Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Filosofía y Letras
Instituto de Investigaciones Filosóficas
Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Desarrollo del pensamiento lógico: elemento fundamental en la divulgación de la ciencia

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Filosofía de la Ciencia
presenta

Mat. Claudia Hernández García

Directora de tesis
Mat. Concepción Ruiz Ruiz-Funes

Ciudad Universitaria, 2008

Agradecimientos

Está bien, acepto que la gestación fue un poco tardada, pero he aquí al retoñito.

Siempre es mejor comenzar por el principio, así que empezaré por los que han estado cerca desde hace más ayeres.

Ma... una vez más esta hija tuya termina un proyecto, y ya tomé todas las precauciones para que en esta ocasión sí hagamos un registro fotográfico. ¡Prometido!

Pa... aunque ya no estás, tu determinación, tu enjundia, tu nobleza, tu capacidad de hacer berrinche, y a hasta tu manera de estornudar se quedaron reflejados en mí. Mil gracias.

Ade... ¿qué haría sin tu apoyo, sin los consejos, sin el cariño? Gracias por estar ahí siempre, por recibirme y por dejarme dormir en tu sillón los domingos en las tardes.

Javier... también conocido como ‘el que no vale nada’ y ‘Patricio’, las palabras no alcanzan para describir cuánto te quiero. No estoy segura de que toda la vida me alcance para retribuir todo lo que haz hecho por mí, pero le seguiré echando ganas.

Juan, Alicia, Rafael y Margarita... gracias por haberme correteado por toda la casa y por empujarme a perseguir mis sueños.

Concha... sabes que mi gratitud, mi cariño y mi admiración por ti no se pueden medir con números indoarábigos, hay que echar mano del alfabeto hebreo. Muchísimas gracias por ser mi mamá académica, pero, sobre todo, por seguir siendo una de mis grandes amigas. Hemos pasado por muchas cosas estos diez años, pero nuestra amistad es tan genuina que los altibajos no hacen más que fortalecerla.

Niña Beyer... tal vez no recuerdes que nuestro primer contacto ocurrió hace ya bastantintos años cuando me mandaste a hablar de matemáticas a un programa de la XEW. Pero bien dicen que los amigos de a de veras se reconocen durante los tiempos difíciles y sí, seguimos juntas años después de tantas noches en vela tratando de entender lecturas complejas, de los exámenes para llevar a casa, de aquellas reuniones llenas de lógica y bebidas alegrantes; seguimos juntas después de muchos momentos divertidos y de algunos otros cargados de tristeza. De verdad que no tengo palabras para agradecer tu amistad y todo lo que ésta conlleva.

Moni, Aline, Anita, Jimena, Lulú, Diana... muchas gracias por tantos ratos tan agradables y tantas conversaciones llenas de debate, y por estar ahí cuando más las necesité.

Amor, mil gracias por devolverme el gusto por las pequeñas (y no tan pequeñas) delicias de la vida.

Gracias a todos... a los que me ayudaron a citar correctamente, a los que se sentaron a leer el trabajo una y otra y otra vez, a los que se pasaron horas tratando de hacerme ver el lado bonito de la disciplina, a los que se propusieron a levantarme el ánimo, a los que me dieron consejo, a los que me provocaron risas, a los que permanecieron cerca, a los que ya no están... y a los que seguramente se me están olvidando.

Claudia

Das Wesen *der Mathematik liegt* gerade *in ihrer* Freiheit.
(La esencia de las matemáticas radica justamente en su libertad.)
Georg Cantor

La lógica puede ser paciente porque es eterna.
Oliver Heaviside
(pero entre más rápido lo hagamos, mejor. chg)

Índice

Introducción

Definir qué es la ciencia o qué es la divulgación de la ciencia es una empresa que rebasa este trabajo; sin embargo, me parece importante comenzar la descripción general del terreno sobre el que éste descansa. Tal vez no haga falta decir que el término ciencia no tiene un significado sólido e inmutable en el lenguaje natural: La gente suele aplicarlo por igual a la física, que a la astrología. Enumerar las razones por las que esto ocurre también representa una tarea que la extensión de este texto no permitiría, pero sí quisiera considerar algunas.

Comúnmente asociamos la ciencia con la experimentación, el rigor y el conocimiento especializado. El deseo de dotar de estatus intelectual a algunas disciplinas o actividades conduce a ciertas personas a etiquetarlas de ciencia o bien de científicas. Intentan demostrar que la merecen adquiriendo nombres que causan terribles confusiones (astrología/astronomía, numerología/teoría de números, campo energético/energía física) y, en consecuencia, el dominio popular suele incluir en las filas de las disciplinas realmente científicas a candidatos que claramente no lo son.

La intención de este trabajo tampoco es, ni remotamente, establecer criterios para discernir qué es lo verdaderamente científico de aquello que no lo es, pero no se puede dejar de considerar esta confusión contra la que la divulgación de la ciencia tiene que luchar constantemente. Desafortunadamente, la lógica no escapa de estas confusiones.

La lógica matemática es una rama de las matemáticas y su objeto de estudio lo constituyen las formas, las estructuras y los esquemas del razonamiento. Comúnmente se le confunde con la lógica que utilizamos en la vida diaria, pero realmente son lógicas muy distintas. En la lógica matemática lo que importa es la sintaxis de una afirmación, mientras que en la lógica natural nos dejamos llevar por la semántica de la oración; es decir, en la lógica matemática nos importa que las afirmaciones estén bien planteadas de acuerdo con estructuras definidas, mientras que en la lógica natural lo importante es que las cosas tengan significado. El siguiente argumento es un ejemplo de la diferencia entre una y otra:

Los elefantes se ven coquetos cuando usan traje de baño.
Los elefantes usan traje de baño cuando van a nadar.
Por lo tanto, los elefantes se ven coquetos cuando van a nadar.

Aunque este argumento está bien construido, para la lógica natural constituye una aberración pues los elefantes no usan traje de baño cuando van a nadar.

Esta diferenciación es pertinente porque una de las propuestas de este trabajo, quizá la central, es que uno de los objetivos de la divulgación de la ciencia debería ser brindar herramientas para que la gente reflexione y entienda qué significa que un argumento sea correcto y pueda cuestionar las argumentaciones que se le exponen; y esto sólo puede hacerse cuando se piensa menos en términos de la lógica natural y más en términos de la lógica matemática.

El presente trabajo tiene la siguiente estructura. Primero se presenta un breve esbozo de cómo se hace la divulgación de la ciencia, haciendo especial hincapié en el caso de las matemáticas y con el fin de analizar algunos puntos clave.

Una vez expuesta una visión alternativa de la divulgación de las matemáticas, se hace una descripción de lo que se conoce como "pensamiento lógico" y cómo es que éste se relaciona con la divulgación de las matemáticas.

Ya para finalizar, se exponen algunas razones por las que se propone que la divulgación de la ciencia debería hacerse desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento lógico en contraposición a la divulgación que comúnmente se hace.

Capítulo 1.
La divulgación de la ciencia

1.1 Panorama general de la divulgación de la ciencia

Tristemente, es un hecho irrefutable que el público no especializado entiende cada vez menos de ciencia. La sobre-especialización de sus distintos ámbitos hace más remota la posibilidad de establecer puentes entre el lenguaje común y el lenguaje de las ciencias, entre la comunidad científica y la sociedad. La traducción (y con esto no quiero decir que la labor del divulgador se reduzca a la de un traductor) que puede hacerse entre los lenguajes naturales, como del inglés al español, por ejemplo, se hace al conservar los significados; pero con la ciencia no siempre ocurre así. No existe una interfase que relacione el vocabulario y la gramática de las ciencias con el del lenguaje natural, y en consecuencia los significados que el científico da a sus conceptos muchas veces no son los mismos que el público asume. Entonces, se acentúa aún más el hecho de que el público general no puede entender los temas científicos, especialmente los de frontera, por sí solo. Necesita de la intervención de un tercero que entienda razonablemente bien los diferentes aspectos de la actividad científica para que dote de sentido a las ideas que vienen de la ciencia. Y si bien es cierto que al pasar de un lenguaje formal, como el de la ciencia, a un lenguaje más informal, necesariamente ocurre una pérdida de precisión o cambio en el significado,[1] el principal compromiso del divulgador es que esas imprecisiones sean las menos [Steiner 1986, 15].

No entender la ciencia, tiene como consecuencia natural que el público prefiera no acercarse a ella, que la rechace; y, entonces, la divulgación de la ciencia establece como su prioridad hablar de por qué la ciencia es importante para el individuo y es esencial para el desarrollo de un país. Esta necesidad de justificar la actividad científica ante los ojos del público repercute en la imagen de la ciencia que se le transmite y por ello no deja de ser muy difundida la siguiente idea:

> La concepción de la ciencia que la considera un factor neutral de progreso, independiente de la estructura social en cuyo ámbito se desarrolla, un instrumento objetivo de conocimiento de la realidad, una construcción racional edificada aprovechando como elementos estructurales únicamente juicios factuales, con expulsión sistemática de su

[1] Un hecho aún más lamentable es que la mayoría de la gente no sabe que comete estos errores, no tiene (la mayor de las veces) herramientas para corregirlos y, muchas veces, simplemente no está interesada en enmendar la imprecisión.

> cuerpo de cualquier juicio de valor, un resultado del proceso de acumulación gradual de verdades parciales. [Cinni 1984,17]

Esta visión, basada en el positivismo comteano, es la que ha predominado en la comunidad científica y constituye un pilar fundamental en el ámbito educativo y en la divulgación de la ciencia. Es una concepción de la ciencia ahistórica y aideológica que la hace parecer desvinculada de la sociedad, su realidad, sus necesidades y sus proyecciones; y a los científicos como entidades ensimismadas, enajenadas con sus actividades e intereses y no como sujetos que pertenecen a estructuras sociales específicas.

Este innegable divorcio entre la actividad científica y el público general deja de lado el hecho de que la ciencia es un método que el hombre ha desarrollado para entender el mundo. Poco a poco, la ciencia deja de formar parte de la vida de las personas, y por lo tanto dejan de utilizarla para resolver los problemas de todos los días les parece un absoluto sin sentido. Para resolver las diversas situaciones a las que nos enfrentamos en la vida cotidiana, echamos mano del sentido común,[2] en el que siempre confiamos. Sin embargo, es muy raro que las personas asocien el sentido común y la capacidad de respuesta que éste nos da con el pensamiento lógico o la cultura científica. Es indudable que diferentes problemas necesitan de tratamientos específicos, pero también es un hecho que sus soluciones dependen en gran medida de nuestros recursos intuitivos y de que nuestra organización mental sea más flexible. Esta flexibilidad de ideas y liberación de la intuición inherentes al sentido común también son parte fundamental de la actividad científica y se pueden llegar a desarrollar a través del pensamiento lógico (a lo largo de este trabajo se tratará de explicar cabalmente esta idea). Visto desde esta perspectiva, el sentido común de todos los días no es ajeno a la cultura científica, y por ende la ciencia deja de ser una mera actividad académica que se queda en el salón de clases.

Además, este sentido común también constituiría una primera aproximación para discernir mentiras dichas en nombre de la ciencia y para asimilar, interpretar y manejar las ideas que están detrás de los conceptos científicos.

Sin embargo, la divulgación de la ciencia como actividad intelectual ha heredado de manera natural los rasgos negativos de la enseñanza formal: Una concepción de la ciencia

[2] Descartes proponía que los seres humanos tenemos la capacidad de usar lo que él llamaba “sentido común” (*bon sens*), un tipo de capacidad práctica para resolver problemas que él consideraba innata, un regalo divino. La propuesta de este trabajo se apoya más en la teoría de Locke que la consideraba una habilidad que se desarrolla a través de la práctica constante y estructurada.

como una actividad contemplativa, perfecta, inmutable e inalcanzable; y, como consecuencia, sólo se ha dedicado a presentar los resultados de la ciencia. Un claro ejemplo de ello es la ciencia que se enseña en el salón de clase (que es donde ocurren los primeros y, en muchos casos únicos, acercamientos de gente a la ciencia), en la práctica es una cosa y en teoría es otra. En el salón de clases mencionamos y exigimos formalismo, como se supone que se trabaja la ciencia. Sin embargo, la presentación de temas siempre ocurre de manera imprecisa e informal, a través de ejemplos concretos. El alumno está constantemente expuesto a un panorama muy poco riguroso, pero se le pide que haga las cosas con un nivel de exigencia que, generalmente, no es capaz de alcanzar y, por ende, no satisface las expectativas que se le imponen.

Esta discrepancia entre lo que se hace y como debería hacerse confunde a los alumnos y hace que su frustración se incremente. En consecuencia, la ciencia se percibe sólo como un proyecto intelectual que utiliza técnicas formales (particularmente a las matemáticas) para la construcción de teorías que se enfocan en dominios muy específicos. La divulgación tiende a mostrarla como una actividad conducida por un deseo de progreso a lo largo de los siglos a través de contribuciones de personas que se enfrentan a problemas teóricos que ellos mismos se plantean, definen y revisan; y que crean estándares propios de inteligibilidad que están lejos de las consideraciones prácticas del sentido común. Además, la ciencia se presenta como una actividad que no se basa en sistemas intuitivos, simples y flexiblemente organizados, no se divulga la posibilidad de que la ciencia también requiere de invención, condiciones favorables y cooperación.

La divulgación de las actividades científicas y tecnológicas en nuestro país contempla, en la mayoría de los casos, aspectos totalmente enclavados en los términos en que éstas se desarrollan: Definición del objeto de estudio, usos y aplicaciones, explicaciones sencillas de los fenómenos a estudiar, ejemplos cotidianos, etcétera. Todo esto orientado a un público en el que las reflexiones sobre el papel actual de la ciencia, su significado y su valor cultural, no forman parte de su cotidianidad. En consecuencia, el público lego se limita a recibir y archivar los conocimientos que el divulgador narra. Este esquema de divulgación, muy parecido al de la enseñanza, termina por eliminar en el público la curiosidad, la creatividad y el espíritu investigador; constantemente omite detalles fundamentales como que el conocimiento puede ser contingente, y busca justificar a la ciencia con base en una posible aplicación inmediata. En general, no considera que uno de los fines de la ciencia, su utilidad, pueda ser la flexibilidad del pensamiento o la existencia de un conjunto de caminos distintos, pero igualmente válidos, que conducen a un mismo objetivo.

1.2 Un caso particular: la divulgación de las matemáticas

1.2.1 Antecedentes

Una de las discusiones alrededor de las ciencias que aún sigue abierta es aquella que trata de responder a la pregunta ¿son las matemáticas una ciencia? A la fecha no hay respuesta unánime pues hay quienes argumentan que no son una ciencia en tanto, entre otras cosas, no es posible hablar de experimentación en términos matemáticos, pero también hay quienes no sólo la defienden como ciencia, sino que además le otorgan un lugar especial como la base de las ciencias. En este trabajo se considerará que las matemáticas sí son una ciencia, pero no como las otras, que son experimentales, sino una ciencia formal. Aunque la intención de este trabajo no es responder esta pregunta, es pertinente hacer notar que por lo general en las reflexiones y discusiones sobre divulgación de la ciencia, las matemáticas y la lógica quedan excluidas y éste ha sido un error en tanto podrían jugar un papel importante en el trabajo de los divulgadores ya que un entendimiento real de lo que son puede convertirlas en una poderosa herramienta para hacer una mejor divulgación de la ciencia. Veamos por qué.

Es bien sabido que desde el nacimiento de las matemáticas como cuerpo independiente de conocimientos, los matemáticos siempre han perseguido las "verdades matemáticas" [Kline 1982, 74]. Y aunque la comunidad matemática ha vivido algunas crisis, hoy en día las matemáticas siguen siendo una base para la ciencia moderna, pues se les ha utilizado como guía infalible de la manera de funcionar del mundo sin tener una comprensión verdaderamente satisfactoria de lo que son o qué relación tienen con el mundo real [Kline 1982, 57].

La matematización del pensamiento como camino científico es hoy un dogma, a veces llevado a extremos ridículos, de la ciencia moderna. Kant llegó a afirmar que en cada una de las disciplinas de la naturaleza solamente se puede encontrar tanto de auténtica ciencia cuanto se encuentra en ella de matemática [Kant 1984, 75].[3] Y la tendencia de todas las áreas del conocimiento a fin de aumentar su credibilidad y su prestigio ha sido, y sigue siendo, hacia el revestimiento, natural o forzado, de estructuras matemáticas. De acuerdo con él y muchos otros, tanto el conocimiento de todos los días como el científico son a posteriori, pues provienen de la observación del mundo material. El conocimiento matemático, en cambio, es a priori, ya que es independiente de los hechos contingentes del mundo material. La experiencia diaria y un experimento físico pueden concebirse de manera diferente a como son, pero las verdades matemáticas son ciertas en cualquier mundo posible. Esto es así porque las matemáticas no son operaciones aritméticas y complicadas ecuaciones, sino ideas compartidas. Cualquier objeto matemático es una idea o representación mental, por eso no los encontramos en la calle ni es posible hacer experimentos con ellos. Pero no cualquier idea compartida puede tildarse de ser matemática, los objetos de las matemáticas deben ser ideas consistentes, rigurosas y confiables que nos permitan compartir nuestros razonamientos y llegar a las mismas conclusiones; esto les da su carácter de universalidad.

Sin embargo, esta tendencia platonista de que las matemáticas son una ciencia infalible e inmutable ha tenido como consecuencia natural que las matemáticas se convirtieran en objeto de una serie de mitos que no permiten un acercamiento natural a ellas. La mayoría de la gente no se siente en confianza cuando se enfrenta al ámbito de las matemáticas y, entre otras cosas, se resiste a siquiera intentar modificar la percepción que de ellas tiene. Por ejemplo, cuando se les presenta un problema y después de muchos intentos no logran hallar la solución, lo más común es que se culpen a sí mismos sin considerar la posibilidad de que dicha solución no exista o que tal vez el problema no se haya planteado correctamente. La constante inseguridad, consecuencia del mito de infalibilidad de las matemáticas, no permite que nuestro público intente ver más allá, que considere que los problemas pueden verse desde diferentes puntos de vista, que las soluciones pueden alcanzarse por medio de caminos distintos, que las soluciones no necesariamente tienen que ser únicas, o simplemente que traten de buscar alternativas. En este momento cabe aclarar que la idea de resolver problemas no se refiere a los retos típicos de los libros de texto, sino

[3] En el prólogo a los *Fundamentos metafísicos de la ciencia*, así como en su *Crítica de la razón pura*, Kant otorga un lugar especial a las matemáticas en tanto son una disciplina cuyos objetos de estudio pertenecen a la mente y no al mundo exterior.

a problemas que no forzosamente son numéricos o que requieren de una operación aritmética para ser solucionados. Problemas como *coloca seis lápices sobre la mesa de manera que cada uno toque solamente a otros dos* ni siquiera son considerados como un problema de matemáticas. Si la solución no requiere de operaciones aritméticas, simplemente no se considera un problema de matemáticas. Lamentablemente, la gente no acaba de entender que la lógica es parte fundamental de las matemáticas en tanto sólo se les asocia a la aplicación de algoritmos. Sin embargo, hay muchos procesos cognitivos involucrados que son invisibles y son precisamente estos procesos, la lógica, los que dan a las matemáticas su coherencia.

Además, jamás se considera, ni por equivocación, que llegar a soluciones en matemáticas, de este tipo de problemas o de los otros, también puede ser cuestión de suerte o serendipia. Esta suerte simplemente no es permisible en la idea de lo que las matemáticas (como sistema deductivo riguroso) podrían ser. La gente se convence, a lo largo de la vida, por distintos medios, que la única manera de llegar a los resultados es mediante un algoritmo preestablecido y que en este proceso no hay lugar para la suerte, la intuición o las corazonadas. No se les permite reflexionar cómo es que llegaron a la respuesta porque lo que importa es que lleguen a la respuesta correcta. Y a esto no puede sino considerársele un espejismo porque, aun al seguir el algoritmo establecido, cuando no entendemos qué es lo que hacemos, podemos llegar fácilmente a respuestas erróneas o a respuestas correctas, pero teniendo todo el proceso equivocado. Ahora, el problema no es que nos hayamos equivocado, sino que no tenemos herramientas para darnos cuenta de nuestro error y enmendarlo. Esta dinámica alrededor de las matemáticas no nos permite, en particular, darnos cuenta de la estructura real de las matemáticas:

> …Haciendo una analogía entre las matemáticas y un gran árbol, podemos asegurar que lo que hoy se conoce de éstas es el follaje, lo superficial, lo más próximo: sus aplicaciones en la ingeniería, la computación, las finanzas y hasta en problemas cotidianos (sumar, restar, multiplicar o dividir); pero a menudo se olvida observar el tronco (léase axiomas, lemas, teoremas, corolarios), y no buscar sus raíces, formadas por hombres que a través de su vida y trabajo, han hecho que las matemáticas jueguen hoy en día el papel más importante dentro de las disciplinas científicas. Y puede ser que por ignorancia o desprecio, las partes más elementales del árbol sean desconocidas por el grueso de la

> población, pero no podemos pasar por alto, que inclusive para los amantes de este gran árbol, las raíces no tienen el mismo valor que las hojas o las ramas. [Bracho 2004, 11]

Este no acabar de entender qué son las matemáticas y cómo funcionan resulta en que todo el rigor de las matemáticas, y de la ciencia en general, se transforme en la mera reproducción de algoritmos. Este hecho es mucho más notable en el caso de las matemáticas porque la idea con la que comúnmente se les asocia es la de una caja de herramientas que sirven para resolver problemas de aritmética básica. Como dice Bishop [1999, 25], pareciera que sólo son la herramienta indispensable para ir al mercado y darse cuenta de si nos tratan de estafar. Las matemáticas aportan la estructura sistemática y coherente con la que se desarrollan las otras ciencias (que propician el desarrollo de nuestra sociedad) y, por ende, constituyen una herramienta básica. Pero no por ello deben ser tratadas sólo como una serie de herramientas cuyo fin más importante es proveer procedimientos para llevar a cabo operaciones aritméticas. Hago hincapié en el hecho de llevar a cabo porque en nuestra labor de divulgación no procuramos que se entiendan los procedimientos, sino que tendemos a fomentar la memorización de los algoritmos y la recopilación de datos, justo como ocurre en la enseñanza básica.

Por supuesto que las matemáticas son mucho más que el desarrollo de algoritmos y el trabajo en matemáticas es mucho más que la demostración de nuevas proposiciones a partir de resultados previos por medio de la deducción lógica rigurosa. En palabras de Morris Kline [1980, 132]:

> El pensamiento matemático no es tan sólo un razonamiento deductivo; no consiste simplemente en demostraciones formales. El proceso mental que sugiere qué se debe demostrar y cómo demostrarlo es una parte del pensamiento lógico, tanto como la demostración que eventualmente resulta de él. La extracción del concepto apropiado de una situación concreta, la generalización a partir de casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista son modos matemáticos de pensamiento. [...] El objeto del rigor matemático es confirmar y legitimar las conquistas de la intuición, y nunca ha tenido otra finalidad.

En este momento cabe aclarar que la intención de este trabajo no es unificar criterios en cuanto a cómo perciben su práctica los matemáticos, sino concluir, simplemente, que las matemáticas son una actividad que considera distintos componentes y que no se reduce a la caja de herramientas ni a la derivación lógico-formal de proposiciones a partir de premisas.

Las matemáticas han cumplido, a lo largo de la historia del pensamiento, una función muy peculiar. Desde los tiempos de Pitágoras, las matemáticas han constituido el armazón, en su forma más pura, del pensamiento fundamental de nuestra cultura: la inteligibilidad del universo mediante la razón. Para la cultura occidental el universo no es caos, es cosmos, orden. La naturaleza es regular, es decir, sigue unas reglas, unas pautas. Nuestro pensamiento puede captar estas normas, hacer esta reflexión; y las matemáticas son una herramienta a su disposición.

Desde esta perspectiva es perfectamente natural preguntarse si las matemáticas merecen este lugar privilegiado que se les ha atribuido de una forma tan constante. No han faltado filósofos que han considerado injustificada y aun nociva esta influencia invasora del pensamiento lógico. Heidegger [1993, 137], con un juego de palabras, ha tratado de expresar la cuestión: Las matemáticas no son más exactas, sino sólo más estrechas [Mathematik ist nicht *strenger,* sondern nur *enger*], y no sin cierta razón. El conocimiento humano contiene muchas más riquezas que las que el pensamiento lógico puede abarcar. Existen realidades profundas que el hombre, más o menos conscientemente, ansía aprehender cognoscitivamente, y que escapan a las matemáticas. Éstas llegan fundamentalmente a dominar la componente racional del pensamiento sin tocar siquiera otras facetas del conocimiento intelectual. Entre el conocimiento matemático y el conocimiento personal, que involucra a todo el hombre, existe ciertamente un abismo. Por ejemplo, Blaise Pascal ha expresado así en sus *Pensamientos* [1995, 32] la diferencia entre el espíritu matemático [*esprit de géométrie*] y el espíritu de discreción [*esprit de finesse*]:

> En el primero los principios son obvios pero alejados del uso común, de modo que cuesta girar la cabeza hacia este lado por falta de hábito. Pero aunque se le gire sólo un poco, se ven estos principios plenamente y sería necesario tener el espíritu totalmente falseado para razonar mal sobre principios tan toscos que es casi imposible que se escapen. Pero en el espíritu de discreción los principios son de uso común y están ante los ojos de todo el mundo. No hay que girar la cabeza ni hacerse violencia. No hay más que tener buena vista y fijarse muy bien pues los principios son tan finos y numerosos que es casi imposible que no se nos escapen. Ahora bien, la omisión de un principio conduce a error. Por tanto es preciso tener la vista bien limpia para verlos todos y además un espíritu bien sano para no razonar falsamente sobre estos principios conocidos.

Y con todo, el pensar matemático merece un lugar privilegiado en el conocimiento por razón de su adecuación a su propio objeto, su evidencia y su certeza. No se trata de pensar en que haya de venir el día en que dos filósofos de opiniones encontradas, en lugar de discutir sobre ellas, se sienten y digan "calculemos"; pero sí se puede afirmar que las matemáticas son un intento de creación de un universo para la satisfacción de la necesidad de conocimiento del hombre, hecho por éste a la medida de su propia mente. Intento no del todo logrado, pues, como veremos más adelante, este universo no carece de grietas inquietantes.

Una componente fundamental de las matemáticas que no suele considerarse comúnmente, es su belleza. Es muy difícil tratar de decir qué es la belleza matemática y tampoco se puede pretender describirla con un simple trazo. Me limitaré a señalar unos cuantos elementos de la belleza matemática que, a mi parecer, constituyen componentes fundamentales de esta rama del conocimiento. Un tipo de belleza matemática consiste en el orden intelectual que ante hechos aparentemente inconexos comienza a aparecer. Como un paisaje desde lo alto de la montaña que se despoja de una bruma que lo cubría. Todo el objeto contemplado aparece en conexión y la unidad lo invade. Entidades aparentemente diversas que surgen en contextos diferentes resultan ser el mismo o estar ligados por una estructura armoniosa. La contemplación fácil de esta unidad inesperada es sin duda una de las fuentes de gozo estético de muchos hechos matemáticos.

Otro tipo de gozo matemático consiste en llevar a cabo una ampliación de perspectivas con el propósito de que las visiones parciales conformen la contemplación total de un objeto mucho más esplendoroso, en el que nuestro cuadro inicial queda englobado ocupando su lugar preciso. Por ejemplo, en la exposición actual de la teoría de los números naturales, enteros, racionales, reales, complejos, se resume toda una aventura del espíritu humano que, a través de más de sesenta siglos de historia, ha tenido sus callejones aparentemente sin salida, sus idas y venidas, sus paradojas.

Un último elemento estético que hay que mencionar es que la creación matemática, muchas veces, consiste en la posibilidad de una contemplación descansada e inmediata de una verdad profunda, inesperada y llena de implicaciones. En las matemáticas elementales encontramos con frecuencia argumentos que no precisan una demostración o un conjunto de axiomas para ganar credibilidad,[4] pero también encontramos ramas enteras desarrolladas a partir de preguntas que en un principio parecieron absurdas y que dieron pie a teorías tan consistentes y con tantas repercusiones como la que les dio origen.[5] Sin embargo, éste es un elemento estético que no es completamente explícito o identificable por lo común que es que las implicaciones matemáticas se queden en ese mundo abstracto ajeno al grueso de la gente; las "verdades matemáticas" pertenecen a un mundo coherente y con reglas propias difíciles de entender y generalmente no describen propiedades u objetos que la gente pueda voltear a ver.

Pero la gracia no acaba aquí. La belleza matemática parece incluir cualidades tales como seriedad, generalidad, profundidad, inevitabilidad, economía de pensamiento, transparencia, sobriedad, adecuación... La seriedad se manifiesta en las ideas que se conectan entre sí, que normalmente dan lugar, en su desarrollo, a una buena porción del campo matemático en que tal hecho se encuentra, ya sea porque el método que lo crea es la clave que impregna dicho campo, ya sea porque el hecho en cuestión es la base de todo ese cuerpo matemático. Los matemáticos suelen hablar de elegancia para indicar el tipo de sobriedad, economía de medios y transparencia que a veces se encuentra en la demostración de teoremas o hechos matemáticos. Una de las fórmulas más bellas de las matemáticas es la descrita por Euler en el siglo XVIII y que relaciona a cinco de los números más significativos: $e^{\pi i}+1=0$. Éste es uno de los muchos ejemplos en donde hay belleza matemática, en donde la contemplación nunca deja de producir ese sentimiento de satisfacción, adecuación y terminación que una obra arquitectónica perfecta produce en quien la observa; y es esta transmisión de sensaciones lo que debemos incorporar en nuestra labor de divulgación, pero desgraciadamente no lo hacemos.

Ni la enseñanza ni la divulgación de las matemáticas se han preocupado por transmitir al público no especializado esta emoción que los matemáticos sienten cuando hacen su trabajo. Para todos aquellos alejados de las matemáticas, la fórmula de Euler no es más que una compilación de números, pero para los matemáticos se trata de una afirmación curiosa,

---

[4] Tal es el caso de las nociones comunes enunciadas por Euclides hace más de dos mil años.

[5] Como ejemplo podemos considerar el quinto postulado de Euclides: 'si una recta incidente sobre dos rectas hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas indefinidamente coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos'. Esta afirmación aparentemente no necesita demostración alguna pues es obvio que las líneas deben intersectarse, pero preguntas como ¿y si no se intersectan? ¿y si se intersectan del otro lado? dieron a los matemáticos muchos siglos de trabajo y a las matemáticas el desarrollo de las geometrías no euclidianas, tan consistentes como la geometría euclidiana misma.

inesperada, que incluso escapa a la credulidad: Un número trascendente elevado al producto de otro número trascendente por un número imaginario da como resultado un número entero. Esta fórmula bien podría despertar la misma emoción que nos ocasiona un paseo por el Coliseo, contemplar a la Mona Lisa o tocar un stradivarius. ¿Por qué no hacemos lo mismo con las matemáticas? ¿Por qué no hemos intentado transmitir a la gente ese escalofrío que se siente cuando se descubre un resultado propio, cuando se logra construir una demostración o, simplemente, cuando se encuentra una fórmula como la de Euler? ¿Por qué no hemos logrado que la gente se emocione y piense que trabajar en matemáticas también puede ser un objetivo?

Es probable que la principal razón de esta falla es que tampoco hemos difundido que las matemáticas sí ocupan un lugar central en nuestra civilización, y no por ser una caja de herramientas, sino por motivos muy diversos. Por un lado, son una estructura sistemática capaz de ayudarnos en la comprensión del universo en muchos aspectos, son en realidad el paradigma de muchas ciencias y un fuerte auxiliar en la mayor parte de ellas. Gracias a sus modos de proceder mediante el razonamiento simbólico y sobrio, se puede modelar con ellas diversas formas del mundo físico e intelectual. Además, son un modelo de pensamiento, por sus cualidades de objetividad y consistencia, que le dan un lugar especial entre las diversas formas que tiene el pensamiento humano de abordar los problemas con los que se enfrenta. Este aspecto es la raíz de sus conexiones tan profundas con la filosofía de todos los tiempos.

1.2.2 Las matemáticas como actividad humana

Las matemáticas son una actividad profundamente humana y, como tal, han participado intensamente de las vicisitudes históricas del ser humano. Están sujetas, al igual que todas las artes, a las modas, corrientes y catástrofes que nos afectan. No puede considerarse divulgación de las matemáticas a una lista inconexa de datos curiosos o anecdóticos. La divulgación de las matemáticas, al igual que el quehacer matemático, debe tener una coherencia argumentativa que las explique y las contextualice porque las colecciones de datos no describen ni a las matemáticas ni a su proceso creativo. Por ejemplo, a partir del mero dominio de las operaciones con los números romanos no hacemos alusión a la época en que el pueblo griego fue opacado por el romano que, siendo menos dotado para la especulación que el primero, fue causa de un estancamiento del desarrollo matemático de occidente por muchos siglos. Por estar preocupados porque nuestro público aprenda el proceso de mecanización alrededor de este sistema de numeración, no decimos, en particular, que la adopción de un simbolismo inapropiado retrasó muchos años el desarrollo de las matemáticas en varios países. Aunque éste es apenas un ejemplo, dejamos de propiciar una reflexión en torno a hechos más generales porque no podemos ignorar que existen modas y corrientes que producen fluctuaciones más o menos intensas en la actividad matemática (así como en toda la actividad científica) a todos los niveles, al influir tanto en la formación de quienes comienzan como en la actividad de los matemáticos de vanguardia.

Además, en su mismo progreso intrínseco, las matemáticas tienen todos los trazos de una apasionante aventura del espíritu. En ellas abundan los momentos de incertidumbre y confusión, tales como el descubrimiento por los pitagóricos de la existencia de los números irracionales hace casi tres mil años o el descubrimiento de las paradojas lógicas hace apenas cien. Ante estas situaciones y ante los teoremas enunciados por Gödel y los lógicos modernos, que ponen en claro, entre otras cosas, la incapacidad de las matemáticas para colocar sus propias bases fuera de toda duda (imposibilidad de demostrar la consistencia, es decir, la ausencia de contradicción, del edificio matemático), se constituye una expresión típica del sentir de los matemáticos contemporáneos; en palabras de Nicolas Bourbaki en *L'architecture des mathématiques:*

> Creemos que las matemáticas están destinadas a sobrevivir y que jamás tendrá lugar el derrumbamiento de este edificio majestuoso por el hecho de una contradicción puesta de manifiesto repentinamente, pero no pretendemos que esta opinión se base sobre otra cosa que la experiencia. Es poco, dirán algunos. Pero desde hace veinticinco siglos los matemáticos tienen el hábito de corregir sus errores y de ver así su ciencia enriquecida, no empobrecida. Esto les da el derecho de arrostrar el porvenir con serenidad.

1.2.3 Características a divulgar

Coincido con Miguel de Guzmán en la necesidad de sugerir que la divulgación de las matemáticas debe dejar de ser la divulgación de resultados y algoritmos, para empezar a tener objetivos más dignos. Debemos procurar compartir la belleza, el poder de las matemáticas con un público amplio, tratando en muchos casos de penetrar a través de las barreras tradicionales que dividen a la población en legos y expertos, mucho más sólidas alrededor de las matemáticas que alrededor de cualquier otra ciencia. Entre muchas otras cosas, esto nos servirá para tratar de cambiar las actitudes adversas a las matemáticas que muchos cultivan, con la convicción profunda de que tales actitudes son altamente perjudiciales tanto para un sano desarrollo de la cultura como para el desarrollo de las matemáticas. También nos ayudará a animar a más personas a ser matemáticamente más activas, con la persuasión firme de que esto les puede conducir hacia una vida intelectual más plena y a estimular un desarrollo de la actividad matemática en libertad, no por compulsión, tratando de deshacernos de los muchos prejuicios infundados hondamente arraigados entre tantos niños y adultos.

Aunque esto se podría afirmar también de cualquier otra ciencia, en las matemáticas aparecen aspectos generales del conocimiento desligados de una aplicación inmediata, son una exploración de la complejidad de ciertas estructuras de la realidad y, por lo tanto, el quehacer matemático se distingue por tener una forma muy peculiar para acercarse a sus propios objetos: A través de la simbolización adecuada y su manipulación rigurosa.

Si examinamos a lo largo de la historia de las matemáticas las sucesivas ampliaciones de su campo de acción, podemos observar con claridad que esta descripción que hemos abstraído de su quehacer a través de la observación de los orígenes de la aritmética y la geometría es perfectamente válida también para ellas. Como queda corroborado por las expansiones sucesivas de las matemáticas a lo largo de la historia, el quehacer matemático consiste en el enfrentamiento de la mente humana con ciertas estructuras complejas de la realidad que se prestan a ese tipo peculiar de análisis a través de la simbolización adecuada, que permite, a su vez, la manipulación racional rigurosa de sus objetos.

De acuerdo con Luis Estrada [1981, 64], no debemos olvidar que los científicos desarrollaron las herramientas que les eran necesarias y, por ende, en nuestra labor de divulgación debemos apelar al esfuerzo por entender estas herramientas que son las que nos llevaron a nuestro estado actual de conocimientos. La divulgación no debe tener como objetivo formar expertos y, por lo tanto, no tendría por qué intentar agotar un tema hasta el último detalle. Más bien, su objetivo debería ser atrapar el interés del público y propiciar la reflexión crítica en torno a la investigación científica; debe generar curiosidad, ganas de seguir preguntando, llamar la atención, en particular hacia las matemáticas, y propiciar nuevas formas de elucubración y asombro basadas en el placer de entender esta ciencia. Debemos transmitir a nuestro público que las matemáticas se disfrutan porque se entienden, porque comprender también es un placer.

Es en este sentido que la divulgación de las matemáticas dirigida al desarrollo de técnicas y sustentada en procedimientos, métodos, aptitudes, reglas y algoritmos debe abandonar la imagen de las matemáticas como una manera de hacer, para transformarlas en una legítima manera de pensar, como una aventura del pensamiento. Heidegger [1993, 158] habló del eterno aburrimiento del avance rectilíneo de las matemáticas, observación compartida por muchos que se maravillan de que en esta ciencia haya todavía algo por hacer. Tal ignorancia puede ser disculpada por el hecho de que así como para hablar de otras muchas actividades del espíritu humano sólo se precisa un poco de audacia y otro poco de información, de las matemáticas sólo se puede hablar desde dentro; sólo quien ha asimilado el método matemático y ha tratado de manejarlo está capacitado para entender lo que la creación matemática es. Y no se trata únicamente de los matemáticos, todas aquellas personas que han entrado en contacto con las matemáticas, con los procesos y no sólo con sus resultados, lo pueden hacer.

1.2.3 A manera de conclusión

La tarea de hacer llegar de una forma asequible a un amplio segmento de la sociedad el sentido de la actividad que la comunidad matemática realiza, es algo necesario y que debe hacerse con esmero si es que pretendemos que nuestra cultura se desarrolle adecuadamente. Una divulgación de las matemáticas hecha desde esta perspectiva contribuirá sin duda a romper el lastre de prejuicios que se arrastran de una generación a otra en torno a las matemáticas y que, en muchos casos, es causa de bloqueos con respecto a ellas; a mejorar las condiciones culturales de muchas personas, abriéndoles los ojos a la realidad de la cultura actual y haciéndoles capaces de proveerse de herramientas indispensables para muchas de las actividades de las profesiones del futuro; a que la sociedad sea capaz de valorar de modo adecuado el papel de las matemáticas hoy día, de tal forma que se percate de que incluso muchos aspectos del quehacer matemático básico que podrían parecer ociosos, posiblemente tendrán su fruto práctico en el futuro, como un somero conocimiento de la historia de las ciencias y sus aplicaciones nos muestra.

El espíritu de creatividad, libertad, espontaneidad, crítica y orden que subyace a la actividad matemática es la contribución más importante que las matemáticas pueden ofrecer a nuestra sociedad. Es en este espíritu que estriba su valor formativo más profundo, el que los filósofos como Pitágoras, Platón, Descartes o Leibniz, han sabido ver en ellas, la actividad matemática como una peculiar fusión de reconocimiento y construcción de estructuras; contribución que va mucho más allá de la mera utilidad práctica o el mero dominio o memorización de las destrezas técnicas del oficio. Debemos procurar que en nuestra labor de divulgación de las matemáticas el objetivo deje de ser la información fragmentada para dar cabida a la formación de este espíritu.

Capítulo 2.

El pensamiento lógico y su papel en la divulgación de la ciencia

2.1 Caracterización del pensamiento lógico

2.1.1 Diálogo con Laura

Antes de entrar en materia, empecemos este capítulo con una cita algo extensa, es casi la transcripción completa del capítulo de un libro que ha sido esencial en la elaboración de este trabajo [Hersh 1999, 11-13]. Comenzar con el texto que a continuación leerán, me permitirá después desarrollar las ideas sobre pensamiento lógico de una forma clara y concisa.

Estaba trabajando en la computadora cuando mi pequeña Laura, de doce años, se acercó:

L: ¿Qué estás haciendo?

R: Filosofía de las matemáticas

L: ¿De qué se trata eso?

R: A ver. ¿Cuál es el número más grande que existe?

L: ¡No existe el número más grande!

R: ¿Por qué no?

L: Pues porque no, ¿cómo podría existir?

R: Muy bien. Entonces ¿cuántos números hay?

L: Infinitos, supongo

R: Sí. ¿Dónde están?

L: ¿Dónde?

R: Sí, ¿dónde?

L: No lo sé. En ningún lado. En la cabeza de la gente, supongo.

R: ¿Cuántos números supones que hay en tu cabeza?

L: Creo que unos cuantos millones de billones de trillones.

R: ¿Entonces tal vez todos tenemos unos cuantos millones de billones de trillones, más o menos?

L: Probablemente sí.

R: ¿Cuántas personas crees que vivan en la Tierra?

L: No lo sé. Tal vez miles de millones.

R: Cierto. ¿Dirías que menos de diez mil millones?

L: Sí.

R: Si cada uno de nosotros tiene un millón de billones de trillones de números en la cabeza, podemos contar todos esos números multiplicando diez mil millones por millón de billones de trillones. ¿Cierto?

L: Me suena bien.

R: ¿Crees que ese número sea infinito?

L: Estaría muy cerca.

R: Entonces sería el número más grande, ¿no?

L: Espera un momento. ¡Acabas de preguntarme eso y te dije que no puede existir el número más grande!

R: Entonces, ¿debe existir un número más grande que el número más grande en que cada uno de nosotros pueda pensar?

L: Sí.

R: ¿Dónde está ese número, si no está en la cabeza de ninguno de nosotros?

L: Tal vez esté en el número de granos de arena de todo el Universo.

R: No. Se supone que las cosas más pequeñas del Universo son electrones. Mucho más pequeños que los granos de arena. Los cosmólogos dicen que el número de electrones en el Universo es menor que un 1 seguido de 23 ceros. Ahora, diez mil millones por un millón de billones de trillones es un 1 seguido de 37 ceros. Un número mucho más grande que el número de partículas en el Universo, según los cosmólogos.

L: ¿Los cosmólogos son los que averiguan cosas sobre el Universo?

R: Sí.

L: ¡Órale!

R: Entonces hay más números que partículas en todo el cosmos.

L: ¡Qué extraño!

R: Olvidemos el dónde. Hablemos sobre el cuándo. ¿Desde hace cuánto crees que existen los números?

L: Un montón de tiempo.

R: ¿Te han hablado en la escuela del Big Bang?

L: Sí. Ocurrió hace como quince mil millones de años. Cuando empezó el Cosmos.

R: ¿Crees que ya había números cuando ocurrió el Big Bang?

L: Sí, supongo. Por lo menos para contar lo que estaba pasando, ¿no crees?

R: ¿Y antes de eso? ¿Había números antes del Big Bang? ¿Aunque sea chiquitos como 1, 2 o 3?

L: ¿Números antes de que hubiera Universo?

R: ¿Tú qué crees?

L: Creo que no podría haber nada antes de que hubiera algo, ¿sabes a lo que me refiero? Pero parece que siempre debió haber números, aunque no hubiera Universo.

R: Piensa en el número que acabamos de construir, el 1 con 37 ceros, y ponle un nombre.

L: ¿Qué te parece un "gazillón"?

R: Bien. ¿Te puedes imaginar un gazillón de lo que sea?

L: Claro que no.

R: ¿Crees que tú o cualquier persona que conozcas pueda contar tanto?

L: No, pero una computadora seguro podría.

R: No. La Tierra y el Sol se desvanecerán antes de que la computadora más rápida pueda contar tan alto.

L: ¡Órale!

R: Ahora, ¿cuánto es un gazillón y un gazillón?

L: Dos gazillones. Esa estuvo fácil.

R: ¿Cómo lo sabes?

L: Porque una cosa y otra cosa son dos cosas, sin importar qué sea la cosa.

R: ¿Qué tal un pequeño ratón y un feroz gato? O, ¿un conejo y una coneja?

L: ¡Eso no es matemáticas, es biología!

R: Nunca has visto un gazillón ni nada que se le parezca. ¿Cómo sabes que los gazillones no son como los conejos?

L: Los números no pueden ser como los conejos.

R: Si a un gazillón le sumo uno, ¿cuánto me da?

L: Un gazillón uno. Igual que mil uno o millón uno.

R: ¿Puede haber un número entre un gazillón y un gazillón uno?

L: No, porque un gazillón uno es el número que está después de un gazillón.

R: ¿Cómo sabes que cuando llegas tan arriba los números no se apelmazan y se meten donde no les toca?

L: No pueden, tienen que ir uno por uno. Uno a la vez.

R: Pero, ¿cómo sabes qué es lo que hacen allá donde nunca hemos estado?

L: Vamos. Debes estar bromeando.

R: Tal vez. ¿De qué color es este lápiz?

L: Azul.

R: ¿Estás segura?

L: Sí, estoy segura.

R: ¿Y si esta luz hiciera que los colores se vean diferentes? ¿A lo mejor con otra luz lo verías de diferente color?

L: No lo creo.

R: Bueno, ¿estás absolutamente segura de que eso es imposible?

L: Bueno, no absolutamente. Supongo.

R: ¿Has oído hablar de los daltónicos?

L: Sí.

R: ¿Crees que sea posible que alguna persona pueda ser daltónica sin darse cuenta?

L: No lo sé. Tal vez sea posible.

R: Ves un lápiz azul, pero no estás cien por ciento segura de que es azul. ¿Cierto?

L: Sí.

R: Ahora, ¿qué pasa con que un gazillón y un gazillón es igual a dos gazillones? ¿Estás completamente segura de eso?

L: Sí. De eso sí.

R: ¿No es posible que te hayas equivocado?

L: No.

R: Nunca has visto un gazillón. Y sabes algo sobre los gazillones con más certeza de lo que sabes algo de lápices que puedes ver y tocar. ¿Cómo sabes tanto de gazillones?

L: ¿Es eso filosofía de las matemáticas?

R: Es, por lo menos, el principio.

2.1.2 Discusión del diálogo

Empecemos por Laura. Las diversas teorías psicológicas y pedagógicas, vigentes hoy en día, sobre la adquisición del conocimiento,[1] sugieren que la mayor parte de los niños, hasta antes de entrar a la etapa de pensamiento formal, es decir a la posibilidad de formalizar las ideas, poseen una energía imaginativa muy fecunda: Bastan una mesa y una sábana para tener una fortaleza medieval, un trazo sinuoso sobre un papel es sin duda una carretera a transitar y la diferencia geométrica entre un triángulo y un círculo pasa inadvertida frente a su similitud topológica. Las investigaciones sugieren que comenzamos nuestras vidas cargados de un inmenso potencial creativo que, poco a poco, se ve mermado ante el entrenamiento al que se le somete en la enseñanza básica. Ésta hace demasiado énfasis en enseñar a los niños a resolver problemas correctamente y no creativamente; la exactitud de la respuesta es mucho más importante que la forma misma en la que fue concebida, estructurada y argumentada. Ante esta situación, el niño va "aprende" a contestar lo que se espera de él, a argumentar con argumentos que las más de las veces pertenecen al libro de texto, a pensar tal y cómo se espera de él que piense. La estructuración de su forma de razonar está previamente establecida y generalmente no tiene que ver con él, con sus vivencias, con su contexto social y cultural; es una estructuración de pensamiento convenientemente importada de modelos educativos que carecen de referentes para él. Este sistema educativo (llamarlo formativo sería francamente una burla) domina nuestras vidas durante los primeros veinte años: Exámenes, calificaciones, grados, competencia y un largo etcétera.

La enseñanza formal, casi en todos los países, demanda y premia los procedimientos sistemáticos aceptados como correctos logrando con ello que éstos lleguen a interiorizarse al punto tal de convertirse en los únicos y más aún en la forma de pensamiento validada por el sistema de enseñanza formal.

Sigamos con Reuben, papá de Laura. Reuben confronta a su hija con lo establecido y la anima a arriesgar su forma de pensamiento. En la búsqueda de una respuesta satisfactoria para ella, Laura tiene que echar mano de la imaginación y de la intuición. Las preguntas que intenta contestar a su padre, quizás dejarán en ella una huella mucho más profunda que los cientos de problemas matemáticos escolares a los que se ha enfrentado en todos sus

[1] Particularmente, las posturas sostenidas por Miguel de Guzmán e Inés María Gómez Chacón.

años de estudio. Reuben la guía y la ayuda, pero no la somete a un tipo de pensamiento que él considera válido, le da libertad para elegir.

¿Qué estrategias entonces debemos seguir para fomentar la creación y adquisición de un modo de pensamiento reflexivo y crítico, es decir, un pensamiento propio que permita discernir qué información es relevante, qué argumentos son correctos, qué es mera charlatanería o qué decisión tomar?

Podría pensarse quizás que voy a apelar aquí a la divulgación de la ciencia tal y como la conocemos. Que voy a enarbolar su nombre como solución a todos los problemas que presenta la enseñanza formal, pero no, tristemente no.

Como lo he dicho en la sección previa, uno de los problemas más comunes en la divulgación de la ciencia tal y como se hace hoy día en la mayoría de los canales que existen para ello (y aquí debo una disculpa a quien la merezca porque siempre las generalizaciones arrasan con todos por igual), es que de algún modo, el campo de la divulgación ha heredado las estructuras propuestas por la enseñanza formal, un sinfín de esquemas de generación y transmisión del conocimiento han sido prácticamente calcados de un espacio al otro. Si bien es cierto que todos reconocemos que la divulgación tiene variables que no tiene la enseñanza formal, léase libertad, su posibilidad de incursionar en el terreno de lo lúdico, la ausencia de mecanismos de competencia, etcétera, también es cierto que la concepción de la ciencia y, por ende, de lo que es el pensamiento científico son casi idénticos en ambas propuestas. Aunque las estrategias son distintas en la enseñanza y en la divulgación (inclusive dentro de la divulgación misma hay una inmensa cantidad de estrategias disímbolas entre sí), el mensaje que subyace, aquello que se transmite casi de forma subliminal, es el mismo: La ciencia como verdad inapelable y única.

Podemos decir que el esquema de la divulgación hecha desde esta perspectiva se ve más o menos así:

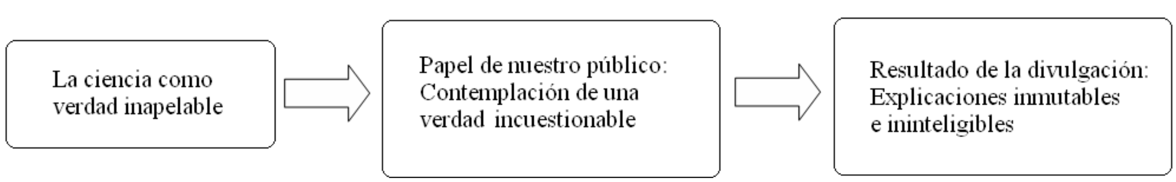


Figura 1. Esquema de la divulgación de la ciencia hecha como una comunicación unidireccional.

¿Dónde queda, pues, la formación de un pensamiento crítico y reflexivo? ¿Dónde está la posibilidad de lo individual frente a lo colectivo y de lo subjetivo frente a la aplastante objetividad con la que se presenta la ciencia?

Esta visión positivista de la ciencia inmutable e inalcanzable nos lleva a una discusión ineludible en este trabajo: La discusión sobre el tipo de pensamiento que debe proponerse a los niños y a los jóvenes desde el ámbito de la divulgación de la ciencia.

2.1.3 Hacia un pensamiento divergente

Hay un modo de pensamiento (llamado generalmente en la literatura 'pensamiento convergente')[2] que tiene como objetivo la búsqueda de soluciones correctas y únicas a los problemas. Cuando se nos presenta una determinada situación utilizamos la lógica para encontrar una solución ortodoxa y determinar si es correcta o incorrecta sin lugar a dudas. Generalmente, éste es el tipo de pensamiento que se promueve desde la divulgación científica y es el que se asocia habitualmente con el pensamiento científico.

Es importante promover una forma de razonamiento que ayude a la gente a liberarse de las ataduras de los patrones convencionales de pensamiento. Esto es, fomentar la creatividad, la curiosidad y la imaginación. Estas habilidades (conocidas en la literatura como 'pensamiento divergente') generan en nuestro público la posibilidad de encontrar diversas soluciones ante un problema dado, de fomentar un modo de pensamiento que les permita indagar y cuestionar la realidad desde el ámbito científico.

Es por eso que sostengo que la divulgación de la ciencia tiene una veta que, desde mi punto de vista, no ha sido suficientemente explorada: La divulgación de las matemáticas. La divulgación de las matemáticas debería permitir la gestación de un modo de pensamiento que conciba a las matemáticas como una forma de pensar en contraposición a la concepción que se genera desde la enseñanza formal: Las matemáticas como una forma de hacer; la divulgación permite así la formación de un pensamiento lógico.

Actualmente, existen diversas teorías y propuestas que intentan explicar el proceso de pensamiento lógico; sin embargo, aquí me he centrado exclusivamente en las propuestas que en torno a este tema hacen de Guzmán [2001], Bishop [1999] y Hersh [1999]. El pensamiento lógico, se presenta en estas propuestas como un pilar necesario (aunque no

[2] Gómez Chacón establece la no cabida de los sentimientos y la imposibilidad de externar los puntos de vista propios como una de las principales limitantes de este tipo de pensamiento.

suficiente) para la adquisición de una actitud crítica y por ende de una cultura científica, de manera que la gente sepa qué hacer con lo que sabe y cómo discernir lo importante de lo accesorio.

El pensamiento lógico tiene dos facetas fundamentales que lo caracterizan. Por un lado, es indispensable un entrenamiento disciplinado y sistemático para obtenerlo y por otro es imposible ejercerlo si no se ha desarrollado la imaginación y la creatividad en torno a la manera de preguntarse, de contestarse, de asombrarse y de maravillarse ante lo que nos rodea. Éstas son, pues, las habilidades que han de desarrollarse (en una primera etapa):

1. Asombro: Mantener el espíritu de descubrimiento y curiosidad hacia el mundo y la capacidad de cuestionar todo aquello que los demás dan por establecido.
2. Motivación: En cuanto aparezca la más mínima chispa de interés alrededor de algo hay que seguirla.
3. Valor: Atreverse a pensar fuera de principios establecidos y perspectivas habituales como lo es un 'siempre se ha hecho así'.
4. Flexibilidad: Tomarse el tiempo necesario para soñar despierto, para imaginar, para permitir que las ideas se aventuren en el terreno de lo que se considera absurdo.

Entre otras cosas, estas habilidades permitirán a nuestro público tener más confianza en sí mismo. Lo dotarán de una cierta fortaleza que sólo puede adquirir una vez que ha explorado los retos a su ritmo y a su manera. Como es muy poco probable que estas actividades se lleven a cabo en el salón de clase, por cuestiones de tiempos y programas, la divulgación de la ciencia y los espacios en los que se realiza son los más indicados para empezar a procurar su desarrollo.

Pero todo esto debe hacerse de manera cuidadosa; no cualquier idea no convencional, por muy creativa e imaginativa que sea o muy bien argumentada que esté, es necesariamente buena. La creatividad y la imaginación no aparecen de la nada, por generación espontánea; es necesario aprender a cultivarlas y a fundamentarlas sobre una base sólida de conocimiento científico, a través de cierto tipo de ejercicios y al desarrollar al máximo ciertas actitudes hacia el conocimiento. Tampoco debemos dejar de considerar que entre más joven sea nuestro público meta, mejores son los resultados que podemos obtener. En nuestra labor de divulgadores debemos estar convencidos que la divulgación de la ciencia no tiene límite inferior de edad.

La segunda etapa para el desarrollo del pensamiento lógico requiere de trabajo más dirigido y acotado. Aunque nuestro interlocutor[3] ya logre trazar su propio camino para buscar soluciones a los problemas, aún no está del todo listo para discriminar cuáles de esos caminos o esas soluciones pueden servirle y por qué. Por eso es muy importante dejar que él mismo haga un recuento verbal, que explique en voz alta aquello en lo que piensa. Esta verbalización es importante, por un lado, para entender cómo ha construido una estrategia y, por otro, para que él mismo se dé cuenta de sus posibles errores y la manera de enmendarlos. No necesariamente pensamos en términos del lenguaje; estos procesos le permitirán, además, entrar en el terreno de la autocrítica, indispensable para el desarrollo del pensamiento lógico y científico en general. Entonces pues, la segunda etapa consiste en la persecución y desarrollo de estas otras habilidades:

5. Fluir de las ideas: Proponer la reflexión y la elaboración de distintas ideas, hipótesis e inclusive teorías ante un hecho que se presente.
6. Variedad y flexibilidad: Vislumbrar la diversidad de soluciones que una persona puede encontrar cuando se le pide explorar las posibles interpretaciones de un concepto científico o un hecho.
7. Originalidad: Encontrar estrategias y soluciones que sean adecuadas y diferentes.
8. Elaboración: Formular una idea, desarrollarla y luego ser capaz de contextualizarla para dar solución a un problema concreto.
9. Sensibilización: Reconocer el reto central de una tarea, así como las dificultades asociadas a ella.
10. Redefinición: Desarrollar la capacidad de ver un cierto problema desde un punto de vista completamente diferente al habitual.

Es fundamental tener en cuenta que la preparación es difícil y lleva tiempo. Una vez que el reto es identificado, quien lo va a resolver necesita examinarlo desde diversos puntos de vista e incluir nuevas perspectivas. Este proceso parecerá algo así como un viaje intelectual

[3] Una vez que nuestro público comienza a formar parte del proceso de comunicación desde esta perspectiva, deja de ser un mero receptor de información y se convierte en un interlocutor real del divulgador que hace la comunicación y de la ciencia que le es comunicada.

que puede tomar rumbos muy diversos dependiendo de la dirección que la persona decida tomar. Se obtendrán, de esta manera, soluciones frescas y más espontáneas que aquellas que se construyen mediante un procedimiento que, aunque se haya aprendido bien, no ha sido sometido a reflexión y que son el resultado de reacomodar varias veces las ideas, los conceptos y las expectativas subyacentes al problema. Para que esto ocurra, es necesario que la persona que va a resolver el problema, entienda y no sólo memorice las ideas y los conceptos involucrados.

El pensamiento lógico así planteado es, entonces, una especie de intuición, una confianza que nos hace sentir que tenemos la razón sin necesidad de requerir una prueba formal y, por ende, nos sugiere un camino mucho mejor trazado en el que lo importante no es llegar a la respuesta correcta, sino reconocer patrones, establecer relaciones e identificar causalidades. De manera que nuestro público pueda reconocer y asimilar ideas justo como los matemáticos manejan entidades abstractas.

2.1.4 Problemas en acción

A lo largo de este trabajo se ha propuesto el uso de problemas para desarrollar el pensamiento lógico. Como en su momento se mencionó, no se trata de los típicos problemas que normalmente se encuentran en los libros de texto de matemáticas, sino a aquellos que apelan al uso de la lógica. Sin el afán de desacreditar los problemas de los libros de texto, es importante señalar que una de sus principales deficiencias es que el estudiante generalmente ya sabe qué tiene que hacer para encontrar la solución. Aunque esto podría parecer una gran ventaja, la realidad es que la mayoría de las veces los alumnos no logran entender el significado o el propósito del enunciado y sólo se limitan a aplicar un cierto algoritmo para resolverlo. Es decir, al considerar que estos problemas son generalmente resueltos como parte de las tareas que los alumnos se llevan a casa, podemos decir que para responderlos sólo les basta acordarse del algoritmo que vieron en clase, recordar cómo les enseñó el profesor que éste debe aplicarse y tener cuidado de hacerlo correctamente. Después de calcar una y otra vez el procedimiento, la tarea está terminada; pero es muy probable que no hayan logrado entender lo que hicieron por la tarde.

Como se mencionó anteriormente, la propuesta de este trabajo está basada en problemas que apelan más al uso de la lógica que a la aplicación de algoritmos. Por ejemplo, al proponer a los alumnos actividades como colorear mapas, completar cuadrados mágicos, identificar y reconocer patrones o salir de laberintos es que de verdad los enfrentamos a lo que significa resolver un problema, porque desconocen el algoritmo o el método que hay que seguir, y esto ocurre debido, las más de la veces, a que tal metodología no existe. La resolución del problema se convierte entonces en un proceso de ensayo y error en el que los estudiantes buscan distintas estrategias, las ponen a prueba, las concatenan de manera lógica y deducen poco a poco una posible solución. Esto es a lo que se le conoce como pensar matemáticamente.[4]

Por ejemplo, podemos pedir a los miembros de nuestro público que coloreen el mapa de la Figura 2 usando a lo más cuatro colores.[5]

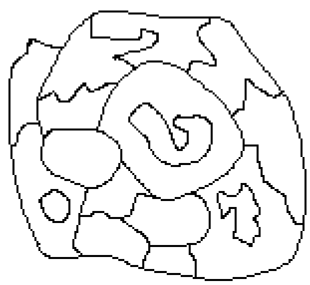


Figura 2. Mapa para colorear

Ante este reto así planteado, saben a dónde hay que llegar (un mapa coloreado) y conocen la regla (usar no más de cuatro colores). Sin embargo, hay una segunda regla que no está dicha, pero que es fundamental: Los países vecinos no pueden quedar iluminados del mismo color. Algunos darán la restricción por sentada, pero aquellos que han tenido un cierto entrenamiento de pensamiento lógico serán capaces de señalar que hace falta, porque de lo contrario, el mapa podría ser iluminado por completo con un solo color.

Ahora, el proceso no acaba aquí porque nuestro interlocutor se enfrenta a la posibilidad de ser él mismo quien compruebe si su solución realmente resuelve el problema. En nuestro caso, por ejemplo, sólo bastará con corroborar no haber usado más de cuatro colores y verificar que no haya dos países que pudieran confundirse. Así, no necesitará de una

[4] Ésta es la postura de De Guzmán y muchos otros académicos dedicados a la enseñanza y divulgación de las matemáticas.
[5] Este reto es un caso particular del teorema de los cuatro colores que afirma que cualquier mapa puede ser iluminado usando a lo más cuatro colores, procurando que dos países vecinos (aquellos que comparten una frontera y no sólo una línea) no queden coloreados del mismo color.

autoridad, papel comúnmente jugado por el profesor, para reconocer si su propuesta satisface las condiciones planteadas en el problema. Él está perfectamente capacitado para saber si lo hizo correctamente o no. Además, se le puede proponer que lo coloree por segunda vez, y como es muy probable que la coloración sea distinta, podrá comprobar que hay más de una manera de iluminarlo correctamente. Tendrá la oportunidad de experimentar, sin ayuda de nadie, el hecho de que en matemáticas hay muchas estrategias, muchos caminos para resolver un problema.

La divulgación de las matemáticas puede entonces convertirse en una constante propuesta de pretextos para usar la imaginación y la creatividad o, mejor aún, en un gran pretexto para pensar.

En el anexo 1 de este trabajo se encuentra una colección de problemas que conforma una muestra de las actividades que se trabajan en la Sala de Matemáticas y en diversas exposiciones itinerantes de *Universum*. Por lo general, se ha planteado que sean trabajadas en equipos de dos o tres personas, de manera que los visitantes tengan la oportunidad de compartir distintos puntos de vista y se enfrenten al reto de verbalizar y alcanzar consensos. Una vez que han logrado llegar a alguna solución, les hemos propuesto presentar la estrategia que los llevó a ella y les sugerimos reflexionar alrededor de la posibilidad de que ésta pueda no ser la única o de que podría haber más de un camino para resolver el reto. Es entonces que tienen la oportunidad de comparar puntos de vista diferentes, al mismo tiempo que se enfrentan a la posibilidad de defender los propios.

Si bien es cierto que estos problemas han sido bien recibidos y generan discusiones interesantes, me parece que aún hay bastante trabajo por hacer. En particular, me parece pertinente llevar a cabo una evaluación que permita medir el impacto de estos problemas a largo plazo, pero también creo que esta evaluación es una veta importantísima que merece un trabajo exclusivo para sí.

2.2 El papel del pensamiento lógico en la divulgación de la ciencia

La tendencia actual en la divulgación de la ciencia es explorar la ciencia a través de artefactos y experimentos, pero esto no necesariamente tendría que ser así. Como he mencionado anteriormente, se puede explorar la ciencia, y las matemáticas, con el pensamiento solamente. No podemos olvidar que la mayoría de los conceptos científicos pertenecen al reino de las ideas y los objetos mentales [Hersh 1999, 12] y que la intuición es la facultad a través de la que consideramos o examinamos estos objetos mentales internos. Tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos. No obtenemos estas representaciones al memorizar fórmulas, o sólo a través de la manipulación de objetos, también lo hacemos al resolver problemas y descubrir cosas por nosotros mismos. Constantemente comparamos nuestras representaciones con las de otras personas para asegurarnos de que son congruentes.

Al considerar que la intuición no es percepción directa de algo externo, sino el efecto en la mente de manipular objetos concretos e imágenes mentales y de haber establecido relaciones entre ellas, podemos decir entonces que el pensamiento lógico funciona como una especie de intuición que brinda a los conceptos científicos un significado fuera de las versiones abstractas. Este significado tiene que ver con posibilidad o convencimiento aunque no haya una prueba formal de por medio, de que lo que se espera es verdad, es intuitivamente posible, algo tan razonable como lo es el sentido común.

Este esquema de pensamiento está muy cerca de la heurística pues se deja un poco de lado la formalización y el alto grado de rigor de las ciencias para darle más importancia al descubrimiento, la búsqueda de patrones y, en general, el estudio de cómo las personas llegan a la solución de diferentes problemas. Este último aspecto es importante para la divulgación de la ciencia, ya que uno de sus objetivos debería ser el desarrollo de procesos mentales más activos y la observación crítica, incluso cuando no se tiene toda la información necesaria al respecto.

También podemos decir que el pensamiento lógico está cerca de la holística en tanto es una manera integral de ver las cosas, ya que permite entender diferentes aspectos de la ciencia que la caracterizan desde una perspectiva crítica. El pensamiento lógico desarrolla en los individuos una actitud integradora que orienta hacia una comprensión contextual de la ciencia, sus procesos, sus protagonistas y sus conceptos. De esta manera, el pensamiento lógico permite ver a la ciencia en su totalidad y complejidad, se pueden apreciar interacciones, particularidades y aspectos que no se podrían ver si se estudia la ciencia como un cúmulo de disciplinas aisladas.

Este pensamiento es un primer paso para explorar los conceptos científicos. Pensamos intuitivamente, en el sentido del pensamiento lógico, cuando tenemos la corazonada de algo porque embona muy bien en el esquema de lo que ya sabemos de antemano. El rigor requiere de una larga cadena de razonamiento, desde lo que se sabe hasta lo que se quiere demostrar. Si esta cadena es muy extensa, la prueba rigurosa puede ser dudosa o engañosa, incluso puede llegar a ser menos convincente que un argumento intuitivo desarrollado a partir del pensamiento lógico y basado en la coherencia de la ciencia. Por eso, el pensamiento lógico debe quedarse en el paso previo, debe verse como un estimulante para aplicar los principios básicos de la inducción y la deducción (habilidades que usualmente no se ejercitan), pero no para llevar a cabo una prueba formal, sino para desarrollar y agudizar la capacidad de concentración y razonamiento.

El pensamiento lógico provee también un rico conjunto de estructuras conceptuales y la oportunidad de compartirlas permite concebir maneras alternativas de analizar, discutir y resolver problemas concretos. De hecho, el pensamiento lógico, como otros de nuestros recursos cognitivos, hace posible la creación de una cultura científica, entre otras cosas, porque nos ayuda a distinguir dónde está el pensamiento científico y dónde no está, en qué tipo de interpretación de la realidad subyace la ciencia y en cuál está la charlatanería. Además, esta creatividad intelectual representa un primer acercamiento a la cultura mediante la asimilación de un enorme abanico de posibilidades, cosa que el ser humano es capaz de hacer. El pensamiento lógico desarrolla una forma de organización mental que permite coordinar y relacionar materiales cognitivos de otros sistemas que nos proveen herramientas conceptuales para resolver problemas de muchas maneras diferentes, todas ellas posibles. De manera que el pensamiento lógico nos provee de un buen número de perspectivas que nos permiten desarrollar y ejercitar la creatividad, la capacidad de contextualizar las ideas y establecer relaciones entre ellas, aunque pareciera, a primera vista, que no tienen nada en común.

Este modo de pensar permite la autocrítica, la posibilidad de autoestructuración y, en caso necesario, la posibilidad de defender o sustentar las ideas propias. Aquellos que encuentran caminos alternativos ya no tendrían por qué sentirse impotentes para defenderlos porque la dinámica interna del pensamiento lógico, la coherencia y consistencia de su estructura hacen de él un modelo de reflexión altamente fiable. Además, nuestro público deja de ser un mero receptor de información y se convierte en nuestro interlocutor. Se transforma en un personaje con ideas, sentimientos e incluso aportaciones propias que enriquecen al quehacer de la divulgación de la ciencia.

Es importante hacer la divulgación con el objetivo de que la ciencia sirva para entender el mundo que nos rodea, pero aunque entender el mundo puede ser altamente satisfactorio, no ayuda a nadie, ni a uno mismo de hecho, si no se lleva a la acción. La adquisición de una cultura científica permite, entre muchas otras cosas, la posibilidad de tomar partido y sustentar una postura determinada ante las políticas científicas [Chomsky 2002, 47]. Este rigor sirve para discernir sobre la ciencia y es por eso que uno de los objetivos de la divulgación debería ser la promoción y generación de un pensamiento crítico que promueva la defensa intelectual, en particular, la defensa contra la pseudociencia.

Algo que no podemos dejar de considerar es que no es posible aprehender la ciencia sin dedicarle esfuerzo, su comprensión y asimilación requieren trabajo. La divulgación de la ciencia no debe pretender evitar este esfuerzo por entender y como uno de los elementos fundamentales para la comprensión es el razonamiento, la divulgación debe tener como objetivo procurar apelar a la capacidad de razonamiento e imaginación de nuestro público. Un buen trabajo de divulgación debería darle al público las herramientas para construir un aparato crítico propio. De manera que conocer los resultados no debería ser el único fin, la ciencia deberá considerarse como un preparativo para el análisis, el criticismo y la capacidad de relacionarla con otras formas de conocimiento. De manera que a partir de muchos datos y la combinación de procesos inductivos con procesos deductivos, además de entenderla y saber qué es, la gente sepa qué hacer con ella. Es decir, que el público comprenda que esta estructura de conocimientos afecta sus decisiones en el ámbito de lo cotidiano, lo político y lo económico, y le brindemos herramientas para una mejor comprensión y asimilación.

Conclusiones

El pensamiento lógico es un instrumento que fomenta la maduración en la forma de pensar y nos ayuda a aprender a resolver problemas porque nos ayuda a comprender el procedimiento que nos lleva a la solución. Leer con atención, analizar enunciados, trazar estrategias, deducir distintas soluciones y procurar discusiones para elegir la mejor respuesta son los ejercicios que realmente pueden ayudarnos a adquirir una verdadera cultura científica. Así, la divulgación de las matemáticas, y de la ciencia en general, podría procurar que el público desarrolle un tipo de pensamiento crítico que le sirve de base para emitir opiniones y tomar decisiones informadas, no sólo en temas científicos, sino en aquellos relacionados con su vida cotidiana.

Conforme se hacen preguntas nuevas, vienen a la luz nuevas partes de la estructura y, quizás, se toparán con un caso en el que la pregunta no tenga respuesta. Todo el análisis llevado a cabo permitirá que nuestro interlocutor no crea que es él quien hace las cosas mal, en ese momento se dará cuenta de que los problemas no siempre tienen solución y, en consecuencia, asimilará mucho más fácilmente, por ejemplo, la presencia de una hipótesis científica que no necesariamente es verdadera o falsa. Vista desde esta perspectiva, la divulgación podrá ofrecer la posibilidad de liberarse de un tipo de pensamiento ortodoxo, en el que las cosas están siempre bien o mal, para empezar a plantearse situaciones más profundas como el discernimiento de identificar si los argumentos que se presentan están correctamente planteados o suficientemente fundamentados.

El conocimiento y la ciencia necesitan información, por supuesto, pero lo importante es que hoy, al haberse facilitado el acceso a la información, ésta cada vez vale menos. Lo importante no es tener información, todo el mundo tiene acceso a ella. Lo importante es la formación, saber discriminar la información relevante de la que no lo es, separar información y ruido. Esa tarea puede lograrse a partir de la divulgación de las matemáticas, y el desarrollo del pensamiento lógico y la reflexión que nos propone.

De esta manera, la información, el conocimiento y la reflexión conducen a tres preguntas fundamentales que la divulgación de la ciencia debe empezar a plantearse como objetivos principales: ¿Qué sé? ¿Qué puedo hacer? ¿Qué debo hacer?

Entonces, el proceso de divulgación de la ciencia transforma la relación ciencia-sociedad presentada anteriormente en este otro esquema que resume todo lo anteriormente discutido:

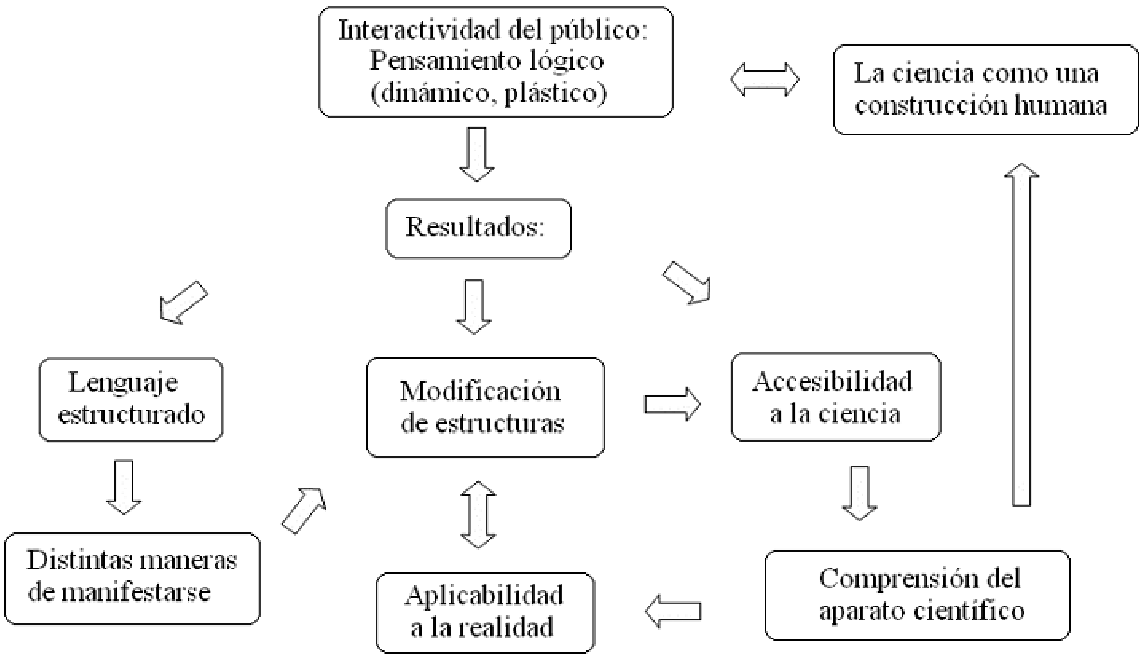


Figura 3. Esquema de la divulgación de la ciencia como un proceso de comunicación multidireccional.

En nuestra labor de divulgación debemos procurar que el público comprenda la información científica, pero también debemos propiciar la creación de estructuras que permitan la construcción de una opinión pública informada de lo que es la ciencia y sus alcances. De este modo, podemos promover que el público tenga una cultura científica entendida como la apropiación y el análisis crítico de la ciencia en la vida cotidiana y no como una colección de datos inconexos y descontextualizados.

Éste debería ser el objetivo de la divulgación de la ciencia, y sólo podremos alcanzarlo cuando estemos dispuestos a replantear, desde su esencia, qué significa y qué papel social tiene. La divulgación debería empezar a ser un compromiso social, a través del cual las personas obtengan armas cognoscitivas que les brinden la capacidad de crítica para que se conviertan en actores principales y sean ellos quienes tomen sus decisiones acerca de lo que les afecta.

Anexo 1

Problemas

En este anexo se encuentra una serie de problemas que considero son del tipo que pueden ayudarnos a fomentar el desarrollo del pensamiento lógico en nuestro público. Si consideramos que uno de los objetivos de la divulgación de las matemáticas debería ser enfatizar la idea de que éstas son más una forma de pensar que una forma de hacer, podemos afirmar que la función más importante de resolver un problema no es establecer o encontrar la respuesta, sino explicar por qué es ésa y no cualquier otra. Encontrar la respuesta correcta no debe ser el principal propósito de la resolución de estos problemas, sino que deberían considerarse como el comienzo de una aventura por entender. La mejor manera de resolver estos problemas es haciéndolo desde una perspectiva matemática:

- leer el enunciado
- analizar los elementos que tenemos a nuestra disposición
- ver cómo estos elementos pueden ayudar a resolver nuestro problema
- desarrollar una estrategia o plan de acción
- entender que puede haber más de un camino a la solución y de que la solución puede no existir o no ser única
- y al final comparar las distintas soluciones (si es que hubiera varias) y escoger una

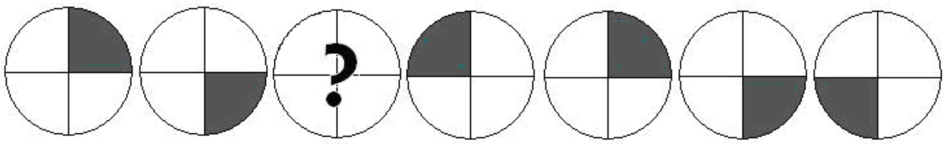
Una vez hecho esto, analizamos la solución a la que llegamos; si ésta cumple las condiciones del problema, hemos encontrado una solución, si no, volvemos a empezar. Y repetimos este proceso hasta que encontramos una solución que nos satisface, justo como pasa en el proceso científico.

Pensar en palabras, averiguar cómo se llaman los miembros de una familia o trazar caminos parece no tener mucho que ver con el pensamiento lógico, pero sí que lo tiene ya que lo hacemos mientras pensamos con reglas específicas y en forma ordenada.

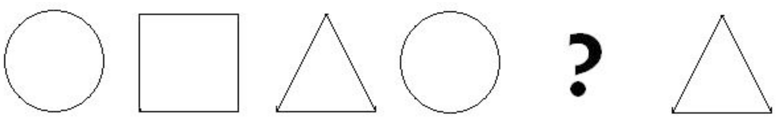
Por último, es importante señalar que esta lista de problemas no es exhaustiva, sino una breve muestra de la propuesta de este trabajo. Están ordenados de acuerdo con el público meta, empezando por preescolar y terminando con secundaria. Esta clasificación no necesariamente se refiere al nivel escolar de nuestro público, sino a las etapas de desarrollo cognitivo descritas por Jean Piaget.

- **Preescolar en adelante**

1. ¿Cómo crees que debería colorearse el tercer círculo? ¿Por qué?

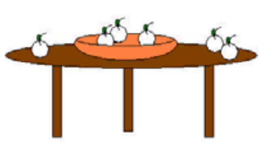


2. ¿Qué figura crees que falta? ¿Cómo sabes que es esa y no otra?



3. Una de estas cosas es diferente a las otras. ¿Cuál es? ¿Por qué crees que es diferente?

4. Colorea de rojo las manzanas que están adentro del frutero. Ilumina de amarillo a las manzanas que están afuera del frutero.



- **1° de primaria en adelante**

1. Entre estas letras hay una que es diferente a las demás, ¿podrías decir cuál es? ¿Por qué es diferente?

m	u	a
i	o	e

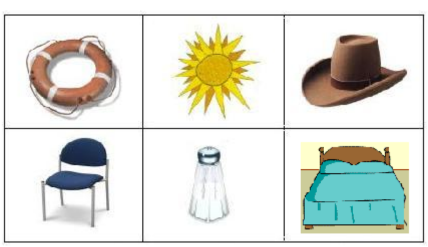
2. ¿Podrías decir cuál de estas letras es diferente a las demás? ¿Por qué es diferente?

F	A	d
E	N	R

3. Casi todas estas palabras tienen algo en común. Una de ella es diferente a las otras, ¿cuál crees que sea? ¿Por qué es diferente?

pierna	pie	pelota
oreja	brazo	mano

4. Entre estas cosas hay una que es diferente a las otras. Para descubrir cuál es, di sus nombres en voz alta. ¿Por qué es diferente?



- **2° de primaria en adelante**

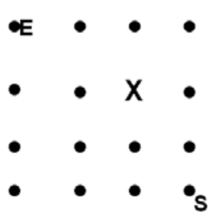
1. Una de estas operaciones es diferente a las demás, ¿cuál crees que sea? ¿Por qué es diferente?

1+3	2+2	5-1
1+6	9-5	6-2

2. En estos cuadros tendrían que estar todos los números desde el 30 hasta el 39, pero falta uno. ¿Podrías decir cuál es?

37	35	32
36	38	34
39	33	30

3. Este juego se trata de llegar de la letra E (entrada) a la letra S (salida) pasando por todos los puntos. No se vale pisar el mismo punto más de una vez. Podemos ir de un punto a otro moviéndonos hacia la izquierda, derecha, arriba y abajo. No se vale hacer movimientos en diagonal. Ten cuidado porque tampoco se vale pisar los taches.



4. Encuentra la letra que se te pide. Lee con cuidado porque hemos puesto trampas para los despistados e impacientes.

¿Cuál es la única letra que...

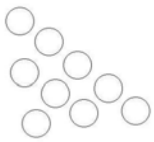
4.1 está en *PLATANO*, está en *MELON*, está en *TORONJA* y está en *SANDIA*?

4.2 está en *ROSA*, no está en *JAZMIN*, está en *GARDENIA* y no está en *MALVA*?

4.3 no está en *TAMAULIPAS*, no está en *CAMPECHE*, no está en *GUANAJUATO* y está en *HIDALGO*?

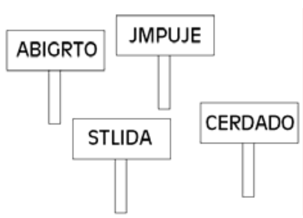
- **3° de primaria en adelante**

1. Toma nueve monedas del mismo tamaño y colócalas como se muestra en la siguiente figura.

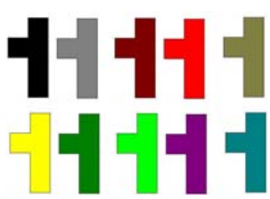


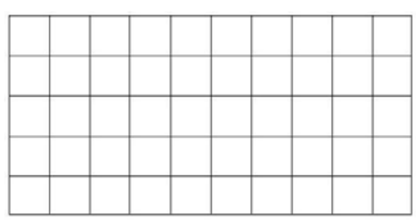
Este reto consiste en deslizar las monedas para transformar este triángulo en un cuadrado. Una cosa más, sólo puedes mover dos monedas.

2. Un pintor tenía tanta prisa de terminar su trabajo que cometió algunos errores cuando pintó estos letreros. Pintó una letra de cada palabra mal. ¿Podrías decir qué debió decir cada uno de los letreros?



3. Acomoda las siguientes 10 piezas en el tablero de 10 x 5, de forma que llenes el tablero con las figuras. La condición es que no puedes cortar las figuras, ni doblarlas, ni voltearlas, sólo puedes girarlas en sentido de las manecillas del reloj. ¿Crees que sólo hay una manera de acomodarlas?

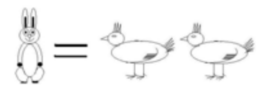




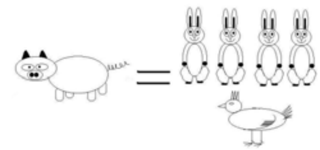
- **4° de primaria en adelante**

1. En la granja del abuelo acostumbran intercambiar animales de la siguiente manera:

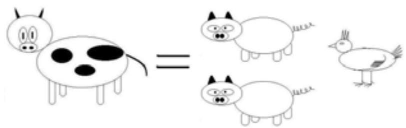
Un conejo vale 2 gallinas



Un puerquito vale 4 conejos y 1 gallina

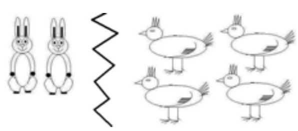


Una vaquita vale a 2 puerquitos y 1 gallina

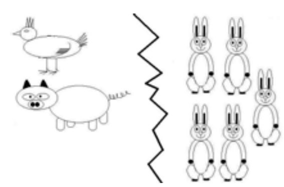


¿Podrías comparar las siguientes fotos y decir cuál de los dos grupos de animales tiene más valor o si son iguales?

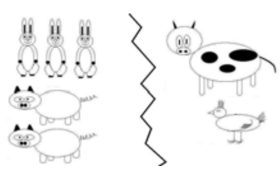
1.1



1.2



1.3

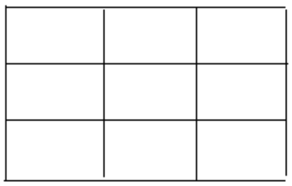


2.1. Con las siguientes siete palabras vamos a jugar al dominó: *niño, almanaque*, *mansión*, *demostrar*, *emperador*, *oportunidad*, *rampa*. Las instrucciones son las siguientes. Para juntar dos palabras es necesario que la letra con la que termina la primera palabra, sea la misma con la que empieza la segunda palabra. Por ejemplo, las palabras *mueble-elefante* pueden ir juntas ya que mueble termina con *e* y elefante empieza con *e.* ¿Podrías acomodar todas las palabras de esta forma?

2.2. Intenta hacer lo mismo ahora con estas ocho palabras: *aretes, salud, manzana, escribir, amarillo, almanaque, omega*.

- **5° de primaria en adelante**

1. Coloca los números del 1 al 9 en una cuadrícula como la que mostramos de acuerdo con las instrucciones que se dan en cada caso.



1.1. • 1, 4 y 9 están en la horizontal inferior.

• 2, 3 y 7 están en la horizontal superior.

• 2, 4, 6, 7, 8 y 9 no están en la vertical derecha.

• 1, 3, 4, 5, 6 y 7 no están en la vertical izquierda.

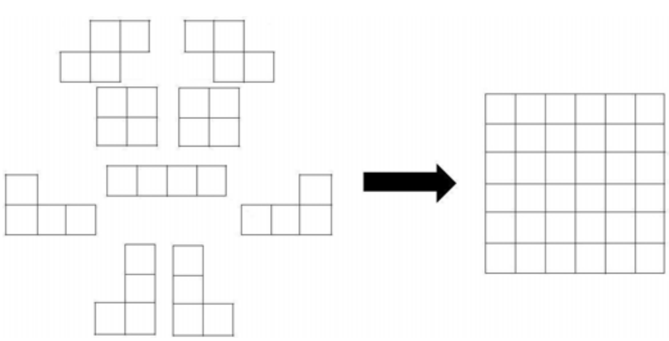
1.2. • 3, 6 y 9 están en la horizontal inferior.

• 1, 5 y 8 están en la horizontal superior.

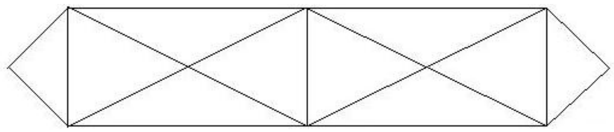
• 1, 3, 4, 7, 8 y 9 no están en la vertical derecha.

• 2, 3, 7 y 8 no están en ninguna de las diagonales.

2. Alguien me hizo la travesura de desarmar un tablero de 6x6 y lo convirtió en un robot. ¿Podrías ayudar a armar el tablero nuevamente?



3. Traza el siguiente dibujo sin levantar el lápiz y sin pasar por la misma línea más de una vez.



4. Alguien escribió en las caras de un dado los números 1, 2 y 3 (cada numero aparecía dos veces). El dado estaba sobre una mesa. Cuatro personas estaban sentadas alrededor de la mesa de forma que cada una podía ver tres caras distintas del dado. Nombrémoslos Abel, Benito, Carlos, David.

Abel veía el 1 y dos números pares.

Benito ve dos números 2.

Carlos y David ven tres números diferentes cada uno.

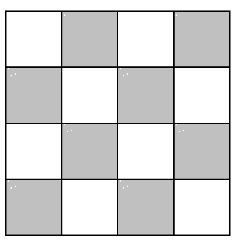
¿Cuál es el número que esta tapado con la mesa?

- **6° de primaria en adelante**

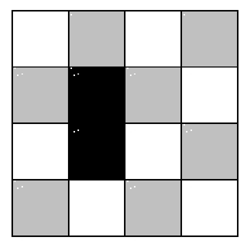
1. Acomoda fichas de dominó en los siguientes tableros, que son muy parecidos a los del ajedrez, siguiendo estas reglas:

– Una ficha de dominó ocupa exactamente dos casillas.
– Las fichas de dominó deben estar completamente dentro del tablero.
– No puedes partir por la mitad ninguna ficha de dominó.
– Las casillas de color negro no las puedes utilizar, es decir, ninguna ficha debe quedar sobre ellas.
– Puedes usar cuantas fichas de dominó necesites.
– Una cosa más: no todos los tableros se pueden cubrir con las fichas. Averigua cuál.

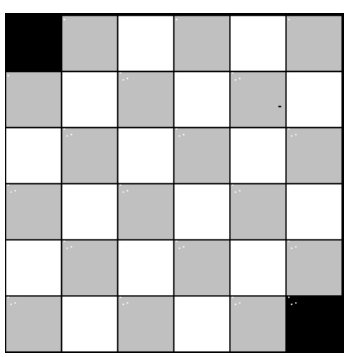
1.1



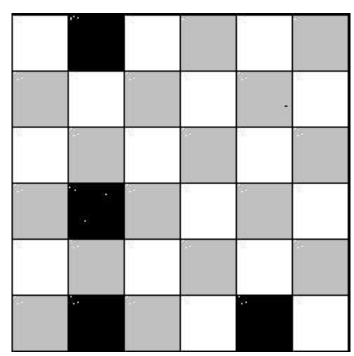
1.2



1.3



1.4



2. Juan acababa de llegar a vivir a un pueblo en el que sólo hay dos peluqueros. Como no los conocía fue a visitar las dos peluquerías antes de tomar una decisión. La peluquería del peluquero 1 estaba realmente sucia y había cabello por todo el piso. El peluquero mismo necesitaba bañarse y rasurarse y su corte de pelo era el peor que Juan había visto en su vida. Cuando llegó a la peluquería del peluquero 2, notó que el lugar estaba impecable, que el peluquero 2 estaba perfectamente rasurado y que tenía un corte de pelo increíble. Juan corrió inmediatamente a cortarse el pelo con el peluquero 1. ¿Podrías decir por qué Juan decidió cortarse el pelo con el peluquero 1 y no con el peluquero 2?

3. El este problema hay 3 afirmaciones falsas. ¿Puedes decir cuáles son?

$2 + 2 = 4$

$5 - 3 = 1$

$7 + 3 = 10$

$3 \times 3 = 6$

- **Secundaria en adelante**

1. A Saúl y Manuel les gusta comunicarse por celular, especialmente por medio de mensajes de texto. Como no les gusta que nadie se entere de lo que platican, idearon un método para codificar sus mensajes. En lugar de escribir con letras, escriben con los números que tiene su teclado telefónico. Por ejemplo, mandan el número 2 en lugar de la letra A, la B o la C; mandan el número 3, si quieren escribir las letras D, E o F; y así, sucesivamente.

El día de hoy me invitaron a formar parte de su grupo, pero antes debo descifrar el siguiente mensaje. ¿Podrías ayudarme?

2. Lorena tiene 2 hijos llamados Juan y Jaime, para los que todos los fines de semana compra un pequeño pastel de fresas. Como ya era costumbre, ninguno de los niños quedaba satisfecho con la mitad de pastel que le tocaba, pues ambos argumentaban que les había tocado el pedazo más pequeño.

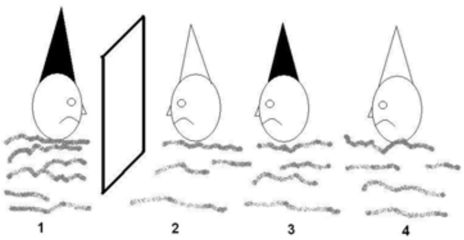
Como siempre, Lorena les compró el pastel, pero esta vez no podía ser ella la que se los repartiera porque tenía que salir. Antes de irse dejó una nota sobre la mesa pidiéndoles que compartieran el pastel ellos solos de manera que ambos quedaran satisfechos con la porción que escogieran.

¿Cómo harías tú para repartir el pastel de la manera más justa posible?

3. El caso de Luis es más grave porque él no tiene dos, sino tres hijas que son trillizas. Sus nombres son Laura, Berenice y Elizabeth. En cada cumpleaños les compra un pastel para ellas solas, pero siempre tienen la misma discusión: Cada niña dice que el pedazo que le toca es más pequeño que el de sus hermanas. Para que dejaran de pelear, Luis les propuso que él cortaría el pastel, pero que ellas tenían que decidir cómo. Como ellas habrían decidido dónde hacer los cortes, tendrían que quedar contentas con su pedazo y debían dejar de pelear.

¿Cómo crees que se las hayan arreglado?

4. El rey ha sentenciado a muerte a cuatro ladrones. Los ha enterrado en la arena hasta el cuello en una fila de manera que el primero podría ver a los otros tres, excepto que tiene una pared enfrente que se lo impide, el segundo sólo puede ver a la pared, el tercero puede ver al segundo, el cuarto puede ver al segundo y al tercero.



Saben que el rey tiene cuatro sombreros, dos blancos y dos negros y que cada uno de ellos tiene uno de estos sombreros sobre su cabeza. Como están enterrados hasta el cuello no pueden ver el color de su sombrero. El rey les prometió que los dejaría libres si alguno de ellos le decía el color de su sombrero, pero si se equivocaban los sentenciaría a todos a muerte de inmediato. Para no morir, los prisioneros guardarían silencio a menos que estuvieran completamente seguros de conocer el color de su sombrero. Sabemos que al final los prisioneros salieron libres. ¿Quién pudo adivinar el color de su sombrero? ¿Cómo lo hizo?

Anexo 2

Soluciones

Como este tipo de actividades suele tener varias respuestas correctas, es importante permitir a los alumnos que den su respuesta y la justifiquen porque, en general, la respuesta correcta no es tan importante como el razonamiento que hay detrás, el que los llevó a ella.

- **Preescolar en adelante**

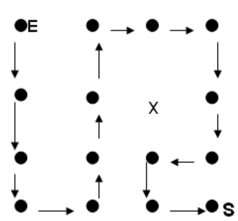
1. En el tercer círculo debe colorearse el cuadrante inferior derecho.
2. La pieza que falta es un cuadrado.
3. La libreta es el único objeto de la cuadrícula que no es una pieza de ropa.

- **1° de primaria en adelante**

1. La **m** es diferente porque es una consonante y las otras letras son vocales.
2. La letra **d** porque las demás son mayúsculas.
3. La palabra **pelota** no describe una parte del cuerpo.
4. La cama no tiene un nombre que empiece con la letra “s”.

- **2° de primaria en adelante**

1. Todas las operaciones, menos **1+6**, dan como resultado **4**.
2. Falta el número 31.
3.



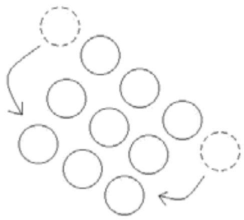
4.1. **N**

2.2. **R**

4.3. D

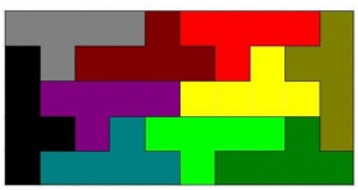
3° de primaria en adelante

1. Las dos monedas que hay que mover son las que están en los extremos de la hilera más grande.



2. Éstas son las palabras que deberían leerse en los letreros: ABIERTO, SALIDA, EMPUJE y CERRADO.

3. Aquí está una de las soluciones, al considerar que las piezas sólo se pueden voltear en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Qué pasará si se voltean algunas de las piezas? ¿Será más fácil llenar la cuadrícula? ¿Se complicará más? ¿Por qué?



- **4° de primaria en adelante**

1.1 Son iguales. Como un conejo equivale a dos gallinas, dos conejos equivalen a 4 gallinas.

1.2 Ambos conjuntos son iguales.

1.3 El izquierdo es mayor que el derecho.

2.1 -niño-oportunidad-demostrar-rampa-almanaque-emperador-mansión-

2.2. -manzana-amarillo-omega-almanaque-escribir-ropa-aretes-salud-

- **5° en adelante en adelante**

1.1.

2	7	3
8	6	5
9	4	1

1.2.

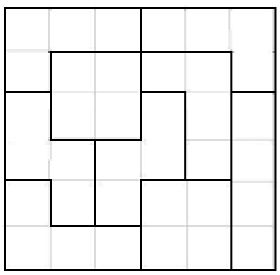
1	8	5
7	4	2
9	3	6

1.3. Tiene dos soluciones:

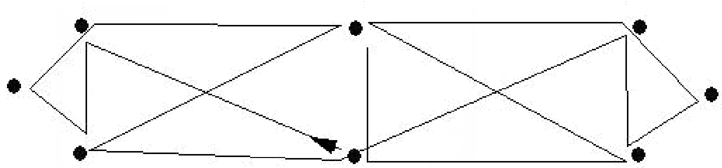
6	5	4
1	9	2
7	8	3

6	5	4
1	9	3
7	8	2

2. La forma de acomodar las figuras es la siguiente:



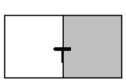
3.



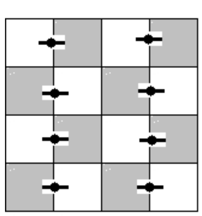
4. Abel ve el 1 y dos números 2. Benito ve dos números 2, lo que significa que está sentado junto a Abel y que un 2 está en la parte de arriba del dado. Sin embargo la persona que está sentada del otro lado de Abel ve tres números diferentes. Supongamos que es David. Él ve el 1 que ve Abel en uno de los costados, el 2 que está en arriba, así que en el otro costado el verá un 3. Por lo tanto el número que está tapado por la mesa es el número 3.

- **6° de primaria en adelante**

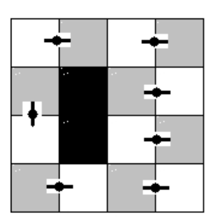
1. Considera que representamos la ficha de dominó de la siguiente manera:



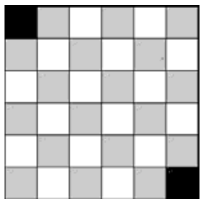
1.1



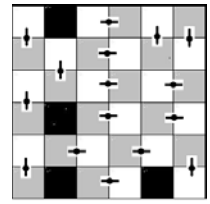
1.2



1.3 Este tablero no se puede llenar con fichas de dominó.



1.4



2. En un pueblo donde sólo hay dos peluqueros uno tiene que cortar el cabello del otro. Como el peluquero 2 tenía el mejor corte de pelo, Juan supo que el peluquero 1 tuvo que habérselo hecho. Por eso fue con él.

3. Las afirmaciones falsas son: 5 - 3 =1, 3 x 3 = 6 y el enunciado que asegura que hay 3 afirmaciones falsas.

- **1° de secundaria en adelante**

1. Para encontrar la solución, tenemos que explorar las posibles combinaciones de las letras. Algunas de estas combinaciones forman palabras con significado, pero otras sólo son cadenas de letras que no tienen sentido. A aquellas que no tienen sentido las podemos descartar con una X. A las que sí tienen sentido, las marcamos con una √.

Comencemos por los primeros dos números, 37. Sabemos que el 3 puede estar representando una *D*, una *E* o una *F*, y el siete a las letras *P*, *Q*, *R* o *S*. Empecemos por considerar que si el 3 estuviera representando a la letra *D*, el 7 no podría estar representando a las letras *P*, *Q* ni *S* porque en español no existen palabras que empiecen con esas letras. Por lo tanto, la única combinación de letras que podría tener sentido es una *D* seguida de una *R*.

Paso 2.	
3 - 7	
D - P	X
D - Q	X
D - R	√
D - S	X

Después consideramos qué letras podría estar representando el número 8 y cuáles combinaciones podrían tener significado.

Paso 2.	
3 - 7 - 8	
D - R - T	X
D - R - U	√
D - R - V	X

Luego, analizamos las posibilidades con el cuarto número de la primera palabra: el 3.

Paso 3.	
3 - 7 - 8 - 3	
D - R - U - D	X
D - R - U - E	X
D - R - U - F	X

Como ninguna de las combinaciones tiene sentido, podemos decir que el primer número del mensaje no representa a la letra D. Hagamos el mismo análisis suponiendo que el 3 representa a la letra E.

Paso 1.	Paso 2.	Paso 3.
3 - 7	3 - 7- 8	3 - 7 - 8 - 3
	E-P-T X	E-P-U-D X
E-P √	E-P-U √	E-P-U-E X
	E-P-V X	E-P-U-F X
	3-7-8	3-7-8-3
	E-Q-T X	E-Q-U-D X
E-Q √	E-Q-U √	E-Q-U-E X
	E-Q-V X	E-Q-U-F X
	3-7-8	3-7-8-3
	E-R-T X	E-R-U-D X
E-R √	E-R-U √	E-R-U-E X
	E-R-V X	E-R-U-F X
	3-7-8	3-7-8-3
	E-S-T √	E-S-T-D X
E-S √	E-S-U √	E-S-T-E √
	E-S-V X	E-S-T-F X
		E-S-U-D X
		E-S-U-E X
		E-S-U-F X

Después de este análisis, podemos ver que la única combinación de letras que tiene sentido es la palabra E-S-T-E. Si ahora comenzamos por suponer que el número 3 representa a la letra F, también podremos ver que ninguna combinación de letras tiene sentido. Por lo tanto, podemos afirmar que la primera palabra es “este”.

Paso 1.	Paso 2.	Paso 3.
3-7	3-7-8	3-7-8-3
F-P X	F-R-T X	F-R-U-D X
F-Q X	F-R-U √	F-R-U-E X
F-R √	F-R-V X	F-R-U-F X
F-S X		

Si repetimos este procedimiento con los otros renglones, podemos descubrir que el mensaje dice: este es un mensaje oculto.

2. Primero hay que considerar que sólo uno de los niños tendrá el cuchillo en sus manos y cortará el pastel. La repartición más justa será aquella en la que el primero que escoja su pedazo no sea el que haya cortado el pastel. Ante la posibilidad de que su hermano le deje el pedazo más pequeño, el que corte el pastel procurará hacerlo justo por la mitad. Ambos tendrán que quedar satisfechos porque el que corta lo habrá hecho de la manera en que cualquier porción que le toque le parecerá justa y el otro tendrá la oportunidad de escoger la porción que a él le parezca más grande.

3. A Luis y sus hijas se les ocurrió esta manera de hacer la repartición. Él moverá el cuchillo por encima del pastel y en el momento en el que cualquiera de ellas gritará “córtale”, él cortaría la rebanada y se la entregaría a la hija que haya gritado. Lo mismo haría para la segunda y dejaría el último pedazo a la tercera.

La primera niña a la que Luis le da la rebanada de pastel tendría que estar satisfecha con la porción que le tocó porque de lo contrario no habría gritado. La segunda también tendría que estar contenta porque no gritó para quedarse con la primera rebanada ya que el primer pedazo que se cortó no la parecía justo todavía. Esta segunda vez ella habría gritado justo cuando la rebanada le pareció lo suficientemente grande. La tercera niña también tendría que estar contenta porque, al no gritar ni la primera ni la segunda vez, habría considerado que el tamaño de las primeras rebanadas no era suficientemente grande para ella, así que se esperó hasta el final. Las tres niñas tendrían que gritar cuando consideraran que su pedazo era muy cercano a la tercera mitad del pastel, porque si no se ponían abusadas, se arriesgaban a que les tocara un pedazo más pequeño que el de sus hermanas.

4. El único que puede contestar es el prisionero 3. Analicemos el problema por casos:
El prisionero 1 no puede saber el color de su sombrero porque no puede ver a los otros presos. El prisionero 2 solamente puede ver a la pared, por lo tanto tampoco puede estar seguro. El prisionero 3 solamente puede ver el sombrero blanco del prisionero 2, por lo tanto no puede estar seguro del color de su sombrero y no dice nada por temor a equivocarse. El prisionero 4 puede ver el sombrero negro del prisionero 3 y el sombrero blanco del prisionero 2, y como son dos colores distintos, no puede saber de qué color es el suyo. Como el prisionero 4 no dice nada, el prisionero 3 sabe que éste tiene enfrente sombreros de diferente color (si viera dos sombreros del mismos color, podría adivinar de inmediato de qué color es su sombreo). Como el prisionero 3 ve el sombrero blanco del prisionero 2 sabe que él tiene un sombrero de color distinto. El prisionero 3 grita “mi sombrero es negro” y de esta forma todos lograron salir libres.

Bibliografía

Álvarez, Carlos, "La función ideológica de la noción de ciencia" en *Revalorización social de la ciencia*, Facultad de Ciencias, UNAM, México,1984.

Bishop, Alan, *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Paidós, España, 1999.

Bourbaki, Nicolás, "The Architecture of Mathematics", *American Mathematical Monthly* Número 57, 1950.

Bracho, Javier, "Los conceptos en las matemáticas (Ciencia entre las Artes, Arte entre las Ciencias)" en *Las matemáticas y su entorno*, Raymundo Bautista Ramos (ed.), Siglo XXI, México, 2004.

Cinni, Mario, "No neutralidad de la ciencia" en *Revalorización social de la ciencia* (antología), UNAM, Facultad de Ciencias, México,1984.

Comte, Auguste, *La filosofía positivista*, Porrúa, México, 1998.

Courant, Richard y Herbert Robibbins, *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, España, 1979.

Chomsky, Noam, *Chomsky on Democracy and Education*, Falmer Press, Estados Unidos, 2002.

Davis, Phillip, y Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*, Mariner Books, Estados Unidos, 1999.

De Guzmán, Miguel, *Juegos matemáticos en la enseñanza*, Actas de la IV Jornada sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, España, 1984.

De Guzmán, Miguel, *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, Pirámide, España, 2001.

Estrada, Luis, "La divulgación de la ciencia" en *Cuadernos de extensión universitaria*, UNAM, México,1981.

Gómez Chacón, Inés María, *Matemática emocional*, Narcea, España, 2000.

Heidegger, Martin, "Modern Science, Metaphysics and Mathematics" en *Basic Writings*, Routledge, Estados Unidos, 1993.

Hersh Reuben, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, Estados Unidos, 1999.

Kline, Morris, *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*, Siglo XXI Editores, México, 1980.

Kline, Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Estados Unidos, 1982.

Kline, Morris, *Mathematics and the Search for Knowledge*, Oxford University Press, Estados Unidos, 1986.

Newman, James (comp.), *La forma del pensamiento matemático*, Grijalbo, México, 1974.

Pascal, Blaise, *Pensees*, Penguin Books, Estados Unidos, 1995.

Poincaré, Henri, *El valor de la ciencia*, Espasa-Calpe, Colección Austral No. 628, México, 1964.

Sanders Pierce, Charles, "La esencia de la matemática" en *La forma del pensamiento matemático*, James Newman (comp.), Grijalbo, México, 1974.

Steiner, George, "The retreat from the word" en *Lenguage and Silence. Essays on Lenguage, Lierature and the Inhuman*, Atheneum, Estados Unidos, 1986.