

UNAM  
POSGRADO

Ciencia e Ingeniería  
de Materiales



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

**“INICIO DE UNA AVALANCHA DE MATERIAL  
GRANULAR”**

**T E S I S**

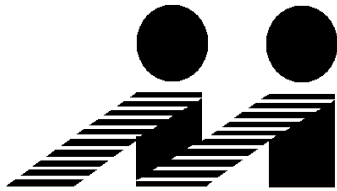
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIA  
E INGENIERÍA DE MATERIALES

P R E S E N T A

**FÍS. IRMA IRIAN GARCÍA SALAZAR**

Tutor: Dr. José Roberto Zenit Camacho



México, D. F.

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Resumen

---

El presente trabajo trata sobre el estudio numérico del inicio de una avalancha de material granular bidimensional. Se colocan aleatoriamente 4000 discos en una caja plana vertical. Posteriormente se inclina la caja con una velocidad angular de 0.001 radianes por segundo. Se observa el desarrollo de lo acontecido desde que el ángulo de inclinación es cero hasta que las partículas comienzan un flujo dinámico completamente desarrollado. El propósito del estudio es investigar como es que da inicio una avalancha de material granular. El procedimiento se repite para once coeficientes de fricción distintos desde cero a uno, con incrementos de 0.1. Se utilizó una técnica de simulación por computadora conocida como *método de elemento discreto para partículas suaves*. Aprovechando la facilidad con que se pueden modelar distintos ambientes con el programa, se repiten los experimentos anteriores para diez coeficientes de fricción, pero empleando ahora fronteras periódicas. Las fronteras periódicas no son más que un artificio de cómputo para simular un sistema infinito.

En el capítulo 1 se da una introducción teórica al tema, se explica que es un material granular, se dan los antecedentes históricos sobre el tema y las definiciones y conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo. El capítulo 2 trata del método de elemento discreto, la teoría, las ecuaciones y postulados básicos que llevaron a Cundall y otros a desarrollar la técnica. En el capítulo 3 se dan los parámetros y condiciones particulares que se utilizaron en nuestros experimentos numéricos, los objetivos y las condiciones de frontera. En el capítulo 4 se presentan todos los resultados de los experimentos, contiene tablas, gráficas y figuras procesadas, hechas todas a partir de los datos numéricos más relevantes calculados por computadora. En el capítulo 5 se analizan los resultados del trabajo. Para los resultados que lo permiten se ajustan ecuaciones matemáticas que se apegan dentro de un rango de incertidumbre aceptable a los resultados experimentales observados. Al final se añade una sección de conclusiones y tres apéndices.

---

# Dedicatoria

---

Dedico esta tesis a mis dos abuelas:

*Alicia Trejo Chávez† (1927-2008) y Ma. del Refugio Leal† (1917-1989).*

Que fueron y seguirán siendo por siempre, madres de muchas generaciones. Gracias a mis abuelas por ser ellas mismas. Por sus historias fascinantes que contaban a sus hijos, nietos y bisnietos.

---

# Agradecimientos

---

Siempre es agradable llegar a la culminación de cualquier cosa. Terminar un ciclo para luego comenzar uno nuevo es parte de la vida. Sin embargo en el camino recorrido siempre vamos acompañados de otros que nos ayudan a salir adelante, o bien a tropezarnos. En ocasiones cuando creemos que las fuerzas ya no alcanzan para continuar, la desesperación surge y no sabemos como ni por donde salir avantes. Es en esos momentos cuando necesitamos de un ángel amigo que nos tienda la mano, que escucha nuestra pena y hasta la comprende. Gracias Prof. Andrés Porta por ser un ángel amigo para mí; usted me impuso en la recta final de mi trabajo, cuando la cuesta era aún más empinada y necesité de una sabia persona que me diera un buen consejo.

Otro buen ángel que enriqueció mi trabajo con su experiencia y sabiduría fué el Dr. Peralta Fabi, actual director de la Facultad de Ciencias, gracias a él comprendí y enmendé las fallas de mi investigación dentro de mis posibilidades. No dejo de pensar que me hubiera gustado conocerlo antes. Aprecio también las acertadas correcciones de los sinodales que han revisado cordialmente mi trabajo. Entre ellos se encuentran el Dr. Héctor Domínguez, Dr. Gerardo Ruiz y el Dr. Francisco Solorio.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma mater, por todas las facilidades y apoyo otorgado. También al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca proporcionada. Gracias a mi asesor el Dr. Roberto Zenit, a mis tutores: Dra. Catalina Stern, Dr. Guillermo Pulos, a todo el equipo de trabajo del departamento de reología del Instituto de Investigaciones en Materiales por su apoyo y al Dr. Roland Martin quién me sugirió el tema. Agradezco a la institución misma que ofrece el presente posgrado. Agradezco también a mis amigos y compañeros del posgrado, que están ahí cuando necesito charlar y consultar con alguien.

Especialmente quiero agradecer a mis familiares más cercanos, pues sin su apoyo no me habría sido posible terminar mi tesis. Ellos han estado a mi lado a lo largo de toda mi trayectoria y son parte de mí. Gracias a mi esposo Fausto Cervantes, a mi madre Irma Salazar, a mi padre Juan Rogelio García Leal, a mis amados hijos Citlali e Isaac, quienes son la razón de mi existencia; a mi amada y única hermana Eva Edith y a mi querida suegra Mariana Ortiz. Todos ellos siempre me han apoyado en los momentos más difíciles, sobre todo con el cuidado de mis pequeños niños.

Agradezco también a los mexicanos que día a día pagan los impuestos, de los que se destina una parte a la educación.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>vii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>1. Material granular</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. ¿Qué es un material granular? . . . . .	2
1.3. Historia . . . . .	3
1.4. Características generales . . . . .	5
1.5. Avalancha de un material granular . . . . .	6
1.5.1. Equilibrio estático del material . . . . .	7
1.5.2. Pre-avalanchas . . . . .	9
1.5.3. Desarrollo de una avalancha . . . . .	13
<b>2. Método de elemento discreto</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Formulación Básica . . . . .	16
2.3. Simulaciones . . . . .	17
2.3.1. Simulaciones en dos y tres dimensiones . . . . .	17
2.3.2. Propiedades de las partículas . . . . .	18
2.3.3. Fuerzas . . . . .	19
2.3.4. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	22
2.3.5. Parámetros de la simulación . . . . .	23
2.3.6. Condiciones de frontera . . . . .	26
2.3.7. Vector de gravedad . . . . .	26
2.3.8. Condiciones iniciales . . . . .	27
2.4. Implementación . . . . .	27
<b>3. Experimentos numéricos</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Objetivos . . . . .	29
3.3. Parámetros iniciales de la simulación . . . . .	30
3.4. Simulación con paredes sólidas . . . . .	30

3.4.1. Iniciación . . . . .	30
3.4.2. Determinación de los ángulos críticos . . . . .	31
3.5. Simulación con fronteras periódicas . . . . .	32
3.5.1. Iniciación con fronteras periódicas . . . . .	32
3.5.2. Simulación para determinar los ángulos críticos . . . . .	32
<b>4. Resultados</b>	<b>33</b>
4.1. Marco Preliminar . . . . .	33
4.2. Resultados de las simulaciones . . . . .	34
<b>5. Análisis de Resultados</b>	<b>51</b>
5.1. Ángulo Crítico . . . . .	51
5.2. Reordenamientos previos a una avalancha . . . . .	52
5.2.1. Comportamiento creciente . . . . .	53
5.2.2. Comportamiento aleatorio . . . . .	53
5.3. Número de partículas en movimiento . . . . .	54
5.4. Energía cinética traslacional . . . . .	55
5.5. Velocidades promedio . . . . .	60
<b>6. Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>67</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>75</b>

# Índice de figuras

1.1.	Dunas de arena en la reserva ecológica <i>El Pinacate</i> en el desierto de Sonora, al norte de México. . . . .	2
1.2.	Las rocas a la orilla del mar son un material granular de granos gruesos. . . . .	3
1.3.	La velocidad de las partículas en un flujo granular decrece con la profundidad. . . . .	6
1.4.	Definición de ángulos de terraplén. En un cilindro con tapas transparentes, se coloca arena fina hasta la mitad. Luego se hace rodar por una superficie plana. A los ángulos de terraplén que forma la superficie libre con la horizontal se les llaman: $\theta_m$ ángulo de movimiento, $\theta_r$ ángulo de repuesta y $\delta = \theta_m - \theta_r$ ángulo de relajación. . . . .	8
1.5.	En una pila de un pequeño número de partículas esféricas, el ángulo de relajación tiende a cero . . . . .	8
1.6.	Correlación espacial de partículas conocida como cúmulo o <i>cluster</i> . . . . .	10
2.1.	Sistema de coordenadas usado en las simulaciones. . . . .	20
2.2.	EL modelo de contacto de la simulación se separa en dos componentes: (a) la de la dirección normal y (b) la de la dirección tangencial. . . . .	21
2.3.	Diagrama de flujo del proceso que efectúa la simulación con el método de partículas suaves. . . . .	24
2.4.	El espacio de trabajo se divide en celdas. Esto para calcular únicamente las posibles colisiones en el vecindario de una partícula. . . . .	28
3.1.	4000 discos acomodados aleatoriamente por acción de la aceleración de gravedad. . . . .	31
3.2.	Sistemas de referencia de los resultados . . . . .	32
4.1.	Sistemas de referencia de los resultados . . . . .	33
4.2.	$\theta_c$ en función del coeficiente de fricción $\mu$ . . . . .	40
4.3.	Reacomodos que preceden a la primera avalancha como función de $\mu$ . . . . .	41
4.4.	Número de partículas en movimiento de las primeras avalanchas para cada coeficiente de fricción. . . . .	42
4.5.	Número de partículas en movimiento de las últimas avalanchas para cada coeficiente de fricción. . . . .	43
4.6.	Número de partículas en movimiento con fronteras periódicas. . . . .	44
4.7.	Energía cinética traslacional en paredes sólidas. . . . .	45
4.8.	Energía cinética traslacional en paredes periódicas. . . . .	46
4.9.	Magnitud de las velocidades para paredes sólidas con $\mu = 0.5$ . . . . .	47



4.10. Magnitud de las velocidades para paredes sólidas con $\mu = 0.5$ . La secuencia 5 es la del ángulo crítico $\theta_c = 16.35^\circ$ . . . . .	48
4.11. Magnitud de las velocidades para fronteras periódicas con $\mu = 1.0$ . La secuencia 4 es la del ángulo crítico $\theta_c = 18.128^\circ$ . . . . .	49
4.12. Magnitud de las velocidades para fronteras periódicas con $\mu = 1.0$ . . . . .	50
5.1. Ajuste de una función exponencial a los resultados de la simulación. . . . .	51
5.2. Ejemplo de una función de Boltzmann. . . . .	55
5.3. Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción con paredes sólidas. . . . .	56
5.4. Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción para fronteras periódicas. En el eje $x$ se da el tiempo en segundos. En el eje $y$ se da el número de partículas en movimiento $N_p$ . . . . .	57
5.5. Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción. . . . .	58
5.6. Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción. . . . .	59
5.7. Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción. . . . .	61
5.8. Ejemplo de un frente de onda elipsoidal dentro de una caja. . . . .	62
5.9. Secuencia de un frente de onda elipsoidal en paredes sólidas con $\mu = 0.5t > t_c$ . . . . .	64
6.1. Conductividad como función de una membrana de potencial . . . . .	76

---

# Capítulo 1

## Material granular

---

### 1.1. Introducción

El flujo de escombros y avalanchas es de especial interés tanto para industrias como para las ciencias geológicas.

Simular las propiedades dinámicas de una pila de material granular mediante un modelo bidimensional de estructura uniforme, es sin lugar a dudas, una enorme simplificación de lo que en verdad ocurre con un material real. Sin embargo, con el propósito de comprender la física del problema, tiene sentido esforzarse por entender tales sistemas simples. Hay varias razones para hacerlo. Una de ellas es que un apilamiento bidimensional puede observarse directamente, en contraste con un apilamiento tridimensional que es opaco y difícil de caracterizar visualmente. Mediante resonancia magnética nuclear se obtienen algunos resultados interesantes, pero no suficientes para determinar las propiedades mecánicas del material. Además, la técnica es voluminosa, cara y de resolución limitada. Conjuntamente, dadas las características de las computadoras actuales, los apilamientos de material granular bidimensionales son relativamente más sencillos de modelar en una computadora personal, sin que se requiera gran cantidad de espacio en memoria. Asimismo, los resultados experimentales con apilamientos bidimensionales revelan que éstos, siguen la misma fenomenología que los apilamientos reales hechos en tres dimensiones para la arena. Los apilamientos bidimensionales también incluyen fenómenos de convección, formación de estructuras, segregación y flujo de varios tipos. En particular, la organización de una red bidimensional comprende interacciones de largo alcance, pues exhibe una simetría traslacional.

Las simulaciones numéricas tienen la finalidad de modelar varios aspectos de la física de materiales granulares con un doble propósito: por una parte existen fuertes incentivos en la industria para quien resuelva una serie de problemas prácticos relacionados con el tratamiento de material granular. Cuando se transporta este tipo de materiales, en ocasiones se bloquean los ductos por los que pasa el material y esto ocasiona pérdidas económicas. Las necesidades urgentes de la industria y el aumento en el desarrollo de técnicas de simulación prometen un auge en el desarrollo de técnicas adecuadas para la descripción de la conducta de materiales granulares. Por otra parte, las simulaciones numéricas son de gran interés desde un punto de vista fundamental, pues ofrecen la posibilidad de explorar los efectos de algunos parámetros que son simplemente inaccesibles desde el punto de vista del laboratorio. Llevar a cabo experimentos a escalas reales con muchas partículas no es sencillo; los resultados son difíciles de analizar experimentalmente. Por tal motivo, optamos por realizar una serie de simulaciones numéricas que imitan el comportamiento de un flujo granular real. Esto nos permite analizar

favorablemente el fenómeno en cuestión.

## 1.2. ¿Qué es un material granular?

Un material granular es un conjunto de partículas. Cada entidad que lo compone se encuentra rodeada de otras partículas. Debido a que existen intersticios entre las partículas, evidentemente se trata de un medio discreto. Los intersticios pueden estar vacíos o contener algún fluido. Pero cabe mencionar que los sólidos que comprenden al medio granular están en contacto la mayoría de las veces, pues no se incluye en nuestro concepto de material granular a cualquier material que esté suelto o flotando en forma de granos, como por ejemplo una suspensión.

Las partículas del material pueden ser de diversa índole: elásticas, rígidas, rugosas, lisas, porosas, etcétera.

La forma y el tamaño de las partículas no necesariamente tienen que ser las mismas. Por ejemplo, si hablamos de un saco de frijoles, sabemos cual es su forma, pero no necesariamente todas las partículas son del mismo tamaño; si se trata de una tonelada de grava, la forma de las rocas y su tamaño varían ampliamente.



Figura 1.1: Dunas de arena en la reserva ecológica *El Pinacate* en el desierto de Sonora, al norte de México.

En cuanto al tamaño de cada entidad que forma el material granular, los órdenes de magnitud son muy variados. Podemos tener un grano de arena de  $10^{-6}$  m de diámetro o una roca grande del orden de 1 m. Así como los granos de arena de la playa o del desierto (figura 1.1) o las rocas a la orilla de la playa (figura 1.2). El material granular puede estar conformado de granos tan pequeños, que sólo se puedan ver en un microscopio, o bien de granos grandes fáciles de observar a simple vista como una enorme roca.



Figura 1.2: Las rocas a la orilla del mar son un material granular de granos gruesos.

Brown y Richard [5] clasificaron los materiales granulares por su tamaño de la siguiente manera:

- **Polvos**.-Es un medio granular de partículas menores a  $100 \mu\text{m}$  de diámetro. Se ha hecho costumbre hacer una distinción adicional entre ellos del siguiente modo:
  - Polvos granulares (de  $10$  a  $100 \mu\text{m}$ ),
  - Polvos superfinos (de  $1$  a  $10 \mu\text{m}$ ),
  - Polvos hiperfinos (de  $0.1$  a  $1 \mu\text{m}$ ).
- **Sólidos granulares**.-Está compuesto por granos cuyos tamaños van desde  $100$  a  $3000 \mu\text{m}$  de diámetro.
- **Sólidos discontinuos**.-En este medio la mayoría de las partículas que constituyen al material granular son mayores de  $3 \text{ mm}$  de diámetro.

Cuando se tienen partículas idénticas en el conjunto se dice que el material es monodisperso, si se tienen dos tipos bidisperso, etcétera. Por lo regular, los medios granulares que se encuentran en la naturaleza son casi siempre polidispersos, es decir, con muchos tipos de partículas.

## 1.3. Historia

En el universo existen materiales granulares; en la Tierra y en Marte hay piedras y polvo en arena; como las piedras tienen su propio ciclo de reciclaje, esto implica que los materiales granulares han existido desde siempre. El registro más antiguo hecho por el hombre que se conoce, data aproximadamente del año 98-55 A.C. por Lucrecio, un filósofo y poeta naturalista romano quien escribió lo siguiente: *uno puede recoger semillas de amapolas con un cucharón tan fácilmente como si fuera agua y cuando se inclina el cucharón, las semillas fluyen continuamente como un chorro de agua* [59].

Desde entonces no se conoce de alguna otra investigación sobre el tema sino hasta la época del renacimiento. Leonardo da Vinci (1452-1519) diseñó un experimento con pilas de arena para demostrar las leyes de la fricción seca. Leonardo encontró algunas de las propiedades que se satisfacen en una pila de arena.

Otros pioneros en este campo, fueron Guillaume Amontons (1663-1705), Theophilus Desaguliers (1683-1744), Leonard Euler (1707-1783) y Charles de Coulomb (1736-1806).

Algunos de sus hallazgos se resumen en las siguientes leyes:

1. La fuerza de fricción es directamente proporcional a la fuerza aplicada en el área de contacto. (Amontons 1ª ley).
2. La fuerza de fricción es independiente del área aparente de contacto. (Amontons 2ª ley).
3. La fricción cinética es independiente de la velocidad de deslizamiento (Ley de Coulomb).

Aunque ninguno de estos pioneros tiene la exclusiva de reclamar estas tres leyes como propias, se acostumbra hacer mención de ellas como las leyes de Coulomb. Esto se debe a que Coulomb escribió el primer artículo acerca del tema, que se titula: *Ensayo sobre las reglas de máximos y mínimos aplicadas a algunos problemas de equilibrio relacionados con la arquitectura* [10]. El artículo reporta las observaciones experimentales de la tierra suelta en un dique en la ribera de un río, la estabilidad de las estructuras de piedra y de otros edificios. Coulomb describe también la ley de la fricción seca entre sólidos ya mencionada, misma que se extrapola al material granular, anunciando así en su artículo el nacimiento de una nueva disciplina: los materiales granulares.

En 1780 Erns Chladni (1756-1827) aprovechó las propiedades del material granular para observar lo que hoy se conoce como las figuras complementarias de Chladni, figuras geométricas que se forman en el material granular, y permiten observar la forma de las vibraciones que se obtienen al producir algún sonido. Prontamente sus experimentos fueron duplicados y confirmados por Christian Oersted (1777-1851). Posteriormente en 1827 Felix Savart (1791-1841), interesado en la música entre otras cosas, usó las figuras geométricas de Chladni para estudiar las frecuencias y longitudes de onda del sonido producido por instrumentos musicales.

Michael Faraday (1791-1867) en sus primeros trabajos de inestabilidad hidrodinámica, también puso interés en el problema de cómo las vibraciones inducen a la formación de pilas de arena. Su interés era saber por qué el viento acomoda a la arena en formas geométricas que tienen ciertos patrones regulares. Este problema hasta ahora continúa sin solución.

William Rankine (1820-1872) investigó las implicaciones teóricas de la fricción en los materiales granulares [5]. Partiendo de las leyes de Coulomb, Rankine estableció una serie de principios que permanecen válidos hasta nuestros días. Definió lo que hoy se conoce como *los estados activos y pasivos de Rankine*.

En 1884, I. Roberts reportó en su artículo [44] que en una estructura cuyas paredes laterales son paralelas, la presión ejercida por el almacenaje de grano sobre las paredes va de mayor a menor partiendo de la base, esto ocurre cuando la estructura se llena a una altura mayor que dos veces el diámetro del círculo inscrito en su base. Once años después H. Janssen propuso un modelo basado en un coeficiente que describe la dirección de las fuerzas sobre las paredes [22]. La misma idea inspiró a John Strutt, mejor conocido como Lord Rayleigh (1842-1919) quien publicó su trabajo en 1906 [43].

Osborne Reynolds (1842-1912) también hizo algunas contribuciones fundamentales a las teorías del material granular alrededor del año 1885. Algunos conceptos que él desarrolló permanecen en la lista de los temas de investigación de la física moderna.

Uno de los investigadores más destacados fue Ralph A. Bagnold, quien entre 1940 y 1970, hizo importantes observaciones y escribió un libro sobre las arenas del desierto, mismo que ha llegado a ser un clásico [49].

Aunque existen muchos otros científicos dedicados al estudio del material granular, los ya mencionados anteriormente, fueron pioneros en el campo y contribuyeron ampliamente a dar formato y origen al estudio sistemático del tema.

## 1.4. Características generales

De los materiales granulares, podemos decir que es muy poco lo que se sabe acerca de las leyes que describen sus propiedades estáticas y dinámicas, en particular si se compara con lo que se sabe de los fluidos.

Un líquido en reposo necesita un esfuerzo cortante mayor que cero para comenzar a moverse. Un material granular no es tan fácil de mover. Esto nos sugiere que para iniciar el flujo de materiales granulares tratamos con un fenómeno que involucra límites de estabilidad y efectos no lineales. Por otra parte, es relativamente fácil mezclar los líquidos miscibles; pero los materiales granulares tienden a separarse por tamaños ante efectos vibratorios; las partículas grandes quedan en la parte superior y las más pequeñas en el fondo del contenedor.

Las propiedades de un material granular seco dependen fuertemente de las características mecánicas fundamentales de sus constituyentes. Ante cualquier estímulo externo, el material puede reaccionar de formas distintas. La manera en que reaccione el material depende en gran parte de la naturaleza de las interacciones micromecánicas, no sólo entre las partículas, sino también con las paredes del contenedor.

Experimentalmente se ha observado que el flujo granular tiene lugar en forma de capas o láminas, cada una con velocidad distinta, ver figura (1.4). Esto es, los movimientos del material granular ocurren en capas estratificadas relativamente paralelas entre sí. Sin embargo, también se ha observado que esto es cierto sólo para velocidades inferiores a cierto límite, pues para altas velocidades el material se comporta como un sólido.

Podemos introducir un parámetro llamado la razón de corte de una capa de material granular en movimiento sobre otra capa moviéndose a una velocidad distinta. Este parámetro  $\gamma$  es una medida del promedio del gradiente de velocidad y se define como:

$$\gamma = \left\langle \frac{\partial v}{\partial z} \right\rangle, \quad (1.1)$$

donde  $z$  es la profundidad y  $v$  es la velocidad promedio entre las dos capas. Si se quiere desarrollar un modelo de la dinámica del flujo de material granular a bajas velocidades, la razón de corte juega un papel importante, pues nos permitirá incluir la pérdida de energía cinética por fricción. Sea  $D$  el diámetro de cada una de las partículas de masa  $m$ . La cantidad  $D \cdot \gamma$ , mide la velocidad relativa de esta partícula con respecto a la capa inferior. La energía cinética  $E_c$  tiene su valor máximo en la superficie.  $E_c$  se hace cero a una profundidad llamada longitud característica  $\lambda_e$ . La longitud característica es típicamente del orden de unos pocos

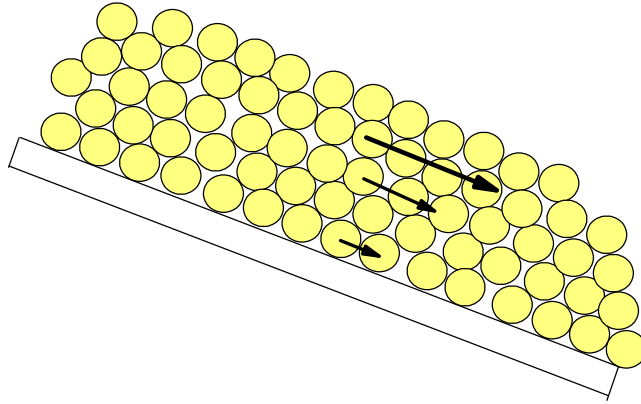


Figura 1.3: La velocidad de las partículas en un flujo granular decrece con la profundidad.

diámetros  $D$ . La pérdida de energía cinética y el valor de  $\lambda_e$  se deben a la fuerza de fricción  $F_c$ . Esto se puede escribir como:

$$F_c = \left\langle \frac{\partial E_c}{\partial z} \right\rangle \approx \frac{mD^2}{2\lambda_e} \gamma^2. \quad (1.2)$$

La transición de un material granular del estado estático al dinámico, trae consigo una nueva interacción entre partículas y paredes: las colisiones, que tienen un papel predominante, posiblemente aún más importante que el de la fricción. A diferencia del estado estático en el que los modelos, tales como el de Janssen, la fricción juega un papel dominante [37], en el estado de fluidización, la transmisión de momento debido a colisiones entre partículas y paredes, es en gran parte responsable del desarrollo del flujo. Para tener un buen modelo que describa las colisiones que ocurren en el sistema, hay que tomar en cuenta los coeficientes de restitución normal y tangencial. Aunado a esto, también intervienen las fuerzas externas, por ejemplo la fuerza debida a la aceleración de la gravedad.

## 1.5. Avalancha de un material granular

Supongamos que tenemos un material granular estático. Bajo la influencia de un estímulo externo, la estructura granular comenzará a des-compactarse e iniciará el flujo granular. Las paredes del contenedor juegan un papel importante en la transmisión del momento lineal y angular, debido a los contactos internos entre partículas y paredes. Con el movimiento de las partículas las fuerzas de fricción cinéticas entran en juego. En esta sección describiremos las

propiedades dinámicas del material.

### 1.5.1. Equilibrio estático del material

En un material granular, se le llama *superficie libre* a la capa más alta, si se observa al material desde una vista aérea, es la capa que podemos ver. El material granular se encuentra en estado de equilibrio estático, cuando todas sus partículas se encuentran en reposo unas con respecto a las otras. El punto de interés en el presente trabajo, es conocer en que condiciones se da el límite de estabilidad; ésto ocurre cuando las partículas de su superficie libre comienzan a moverse en capas. La primera capa que inicia el movimiento, es la de la superficie libre; luego le siguen las de abajo en orden descendente.

Charles Coulomb hizo observaciones cuantitativas del ángulo máximo de estabilidad. Como ingeniero militar a cargo de construir fortificaciones, encontró que dos capas continuas de material granular seco, no pueden moverse una en relación a la otra. Para que exista movimiento, su ángulo de inclinación  $\theta$  debe ser mayor o igual que  $\tan^{-1}(\mu_s)$ , donde  $\mu_s$  es interpretado como un coeficiente característico de la fricción estática entre sólidos.

El valor del ángulo máximo de estabilidad no sólo depende del coeficiente fricción. Otros factores que se sabe intervienen son:

- El factor geométrico. Esto implica que se mide un ángulo máximo de estabilidad diferente, si el material se vacía en un sustrato cóncavo, plano o convexo.
- El factor de compactación o empaquetamiento. Éste tiene que ver con la distancia entre las partículas. Si  $V_i$  es el volumen de la partícula  $i$  y  $V_T$  es el volumen del espacio ocupado por todo el material granular; entonces el factor de compactación es:

$$F_{comp} = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i)}{V_T}, \quad (1.3)$$

donde  $N$  es el número total de partículas en el contenedor.

Osborne Reynolds (1842-1912), ingeniero británico, estudió la transición del estado estático al estado de fluidización en un material granular. Efectuó el siguiente experimento: se tiene un cilindro transparente con arena fina hasta la mitad de su altura. Se coloca acostado horizontalmente (ver figura 1.4) y se rueda a una velocidad de 0.01 rev/s. La superficie libre de la arena tendrá un ángulo  $\theta$  con la horizontal, al cuál le llama ángulo de terraplén. Éste ángulo aumenta al girar el cilindro. Reynolds les da nombres a los ángulos por los que pasa el ángulo de terraplén, al valor máximo le llama ángulo de movimiento  $\theta_m$ , en el cual ocurre una miniavalancha, al ángulo más pequeño  $\theta_r$  lo llama ángulo de respuesta. A la diferencia  $\delta = \theta_m - \theta_r$  le llama ángulo de relajación. En su experimento con arena seca, Reynolds midió un ángulo de relajación que es del orden de dos grados.

Esta serie de avalanchas se manifiestan de forma cuasiperiódica y constituyen una de las propiedades fundamentales de la física de pilas granulares. De estos experimentos podemos concluir que es imposible definir sin ambigüedad un ángulo de terraplén.

Reynolds propuso una explicación para los ángulos de relajación. Argumentó que las partículas en estado metaestable (cuando  $\theta \leq \theta_m$ ) pueden moverse aproximadamente hasta



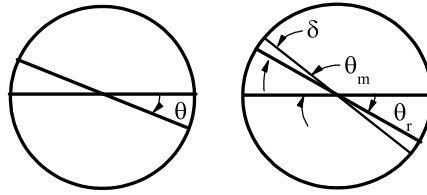


Figura 1.4: Definición de ángulos de terraplén. En un cilindro con tapas transparentes, se coloca arena fina hasta la mitad. Luego se hace rodar por una superficie plana. A los ángulos de terraplén que forma la superficie libre con la horizontal se les llaman:  $\theta_m$  ángulo de movimiento,  $\theta_r$  ángulo de repuesta y  $\delta = \theta_m - \theta_r$  ángulo de relajación.

el punto en que tienen algún espacio libre para hacerlo, lo cual requiere que la pila sea descompactada. Esto implica una inclinación adicional hasta el valor de  $\theta_m$ . Reynolds calculó que el ángulo de relajación  $\delta$  corresponde a la inclinación extra necesaria para descompactar las capas superiores de la pila de material granular.

El material se derrumba después de alcanzar cierto ángulo, porque busca la forma de regresar a su estado de equilibrio o bien a su estado de menor energía, pues no le es posible soportar la estructura después del ángulo de máxima estabilidad, al cual Reynolds le llamó ángulo de movimiento  $\theta_m$  en su cilindro rodante.

El ángulo de respuesta y el ángulo de movimiento pueden tener una sola partícula de diferencia. Si esto ocurre el ángulo de relajación será muy pequeño y al menos del orden de  $D/L$ , donde  $D$  es el diámetro de la partícula y  $L$  es la longitud de la trayectoria de una avalancha, figura (1.5).

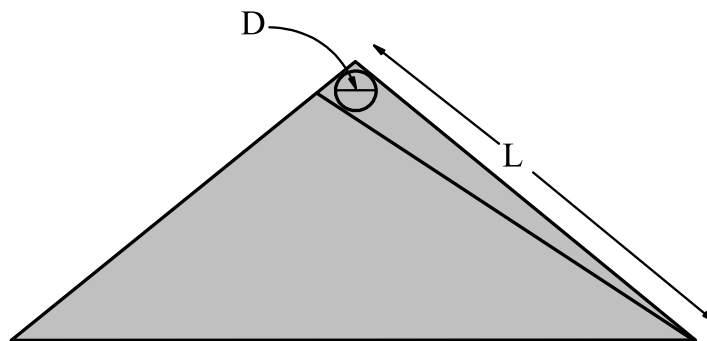


Figura 1.5: En una pila de un pequeño número de partículas esféricas, el ángulo de relajación tiende a cero

En investigaciones más recientes, Peralta-Fabi et. al., estudiaron avalanchas en dos dimensiones [59] mediante el análisis de un cilindro rodante. Ellos encontrando que los ángulos de inicio y terminación de una avalancha, no son únicos y no son siempre los mismos, sino que tienen una considerable dispersión. En muchos de los artículos y libros publicados sobre

avalanchas, hay una tendencia errónea a suponer que existe sólo un ángulo crítico, o a lo sumo dos, uno para el inicio de la avalancha y otro para describir el ángulo en que termina la avalancha; ésto no ocurre así. En experimentos bidimensionales de un cilindro rodante, luego de analizar repetidamente más de 3000 avalanchas[59], se encontró que los ángulos iniciales y finales, así como el tiempo que transcurre entre una y otra avalancha, varían en un rango considerable. Se piensa que las fluctuaciones en los valores del ángulo crítico son una propiedad fundamental del sistema y deben ser descritas en términos de una distribución de probabilidad. El hecho de que el ángulo varíe se atribuye a una dependencia fuerte de la configuración microscópica del material. También el tamaño de grano juega un rol importante, pues las fluctuaciones aumentan si el grano es más grande, de aquí que cuando se observan avalanchas con granos hiperfinos no se nota mucho tal fluctuación, es probablemente por esta razón por la que se asume, erróneamente, que el ángulo crítico es siempre el mismo.

Para describir el fenómeno en cuestión Peralta-Fabi et. al. sugieren usar las ecuaciones de un proceso estocástico de Markov. Los ángulos críticos y el tiempo transcurrido entre avalanchas se describen mediante distribuciones de probabilidad [35]. La probabilidad de encontrar al sistema en un ángulo  $\alpha$  al tiempo  $t$ , dado que el ángulo inicial de la superficie libre en  $t = 0$  era  $\alpha_0$  se escribe como  $P(\alpha, t; \alpha_0) \equiv P(\alpha, t)$ . Dicha probabilidad satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov [36], dada por la siguiente ecuación maestra:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)P(\alpha, t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [W(\alpha, \alpha')P(\alpha', t) - W(\alpha', \alpha)P(\alpha, t)]d\alpha', \quad (1.4)$$

donde  $W(\alpha, \alpha')$  es la probabilidad de transición por unidad de tiempo de que una avalancha cambie su ángulo de superficie libre de  $\alpha'$  a  $\alpha$  y  $\Omega$  es la velocidad angular con la que rota el cilindro. Al considerar las avalanchas como un proceso estocástico de Markov se infiere implícitamente que los detalles microscópicos de cada configuración acontecida con el tiempo, pueden promediarse observando las variables apropiadas, tales como el ángulo promedio. Las características microscópicas juegan un rol esencial en la evolución dinámica del material granular.

### 1.5.2. Pre-avalanchas

Antes de que inicie una avalancha en un amontonamiento granular, éste sufre una serie de inestabilidades [51] a las cuales llamaremos pre-avalanchas. Existen investigaciones numéricas sobre la transición entre equilibrio estático y el flujo superficial. En tales investigaciones se considera un sistema granular bidimensional sin cohesión. El movimiento de las partículas se propicia por la fuerza de gravedad aplicada continuamente. Esta transición se caracteriza por reajustes dinámicos locales. Un reajuste dinámico local, es un movimiento de partículas en el que sólo participan un pequeño grupo de ellas, además ocurre sólo en cierta zona de la superficie del material. Los contactos que se dan en este pequeño grupo de partículas en movimiento, se conocen como *contactos críticos*. Se les llama así, para diferenciarlos de los contactos fuertes que se tienen en la porción de material que permanece estático. Los reajustes locales se describen mediante un parámetro de orden definido como la densidad de contactos críticos. En el material en estado estático, la fuerza de fricción que actúa en los contactos fuertes es la estática. En un material moviéndose, la fuerza de fricción que participa en los contactos críticos es la cinética.

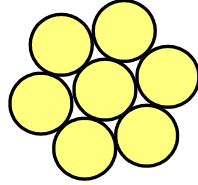


Figura 1.6: Correlación espacial de partículas conocida como cúmulo o *cluster*

Un cluster o cúmulo es un conjunto de partículas como el de la figura (1.6). Decir que está fluidizado significa que está en movimiento junto con otros clusters y partículas sueltas. Un análisis de las correlaciones espaciales de los contactos críticos muestra la aparición de clusters fluidizados, los cuales obedecen una ley de potencia que diverge conforme evoluciona del estado estático hacia el límite de estabilidad.

Aunque han habido avances en el entendimiento físico del flujo granular ([42] a [50]), los mecanismos que conducen a la transición del estado de equilibrio estático al estado dinámico en un medio granular aún no son claros y son difíciles de analizar experimentalmente. Un modelo hidrodinámico reciente basado en una teoría de transición de fase describe al material granular como un material bifásico con una fase sólida (estática) y una *líquida* (dinámica o que fluye)[1]. Esta transición es importante para el entendimiento de las avalanchas por la valoración de riesgo, en un posible derrumbe. La evolución se caracteriza por inestabilidades intermitentes locales y se describe mediante la fracción de contactos donde la fuerza de fricción cinética  $\nu_c$  está activada completamente. Una descripción más detallada involucra áreas de fluidización, son como pequeñas corrientes esporádicas de material granular que fluyen en su superficie libre; sin embargo, no entran en el contexto de una avalancha, sino que son pequeños intentos del sistema por reacomodar sus partículas a un estado más estable, antes de que se alcance cierto ángulo promedio límite de estabilidad. Este resultado estaría a favor de una descripción en términos de un sistema multifásico que obedece a una transición de fase. La fricción por contacto está descrita mediante la clásica ley de Coulomb. El deslizamiento relativo entre dos partículas en contacto puede ocurrir sólo cuando la fuerza de fricción estática es superada. Entonces la fuerza de fricción cinética es activada completamente. Las fuerzas de fricción son fuerzas de contacto tangenciales. La ya mencionada ley de Coulomb dice que

$$f_t = \mu f_n, \quad (1.5)$$

donde  $f_t$  es la fuerza de contacto tangencial,  $f_n$  es la fuerza normal y  $\mu$  es el coeficiente de fricción del contacto.

Para colisiones perfectamente inelásticas con coeficiente de fricción  $\mu = 0.5$ , se observa [51] una leve fluctuación del 5% cuando el material sufre una inclinación causada por una rotación de  $0.001^\circ$  por unidad de tiempo. La inclinación del contenedor aumenta lentamente desde  $\theta = 0$  hasta un ángulo de respuesta máximo  $\theta_c = 20^\circ$  en el cual la superficie libre sufre una avalancha.  $\theta_c$  está relacionado con el coeficiente de fricción cinético interno de la pila  $\mu_{eff}$  como [48]:

$$\mu_{eff} = \tan(\theta_c). \quad (1.6)$$

Sin embargo, la evolución de una pila de material granular, al inclinar su contenedor para llegar a  $\theta_c$ , no es monótona. En realidad se observa la evolución de inestabilidades locales que permiten la activación de la fricción cinética entre partículas. Inicialmente la  $f_t$  en el contacto corresponde a la fricción estática:

$$|f_s| < |\mu_s f_n|. \quad (1.7)$$

Pero sobre la superficie libre del material situado en el plano inclinado, resulta que un número considerable de contactos alcanza el límite de Coulomb y se activa la fricción cinética

$$|f_k| = |\mu_k f_n|, \quad (1.8)$$

donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética de las partículas en la pila. La fuerza de fricción cinética tiene un valor menor que la fuerza de fricción estática máxima, para que el material comience a moverse (umbral de Coulomb), esto es:

$$|f_k| < |f_s|. \quad (1.9)$$

Los contactos que alcanzan la fuerza de fricción estática máxima, ya no pueden soportar las fuerzas adicionales debidas a los esfuerzos de corte, mismas que van en aumento conforme se inclina al material. Eventualmente, esto provoca inestabilidades y posteriormente la desaparición de los contactos. A estos contactos que se encuentran en un estado de inestabilidad se les llama contactos críticos.

La evolución del material granular se describe en términos de la fracción de contactos críticos  $\nu$  sobre un volumen  $V$ . Ésta fracción tiene una dependencia del volumen  $V$  y el ángulo de inclinación  $\theta$ , que matemáticamente podemos escribir como:

$$\nu(\theta, V) = \frac{N_c}{N_V}, \quad (1.10)$$

donde  $N_c$  y  $N_V$  son el número de contactos críticos y el número de contactos totales en  $V$  para el ángulo de inclinación  $\theta$  respectivamente. La densidad de contactos permanece casi constante debido al empaquetamiento en *cluster* ( $N \propto V$ ), aunque el valor promedio de  $\nu$  obviamente sufre un ligero incremento conforme se inclina más la pila. Esto se debe a que conforme nos acercamos al ángulo de estabilidad máxima, el número de contactos críticos debe de ser mayor.

Al inclinar un contenedor con material granular; la densidad de contactos críticos fluctúa rápidamente, conforme nos acercamos al ángulo crítico promedio. Estas fluctuaciones son un reflejo de las inestabilidades intermitentes, durante las cuales, el sistema trata de regresar a su

estado de equilibrio a través de arreglos dinámicos locales, como puede observarse también en mediciones de las fluctuaciones de la energía cinética media [51].

Aún cuando la densidad de contactos críticos aumenta en el medio durante la movilización del sistema, la población de contactos críticos se renueva por estas inestabilidades intermitentes. Cada contacto crítico tiene un tiempo de vida muy corto debido al estado metaestable en que se encuentra.

Por otra parte las fluctuaciones de  $\nu$  tienen un valor límite correspondiente a  $\theta = \theta_c$ , al cual se le representa como  $\nu_c$ . En los experimentos de Staron et. al [51] se reporta un  $\nu_c$  del orden de 0.08. Obsérvese que tal valor de  $\nu_c$  es mayor que cuando la pila estaba en estado de equilibrio, donde  $\nu = 0$ , por tan solo unas centésimas.

Para tener una medida normalizada de la densidad de contactos críticos, se puede describir al sistema en términos de un parámetro de orden:

$$\Phi = \frac{\nu}{\nu_c}, \quad (1.11)$$

que sirve para caracterizar la transición parcialmente fluidizada.

Debido a la geometría intrínseca y al esfuerzo en las fluctuaciones de cada realización individual, cada amontonamiento puede explorar estados extremos poco comunes más allá del límite crítico  $\nu_c$  en el curso de la evolución. Estos estados metaestables van seguidos de reordenamientos dinámicos locales inmediatos. Aunque lo más frecuente es que estos reacomodos tengan valores de  $\nu$  menores al 1% de  $\nu_c$ , muy por debajo del valor de máxima estabilidad. Todas estas fluctuaciones de reordenamientos intermitentes, ocurren siempre cerca de la superficie libre.

La movilización de la pila granular está relacionada con un evento de fluidización de clusters. La cantidad de clusters aumenta conforme crece  $\theta$ , obedeciendo una ley de potencias. Este resultado es una característica básica, que debe tomarse en cuenta en la descripción de un sistema granular durante la fluidización. La transición de un estado de equilibrio a un flujo dinámico suele describirse por el parámetro de orden  $\Phi$ , ecuación (1.11) y por el límite de estabilidad promedio resultante. Las fuerzas en un medio granular en estado metaestable, tienen una amplia y variada distribución de sus magnitudes; algunos contactos son fuertes y otros débiles. La fuerza transmitida a través de contactos fuertes excede a la fuerza media, calculada estadísticamente en la pila de material granular, y son responsables de los esfuerzos mecánicos del material. En contraste, las fuerzas transmitidas a lo largo de redes de contacto débiles, contribuyen para obtener una presión promedio y los contactos críticos aparecen preferentemente en estas zonas de contacto débil; coincidiendo así en que, los puntos de contactos críticos aparecen en zonas de baja presión. Las redes de contactos fuertes controlan la evolución de los esfuerzos estáticos.

Los contactos críticos tienden a estar organizados como clusters fluidizados que eventualmente desestabilizan al sistema cuando su número alcanza cierto valor crítico, para así desencadenar una avalancha, que en suma, podría verse como el conjunto de todas las inestabilidades del sistema.

Otros parámetros del material tales como el coeficiente de fricción y la forma como están acomodadas las partículas en el contenedor, también participan en el fenómeno en cuestión. En la presente tesis se investiga la influencia del coeficiente de fricción para que de inicio una avalancha.

### 1.5.3. Desarrollo de una avalancha

Cuando una pila de material granular fluye sobre un plano inclinado, la avalancha comienza en la superficie libre del material. Conforme va evolucionando el sistema, la capa superior arrastrará a las partículas que se encuentran en la capa inferior inmediata. Para que haya arrastre se requiere tener cierta energía cinética traslacional y fuerza de fricción entre las capas. Cuando la avalancha ya ha comenzado, nos encontramos en un plano inclinado con un ángulo mayor que el ángulo promedio de máxima estabilidad.

Las avalanchas son un mecanismo de disipación de energía, que el medio granular adopta para poder regresar a un estado de menor energía, al que llamamos estado de equilibrio o estado de reposo. La disipación de energía ocurre por las colisiones entre partículas, por la fricción con las paredes, por las ondas acústicas y por cambios de temperatura.

Sin embargo, si le suministramos más energía al sistema elevando la inclinación del contenedor, las partículas en la superficie comenzarán a arrastrar a las partículas de la capa inferior inmediata, y estas a su vez a las de la siguiente capa, así ocurrirá sucesivamente, hasta que finalmente todas las partículas se encuentren en movimiento. Las partículas en la superficie irán más rápido que las del fondo. Pero al final, si simulamos mediante computadora un sistema infinito, todas se moverán en conjunto a la misma velocidad como si se tratara de un sólido en movimiento.

Romero-Rochin et. al.[46] hicieron experimentos de avalanchas bidimensionales usando la técnica computacional de autómatas celulares. Para caracterizar a la avalancha utilizan una variable macroscópica, la energía media del sistema  $H(t)$ , la cual es descrita por la siguiente ecuación:

$$H(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} h_{ij}(t) \quad (1.12)$$

donde  $h_{ij}$  es la energía local de una celda,  $N^2$  es el número total de celdas y  $t$  es el tiempo. Se encontró que se trata de un proceso cuasiperiódico y que la cantidad macroscópica  $H(t)$  es un proceso estocástico Markoviano. Por lo tanto se puede aplicar una ecuación de probabilidad. Sea  $P(H, t)$ , la distribución de probabilidad de encontrar al sistema con una energía  $H$  en el tiempo  $t$ , las propiedades Markovianas implican que debe de satisfacer la siguiente ecuación maestra:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(H, t) + \Omega \frac{\partial}{\partial H} P(H, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [W(H, H') P(H', t) - W(H', H) P(H, t)] dH', \quad (1.13)$$

donde  $\Omega$  es la razón de cambio de las fuerzas en la avalancha,  $W(H, H')$  es la probabilidad de transición por unidad de tiempo, de que el sistema cambie su energía  $H$  a  $H'$ . La ecuación 1.13 da la información más relevante del inicio y propagación de una avalancha.

También, usando el método de autómatas celulares Morales, Peralta-Fabi y Romero-Rochín [31], encontraron una distinción entre pequeñas y grandes avalanchas. Usando ésto, proponen distintas formas de predecir una avalancha grande, esto es de gran utilidad para predecir los terremotos.

En tres dimensiones, si se coloca arena sobre un plano, luego se da la inclinación suficiente para que la arena fluya. Se han encontrado dos tipos de comportamiento [15] en las avalanchas de material granular:

Primer tipo. Éste es para avalanchas en las que la capa superficial que participa en el movimiento es de escaso espesor. Se observó que la avalancha se ensancha en las direcciones perpendiculares a su movimiento, en su camino colina abajo, dejando una traza de apariencia de triángulo en su recorrido. La base del triángulo está colina abajo y su punta colina arriba; esto es observándola desde arriba, el material en movimiento es menos ancho colina arriba y más ancho colina abajo. Este tipo de avalanchas ocurren cuando el plano inclinado prácticamente tiene la inclinación del ángulo máximo de estabilidad, por lo que la capa superficial en movimiento es de una longitud característica  $\lambda_e$ , del orden de poco más de 1 diámetro de longitud o hasta de 1 diámetro solamente.

El segundo tipo. Éste es para avalanchas con un espesor de varios diámetros de longitud para la capa de partículas que participa en el movimiento. En este caso, los granos localizados colina arriba en el plano, comienzan a caerse súbitamente debido a la pérdida de soporte. Contrariamente al caso anterior, el frente de la avalancha es una punta redondeada de menos anchura que la avalancha observada colina arriba; visto desde un punto de vista aéreo, sucede que la parte de la avalancha que ocurre montaña arriba, cuya anchura es mucho mayor, también está redondeada. Tenemos entonces un triángulo con la base colina arriba y una punta colina abajo, pero sus esquinas están todas redondeadas.

---

# Capítulo 2

## Método de elemento discreto

---

### 2.1. Introducción

El método de elemento discreto es un modelo numérico capaz de describir la conducta mecánica de agrupamientos de discos o esferas. El método se basa en un esquema numérico explícito, en el cuál la interacción de las partículas es monitoreada contacto por contacto y el movimiento de las partículas es modelado partícula por partícula.

Un medio granular se compone de distintas partículas, las cuales se desplazan independientemente de un punto a otro e interactúan únicamente en los puntos de contacto. El carácter discreto del medio infiere una conducta compleja bajo condiciones de esfuerzos. Hasta la fecha no ha sido establecida ninguna relación constitutiva satisfactoria. Además se necesitan extensas pruebas de laboratorio para generar nuevas relaciones constitutivas, o para validar las que ya existen.

La interpretación de experimentos en un medio granular real, tal como arena, es difícil porque los esfuerzos dentro de la muestra no pueden ser medidos y deben ser estimados de las condiciones de frontera. Nuevas técnicas experimentales usando espectroscopía de rayos X han hecho posible medir esfuerzos, pero tales técnicas no funcionan para la determinación de esfuerzos de una muestra de polvos. Esto se debe a que no tenemos un medio transparente.

La incertidumbre en la medida de esfuerzos en el interior de un medio granular, ha conducido al desarrollo de modelos que son geoméricamente más simples que la arena real en la naturaleza, y para los cuales los esfuerzos y desplazamientos pueden ser calculados o medidos. Los modelos consisten de ensambles de discos o esferas y pueden ser analizados física y numéricamente. Se han usado materiales ópticamente sensitivos para los discos. La información extraída de experimentos con estos discos, ha servido para confirmar las principales características del modelo continuo.

Sin embargo, el modelado numérico es más flexible en aplicaciones que el modelado analítico, además tiene la ventaja de que podemos modelar cualquier dato y cualquier escenario en los experimentos. La flexibilidad del modelado numérico se extiende a la configuración de los esfuerzos, tamaño de partículas, distribución de tamaños y propiedades físicas de las partículas.

El método de elemento discreto es un modelo numérico que es capaz de manejar partículas de cualquier apariencia. Fue desarrollado por Cundall [12] entre 1971 y 1974 para el análisis de problemas de mecánica de rocas. En éste método, la interacción de las partículas es vista como un problema transitorio con estados de equilibrio desarrollándose en donde quiera que las fuerzas internas se balanceen.

El método se aplicó posteriormente a materiales granulares en colaboración con Strack



(1979) [14]. Los aspectos fundamentales del modelo de elemento discreto fueron publicados en forma resumida por Cundall y Hart [13] (1992). El algoritmo del método de elemento discreto (MED) se basa en la formulación de la diferencia finita de la segunda ley de Newton o ecuación de movimiento.

Muchos de los modelos utilizados para resolver problemas de dinámica se basan en el modelo original del MED o en ligeras modificaciones del mismo.

## 2.2. Formulación Básica

En los distintos métodos de elemento discreto (MED) propuestos por Cundall, las ecuaciones que gobiernan al sistema son un conjunto de ecuaciones de equilibrio que resultan de sumar las fuerzas y las torcas aplicadas al sistema. El modelo original del MED supone lo siguiente:

1. Las partículas son circulares y se tratan como un cuerpo rígido.
2. Los puntos de contacto entre partículas ocurren en un área infinitesimalmente pequeña.
3. A las partículas se les permite traslaparse ligeramente en los puntos de contacto.
4. La condición de deslizamiento entre partículas está dada por la ley de Mohr-Coulomb.

El conjunto de ecuaciones que gobiernan en el MED se expresan en forma de matrices como:

$$M\Delta\ddot{X} + C\Delta\dot{X} + S\Delta X = \Delta F \quad (2.1)$$

donde  $M$  es la matriz de masas,  $C$  es la matriz de amortiguamiento y  $S$  es la matriz de rigidez,  $\Delta X$  es el incremento en el vector desplazamiento, mismo que también incluye incrementos en la rotación y  $\Delta F$  es el incremento en el vector de fuerzas, el cual incluye el aumento en el momento. La matriz  $S$  generalmente cambia durante el curso de un análisis por el carácter no lineal de un medio granular.

Para poder obtener la solución paso a paso, la ecuación matricial anterior debe ser convertida en un conjunto de ecuaciones algebraicas en términos de una diferencia finita.

Como ejemplo, consideremos un caso simple en el que las partículas sólo rotan y se mueven a velocidades constantes. En este supuesto, el conjunto de ecuaciones que gobiernan al sistema se reduce a:

$$S\Delta X = \Delta F, \quad (2.2)$$

y la solución por lo tanto está dada por

$$\Delta X = S^{-1}\Delta F. \quad (2.3)$$

Usando este esquema para paquetes compuestos de discos cuyas propiedades mecánicas son las mismas, Kishino [24] propone un método de elemento discreto llamado método de elemento granular.

Dentro de los diferentes métodos de elemento discreto, hay varias formulaciones para analizar el sistema. Entre ellas se encuentran los métodos de autómatas celulares [2]y [46],

el de Monte Carlo [47], el de partículas duras [9] y [26] y el de partículas suaves [14] y [57]. El MED, no es exclusivo para simular materiales granulares. También se utiliza en otras disciplinas. Se modelan el tráfico vehicular y aerodinámico, cuerpos celestes en astronomía, redes de computadoras e interacciones animales, entre otras cosas. El método que se usa en las simulaciones de este trabajo es el de partículas suaves y se describe a continuación.

## 2.3. Simulaciones

El método de elemento discreto con partículas suaves es el que hemos usado para estudiar al material granular. Una de las razones es que muchas de las partículas en el sistema experimentan contactos de larga duración. Aunado a lo anterior, las fuerzas entre partículas juegan un papel importante en el desarrollo de la avalancha.

El método de partículas suaves es comúnmente usado para simular materiales granulares. La razón es que se puede determinar claramente el estado de cada partícula y las interacciones entre ellas mediante el uso de leyes físicas. El término de *partícula suave* se refiere al hecho de que las partículas pueden deformarse durante el contacto. La deformación se modela como un traslape. El tiempo de contacto entre partículas es finito. Además puede haber uno o varios contactos para la misma partícula.

### 2.3.1. Simulaciones en dos y tres dimensiones

Un flujo granular real ocurre en un espacio tridimensional; sin embargo, en esta investigación se trabaja con un flujo bidimensional porque el espacio en cuanto a recursos computacionales y de almacenamiento en memoria es menor que para el caso tridimensional. Las simulaciones para el caso bidimensional han arrojado buenos resultados al compararlos con fenómenos reales en muchos casos, tales como caídas de material granular [8], flujo de Couette [8], contenedores vibratorios [18, 53], flujo en tolvas [54], entre otras.

En situaciones en las que el empaquetamiento de las partículas es significativo, al trabajar con tres dimensiones es importante obtener resultados consistentes con las observaciones reales. En el caso bidimensional, las partículas pueden llegar a tener un máximo valor del factor de compactación (ver ecuación 1.3) de 0.91, mientras que para el caso tridimensional el máximo valor de compactación es de 0.74. Adicionalmente en dos dimensiones las partículas se empaquetan en forma hexagonal, la estructura se conoce como *close-packing* o *cluster*. En tal estructura el número de contactos máximo es de seis, obviamente para discos del mismo diámetro. Mientras que para el caso tridimensional se tiene un número máximo de contactos de treinta en toda la estructura *close-packing*, obviamente si las partículas son de diámetro uniforme; aunque la partícula del centro tiene solamente doce contactos. Consecuentemente se disipa más energía para el caso tridimensional que para el bidimensional. Hay más trayectorias en tres dimensiones, a lo largo de las cuales las fuerzas pueden ser transmitidas de una partícula hacia sus vecinas; en el caso bidimensional solo hay seis direcciones posibles y en el caso tridimensional hay doce.

### 2.3.2. Propiedades de las partículas

Las partículas usadas en la simulación tienen forma de discos. Esta geometría facilita la detección de las colisiones entre partículas y los traslapes que pudieran darse en la simulación. Además la localización de las partículas es simplemente el centro del círculo. Otras geometrías tales como elipsoides o polígonos se han simulado, para representar un material granular más real, como por ejemplo los granos de arroz [55, 11]. Las partículas asimétricas reducen la probabilidad de formar empaquetamientos regulares, pero sí tienen posibilidad de entrelazarse unas con otras, lo cual hace a los esfuerzos de corte del material más fuertes que en el caso de partículas circulares [38]. En consecuencia el ángulo crítico al que da inicio el flujo granular es mayor para partículas no circulares.

Otro efecto al usar partículas irregulares es que podemos tener partículas en contacto, cuya línea de acción no pasa por los centroides de las partículas. El movimiento resultante de tales fuerzas es una rotación. De este modo las partículas se van orientando por sí mismas en una dirección preferencial [2]. Además para trabajar con partículas irregulares se necesita un esquema más complicado para describir los contactos entre ellas.

Las partículas usadas en la presente investigación son discos que sólo se mueven en dos dimensiones. La diferencia entre un disco y una esfera estriba en el momento de inercia de la partícula. Para un disco es

$$I = \frac{1}{2}mr^2, \quad (2.4)$$

y para una esfera es de

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \quad (2.5)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $r$  es el radio de la misma. Las esferas rotan más fácilmente que los discos. La masa de una esfera es de

$$m = \rho \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (2.6)$$

En dos dimensiones la masa y la densidad de las partículas se escala, es decir que se usa la densidad por unidad de área y así

$$m = \rho\pi r^2. \quad (2.7)$$

Esto no afecta los resultados de la simulación en la que sólo se consideran las fuerzas de cuerpo y de contacto. En las fuerzas debido a otros efectos, tales como las electrostáticas o las del fluido intersticial, los efectos de la masa sí son importantes, pues estas fuerzas podrían ser afectadas por el momento de las partículas.

Aunque todas las partículas tienen una sección transversal circular, sus diámetros no son uniformes. Las partículas en la simulación tienen un rango de diámetros que son elegidos aleatoriamente entre un máximo y un mínimo, de modo que se tenga una distribución uniforme de diámetros. Haciendo esto, la probabilidad de formar estructuras hexagonales se reduce, lo cual asemeja mejor la realidad de un material granular.

### 2.3.3. Fuerzas

Una ventaja de la simulación de partículas suaves es que para algunos tipos de fuerzas es sencillo simular la interacción entre partículas. Estas fuerzas son generalmente clasificadas como fuerzas externas o de cuerpo y fuerzas de contacto.

Las fuerzas externas o de cuerpo actúan típicamente sobre todas las partículas del material. Ejemplos de ellas son la fuerza gravitacional y los campos electromagnéticos. Las fuerzas de contacto actúan cuando la partícula está adherida con otras o con las paredes del contenedor. Ejemplos de estas fuerzas incluyen tracciones debido al contacto entre superficies y fuerzas de cohesión. Un tercer tipo de fuerzas que pueden ser incluidas en la simulación de partículas suaves son las fuerzas intersticiales.

Las simulaciones de esta investigación sólo consideran una fuerza de cuerpo, la debida al campo gravitacional de la Tierra y dos fuerzas de contacto: entre partícula-partícula y entre partícula-pared. No considera ninguna fuerza electromagnética, ni cohesiva, ni intersticial. El modelo simula un material granular seco inmerso en el campo gravitacional y en el vacío.

La fuerza de cuerpo gravitacional actúa sobre todas las partículas del sistema. La fuerza actuando sobre la partícula  $i$  debido a la acción de la gravedad  $\vec{F}_{gi}$ , actúa en el centro de la partícula y está dada por,

$$\vec{F}_{gi} = m_i \vec{g}, \quad (2.8)$$

donde  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ -ésima y  $\vec{g}$  es el vector de aceleración gravitacional.

Las fuerzas de contacto sólo ocurren cuando dos o más partículas se encuentran. Una condición en estas simulaciones es que tales fuerzas ocurren cuando las partículas chocan traslapándose ligeramente. Para partículas circulares, el traslape ocurre cuando,

$$\Delta_{ij} = (r_j + r_i) - |\vec{x}_j - \vec{x}_i| \geq 0, \quad (2.9)$$

donde  $\Delta_{ij}$  es la cantidad de traslape entre las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima,  $r$  es el radio de la partícula y  $\vec{x}$  el vector de posición del centro de la partícula. La cantidad de traslape permitida en las simulaciones es usualmente pequeña, típicamente se limita al uno por ciento del radio de la partícula más pequeña. Por lo tanto, el volumen de la partícula permanece prácticamente constante durante una colisión, las partículas se consideran como rígidas. En colisiones reales, existe la deformación entre partículas en un régimen elásto-plástico. Una consecuencia importante de la deformación plástica es que se pierde cierta cantidad de energía durante la colisión. Este efecto es explícitamente considerado en la simulación, que incluye un mecanismo de disipación.

Las fuerzas de contacto tienen dos componentes, una normal y otra tangencial. La componente normal entre dos partículas en contacto actúa a lo largo de una línea de acción que pasa por los centros de las dos partículas. El vector unitario normal da la dirección de la componente normal de la fuerza de contacto entre las partículas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima, y está dado por:

$$\hat{n}_{ij} = \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}. \quad (2.10)$$

El vector unitario tangencial  $\hat{s}_{ij}$  es perpendicular al vector unitario normal, de modo que

$$\hat{n}_{ij} \times \hat{s}_{ij} = \hat{k}, \quad (2.11)$$

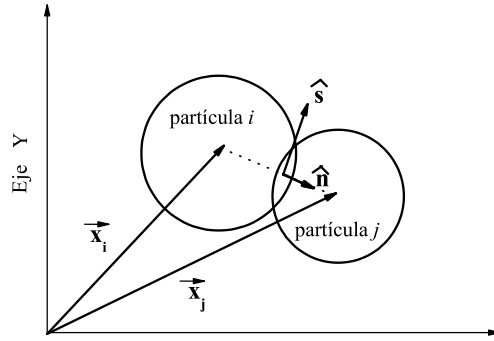


Figura 2.1: Sistema de coordenadas usado en las simulaciones.

donde  $\hat{k}$  es la dirección de la tercera dimensión. Véase la figura 2.1.

La componente normal de fuerza entre dos partículas se modela como un resorte en paralelo con un elemento amortiguador, como se muestra en la figura 2.2. Este modelo fue propuesto inicialmente por Cundall y Strack [14] para modelar contactos entre rocas. El resultado es una colisión con un coeficiente efectivo de restitución menor que uno. La fuerza  $\vec{F}_{nij}$  actuando sobre la partícula  $i$  debido a la partícula  $j$  en dirección normal está dada por:

$$\vec{F}_{nij} = (-k_n \Delta_{ij} + \nu_n \delta \dot{\vec{x}}_{ij} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad (2.12)$$

donde  $k_n$  y  $\nu_n$  son la constante normal del resorte y el coeficiente normal de amortiguamiento.  $\Delta_{ij}$  es la cantidad de traslape entre las partículas, dada por la ecuación ( 2.9 ). El primer término del lado derecho de la ecuación ( 2.12 ) representa la ley de Hooke, el segundo término representa un elemento amortiguado (ley de Newton para un fluido Newtoniano). La velocidad relativa de la partícula  $j$  con respecto a la partícula  $i$  en el punto de contacto está dada por:

$$\delta \dot{\vec{x}}_{ij} = \dot{\vec{x}}_j - \dot{\vec{x}}_i - (\dot{\theta}_j r_j + \dot{\theta}_i r_i) \hat{s}_{ij}, \quad (2.13)$$

donde  $\dot{\vec{x}}$  es la velocidad traslacional del centro de la partícula y  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular de la partícula.

El modelo de contacto tangencial está constituido por un resorte colocado en serie con un elemento deslizador de coeficiente de fricción coulombiana  $\mu$ , como se muestra en la figura 2.2.

El resorte le permite a la partícula responder elásticamente, mientras que el elemento deslizador con fricción determina el movimiento mutuo de una partícula en contra de la otra. La fuerza de fricción se opone al deslizamiento de ambas partículas según sus respectivos movimientos. La magnitud de la fuerza tangencial está limitada por el elemento deslizador. Este simple modelo reúne características importantes que se exhiben en teorías más complicadas que describen el micromecanismo de colisiones [27] . Por ejemplo, cuando una partícula

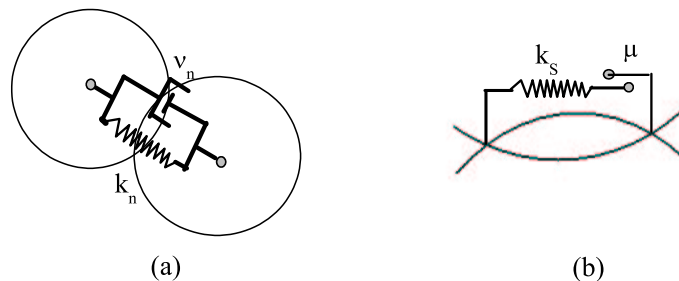


Figura 2.2: EL modelo de contacto de la simulación se separa en dos componentes: (a) la de la dirección normal y (b) la de la dirección tangencial.

esférica colisiona con una pared, la región de contacto puede tener un coeficiente de fricción tan alto que la partícula no se desliza, sólo se deforma o podría ocurrir que en el contacto la partícula se deslice y también tenga una pequeña deformación. Hay varias combinaciones posibles. Para ángulos de incidencia pequeños, las partículas permanecen pegadas y la región de contacto se mantiene fija durante todo el tiempo que dura la colisión, el deslizamiento ocurre ligeramente hasta que el final de la colisión está próximo, es decir se desliza muy poco. Para ángulos de incidencia grandes los contactos comienzan junto con el deslizamiento, es decir la partícula se deforma y también se desliza. Para ángulos de incidencia extremadamente grandes, prácticamente se tiene únicamente puro deslizamiento durante todo el impacto.

La interacción entre el resorte y el deslizador con fricción tiene algunas sutilezas. Primero examinaremos la fuerza tangencial debido al resorte. La fuerza tangencial del resorte actuando sobre la partícula  $i$  debido a la partícula  $j$   $\vec{F}_{s,resorte}$  está dada por,

$$\vec{F}_{s,resorte} = (k_s \delta s_{ij}) \hat{s}_{ij}, \quad (2.14)$$

donde  $k_s$  es la constante tangencial del resorte. La cantidad  $\delta s_{ij}$  es una medida del desplazamiento tangencial entre el punto de contacto inicial y el final y está dada por,

$$\delta s_{ij}(t) = \int_{t_0}^t (\delta \dot{\vec{x}}_{ij} \cdot \hat{s}_{ij}) dt' \quad (2.15)$$

donde  $t$  y  $t_0$  son el tiempo final e inicial del contacto, respectivamente. Si tomamos  $t_0 = 0$ , cuando el resorte está completamente relajado, entonces  $\delta s_{ij}(0) = 0$ .

Sin embargo, el modelo de contacto es más complicado cuando la fricción del elemento deslizador es considerada. Cuando la magnitud de la fuerza del resorte excede la magnitud de

la fuerza de fricción del elemento deslizador, es decir cuando

$$|\vec{F}_{s,friccion}| = \mu |\vec{F}_{nij}| < |\vec{F}_{s,resorte}|, \quad (2.16)$$

la fricción del elemento deslizador se activa y la fuerza aplicada sobre la partícula es

$$\vec{F}_{s,friccion} = \mu |\vec{F}_{nij}| \frac{\vec{F}_{s,resorte}}{|\vec{F}_{s,resorte}|}. \quad (2.17)$$

Los cambios en la componente tangencial del resorte  $\delta s_{ij}(t)$  determinan el valor de la fuerza de fricción mínima  $|\vec{F}_{s,friccion}| = \mu |\vec{F}_{nij}| \geq |k_s \delta s_{ij}(t)|$  para que la partícula solamente rebote y no resbale. Así, si al menos se equilibran ambas fuerzas, la tangencial del resorte y la de fricción, la partícula no se desliza y tenemos que,

$$\delta s_{ij}(t) = \frac{\mu |\vec{F}_{nij}|}{k_s}. \quad (2.18)$$

Cuando la fuerza de fricción del elemento deslizador es activada, la fuerza tangencial tiene una magnitud de  $\mu |\vec{F}_{nij}|$  y actúa en la misma dirección y sentido que la fuerza del resorte. Adicionalmente, la extensión del resorte  $\delta s_{ij}$  cambia constantemente su magnitud, y esa magnitud nos proporciona la magnitud de la fuerza de fricción del elemento deslizador.

La dinámica de colisiones de partículas reales en contacto es mucho más complicada que el modelo que se presenta aquí. Existen otros modelos de contacto que se han sugerido con el propósito de acercarse más a un modelo real. El modelo aquí presentado da resultados semejantes en un amplio rango con los medidos experimentalmente en un laboratorio real.

### 2.3.4. Ecuaciones de Movimiento

Una vez determinadas las fuerzas, el siguiente paso es plantear las ecuaciones de movimiento de cada partícula y resolverlas. La aceleración de cada partícula en el sistema se encuentra usando la segunda ley de Newton. El nuevo estado de la partícula se determina entonces, integrando la aceleración, lo que nos da las nuevas posiciones y velocidades. Para una partícula  $i$  las ecuaciones de movimiento están dadas por,

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_{gi} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{cij} \quad (2.19)$$

$$I_i \ddot{\vec{\theta}} = (r \times \vec{F}_{gi}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{cij}), \quad (2.20)$$

donde  $\vec{x}$  y  $\vec{\theta}$  son las posiciones traslacional y rotacional de la partícula  $i$ ,  $N$  es el número de partículas en la simulación,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $I_i$  es el momento de inercia rotacional con respecto a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro,  $\vec{F}_{gi}$  es el peso de la partícula  $i$ ,  $\vec{F}_{cij}$  es la fuerza de contacto sobre la partícula  $i$  ejercida por la partícula  $j$  y  $\vec{r}_i$  es un vector dirigido desde el centro de la partícula  $i$  a la localización del punto de contacto donde actúa la fuerza.

Para obtener la velocidad y la posición traslacionales se integra de esta forma:

$$\dot{\vec{x}}_i = \int \ddot{\vec{x}}_i dt, \quad (2.21)$$

$$\vec{x}_i = \int \dot{\vec{x}}_i dt. \quad (2.22)$$

Y para obtener la velocidad y la posición angulares se integra las cantidades respectivas:

$$\dot{\vec{\theta}}_i = \int \ddot{\vec{\theta}}_i dt, \quad (2.23)$$

$$\vec{\theta}_i = \int \dot{\vec{\theta}}_i dt. \quad (2.24)$$

Una vez que se tiene el nuevo estado de todas las partículas, se repite el ciclo planteando nuevamente las ecuaciones de movimiento para un nuevo tiempo. Esta vez con las nuevas aceleraciones, velocidades y posiciones de las partículas. La figura 2.3 es un esquema del proceso que siguen las simulaciones para efectuar las determinaciones pertinentes, que nos permitan analizar el fenómeno en cuestión.

### 2.3.5. Parámetros de la simulación

En la simulación hay parámetros globales y de contacto. Los parámetros globales son: la aceleración gravitacional, el tamaño del contenedor, el diámetro de las partículas, la densidad de las partículas, el paso de simulación  $\Delta t$  y el tiempo inicial y final de la simulación. Los parámetros de contacto son: el coeficiente de restitución entre las partículas  $\epsilon_{pp}$  (esto es cuando hay un choque entre partículas), el coeficiente de restitución entre pared y partícula  $\epsilon_{pw}$  (esto es cuando una partícula choca con una pared), el coeficiente de fricción de deslizamiento entre las partículas  $\mu_{pp}$  y el coeficiente de fricción de deslizamiento entre partículas y pared  $\mu_{pw}$ , las constantes normales del resorte entre partícula-partícula  $k_{n,pp}$  y entre partícula-pared  $k_{n,pw}$ , los coeficientes de amortiguamiento normales entre partícula-partícula  $\nu_{n,pp}$  y entre partícula-pared  $\nu_{n,pw}$  y las constantes tangenciales del resorte entre partícula-partícula  $k_{s,pp}$  y entre partícula-pared  $k_{s,pw}$ .

Las constantes normales del resorte  $k_{n,pp}$  y  $k_{n,pw}$  se determinan del máximo traslape permitido entre las partículas o entre una partícula y una pared. El traslape máximo  $\Delta_{max}$  se calcula considerando la velocidad de impacto máximo relativo  $\delta\vec{x}_{max,ij}$ , la masa de la partícula y el coeficiente de restitución  $\epsilon$ .

Para el modelo del amortiguamiento lineal del resorte el máximo traslape entre dos partículas que chocan está dado por [58]

$$\Delta_{max} = (\delta\vec{x}_{max,ij} \cdot \hat{n}_{ij}) \sqrt{\frac{m^*}{k_n}} \left( \exp \frac{\arctan(-\alpha)}{\alpha} \right), \quad (2.25)$$

donde  $\alpha = \pi / \ln(\epsilon)$  y  $m^* = m_i m_j / (m_i + m_j)$ . Si la partícula  $i$  choca con una pared entonces  $m^* = m_i$ .

Rearreglando la ecuación (2.25) tenemos:

$$\frac{k_n}{m^*} = \left( \frac{(\dot{\vec{x}}_{max,ij} \cdot \hat{n}_{ij}) / r}{\Delta_{max} / r} \right)^2 \left( \exp \frac{\arctan(-\alpha)}{\alpha} \right)^2. \quad (2.26)$$



Diagrama de Flujo del Modelo de Partículas Suaves

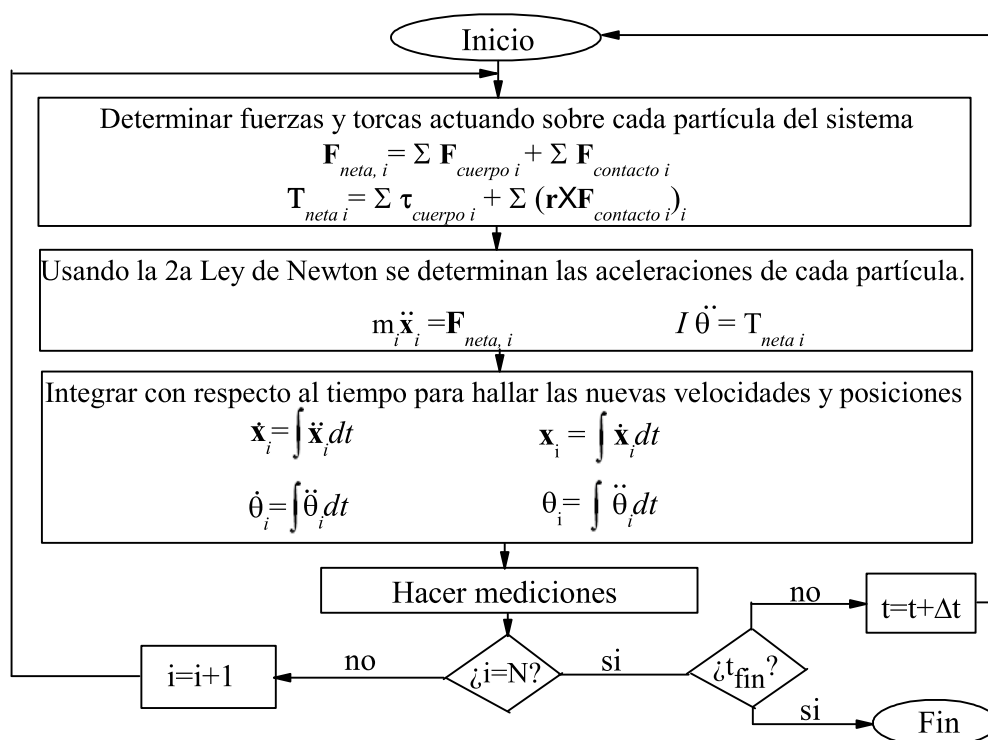


Figura 2.3: Diagrama de flujo del proceso que efectúa la simulación con el método de partículas suaves.

El valor de  $\frac{k_n}{m^*}$  es importante ya que el tiempo de duración de la colisión depende de tal factor [58] y está dado por

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_n}{m^*} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)}}. \quad (2.27)$$

Si se usa un valor de  $\frac{k_n}{m^*}$  muy grande el tiempo de duración de la colisión será pequeño y el intervalo de tiempo  $\Delta t$  de la simulación, el cual es una fracción de  $\tau$ , también será pequeño. Entonces es conveniente tener un valor de  $\frac{k_n}{m^*}$  pequeño, así el intervalo de tiempo de la simulación será mayor y el programa terminará más rápido. Sin embargo, si la constante del resorte es muy pequeña, las partículas pueden traslaparse significativamente y afectar las mediciones de las propiedades. Walton [57] sugiere que el máximo traslape debe ser menor que el 1% del radio de la partícula en fracciones sólidas de altas presiones.

En una colisión entre partículas la energía se pierde debido a la deformación plástica. La inelasticidad de la colisión es típicamente cuantificada mediante un coeficiente de restitución  $\epsilon$  definido como el cociente de la velocidad relativa después de la colisión y la velocidad relativa antes de la colisión. Aplicando esta definición a nuestro modelo, se encuentra que debido al resorte amortiguador obtenemos un coeficiente de restitución constante. El coeficiente de restitución normal efectivo para dos partículas que chocan está dado por [58],

$$\epsilon = \exp\left(\frac{\pi}{\left(\frac{4(k_n/m^*)}{(\nu/m^*)^2} - 1\right)^{1/2}}\right). \quad (2.28)$$

De la ecuación anterior se observa que el sistema del modelo resorte-amortiguador es poco amortiguado si  $\left(\frac{4m^*k_n}{\nu_n^2} > 1\right)$ , tal que si el sistema está críticamente amortiguado o sobreamortiguado,  $\epsilon$  podría ser cero y la colisión sería completamente inelástica.

En colisiones reales, el coeficiente de restitución decrece conforme incrementa la velocidad de la colisión [20, 52]. Si las velocidades relativas de impacto en el sistema de partículas son de magnitudes similares, entonces la consideración de un coeficiente de restitución constante es válida.

Rearreglando la ecuación (2.28) obtenemos una expresión para el coeficiente de amortiguamiento  $\nu_n$  que depende de la constante del resorte  $k_n$  y del coeficiente de restitución  $\epsilon$ ,

$$\frac{\nu_n}{m^*} = \sqrt{\frac{4 \frac{k_n}{m^*}}{1 + \alpha^2}}, \quad (2.29)$$

donde  $\alpha = \frac{\pi}{\ln \epsilon}$ . El coeficiente de amortiguamiento está determinado por la elección de la constante del resorte y del coeficiente de restitución.

Para la constante del resorte tangencial Cundall y Strack [14] recomiendan que,

$$\frac{2}{3} \leq \frac{k_s}{k_n} \leq 1, \quad (2.30)$$

basados en el modelo analítico de Mindin y Deresewicz [45] para modelos de contacto tangenciales. Cundall y Strack encontraron que, para pequeños valores de  $\mu$ , la razón  $\frac{k_s}{k_n}$  no cambia la conducta del sistema simulado, porque la conducta tangencial es la que gobierna en mayor

grado mediante el coeficiente de fricción por deslizamiento. Sin embargo, conforme  $\mu$  aumenta, el amortiguamiento del resorte es activado para contactos largos, en consecuencia, la razón  $\frac{k_s}{k_n}$  llega a tomar más importancia. En las simulaciones de este trabajo se usa  $\frac{k_s}{k_n} = 1$ .

### 2.3.6. Condiciones de frontera

Es necesario especificar el tipo de fronteras que se usan en la simulación. En el presente trabajo se usaron dos tipos de fronteras: paredes (frontera sólida) y fronteras periódicas.

La frontera de paredes consiste de una barrera suave pero con fricción (las partículas no se quedan pegadas en ella). Las paredes tienen sus propias características, tales como coeficiente de restitución, de fricción, módulo de Poisson, masa, longitud y ángulo de inclinación.

Las paredes con fronteras periódicas deben de ir en pareja. Las partículas que *salen* por una pared con cierta velocidad y posición, vuelven a *entrar* con la misma velocidad y la posición correspondiente por la pared opuesta. Este efecto sirve para eliminar los efectos debidos a las fronteras laterales, dando continuidad al movimiento.

### 2.3.7. Vector de gravedad

Con el propósito de poder simular una caja inclinándose, se hizo una pequeña implementación en el programa. Originalmente el vector de la aceleración de gravedad permanece constante. Las componentes están dadas en el programa original como:

$$\vec{G} = (g[0], g[1]) = (0, -1) \quad (2.31)$$

Cabe mencionar que todas las medidas están normalizadas con una magnitud característica representativa del sistema; en el caso de las aceleraciones, todas son normalizadas al ser divididas entre la magnitud de la aceleración de gravedad  $|g| = 9.8m/s^2$ , que es una magnitud representativa de la Tierra. La magnitud del vector es  $|G| = G = 1$  para las simulaciones.

Para propósitos de este trabajo, se requiere que la dimensión del vector de aceleración de gravedad sea una función del tiempo. El vector de gravedad en nuestras simulaciones, puede rotar con una velocidad angular  $\omega$ . Con lo que en las simulaciones de este trabajo el vector de aceleración de gravedad es

$$\vec{G} = (g[0], g[1]) = (G \sin(\omega t), -G \cos(\omega t)) \quad (2.32)$$

donde  $t$  es el tiempo de simulación. Poner el vector de gravedad en esta forma, es equivalente a rotar el contenedor de las partículas. Por simplicidad se decidió rotar el vector de gravedad, en lugar de rotar las cuatro paredes de la caja. Todas las simulaciones tienen un vector de aceleración de gravedad que rota con una velocidad  $\omega = 0.001$  radianes por segundo. A su vez el ángulo de inclinación de la caja se puede calcular de la siguiente manera:

$$\theta = \omega t. \quad (2.33)$$

Con la ecuación (2.33) se calcula fácilmente el ángulo crítico en las simulaciones. Si se desea mantener la caja en una sola inclinación fija, basta con sustituir la variable tiempo  $t$  en el vector de gravedad por el tiempo que corresponde al ángulo deseado.

### 2.3.8. Condiciones iniciales

El método de partículas suaves es determinista. Si los mismos parámetros y las mismas condiciones son usadas, la simulación arrojará los mismos resultados cada vez que se corra el programa. El programa coloca las partículas en el espacio de trabajo asignándoles posiciones y velocidades aleatorias, pero elegidas de entre un rango de velocidades con un mínimo y un máximo.

## 2.4. Implementación

El código de simulación original fue escrito por el Dr. Carl Wassgren [58]. El programa consta de varias subrutinas. La figura (2.3) muestra el ciclo de la simulación. Primero los datos de las partículas y de las fronteras son leídos de un archivo de entrada (input file). Con esto las condiciones iniciales son determinadas. Después las rutinas son llamadas a un ciclo principal de la simulación que da inicio. Dicho ciclo, comienza con la subrutina de fuerzas, la cual plantea la ecuación de movimiento considerando todas las fuerzas actuando sobre cada una de las partículas del sistema. Las fuerzas se determinan basándose en los modelos de contacto descritos previamente. Después, las ecuaciones de estado de las partículas se integran usando un método de diferencia central. Por último, se efectúan las mediciones pertinentes y los datos son registrados y guardados en un archivo de salida (output file). Este ciclo se repite para cada una de las partículas, repitiéndose los ciclos para el siguiente intervalo de tiempo. Esto finaliza para un máximo de tiempo predefinido, dado en las condiciones iniciales.

Si se tienen  $N$  partículas, cada una de ellas podría interactuar con las  $N - 1$  restantes. Sin embargo, resulta ineficiente efectuar todas las combinaciones posibles de choques. Para reducir el número de colisiones, se considera únicamente la vecindad que rodea a cada partícula. Para ello, el espacio de trabajo es dividido en un arreglo de celdas. La longitud del lado de cada celda es mayor que el diámetro de la partícula más grande en el sistema. Una partícula cuyo centro se localiza en una celda en particular (Ver figura 2.4), tiene la posibilidad de chocar solo con las partículas localizadas en las celdas aledañas a la suya, y también con las que se encuentran en la misma celda que ella misma. Calculando sólo estas posibles colisiones, se ahorra tiempo de cómputo.

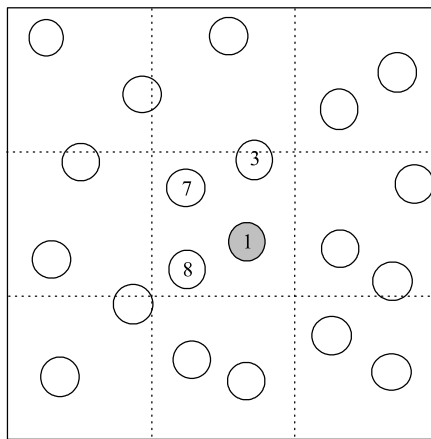


Figura 2.4: El espacio de trabajo se divide en celdas. Esto para calcular únicamente las posibles colisiones en el vecindario de una partícula.

---

# Capítulo 3

## Experimentos numéricos

---

### 3.1. Introducción

Se utilizó un programa de uso libre creado por Carl R. Wassgren, Jr. de la School of Mechanical Engineering de Purdue University. Para implementar el problema de estudio se llevan a cabo dos procesos:

1. La iniciación. Los objetivos de este proceso son tres. Uno consiste en definir las propiedades físicas de las partículas empleadas en la simulación. Dos, en establecer qué tipo de fronteras se utilizan; las fronteras pueden ser de dos clases: paredes sólidas y fronteras periódicas. A la vez, las fronteras pueden estar fijas o en movimiento. El tercer objetivo es acomodar de manera fortuita a todas las partículas en una área con fronteras bien definidas.
2. La simulación. En este proceso se simula directamente el fenómeno de estudio. En esta parte es donde se modificó el programa con objeto de hacer que el vector de aceleración de gravedad sea una función del tiempo. Además se agregó un pequeño código que calcula las energías cinética y potencial del sistema, así como el número de partículas en movimiento por unidad de tiempo.

### 3.2. Objetivos

El objeto de estudio es una avalancha; enfocando la atención en un punto muy particular del proceso: el inicio de la avalancha, es decir la transición estático-dinámica. El arreglo del experimento consiste de una caja rectangular bidimensional. La caja se llena hasta la mitad con partículas en forma de discos del mismo tamaño,  $1 \times 10^{-3}m$ . En el mundo real lo más indicado sería inclinar la caja apoyándose en una esquina de su base y levantando la otra. Sin embargo, dentro del ámbito computacional, tenemos el mismo efecto si en vez de girar la caja, hacemos girar lentamente el vector de aceleración de gravedad.

Haciendo lo anterior, se pretende identificar el tiempo y el ángulo en que da inicio la pequeña avalancha, la variación de la energía cinética al iniciar la misma, determinar la razón de cambio del número de partículas que participan en el movimiento, conocer la variación del perfil de velocidades, encontrar el cambio en el tensor de esfuerzos en la caja, ésto último durante un corto intervalo de tiempo que comprende desde un poco antes que empiece la avalancha, hasta poco después de que dió inicio.

Lo anterior se efectúa para once coeficientes de fricción distintos y para dos tipos de fronteras: paredes sólidas y fronteras periódicas.

### 3.3. Parámetros iniciales de la simulación

Se decidió trabajar con un material granular con 4000 discos de las siguientes características:

- diámetro  $D=0.001$  m,
- densidad  $\rho_d=2500.0$   $kg/m^3$ , corresponde al vidrio,
- coeficiente de restitución normal  $\epsilon_N=0.5$ ,
- coeficiente de restitución tangencial  $\epsilon_S=0.5$  .
- coeficiente de fricción estática  $\mu$  entre partículas y entre partícula y pared (varía para cada simulación)

Por otra parte, para el modelo de contacto entre partículas y entre pared y partícula (figura 2.2), las colisiones entre las partículas se simulan con los siguientes parámetros:

- Coeficiente normal del resorte  $\kappa_n=9.0 \times 10^9$  N/m,
- Coeficiente normal de amortiguamiento  $\nu_n = 0.244Ns/m^2$
- Coeficiente tangencial del resorte  $\kappa_s=9.0 \times 10^9$  N/m
- Coeficiente de fricción cinética coulombiana (elemento deslizador)  $\mu = 0.5$
- Coeficientes de restitución normal y tangencial  $\epsilon = 0.5$

Las 4000 partículas están contenidas en un espacio rectangular con dimensiones de  $50D$  de ancho por  $200D$  de largo. Se consideraron coeficientes de fricción desde  $\mu=0.0$  hasta  $\mu=1.0$  con un incremento de 0.1.

### 3.4. Simulación con paredes sólidas

#### 3.4.1. Iniciación

Para comenzar la simulación, se crea un archivo de entrada en el que se definen los parámetros iniciales de la simulación. Estos parámetros son los tiempos inicial y final del proceso, el *paso*, es decir los intervalos de tiempo entre un ciclo y otro, el valor del vector de gravedad, número de partículas y de que tamaño y características son, longitud y características de las paredes, etc. Los valores de estos datos ya se mencionaron anteriormente.

Haciendo uso de estos datos se corre el primer programa (iniciación). Para esto ya se tiene bien definida la caja que contendrá a las partículas. Entonces el programa deja caer una lluvia de partículas en la caja, cada partícula desciende verticalmente desde una posición distinta a la de la partícula anterior y a la subsecuente, esto es que caen aleatoriamente por efecto de la aceleración de gravedad. Obviamente las partículas al caer ruedan, rebotan y se mueven según las leyes físicas que las rigen, así que es necesario dar un tiempo pertinente a la simulación para que éstas lleguen al reposo. Para que el lector tenga una idea de cómo quedan las partículas acomodadas aleatoriamente, luego de la iniciación, en la figura (3.1) se muestran 4000 discos acomodados siguiendo el proceso descrito anteriormente.

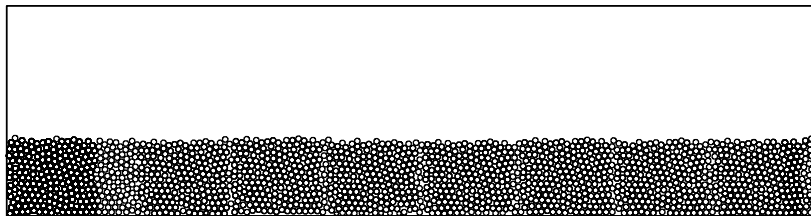


Figura 3.1: 4000 discos acomodados aleatoriamente por acción de la aceleración de gravedad.

### 3.4.2. Determinación de los ángulos críticos

El programa de simulación principal representa una caja que gira. La razón de giro del vector de gravedad es pequeña (léase el capítulo anterior), tal que el proceso puede considerarse cuasi-estático. Los resultados de la energía cinética y del número de partículas en movimiento nos permiten analizar y encontrar el ángulo crítico.

#### Criterios para elegir un ángulo crítico

La figura 4.1 muestra el ángulo de inclinación de la caja, cuando  $\phi = \theta_c$  (o ángulo crítico) da inicio una avalancha.

El ángulo crítico da la transición del estado estático al dinámico. Sin embargo, esta transición no siempre es inmediata. De nuestros resultados numéricos, hemos observado que la avalancha es precedida por algunos reordenamientos del material granular, sin que necesariamente se dé una avalancha o flujo de material granular completo e inmediato.

Se puede pensar en describir el proceso en tres pasos: estado estático, estado semi-estático (reordenamiento) y estado dinámico. Pero antes de ahondar en esto, hay que especificar a qué llamamos avalancha, reordenamiento y estado estático.

Para poder distinguir un reordenamiento de un inicio de flujo granular o avalancha, se hace un análisis del número de partículas en movimiento  $N_p$ . En principio, todos nuestros procesos son cuasi-estáticos, con el fin de evitar efectos inerciales. Los criterios tomados en el presente trabajo son los siguientes:

1. Se considera al material en **estado estático** cuando el número de partículas en movimiento  $N_p$  es cero o uno, pues no se puede considerar un flujo de material granular con una sola partícula moviéndose.
2. Se considera un **reordenamiento** del material, cuando hay más de dos partículas moviéndose, pero sin que el número de partículas en movimiento exceda el 1% del material



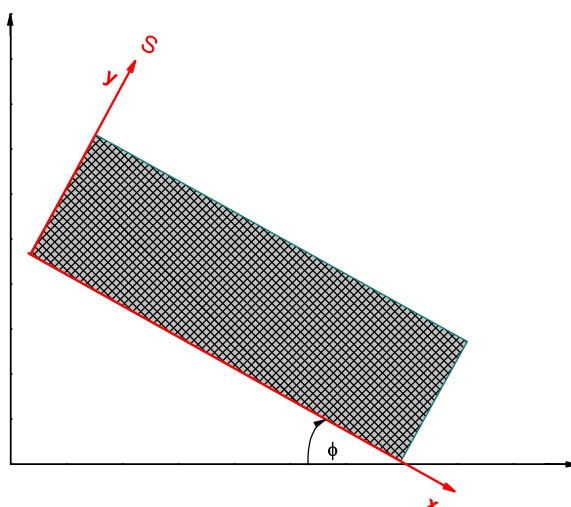


Figura 3.2: Sistemas de referencia de los resultados

granular existente. En este caso el 1% de 4000 corresponde a 40 partículas. Así que en particular podemos considerar, que se trata de un simple reordenamiento del material, cuando  $[2 \leq N_{pmax} \leq 40]$ .  $N_{pmax}$  es el valor más alto que durante el desarrollo del movimiento puede alcanzar el número de partículas en movimiento  $N_p$ .

3. Decimos que tenemos un flujo de material granular completamente desarrollado, y en consecuencia una **avalancha**, si el número máximo de partículas en movimiento excede al 1% del material contenido. Esto es que el valor de  $N_{pmax} > 40$  partículas.

Estas tres sencillas consideraciones dan la pauta para clasificar los movimientos del material granular en las simulaciones efectuadas.

## 3.5. Simulación con fronteras periódicas

### 3.5.1. Iniciación con fronteras periódicas

Del mismo modo como se explicó en la sección 3.41, se acomodan aleatoriamente 4000 partículas en una caja rectangular con fronteras periódicas. El acomodamiento de partículas para el caso de fronteras periódicas es similar al caso de paredes sólidas.

### 3.5.2. Simulación para determinar los ángulos críticos

Nuevamente corremos el programa, pero haciendo una ligera modificación, para indicar que tenemos fronteras periódicas. Los resultados del número de partículas en movimiento  $N_p$ , guardados en un archivo, nos permiten encontrar el ángulo crítico para paredes con fronteras periódicas. El criterio es el mismo ya descrito para paredes sólidas.

---

# Capítulo 4

## Resultados

---

### 4.1. Marco Preliminar

Los resultados obtenidos están dados con respecto a un marco de referencia  $S$  que rota junto con la caja (ver figura 4.1). Los datos que nos genera la simulación se listan a continuación.

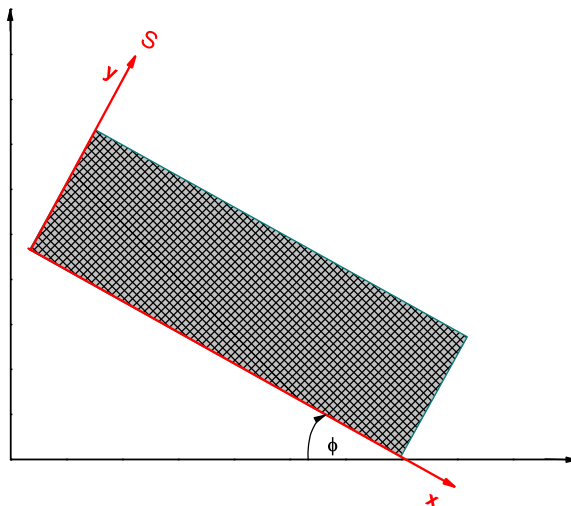


Figura 4.1: Sistemas de referencia de los resultados

- Número de partículas en movimiento  $N_p$ .
- Energía cinética traslacional  $K$ .
- Vectores de posición de cada una de las partículas  $\vec{r} = (x, y)$ .
- Vectores de velocidad de cada una de las partículas  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ .
- Velocidad de rotación de cada una de las partículas  $\omega = \dot{\theta}$ .

El tiempo de simulación corre desde un tiempo inicial  $t_i = 0$  hasta un tiempo final  $t_f$ , en incrementos de 0.2 segundos. Para cada tiempo de simulación el programa calcula los datos enlistados anteriormente.

Todos los parámetros mencionados anteriormente, son registrados en un archivo de salida. El objetivo es caracterizar a la avalancha con tales parámetros, y así poder entender el fenómeno de una manera cuantitativa.

## 4.2. Resultados de las simulaciones

Para analizar los datos, se elaboró un programa en MATLAB (ver apéndice A). El programa encuentra todos los instantes de tiempo en que hay un movimiento de partículas. Ya que encontró los movimientos de partículas, calcula en qué tiempo inicia y termina el movimiento, registra cuál fue el número máximo y mínimo de partículas que participaron en el movimiento, calcula la energía cinética traslacional máxima y mínima que se alcanzó durante el movimiento y registra el ángulo en que da inicio cada movimiento de partículas.

Algunos resultados representativos se muestran en las siguientes tablas, primero para paredes fijas y después para fronteras periódicas. Solamente se reportan algunos coeficientes de fricción. La nomenclatura usada es la siguiente:

- $t_i$  es el tiempo de simulación en que da inicio el movimiento de las partículas.
- $t_f$  es el tiempo de simulación en que finaliza el movimiento de las partículas.
- $N_{pmin}$  . es el número mínimo de partículas involucradas en el reordenamiento o avalancha.
- $N_{pmax}$  es el número máximo de partículas que participan en el movimiento.
- $K_{min}$  es la mínima energía cinética traslacional que se registra durante el movimiento de las partículas.
- $K_{max}$  es el máximo valor de la energía cinética traslacional que se registra durante el movimiento de las partículas.
- $\Delta t$  es el tiempo que las partículas permanecen en movimiento.
- $\theta_i$  es el ángulo de inclinación de la caja, en el cual da inicio el movimiento.
- Tipo. R si se trata de un reordenamiento, A si se trata de una avalancha.

A modo de ejemplo, considérese la tabla 4.2. Para tal simulación se registraron 15 movimientos en el transcurso de tiempo en que se inclinó la caja. Los primeros 5 movimientos tuvieron duraciones menor o igual a  $1s$ , el sexto movimiento duró  $\Delta t = 45s$  y durante ese lapso de tiempo al menos se movieron  $N_{pmin} = 6$  partículas y como máximo se movieron  $N_{pmax} = 471$  partículas. Las energías cinéticas mínima  $K_{min}$  y máxima  $K_{max}$  que se alcanzó el sistema en ese lapso de  $45s$  fueron de  $0.68103J$  y  $21.78400J$  respectivamente. El ángulo de inclinación de la caja  $\theta_i$  al momento de iniciar la avalancha fue de  $1.9848^\circ$ .

De las tablas expuestas y otras que no se presentan, se representa gráficamente en la figura 4.2 el ángulo crítico en función del coeficiente de fricción. Asimismo en la figura 4.3, muestra el número de reordenamientos que precede a la primera avalancha y se grafica en función de  $\mu$ .

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ ( $^\circ$ )	Ti- po
1.0	1.0	2	2	0.22255	0.22255	0.0	0.057	R
17.0	18.0	2	6	0.27555	1.40110	1.0	0.974	R
26.0	26.0	2	2	1.40110	1.4011	0.0	1.490	R
28.0	29.0	2	3	1.88980	3.10160	1.0	1.604	R
31.0	31.0	3	3	3.10160	3.10160	0.0	1.776	R
34.0	79.0	6	471	0.68103	21.78400	45.0	1.948	A
81.0	84.0	2	9	0.42351	0.68103	3.0	4.641	R
86.0	86.0	2	2	0.42351	0.42351	0.0	4.927	R
94.0	169.0	2	3922	0.20943	417.9900	75.0	5.386	A
171.0	174.0	2	5	0.68297	1.10480	3.0	9.798	R
176.0	177.0	2	5	0.73469	1.08520	1.0	10.084	R
179.0	179.0	3	3	0.73469	0.73469	0.0	10.256	R
181.0	206.0	2	106	0.32935	4.63620	25.0	10.371	A
209.0	318.0	2	3838	0.69523	246.60000	109.0	11.975	A
373.0	404.0	5	3437	4.87120	220.69000	31.0	21.371	A

Tabla 4.1: Resultados de la simulación con  $\mu=0.0$ . Paredes sólidas

Para paredes sólidas (ver la figura 4.3) se observa claramente que para valores de  $\mu$  menores que 0.6 hay un patrón creciente. Es decir que el número de reacomodos previos, aumenta con  $\mu$ . Esto indica que entre más rugosas son las partículas, el material granular ofrece mayor resistencia al deslave. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de las fronteras periódicas, como se observa en la misma figura 4.3), los reordenamientos previos a la avalancha oscilan entre 3 y 19 y no siguen ningún patrón bien determinado como en el caso anterior.

También se hace un análisis del número de partículas en movimiento como una función del tiempo. Estos resultados, para paredes sólidas, se muestran en las figuras 4.4 y 4.5 y para fronteras periódicas en la figura 4.6.

Un dato interesante es la variación de la energía cinética traslacional en función del tiempo. La figura 4.7 muestra dicha variación para las paredes sólidas. El homólogo con fronteras periódicas se muestra en la figura 4.8.

Por último se calculan los campos de velocidad promedio del sistema. Para ello se utiliza un programa hecho en MATLAB (ver apéndice B). El programa considera que tenemos un medio continuo, divide las partículas en una red homogénea rectangular. Calcula los valores promedio en cada partición. De acuerdo al valor obtenido, le asigna un color a cada región; azul para las velocidades pequeñas y rojo para las velocidades grandes. Para el caso de paredes sólidas, se analizaron los coeficientes de fricción 0.0, 0.1, 0.5 y 1.0. Los resultados son similares para todos los coeficientes de fricción, así que solo se reporta el coeficiente de fricción  $\mu = 0.5$ . Las figuras 4.9 y 4.10 muestran una secuencia de los valores que tiene la velocidad promedio conforme nos acercamos al ángulo crítico medido. Se exhiben los estados del material para los tiempos de dos cuadros antes de llegar al ángulo crítico (numerados con 1 y 2), en el ángulo crítico (número 3) y dos cuadros después del mismo (números 4 y 5). El ángulo crítico ocurre a un tiempo igual a 316 segundos luego de que dió inicio la simulación.

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ (°)	Ti- po
0.2	0.6	2	4	0.10	0.79	0.4	0.01	R
1.2	1.4	2	2	0.07	0.12	0.2	0.07	R
210.0	210.2	2	2	0.04	0.08	0.2	12.03	R
212.2	213.2	2	4	0.04	0.15	1.0	12.16	R
213.6	214.0	2	2	0.06	0.15	0.4	12.24	R
214.6	214.8	2	2	0.06	0.12	0.2	12.3	R
234.6	234.6	2	2	0.06	0.06	0.0	13.44	R
235.0	236.2	2	6	0.06	0.55	1.2	13.47	R
249.0	249.0	2	2	0.55	0.55	0.0	14.27	R
253.6	255.4	2	8	0.08	0.25	1.8	14.53	R
256.2	256.6	2	5	0.15	2.76	0.4	14.68	R
275.0	275.0	2	2	2.76	2.76	0.0	15.76	R
276.2	276.2	2	2	3.33	3.33	0.0	15.83	R
277.6	277.8	2	2	2.31	2.42	0.2	15.91	R
278.4	279.2	2	5	2.42	2.69	0.8	15.95	R
279.8	279.8	2	2	2.49	2.49	0.0	16.03	R
280.4	282.4	2	6	2.07	2.51	2.0	16.07	R
283.0	283.0	3	3	2.48	2.48	0.0	16.22	R
284.0	284.6	2	8	3.65	6.07	0.6	16.27	R
285.4	363.8	2	3472	0.17	379.83	78.4	16.35	A
364.6	365.6	2	5	0.07	0.30	1.0	20.89	R
366.4	366.6	2	2	0.04	0.07	0.2	20.99	R
391.8	392.6	2	3	0.04	0.10	0.8	22.45	R
393.4	393.4	2	2	0.04	0.04	0.0	22.54	R
405.2	405.4	2	3	0.05	1.23	0.2	23.22	R
412.8	449.6	3	2932	1.23	357.38	36.8	23.65	A

Tabla 4.2: Resultados de la simulación con  $\mu=0.5$ . Paredes sólidas

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ ( $^\circ$ )	Ti- po
0.4	0.4	3	3	0.37114	0.37114	0.0	0.023	R
237.2	237.2	4	4	0.10521	0.10521	0.0	13.591	R
237.6	238.0	2	2	0.03103	0.10757	0.4	13.613	R
240.4	248.8	2	2	0.03103	0.25355	8.4	13.774	R
258.8	259.8	2	3	0.03470	0.15978	1.0	14.828	R
261.0	261.0	2	2	0.08930	0.08930	0.0	14.954	R
261.4	262.8	2	5	0.08284	0.19505	1.4	14.977	R
289.6	290.4	2	7	0.13057	0.35730	0.8	16.593	R
291.4	291.4	2	2	0.35730	0.35730	0.0	16.696	R
294.6	294.8	3	4	0.33514	0.36496	0.2	16.879	R
296.2	296.2	3	3	0.33514	0.33514	0.0	16.971	R
330.8	433.6	2	3484	0.26489	993.34000	102.8	18.953	A
434.4	438.4	2	21	0.09930	0.73909	4.0	24.889	R
442.4	450.0	2	2	0.12728	0.12728	7.6	25.348	R

Tabla 4.3: Resultados de la simulación con  $\mu=1.0$ . Paredes sólidas

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ ( $^\circ$ )	Ti- po
0.2	0.6	2	8	0.05891	0.68669	0.4	0.011	R
1.2	1.2	2	2	0.05891	0.05891	0.0	0.069	R
2.8	2.8	7	7	0.15222	0.15222	0.0	0.160	R
2.0	62.2	3	186	0.06127	31.16600	0.2	3.552	A
16.6	295.2	186	4000	31.16600	392540.00000	178.6	6.681	A

Tabla 4.4: Resultados de la simulación con  $\mu=0.1$ . Fronteras periódicas

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ (°)	Ti- po
0.2	0.6	2	5	0.0606370	0.7223200	0.4	0.01	R
1.2	1.2	2	2	0.0606370	0.0606370	0.0	0.07	R
1.8	1.8	2	2	0.0553040	0.0553040	0.0	0.1	R
141.0	141.6	2	3	0.0317510	0.1271100	0.6	8.08	R
220.2	221.4	2	8	0.0894010	0.2922400	1.2	12.62	R
242.6	243.6	2	7	0.0713870	0.4578900	1.0	13.9	R
260.4	260.4	2	2	0.4578900	0.4578900	0.0	14.92	R
263.8	263.8	5	5	0.5355400	0.5355400	0.0	15.12	R
268.2	272.2	2	4	0.0562000	0.5470100	4.0	15.37	R
274.8	274.8	2	2	0.3872900	0.3872900	0.0	15.75	R
275.2	275.8	2	2	0.5686300	3.0194000	0.6	15.77	R
277.6	277.8	2	5	3.0194000	6.2114000	0.2	15.91	R
280.2	399.6	2	4000	6.2114000	114000	119.4	16.05	A

Tabla 4.5: Resultados de la simulación con  $\mu=0.5$ . Fronteras periódicas

Para fronteras periódicas se analizaron los coeficientes de fricción 0.1, 0.5 y 1.0. Todos los resultados son similares; por esto sólo se expone el caso de  $\mu = 1.0$ . Las figuras 4.11 y 4.12 muestran una secuencia de los valores que tiene la magnitud de la velocidad conforme nos acercamos al ángulo crítico medido y dos cuadros después del mismo; el ángulo crítico está marcado con el número 5.

$t_i$ (s)	$t_f$ (s)	$N_{pmin}$ discos	$N_{pmax}$ discos	$K_{min}$ (J)	$K_{max}$ (J)	$\Delta t$ (s)	$\theta_i$ ( $^\circ$ )	Ti- po
0.2	0.2	4	4	0.74781	0.74781	0.0	0.011	R
0.6	0.6	3	3	0.20439	0.20439	0.0	0.034	R
140.4	141.2	2	6	0.05076	0.10646	0.8	8.044	R
149.6	152.6	2	7	0.03561	0.17732	3.0	8.571	R
156.4	156.8	2	2	0.03561	0.09764	0.4	8.961	R
157.2	158.0	2	3	0.05686	0.13963	0.8	9.007	R
175.0	177.2	2	6	0.05686	0.20716	2.2	10.027	R
273.0	273.0	2	2	0.18105	0.18105	0.0	15.642	R
276.0	276.0	2	2	1.43070	1.43070	0.0	15.814	R
276.4	276.4	3	3	1.22930	1.22930	0.0	15.837	R
277.8	277.8	2	2	0.53360	0.53360	0.0	15.917	R
279.4	281.6	2	9	0.23442	0.55210	2.2	16.008	R
282.4	283.2	2	10	0.10133	0.28203	0.8	16.180	R
286.0	286.0	2	2	0.10133	0.10133	0.0	16.387	R
286.6	286.6	3	3	0.08763	0.08763	0.0	16.421	R
288.4	291.2	2	2	0.05136	0.15517	2.8	16.524	R
296.2	297.2	2	3	0.04047	0.24261	1.0	16.971	R
303.2	305.0	2	3	0.03512	0.28272	1.8	17.372	R
305.6	305.6	2	2	0.08258	0.08258	0.0	17.510	R
310.0	313.2	2	14	0.48208	0.86368	3.2	17.762	R
313.6	314.0	2	4	0.75249	1.01170	0.4	17.968	R
314.4	314.6	2	4	1.01170	2.38910	0.2	18.014	R
315.6	315.6	2	2	2.38910	2.38910	0.0	18.083	R
316.4	422.8	4	4000	3.24420	41237.00000	106.4	18.128	A

Tabla 4.6: Resultados de la simulación con  $\mu=1.0$ . Fronteras periódicas



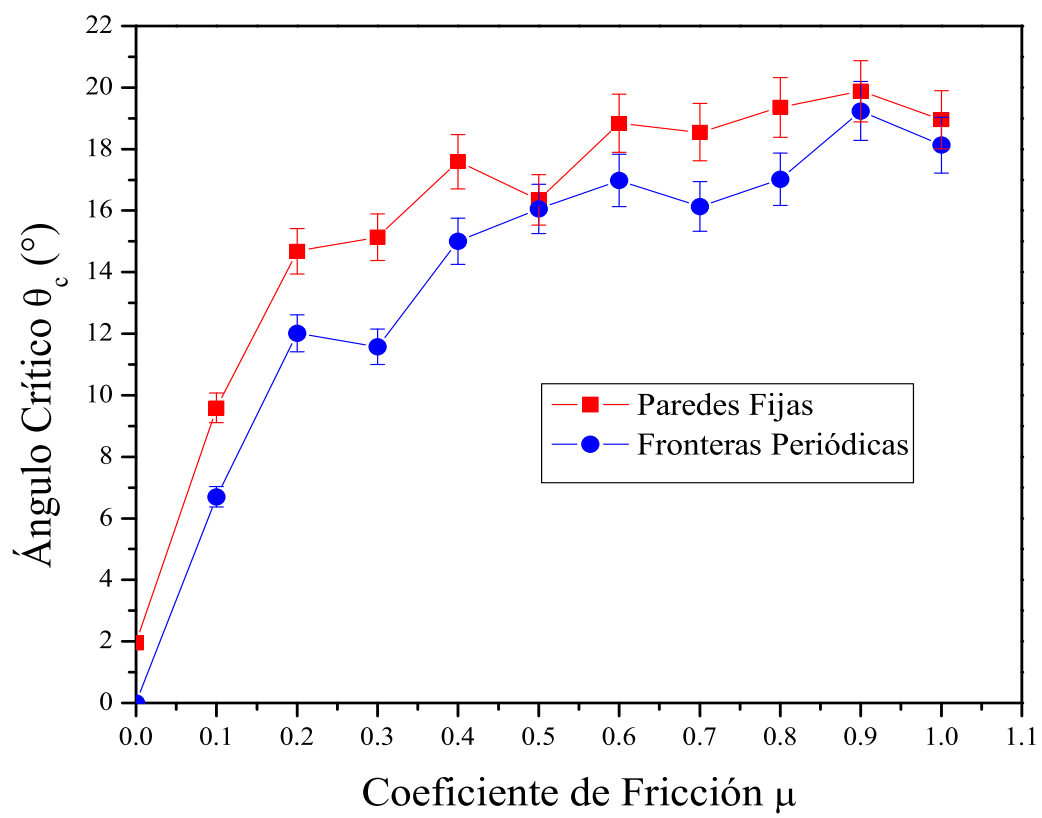
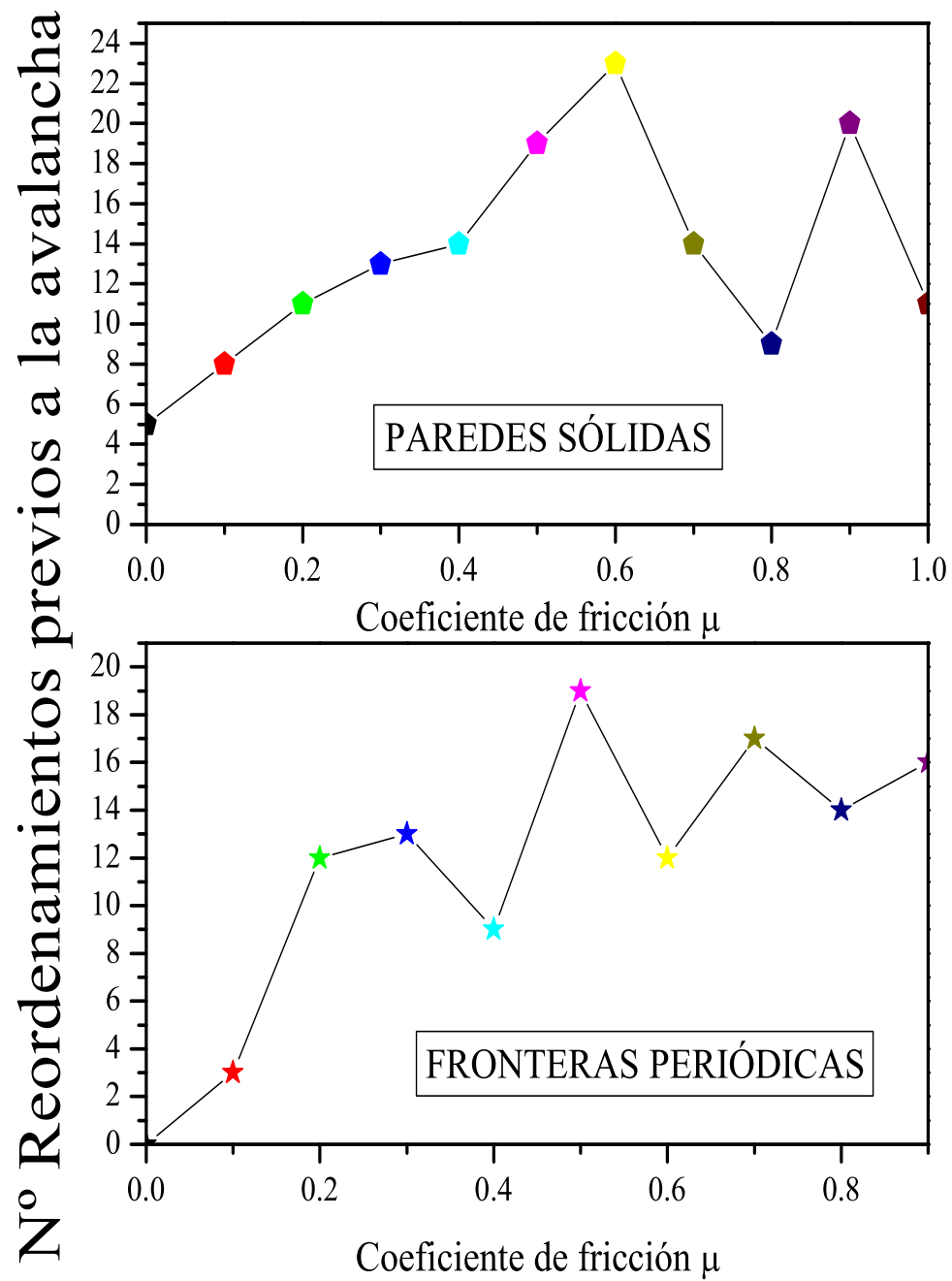


Figura 4.2:  $\theta_c$  en función del coeficiente de fricción  $\mu$

Figura 4.3: Reacomodos que preceden a la primera avalancha como función de  $\mu$ .

## PAREDES SÓLIDAS

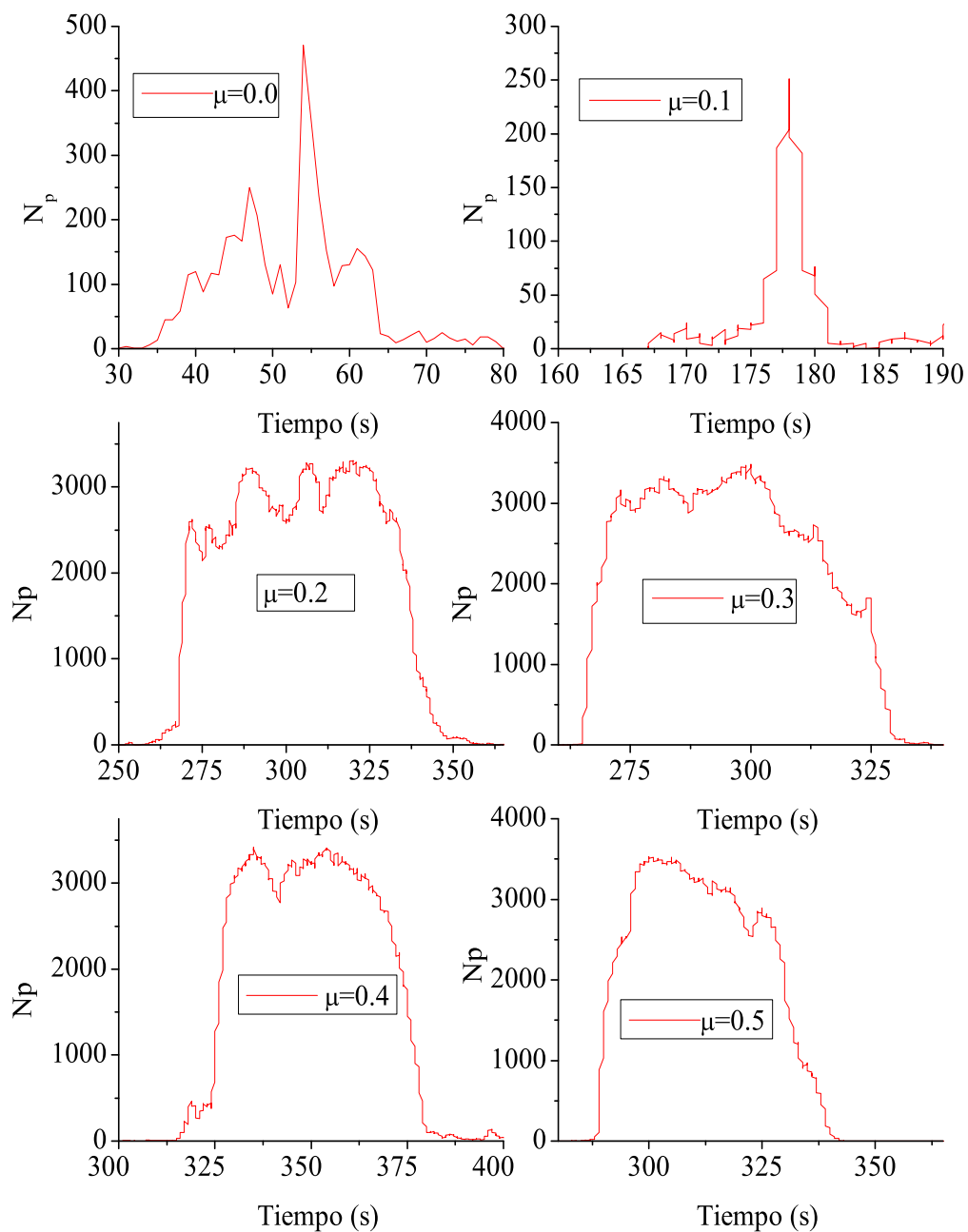


Figura 4.4: Número de partículas en movimiento de las primeras avalanchas para cada coeficiente de fricción.

## PAREDES SÓLIDAS

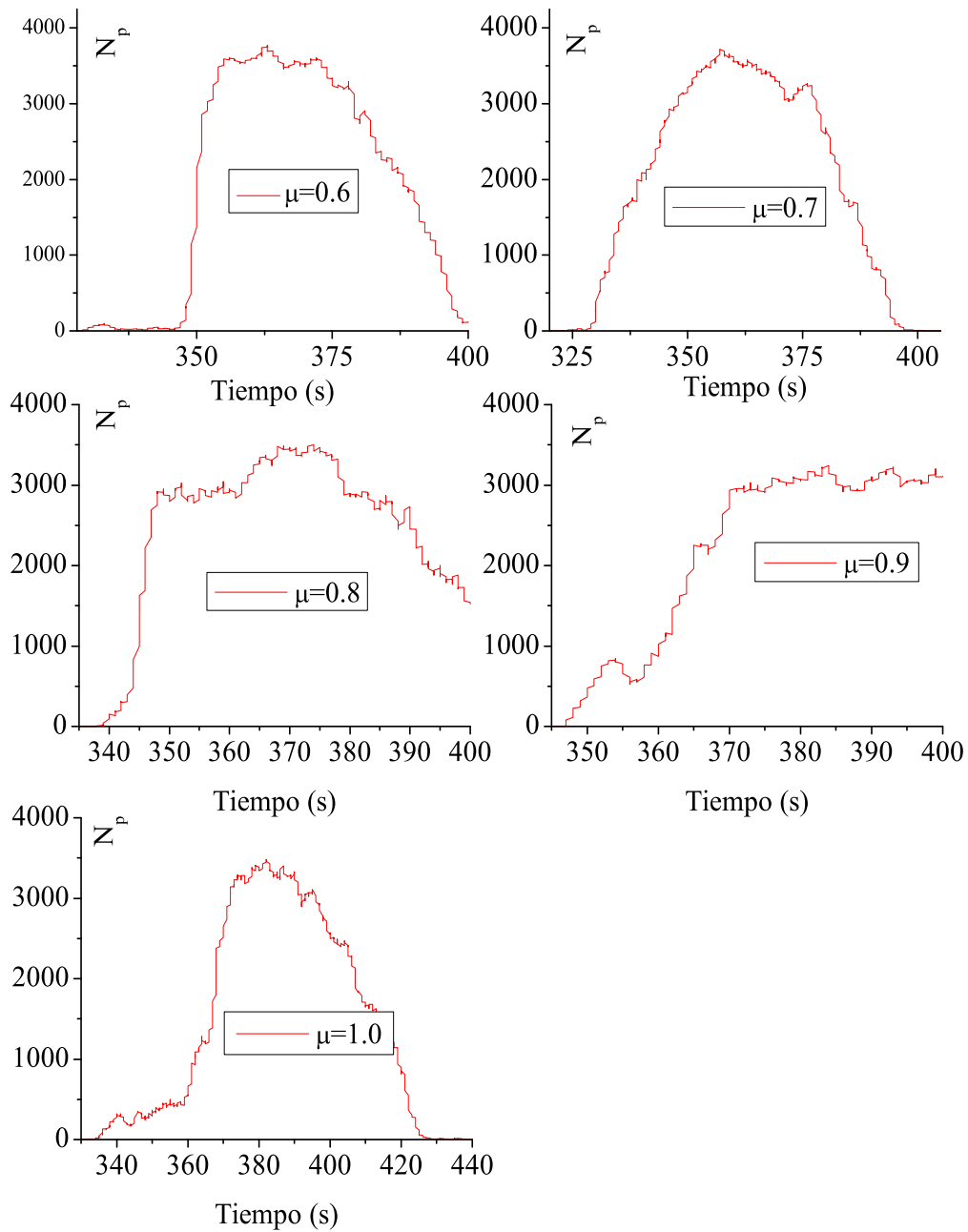


Figura 4.5: Número de partículas en movimiento de las últimas avalanchas para cada coeficiente de fricción.

## FRONTERAS PERIÓDICAS

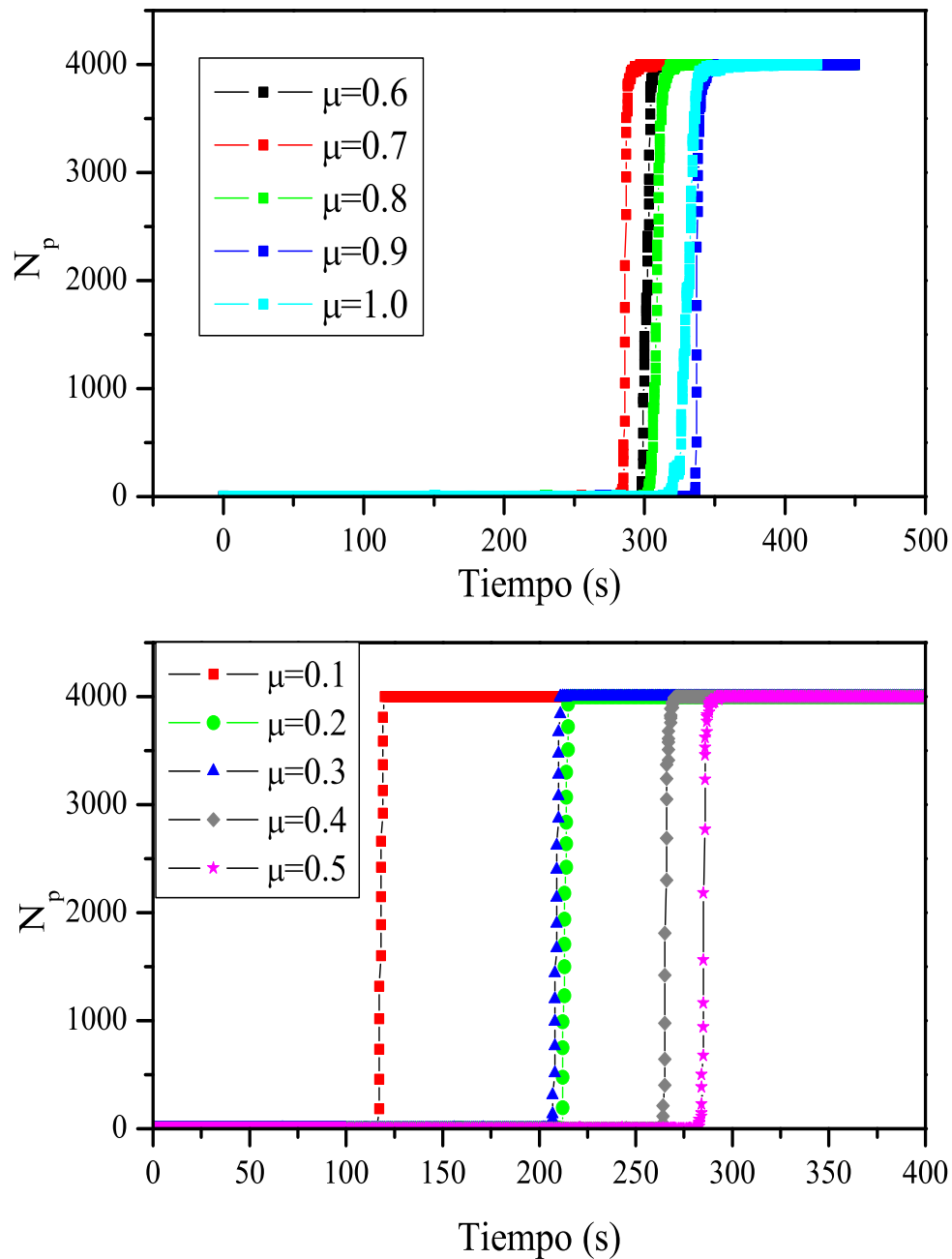


Figura 4.6: Número de partículas en movimiento con fronteras periódicas.

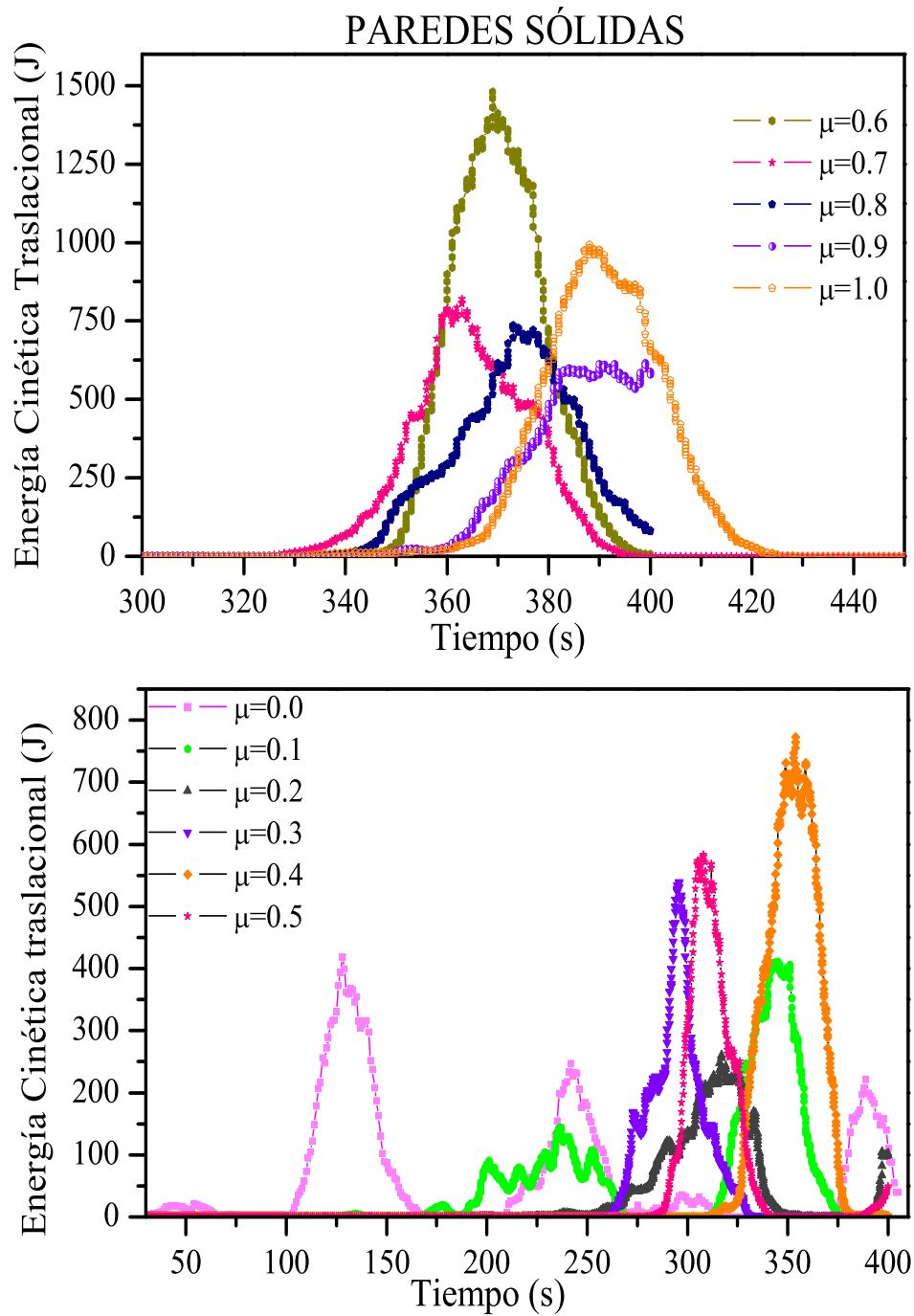


Figura 4.7: Energía cinética traslacional en paredes sólidas.

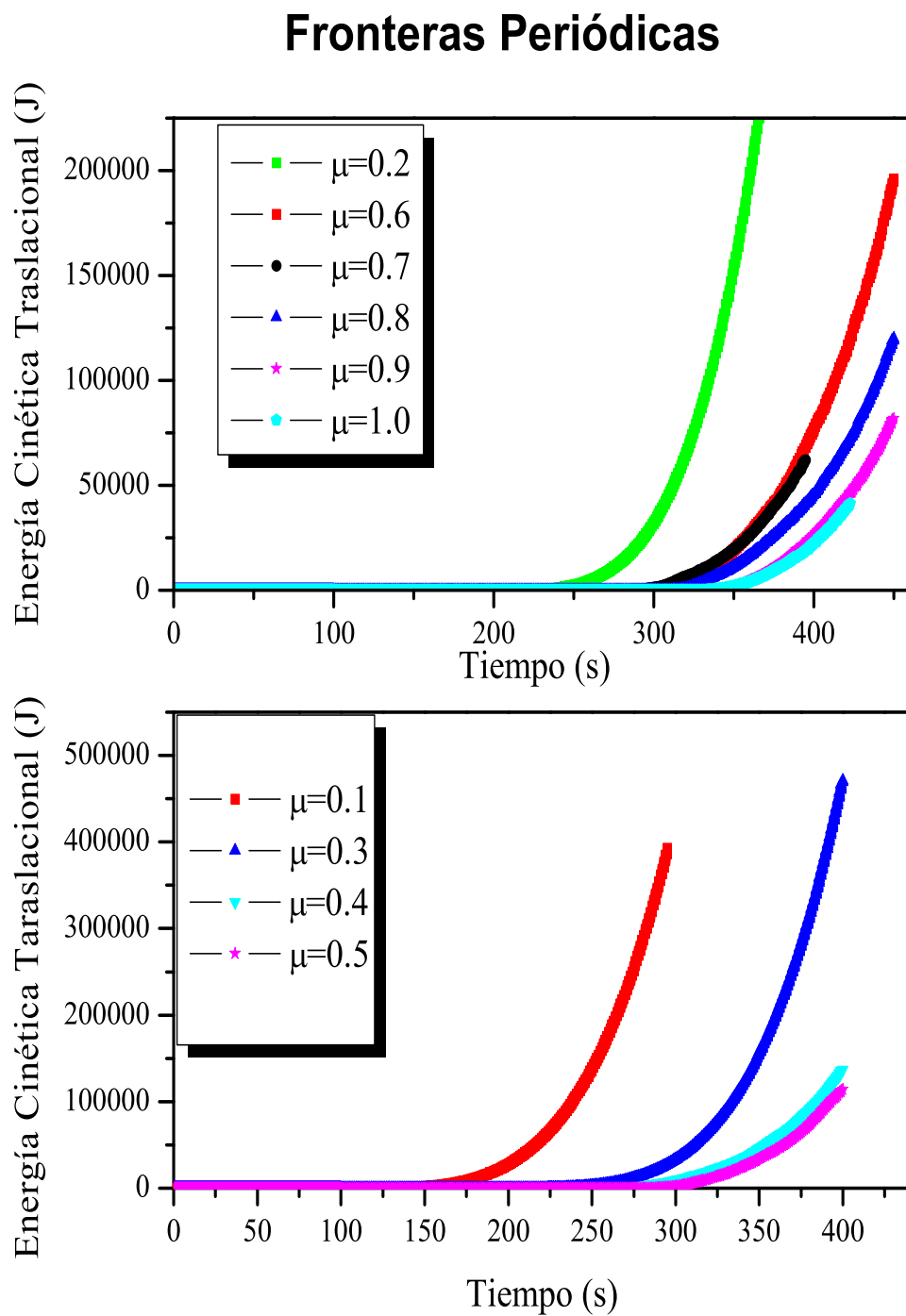


Figura 4.8: Energía cinética traslacional en paredes periódicas.

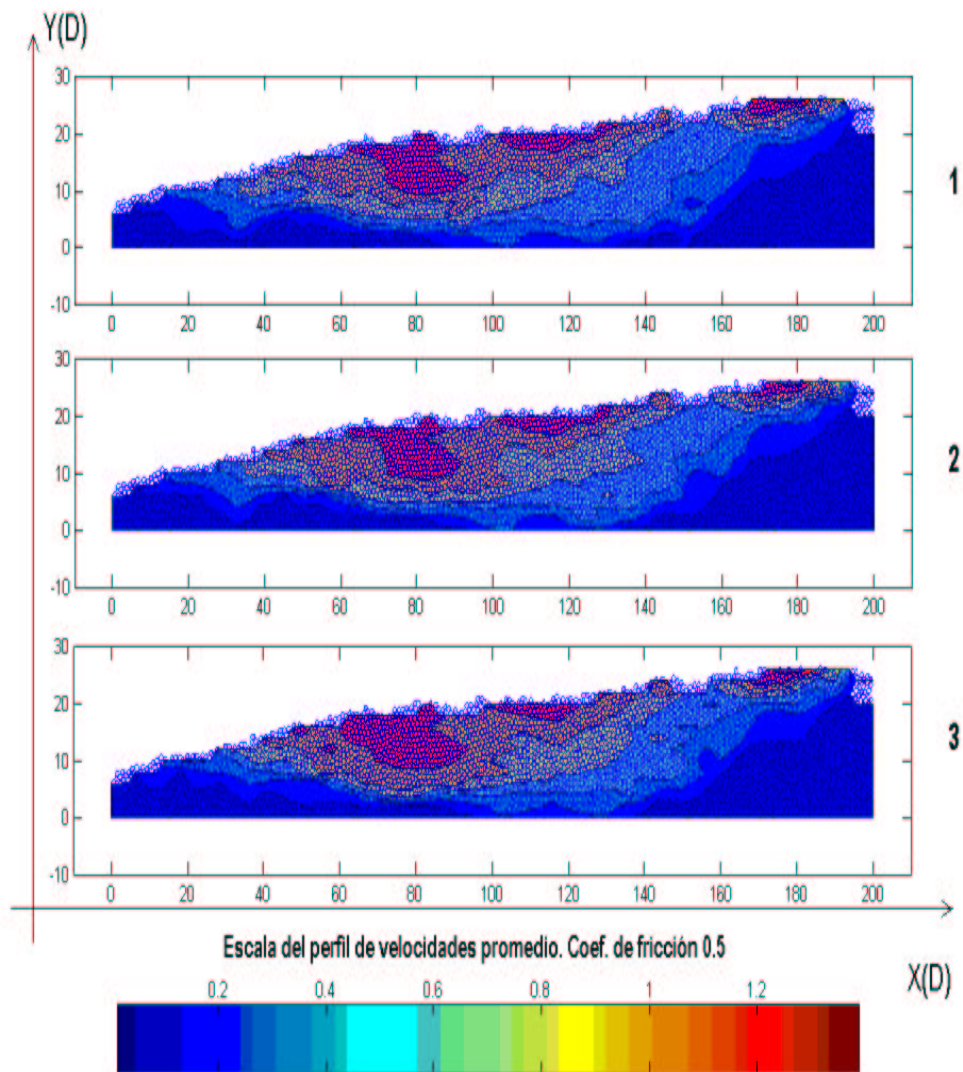


Figura 4.9: Magnitud de las velocidades para paredes sólidas con  $\mu = 0.5$ .  
 $\theta_c = 16.352^\circ$



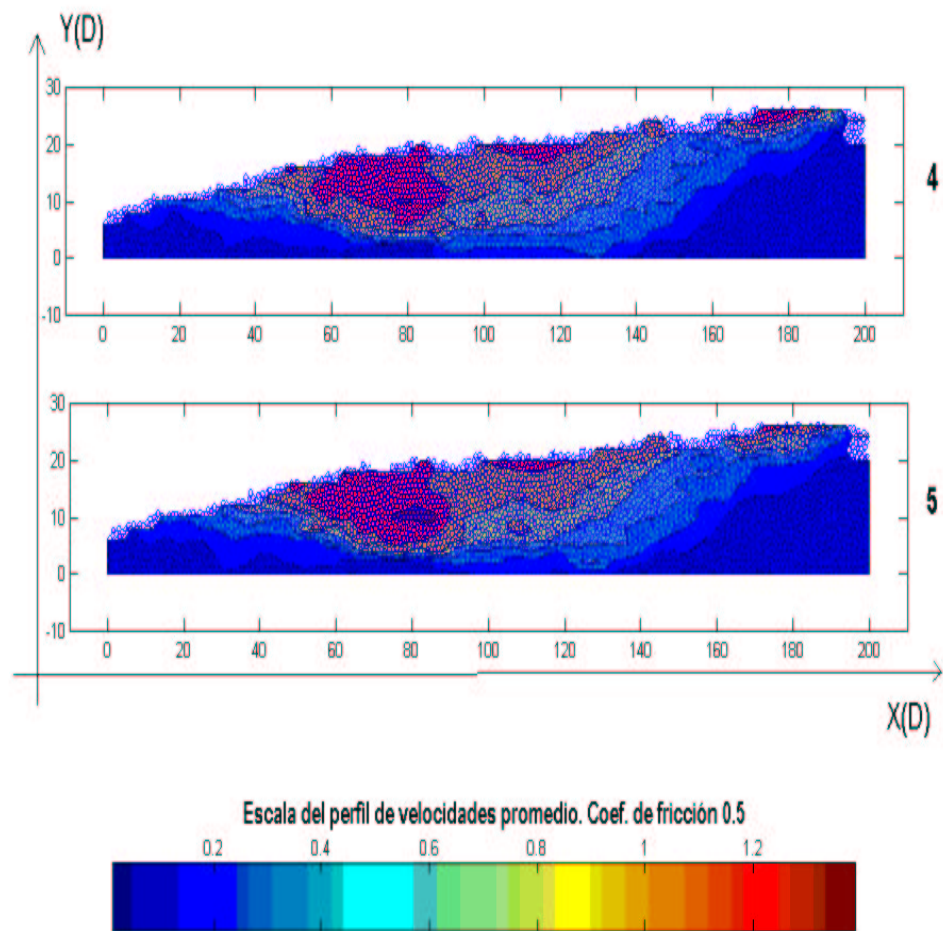


Figura 4.10: Magnitud de las velocidades para paredes sólidas con  $\mu = 0.5$ . La secuencia 5 es la del ángulo crítico  $\theta_c = 16.35^\circ$

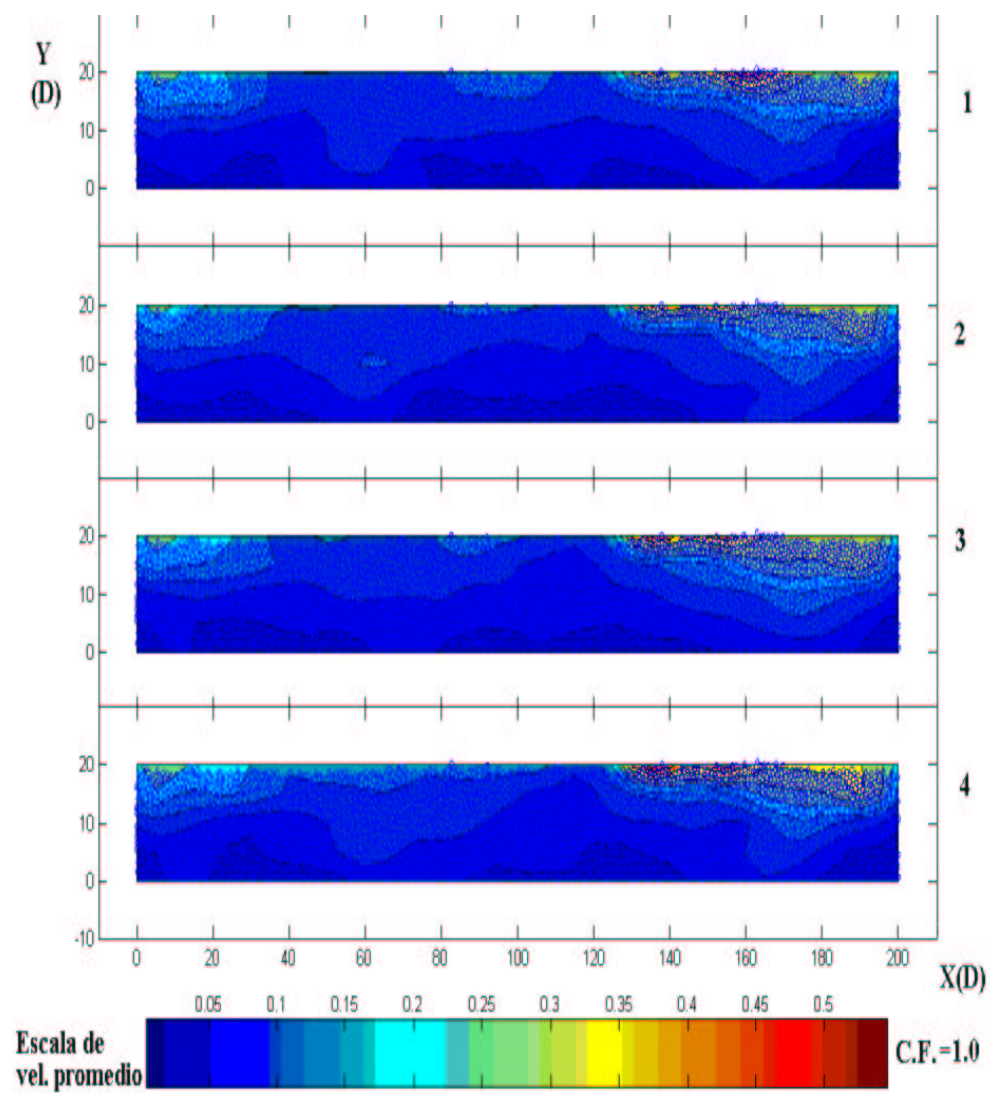


Figura 4.11: Magnitud de las velocidades para fronteras periódicas con  $\mu = 1.0$ . La secuencia 4 es la del ángulo crítico  $\theta_c = 18.128^\circ$ .

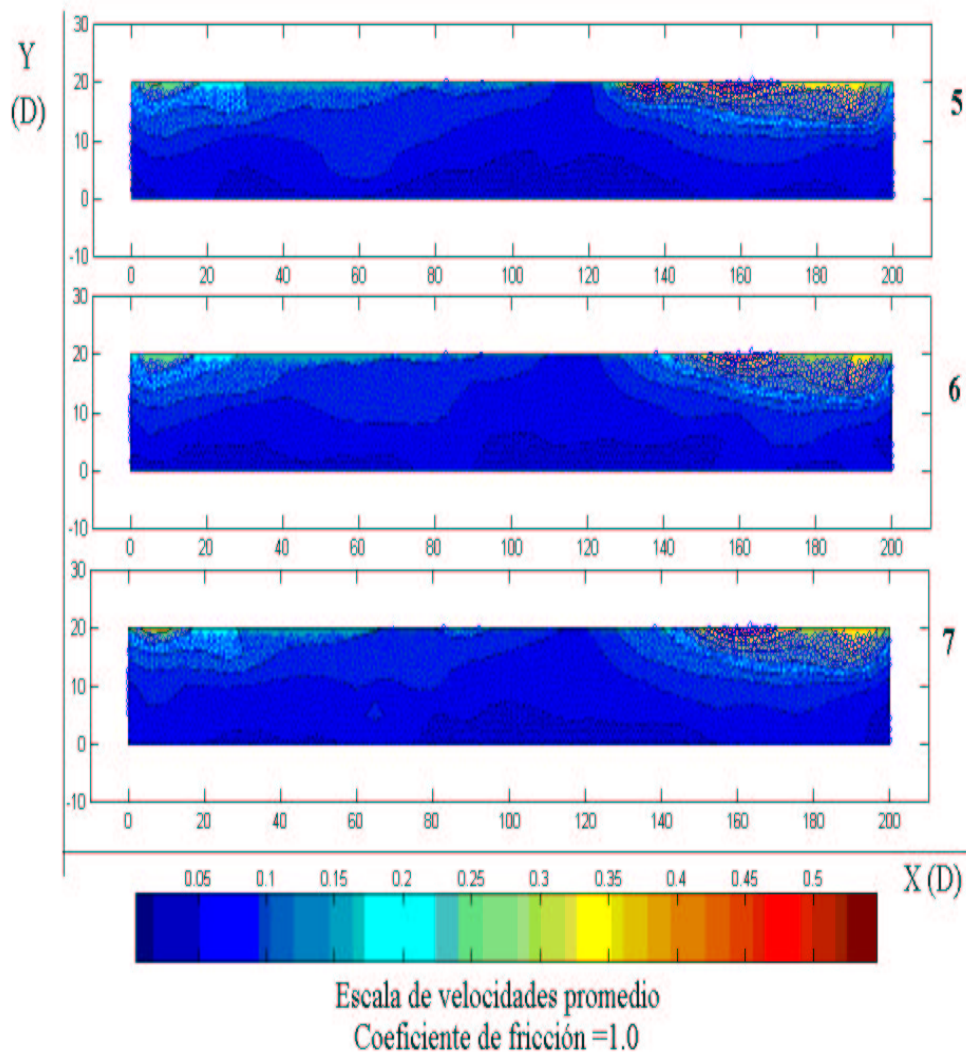


Figura 4.12: Magnitud de las velocidades para fronteras periódicas con  $\mu = 1.0$ .

---

# Capítulo 5

## Análisis de Resultados

---

### 5.1. Ángulo Crítico

En los resultados obtenidos se observa que el ángulo crítico, para ambos casos de frontera, éste es una función creciente y asintótica. En la figura 5.1 se han graficado los resultados de las simulaciones y dos funciones exponenciales asintóticas, respectivamente.

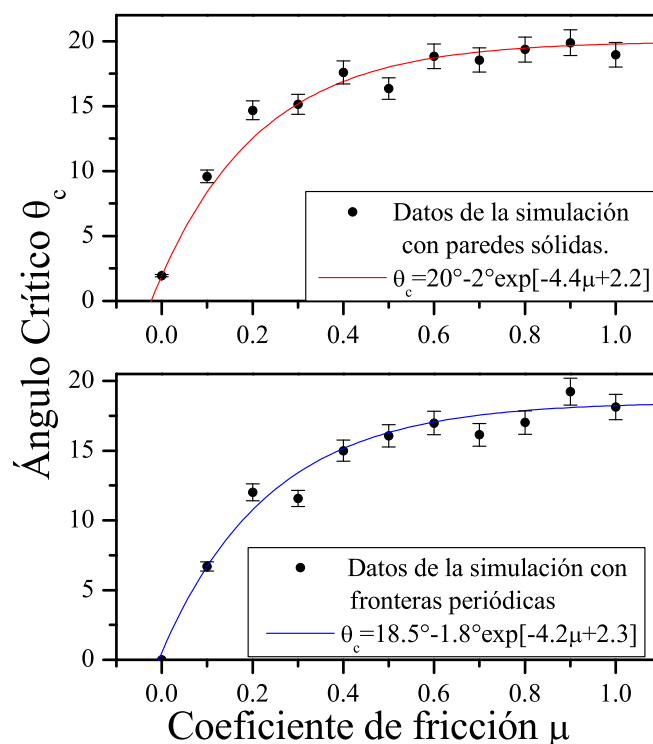


Figura 5.1: Ajuste de una función exponencial a los resultados de la simulación.

Para paredes sólidas, la función que se ajusta a los resultados es de tipo exponencial y está dada por

$$\theta_c = 20^\circ - 2^\circ \exp[-4.4\mu + 2.2]. \quad (5.1)$$

El coeficiente de correlación en los datos experimentales es de 0.94. Por otra parte, la medida que más se aleja en relación a nuestro ajuste es la que corresponde a  $\mu=0.2$ . La diferencia máxima entre el valor experimental y el del ajuste es de  $2.26^\circ$ . Así que podemos decir que esta relación, ajustada *a priori*, es una buena aproximación.

Desde el punto de vista de la física, esto significa que las partículas necesitan acumular una mayor energía potencial para poder moverse en tanto mayor sea su coeficiente de fricción; sin embargo, aunque la energía continúe creciendo, hay un ángulo límite, después del cual ya no es necesario continuar levantando la caja o bien acrecentando la energía para que las partículas se desplacen. Este mismo fenómeno se observa también para el caso de fronteras periódicas. En este caso la función con la que se comparan los datos es la siguiente:

$$\theta_c = 18.5^\circ - 1.8^\circ \exp[-4.2\mu + 2.3] \quad (5.2)$$

El coeficiente de correlación en los datos experimentales es de 0.96. Por otra parte, la medida que más se aleja en relación a nuestro ajuste es la que corresponde a  $\mu=0.5$ . La diferencia máxima entre el valor experimental y el del ajuste es de  $1.70^\circ$ . Podemos decir que esta relación es aún una mejor aproximación que la anterior.

Tanto en paredes sólidas como en fronteras periódicas los resultados son similares, lo que cambia es la asíntota, que para paredes sólidas es del orden de  $20.0^\circ$  y para fronteras periódicas es del orden de  $18.5^\circ$ . También los coeficientes dentro de la exponencial cambian ligeramente. Por otra parte, las partículas con paredes sólidas requieren de una inclinación mayor para iniciar la avalancha que las de fronteras periódicas para un mismo coeficiente de fricción. Ésto es de esperarse, pues las simulaciones de paredes periódicas no tienen fronteras que detengan a las partículas.

## 5.2. Reordenamientos previos a una avalancha

Observando las figuras 4.3 del capítulo anterior, podemos decir someramente que el número de reordenamientos previos a la avalancha tiende a ser mayor conforme aumenta el coeficiente de fricción. Sin embargo, hay una diferencia entre el patrón ya mencionado para paredes sólidas y el de las fronteras periódicas. Para paredes sólidas el comportamiento creciente está claramente marcado hasta antes de llegar al coeficiente de fricción  $\mu = 0.6$ . Después de dicho coeficiente no hay una tendencia bien definida, pero el número de reordenamientos ocurridos es menor desde  $\mu = 0.6$  en adelante que para éste último coeficiente. Para fronteras periódicas también se observa un patrón creciente hasta llegar a  $\mu = 0.5$  con una pequeña anomalía en  $\mu = 0.4$ , donde se rompe la continuidad del crecimiento, después de  $\mu = 0.5$  hay menos reordenamientos que para  $\mu = 0.5$  y no hay ninguna tendencia ni creciente ni decreciente.

Los comportamientos descritos cualitativamente en el párrafo anterior son consecuencia de varios factores. El número de reordenamientos previos a la avalancha depende de factores tales como el coeficiente de fricción, el factor de compactación de las partículas, la forma y tamaño de las mismas y principalmente de la interacción de las partículas entre ellas y con las paredes.

### 5.2.1. Comportamiento creciente

El coeficiente de fricción es una medida de la rugosidad de las superficies en contacto. La fricción significa una interacción de contacto entre sólidos. Cuando una superficie sin fricción posee una inclinación o cuando la partícula ya está en movimiento la avalancha es inmediata. Las partículas se deslizan sobre la superficie con una velocidad mayor que si existiera fricción. La velocidad también es mayor cuando un cuerpo se desliza en lugar de rodar. Una de las simulaciones para fronteras periódicas, se hizo considerando un coeficiente de fricción cero; se encontró un ángulo de máxima estabilidad de cero y también hubo cero reordenamientos antes de la avalancha; el tránsito del material granular del estado estático al estado de fluidización fue inmediato. Esto quiere decir que para  $\mu = 0$  basta con tener un ángulo mayor que cero para que las partículas se muevan. Sin embargo, cuando hay paredes, éstas obligan a las partículas a que no se muevan inmediatamente, obviamente las paredes representan una barrera que hace que el ángulo de máxima estabilidad sea del orden de  $2^\circ$  y existan unos 5 reordenamientos previos a la avalancha en el presente experimento. Por otra parte cuando se comienza a subir el valor del coeficiente de fricción, los reordenamientos previos a la avalancha comienzan a aparecer en mayor cantidad. Las partículas adquieren una mayor resistencia de oposición al movimiento sobre la superficie en que se encuentran. Tomemos en cuenta que una partícula en forma de disco, como las de nuestra simulación, tiene dos opciones para moverse, puede rodar o bien puede deslizarse. Si se desliza, la fuerza de fricción ocasionada por el contacto entre partículas y la caja, juega un papel importante en cuanto a disipación de energía. Si rola, la fuerza de fricción no trabaja y no se disipa energía porque no existe movimiento entre el disco en el punto de contacto. La única fuerza de fricción que tenemos en el caso de rodamiento es la estática. Ahora bien podemos tener ambos tipos de movimiento: deslizamiento y rodamiento; o bien puede ser que algunas partículas rueden, otras se deslicen y otras hagan ambas cosas.

De los resultados obtenidos encontramos que el número de reordenamientos de la avalancha está relacionado de alguna manera con  $\mu$ . Si la fricción es demasiado grande las partículas simplemente se traban unas con otras debido a la gran rugosidad de la superficie; disipándose la energía en el proceso. Esto le da más tiempo al sistema, para tener más reordenamientos, antes de poder alcanzar la fuerza y la energía requerida para vencer a la fricción definitivamente. Lo cual explicaría porqué a mayor coeficiente de fricción hay más reordenamientos.

### 5.2.2. Comportamiento aleatorio

Donde no se observa un patrón creciente del número de reordenamientos, esto es, después de  $\mu = 0.6$  en paredes sólidas y después de  $\mu = 0.5$  en fronteras periódicas; es necesaria una explicación diferente. En esta etapa se alcanza un comportamiento asintótico de los ángulos críticos. Así que tanto el tiempo que el sistema de partículas tarda en iniciar la avalancha, como el ángulo crítico no varían notoriamente. Esto nos hace pensar que para coeficientes de fricción altos, el valor de  $\mu$  no influye en el número de reordenamientos previos a la avalancha. Podemos plantear la hipótesis de que para coeficientes de fricción grandes, los reordenamientos ya no dependen de  $\mu$ , debido a que la mayoría de las partículas ruedan en lugar de deslizarse; pero esto es sólo una hipótesis que requiere de una investigación más detallada.

### 5.3. Número de partículas en movimiento

Las gráficas del número de partículas en movimiento en función del tiempo  $N_p$  vs.  $t$ , tienen la forma de una función de *Boltzmann Sigmoidea*. Así entonces, el fenómeno de la avalancha pasa por tres etapas: La primera es un aumento suave y gradual de  $N_p$  (una recta casi paralela al eje de las  $x$ ), la segunda un rápido y brusco ascenso (la pendiente adquiere un valor muy grande) y la tercera es otra recta paralela a las abscisas, en donde la avalancha alcanza el número máximo posible de partículas moviéndose en conjunto.

En la primera etapa, la curva de  $N_p$  vs.  $t$  obtenida de las simulaciones, presenta pequeños picos que se salen del patrón de una recta casi paralela al eje de las  $x$ ; esto se debe a algunos reordenamientos que tienen lugar durante la primera etapa. Incluso se han observado algunos picos durante la segunda etapa para algunos coeficientes de fricción. Sin embargo, el comportamiento general se aproxima a la curva de la ecuación de *Boltzmann Sigmoidea*.

La función de *Boltzmann Sigmoidea* (ver apéndice C) tiene la forma:

$$y = A_1 + \frac{(A_2 - A_1)}{1 + e^{(x_0 - x)/m}}, \quad (5.3)$$

donde:

$A_1$  es el valor inicial de la primera etapa.

$A_2$  es el valor final de la tercera etapa.

$x_0$  es el valor que toma  $X$  cuando  $Y$  está justo a la mitad entre los valores  $A_2$  y  $A_1$ , es decir, en el centro.

$m$  es la pendiente constante de la recta en la segunda etapa, cuando el valor de  $Y$  sube rápidamente.

La figura 5.2 muestra un ejemplo de la gráfica de una función de Boltzmann.

Para el caso de nuestros experimentos numéricos, es factible ajustarles una ecuación de este tipo (ver apéndice C). El ajuste propuesto para el número de partículas en movimiento como una función del tiempo es:

$$N_p = \frac{N_{pmax}}{1 + e^{(t_0 - t)/m_p}} \quad (5.4)$$

donde:

$N_p$  es el número de partículas en movimiento.

$N_{pmax}$  es el número máximo de partículas en movimiento que se alcanza cuando la avalancha está completamente desarrollada.

$t$  es la variable independiente, tiempo.

$t_0$  es el valor del tiempo que toma  $t$  cuando  $N_p = \frac{N_{pmax}}{2}$ , es decir, cuando va a medio camino en la subida.

$m_p$  es la pendiente durante el intervalo de tiempo en que el valor de  $N_p$  cambia drásticamente. Se encontró que  $m_p$  tiene valores muy grandes para todos los coeficientes de fricción.

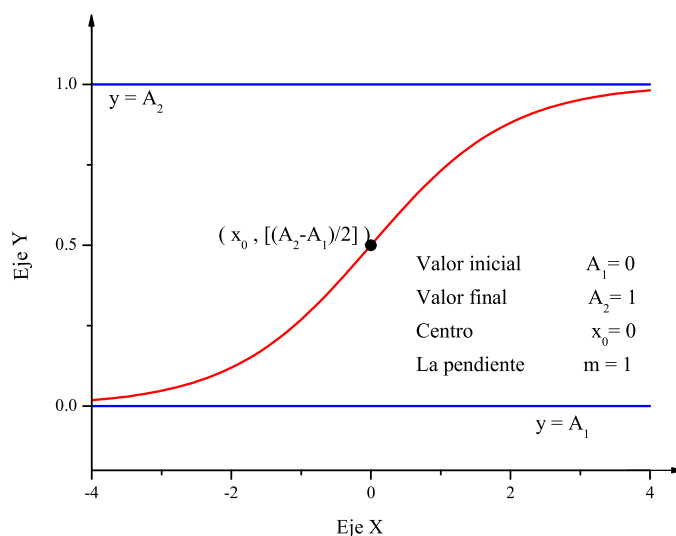


Figura 5.2: Ejemplo de una función de Boltzmann.

En el ajuste propuesto, el parámetro  $A_1$  de la ecuación (5.3) es cero; esto se debe a que inicialmente hay cero partículas en movimiento. Por otra parte, el parámetro  $A_2$ , para todos los experimentos con fronteras periódicas y para coeficientes de fricción altos en paredes sólidas, tiene un valor muy cercano a 4000 partículas. En la figura 5.3 se observan las gráficas de los datos de las simulaciones junto con las funciones de Boltzmann ajustadas para distintos coeficientes de fricción en paredes sólidas, y en la figura 5.4 para fronteras periódicas.

Como complemento al ajuste, se verifica que la aproximación obtenida es aceptable. Para ello interpolamos algunos valores:

Para  $t = t_c$  donde por supuesto  $t_c < t_0$ , el valor  $(t_0 - t)/m_p$  es positivo, de modo que el denominador de la ecuación (5.4) es un entero positivo mayor que uno, así el número de partículas en movimiento es una fracción entre 0 y 1, del número de partículas total  $N_{pmax}$ .

Para  $t = t_0$  el denominador se convierte en 2, así que obtenemos que  $N_p = \frac{1}{2}N_{max}$ . Lo cual indica que a medio camino se están moviendo la mitad de las partículas contenidas en la caja.

Para valores de  $t \gg t_0$  la función exponencial tiende a cero, así que el denominador es  $1 + 0$ , con lo que efectivamente  $N_p = N_{pmax}$ .

## 5.4. Energía cinética traslacional

A la energía cinética traslacional también se le ajustó una función de Boltzmann. Algunos ajustes se muestran en las figuras 5.5 y 5.6. La curva de la energía cinética traslacional como una función del tiempo ( $K$  vs.  $t$ ) alcanza su valor máximo, se desarrolla la avalancha y comienza a decaer de manera similar a como se llegó a la cúspide. La razón de que la curva suba y baje se debe a que las paredes que contienen al material granular oponen resistencia al movimiento de las partículas. Así entonces, cada vez que inicia una avalancha se detiene por las paredes del



# Paredes Sólidas

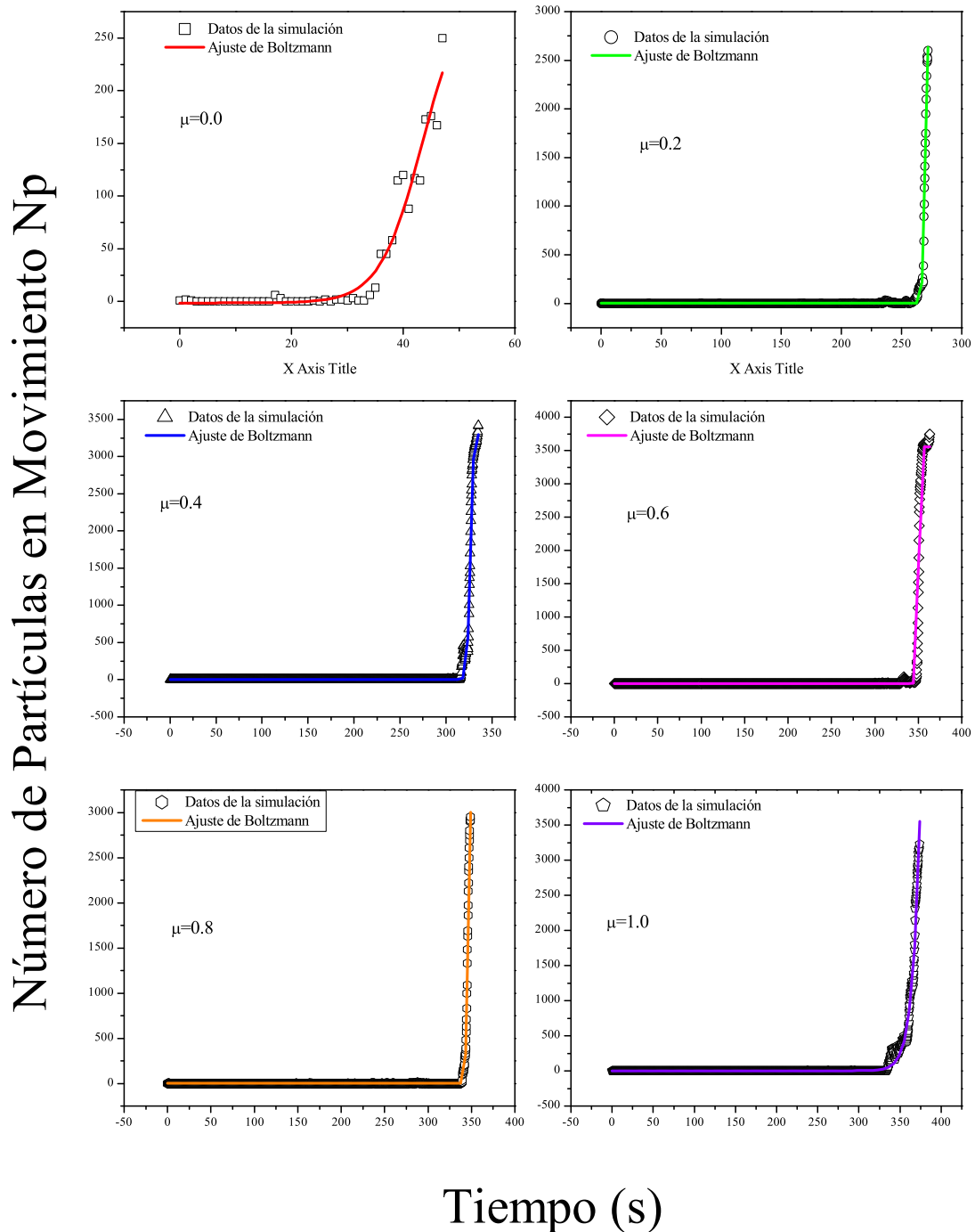


Figura 5.3: Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción con paredes sólidas.

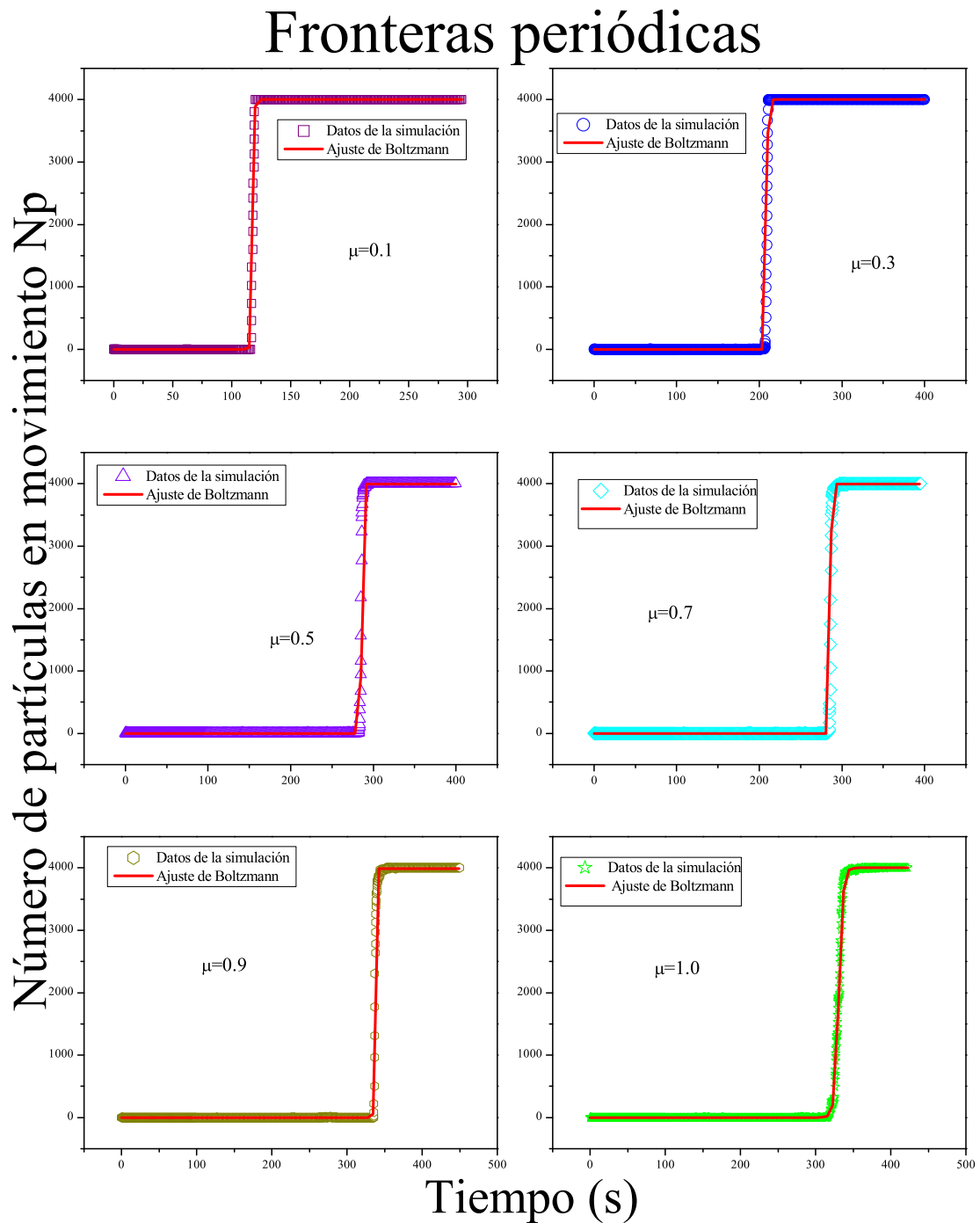


Figura 5.4: Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción para fronteras periódicas. En el eje  $x$  se da el tiempo en segundos. En el eje  $y$  se da el número de partículas en movimiento  $N_p$ .

# Paredes Sólidas

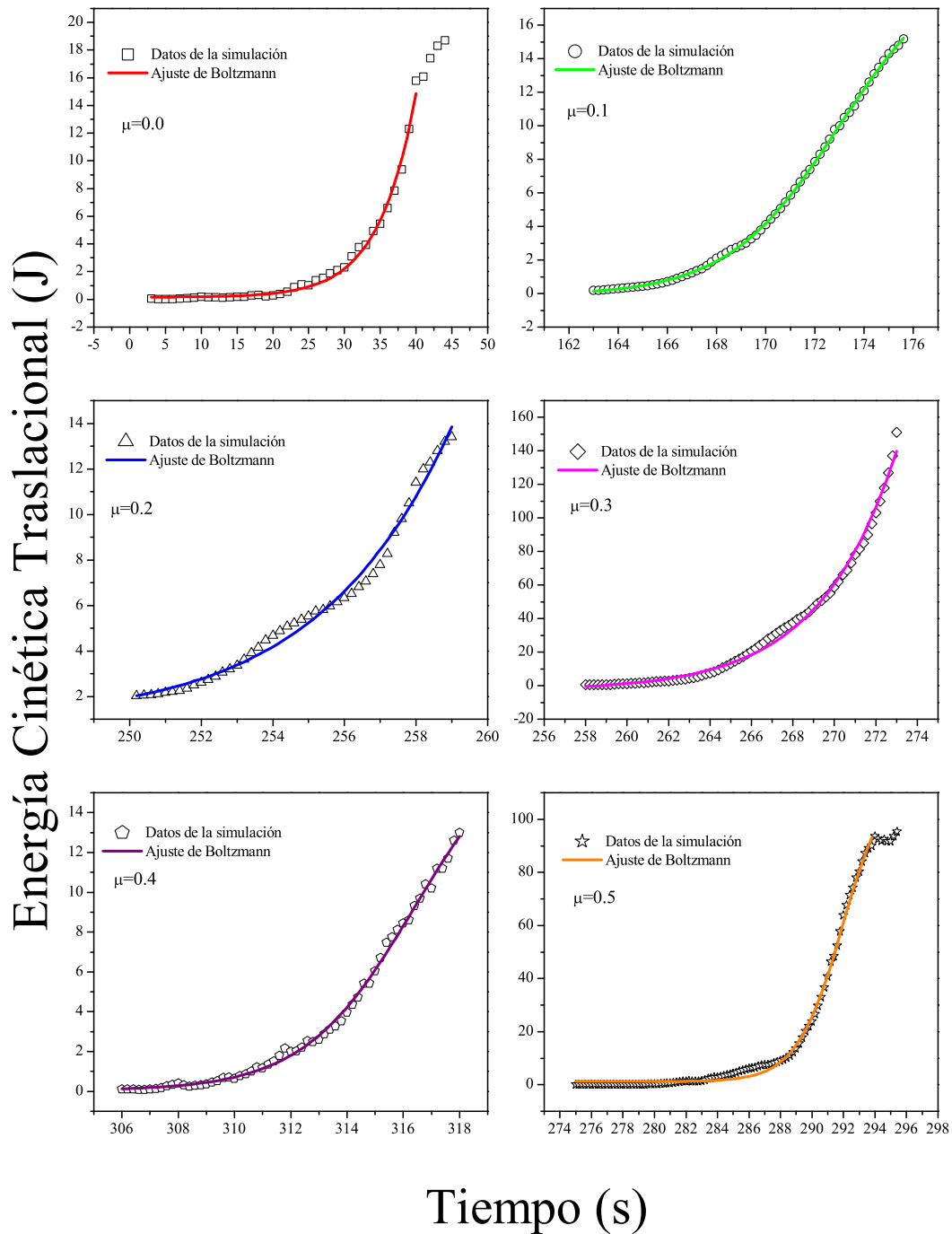


Figura 5.5: Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción.

# Fronteras Periódicas

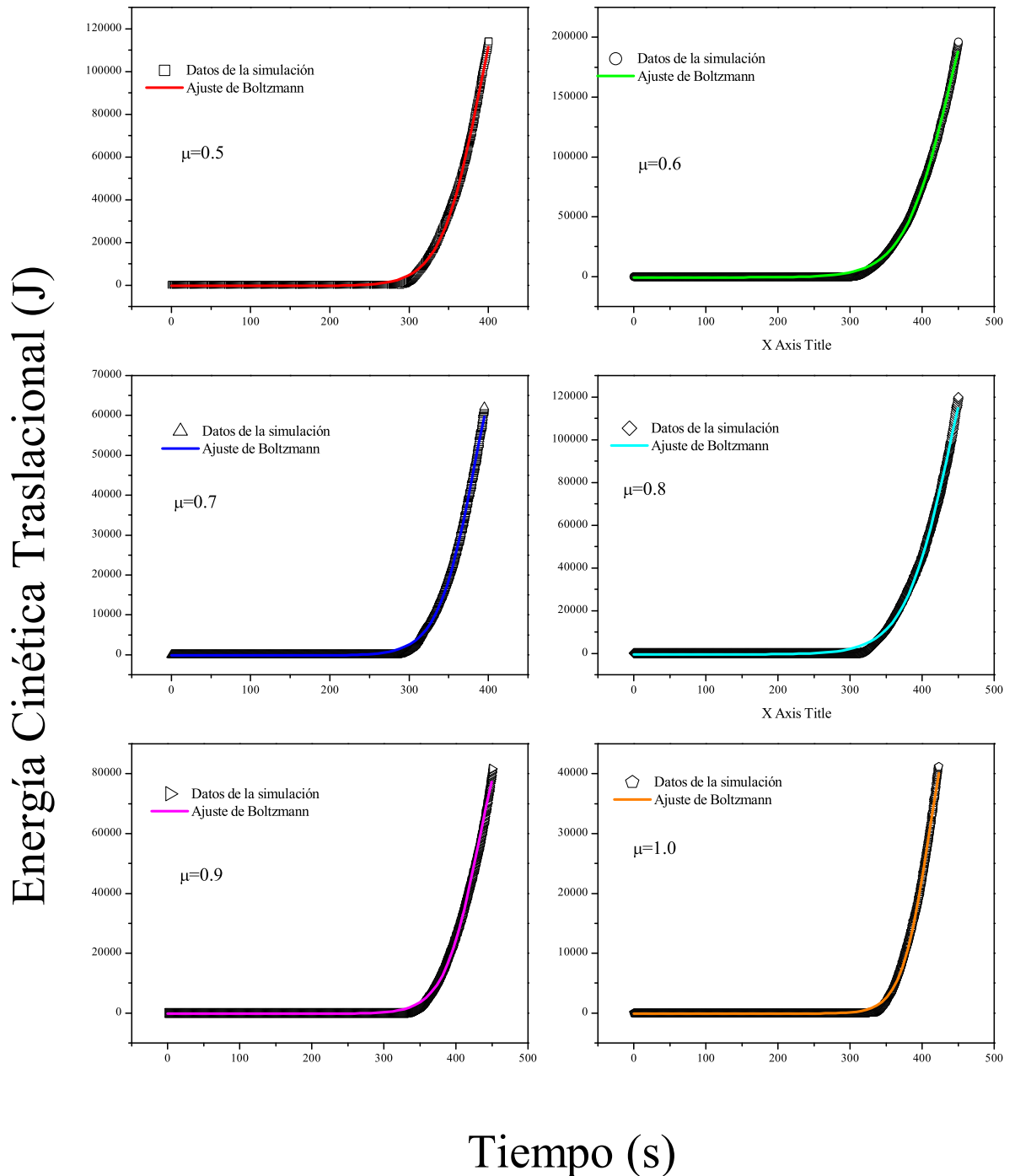


Figura 5.6: Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción.

contenedor. Aunque las partículas continúen moviéndose, su velocidad va disminuyendo hasta detenerse por completo si se le da el tiempo necesario para que el sistema regrese a su estado de equilibrio, es decir, al de mínima energía. Para el caso de fronteras periódicas la función de Boltzmann se ajusta dentro de un rango aceptable. Como no hay paredes que detengan al material, el movimiento ficticio es perpetuo. En la vida real este caso no tiene mucho sentido.

El ajuste matemático propuesto para la energía cinética  $K$  en función del tiempo  $t$  es el siguiente:

$$K = K(t \rightarrow 0) + \frac{K(t \rightarrow \infty) - K(t \rightarrow 0)}{1 + e^{(t_0 - t)/m_K}} \quad (5.5)$$

donde:

$K(t \rightarrow \infty)$  es la energía cinética cuando se llega a la energía cinética máxima posible

$K(t \rightarrow 0)$  es la energía cinética inicial del sistema en  $t = 0$ , que es prácticamente cero.

$t_0$  es el valor que toma  $t$  cuando  $K$  va a medio camino entre el estado estático y el estado completamente fluidizado y es constante.

$m_K$  es la pendiente de la curva cuando sube drásticamente. Coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente a  $K(t)$  que pasa por el punto  $(t_0, K(t \rightarrow \infty)/2)$ .

Para las paredes sólidas,  $K(t \rightarrow 0)$  es cero, pues todas las partículas están inicialmente en reposo. Por otra parte el valor de  $t_0$  es una función que depende del valor del coeficiente de fricción  $\mu$  (ver figura 5.7). *A priori* se estima que la dependencia en paredes sólidas es de la forma :

$$t_0 = 380[1 - e^{-4.5\mu - 0.1}] \quad (5.6)$$

donde  $t_0$  se mide en segundos. El coeficiente de correlación de los datos es de 0.95.

Para fronteras periódicas la energía cinética traslacional crece indefinidamente, lo cual es físicamente posible sólo para sistemas infinitos. Por esta razón, es conveniente definir un dominio de la función para el ajuste de Boltzmann en la ecuación 5.3 para fronteras periódicas. A pesar de tales limitaciones, sí es matemáticamente posible ajustar una función de Boltzmann (ver figura 5.6) a los resultados de las simulaciones para tiempos cortos cercanos a  $t_0$ , obteniéndose que, en fronteras periódicas, los valores de  $t_0$  y de  $m_K$  son constantes para todos los coeficientes de fricción y son del orden de 400s y 28s respectivamente. Asimismo  $K(t \rightarrow 0)$  también es cero, pues las partículas están inicialmente en reposo.

## 5.5. Velocidades promedio

El perfil de velocidades en todos los coeficientes de fricción es similar. Con un programa en MATLAB se implementa un color para cada rango de velocidades (ver figura 5.9).

Encontramos que las partículas en movimiento forman la figura de una semielipse cortada a lo largo. A esta figura le llamo un *frente de onda elipsoidal* (veáse la figura 5.8). Con el transcurso del tiempo, la avalancha se desarrolla y más partículas se incorporan al

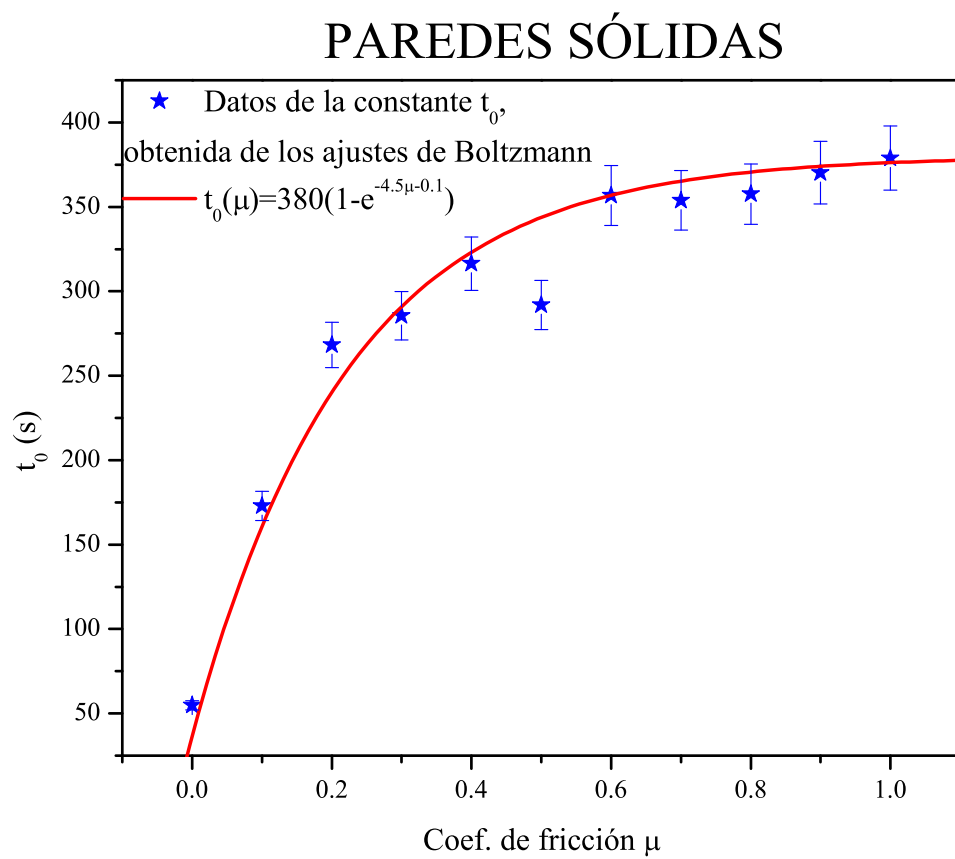


Figura 5.7: Datos y ajuste de la función de Boltzmann para algunos coeficientes de fricción.

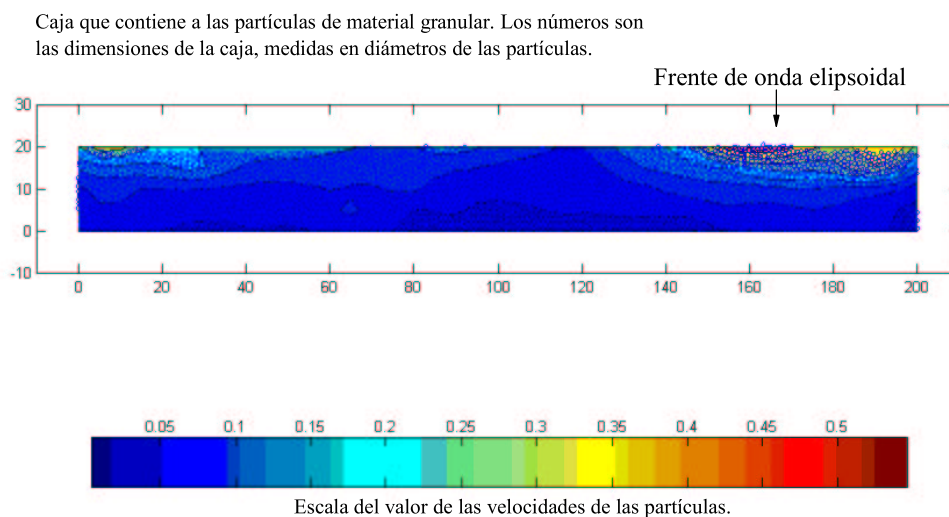


Figura 5.8: Ejemplo de un frente de onda elipsoidal dentro de una caja.

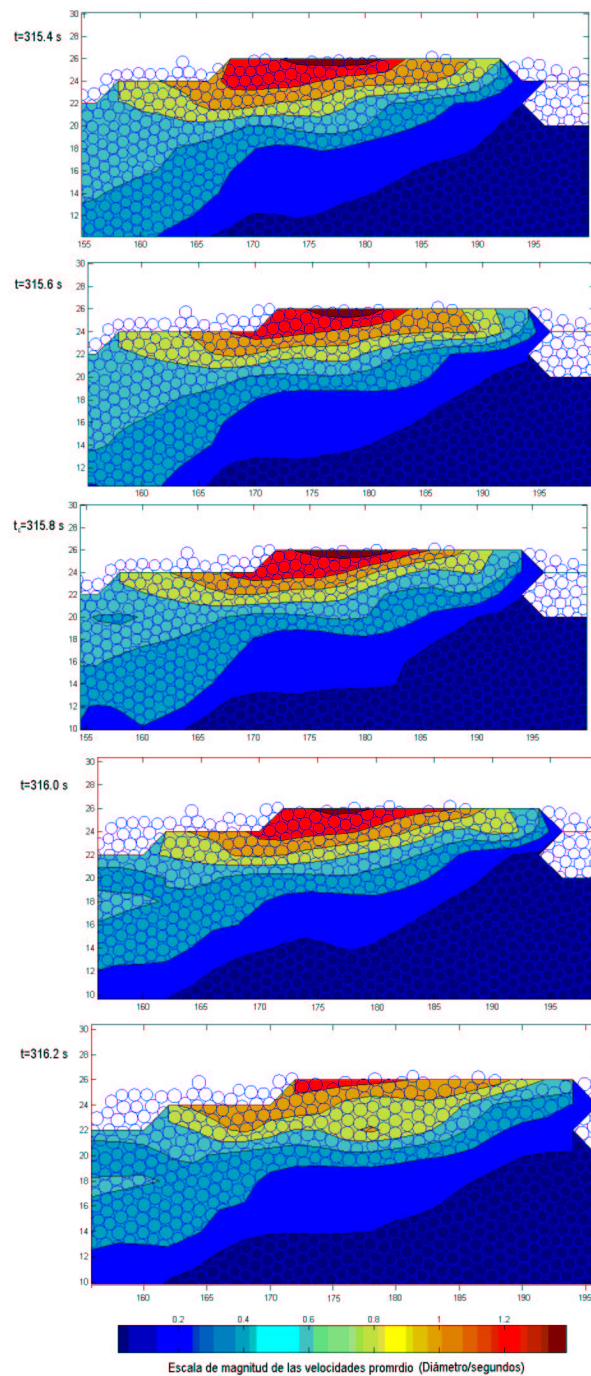
movimiento. Encontramos que el frente de onda elipsoidal se alarga en dirección  $\hat{i}$  y se ensancha en dirección  $-\hat{j}$  con el paso del tiempo. Hasta ahora sólo hemos considerado la envolvente de la figura.

Consideremos el interior del frente de onda elipsoidal. Cada color ficticio representa un rango de velocidades. Todas las partículas con el mismo color tienen casi la misma velocidad. Encontramos que las partículas están ordenadas por su velocidad en orden descendente de mayor a menor. Cada color se considera como una línea de corriente. Si trazamos una recta perpendicular a la base de la caja, tenemos un esquema de velocidades promedio. Estas velocidades promedio forman un frente de onda muy similar al que se tiene en un fluido. Concluimos con esto, que el material granular en estado de fluidización, puede ser tratado como un medio continuo.

En la figura 5.9, se ha amplificado un pequeño frente de onda elipsoidal. Se ilustra una secuencia en el tiempo. Estamos ubicados en el lado derecho de la caja en una simulación de paredes sólidas. Los parámetros son ( $\mu = 0.5$  y  $t > t_c$ ). Para esta simulación, el ángulo crítico ocurre al tiempo  $t_c = 285.4$  s. A dicho tiempo la avalancha da inicio. El final de la avalancha ocurre en  $t = 363.8$  s. La secuencia ilustrada sólo va desde  $t = 315.4$  s hasta  $316.2$  s en incrementos de  $0.2$  s. En la figura 5.9 se observa como la capa más superficial se va adelgazando con el paso del tiempo hasta desaparecer; sus partículas son las de mayor velocidad. La capa que le

sigue en color rojo también se va adelgazando y tiende a desaparecer; sus partículas tienen una velocidad menor que la capa de arriba. Así sucesivamente todas las capas correrán la misma suerte. Llegará el punto en que la avalancha se detenga y todo quedará en color azul oscuro. El proceso inverso cuando comienza a desarrollarse la avalancha es simétrico. Es decir que inicialmente está todo en color azul oscuro y poco a poco comienzan a aparecer líneas de flujo de otros colores, que denotan partículas con mayor velocidad. De las observaciones anteriores concluimos que el material granular en estado de fluidización está comprendido de algo muy semejante a las líneas de flujo que hay en un medio continuo, tal como en un fluido.





**Figura 5.9: Secuencia de un frente de onda elipsoidal. Pared sólida. Coef. de fricción 0.5.**

---

# Capítulo 6

## Conclusiones

---

Para finalizar esta tesis, se enlistan a continuación los puntos más relevantes de la misma desde el punto de vista personal de la autora.

- Previamente a una avalancha existen reordenamientos. Los reordenamientos ocurren con mayor frecuencia entre mayor sea el coeficiente de fricción. Las observaciones de esto conducen a marcar una diferencia entre reordenamiento y avalancha.
- Se crea una definición precisa de ángulo crítico. La definición se establece en el capítulo 3, sección 3.4.2 en las páginas 33 y 34. Se basa en que la avalancha da inicio cuando el valor del número de partículas en movimiento excede el 1 % de todo el material.
- Se contribuye con algunos ajustes matemáticos, enumerados a continuación:
  1. Para el ángulo crítico como una función del coeficiente de fricción. Las ecuaciones 5.1 y 5.2 de la sección 5.1 representan un ajuste de la relación entre dichas variables. Este modelo es de tipo exponencial.
  2. Para el número de partículas en movimiento como una función del tiempo. La ecuación 5.4 de la sección 5.3 propone un ajuste entre las variables  $N_p$  y  $t$ . El ajuste es del tipo de una función de Boltzmann Sigmoidea.
  3. Para la energía cinética traslacional como una función del tiempo. La ecuación 5.5 de la sección 5.4 representa el ajuste de la energía cinética como función del tiempo. El ajuste también es del tipo de una función de Boltzmann Sigmoidea. Dentro de este mismo análisis, se encontró que el parámetro  $t_0$  se puede expresar como una función del coeficiente de fricción  $\mu$ .
- De acuerdo con los ajustes para el ángulo crítico (ver figura 5.1), parece haber un límite asintótico del orden de  $20^\circ$  para nuestros experimentos. El límite se alcanza aproximadamente en  $\mu = 0.5$ .

## Trabajo a futuro

El trabajo de la presente tesis puede ampliarse y profundizarse en los siguientes rubros:

- Reordenamientos previos a la avalancha. Hacer simulaciones intermedias (con  $0.45 \leq \mu \leq 0.6$ ) para determinar mejor el límite asintótico. Analizar en detalle que ocurre con

las partículas antes y después de ese límite, y ver si ruedan o se deslizan y cuantas lo hacen.

- El final de la avalancha. Estudiar el final de la avalancha usando el método de partículas suaves.
- Líneas de corriente en el material fluidizado. Podemos contar cuantas partículas poseen el mismo rango de velocidades. Graficar el número de partículas con la misma velocidad en función del tiempo. Buscar un modelo para el comportamiento de las líneas de corriente en función de la profundidad de la caja y del tiempo.
- Investigación en un sistema real tridimensional. Tomar muestras de campo, en alguna duna o cerro compuesto por tierra suelta, calcular el número de partículas sueltas que posee la duna a partir de la muestra, calcular las constantes  $t_0$  y  $m_p$  y verificar si la ecuación 5.5 puede ser utilizada a mayor escala.

Se sabe que el ángulo crítico no es siempre el mismo [59],[35],[36] [46], depende fuertemente de la estructura microscópica del material. Así que es conveniente hacer varias simulaciones para un mismo coeficiente de fricción. Con esto se debe de sacar la probabilidad de obtener un ángulo crítico medio para cada  $\mu$  en el tiempo  $t$ . O por lo menos sacar el promedio de  $\theta_c$  para cada  $\mu$ .

---

# Apéndice A

---

## PROGRAMA PARA CALCULAR EL ÁNGULO CRÍTICO

El siguiente programa fue elaborado con el propósito de localizar los tiempos en los que existe movimiento del material granular en las simulaciones. Además, el programa cuenta el número máximo de partículas que participan en cada movimiento, la energía cinética del sistema y el ángulo en el que las partículas comienzan a moverse.

```

home
dim_MP=size(MP);
subMP=zeros(1,4);
n=dim_MP(1,1);
k=0;
for m=1:n
    if MP(m,3) | MP(m,3)>2
        k=k+1;
        subMP(k,:)=[MP(m,:),m];
    end
end0
apunt=1;
h=1;
for j=2:k
    if (subMP(j,4)-subMP(j-1,4))>=2
        h=h+1;
        apunt(h)=j;
    end
end

apunt=[0 apunt];
nummat=length(apunt);
apunt=[apunt k];
infutil=zeros (nummat-1,10);
for a=0:nummat
    if (apunt(a+1)-apunt(a))~= 1
        ti=subMP(apunt(a),1);
        tf=subMP(apunt(a+1),1);
        bloque=subMP(apunt(a):apunt(a+1),:);
        Npmin=min(bloque(:,3));
        Npmax=max(bloque(:,3));
        Kmin=min(bloque(:,2));
        Kmax=max(bloque(:,2));
        Deltat=tf-ti;
        DeltaK=Kmax-Kmin;
        tetarad=0.001 * ti;
        tetadeg=0.18 * ti / pi ;
        infutil(a-1,:)=[ti,tf,Npmin,Npmax,Kmin,Kmax,Deltat,DeltaK,tetarad,tetadeg];
    else
        ti=subMP(apunt(a),1);
        tf=ti;
        Npmin=subMP(apunt(a),3);
        Npmax=Npmin;
        Kmin=subMP(apunt(a),2);
        Kmax=Kmin;
        Deltat=0;
        DeltaK=0;
        tetarad=0.001 * ti;
        tetadeg=0.18 * ti / pi;
        infutil(a-1,:)=[ti,tf,Npmin,Npmax,Kmin,Kmax,Deltat,DeltaK,tetarad,tetadeg];
    end
end
end

```

---

# Apéndice B

---

## PROGRAMA CAMPOS

El siguiente programa calcula los campos de velocidad promedio y la compresibilidad del sistema. Usa también una subrutina que dibuja los círculos de las partículas, *ellipse.m*, cuyo código no se incluye aquí. El programa considera que tenemos un medio continuo, divide las partículas en una red homogénea rectangular y calcula los valores promedio en cada partición; de acuerdo al valor obtenido, le asigna un color a cada región; azul para las velocidades pequeñas y rojo para las velocidades grandes. El código se lista a continuación.

```

clear all

arch='D:\Camila\TC.out';

Frametoplot=839;
NumberofFrames=Frametoplot;

fid=fopen(arch,'r');
particle=struct('x', {}, 'y', {}, 'ang', {}, 'xdot', {}, 'ydot', {}, 'angdot', {});
wall=struct('x', {}, 'y', {}, 'ang', {}, 'xdot', {}, 'ydot', {}, 'angdot', {});

EnvData=fscanf(fid, '%i', 1);
EndData_a=fscanf(fid, '%f', EnvData);

PartSpecies=fscanf(fid, '%i', 1);
Npart=fscanf(fid, '%i', PartSpecies);
WallSpecies=fscanf(fid, '%i', 1);
Nwall=fscanf(fid, '%i', WallSpecies);

TotalNpart=sum(Npart);
TotalWall=sum(Nwall);
TotalSpecies=WallSpecies+PartSpecies;

NContactProperties=fscanf(fid, '%i', 1);

for i=1:TotalSpecies,
    for j=1:TotalSpecies,
        for k=1:NContactProperties,
            temp=fscanf(fid, '%f', 1);
        end
    end
end;

for i=1:PartSpecies,
    temp=fscanf(fid, '%f', 3);
end

for i=1:TotalNpart,
    radius(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    mass(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    inertia(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
end

for i=1:TotalWall,
    Length(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    Wmass(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    Winertia(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
    pb(i)=fscanf(fid, '%f', 1);
end

```

```

%initial frame
figure(1)
clf;

mark=fscanf(fid,'%s',1);
time=fscanf(fid,'%f',1);

for j=1:TotalNpart,
    particle(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
    particle(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);

    k=ellipse(radius(j),radius(j),0,particle(j).x, particle(j).y);
%    set(k,'markerfacecolor','b')
    hold on
end

for k=1:TotalWall,
    wall(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
    wall(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
end

axis equal;
hold off;

%more frames;
for i=2:NumberofFrames,
    mark=fscanf(fid,'%s',1);
    time=fscanf(fid,'%f',1);

    for j=1:TotalNpart,
        particle(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
        particle(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
    end

    for k=1:TotalWall,
        wall(j).x=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).y=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).ang=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).xdot=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).ydot=fscanf(fid,'%f',1);
        wall(j).angdot=fscanf(fid,'%f',1);
    end
end
end

```



```

%Procesamiento
%size of domain,

maxx=0.0;
minx=0.0;
maxy=0.0;
miny=0.0;

for j=1:TotalNpart,
    if particle(j).x>maxx,
        maxx=round(particle(j).x);
    end
    if particle(j).x<minx,
        minx=round(particle(j).x);
    end
    if particle(j).y>maxy,
        maxy=round(particle(j).y);
    end
    if particle(j).y<miny,
        minx=round(particle(j).y);
    end
end

sizex=[minx maxx];
sizey=[miny maxy];
dx=5.0;
dy=5.0;
xx=minx:dx:maxx;
yy=miny:dy:maxy;

vel=(zeros(length(yy),length(xx)))/0;
velx=(zeros(length(yy),length(xx)))/0;
vely=(zeros(length(yy),length(xx)))/0;

for i=1:TotalNpart,
    [temp indx]=min(abs(xx-particle(i).x));
    [temp indy]=min(abs(yy-particle(i).y));
    vel(indy,indx)=sqrt(particle(i).xdot.^2+particle(i).ydot.^2);
    velx(indy,indx)=(particle(i).xdot);
    vely(indy,indx)=(particle(i).ydot);
end

vels=filter2(butter(4,.5),vel);
velsx=filter2(butter(4,.5),velx);
velsy=filter2(butter(4,.5),vely);

[gradux,graduy]=gradient(velsx,dx,dy);
[gradvx,gradvy]=gradient(velsy,dx,dy);

```

```
% Graficas

figure(2)
clf
contourf(xx,yy,vels);
hold on
axis equal
shading flat,
colorbar
for i=1:TotalNpart,
    k=ellipse(radius(i),radius(i),0,particle(i).x, particle(i).y,'b',20);
end

figure(3)
clf
contourf(xx,yy,gradux+gradvy);
hold on
axis equal
shading flat,
colorbar
for i=1:TotalNpart,
    k=ellipse(radius(i),radius(i),0,particle(i).x, particle(i).y,'b',20);
end

figure(4)
clf
contourf(xx,yy,graduy);
hold on
axis equal
shading flat,
colorbar
for i=1:TotalNpart,
    k=ellipse(radius(i),radius(i),0,particle(i).x, particle(i).y,'b',20);
end

fclose(fid);
```



---

# Apéndice C

---

## Ecuación de Boltzmann sigmoidea

Ludwig Eduard Boltzmann (20 de febrero de 1844- 5 de septiembre de 1906) fue un físico austriaco famoso por sus contribuciones en el campo de la mecánica estadística y la termodinámica estadística. Él fue uno de los más importantes defensores de la teoría atómica cuando este modelo aún era altamente controversial.

La ecuación de Boltzmann Sigmoidea se utilizó por primera vez para explicar cómo el voltaje depende de los canales de activación de iones. La ecuación describe la conductividad ( $Y$ ) como una función de la membrana potencial  $X$ . La conductividad varía desde un límite inferior  $BOTTOM$  hasta un límite superior  $TOP$ .  $V50$ , es el potencial en el cual la conductividad está a medio camino entre  $BOTTOM$  y  $TOP$ .  $Slope$  describe el rápido incremento de la curva que alcanza una pendiente muy grande.  $Slope$  es expresada en unidades de potencial, usualmente mV (ver figura 6.1).

Bajo condiciones experimentales apropiadas, se puede usar la pendiente  $slope$  para calcular la valencia (carga) del ión moviéndose a través del canal.

$$Slope = \frac{RT}{zF}, \quad (6.1)$$

donde  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  es la temperatura en la escala absoluta (°Kelvin),  $F$  es la constante de Faraday y  $z$  es la valencia. Entonces ,  $RT/F \gg -26mV$  a  $25^\circ C$  y  $z = -26/Slope$

$BOTTOM$  se hace comunmente cero. Si normalizamos y hacemos  $TOP$  una constante igual a uno, entonces  $Y$  puede ser vista como una fracción de los canales que están activados.

Los datos de la función Sigmoidea que proporciona el software Origin, con el que se analizaron los datos, están en el código de la siguiente hoja. Aunque cabe mencionar que hay un problema con la fórmula, donde dice  $A_1$  debe de decir  $A_2$  y viceversa. Pero el ajuste de los parámetros lo hace bien dicho Software, sólo hay que cuidar de acomodarlos bien en la ecuación correspondiente.

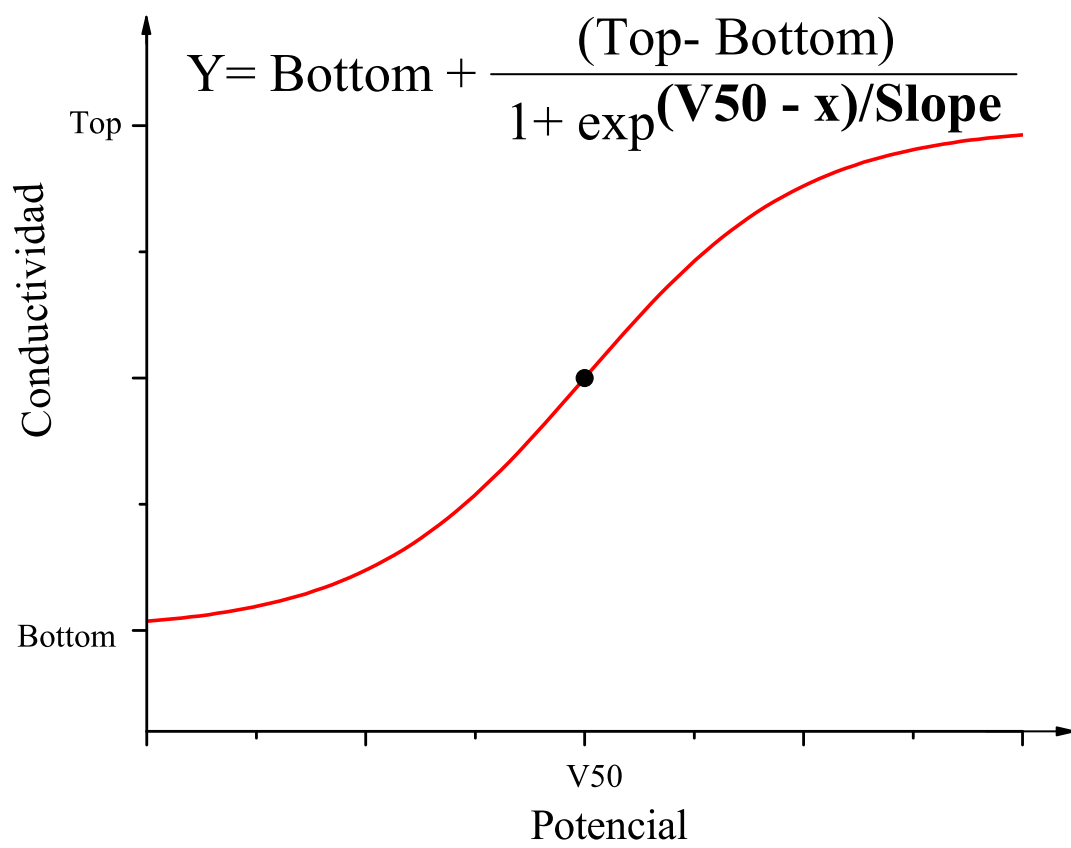


Figura 6.1: Conductividad como función de una membrana de potencial

## [GENERAL INFORMATION]

Function Name = Boltzman  
 Brief Description= Boltzman Function - produce a sigmoidal curve.  
 Function Source= fgroup.Boltzman  
 Function Type= Built-in  
 Function Form=Expression  
 Number Of Parameters=4  
 Number Of Independent Variables=1  
 Analytical Derivatives for User- Defined= Off

## [FITTING PARAMETERS]

Naming Method= User Defined  
 Names= A1, A2, x0, dx  
 Meanings= init value, final value, center, time const  
 Lower Bounds= --(I,Off), --(I,Off), --(I,Off), (X,Off)  
 Upper Bounds= --(I,Off), --(I,Off), --(I,Off), --(I,Off)

## [FORMULA]

$$Y = A2 + (A1-A2)/(1+\exp((x-x0)/dx))$$

## [CONSTANTS]

## [Parameters Initialization]

```
sort(x_y_curve);
smooth(x_y_curve);
x0 = xaty50( x_y_curve );
dx=1.0;
if (ytxmin(x_y_curve) > yatxmax (x_y_curve))
{
A1= min (y_data);
A2=max(y_data);
}
```



# Bibliografía

- [1] ARANSON, I. S. Y TSIMRING, L. S. *Phys. Rev. E*, **64**, R020301, (2001).
- [2] BAXTER, G. W. Y BEHRINGER, R. P. *Physica D*, **51**,465-471, (1991).
- [3] BOUCHAUD J. P., CATES M. E., PRAKASH J. R. Y EDWARDS S., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1982 (1995).
- [4] BOUCHAUD J. P., CATES M. E., PRAKASH J. R. Y EDWARDS S., *Phys. Rev. Lett.* **11**,1982 (1995).
- [5] BROWN, R. L. Y RICHARDS, J. C. *Principles of Powders Mechanics*, Oxford Pergamon, (1970)
- [6] BRUNO, M. S. Y NELSON, R. B., *Mechanics of Materials*, **12**, 95-118, (1991).
- [7] CAMPBELL C. S., *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**,57, (1990).
- [8] CAMPBELL C. S., *Shear Flow of Granular Materials*, Tesis de posdoctorado, California Institute Technology, (1982).
- [9] CAMPBELL C. S. Y BRENNEN C. E. *Mechanics of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations*. J. T. Jenkins y M. Satake (editors). Elsevier Science. Amsterdam. 313-326. (1982)
- [10] COULOMB, C.A. *Acad.Roy.Soc.Phys.Divers Savants* **7** (1773) ,343.
- [11] CUNDALL, P. A. *Int. J. Rock Mech. Sci. and Geomech. Abstr.*, **25**(3), 107-116,(1988)
- [12] CUNDALL, P. A. *Proc. Symp. Int Soc Rock Mech,Nancy 2*, No. 8, (1971).
- [13] CUNDALL P. A. Y HART R. D. *Engineering Computation*, **9**, 101-113, (1992).
- [14] CUNDALL P. A. Y STRACK O.D.L. *Geotéchnique*, **29**(1), 47-65 (1979).
- [15] DAERR A. Y DOUADY S. *Nature*, **399**, 241-243, (1999).
- [16] DAUDON Y LANIER. En R.P. Bhringer y J.T.Jenkins, *Powders and Grains* 97:219-222, Balkema, (1997).
- [17] DOUADY S., ANDREOTTI B. Y DAERR A., *Eur. Phys. J. B*, **11**, 131, (1999).



- [18] GALLAS J., HERRMAN H. Y SOKOLOWSKY S.. *Phys. Rev. Lett.* **69**, (9), 1371-1374, (1992).
- [19] GOLDFARB D. J., GLASSER B. J. Y SHINBROT T., *Nature*, **415**,302-305,2002.
- [20] GOLDSMITH W. *IMPACT: The theory and physical behavior of colliding solids.* (1960)
- [21] HANES D. M. Y WALTON O. R.,*Powdwr Technol.*, **109**, 133-144, (2000).
- [22] JANSSEN H. A., VEREINS Z.. *Deutsch Ing.* **39** (1035-1045)(1895).
- [23] KAWAI T. *Mecth. Engrg.*, **16**, 81-120, (1980).
- [24] KISHINO Y., STAKES M. Y JENKINS J. T. *Micromechanics of Granular Materials.* 143-152. Elsevier, (1988).
- [25] LOUGUE, M. Y. Y KEAST S. C., *Phys. Fluids*, **13**,1213-1233, (2001).
- [26] LUDING S.,*Physical Review E.***52**(4),4442-4457, (1995).
- [27] MAW N., BARBER J. R., Y FAWCETT J. N..*Wear*,**38** (1),101-114,(1976).
- [28] METCALFE G., TENNAKOON S.G.K., KONDIC L., ET AL.,*Phys. Rev. E*, **65**,031302, (2002).
- [29] MINDLIN R. D. Y DERESIEWICZ H.J. *Appl. Mech.*,**20**,327-344, (1953).
- [30] MORALES-GAMBOA E., LOMNITZ-ALDER J., ROMERO-ROCHÍN V., CHICHARRO-SERRA R. Y PERALTA-FABI R., *Phys. Rev. E.*, **47-4**, 2229-22-32, (1993).
- [31] MORALES E.,PERALTA-FABI R. Y ROMERO-ROCHÍN V., *Phys. Rev. E.*, **54-4**, 3488-3494, (1996).
- [32] MOREAU J., *Eur J. Mech. A. Silids (Suppl.)*, **13**,93, (1994).
- [33] MUETH D. M., DEBREGEAS G. F., KARCZMAR G. S.,ET. AL., *Nature*, **406**, 385,(2000).
- [34] MUETH D. M., JAEGER H. M. Y NAGEL S. R., *Phys. Rev. E*, **57**, 3164, (1998).
- [35] PERALTA-FABI R., MORALES-GAMBOA E., ROMERO-ROCHÍN V. Y LOMNITZ-ALDER J.. *Lectures on Thermodynamics and Statical Physics.*. Eds. M. López Haro and C. Varea, World Scientific Pub. Co. Singapure, 241-254, (1994).
- [36] PERALTA-FABI R., MORALES E., ROMERO-ROCHÍN V., *Powders & Grains97*, Eds: R. Behringer and J. T. Jenkins, A. A. Balkeman, Rotterdam, 449-502, (1997)
- [37] PITMAN E. B., *Forces on bins: The effect of random friction.* Physical Review En **57** (3), 3170-3175, (1998).
- [38] POTAPOV A. V. Y CAMPBELL C. S., *Physics of Fluids A.*, **8**(11),2884-2897, (1996).
- [39] POULIQUEN O., *Phys. Fluid*, **11**, 542, (1999).

- [40] POULIQUEN O., DELOUR J. Y SAVAGE S. B., *Nature*, **386**, 816-817, 1997.
- [41] F. RADJAI D. E., WOLF M. Y MOREAU J. J. *Phys. Rev. Lett.*, **80**,61, (1998).
- [42] RAJCHENBACH J., *Phys. Rev. Lett*, **88**, 014301, (2002).
- [43] RAYLEIGHT L., *Phil. Mag. Ser. 6* **11** (61),129, (1906).
- [44] ROBERTS I., *Procc Roy Soc*, **36**, 226, (1884).
- [45] ROGER F. D., *Laminar Flow Análisis*, Cambridge University Press.
- [46] ROMERO-ROCHÍN V., LOMNITZ-ALDER J.,MORALES GAMBOA E., Y PERALTA-FABI R., *Phys. Rev. E*, **51** N°5 (1995), 3968-3976.
- [47] ROSATO A., PRINZ F., STANDBURG K. J. Y SWENDSEN R.. *Powder Thecnology*, **49**(1).59-69.(1986).
- [48] S. ROUX Y RADJAI F., in *Mechanics for a Neww Millennium*, ( Kluwer Academic Publisher, The Netherlands), 181-196, (2001).
- [49] SAVAGE S. B., *Flow of Granular Material*, Udine: Italia, (1992).
- [50] SAVAGE S. B. Y HUTTER, *J Fluid Mech*, **199**,177-215, (1989).
- [51] STARON L, VILOTTE, J. P. Y RADJAI F., *Phys. Rev. Lett.*,**89**., 204302, (2002).
- [52] SONDERGAARD R., CHANEY K. Y BRENNEN C. E.. *J. Appl. Mech.* **57**,694-699, (1990).
- [53] TAGUCHI Y. H., *Phys. Rev. Lett.*, **69**(9),1367-1370, (1992).
- [54] TANAKA T., KAJIWARA Y. Y INADA T.,*Trans of ISIJT*,**28**,907-915,(1988).
- [55] TING J. M., KHWAJA M., MEACHUM L. R. Y ROWELL J. D.. *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, **17**(9),603-623, (1993).
- [56] UEMURA D. Y HAKUNO M., *Structural Eng. Earthquake Eng.* **4**(1), 181-190, (1987).
- [57] WALTON O. R. Y BRAUN R. L.. *Journal of Rheology.* **30**(5).949-980.(1986).
- [58] WASSGREN C. R. JR., *Vibration of Granular Material*. Thesis of Doctor in Philisophy, California Institute of Thecnology, Pasadena California, pp 184, ill., (1997).
- [59] RANKINE W. J. W. , *Philos Trans.Roy. Soc. London*.**147**(5),226,(1857).
- [60] ZUBELEWICZ A. Y BAZANT A. P., *Engrg. Mech. Div.*, **113**, ASCE: 1619-1630, (1987).