misma solución básica factible (0,0,1,0,0,0,0), lo que sucedió con las tablas se llama **ciclaje**[2].

Aunque es poco común encontrar problemas de ciclado, existen algunas reglas que proporcionan un criterio para elegir la variable de salida para evitar el ciclaje, la regla que revisaremos en esta sección la regla lexicográfica especifíca la variable que sale de la base si con la prueba de la razón mínima se obtienen varios candidatos.

Regla Lexicográfica

Dada una solución básica factible con base B con $z_k - c_k = max\{z_j - c_j\}$ para un problema de minimización hacemos la prueba del radio mínimo

$$I_0 = \left\{ r : \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0 \right\} \right\}$$

- Si $|I_0| = 1 \quad \rightarrow \quad x_{Br}$ sale de la base
- En caso contrario

$$I_1 = \left\{ r : \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \begin{matrix} min \\ i \in I_0 \end{matrix} \left\{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}} \right\} \right\}$$

[2] Ver prueba de que el si el algoritmo Simplex no converge debe existir un ciclo en el Apéndice A.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	2	-3	0	$\frac{1}{4}$	0	0	3	0
x_6	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{21}{2}$	0
x_5	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{64}$	1	0	$\mathbf{\frac{3}{16}}$	0
x_3	0	$\frac{3}{2}$	-1	1	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{21}{2}$	1
z	1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0	0
x_6	0	**2**	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0
x_3	0	-2	6	1	$\frac{5}{2}$	-56	0	0	1
z	1	0	-2	0	$\frac{7}{4}$	-44	$-\frac{1}{2}$	0	0
x_1	0	1	-3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	-4	$\frac{1}{6}$	1	0
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Si $I_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_{Br}$ sale de la base, si no, se forma I_2

En general I_j se forma a partir de I_{j-1}

$$I_j = \left\{ r : \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ i \in I_{j-1} \end{array} \left\{ \frac{y_{ij}}{y_{ik}} \right\} \right\}$$

Ejemplo 5.8 *Resolver el problema de Beale aplicando la regla lexicográfica*

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	0	1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	0	1	0	1

$$I_0 = \left\{ 1, 2 : \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{0}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \right\} \quad |I_0| = 2$$

$$I_1 = \left\{ 2 : \frac{y_{21}}{y_{24}} = min \left\{ \frac{y_{11}}{y_{14}}, \frac{y_{21}}{y_{24}} \right\} = min \left\{ \frac{1}{\frac{1}{4}}, \frac{0}{\frac{1}{2}} \right\} \right\} \quad |I_1| = 1$$

entonces $x_{B2} = x_2$ sale de la base y entra x_4.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$	0
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$	0
x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6	0
x_3	0	0	0	1	0	0	**1**	0	1

$$I_0 = \left\{ 3 : \frac{\bar{b}_3}{y_{36}} = min\left\{\frac{1}{1}\right\}\right\}$$

$x_{B3} = x_3$ sale de la base y entra x_6.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{5}{4}$
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	0	2	1	1	-24	0	6	0
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

$\therefore \quad x^* = (3/4, 0, 0, 1, 0, 1) \quad cx^* = -5/4$

r es el valor de $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$.

Modificaremos el programa en Matlab tablasimplex para incorporar la Regla Lexicográfica .

I es la variable que guarda los índices donde r=$\frac{\bar{b}_i}{y_{ri}}$

Paso de la regla	**Código en Matlab**
$Min\ cx$	$\gg c \hookleftarrow$
$Ax \leq b$	$\gg A, b \hookleftarrow$
$x \geq 0$	$\gg n = size(A);$
$En\ forma\ estándar$	$\gg B = eye(n(1));$
$Min\ cx + 0 \cdot \overline{x}$	$\gg c = [c, zeros(1, n(1))]\,;$
$Ax + I\overline{x} = b$	$\gg A = [A, B]\,;$
$x, \overline{x} \geq 0$	$\gg CB = zeros(1, n(1))$
	$\gg w = 0;$
	$\gg m = n(1); n = n(2);$
	$while(w == 0)$
$La\ \ tabla\ es$	$\gg fprintf('La\ tabla\ Simplex\ es \diagdown n')$
$\begin{array}{c\|c} C_B \cdot B^{-1}A' - c & C_B \cdot B^{-1}b \\ \hline B^{-1}A' & B^{-1}b \end{array}$	$\gg T = [CB * inv(B) * A - c,$ $CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];$ $disp(T)$

Si todos $c_B * B^{-1}A - c \le 0$	$if(CB*inv(B)*A-c<=0)$	
el problema es óptimo	$fprintf('Es\ optimo\backslash n')$	
	$w=1;$	
Si no	$else$	
Calculamos $\overline{c_k}=max\{z_j-c_j\}$	$[r,k]=max(CB*inv(B)*A-c);$	
Hacemos la prueba del	$radio=ones(1,m)*realmax;$	
radio mínimo	$for\ i=1:m$	
$\frac{\overline{b_j}}{y_{ik}}=min\left\{\frac{\overline{b_i}}{y_{ik}}\ \ y_{ik}>0\right\}$	$if(T(i+1,k)>0)$	
	$radio(i)=T(i,n+m+1)/T(i+1,k);$	
	$end\ \ end$	
	$[r,j]=min(radio);$	
Si no existe el pivote	$if(r==realmax)$	
el problema es no acotado	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado\backslash n')$	
	$return$	
si existe	$else$	
	$I=[\ \ ];$	
$I_0=\left\{r:\ \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}=min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\ y_{ik}>0\right\}\right\}$	$for\ i=1:n$	
	$if(radio(i)==r)$	
	$I=[I,i];$	
	$end\ \ end$	
	$p=size(I);$	h es el subíndice de I para el proceso recursivo
Si $\lvert I_0\rvert=1$ *entonces*	$if(p(2)==1)$	
x_k *entra a la base*	$B(:,j)=A(:,k);$	
y sale x_r	$CB(:.j)=c(:,k);$	
si no	$else$	
Construimos I_1	$h=1;$	
	$while(p(2)>1\ \&\ h<m)$	
Si $I_1=1$ *el pivote es* y_{rk}	$aux=[\ \ ];$	aux es la variable que guarda y_{i1}/y_{ik}.
si no	$for\ i=1:p(2)$	
$I_j=\left\{r\ :\ \frac{y_{rj}}{y_{rk}}=min\left\{\frac{y_{ij}}{y_{ik}}\right\}\right\}$	$aux=[aux,$	
	$T(I(i)+1,h)/T(I(i)+1,k)];$	
$j\le m$ *hasta que* $\lvert I_j\rvert=1$	end	
	$mini=min(aux);$	I(i)=[ ] elimina los cocientes que no son mínimos.
	$for\ i=1:p(2)$	
	$if(aux(i)=mini)$	
	$I(i)=[\ ];$	
	$end\ \ end$	
	$p=size(I);$	I(1,1) es el índice de la variable que sale de la base *ie* $x_{BI(1,1)}$.
	$h=h+1;\ \ end$	
Actualizamos la tabla	$B(:,(I(1,1)))=A(:,k);$	
tomando como pivote y_{rk}	$CB(:,I(1,1))=c(:,k);$	
	end	
	$end\ \ end$	
	$u=u+1;\ \ end$	

En la siguiente sección abordamos otra regla de anticiclaje con pasos más sencillos para elegir las variables de entrada y salida.

5.6. La Regla de Bland

Objetivo: Presentar un ejemplo de ciclado y el uso de la Regla de Bland como alternativa a la regla lexicográfica para evitar ciclado en ppl.
Modificar el programa en Matlab para incorporar la regla de Bland.

A diferencia de la regla Lexicográfica, la regla de Bland indica la variable que sale de la base y también la variable que debe entrar sin aplicar el criterio: $\overline{c}_k = max = \{c_j - z_j\}$.

A continuación se presentan los pasos a seguir de ésta regla:

1. Las variables se escriben en una lista en cierto orden.
2. Se elige el coeficiente $z_j - c_j > 0$ con índice menor en la lista.
3. Se realiza la prueba de radio mínimo y si existe empate se escoge la variable con índice menor.

Ejemplo 5.9 *Aplique la regla de Bland al siguiente problema*[3]

$$
\begin{aligned}
Max\ z = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\
\frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\
x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \leq 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-10	57	9	24	0	0	0	0
x_5	0	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	0	1

La lista puede ser $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, como $z_1 - c_1 < 0$ la variables x_1 entra a la base, haciendo la prueba del radio mínimo:

$$
\frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{\overline{b}_1}{y_{11}}, \frac{\overline{b}_2}{y_{21}}, \frac{\overline{b}_3}{y_{31}}\right\} = min\left\{\frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1}\right\} = 0
$$

[3]Este problema fue propuesto por K.T. Marshall y J.W. Sourballe en 1969.

debido a que hay empate en el cociente mínimo sale x_5 por tener índice menor.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	-53	-41	204	20	0	0	0
x_1	0	1	-11	-5	18	2	0	0	0
x_6	0	0	**4**	2	-8	-1	1	0	0
x_7	0	0	11	5	-18	-2	0	1	1

Como $z_2 - c_2 < 0$ la variable x_2 entra a la base:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}} = min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{32}}\right\} = min\left\{\frac{0}{4}, \frac{0}{11}\right\} = 0$$

debido a que hay empate en el cociente mínimo sale x_6:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	$-\frac{29}{2}$	98	$\frac{27}{4}$	$\frac{53}{4}$	0	0
x_1	0	1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1	1

Como $z_3 - c_3 < 0$ la variable x_3 entra a la base:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r3}} = min\left\{\frac{\bar{b}_1}{y_{13}}, \frac{\bar{b}_2}{y_{23}}\right\} = min\left\{\frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = 0$$

sale x_1 por ser de radio mínimo y tener índice menor.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	29	0	0	-18	-15	93	0	0
x_3	0	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0
x_2	0	-1	1	0	**2**	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Como $z_4 - c_4 < 0$ la variable x_4 entra a la base, haciendo la prueba del radio mínimo:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r4}} = min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{24}}\right\} = min\left\{\frac{0}{2}\right\} = 0$$

entonces la variable que sale es x_2 ya que es única posible.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	20	9	0	0	$-\frac{21}{2}$	$\frac{141}{2}$	0	0
x_3	0	-2	4	1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{9}{2}$	0	0
x_4	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Como $z_5 - c_5 < 0$ la variables x_5 entra a la base, hacemos la prueba del radio mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{r5}} = min\left\{\frac{\overline{b}_1}{y_{15}}, \frac{\overline{b}_2}{y_{25}}\right\} = min\left\{\frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{4}}\right\} = 0$$

debido a que hay empate en los cocientes mínimo sale x_3 por tener índice menor.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-22	93	21	0	0	-24	0	0
x_5	0	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Como $z_1 - c_1 < 0$ la variables x_1 entra a la base, hacemos la prueba del radio mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{\overline{b}_2}{y_{21}}, \frac{\overline{b}_3}{y_{31}}\right\} = min\left\{\frac{0}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1}\right\} = 0$$

entonces x_4 sale de la base.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	27	-1	44	0	20	0	0
x_5	0	0	-4	-2	8	1	-1	0	0
x_1	0	1	-3	-1	2	0	2	0	0
x_7	0	0	3	**1**	-2	0	-2	1	1

Como $z_3 - c_3 < 0$ la variables x_3 entra a la base, hacemos la prueba del radio mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{r3}} = min\left\{\frac{\overline{b}_3}{y_{33}}\right\} = min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$$

entonces x_7 sale de la base.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	30	0	42	0	18	1	1
x_5	0	0	2	0	4	1	-5	2	2
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	0	3	1	-2	0	-2	1	1

$\therefore$ La solución $x^* = (1,0,1,0,2,0,0)$ es óptima con $z(x^*) = 1$.

Se puede verificar que en la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-22	93	21	0	0	-24	0	0
x_5	0	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

si se elige x_6 para entrar a la base ya que tiene el coeficiente de costo más negativo se encuentra nuevamente la tabla inicial, por lo que este ejemplo puede presentar ciclaje.

Una lista posible para todo problema es $x_1, \cdots, x_n$.

Regla de Bland

$$Min\ cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

En forma estándar

$$Min\ cx + 0 \cdot \overline{x}$$
$$Ax + I\overline{x} = b$$
$$x, \overline{x} \geq 0$$

La tabla es

$C_B \cdot B^{-1}A' - c$	$C_B \cdot B^{-1}b$
$B^{-1}A'$	$B^{-1}b$

Código en Matlab

$\gg c \hookleftarrow$

$\gg A, b \hookleftarrow$

$\gg n = size(A);$

$\gg B = eye(n(1));$

$\gg c = [c, zeros(1, n(1))]\,;$

$\gg A = [A, B]\,;$

$\gg CB = zeros(1, n(1))$

$\gg w = 0;$

$\gg m = n(1);$

$n = n(2);$

$while(w == 0)$

$\gg fprintf('La\ tabla\ Simplex\ es \backslash n')$

$\gg T = [CB * inv(B) * A - c,$
$CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];$
$disp(T)$

w es la variable de "paro" del problema. Indica al algoritmo cuando terminar las iteraciones.

k es el índice de la primera variable con coeficiente positivo.

En caso de que haya empate en la prueba del radio mínimo, j es el menor de los índices.

Si todos $c_B * B^{-1}A - c \leq 0$	$if(CB * inv(B) * A - c <= 0)$
el problema es óptimo	$fprintf('Es\ optimo\backslash n')$
	$w = 1;$
Si no	$else$
Tomamos el menor índice	$k = 1; h = 0;$
de las $z_k - c_k$ *mayores*	$while\ h == 0$
que cero	$if(T(1, k) > 0)$
	$h = 1;$
	$else$
	$k = k + 1;$
	$end\ \ end$
Hacemos la prueba	$radio = ones(1, m) * realmax;$
del radio mínimo	$for\ i = 1 : m$
$\frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} = min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\ : y_{ik} > 0\right\}$	$if(T(i + 1, k) > 0)$
	$radio(i) = T(i + 1, n + m + 1)/T(i + 1, k);$
	$end\ \ end$
	$[r, j] = min(radio);$
Si no existe el pivote	$if(r == realmax)$
el problema es no acotado	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado')$
	$return$
Si existen empates en los	$else$
mínimos tomamos el que tiene	$h = 0; j = 1;$
menor índice	$while\ h == 0$
$j = min\left\{i\ tal\ que\ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} = \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}}\right\}$	$if(radio(j) == r)$
sale x_j *y entra*	$B(:, j) = A(:, k);$
x_k *a la base*	$CB(:, j) = c(:, k);\quad h = 1;$
	$else$
	$j = j + 1;\quad end\ \ end$
	$end\ \ end\ \ end$

5.7. Ejercicios

Objetivo: Resolver ppl que no cuentan con una base factible explícita inicial, utilizando los algoritmos de las dos fases y la gran M y las reglas para evitar el ciclado.

1. Resuelva utilizando el método de las dos fases

   a)

$$\begin{aligned} Max\ z = 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 & \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + \ x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Min\ z = 5x_1 - 4x_2 & \\ x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Resuelva utilizando el método de la gran M

   a)

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 2x_5 & \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 4x_5 &= 14 \\ 0 \cdot x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 &= 12 \\ 0 \cdot x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 8x_5 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 3x_4 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Verifique si hay redundancia en el siguiente problema usando el método de las dos fases

$$\begin{aligned} Max\ z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 7 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva el siguiente ppl por el algoritmo de la gran M

$$\begin{aligned} Max\ z = -10x_1 + 8x_2 & \\ -5x_1 + 2x_2 &\geq 16 \\ -3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   Dibuje la región de soluciones factibles e identifique el movimiento en la gráfica de los puntos generados por el algoritmo Simplex.

5. Resuelva el problema de Beale utilizando la regla de Bland.

6. Resuelva el ejercicio 5.9 utilizando la regla de Lexicográfica.

7. Muestre usando el algoritmo Simplex que el ejercicio 5.9 puede presentar ciclado.

Capítulo 6

Dualidad y Análisis de Sensibilidad

Objetivos: Formular el problema dual y dar una interpretación. Presentar el Algoritmo Simplex Dual y algunos teoremas relacionados. Mostrar el Análisis de Sensibilidad para algunos casos.

6.1. Dualidad

Objetivo: Introducir el concepto de dualidad y construcción del problema dual para problemas en forma canónica ó estándar.

Ejemplo 6.1 *Sus dos mejores amigos, Alejandro y Edgar, desean jugar cartas de acuerdo a las siguientes reglas:*

Alejandro recibe 3 cartas : As rojo, As negro y Dos rojo.

Edgar recibe 3 cartas: As rojo, As negro y Dos negro.

Cada uno debe elegir una carta y mostrarla simultáneamente

- *Si ambas cartas son del mismo color Alejandro gana el valor de su carta.*
- *Si son de diferente color Edgar gana el valor de su carta.*
- *Si ambos escogen "dos" nadie gana.*

Alejandro es optimista, ya que conoce de juegos y te pide plantear el ppl que maximice su ganancia mínima.
Por otro lado, Edgar considera que hoy no es su día de suerte y te pide plantear el ppl que minimice su pérdida máxima.

Resumiendo la información del juego en una tabla[1]

		Edgar		
		As rojo	*As negro*	*Dos negro*
Alejandro	*As rojo*	1	−1	−2
	As negro	−1	1	1
	Dos rojo	2	−1	0

Debido a que Alejandro y Edgar tienen 3 opciones cada uno (ninguna de las cuales parece estrictamente mejor que las otras) y no saben cual escoger se les asignarán probabilidades a cada una.

Planteamiento del ppl asociado a Alejandro

1. Definición de las variables de decisión

$x_i =$ *La probabilidad con la que Alejandro debe escoger la opción i.*

$i = \{1(As\ rojo),\ \ 2(As\ negro)\ \ 3(Dos\ rojo)\}$

2. Establecimiento de las restricciones

Sea v la ganancia mínima esperada de Alejandro. Analicemos entonces las posibles tiradas de Edgar

- Si Edgar muestra el as rojo, la ganancia esperada de Alejandro es $1(x_1) - 1(x_2) + 2(x_3)$
- Si Edgar muestra el as negro, la ganancia esperada de Alejandro es $-1(x_1) + 1(x_2) - 1(x_3)$
- Si Edgar muestra el dos negro, la ganancia esperada de Alejandro es $-2(x_1) + 1(x_2) + 0(x_3)$

Las últimas dos restricciones garantizan que x_1, x_2 y x_3 forman un vector de probabilidades.

v=$min\,\{x_1 - x_2 + 2x_3,\ -x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3\}$, v es menor a cualquiera de las posibles ganancias que obtenga Alejandro lo que implica que:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq v$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \geq v$$
$$-2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 \geq v$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Definición de la función objetivo

$Max\ f = v$

[1] La tabla está dada en términos de la ganancia o pérdida de Alejandro.

Modelos completo

$$Max\ f = v$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \ 2x_3 - \ v &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 - \ \ x_3 - \ v &\geq 0 \\ -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - \ v &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + \ \ x_3 + 0 \cdot v &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \ v &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Planteamiento del ppl asociado a Edgar

1. Definición de las variables de decisión

$w_i =$ *La probabilidad con la que Edgar debe escoger su opción* i.
$i = \{1(As\ rojo),\ \ 2(As\ negro)\ \ 3(Dos\ negro)\}$

2. Establecimiento de las restricciones

Sea u la pérdida máxima de Edgar, analicemos entonces las posibles tiradas de Alejandro:

- Si Alejandro muestra el as rojo entonces la pérdida esperada de Edgar es $1(w_1) - 1(w_2) - 2(w_3)$
- Si Alejandro muestra el as negro entonces la pérdida esperada de Edgar es $-1(w_1) + 1(w_2) + 1(w_3)$
- Si Alejandro muestra el dos negro entonces la pérdida esperada de Edgar es $2(w_1) - 1(w_2) + 0(w_3)$

u=$max\,\{w_1 - w_2 - 2w_3, -w_1 + w_2 + w_3, 2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3\}$, u es mayor que cualquiera de las posibles pérdidas de Edgar lo que implica que:

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 - \ \ 2w_3 &\leq u \\ -w_1 + w_2 + \ \ \ w_3 &\leq u \\ 2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 &\leq u \\ w_1 + w_2 + \ \ \ w_3 &= 1 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las últimas dos restricciones garantizan que w_1, w_2 y w_3 forman un vector de probabilidades.

3. Definición de la función objetivo

$Min\ g = u$

Modelo completo

$$
\begin{array}{rl}
 & Min\ g = u \\
w_1 - w_2 - 2w_3 - u & \leq 0 \\
-w_1 + w_2 + w_3 - u & \leq 0 \\
-2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 - u & \leq 0 \\
w_1 + w_2 + w_3 + 0 \cdot u & = 1 \\
w_1, w_2, w_3 \geq 0 & u \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Sus amigos le piden resolver los ppl para que cada uno conozca su estrategia óptima.
Tome en cuenta que si beneficia a uno de sus amigos el otro se molestará ¿Es posible recomendar estrategias óptimas a cada uno sin beneficiar a alguno de los dos?
Escribiendo los problemas en forma estándar.

$$
\begin{array}{r}
Max\ f = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + v' - v'' + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - v' + v'' - x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 0 \\
-x_1 + x_2 - x_3 - v' + v'' + 0 \cdot x_4 - x_5 + 0 \cdot x_6 = 0 \\
-2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - v' + v'' + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - x_6 = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot v' - 0 \cdot v'' + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 1 \\
x_1, x_2, x_3, v', v'', x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
Min\ g = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + u' - u'' + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + 0 \cdot w_6 \\
w_1 - w_2 - 2w_3 - u' + u'' + w_4 + 0 \cdot w_5 + 0 \cdot w_6 = 0 \\
-w_1 + w_2 + w_3 - u' + u'' + 0 \cdot w_4 + w_5 + 0 \cdot w_6 = 0 \\
-2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 - u' + u'' + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + w_6 = 0 \\
w_1 + w_2 + w_3 + 0 \cdot u' - 0 \cdot u'' + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + 0 \cdot w_6 = 1 \\
w_1, w_2, w_3, u', u'', w_4, w_5, w_6 \geq 0
\end{array}
$$

Las tablas óptimas para cada problema son:

	z	x_1	x_2	x_3	v'	v''	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	$-\frac{2}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
v'	0	$\frac{2}{5}$	0	0	1	-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_3	0	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_6	0	$-\frac{11}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{2}{5}$
x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$

	z	w_1	w_2	w_3	u'	u''	w_4	w_5	w_6	LD
z	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
w_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
w_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
u'	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	-1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
w_4	0	0	0	$-\frac{9}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

$\therefore$ Si Alejandro juega al As negro con probabilidad 3/5 y al Dos rojo con probabilidad 2/5 su ganancia mínima esperada es 1/5.

$\therefore$Si Edgar juega al As rojo con probabilidad 2/5 y al As negro con probabilidad 3/5 su pérdida máxima esperada es 1/5.

¿Es casualidad que las estrategias óptimas para ambos presenten la misma ganancia(o pérdida)? ¿Sucederá lo mismo en todos los problemas?

Los problemas anteriores cumplen con una propiedad importante, son duales.

Cada que se resuelve un ppl, simultáneamente se encuentra la solución a otro problema al que denominaremos dual y al problema original lo llamaremos primal.

Dado que todo ppl tiene asociado un problema dual, definiremos la forma del planteamiento de éste:

- Si el problema primal está en forma canónica:

$$\begin{aligned} (P)Max\ cx \qquad\qquad & \qquad\qquad (D)Min\ wb \\ Ax \leq b \qquad\qquad & \qquad\qquad wA \geq c \\ x \geq 0 \qquad\qquad & \qquad\qquad w \geq 0 \end{aligned}$$

- Si el problema primal está en forma estándar:

$$\begin{aligned} (P)Max\ cx \qquad\qquad & \qquad\qquad (D)Min\ wb \\ Ax = b \qquad\qquad & \qquad\qquad wA \geq c \\ x \geq 0 \qquad\qquad & \qquad\qquad w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2 *Construya el problema dual para los siguientes problemas:*

$$\begin{aligned} (a)Max\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad & \qquad\qquad (b)Max\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \qquad\qquad & \qquad\qquad x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1 \qquad\qquad & \qquad\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{aligned}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4 \qquad\qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En forma matricial:

$$Max\ \underbrace{(3,\ 2,)}_{c}\, x \qquad\qquad Min\ w \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b} \qquad\qquad w \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \geq \underbrace{(3,\ 2)}_{c}$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad w \geq 0$$

$$\begin{aligned} (D) Min\ 3w_1 + w_2 + 4w_3 \\ w_1 - w_2 + 2w_3 \geq 3 \\ w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 2 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$(P) Max\ \underbrace{(7,\ -2,\ 1)}_{c}\, x \qquad\qquad Min\ w \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b} \qquad\qquad w \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \leq \underbrace{(7,\ -2,\ 1)}_{c}$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad w \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (D) Min\ 4w_1 + 9w_2 + 5w_3 \\ w_1 + 2w_2 - w_3 \geq 7 \\ w_1 + w_2 + 2w_3 \geq -2 \\ -w_1 + w_2 + w_3 \geq 1 \\ w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6.2. La construcción del problema dual

Objetivo: Plantear el dual de un ppl y observar algunas de sus propiedades elementales.

No todos los ppl se encuentran en forma canónica ó estándar, pero es posible obtener su dual sin necesidad de transformar el problema primal.
Dado un ppl con $A_{m\times n}$, $b_{m\times 1}$, $x_{n\times 1}$ y $c_{1\times n}$

¿Cuántas variables hay en el dual?

Debe haber tantas como restricciones tenga el problema primal. Cada variable de P está asociada a una restricción de D, por lo tanto el problema dual tiene m variables.

Construccción del problema dual de un ppl de minimización:

- Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ la restricción se encuentra en forma canónica. La variable asociada w_i también lo está, *ie* $w_i \geq 0$

- Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ la restricción no está en forma canónica porque la desigualdad ésta invertida, para transformarla la multiplicamos por -1, por lo tanto la variable asociada es $-w_i \geq 0$ entonces $w_i \leq 0$

- Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, la restricción está en forma estándar entonces w_i es no restringida. Note que es lo mismo que ocurre si se cumplen simultáneamente que $w_i \geq 0$ y $w_i \leq 0$ $\therefore w_i \in \mathbb{R}$.

- Si $x_j \geq 0$ está en forma canónica, la j-ésima restricción de D es:

  $a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}x_m \geq c_j$

- Si $x_j \leq 0$ necesitamos multiplicarla por (-1) para llevarla a la forma canónica, entonces la j-ésima restricción sería:

$$-(a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m) \leq -c_j$$
$$a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \geq c_j$$

- Si x_j es no restringida se cumplen simultaneamente los dos casos anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \leq c_j \\ a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \geq c_j \end{array}\right\} a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = c_j$$

- Si la función objetivo del ppl es Min cx entonces su problema dual tiene función objetivo Max wb.

Podemos resumir los incisos anteriores en una tabla

Minimización	**Maximización**
Restricciones	*Variables*
$\geq$	$\geq$
$\leq$	$\leq$
$=$	$\mathbb{R}$
Variables	*Restricciones*
$\geq$	$\leq$
$\leq$	$\geq$
$\mathbb{R}$	$=$

Ejemplo 6.3 *Muestre que los problemas planteados para Edgar y Alejandro son duales.*

Tomaremos el problema de Alejandro como problema primal

$$\begin{array}{lll}
x_1 - x_2 + 2x_3 - v \leq 0 & \rightarrow & w_1 \leq 0 \\
-x_1 + x_2 - x_3 - v \leq 0 & \rightarrow & w_2 \leq 0 \\
-2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - v \leq 0 & \rightarrow & w_3 \leq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot v = 1 & \rightarrow & w_4 \;\; NR \\
x_1 \geq 0 & \rightarrow & w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4 \geq 0 \\
x_2 \geq 0 & \rightarrow & -w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 0 \\
x_3 \geq 0 & \rightarrow & 2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 + w_4 \geq 0 \\
v \in \mathbb{R} & \rightarrow & -w_1 - w_2 - w_3 + 0 \cdot w_4 = 1 \\
Max\ f = v & \rightarrow & Min\ g = \;\; 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + w_4
\end{array}$$

Resumiendo

$Si \;\; w_i = -w_i \;\; i = 1, 2, 3 \quad w_4 = u$

$$\begin{array}{cc}
Min\ g = w_4 & Min\ g = u \\
w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4 \geq 0 & w_1 + w_2 - 2w_3 - u \leq 0 \\
-w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 0 & -w_1 + w_2 + w_3 - u \leq 0 \\
2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 + w_4 \geq 0 & 2w_1 - w_2 + 0 \cdot w_3 - u \leq 0 \\
-w_1 - w_2 - w_3 + 0 \cdot w_4 = 1 & w_1 + w_2 + w_3 + 0 \cdot w_4 = 1 \\
w_1, w_2, w_3 \leq 0 \;\; w_4 \in \mathbb{R} & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \; u \in \mathbb{R}
\end{array}$$

$\therefore$ Los problemas de Alejandro y Edgar son duales.

Ejemplo 6.4 *Construya el problema dual del siguiente problema primal:*

$$Min\ 3x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4$$

$$x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \leq 0$$
$$x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc}
x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4 & \rightarrow & w_1 \geq 0 \\
0 \cdot x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10 & \rightarrow & w_2 \leq 0 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 & \leftrightarrow & w_3 \ NR \\
x_1 \geq 0 & \rightarrow & w_1 + 0 \cdot w_2 - w_3 \leq 3 \\
x_2 \leq 0 & \rightarrow & w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\
x_3 \ NR & \rightarrow & -2w_1 + 5w_2 + 3w_3 = -1 \\
Min\ 3x_1 + x_2 - x_3 & \rightarrow & Max\ 4w_1 + 10w_2 + 7w_3
\end{array}$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}
Max\ 4w_1 + 10w_2 + 7w_3 \\
w_1 + 0 \cdot w_2 - w_3 \leq 3 \\
w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\
-2w_1 + 5w_2 + 3w_3 = -1 \\
w_1 \geq 0 \quad w_2 \leq 0 \quad w_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

6.3. Teorema Fundamental de Dualidad

Objetivo: Enunciar el Teorema fundamental de dualidad y aplicar éste para la resolución de problemas.

Habiendo visto la construcción del problema dual, nos preguntamos:

¿Cuál es el objeto de estudiar el problema dual? ¿Existen relaciones entre el primal y el dual?

Supónga un ppl en forma canónica de minimización y su problema dual.

$$\begin{array}{ccc}
Min\ cx & & Max\ wb \\
Ax \geq b & \rightarrow & wA \leq c \\
x \geq 0 & & w \geq 0
\end{array}$$

Como $x \geq 0 \ \ x_i \geq 0 \ \ \forall i$ entonces es posible multiplicar

$wA \leq c$ por la derecha por $x \quad wAx \leq cx \quad (I)$

Similarmente multiplicando

$$Ax \geq b \text{ multiplicamos por la izquierda por } w \quad wAx \geq wb \quad (II)$$

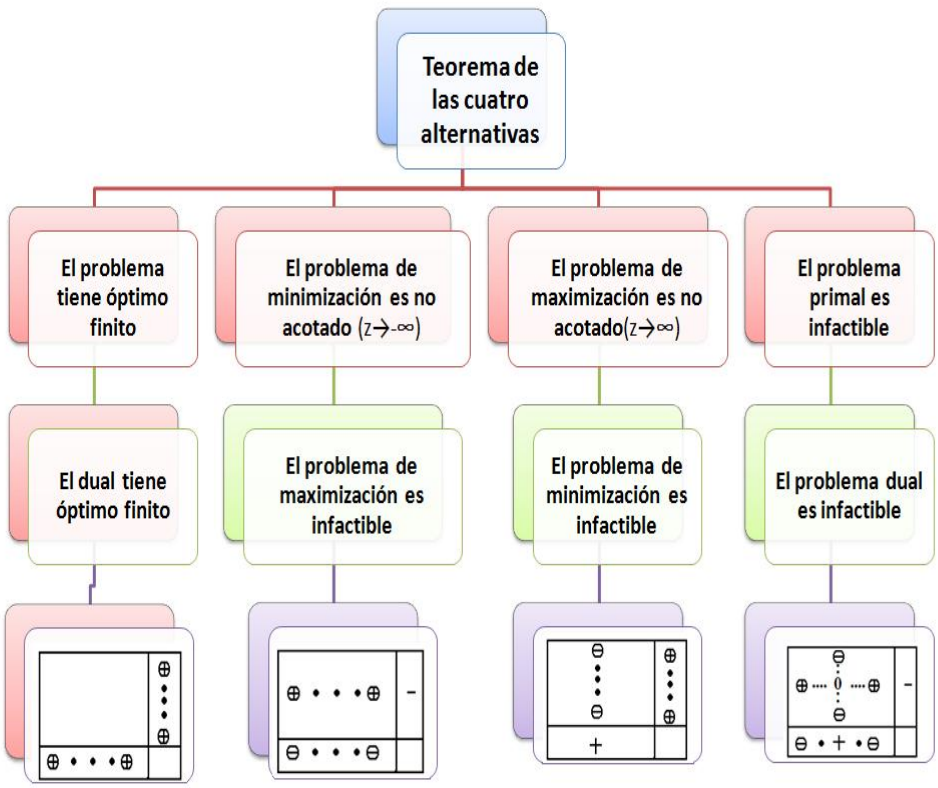
De (I) y (II)

$$wb \leq wAx \leq cx \quad \rightarrow \quad wb \leq cx$$

$\therefore$ El valor de la función objetivo del problema de minimizar siempre es mayor o igual que el valor de la función objetivo del problema de maximización. Esta propiedad se llama *propiedad débil de dualidad.*

Corolario 1 *Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de los problemas primal y dual tales que $cx_0 = w_0 b$, entonces x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus problemas respectivos*[2]*.*

El siguiente esquema muestra los posibles casos que se pueden obtener al aplicar el Algoritmo Simplex a una tabla de Tucker



⊕ Los números son no negativos
⊖ Los números son no positivos

[2]Ver demostración en el Apéndice A.

Teorema 6.3.1 ***Teorema Fundamental de Dualidad***[3]
Dados un problema primal y su dual una de las siguientes proposiciones es verdadera

1. *Ambos problemas tiene soluciones óptimas x^* y w^* con $cx^* = w^*b$.*

2. *Un problema es no acotado, el otro problema es infactible.*

3. *Ambos problemas son infactibles.*

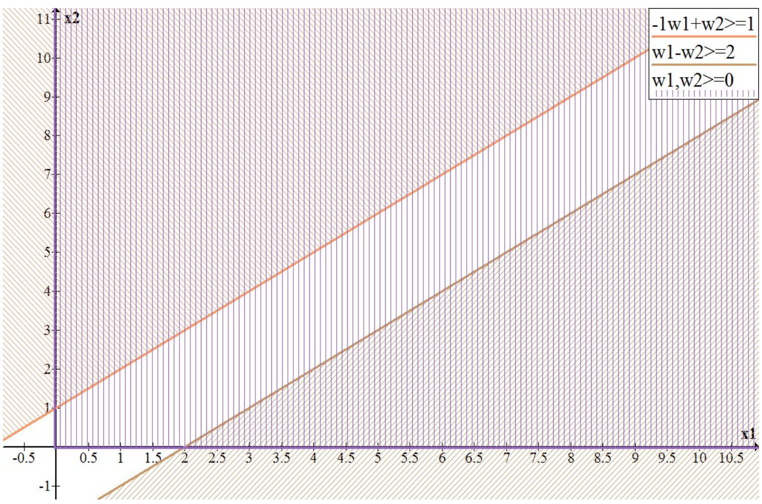
Ejemplo 6.5 *En los siguientes problemas construya el problema dual, resuélvalo y encuentre la solución del problema primal.*

$$
\begin{array}{rrr}
(a) Max\ x_1 + 2x_2 & (b) Min\ -x_1 - x_2 & (c) Max\ 4x_1 + 3x_2 \\
-x_1 + x_2 \leq -1 & x_1 + x_2 \geq 3 & 3x_1 + x_2 \leq 1 \\
x_1 - x_2 \leq -1 & -x_1 + x_2 \leq -1 & x_1 + x_2 \geq \dfrac{1}{2} \\
x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Para el inciso (a)

$$
\begin{aligned}
Min\ -w_1 - w_2 \\
-w_1 + w_2 \geq 1 \\
w_1 - w_2 \geq 2 \\
w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Graficamos el problema dual



[3] La demostración se encuentra en el Apéndice A.

$\therefore$ El problema dual es infactible. El problema primal es no acotado o infactible.

$$\begin{array}{rcr} Max\ x_1 + 2x_2 & & Max\ x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 & & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - x_2 \leq -1 & multiplicando\ por\ -1 & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Como no se cumplen simutáneamente las restricciones 1 y 2, el problema primal es también infactible.

$\therefore$ Se observa el caso 3 del Teorema, ambos problemas son infactibles.

Para el inciso (b)

$$\begin{aligned} Max\ 3w_1 - w_2 \\ w_1 - w_2 \leq -1 \\ w_1 + w_2 \leq -1 \\ w_1 \geq 0 \\ w_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por el método de la gran M

$$\begin{array}{rr} Max\ 3w_1 + w_2' & Max\ 3w_1 + w_2' + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 - Mw_5 - Mw_6 \\ -w_1 - w_2' \geq 1 & -w_1 - w_2' - w_3 + 0 \cdot w_4 + w_5 + 0 \cdot w_6 = 1 \\ -w_1 + w_2' \geq 1 & -w1 + w_2 + 0 \cdot w_3 - w_4 + 0 \cdot w_5 + w_6 = 1 \\ w_1, w_2' \geq 0 & w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \geq 0 \end{array}$$

	z	w_1	w_2'	w_3	w_4	w_5	w_6	LD
z	1	2M-3	-1	M	M	0	0	-2M
w_5	0	-1	-1	-1	0	1	0	1
w_6	0	-1	**1**	0	-1	0	1	1
z	1	2M-4	0	M	M-1	0	1	-2M+1
w_5	0	-2	0	-1	-1	1	1	2
w_2	0	-1	1	0	-1	0	1	1

La tabla es óptima pero w_5 es una variable artificial y es distinta de cero $\therefore$ el problema dual es infactible, por lo tanto el problema P es no acotado o

infactible.
PD $\exists\, x \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sea $x = (4, 0)$

$$\begin{aligned} 4 + 0 = 4 &\geq 3 \\ -4 + 0 = -4 &\leq -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ x es una solución factible , $\therefore$ El problema primal es no acotado.

Para el inciso (c)

$$Min\ w_1 + \frac{1}{2}w_2 \qquad\qquad Min\ w_1 - \frac{1}{2}w_2' + 0\cdot w_3 + 0\cdot w_4 + Mw_5 + Mw_6$$

$$3w_1 + w_2 \geq 4 \qquad\qquad 3w_1 - w_2' - w_3 + 0\cdot w_4 + w_5 + 0\cdot w_6 = 4$$

$$w_1 + w_2 \geq 3 \qquad\qquad w_1 - w_2' + 0\cdot w_3 - w_4 + 0\cdot w_5 + w_6 = 3$$

$$w_1 \geq 0\ w_2 \leq 0 \qquad\qquad w_1, w_2', w_3, w_4, w_5, w_6 \geq 0$$

	z	w_1	w_2'	w_3	w_4	w_5	w_6	LD
z	1	4M-1	-2M+$\frac{1}{2}$	-M	-M	0	0	7M
w_5	0	**3**	-1	-1	0	1	0	4
w_6	0	1	-1	0	1	0	1	3
z	1	0	$-\frac{2M}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{M-1}{3}$	-M	$-\frac{4M+1}{3}$	0	$\frac{5M+4}{3}$
w_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
w_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	-M	-M+1	3
w_1	0	1	-1	0	-1	0	1	3
w_3	0	0	-2	1	-3	-1	3	5

El resultado es óptimo $w^* = (3, 0, 0, 0)$ $w^*b = 3$ es el caso 1 del teorema
$\therefore \exists\, x^*$ solución óptima del primal y $cx^* = 3$

$$4x_1 + 3x_2 = 3 \qquad\qquad x_2 = \frac{3 - 4x_1}{3}$$

Sustituyendo en las restricciones

$$3x_1 + \frac{3-4x_1}{3} \leq 1 \qquad 9x_1 + 3 - 4x_1 \leq 3 \qquad 0 \leq 5x_1 \leq 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$$

Importante Si un problema es infactible su dual no necesariamente es no acotado.

$$x_2 = \tfrac{3-4\cdot 0}{3} = 1 \qquad \therefore\; x^* = (0,1)$$

Ejemplo 6.6 *Contraejemplo del regreso de la proposición 2*

$$\begin{aligned} Min\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1, x_2\ NR \end{aligned}$$

Escribimos el dual

$$\begin{aligned} Max\ 2w_1 + 3w_2 \\ w_1 + 2w_2 = 1 \\ w_1 + 2w_2 = 2 \\ w_1, w_2\ NR \end{aligned}$$

$$En\ (P): \quad x_1 + x_2 = 2 \quad entonces \quad 2x_1 + 2x_2 = 4 \neq 3$$

En (D): la función $w_1 + 2w_2$ no puede ir a dos puntos distintos por definición de función.

$\therefore$ Ambos problemas son infactibles.

6.4. Teorema de Holguras Complementarias

Objetivo: Enunciar y aplicar el Teorema de holguras complementarias para la solución de algunos problemas.

Analicemos nuevamente la condición débil de dualidad

$$\begin{aligned} wb \leq wAx \leq cx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr} wb \leq wAx & wAx \leq cx \\ wb - wAx \leq 0 & 0 \geq cx - wAx \\ w(b - Ax) \leq 0 & 0 \geq (c - wA)x \end{array}$$

Por el corolario 1, si x_0 y w_0 son soluciones factibles tal que $w_0 b = cx_0$ entonces son soluciones óptimas.

$$\rightarrow w^*(b - Ax^*) = 0 \quad y \quad (c - w^*A)x^* = 0$$

es equivalente a

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \quad y \quad (w^*A - c)x^* = 0$$

En forma matricial

$$(w_1^*, \cdots, w_m^*) \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \right) = \bar{0}$$

$$(w_1^*, \cdots, w_m^*) \begin{pmatrix} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + \cdots + a_{1n}x_n^* - b_1 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + \cdots + a_{2n}x_n^* - b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^* + a_{m2}x_2^* + \cdots + a_{mn}x_n^* - b_m \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$$w_i^*(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^* - b_i) = 0 \qquad i = 1, \cdots, m \qquad (I)$$

Analogamente $(w^*A - c)x^* = 0$

$$(a_{1j}w_1^* + a_{2j}w_2^* + \cdots + a_{mj}w_m^* - c_j)x_j^* = 0 \qquad j = 1, \cdots, n \qquad (II)$$

Considerando los problemas

$$\begin{array}{rr} (P)Min\ cx & \qquad (D)Max\ wb \\ Ax \geq b & wA \leq c \\ x \geq 0 & w \geq 0 \end{array}$$

Escribiendo en forma estándar:

$$\begin{array}{rr} (P)Min\ cx + 0 \cdot \widetilde{x} & \qquad (D)Max\ wb + 0 \cdot \widetilde{w} \\ Ax - \widetilde{x} = b & wA + \widetilde{w} = c \\ x, \widetilde{x} \geq 0 & w, \widetilde{w} \geq 0 \end{array}$$

despejando

$$\begin{array}{rr} \widetilde{x} = Ax - b & \qquad \widetilde{w} = c - wA \\ w^*(Ax - b) = 0 & \rightarrow w^*\widetilde{x} = 0 \\ (c - wA)x^* = 0 & \rightarrow \widetilde{w}x^* = 0 \end{array}$$

De (I)

$$w_i^*\widetilde{x}_i = 0 \quad i = 1, \cdots, m \ \ si \begin{cases} \widetilde{x}_i > 0 \rightarrow w_i^* = 0 \\ w_i^* > 0 \rightarrow \widetilde{x}_i = 0 \end{cases}$$

De (II)

$$\widetilde{w}_j x_j^* = 0 \quad j = 1, \cdots, n \ \ si \begin{cases} x_j^* > 0 \rightarrow \widetilde{w}_j^* = 0 \\ \widetilde{w}_j > 0 \rightarrow x_j^* = 0 \end{cases}$$

Los vectores $\widetilde{w}$ y $\widetilde{x}$ son las holguras del problema de maximización y minimización respectivamente y de la propiedad recién mencionada se define un teorema.

Teorema 6.4.1 ***Teorema de Holguras Complementarias***
Si x^* y w^* son dos soluciones factibles cualesquiera de los problemas primal y dual en forma canónica entonces son óptimas respectivamente si y sólo si

$$(c_j - w^* a_j)x_j^* = 0 \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 \qquad i = 1, \cdots, m$$

Ejemplo 6.7 *Dado el siguiente ppl (ejemplo 2.3)*

$$\begin{aligned} Min \ \ -x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -12 \\ -x_1 - x_2 \geq -10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Construya el problema dual.

2. Encuentre la solución óptima del problema dual.

3. Encuentre la solución del problema primal usando holguras complementarias.

$$\begin{aligned} Max \ \ -4w_1 - 12w_2 - 10w_3 \\ w_1 + w_2 - w_3 \leq -1 \\ -w_1 - 2w_2 - w_3 \leq -3 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max \ \ -4w_1 - 12w_2 - 10w_3 \\ -w_1 - w_2 + w_3 \geq 1 \\ w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 3 \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Por el método de las dos fases

	z_a	w_1	w_2	w_3	$\widetilde{w}_1$	$\widetilde{w}_2$	a_1	a_1	LD
z_a	1	0	1	2	-1	-1	0	0	4
a_1	0	-1	-1	**1**	-1	0	1	0	1
a_2	0	1	2	1	0	-1	0	1	3

	z_a	w_1	w_2	w_3	$\widetilde{w}_1$	$\widetilde{w}_2$	a_1	a_1	LD
z_a	1	2	3	0	1	-1	-2	0	2
w_3	0	-1	-1	1	-1	0	1	0	1
a_2	0	2	**3**	0	1	-1	-1	1	2
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
w_3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
w_2	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\therefore$ El problema es factible

	z	w_1	w_2	w_3	$\widetilde{w}_1$	$\widetilde{w}_2$	LD
z	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{22}{3}$	$-\frac{74}{3}$
w_3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
w_2	0	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z	1	0	1	0	3	7	24
w_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
w_1	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

$\therefore$El problema es óptimo $w^* = (1, 0, 2) \quad w^*b = 24$

Escribiendo el problema primal en forma estándar

$$
\begin{aligned}
Min\ z &= -x_1 - 3x_2 \\
x_1 - x_2 - \widetilde{x}_1 &= -4 \\
x_1 - 2x_2 - \widetilde{x}_2 &= -12 \\
-x_1 - x_2 - \widetilde{x}_3 &= -10 \\
x_1, x_2, \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Por el teorema de holguras complementarias

$$
\begin{aligned}
w_i^* \cdot \widetilde{x}_i = 0 &\qquad i = 1, \cdots, m \\
\widetilde{w}_j^* \cdot x_i^* = 0 &\qquad j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{llll}
w_1^* = 1 & w_1^*\widetilde{x}_1 = 0 & \rightarrow & \widetilde{x}_1 = 0 \\
w_2^* = 0 & w_2^*\widetilde{x}_2 = 0 & \rightarrow & \widetilde{x}_2 \geq 0 \\
w_3^* = 2 & w_3^*\widetilde{x}_3 = 0 & \rightarrow & \widetilde{x}_3 = 0 \\
\widetilde{w}_1 = 0 & \widetilde{w}_1 x_1^* = 0 & \rightarrow & x_1^* \geq 0 \\
\widetilde{w}_2 = 0 & \widetilde{w}_2 x_2^* = 0 & \rightarrow & x_2^* \geq 0
\end{array}$$

Reescribiendo el problema primal

$$\begin{aligned}
Min\ z = -x_1 - 3x_2 \\
x_1 - x_2 = -4 \\
x_1 - 2x_2 - \widetilde{x}_2 = -12 \\
-x_1 - x_2 = -10
\end{aligned}$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$x_1 = x_2 - 4$ *sustituyendo en la tercera restricción*
$-x_1 + 4 - x_2 = -10 \qquad -2x_2 = -14 \qquad x_2 = 7$
$x_1 = 7 - 4 = 3 \qquad x_1 = 3$
$\widetilde{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 12 = 3 - 2(7) + 12 = 3 - 14 + 12 = 1 \quad \widetilde{x}_2 = 1$

$\therefore\ x^{=}(3,7) \quad \widetilde{x} = (0,1,0) \quad cx^* = 24$

Ejemplo 6.8 *Muestre que los problemas de Alejandro y Edgar de la página 163 cumplen con el Teorema de Holguras Complementarias*

Expresando los problemas en forma canónica:

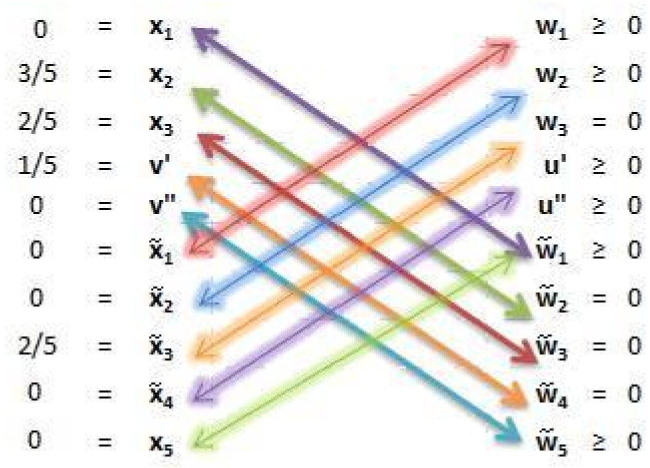
$$\begin{array}{ll}
Max\ z = v & Max\ z = v' - v'' \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - v \geq 0 & -x_1 + x_2 - 2x_3 + v' - v'' \leq 0 \\
-x_1 + x_2 - x_3 - v \geq 0 & x_1 - x_2 + x_3 + v' - v'' \leq 0 \\
-2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - v \geq 0 & 2x_1 - x_2 - 0 \cdot x_3 + v' - v'' \leq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot v = 1 & x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot v' - 0 \cdot v'' \leq 1 \\
 & -x_1 - x_2 - x_3 - 0 \cdot v' + 0 \cdot v'' \leq -1 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0\ v\ NR & x_, x_2, x_3, v', v'' \geq 0
\end{array}$$

Obtenemos el problema dual

$$\begin{aligned}
Min\ g = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + u' - u'' \\
-w_1 + w_2 + 2w_3 + u' - u'' \geq 0 \\
w_1 - w_2 - w_3 + u' - u'' \geq 0 \\
-2w_1 + w_2 - 0 \cdot w_3 + u' - u'' \geq 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_1 + \quad w_2 + \quad w_3 + 0 \cdot u' - 0 \cdot u'' &\geq \ \ 1 \\
-w_1 - \quad w_2 - \quad w_3 - 0 \cdot u' + 0 \cdot u'' &\geq -1 \\
w_1, w_2, w_3, u', u'' &\geq 0
\end{aligned}
$$

$x^* = (0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0)$ $\quad \widetilde{x}^* = (0, 0, \frac{2}{5}, 0, 0)$ asociamos las variables



Reescribiendo el problema dual considerando que $w_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
-w_1 + w_2 + \quad u' - \quad u'' + \widetilde{w}_1 &= \ \ 0 \\
w_1 - w_2 + \quad u' - \quad u'' \quad &= \ \ 0 \\
-2w_1 + w_2 + \quad u' - \quad u'' \quad &= \ \ 0 \\
w_1 + w_2 + 0 \cdot u' - 0 \cdot u'' \quad &= \ \ 1 \\
-w1 - w_2 - w_3 + 0 \cdot u' - 0 \cdot u'' + \widetilde{w}_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema tenemos

$\widetilde{w}_1 = \frac{2}{5} \qquad \widetilde{w}_5 = 0 \qquad w_1^* = \frac{2}{5} \qquad w_2^* = \frac{3}{5}$

$\therefore w^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0) \qquad \widetilde{w} = (\frac{2}{5}, 0, 0, 0, 0) \qquad w^* b = \frac{1}{5}$

$\therefore$ Las soluciones presentan holguras complementarias.

Observando las tablas Simplex, sea B una base del problema

$$
\begin{aligned}
Min\ z &= cx \\
Ax &\geq b \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

La tabla Simplex es

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x_B & x_N & RHS \\
\hline
z & \overline{0} & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1} b \\
\hline
x_B & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\
\hline
\end{array}$$

Definimos $w = c_B B^{-1}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x_B & x_N & RHS \\
\hline
z & \overline{0} & wN - c_N & wb \\
\hline
x_B & I & B^{-1}N & B^{-1}b \\
\hline
\end{array}$$

de la tabla obtenemos

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

$$z_j - c_j = \begin{cases} wa_j - c_j & j = 1, \cdot, n \\ \widetilde{w}a_j & j = n+1, \cdots, n+m \end{cases}$$

Además si $j > n$ las variables son de holgura $\rightarrow \quad a_{j-n} = -e_j$

$$z_j - c_j = \begin{cases} wa_j - c_j & j = 1, \cdot, n \\ -\widetilde{w}_{j-n} & j = n+1, \cdots, n+m \end{cases}$$

$\therefore w_i = c_{n+i} - z_{n+i} \quad i = 1, \cdots, m.$

Ejemplo 6.9 *Resuelva el siguiente problema utilizando las tablas de Tucker*

$$Max\ z = 8x_1 + 7x_2$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc|c}
x_1 & x_2 & -1 \\
\hline
4 & 5 & 10 \\
\mathbf{7} & 3 & 12 \\
\hline
8 & 7 & 0
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
= -\widetilde{x}_1 \\
= -\widetilde{x}_2 \\
= z
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|c}
\widetilde{x}_2 & x_2 & -1 \\
\hline
-\frac{4}{7} & \mathbf{\frac{23}{7}} & \frac{22}{7} \\
\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{12}{7} \\
\hline
-\frac{8}{7} & \frac{25}{7} & -\frac{96}{7}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
= -\widetilde{x}_1 \\
= -x_1 \\
= z
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c}
\widetilde{x}_2 & \widetilde{x}_1 & \text{-1} \\
\hline
-\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & \frac{22}{23} \\
\frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{30}{23} \\
\hline
-\frac{12}{23} & -\frac{25}{23} & -\frac{394}{23}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
= -x_2 \\
= -x_1 \\
= z
\end{array}$$

Holguras

$$\begin{array}{rclcl}
\frac{30}{23} = & x_1 & \leftrightarrow & \widetilde{w}_1 & = 0 \\
\frac{22}{23} = & x_2 & \leftrightarrow & \widetilde{w}_2 & = 0 \\
0 = & \widetilde{x}_1 & \leftrightarrow & w_1 & \geq 0 \\
0 = & \widetilde{x}_2 & \leftrightarrow & w_2 & \geq 0
\end{array}$$

Más aún el dual asociado

$$\begin{aligned} Min\ g = 10w_1 + 12w_2 \\ 4w_1 + 7w_2 \geq 8 \\ 5w_1 + 3w_2 \geq 7 \\ w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En tablas de Tucker

$$\begin{array}{r|cc|c|} \cline{2-4} w_1 & 4 & 5 & 10 \\ w_2 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{2-4} -1 & 8 & 7 & 0 \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{r}{} & = & = & \multicolumn{1}{c}{=} \\ \multicolumn{1}{r}{} & \widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2 & \multicolumn{1}{c}{g} \end{array}$$

Las tablas de Tucker del problema de maximización y su dual de minimización son iguales, utilizando este formato de tabla se facilita encontrar los valores del primal y el dual.

$$\begin{array}{r|cc|c|ll} \multicolumn{1}{r}{} & x_1 & x_2 & \multicolumn{1}{c}{-1} & & \\ \cline{2-4} w_1 & 4 & 5 & 10 & = & -\widetilde{x}_1 \\ w_2 & \mathbf{7} & 3 & 12 & = & -\widetilde{x}_2 \\ \cline{2-4} -1 & 8 & 7 & 0 & = & z \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{r}{} & = & = & \multicolumn{1}{c}{=} & & \\ \multicolumn{1}{r}{} & \widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2 & \multicolumn{1}{c}{g} & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|cc|c|ll} \multicolumn{1}{r}{} & \widetilde{x}_2 & x_2 & \multicolumn{1}{c}{-1} & & \\ \cline{2-4} w_1 & -\frac{4}{7} & \mathbf{\frac{23}{7}} & \frac{22}{7} & = & -\widetilde{x}_1 \\ \widetilde{w}_1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{12}{7} & = & -x_1 \\ \cline{2-4} -1 & -\frac{8}{7} & \frac{25}{7} & -\frac{96}{7} & = & z \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{r}{} & = & = & \multicolumn{1}{c}{=} & & \\ \multicolumn{1}{r}{} & w_2 & \widetilde{w}_2 & \multicolumn{1}{c}{g} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c|ll} \multicolumn{1}{r}{} & \widetilde{x}_2 & \widetilde{x}_1 & \multicolumn{1}{c}{\text{-1}} & & \\ \cline{2-4} \widetilde{w}_2 & -\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & \frac{22}{23} & = & -x_2 \\ \widetilde{w}_1 & \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{30}{23} & = & -x_1 \\ \cline{2-4} -1 & -\frac{12}{23} & -\frac{25}{23} & -\frac{394}{23} & = & z \\ \cline{2-4} \multicolumn{1}{r}{} & = & = & \multicolumn{1}{c}{=} & & \\ \multicolumn{1}{r}{} & w_2 & w_1 & \multicolumn{1}{c}{g} & & \end{array}$$

Holguras

$$\begin{array}{rlcll} \frac{30}{23} = & x_1 & \leftrightarrow & \widetilde{w}_1 & = 0 \\ \frac{22}{23} = & x_2 & \leftrightarrow & \widetilde{w}_2 & = 0 \\ 0 = & \widetilde{x}_1 & \leftrightarrow & w_1^* & = \frac{25}{23} \\ 0 = & \widetilde{x}_2 & \leftrightarrow & w_2^* & = \frac{12}{23} \end{array}$$

6.5. El Algoritmo Dual Simplex

Objetivos: Mostrar el algoritmo dual Simplex y su utilidad para resolver problemas primales y duales.
Presentar el algoritmo de la restricción artificial para encontrar una base dual factible.

Recordemos que $w = c_B B^{-1}$ entonces si $c_B B^{-1} \geq 0$ decimos que el problema dual es factible, podemos iniciar con una solución básica dual factible del problema dual para resolver el problema primal, sin embargo no podemos usar el mismo algoritmo, por que ahora lo que se debe encontrar es la factibilidad del problema ya que se parte de la optimalidad.

Dada una tabla Simplex de un problema de minimización con $z_j - c_j \leq 0 \;\forall\, j$, *ie.* es dual factible, suponga que el pivote elegido es y_{jk}.

Antes del pivoteo

	$\cdots$	x_{Bj}	$\cdots$	x_{Bm}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_r	$\cdots$	LD
z	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_r - c_r$	$\cdots$	$c_B\overline{b}$
x_{B1}	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1r}	$\cdots$	$\overline{b_1}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{Bj}	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{jk}	$\cdots$	y_{jr}	$\cdots$	$\overline{b_j}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{Bm}	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	y_{mr}	$\cdots$	$\overline{b_m}$

Después del pivoteo

	...	x_{Bj}	...	x_{Bm}	...	x_k	...	x_r	LD
z	...	$\frac{c_k - z_k}{y_{jk}}$	...	0	...	0	...	$z_r - c_r - \frac{y_{jr}(z_k - c_k)}{y_{jk}}$	$c_B\overline{b} - \frac{(z_k - c_k)\overline{b_j}}{y_{jk}}$
x_{B1}	...	$\frac{-y_{1k}}{y_{jk}}$	...	0	...	0	...	$y_{1r} - \frac{y_{jr}y_{1k}}{y_{jk}}$	$\overline{b_1} - \frac{y_{1k}\overline{b_j}}{y_{jk}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	...	$\frac{1}{y_{jk}}$	...	0	...	1	...	$\frac{y_{jr}}{y_{jk}}$	$\frac{\overline{b_j}}{y_{jk}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{Bm}	...	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...	1	...	0	...	$y_{mr} - \frac{y_{jr}y_{mk}}{y_{jk}}$	$\overline{b_m} - \frac{y_{mk}\overline{b_j}}{y_{jk}}$

Para no perder la dual factibilidad después de pivotear necesitamos que todas las

$$z'_r - c'_r = z_r - c_r - \frac{y_{jr(z_k - c_k)}}{y_{jk}} \leq 0$$

entonces

$$z_r - c_r \leq \frac{y_{jr}(z_k - c_k)}{y_{jk}} \qquad (I)$$

Si $\frac{y_{jr}}{y_{jk}} \leq 0$ entonces $z'_r - c'_r \leq 0$

Para lograr la factibilidad del problema primal observamos que

si $\bar{b}_r \leq 0$ y después pivotear se obtiene $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$, nos fijaremos entonces en las $y_{jk} \leq 0$.

- Si $y_{jk} \geq 0 \;\; \forall k \quad \rightarrow$ El problema primal es infactible.

- Si no,
  - Si $y_{jk} > 0$, con un razonamiento análogo al del algoritmo Simplex en la prueba del radio mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min\left\{\frac{z_i - c_i}{y_{ij}} \quad : \ y_{ij} < 0\right\} \qquad (II)$$

$$\frac{y_{jr}}{y_{jk}} \leq 0 \qquad -\frac{y_{jr}(z_k - c_k)}{y_{jk}} \leq 0$$

$$\therefore z_r - c_r - \frac{y_{jr}(z_k - c_k)}{y_{jk}} \leq z_r - c_r \leq 0$$

  - Si $y_{jk} < 0$

$$\frac{z_r - c_r}{y_{jr}} \geq \frac{z_k - c_k}{y_{jk}} \qquad por \ (II)$$

$$z_r - c_r \leq y_{jr}\left(\frac{z_k - c_k}{y_{jk}}\right)$$

$$\therefore z_r - c_r - y_{jr}\left(\frac{z_k - c_k}{y_{jk}}\right) \leq 0$$

Para la elección de $\overline{b}_r$ no hemos definido un criterio pero después de pivotear se convierte en

$$\overline{b}_j - y_{jk}\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$$

Con la finalidad de no hacer más negativas a las $\overline{b}_i's$ podríamos tomar

$\overline{b}_r = min\,\{b_i\}$, aunque depende de $\frac{y_{jk}}{y_{rk}}$.

Resumiendo para un problema de minimización:

Algoritmo Dual Simplex

1. Se inicia con una base dual factible en la cual todos los $z_j - c_j \leq 0$.
2. Se examinan las columnas del vector $\overline{b}$. Si la columna $\overline{b}$ es no negativa terminar, las soluciones básicas para los dos problemas son óptimas.
3. Si $\overline{b}$ tiene al menos una entrada negativa, se selecciona cualquier columna como renglón pivote para la cual $\overline{b}_r < 0$.
4. Se examinan las entradas en el reglón pivote (exceptuando la entrada de la columna b).Si ninguna es negativa terminar el problema primal es infactible.

5. Si existen una o más entradas negativas en el renglón pivotal, seleccionar
$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \quad y_{rj} < 0 \right\}$$

6. Se toma como pivote y_{rj} y regresar al paso 2.

Ejemplo 6.10 *Usando tablas de Tucker y el algoritmo Dual Simplex resuelva*

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 & \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq -4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_1 & 1 & 2 & 1 \\ x_2 & -1 & 1 & -2 \\ x_3 & 1 & \mathbf{-1} & -3 \\ \hline -1 & -2 & -4 & 0 \\ \hline & = & = & = \\ & \widetilde{x}_1 & \widetilde{x}_2 & g \end{array}$$

$$\overline{b}_r = min \left\{ \overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3 \right\} = min \{1, -2, -3\} \qquad r = 3$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{3k}} = min \left\{ \frac{z_2 - c_2}{y_{32}} \right\} = min \left\{ \frac{-4}{-1} \right\} = 4 \quad k = 2$$

$$\begin{array}{c|cc|c|} \hline x_1 & 3 & 2 & -5 \\ x_2 & 0 & 1 & -5 \\ \widetilde{x}_2 & -1 & -1 & 3 \\ \hline -1 & -6 & -4 & 12 \\ \hline & = & = & = \\ & \widetilde{x}_1 & x_3 & g \end{array}$$

$$\overline{b}_r = min \left\{ \overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3 \right\} = min \{-5, -5, 3\} \qquad r = 2$$

No hay pivote, $\therefore$ El problema primal es infactible y el problema dual es no acotado.

Ejemplo 6.11 *Resuelve el siguiente problema usando el algoritmo Dual Simplex*

$$
\begin{aligned}
Min\ z = 3x_1 + x_2 + x_3 & \\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq \ \ 4 \\
-2x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq -1 \\
0 \cdot x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq -2 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Escribimos el problema dual

$$
\begin{aligned}
Max\ g = 4w_1 - w_2 - 2w_3 & \\
w_1 - 2w_2 + 0 \cdot w_3 &\leq 3 \\
-w_1 + 3w_2 - \quad w_3 &\leq 1 \\
2w_1 - w_2 + \quad 4w_3 &\leq 1 \\
w_1, w_2, w_3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	-3	-1	-1	0	0	0	0
x_4	0	1	-1	2	1	0	0	4
x_5	0	-2	3	-1	0	1	0	-1
x_6	0	0	**-1**	4	0	0	1	-2
z	1	-3	0	-5	0	0	-1	2
x_4	0	1	0	-2	1	0	-1	6
x_5	0	**-2**	0	11	0	1	3	-7
x_2	0	0	1	-4	0	0	-1	2
z	1	0	0	$-\frac{43}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{25}{2}$
x_4	0	0	0	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	0	1	0	$-\frac{11}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
x_2	0	0	1	-4	0	0	-1	2

$\therefore$El problema es óptimo $x^* = (\frac{7}{2}, 2, 0, \frac{5}{2}, 0, 0)$ $\ w^* = (0, -\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}, 0, 0, \frac{43}{2})$

En el Capítulo 5 se revisó el método de la gran M para encontrar una base inicial factible, en el paso 1 del algoritmo Dual Simplex requiere una solución básica dual factible.

A continuación mostramos la técnica de la restricción artificial para encontrar una solución básica dual factible para un problema de minimización

1. Se añade la restricción $\sum_{j=m+1}^{n+m} x_j \leq M$, en donde $M > 0$ es muy grande y x_{n+m+1} es la variable de holgura de la restricción adicional.
2. Se toma $z_k - c_k = max\{z_j - c_j\}$
3. Se efectúa el pivoteo tomando como variable entrante x_k y la variable que sale la base es x_{n+m+1}

Una vez realizado el pivoteo se dispone de una solución dual factible y se aplica el algoritmo Dual Simplex en los cuales se puede obtener cualquiera de los siguientes tres casos:

1. La solución dual es no acotada y el problema primal es infactible.
2. Las soluciones óptimas primal y dual se obtienen con $x_{n+1}^* > 0$
3. Las soluciones óptimas primal y dual se obtienen con $x_{n+1}^* = 0$, existen dos casos:
   - Si $z_{n+m+1} - c_{n+m+1} < 0$ el problema primal es no acotado.
   - Si $z_{n+m+1} - c_{n+m+1} = 0$ la solución óptima es finita.

Ejemplo 6.12 *Resuelva utilizando la técnica de la restricción artificial*

$$Max\ z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Escribimos el problema en forma estándar y añadimos la restricción artificial

$$Max\ z = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 &= M \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Escribimos la tabla Simplex asociada.

$$z_k - c_k = min\{z_1 - c_1, z_2 - c_2\} = min\{-1, -2\} = -2$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-1	-2	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	0	1
x_4	0	1	-1	0	1	0	-2
x_5	0	1	**1**	0	0	1	M

El pivote es $y_{23} = 1$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	1	0	0	0	2	2M
x_3	0	0	0	1	0	**-1**	1-M
x_4	0	2	0	0	1	1	M-2
x_2	0	1	1	0	0	1	M

$$\bar{b}_r = min\,\{1 - M\} = 1 - M \quad r = 1$$

El pivote es $y_{51} = -1$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	1	0	2	0	0	2
x_5	0	0	-1	0	1	1	-1+M
x_4	0	2	0	0	1	0	-1
x_2	0	1	1	1	0	0	1

La base es dual factible, pero $\bar{b}_2 = -1 < 0$ y no existe ningún elemento en el primer renglón que sea negativo.
$\therefore$ El problema primal es infactible y el dual es no acotado.

6.6. El Algoritmo Dual Simplex Programado

Objetivo: Modificar los algoritmos programados anteriormente para el uso del algoritmo Dual Simplex.

Tomando como base los programas “tablasimplex” y “tablatucker” para utilizar el Algoritmo Simplex Dual, observamos las líneas de código que se tienen y las nuevas que deben aparecer en el código del programa del algoritmo dual.

Comenzamos con el código tablasimplex(A,b,c)

tablasimplex	**tablasimplexdual**
$if(CB * inv(B) * A - c <= 0)$	$if(inv(B) * b >= 0)$
$[r,k] = max(CB * inv(B) * A - c)$	$[k,r] = min\,(inv(B) * b)$
Cálculo del radio mínimo	
$for\ i = 1 : m$	$for\ i = 1 : n$
$if(T(i+1,k) > 0)$	$if(T(r+1,i) < 0)$
$radio(i) =$	
$T(i+1, n+m+1)/T(i+1,k);$	$radio(i) = T(1,i)/T(r+1,i);$
end	end
end	end
$[r,j] = min(radio);$	$[k,j] = min(radio);$
$if(r == realmax)$	$if(k == realmax)$
$fprintf('El\ problema\ es$	$fprintf('El\ problema\ primal$
$no\ acotado')$	$es\ infactible')$
$return$	$return$
Actualizamos la base	
$else$	$else$
$B(:,j) = A(:,k);$	$B(:,r) = A(:,j);$
$CB(:,j) = c(:,j);$	$CB(:,r) = c(:,i);$

Para el Algoritmo tablastucker

tablatucker	**tablatuckerdual**
Criterio de optimalidad	
$if(T(m+1, 1:n) <= 0)$	$if(T(1:m,n) = 1 >= 0)$
$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$	$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$
$else$	$else$
$[r,k] = max(T(m+1, 1:n));$	$[r,j] = min(T(1:m, n+1));$
$radio = ones(1,m) * realmax;$	$radio = ones(1,m) * realmax;$
$for\ i = 1 : m$	$for\ i = 1 : n$
$if(T(i,k) > 0)$	$if(T(j,i) < 0)$
$radio(i) = T(i, n+1)/T(i,k);$	$radio(i) = T(m+1,i)/T(j,i);$
end	end
end	end
$[r,j] = min(radio);$	$[r,k] = min(radio);$

Los algoritmos completos tablasimplexdual y tablatuckerdual aparecen en el Apéndice B.

Dado el **caso especial**, *un problema tiene óptimos alternativos si y sólo si el dual tiene una solución óptima degenerada.*

Ejemplo 6.13 *Resuelva el siguiente problema con el algoritmo tablasimplexdual*

$$\begin{aligned} Min\ z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq -3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq -5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\gg A = [-1\ 1\ -2; -1\ -1\ 3; -1\ -2\ -1]\,;$
$\gg b = [1\ \ -3\ \ -5]';$
$\gg c = [5\ \ 4\ \ 6];$
$\gg tablasimplexdual(A, b, c)$

La Tabla Simplex es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	-5	-4	-6	0	0	0	0
x_4	-1	1	-2	1	0	0	1
x_5	-1	-1	3	0	1	0	-3
x_6	-1	-2	-1	0	0	1	-5

La tabla Simplex es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	-3	0	-4	0	0	-2	10
x_4	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$

La tabla Simplex es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	$-\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{8}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$\frac{62}{5}$
x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_5	$-\frac{13}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

La tabla Simplex es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	0	0	$-\frac{25}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{37}{13}$	13
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0
x_1	1	0	0	$-\frac{7}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{13}$	1
x_2	0	1	0	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$-\frac{5}{13}$	2

$\therefore$El problema primal es óptimo con $x^* = (1, 2, 0, 0, 0, 0)$ una solución óptima degenerada.

Ejemplo 6.14 *Resuelva el dual el siguiente problema con el algoritmo tablastuckerdual*

Escribimos el problema dual

$$
\begin{aligned}
Max\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \\
x_1 + 2x_2 + \ x_3 &\leq -5 \\
-x_1 + \ x_2 + 2x_3 &\leq \ \ 2 \\
x_1 - 3x_2 + \ x_3 &\leq -6 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq \ \ 0
\end{aligned}
$$

La tabla Simplex es

x_1	x_2	x_3	LD	
1	1	2	-5	$- = x_4$
-1	1	2	2	$- = x_5$
1	-3	1	-6	$- = x_6$
-1	-3	-5	0	$= -z$

La tabla Simplex es

x_1	x_6	x_3	LD	
$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	-9	$- = x_4$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	$- = x_5$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$- = x_2$
-2	-1	-6	6	$= -z$

$\therefore$ El problema dual es no acotado y el problema primal es infactible.

6.7. Análisis de Sensibilidad I

Objetivo: Mencionar como utilizar la solución óptima de un problema para encontrar el óptimo de otro que es una modificación o proviene de este problema.

En todos los ppl pueden presentarse modificaciones en los datos del problema, ya sea a_{ij}, c_j, b_i o bien se puede añadir o eliminar alguna restricción.

Cuando esto sucede se utiliza la solución antes obtenida para resolver el nuevo problema. Estos cambios forman parte de lo que se denomina el análisis de sensibilidad.[4]

Suponemos que la tabla de un ppl de minimización es:

x_B	x_N	LD
$\bar{0}$	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

I.Cambio en el vector de costos c

Si el vector de costos cambia en uno o más coeficientes entonces el vector c cambia a c', el problema a resolver se convierte en:

$$\begin{aligned} Min\ z &= c'x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Si c_i cambia entonces es posible identificar alguno de los siguientes dos casos:

1. $x_i \notin x_B$ (la correspondiente x_i no forma parte de la base)

$$z_i - c_i = wa_i - c_i \qquad\qquad wa_i = (z_i - c_i) + c_i$$

$$z_i - c_i' = wa_i - c_i' = (z_i - c_i) + c_i - c_i'$$

2. $x_i \in x_B \qquad x_i = x_{Br}$

El renglón z es de la forma $c_B B^{-1} A - c$ cambia a:

Donde a^r es el renglón r-ésimo de A

$$c_B B^{-1} A - c - c_i B^{-1} a^r + c_i' B^{-1} a^r + (c - c')e_i$$

Factorizando

$$c_B B^{-1} A - c - (c_i - c_i') B^{-1} a^r + (c_i - c_i')e_i$$

También cambia el valor de la función objetivo

$$c_B B^{-1} b \qquad\qquad c_B B^{-1} + (c_i' - c_i) B^{-1} b_r$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	1	4	2	0	2
x_4	0	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	1	4	0	1	2

Ejemplo 6.15 *Dada la tabla óptima del problema 4.10*

Encuentre una nueva solución óptima si

1. $c'_4 = 1$
2. $c'_1 = -1$

1. Como $x_4 \notin x_B$ actualizamos

$$z_4 - c'_4 = (z_4 - c_4) + c_4 - c'_4 = 2 + 0 - 1 = 1$$

$\therefore$ La solución sigue siendo óptima

2. $x_1 \in x_B$ cambia todo el renglón z

$$c_B B^{-1} A - c + (c_1 - c'_1) B^{-1} a^1 + (c_1 - c'_1, 0, 0, 0, 0)$$
$$= (0, 1, 4, 2, 0) - (2 + 1)(1, 1, 1, 1, 0) + (2 + 1, 0, 0, 0, 0)$$
$$= (0, 1, 4, 2, 0) + (-3, -3, -3, -3, 0) + (3, 0, 0, 0, 0) = (0, -2, 1, -1, 0)$$

$$c_B B^{-1} b + (c'_1 - c_i) B^{-1} b = 2 + (-1 - 2)(1) = -1$$

Reescribimos la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-2	1	-1	0	-1
x_1	0	1	**1**	1	1	0	1
x_5	0	0	1	4	0	1	2
z	1	2	0	3	1	0	1
x_2	0	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	0	3	-1	1	1

Cambió la solución óptima y el valor de la función objetivo.

[4] Algunos autores le llaman análisis de post-optimalidad.

II.Cambio paramétrico en los coeficientes de costo

Suponga que en el problema al vector de coeficientes de costo c se le aumenta un nuevo vector c' multiplicado por una constante s y el problema se convierte en encontrar el valor de s tal que el problema siga siendo óptimo.
Podemos expresar el problema como:

$$\begin{aligned} Min\ z = (c + sc')x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Dado el ppl original existen tres casos:

1. El problema original es infactible y continua siendo infactible.
2. El problema original es no acotado. Podría ocurrir que se encuentre un valor de s tal que se pierda la condición de no acotamiento.
3. El problema es óptimo y existe un valor de s tal que el problema sigue siendo óptimo.

Analicemos la forma en que se debe elegir s para continuar con una solución óptima.

$z = c_B B^{-1} b - (c_B * B^{-1} A - c_N) x_N$
cambia a
$z = (c + sc')_B B^{-1} b - (c_B * B^{-1} A - c_N) x_N - s(c'_B * B^{-1} A - c'_N) x_N$
$z = \sum_{i=1}^{n} \left[(c_i - z_i) + s(c'_i - z'_i) \right] x_i$

Cada uno de los términos debe ser no negativo, entonces

$$c_i - z_i + s(c'_i - z'_i) \geq 0 \ \ si \ \ c'_i - z'_i < 0 \qquad s \leq \ -(c_i - z_i)/(c'_i - z'_i)$$

Utilizando un criterio similar a la prueba de radio mínimo:

$$s = min \left\{ -(c_i - z_i)/(c'_i - z'_i) \quad \forall c'_i - z'_i > 0 \right\}$$

Ejemplo 6.16 *Utilizando la tabla óptima del ejemplo 4.10 encuentre el valor de s si $c' = (-12 - 3, 0, 0)$.*

De la tabla tenemos

$$Renglón\ z = (0, -1, -4, -2, 0)$$

Calculamos para el nuevo vector c'

$$c' - c'_B B^{-1} A = (-1,\ 2,\ -3,\ 0,\ 0) - (-1, 0) * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c' - c'_B B^{-1} A = (0, 3, -2, 1, 0)$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$s = min\left\{-\left(\frac{-1}{3}\right), -\left(\frac{-2}{1}\right)\right\} = min\left\{\frac{1}{3}, 2\right\} = \frac{1}{3}$$

Se toma $c_i - z_i \geq 0$ porque el objetivo es maximizar

Calculamos el renglón z para $s = \frac{1}{3}$

$$(0,\ -1,\ -4,\ -2,\ 0) + \frac{1}{3}(0,\ 3,\ -2,\ 1,\ 0) = \left(0,\ 0,\ -\frac{14}{3},\ -\frac{5}{3},\ 0\right)$$

$$(c_B + sc'_B)B^{-1}b = \left[(2,0) + \frac{1}{3}(-1,0)\right]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{5}{3}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_1	0	1	1	1	1	0	1
x_5	0	0	1	4	0	1	2

Con $s = \frac{1}{3}$ la solución sigue siendo óptima con $x^* = (1, 0, 0, 0, 2)$ $\quad cx^* = \frac{5}{3}$

III.Cambio en el vector b

Suponemos que b_i cambia a b'_i

$$\begin{array}{ll} Entonces & \bar{b} = B^{-1}b \quad cambia\ a \quad \bar{b}' = B^{-1}b' \\ \quad y & c_B B^{-1}b \quad cambia\ a \quad c_B B^{-1}b' = c_B \bar{b}' \end{array}$$

Ejemplo 6.17 *Con los datos del ejemplo 4.11 que se encuentra en la página 105 cambiemos* b_2 *a 30.*

Considerando la tabla óptima con los datos originales:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	-2	$\frac{-3}{2}$	-80
x_4	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	30
x_5	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	20

y como x_3, x_4 son variables de holgura entonces

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora $\overline{b}'$, $y\ c_B\overline{b}'$

$$\overline{b}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b}' = (-2\ 1) \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} = -65$$

por lo tanto la nueva tabla óptima es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	-2	$\frac{-3}{2}$	-65
x_4	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	25
x_5	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	15

$\therefore \quad x^* = (0, 0, 0, 25, 15) \quad cx^* = -65$

IV.Cambio paramétrico en el vector b

Si ahora dado el vector original b se le aumenta un vector b' multiplicado por una constante $s \geq 0$, será necesario en encontrar el valor de s' tal que el problema siga siendo factible, *ie*. resolver el problema:

$$Min\ z = cx$$

$$Ax = b + sb'$$

$$x \geq 0$$

$$B^{-1}(b + sb') = B^{-1}b + sB^{-1}b = \overline{b} + s\overline{b}' \geq 0$$

$$\overline{b}_i + s\overline{b}'_i \geq 0 \quad si \quad \overline{b}'_i < 0 \quad entonces \quad s \leq -\frac{\overline{b}_i}{\overline{b}'_i}$$

Usando el criterio de cociente mínimo

$$s = min \left\{ -\frac{\overline{b}_i}{\overline{b}'_i} \qquad \overline{b}'_i < 0 \right\}$$

Ejemplo 6.18 *Encuentre s para el ejemplo 4.19 si se tiene* $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Considerando la tabla final en la que se observa que el problema es no-acotado

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	5	-2	6	20
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_2	0	0	1	1	-1	1	4

y como las variables x_4, x_5 son de holgura entonces

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$s = min \left\{ -\frac{4}{-\frac{1}{2}} \right\} = 8$$

Actualizando el lado derecho

$$\bar{b} + s\bar{b}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_B * (\bar{b} + s\bar{b}') = (4\ 2) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 20$$

por lo tanto la nueva tabla es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	5	-2	6	20
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
x_2	0	0	1	1	-1	1	0

La tabla no es óptima, pero no existe un candidato a pivote, por lo tanto podemos concluir que el problema es no acotado.

V.Cambio en las entradas de la matriz A

Suponemos que a_j cambia a a'_j, existen dos casos

1. $a_j \notin B$, calculamos su columna

$$y_j = B^{-1}a_j \quad cambia\ a \quad y'_j = B^{-1}a'_j$$

2. $a_j \in B$ y corresponde a x_{Br}
   Suponemos que la variable x_j es sustituida por x'_j, calculamos

$$y'_j = B^{-1}a'_j \qquad z'_j - c'_j = c_B y'_j - c_j$$

   Es posible que ya no se encuentre la identidad en la tabla, tomamos entonces como pivote y_{rj} y realizamos las operaciones correspondientes.

Ejemplo 6.19 *Retomando el ejemplo 4.11, calcule el óptimo del problema si*

- $a'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $a'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Como x_4 no está en la base, solo calculamos la columna y el coeficiente de costo correspondiente

$$y'_4 = B^{-1}a'_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = c_B y'_4 - c_4 = (-2,\ -1)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = -3 - \frac{1}{2} - 0 = -\frac{7}{2}$$

$\therefore$ La solución sigue siendo óptima.

Como x_2 está en la base, primero calculamos la columna y su coeficiente de costo.

$$y'_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = c_B y'_2 - c_2 = (-2\ \ -1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$$

Reescribiendo la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	$-\frac{9}{8}$	0	$\frac{-3}{2}$	-80
x_1	0	1	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	30
x_2	0	0	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	0	$\frac{1}{2}$	20

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	-2	0	-20
x_1	0	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{110}{3}$
x_2	0	0	1	0	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$\frac{160}{3}$

$\therefore$ La tabla es óptima y existen óptimos alternativos

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	-2	0	-20
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	10
x_4	0	0	$\frac{3}{4}$	0	1	40

El conjunto de soluciones óptimas es de la forma:

$$\mathcal{C} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^4 | \lambda \left(\frac{110}{3}, \frac{160}{3}, 0, 0 \right) + (1-\lambda)(10, 0, 0, 40) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

6.8. Análisis de Sensibilidad II

Objetivo: Proporcionar ejemplos donde se utilice el análisis de sensibilidad, para cuando se añade una restricción ó una variable al problema.

VI. Aumentar una restricción al problema $a_{m+1}x \leq b_{m+1}$

Primero verificamos si x^* satisface con la nueva restricción:

- Si la satisface x^* pertenece la nueva la región de soluciones factibles S' y sigue siendo óptimo.
- Si $a_{m+1}x^* \nleq b_{m+1}$ entonces $x^* \notin S'$

Introducimos la restricción al problema $a_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}$, verificamos si todavía se conserva la submatriz identidad en el problema, de no ser así realizamos las operaciones correspondientes para conseguir una base explícita.

Aplicamos el Algoritmo Dual Simplex, por que ya se tiene la optimalidad en el problema.

Ejemplo 6.20 *Dada la tabla óptima del ejercicios 5.3*

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-4	0	0	-3	6
x_3	0	0	2	1	0	1	1
x_1	0	1	-1	0	0	-1	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	1

Suponga que la restricción $3x_1 + x_2 \geq 5$ es añadida al problema, realice el análisis de sensibilidad correspondiente.

Escribiendo la restricción en forma estándar

$$-3x_1 - x_2 \leq -5 \qquad \rightarrow \qquad -3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 = -5$$

sustituimos $x^* = (2, 0, 1, 1, 0)$ en la nueva restricción

$$-3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + x_6 = -5 \quad x_6 = 1$$

$\therefore\ x^* = (2, 0, 1, 1, 0, 1)$ es el óptimo del problema.

¿Y si en lugar de $3x_1 + x_2 \geq 5$ tenemos $3x_1 + x_2 \geq 7$?
Escribiendo la restricción ene forma estándar

$$-3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 = -7$$

Sustituimos $x^* = (2, 0, 1, 1, 0)$

$$-3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + x_6 = -7 \quad x_6 = -1$$

$\therefore x^*$ no es óptimo pues $x^* \notin S$.

Incorporando la nueva restricción en la tabla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	-4	0	0	-3	0	6
x_3	0	0	2	1	0	1	0	1
x_1	0	**1**	-1	0	0	-1	0	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	1	-7
x_6	0	-3	-1	0	0	0	1	-7

La tabla no tiene una submatriz identidad, pero se realizan los ajustes para que x_1 siga siendo básica.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	-4	0	0	-3	0	6
x_3	0	0	2	1	0	1	0	1
x_1	0	1	-1	0	0	-1	0	2
x_4	0	0	-4	0	1	-3	1	-7
x_6	0	0	**-4**	0	0	-3	1	-1

Aplicamos el algoritmo dual Simplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	0	0	0	-1	7
x_3	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_4	0	0	0	0	1	0	-1	2
x_2	0	0	1	0	0	$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore$ es óptimo y existen óptimos alternativos.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	0	0	0	-1	7
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
x_1	0	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_4	0	0	0	0	1	0	-1	2
x_5	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\therefore$ El conjunto soluciones de óptimas es de la forma:

$$\mathcal{C} = \left\{ \overline{x} \in \mathbb{R}^6 | \overline{x} = \lambda \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 0, 0 \right) + (1-\lambda) \left(\frac{7}{3}, 0, \frac{2}{3}, 2, \frac{1}{3}, 0 \right) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

VII. Se añade una variable

Sea $x_n + 1$ con a_{n+1}, la variable no se encuentra en la base por que se acaba de incluir, calculamos

$$y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1} \qquad z_{n+1} - c_{n+1} = c_B y_{n+1} - c_{n+1}$$

- Si $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ la solución sigue siendo óptima.

- Si no, aplicamos el algoritmo Simplex.

Ejemplo 6.21 *Retomando el ejemplo 4.13*

1. *Suponga que se añade la variable x_5 con $a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $c_5 = -2$*

2. *Suponga que se aumenta la variable x_5 con $a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $c_5 = 1$*

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	-5	0	-4	0	-20
x_2	0	1	1	1	0	5
x_4	0	4	0	1	1	8

En la tabla x_3, x_4 son variables de holgura en restricciones de tipo menor o igual, entonces

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z_5 - c_5 = c_B y_5 - c_5 = (-4, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - (-2) = -4 + 2 = -2$$

$\therefore$ x^* sigue siendo óptima

Reescribiendo la tabla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-5	0	-4	0	-2	-20
x_2	0	1	1	1	0	1	5
x_4	0	4	0	1	1	-2	8

Para el caso 2 calculamos

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_5 - c_5 = c_B y_5 - c_5 = (-4, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 4 - 1 = 3$$

x^* ya no es óptimo, aplicamos el algoritmo Simplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-5	0	-4	0	3	-20
x_2	0	1	1	1	0	-1	5
x_4	0	4	0	1	1	**1**	8

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-17	0	-7	-3	0	-44
x_2	0	5	1	2	1	0	13
x_5	0	4	0	1	1	1	8

$\therefore \quad x^* = (0, 13, 0, 0, 8) \quad cx^* = -44$

Análisis de Sensibilidad con Matlab

Para resolver un ppl con los algoritmos que hemos desarrollado, generalmente introducimos A,b,c y/o B.

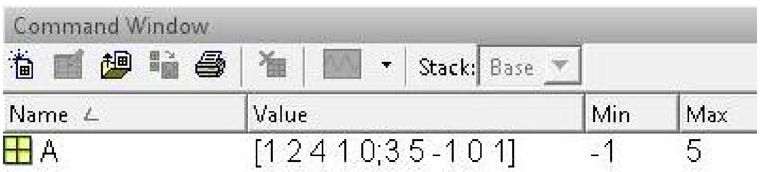
Si deseamos modificar alguno de estos vectores debido a las condiciones del problema han cambiado podemos volver a introducir los datos ó realizar las modificaciones en el ***Workspace*** de Matlab.

Suponga que

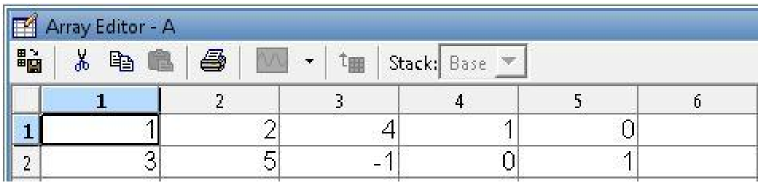
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\gg A = [1\ 2\ 4\ 1\ 0; 3\ 5\ \ -1\ 0\ 1] \hookleftarrow$

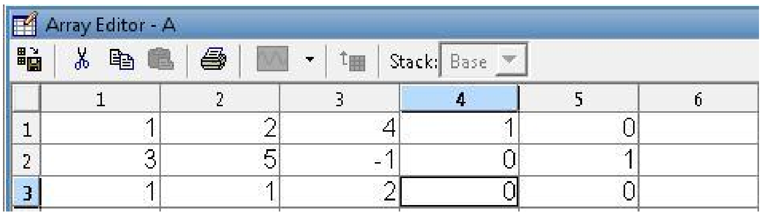
deseamos aumentar la restricción $x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 5$, en lugar de reintroducir A elegimos la ópción ***Desktop*** del menú y elegimos la opción ***Workspace*** donde aparece



al elegir A con el mouse se abre la ventana ***Array Editor-A***



Las entradas aparecen en una hoja de datos similar a una hoja de cálculo, será suficiente con escribir el nuevo renglón en la siguiente línea.



La importancia del ***Workspace*** y del ***Array Editor*** radica en que nos permite modificar facilmente las variables, duplicarlas, eliminarlas, además de graficar y copiar los datos a otras hojas de cálculo o programas de edición de texto como Excel ó Word.

6.9. Ejercicios

Objetivos: Resolver ppl utilizando su problema dual asociado. Aplicar los teoremas de dualidad para resolver problemas primales y duales. Resolver problemas utilizando el Análisis de Sensibilidad.

1. Construya el dual de los siguientes problemas

   a)

$$\begin{aligned} Min\ z = \ & x_1 + 7x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ & 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 3x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ & 11x_1 + x_2 - 16x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Max\ z = \ & 10x_1 + 17x_2 \\ & 30x_1 - 22x_2 \leq 13 \\ & x_1 + 9x_2 \geq 15 \\ & x_1 \leq 0 \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Resuelva utilizando el Simplex dual los siguientes problemas

   a)

$$\begin{aligned} Min\ z = & \ x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq -4 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Min\ z = & \ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq -4 \\ & 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Sea $x^* = (1, 2, 3, 0, 0)$ la solucíon óptima de un problema de minimización en forma canónica con x_4, x_5 variables de holgura. ¿Puede ser $y^* = (0, 1, 0, 3, \frac{1}{2})$ la solución del problema dual asociado?. Justifique su respuesta.

4. Dado el ppl

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

con $x^* = (0, 5, 0, 8)$. Encuentre la solución de su problema dual usando holguras complementarias.

5. Resuelva el primal y el dual del problema

$$\begin{aligned} Min\ z = -2x_1 - 10x_2 & \\ 8x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ -2x_1 + \frac{7}{2}x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 10x_2 &\leq 22 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Resuelva el siguiente problema con la técnica de la restricción artificial

$$\begin{aligned} Max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 4x_3 &\geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} Min\ z = -13x_1 - 15x_2 & \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   a) Resuelva el problema primal
   b) Encuentre la solución del problema dual
   c) Realice de las siguientes modificaciones y para cada uno encuentre encuentre x^* *y* w^*.
      1) Cambie $c_2 = -15$ por $c_2' = 12$
      2) $b_1 = 6$ se cambia a $b_1' = 5$

3) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ por $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Se aumenta la variable x_5, con $a_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c_5 = 3$

5) Se aumenta la restricción $x_1 + 3x_2 \leq 4$

8.

$$\begin{aligned} Min\ z = 2x_1 - 4x_2 + \ x_3& \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 &\leq \ 8 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

a) Resuelva el problema primal

b) Encuentre la solución del problema dual

c) Realice de las siguientes modificaciones y para cada uno encuentre encuentre x^* *y* w^*.

1) Encuentre el valor de s si $c' = (1\ 6\ 0)$

2) Encuentre el valor de s si $b' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

Capítulo 7

Reduciendo el Número de Operaciones

Objetivo: Explicar las técnicas del algoritmo Simplex Revisado y la forma producto de la inversa para simplificar y/o disminuir los cálculos del algoritmo Simplex.

7.1. El Algoritmo Simplex Revisado

Objetivo: Presentar el Algoritmo Simplex Revisado y proporcionar el código programado en Matlab.

En las lecciones anteriores se han presentado diversas formas de solucionar un ppl, sin embargo, para ninguno de los algoritmos que se ha analizado, se ha considerado el número de operaciones o cálculos que se deben realizar para resolver el problema. En ocasiones este número es considerable incluso para problemas con pocas variables y restricciones.

Analizando el algoritmo Simplex para un problema de la forma

$$Min\ z = cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

con una base factible dada por las variables de holguras $\widetilde{x}$ si $b \geq 0$

Pasos 1 y 2: Prueba de Optimalidad

Si $z_j - c_j \leq 0 \ \ \forall\, x_j \in \ x_N$ terminar, el problema es óptimo.

Si no, $max\,\{z_j - c_j\} = z_k - c_k$

Para realizar este paso sólo es necesario conocer $z_j - c_j$.

Paso 3

Se determina la variable básica saliente x_r mediante la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = min\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0\right\}$$

Para este paso debemos conocer $\overline{b}$ y y_k.

Paso 4
Se calcula la nueva solución factible. Para esto es necesario conocer $z_k - c_k, \overline{b},\ y\ \ y_k$.
Por lo tanto no es indispensable calcular todas las columnas de la tabla Simplex. ∴ Algunas de las columnas de la tabla Simplex que no son indispensables de calcular.
Recordemos además que la tabla del ppl es de la forma:

	z	x_B	$\widetilde{x}$	LD
z	1	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$
x_B	0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

∴ $z_{n+i} - c_{n+i} = w_i$, si conocemos $c_B\ y\ B^{-1}$ es posible calcular $z_k - c_k,\ \overline{b}\ \ y\ \ y_k$ para continuar con el algoritmo Simplex.

La forma de resolver un ppl utilizando solo la información antes mencionada es un algoritmo al que llamaremos:

Algoritmo Simplex Revisado

Paso 1: Comenzamos con una SBF con base B. Se calcula $B^{-1},\ w = c_B B^{-1},\ y\ \overline{b} = B^{-1}b$.
Se introducen estos datos en la tabla Simplex Revisado

w	$c_B\overline{b}$
B^{-1}	$\overline{b}$

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad: Se calcula $z_j - c_j \ \ \forall \ \ x_j \notin x_B$

$$z_j - c_j = wa_j - c_j$$

Si $z_j - c_j \leq 0 \ \ \forall\ j$ terminar la solución actual es óptima.
Si no, $z_k - c_k = max\left\{z_j - c_j\right\}$ se obtiene $y_k = B^{-1}a_k$
Si $y_k \leq 0$ terminar el problema es no acotado
Si no, insertar la columna $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ \hline y_k \end{bmatrix}$ a la derecha de la tabla.

Paso 3: Prueba del Cociente Mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \quad y_{ik} \geq 0 \right\}$$

$\therefore$ x_{Br} sale de la base y entra x_k en el vector x_B.

Paso 4: Actualizamos la base con operaciones elementales convirtiendo la columna $\left[\frac{z_k - c_k}{y_k} \right]$ en el vector e_{r+1}, una vez realizado esto el vector e_{r+1} es eliminado y se regresa al paso 2.

Ejemplo 7.1 *Resolver utilizando el Simplex revisado el siguiente ppl.*

$$\begin{aligned} Max\ z = x_1 - \quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 - \ x_5 & \\ x_1 + \quad x_2 + \ x_3 - \ x_4 + 2x_5 &\leq 2 \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 - \ x_3 + 5x_4 + \ x_5 &\leq 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

La función objetivo es de maximización, por lo tanto cambian las condiciones de opti malidad del Algoritmo.

Escribiendo el problema en forma matricial y estándar

$$Max\ z \ = (1, -1, 3, 4, -1, 0, 0)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

La base está dada por x_6 y x_7.

Iteración 1
Paso 1

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -1 \qquad z_2 - c_2 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$z_3 - c_3 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -3 \qquad z_4 - c_4 = (0,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$z_5 - c_5 = (0,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \ngeq 0 \quad \forall j$

$$z_k - c_k = min \{-1, 1, -3, -4, 1\} = -4 \qquad k = 4$$

Calculamos y_4

$$y_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} -4 \\ \hline -1 \\ 5 \end{array}} \quad \frac{\bar{b}_r}{y_{r4}} = min\left\{\frac{9}{5}\right\} \qquad r = 2$$

$\therefore \quad x_{B2} = x_7$ sale de la base y x_4 entra a la base.

Paso 4: Actualización

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} -4 \\ \hline -1 \\ 5 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{4}{5} & \frac{36}{5} \\ \hline 1 & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = \left(0, \frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$z_2 - c_2 = \left(0, \frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$z_3 - c_3 = \left(0, \frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -\frac{19}{5}$$

$$z_5 - c_5 = \left(0, \frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = \frac{9}{5}$$

$$z_7 - c_7 = \left(0, \frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{4}{5}$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \ngeq 0 \ \ \forall j$

$$z_k - c_k = min\left\{\frac{3}{5}, 1, -\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right\} = -\frac{19}{5} \qquad k = 3$$

Calculamos y_3

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{4}{5} & \frac{36}{5} \\ \hline 1 & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} -\frac{19}{5} \\ \hline \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{array}} \quad \frac{\bar{b}_r}{y_{r3}} = min \left\{ \frac{\frac{19}{5}}{\frac{4}{5}} \right\} \quad r = 1$$

$\therefore \quad x_{B1} = x_6$ sale de la base y entra x_3 a la base $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Paso 4 Actualización

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{4}{5} & \frac{36}{5} \\ \hline 1 & \frac{1}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} -\frac{19}{5} \\ \hline \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cc|c} \frac{19}{4} & \frac{7}{4} & \frac{101}{4} \\ \hline \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{11}{4} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Iteración 3

Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = \left(\frac{19}{4}, \frac{7}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = \frac{29}{4}$$

$$z_2 - c_2 = \left(\frac{19}{4}, \frac{7}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) = \frac{23}{4}$$

$$z_5 - c_5 = \left(\frac{19}{4}, \frac{7}{4}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = \frac{49}{4}$$

$$z_6 - c_6 = \left(\frac{19}{4}, \frac{7}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{19}{4}$$

$$z_7 - c_7 = \left(\frac{19}{4}, \frac{7}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{7}{4}$$

El problema es óptimo pues $z_j - c_j \geq 0 \;\; \forall$ y la solución óptima es:
$x^* = (0, 0, \frac{19}{4}, \frac{11}{4}, 0, 0, 0) \quad z^* = cx^* = \frac{101}{4}$

7.2. Aplicación Algoritmo del Simplex Revisado

Objetivo: Aplicar el algoritmo Simplex revisado a problemas que no muestran una base explícita.

No siempre tenemos una base explícita como en el ejemplo anterior y para aplicar el algoritmo Simplex revisado necesitamos una base factible. En el Capítulo 5 analizamos dos algoritmos para encontrar soluciones iniciales, cualquiera de éstos puede ser utilizado en combinación con el algoritmo Simplex revisado.

Ejemplo 7.2 *Resuelva usando el siguiente problema usando el método de las dos fases y el Simplex revisado.*

$$\begin{aligned} Max\ z = 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 5 \\ 0 \cdot x_1 + \ x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - \ x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase I en forma matricial

$$Min\ z = (0,0,0,0,1,1,1,)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

La base asociada a las variables artificiales x_5, x_6 y x_7.

Iteración 1
Paso 1

1	1	1	19
1	0	0	5
0	1	0	6
0	0	1	8

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$$z_2 - c_2 = (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

$$z_3 - c_3 = (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 0 = 7$$

$$z_4 - c_4 = (1,1,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \nleq 0 \ \ \forall j$

$$z_k - c_k = max\,\{4,1,7,-1\} = 7 \qquad k = 3$$

Calculamos y_3

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 19 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 7 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}} \quad \frac{\bar{b}_r}{y_{r3}} = min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{2}, \frac{8}{4}\right\} = 2 \quad r = 3$$

$\therefore \quad x_{B2} = x_7$ sale de la base y x_3 entra a la base

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$\boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 19 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 7 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 5 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}}$$

Iteración 2
Paso 2 $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = \left(1, 1, -\frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{5}{4}$$

$$z_2 - c_2 = \left(1, 1, -\frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{11}{4}$$

$$z_4 - c_4 = \left(1, 1, -\frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$z_7 - c_7 = \left(1, 1, -\frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{7}{4}$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \nleq 0 \quad \forall j$

$$z_k - c_k = max\left\{-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right\} = \frac{11}{4} \qquad k = 2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 5 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{11}{4} \\ \hline \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{array}} \quad \frac{\overline{b}_r}{y_{r2}} = min\left\{\frac{3}{\frac{5}{4}}, \frac{2}{\frac{3}{2}}\right\} = min\left\{\frac{12}{5}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3} \quad r = 2$$

$$\therefore \quad x_{B2} = x_6 \text{ sale de la base y } x_2 \text{ entra a la base } x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 5 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{11}{4} \\ \hline \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \hline 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{3} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}}$$

Iteración 3

Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = \left(1, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{2}$$

$$z_4 - c_4 = \left(1, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{6}$$

$$z_6 - c_6 = \left(1, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{11}{6}$$

$$z_7 - c_7 = \left(1, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{5}{6}$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \nleq 0 \ \ \forall j$

$$z_k - c_k = max\left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{6}\right\} = \frac{3}{2} \qquad k = 1$$

Calculamos y_1

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \hline 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{3} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{array}} \quad \frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{2}}\right\} = min\left\{\frac{8}{9}, \frac{14}{3}\right\} = \frac{8}{9} \quad r = 1$$

$\therefore \quad x_{B1} = x_5$ sale de la base y x_1 entra a la base $x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Paso 4: Actualización

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \hline 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{3} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{17}{9} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}}$$

No es necesario calcular $z_j - c_j$ pues $z = 0$ $\therefore$Es óptima

Fase II
Iteración I

$$c_B B^{-1} = (2, 3, 1) * \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \left(3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \boxed{\begin{array}{cccc} 3 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{31}{3} \\ \hline \frac{2}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{17}{9} \end{array}} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_4 - c_4 = \left(3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{3} \geq 0$$

$\therefore$El problema es óptimo $x^* = \left(\frac{8}{9}, \frac{20}{9}, \frac{17}{9}, 0\right) \quad z^* = cx^* = \frac{31}{3}$

Ejemplo 7.3 *Resuelva el siguiente problema usando el método de la gran M y el Simplex revisado.*

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + \ x_2 - \ x_3 & \\ x_1 + \ x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En forma matricial y estándar

$$Min\ z = (3, 1, -1, 0, M, 0, M)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$x_5,\ x_7$ variables artificiales

Iteración 1
Paso 1

	M	0	M	$11M$
x_5	1	0	0	4
x_6	0	1	0	10
x_7	0	0	1	7

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = (M, 0, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$z_2 - c_2 = (M, 0, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 3M - 1$$

$$z_3 - c_3 = (M, 0, M) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 = M + 1$$

$$z_4 - c_4 = (M, 0, M) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \nleq 0 \ \ \forall j$

$$z_k - c_k = max\{-3, 3M-1, M+1, -M\} = 3M-1 \qquad k=2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\boxed{\begin{array}{ccc|c} M & 0 & M & 11M \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 3M-1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}} \quad \frac{\bar{b}_r}{y_{r2}} = min\left\{\frac{4}{1}, \frac{10}{1}, \frac{7}{2}\right\} = \frac{7}{2} \quad r=3$$

$$\therefore \quad x_{B3} = x_7 \text{ sale de la base y } x_2 \text{ entra a la base } x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$\begin{array}{c} \\ x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{array} \boxed{\begin{array}{ccc|c} M & 0 & M & 11M \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 3M-1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc|c} M & 0 & \frac{-M+1}{2} & \frac{M+7}{2} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_1 - c_1 = \left(M, 0, \frac{-M+1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 = \frac{3M-7}{2}$$

$$z_3 - c_3 = \left(M, 0, \frac{-M+1}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

$$z_4 - c_4 = \left(M, 0, \frac{-M+1}{2}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 = \frac{-7M+5}{2}$$

$$z_7 - c_7 = \left(M, 0, \frac{-M+1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \frac{-M+1}{2}$$

El problema no es óptimo pues $z_j - c_j \nleq 0 \ \ \forall j$

$$z_k - c_k = max\left\{\frac{3M-7}{2}, \frac{-7M+5}{2}, -M, \frac{-M+1}{2}\right\} = \frac{3M-7}{2} \qquad k=1$$

Calculamos y_1

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

	M	0	$\frac{-M+1}{2}$	$\frac{M+7}{2}$	$\frac{3M-7}{2}$
x_5	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_6	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = min\left\{\frac{1}{3}, 13\right\} = \frac{1}{3} \qquad r=1$$

$\therefore \quad x_{B1} = x_5$ sale de la base y x_1 entra a la base $x_B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Paso 4: Actualización

	M	0	$\frac{-M+1}{2}$	$\frac{M+7}{2}$	$\frac{3M-7}{2}$	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	0
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
x_6	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{3}$	0
x_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	0

Iteración 3
Paso 2: Optimalidad $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$z_3 - c_3 = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 = -\frac{17}{3}$$

$$z_4 - c_4 = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{7}{3}$$

$$z_5 - c_5 = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M = \frac{7}{3} - M$$

$$z_7 - c_7 = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M = -\frac{2}{3} - M$$

$\therefore$La solución óptima es $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0, 0, \frac{19}{3}, 0)$ $\quad cx^* = \frac{14}{3}$

Código en Matlab para el Algoritmo Simplex Revisado

Suponemos un ppl

$$\begin{aligned} Min\ z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Con B una base factible, c_B coeficientes de costo asociados a B, indic los índices de las x_B

Paso Algoritmo	**Código en Matlab**
$\boxed{\begin{array}{cc} w & c_B\bar{b} \\ B^{-1} & \bar{b} \end{array}}$	$T = [CB * inv(B), CB * inv(B) * b;$
	$inv(B), inv(B) * b]$
$z_j - c_j = wa_j - c_j$	$CB * inv(B) * A - c;$
$Si\ z_j - c_j \leq 0$	$if(CB * inv(B) * A - c <= 0)$
$el\ problema\ es\ óptimo$	$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$
$Si\ no$	$else$
$z_k - c_k = max\,\{z_j - c_j\}$	$[r, k] = max(CB * inv(B) * A - c);$
$Calculamos\ \ y_k$	$fprintf('Calculamos\ y\,\%i', k)$
$y_k = B^{-1}a_k$	$y = inv(B) * A(:, k);$
	$radio = ones(1, m) * realmax;$
$Prueba\ del\ cociente\ mínimo$	$fprintf('El\ cociente\ minimo')$
	$for\ i = 1 : m$
$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\quad y_{ik} > 0\right\}$	$if(y(1, i) > 0)$
	$fprintf('b\%i/y\%i\%i\ =\ \%g/\%g',$
	$i, i, k, T(i + 1, m + 1), y(i, 1));$
	$end\ \ end$
	$radio(i) = T(i + 1, m + 1)/y(i, 1);$
	$[r, j] = min(radio);$

Paso Algoritmo	**Código Programado**
Si no existe $y_{rk} > 0$	$if(r == realmax)$
terminar el problema	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado')$
es no acotado	$return$
si $\exists\ y_{rk}$	$else$
$\therefore x_{Br}$ *sale de base*	$fprintf('La\ variable\ x\ \%i\ sale\ de$
y entra x_k	$la\ base\ y\ entra\ x\ \%i', indic(j), k);$
Actualización	
$\boxed{\begin{array}{cc} w & c_B\bar{b} \\ \hline B^{-1} & \bar{b} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c} z_k - c_k \\ \hline y_k \end{array}}$	$B(:, j) = A(:, k)$
convertimos $\left[\begin{array}{c} z_k - c_k \\ \hline y_k \end{array}\right]$ *en* e_{r+1}	$CB(:, j) = c(:, k);$
	$indic(j) = k;$

El código con estructura de función se encuentra en el Apéndice B.

7.3. El Algoritmo Dual Simplex Revisado

Objetivo: Definir el algoritmo Simplex revisado para problemas con una solución básica dual factible inicial y construir el algoritmo correspondiente programado en Matlab correspondiente.

El algoritmo Simplex revisado también puede ser utilizado como fundamento del algoritmo Dual Simplex, sólo que éste requiere de un cálculo más que el algoritmo Simplex.

Algoritmo Simplex revisado para un solución básica dual factible inicial

Paso 1: Comenzamos con una solución básica dual factible, se introducen los datos en la tabla del algoritmo Simplex revisado

$$\boxed{\begin{array}{c|c} w & c_B\bar{b} \\ \hline B^{-1} & \bar{b} \end{array}} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad
Si $\bar{b} \geq 0$ terminar la solución actual es óptima.

Si no, hacer $\bar{b}_r = min\{b_i\}$. Se calcula el renglón r-ésimo, como el r-ésimo renglón de B^{-1}(simbolizado por B_r^{-1}) por A

$$y_{ri} = B_r^{-1}a_i \qquad ó \qquad y^r = B_r^{-1}A$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

Si $y_{ri} \geq 0 \ \ \forall i$ terminar. El problema primal es infactible.

Si no, calculamos $z_j - c_j = wa_j - c_j$

$$y_{rk} = min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : \quad y_{rj} < 0\right\}$$

Paso 4 Actualización
Calcular $y_k = B^{-1}a_k$ e insertar la columna $\left[\dfrac{z_k - c_k}{y_k}\right]$ a la derecha de la tabla, con operaciones elementales convertir $\left[\dfrac{z_k - c_k}{y_k}\right]$ en e_{k+1}.
x_{Br} sale de la base y entra x_k.
Regresar al paso 2.

Ejemplo 7.4 *Resolver el siguiente ppl con el algoritmo Simplex revisado para una solución inicial básica dual factible*

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + \ x_2 + 3x_3 & \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 &\leq -2 \\ -2x_1 - \ x_2 + \ x_3 &\leq \ \ 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma estándar

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 0\cdot x_4 + 0 \cdot x_5 & \\ x_1 - x_2 + \ x_3 + \quad x_4 + 0\cdot x_5 &= -2 \\ -2x_1 - x_2 + \ x_3 + 0\cdot x_4 + \quad x_5 &= \ \ 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq \ \ 0 \end{aligned}$$

Iteración 1
Paso 1

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad

$$\bar{b}_r = min\{-2, 4\} = -2 \qquad r = 1$$

$$y^r = (1,0) * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 1, 1, 0)$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$y_{12} < 0 \quad \rightarrow \quad z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = (0,0)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$y_{1k} = min\left\{\frac{-1}{-1}\right\} = 1 \quad k = 2$$

$\therefore \quad x_{B1} = x_4$ sale de la base y entra x_2

Paso 4 Actualización

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} -1 \\ \hline -1 \\ -1 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \geq \bar{0}$$

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (0, 2, 0, 0, 6) \quad cx^* = 2$

Ejemplo 7.5 *Resuelva el problema 6.11 usando el algoritmo Simplex revisado con una solución inicial básica dual factible.*

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + \ x_2 + \ x_3 & \\ x_1 - \ x_2 + 2x_3 &\leq \ \ 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - \ x_3 &\leq -1 \\ 0 \cdot x_1 - \ x_2 + 4x_3 &\leq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq \ \ 0 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$Min\ z = (3, 1, 1, 0, 0, 0)x$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Iteración 1
Paso 1

$$\boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad

$$\bar{b}_r = min\{4, -1, -2\} = -2 \qquad r = 3$$

$$y^3 = (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,-1,4,0,0,1)$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$y_{32} < 0 \quad \rightarrow \quad z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = (0,0,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$y_{3k} = min\left\{\frac{-1}{-1}\right\} = 1 \quad k = 2$$

$\therefore \quad x_{B3} = x_6$ sale de la base y entra x_2

Paso 4: Actualización

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{array}{c} -1 \\ \hline -1 \\ 3 \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Iteración 3
Paso 2: Optimalidad

$$\bar{b}_r = min\{6,-7,2\} = -7 \quad r = 2$$

$$y^2 = (0,1,3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2,0,11,0,1,3)$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$y_{21} < 0 \quad \rightarrow \quad z_1 - c_1 = (0,0,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$y_{2k} = min\left\{\frac{-3}{-2}\right\} = \frac{3}{2} \quad k = 1$$

$\therefore \quad x_{B2} = x_5$ sale de la base y entra x_1

Paso 4: Actualización

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline -3 \\ \hline -1 \\ -2 \\ 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ccc|c|}\hline 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{25}{2} \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline \end{array} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Paso 2 $\bar{b} \geq 0$

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (\frac{7}{2}, 2, 0, \frac{5}{2}, 0)$ $cx^* = \frac{25}{2}$

Algoritmo Programado Simplex Dual Revisado

Paso del Algoritmo	**Código en Matlab**
Construcción de la tabla	$D = inv(B);$
$\begin{array}{|c|c|}\hline w & c_B\bar{b} \\ \hline B^{-1} & \bar{b} \\ \hline \end{array}$	$T = [CB * D, CB * D * b;$
Optimalidad	$inv(B), D * b]$
Si $\bar{b} \geq 0$	$if(D * b >= 0)$
el problema de óptimo	$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$
$\bar{b}_r = min\,\{b_i\}$	$[r, k] = min(D * b)$
Calculamos el renglón $r -$ *ésimo*	$fprintf('El\ renglon\ \%i', r)$
$y^r = B_r^{-1}A$	$y = D(:, r) * A;$
Radio mínimo	
Si $y^r \geq 0$	$if(y >= 0)$
Si no	$else$
el problema primal es	$fprintf('El\ problema\ primal\ es\ infactible')$
infactible	$return$
$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min\left\{\frac{z_i - c_i}{y_{ri}} \quad y_{ri} < 0\right\}$	$fprintf('El\ cociente\ minimo')$
	$for\ i = 1 : n$
	$if(y(1, i) < 0)$
	$z(1, i) = c_B * D * A(:, i) - c(i)$
	$fprintf('z\,\%i - c\,\%i/y\,\%i\,\%i =$
	$\%g\,\%g, i, i, r, i, z(1, i), y(1, i))$

	$radio = z(1,i)/y(1,i);$
	end
	end
	$[j,k] = min(radio);$
	$fprintf('El\ minimo\ es$
	$z\%i - c\%i/y\%i\%i', k, k, r, k)$
Calculamos y_k	$fprintf('Calculamos\ y\%i', k)$
$y_k = B^{-1}a_k$	$y = D * A(:,k);$
$\therefore$ *la variable que sale*	$fprintf('La\ variable\ x\%i\ sale\ y$
x_{Br} *y entra* x_k	$entra\ x\%i', i, indic(r), k)$
Actualización de la base	
$\boxed{\begin{array}{c\|c} w & c_B\bar{b} \\ \hline B^{-1} & \bar{b} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c} z_k - c_k \\ \hline y_k \end{array}}$	$B(:,r) = A(:,k)$
Convertir a $\left[\begin{array}{c} z_k - c_k \\ \hline y_k \end{array}\right]$	$CB(:,r) = c(:,k)$
en e_{r+1}	$indic(r) = k;$

7.4. Forma Producto de la Inversa

Objetivo: Explicar como la inversa de una matriz puede formarse como producto de matrices elementales y utilizar este resultado en el algoritmo Simplex.

En cada iteración del algoritmo Simplex, una variable x_k entra a la base y una variable x_{Br} sale de la base. Actualizamos la base B al sustituir la columna r-ésima de B por la columna k-ésima de A, es decir si

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{1m} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

es una base factible, con x_{Br} que sale y que entra x_k, actualizamos

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r-1} & a_{1k} & B_{1r+1} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & \cdots & B_{2r-1} & a_{2k} & B_{2r+1} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots & & \\ B_{m1} & \cdots & B_{mr-1} & a_{mk} & B_{mr+1} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

pero $y_k = B^{-1}a_k$ y $By_k = a_k$

$\widetilde{B} = (B_1, \cdots, B_{r-1}, By_k, B_{r+1}, \cdots, B_m) = (Be_1, \cdots, Be_{r-1}, By_k, Be_r, \cdots, Be_m)$

factorizando obtenemos los siguiente:

$\widetilde{B} = B(e_1, \cdots, e_{r-1}, y_k, e_{r+1} \cdots, e_m)$. *Sea* $T = (e_1, \cdots, e_{r-1}, y_k, e_{r+1}, \cdots, e_m)$

$$\widetilde{B} = BT \qquad \left(\widetilde{B}\right)^{-1} = (BT)^{-1} = T^{-1}B^{-1}$$

donde

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{y_{2k}}{y_{rk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{y_{rk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ -\frac{y_{2k}}{y_{rk}} \\ \vdots \\ \frac{1}{y_{rk}} \\ \vdots \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$

entonces

$$T^{-1} = (e_1, \cdots, e_{r-1}, g, e_{r+1}, \cdots, e_m)$$

Analicemos que ocurrió con los vectores w, y_i y $\overline{b}$; luego de la actualización:

- $$w = c_B B^{-1}.\ \textit{Después de pivotear}: \ \overline{w} = \overline{c_B} \cdot \left(\overline{B}\right)^{-1} = \overline{c_B} T^{-1} B^{-1}$$
$$\begin{aligned} \overline{c_B}\ T^{-1} &= (c_{B1}, \cdots, c_{Br-1}, c_k, \cdots, c_{Bm}) * (e_1, \cdots, e_{r-1}, g, e_{r+1}, \cdots, e_m) \\ &= (c_{B1}, \cdots, c_{Br-1}, \textstyle\sum_{i=1}^m \overline{c_{Bi}} g_i, c_{Br+1}, \cdots, c_{Bm}) \\ &= (c_{B1}, \cdots, c_{Br-1}, \overline{c_B} \cdot g, c_{Br+1}, \cdots, c_{Bm}) \\ &= c_B + (0, \cdots, 0, -c_{Br} + \overline{c_B} \cdot g, 0, \cdots, 0) \ \textit{entonces} \end{aligned}$$
$$\overline{w} = \left[c_B + (0, \cdots, 0, -c_{Br} + \overline{c_B} \cdot g, 0, \cdots, 0)\right] B^{-1}$$
$$\therefore \ \ \overline{w} = w + (\overline{c}_B \cdot g - c_{Br}) \cdot \left(B^{-1}\right)^r$$

$\left(B^{-1}\right)^r$ es el renglón r-ésimo de B^{-1}

- $y_i = B^{-1}a_i$. Después de pivotear: $\overline{y}_i = \left(\overline{B}\right)^{-1} a_i$
$$\overline{y}_i = \left(T^{-1}B^{-1}\right) a_i = \left(T^{-1}\right)\left(B^{-1}a_i\right) = T^{-1}y_i$$
$$T^{-1}y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_{1k} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -y_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{y_{rk}} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ y_{mi} \end{bmatrix} - y_{ri} \begin{bmatrix} \frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{y_{rk}} \\ \vdots \\ \frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$
$$\overline{y}_i = \hat{y}_i + y_{ri} g$$

- $\overline{b} = B^{-1}b$

$$\widetilde{b} = \left(\widetilde{B}\right)^{-1} b = T^{-1}B^{-1}b = T^{-1}\overline{b}$$

$$T^{-1}\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_{1k} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -y_{2k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{y_{rk}} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_i \\ \overline{b}_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \overline{b}_m \end{bmatrix} - \overline{b}_r \begin{bmatrix} \frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{y_{rk}} \\ \vdots \\ \frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{b} = \hat{b} + \overline{b}_r \cdot g$$

$\hat{u}$ es el vector que es igual a u, pero tiene un cero en la r-ésima entrada.

Supongamos que se itera t veces y sea $E_i = (T_i)^{-1}$

$$B_t^{-1} = E_{t-1}B_{t-1}^{-1} = E_{t-1}\left(E_{t-2} \cdot B_{t-2}^{-1}\right) = \cdots = E_{t-1} \cdot E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_1 B_1^{-1}$$

Entonces la matriz inversa de B se puede escribir como un producto de matrices elementales E_i. En particular cuando $B_1 = B^{-1} = I$ entonces,

$$B_t^{-1} = E_{t-1} \cdot E_{t-2} \cdot \cdots \cdot E_1$$

Algoritmo Simplex usando la forma producto de la inversa

Paso 1: Dada una base factible calculamos

$$B^{-1} \quad y \quad w = c_B B^{-1} \quad y \quad z$$

Paso 2: Criterio de Optimalidad

Calculamos $z_j - c_j = wa_j - c_j \quad \forall x_j \in x_N$

- Si $z_j - c_j \leq 0 \;\; \forall x_j \in x_N$ terminar, la solución actual es óptima.
- Si no, $z_k - c_k = max\left\{z_j - c_j\right\}$. Sea $y_k = B^{-1}a_k = \hat{y}_k + y_{rk} \cdot g$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = min\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : \quad y_{ik} > 0\right\}$$

Calcular

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \vdots \\ \frac{1}{y_r k} \\ \vdots \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$\begin{aligned} w &= w + \left[\overline{c}_B \cdot g - c_{Br}\right]\left(B^{-1}\right)^r \\ B^{-1} &= T^{-1}B^{-1} \\ \overline{b} &= \hat{b} + \overline{b}_r \cdot g \\ z &= \overline{c}_B\overline{b} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.6 *Aplicar la forma producto de la inversa al siguiente problema*

$$Min\ z = (-2,-1,2,0,0)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Iteración 1
Paso 1

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B = (0,0) \quad w = (0,0) \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2) = 2$$

$$z_2 - c_2 = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$z_3 - c_3 = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$z_k - c_k = max\left\{2,1,-2\right\} = 2 \qquad k = 1$$

Calculamos y_1

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 \qquad r = 1$$

$\therefore$ x_4 sale de la base y entra x_1.

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} \\ -\frac{0}{y_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = (0,0) + \left[(-2,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0\right](1,0) = (-2,0)$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$z = (-2,0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -2 \qquad x_B = \begin{bmatrix}x_1\\x_5\end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad

$$z_2 - c_2 = (-2,0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - (-1) = -1$$
$$z_3 - c_3 = (-2,0)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} - 2 = -4$$
$$z_4 - c_34 = (-2,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = -2$$

$\therefore$ La solución actual es óptima $x^* = (1,0,0,0,2)$ $\quad z^* = cx^* = -2$

Ejemplo 7.7 *Aplicar el algoritmo Simplex con la forma producto de la inversa para resolver el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 & \\ x_1 + x_2 + \quad x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 - \quad x_4 + 0\cdot x_5 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + \quad x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 1
Paso 1: Sea $[x_1, x_4, x_5]$ una base factible

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$c_B = (3,0,0) \qquad w = (3,0,0)$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_2 - c_2 = (3,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = 2$$

$$z_3 - c_3 = (3,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 3$$

$$z_k - c_k = max\,\{2,3\} = 3 \qquad k = 3$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b_r}}{y_{r3}} = min\left\{\frac{3}{1}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3} \qquad r = 2$$

$\therefore\quad x_4$ sale de la base y entra x_3

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{13}}{y_{23}} \\ \frac{1}{y_{23}} \\ -\frac{y_{33}}{y_{23}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = (3,0,0) + \left[(3,0,0)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - 0\right](3,-1,0) = (0,1,0)$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$z = (3,0,0)\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = 5 \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad

$$z_2 - c_2 = (0,1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$z_4 - c_4 = (0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0, \frac{7}{3})$ y existen óptimos alternativos

$$\hat{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b_r}}{y_{r2}} = min\left\{\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\right\} = 2 \qquad r = 2$$

$\therefore \quad x_3$ sale de la base y entra x_2

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{12}}{y_{22}} \\ \frac{1}{y_{22}} \\ -\frac{y_{32}}{y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = (0,1,0) + \left[(3,1,0)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - 0\right](0, -\frac{1}{3}, 0) = (0,1,0)$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$z = (3,1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

El conjunto de soluciones óptimas es de la forma

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^5 | x = \lambda\left(\frac{5}{3},\ 0\ \frac{4}{3},\ 0,\ \frac{7}{3}\right) + (1-\lambda)(1,2,0,0,5) \quad 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

7.5. Aplicación de la Forma Producto de la Inversa

Objetivo: Utilizar la forma producto de la inversa en los métodos de la gran M y las dos fases para resolver problemas.
Programar en Matlab el algoritmo Simplex con la forma producto de la inversa.

La mayoría de los problemas de programación lineal no cuentan con una base factible explícita, por esta razón se estudiaron en el Capítulo 5 los métodos de las dos fases y la gran M. Utilizaremos la forma producto de la inversa y estos métodos para la solución de problemas.

Ejemplo 7.8 *Con el método de las dos fases y la forma producto de la inversa se resolverá el problema:*

$$\begin{aligned} Max\ z = x_1 + 2x_2 & \\ 3x_1 + 4x_2 &= 12 \\ 2x_1 - \ x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Añadimos la variable artificial a_1:

$$\begin{aligned} Min\ z_a = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad a_1 & \\ 3x_1 + \ 4x_2 + 0 \cdot x_3 + \quad a_1 &= 12 \\ 2x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 + 0 \cdot a_1 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, a_1 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Iteración 1
Paso 1

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c_B = (1, 0)$$

$$w = (1, 0) \qquad \overline{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad z_a = (1, 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 12$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = (1, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 3$$

$$z_2 - c_2 = (1, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$$z_k - c_k = max\,\{3, 4\} = 4 \qquad k = 2$$

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{12}{4}\right\} = 3 \qquad r = 1$$

$\therefore$ a_1 sale de la base y entra x_2.

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{y_{22}}{y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = (1,0) + \left[(0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - 1\right][1,0]$$
$$w = (1,0) + (-1,0) = (0,0)$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad z = (0,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Iteración 1
Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = (0,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 0$$
$$z_a - c_a = (0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (0,3,15,0)$. Fin de la Fase I

Fase II

Paso 1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B = (2,0) \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad w = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad z = (2,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = 6$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - (-1) = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ La solución actual es óptima $x^* = (0,3,15) \quad z^* = cx^* = 6$

Ejemplo 7.9 *Con el método de la gran M y usando la forma productos de la inversa resuelve el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Añadimos la variable x_7 para tener una base factible dada por $[x_5, x_7]$, el problema se escribe como:

$$\begin{aligned} Min\ z_M = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + \ Mx_7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + \quad x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 - \quad x_6 + \quad x_7 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Iteración 1
Paso 1

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad c_B = (0, M)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad z = (0, M) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 6M \quad w = (0, M)$$

Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = (0, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 2M - 1$$

$$z_2 - c_2 = (0, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = M - 1$$

$$z_3 - c_3 = (0, M) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = M + 2$$

$$z_4 - c_4 = (0, M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = M + 1$$

$$z_6 - c_6 = (0, M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -M$$

$$z_k - c_k = max\,\{2M - 1, M - 1, M + 2, M + 1, -M\} = 2M - 1 \qquad k = 1$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2} \right\} = 3 \qquad r = 2$$

$\therefore$ x_1 entra a la base y sale x_7

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{22}} \\ \frac{1}{y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = (0, M) + \left[(0, 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - M \right] (0, 1)$$

$$w = (0, M) + \left(0, -M + \frac{1}{2}\right) = \left(0, \ \frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad z = (1, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2: Optimalidad

$$z_2 - c_2 = \left(0, \ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$z_3 - c_3 = \left(0, \ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$z_4 - c_4 = \left(0, \ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$z_6 - c_6 = \left(0, \ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{2}$$

$$z_7 - c_7 = \left(0, \ \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M = \frac{1}{2} - M$$

$$z_k - c_k = max\left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - M\right\} = \frac{5}{2} \qquad k = 3$$

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Paso 3 Prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r3}} = min \left\{ \frac{3}{\frac{1}{2}} \right\} = 6 \qquad r = 2$$

$\therefore$ x_1 sale de la base y entra x_3

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{31}}{y_{32}} \\ \frac{1}{y_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Actualización

$$w = \left(0,\ \frac{1}{2}\right) + \left[(0,\ -2)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\right]\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$w = \left(0,\ \frac{1}{2}\right) + \left(0, -\frac{5}{2}\right) = (0, -2)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad z_M = (0, -2)\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} = -12$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 3

Paso 2: Optimalidad

$$z_1 - c_1 = (0,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -5$$

$$z_2 - c_2 = (0,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -3$$

$$z_4 - c_4 = (0,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = -1$$

$$z_5 - c_5 = (0,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 2$$

$$z_7 - c_7 = (0,\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M = -2 - M$$

$$z_k - c_k = max\,\{-5, -3, -1, 2, -2 - M\} = 2$$

$$y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ No hay candidatos a pivote, el problema es no-acotado.

Programa en Matlab de la Forma Producto de la Inversa

Paso del algoritmo	**Código en Matlab**
Paso 1	
Dada una base B calculamos	$D = inv(B); \quad b = D \cdot b;$ $indic = zeros(1, m);$ $while(w == 0)$
B^{-1}	$fprintf('La\ inversa\ de\ B\ es')\ disp(D)$
$c_B = (c_{B1}, \cdots, c_{Bm})$	$fprintf('CB =')\ disp(CB)$
$w = CB \cdot B^{-1}$	$fprintf('w =')\ disp(CB \cdot D)$
$\bar{b} = B^{-1}b$	$fprintf('El\ lado\ derecho\ es')$
	$disp(b)$
$z = c_B B^{-1}$	$fprintf('El\ valor\ de\ z\ es')$
	$disp(CB * b)$
$x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$	$fprintf('Las\ variables\ basicas\ son\ :')$
	$disp(indic)$
Paso 2 Optimalidad	
Calculamos	$fprintf('El\ renglon\ z\ es')$
$z_j - c_j = wa_j - c_j$	$disp(CB * D * A - c)$
$si\ z_j - c - j \leq 0$	$if(CB * D * A - c)$
terminar el problema	$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$
es óptimo	$w = 1;$
sino	$else$
$z_k - c_k = max\,\{z_i - c_i\}$	$[r, k] = max(CB * D * A - c);$
Calculamos	$radio = ones(1, m) * realmax;$
$y_k = B^{-1}a_k$	$fprintf('Calculamos\ y\%i', k)$
	$y = D * A(:, k); disp(y)$
Paso 3 cociente mínimo	$fprintf('El\ cociente\ minimo')$
$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \quad y_{ik} > 0\right\}$	$for\ i = 1 : n$
	$if(y(i) > 0)$
	$fprintf('b\%i/y\%i\%i =$
	$\%g/\%g', i, i, k, b(i), y(i))$

	$radio(i) = b(i)/y(i);$
	$end\ \ end$
	$[j,\ r] = min(radio);$
Si no existe el pivote	$if(j == realmax)$
el problema es no	$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado')$
acotado,	$return$
si existe el pivote	$else$
x_{Br} *sale de la base*	$fprintf('La\ variable\ x\%i\ sale\ de\ la$
$y\ x_k$ *entra*	$base\ y\ entra.\ x\%\ y\ i', indic(r), k)$
Calculamos	$fprintf('Calculamos\ g')$
$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \frac{1}{y_{rk}} \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$	$for\ i = 1 : m$
	$if(i \sim= r)$
	$g(i) = -y(i)/y(r);$
	$else$
	$g(i) = 1/y(r);$
	$end\ \ end$
	$disp(g)$
Paso 4 *Actualización*	
$T = (e_1, \cdots, g, \cdots, e_m)$	$E = eye(m);$
$E = T^{-1}$	$E(:, r) = g';$
$B^{-1} = T^{-1}B^{-1}$	$D = E * D;$
$\overline{b} = \hat{b} + \overline{b}_r \cdot g$	$d = b(r);\ b(r) = 0;$
$\widetilde{CB} = (c_{B1}, \cdots, c_{Br-1}, c_k, \cdots, c_{Bm})$	$b = b + d * g;$
x_B	$indic(r) = k;$
regresar al paso 2	end

7.6. La Forma Producto de la Inversa y el Simplex Dual

Objetivo: Aplicar la forma producto de la inversa para resolver problemas que cuentan con una base dual factible.

Algoritmo Simplex Dual utilizando la Forma Producto de la Inversa

Paso 1 Dada una base B dual factible se calculan

$$B^{-1}, \qquad w = c_B B^{-1}, \qquad \overline{b} = B^{-1}b \quad y \quad x_B$$

Paso 2 Optimalidad

- Si $\overline{b} \geq 0$ el problema es óptimo
- Si no, $\overline{b}_r = min\{b_i\}$, calcular $y^r = \left(B^{-1}\right)^r \cdot A$

Paso 3 Prueba del cociente mínimo

- Si $y^r \geq 0$ terminar le problema primal es infactible.
- Si no,

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min\left\{\frac{z_i - c_i}{y_{ri}} : \quad y_{ri} < 0\right\}$$

entonces

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} \\ \dots \\ \frac{1}{y_{rk}} \\ \vdots \\ -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ x_{Br} sale de la base y entra x_k

Paso 4 Actualización

$$w = w + \left(\widetilde{c_B} \cdot g - c_{Br}\right)\left(B^{-1}\right)^r$$

$$\overline{b} = \hat{b} + \overline{b}_r \ \cdot g$$

$$z = c_B \cdot \overline{b}$$

$$B^{-1} = T^{-1}B^{-1}$$

ir al paso 2

Ejemplo 7.10 *Se resuelve el siguiente problema con el algoritmo Simplex Dual y la forma producto de la inversa:*

$$\begin{aligned} Min\ z = 4x_1 + 2x_2 + \ x_3 & \\ x_1 + 2x_2 + \ x_3 &\leq \ \ 6 \\ 6x_1 - 2x_2 + \ x_3 &\leq -1 \\ 4x_1 + \ x_2 - 3x_3 &\leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq \ \ 0 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma estándar

$$Min\ z = (4,2,1,0,0,0)x$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Iteración 1
Paso 1

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad c_B = (0,0,0)$$

$$w = (0,0,0) \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Paso 2 Optimalidad

$$\bar{b}_r = min\{6,-1,-3\} = -3, \quad r = 3$$

$$y^3 = (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4,1,-3,0,0,1)$$

Paso 3 Prueba del cociente mínimo

$$z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = (0,0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{-3}{-1} \right\} = 3 \quad k = 3$$

$\therefore$ x_6 sale de la base y entra x_3

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{31}}{y_{33}} \\ -\frac{y_{32}}{y_{33}} \\ \frac{1}{y_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Paso 4 Actualización

$$w = (0,0,0) + \left[(0,0,1) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - 0 \right] (0,0,1) = \left(0,0,-\frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = (0,0,1) \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Iteración 2
Paso 2 Optimalidad

$$\bar{b}_r = min\,\{5,-2,1\} = -2 \qquad r = 2$$

$$y^2 = \left(0,1,\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{22}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1, \frac{1}{3}\right)$$

Paso 3 Prueba del cociente mínimo

$$z_2 - c_2 = \left(0,0,-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = min \left\{ \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{5}{3}} \right\} = \frac{7}{5} \qquad k = 2$$

$\therefore \quad x_5$ sale de la base y entra x_2

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{21}}{y_{22}} \\ -\frac{1}{y_{22}} \\ -\frac{y_{23}}{y_{y22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Paso 4 Actualización

$$w = \left(0, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left[(0,2,1)\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} - 0\right]\left(0, 1, \frac{1}{3}\right) = \left(0, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$z = (0,2,1)\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \frac{19}{5} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{5} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Iteración 3
Paso 2 Optimalidad
$\overline{b} \geq 0$. $\therefore$El problema es óptimo $x^* = (0, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 0, 0)$ $\quad z^* = \frac{19}{5}$

Programa en Matlab para resolver un ppl con la Forma Producto de la Inversa a partir de una base dual factible

Paso del Algoritmo	Código en Matlab
Paso 1	$D = inv(B); \quad b = inv(B) * b \quad w = 0;$
Dada una SBDF	$indic = zeros(1, m)$
calculamos	$while(w == 0)$
B^{-1}	$fprintf('La\ inversa\ de\ B\ es')$ $disp(D)$
c_B	$fprintf('CB =')disp(CB)$
$w = c_B B^{-1}$	$fprintf('w =')disp(CB * D)$
$\overline{b} = B^{-1}b$	$fprintf('El\ lado\ derecho\ es')$ $disp(b)$
$z = CB\overline{b}$	$fprintf('El\ valor\ de\ z\ es')$ $disp(CB * b)$
x_B	$fprintf('Las\ variables\ basicas\ son')$ $disp(indic)$

$Paso\ 2\ Optimalidad$	
$Si\ \bar{b} \geq 0$	$if(b >= 0)$
$el\ problema\ es\ \acute{o}ptimo$	$fprintf('El\ problema\ es\ optimo')$
	$w = 1;$
$Si\ no$	$else$
$\bar{b}_r = min\,\{b_i\}$	$[j, r] = min(b);$
	$radio = ones(1, m) * realmax;$
$Calculamos$	$fprintf('Calculamos\ y\,\%i', r)$
$y^r = \left(B^{-1}\right)^r * A$	$y = D(:, r) * A; disp(Y)$
$Paso\ 3\ cociente\ m\acute{i}nimo$	$fprintf('El\ cociente\ minimo\ es')$
$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{z_i - c_i}{y_{ik}}\ y_{ik} < 0 \right\}$	$for\ i = 1 : m$
	$if(Y(i) < 0)$ $z = CB * D * A(:, i) - c(i);$
	$fprintf('z\,\%i - c\,\%i/y\,\%i\,\%i =$ $\%g/\,\%g'\ i, i, i, r, z, y(i))$
	$radio(i) = z/Y(i);$
	$end\ \ end$
	$[j, k] - min(radio);$
$Si\ no\ existe\ el\ pivote$	$if(j == realmax)$
$el\ problema\ es\ infactible$	$return$
$Paso\ 3\ Cociente\ m\acute{i}nimo$	$fprintf('El\ cociente\ minimo')$
$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\ \ y_{ik} > 0 \right\}$	$for\ i = 1 : n$
	$if(y(i) > 0)$
	$fprintf('b\,\%i/y\,\%i\,\%i =$
	$\%g/\,\%g', i, i, k, b(i), y(i))$
	$radio(i) = b(i)/y(i);$
	$end\ \ \ end$
	$[j, r] = min(radio);$
$Si\ no\ existe\ el\ pivote$	$if(j == realmax)$
$el\ problema\ es\ no$	$fprintf('El\ problema\ es$
$acotado$	$no\ acotado')\ return$
$si\ existe\ el\ pivote$	$else$
$x_{Br}\ sale\ de\ la\ base$	$fprintf('La\ variable\ x\,\%i\ sale$
$y\ entra\ x_k$	$de\ la\ base,\ entra\ x\,\%i', indic(r), k)$

Calculamos	$fprintf('Calculamos\ g')$
$g = \left[-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}, \vdots, \frac{1}{y_{rk}}, \vdots, -\frac{y_{mk}}{y_{rk}} \right]^T$	$for\ i = 1 : m$
	$if(i \sim= r)$
	$g(i) = -y(i)/y(r);$
	$else$
	$g(i) = 1/y(r)$
	$end\ \ end$
	$disp(g)$
Paso 4 Actualización	
$T = (e_1, \cdots, g, \cdot, e_m)$	$E = eye(m);$
$E = T^{-1}$	$E(:, r) = g';$
$B^{-1} = T^{-1}B^{-1}$	$D = E * D$
	$d = b(r);\quad b(r) = 0;$
$\overline{b} = \hat{b} + \overline{b}_r \cdot g$	$b = b + d * g;$
$\overline{c_B} = (c_{B1}, \cdots, c_{Br-1}, c_k, \cdots, c_{Bm})$	$CB(:, r) = c(:, r)$
x_B	$indic(r) = k;$
regresar al paso 2	end

7.7. Ejercicios

Objetivo: Resolver problemas con el algoritmo Simplex revisado y la forma producto de la inversa para que el lector observe como el número de operaciones se reduce significativamente.

1. Resuelva usando el algoritmo Simplex revisado

   a)

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 - 2x_2 + \ \ 3x_3 - 4x_4 & \\ x_1 + 2x_2 + \ \ 3x_3 + 4x_4 &\geq 5 \\ 0 \cdot x_1 + \ x_2 + 0 \cdot x_3 + 2x_4 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Min\ z = -6x_1 - 8x_2 & \\ -x_1 + \ x_2 &\leq \ 80 \\ x_1 + \ x_2 &\leq 100 \\ x_1 \qquad &\geq \ 60 \\ x_1, x_2, &\geq \ \ 0 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} Min\ z = -2x_1 - \ x_2 & \\ x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 + \ x_2 &\leq \ 6 \\ x_1 - \ x_2 &\leq \ 2 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq \ 3 \\ x_1, x_2 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

2. Resuelva utilizando el Simplex revisado para una base dual factible

   a)

$$\begin{aligned} Max\ z = -x_1 - 5x_2 & \\ x_1 + \ x_2 &\geq \ 6 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Min\ z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \\ 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 9 \\ -8x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_5 &= -10 \\ 3x_1 + \qquad x_6 &= -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} Min\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq -5 \\ -2x_1 + x_3 &= -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva usando la forma producto de la inversa

a)

$$\begin{aligned} Max\ z = 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 - 4x_4 + 0 \cdot x_5 & \\ x_1 - \ 2x_2 + 0 \cdot x_3 + \ x_4 + 0 \cdot x_5 &= 3 \\ 0 \cdot x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 3x_4 + \ x_5 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Min\ z = 2x_1 + \ x_2 + 5x_3 - 3x_4 & \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \ x_4 &\leq 12 \\ x_1 + \ x_3 + \ x_4 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva utilizando la forma producto de la inversa para una base dual factible

a)

$$\begin{aligned} Min\ z = 4x_1 + \ x_2 & \\ x_1 + \ x_2 &\leq -1 \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Min\ z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 5 \\ x_1 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_5 \geq 3 \\ x_3 + x_6 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Conclusiones

El trabajo presentado resultó más extenso de lo que se había planeado originalmente, éste no podría ser abarcado en su totalidad en las 30 horas que se destinan a los temas de antecedentes y programación lineal en la asignatura de Investigación de Operaciones, sin embargo se pueden excluir las sesiones los capítulos 1, 7 y las sesiones de Análisis de Sensibilidad del capítulo 6, con la finalidad de ajustar el tiempo de estudio. Aunque se lleven a cabo los ajustes anteriores se alcanzan los objetivos generales de conocer los antecedentes y el desarrollo de la Investigación de Operaciones y de aplicar los principales conceptos relacionados con la programación lineal a problemas de diversas áreas.

En el caso de la asignatura de Programación Lineal se cumplen los objetivos generales de comprender la naturaleza de la programación lineal, aplicarla al planteamiento y resolución de problemas y el concepto de dualidad, en tiempo de la materia que son 80 horas por semestre.

A continuación se presenta un cuadro del temario de Programación Lineal para Plan Estudio de la carrera de Actuaría del año 2000 asociando cada tema con su correspondiente sección

	Temario del Plan de estudios		**Sección en este trabajo**
1.1	¿Qué es la programación matemática?	2.1	¿Qué es la Investigación de Operaciones?
1.2	¿Qué es programación lineal?	2.2	El Planteamiento de un ppl
1.3	Aplicaciones	2.2	El Planteamiento de un ppl

.

	Temario del Plan de estudios		Sección en este trabajo
2.1	Forma canónica	3.3	La forma canónica y
2.2	Forma estándar		la forma estándar
2.3	Región de Soluciones Factibles	2.3	La Región de Soluciones Factibles
2.4	Puntos extremos	2.3	La Region de Soluciones Factibles
		2.4	Graph
		3.1	El Teorema de Representación
2.5	Bases	4.1	El Cálculo de las Bases
3.1	Algoritmo Simplex	4	Capítulo 4
3.2	Método de las dos fases y penalización	5	Capítulo 5 Sesiones 5.1-5.4
3.3	Algoritmo Simplex Revisado	7.1	El Algoritmo Simplex Revisado
		7.2	Aplicación del Simplex Revisado
		7.3	El Algoritmo Dual Simplex Revisado
3.4	Algoritmo Simplex Lexicográfico	5.5	La Regla Lexicográfica
3.5	Interpretación económica		
4.1	Teoría de Dualidad y problemas duales	6.1	Dualidad
		6.2	La construcción del del problema dual

	Temario del Plan de estudios		Sección en este trabajo
4.2	Teoremas fundamentales	6.3	Teorema Fundamental de Dualidad
		6.4	Teorema de Holguras Complementarias
4.3	El Algoritmo Dual Simplex	6.5	El Algoritmo Dual Simplex
		6.6	El Algoritmo Programado Dual Simplex
4.4	Análisis de Sensibilidad	6.7	Análisis de Sensibilidad I
		6.8	Análisis de Sensibilidad II
4.5	Interpretación económica		

En la tabla anterior se observa que no se están asociando todas las secciones que encuentran en el texto, se debe a que no aparecen en el temario de Programación Lineal aún cuando algunas de ellas son importantes para la comprensión de temas así como para ligar un tema o idea con otra.

Las limitantes de información están relacionadas con el tema de interpretación económica de los métodos primales y duales, por que no se desarrollo éste principalmente para no aumentar la extensión del texto y por el carácter introductorio del mismo se consideró un poco más complicado el análisis económico y de los costos duales.

En el material se explícan las principales instrucciones de Matlab relacionadas con el álgebra lineal y las funciones utilizadas para la repetición de una instrucción un número específico de veces, por medio de uso de éstas se construyeron los programas de los algoritmos en Matlab, se considera que el lector podría tener dificultad para la comprensión de todas las líneas de código si no se encuentra la suficientemente familiarizado con el uso de Matlab.

Los programas de los algoritmos pueden ser modificados para tener una mejor presentación de la tabla Simplex, realizar un menor número de iteraciones y comenzar a partir de una base factible dada.

A pesar de las limitantes antes expresadas el material lleva a cabo su objetivo de ser un apoyo para los alumnos que cursan las materias de Investigación de Operaciones y Programación Lineal.

Apéndice A

Demostraciones Importantes

Definición A.1 *Un punto x es un de un poliédro si y sólo si satisface*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j \qquad i = 1, \cdots, m \qquad (1)$$

y es la única solución del sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b \qquad i \in I \qquad (2)$$

Teorema A.1 *Un punto x es un vértice del poliédro definido en (1) si y sólo si satisface (1) y es la solución única para un sistema con $|I| = n$.*

I es un sistema de $n \times n$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Basta probar que cada sistema (2) con una solución única contiene un subsistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i \in I^*) \quad |I^*| = n$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i \in I) \ \ puede\ resolverse\ por\ \ el$$

Método de Gauss.

Si (2) tiene solución única el problema se puede expresar como $Ax = b$ donde A es invertible y el problema se transforma en un sistema de n variables con n incógnitas.

Por lo tanto el sistema tiene solución única para algún subsistema con $|I^*|$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Por definición de vértice se tiene que x es vértice del poliédro.

Lema A.1 *Todo punto $x \in S$ es extremo si y sólo si es una solución básica factible.*

Suponemos el problema

Min z=cx
Ax=b $\qquad A_{mxn}$ de rango completo
x≥0
$\boxed{\Rightarrow}$ Sea x un punto extremo de la región Ffactible S. Se puede demostrar que x es una solución básica factible.
x se puede expresar como:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)^T$ con $x_1, \ldots, x_p > 0$ y $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$

Si a_i es la columna i-ésima de A

$\rightarrow (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n)\cdot$ x=b $\qquad$ pues $x \in S$

Suponemos que $a_1, \ldots, a_p$ son linealmente dependientes, por definición:

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_j a_j = 0 \qquad \textit{con al menos una } \gamma_j \neq 0$$

Sean x' y x" los siguientes vectores

$x'_j = \begin{cases} x_j + \lambda\gamma_j & j = 1, \ldots, p \\ 0 & j = p+1, \ldots, n \end{cases} \qquad x''_j = \begin{cases} x_j - \lambda\gamma_j & j = 1, \ldots, p \\ 0 & j = p+1, \ldots, n \end{cases}$

$x = \frac{x'}{2} + \frac{x''}{2}$

Tomemos $\gamma_k \neq 0 \rightarrow\ x'_k + \lambda\gamma_k \neq x_k - \lambda\gamma_k = x''_k$ si $\lambda > 0$

$\therefore$ x' y x" son diferentes.

$$Ax' = \sum_{j=1}^{p} a_j x'_j = \sum_{j=1}^{p} a_j(x_j + \lambda\gamma_j) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j + \lambda \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_j$$

por que Ax=b y $\sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_j = 0$

$\therefore$Ax'=b

$$Ax'' = \sum_{j=1}^{p} a_j x''_j = \sum_{j=1}^{p} a_j(x_j - \lambda\gamma_j) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j - \lambda \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_j$$

$\therefore$Ax"=b

$x = \frac{x'}{2} + \frac{x''}{2}$ con $x', x'' \in S$!

Pues x es un punto extremo no se puede escribir como una combinación lineal convexa de dos soluciones factibles.

$\therefore a_1, \ldots, a_p$ son linealmente independientes.

Como A tiene rango completo, *ie.* m vectores linealmente independientes podemos tomar m-p vectores de $a_{p+1}, \ldots, a_n$ tal que al unirlos con $a_, \ldots, a_p$ formen una base B.
Expresemos $x = [x_B, x_N]$ con $x_N = 0$ y $x_B = [x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0]^T$
$\rightarrow Ax = b \ y \ x \geq 0$
$\therefore$ x es una solución básica factible.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que x es una solución básica factible del sistema Ax=b $x \geq 0$. Por demostrar que x es un punto extremo.
Sea B la base correspondiente a x tal que $x = [x_B, 0]$, suponemos que x no es un punto extremo, existen x',x"$\in S$ tal que :

$$x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$x' = \begin{bmatrix} x'_B \\ x'_N \end{bmatrix} \qquad x'' = \begin{bmatrix} x''_B \\ x''_N \end{bmatrix} \qquad x'_N, x''_N \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x'_B \\ x'_N \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x''_B \\ x''_N \end{bmatrix} \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x'_B + (1-\lambda)x''_B \\ \lambda x'_N + (1-\lambda)x''_N \end{bmatrix}$$

$\lambda x'_N \geq \overline{0}, \qquad (1-\lambda)x''_N \geq \overline{0}$

$0 = \lambda x'_N + (1-\lambda)x''_N \leftrightarrow x'_N = x''_N = \overline{0}$

$b = Ax' = Bx'_B + Nx'_N = Bx'_B \rightarrow x'_B = B^{-1}b$

$b = Ax'' = Bx''_B + Nx''_N = Bx''_B \rightarrow x''_B = B^{-1}b$

$\rightarrow x = x' = x'' = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ x es un punto extremo, ya que no existen x', x'' $\in S$ tal que x sea una combinación lineal convexa de ellos.

Utilizando los teorema y lema anteriores podemos concluir que todo punto vértice es un punto extremo.

Lema A.2 *Cualquier conjunto poliédrico no-vacío de la forma*

$$S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

tiene al menos una solución básica factible.

Demostración.Suponemos rango(A)=m y $x \in S$, podemos ordenar x tal que $x_1, \ldots, x_p > 0 \ y \ x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$

- Si $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes $\rightarrow$ x es una solución básica factible, pues se completa la base con m-p vectores de $a_{p+1}, \dots, a_n$.
- Si $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes existen $\gamma_1, \dots \gamma_p$ con al menos un $\gamma_j > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{p} \gamma_j a_j = 0$

  Construimos $x'_j = \begin{cases} x_j - \lambda\gamma_j & j = 1, \dots, p \\ 0 & j = p+1, \dots, n \end{cases}$

  en donde

  $\lambda = min\left\{\frac{x_j}{\lambda_j} : \gamma_j > 0\right\} = \frac{x_k}{y_k} > 0$

  Sea $j = 1, \dots, p$.

  - Si $\gamma_j \leq 0 \rightarrow x'_j > 0$ *pues* $x_j, \lambda > 0$
  - Si $\gamma_j > 0 \rightarrow \frac{x_j}{\lambda_j} \geq \lambda \rightarrow x'_j \geq 0 \ \ \forall j$
    $\therefore x' \geq 0$

  $x_k = x_k - \lambda\gamma_k = x_k - \frac{x_k}{\gamma_k}\gamma_k = 0$, x' tiene a lo más p-1 componentes positivas.

$$Ax' = \sum_{j=1}^{p} a_j x'_j = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j - \lambda \sum_{j=1}^{p} \gamma_j a_j = b$$

ya que $\sum_{j=1}^{p} \gamma_j a_j = 0$

  $\therefore x' \in S$ y tiene a los más p-1 componentes positivas.
  Si las columnas asociadas son linealmente independientes x' es un punto extremo, si no continuamos con el proceso hasta obtener un punto extremo.

Lema A.3 *El conjunto poliédrico $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ en donde A es una matriz de $m \times n$ tiene un número finito de puntos extremos.*

Demostración. Suponemos que rango(A)=m, por el lema A.1, x es un punto extremo si y sólo si x es una solución básica factible.
El número de soluciones básicas factibles está acotado superiormente por:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

y en consecuencia el número de puntos extremos es finito.

Corolario 2 *El número de direcciones extremas de un conjunto*

$$S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$$

es finito.

Demostración. Suponemos rango(A)=m, d es una dirección extrema si d es un punto extremo del conjunto $D = \{d : \; Ad = 0, 1d = 1, d \geq 0\}$
como el conjunto de puntos extremos de D es finito por el lema A.3 el conjunto de direcciones extremas es finito.

Definición A.0.1 *Sea $\overline{X} \in S$ con $Ax \leq b$ una restricción α es activa en $\overline{x}$ si $\alpha\overline{x} = \beta$*

Teorema A.0.1 ***Teorema de Representación***

Por definición si S es acotado $\rightarrow D = \emptyset$ y viceversa, si S es no-acotado $\rightarrow D \neq \emptyset$ debido a que S es un conjunto convexo

Sea $S = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ un conjunto poliédrico no vacío. Entonces el conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de elementos $x_1, \ldots, x_k$.
Además el conjunto de direcciones extremas es vacío si y sólo si S es acotado, si es no-acotado el conjunto de direcciones extremas es no vacío y tiene un número finito de elementos $d_1, \ldots, d_l$.
Además $\overline{x} \in S$ si y sólo si se puede escribir como una combinación lineal convexa de $x_1, \ldots, x_k$ más una combinación lineal positiva de $d_1, \ldots, d_l$.
Esto es:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d_i \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \; \begin{array}{ll} \lambda_j \geq 0 & j = 1, \ldots, k \\ \mu_i \geq 0 & i = 1, \ldots, l \end{array} \tag{A.1}$$

Demostración
La existencia y finitud de los puntos extremos y las direcciones extremas se demostró con los lemas anteriores.Falta probar la representación ó ecuación A.1.
$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que se cumple A1. Por demostrar $\overline{x} \in S$

Por A.1 $\sum_{j=1}^{k} \lambda_k = 1$, de la def. de dirección extrema Ad=0

$$A\overline{x} = A\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_k x_k + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_k A x_k + \sum_{i=1}^{l} \mu_i A d_i$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \cdot b + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \cdot 0 = b$$

Claramente $\overline{x} \geq 0$, $\qquad \therefore \overline{x} \in S$

$\boxed{\Rightarrow}$ Por demostrar Si $\overline{x} \in S \rightarrow$ se cumple A.1.

Definimos

$$\overline{S} = S \cap \{x : 1x \leq M\}$$

en donde M es lo suficientemente grande para que $1x_j < M \; \forall j = 1, \ldots, k$ y $1\overline{x} < M$.S está acotado y los puntos extremos de S también son puntos extremos de $\overline{S}$

Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+u}\}$ el conjunto de puntos extremos de $\overline{S}$, donde $0 \leq u \leq \infty$.
PD que $\overline{x}$ es una combinación lineal convexa de los puntos en $\mathcal{X}$

- Si $\overline{x} \in \mathcal{X}$ se cumple
- Si $\overline{x} \notin \mathcal{X}$ sea Gx=g que representa el sistema de hiperplanos activos en $\overline{x}$ entonces el rango(G)$\leq n-1$, en consecuencia existe $d \neq 0$ tal que Gd=g.
  Calculamos $\overline{\gamma_1} = max\left\{\gamma : \overline{x} + \gamma d \in S\right\}, \quad 0 < \overline{\gamma_1} < \infty$, pues $\overline{x} \notin \mathcal{X}$ y el conjunto es acotado.
  Sea $\overline{y_1} = \overline{x} + \gamma_1 d \quad \therefore \overline{y_1} \in \overline{X}$ y tiene al menos un hiperplano linealmente independiente adicional activo de $\overline{S}$.
  Si el (los) nuevo(s) hiperplanos(s) activos(s) con Gx=g produce(n) un sistema de rango n terminar $\overline{y_1}$ es vértice de S, si no continuar con el proceso a lo más [m-rango(G)] veces hasta que $\overline{y_1}$ sea vértice de $\overline{S}$ y $G\overline{y_1} = g$.
  Ahora se define:

  $$\overline{\gamma_2} = max\left\{\gamma : \overline{x} + \gamma(\overline{x} - \overline{y_1} \in S\right\}, \qquad \overline{y_2} = \overline{x} + \gamma\left(\overline{x} - \overline{y_1}\right)$$

  $\overline{\gamma_2} < \infty$ pues $\overline{S}$ es acotado y $G(\overline{x} + \gamma(\overline{x} - \overline{y_1})) = g \ \ \forall \gamma \geq 0$
  entonces $\overline{\gamma_2} > 0$ implica que $\overline{\gamma_2}$ es determinado por alguna restricción no-activa en $\overline{x}$, $G\overline{y_2} = g$ y por lo menos un hiperplano adicional es activo en $\overline{y_2}$.Además

  $$\overline{x} = \delta\overline{y_1} + (1-\delta)\overline{y_2} \qquad con\ \delta = \frac{\overline{\gamma_2}}{1 + \overline{\gamma_2}}$$

  como $\overline{y_1}$ es vértice de $\overline{S}$ entonces $\overline{y_2}$ es vértice de $\overline{S}$, entonces $\overline{x}$ es una combinación lineal de $\overline{y_1}, \ \ y\ \overline{y_2}$. Si no podemos escribir a $\overline{y_2}$ como una combinación lineal convexa de $\overline{y_3}, \ \ y\ \overline{y_4}$ continuando de esta manera es posible escribir a $\overline{x}$ como una combinación lineal convexa de los vértices de $\overline{S}$.

Esta representación se define como:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j x_j \qquad donde \ \sum_{j=1}^{k+u} d_j = 1, d_j \geq 0 \tag{A.2}$$

Si $d_j = 0$ para $j > k$ entonces $\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \delta_j x_j$ y el teorema se cumple, si no existe $v > k$ tal que $d_v > 0$ y x_v es un punto extremo creado por la restricción $\mathbf{1}x \leq M$, es decir tiene (n-1) hiperplanos de definición linealmente independientes de S y $\mathbf{1}x = M$, en consecuencia existe $x_{i(v)}$ un punto extremo de S adyacente a x_v, además

$$A(x_v - x_{i(v)}) = Ax_v - Ax_{i(v)} \leq b - b = 0, \qquad x_v - x_{i(v)} \geq 0$$

$\therefore x_v - x_{i(v)}$ es una dirección de S.

$$Sea\ \overline{d} = \frac{x_v - x_{i(v)}}{\left\| x_v - x_{i(v)} \right\|} \qquad \overline{d}\ una\ dirección\ normalizada\ de\ S$$

Mas aún, $\overline{d}$ es activa en los (n-1)hiperplanos linealmente independientes del sistema $Ad \leq 0$ que corresponde a los (n-1) hiperplanos linealmente independientes que definen a x_v; al adicionarles $1\overline{d} = M$ se tiene que $\overline{d}$ es un punto extremo de D, *ie.* una dirección extrema, digamos $d_{j(v)}$ entonces $\rightarrow x_v = x_{i(v)} + \theta_v d_{j(v)}$ sustituyendo en A.2

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} d_j x_j + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v x_{i(v)} + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v \theta_v d_{j(v)}$$

Teorema A.2 *Si la región de sSoluciones factibles es acotada entonces el valor máximo o mínimo de la función objetivo se alcanza en un punto extremo.*

Demostración

Suponemos un problema de minimización cuya región de soluciones factibles está acotada, entonces por el Teorema de Representación todo punto se puede expresar en la forma:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Sea x_r un punto extremo tal que $cx_r \leq cx_j \quad j = 1, \cdots, k$ entonces

$$\begin{aligned} \lambda_j cx_r \leq \lambda_j cx_j \quad & j = 1, \cdots, k \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j cx_r \leq & \sum_{j=1}^{k} cx_j \\ cx_r \sum_{j=1}^{k} \leq & \sum_{j=1}^{k} cx_j \\ cx_r \leq & \sum_{j=1}^{k} cx_j \end{aligned}$$

$\therefore$ El mínimo del problema se alcanza en el punto extremo x_r.

Teorema A.3 *Si la región de soluciones factibles es no acotada en un problema de minimización y $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tal que $cx \geq M \quad \forall x \in S$ la solución óptima existe y se encuentra en un punto extremo.*

Demostración:

Por el Teorema de Representación:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_i d_i \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \geq 0$$

$$c\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} c\lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} c\mu_i d_i \geq M$$

Se tiene entonces que $cd_i \geq 0 \quad \forall i$, en caso contrario si existe $cd_j \leq 0$ al darle a μ_j un valor muy grande la función no estaría acotada inferiormente lo que contradice la hipótesis.
Por lo tanto conviene para encontrar el mínimo hacer $\mu_i = 0 \quad i = 1, \cdots, l$ y tenemos que todo punto se puede expresar en la forma:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Por ser la misma expresión que en el teorema anterior se deduce que el óptimo existe y se encuentra en un punto extremo.

Teorema A.4 *Si el Algoritmo Simplex no converge a una solución óptima, entonces debe existir un ciclo.*

Demostración:

Existe solo una forma finita de escoger las combinaciones de $\begin{pmatrix} n+m \\ n \end{pmatrix}$ entonces si el Algoritmo Simplex no converge alguna base debe aparecer en dos diferentes iteraciones.

Por demostrar que si existen dos tablas con la misma base, el punto extremo generado es el mismo

$$\begin{array}{l} x_i = b_i - \sum_{j \notin B} a_{ij} x_i \quad (i \in B) \\ \hline z = v + \sum_{j \notin B} c_j x_j \end{array} \qquad (1)$$

y

$$\begin{array}{l} x_i = b_i^* - \sum_{j \notin B} a_{ij}^* x_i \quad (i \in B) \\ \hline z = v^* + \sum_{j \notin B} c_j^* x_j \end{array} \qquad (2)$$

con el mismo conjunto de variables básicas $x_i (i \in B)$.

Entonces cada solución de (1) también es solución de (2),en particular, si x_k es una variable no básica y t es un número

$$x_k = t \qquad x_j = 0 (j \notin B \quad y \quad j \neq k)$$

$$\frac{x_i = b_i - a_{ik}t \quad (i \in B)}{z = v + c_k t} \qquad (3)$$

(3) es una solución de (1) y (2) lo que implica

$$\begin{aligned} b_i - a_{ik}t = b_i^* - a_{ik}^* t \\ v + c_k t = v^* - c_k^* t \end{aligned} \qquad \forall i \in B$$

Como se cumple para todos los valores de t tenemos

$Si \quad t = 0$

$b_i - a_{ik} \cdot 0 = b_i^* - a_{ik}^* \cdot 0 \quad \rightarrow \quad b_i = b_i^*$

de donde se obtiene tambień que $a_{ik} = a_{ik}^* \quad \forall i \in B$

Por ser x_k es una variable básica arbitraria las ecuaciones (1) y (2) son idénticas.

Corolario 3 *Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de los problema primal y dual y son tales que $cx_0 = w_0 b$, entonces x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus problemas respectivos.*

Demostración

El óptimo del problema de maximización es finito(ya que si no lo es, el problema dual de minimización sería infactible).
Sea w_0 el óptimo del problema de maximización.

$$w_0 b \leq cx_0$$

$\exists \;\; x_0$ en la región de soluciones factibles tal que $w_0 b = cx_0$, porque cx con $x \in S$ toma un conjunto de valores en los números reales y está acotado inferiormente, entonces existe el ínfimo.

Por demostrar x_0 es la solución óptima de el problema de minimización

Suponemos que x_0 no es una solución óptima, $\exists \;\; x_0^*$ tal que

$$\begin{aligned} cx_0^* &< cx_0 \\ cx_0^* &< cx_0 = w_0 b \\ cx_0^* &< w_0 b \;! \end{aligned}$$

$\therefore \;\; x_0$ es la solución óptima del problema de minimización

$\therefore \;\; x_0, \;\; w_0$ son soluciones óptimas.

Teorema A.5 ***Teorema Fundamental de Dualidad***
Dados un problema primal y su dual, una de las siguientes proposiciones es verdadera

1. *Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^* y w^*con $cx^* = w^*b$*
2. *Un problema es no acotado y el otro problema es infactible*
3. *Ambos problemas son infactibles*

Demostración

Para la proposición 1:
Suponemos que el problema de maximización tiene con solución óptima w^*. Por demostrar que x^* para el problema de minimización

1. Si la región S del problema de minimización es acotada, entonces por el Teorema 3.1.2 el óptimo existe y se encuentra en un punto extremo.
2. Si la región S del problema de minimización es no acotada entonces

$$w^*b \leq cx \qquad\qquad w^*b \leq Min\ cx$$

   $\therefore$ La función objetivo del problema de minimización está acotada inferiormente y por Teorema 3.1.3 el óptimo existe y se encuentra en un punto extremo.

$\therefore$existe el óptimo para el problema de minimización.

Por demostrar que $w^*b = cx^*$

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \quad y \quad (w^*A - c)x^* = 0$$

$$w^*(Ax^* - b) = (w^*A - c)x^*$$

$$w^*Ax * - w^*b = w^*Ax - cx^*$$

$$w^*b = cx^*$$

$\therefore$Los valores óptimos son iguales.

Para la proposición 2
Suponemos el problema de maximización con al menos una solución factible y x_k es la variable que debe entrar a la base *ie* $z_k - c_k < 0$, para que el problema sea acotado $y_k \leq 0$

Al obtener la restricción asociada a x_k

$$y_{1k}w_1 + y_{2k}w_2 + \cdots + y_{mk}w_m \geq c_k - z_k > 0!$$

pues $w_1, w_2, \cdots, w_m \geq 0$ y $y_{1k}, \cdots, y_{mk} \leq 0$

$\therefore \nexists$ w tal que $wy_k \geq c_k - z_k$

$\therefore$El problema dual es infactible.

Para la proposición 3
Suponemos que para el problema de maximización existe x_{Bi} tal que $b_i < 0$ donde el renglón i-ésimo es no-negativo por tanto no existe ningún candidato a pivote $\therefore$el problema de maximización es infactible si además la variable que entra a la base ocasiona que $z_k - c_k < 0$ con $y_k \leq 0$ el problema de minimización es infactible.

Apéndice B

Algoritmos Programados en Matlab

Código en Matlab combinacion3
%Este programa calcula las intersecciones de n en 3 para auxiliarnos en el ejercicio 3.2

$\cdot function\ combinacion3(H, d)$
$\cdot\ \ n = size(H);$
$\cdot\ \ n = n(1);$
$\cdot\ \ for\ c = 1 : 6$
$\cdot\ \ \ \ for\ b = c + 1 : 6$
$\cdot\ \ \ \ \ \ for\ a = b + 1 : 6$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ B = [H(a, :); H(b, :); H(c, :)];$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ b1 = [d(a); d(b); d(c)];$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ if(det(B)\tilde{} = 0)$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ combinacion = [a, b, c]$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ X = inv(B) * b1$
$\cdot\ \ \ \ \ \ if(H * X <= d)$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ fprintf('Es\ un\ punto\ extremo\diagdown n')$
$\cdot\ \ \ \ \ \ else$
$\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ fprintf('Es\ un\ punto\ extremo\diagdown n)$
$\cdot\ \ \ \ \ \ end$
$\cdot\ \ \ \ \ end$
$\cdot\ \ \ \ end$
$\cdot\ \ end$
$\cdot\ end$
$\cdot\ end$

%Este Programa resuelve un problema de minimización utilizando el %Simplex Rudimentario partiendo de que la base factible esta dada por %las variables de holgura del problema

```
·function rudimentario(A, b, c)

· n = size(A);    m = n(1);    n = n(2);    B = eye(m);
· c = [c, zeros(1, m)];        base = n + 1 : m + n;        E = inv(B) * [A, b]]
· x = [zeros(n, 1); b];        w = 0;        n = n + m;

·fprintf('La tabla Simplex Inicial es\n')
· disp(E);

·while(w == 0)

·  E = inv(B) * [A, b];
·  Aux = [ ];

·  for i = 1 : n
·      IX = zeros(n, 1);
·       for j = 1 : m
·         IX(i, 1) = 1;
·         IX(base(1, j), 1) = -E(j, i);
·       end
·      Aux = [Aux; IX];
·  end

·  fprintf('\n Las direcciones son : \n')
·  disp(Aux)
·  C = c * Aux;

· for i = 1 : m
·    C(1, base(1, i)) = 0;
· end

·  fprintf('\n Los coeficientes de costo reducido son : \n')
·  disp(C)

·  if(C >= 0)
·    fprintf('El problema es optimo\n')
·    w = 1;
·    return
·  else
·    [r, k] = min(C);

·   fprintf('El minimo de los coeficientes de costo reducido es
·        %g la variable que entra es x %i\n', r, k)
```

```
  lambda = ones(m,1)*realmax;

  if(Aux(:,k) >= 0)
    fprintf('El problema es no-acotado')
  end
  return;

  for i = 1:n
    if(Aux(i,k) < 0)
      lambda(i,1) = -x(i,1)/Aux(i,k);
    end
  end

[r,l] = min(lambda);
fprintf('El minimo de las lambdas es %g y sale es x %i',r,l)

fprintf('El punto extremo es\n')
x = x*rAux(:,k); disp(x')

fprintf('El valor de la funcion objetivo es z = %g\',c*x)

for i = 1:m
  if(base(1,i) == l)
    B(:,i) = A(:,k);
    base(1,i) = k;
  end
end
end

end
```

%Este programa resuelve ppl de minimización por el Algoritmo Simplex %para cuando se tiene una base dada por las variables de holgura.

```
·function tablasimplex(A, b, c)
·  n = size(A);        m = n(1);        n = n(2);
·  B = eye(m);
·  c = [c, zeros(1, m] ;
·  A = [A, B] ;
·  CB = zeros(1, m);
·  w = 0;
·  while(w == 0)
·     fprintf('La tabla Simplex es\n')
·     T = [CB * inv(B) * A − c, CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];
·     disp(T)
·     if(CB * inv(B) * A − c <= 0)
·        fprintf('Es problema es optimo\n'); w = 1;
·     else
·        [r, k] = max(CB * inv(B) * A − c);
·        radio = ones(1, m) * realmax;
·        for i = 1 : m
·           if(T(i + 1, k) > 0)
·              radio(i) = T(i, n + m + 1)/T(i + 1, k);
·           end
·        end
·        [r, j] = min(radio);
·        if(r == realmax)
·          fprintf('El problema es no acotado\n')
·          return;
·        else
·          B(: .j) = A(:, k);
·          CB(:, j) = c(:, k);
·        end
·     end
·  end
```

%Este programa resuelve un ppl de maximizacion con las Tablas de
% Tucker cuando se tiene una base dada por las variables de holgura.

```
· function tablastucker(A,b,c)
·   n = size(A);   w = 0;
·   m = n(1); n = n(2);
·   T = [A, b; -c, d] ;
·   nobase = 1 : n;
·   base = n + 1 : 1 : m + n
·   while(w == 0)
·      nobase, base
·      fprintf('La tabla Simplex es\n')
·        disp(T)
·      if(T(m + 1, 1 : n) <= 0)
·          fprintf('Es optimo \n'); w = 1;
·      else
·         [r, k] = max(T(m + 1, 1 : n));
·         radio = ones(1, m) * realmax;
·         for i = 1 : m
·            if(T(i, k) > 0)
·               radio(i) = T(i, n + 1)/T(i, k);
·            end
·         end
·         [r, j] = min(radio);
·         if(r == realmax)
·             fprintf('El problema es no acotado \n')
·             return
·         else
·             for i = 1 : m + 1
·               for r = 1 : n + 1
·                 AT(i, r) = (T(j, k) * T(i, r) - T(j, r) * T(i, k))/T(j, k);
·               end
·             end
·             AT(j, :) = T(j, :)/T(j, k);
·             AT(:, k) = -T(:, k)/T(j, k);
·             AT(j, k) = 1/T(j, k);
·             T = AT;
·             aux = nobase(k);
·             nobase(k) = base(j)
·             base(j) = aux;
·        end
·    end
· end
```

```
%Este programa resuelve ppl de minimizacion por el Algoritmo Simplex
% a partir de una base factible dada.

function basesimplex(A, B, b, c)
n = size(A);
m = n(1);
n = n(2);
indic = zeros(1, m);
u = 0;
if(det(B) == 0)
    fprintf('Los vectores proporcionados son linealmente dependientes')
    return
elseif(inv(B) * b >= 0)
        for j = 1 : m
          for i = 1 : n
            if(B(:, j) == A(:, i))
              indic(j) = i;
            end
          end
        end
        for i = 1 : m
          if(indic(i) == 0)
            B(:, i) = [ ];
            B(i, :) = [ ];
            A(i, :) = [ ];
            b(i) = [ ];
            n = size(A);
            m = n(1);
            n = n(2);
            fprintf('Se elimina elrenglon %i del problema por que
                es linealmente dependiente\n', i)
          else
          CB(i) = c(indic(i));
          end
        end
    w = 0;
    s = 1;
    while(w == 0 &u < 15)
T = [CB * inv(B) * A - c, CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];
fprintf('La tabla Simplex es \n')
fprintf('\t\t\t')
for i = 1 : n
fprintf('\tx %i\t\t', i)
```

```
end
fprintf('RHS\n')
for i = 1 : m + 1
    if(i > 1)
fprintf('\tx %i\t\t', indic(i - 1))
disp(T(i, :))
fprintf('\n')
    else
     fprintf('\tz\t\t')
disp(T(1, :))
fprintf('\n')
    end
   end
if(CB * inv(B) * A - c <= 10^(-6))
    fprintf('El problema es optimo\n')
    w = 1;
else
    [r, k] = max(CB * inv(B) * A - c);
    radio = ones(1, m) * realmax;
    for i = 1 : m
      if(T(i + 1, k) > 0)
        radio(i) = T(i + 1, n + 1)/T(i + 1, k);
      end
    end
    [r, j] = min(radio);
    if(r == realmax)
      fprintf('El problema es no acotado\n')
      return
    else
      B(:, j) = A(:, k);
      CB(:, j) = c(:, k);
      indic(j) = k;
    end
end
u = u + 1;
end
else
    fprintf('La base proporcionada no es factible')
      return
    end
```

%Este programa encuentra la solucion a un ppl de minimizacion
%utilizando el Método de las Dos Fases

```
· function dosfases(A,b,c)

· n = size(A);
· m = n(1);
· n = n(2);
· B = eye(m);
· E = [A,B];
· d = [zeros(1,n),ones(1,m)];
· CB = ones(1,m);
· w = 0;
· while(w == 0)
·     T = [CB*inv(B)*E-d,CB*inv(B)*b;inv(B)*E,inv(B)*b]
·     fprintf('La tabla Simplex es \n')
·     disp(T)
·     if(CB*inv(B)*E-d <= 0)
·       fprintf('El problema auxiliar es optimo\n')
·       w = 1;
·     else
·       [r,k] = max(CB*inv(B)*E-d);
·       radio = ones(1,m)*realmax;
·       for i = 1 : m
·         if(T(i+1,k) > 0)
·           radio(i) = T(i+1,m+n+1)/T(i+1,k);
·         end
·       end
·     [r,j] = min(radio);
·     B(: .j) = E(:,k);
·     CB(:,j) = d(:,k);
·     end
·   end
·   if(CB*inv(B)*b > 0)
·     fprintf('El problema no tiene solucion factible)
·   else
·   fprintf('Existe una base factible,empieza la fase 2\n')
·   basesimplex(A,B,b,c)
·   end
```

%Este programa resuelve un ppl de minimizacion utilizando el metodo
% de penalizacion o Gran M cuando se le proporcionan A b y c de un
% problema de minimizacion en forma estandar.

```
function penalizacion(A, b, c)
n = size(A);
y = 0; %variable de paro
k = 1; %cuanta el numero de iteraciones en el metodo simplex
B = eye(n(1)); %Base dada por las variables artificiales
A = [A, B]; %incluimos las variables artificiales al ppl
c = [c,  zeros(1, n(1)); zeros(1, n(2)), ones(1, n(1))];
CB = [zeros(1, n(1)); ones(1, n(1))];
n = size(A);
base = n(1) : n(2);
      while(y == 0&k <= 15)
        D = inv(B) * A;
        F = inv(B) * b;
        G = CB * D - c;
        z = CB * F;
        fprintf('\n tabla Simplex de la iteracion %d \ n\ n ', k)
        T = [G, z; D, F];
        m = size(T);
        fprintf('\t\t\t')
for i = 1 : m(2)
fprintf('\tx %i\t\t', i)
end
fprintf('RHS\n')
fprintf('\t\t\t')
        for i = 1 : m(2)
          if(T(1, i) >= 0)
            fprintf(' %gM + %g\t\t', T(2, i), T(1, i))
          else
            fprintf(' %gM %g\t\t', T(2, i), T(1, i))
          end
        end
        fprintf('\n')
        for i = 3 : m(1)
        fprintf('\tx %i\t\t', base(i - 1))
        disp(T(i, :))
        fprintf('\n')
     end          %disp([D, F])
        if 1000 * G(2, :) + G(1, :) <= 0 %estamos asignando M = 1000
          if(z(2) > 0)
```

```
      fprintf('\n El resultado optimo es %g M + %g', z(1), z(2))
      fprintf(' por tanto el problema es infactible\n')
    else
      fprintf('\n El resultado optimo es '), disp(z(1))
    end
  return
  else
   [w, r] = max(G(2, :));
   if w <= 0
     [v, r] = max(10000 * G(2, :) + G(1, :));
     if(v > 0)
     w = [G(1, r)];
     else
     fprintf('el problema ya es optimo')
     return
     end
   end
   if(D(:, r) <= 0)
     fprintf('\n El problema es no acotado')
   return
   else
     for i = 1 : n(1)
      if(D(i, r) > 0)
       P(i) = F(i)/D(i, r);
     else
       P(i) = 100000;
     end
    end
    [mini, p] = min(P);
 end
     fprintf('determinamos que el pivote es %g\n', T(p + 2, r))
   B(:, p) = A(:, r);
   CB(:, p) = c(:, r);
   base(p) = r;
   k = k + 1;
end
end
y = 1;
```

%Este programa resuelve un ppl por el Algoritmo Simplex un problema
%de minimización con una base dada por las variables de holgura del
%problema aplicando la Regla Lexicográfica

```
function lexico(A, b, c)
  n = size(A);
  B = eye(n(1));
  c = [c, zeros(1, n(1))];
  A = [A, B];
  CB = zeros(1, n(1))
  w = 0;
  m = n(1); n = n(2);
  while(w == 0)
     fprintf('La tabla Simplex es\n')
     T = [CB * inv(B) * A - c, CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b];
     disp(T)
     if(CB * inv(B) * A - c <= 0)
        fprintf('Es optimo\n')
        w = 1;
     else
        [r, k] = max(CB * inv(B) * A - c);
        radio = ones(1, m) * realmax;
        for i = 1 : m
           if(T(i + 1, k) > 0)
              radio(i) = T(i, n + m + 1)/T(i + 1, k);
           end
        end
        [r, j] = min(radio);
        if(r == realmax)
           fprintf('El problema es no acotado\n')
           return
        else
           I = [ ];
           for i = 1 : n
              if(radio(i) == r)
```

```
·                 I = [I, i] ;
·               end
·             end
·             p = size(I);
·             if(p(2) == 1)
·                B(:, j) = A(:, k);
·               CB(: .j) = c(:, k);
·             else
·               h = 1;
·               while(p(2) > 1 & h < m)
·                  aux = [  ] ;
·                  for i = 1 : p(2)
·                     aux = [aux, T(I(i) + 1, h)/T(I(i) + 1, k)];
·                  end
·                  mini = min(aux);
·                  for i = 1 : p(2)
·                     if(aux(i) = mini)
·                        I(i) = [ ];
·                     end
·                  end
·               p = size(I);
·               h = h + 1;
·             end
·             B(:, (I(1, 1))) = A(:, k);
·             CB(:, I(1, 1)) = c(:, k);
·          end
·       end
·     end
·   u = u + 1;
· end
```

%Este programa resuelve ppl de minimizacion por el Metodo Simplex
% aplicando la regla de Bland

```
function bland(A,b,c)
n=size(A);
m=n(1);
n=n(2);
B=eye(m);
A=[A,B];
c=[c,zeros(1,m)];
CB=zeros(1,m);
w=0;
u=1;
while(w==0 &u<15)
T=[CB*inv(B)*A-c,CB*inv(B)*b;inv(B)*A,inv(B)*b];
fprintf('La tabla Simplex es \n')
disp(T)
if(CB*inv(B)*A-c<=0)
    fprintf('El problema es optimo\n')
    w=1;
else
    k=1;h=0;
    while h==0
      if(T(1,k)>10^(-10))
        h=1;
      else
        k=k+1;
      end
    end
   radio=ones(1,m)*realmax;
    for i=1:m
      if(T(i+1,k)>0)
        radio(i)=T(i+1,n+m+1)/T(i+1,k);
      end
    end
    [r,j]=min(radio);
    if(r==realmax)
```

$fprintf('El\ problema\ es\ no\ acotado\setminus n')$
$return$
$else$
$h = 0; j = 1;$
$while\ h == 0$
$if(radio(j) == r)$
$B(:, j) = A(:, k);$
$CB(:, j) = c(:, k);$
$h = 1;$
$else$
$j = j + 1;$
end
end
end
end
$u = u + 1;$
end

```
%Este programa resuelve ppl de minimizacion por el Metodo Dual
%Simplex comenzando por la base dada por las variables de holgura

function tablasimplexdual(A,b,c)
n=size(A);
m=n(1);n=n(2);
B=eye(m);
A=[A,B];
c=[c,zeros(1,m)];
CB=zeros(1,m);
w=0;u=0;
while(w==0&u<15)
T=[CB*inv(B)*A-c,CB*inv(B)*b;inv(B)*A,inv(B)*b];
fprintf('La tabla Simplex es \n')
disp(T)
if(inv(B)*b>=-10^-5)
    fprintf('El problema es optimo\n')
w=1;
else
    [k,r]=min(inv(B)*b);
    radio=ones(1,m)*realmax;
    for i=1:n
      if(T(r+1,i)<0&-T(r+1,i)>10^-5)
        radio(i)=T(1,i)/T(r+1,i);
      end
    end
    [k,j]=min(radio);
    if(k==realmax);
      fprintf('El problema primal es infactible y
         el dual es no acotado\n')
      return
    else
      B(:,r)=A(:,j);
      CB(:,r)=c(:,j);
    end
end
u=u+1;end
```

```
%Este programa resuelve ppl por el Metodo Simplex Dual
%utilizando tablas de Tucker de un problema de maximizacion
%en forma canonica.

function tablatuckerdual(A,b,c,d)
n=size(A);
m=n(1);
n=n(2);
w=0;
T=[A,b;-c,d];
nobase=1:n
base=n+1:1:m+n
u=0;
if(c<=0)
      fprintf('La base proporcionada no es dual factible')
else
while(w==0 &u<15)
fprintf('La tabla Simplex es \n')
disp(T)
if(T(1:m,n+1)>=0)
      fprintf('El problema es optimo\n')
      w=1;
else
       [r,j]=min(T(1:m,n+1));
      radio=ones(1,m)*realmax;
      for i=1:n
        if(T(j,i)<0)
          radio(i)=T(m+1,i)/T(j,i);
        end
      end
      [r,k]=min(radio);
      if(r==realmax)
        fprintf('El problema es no acotado\n')
        return
      else
        for i=1:m+1
          for r=1:n+1
```

```
        AT(i,r) = (T(j,k) * T(i,r) - T(j,r) * T(i,k))/T(j,k);
      end
    end
    AT(j,:) = T(j,:)/T(j,k);
    AT(:,k) = -T(:,k)/T(j,k);
    AT(j,k) = 1/T(j,k);
    T = AT;
    aux = nobase(k);
    nobase(k) = base(j)
    base(j) = aux
  end
end
u = u + 1;
end
end
```

```
    %Este programa resuelve ppl de minimizacion por el Metodo Simplex
% Revisado a partir de una base factible dada.

function simplexrevisado(A, B, b, c)
n = size(A);
m = n(1);
n = n(2);
indic = zeros(1, m);
u = 0; w = 0;
if(det(B) == 0)
    fprintf('Los vectores proporcionados son linealmente dependientes')
    return
elseif(inv(B) * b >= 0)
     for j = 1 : m
       for i = 1 : n
         if(B(:, j) == A(:, i))
           indic(j) = i;
         end
       end
     end
     for i = 1 : m
       CB(i) = c(indic(i));
     end
while(w == 0 &u < 15)
    T = [CB * inv(B), CB * inv(B) * b; inv(B), inv(B) * b];
    fprintf('\n La tabla Simplex Revisado es \n')
    disp(T)
    fprintf('Las variables basicas son \n')
    disp(indic)
    fprintf('\n El renglon z es ')
    disp(CB * inv(B) * A - c)
if(CB * inv(B) * A - c <= 10^(-6));
    fprintf('Por lo tanto el problema es optimo\n')
    w = 1;
else
    [r, k] = max(CB * inv(B) * A - c);
    radio = ones(1, m) * realmax;
    fprintf('Calculamos y %i\n', k)
    y = inv(B) * A(:, k);
    disp(y)
    fprintf('Hacemos la prueba del radio minimo \n\n')
     for i = 1 : m
     if(y(i, 1) > 0)
```

```
        fprintf('b %i/y %i %i = %g/ %g\n', i, i, k, T(i + 1, m + 1), y(i, 1))
        radio(i) = T(i + 1, m + 1)/y(i, 1);
      end
      end
      [r, j] = min(radio);
      if(r == realmax)
        fprintf('El problema es no acotado\n')
        return
      else
        fprintf('\n La variable X %i sale de la base
                y entra X %i \n \n', indic(j), k)
        B(:, j) = A(:, k);
        CB(:, j) = c(:, k);
        indic(j) = k;
      end
end
u = u + 1;
end
else
    fprintf('La base proporcionada no es factible')
    return
end
```

```
%Este programa resuelve ppl de minimizacion por el Metodo Dual
%Simplex Revisado a partir de una base dual factible dada.

function dualsimplexrevisado(A,B,b,c)
n=size(A);
m=n(1);
n=n(2);
indic=zeros(1,m);
u=0;
if(det(B)==0)
    fprintf('Los vectores proporcionados son linealmente dependientes')
    return
end
     for j=1:m
       for i=1:n
         if(B(:,j)==A(:,i))
           indic(j)=i;
         end
       end
     end
     for i=1:m
        CB(i)=c(indic(i));
     end
w=0;
if(CB*inv(B)*A-c<=0)
    while(w==0 &u<15)
      D=inv(B);
      T=[CB*D,CB*D*b;inv(B),D*b];
      fprintf('\n La tabla Simplex Revisado es \n\n')
      disp(T)
      fprintf('\n Las variables basicas son \n')
      disp(indic)
    if(D*b>=0);
       fprintf('El problema es optimo\n')
       w=1;
    else
       [k,r]=min(D*b);
       radio=ones(1,n)*realmax;
       fprintf('Calculamos el renglon %i \n',r)
       y=D(r,:)*A;
       disp(y)
    if(y>=0)
      fprintf('El problema primal es infactible\n')
```

```
      return
    else
     fprintf('Hacemos la prueba del radio minimo \n')
      for i = 1 : n
        if(y(1, i) < 0)
          z(1, i) = CB * D * A(:, i) - c(i);
        fprintf('\n z %i-c %i/y %i %i = %i/ %i\n', i, i, r, i, z(1, i), y(1, i))
          radio(i) = z(1, i)/y(1, i);
        end
      end
      [j, k] = min(radio);
      fprintf('\n El minimo es z %i - c %i/y %i %i\n', k, k, r, k)
      fprintf('\nCalculamosY\ %i\n', k)
      y = D * A(:, k);
      disp(y)
      fprintf('La variable X %i sale de la base y
          entra X %i \n \n', indic(r), k)
      B(:, r) = A(:, k);
      CB(:, r) = c(:, k);
      indic(r) = k;
    end
end
u = u + 1;
end
else
    fprintf('La base proporcionada no es factible')
    return
end
```

```
%Este programa resuelve ppl de minimizacion por la forma producto
%de la inversa a partir de una base factible dada.

function productoinversa(A,B,b,c)
n=size(A);
m=n(1);
n=n(2);
indic=zeros(1,m);
u=0;w=0;
if(det(B)==0)
    fprintf('Los vectores proporcionados son linealmente dependientes')
    return
elseif(inv(B)*b>=0)
     for j=1:m
       for i=1:n
         if(B(:,j)==A(:,i))
           indic(j)=i;
         end
       end
     end
     for i=1:m
       CB(i)=c(indic(i));
     end
     D=inv(B);
     b=D*b;
     while(w==0 &u<15)
     fprintf('\n La inversa de B es\n\n')
     disp(D)
     fprintf('\nCB = ')
     disp(CB)
     fprintf('\nW = ')
     disp(CB*D)
     fprintf('\n El valor del lado derecho es \n\n')
     disp(b);
     fprintf('\n El valor de la funcion objetivo es ')
     disp(CB*b)
     fprintf('Las variables basicas son ')
     disp(indic)
     fprintf('\n El renglon z es ')
     disp(CB*D*A-c)
     if(CB*D*A-c<=10^(-6));
       fprintf('Por lo tanto el problema es optimo\n')
       w=1;
```

```
    else
      [r,k] = max(CB*D*A-c);
      radio = ones(1,m)*realmax;
      fprintf('Calculamos y %i\n',k)
      y = D*A(:,k);
      disp(y)
      fprintf('Hacemos la prueba del radio minimo \n\n')
      for i = 1 : m
        if(y(i) > 0)
          fprintf('b %i/y %i %i = %g/ %g\n',i,i,k,b(i),y(i))
          radio(i) = b(i)/y(i);
        end
      end
      [j,r] = min(radio);
      if(j == realmax)
         fprintf('El problema es no acotado\n')
      return
      else
        fprintf('\n La variable X %i sale de la base y
            entra X %i \n\n',indic(r),k)
        fprintf('\n Calculamos g\n')
      for i = 1 : m
        if(i  = r)
          g(i) = -y(i)/y(r);
        else
          g(i) = 1/y(r);
        end
      end
        disp(g')
        E = eye(m);
        E(:,r) = g';
        D = E*D;
        d = b(r);
        b(r) = 0;
        b = b + d*g';
        CB(:,r) = c(:,k);
        indic(r) = k;
      end
    end
    u = u + 1;
  end
else
  fprintf('La base proporcionada no es factible')
  return   end
```

```
%Este programa resuelve ppl de minimizacion por la forma producto
%de la inversa a partir de una base dual factible dada.

function productoinversadual(A,B,b,c)
n=size(A);
m=n(1);
n=n(2);
indic=zeros(1,m);
u=0;w=0;
for j=1:m
     for i=1:n
       if(B(:,j)==A(:,i))
         indic(j)=i;
       end
     end
    end
    for i=1:m
      CB(i)=c(indic(i));
    end
if(det(B)==0)
     fprintf('Los vectores proporcionados son linealmente dependientes')
return
elseif(CB*inv(B)*A-c<=0)
    D=inv(B);
    b=D*b;
    while(w==0&u<15)
     fprintf('\n La inversa de B es \n\n')
     disp(D)
     fprintf('\nCB= ')
     disp(CB)
     fprintf('\nW= ')
     disp(CB*D)
     fprintf('\n El valor del lado derecho es \n\n')
     disp(b);
     fprintf('\n El valor de la funcion objetivo es')
     disp(CB*b)
     fprintf('Las variables basicasson ')
```

```
disp(indic)
if(b >= 0);
  fprintf('El problema es optimo\n')
  w = 1;
 else
  [j, r] = min(b);
  radio = ones(1, m) * realmax;
  fprintf('Calculamos Y %i\n', r)
  Y = D(r, :) * A;
  disp(Y)
  fprintf('Hacemos la prueba del radio minimo\n\n')
  for i = 1 : n
    if(Y(i) < 0)
     z = CB * D * A(:, i) - c(i);
     fprintf('z %i - c %i/y %i %i = %g/ %g\n', i, i, i, r, z, Y(i))
     radio(i) = z/Y(i);
    end
  end
  [j, k] = min(radio);
  if(j == realmax)
   fprintf('El problema es no acotado\n')
  return
  else
   fprintf('\n Calculamos y %i\n', k)
   y = D * A(:, k);
   disp(y)
   fprintf('\n La variable X %i sale de la base y
          entra X %i\n\n', indic(r), k)
   fprintf('\n Calculamos g\n')
   for i = 1 : m
     if(i  = r)
       g(i) = -y(i)/y(r);
     else
       g(i) = 1/y(r);
     end
   end
```

```
          disp(g')
          E = eye(m);
          E(:,r) = g';
          D = E*D;
          d = b(r);
          b(r) = 0;
          b = b + d*g';
          CB(:,r) = c(:,k);
          indic(r) = k;
        end
      end
      u = u + 1;
    end
else
    fprintf('La base proporcionada no es factible')
    return
end
```

Apéndice C

Soluciones a los ejercicios

C.1. Capítulo 1

1. Es una recta como el rango de $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) = 2$,tenemos solo un grado de libertad y expresamos al subespacio U como:

$$U = \left\{\overline{X} \in \mathbb{R}^3 | \overline{X} = (17 - 7\lambda, -8 + 10\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. PD que u_1=(1,0,2,-3) y u_2=(0,1,1,-3) son linealmente independientes

$$\lambda_1(1, 0, 2, -3) + \lambda_2(0, 1, 1, -3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2, 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, -3\lambda_1 - 3\lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 &= 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 &= 0 \\ -3\lambda_1 - 3 \cdot \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \therefore u_1, u_2 \textit{ son linealmente independientes}$$

3. Expresando en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -8/3 & 7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Entonces rango(A)=2 pues tenemos dos vectores canónicos, de esa ecuación se obtiene que $rango(A|b) = 2$
$\therefore$ El sistema es consistente, pero $rango(A) = 2 \neq = 4 = \#de\ variables$ por lo que existen soluciones infinitas de la forma:

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{2x_3}{3} - \frac{2x_4}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{8x_3}{3} - \frac{7x_4}{3}$$

$$U = \left\{ \overline{X} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right) + x_3\left(\frac{-2}{3}, \frac{8}{3}, 1, 0\right) + x_4\left(\frac{-2}{3}, \frac{-7}{3}, 0, 1\right), x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Escribiendo en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} 92 & 69 & 226 & 69 \\ 115 & -92 & 143 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 43/23 & 12/23 \\ 0 & 1 & 18/23 & 7/23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{-43x_3}{23} - \frac{12x_4}{23}$$
$$x_2 = \frac{-18x_3}{23} - \frac{7x_4}{23}$$

$$U = \left\{ \overline{X} \in \mathbb{R}^4 | \overline{X} = x_3\left(\frac{-43}{23}, \frac{-18}{23}, 1, 0\right) + x_4\left(\frac{-12}{23}, \frac{-7}{23}, 0, 1\right) \right\}$$

$$\therefore \left(\frac{-43}{23}, \frac{-18}{23}, 1, 0\right), \left(\frac{-12}{23}, \frac{-7}{23}, 0, 1\right) \ es\ una\ base\ de\ U$$

PD (-55,-25,23,23) puede convertirse en un vector básico.

$(-55, -25, 23, 23) = x_3\,(-43/23, -18/23, 1, 0) + x_4\,(-12/23, -7/23, 0, 1)$

$(-55, -25, 23, 23) = 23\,(-43/23, -18/23, 1, 0) + 23\,(-12/23, -7/23, 0, 1)$

Como (-55,-25,23,23) puede escribirse como una combinación lineal donde $x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$ entonces puede sustituir a cualquiera de los dos vectores básicos.

5. $a)$ $\gg A + B' \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 10 & 3 \end{matrix}$$

b) $\gg A * B \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 45 & 72 \\ 29 & 28 \end{matrix}$$

c) $\gg rank(A) \hookleftarrow$

$$ans = 2$$

d) $\gg rank(B) \hookleftarrow$

$$ans = 2$$

e) $\gg det(A * B) \hookleftarrow$

$$ans = -828$$

f) $\gg inv(A * B) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} -7/207 & 2/23 \\ 28/828 & -5/92 \end{matrix}$$

g) $\gg inv(A * B) * A \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 80/207 & 109/207 & -103/207 \\ -77/414 & -215/828 & 169/414 \end{matrix}$$

h) $\gg B * inv(A * B) \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 13/92 & -17/92 \\ -3/46 & 11/46 \\ 5/46 & -3/46 \end{matrix}$$

6. $\gg A * x \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}$$

$\gg B = [A(:,1), A(:,2)], XB = [x(1); x(2)] \hookleftarrow$

$$ans = \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$ans = \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$$

$\gg N = [A(:,3), A(:,4)], XN = [x(3); x(4)] \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$ans = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$

$\gg B * XB + N * XN \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix}$

A*x=B*XB+N*XN=[2;7], siempre sucede esto porque lo que estamos haciendo es separar la matriz A en dos conjuntos B y N y el vector x en dos conjuntos x_B y x_N y realizar el producto correspondiente.

7. $\gg B = [A(:,1), A(:,3)] \hookleftarrow$

   $B = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

   $\gg det(B) \hookleftarrow$

   $ans = 1$

   $\gg XB = [x(1); x(3)] \hookleftarrow$

   $XB = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

   $\gg N = [A(:,2), A(:,4)] \hookleftarrow$

   $N = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{matrix}$

   $\gg XN = [x(2); x(4)] \hookleftarrow$

   $XN = \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$

   $\gg B * XB + N * XN \hookleftarrow$

   $ans = \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$

$\gg A * x \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$

x no es única pues w=[0,-2/3,0,-1] cuenta con la misma propiedad.
$\gg A * w \hookleftarrow$

$ans = \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$

8. No, debido a que el rango de A es 2 no tiene submatrices de rango 3.

C.2. Capítulo 2

1. Planteamiento del problema de la fábrica de harina

   Definición de variables

   $x_i = \#$ *de toneladas de harina a producirse en el mes* $i,\ i = 1, 2, 3$

   $y_j = \#$ *de toneladas de harina a almacenar en el mes* $j,\ j = 1, 2$

   Restricciones

$$x_1 \leq 65 \qquad x_2 \leq 65 \qquad x_3 \leq 65 \qquad Producción$$

$$x_1 - y_1 \geq 50 \quad x_2 + y_1 - y_2 \geq 70 \quad x_3 + y_2 \geq 35 \quad Demanda$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0\ no - negatividad$$

   Función Objetivo
   $Max\ z = 5000x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 - 200y_1 - 200y_2$

2. *a*) Planteamiento del problema de la refinería
   Definición de variables
   $x_i = \#$ *miles de barriles de petróleo crudo tipo i a comprar.*
   $i = 1(ligero), 2(pesado).$
   Restricciones

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{25}x_2 \geq 1000 \qquad Gasolina$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \geq 400 \qquad Keroseno$$

$$\frac{7}{20}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \geq 250 \qquad Combustible\ para\ reactores$$

$$x_1, x_2 \geq 0\ No - negatividad$$

   Función Objetivo
   $Max\ z = 11x_1 + 9x_2$

b) Suponemos la igualdad en las restricciones

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{25}x_2 = 1000 \qquad \textit{pasa por} \ \ \{(0, 3125), (2500, 0)\}$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 400 \qquad \textit{pasa por} \ \ \{(0, 1000), (2000, 0)\}$$

$$\frac{7}{20}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = 250 \qquad \textit{pasa por} \ \ \left\{(0, 1250), (714\frac{7}{25}, 0)\right\}$$

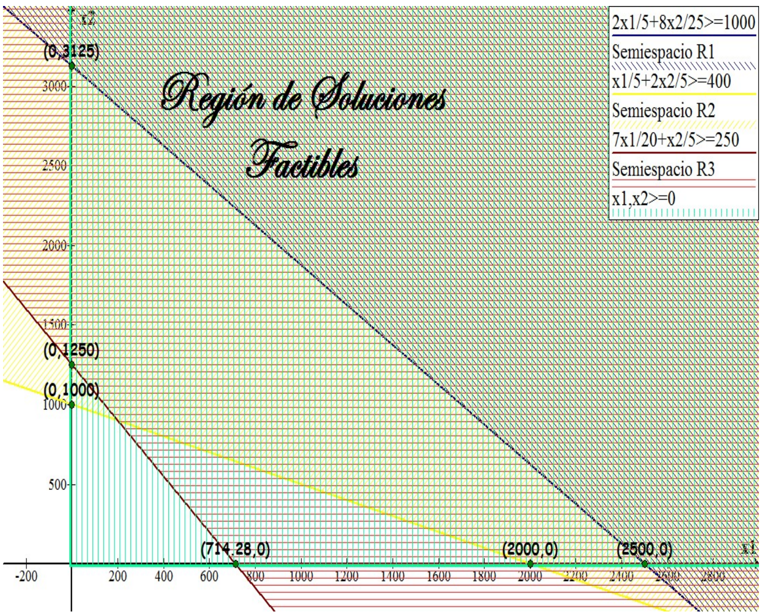
Evaluamos en $\overline{X} = (0, 0)$

$$\frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{8}{25} \cdot 0 = 0 \ngeq 1000$$

$$\frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 0 = 0 \ngeq 400$$

$$\frac{7}{20} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0 \ngeq 250$$

La región de soluciones factibles es:



c) La región es no-acotada

3. *a*) Suponemos la igualdad en las restricciones

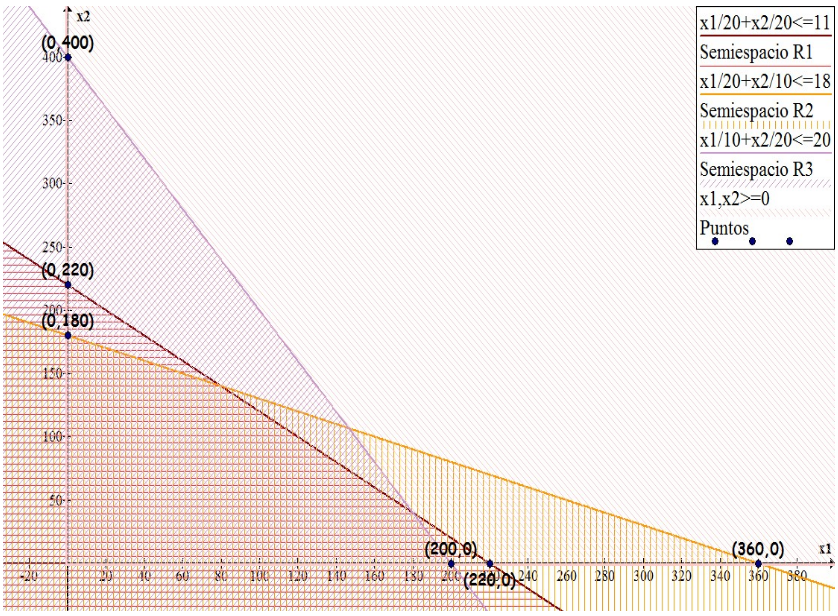
$$\frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{20}x_2 = 11 \quad \textit{pasa por} \ \ \{(0, 220), (220, 0)\}$$

$$\frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{10}x_2 = 18 \quad \textit{pasa por} \ \{(0,180),(360,0)\}$$
$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{20}x_2 = 20 \quad \textit{pasa por} \ \{(0,400),(200,0)\}$$

Evaluamos en el punto $\overline{X} = (0,0)$

$$\frac{1}{20} \cdot 0 + \frac{1}{20} \cdot 0 = 0 \leq 11$$
$$\frac{1}{20} \cdot 0 + \frac{1}{10} \cdot 0 = 0 \leq 18$$
$$\frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{1}{20} \cdot 0 = 0 \leq 20$$

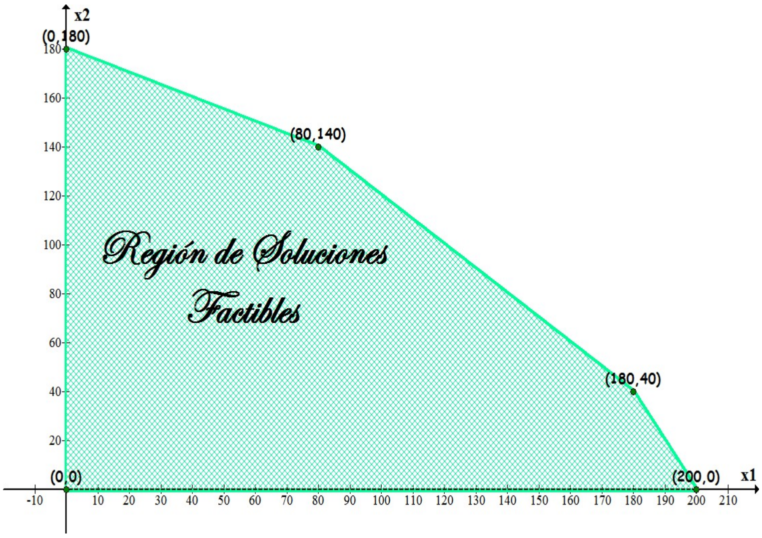
La región de soluciones factibles es:



b) Los vértices de la región son:
$\{0,180),(200,0)(180,40)(80,140)\}$

4. *a*) Suponemos la igualdad en las restricciones

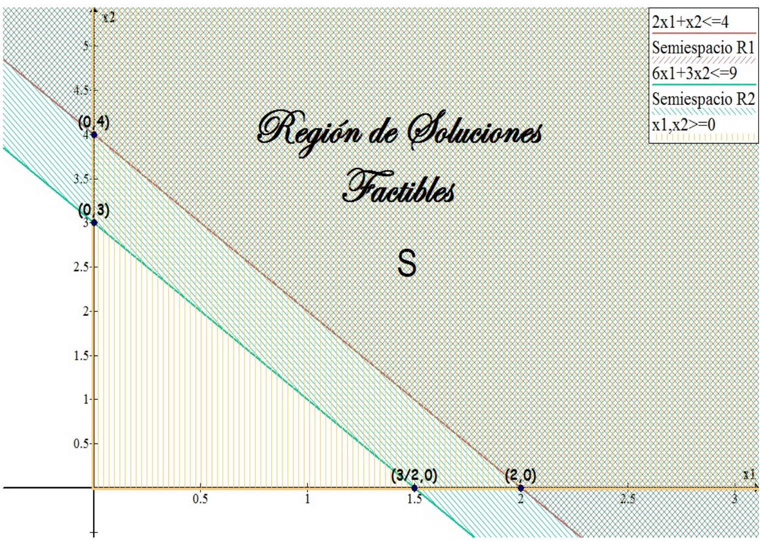
$$2x_1 + x_2 = 4 \qquad \textit{pasa por} \ \{(0,4)(2,0)\}$$
$$6x_1 + 3x_2 = 9 \qquad \textit{pasa por} \ \{(0,3)(3/2,0)\}$$



Evaluamos en el punto $\overline{X} = (0, 0)$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + \cdot 0 = 0 \ngeq 4 \\ 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \ngeq 9 \end{aligned}$$

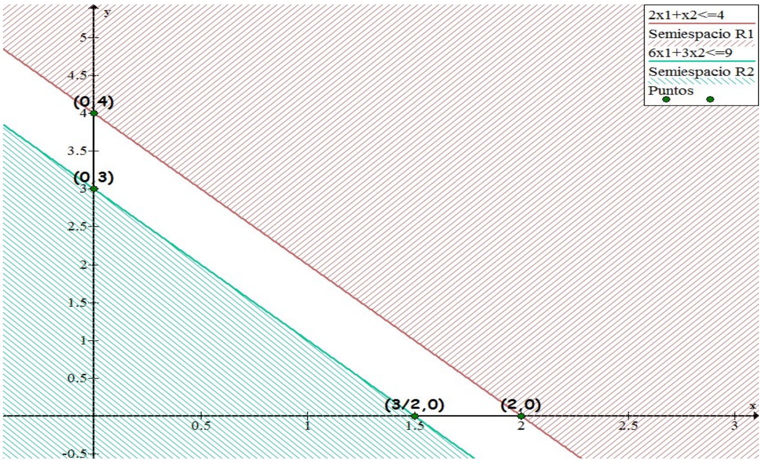
La región de soluciones factibles es:



b) La región S es no-acotada

c) La región S es la misma, decimos entonces que $6x_1 + 3x_2 \geq 9$ es redundante geométricamente, al multiplicar R_1 por 3 se tiene $6x_1 + 3x_2 \geq 12 > 9$ de donde se observa que si se cumple R_1 tambiénm se cumple R_2.

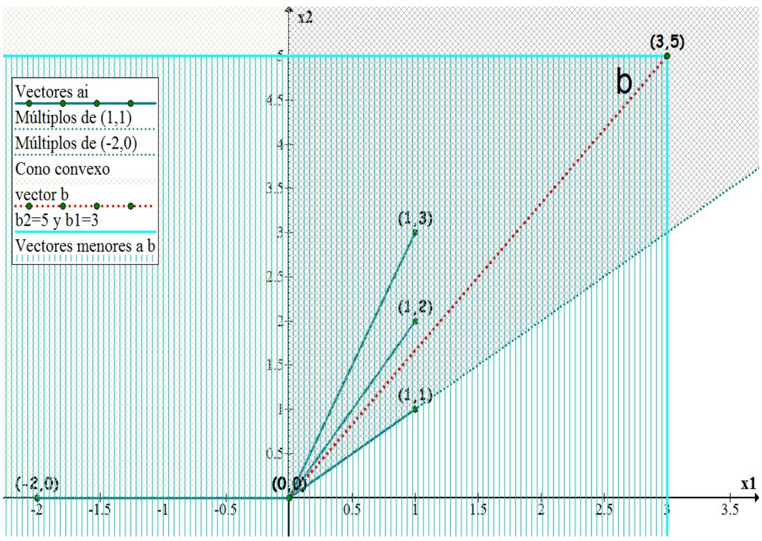
d) El problema se vuelve infactible como se observa en la figura.



5. Reescribiendo el problema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dibujamos el Espacio de Requerimientos



El problema es factible por que el vector b se encuentra en el generado por $(1, 2), (1, 3), (-2, 0), (1, 1)$

C.3. Capítulo 3

1. Combinaciones de 8 restricciones en 4 variables

   $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!4!} = 70$

   Modificaciones al Código combina3 para este ejercicio.

   ```
   %Este programa calcula las intersecciones de n ecuaciones en grupos
   de 3 para auxiliarnos en el ejercicio 1 del capítulo 3

   function combinacion4(H,d,C)
   n=size(H);
   n=n(1);
   for c=1:6
   for b=c+1:6
   for a=b+1:6
   for e=a+1:n
   combinacion=[e,a,b,c]
   B=[H(e,:)H(a,:);H(b,:);H(c,:)];
   b1=[d(e);d(a);d(b);d(c)];
   if(det(B)~ =0)
   X=inv(B)*b1
   end
   if(H*X<=d)
   fprintf('Es un punto extremo\ n')
   frpintf('El valor de la funcion objetivo es'),disp(C*X)
   else
   fprintf('Es un punto extremo\ n')
   end
   end
   end
   end
   end
   ```

donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (-1, -1, 1, 0)$$

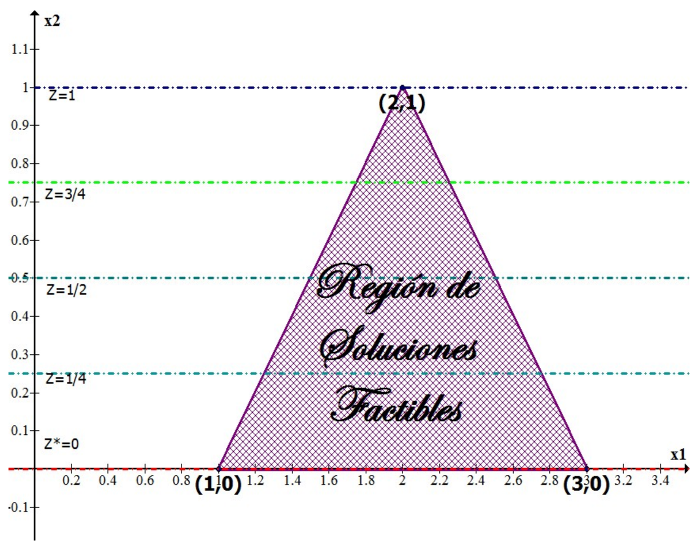
Existen 11 puntos extremos en este problema.

2.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (3, 0, 3, -3)$$

$$x = H^{-1} * d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad Z = c * x = 12$$

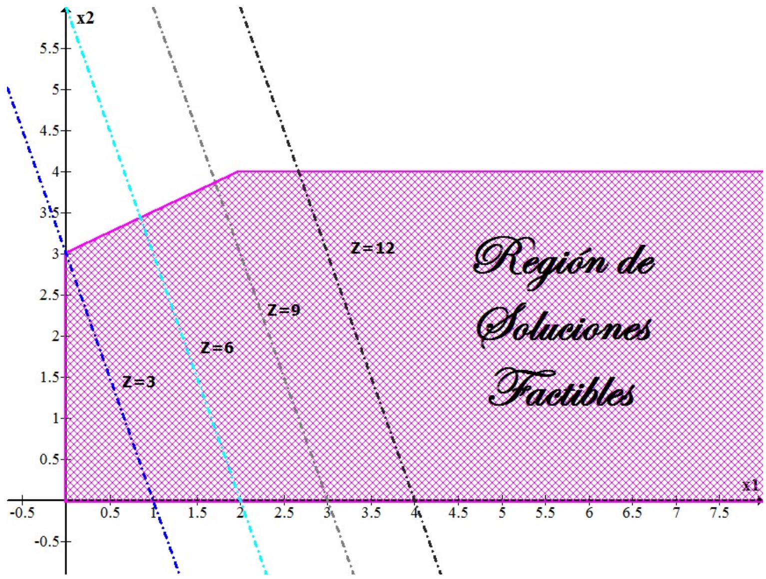
3. Graficando el problema



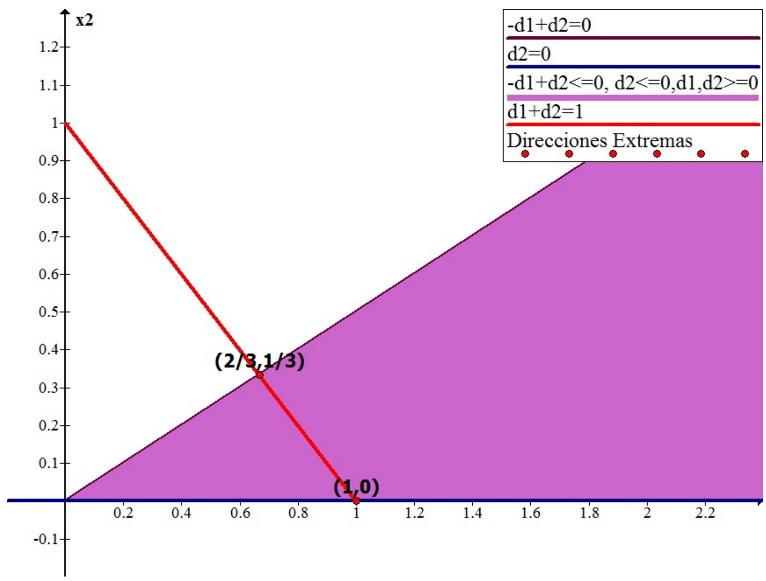
Las soluciones óptimas son de la forma

$$\left\{X \in \mathbb{R}^2 | (x_1, x_2) = \lambda(1,0) + (1-\lambda)(3,0)\right\}$$

4. Utilizando Graph



La Función Objetivo es no acotada porque x_1 crece indefinidamente, encontraremos las direcciones dibujando el ppl $Ad \leq 0$.



Las direcciones extremas son $d_1 = (2/3, 1/3), d_2 = (1, 0)$

5.

$$
\begin{aligned}
Max\ z = -4x_1 - 2x_2' - 7x_3 - 0 \cdot x_4' + 0 \cdot x_4'' + x_5 \\
-x_1 - x_2' + 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4' + 0 \cdot x_4'' + 0 \cdot x_5 \leq -3 \\
x_1 - 2x_2' + 0 \cdot x_3 + x_4' - x_4'' + 0 \cdot x_5 \leq -1 \\
-x_1 + 2x_2' - 0 \cdot x_3 - x_4' + x_4'' - 0 \cdot x_5 \leq 1 \\
0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2' + 2x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + x_5/4 \leq 8 \\
x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Min\ z = 4x_1 + 2x_2' + 7x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' - x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \\
x_1 + x_2' + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + 0 \cdot x_5 - x_6 + 0 \cdot x_7 = -3 \\
x_1 - 2x_2' + 0 \cdot x_3 + x_4' - x_4'' + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = -1 \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2' + 2x_3 + 0 \cdot x_4' - 0 \cdot x_4'' + x_5/4 + 0 \cdot x_6 + x_7 = 8 \\
x_1, x_2', x_3, x_4', x_4'', x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
Min\ z = x_1 + x_2 \\
x_1 + x_2 \geq 3/2 \\
x_1 - x_2 \geq 3/2 \\
-x_1 + x_2 \geq -9/2 \\
-x_1 - x_2 \geq -9/2 \\
-x_1 + 0 \cdot x_2 \geq -2 \\
0 \cdot x_1 - x_2 \geq -1 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

7. La región es no-acotada ya que x_1 puede crecer indefinidamente y continuar satisfaciendo las restricciones.

C.4. Capítulo 4

1. *a*) $[\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *No es una base*

$$[\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_3] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$x = (0, 0, -1, 0, 0)$

$$[\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_4] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x = (-7, 0, 0, 3, 0)$

$$[\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_5] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (-1, 0, 0, 0, -3)$

$$[\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$x = (0, 0, -1, 0, 0)$

$$[\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_4] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x = (0, 7, 0, 3, 0)$

$$[\mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_5] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (0, 1, 0, 0, -3)$

$$[\mathbf{x}_3,\ \mathbf{x}_4] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$x = (0, 0, -1, 0, 0)$

$$[\mathbf{x}_3,\ \mathbf{x}_5] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x = (0, 0, -1, 0, 0)$

$$[\mathbf{x}_4,\ \mathbf{x}_5] \quad \rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$x = \left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

b) $\overline{x} = (0\ 7\ 0\ 3\ 0)$

c) $z(\overline{x}) = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 10 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 9$
Por lo tanto $x^* = (0\ 7\ 0\ 3\ 0)$ cx=9

2. Escribiendo en forma estándar matricial

$$Min\ z = (\ 1\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Existen $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 70$ posibles bases del problema, primero calculamos todas las combinaciones de la siguientes forma:

$\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\boxed{\ i \mid j \mid k \mid w\ }$ $\quad i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\,,$

para evitar que se repitan los números

$j > i\ \rightarrow\ j \geq i + 1 \quad k > j\ \rightarrow\ k \geq j + 1 \quad w > k\ \rightarrow\ w \geq k + 1$

Utilizando la instrucción ***for*** como se ve en el ejemplo 3.2 para calcular todas las posibles combinaciones de las bases, incluimos el uso de la instrucción ***if*** para limitarnos a las combinaciones que son bases y son factibles.

$\gg A = [1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0; 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0;$

$\quad 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0; 5\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1];$

$\gg b = [2\ 3\ 5\ 6]';$

$\gg c = [1\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$

$\gg for\ i = 1 : 8 \hookleftarrow$

$for\ j = i + 1 : 8 \hookleftarrow$

$for\ k = j + 1 : 8 \hookleftarrow$

$for\ w = k + 1 : 8 \hookleftarrow$

$combinacion = [i\ j\ k\ w]\,; \hookleftarrow$

$B = [A(:, i)\ A(:, j)\ A(:, k)\ A(:, w)]; \hookleftarrow$

$CB = [c(i), c(j), c(k), c(w)]; \hookleftarrow$

$if(det(B) \sim= 0\ \&\ inv(B) * b >= 0) \hookleftarrow$

$T = [CB * inv(B) * A - c, CB * inv(B) * b; inv(B) * A, inv(B) * b] \hookleftarrow$

$end \hookleftarrow$

$end \hookleftarrow$

$end \hookleftarrow$

$end \hookleftarrow$

$end \hookleftarrow$

3. La tabla inicial es

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
2	-1	1	1	0	0	1
3	2	-2	0	1	0	10
1	1	-1	0	0	1	3

Las direcciones son

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
-2	1	-1	1	0	0
-3	-2	2	0	1	0
-1	-1	1	0	0	-1

Los coeficientes de costo reducido son

-2 1 -1 0 0 0

El mínimo de los coeficientes de costo es -2 la variable que entra es x_1

El mínimo de las lambdas es $\frac{1}{2}$ la variable que sale es x_4

El punto extremo es

$\frac{1}{2}$ 0 0 0 $\frac{17}{2}$ $\frac{5}{2}$

El valor en la función objetivo es z=-1

Las direcciones son

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	0
0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Los coeficientes de costo reducido son

0 0 0 1 0 0

El problema es óptimo.

4. La tabla Simplex es

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	-$\frac{1}{4}$	-$\frac{43}{4}$	-$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{37}{4}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	0	0	1	-$\frac{1}{4}$	-$\frac{3}{4}$	-$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{4}$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	-1	0	-10	-3	0	9
x_1	0	1	2	0	-1	-1	0	3
x_6	0	0	4	-1	-3	-2	1	1

5. La tabla Simplex es:

x_1	x_2	x_3	-1	
1	1	-2	0	$= -x_4$
-2	-1	2	0	$= -x_5$
1	1	1	1	$= -x_6$
1	1	-1	0	$= -z$

La tabla Simplex es:

x_4	x_2	x_3	-1	
1	1	-2	0	$= -x_1$
2	1	-2	0	$= -x_5$
-1	0	**3**	1	$= -x_6$
-1	0	1	0	$= -z$

La tabla Simplex es:

x_4	x_2	x_3	-1	
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$= -x_1$
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$= -x_5$
$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$= -x_3$
$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$= -z$

6. La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	1	1	1	0	0	0	0
x_4	0	1	2	4	1	0	0	1
x_5	0	**6**	6	1	0	1	0	1
x_6	0	2	4	8	0	0	1	1

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$
x_4	0	0	1	$\frac{23}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{6}$
x_1	0	1	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
x_6	0	0	2	$\boldsymbol{\frac{23}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	$-\frac{5}{23}$	0	0	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{5}{46}$	$-\frac{11}{46}$
x_4	0	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	0	1	$\frac{22}{23}$	0	0	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{46}$	$\frac{7}{46}$
x_3	0	0	$\frac{6}{23}$	1	0	$-\frac{1}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{23}$

El problema es óptimo

7. *Si* $x_5 = 0$

   $x_1 = 4 + \frac{x_3}{5}$

   $x_2 = 9$

   $x_4 = 7 + \frac{3x_3}{5}$

   $z = 13 + \frac{x_3}{5} = 413 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2000$

   $x_1 = 4 + \frac{2000}{5} = 404$

   $x_2 = 9$

   $x_4 = 7 + \frac{3 \cdot 2000}{5} = 247$

   x=(404,9,2000,247,0)

C.5. Capítulo 5

1. *a*) Incorporando x_4 variable de holgura y a_1, a_2 *y* a_3 variables artificiales y ajustando el renglón de la función objetivo se llega a la siguiente tabla simplex con base a_1, a_2 *y* a_3 explícita:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	a_3	LD
z	1	4	1	7	-1	0	0	0	19
a_1	0	1	1	1	0	1	0	0	5
a_2	0	0	1	2	0	0	1	0	6
a_3	0	3	-1	**4**	-1	0	0	1	8
z	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{7}{4}$	5
a_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	3
a_2	0	$-\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	2
z	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$
a_1	0	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	-1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$
z	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{20}{9}$
x_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{9}$

El problema auxiliar es factible, empieza la fase II.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{31}{3}$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{20}{9}$
x_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{17}{9}$

El problema es óptimo $x^* = (8/9, 20/9, 17/9, 0) \quad z^* = 31/3$

b) La tabla Simplex con base explícita a_1, a_2 es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	LD
z	1	3	0	-1	1	0	0	4
a_1	0	1	-1	-1	0	1	0	3
a_2	0	**2**	1	0	1	0	1	1
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
a_1	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

El problema auxiliar es óptimo, el problema original no tiene solución factible pues existe una variable artificial distinta de cero en la base.

2. *a*) La tabla Simplex usando las tablas de Tucker es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-1	
2	6	-2	0	4	0	14	$= -x_7$
0	-2	4	1	0	0	12	$= -x_8$
0	-4	3	0	**8**	1	10	$= -x_9$
2M-1	-1	5M+3	M	12M-2	M	36M	$= -z$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_9	x_6	-1	
2	**8**	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	9	$= -x_7$
0	-2	4	1	0	0	12	$= -x_8$
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$= -x_5$
2M-1	6M-2	$\frac{2M+15}{4}$	M	$-\frac{2M+1}{4}$	$\frac{-6M+1}{4}$	$21M + \frac{5}{2}$	$= -z$

x_1	x_3	x_4	x_6	x_7	x_9	-1	
$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{8}$	$=-x_2$
$\frac{1}{2}$	$\mathbf{\frac{25}{8}}$	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{57}{4}$	$=-x_8$
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{29}{16}$	$=-x_5$
$\frac{M-1}{2}$	$\frac{25M+23}{8}$	M	$\frac{-M+1}{8}$	$\frac{-3M+1}{4}$	$\frac{-9M+1}{8}$	$\frac{57M+19}{4}$	$=-z$

x_1	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	-1	
$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$	$=-x_2$
$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$	$=-x_3$
$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$	$=-x_5$
$-\frac{24}{25}$	$-\frac{23}{25}$	$\frac{6}{25}$	$-M+\frac{1}{50}$	$-M+\frac{23}{25}$	$-M+\frac{6}{25}$	$\frac{209}{25}$	$=-z$

x_1	x_4	x_5	x_7	x_8	x_9	-1	
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	4	$=-x_2$
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	5	$=-x_3$
1	$-\frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	11	$=-x_6$
$-\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$-M-\frac{1}{10}$	$-M+\frac{4}{5}$	$-M$	11	$=-z$

$\therefore$ La solució óptima es $x^* = (0,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0,\ 11)$ $\quad z^* = 11$

$b)$ La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	1	3M-3	-7	M+1	4M+2	-M	M	0	0	5M
x_7	0	1	1	1	1	1	0	1	0	4
x_8	0	2	-1	0	**3**	0	-1	0	1	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	1	$\frac{M-13}{3}$	$\frac{4M-19}{3}$	M+1	0	M	$\frac{M+2}{3}$	0	$-\frac{4M+2}{3}$	$\frac{11M-2}{3}$
x_7	0	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	1	0	1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
x_4	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	1	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{23}{4}$	0	$\frac{19}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{-4M+19}{4}$	$-\frac{4M+9}{4}$	$\frac{67}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_4	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
z	1	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{23}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	-M-1	$-\frac{3M+1}{3}$	$-\frac{13}{3}$
x_3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	0	1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
x_4	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	1	-5	-9	-1	0	-2	0	-M-2	-M	-8
x_6	0	1	4	3	0	3	1	3	-1	11
x_4	0	1	1	1	1	1	0	1	0	4

$$\therefore \text{La solución óptima es } x^* = (0,0,0,4,0,11,0,0) \qquad z^* = -8$$

3. La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	LD
z	1	2	-2	10	1	-1	1	0	0	0	14
a_1	0	1	-1	5	1	0	0	1	0	0	7
a_2	0	0	1	**2**	0	-1	0	0	1	0	1
a_3	0	1	-2	3	0	0	1	0	0	1	6
z	1	2	-7	0	1	4	1	0	-5	0	9
a_1	0	1	$-\frac{7}{2}$	0	1	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	0	1	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
a_3	0	1	$-\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	LD
z	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{8}{5}$	-1	0	$\frac{9}{5}$
x_5	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	-1	0	$\frac{9}{5}$
x_3	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
a_3	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	**1**	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
z	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_5	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$	-1	0	$\frac{9}{5}$
x_3	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
x_6	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$

El problema auxiliar es óptimo, empieza la fase 2.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$
x_5	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{9}{5}$
x_3	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
x_6	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
z	1	0	-13	0	3	$\frac{8}{5}$	0	13
x_1	0	1	$-\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_6	0	0	0	0	-1	-1	1	0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	26	3	$\frac{57}{5}$	0	26
x_1	0	1	0	7	1	-1	0	8
x_2	0	0	1	2	0	-1	0	1
x_6	0	0	0	0	-1	-1	1	0

La solución óptima es $x^* = (8, 1, 0, 0, 0, 0)$ $\quad z^* = 26$ si haya redundancia pues x_6 es una variable básica con valor ceor lo que implica que el punto óptimo es generado por más de una base.

4. La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	1	-8M-10	4M+8	-M	-M	-M	0	0	0	29M
x_6	0	-5	2	-1	0	0	1	0	0	16
x_7	0	-3	**1**	0	-1	0	0	1	0	4
x_8	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	9
z	1	4M+14	0	-M	3M+8	-M	0	-4M-8	0	13M-32
x_6	0	1	0	-1	2	0	1	-2	0	8
x_2	0	-3	1	0	-1	0	0	1	0	4
x_8	0	**3**	0	0	1	-1	0	-1	1	5
z	1	0	0	-M	$\frac{-5M+10}{3}$	$\frac{M+14}{3}$	0	$-\frac{8M+10}{3}$	$-\frac{4M+14}{3}$	$\frac{19M-166}{3}$
x_6	0	0	0	-1	$\frac{5}{3}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{19}{3}$
x_2	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	9
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
z	1	0	0	14	-20	0	-M-14	-M+20	-M	-144
x_5	0	0	0	-3	5	1	3	-5	-1	19
x_2	0	0	1	-3	5	0	3	-5	0	28
x_1	0	1	0	-1	2	0	1	-2	0	8

$\therefore$El problema es no acotado.

5. La tabla Simplex es:

	z	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0
x_5	0	1	0	0	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	-8	-1	9	0
x_6	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_7	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	-3	0	0	0	4	$\frac{7}{2}$	-33	0
x_4	0	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_6	0	-2	1	0	0	**4**	$\frac{3}{2}$	-15	0
x_7	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	-1	-1	0	0	0	2	-18	0
x_4	0	-12	8	0	1	0	**8**	-84	0
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	0
x_7	0	0	0	1	0	0	1	0	1
z	1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	-16	0	0	0
x_3	0	2	-6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0
x_4	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0
x_7	0	-2	6	1	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	-56	0	0	1
z	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1
x_4	0	$\mathbf{\frac{2}{15}}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{4}{15}$	0	1	$\frac{1}{10}$
x_1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{-112}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$

	z	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	1
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_1	0	0	2	1	1	-24	0	6	1

La solución óptima es $x^* = (1, 0, 1, 0, \frac{3}{4}, 0, 0)$ $\quad z^* = -\frac{5}{4}$

6. La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1
z	1	0	53	41	-204	-20	0	0	0
x_1	0	1	-11	-5	18	2	0	0	0
x_6	0	0	**4**	2	-8	-1	1	0	0
x_7	0	0	11	5	-18	-2	0	1	1
z	1	0	0	$\frac{29}{2}$	-98	$-\frac{27}{4}$	$-\frac{53}{4}$	0	0
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1	1
z	1	0	-29	0	-40	$\frac{1}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0	0
x_1	0	1	-1	0	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0
x_2	0	0	2	1	-4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	0	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	-30	0	-42	0	-18	-1	-1
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	0	3	1	-2	0	-2	1	1
x_5	0	0	2	0	4	1	-5	2	2

$\therefore$El problema es óptimo $x^* = (1, 0, 1, 0, 2, 0, 0)$ $z^* = -1$

7. La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1
z	1	0	53	41	-204	-20	0	0	0
x_1	0	1	-11	-5	18	2	0	0	0
x_6	0	**4**	2	-8	0	-1	1	0	0
x_7	0	0	11	5	-18	-2	0	1	1
z	1	0	0	$\frac{29}{2}$	-98	$-\frac{27}{4}$	$-\frac{53}{4}$	0	0
x_1	0	1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	0
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
x_7	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1	1
z	1	-29	0	0	18	15	-93	0	0
x_3	0	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0
x_2	0	-1	1	0	**2**	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-20	-9	0	0	$\frac{21}{2}$	$\frac{-141}{2}$	0	0
x_3	0	-2	4	1	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$-\frac{9}{2}$	0	0
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1
z	1	22	-93	-21	0	0	24	0	0
x_5	0	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	**1**	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1
z	1	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	0
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	1

$\therefore$ El problema puede presentar ciclado si se usa solo el Algoritmo Simplex.

C.6. Capítulo 6

1. *a*) El dual del problema es

$$\begin{aligned} Max\ g &= 4w_1 + 2w_2 + 5w_3 \\ 2w_1 + 3w_2 + 11w_3 &\leq 1 \\ \frac{7w_1}{2} - w_2 + w_3 &\geq 7 \\ 3w_1 + 4w_2 - 16w_3 &= \frac{2}{3} \\ w_1 \geq 0 \ \ w_2 \leq 0 \ \ &w_3\ NR \end{aligned}$$

b) El dual del problema es

$$\begin{aligned} Min\ g &= 13w_1 + 15w_2 \\ 30w_1 + w_2 &\leq 10 \\ -22w_1 + 9w_2 &= 17 \\ w_1 \geq 0 \ \ &w_2 \leq 0 \end{aligned}$$

2. *a*) La tabla Simplex es:

$$
\begin{array}{c|ccc|c|}
\cline{2-5}
x_1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\
x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
x_3 & 1 & -1 & \mathbf{-3} & -1 \\
\cline{2-5}
-1 & 1 & 4 & 6 & 0 \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_4} & x_5 & \multicolumn{1}{c}{x_6} & \multicolumn{1}{c}{g}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c|}
\cline{2-5}
x_1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
x_2 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
x_6 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\cline{2-5}
-1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\
\cline{2-5}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_4} & x_5 & \multicolumn{1}{c}{x_3} & \multicolumn{1}{c}{g}
\end{array}
$$

$\therefore$ El problema primal es infactible y el problema dual es no acotado.

b) La tabla Simplex es:

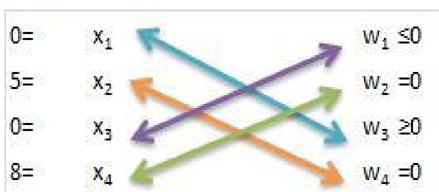
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-1	-1	-2	0	0	0
x_4	0	1	**-1**	1	1	0	-4
x_5	0	5	1	1	0	1	9
z	1	-2	0	-3	-1	0	4
x_2	0	-1	1	-1	-1	0	4
x_5	0	6	0	2	1	1	5

La solución óptima es $x^* = (0, 4, 0, 0, 5)$ $\quad z^* = 4$

3. Las soluciones no provienen de problemas duales ya que x_2, y_4 que son variables duales asociadas por lo tanto al menos una de ellas deberá ser cero para que su producto lo sea, pero $x_2 \cdot y_4 = 2 \cdot 6 \neq 0$. Por tanto no cumple con las condiciones de Tucker(Holguras complementarias).

4. El problema dual es:

$$
\begin{aligned}
Max\ z = 5w_1 + 3w_2 \\
w_1 + 3w_2 \leq 1 \\
w_1 - w_2 \leq -4 \\
w_1, w_2 \leq 0
\end{aligned}
$$



Si $w_1 = w_4 = 0$ el problema se convierte en :

$$\begin{aligned} w_1 &= -4 \\ w_1 + w_3 = 1 \quad \rightarrow \quad w_3 &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto $w^* = (-4, 0, 5, 0)$ $w^*b = -20$

5. La tabla Simplex para el primal es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	2	10	0	0	0	0
x_3	0	8	3	1	0	0	12
x_4	0	-2	$\mathbf{\frac{7}{2}}$	0	1	0	5
x_5	0	4	10	0	0	1	22
z	1	$\frac{54}{7}$	0	0	$-\frac{20}{7}$	0	$-\frac{100}{7}$
x_3	0	$\mathbf{\frac{68}{7}}$	0	1	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{54}{7}$
x_2	0	$-\frac{4}{7}$	1	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{10}{7}$
x_5	0	$\frac{68}{7}$	0	0	$-\frac{20}{7}$	1	$\frac{54}{7}$
z	1	0	0	$-\frac{27}{34}$	$-\frac{37}{17}$	0	$-\frac{347}{17}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{68}$	$-\frac{3}{34}$	0	$\frac{27}{34}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{17}$	$\frac{4}{17}$	0	$\frac{32}{17}$
x_5	0	0	0	-1	-2	1	0

$\therefore$ El problema primal es degenerado.

Las solución óptima es $x^* = (\frac{27}{34},\ \frac{32}{17},\ 0,\ 0,\ 0)$ $z^* = -\frac{347}{17}$.

La tabla Simplex del problema dual es

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	LD
z	1	-12	-5	-22	0	0	0
w_4	0	-8	2	-4	1	0	-2
w_5	0	-3	$-\mathbf{\frac{7}{2}}$	-10	0	1	-10

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	LD
z	1	$-\frac{54}{7}$	0	$-\frac{54}{7}$	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{100}{7}$
w_4	0	$-\boldsymbol{\frac{68}{7}}$	0	$-\frac{68}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{54}{7}$
w_2	0	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{20}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{20}{7}$
z	1	0	0	0	$-\frac{27}{34}$	$-\frac{32}{17}$	$\frac{347}{17}$
w_1	0	1	0	1	$-\frac{7}{68}$	$-\frac{1}{17}$	$\frac{27}{34}$
w_2	0	0	1	2	$\frac{3}{34}$	$-\frac{4}{17}$	$\frac{37}{17}$

La solución óptima del problema dual es $w^* = (\frac{27}{34}, \frac{37}{17}, 0, 0, 0$

6. Aumentamos la restricción artificial $x_1+x_2+x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5+x_6 \leq M$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	-3	-2	3	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	1
x_5	0	0	-1	-4	0	1	0	-2
x_6	0	**1**	1	1	0	0	1	M
z	1	0	1	6	0	0	3	3M
x_4	0	0	0	0	1	0	**-1**	1-M
x_5	0	0	-1	-4	0	1	0	-2
x_1	0	1	1	1	0	0	1	M
z	1	0	1	6	3	0	0	3
x_6	0	0	0	0	-1	0	1	M-1
x_5	0	0	**-1**	-4	0	1	0	-2
x_1	0	1	1	1	1	0	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	0	0	2	3	1	0	1
x_6	0	0	0	0	-1	0	1	M-1
x_2	0	0	1	4	0	-1	0	2
x_1	0	1	0	**-3**	1	1	0	-1
z	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{11}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_6	0	0	0	0	-1	0	1	M+1
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_3	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$\therefore$El problema es óptimo $x^* = (0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0)\quad cx^* = \frac{1}{3}$

7. *a*) La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	13	15	0	0	0
x_3	0	2	**3**	1	0	6
x_4	0	1	-1	0	1	2
z	1	3	0	-5	0	-30
x_2	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
x_4	0	$\mathbf{\frac{5}{3}}$	0	$\frac{1}{3}$	1	4
z	1	0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{186}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$

La solución óptima es $x^* = (\frac{12}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0)\quad z^* = -\frac{186}{5}$

b) Usando Holguras Complementarias y la tabla simplex óptima

$-w_3$	$-w_4$	$-w_1$	$-w_2$	LD
x_1	x_2	x_3	x_4	LD
0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{186}{5}$

$\therefore w_3 = 0 \quad w_4 = 0 \quad w_1 = \frac{28}{5} \quad w_2 = \frac{9}{5}$

c) 1) $x^* = (\frac{2}{5}\ \frac{12}{5}\ 0\ 0) \qquad w^* = (\frac{1}{5}\ \frac{63}{5}\ 0\ 0)$

	z	$-w_3$	$-w_4$	$-w_1$	$-w_2$	LD
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{63}{5}$	$-\frac{132}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$

2) La tabla Simplex es:

	z	$-w_3$	$-w_4$	$-w_1$	$-w_2$	LD
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{158}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$

$x^* = (\frac{2}{5},\ \frac{11}{5},\ 0,\ 0) \quad w^* = (\frac{28}{5},\ \frac{9}{5},\ 0,\ 0)$

3) Calculamos y_1

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = (-15 \ \ -13) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 13 = \frac{28}{5}$$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	1	$\frac{28}{5}$	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{186}{5}$
x_2	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	$\boldsymbol{\frac{4}{5}}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$
z	1	0	0	-7	-6	-54
x_2	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3

$\therefore$ El óptimo del problema es $x^* = (3, 1, 0, 0)$ $\ w^* = (7, 6, 0, 0)$

4) Calculamos y_5

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$z_5 - c_5 = (-15 \ \ -13) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} - 3 = -\frac{117}{5}$$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{117}{5}$	$-\frac{186}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{12}{5}$

$\therefore$La solución sigue siendo óptima.

5) Sea aumenta la restricción $x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 4$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$-\frac{186}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_1	0	**1**	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_5	0	1	3	0	0	1	4
z	1	0	0	$-\frac{28}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$-\frac{186}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_5	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{14}{5}$

$\therefore \quad x^* = (\frac{12}{5}, \ \frac{2}{5}, \ 0, \ 0, \ \frac{14}{5}) \quad cx^* = -\frac{186}{5}$

8. *a*) La tabla Simplex es:

   $\therefore \quad x^* = \big(0, \ \frac{10}{3}, \ 0, \ \frac{14}{3}, \ 0\big) \quad cx^* = -\frac{40}{3}$

   b) El dual del problema es:

$$\begin{aligned} Max\ g = 8w_1 + 10w_2 \\ 2w_1 - w_2 \leq 2 \\ w_1 + 3w_2 \leq -4 \\ -2w_1 + 2w_2 \leq 1 \\ w_1, w_2 \leq 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-2	4	-1	0	0	0
x_4	0	2	1	-2	1	0	8
x_5	0	-1	**3**	2	0	1	10
z	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{40}{3}$
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

De la tabla obtenemos que $w^* = (0, -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ 0,\ \frac{11}{3})$

c) Realizando el análisis paramétrico

1) Sabemos de la tabla

$$El\ renglón\ z = (-\frac{2}{3}, 0, -\frac{11}{3}, 0, -\frac{4}{3})$$

Calculamos para los valores de c'

$$(0,6)\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - (1,6,0,0,0)$$

$$= (-2,6,4,0,2) - (1,6,0,0,0) = (-3\ 0\ 4\ 0\ 2)$$

Hacemos la prueba del radio mínimo

$$s = min\left\{\frac{\frac{11}{3}}{4},\ \frac{\frac{4}{3}}{2}\right\} = min\left\{\frac{11}{12},\ \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

Actualizando el renglón z

$\left(-\frac{2}{3}\ 0\ -\frac{11}{3}\ 0\ -\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}(-3\ 0\ 4\ 0\ 2) = \left(-\frac{8}{3}\ 0\ -1\ 0\ 0\right)$

$c_B * B^{-1}b = (0, -4+4)$

La tabla Simplex es:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	$-\frac{8}{3}$	0	-1	0	0	0
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

$\therefore$La solución óptima es $x^* = (0, 10/3, 0, 14/3)\quad cx^* = 0$

2) La inversa de B está dada por las columnas de las variables de holgura

$$B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Haciendo la prueba del cociente mínimo

$$s = min\left\{\frac{\frac{14}{3}}{\frac{1}{3}}\right\} = 14$$

$$\bar{b} + s\bar{b}' = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{38}{3} \end{pmatrix}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{152}{3}$
x_4	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0
x_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{38}{3}$

$\therefore$ La solución óptima es $x^* = (0, \frac{38}{3}, 0, 0, 0)$ $\quad cx^* = -\frac{152}{3}$

C.7. Capítulo 7

1. *a*) La tabla Simplex es

1	0	5
1	0	5
0	1	1

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = 4 \quad z_3 - c_3 = 0 \quad z_4 - c_4 = 8 \quad z_5 - c_5 = -1$$

$$z_k - c_k = max\{4, 0, 8, -1\} = 8 \qquad k = 4$$

Calculamos y_4

$$y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r4}} = min\left\{\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \qquad r = 2$$

La variable x_6 sale de la base y entra x_4

La tabla Simplex es

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = 0 \quad z_3 - c_3 = 0 \quad z_5 - c_5 = -1 \quad z_6 - c_6 = -4$$

$$z_k - c_k = max\,\{0, 0, -1, -4\} = -4 \qquad k = 6$$

Por tanto la solución óptima es: $x^* = (3, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0) \quad z^* = 1$

$b)$ La tabla Simplex es

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 0 & 0 & -6 & -360 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 140 \\ 0 & 1 & -1 & 40 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = 8 \qquad z_5 - c_5 = 6$$

$$z_k - c_k = max\,\{8, 6\} = 8 \qquad k = 2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}} = min\left\{\frac{140}{1}, \frac{40}{1}\right\} = 40 \qquad r = 3$$

La variable x_4 sale de la base y entra x_2

La tabla Simplex es

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 0 & -8 & 2 & -680 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 40 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = -8 \qquad z_5 - c_5 = -2$$

$$z_k - c_k = max\,\{-8, -2\} = -2$$

La solución óptima es $x^* = (60, 40, 100, 0, 0) \quad z^* = -680$

c) La tabla Simplex es

$$\begin{array}{|cccc|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = 2 \qquad z_2 - c_2 = 1$$

$$z_k - c_k = max\,\{2, 1\} = 2 \qquad k = 1$$

Calculamos y_1

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = min\left\{\frac{11}{1}, \frac{6}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} \qquad r = 4$$

La variable x_6 sale de la base y entra x_1

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|cccc|c|}\hline 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$z_2 - c_2 = 5 \qquad z_6 - c_6 = -1$$

$$z_k - c_k = max\,\{5, -1\} = 5 \qquad k = 2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}} = min\left\{\frac{\frac{19}{2}}{4}, \frac{\frac{9}{2}}{3}, \frac{\frac{1}{2}}{1}, \right\} = \frac{1}{2} \qquad r = 3$$

La variable x_5 sale de la base y entra x_2

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
0 & 0 & -5 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\
\hline
1 & 0 & -4 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} \\
0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\
\hline
\end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$z_5 - c_5 = -5 \qquad z_6 - c_6 = \frac{3}{2}$$

$$z_k - c_k = max\left\{-5, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} \qquad k = 6$$

Calculamos y_6

$$y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r6}} = min\left\{\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}, \frac{3}{1}\right\} = 3 \qquad r = 2$$

La variable x_4 sale de la base y entra x_6

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -10 \\
\hline
1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\
0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\
\hline
\end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$z_4 - c_4 = -\frac{3}{2} \qquad z_5 - c_5 = -\frac{1}{2}$$

$$z_k - c_k = max\left\{-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{2} \qquad k = 4$$

$\therefore$ La solución es óptima $x^* = (4, 2, 3, 0, 0, 3) \quad z^* = -10$

2. *a*) La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 12 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_r = min\{-6, 12\} = -6 \qquad r = 1$$

Calculamos el renglón 1

$$R_1 = [-1\ \ -1\ 1\ 0]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{1k}} = min\left\{\frac{-1}{-1},\ \frac{-5}{-1}\right\} = 1 \qquad k = 1$$

Calculamos y_1

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La variable x_3 sale de la base y entra x_1

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline -1 & 0 & 6 \\ \hline -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -6 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_r = min\{6, -6\} = -6 \qquad r = 2$$

Calculamos el renglón 2

$$R_2 = [0,\ 1,\ 3,\ 1]$$

No existe ningún elemento negativo en R_2 $\therefore$El problema primal es infactible.

b) La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_r = min\{3, 5, -2\} = -5 \qquad r = 2$$

Calculamos el renglón 2

$$R_3 = \left[4,\ -\frac{1}{2},\ 2,\ 0,\ 1,\ 0\right]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = min\left\{\frac{-2}{-\frac{1}{2}}\right\} = 4 \qquad k = 3$$

Calculamos y_2

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La variable x_5 sale de la base y entra x_2

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline \frac{1}{3} & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Calculamos el renglón 1

$$R_1 = [4\ 0\ 6\ 1\ 2\ 0]$$

No existen elemento negativos en el renglón 1.$\therefore$ el problema primal es infactible

$c)$ La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_r = min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{19}{2}, -\frac{11}{2}\right\} = -\frac{19}{2} \qquad r = 2$$

Calculamos el renglón 2

$$R_2 = \left[0,\ -2,\ \frac{5}{2},\ 1,\ 0\right]$$

Hacemos la prueba del radio mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = min\left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}\right\} = 1 \qquad k = 2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La variable x_4 sale de la base y entra x_2

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 10 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_r = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{19}{4}, -\frac{3}{4}\right\} = -\frac{3}{4} \qquad r = 3$$

Calculamos el renglón 3

$$R_3 = \left[0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1\right]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{3k}} = min\left\{\frac{-1}{-\frac{1}{2}}\right\} = 2 \qquad k = 4$$

Calculamos y_4

$$y_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

La variable x_5 sale de la base y entra x_4

La tabla Simplex Revisado es

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{23}{2} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ -1 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_r = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$La solución actual es óptima $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0)$ $\quad cx^* = \frac{23}{2}$

3. *a*) La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (-3,\ 1,\ 0) \qquad w = (-3,\ 1,\ 0)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es -4

$$z_2 - c_2 = 6 \quad z_4 - c_4 = 3$$

$$z_k - c_k = min\,\{6, 3\} = 3 \qquad k = 2$$

Calculamos y_2

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No es posible elegir un pivote, $\therefore$ El problema es no acotado.

b) La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0,\ 0) \qquad w = (0,\ 0)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 0

$$z_1 - c_1 = -2 \quad z_2 - c_2 = -1 \quad z_3 - c_3 - 5 \quad z_4 - c_4 = 3$$

$$z_k - c_k = max\,\{-2, -1, -5, 3\} = 3 \qquad k = 4$$

Calculamos y_4

$$y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r4}} = min\left\{\frac{12}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 4 \quad r = 3$$

La variable x_7 sale de la base y entra x_4

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{41}}{y_{43}} \\ -\frac{y_{42}}{y_{43}} \\ \frac{1}{y_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0 \ -3) \qquad w = (0 \ -3)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es -12

$$z_1 - c_1 = -5 \quad z_2 - c_2 = -1 \quad z_3 - c_3 = -8 \quad z_7 - c_7 = -3$$

$\therefore$ La solución actual es óptima $x^* = (0, 0, 0, 4{,}10, 8) \quad cx^* = -12$

4. *a*) La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0 \ 0) \qquad w = (0 \ 0)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 0

$$\bar{b}_r = min\{3, -1\} = -1 \quad r = 2$$

Calculamos y_2

$$y_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hacemos la prueba del radio mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = min\left\{\frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2} \quad k = 2$$

La variable x_4 sale de la base y entra x_2

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{21}}{y_{22}} \\ \frac{1}{y_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0\ 1) \qquad w = \left(0\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es $\frac{1}{2}$ $\therefore$ La solución es óptima $x^* = (0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)$

b) La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \qquad w = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 0

$$\bar{b}_r = min\,\{3, 5, -1, -3, -4\} = -4 \quad r = 5$$

Calculamos el rengón 5

$$R_5 = [0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{2k}} = min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1}\right\} = 1 \quad k = 3$$

Cálculamos y_3

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La variable x_{11} sale de la base y entra x_3

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{31}}{y_{35}} \\ -\frac{y_{32}}{y_{35}} \\ -\frac{y_{33}}{y_{35}} \\ -\frac{y_{34}}{y_{35}} \\ \frac{1}{y_{35}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \qquad w = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 4

$$\bar{b}_r = min\,\{-1, 5, -1, -3, 4\} = -3 \qquad r = 5$$

Calculamos el rengón 4

$$R_4 = [0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{r4}} = min\left\{\frac{-1}{-1},\ \frac{-4}{-1}\right\} = 1 \qquad k = 2$$

Cálculamos y_2

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La variable x_{10} sale de la base y entra x_2

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{21}}{y_{24}} \\ -\frac{y_{22}}{y_{24}} \\ -\frac{y_{23}}{y_{24}} \\ \frac{1}{y_{24}} \\ -\frac{y_{25}}{y_{24}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (0\ 0\ 0\ 1\ 1) \qquad w = (0\ 0\ 0\ -1\ -1)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 7

$$\bar{b}_r = min\,\{-4, 5, -1, 3, 4\} = -4 \qquad r = 1$$

Calculamos el renglón 1

$$R_1 = [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{r1}} = min\left\{\frac{-3}{-1},\ \frac{0}{-1}\right\} = 0 \qquad k = 6$$

Cálculamos y_6

$$y_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La variable x_7 sale de la base y entra x_6

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{61}} \\ -\frac{y_{62}}{y_{61}} \\ -\frac{y_{62}}{y_{61}} \\ -\frac{y_{63}}{y_{61}} \\ -\frac{y_{65}}{y_{61}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) \qquad w = (0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 7

$$\bar{b}_r = min\,\{4, 1, -1, 3, 0\} = -1 \qquad r = 3$$

Calculamos el renglón 3

$$R_3 = [-1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0]$$

Hacemos la prueba del cociente mínimo

$$\frac{z_k - c_k}{y_{r3}} = min\left\{\frac{-2}{-1},\ \frac{-1}{-1}\right\} = 1 \qquad k = 4$$

Cálculamos y_4

$$y_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La variable x_9 sale de la base y entra x_4

Calculamos g

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{y_{41}}{y_{43}} \\ -\frac{y_{41}}{y_{43}} \\ -\frac{1}{y_{43}} \\ -\frac{y_{41}}{y_{43}} \\ -\frac{y_{41}}{y_{43}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La inversa de B es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B = (1\ 0\ 1\ 1\ 1) \qquad w = (0\ 0\ -1\ -1\ -1)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_8 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El valor de la función objetivo es 8.
La solución óptima es $x^* = (0, 3, 0, 1, 0, 4, 0, 0)$

Índice alfabético

Algoritmo
  Dual Simplex, 181
  Dos Fases, 130
  Gran M, 140
  Simplex, 103
    Producto Inversa, 225
    Revisado, 206
    Rudimentario, 95
Análisis de Sensibilidad, 189
  Matlab, 200
  matriz A, 194
  restricciones, 196
  variable, 198
  vector b, 192, 193
  vector c, 189, 191

Base, 16
  factible, 85
    dual, 180

ciclaje, 148
Cociente mínimo, 103
Coeficientes de costo reducido, 93
Combinación lineal, 13
  convexa, 34
Conjunto convexo, 35
Cono convexo, 54

Dependencia Lineal, 14
Dimensión, 15
Dirección, 63
  extrema, 63
  movimiento, 91
Dual, 163
  construcción, 165

Espacio de Requerimientos, 55
Espacio Vectorial, 5

Forma
  canónica, 71
  estándar, 73
Forma Producto de la Inversa, 223
Formulación de Problemas, 27
Función
  for, 67
  fprintf, 69
  if, 69
  while, 99

Gradiente, 75
Graph, 44
  animación, 80
  evaluar, 46
  insertar función, 45
  Insertar relación, 52
  insertar relación, 46
  semiespacios, 45
  serie de puntos, 47
  sombreado, 49

Hiperplano, 35
Holguras Complementarias, 174

Independencia Lineal, 14
Investigación de Operaciones, 27

Método Geométrico, 70
Método Gráfico, 76
Matriz, 6
  determinante, 8
  inversa
    Adjunta Clásica, 9
    Gauss-Jordan, 9

partición, 10
producto, 7
suma , 6
transpuesta, 8

Optimalidad, 103

Pivoteo, 108
Problema primal, 163
Programa
dos fases, 138
Dual Simplex, 186
gran M, 144
Producto Inversa, 235
dual, 240
regla de Bland, 155
regla lexicográfica, 150
Simplex, 113
Revisado, 217
rudimentario, 99
Tucker, 121
dual, 186
Programación Lineal
supuestos, 29
concepto, 28
Programación Matemática, 28
Propiedad débil de dualidad, 168
Punto extremo, 35, 65
adyacentes, 65

Rango, 16
Región de Soluciones Factibles, 34
graficación, 35
poliédrica, 37
Regla
del rectángulo, 16
de Bland, 152
lexicográfica, 148
Restricción artificial, 184

Semiespacio, 35
Sistema de ecuaciones, 17
Solución óptima
alternativa, 108
degenerada, 109
rayo, 109
Subespacio Generado, 14

Tablas Tucker, 116
pivoteo, 118
Teorema
de Representación, 65
Fundamental de Dualidad, 169

Vértice, 251
Variables artificiales, 129
Vectores, 6

Bibliografía

[1] Rojo Armando O. *Álgebra II.* El Ateneo, Buenos Aires, 10^a edition, 1978.

[2] Solow Daniel. *Linear Programming: An introduction to finite improvement algorithms.* North- Holland, New York, 1984.

[3] Luenberger David G. *Linear and nonlinear programming.* Addison Wesley, Massachusetts, 1973.

[4] Lluis Puebla Emilio. *Álgebra lineal, álgebra multilineal y k-teoría.* Sistemas Técnicos de Edición, México D.F., 1997.

[5] Nering Evan D. and Tucker Albert W. *Linear programing and related programs.* Academic Press, Boston, 1993.

[6] Hillier Federick S. and Liberman Gerald J. *Introduction to Operations research.* Holden Day, Oakland, California, 1978.

[7] Dantzing George B. *Linear programming and extensions.* Priceton University, New York, 1997.

[8] Strayer James K. *Linear programming and its applications.* Springer-Verlang, New York, 1989.

[9] Ignizio James P. and Cavalier Tom M. *Linear programming.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.

[10] Brickman Louis. *Mathematical introduction to linear programming and game theory.* Springer-Verlang, New York, 1989.

[11] Bazaraa Mokhtar S. and Jarvis John J. *Programación lineal y flujo en redes.* Limusa, New York, 1^a edition, 1970.

[12] Bazaraa Mokhtar S. and Jarvis John J. *Programación lineal y flujo en redes.* Limusa, New York, 2^a edition, 1990.

[13] Childress Robert L. *Sets, matrices and linear programming.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.

[14] Rardin Ronald R. *Optimization in operations research.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 1998.

[15] Chvátal Vašek. *Linear programming.* W.H. Freeman and Company, 1983.