UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA EN PAPIROFLEXIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO CAMACHO GALVÁN

TUTOR: M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2008

AGRADECIMIENTOS

GRACIAS A DIOS POR MI VIDA Y LA DE MIS SEMEJANTES
POR TODOS Y CADA UNO DE LOS MOMENTOS QUE CONSTITUYEN LA EXISTENCIA EN LA CONDICIÒN HUMANA

GRACIAS A MI MAMA POR EL CARIÑO Y EL APOYO CONSTANTES
POR HABER SEMBRADO EN MI EL JUEGO Y EL ARTE QUE HOY SON LAS VENAS DE MI CORAZÓN

GRACIAS A MI PAPA POR SU CARIÑO Y PACIENCIA
POR AYUDARME A DESCUBRIR EL MATEMATICO QUE HAY EN MI

GRACIAS A MI HERMANO POR ENSEÑARME A PONER PASION Y EL CORAZÓN EN LO QUE HAGO

GRACIAS A MI HERMANA POR ENSEÑARME A ABRAZAR LA IMAGINACIÓN Y SER YO MISMO

GRACIAS A PACO STRUCK POR SER AMIGO Y MAESTRO. POR ENSEÑARME UN MUNDO NUEVO EN LA GEOMETRÍA

GRACIAS A LA MAESTRA ANA IRENE RAMÍREZ POR LAS INCONTABLES COSAS INTERESANTISIMAS QUE COMPARTIO CONMIGO A LO LARGO DE TODOS LOS CURSOS QUE LLEVE CON ELLA

GRACIAS A LA DRA ANA GUZMAN POR SUS COMENTARIOS VALIOSISIMOS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA TESISI, Y POR LAS LECCIONES DE CALCULO Y DE ANALISIS

GRACIAS A LA TERCERA GENERACION POR HACERME EL FAVOR DE EXISTIR

EN GENERAL GRACIAS A TODOS LOS QUE QUIERO Y LOS QUE ME QUIEREN.
GRACIAS POR TODO!!


MELENCOLIA I

Indice

INTRODUCCIÓN

Esta tesis es un trabajo sobre geometría en papiroflexia en el que exponemos algunos temas de la geometría Euclidiana mediante hojas de papel en las que dibujamos con marcas de dobleces que hacemos en ellas. Necesitamos un manejo sistemático y objetivo del doblado de papel para lo que desarrollamos primeramente una axiomatización y una semántica de los dobleces del papel para que éstos nos permitan representar los elementos de la geometría Euclidiana.

Hemos hecho que este trabajo sea auto contenido por lo que hacemos todas las demostraciones necesarias, pero nos interesa también desarrollar una representación visual intuitiva de cada tema por lo que incluimos muchos diagramas con la finalidad de facilitar la comprensión de las construcciones y demostraciones.

Veremos entre otras cosas la construcción de tangentes a las cónicas motivada por la definición en términos de magnitudes de cada una de éstas. Localizaremos el punto de tangencia y probaremos que las rectas que construimos son tangentes.

También haremos un estudio de las raíces de ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, en cada caso veremos un método para su construcción. En las ecuaciones de primer grado basta mostrar que es posible multiplicar y dividir con el doblado de papel; Para las ecuaciones de segundo grado usaremos parábolas de la forma $4p(y - k) = (x - h)^2$ cuyas intersecciones con el eje X determinan las soluciones de la ecuación dada; y en el caso de las ecuaciones de tercer grado haremos uso de un doblez que será la tangente común a dos parábolas distintas y cuya intersección con el eje X marcará las soluciones reales de una ecuación dada.

Finalmente veremos cómo mediante el doblado de papel se pueden resolver dos de los tres problemas clásicos de la geometría euclidiana: La duplicación del cubo y la trisección del ángulo. En el caso de estos últimos usaremos un doblez muy especial que no se puede representar con regla y compás, es decir, no se puede construir usando regla y compás una recta que tenga las características que tiene este doblez o recta. Vale la pena hacer mención especial de este doblez al que nos referimos, pues su existencia la hemos podido justificar únicamente por un argumento de continuidad pero no a partir de los axiomas aceptados inicialmente, por lo que es necesario aceptar su existencia como un nuevo axioma. Resulta de gran interés porque nos permite hacer construcciones que no es posible hacer valiéndose de una regla y un compás, de hecho, a partir de este doblez es posible definir un método para construir las raíces reales de ecuaciones de tercer grado que es útil para resolver todo tipo de ecuaciones, incluso las irreducibles, de hecho, hemos incluido la demostración de que dada una ecuación de tercer grado siempre es posible construir sus raíces reales usando este doblez.

Las referencias bibliográficas están marcadas por números romanos en negritas y entre paréntesis (**X**), se anexan al final; los nombres de rectas, puntos y segmentos también se remarcan en negritas para facilitar la lectura.

CAPÍTULO I : FUNDAMENTOS

En este capítulo veremos la forma en la que vamos a manejar el doblado de papel para representar los objetos geométricos de nuestro interés. Comenzaremos por definir cuáles son los objetos y las operaciones permitidas. Es decir, los puntos y las rectas y cómo hacemos para rotarlos, reflejarlos y manipularlos en general.

Si deseamos fundamentar el manejo del papel, es decir, manejar el papel de una forma sistemática y objetiva, es necesario desarrollar una semántica de los dobleces del papel para que estos nos permitan representar los elementos de la geometría Euclidiana.

Esta semántica es a saber, una reinterpretación de aquellos elementos inherentes al manejo del papel, de tal modo que a través de los dobleces se puedan construir las configuraciones y las transformaciones del plano existentes en la geometría Euclidiana.

Para construir este modelo teórico debemos aceptar ciertas hipótesis sobre las características del papel y algunos axiomas sobre el comportamiento de éste. A continuación hacemos una lista estas hipótesis y después una de los axiomas.

- $\mathbf{H_1}$. El papel no tiene grueso, esto es porque en el caso de muchos dobleces encimados el grosor del papel induce un error que crece con cada nuevo doblez que se encima.

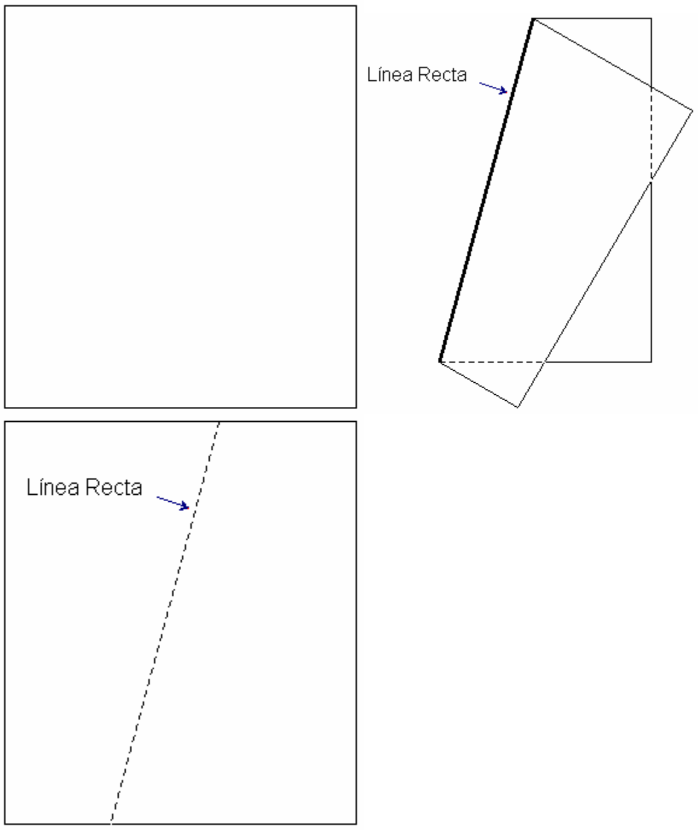
- $\mathbf{H_2}$. El papel es transparente, esto nos ayuda a calcar una configuración al sobreponer dos o más hojas.

- $\mathbf{H_3}$. El papel es de dimensiones infinitas, esto es, cualquier configuración cabe en nuestra hoja.

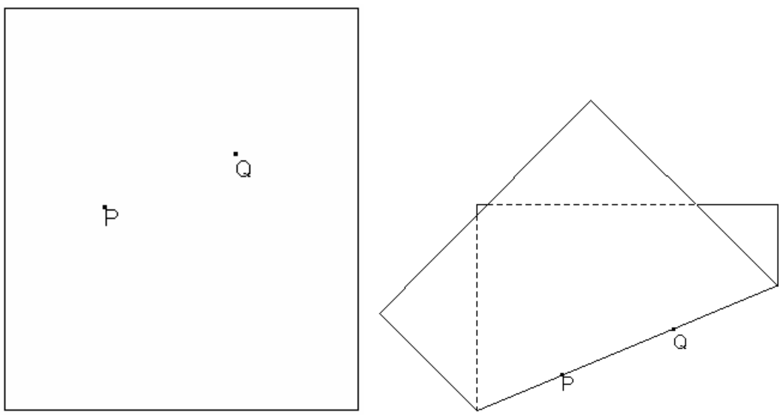
De aquí en adelante haremos la convención de que cuando se diga “marcar un doblez” se entienda la operación de doblar y desdoblar la hoja dejando simplemente una línea marcada por donde se efectuó el doblez.

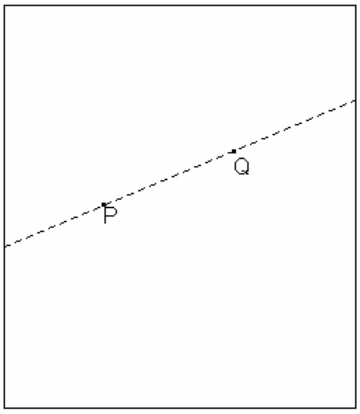
Veamos ahora los axiomas sobre el comportamiento del papel.

- **A$_1$** . Siempre que marcamos un doblez en una hoja, éste describe una línea recta.

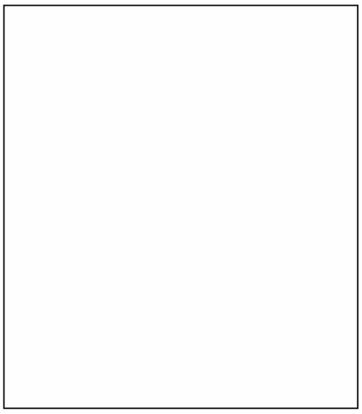


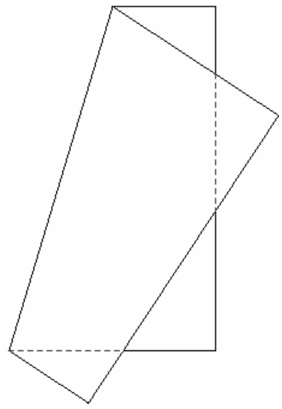
- **A$_2$.** Se puede marcar un doblez o recta que pase por dos puntos dados, es decir, dos puntos determinan un doblez.

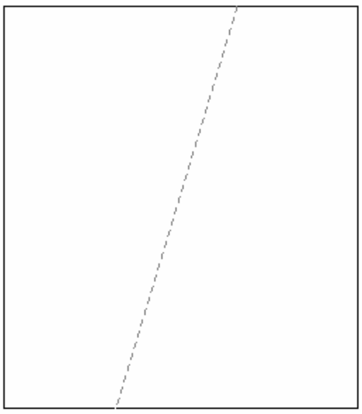


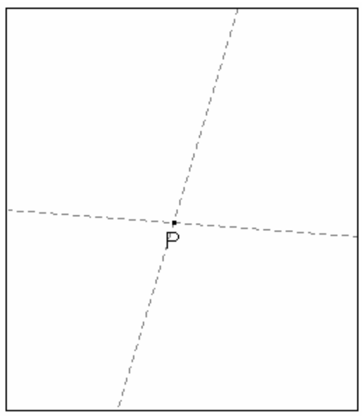


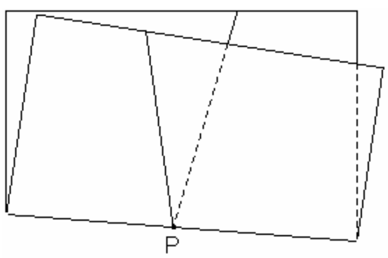
- **A_3** . Dos dobleces no paralelos determinan un punto.



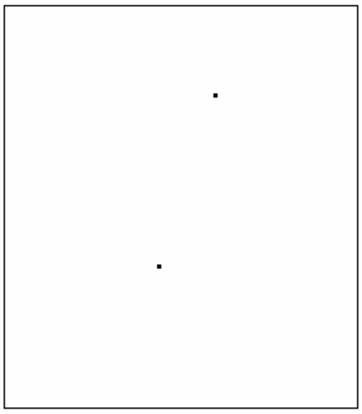


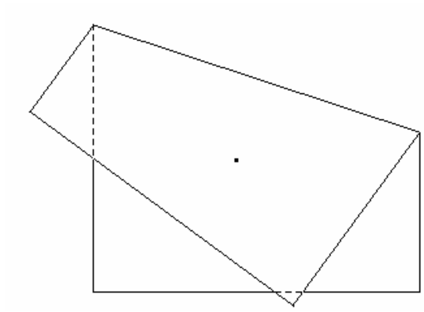


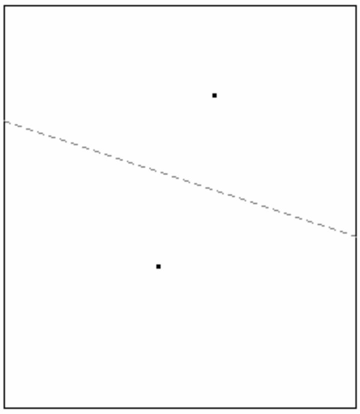




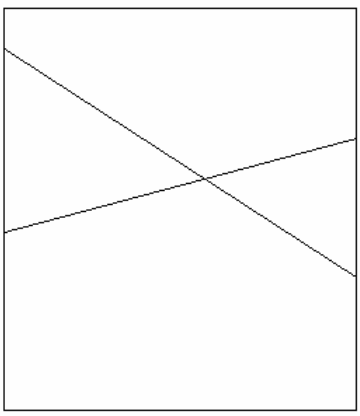
- **A_4**. Dados dos puntos existe un doblez que encima uno en el otro.

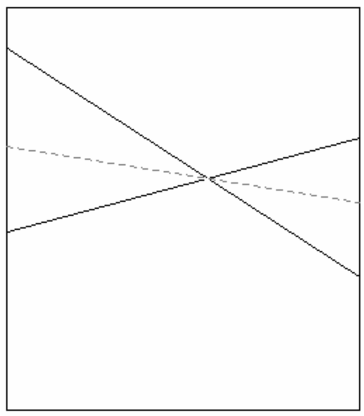


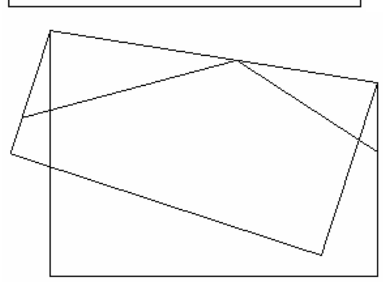




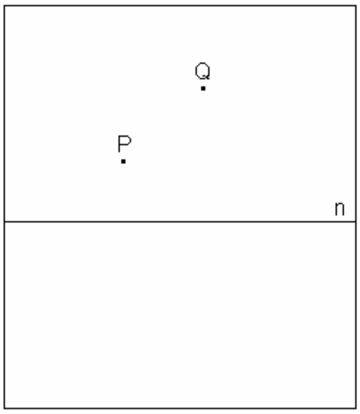
- **A_5**. Dadas dos rectas existe un doblez que encima una en la otra.

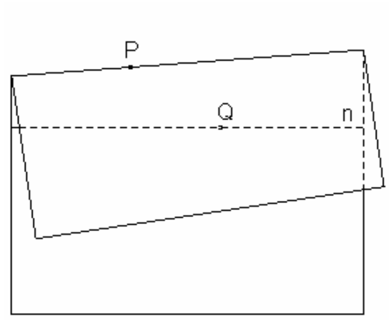


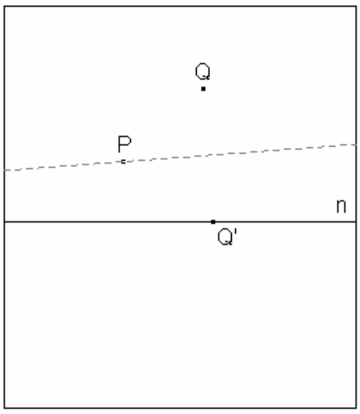




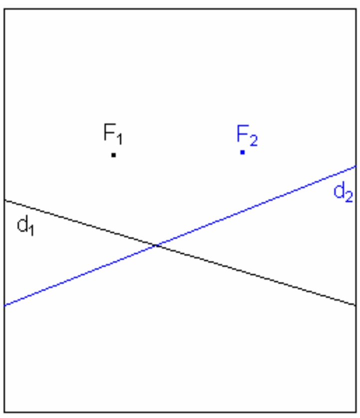
A_6. Dados dos puntos **P** y **Q** y una recta **n** tal que d(P,Q) $\leq$ d(Q,n) existe un doblez por **P** que encima **Q** en un punto de **n**.

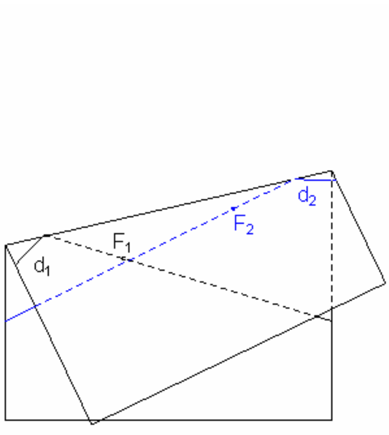


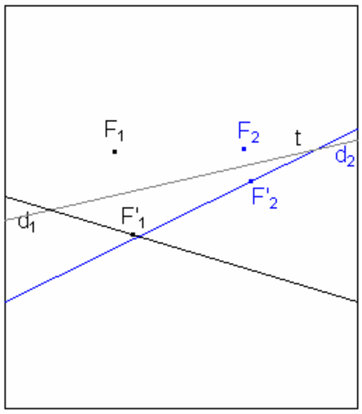




- **A_7** . Dados dos puntos **F_1** y **F_2** y dos rectas no paralelas **d_1** y **d_2** sucede que existe un doblez **t** tal que encima **F_1** en **d_1** y **F_2** en **d_2**.



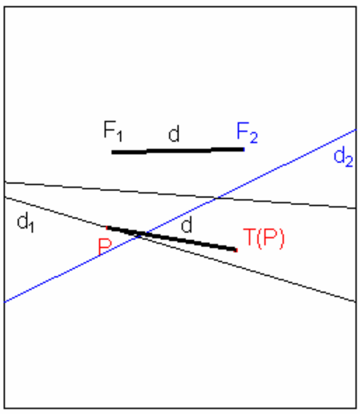


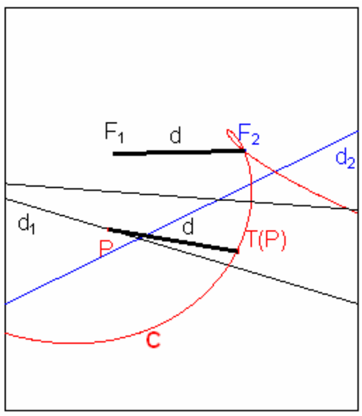


Vale la pena mencionar que este doblez es muy importante, de hecho, se puede decir que en algún sentido es la motivación de esta tesis porque nos ofrece nuevas alternativas en cuanto que no se corresponde con ninguna construcción posible con regla y compás. Por ejemplo, en el último capítulo lo ocupamos para resolver dos de los tres problemas clásicos de la geometría euclidiana, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Otra aplicación muy importante la veremos en el cuarto capítulo que trata de ecuaciones de tercer grado a las que veremos que siempre se les puede asociar un doblez de éstos que nos dé sus soluciones.

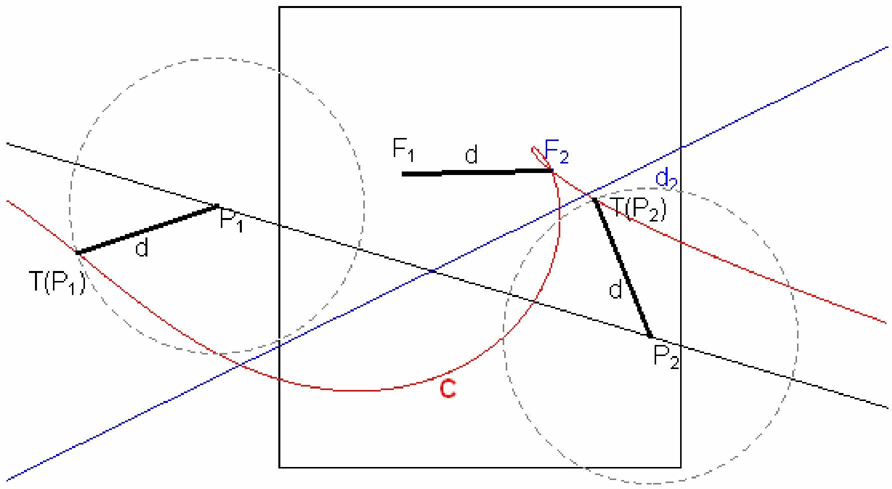
Veamos ahora una justificación muy simple de la existencia de este doblez basada en un argumento de continuidad para la que vamos a considerar una curva **C** que introducimos a continuación.

Definimos **T(P)** como la reflexión de $\mathbf{F_2}$ con respecto a la mediatriz del segmento $\mathbf{F_1P}$, claramente la distancia entre $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ es igual a la distancia entre **P** y **T(P)**. Llamemos d a dicha distancia. A su vez definimos **C** como el conjunto de todas las **T(P)**.





Consideremos ahora una pareja de puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ en $\mathbf{d_1}$ y en distintos semiplanos tales que su distancia con respecto a $\mathbf{d_2}$ sea mayor que **d**.

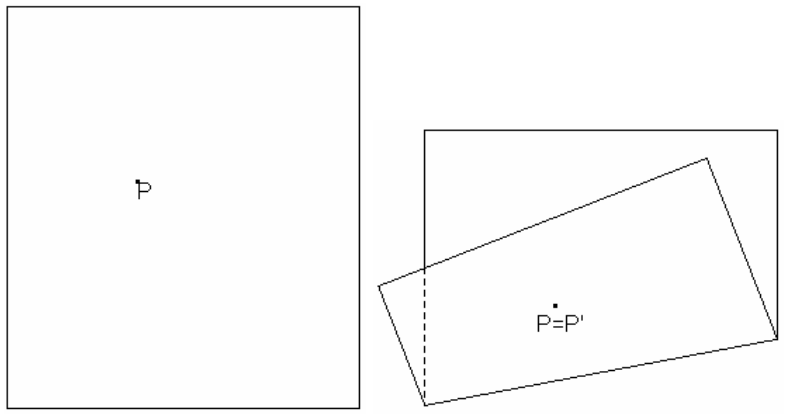


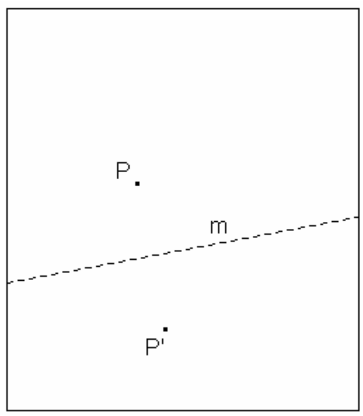
Podemos asegurar que $\mathbf{T(P_1)}$ y $\mathbf{T(P_2)}$ se encuentran en semiplanos distintos pues $d(P_1,T(P_1)) = d(P_2,T(P_2)) = d$ y por lo tanto **C** interseca a d_2 pues es una trayectoria continua que pasa por $\mathbf{T(P_1)}$ y $\mathbf{T(P_2)}$.

Con esas hipótesis definimos ahora las dos operaciones mediante las cuales manejamos el papel:

- En primer lugar definimos la acción de doblar el papel como una operación. Nótese que ésta induce la noción de desdoblar, la que entendemos como la acción de deshacer un doblez hecho.

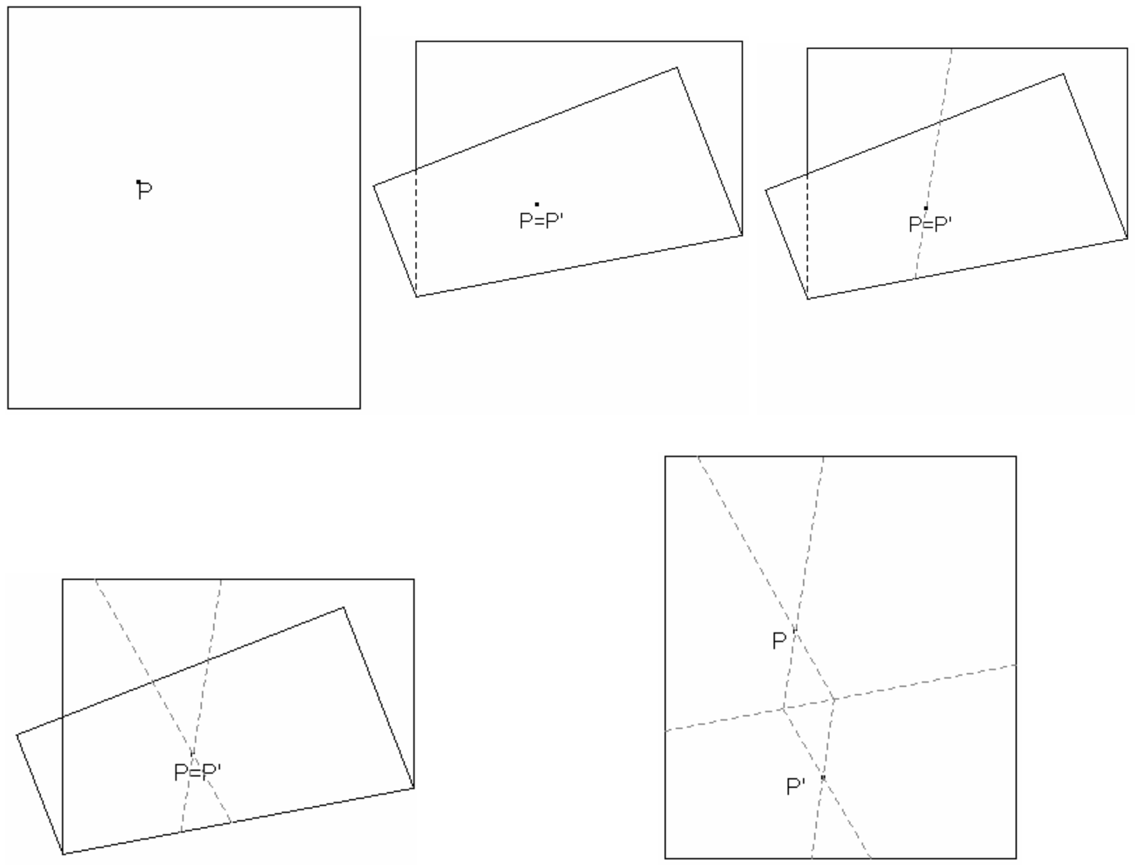
- También se permite la operación de "<u>calcar puntos con respecto a un doblez</u>" que vamos a definir a continuación. Supongamos que doblamos una hoja: ésta queda dividida en dos regiones que se enciman una sobre otra, de tal manera que si tomamos un punto cualquiera P podemos <u>usar un bolígrafo</u> para marcar el punto P' que se encima sobre P. Ésta es la operación de calcar P con respecto al doblez hecho (si el doblez lo llamamos m, entonces diremos que P' es la calca de P con respecto a m); a su vez la calca de una recta o de un segmento se define como el conjunto de las calcas de todos sus puntos.





En estricto sentido no es necesario ocupar un bolígrafo para marcar la calca de un punto, ésta puede determinarse mediante dos dobleces o rectas. Lo hacemos así por que es más practico y nos ilustra que esta operación es <u>equivalente a la operación de "reflejar"</u> con respecto al doblez o recta. Esto es porque al calcar un punto o una configuración de puntos y rectas se obtiene otra configuración que es congruente a la primera pues una se encima sobre la otra, y punto a punto están a la misma distancia respecto a la recta. Este hecho lo formalizamos a continuación en la siguiente afirmación.

- Calcar un punto con respecto a una recta o reflejarlo respecto a ésta es equivalente a ubicarlo con dos dobleces o rectas. Para hacerlo es necesario marcar primero el doblez con respecto al cuál se quiere reflejar y después hacer dos dobleces por el punto como se muestra a continuación.



Así pues, hemos visto que con el doblado de papel se pueden hacer reflexiones, esto es muy importante pues a partir de las reflexiones se pueden hacer rotaciones y traslaciones.

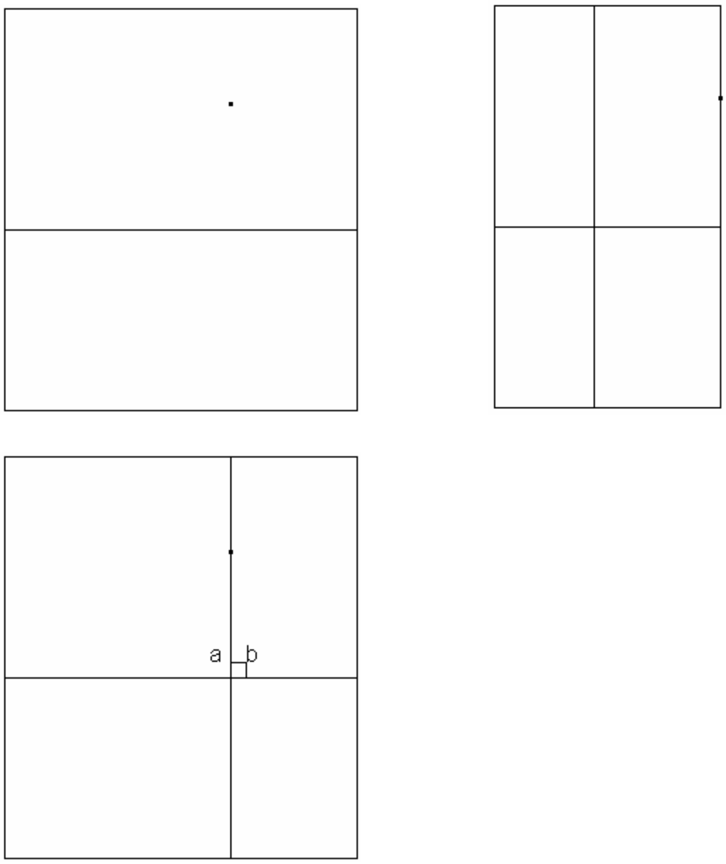
CONSTRUCCIONES

A continuación nos interesa mostrar que las construcciones básicas con regla y compás también se pueden realizar doblando papel con las reglas que acabamos de definir.

I . Dada una recta, construir otra recta que sea perpendicular a la primera y que pase por un

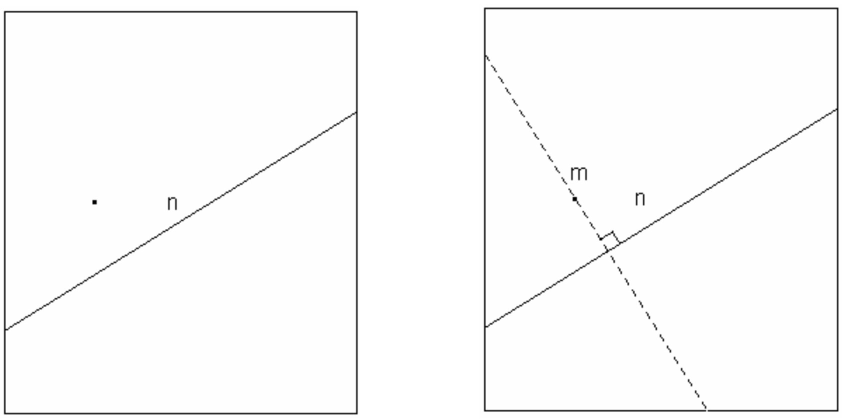
punto dado.

- Doblamos la hoja de manera que la recta se encime consigo misma y el doblez pase por el punto, esta es la recta perpendicular deseada. Esto es por que al ejecutar el doblez el ángulo **a** se encima con el ángulo **b** y por lo tanto tienen que ser iguales, y como la suma de éstos es igual a π cada uno de ellos tiene que valer π/2.

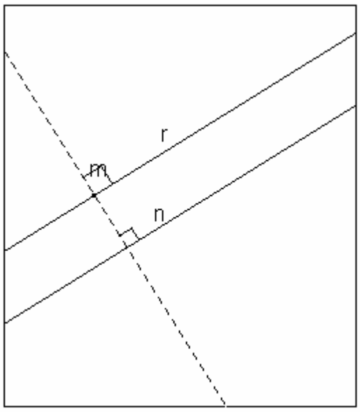


II . Dada una recta, construir otra recta paralela a la primera y que pase por un punto dado.

- Marcamos una recta perpendicular **m** a la recta dada **n** por el punto dado.

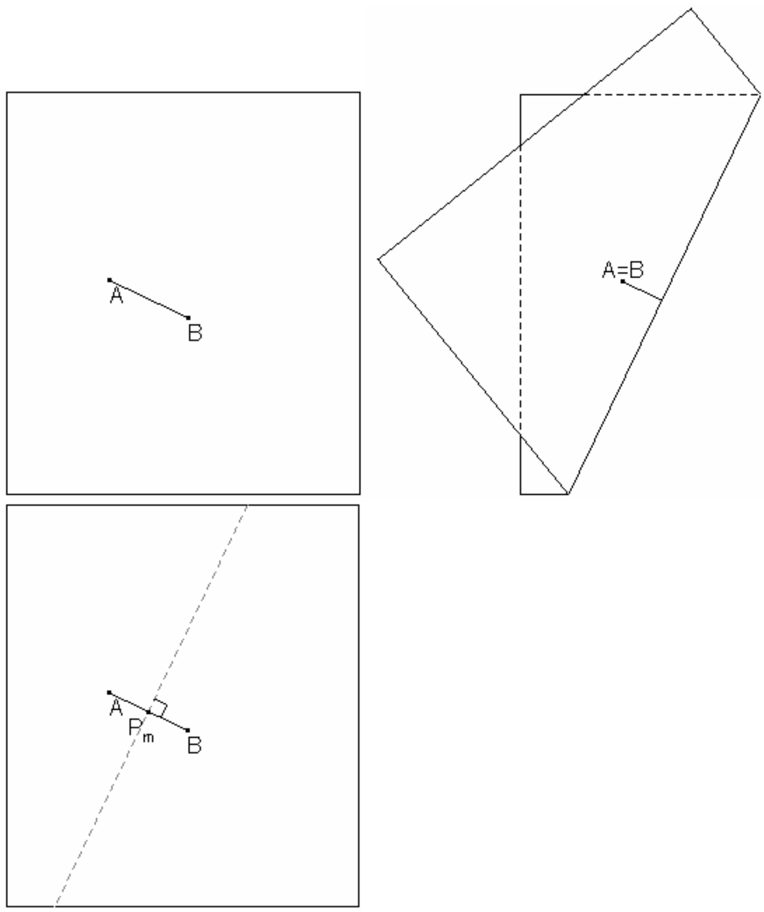


- Hacemos una perpendicular **r** a la recta **m** y esa recta obtenida es paralela a **n**.



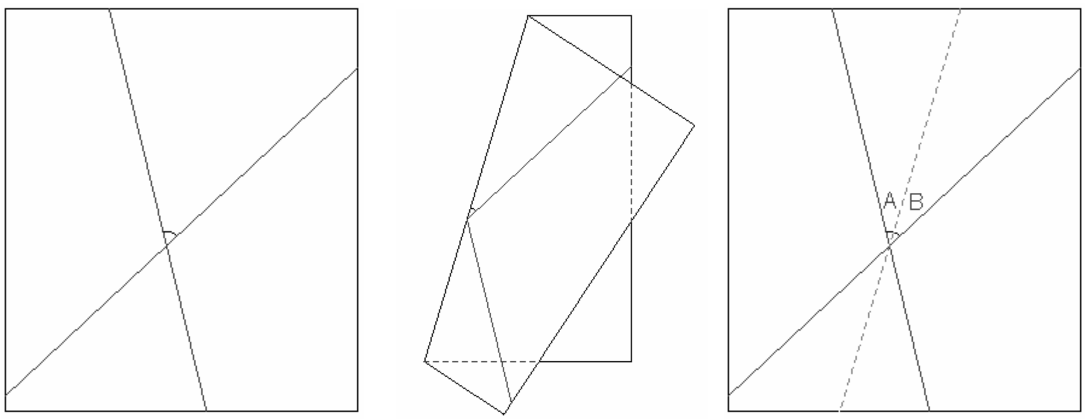
III . Dados dos puntos construir su mediatriz.

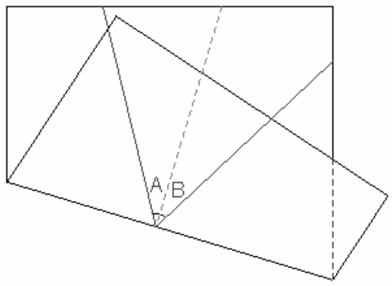
- Doblamos la hoja de manera que los extremos se encimen uno con el otro y el doblez que obtenemos es la mediatriz. Como vimos antes, el doblez que obtenemos es perpendicular al segmento AB; además pasa por el punto medio del segmento pues al hacer el doblez, **A** se encima con **B** por lo que los segmentos AP_m y BP_m son iguales. Tenemos entonces que el doblez hecho es una recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de éste cumpliendo así una definición común de la mediatriz.

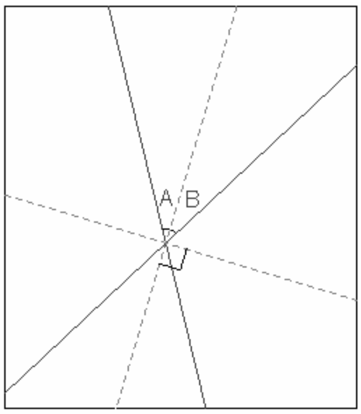


IV . Dado un ángulo construir su bisectriz.

- Doblamos la hoja para que una de las rectas que forman el ángulo se encime con la otra y el doblez que obtenemos es la bisectriz del ángulo. Al realizar el doblez el ángulo **A** se encima con el ángulo **B**, esto significa que son iguales y por lo tanto su bisectriz es el doblez que acabamos de hacer. En caso de que se desee bisecar el ángulo complementario basta con marcar una perpendicular a la bisectriz por el vértice del ángulo.

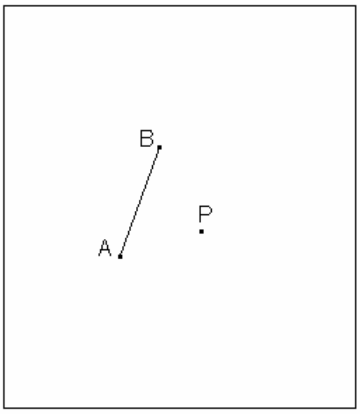


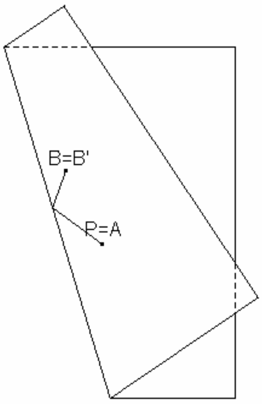


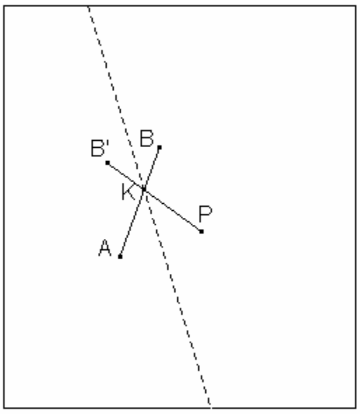


V. Transferir la longitud de un segmento.

- Si deseamos transferir la longitud de un segmento AB de tal forma que a partir de un punto **P** construyamos un segmento de longitud igual a la de AB procedemos como sigue: Doblamos la hoja de manera tal que uno de los extremos **A** se encime con el punto **P** y calcamos el otro extremo **B**, este punto **B’** obtenido de calcar **B** tiene la propiedad de que su distancia a **P** es igual a la longitud del segmento AB. Esto es porque al efectuar el doblez **A** se encima sobre **P** y **B** sobre **B’**, así que el segmento AK es congruente con el segmento PK y el segmento KB es congruente con el segmento KB’, por lo tanto AB es congruente con PB’ pues las partes de uno se enciman sobre las partes del otro.

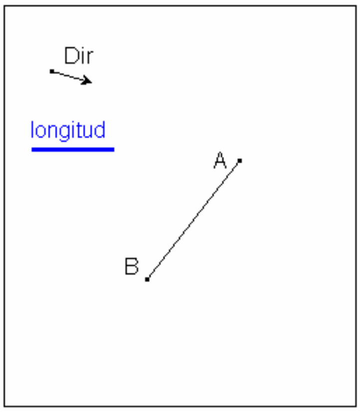


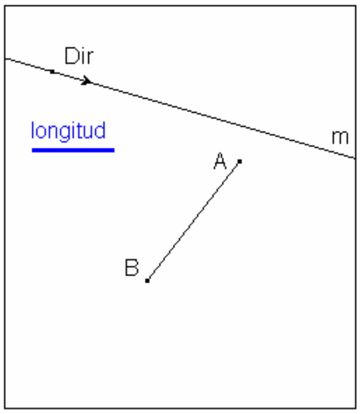




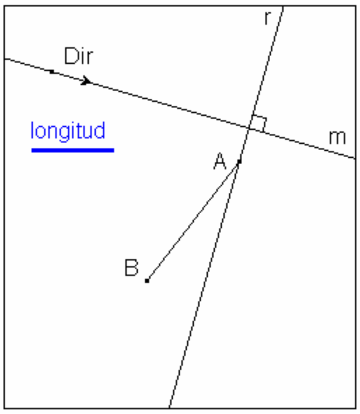
VI . Trasladar un segmento según una dirección y una longitud dadas.

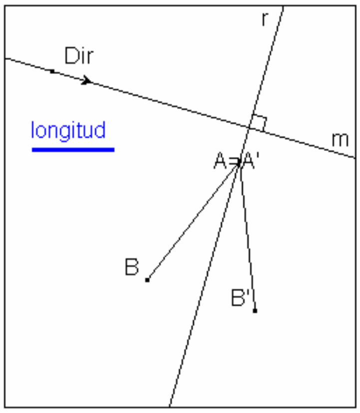
- Marcamos una recta en la dirección dada.



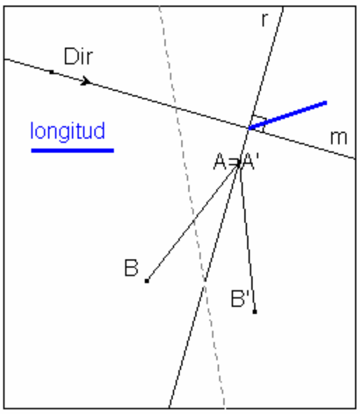


- Marcamos una recta **r** perpendicular a **m** por **A** y posteriormente reflejamos el segmento AB con respecto a esta recta.

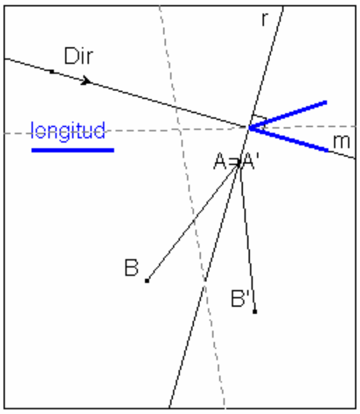




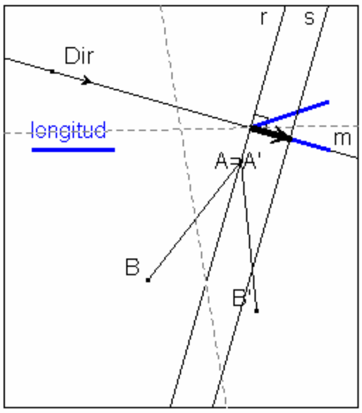
- Transferimos la longitud al pie de la perpendicular.

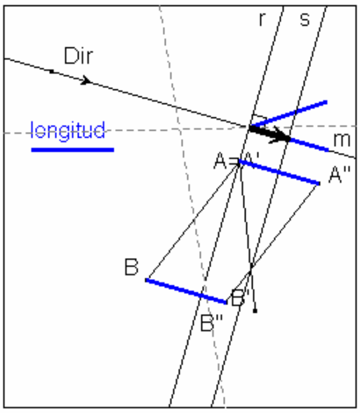


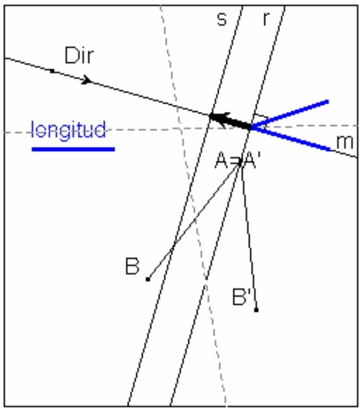
- Marcamos la calca del nuevo segmento con respecto a la bisectriz del ángulo formado entre éste y **m**.

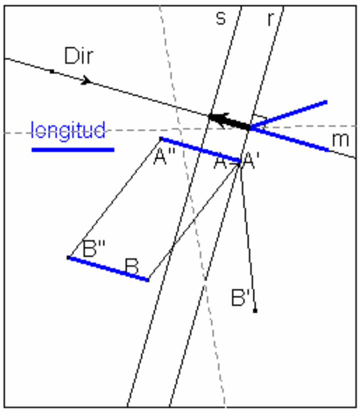


- Marcamos el punto medio de la calca y trazamos una recta **s** perpendicular a **m** por éste, posteriormente calcamos el segmento **A’B’** con respecto a **s** y el segmento que obtenemos es la traslación de **AB** con respecto a la dirección y longitud dadas, vale la pena hacer la observación de que si reflejamos el punto medio con respecto a **s**, trazamos una perpendicular **s’** a **m** por este nuevo punto y reflejamos **A’B’** con respecto a esta recta, obtenemos otra traslación de **AB** con respecto a la misma dirección y longitud dadas pero en sentido contrario.





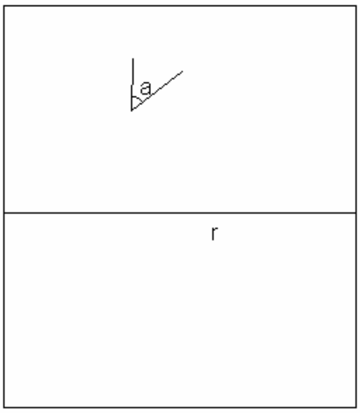




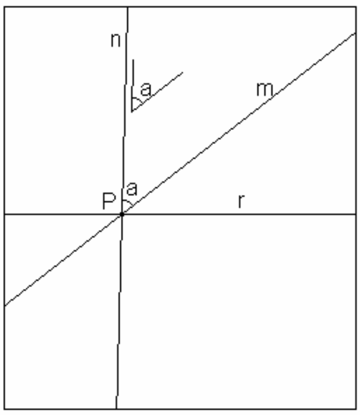
Finalmente notemos que el sentido de la traslación está dado por el sentido positivo en el que se recorre el segmento que va del pie de **r** al pie de **s**.

VII . Transferir un ángulo dado.

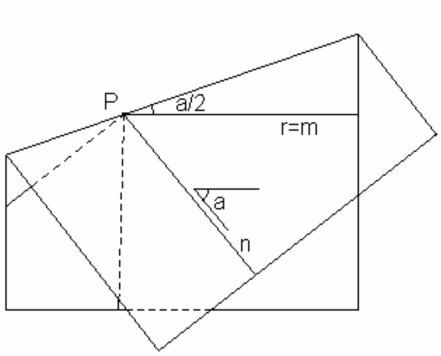
- Supongamos que queremos trasladar el ángulo **a** a la recta **r**, es decir, queremos trazar una recta **n’** que forme un ángulo igual al ángulo **a** con la recta **r**.

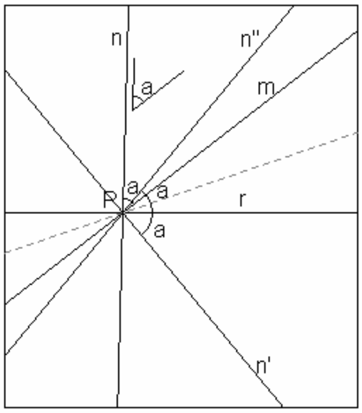


- Comenzamos marcando dos rectas **m** y **n** paralelas a las rectas que forman el ángulo **a** de tal forma que se intersequen con **r** en un punto **P**.

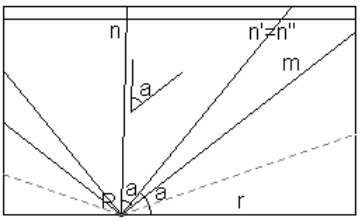


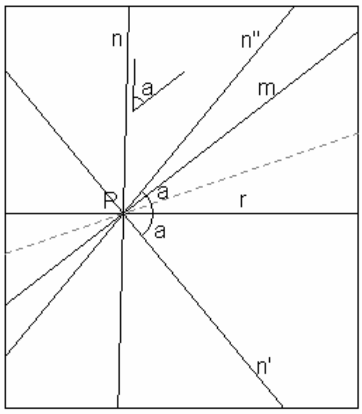
- Doblamos la hoja para que **m** se encime con **r** y marcamos la calca **n’** de **n** con respecto a este doblez. Notemos que el ángulo formado por **r** y **n’** es igual al ángulo dado pero con orientación inversa. En caso de que se desee que el ángulo tenga la misma orientación, es decir, si queremos que se recorra en el mismo sentido que el original sólo tenemos que reflejar las dos rectas con respecto a la directriz.



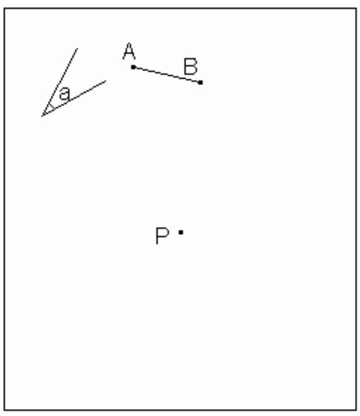


- Vale la pena hacer la observación de que si marcamos la calca de **n’** con respecto a **r**, obtenemos una recta **n’’** que forma con **r** un ángulo igual al ángulo dado.

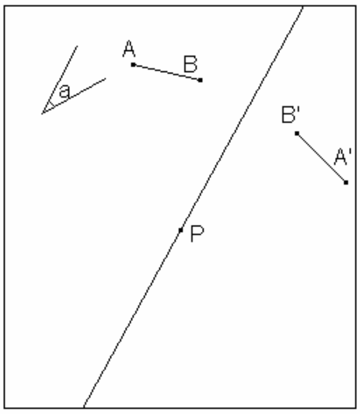




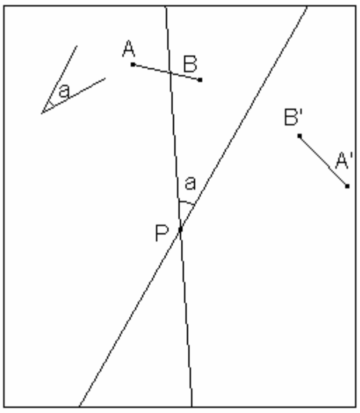
VIII . Rotación de un segmento en torno a un punto y por un ángulo dados.



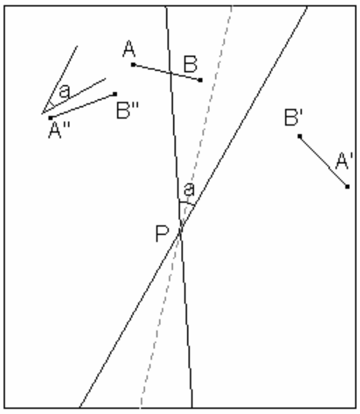
- Marcamos una recta **l** por **P** y reflejamos el segmento **AB** con respecto a ésta.

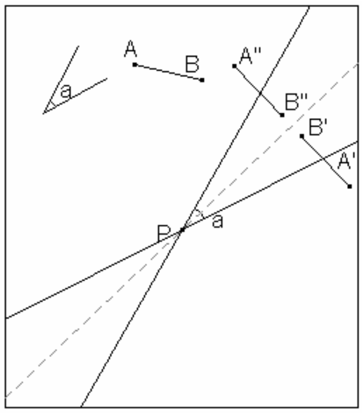


- Trasladamos el ángulo dado a la recta l.



- Marcamos la bisectriz del ángulo y reflejamos el segmento **A'B'** con respecto a ésta. El segmento **A''B''** que obtenemos así es la rotación del segmento **AB** con respecto al ángulo y al punto dados. Al igual que en el caso de la traslación, dado un punto y un ángulo, hay dos sentidos en los que se puede efectuar la rotación, pues en el paso anterior había la posibilidad de marcar dos rectas que formaran el ángulo dado con **l**, cada una corresponde a un sentido en el que se recorre el ángulo.





Hasta aquí hemos mostrado que las transformaciones que generan el grupo euclidiano se pueden realizar con el doblado de papel, que podemos hacer rotaciones, reflexiones y traslaciones, así que podemos concluir que se pueden hacer todas las Isometrías, pues cada una de éstas esta generada por a lo mas tres reflexiones. Por otra parte, en el capítulo siguiente veremos que se puede dividir y multiplicar con el doblado de papel y por consecuencia se pueden hacer homotecias que junto con las isometrías generan las similaridades.

CAPITULO II: CÓNICAS

Algunos de los objetos más bellos y conocidos de la Geometría Euclidiana son las cónicas, que son muy apreciadas no sólo por su apariencia sino también por sus propiedades que en muchos casos resultan sorprendentes.

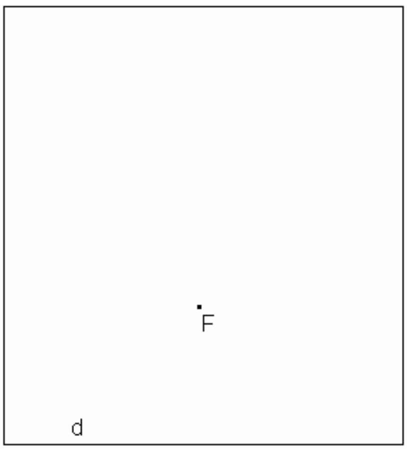
En este capítulo haremos una construcción de cada una de ellas sin usar ecuaciones, sino a partir de la representación en papel de su definición. Veremos algoritmos para representar sus tangentes a partir del doblado de papel que están justificados por argumentos de la Geometría Euclidiana elemental tales como la semejanza de triángulos.

LA PARÁBOLA

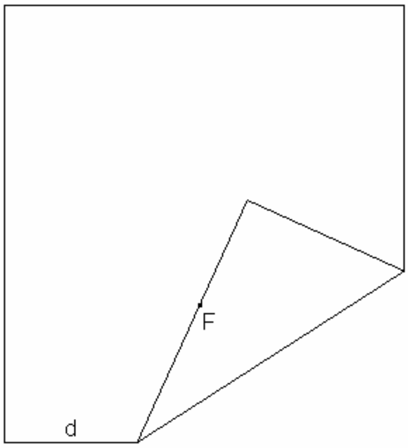
DEFINICIÓN : Una parábola es el conjunto de puntos tales que su distancia a un punto fijo llamado foco es igual a su distancia a una recta fija llamada directriz.

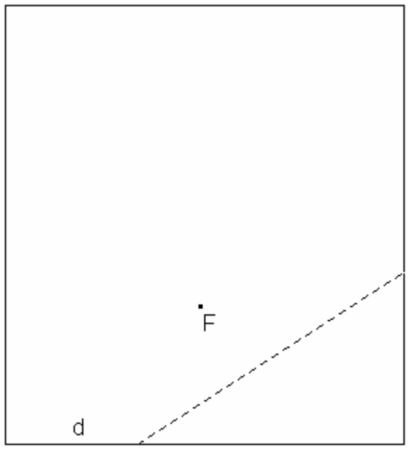
ALGORITMO:

- Márquese un punto **F** en la hoja y designemos un lado de ésta como **d**.

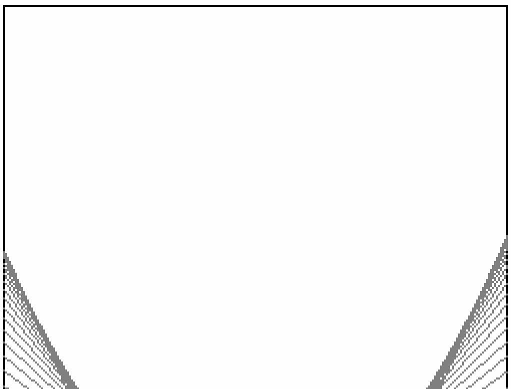


- Dóblese de tal manera la hoja que el lado **d** se encime con **F** y desdóblese la hoja después.



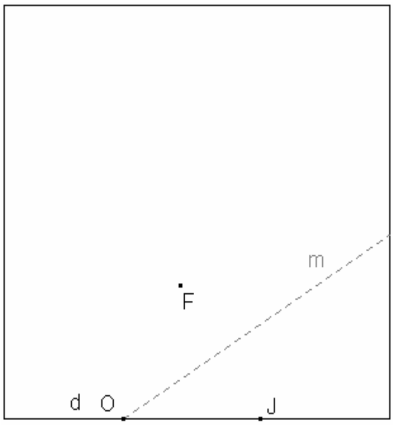


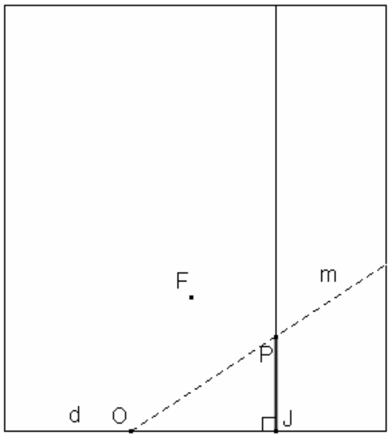
- Nótese que se pueden hacer muchos dobleces siguiendo la instrucción anterior, háganse tantos como se quiera teniendo presente que mientras más líneas se marquen, más clara será la representación de la parábola.

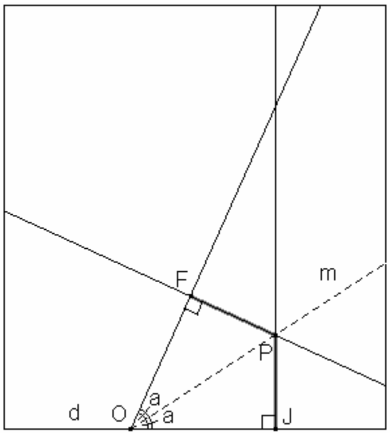


Hasta ahora sólo hemos trazado rectas pero hay un punto **P** de cada recta que pertenece a la parábola el cual encontraremos a continuación.

En la siguiente ilustración se muestra nuestra hoja de papel con un doblez como los que acabamos de hacer marcado con una línea punteada **m** cuya intersección con **d** la llamamos **O**. En el lado **d** marcamos el punto sobre el que se encima **F** al efectuar el doblez al cual llamamos **J**. A continuación marcamos una línea perpendicular a **d** por **J** y llamamos **P** a su intersección con **m** y posteriormente marcamos las líneas **OF** y **FP**.





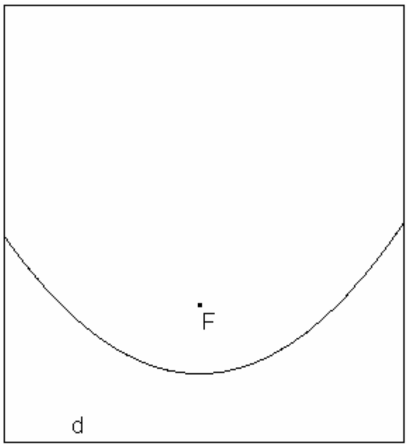


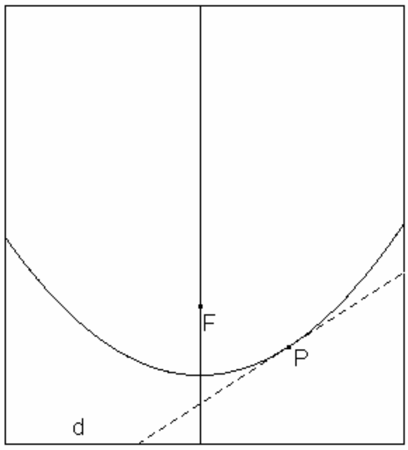
Observemos los triángulos ΔOPJ y ΔOPF; éstos son semejantes pues cumplen uno de los criterios de congruencia establecidos por la Geometría Euclidiana que nos dice que si dos triángulos son tales que dos de sus lados son iguales y el ángulo entre ellos es el mismo entonces los triángulos son congruentes. En este caso los dos triángulos comparten el lado **PO** y el lado **OJ** es igual al **OF** pues uno se encima con el otro al momento de hacer el doblez **m** y del mismo modo los ángulos ∠JOP y ∠FOP son iguales.

Si los triángulos son iguales, entonces todos sus lados correspondientes son iguales, particularmente **PF** y **PJ** son iguales, pero recordemos que **PF** es la distancia de **P** a **F** y que **PJ** es la distancia de **P** a **d**, por lo tanto **P** es equidistante a un punto **F** y a una recta **d** que es la definición que debe cumplir todo punto perteneciente a una parábola.

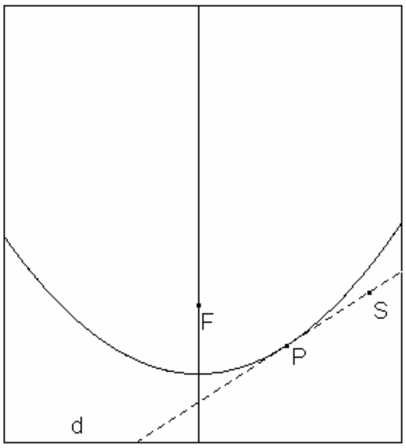
Tenemos hasta aquí que cada una de las rectas contiene un punto **P** de la parábola, pero no hemos probado que cada recta sea tangente a la parábola. Recordemos que en general la tangente en un punto a una curva se define como el límite de la secante en ese punto, pero en el caso de las cónicas, esa definición es equivalente con la condición de intersecar una sola vez a éstas y en caso de la parábola ser distintas del eje focal y en la hipérbola no ser paralelas a las asíntotas.

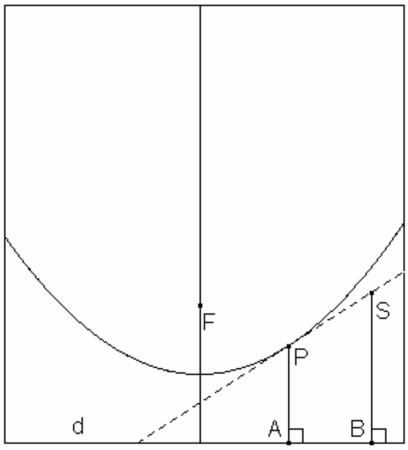
Veamos ahora un dibujo de la parábola solamente y uno en el se muestra ésta con su eje focal y una de sus tangentes con su punto **P** de tangencia.



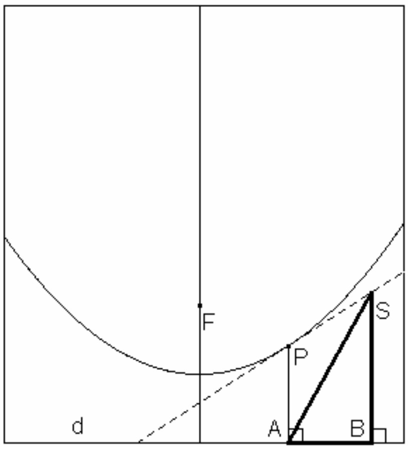


Posteriormente marcamos un punto **S** distinto de **P** en la recta y trazamos una perpendicular a **d** por **P** y una por **S**.

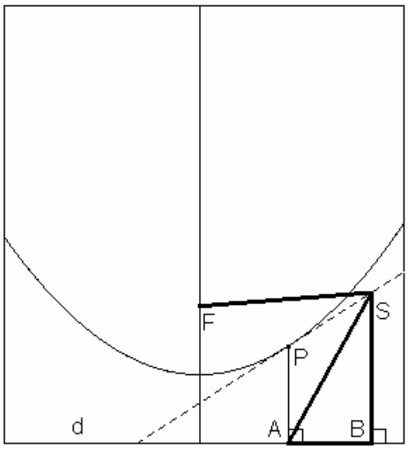


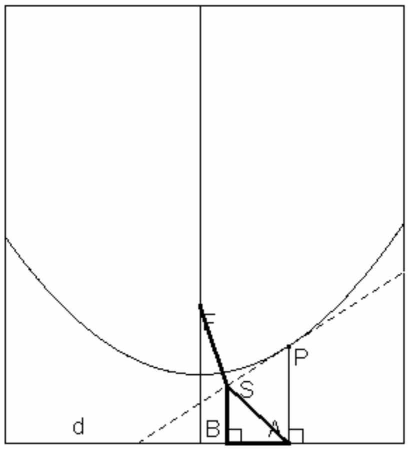


Consideremos el triángulo ΔABS, éste es recto y tiene por hipotenusa a **SA** por lo tanto **SA**>**SB**, pues **SB** es un cateto.



Por construcción sabemos que la recta punteada es la mediatriz de **FA**, esto implica que **S** es equidistante de **F** y **A**, es decir, **FS**=**SA**, pero **SA**>**SB** y **SB** es la distancia de **S** a **d**, por lo tanto **S** no esta en la parábola. Vale la pena hacer ver que la demostración es válida para cualquier punto de la recta distinto de **P** sin importar en cual de las dos regiones en que **P** divide a ésta se encuentre.



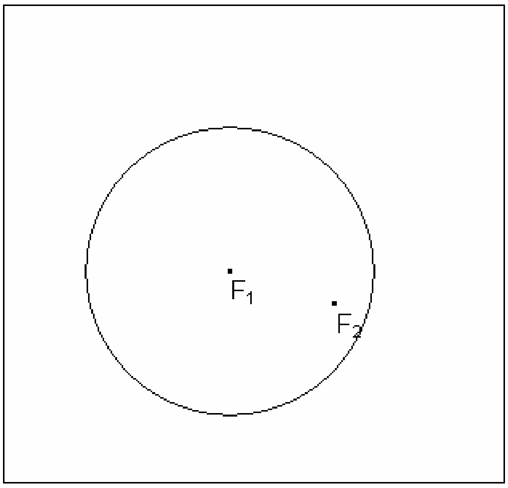


LA ELIPSE

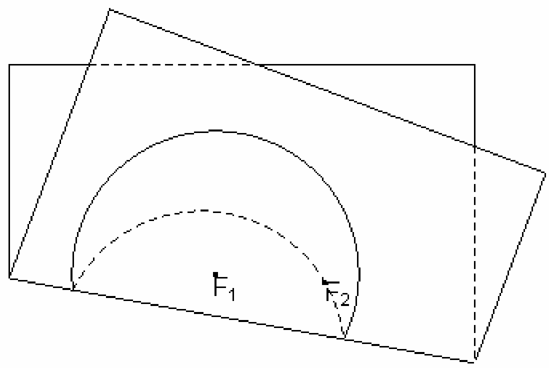
<u>DEFINICIÓN :</u> Una elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias con respecto a dos puntos fijos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ es igual a una constante positiva.

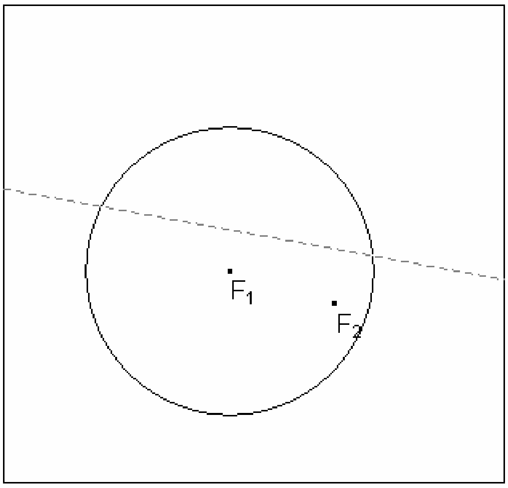
ALGORITMO:

- Dados $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ márquese un círculo, con centro $\mathbf{F_1}$ y que tenga a $\mathbf{F_2}$ en su interior.

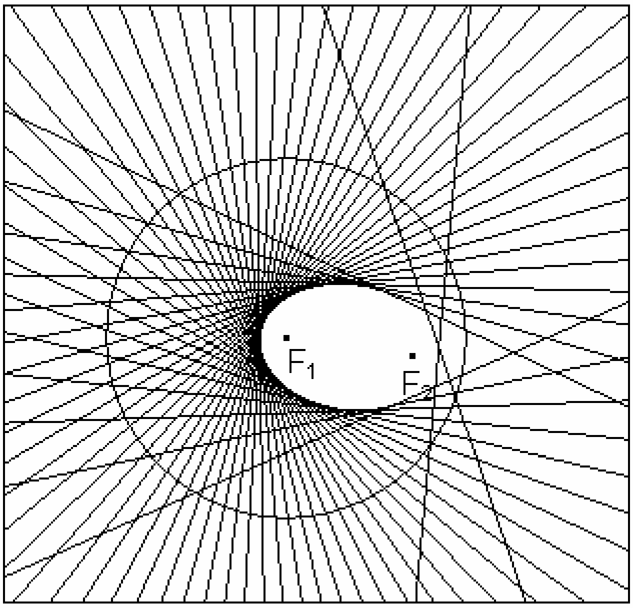


- Hágase un doblez que encime $\mathbf{F_2}$ con un punto del círculo y desdóblese la hoja después.

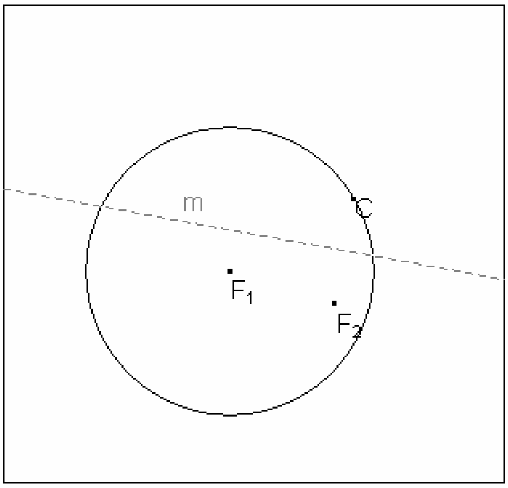




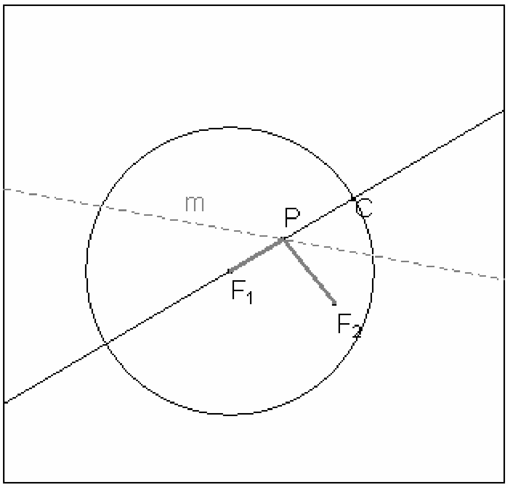
- Nótese que al igual que en caso de la parábola se pueden hacer muchos dobleces siguiendo la instrucción anterior, háganse tantos como se quiera teniendo presente que mientras más líneas se marquen más clara será la representación de la elipse. Posteriormente veremos cómo encontrar los puntos de ésta.



A continuación se muestra una hoja con un círculo y su centro $\mathbf{F_1}$, un punto en su interior $\mathbf{F_2}$, un doblez marcado por una línea punteada **m** y el punto **C** del círculo sobre el que se encima $\mathbf{F_2}$ al hacer el doblez **m**.



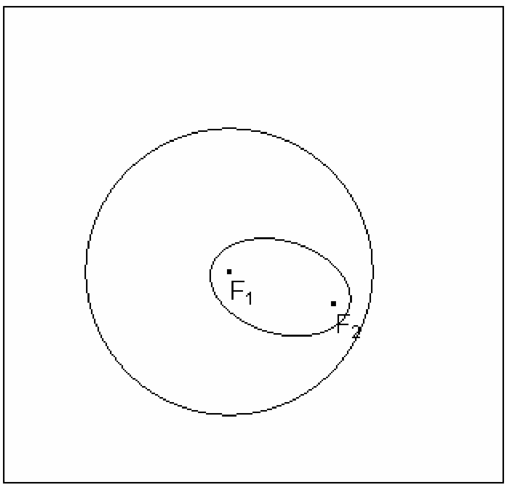
Ahora marcamos la recta que pasa por $\mathbf{F_1}$ y **C** y llamamos **P** al punto donde esta se interseca con **m**.

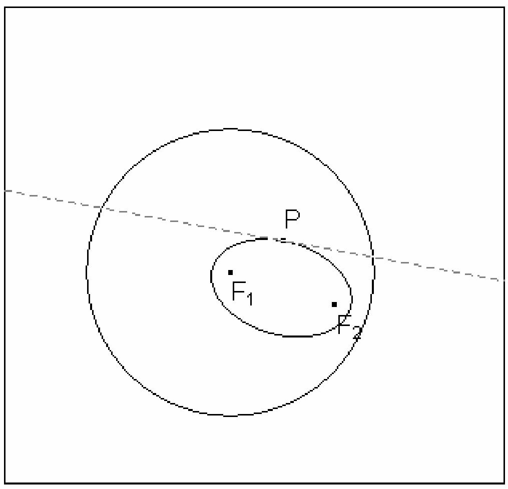


Afirmamos que **P** es un punto de la elipse que tiene por focos a $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ y cuyos puntos cumplen que la suma de sus distancias a los focos es igual a una constante que es el radio del círculo.

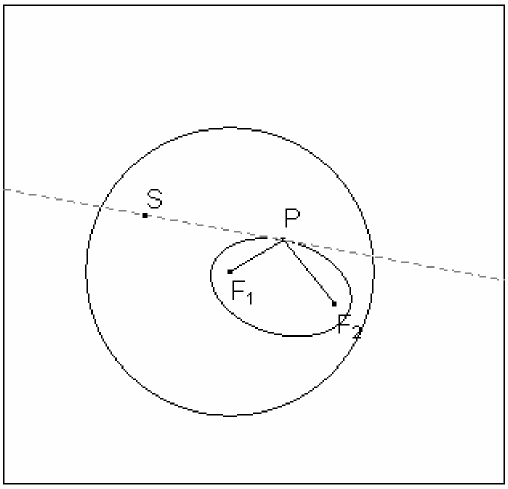
Notemos que **PC** es igual a $\mathbf{PF_2}$ pues ambos segmentos se enciman al hacer el doblez **m**, es decir, **P** es un punto en la mediatriz de **C** y $\mathbf{F_2}$. Así pues la suma de $\mathbf{F_1P}$ con $\mathbf{PF_2}$ es igual a la suma de $\mathbf{F_1P}$ con **PC** que a su vez es igual a $\mathbf{F_1C}$ (el radio del circulo) que es constante. Como $\mathbf{F_1P}$ y $\mathbf{PF_2}$ son las distancias de **P** a los focos, **P** cumple la definición que mencionamos antes.

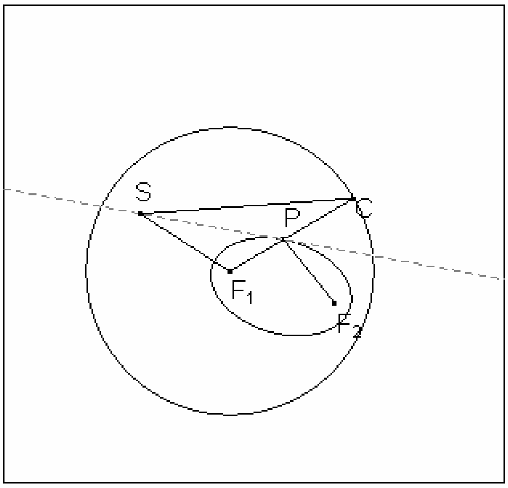
Al igual que en el caso de la parábola nos hace falta demostrar que las rectas trazadas son tangentes. En los siguientes dibujos se muestra la elipse y después se muestra ésta junto con una tangente y su punto de tangencia.





Después unimos **P** con cada uno de los focos y marcamos un punto **S** en la tangente, posteriormente prolongamos $\mathbf{F_1P}$ hasta cortar al circulo en **C** y unimos **S** con **C** y con $\mathbf{F_1}$.





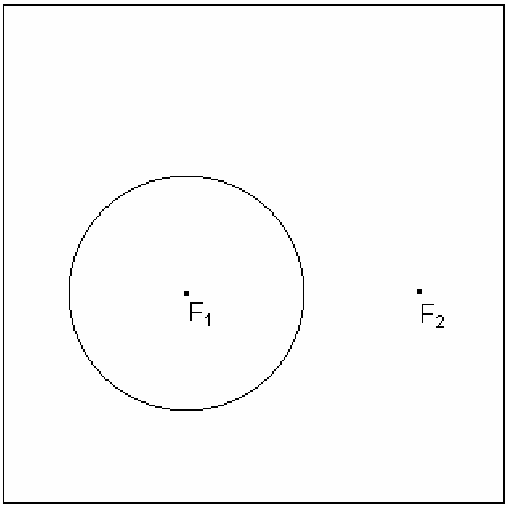
Como ya vimos $\mathbf{F_1C}$ es igual a la suma de las distancias de **P** con respecto a los focos y esa suma debe ser la misma para todos los focos de la elipse. En el caso de **S** esto no se cumple pues como sabemos en todo triángulo sucede que cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos, es decir, $\mathbf{F_1S} + \mathbf{SC} > \mathbf{F_1C}$, por lo tanto **S** no está en la elipse.

LA HIPÉRBOLA

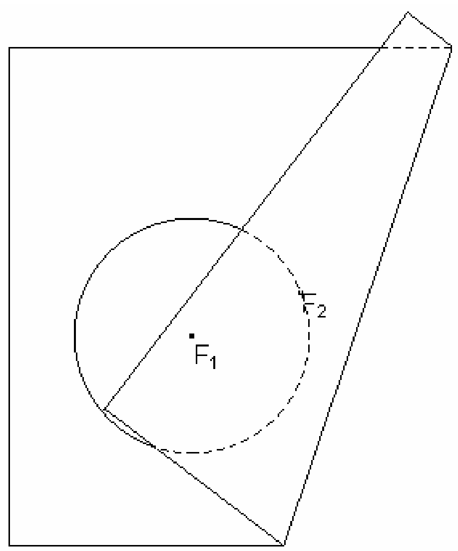
<u>DEFINICIÓN :</u> Una hipérbola es el conjunto de puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias con respecto a dos puntos fijos $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ es igual a una constante positiva.

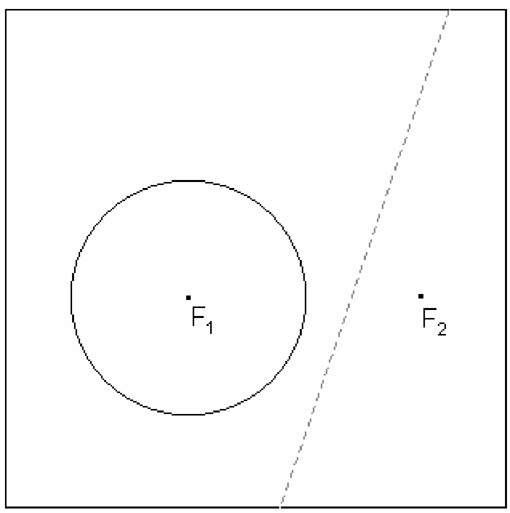
ALGORITMO:

- Márquese un círculo, su centro $\mathbf{F_1}$ y un punto $\mathbf{F_2}$ en su exterior.

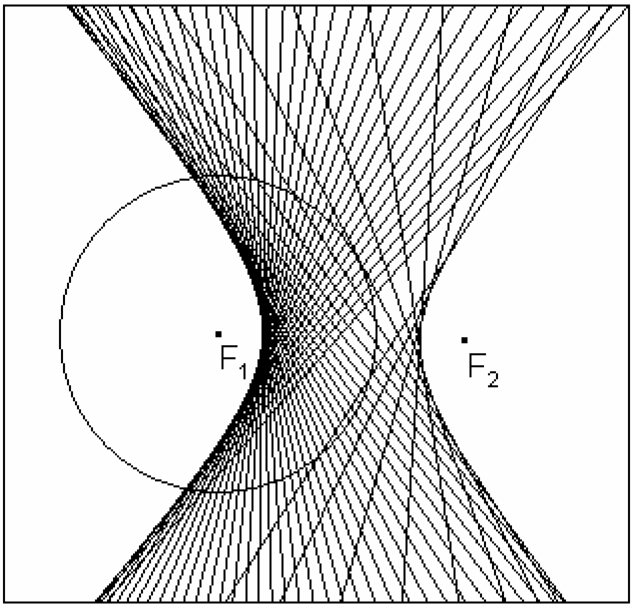


- Hágase un doblez que encime $\mathbf{F_2}$ con un punto del círculo y desdóblese la hoja después.



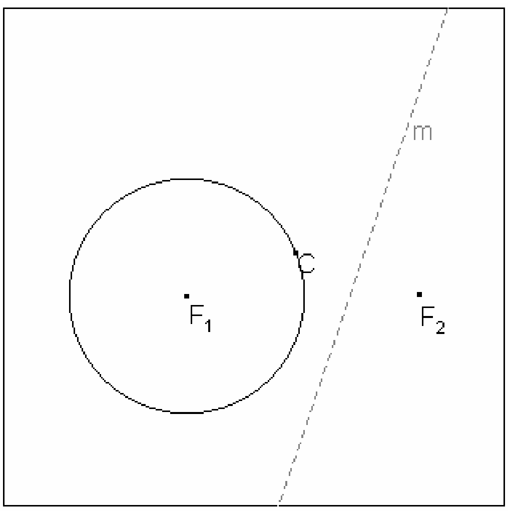


- Nuevamente tenemos que se pueden hacer muchos dobleces siguiendo la instrucción anterior, háganse tantos como se quiera teniendo presente que mientras más líneas se marquen más clara será la representación de la hipérbola.

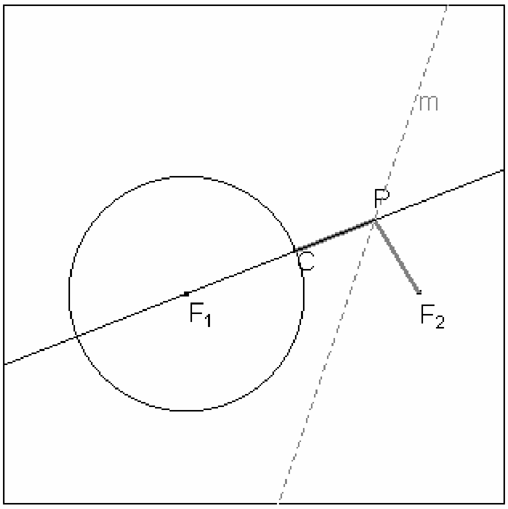


Al igual que en los casos anteriores veremos cómo encontrar los puntos de la Hipérbola mediante su definición.

En la siguiente ilustración se muestra la hoja con el círculo, su centro $\mathbf{F_1}$, un punto $\mathbf{F_2}$ en su exterior, un doblez marcado por una línea punteada **m**. También vemos el punto **C** del círculo sobre el que se encima $\mathbf{F_2}$ al hacer el doblez **m**.

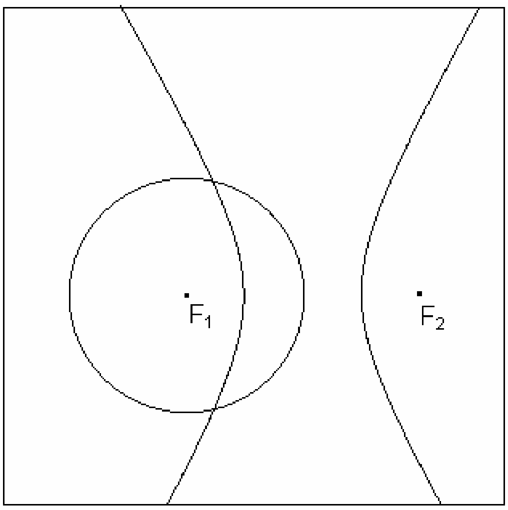


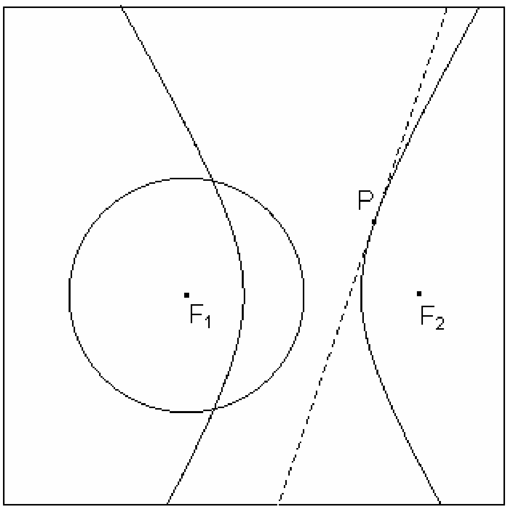
Marcamos la línea que une $\mathbf{F_1}$ y **C** y llamamos **P** al punto donde se interseca con **m**.



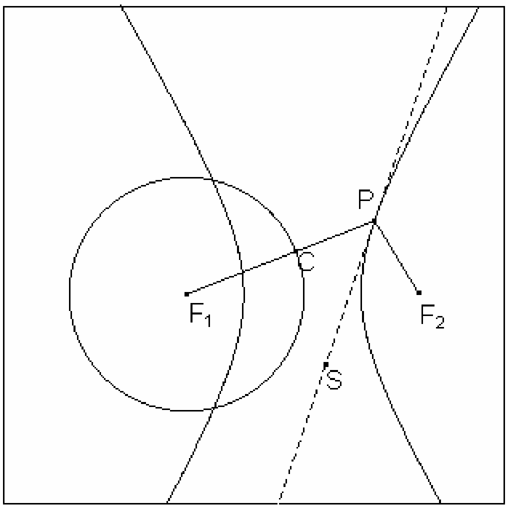
Notemos que $\mathbf{F_1P} = \mathbf{F_1C} + \mathbf{CP}$, y como $\mathbf{F_2}$ se encima con **C** al hacer el doblez, el segmento **CP** el igual a $\mathbf{F_2P}$. Así que la diferencia de $\mathbf{F_1P}$ con **CP** es igual a la diferencia de $\mathbf{F_1P}$ con $\mathbf{F_2P}$, pero la primera es igual a un segmento de magnitud igual al radio del circulo. Podemos decir entonces que **P** es un punto en la hipérbola pues la diferencia de sus distancias con respecto a los focos es la longitud del radio del circulo que es constante.

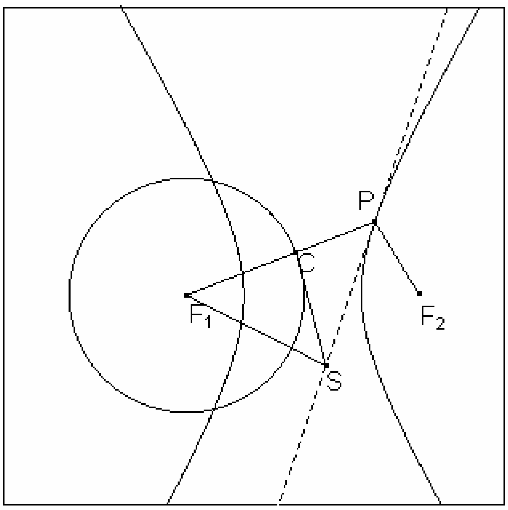
Pasemos ahora a demostrar que las rectas son tangentes, al igual que antes comenzamos por mostrar la hipérbola y después trazamos una tangente con su punto de tangencia.





A continuación unimos **P** con los dos focos y marcamos un punto **S** en la tangente, después unimos **S** con **C** y con **F_1**. Como ya se dijo, **F_1C** es igual a la diferencia de las distancias de **P** con respecto a los focos y esa diferencia debe ser la misma en todos los puntos. En el caso de **S** esto no pasa y para verlo consideremos el triángulo ΔF_1CS en el que tenemos que dos de sus lados son iguales a sus distancias con respecto a los focos (**SC** = **SF_2**, porque **S** está en la mediatriz **CF_2**) y sabemos que en todo triángulo sucede que cualquiera de sus lados es mayor que la diferencia de los otros dos. Es decir **F_1C** > /**SF_1-SC**/ por lo tanto **S** no está en la parábola.





CAPITULO III: ECUACIONES I

Los polinomios son uno de los temas que más se han estudiado desde la antigüedad hasta nuestros días, son de interés para el Álgebra por que su estructura resulta ser muy interesante además de que es parecida a la de muchos otros objetos matemáticos. Para la Geometría Euclidiana son de interés las soluciones de las ecuaciones asociadas a éstos, pues en muchos casos es posible construirlas basándose en argumentos de semejanza y congruencia.

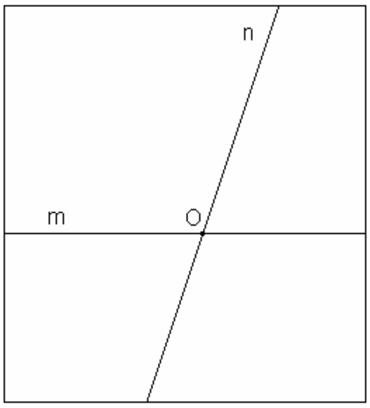
En este capitulo veremos cómo resolver ecuaciones de primer y segundo grado a través del doblado de papel y con las operaciones que ya vimos. En el caso de las ecuaciones de primer grado simplemente se expone el algoritmo de la división pues éstas se resuelven despejando directamente; para las ecuaciones de segundo grado se construye una parábola de la forma $4p(y - k) = (x - h)^2$ donde h y k son función de los coeficientes de la ecuación, esta parábola tiene la propiedad de que sus intersecciones con el eje X son las soluciones de la ecuación.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

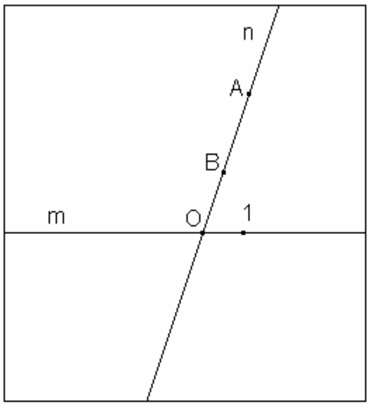
Una ecuación de primer grado en una variable es una expresión de la forma $ax + b = 0$ con $a\neq0$ y si dividimos entre **a** obtenemos una de la forma $x + c = 0$; en el caso de estas ecuaciones, podemos encontrar la solución a través de un sencillo despeje: $x = -c$. Lo que nos ocupa entonces es la construcción de c que es la división de **a** entre **b**, así que para construirlo necesitamos un algoritmo para dividir dos cantidades dadas.

Supongamos que $c = a/b$.

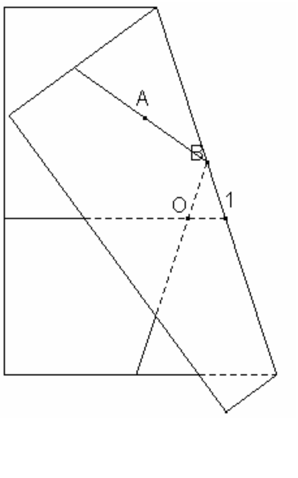
- Márquense dos dobleces concurrentes cualesquiera.

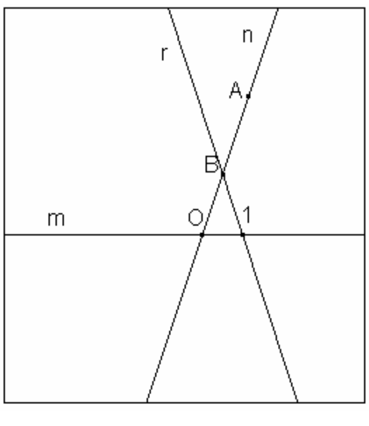


- Márquense en el doblez **n** un segmento de longitud **b** y otro de longitud **a**, en el diagrama se representan por los segmentos **OB** y **OA**; posteriormente en el doblez **m** marcamos un segmento de longitud **1**.

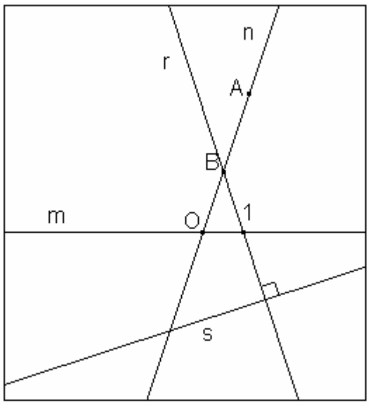


- Hágase un doblez **r** que pase por **B** y por **1**.

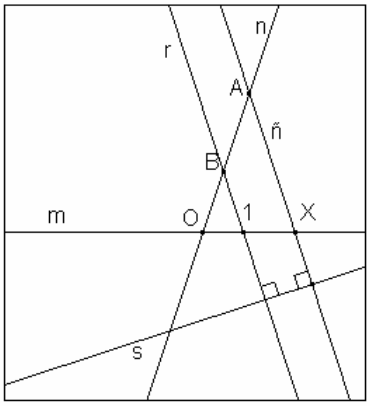




- Hágase un doblez **s** perpendicular a **r**.



- Hágase un doblez **ñ** perpendicular a **s** que pase por **A** y cuya intersección con **m** la denotamos como **X**. Nótese que **ñ** es paralelo a **r** pues ambos son perpendiculares a **s**.



Si llamamos **O** al punto de intersección de **r** y **m** tenemos que el segmento **OX** es la solución en términos de magnitud, es decir, en el caso de **c**<0 la solución es positiva y es tal cual el segmento **OX**; en el caso **c**>0 la solución es de igual magnitud al segmento **OX** pero se debe considerar negativa o tomada en sentido opuesto al sentido positivo (convencionalmente se representa una longitud positiva como un segmento que se recorre de izquierda a derecha y una negativa como un segmento que se recorre de derecha a izquierda).

Notemos que los triángulos ΔOB1 y ΔOAX son semejantes porque todos sus ángulos son iguales pues como **r** es paralela a **ñ** tenemos que los ángulos alternos son iguales, a saber:

. ∠OB1=∠OAX y ∠O1B=∠OXA

Así pues tenemos que:

OX/OA=O1/OB

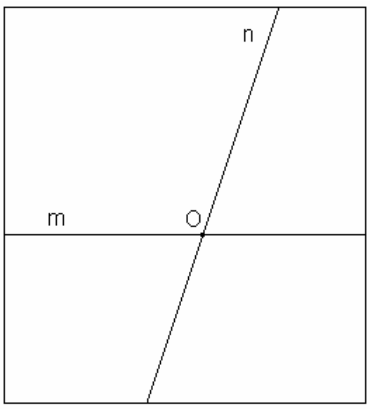
OX=(**OA·O1**)/**OB** y como **OA=a**; **O1=1** y **OB=b**

tenemos que **OX=a/b**

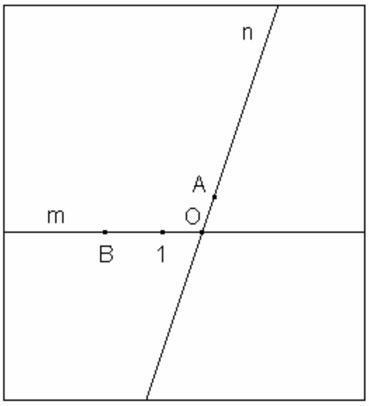
Esta serie de pasos constituye un algoritmo para construir la división de dos cantidades conocidas, vale la pena notar que a partir de éste se puede obtener tras un pequeño cambio, uno para la multiplicación de dos cantidades conocidas.

Supongamos que queremos multiplicar **a** por **b**.

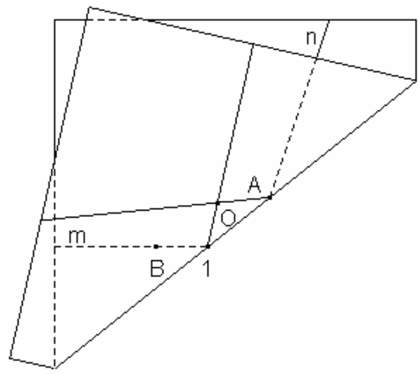
- Márquense dos dobleces cualesquiera concurrentes en un punto **O**.

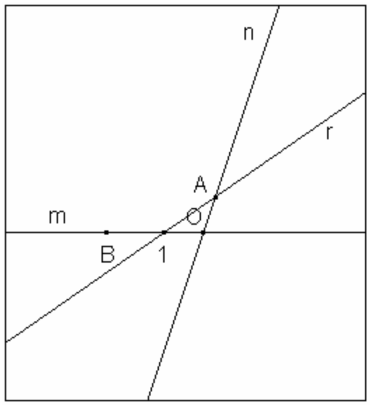


- Márquense en el doblez **m** un segmento de longitud **b** y otro de longitud **1**, y en el doblez **n** uno de longitud **a**.

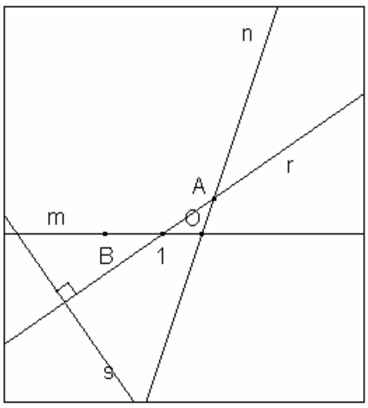


- Hágase un doblez **r** que pase por **A** y por **1**.

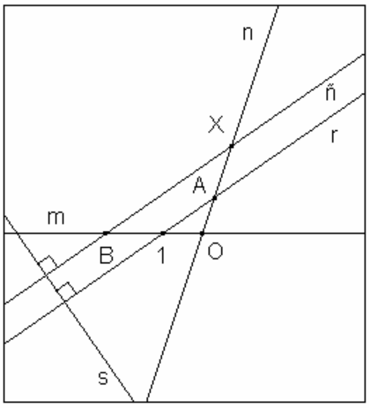




- Hágase un doblez **s** perpendicular a **r**.



- Hágase un doblez **ñ** perpendicular a **s** que pase por **B** y cuya intersección con **n** la llamamos **X**.



En este caso se tiene que los triángulos ∆OA1 y ∆OBX son semejantes y

OX/**OB**=**OA**/**O1**

OX=(**OB**·**OA**)/**O1** y tenemos que **OB**=**b**; **OA**=**a** y **O1**=**1**

por lo tanto **OX**=**ab**.

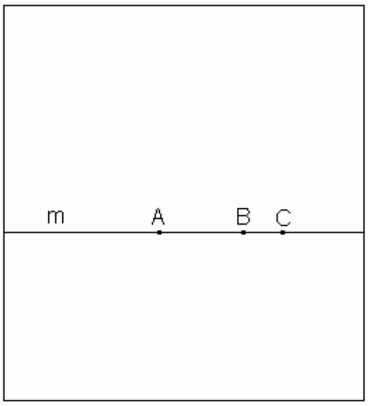
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es una expresión de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$ con $A\neq 0$. Cada ecuación esta forma se puede dividir entre A y llevar a una de la forma $x^2 + bx + c = 0$ donde $b=B/A$, $c=C/A$ y el coeficiente del término cuadrático es **1** basta concentrarnos en estas últimas.

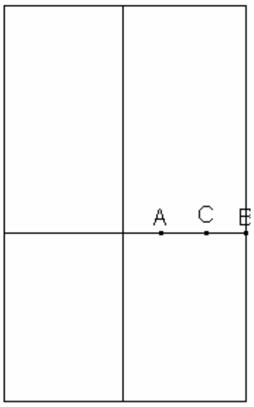
En algunos casos, la resolución de ecuaciones de segundo grado (aquéllas de la forma $x^2 = c$) está asociada a la construcción de la raíz cuadrada de una cantidad dada, así que haremos un breve paréntesis para ver el algoritmo para la extracción de la raíz cuadrada de una cantidad conocida.

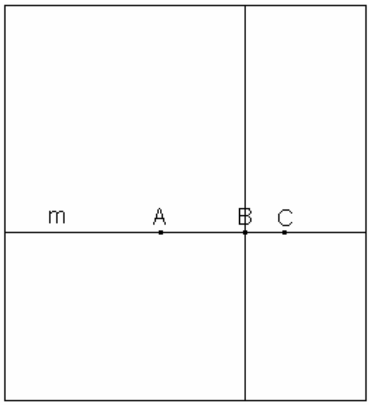
Supongamos que queremos obtener la raíz cuadrado de un número racional c (positivo).

- Márquese un doblez **m** y sobre este márquese un segmento **AB** de longitud **c** seguido de un segmento **BC** de longitud **1**.

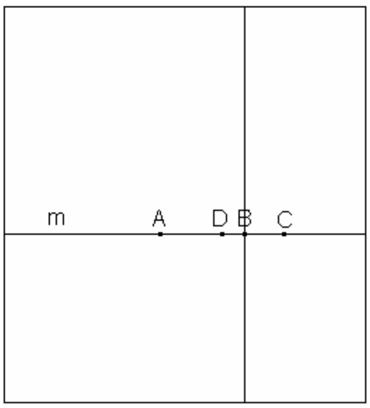


- Dóblese un doblez **n** perpendicular a **m** que pase por **B**.

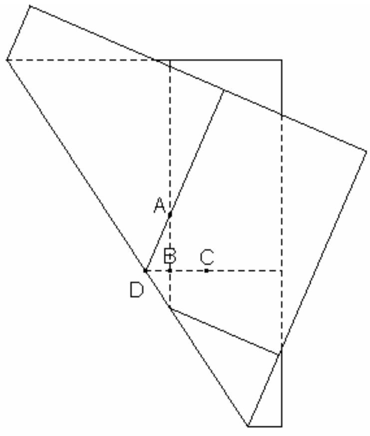


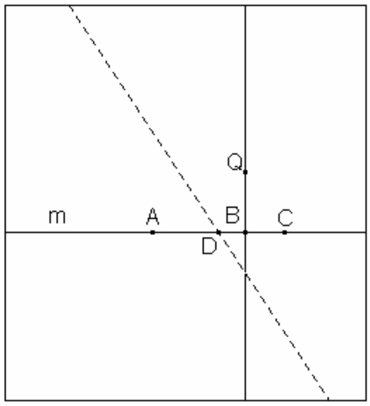


- Encuéntrese el punto medio **D** del segmento AC.

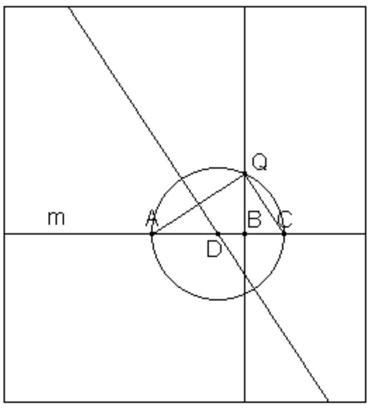


- Márquese un doblez que pase por **D** y encime cualquiera de los extremos del segmento **AC** en m y llámese **Q** al punto de m sobre el que se encima.





Notemos que los puntos **A**, **C** y **Q** son equidistantes de **D** por lo que debe haber un círculo que pase por los tres, esto nos permite saber que el triángulo ΔAQC es un triángulo rectángulo por que el segmento **AC** es diámetro del círculo pues contiene su centro **D**.



Así pues tenemos que los triángulos ΔABQ y ΔQBC son rectos y semejantes entre sí, pues

$$\angle BAQ = \pi/2 - \angle AQB = \angle BQC$$

así que $\angle AQB = \angle QCB$

Esto nos dice que las razones entre sus lados son las mismas

AB/**QB** = **QB**/**BC**

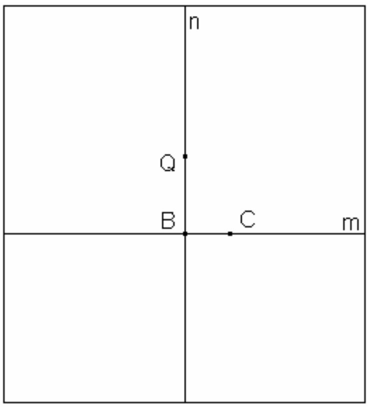
(**AB**)(**BC**) = $\mathbf{QB^2}$ y como **AB** = **c** y **BC** = **1**

c = $(\mathbf{QB})^2$

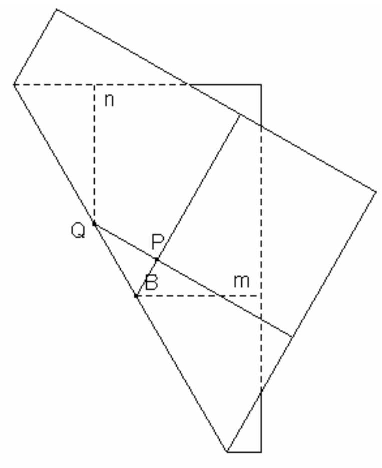
$\mathbf{c^{1/2}}$=**QB**

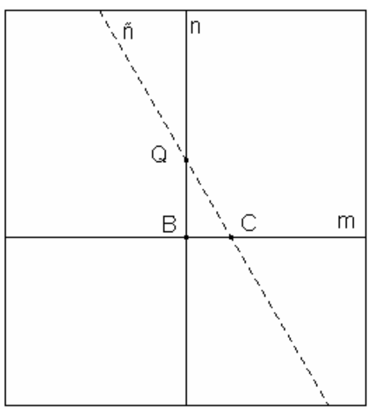
Vale la pena mencionar que si queremos hacer la operación inversa, es decir, dada una cantidad construir su cuadrado, podemos hacerlo usando una configuración similar.

- Márquense dos dobleces perpendiculares **n** y **m** cuya intersección sea **B**. Sobre **m** márquese un segmento BC de longitud **1** y sobre **n** márquese un segmento QB de longitud **c**.

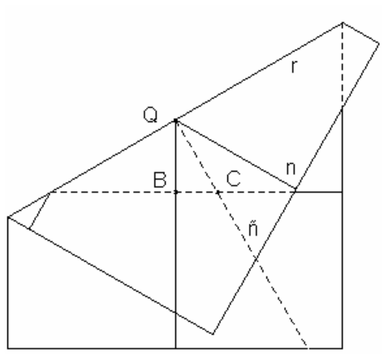


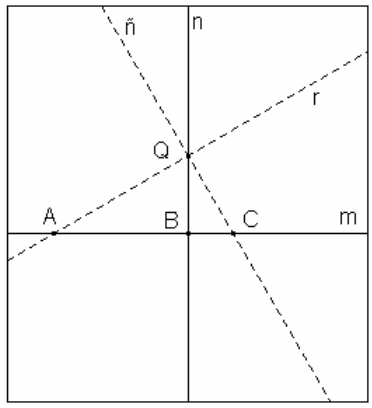
- Márquese un doblez **ñ** por **C** y **Q**.





- Márquese un doblez **r** perpendicular a **ñ** por **Q** y llámese **A** a la intersección con **m**.





En el diagrama anterior tenemos que los triángulos rectos ΔABQ y ΔQCB son semejantes, ya que

$\angle BAQ = \pi/2 - \angle AQB = \angle BQC$

Y por tanto $\angle AQB = \angle QCB$

AB/QB = QB/BC

AB·BC = (**QB**)^2 pero como **QB** = **c** y **BC** = **1**

AB = $\mathbf{c^2}$

"El Método de la Parábola"

Un método más general para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ lo podemos definir a partir de ciertas manipulaciones de la ecuación de la parábola; éste tiene la ventaja de que sirve para resolver todas las ecuaciones de segundo grado existentes, respeta multiplicidad y signo de las ecuaciones y no distingue casuística, es decir, está constituido por un solo algoritmo.

Una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje Y y cuyo vértice tiene coordenadas (h,k) tiene por ecuación

$4p(y – k) = (x – h)^2$

Y si suponemos que $4p = 1$ obtenemos

$y – k = (x – h)^2$,

Que representa una parábola que abre hacia arriba (o equivalentemente : la directriz está debajo del foco) y cuya directriz es la recta $y = k – ¼$.

Consideremos ahora una ecuación de segundo grado a la que igualamos a y para después llevarla a la forma anterior.

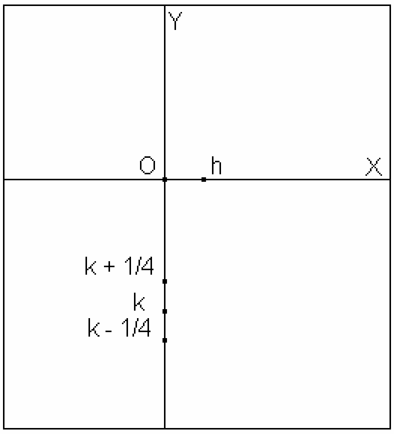
$y = x^2 +bx +c$
$y = (x + b/2)^2 –b^2/4 +c$
$y – (c – b^2/4) = (x + b/2)^2$

Así hemos obtenido los coeficientes de h y k en función de los de la ecuación. Esta es la ecuación de una parábola que tiene la virtud de que sus intersecciones con el eje X son exactamente las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$.

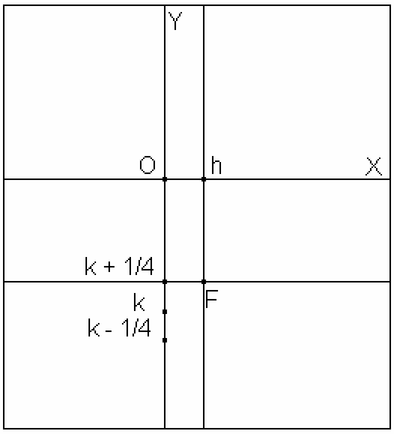
$h = -b/2$ y $k = c – b^2/4$

Recordemos que al construir la ecuación de la parábola supusimos que $4p = 1$, o equivalentemente que $p = ¼$, esto nos dice que la distancia del vértice a la directriz y al foco es ¼. Con esta ultima observación ya tenemos todos los elementos para construir nuestra parábola, su vértice es $(-b/2, c –b^2/4)$ y su directriz es $Y = k –1/4$.

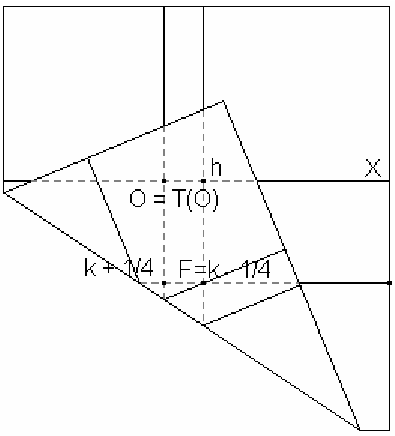
- Márquense dos dobleces perpendiculares que serán los ejes X y Y, mídase un segmento de longitud **h** en el eje **X** y en el eje **Y** uno de **k**, otro de longitud **k – 1/4** y otro de **k + ¼**.

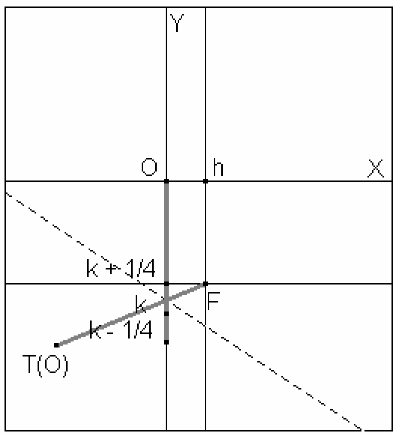


- Márquese una perpendicular al eje **X** por **h** y una perpendicular al eje **Y** por **k + ¼** y llamemos **F** al punto de intersección.

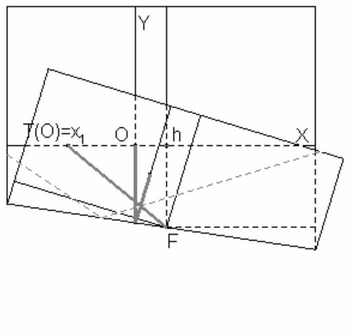


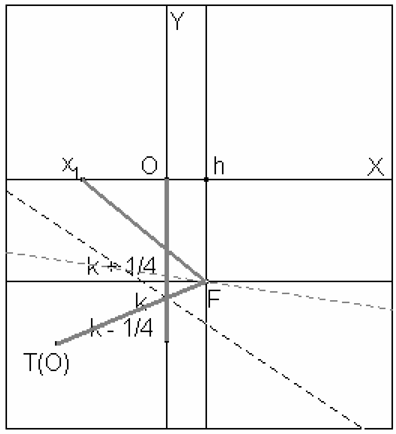
- Márquese un doblez que encime **k – ¼** sobre **F** y llamemos **T(O)** al punto sobre el cual se encima **O** (el origen o el punto de intersección de los primeros dos dobleces). Nótese que el segmento **T(O)F** es igual al segmento **O(K-1/4).**

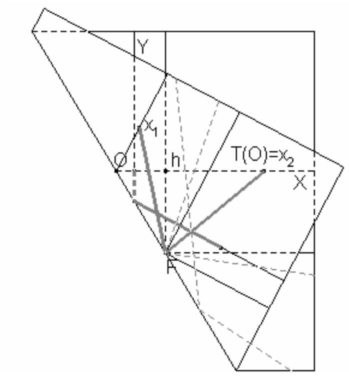


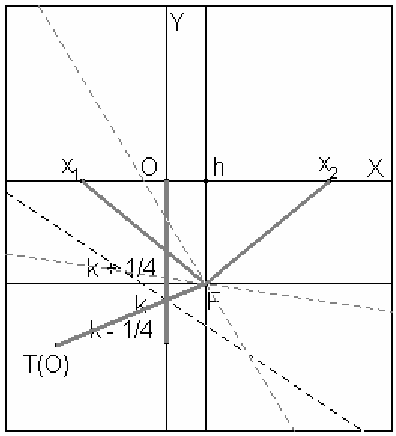


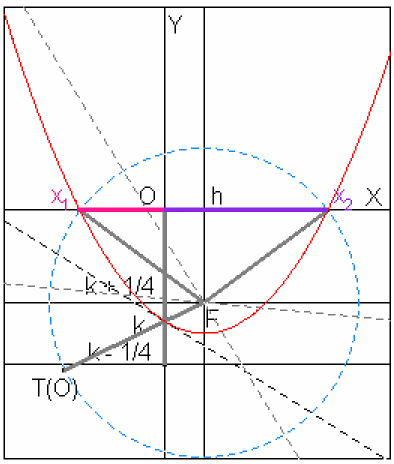
- Márquese un doblez que pase por **F** y que encime **T(O)** en el eje **X**. Hay dos formas de hacer esto, háganse ambas y llámense $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ a los puntos del eje **X** en los que se encima **T(O)**, cada uno es un punto de la parábola y una solución de la ecuación, esto porque la distancia de $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ a **F** es exactamente $\mathbf{|k - 1/4|}$ y la distancia entre el eje y la directriz es también $\mathbf{|k - 1/4|}$, es decir, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son equidistantes a **F** y a la recta $Y = k - \frac{1}{4}$.





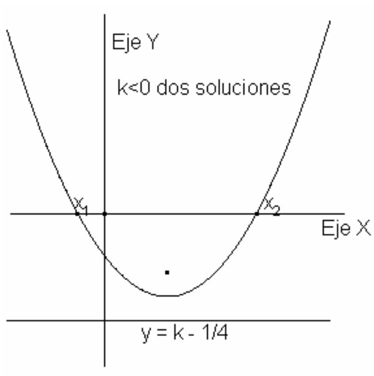


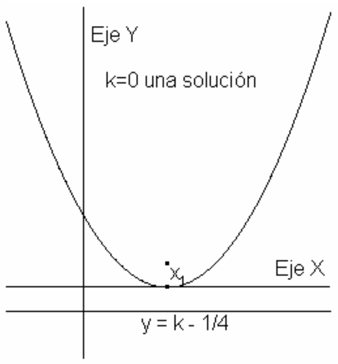


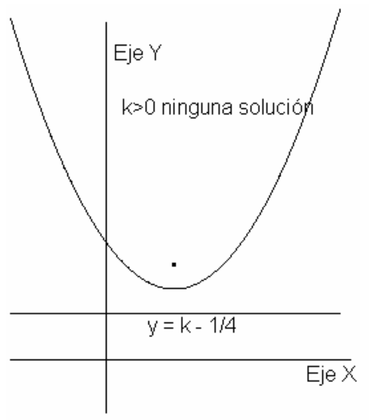


Así pues hemos construido dos segmentos **Ox_1** y **Ox_2** que indican las soluciones de la ecuación. Nótese que este método nos permite construir las soluciones respetando su signo y multiplicidad, pues si una solución **x** esta a la izquierda de **O** representa una cantidad negativa, y si esta a la derecha una positiva.

Cabe hacer la observación de que la ecuación tiene dos soluciones simples, una doble o ninguna según el número de intersecciones que tenga la parábola con el eje **X**, lo cual está determinado por el valor de k.





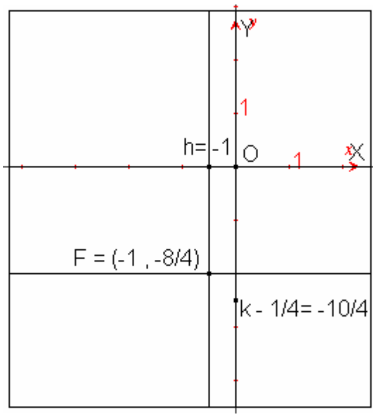


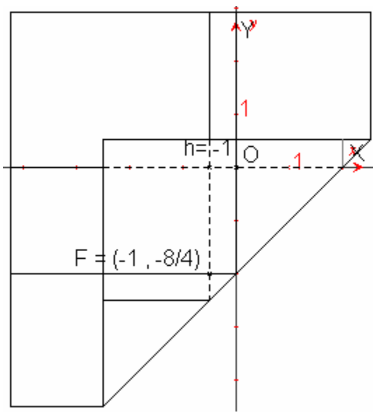
EJEMPLO:

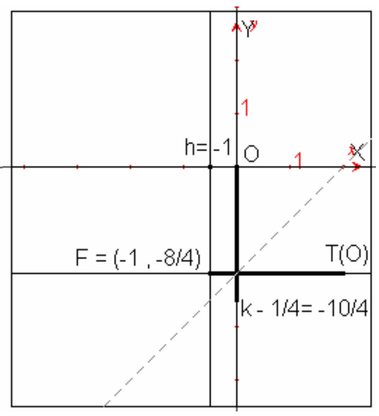
Consideremos la ecuación $x^2 + x – 2 = 0$

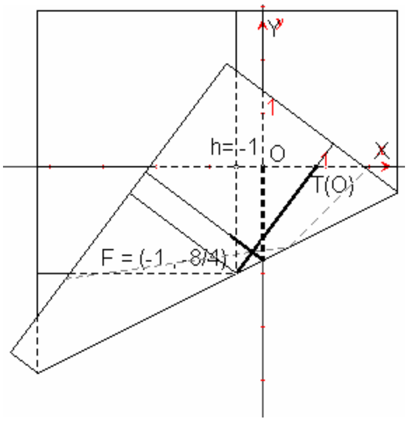
$h = -b/2$
$k = c - b^2/4$

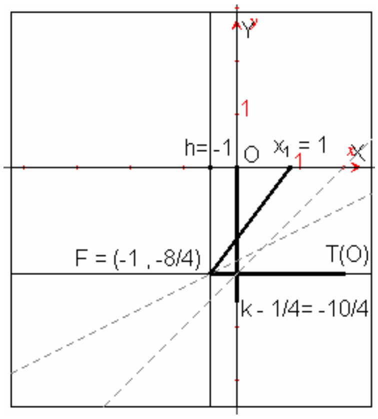
en este caso
$b = 1$
$c = -2$
y sustituyendo
$h = -1/2$
$k = -2 –1/4 = -9/4$

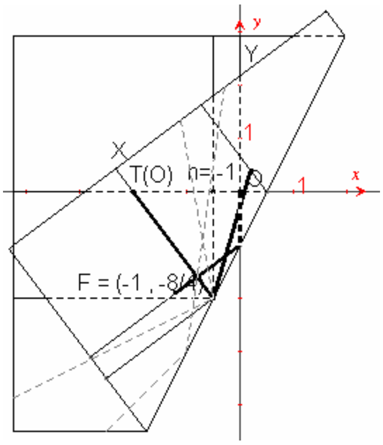

Y
1
h=-1
O
1
X
F = (-1 , -8/4)
k - 1/4= -10/4

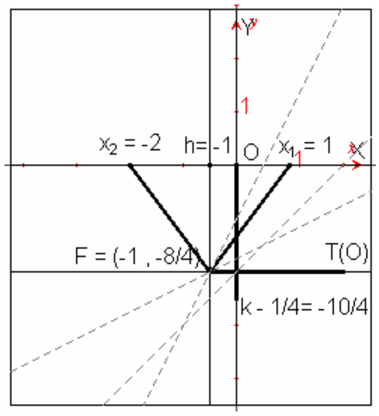

Y
1
h=-1
O
1
X
F = (-1 , -8/4)

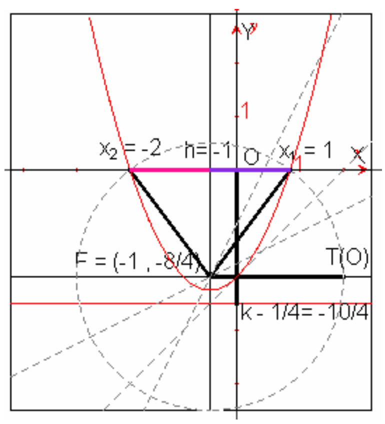

Y
1
h=-1
O
1
X
F = (-1 , -8/4)
T(O)
k - 1/4= -10/4


Y
1
h=-1
O
X
T(O)
F = (-1 , -8/4)


Y
1
h=-1
O
x_1 = 1
X
F = (-1 , -8/4)
T(O)
k - 1/4= -10/4


y
Y
1
X
T(O)
h=-1
O
1
x
F = (-1 , -8/4)


Y
1
x_2 = -2
h=-1
O
x_1 = 1
X
F = (-1 , -8/4)
T(O)
k - 1/4= -10/4


Y
1
x_2 = -2
h=-1
O
x_1 = 1
X
F = (-1 , -8/4)
T(O)
k - 1/4= -10/4

Así pues, hemos encontrado las soluciones que en este caso resultan ser 1 y –2.

Hemos dicho que este método tiene una representación para regla y compás, ésta es muy sencilla y de hecho más breve que el método que acabamos de ver. En el este caso, el algoritmo para regla y compás comenzaría con la construcción de las coordenadas del foco y en vez de recurrir a tres dobleces para transferir la longitud $|$**k-1/4**$|$ utilizamos simplemente un círculo que tenga por centro al foco y por radio dicha magnitud, las intersecciones de este círculo con el eje **X** son las soluciones. Esto se muestra en el último de los dibujos anteriores.

"Generalización"

El método que acabamos de ver se ocupa de resolver las ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$ moviendo o trasladando parábolas de la forma $y – k = (x – h)^2$ cuyas intersecciones con el eje **X** resultan ser las soluciones de la ecuación. Ahora veremos que esta idea se puede generalizar a un método para resolver cualquier ecuación de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$ utilizando una parábola de la forma $4p(y – k) = (x – h)^2$ para cualquier valor de p.

$Ax^2 + Bx + C = y$

$x^2 + B/Ax + C/A = y/A$

$x^2 + B/Ax + B^2/4A^2 = 1/A\ (Y – C) + B^2/4A^2$

$(x + B/2A)^2 = 1/A(Y – [C - B^2/4A])$

Hemos obtenido así la ecuación de una parábola de la forma $4p(y – k) = (x – h)^2$ que tiene la propiedad de que sus intersecciones con el eje X son las soluciones de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ y cuyos parámetros son

h $= C – (B^2/4A) = (4AC - B^2)/4A = -1(-4AC + B^2)/4A$

k $= B/2A$

p $= 1/4A$

EJEMPLO:

Consideremos la ecuación $x^2/2 - x/2 - 3 = 0$

$Y = x^2/2 - x/2 - 3$

$Y + 3 = x^2/2 - x/2$

$2Y + 6 = x^2 - x$

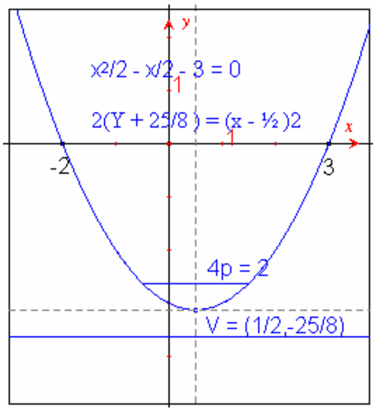
Completamos el cuadrado para x.

$2Y + 6 + ¼ = x^2 - x + ¼$

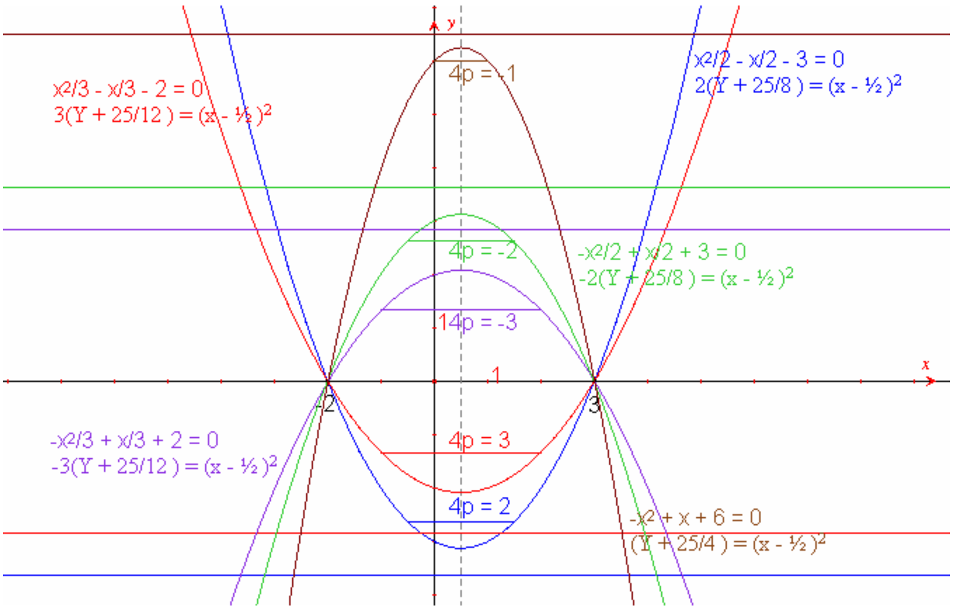
$2(Y + 3 + 1/8) = (x - ½)^2$

$2(Y + 25/8) = (x - ½)^2$

Tenemos ahora una parábola con vértice en (1/2 , -25/8) y su parámetro es 1/2, es decir, 4p = 2, y por lo tanto p = ½.



Así pues las soluciones de la ecuación son –2 y 3. En el siguiente dibujo se muestran otras parábolas mediante las cuales se obtiene las soluciones de la misma ecuación.



Para construir estas ocupamos múltiplos de la misma ecuación a los cuales multiplicamos previamente por una constante. Simplemente escogimos un número que sería el nuevo valor de 4p y multiplicamos la ecuación por este y por el inverso del valor de A. Por ejemplo, en el caso de la parábola roja multiplicamos la ecuación $x^2/2 – x/2 – 3 = 0$ por 2/3 y obtuvimos $x^2/3 – x/3 – 2 = 0$, de ahí en adelante el procedimiento es análogo al anterior.

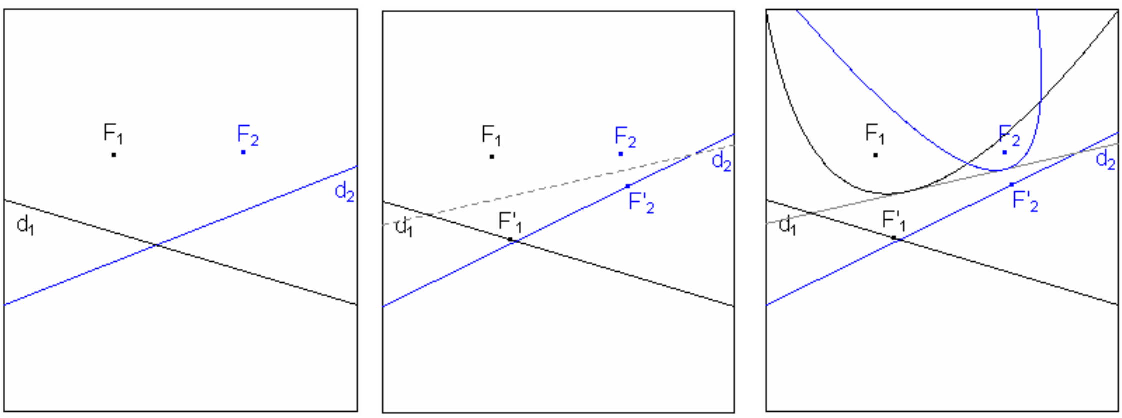
CAPÍTULO IV: ECUACIONES (II)

ECUACIONES DE TERCER GRADO

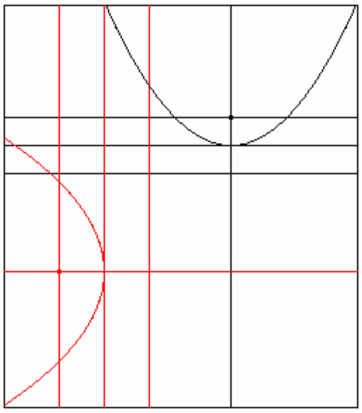
En este capítulo vamos a resolver ecuaciones de tercer grado, éstas no se incluyen en el capitulo anterior porque requieren del manejo de un doblez que no se corresponde con ninguna construcción posible con regla y compás.

Cabe hacer la observación de que todas las construcciones que se han visto hasta ahora se pueden hacer con regla y compás, pero esto no sucede con el doblez que veremos a continuación y por consiguiente con todas sus aplicaciones.

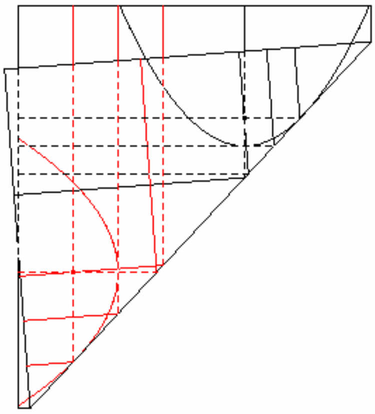
En el Capítulo II vimos cómo obtener las tangentes a una parábola conociendo su foco y directriz; vimos que para obtener éstas simplemente tenemos que hacer dobleces que encimen el foco en la directriz; en este caso, para resolver ecuaciones de tercer grado consideraremos dos puntos (dos focos) y dos rectas (dos directrices), y el doblez que haremos resultará ser tangente a dos parábolas a la vez, es decir, manda un punto a una recta y el otro punto a la otra recta cumpliendo así la definición expuesta en el capítulo dos para cada pareja de punto y recta. Su existencia ya se discutió en el capítulo I.

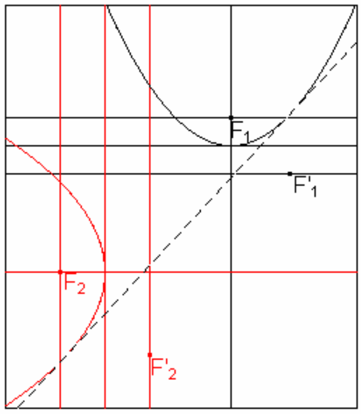


Consideremos el caso particular en el que una de las parábolas tiene por distancia focal uno (negro) y la otra p (rojo) y su eje focal sea perpendicular al de la primera.

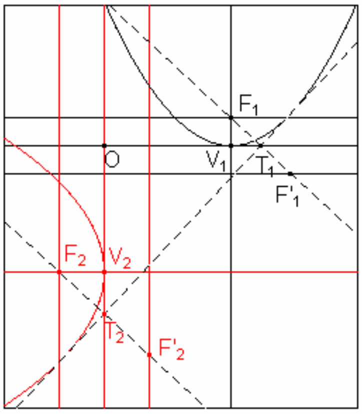


- Ahora marcamos el doblez que manda cada foco en su respectiva directriz y marcamos la calca de ambos focos.





- Trazamos la recta que une a cada foco con su respectiva calca. Nótese que en ambos casos estas rectas son perpendiculares a la tangente común y concurrentes con ésta y la tangente por el vértice. Llamemos **O** al punto de intersección de las tangentes por los vértices (**V_1** y **V_2**) de las parábolas y **T_1** y **T_2** a los puntos donde éstas intersecan a la tangente común.



En la configuración anterior existen tres triángulos rectángulos que son semejantes entre sí: $\Delta F_1V_1T_1$, ΔT_1OT_2 y $\Delta F_2V_2T_2$. Esto es porque todos tienen los mismos ángulos, pues por una parte todos son triángulos rectángulos y por otra tenemos que se cumplen las siguientes relaciones que nos permiten concluir la semejanza:

$\angle F_1T_1V_1 + \angle V_1F_1T_1 = \pi/2 \quad (1)$

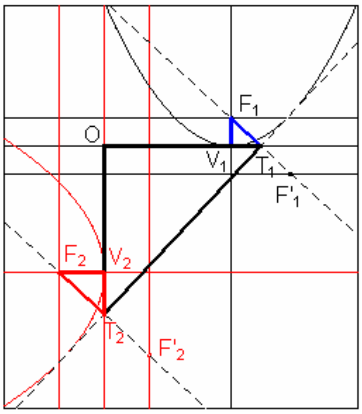
$\Rightarrow \angle V_1T_1F_1 = \pi/2 - \angle T_1F_1V_1$

$\angle T_2T_1O + \angle V_1T_1F_1 = \pi/2 \quad (2)$

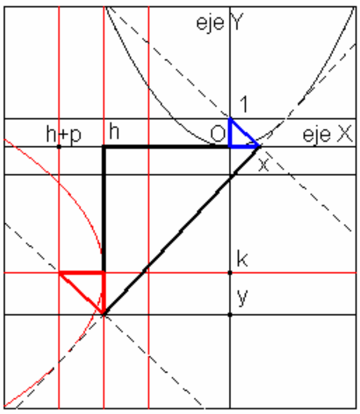
$\Rightarrow \angle V_1T_1F_1 = \pi/2 - \angle T_2T_1O$

$\angle T_2T_1O + \angle OT_2T_1 = \pi/2 \quad (3)$

Igualando (1) y (2) obtenemos $\pi/2 - \angle T_1F_1V_1 = \pi/2 - \angle T_2T_1O$ que nos dice que $\angle T_1F_1V_1 = \angle T_2T_1O$ (4). Sustituyendo (4) en (3) obtenemos $\angle T_1F_1V_1 + \angle OT_2T_1 = \pi/2$ (5). Ahora igualamos (1) y (5) $\angle F_1T_1V_1 + \angle V_1F_1T_1 = \angle T_1F_1V_1 + \angle OT_2T_1$ que implica que $\angle V_1T_1F_1 = \angle OT_2T_1$. Podemos concluir entonces que $\Delta F_1V_1T_1 \cong \Delta T_1OT_2$. Del mismo modo, con una demostración análoga, se puede ver que $\Delta T_1OT_2 \cong \Delta F_2V_2T_2$



Ahora haremos una identificación de la hoja con el plano cartesiano, suponemos V_1 como el origen; la tangente por el vértice y el eje focal negros serán los ejes cartesianos. De este modo podemos asignar valores numéricos a los puntos de la configuración. Es decir, vamos a cambiarles el nombre para obtener una ecuación asociada al doblez. Nótese que los valores que llamaremos **h**, **k** y **p** son las coordenadas del vértice y el parámetro de la segunda parábola (rojo).



A causa de la relación de semejanza que hay entre los tres triángulos se dan las siguientes igualdades de razones.

$\Delta F_1V_1T_1 \cong \Delta T_1OT_2 \Rightarrow V_1F_1/ V_1T_1 = OT_1/OT_2 \Rightarrow 1/x = (x - h)/ y$ (1)

$\Delta T_1OT_2 \cong \Delta F_2V_2T_2 \Rightarrow OT_1/OT_2 = V_2T_2/V_2F_2 \Rightarrow (x - h)/ y = (y + k) / p$ (2)

Despejamos y en (1) y obtenemos $y = x^2 - hx$.

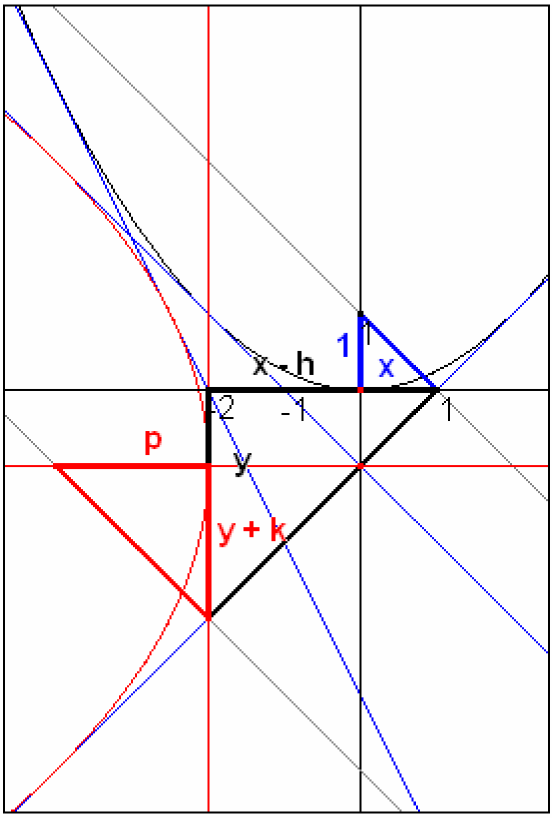
Y sustituyendo (1) resuelto en (2) $(x - h) / (x^2 - hx) = (x^2 - hx + k) / p \Rightarrow$

$1/x = (x^2 - hx + k)/p \Rightarrow p = x^3 - hx^2 + kx \Rightarrow$
$x^3 - hx^2 + kx - p = 0.$

Tenemos entonces una ecuación asociada al doblez; es decir, para cada pareja de parábolas que cumplen las hipótesis se tiene una ecuación de tercer grado asociada a esa configuración. Además, sucede que las intersecciones de las tangentes comunes a las parábolas con el eje **X** marcan las soluciones de ésta.

EJEMPLO:

En el siguiente diagrama se muestran dos parábolas cuyas tangentes comunes (azul) intersecan al eje X en –2, -1 y 1.



Por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que la ecuación se puede expresar como $(x+2)(x-1)(x+1) = 0$, que después de las operaciones nos da $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Vale la pena notar que esta ecuación es equivalente a la ecuación asociada al doblez a través de la igualdad de razones que acabamos de ver.

En el dibujo último se muestran los tres triángulos correspondientes al análisis anterior, en el que según las relaciones de semejanza podemos establecer las siguientes igualdades.

$1/x = (x – h) / y$ (1)
$(x - h)/ y = (y + k) / p$ (2)

Sustituyendo obtenemos:

$1/x = (x + 2) / y$ (1)
$(x + 2) / y = (y – 1)/ 2$ (2)

Despejando y en (1) obtenemos $y = x^2 +2x$.
Y sustituyendo en (2) $(x + 2) / (x^2 + 2x) = (x^2 + 2x – 1) / 2$

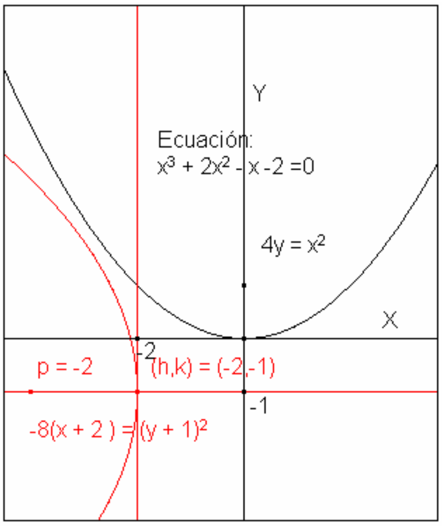
$1/x = (x^2 + 2x – 1) / 2 \Rightarrow 2 = x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow$
$x^3 + 2x^2 - x – 2 = 0.$

Así pues, resultan ser iguales ambas ecuaciones. Luego entonces podemos decir que para cada doblez hay una ecuación asociada. Naturalmente esto nos sugiere un método para resolver ecuaciones tercer grado; éste consiste en construir una configuración similar a la que acabamos de ver para una ecuación dada y encontrar las soluciones de ésta a través de las tangentes comunes a las parábolas.

En primer lugar recordemos que una de las parábolas (negro) es la misma en todos los casos, pues siempre vamos a ocupar una parábola cuyo parámetro sea 1, foco (0,1), directriz y=-1 y cuya tangente por el vértice y eje focal representan los ejes X y Y respectivamente. Ésta tiene por ecuación $4y = x^2$.

Por su parte, la ecuación de la segunda parábola (de aquí en adelante le llamaremos auxiliar) está determinada por los coeficientes de la ecuación que estamos resolviendo. Recordemos que en análisis del que partimos de la igualdad de razones llegamos a una ecuación de la forma $x^3 - hx^2 + kx - p = 0$ en la que el coeficiente del término de segundo grado es el negativo de la abscisa del vértice de la parábola auxiliar, el coeficiente del término de primer grado es tal cual la ordenada de éste y el término independiente es el parámetro.

En el siguiente dibujo se muestran las ecuaciones correspondientes al ejemplo anterior.



Para establecer formalmente este método lo único que nos falta es demostrar que dada una ecuación general de 3er grado existe una parábola auxiliar tal que sus tangentes comunes con $4y = x^2$ determinan las soluciones de ésta con sus intersecciones con el eje X.

Para demostrar esto consideremos la ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.
Ésta se puede rescribir de la forma $Ax^3 - B'x^2 + Cx - D' = 0$

Y si dividimos todo entre A obtenemos una ecuación de la forma $x^3 - bx^2 + cx - d = 0$

$d = x^3 - bx^2 + cx$

$1/x = (x^2 - bx + c)/d$

multiplicamos por uno el primer miembro de la igualdad $(x - b)/(x - b)\ 1/x = (x^2 - bx + c)/d$

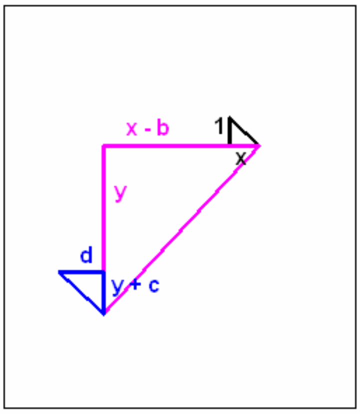
$(x - b)/ (x^2 - bx) = (x^2 - bx + c)/d$ (1)

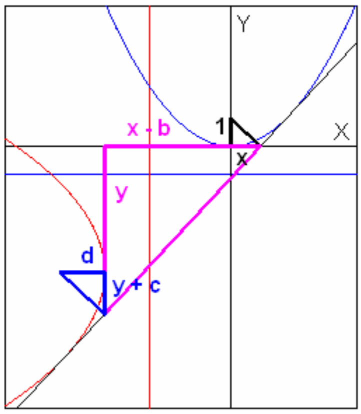
Sea $y = x^2 - bx$ (2)

Sustituimos (2) en (1) y tenemos $(x - b)/y = (y + c)/d$ (3)

Y manipulando (1) obtenemos $1/x = (x - b)/y$ (4)

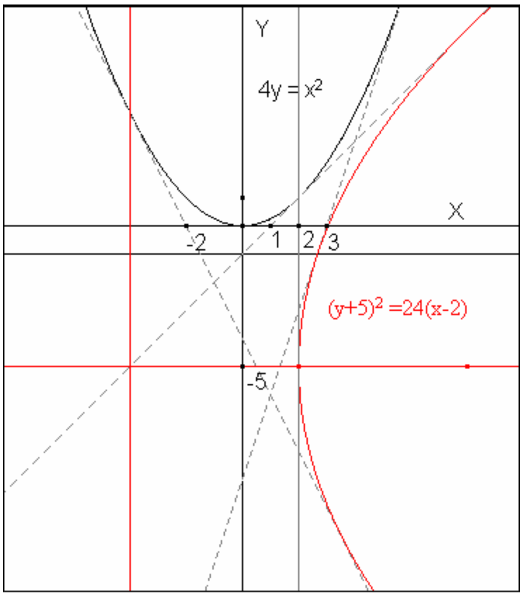
Usando las igualdades (3) y (4) podemos construir una configuración de triángulos rectángulos como la que teníamos anterior mente con la que podemos definir dos parábolas cuyas tangentes comunes son las soluciones de la ecuación.





EJEMPLO :

Consideremos ahora la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Para resolverla primero construimos la ecuación de la parábola auxiliar que resulta ser $(y+5)^2 = 24(x-2)$ y después procedemos a descubrir las soluciones mediante las tangentes comunes con la parábola $4y = x^2$.



En este caso podemos ver que las soluciones son –2, 1 y 3.

EL CASO IRREDUCIBLE

Existe una clase de ecuaciones que en la literatura matemática se conocen como irreducibles y que tienen la particularidad de que no se pueden resolver por el método de radicales, ó mejor dicho solo se puede encontrar una de sus raíces. Esto no sucede con el doblado de papel, pues como acabamos de probar, dada una ecuación de tercer grado es posible construir sus soluciones a partir de dos parábolas, así que en particular lo podemos hacer con estas. A continuación mostramos un par de ejemplos de estas ecuaciones y como se resuelven mediante el doblado de papel.

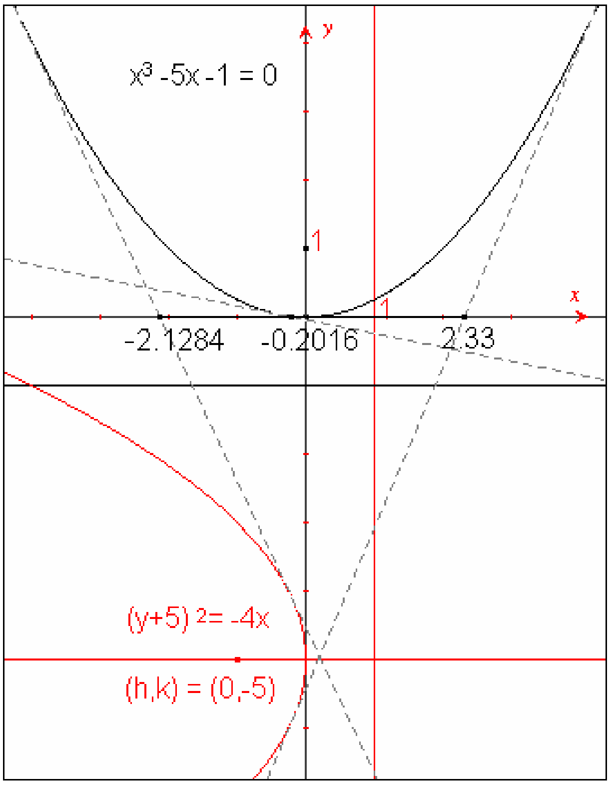
EJEMPLO 1.- $x^3 - 5x - 1 = 0$

h = 0

k = -5

p = -1

$(y + 5)^2 = -4x$



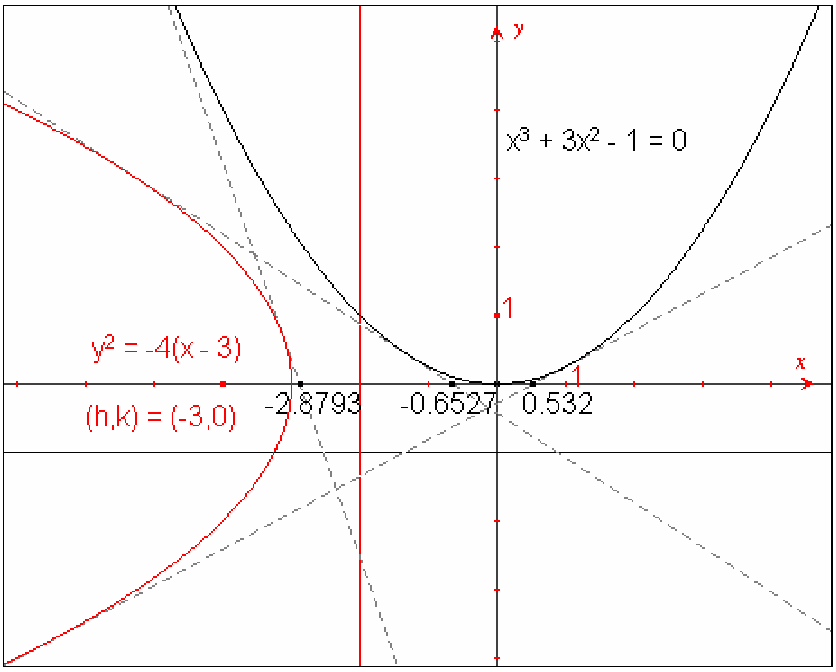
EJEMPLO 2.- $x^3 + 3x - 1 = 0$

h = -3

k = 0

p = -1

$y^2 = -4(x - 3)$



CAPITULO V: DOS PROBLEMAS

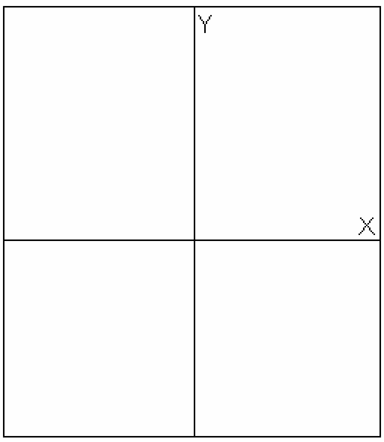
Desde los tiempos de Euclídes hasta nuestros días han existido tres problemas que se han convertido en clásicos irresueltos de la Geometría Plana porque no se pueden resolver con regla y compás. (En un curso de Álgebra Moderna de Teoría de Galois se ve que éstos demandan la construcción de números que no son constructibles con regla y compás para ser resueltos). Éstos son, a saber: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Dos de estos problemas se pueden resolver mediante el doblez que acabamos de ver, así que a continuación veremos cómo.

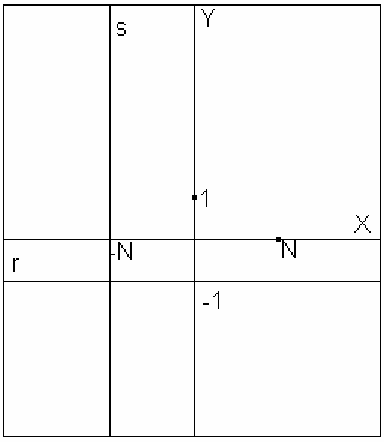
LA DUPLICACIÓN DEL CUBO:

Consideremos un cubo de volumen N, el problema consiste en construir un cubo que tenga el doble de volumen 2N. Si el volumen es 2N, la longitud del lado necesariamente es $(2N)^{1/3}$, por lo que el problema se traduce en construir la raíz cúbica de 2N. A continuación veremos un algoritmo para encontrar la raíz cúbica de un número cualquiera; si en particular ese número es 2N nuestro problema quedará resuelto.

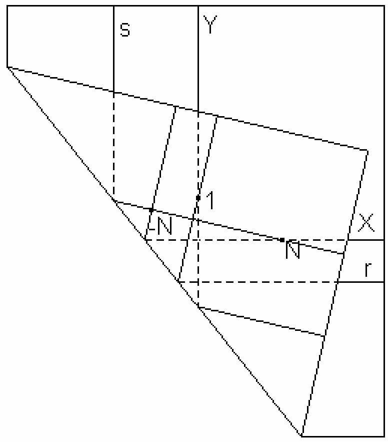
- Márquense dos dobleces perpendiculares y llamémosles eje **X** y eje **Y**.

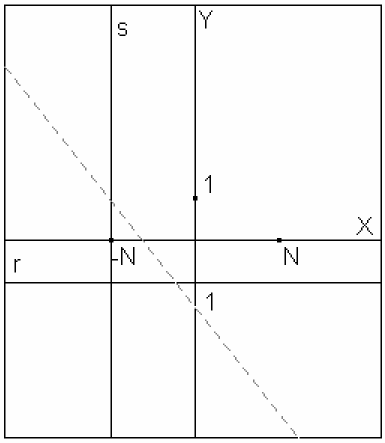


- En el eje **Y** marcamos dos puntos a distancia **1** del origen y en el eje **X** marcamos dos puntos a distancia N; Pasamos una recta perpendicular al eje **Y** por uno de los puntos que acabamos de marcar y hacemos los mismo con el eje **X**.

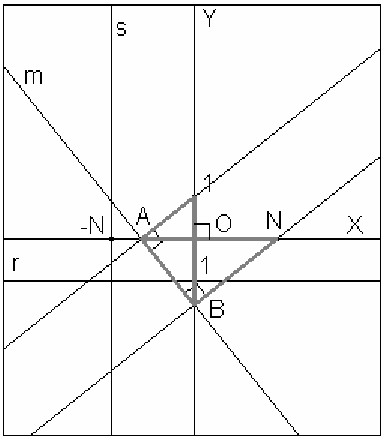


- Marcamos un doblez que mande **1** a **r** y **N** a **s**.





En la siguiente figura se muestra el doblez **m** que acabamos de hacer y una recta perpendicular a éste por **1** y otra por **N**.



Estas rectas junto con los dos ejes forman tres triángulos que resultan ser semejantes entre sí, y son a saber ΔAO1, ΔBOA y ΔNOB (Llamamos **A** a la intersección de **m** con el eje **X** y **B** a la intersección de **m** con el eje **Y**). Esto nos dice que se cumplen las siguientes igualdades de razones:

$$1/A = A/B \text{ y } A/B = B/N$$

$$\Rightarrow$$

$$B = A^2 \text{ y } N = B^2/A$$

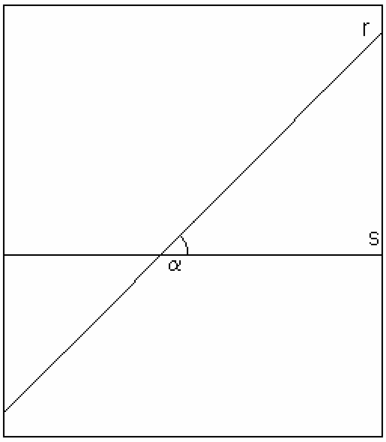
$$\Rightarrow$$

$$N = A^3 \text{ ó } N^{1/3} = A.$$

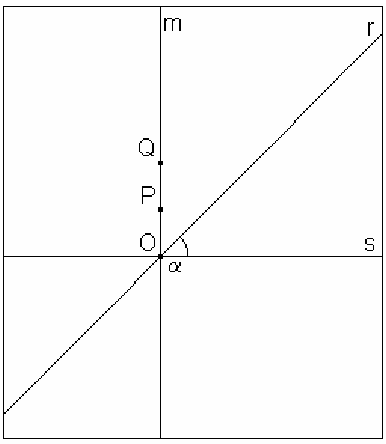
LA TRISECCIÓN DEL ANGULO

Consideremos un ángulo α cualquiera, el problema ahora es trisecar este ángulo, es decir, construir dos rectas por el vértice que dividan al ángulo en tres partes iguales.

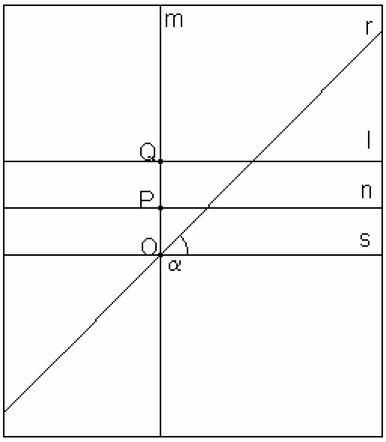
- Márquense dos dobleces con el ángulo deseado.



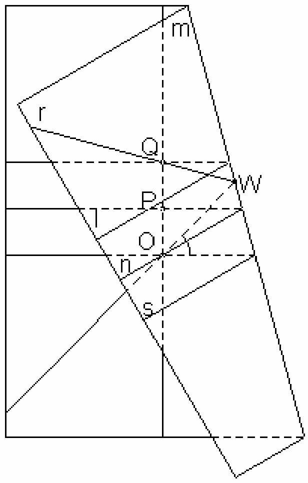
- Márquese una recta **m** perpendicular a una de las rectas por el vértice y sobre ésa márquense dos segmentos consecutivos iguales **OP** y **PQ**.

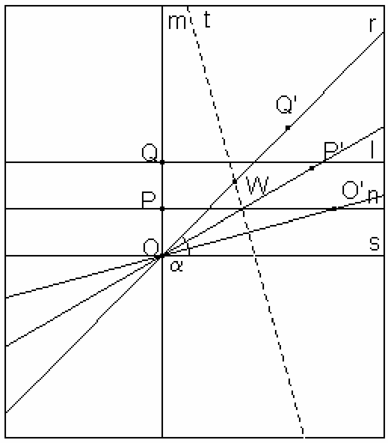


- Dóblese una perpendicular a **m** por **P** y otra por **Q**.

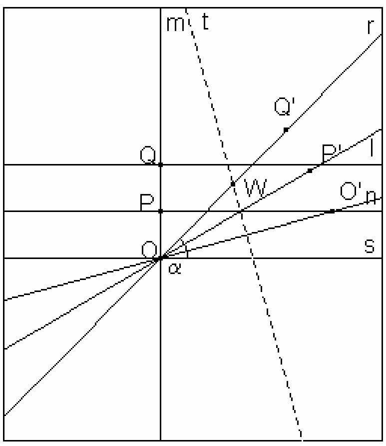


- Hágase un doblez a que mande **Q** a **r** y **O** a **n**, y márquense los puntos sobre los que se enciman **O**, **P** y **Q**.

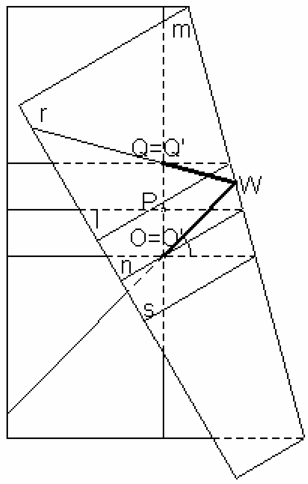




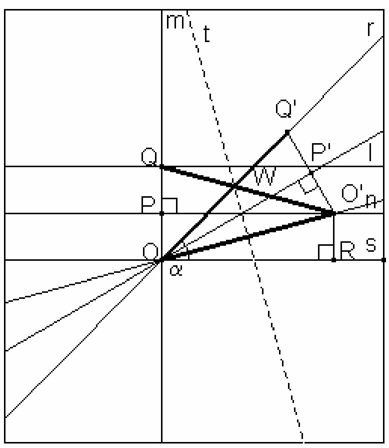
- Finalmente, márquense las rectas **OO’** y **OP’**; éstas son las rectas deseadas.



Notemos que al hacer el doblez los segmentos **WQ** y **WQ’** se enciman al igual que **WO** y **W’O’**, así pues, sucede que **Q**, **W** y **O’** son colineales pues son la calca de puntos colineales y además los segmentos **OQ’** y **O’Q** son iguales.



Por lo tanto el triángulo ΔQOO’ es isósceles y la altura de su lado QO es PO’ que pasa por su punto medio. Así que los triángulos ΔOO’P’ y ΔOQ’P’ son rectángulos y congruentes entre sí.



Consideremos ahora el segmento perpendicular a s por **O’** para el cual nombraremos **R** a su base. Así construido, el triángulo ΔOO’R resulta ser congruente a

ΔOO'P', pues comparten el lado **OO'** y los lados **P'O**' y **O'R** son iguales por construcción, así que por el Teorema de Pitágoras **OP'** y **OR** son iguales.

Tenemos entonces que los triángulos rectángulos ΔOP'Q', ΔOO'P' y ΔORO' son congruentes y por lo tanto los ángulos $\angle$OP'Q', $\angle$P'OO' y $\angle$O'RO son iguales, así que hemos trisecado al ángulo α.

INVITACIÓN

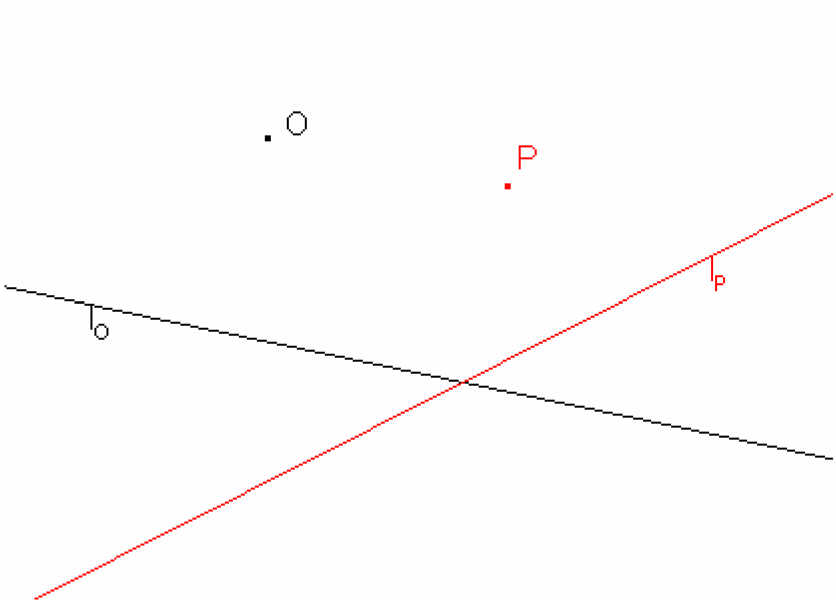
A lo largo de la tesis hemos visto cómo algunos de los objetos de la geometría se pueden manejar con la papiroflexia, hemos partido de los dibujos hacia el papel y siempre en esa dirección, pero como ya vimos, la papiroflexia y la geometría guardan una estrecha relación, así que vale la pena preguntarse por el sentido opuesto del camino andado.

Este último apartado de la tesis lo vamos dedicar a los seres del papel que pueden cobrar vida en la geometría euclidiana, es decir, a aquellas figuras o configuraciones que se gestan a través de la papiroflexia pero son de interés para la geometría euclidiana en general.

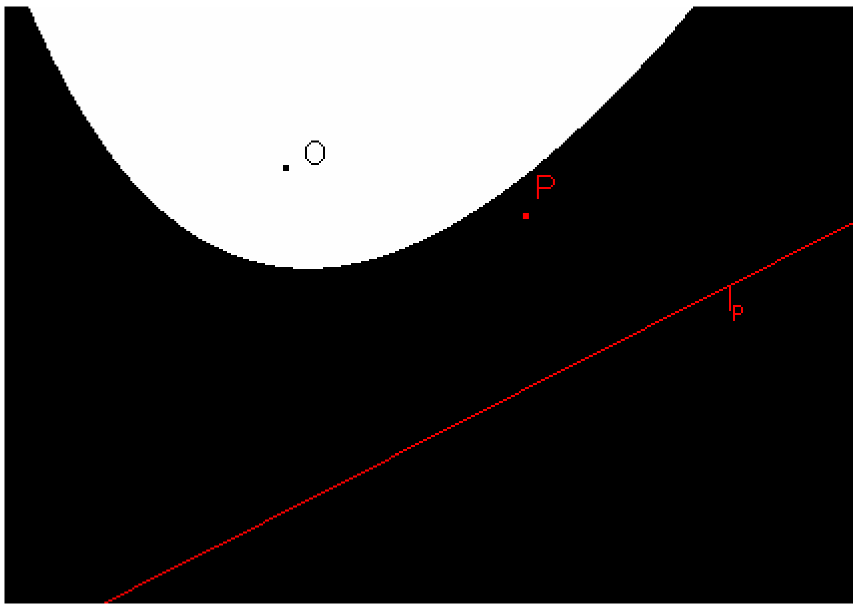
Todo el material que se expone a continuación esta disponible para ser trabajado y manejado en nuevos proyectos de investigación, en los que naturalmente se puede manejar un enfoque desorientado de la papiroflexia. Entiéndase este último apartado como una invitación a trabajar mas en todo esto, pues en varios sentidos resulta novedoso, interesante y divertido.

En el Capítulo IV introdujimos un doblez que manda una pareja de puntos en una pareja de rectas. Un problema muy interesante asociado a esto y que puede trabajarse con regla y compás es el siguiente:

Consideremos una terna formada por un punto **O** y dos rectas no paralelas $\mathbf{l_O}$ y $\mathbf{l_P}$. Para cada punto P del plano existe una ecuación de tercer grado asociada que es aquélla que es posible solucionar mediante un doblez que mande **O** en $\mathbf{l_O}$ y **P** en $\mathbf{l_P}$.



Supóngase ahora que se desea discriminar aquellos puntos **P** que tienen asociada una ecuación con una única solución real de los que tienen asociada una con tres. El problema consiste en determinar las regiones en las que queda dividido el plano si pintamos de blanco y negro estas dos clases.

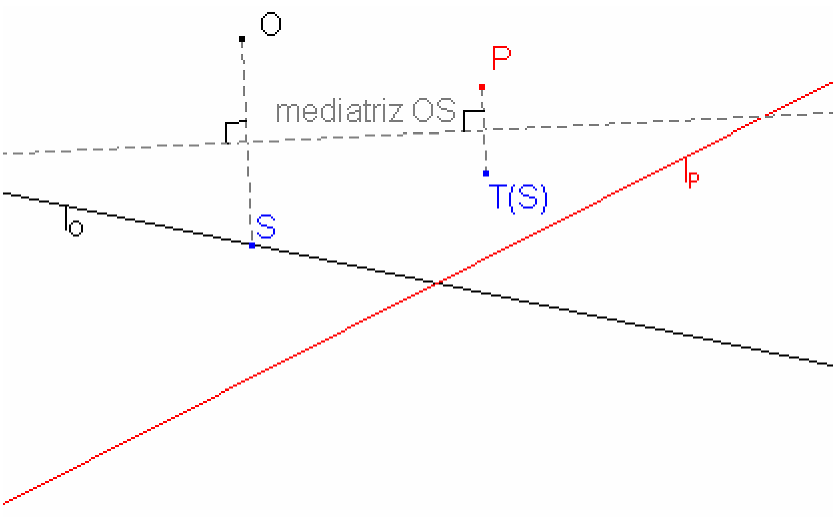


Actualmente tenemos la hipótesis de que el plano queda dividido en dos regiones determinadas por la parábola que tiene por directriz $\mathbf{l_O}$ y **O** por foco (ver dibujo anterior), pero esto todavía no está demostrado.

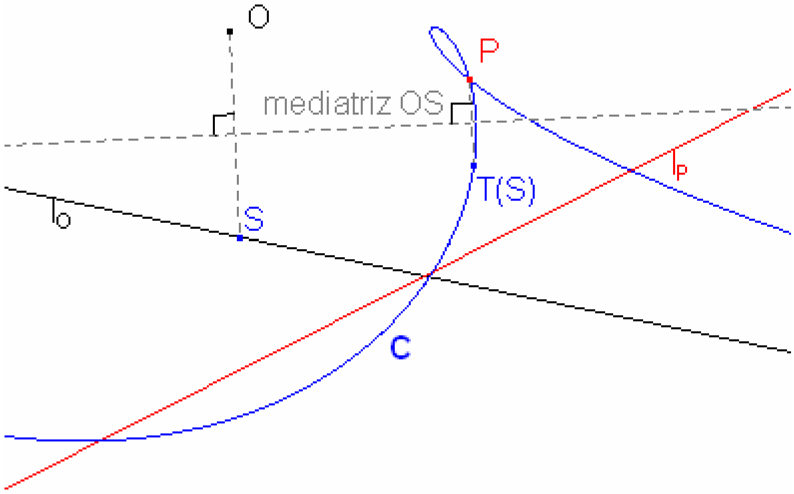
Vale la pena preguntarse también si este estudio arroja información que sugiera un método aritmético para resolver ecuaciones de tercer grado ó información que nos permita relacionarlo con ideas del álgebra abstracta como la solubilidad en campos.

Otra criatura que puede ser motivo de un estudio muy profundo es la curva **C** que introdujimos en el Capítulo I cuando vimos que dadas una pareja de puntos y una pareja rectas, siempre es posible hacer un doblez que mande cada punto en una recta.

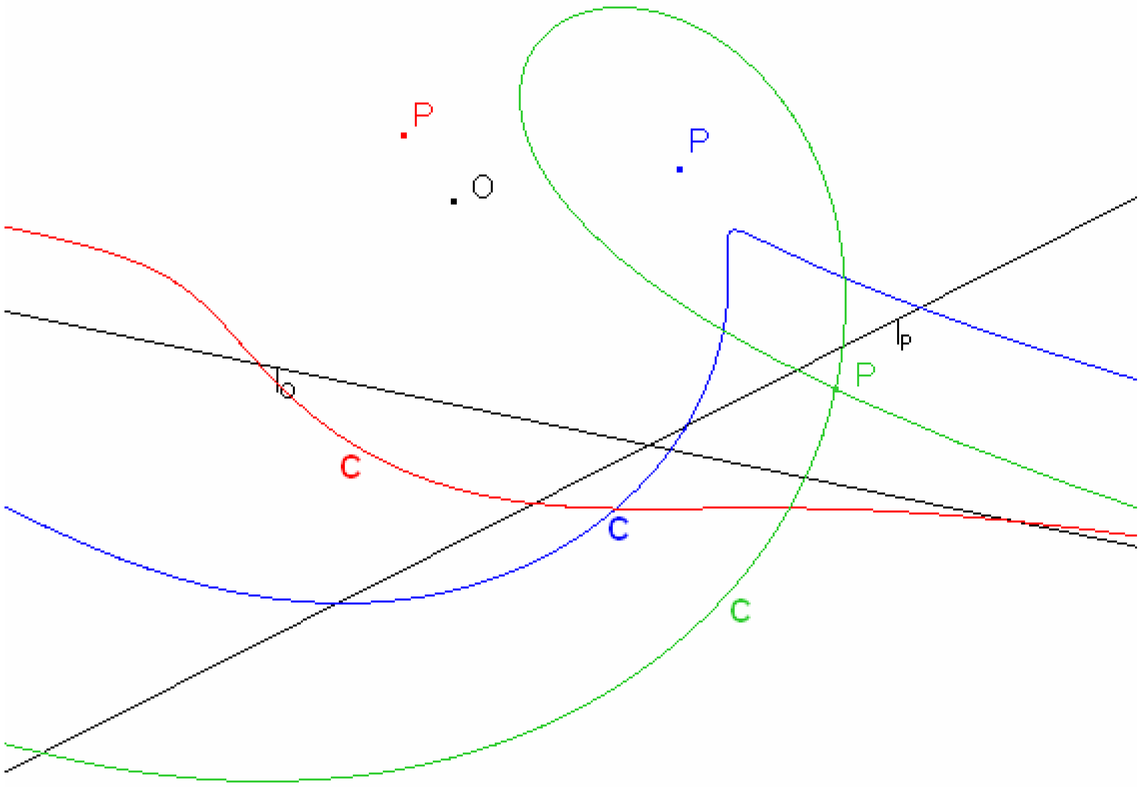
Para construir **C** en primer lugar definimos **T(S)** para todo **S** elemento de $\mathbf{l_O}$ como sigue: Tomamos un punto **S** en $\mathbf{l_O}$ y calcamos **P** con respecto a la mediatriz de **OS**, la calca de **P** es **T(S)**.



Por su parte la curva **C** se define como el conjunto de todas las **T(S)** donde **S** es un punto de $\mathbf{l_O}$.

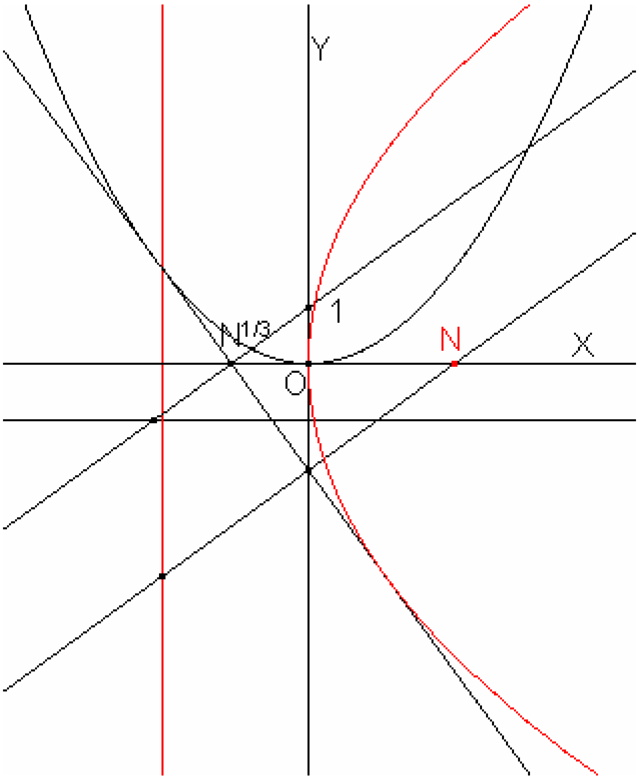


En el dibujo anterior, podemos ver que la curva **C** pasa por el punto **P** y forma un rizo. El problema es determinar en qué condiciones se forma éste; en el siguiente dibujo podemos ver una serie de puntos y los rizos que se forman con éstos. El lector podrá darse cuenta de que no todas las curvas tienen rizos.

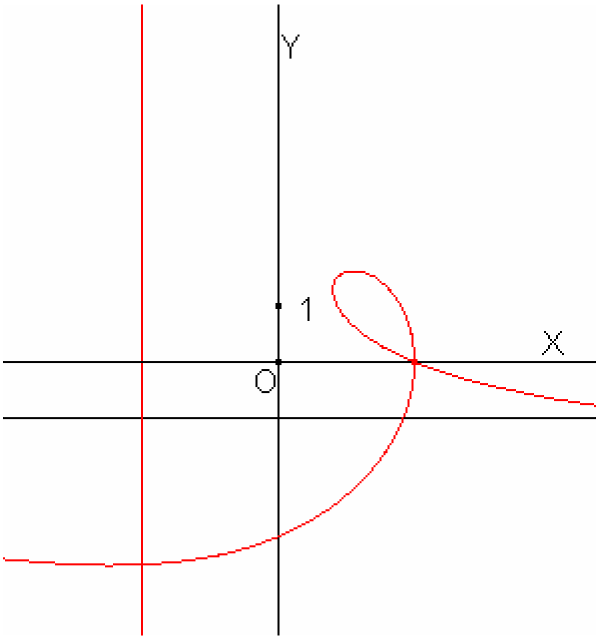


Hemos querido que esta tesis sea un discurso visual y del mismo modo nos gustaría que motivara trabajos y demostraciones que sean esencialmente visuales, o mejor dicho, sustentadas por argumentos elementales de la geometría rígida.

Cuando resolvimos la duplicación del cubo utilizamos nuestro doblez especial para hallar la raíz cúbica de un número real y usamos una configuración como la que se muestra a continuación.



En el siguiente diagrama se muestra el rizo asociado a esta ecuación. Si el lector logra demostrar que para toda N en el eje X sucede que el rizo que se forma al resolver la ecuación corta únicamente en un punto a la directriz de la parábola roja habrá dado entonces la demostración geométrica de que los números reales tienen una única raíz cúbica.



Éstos son algunos de los temas que se pueden desprender de la tesis, por su parte este trabajo llega hasta aquí, pero el terreno es aún muy fértil y da para muchas investigaciones mas.

Nosotros nos despedimos aquí, con un saludo y un abrazo para el lector esperando que este trabajo haya sido de su agrado. Estaremos muy contentos de recibir cualquier comentario y opinión de la tesis en el cubo 239 con el Profesor Francisco Struck ó al correo electrónico marcomate@hotmail.com

BIBLIOGRAFIA

- “Matemáticas y Origami”, Francisco Javier Cobos Gavala.

- Introducción a la Geometría Moderna, Levi S. Shively, Compañía Editorial Continental S. A. México, Primera reimpresión de la segunda edición revisada y corregida, junio 1968

- Geometría Analítica, Ana Irene Ramírez Galarza, Las Prensas de Ciencias, México, Primera impresión, 1998.

- New First Course in the Theory of Equations, The Lote Leonard Eugene Dickinson, Ph. D., Sc. D., John Wiley and Sons Inc., New York, Duodécima impression, Febrero 1959.

- Lecciones de calculo I, Introducciòn a la derivada, SITESA; Addison-Wesley Iberoamericana, 1982 Mèxico.