



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA
COMPUTACIÓN**

**“SOBRE PSEUDOLÍNEAS MEDIANAS Y
CONFIGURACIONES DE PUNTOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

CANEK PELÁEZ VALDÉS

DIRECTOR DE TESIS: “JORGE URRUTIA GALICIA”

México, D.F.

2008.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la Universidad Nacional Autónoma de México
y su compromiso con la educación laica, pública y gratuita.*

Porque sin la raza, ¿cómo va a hablar el espíritu?

Agradecimientos

El siguiente trabajo de tesis no hubiera podido completarse (o hubiera tardado *considerablemente* más tiempo) si no fuera por el apoyo y ayuda de varias personas, a algunas de las cuales quiero agradecer explícitamente.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por proveerme de la educación y del ambiente familiar que al fin y al cabo fueron los que causaron que yo estudiara un posgrado (y que de hecho jamás pusiera en duda que lo haría). Eso y que no me molestaron durante los meses que me encerré a escribir la tesis.

Quiero agradecer a mis amigos (mi *otra* familia), por perdonarme el que los hubiera abandonado durante los meses que me encerré para escribir. En particular a Citlali, Enrique y Juan José (Omar entraría en la lista, pero está en Canadá haciendo su doctorado, así que dudo mucho que sintiera mi ausencia en línea).

Quiero agradecer especialmente a Bernardo Ábrego y Silvia Fernández por portarse *más allá* de lo cordial conmigo; no sólo por su guía y apoyo académico durante el desarrollo de mi tesis, sino también por permitirme descubrir en ellos a dos amigos, dos gentes a las cuales respeto muchísimo, y una forma de vivir y trabajar que me gustaría poder algún día llegar a emular.

Por último, quiero agradecer a Jorge Urrutia; por aceptarme como tesista; por nunca perder la fe en mí (o al menos no decírmelo), a pesar de mi desempeño a veces errático y mis múltiples desapariciones; y por abrirme las puertas a un mundo que yo sabía que existía, pero que no había sabido cómo entrar a él. Gracias Jorge.

Y gracias de nuevo a todos los demás.

Índice general

Introducción	v
1. Definiciones y conceptos básicos	1
1.1. Posición general, líneas medianas y otros fundamentos	1
1.1.1. Posición general	1
1.1.2. k -conjuntos y similares	2
1.1.3. Líneas medianas	4
1.1.4. Número de cruces	4
1.2. Algunos resultados	5
1.2.1. Cota inferior para k -conjuntos	5
1.2.2. Cota superior para k -conjuntos	12
2. Matroides orientados de rango 3	21
2.1. Matroides y matroides orientados	21
2.1.1. Matroides	21
2.1.2. Matroides orientados	23
2.2. Arreglos de pseudolíneas	25
2.3. El Teorema de Goodman y Pollack	28
2.4. El Teorema de Representación Topológica	30
3. Sucesiones permisibles	33
3.1. El caso geométrico	33
3.2. Sucesiones permisibles	37
3.3. El caso generalizado	38
3.4. Líneas medianas y k -aristas revisadas	44
3.5. Algunos resultados utilizando sucesiones permisible	47
3.5.1. La propiedad alternante local	47
3.5.2. $2n$ puntos, $2n$ direcciones	49

4. Manipulando sucesiones permisibles	55
4.1. Secuencias de <i>Ls</i> , <i>Cs</i> y <i>Rs</i>	55
4.2. Bloques	57
4.3. Los algoritmos	60
4.3.1. Normalización	60
4.3.2. Generando bloques codiciosos	67
5. Codiciando sucesiones permisibles	71
5.1. Líneas medianas y número de cruces	71
5.1.1. Dos modos de calcular el número de cruces	72
5.1.2. Los resultados para $n \leq 27$	74
5.2. Buscando secuencias	77
5.2.1. Extendiendo la codicia	77
5.2.2. El experimento en California	82
5.3. La conjetura	83
6. Desenterrando diamantes	85
6.1. Definiciones	85
6.2. Recorriendo direcciones	87
6.3. El algoritmo	89
6.4. Correctez y complejidad	90
7. Conclusiones y trabajo futuro	93
A. Construcciones óptimas conocidas	95

Introducción

En Geometría Computacional todo el tiempo estamos trabajando con conjuntos de puntos en posición general; esto es, conjuntos de puntos tales que no haya tres sobre una misma línea recta. En algunos casos es necesaria una definición más estricta, y entonces usualmente pediremos también que cuatro puntos no ocurran en un mismo círculo. Esto por supuesto sólo aplica a \mathbb{R}^2 : en \mathbb{R}^d con $d > 2$ lo que pediremos es que cualesquiera $d + 1$ puntos no estén sobre un mismo hiperplano de dimensión $d - 1$.

La posición general es importante en Geometría Computacional porque nos permite modelar el caso “común y corriente” cuando hablamos de conjuntos de puntos, sin tener que preocuparnos por los casos (relativamente) “extraños”; además de que contamos con técnicas formales para poder transformar conjuntos de puntos que “casi” estén en posición general, a alguno donde sí cumplan las restricciones correspondientes.

Muchos algoritmos utilizan una metodología de “divide y vencerás” cuando atacan conjuntos de puntos en posición general; lo cual tiene sentido ya que cualquier partición en dos de un conjunto de puntos en posición general, nos genera dos subconjuntos de puntos que también cumplen con estar en posición general. Y dado que la estrategia de “divide y vencerás” conduce naturalmente a algoritmos recursivos, es entonces conveniente que podamos dividir de forma equilibrada nuestros conjuntos de puntos en posición general; siendo el mejor caso el poder hacerlo exactamente o lo más cercano posible a la mitad, porque entonces, por el Teorema Maestro, la complejidad del algoritmo contendría un componente logarítmico en lugar de uno cuadrático.

De ahí que sea interesante investigar el número de líneas medianas y k -conjuntos de un conjunto de puntos en posición general (siendo el primero un caso particular del segundo). La historia de los avances en las cotas superiores e inferiores para el número de líneas medianas en conjuntos de puntos en \mathbb{R}^2 se extiende a casi cuarenta años, cuando en 1971 László Lovász y otros describieron un método para construir conjuntos de puntos con $\Omega(n \log n)$ líneas medianas [26], lo que efectivamente dio una primera cota inferior. En 1973 Paul Erdős, Paul Lovász, Simmons y Ernst Strauss lo generalizaron a $\Omega(n \log k)$ para k -conjuntos [27], y en 1985 Herbert Edelsbrunner y Emo Welzl demostraron que cualquier cota inferior de la forma $\Omega(nf(n))$ para líneas medianas implica una cota inferior de $\Omega(nf(k))$ para k -conjuntos [18].

Esa cota inferior no fue mejorada hasta 1999 (el artículo fue publicado hasta el año

2001) por Géza Tóth, quien descubrió una construcción relativamente sencilla de conjuntos de n puntos con $\Omega(n2^{\sqrt{\log k}})$ k -conjuntos para cualquier n y $k < \frac{n}{2}$.

En el otro extremo las cotas superiores conocidas son mucho más grandes. Lovász probó que un conjunto de n puntos en el plano tiene a lo más $O(n^{\frac{3}{2}})$ líneas medianas, y de nuevo Erdős, Lovász, Simmons y Strauss lo generalizaron a que un conjunto de n puntos en el plano tiene a lo más $O(n\sqrt{k})$ k -conjuntos, para cualquier entero n . János Pach, William Steiger y Endre Szemerédi mejoraron ligeramente esta cota en 1989 a $O(\frac{n\sqrt{k}}{\log^* n})$ [29].

No fue sino hasta 1997 que Tamal Dey consiguió un avance significativo, una demostración a la vez sencilla y elegante que da una cota superior de $O(n\sqrt[3]{k+1})$ k -conjuntos para conjuntos de n puntos [17].

En forma paralela al estudio del caso geométrico, también ha habido avances considerables cuando se investigan configuraciones generalizadas de puntos. En este caso consideramos arreglos de pseudolíneas, y por lo tanto pseudolíneas medianas. Relacionado a ello, y desde un punto de vista puramente teórico, los arreglos de pseudolíneas son equivalentes a matroides orientados de rango tres, y por lo tanto ofrecen todas las posibilidades de estudio relacionadas con ese campo.

No siempre podemos pasar de pseudolíneas a líneas rectas (existen familias de pseudolíneas que no son *rectificables*); pero además del obvio interés teórico que los resultados en pseudolíneas nos ofrecen, también nos dan cotas superiores (o inferiores, dado el caso) para el caso geométrico con líneas rectas, que junto con otros resultados muchas veces nos permite también ajustar dichas cotas. También nos permiten usar herramientas combinatorias que en el caso geométrico no podríamos aplicar de forma tan natural.

En los últimos años también se ha dedicado particular atención a determinar el número máximo *justo* de líneas medianas para conjuntos con un número determinado de puntos. Poco a poco y desarrollando nuevas técnicas y teoría en el camino, investigadores como Bernardo Ábrego, Silvia Fernández-Merchant, Gelasio Salazar y Jesús Leaños han conseguido calcular el número exacto de pseudolíneas (y en algunos casos líneas) medianas para varios conjuntos de puntos (ver [1], [2] y [4]). Usando otras técnicas, Oswin Aichholzer, Hannes Krasser y otros también han contribuido muchos resultados al problema de forma independiente, y en algunos casos paralela (ver [6], [7] y [8]).

Dado que el problema es **NP-completo**, no es de extrañar que los avances no hayan sido muy rápidos: aún en este momento no se ha podido encontrar el número exacto de líneas o pseudolíneas medianas para conjuntos de 30 puntos, aunque se hayan acotado considerablemente.

El objetivo de este trabajo de tesis es recapitular los resultados relacionados con líneas medianas y k -conjuntos en los últimos años; la relación con matroides de rango tres y cómo nos permite utilizar nuevas herramientas para atacar y resolver estos problemas de forma más sencilla y elegante; mostrar las cotas actuales en líneas y pseudolíneas medianas; y presentar varios algoritmos que, utilizando sólo las representaciones de conjuntos de pseudolíneas como matroides de rango tres, nos permiten profundizar nuestro

conocimiento en el número de pseudolíneas medianas en ciertos casos, siendo además relativamente eficientes computacionalmente.

En el primer capítulo enunciaremos las definiciones y conceptos básicos que utilizaremos a lo largo del trabajo de tesis, además de mostrar algunos resultados en su forma clásica, que más adelante atacaremos utilizando las herramientas que nos dan las sucesiones permisibles. Durante el segundo capítulo daremos una breve repasada a matroides orientados de rango tres en su representación de familias de pseudolíneas utilizando el Teorema de Representación Topológica, y revisaremos el teorema de Goodman y Pollack que relaciona arreglos de pseudolíneas con diagramas de cables. El tercer capítulo lo dedicaremos a sucesiones permisibles, cómo se construyen y cómo nos permiten probar algunos resultados del primer capítulo de forma más sencilla. En el cuarto capítulo presentaremos y estudiaremos los algoritmos que mencionamos arriba, y demostraremos su correctez. En el quinto capítulo estudiaremos en detalle la historia del número de líneas y pseudolíneas medianas para conjuntos de determinado tamaño, y explicaremos cómo una versión extendida de uno de los algoritmos que veremos en el cuarto capítulo nos permite confirmar (de forma relativamente rápida) varias de las cotas que mencionaremos, y cómo es que conjeturamos que ese mismo algoritmo nos permitirá determinar de forma exacta el número de pseudolíneas medianas para conjuntos de puntos de 28 elementos. Por último en el sexto capítulo presentaremos un problema que se dio en el Primer Taller Iberoamericano en Geometría Combinatoria y Computacional que se realizó en la ciudad de Guanajuato en diciembre del año 2006, y que aunque no tiene ninguna relación con el resto de este trabajo no quiero dejar de incluirlo en mi trabajo de tesis, por ser de los primeros resultados que conseguí durante mis estudios de maestría.

Capítulo 1

Definiciones y conceptos básicos

1.1. Posición general, líneas medianas y otros fundamentos

Vamos a comenzar definiendo los conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo de tesis, y dando las demostraciones de algunos de los resultados actuales relacionados con ellos.

1.1.1. Posición general

La idea principal de tratar con conjuntos de puntos en *posición general* se basa en el hecho de que no queremos meternos en problemas con casos degenerados, donde “degenerado” suele ser bastante arbitrario. En el caso general en \mathbb{R}^d se suele requerir que no existan $d + 1$ puntos en el conjunto tales que todos estén en el mismo hiperplano de dimensión $d - 1$; lo que en \mathbb{R}^2 se traduce en que no hayan tres puntos sobre una misma línea recta.

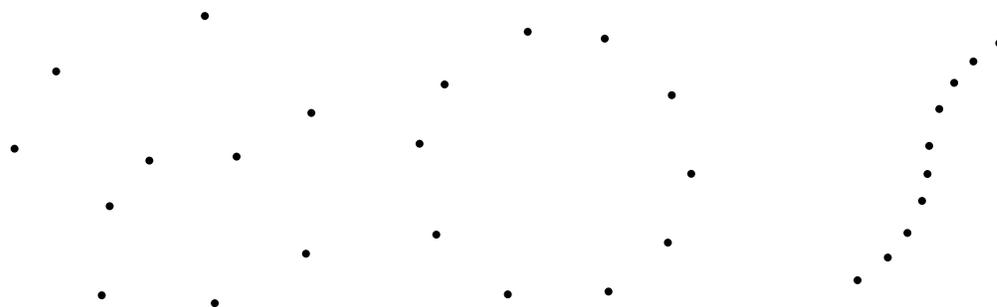
Decimos que es arbitrario lo que se considera “degenerado” porque realmente depende del problema en cuestión que esté estudiándose. En algunos casos en \mathbb{R}^2 podemos necesitar también que no haya cuatro puntos sobre un círculo, por ejemplo. La idea por tanto es sólo poder trabajar con conjuntos de puntos sin que nos preocupemos por ciertos casos extremos que sólo nos generan ruido al momento de analizar un problema; en el caso en que ya en la práctica necesitemos lidiar con conjuntos de puntos que no cumplan al pie de la letra el estar en posición general, existen técnicas (como el perturbar los puntos un poco) que nos permiten convertirlos a la posición general.

En este trabajo de tesis, a menos que se especifique lo contrario, vamos a limitarnos a \mathbb{R}^2 y utilizaremos la siguiente definición de posición general.

Definición 1.1 (Posición general). Diremos que un conjunto de puntos P en \mathbb{R}^2 está en *posición general* si y sólo si no existen tres puntos en P tales que estén sobre una misma línea recta.

Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos

En la Figura 1.1 podemos ver ejemplos de conjuntos en posición general; hay que notar que la posición general (como se observa en las Figuras 1.1(b) y 1.1(c)) no necesariamente nos garantiza conjuntos de puntos que podrían parecer “aleatorios”. Como su definición deja bien claro, sólo garantizan que no hay tres puntos sobre una misma línea recta.



(a) Conjunto aleatorio de puntos. (b) Puntos en posición convexa. (c) Puntos sobre una curva.

Figura 1.1: Distintos conjuntos de puntos en posición general.

1.1.2. k -conjuntos y similares

Dado un conjunto de puntos P en posición general vamos a definir un k -conjunto como un subconjunto de P de tamaño k , al cual podemos separar del resto de P utilizando una línea recta (se muestra un ejemplo en la Figura 1.2). Formalmente:

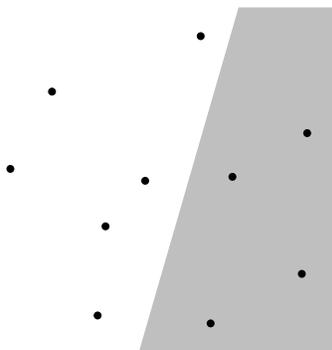


Figura 1.2: Un 4-conjunto de P .

Definición 1.2 (k -conjuntos). Sea P un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 en posición general. Un k -conjunto es un subconjunto $S \subseteq P$ tal que $S = P \cap H$ para algún semiplano H , y $|S| = k$ con $0 \leq k \leq n$.

De forma similar a los k -conjuntos vamos a definir a los $(\leq k)$ -conjuntos, que en lugar de separar subconjuntos de *exactamente* k elementos, separan subconjuntos de k o *menos* elementos. Formalmente:

Definición 1.3 ($\leq k$ -conjuntos). Sea P un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 en posición general. Un $(\leq k)$ -conjunto es cualquier j -conjunto de P tal que $j \leq k$.

Es obvio a partir de la definición que cualquier j -conjunto es también un $(\leq k)$ -conjunto si $j \leq k$.

Dado un conjunto de n puntos P en posición general, su *gráfica geométrica* es la gráfica resultante de considerar a cada punto de P como un vértice, y al segmento que une a dos puntos de P como una arista. Relacionadas con los k -conjuntos (y de hecho podríamos decir que son lo mismo, sólo que representadas de una manera distinta) están las j -aristas: dados dos puntos p y q de P decimos que la arista \vec{pq} es una j -arista si a la *izquierda* de la misma quedan j puntos de P (podemos ver un ejemplo en la Figura 1.3). Esta última restricción es necesaria porque estamos considerando a \vec{pq} como orientada; por lo tanto es distinta de \vec{qp} .

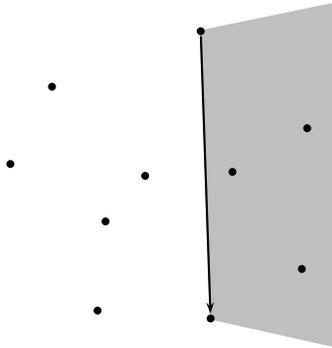


Figura 1.3: Una 3-arista de P .

Definición 1.4 (j -aristas). Sea P un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 en posición general. Dados dos puntos $p, q \in P$ decimos que \vec{pq} es una j -arista en la gráfica geométrica de P , si a la izquierda de dicha arista quedan j puntos del conjunto P .

En \mathbb{R}^2 existe una correspondencia uno a uno entre los k -conjuntos y las $(k - 1)$ -aristas: cualquiera de ellos lo podemos derivar a partir del otro. Esto permite que en dimensión dos los resultados para k -conjuntos sean válidos para $(k - 1)$ -aristas y viceversa, y que en general podamos utilizar cualesquiera de forma intercambiable según nos convenga.

Dada esta relación entre k -conjuntos y $(k - 1)$ -aristas, no es de extrañar entonces que definamos también $(\leq j)$ -aristas:

Definición 1.5 ($\leq j$ -aristas). Sea P un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 en posición general. Una $(\leq j)$ -arista es cualquier i -arista de P tal que $i \leq j$.

1.1.3. Líneas medianas

Las *líneas medianas* podemos verlas como un caso particular de k -aristas donde $k = \frac{n}{2} - 1$; o en otras palabras son k -aristas que nos dividen a nuestro conjunto P en dos subconjuntos del mismo tamaño (cuando n es par). Formalmente:

Definición 1.6 (Líneas medianas). Sea P un conjunto de n puntos (n par) en posición general en \mathbb{R}^2 . Una *línea mediana* es una línea ℓ que pasa sobre dos elementos p, q de P , y que deja a $\frac{n}{2} - 1$ elementos de un lado de ℓ y a $\frac{n}{2} - 1$ del otro.

Cuando n es impar podemos relajar la restricción de que los subconjuntos divididos por ℓ sean del mismo tamaño, y en su lugar pedir que difieran a lo más en un elemento: en general todos los resultados para conjuntos pares son aplicables a conjuntos impares. En los casos en que no sea así, lo haremos notar explícitamente.

En la Figura 1.4 mostramos un conjunto de puntos y todas las líneas medianas que tiene.

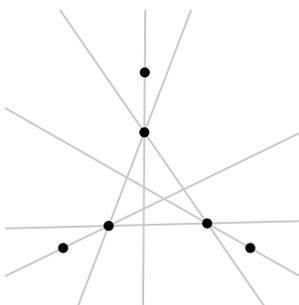


Figura 1.4: Líneas medianas de un conjunto P de 6 puntos.

Definiremos el número total de líneas medianas de un conjunto de puntos P de la siguiente manera.

Definición 1.7 (Número de líneas medianas). Sea P un conjunto de puntos en posición general. El número total de líneas medianas de P lo denotaremos como $h(P)$.

En la Figura 1.4, $h(P) = 6$.

1.1.4. Número de cruces

Para terminar esta sección, vamos a definir el *número de cruces* de una gráfica geométrica.

Definición 1.8 (Número de cruces). Sea P un conjunto de puntos en posición general en \mathbb{R}^2 , y sea $G = (P, E)$ la gráfica donde cada punto de P es un vértice, y donde las aristas de E son segmentos de recta entre algunos o todos los puntos de P .

El número de cruces $\chi(G)$ de G es el número de intersecciones que ocurren entre los interiores de los segmentos de E .

La posición general nos evita el tener que preocuparnos de que un cruce ocurra sobre un punto de P ; pero de cualquier forma se deja explícito que $\chi(G)$ sólo cuenta los cruces de los interiores de aristas.

1.2. Algunos resultados

1.2.1. Cota inferior para k -conjuntos

Géza Tóth ideó una construcción en 1999 (publicada hasta el 2001 [34]) de n puntos en posición general que tiene al menos $ne^{\Omega(\sqrt{\log n})}$ líneas medianas, y a partir de ahí construye otro conjunto de n puntos con $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ k -conjuntos, y ésta es la mejor cota inferior conocida hasta ahora. En este caso e es el número de Euler:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hacemos la aclaración porque más adelante generalmente usaremos e para representar el número de aristas en una gráfica.

Vamos a construir una sucesión de conjuntos V_0, V_1, \dots , de forma recursiva, donde para cada $i = 0, 1, 2, \dots$, el conjunto V_i tendrá n_i puntos y m_i líneas medianas.

La idea de la construcción es la siguiente: supongamos que ya tenemos el conjunto V_{i-1} con n_{i-1} puntos y m_{i-1} líneas medianas, y que ninguna de las parejas de puntos de V_{i-1} forma una línea horizontal (los giramos un poco de ser necesario). A cada punto v en V_{i-1} lo vamos a reemplazar con $a = a_i$ puntos v_1, v_2, \dots, v_a que pondremos en un segmento horizontal muy pequeño (ε -pequeño) y muy cercano a v (ver Figura 1.5). Sea V'_{i-1} el conjunto resultante de hacer este reemplazo en V_{i-1} . Claramente V'_{i-1} tiene an_{i-1} puntos, y si la línea que pasa por uw es línea mediana de V_{i-1} , entonces las líneas que pasan por $u_1w_a, u_2w_{a-1}, \dots, u_{a-1}w_2$ y u_aw_1 serán líneas medianas de V'_{i-1} , lo que nos da un total de am_{i-1} líneas medianas. Hasta ahora la construcción recursiva sólo nos da $m_i = O(n_i)$.

Si los puntos v_1, \dots, v_a que reemplazan a cada v son colocados de forma equidistante, entonces, si uw era una línea mediana en V_{i-1} , ocurre que las líneas medianas u_1w_a, \dots, u_aw_1 de V'_{i-1} se intersecan todas en un único punto q (ver Figura 1.6(a)).

Fijémonos ahora en dos puntos u y w de V_{i-1} tales que la línea que pasa por uw es una línea mediana, y sin perder generalidad supongamos que u está arriba de w ; vamos a añadir dos puntos x y y a V'_{i-1} , el primero de ellos sobre la línea horizontal que pasa por q , a la izquierda de él y muy cercano; el segundo en cualquier lugar a la izquierda de $\overrightarrow{xu_1}$ y a la derecha de $\overrightarrow{xw_1}$ (ver Figura 1.6(b)).

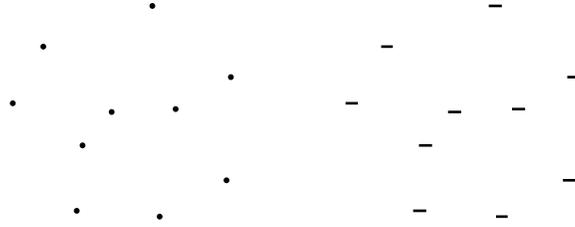
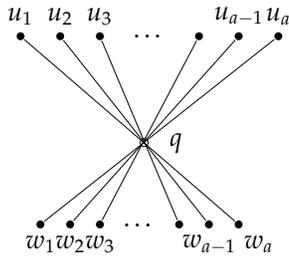
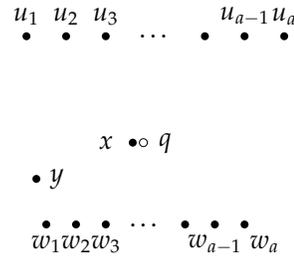


Figura 1.5: Reemplazo de los puntos de V_{i-1} ; el tamaño de los segmentos ha sido exagerado para que sean visibles.

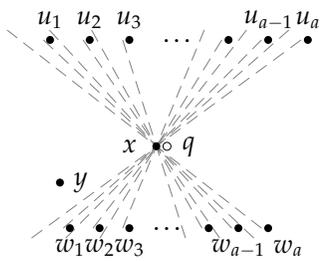
El agregar x y y resulta en que $u_1w_a, \dots, u_a w_1$ dejan de ser líneas medianas de V'_{i-1} (todas tienen dos puntos más del lado izquierdo); pero ahora $xu_1, \dots, xu_a, xw_1, \dots, xw_a$ son todas líneas medianas de $V'_{i-1} \cup \{x, y\}$ (ver Figura 1.6(c)).



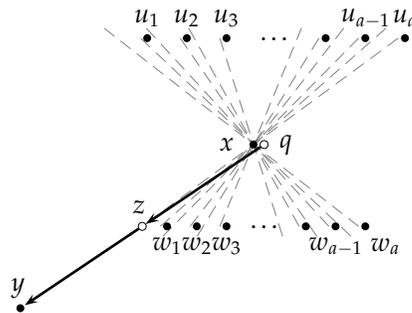
(a) Las líneas medianas de V'_{i-1} resultantes de una línea mediana de V_{i-1} se intersecan en un único punto q .



(b) Agregamos x a la izquierda y muy cerca de q , y y en cualquier lugar a la izquierda de xu_1 y a la derecha de xw_1



(c) Las líneas que pasan por u_i y x , y por x y w_i se convierten en líneas medianas *localmente*.



(d) Si el vector \vec{zy} es igual a \vec{qz} , y agregamos algunos puntos extras, entonces las líneas que pasan por u_i y x , y por x y w_i son líneas medianas *globalmente*.

Figura 1.6: Continuación de la construcción de Tóth.

En otras palabras, agregando únicamente dos puntos extras conseguimos $2a$ líneas medianas extras. Para que esto resulte en la construcción, sin embargo, necesitamos poder hacerlo en *todas* las parejas de puntos de V_{i-1} que originalmente eran líneas medianas, y aunque funciona sin problemas *localmente* para u y w y sus reemplazos, puede que desbalancee el resto de las líneas medianas de V'_{i-1} . Tóth resuelve este problema agregando y de forma inteligente; veremos cómo exactamente más adelante en la demostración.

Al final lo que conseguimos es un conjunto V_i con $2a$ líneas medianas, y con un número total de puntos *ligeramente* mayor a $a|V_{i-1}|$. En otras palabras, $m_i = 2am_{i-1}$ y $n_i \approx an_{i-1}$. Eligiendo $a = a_i$ de forma inteligente, conseguiremos la cota deseada.

Para poder demostrar formalmente que la construcción de Tóth nos da la cota inferior para líneas medianas, necesitaremos definir lo que son las *progresiones* (a, ε) .

Definición 1.9 (Progresiones (a, ε)). Para un entero positivo a y $\varepsilon > 0$, sea $P(a, \varepsilon)$ el conjunto de a puntos equidistantes sobre una línea horizontal tal que la distancia entre el primero y último puntos es ε ; llamaremos a $P(a, \varepsilon)$ una *progresión* (a, ε) . Si un punto p es idéntico a alguno de los puntos en $P(a, \varepsilon)$ (lo cual sólo puede ocurrir si a es impar), diremos que p es *reemplazado* por una progresión (a, ε) .

Con las progresiones (a, ε) podemos describir formalmente la construcción de Tóth, y demostrar que nos da la cota deseada para líneas medianas.

Vamos a construir una secuencia de gráficas geométricas $G_0(V_0, E_0), G_1(V_1, E_1), \dots$, de forma recursiva con la propiedad de que para cada i , todas las aristas en E_i serán líneas medianas de G_i . Para $i = 0, 1, \dots$, la gráfica G_i tendrá $|V_i| = n_i$ vértices y $|E_i| = m_i$ aristas, y denotaremos con d_i el máximo grado de un vértice en G_i .

Para comenzar G_0 tendrá dos vértices y una arista que los conecta. Supongamos que ya tenemos construido a G_{i-1} , y supongamos sin perder generalidad que ninguna arista de E_{i-1} es horizontal (de ser así, giramos toda la gráfica un poco). Sea $\varepsilon = \varepsilon_i > 0$ muy pequeño, y sean $v_1, v_2, \dots, v_{n_{i-1}}$ los vértices de G_{i-1} . Construiremos G_i siguiendo los tres pasos siguientes:

1. Para $j = 1, 2, \dots, n_{i-1}$, reemplazaremos v_j por una progresión (a_i, ε^j) . El valor exacto de $a = a_i$ lo especificaremos después. Llamaremos V'_{i-1} al conjunto resultante de hacer los reemplazos en V_{i-1} .
2. Sea e una arista de E_{i-1} que conecte a u y w , con $u = v_\alpha$ y $w = v_\beta$ (sin perder generalidad supongamos que $\alpha < \beta$). Sean u_1, u_2, \dots, u_a los puntos de la progresión (a, ε^α) que reemplazan a u , y w_1, w_2, \dots, w_a los puntos de la progresión (a, ε^β) que reemplazan a w . Sea q el punto de intersección de las líneas medianas $u_1w_a, u_2w_{a-1}, \dots, u_aw_1$ (ver Figura 1.6(a)).

Vamos a agregar dos puntos x y y como sigue: a x lo colocaremos de tal forma que \overline{xq} sea horizontal, a la izquierda de q y tan cerca a este último que para todo

Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos

$1 \leq j \leq a$, la línea xu_j separe a w_1, w_2, \dots, w_{a-j} de $w_{a-j+1}, w_{a-j+2}, \dots, w_a$, y la línea xw_j separe a u_1, u_2, \dots, u_{a-j} de $u_{a-j+1}, u_{a-j+2}, \dots, u_a$ (ver Figura 1.6(b)).

Para colocar y , sea z el punto en la intersección entre la línea que pasa por xu_a y la que pasa por w_1, w_2, \dots, w_a ; como $\alpha < \beta$, entonces $\varepsilon^\beta < \varepsilon^\alpha$, y z siempre está a la izquierda de w_1 . Vamos a colocar y de tal forma que el vector \vec{qz} sea igual a \vec{zy} (ver Figura 1.6(d)).

Por último, agregamos las aristas $xu_1, xu_2, \dots, xu_a, xw_1, xw_2, \dots$, y xw_a a E_i .

Como ε es muy pequeña y $\alpha < \beta$, x y y están en una vecindad muy pequeña de w . Más aún, los puntos w_1, w_2, \dots, w_a deben estar muy cerca del punto medio del segmento \overline{xy} . Por lo tanto, cualquier línea vw con $w \in \{w_1, w_2, \dots, w_a\}$ y $v \notin \{u_1, u_2, \dots, u_a\}$, intersecta al segmento xy muy cerca de su punto medio y, en particular, separa a x y y .

Este paso lo repetimos para todas las aristas de E_{i-1} .

3. A todo punto u de V_{i-1} lo reemplazamos por una progresión (a, ε^j) , digamos u_1, u_2, \dots, u_a . En el segundo paso posiblemente agregamos pares de puntos en una vecindad muy cercana de u (recordemos que los puntos agregados en el paso anterior quedan muy cerca de una progresión, pero no de la otra). Sea $2D$ el número de puntos que agregamos cerca de u . Para cada arista adyacente a u , agregamos cero o dos puntos en la vecindad de u , y el número de esas aristas es a lo más d_{i-1} . Por lo tanto, $D < d_{i-1}$.

Vamos a colocar $d_{i-1} - D$ puntos en la línea que pasa por u_1, u_2, \dots, u_a a la izquierda de u_1 , de tal forma que la distancia entre ellos y u_1 esté entre ε y 2ε ; y agregamos otros $d_{i-1} - D$ puntos a la derecha de u_a de forma análoga (ver Figura 1.7).

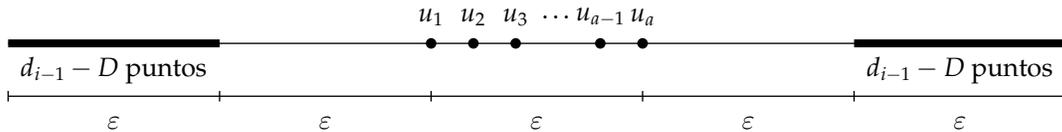


Figura 1.7: Agregamos $d_{i-1} - D$ puntos a la izquierda de u_1 , y $d_{i-1} - D$ puntos a la derecha de u_a .

Este paso lo repetimos para cada vértice $u \in V_{i-1}$, y por último perturbamos los puntos un poco para que queden de nuevo en posición general.

La gráfica resultante es $G_i(V_i, E_i)$.

El último paso de perturbar los puntos puede parecer “mágico”, pero realmente es muy sencillo: sólo utilizamos una curva muy abierta en lugar de un segmento de recta,

cuidándonos de que los puntos sigan sobre las mismas líneas. Un ejemplo (exagerado, para facilitar la visualización) de esta técnica se puede ver en la Figura 1.8.

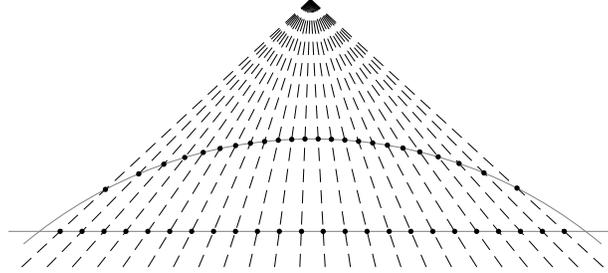


Figura 1.8: Perturbación (exagerada) de los puntos colocándolos sobre una curva.

Primero probaremos que todas las aristas de E_i son líneas medianas, después probaremos que la cota se cumple para V_i si $|V_i|$ cumple ciertas restricciones, y por último extenderemos la cota a toda n entera positiva.

Lema 1.1. *Todas las aristas en E_i agregadas en el paso 2 son líneas medianas de V_i .*

Demostración. Sea e una arista de E_{i-1} que conecta a u y w en V_{i-1} . Sea $1 \leq j \leq a$; sabemos que la línea xu_j separa a w_1, w_2, \dots, w_{a-j} de $w_{a-j+1}, w_{a-j+2}, \dots, w_a$, y por lo tanto es una línea mediana del conjunto $x, y, u_1, u_2, \dots, u_a, w_1, w_2, \dots, w_a$. Todos los otros puntos en las vecindades de u y w son agregados en pares, uno en cada lado de xu_j , y como uw era línea mediana de V_{i-1} , hay exactamente $\frac{n_{i-1}-2}{2}$ puntos de V_{i-1} a ambos lados de uw , y cada uno de ellos es reemplazado por exactamente $a + 2d_{i-1}$ puntos en sus pequeñas vecindades. Por lo tanto, el número de puntos de V_i que están en distintos lados de uw es el mismo. \square

Ahora demostraremos que la cota se cumple para n si n es de cierta forma.

Lema 1.2. *Si n es de la forma $2 \cdot 6^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)}$ para algún $i \geq 0$, entonces el número de líneas medianas de G_i es $ne^{\Omega(\sqrt{\log n})}$.*

Demostración. Cada vértice de G_{i-1} es reemplazado por $a + 2d_{i-1}$ puntos. Por lo tanto, $|V_i| = n_i = (a + 2d_{i-1})n_{i-1}$. Para cada arista $e \in E_{i-1}$ agregamos $2a$ aristas en E_i . De ahí que $|E_i| = m_i = 2am_{i-1}$. Sea $a = 4d_{i-1}$; por lo tanto tenemos que

$$n_i = 6d_{i-1}n_{i-1}, \quad (1.1)$$

$$m_i = 8d_{i-1}m_{i-1}. \quad (1.2)$$

Ahora calcularemos d_i ; hay tres tipos de puntos en V_i :

Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos

1. Los puntos que agregamos en el paso 1. Todos estos puntos tienen el mismo grado que al que reemplazaron de G_{i-1} . De ahí que el máximo grado de estos puntos es también d_{i-1} .
2. Los puntos que agregamos en el paso 2. La mitad de ellos tienen grado cero, y la otra mitad tienen grado $2a = 8d_{i-1}$.
3. Los puntos que agregamos en el paso 3. Todos estos puntos tienen grado cero.

Por lo tanto, para $i > 0$ tenemos que el máximo grado es $d_i = 8d_{i-1}$. Ya que $d_0 = 1$ (porque G_0 tiene dos vértices y una arista que los conecta), tenemos que $d_i = 8^i$. Usando la ecuación 1.1 y el hecho de que $n_0 = 2$ tenemos que

$$n_i = 2 \cdot 6^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)} = 8^{i^2/2 + (\log_8 6 - 1/2)i + 1/3}.$$

De forma análoga, usando la ecuación 1.2 y que $m_0 = 1$ tenemos que

$$m_i = 8^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)} = 8^{i^2/2 + i/2}.$$

Y por lo tanto

$$m_i = n_i 8^{(1-\log_8 6)i - 1/3} = n_i e^{\Omega(\sqrt{\log n_i})}.$$

Si n es de la forma $2 \cdot 6^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)}$ para algún $i \geq 0$. □

Y ya nada más nos falta extender la cota a cualquier posible n .

Lema 1.3. *Sea $f(n)$ el máximo número de líneas medianas de un conjunto de n puntos. Para a y $n > 0$ tenemos que*

1. $f(an) \geq af(n)$, y
2. $f(n+2) \geq f(n)$.

Demostración. Sea P un conjunto de n puntos con $f(n)$ líneas medianas y supongamos que ningún par de puntos de P forman una línea horizontal (los giramos un poco de ser necesario). Para 1, sólo hay que reemplazar a cada punto de P por una progresión (a, ε) . Para 2, sólo hay que agregar un punto a la izquierda de P lo suficientemente lejos, y otro a la derecha también muy lejos, y entonces todas las líneas medianas de P son líneas medianas del nuevo conjunto. □

Y con todo lo anterior podemos por fin demostrar la cota para líneas medianas.

Teorema 1.1 (Tóth 1999). *Para toda $n > 2$, existe un conjunto P de n puntos en \mathbb{R}^2 que tiene al menos $ne^{\Omega(\sqrt{\log n})}$ líneas medianas.*

Demostración. Por el lema 1.2 sabemos que la cota se cumple si n es de la forma $2 \cdot 6^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)}$. En particular se cumple si $i = 0$:

$$n = 2 \cdot 6^i \cdot 8^{1+2+\dots+(i-1)} = 2 \cdot 6^0 \cdot 8^0 = 2.$$

Y por el teorema anterior (1.3), también se cumple para cualquier otra $n > 2$. \square
 Por último, extendemos la cota a k -conjuntos en general.

Teorema 1.2 (Tóth 1999). *Para toda $n > 2$, existe un conjunto P de n puntos en \mathbb{R}^2 que tiene al menos $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ k -conjuntos, para cualquier $n \geq 2k > 0$.*

Demostración. Sea $m = \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$, y sea $m' = n - 2km$. Sean X_1, X_2, \dots, X_m los vértices de un n -ágono regular circunscrito al círculo unitario y con centro C . Sea $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos y sean $X_i(\varepsilon)$ la ε -vecindad de X_i ($i = 1, 2, \dots, m$), y $C(\varepsilon)$ la ε -vecindad de C .

Por el Teorema 1.1, existe un conjunto S de $2k$ puntos con $2ke^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ líneas medianas. Para cada $1 \leq i \leq m$ aplicamos una transformación afín (o sea, que preserve colinearidad) A_i a S de tal forma que $A_i(S) = S_i \subset X_i(\varepsilon)$, y que para cada línea ℓ de S_i , todas las vecindades $X_j(\varepsilon)$ ($1 \leq j \leq m, j \neq i$), estén en el mismo lado de ℓ (como si "apachurráramos" las líneas). Por último, definimos S' como un conjunto con m' puntos en $C(\varepsilon)$.

El conjunto $T = S' \cup_{i=1}^m S_i$ tiene $m2k + m'$ puntos y $m2ke^{\Omega(\sqrt{\log k})} = ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$ k -conjuntos (ver Figura 1.9). \square

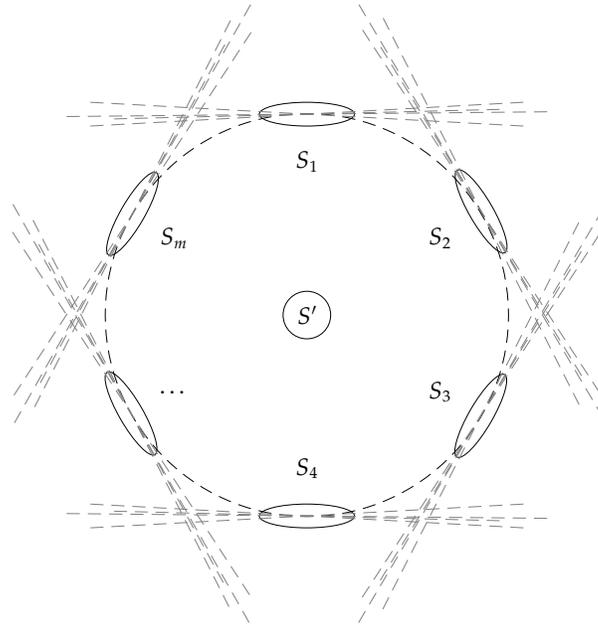


Figura 1.9: Construcción de un conjunto de puntos con muchos k -conjuntos a partir de m conjuntos de puntos con muchas líneas medianas.

1.2.2. Cota superior para k -conjuntos

La mejor cota superior conocida para k -conjuntos es un resultado de Tamal Dey de 1998 [17], y es una demostración sorprendentemente sencilla y elegante. Para hacerla vamos a necesitar un par de resultados. El primero es de Miklos Ajtai, Vašek Chvátal, Monroe Newborn y Endre Szemerédi de 1982 [9], y es conocido como el Lema de Cruces (*Crossing Lemma*).

Lema 1.4 (Lema de Cruces). *Sea $G = (V, E)$ una gráfica, con $|V| = n$ y $|E| = e$. Si $e > 4n$, entonces el número de cruces $\chi(G)$ de G es*

$$\chi(G) = \Omega\left(\frac{e^3}{n^2}\right).$$

Demostración. Como cada cruce puede eliminarse si quitamos una arista, siempre podemos construir una gráfica plana (sin cruces) con $e - \chi(G)$ aristas y n vértices a partir de G . Por la fórmula (o característica) de Euler sabemos que una gráfica plana tiene a lo más $3n - 6$ aristas, y de ahí se sigue trivialmente que $e - \chi(G) \leq 3n$:

$$e - \chi(G) \leq 3n - 6 \Rightarrow e - \chi(G) \leq 3n. \quad (1.3)$$

Vamos a construir $G' = (V', E')$, con $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ de la siguiente manera: para todo vértice $v \in V$ lo vamos a agregar a V' con probabilidad p , y una arista uv estará en E' si y sólo si u y v están en V' . Por lo tanto, $|V'| = pn$, $|E'| = p^2e$ (porque por cada arista se toman en cuenta las probabilidades de que estén *dos* vértices), y $\chi(G') = p^4\chi(G)$ (porque se toman en cuenta las probabilidades de que estén *dos* aristas que originalmente se cruzaban en G , con *dos* vértices cada una).

Por lo tanto, $p^4\chi(G) > p^2e - 3pn$ (por la ecuación 1.3), lo que implica que $\chi(G) > \frac{e}{p^2} - \frac{3n}{p^3}$. Si tomamos $p = \frac{4n}{e}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(G) &> \frac{e}{(4n/e)^2} - \frac{3n}{(4n/e)^3} &= \\ &= \frac{e}{16n^2/e^2} - \frac{3n}{64n^3/e^3} &= \\ &= \frac{e^3}{16n^2} - \frac{3ne^3}{64n^3} &= \\ &= \frac{e^3}{16n^2} - \frac{3e^3}{64n^2} &= \\ &= \frac{4e^3 - 3e^3}{64n^2} &= \\ &= \frac{e^3}{64n^2}. \end{aligned}$$

Lo cual por supuesto sólo puede ocurrir si se cumple la restricción de que $e > 4n$; de otra manera $p = \frac{4n}{e}$ no es una probabilidad. \square

El segundo resultado se conoce como la propiedad alternante local (*local alternation property*), es de Lóvasz y aparece en [27].

Lema 1.5 (Propiedad alternante local). Sea P un conjunto de puntos en posición general en \mathbb{R}^2 , y sea $G_k = (P, E_k)$ la gráfica definida de la siguiente manera: $\vec{pq} \in E_k$ si y sólo si \vec{pq} es una k -arista de P . Para toda arista $e \in E_k$ definimos $l(e)$ al punto más a la izquierda de e , $r(e)$ al punto más a la derecha, y $s(e)$ como la pendiente de e (con una rotación adecuada siempre podemos evitar que haya dos puntos con la misma coordenada x , y por lo tanto que no haya aristas verticales).

Sean a y b dos aristas de E_k tales que inciden al mismo punto p y donde $s(b) > s(a)$. Entonces existe una arista c saliente de p tal que $s(b) > s(c) > s(a)$. Análogamente, sean c y d dos aristas salientes de p tales que $s(d) > s(c)$. Entonces existe una arista b entrante a p tal que $s(d) > s(b) > s(c)$ (ver Figura 1.10).

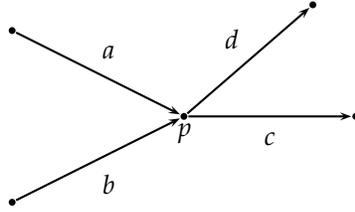


Figura 1.10: Propiedad de Lóvasz: $s(b) > s(c) > s(a)$ y $s(d) > s(b) > s(c)$.

Demostración. Sean a y b dos aristas entrantes a un punto p tales que $s(b) > s(a)$. Tomemos la línea que pasa por b y comencemos a girarla sobre p en el sentido de las manecillas del reloj; al inicio (cuando la línea está sobre b exactamente), hay k puntos arriba de ella y $n - k - 2$ debajo (porque b es una k -arista). Cuando comenzamos a girar la línea, el punto a la izquierda de p con el que se forma la arista b queda debajo de la línea, y entonces quedan k puntos arriba, y $n - k - 1$ abajo (ver Figura 1.11(a)). Cualquier punto a la izquierda de p que la línea cruce sólo puede hacer que el número de puntos debajo de la línea aumente en uno y que el número de puntos arriba disminuya en uno.

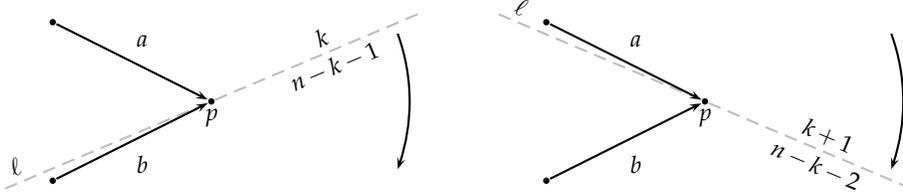
Pero cuando la línea se empalma con a vuelve a ocurrir que hay k arriba de ella y $n - k - 2$ debajo; y más aún: inmediatamente antes de que la línea esté exactamente sobre a , ocurre que hay $k + 1$ puntos arriba de ella, y $n - k - 2$ puntos debajo (ver Figura 1.11(b)).

Todo esto quiere decir que algún momento al girar entre b y a , la línea encuentra un punto q a la derecha de p tal que al estar exactamente sobre p y q , hay k puntos arriba de ella y $n - k - 2$ puntos debajo, lo que quiere decir que \vec{pq} es una k -arista, y es la arista c que buscábamos (ver Figura 1.11(c)).

La demostración para dos aristas salientes de p es análoga. □

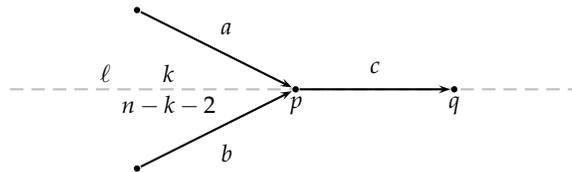
Con el Lema de Cruces y la propiedad de Lóvasz ya podemos demostrar la cota superior de Dey. Para hacerlo, vamos a definir lo que son cadenas convexas, y a demostrar algunas propiedades de ellas.

Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos



(a) Cuando ℓ comienza a girar sobre p , hay k puntos arriba de ella y $n - k - 1$ debajo.

(b) Justo antes de que ℓ se empalme con a , hay $k + 1$ puntos arriba de ella y $n - k - 2$ debajo.



(c) Por lo tanto, existe una k -arista c saliente de p tal que $s(b) > s(c) > s(a)$.

Figura 1.11: Demostración de la propiedad de Lóvasz.

Definición 1.10 (Relación R). Sea R la siguiente relación sobre las aristas de E_k : diremos que $a \in E_k$ se relaciona con $b \in E_k$ (aRb) si a es entrante al punto del cual b es saliente, si $s(a) > s(b)$, y si no existe $c \in E_k$ tal que $s(a) > s(c) > s(b)$.

La Figura 1.12 nos muestra un ejemplo de dos aristas relacionadas con R .

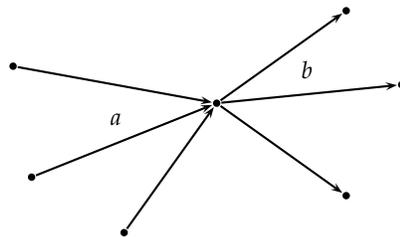


Figura 1.12: Ejemplo donde se cumple que aRb .

Lema 1.6. No existe una arista c tal que aRc y bRc donde $a \neq b$.

Demostración. Supongamos que tal c existe. Por definición de R tenemos que $s(a) > s(c)$ y que $s(b) > s(c)$, y sin perder generalidad supongamos que $s(a) > s(b)$. Por la propiedad alternante local existe c' donde $s(a) > s(c') > s(b)$, y entonces $s(a) > s(c') > s(b) > s(c)$. Pero esto contradice que aRc ; por lo tanto, no existe tal c . \square

Gracias al lema anterior podemos extender R a una relación de equivalencia.

Definición 1.11 (Cadenas convexas). Sea R^* la cerradura reflexiva, simétrica y transitiva de R ; en otras palabras:

- $R \subseteq R^*$ ($aRb \Rightarrow aR^*b$),
- $(a, a) \in R^*$ para toda $a \in E_k$ ($aR^*a \forall a \in E_k$),
- si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R^*$ ($aRb \Rightarrow bR^*a$), y
- si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R^*$ (aRb y $bRc \Rightarrow aR^*c$).

R^* nos genera una partición en clases de equivalencia de E_k , y a cada una de esas clases le vamos a llamar una *cadena convexa* de E_k .

Cada cadena convexa es una secuencia de aristas dirigidas, que no se enciman (por el lema 1.6) y que van de izquierda a derecha de forma convexa, ya que por la definición de R sólo giran a la derecha en cada punto. Ahora demostraremos que a lo más existen $k + 1$ de estas cadenas.

Lema 1.7. Sean C_1, \dots, C_j las cadenas convexas obtenidas por la partición de E_k con R^* . Cada cadena C_i tiene un único punto inicial, y este punto es uno de los $k + 1$ puntos más a la izquierda de P .

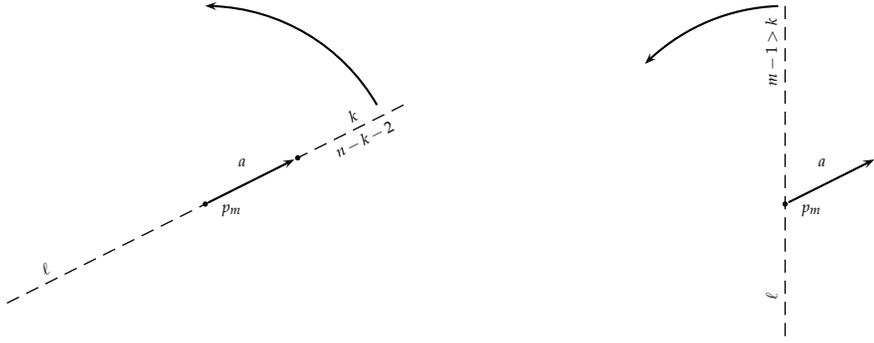
Demostración. Sea p_m el punto más a la izquierda de la cadena convexa C_i , y vamos a suponer que p_m es el m -ésimo punto de izquierda a derecha de P , y que $m > k + 1$. Sea a la arista tal que $l(a) = p_m$; como p_m es el punto inicial de C_i , entonces no existe una arista b tal que $r(b) = p_m$ y $s(b) > s(a)$.

Vamos a girar sobre p_m la línea que pasa por a en contra de las manecillas del reloj: al inicio esta línea tiene k puntos a su izquierda (Figura 1.13(a)), y cuando se vuelve vertical tiene exactamente $m - 1 > k$ puntos (porque p_m es el m -ésimo punto de izquierda a derecha de P y $m > k + 1$; ver Figura 1.13(b)). Esto quiere decir que la línea en algún momento tiene que pasar al menos por un punto a la izquierda (y abajo, por cómo gira) de p_m , ya que es la única manera en que aumenta la cantidad de puntos a su izquierda (si pasa por un punto a la derecha de p_m , el número de puntos a su izquierda disminuye).

Sea q el primer punto a la izquierda de p_m que cuando la línea lo pasa, quedan $k + 1$ a su izquierda: como comenzamos con k puntos a la izquierda de la línea cuando está sobre a , y terminamos con $m - 1 > k$ puntos cuando es vertical, y el número de puntos cambia

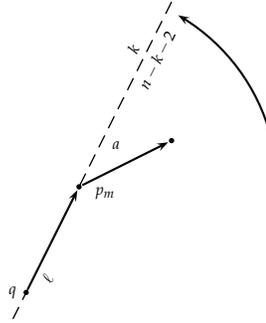
Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos

de uno en uno, de ahí se sigue que existe un punto que al pasarlo la línea quedan $k + 1$ puntos a su izquierda. Y por lo que dijimos en el párrafo anterior, q está a la izquierda y abajo de p_m (Figura 1.13(c)).



(a) La línea ℓ tiene k puntos arriba de ella cuando se empalma con a .

(b) La línea ℓ tiene $m - 1 > k$ puntos a la izquierda de ella cuando es vertical.



(c) Por tanto existe q a la izquierda y abajo de p_m tal que cuando ℓ pasa por q y p_m , tiene k puntos arriba.

Figura 1.13: Las cadenas C_i comienzan en uno de los primeros $k + 1$ puntos de P de izquierda a derecha.

Pero entonces cuando la línea está sobre q y p_m , hay exactamente k puntos a la izquierda de ella, y por lo tanto $\overrightarrow{qp_m}$ es una k -arista. Más aún: por cómo gira la línea, $s(\overrightarrow{qp_m}) > s(a)$, pero esto es una contradicción a que p_m fuera el punto inicial de la cadena convexa. Por lo tanto, m no puede ser mayor que $k + 1$, y entonces todas las cadenas C_i tienen su punto inicial en alguno de los primeros $k + 1$ puntos de izquierda a derecha de P .

Ahora, supongamos que C_i y C_j tienen un punto inicial en común p . Como no se enciman las cadenas (por ser particiones de las aristas generadas por una relación de equivalencia), entonces de p salen dos aristas a y b (sin pérdida de generalidad supongamos que $s(a) > s(b)$); pero entonces, por la propiedad alternante local, existe una arista c entrante a p tal que $s(a) > s(c) > s(b)$.

Pero entonces $l(c)$ debería ser el punto inicial de la cadena que se supone su primera arista es b ; por lo tanto no es posible que C_i y C_j tengan un punto inicial común.

Como todas las cadenas convexas tienen su punto inicial en alguno de los primeros $k + 1$ puntos de izquierda a derecha de P , y todas las cadenas tienen un punto inicial único, entonces hay a lo más $k + 1$ cadenas convexas en total. \square

Ahora queremos utilizar el Lema de Cruces para obtener la nueva cota; para eso, vamos a definir lo que es una *tangente común* a dos cadenas convexas C_i y C_j .

Definición 1.12 (Tangentes comunes). Dadas un par de cadenas convexas C_i y C_j , definimos una *tangente común* T entre ellas de la siguiente manera: T es un segmento de recta entre dos vértices, uno en C_i y otro en C_j , y de tal manera que ambas cadenas quedan debajo de la línea que pasa por T (ver Figura 1.14).

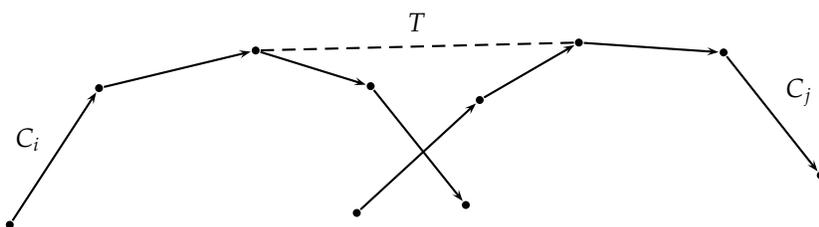


Figura 1.14: Tangente común.

A cada cruce entre dos k -aristas podemos asignarle una tangente común T entre las cadenas que las contengan: sólo hay que imaginar el casco superior convexo de los puntos en C_i y C_j , y trazar la línea vertical que pase por el cruce entre las aristas; esta línea interseca un único segmento del casco superior convexo, y este segmento es nuestra tangente común T . Esto ocurre para cuantos cruces pueda haber entre C_i y C_j , y es obvio que dos cruces de dos cadenas no pueden compartir la misma tangente común (ver Figura 1.15).

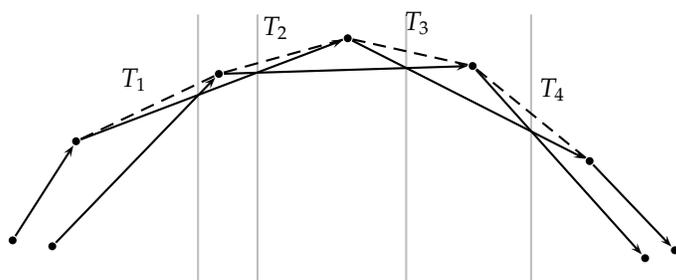


Figura 1.15: Tangentes comunes para cruces de dos cadenas convexas.

Ahora vamos a demostrar que dos cruces de dos pares de cadenas tampoco pueden compartir una misma tangente común.

Capítulo 1. Definiciones y conceptos básicos

Lema 1.8. *Cada tangente común es única para cada cruce entre todos los pares de cadenas.*

Demostración. Supongamos que existe una tangente T común a dos cruces en dos pares de cadenas convexas, digamos C_{i_1} y C_{j_1} , y C_{i_2} y C_{j_2} . Sea p un vértice de T tal que no sea punto extremo de ninguna de las cadenas; p debe existir porque por el lema 1.7 todas las cadenas tienen puntos iniciales distintos.

Sean a_{i_1} y b_{i_1} las aristas de C_{i_1} entrante y saliente a p , respectivamente, y vamos a fijarnos en la arista b_{i_2} de C_{i_2} saliente de p (ver Figura 1.16). Ya que T es tangente a C_{i_1} y a C_{i_2} , se cumple o bien que $s(a_{i_1}) > s(b_{i_2}) > s(b_{i_1})$, o bien que $s(a_{i_1}) > s(b_{i_1}) > s(b_{i_2})$.

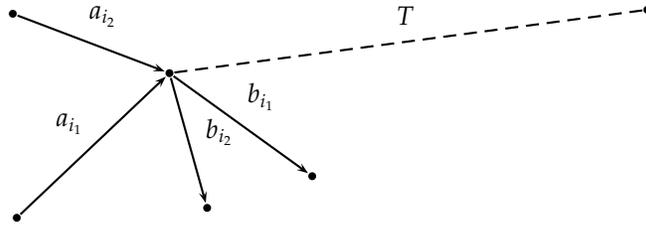


Figura 1.16: Si T fuera tangente común a dos pares de cadenas convexas que se intersectan, entonces no se podría cumplir la propiedad alternante local.

Lo primero no es posible porque $a_{i_1} R b_{i_1}$. Para que ocurriera lo segundo debería existir una arista b_{i_2} entrante a p en C_{i_2} tal que $s(b_{i_1}) > s(a_{i_2}) > s(b_{i_2})$ por la propiedad alternante local. Sin embargo, si eso ocurriera T no podría ser tangente a C_{i_2} , y por lo tanto T no puede existir. \square

Ahora vamos a contar el número de cruces que podemos contar con tangentes comunes a ellos.

Lema 1.9. *Hay a lo más $n(k + 1)$ tangentes comunes asignadas a cruces entre cadenas convexas.*

Demostración. Cada vértice de G_k ocurre a lo más en el extremo izquierdo de una tangente para cada cadena convexa que no contenga a p . Como hay a lo más $k + 1$ cadenas convexas, se sigue que a lo más hay $n(k + 1)$ tangentes comunes. \square

Y ya con este último lema podemos terminar la demostración de Dey.

Teorema 1.3 (Dey 1998). *Cualquier conjunto P de n puntos en \mathbb{R}^2 tiene a lo más $O(n\sqrt[3]{k+2})$ $(k + 1)$ -conjuntos si $k \leq \frac{n}{2}$.*

Demostración. Cada cruce entre dos k -aristas es un cruce entre las dos cadenas convexas que contienen a dichas aristas. Por los lemas 1.8 y 1.9, este número de cruces no puede ser mayor a $n(k + 1)$. Sea t el número de k -aristas; si ocurre que $t > 4n$, entonces (por

el Lema de Cruces) debe haber al menos $\Omega\left(\frac{t^3}{n^2}\right)$ pares de k -aristas intersecándose. Esto quiere decir que $c\frac{t^3}{n^2} < n(k+1)$, y usando simple aritmética:

$$\begin{aligned}c\frac{t^3}{n^2} &< n(k+1) &\Rightarrow \\ct^3 &< n^3(k+1) &\Rightarrow \\c't &< n\sqrt[3]{k+1} &\Rightarrow \\c't &< n\sqrt[3]{k+2}.\end{aligned}$$

Como en el peor caso el número de k -conjuntos no es mayor a $2t$, el resultado se sigue. \square

Capítulo 2

Matroides orientados de rango 3

Antes de ver las herramientas principales que utilizaremos en este trabajo (las sucesiones permisibles), vamos a estudiar, sin profundizar demasiado en el tema, los matroides orientados de rango 3 y algunos conceptos relacionados. Quedará claro por qué hacemos esto más adelante; baste ahora por decir que, para motivos prácticos, las sucesiones permisibles y los matroides orientados de rango 3 son la misma cosa.

2.1. Matroides y matroides orientados

El tema de matroides y matroides orientados es extenso y profundo, y tiene multitud de aplicaciones en muy distintas ramas de las matemáticas. A nosotros en particular nos van a interesar los matroides orientados de rango 3, y los conceptos necesarios para entender la demostración de un teorema de Goodman y Pollack [23] que veremos cerca del final del capítulo.

2.1.1. Matroides

Una de las muchas formas de ver a los matroides es como objetos matemáticos que abstraen el concepto de independencia.

Definición 2.1 (Matroides). Sea E un conjunto finito e I una colección de subconjuntos (llamados *independientes*) de E que cumplen las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío es independiente.
2. Todo subconjunto de un conjunto independiente es a su vez independiente.
3. Si A y B son independientes y $|A| > |B|$, entonces existe $a \in A$ con $a \notin B$ tal que $B \cup \{a\}$ es independiente.

Capítulo 2. Matroides orientados de rango 3

Llamaremos a $M = (E, I)$ un *matroide finito*.

La noción de independencia puede definirse de varias formas, pero en particular viene del Álgebra Lineal y espacios vectoriales, donde una familia de vectores es *linealmente independiente* si ninguno de ellos puede escribirse como una combinación lineal finita de los demás. De hecho por eso se llaman *matroides*: dada una matriz A podemos construir fácilmente un matroide si E es el conjunto de columnas de A . Del Álgebra Lineal también viene el concepto de *base*:

Definición 2.2 (Bases). Sea M un matroide. Un subconjunto no independiente de E es llamado *dependiente*. A un subconjunto independiente de E lo vamos a llamar *maximal* si se vuelve dependiente al momento de agregarle cualquier otro elemento de E .

Llamaremos una *base* de M a todo subconjunto independiente maximal de E .

Por la propiedad 3 del conjunto I , se sigue que todas las bases M tienen la misma cardinalidad, que será lo que llamaremos su *rango*:

Definición 2.3 (Rangos). Llamaremos la *función de rango* de un matroide $M = (E, I)$ a la función $\rho_M : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\rho_M(A) = \max\{|X| : X \subseteq A \text{ y } X \in I\}.$$

El rango de M , denotado por $\rho(M)$, es $\rho_M(E)$.

O en otras palabras, $\rho(M)$ es la cardinalidad de alguna de las bases de M , que todas tienen la misma cardinalidad.

Entre muchas otras cosas, lo interesante de los matroides es que se pueden definir de muy variadas formas; los matroides abstraen conceptos de varias ramas de las matemáticas que (aparentemente) no tienen mucho que ver, y los unifican en una sola teoría consistente.

Un ejemplo de esto son los *circuitos* de un matroide, que definiremos de la siguiente manera:

Definición 2.4 (Circuitos). Un subconjunto **dependiente** de E le diremos *minimal* si se vuelve independiente al momento de quitarle cualquiera de sus elementos. A todos los subconjuntos dependientes minimales les llamaremos *circuitos*.

Aunque es de alguna manera similar a la definición de bases, los circuitos no tienen ningún concepto equivalente en Álgebra Lineal; la noción viene de Teoría de Gráficas. Dada una gráfica finita $G = (V, E)$ podemos definir un matroide a partir de su conjunto de aristas E de la siguiente manera: diremos que una familia de aristas es independiente si y sólo si dicha familia no contiene un ciclo de G . Los ciclos de G son los circuitos del matroide M que construimos con ella.

Los conjuntos dependientes, las bases y los circuitos de un matroide lo caracterizan completamente. Para conocer a un matroide sólo necesitamos E y sus conjuntos independientes (por definición); pero también nos bastan E y sus conjuntos dependientes, o E y sus bases, o E y sus circuitos.

Antes de ver matroides orientados, veremos un ejemplo más de cómo definir a un matroide. La primera definición que dimos es una generalización de configuraciones de vectores; dado un conjunto E finito de vectores que generen un espacio vectorial de dimensión r sobre algún campo, obtenemos nuestro matroide usando el concepto de independencia normal para espacios vectoriales: un conjunto de vectores es independiente si ninguno de ellos puede escribirse como alguna combinación lineal de los demás.

Otra forma de definir matroides es usando arreglos de hiperplanos reales, y de hecho es la definición que nos va a interesar, veremos porqué más adelante. Sea $E = \{H_1, \dots, H_n\}$ un *arreglo de hiperplanos reales*, esto es, un conjunto finito de hiperplanos que pasan por el origen de \mathbb{R}^r . Como cada hiperplano H_i pasa por el origen, entonces H_i está definido por una función lineal $\ell_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r a_{ij}x_j$, así que podemos escribir $H_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \ell_i(\mathbf{x}) = 0\}$. Y entonces sencillamente interpretamos las ℓ_i como vectores en el espacio dual $(\mathbb{R}^r)^*$, con lo que las ℓ_i forman una configuración de vectores en $(\mathbb{R}^r)^*$, que determinan un matroide exactamente igual a como dijimos antes.

2.1.2. Matroides orientados

Vamos a definir a los matroides orientados; pero veamos un ejemplo utilizando Teoría de Gráficas antes de hacerlo formalmente. Sea $G = (V, E)$ la gráfica dirigida de la Figura 2.1.

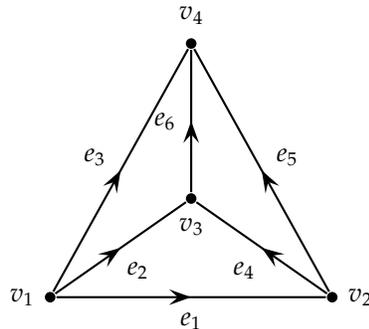


Figura 2.1: Gráfica dirigida G .

Hay que notar que G no tiene ciclos dirigidos; esto es importante. Vamos a considerar todos los ciclos no dirigidos de G . Si orientamos al ciclo $X = \{e_1, e_2, e_6, e_5\}$ en la dirección de las manecillas del reloj, entonces X tiene dos elementos “positivos” ($\{e_2, e_6\}$), y dos “negativos” ($\{e_1, e_5\}$). A X le vamos a llamar un *circuito con signo*, y lo denotaremos $X = (X^+, X^-)$, donde X^+ son sus elementos positivos y X^- los negativos. Si orientamos de

Capítulo 2. Matroides orientados de rango 3

forma inversa X , evidentemente X^+ y X^- se invierten; al inverso de X lo denotaremos como $-X$.

Definimos al conjunto C como al conjunto de todos los circuitos con signo de G .

$$C := \{X = (X^+, X^-) : X \text{ es un circuito con signo de } G\}.$$

Sin mucha sorpresa definiremos a un *matroide orientado* M como el par (E, C) .

Dado un conjunto con signo $X \subset E$, podemos definir $\underline{X} = X^+ \cup X^-$ como el *conjunto subyacente* del conjunto con signo X . De igual forma, definimos \underline{C} como los *circuitos subyacentes* de los circuitos con signo C , y a $\underline{M} = (E, \underline{C})$ como el *matroide subyacente* del matroide orientado M .

Formalmente:

Definición 2.5 (Matroides orientados). Sea E un conjunto finito. Una colección C de subconjuntos con signo de E es el conjunto de *circuitos con signo* de un *matroide orientado* sobre E si y sólo si satisface lo siguiente:

1. $\emptyset \notin C$.
2. $C = -C$.
3. Para toda $X, Y \in C$, si $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$, entonces $X = Y$ o $X = -Y$ o $-X = Y$.
4. Para toda $X, Y \in C$ con $X \neq -Y$ y $e \in X^+ \cap Y^-$ existe una $Z \in C$ tal que
 - $Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\}$, y
 - $Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$.

Por supuesto la definición es general a cualquiera que sea el tipo del matroide subyacente de M ; vimos un ejemplo utilizando una gráfica dirigida, pero de igual forma hay equivalentes de matroides orientados para las distintas formas de definir matroides que hemos revisado.

En particular, un arreglo de hiperplanos reales se puede orientar trivialmente; un hiperplano H_i divide al espacio de dimensión r en dos semiespacios. Si definimos a uno de ellos como el "positivo" y al otro como el "negativo", y hacemos lo mismo para todos los hiperplanos de nuestro arreglo, con eso estamos dándole una orientación.

Es importante señalar que aunque todo matroide orientado tiene un matroide no orientado subyacente (que en cierto sentido es el mismo ignorando la orientación), no es cierto que todo matroide *no* orientado pueda orientarse. Más aún, *determinar* si se puede o no orientar un matroide es **NP-Completo** (una demostración del hecho se puede consultar en [30]).

A nosotros en particular nos interesan los matroides orientados de rango 3, *especialmente* los definidos con arreglos de hiperplanos. Pero antes de ver eso, veremos lo que son las familias de pseudolíneas.

2.2. Arreglos de pseudolíneas

Aunque en casos muy particulares parece haber ciertas diferencias entre autores en cómo definir a los arreglos o familias de pseudolíneas, en lo general la mayoría los definen (informalmente, claro) como conjuntos de curvas simples que se comportan “más o menos” como líneas rectas, pero sin serlo necesariamente.

El “más o menos” depende del autor y del problema a tratar, pero por lo general se pide lo siguiente:

- que cada pseudolínea divida al plano en dos regiones, y
- que cada dos pseudolíneas se intersequen *a lo más* en un punto.

A veces se requieren más cosas, como que cada dos pseudolíneas se intersequen (evitando “paralelismos”), o que todas las pseudolíneas intersequen a una “pseudolínea al infinito” (que varios autores suelen representar como un círculo que envuelve a todas las intersecciones entre pseudolíneas “normales”); pero éstas y otras restricciones no son necesariamente obligatorias, dependiendo del problema que se esté atacando.

Nosotros en particular utilizaremos la siguiente definición:

Definición 2.6 (Arreglos de pseudolíneas). Un *arreglo de pseudolíneas* será un conjunto L de curvas simples en \mathbb{R}^2 que cumplen las siguientes características:

- Para toda $\ell \in L$, ℓ divide a \mathbb{R}^2 en exactamente dos regiones.
- Para cada par $\ell_i, \ell_j \in L$, se cumple que ℓ_i y ℓ_j se intersecan en *exactamente* un punto.

Esta definición (y todas las demás, de hecho) de arreglos de pseudolíneas permiten que en particular los elementos de L puedan ser líneas rectas. Podemos ver un ejemplo de una familia de pseudolíneas en la Figura 2.2.

Si un conjunto de puntos P es tal que dada una familia de pseudolíneas L , cada $\ell \in L$ pasa por exactamente dos puntos $p, q \in P$, diremos que P es un *conjunto* o una *configuración generalizada de puntos*.

La definición y manejo de arreglos de pseudolíneas a veces tienen más sentido si se trabaja en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 en lugar del plano afín \mathbb{R}^2 . Sin embargo, para lo que *nosotros* necesitaremos vamos a evitarnos el uso del plano proyectivo y de la línea (o pseudolínea) al infinito.

El primero en utilizar el término “pseudolínea” (en alemán *pseudogerade*) fue Friedrich Wilhelm Levi en 1926 (apareció en [25]), y fue él también el que demostró el Lema de Agrandamiento de Levi, que vamos a enunciar pero no a demostrar.

Lema 2.1 (Agrandamiento de Levi). *Sea L un arreglo de pseudolíneas y $x, y \in \mathbb{R}^2$ dos puntos que no pertenecen a una única pseudolínea. Entonces existe una pseudolínea ℓ que pasa por x y y y que interseca cada pseudolínea de L en exactamente un punto. En otras palabras, existe un*

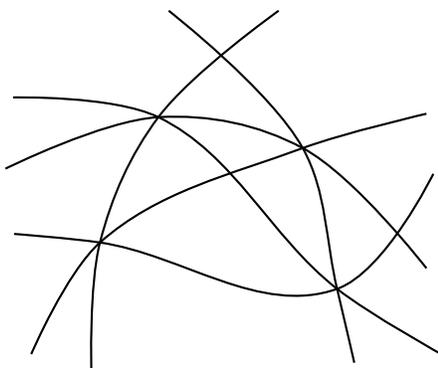


Figura 2.2: Arreglo de seis pseudolíneas.

arreglo **agrandado** de pseudolíneas $L' = L \cup \{\ell\}$ tal que $x, y \in \ell$. Más aún, podemos escoger ℓ de tal forma que $\ell \setminus \{x, y\}$ no contenga ninguna intersección de las pseudolíneas de L .

Lo que dice el Lema de Aumentamiento de Levi es que dado un arreglo de pseudolíneas, siempre podemos agrandarlo con una pseudolínea más, y seguirá cumpliendo con las restricciones necesarias para ser un arreglo de pseudolíneas. Es importante hacer notar que el Lema de Aumentamiento de Levi *no* funciona en dimensiones superiores.

La principal motivación para estudiar familias de pseudolíneas es que varios matemáticos se percataron de que muchos resultados en Geometría sobre familias de líneas rectas no utilizaban *para nada* el hecho de que las líneas fueran rectas. Y ciertamente muchos resultados de familias de pseudolíneas se aplican a familias de líneas, pero lamentablemente no a todos. Si así fuera, tendríamos entonces una manera de convertir cualquier familia de pseudolíneas en una familia de líneas rectas; podríamos estirar las pseudolíneas hasta “enderezarlas” (*rectificarlas*) de alguna forma.

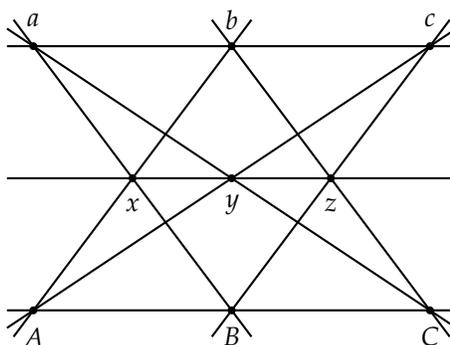


Figura 2.3: Teorema de Pappus.

El Teorema de Pappus (también conocido como el Teorema del Hexágono de Pappus)

dice que si tres puntos $a, b, y c$ son colineales, y otros tres puntos $A, B, y C$ también son colineales, entonces los puntos $x, y y z$ de intersección de las líneas $aB, aC, bA, bC, cA y cB$ también son colineales (ver Figura 2.3).

Utilizando un ejemplo basado en el Teorema de Pappus, podemos construir fácilmente un arreglo de pseudolíneas que no sea rectificable; se muestra en la Figura 2.4.

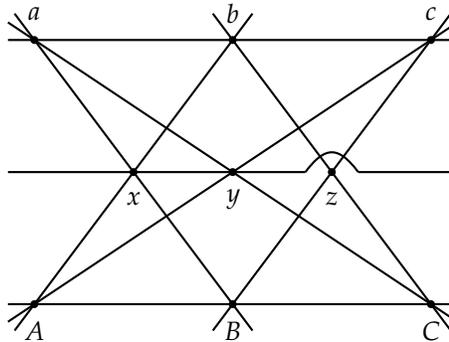


Figura 2.4: Familia de pseudolíneas no rectificable.

Por lo tanto, no podremos rectificar siempre nuestros arreglos de pseudolíneas. Sin embargo esto no evitó que se buscaran formas más “agradables” de mostrarlos, y una de las representaciones más útiles que se encontraron fueron los *diagramas de cables* de Goodman en 1980.

La idea de los diagramas de cables es bastante sencilla: primero convertimos todas nuestras pseudolíneas en segmentos de recta y rayos (dos rayos por cada pseudolínea), y después vamos manipulando estos segmentos y rayos para que el diagrama parezca un cableado. De la Figura 2.6(a) a la Figura 2.6(i) se puede apreciar el proceso a través del cual convertimos nuestro ejemplo de una familia de pseudolíneas a un diagrama de cables.

Hay que notar que dado que nuestras pseudolíneas se intersecan entre sí *exactamente* una vez, el orden vertical de las mismas se invierte (ver Figura 2.5).

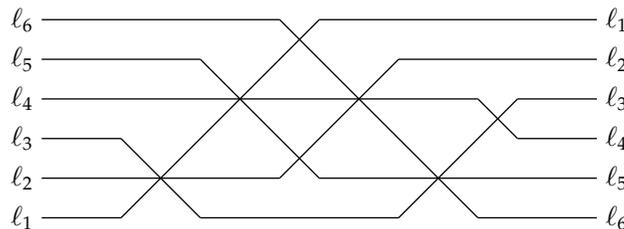


Figura 2.5: Inversión del orden vertical en un diagrama de cables.

Capítulo 2. Matroides orientados de rango 3

Los diagramas de cables son en general mucho más cómodos para trabajar que los arreglos de pseudolíneas, así que nos gustaría poder garantizar que podemos tomar *cualquier* familia de pseudolíneas (por retorcida que ésta sea), y convertirla en un diagrama de cables. Por suerte, *justamente* eso es lo que nos dice el Teorema de Goodman y Pollack, que es lo siguiente que veremos.

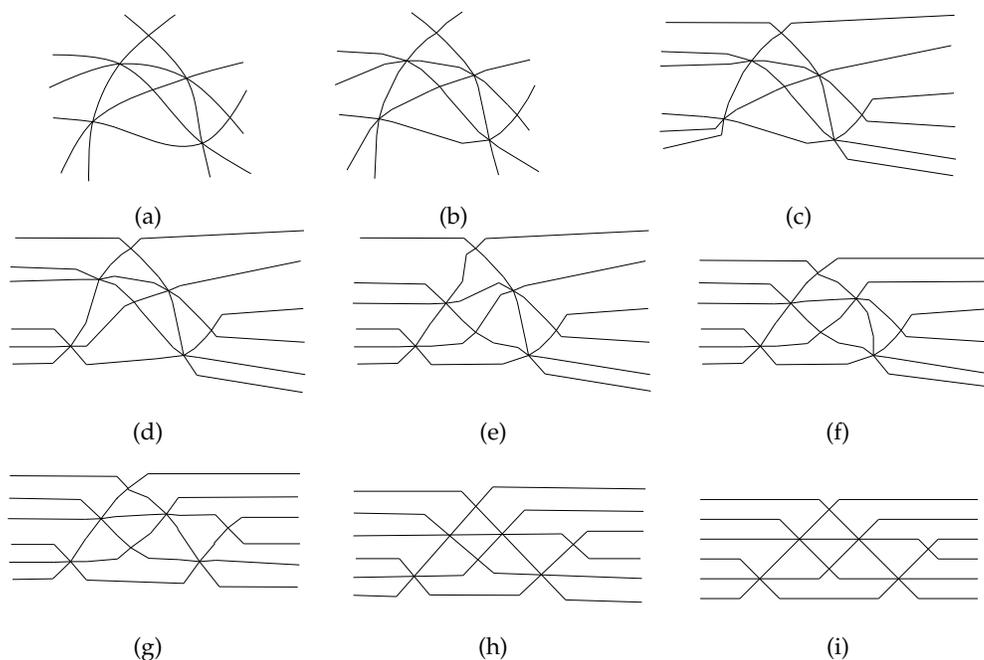


Figura 2.6: Conversión de una familia de pseudolíneas a un diagrama de cables.

2.3. El Teorema de Goodman y Pollack

Vamos a ver la demostración de un teorema de Goodman y Pollack, publicado en [23] y usando la demostración que aparece en [13]. El resultado además será necesario en el siguiente capítulo.

Teorema 2.1 (Goodman y Pollack 1984). *Todo arreglo de pseudolíneas es isomorfo a un diagrama de cables.*

Demostración. Aunque basada en [13] la demostración que daremos es algo más simple, porque no quisimos utilizar el plano proyectivo \mathbb{P}^2 ; la demostración del libro sí lo utiliza.

Sea L nuestro arreglo de n pseudolíneas. Como es finito, las pseudolíneas de L se intersecan en un área acotada, que llamaremos área de intersección. Fuera del área de

intersección se extienden al infinito en varias direcciones sin volverse a intersecar nunca. Podemos manipular las pseudolíneas para que se extiendan a la izquierda y derecha del área de intersección; como cada pseudolínea interseca a otra exactamente una vez, las n pseudolíneas llegarían por la izquierda, se intersecarían en el área de intersección, y se alejarían por la derecha (ver Figura 2.7). También manipularemos las pseudolíneas para que dos intersecciones no se alineen verticalmente

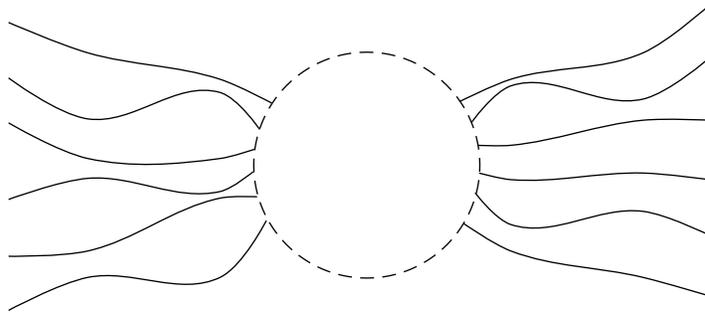


Figura 2.7: Área de intersección de la familia de pseudolíneas L .

Por el Lema de Agrandamiento de Levi, podemos agregar una pseudolínea ℓ a L que interseque a todas las demás, y que pase por dos puntos x y y de nuestra elección. Elegiremos a x muy arriba del área de intersección, y y como la primera intersección de izquierda a derecha entre las pseudolíneas originales de L . Como podemos además elegir ℓ de tal forma que no contenga otra intersección de las pseudolíneas de L , utilizamos eso para que y sea el único punto de ℓ que contenga una intersección en el área de intersección (ver Figura 2.8).

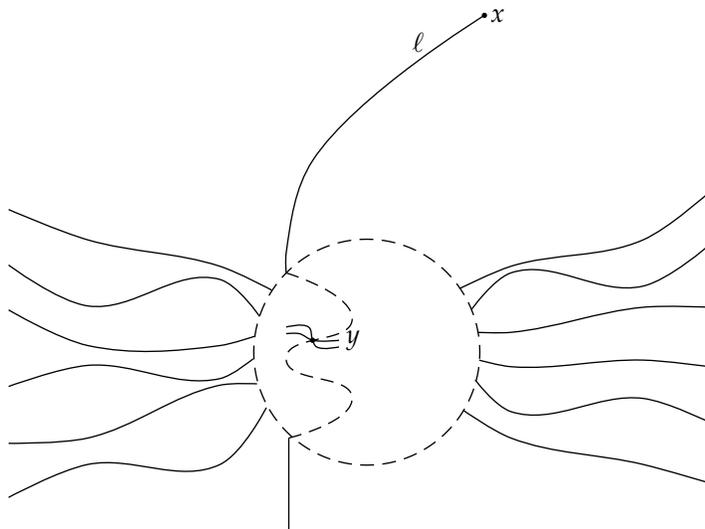


Figura 2.8: Pseudolínea ℓ que agranda L .

De nuevo, como ℓ interseca a todas las pseudolíneas de L , y viene por arriba del área de intersección, entonces tiene que alejarse por debajo de ella. Repetimos esto para cada punto de intersección de las pseudolíneas originales de L , eligiendo x muy arriba del área de intersección y cuidándonos de que interseque arriba del área de intersección a todas las pseudolíneas que se hayan ido agregando.

Como las pseudolíneas agregadas se intersecan todas muy arriba del área de intersección de L , siempre podemos encontrar una altura (todavía arriba del área de intersección) donde a partir de la cual no se intersecan ya nunca hacia abajo, y por lo tanto son topológicamente equivalentes a líneas paralelas. Más aún, las “franjás” (entre comillas porque están posiblemente retorcidas) que forman por construcción no contienen intersecciones entre las pseudolíneas de L en sus interiores (ver Figura 2.9).

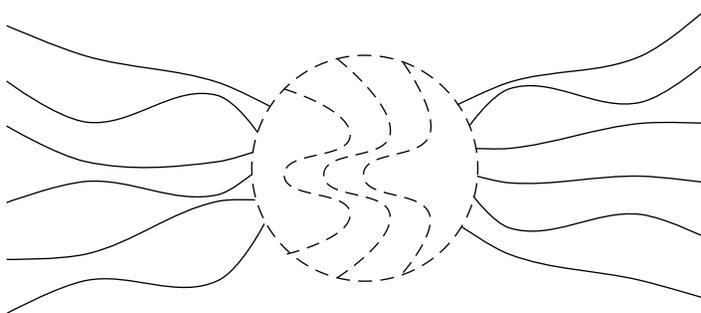


Figura 2.9: “Fanjás” generadas por las líneas que agrandan L .

Y ya acabamos; podemos transformar de forma continua estas franjas retorcidas en franjas rectas (e incluso si queremos del mismo ancho) sin perturbar las intersecciones entre las pseudolíneas de L . Por último cambiamos cada curva en el interior de una franja por un segmento de recta, los manipulamos una última vez para que se vean “bien” (que cada cable esté a la misma distancia del siguiente en cada franja, etc.), y ya tenemos nuestro diagrama de cables. \square

Una vez más hay que resaltar que el Lema de Agrandamiento de Levi (que es el paso fuerte en la demostración) **no** funciona en dimensiones superiores, así que esta demostración sólo sirve en \mathbb{R}^2 (o \mathbb{P}^2 , si usamos el plano proyectivo).

2.4. El Teorema de Representación Topológica

Para terminar el capítulo, vamos a enunciar y comentar el Teorema de Representación Topológica de Folkman-Lawrence en su versión para rango 3.

Teorema 2.2 (Representación Topológica, rango 3). *Hay una correspondencia uno a uno entre los matroides orientados de rango 3, y la clase de equivalencia de arreglos de pseudolíneas*

orientadas.

No es difícil ver que para orientar una pseudolínea sólo es necesario definir las dos regiones en que divide al plano, una como “positiva”, y otra como “negativa”; lo mismo que hacíamos con hiperplanos.

El teorema de hecho funciona con matroides orientados de rango arbitrario, pero en ese caso la demostración es *bastante* compleja y utiliza argumentos topológicos muy avanzados. Tanto es así que en [13] (de donde muchas porciones de este capítulo fueron basadas) se deja como problema abierto el encontrar una demostración relativamente sencilla para el caso de rango 3.

Tal demostración fue obtenida por Jürgen Bokowski, Susanne Mock e Ileana Streinu en 1999, y se puede consultar en [14]. Y aún así sigue siendo una demostración relativamente compleja.

La demostración general aparece en [13], y lo que hace es tomar los matroides orientados en su representación de familias de hiperplanos y definir un isomorfismo con arreglos de pseudoesferas. Los arreglos de pseudoesferas en dimensión d (que no estudiaremos aquí) son a su vez isomorfos a arreglos de pseudolíneas en dimensión $d - 1$ (usando una proyección); por eso es que aunque todo el tiempo hemos estado trabajando con pseudolíneas en dos dimensiones, realmente son proyecciones sobre \mathbb{P}^2 (aunque como ya dijimos arriba, *nosotros* no necesitamos realmente al plano proyectivo, y por eso lo excluimos de nuestras definiciones).

Es por eso que a nosotros nos interesa este teorema, porque nos dice básicamente que los matroides orientados de rango 3 y los arreglos de pseudolíneas en \mathbb{R}^2 son lo mismo. Y por el teorema de Goodman y Pollack, tenemos que los matroides orientados de rango 3 y los diagramas de cables también son equivalentes.

La utilidad de todo esto se observará en el siguiente capítulo, donde por fin estudiaremos las sucesiones permisibles.

Capítulo 3

Sucesiones permisibles

En este capítulo presentaremos lo que son *sucesiones permisibles*, las cuales usaremos para contar líneas medianas y k -conjuntos. Como veremos más adelante en el capítulo, las sucesiones permisibles son sólo una representación más de matroides orientados de rango 3.

3.1. El caso geométrico

Sea P un conjunto de n puntos en posición general con las siguientes restricciones: P no tiene cuatro puntos tales que la pendiente entre dos de ellos sea igual a la pendiente de los otros dos, y no hay dos puntos con la misma coordenada x . Dado P siempre podemos proyectar los puntos sobre una línea ℓ paralela al eje Y , y si consideramos que ℓ está orientada hacia arriba (hacia ∞ en lugar de $-\infty$), podemos definir un orden \prec sobre P de acuerdo a las proyecciones de sus puntos sobre ℓ (Figura 3.1).

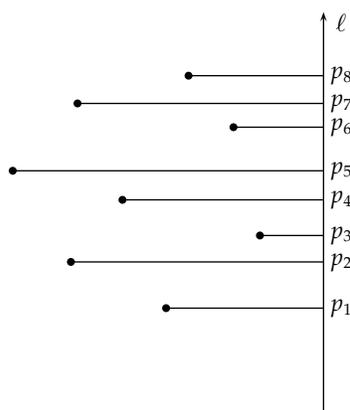


Figura 3.1: Conjunto de ocho puntos proyectados sobre ℓ .

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

Nombraremos a nuestros puntos p_1, \dots, p_n utilizando el orden \prec ; de tal forma que $p_1 \prec p_2 \prec \dots \prec p_{n-1} \prec p_n$.

Dado que P es finito siempre podemos dibujar un círculo C que contenga a todos sus elementos, y podemos hacer que ℓ sea tangente vertical a C por la derecha (Figura 3.2).

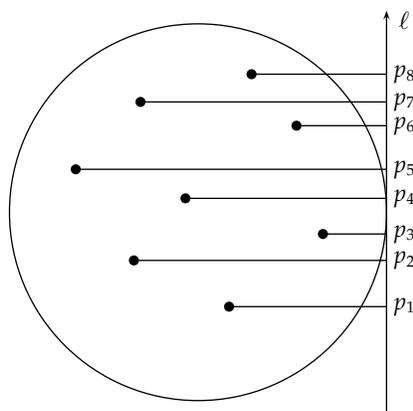


Figura 3.2: Círculo envolviendo a P con ℓ tangente.

Si comenzamos a rotar ℓ en contra de las manecillas del reloj, de tal forma que permanezca tangente a C , muy al inicio los puntos proyectados sobre ℓ conservarán el mismo orden \prec , pero en algún momento dos de ellos (digamos p_i y p_j) se proyectarán sobre un mismo punto en ℓ (Figura 3.3). La primera vez que esto sucede $|i - j| = 1$, es decir, p_i y p_j eran puntos consecutivos en ℓ . Puede verse que *nunca* se proyectarán tres puntos sobre un mismo punto de ℓ dado que los elementos de P están en posición general, y nunca se proyectarán cuatro puntos en dos puntos distintos de ℓ por nuestra restricción de que tengan pendientes distintas par a par.

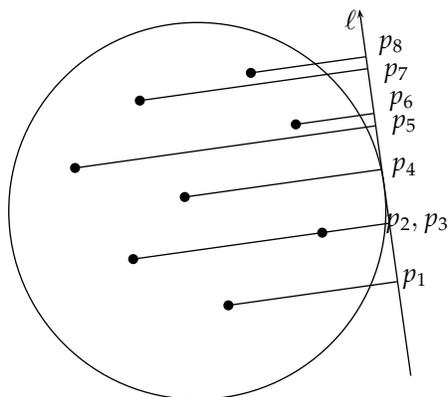


Figura 3.3: Dos puntos de P proyectándose sobre ℓ en el mismo punto.

Si seguimos rotando ℓ , inmediatamente después de que p_i y p_j se proyectan sobre un mismo punto ocurre que intercambian de posición en el orden \prec ; esto es, si antes de proyectarse sobre un mismo punto se daba que $p_i \prec p_j$, entonces al seguir rotando ℓ va a ocurrir que $p_j \prec p_i$ (Figura 3.4).

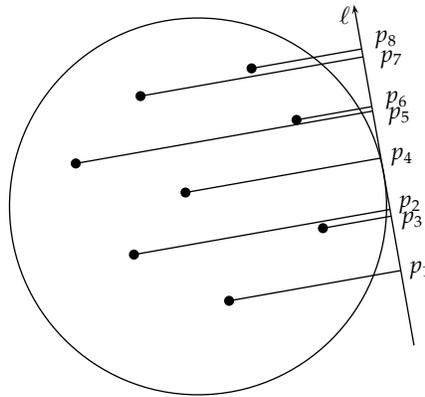


Figura 3.4: Los puntos p_2 y p_3 se intercambian en el orden \prec .

Si seguimos girando ℓ hasta que haya recorrido 180° , entonces tenemos que el orden de los puntos de P se invirtió totalmente: ahora se da que $p_n \prec p_{n-1} \prec \dots \prec p_2 \prec p_1$. Esto ocurre porque las coordenadas y de las proyecciones de los puntos son iguales que al inicio; pero ahora ℓ está orientada hacia abajo (hacia $-\infty$ en lugar de ∞ ; Figura 3.5). En estos primeros 180° cada pareja de puntos de P se intercambian exactamente una vez; esto es porque ℓ al dar la mitad de una vuelta completa cubre todas las posibles pendientes que puede haber entre dos puntos.

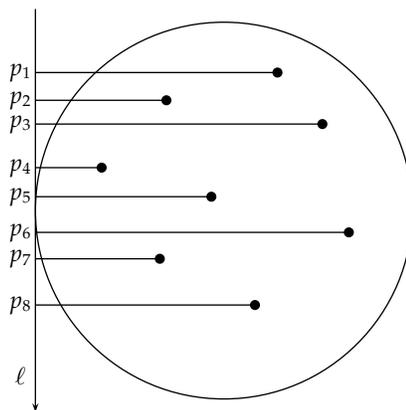


Figura 3.5: Los puntos se invierten completamente respecto al orden original.

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

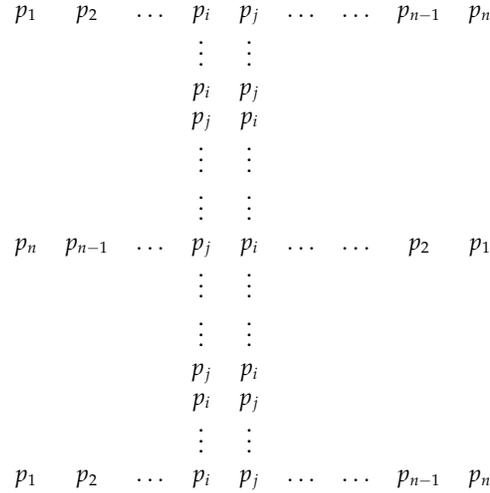


Figura 3.6: Permutaciones de los elementos de P .

Dados dos elementos p_i y p_j en P , tales que $p_i \prec p_j$ al inicio (cuando ℓ es vertical y orientada hacia arriba), sabemos que se proyectan al mismo punto en ℓ cuando es perpendicular a la línea que pasa por ellos, y que se intercambian inmediatamente después cuando ℓ sigue girando. Conforme ℓ siga girando, ocurrirá de nuevo que sea perpendicular a la línea que pasa por p_i y p_j (pero orientada en sentido contrario), e inmediatamente volverán a cambiar de orden para quedar como estaban al inicio. Por lo tanto, dados dos elementos p_i y p_j en P , ocurre que se intercambian exactamente dos veces si hacemos que ℓ gire los 360° completos; y ciertamente no tiene mucho sentido seguir girándola porque sólo estaríamos repitiendo lo que ya hicimos.

Una *sucesión circular* es la sucesión de permutaciones de P doblemente infinita que obtenemos al girar ℓ y proyectar los puntos de P sobre ella. Es circular porque cada que ℓ gira 360° comienza a repetirse, y esto ocurre en ambas direcciones. Si vamos anotando las permutaciones resultantes de girar ℓ , obtenemos algo del estilo de la Figura 3.6

Podemos entonces calcular el número de permutaciones consecutivas distintas de la sucesión circular: como tenemos un renglón por cada intercambio, y todos los elementos de P se intercambian exactamente dos veces, entonces tenemos $2\binom{n}{2}$ renglones distintos.

La mitad de estos renglones son redundantes (son iguales a la otra mitad, sólo invertidos de derecha a izquierda); así que construiremos una matriz Π (llamada así porque representa un giro de 180° de ℓ) con la mitad de los renglones consecutivos distintos de la sucesión circular y le llamaremos un *semiperiodo*. Resulta que en el semiperiodo Π está la información combinatoria más importante de P , y que para calcular y trabajar con muchos de los conceptos que revisamos en el primer capítulo podemos olvidarnos de la representación geométrica de P y concentrarnos exclusivamente en Π .

3.2. Sucesiones permisibles

Definición 3.1 (Sucesiones permisibles). Una *sucesión permisible* es una sucesión de permutaciones doblemente infinita de elementos de algún conjunto. Si una sucesión permisible la obtenemos a partir de un conjunto de puntos geométricos, diremos que es una *sucesión circular*.

Veremos más adelante cuáles son las diferencias entre una sucesión circular y una sucesión permisible que no obtengamos de un conjunto de puntos geométricos.

Definición 3.2 (Semiperiodos). Un *semiperiodo* Π de una sucesión permisible es una matriz de $\binom{n}{2} \times n$, tal que sus renglones son $\binom{n}{2}$ renglones consecutivos de una sucesión permisible.

Un *periodo completo* de una sucesión permisible es una matriz de $2\binom{n}{2} \times n$ donde sus primeros $\binom{n}{2}$ renglones son un semiperiodo de la sucesión permisible, y donde el j -ésimo renglón (con $j > \binom{n}{2}$) es igual al renglón $j - \binom{n}{2}$ invertido de derecha a izquierda.

Sin perder generalidad podemos suponer que los n elementos de la sucesión son los n primeros números naturales. Y dada su periodicidad, cualquiera de sus renglones puede ser el "primero", así que para construir Π siempre podemos suponer que el primer renglón es el que tiene la forma

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n.$$

Si ese renglón en particular no ocurre en la sucesión permisible, tomamos alguno de sus renglones al azar, y renombramos sus elementos para que sea como lo queremos, renombrando igual todas las repeticiones de los n elementos en la sucesión.

Necesitamos definir ciertas propiedades de los semiperiodos para poder trabajar cómodamente con ellos:

Definición 3.3 (Centro y columna k). Dado el semiperiodo Π de una sucesión permisible con n elementos (o de *tamaño* n de aquí en adelante), definimos las siguientes propiedades de Π :

- Las columnas de Π estarán numeradas de 1 a n de izquierda a derecha, y a las columnas $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$ les llamaremos *el centro* de Π si n es par. Si n es impar, el centro serán las columnas $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$ y $\frac{n}{2} + 2$.
- Si dos elementos i y j del semiperiodo se intercambian en algún renglón (con i a la izquierda de j antes del intercambio, sin perder generalidad), y antes del intercambio i estaba en la columna k y j en la columna $k + 1$, diremos que i y j se intercambiaron en la columna k . Si n es par y $k = \frac{n}{2}$, diremos que i y j se intercambiaron en el centro; si n es impar un intercambio será en el centro cuando $k = \frac{n}{2}$ o cuando $k = \frac{n}{2} + 1$.

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

Para cualquier conjunto de puntos P en el plano en posición general existe una sucesión permisible correspondiente (que por definición es circular); sólo seguimos el mismo procedimiento del círculo y la línea ℓ tangente a él para generarla. Llamaremos a este procedimiento *secuencialización*. Lamentablemente lo contrario no es cierto: dada una sucesión permisible no siempre existe un conjunto de puntos P tales que al secuencializarlo la obtengamos de nuevo.

Sin embargo, si en lugar de utilizar rectas utilizamos pseudolíneas sí podemos conseguirlo.

3.3. El caso generalizado

Dado un conjunto P de n puntos (no necesariamente en posición general), podemos utilizar pseudolíneas para construir una sucesión permisible de forma similar a la secuencialización en el caso geométrico. Recordemos del capítulo 2 que un arreglo de pseudolíneas es un arreglo de curvas simples que se extienden al infinito, y tales que todo par de pseudolíneas en el arreglo se intersecan exactamente en un punto.

Para construir nuestra sucesión permisible, tomemos nuestro conjunto P y asignémosle un arreglo de $\binom{n}{2}$ pseudolíneas con la propiedad de que cada pseudolínea pase por dos puntos distintos de P , y que dadas dos pseudolíneas siempre se intersequen¹ (Figura 3.7). Evidentemente no habrá dos pseudolíneas que pasen por los mismos dos puntos, porque entonces se intersecarían más de una vez.

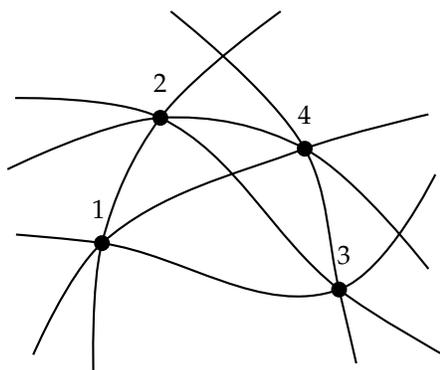


Figura 3.7: Cuatro puntos ahora con pseudolíneas. No hacemos el ejemplo de ocho puntos porque necesitaríamos veintiocho pseudolíneas.

Ahora vamos a encerrar nuestro conjunto P en un círculo, con la propiedad de que

¹Esto de alguna manera es equivalente a nuestra restricción en el caso geométrico de que no hubiera cuatro puntos con la misma pendiente par a par.

también queden encerradas *todas* las intersecciones entre las pseudolíneas². Como nuestras pseudolíneas se extienden al infinito, y todas pasan por dos puntos de P , entonces todas intersecan al círculo en dos puntos (Figura 3.8).

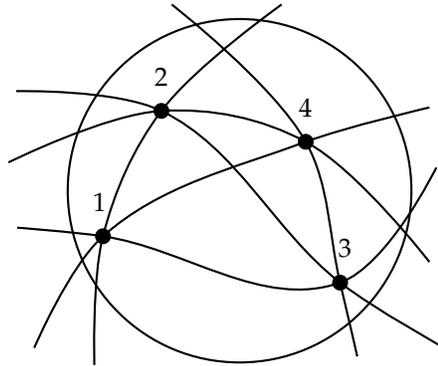


Figura 3.8: Puntos con pseudolíneas envueltos en un círculo.

Vamos a elegir un punto cualquiera en el círculo, y lo iremos girando alrededor del mismo en contra de las manecillas del reloj; y cada vez que nuestro punto coincida con la intersección de una pseudolínea y el círculo, iremos anotando los puntos por los cuales pasa la pseudolínea, poniendo primero el más cercano (siguiendo a la pseudolínea; Figura 3.9). Eso va a ser nuestro equivalente a cuando dos puntos se intercambiaban en el caso geométrico, y de hecho así les llamaremos: intercambios o transposiciones.

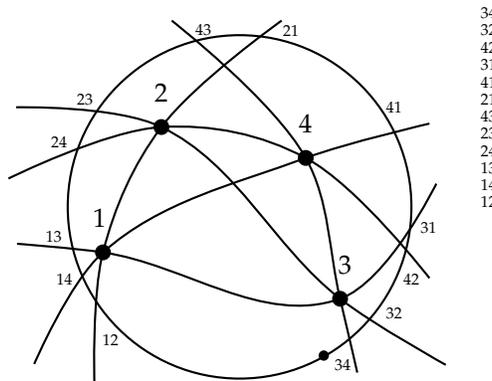


Figura 3.9: Intercambios en el círculo anotados de acuerdo a cómo aparecen conforme el punto pequeño gira.

Estos intercambios serán lo que utilizaremos para construir nuestra matriz; sólo no

²Si estuviéramos utilizando el plano proyectivo \mathbb{P}^2 el círculo podría ser la línea al infinito.

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

podemos hacerlo todavía porque no sabemos en qué columnas de la misma se encuentran nuestros elementos.

Para construir la sucesión permisible supondremos que al “inicio” (que depende completamente de dónde pongamos el punto que gira sobre el círculo) el punto p_1 tiene la posición k , y buscamos el primer intercambio donde aparezca; supongamos que es el i -ésimo. Si p_1 aparece a la izquierda del intercambio, esto quiere decir que, en el i -ésimo renglón, de estar en la posición k se movió a la posición $k - 1$; si aparece a la derecha, esto quiere decir que se movió a la posición $k + 1$; y hacemos lo mismo en todos los intercambios donde aparece p_1 . Y después, repetimos el proceso para los demás puntos de P , pero en lugar de asignarles una k arbitraria como columna, usamos la que p_1 les fuerza al intercambiarse con ellos. Las posiciones se van fijando conforme recorremos todos los puntos; el algoritmo (dados P y los intercambios entre los elementos) sería como el mostrado en la Figura 3.10.

```

1: procedure LLENAENTRADASDE( $M, I, p, n, r, c$ )
2:   for  $i \in \{1, \dots, 2(n-1)\}$  do
3:      $r \leftarrow I.SIGUIENTECAMBIO(I, p, r+1)$ 
4:      $(p_i, p_j) \leftarrow I.DAMECAMBIO(r)$ 
5:     if  $p = p_i$  then ▷  $p$  se intercambió a la derecha
6:        $M_{[i][c-1]} \leftarrow p_i$ 
7:        $M_{[i][c]} \leftarrow p_j$ 
8:        $c \leftarrow c - 1$ 
9:     else ▷  $p$  se intercambió a la izquierda
10:       $M_{[i][c]} \leftarrow p_i$ 
11:       $M_{[i][c+1]} \leftarrow p_j$ 
12:       $c \leftarrow c + 1$ 
13: procedure LENAMATRIZ( $P, I$ )
14:    $m \leftarrow I.TAMAÑO()$ 
15:    $n \leftarrow P.TAMAÑO()$ 
16:    $M \leftarrow NUEVAMATRIZ(m, 2n)$  ▷ Matriz de  $m \times 2n$  con ceros en sus entradas
17:    $p \leftarrow P.PRIMERELEMENTO()$ 
18:    $r \leftarrow I.SIGUIENTECAMBIO(I, p, 1)$ 
19:    $M_{[r][n]} \leftarrow p$ 
20:   for  $p \in P$  do
21:      $(r, c) \leftarrow PRIMERASENTRADAS(M, p)$ 
22:     LLENAENTRADASDE( $M, I, p, n, r, c$ )
23:    $c1 \leftarrow M.MINCOLUMNADISTINTADECERO()$ 
24:    $c2 \leftarrow M.MAXCOLUMNADISTINTADECERO()$ 
25:   return  $M.SUBMATRIZ(c1, c2)$ 

```

Figura 3.10: Algoritmo para encontrar las posiciones de los puntos en la matriz.

El algoritmo crea una matriz de $m \times 2n$ (línea 16), donde m es el número de intercambios; y adelante explicamos porqué con $2n$ columnas. Después toma el primer punto de P , y busca el índice del primer intercambio donde esté involucrado para guardarlo en r , y acto seguido guarda el punto en el renglón r y columna n de la matriz. Tenemos

que en el r -ésimo intercambio estuvo involucrado p , pero no sabemos en qué columna; entonces suponemos que es n , y esa es la razón por la que nuestra matriz es de $m \times 2n$ entradas, para cubrir los casos en que la columna real de p sea 1 (en cuyo caso necesitamos $n - 1$ columnas a la derecha), o que sea n (en cuyo caso necesitamos $n - 1$ columnas a la izquierda).

En este momento (línea 20) nuestra matriz M tiene una única entrada (la $[r][n]$) con el primer punto de P . Después entramos al **for**, y para cada punto p de P obtenemos la primera entrada (renglón, columna: r, c) donde ocurra P , y llamamos a LLENASDE.

En LLENASDE hacemos lo siguiente $2(n - 1)$ veces (una para cada intercambio que involucre a p): obtenemos el índice del siguiente intercambio donde aparezca p , lo guardamos en r y obtenemos el intercambio (p_i, p_j) . Si en el intercambio p se movió a la izquierda, entonces en el r -ésimo renglón de nuestra matriz p_i (que es p) está en la columna $c - 1$, y p_j está en la columna c . Si en el intercambio p se movió a la derecha, entonces en el r -ésimo renglón de nuestra matriz p_i está en la columna c , y p_j (que es p) está en la columna $c + 1$.

Al final de todo, LENAMATRIZ, regresa la submatriz que no tenga columnas con nada más ceros, y ese es el resultado de nuestro algoritmo. La matriz resultante todavía tiene muchos ceros (sólo tiene dos entradas distintas de cero en cada renglón), pero ya es muy sencillo el llenar las entradas restantes y no describiremos esa parte del algoritmo, así como tampoco las funciones auxiliares SIGUIENTEINTERCAMBIO, DAMEINTERCAMBIO, PRIMERASDE, ni MINCOLUMNADISTINTADECERO o MAXCOLUMNADISTINTADECERO; todas son triviales.

Teorema 3.1. *El algoritmo LENAMATRIZ (Figura 3.10) regresa el periodo completo de una sucesión permisible.*

Demostración. El algoritmo termina porque todos sus ciclos son sobre elementos de conjuntos finitos. La matriz que regresa tiene $2\binom{n}{2}$ renglones: como hay $\binom{n}{2}$ pseudolíneas en nuestro arreglo, y todas cortan al círculo en dos puntos (porque pasan por puntos dentro del círculo: los puntos en P), entonces tenemos $2\binom{n}{2}$ intersecciones entre pseudolíneas y nuestro círculo, y consecuentemente el mismo número de intercambios. Y usamos el número de intercambios para crear M y jamás tratamos de agregar un elemento en un renglón menor a 1 o mayor a $2\binom{n}{2}$ (los índices que usamos para llenar M son índices de I , de nuevo los intercambios). Más aún, la matriz M sólo tiene n columnas que contengan algún elemento distinto a cero, ya que como estamos sólo anotando en cada renglón un intercambio de elementos (suponiendo que la columna anterior es igual excepto por los dos elementos que escribimos), entonces cada renglón (descontando los ceros) es una permutación de los elementos de P , y por lo tanto tiene n elementos. Entonces, la matriz que regresa el algoritmo es de $2\binom{n}{2} \times n$.

Además, por construcción, cada renglón de nuestra matriz es idéntico al anterior, excepto por un intercambio. Así que lo único que queda por demostrar es que el i -ésimo

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

renglón de la matriz es el inverso del $i + \binom{n}{2}$ -ésimo renglón de la matriz si $i \leq \binom{n}{2}$, y que dos elementos no se intercambian en el mismo semiperiodo.

Primero vamos a demostrar que si cualesquiera dos puntos p_i y p_j se intercambian en el renglón r ($r \leq \binom{n}{2}$), entonces también se intercambian en el renglón $r + \binom{n}{2}$, y no se intercambian en ningún otro lugar.

Sean dos puntos p_i y p_j que se intercambian en el renglón r , $r \leq \binom{n}{2}$. Eso quiere decir que la pseudolínea que pasa por p_i y p_j intersecó al círculo en algún punto p y que anotamos el intercambio correspondiente. Como sabemos, la pseudolínea interseca al círculo en otro punto q distinto de p , y en ningún otro; por lo tanto p_i y p_j sólo se intercambian dos veces.

Vamos a contar el número de pseudolíneas que intersecan al círculo entre p y q (no importa de qué lado, como veremos ahorita). El pseudosegmento pq es parte de la pseudolínea l_{pq} que pasa por p y q , y como en total tenemos $\binom{n}{2}$ pseudolíneas, hay $\binom{n}{2} - 1$ de ellas distintas a l_{pq} . Pero una de las restricciones que pusimos para construir nuestro círculo es que *todas* las pseudolíneas se intersecan entre ellas dentro del mismo; entonces esas $\binom{n}{2} - 1$ pseudolíneas intersecan a l_{pq} dentro del círculo. Como todas pertenecen al mismo arreglo de pseudolíneas, ninguna de ellas vuelve a intersecar l_{pq} en ningún otro lado, y se extienden al infinito; por lo tanto, entre p y q hay $\binom{n}{2} - 1$ pseudolíneas que intersecan al círculo de un lado, y $\binom{n}{2} - 1$ pseudolíneas que lo intersecan del otro.

Y entonces resulta que el intercambio dado por q lo anotamos $\binom{n}{2}$ intercambios después del intercambio dado por p ; por lo tanto, si p_1 y p_2 se intercambiaron en el renglón r , $r \leq \binom{n}{2}$, se vuelven a intercambiar en el renglón $r + \binom{n}{2}$, y en ningún otro más.

Más aún: si la columna de algún p_i es k en el renglón r , entonces en el renglón $r + \binom{n}{2}$ su columna es $n - k + 1$. El punto p_i se intercambia con los otros $n - 1$ puntos de P en los renglones que hay entre r y $r + \binom{n}{2}$ (consecuencia de que las $\binom{n}{2}$ pseudolíneas pasan por cualesquiera dos puntos de P). Cuando p_i se intercambia con el elemento a su derecha, se mueve una columna a la derecha; cuando se intercambia con el elemento a su izquierda, se mueve una columna a la izquierda. Pero sólo hay $k - 1$ elementos a la izquierda de p_i y $n - k$ elementos a la derecha de p_i en el renglón r ; por lo tanto, p_i se mueve $k - 1$ columnas a la izquierda, y $n - k$ columnas a la derecha, y termina en la columna $n - k + 1$. Más aún incluso: por el mismo razonamiento, los $k - 1$ elementos a la izquierda de p_i en el renglón r están a su derecha en el renglón $r + \binom{n}{2}$; y los $n - k$ elementos a su derecha en el renglón r están a su izquierda en el renglón $r + \binom{n}{2}$.

Por lo tanto, como esto ocurre para cualquier elemento en el renglón r , tenemos que el renglón $r + \binom{n}{2}$ es el inverso del renglón r .

Y entonces el algoritmo regresa el periodo completo de una sucesión permisible. \square

Proposición 3.1. *La secuencialización en el caso geométrico es un caso particular de la secuencialización en el caso generalizado.*

Demostración. Se sigue de que una línea es también una pseudolínea, y que por lo tanto podemos aplicar el método generalizado usando un arreglo de rectas. Es fácil ver que

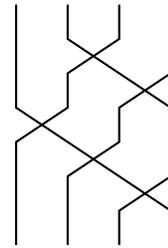
cada uno de los pasos del método generalizado sólo generaliza al método geométrico. \square

Lo interesante del caso generalizado es que siempre podemos ir de regreso: dada una sucesión permisible *siempre* podemos encontrar un conjunto de puntos P y un arreglo de pseudolíneas tales que si lo secuencializamos como vimos arriba, entonces volvemos a obtener la sucesión permisible.

Esto viene del hecho de que el semiperiodo Π de una sucesión permisible lo podemos pensar como matriz (Figura 3.11(a)) o bien como un diagrama de cables (Figura 3.11(b))

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Semiperiodo de Π .



(b) Diagrama de cables de Π . Cada cable representa la trayectoria de un elemento de Π .

Figura 3.11: Π visto como semiperiodo o como diagrama de cables.

Y por el teorema de Goodman y Pollack [13] que vimos en el capítulo 2, sabemos que todo arreglo de pseudolíneas es isomorfo a un diagrama de cables. Así que sólo le aplicamos el isomorfismo al diagrama de cables de Π , y ya tenemos nuestro arreglo de pseudolíneas, donde cada pseudolínea l_{ij} representa el cruce de los puntos i y j . Dado el arreglo de pseudolíneas, acomodamos los puntos de la forma obvia: cuando la pseudolínea l_{ij} interseca a la pseudolínea l_{jk} , colocamos al punto j en la intersección.

Ciertas sucesiones permisibles sin embargo serán circulares. A las sucesiones permisibles que también sean circulares llamaremos *geometrizable* o *rectificables*.

Definición 3.4 (Sucesiones geometrizable). Dada una sucesión permisible, si es también circular, diremos que es *geometrizable* o *rectificable*.

Por lo que revisamos en el capítulo anterior, debe resultar obvio que las sucesiones permisibles son sólo otra representación (una más) de los matroides orientados de rango 3. Esto nos permite, si es de utilidad para nosotros, usar los resultados de matroides orientados a problemas con sucesiones permisibles.

Pero ahora veremos cómo utilizaremos las sucesiones permisibles para trabajar con varios conceptos vistos en capítulos anteriores. A partir de este momento a veces abusaremos del lenguaje para llamar a Π una “sucesión permisible”, aunque técnicamente nos estaremos refiriendo a su semiperiodo.

3.4. Líneas medianas y k -aristas revisadas

Regresemos al ejemplo geométrico que utilizamos para construir Π al inicio del capítulo. Recordemos que nuestro conjunto de puntos P se veía como en la Figura 3.12.

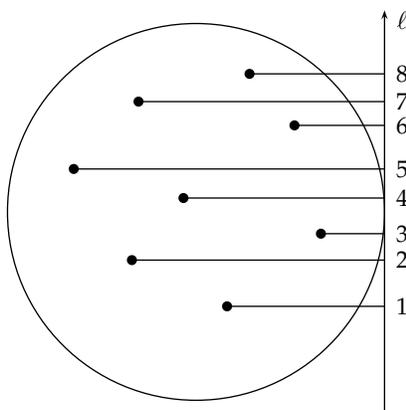


Figura 3.12: Conjunto de ocho puntos proyectados sobre ℓ , de nuevo.

Los primeros renglones de su sucesión circular Π se ven de la siguiente forma; como cada renglón es idéntico al anterior excepto por dos elementos que se intercambian, sólo escribiremos el renglón inicial completo, y en renglones subsecuentes únicamente los elementos que se intercambiaron.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 3 & 2 & & & & & \\ & & & & 6 & 5 & & \\ & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 5 \\ & & & 6 & 4 & & & \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

En el sexto renglón se intercambian los elementos 4 y 6; pero lo interesante es que lo hacen *justamente* a la mitad de la matriz, en la cuarta columna (o sea en la columna $\frac{n}{2}$, ya que $n = 8$). Lo que ocurre en el dibujo de P es que justo antes de que 4 y 6 se intercambien, ambos se proyectan sobre el mismo punto en ℓ (Figura 3.13).

La línea que pasa por 4 y 6 es una línea mediana de P , y por lo mismo $\overrightarrow{46}$ y $\overrightarrow{64}$ son aristas medianas de P . Lo mismo ocurre para cualesquiera dos elementos de P que se intercambien estando en el centro de Π ; y más aún, ocurre para cualquier conjunto de puntos unidos por pseudolíneas tales que Π sea el semiperíodo de su sucesión permisible correspondiente. Podemos entonces extender el concepto de líneas medianas y k -aristas a

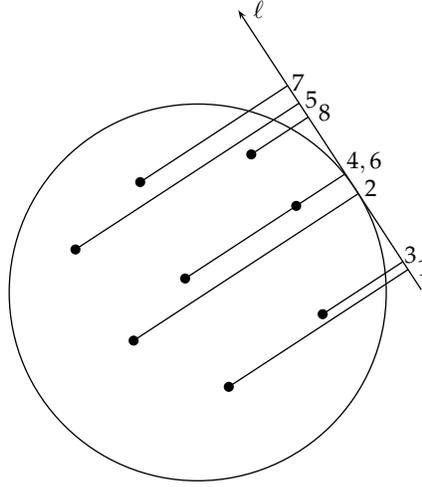


Figura 3.13: Intercambio en el centro.

arreglos de pseudolíneas utilizando pseudolíneas medianas y k -pseudoaristas. Lo único que hay que tomar en cuenta es que son curvas y no rectas las que nos separan nuestros conjuntos de puntos. Denotaremos al número de pseudolíneas medianas de un conjunto P como $\tilde{h}(P)$ para distinguirlo del caso recto $h(P)$. A partir de ahora utilizaremos “líneas medianas” y “ k -aristas” para referirnos a las generadas con líneas rectas y a las generadas por pseudolíneas por igual, a menos que queramos hacer la distinción explícita.

Lo que ocurre con los intercambios es todavía más fuerte: si dos elementos i y j de Π se intercambian en la columna k ($k \leq \frac{n}{2}$), entonces la arista \overrightarrow{ij} es una $(k - 1)$ -arista (ya que comenzamos con los elementos en orden, siempre ocurre que $i \prec j$ antes de que se intercambien). Entonces en particular cuando $k = \frac{n}{2}$, \overrightarrow{ij} es una $(\frac{n}{2} - 1)$ -arista, y por lo tanto una arista mediana. Si $k > \frac{n}{2}$, entonces la arista \overrightarrow{ij} es una $(n - k)$ -arista.

Teorema 3.2. *Sea P un conjunto de n puntos, n par, y Π su sucesión permisible correspondiente. Si en el renglón r de Π dos de sus elementos i y j se intercambian en la columna k ($k \leq \frac{n}{2}$), entonces la arista ij es una $(k - 1)$ -arista de P .*

Demostración. Tenemos que i y j se intercambiaron en la k -ésima columna, y queremos demostrar que la pseudolínea que pasa por i y por j deja de un lado a $k - 1$ elementos de P , y del otro a $n - k - 1$.

La pseudolínea l_{ij} que pasa por i y j divide al plano \mathbb{R}^2 en dos regiones; vamos a considerar a l_{ij} orientada de i a j , y vamos a contar el número de puntos que hay a su derecha. Para esto, veamos qué nos dicen al respecto los intercambios de los demás elementos de P con i y j .

Los intercambios entre i y j sobre el círculo, del lado derecho de l_{ij} , son $\binom{n}{2} - 1$. Y

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

para todo intercambio is (en otras palabras, con i a la izquierda) implica que s está a la izquierda de l_{ij} ; y todo intercambio ti (i a la derecha) implica que t está a la derecha de l_{ij} . Con j es lo mismo, pero invertido: todo intercambio js (j a la izquierda) implica que s está a la derecha de l_{ij} , y todo intercambio tj (j a la derecha) implica que t está a la izquierda de l_{ij} (Figura 3.14).

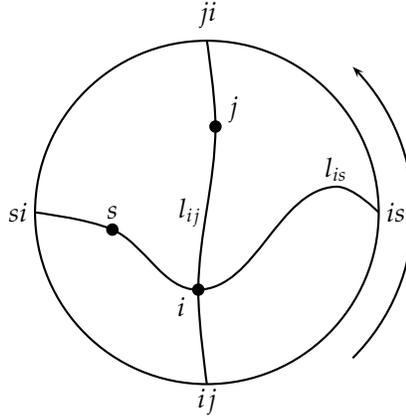


Figura 3.14: El punto s queda a la izquierda de l_{ij} .

Si tenemos el intercambio is del lado derecho de l_{ij} , entonces la pseudolínea l_{is} cruzó el círculo al lado izquierdo de l_{ij} , después pasó por s , después por i (cruzando l_{ij} en el proceso), y después por el círculo de nuevo, donde se anotó el cambio is . No puede haber pasado primero por i y después por s , porque entonces habría quedado anotado el cambio si (a la izquierda va el punto más cercano siguiendo la trayectoria de la pseudolínea).

El argumento para el caso si es análogo, y para los casos jt y tj es equivalente pero con la dirección invertida.

Entonces resulta que todos los intercambios del lado derecho de l_{ij} donde i aparece a la izquierda implican que el punto con el que se intercambió está a la izquierda de l_{ij} , y que todos los intercambios donde i aparece a la derecha implican que el punto con el que se intercambió está a la derecha de l_{ij} .

Como sólo estamos cubriendo un semiperiodo (porque no revisamos los intercambios del lado izquierdo de l_{ij}), entonces i sólo se intercambia con los otros $n - 2$ elementos (evidentemente i no se intercambia con j del lado derecho de l_{ij}).

Pero (utilizando un argumento similar al del Teorema 3.1) i sólo puede intercambiarse con su vecino izquierdo $k - 1$ veces, porque está en la columna k . Y por la misma razón sólo puede intercambiarse con su vecino derecho $n - k - 1$ veces; en principio uno pensaría que puede intercambiarse con su vecino derecho $n - k$ veces: pero no se intercambia con j , y j está del lado derecho de i en el semiperiodo que estamos revisando ya que empezamos con i en k y j en $k + 1$.

Por lo tanto, l_{ij} tiene $n - k - 1$ puntos del lado derecho, y $k - 1$ puntos del lado izquierdo, lo que hace que $\vec{i_j}$ sea una $(k - 1)$ -arista. Si en particular $k = \frac{n}{2}$, entonces l_{ij} es una línea mediana de P . \square

Corolario 3.1. *Sea P un conjunto de n puntos, n par, y Π su sucesión permisible correspondiente. Si en el renglón r de Π dos de sus elementos i y j se intercambian en la columna k ($k > \frac{n}{2}$), entonces la arista $\vec{i_j}$ es una $(n - k)$ -arista de P .*

Demostración. Sencillamente nos fijamos en el semiperiodo complementario a Π : como en él los renglones son iguales a los de Π pero invertidos de derecha a izquierda, se aplica el Teorema 3.1 tal cual y con eso terminamos. \square

Encontrar líneas medianas entonces es muy sencillo: sólo tenemos que buscar cuando dos elementos de Π se intercambian en su centro. Y para buscar $(k - 1)$ -aristas es igual: sólo necesitamos buscar elementos que se intercambien en la k -ésima columna de Π .

3.5. Algunos resultados utilizando sucesiones permisibles

Vamos a revisar un par de resultados que se demuestran de forma particularmente sencilla utilizando sucesiones permisibles: uno ya lo vimos en el primer capítulo (la propiedad alternante local, de Lóvasz), y el otro es tal vez el resultado más importante en Geometría Computacional que se haya demostrado utilizando sucesiones permisibles.

3.5.1. La propiedad alternante local

Nada más para acordarnos, la propiedad alternante local decía lo siguiente:

Lema 3.1 (Propiedad alternante local). *Sea P un conjunto de puntos en posición general en \mathbb{R}^2 , y sea $G_k = (P, E_k)$ la gráfica definida de la siguiente manera: $\vec{pq} \in E_k$ si y sólo si \vec{pq} es una k -arista de P . Para toda arista $e \in E_k$ definimos $l(e)$ al punto más a la izquierda de e , $r(e)$ al punto más a la derecha, y $s(e)$ como la pendiente de e (con una rotación adecuada siempre podemos evitar que haya dos puntos con la misma coordenada x , y por lo tanto que no haya aristas verticales).*

Sean a y b dos aristas de E_k tales que inciden al mismo punto p y donde $s(b) > s(a)$. Entonces existe una arista c saliente de p tal que $s(b) > s(c) > s(a)$. Análogamente, sean c y d dos aristas salientes de p tales que $s(d) > s(c)$. Entonces existe una arista b entrante a p tal que $s(d) > s(b) > s(c)$.

Demostración. Sea p_a el punto a la izquierda de la arista a , y p_b el punto a la izquierda de la arista b . Vamos a girar los puntos de P de tal forma que al proyectarlos sobre una línea vertical se cumpla que p_b esté abajo de p_a y p_a abajo de p (siempre podemos hacer esto; ver Figura 3.15).

Sea Π el semiperiodo de la sucesión permisible que obtenemos al secuenciar P . El primer renglón de Π se ve de la siguiente manera:

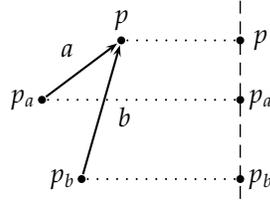


Figura 3.15: Las aristas a y b , que bien podrían ser pseudoaristas.

$$\dots p_b \dots p_a \dots p \dots$$

A lo mejor p_b y p_b están juntos, o tal vez ocurra que p_a está junto a p : no sabemos. Lo que sí sabemos es que primero está p_b , después p_a y por último p (porque giramos así los puntos).

Dado que a es una k -arista, existe un renglón i de Π donde p_a y p se intercambian en la k -ésima o $(n - k)$ -ésima columna; por ahora supongamos que es lo primero. Los renglones $i - 1$ e i se ven de la siguiente manera

k	$k + 1$		
$\dots p_b \dots p_a$	p	\dots	$i - 1$
$\dots p_b \dots p$	p_a	\dots	i

Como p_a y p se intercambian en el renglón i , en el renglón anterior tienen que estar juntos.

Pero b también es k -arista; entonces existe un renglón j (con $j > i$, porque $s(b) > s(a)$) donde p_b y p se intercambian, y lo hacen en la k -ésima o la $(n - k)$ -ésima columna de Π . Supongamos por ahora que es en el primer caso. Entonces los renglones $j - i$ y j se ven de la siguiente manera:

k	$k + 1$		
$\dots p_b$	p	$\dots p_a \dots$	$j - 1$
$\dots p$	p_b	$\dots p_a \dots$	j

En el renglón i p se encuentra en la columna k , y en el renglón $j - 1 > i$ está en la columna $k + 1$; por lo tanto existe un renglón m (con $i < m - 1 < m < j - 1$) donde p y un elemento q (que tiene que ser distinto a p_a y p_b , porque p se intercambia con ellos en otros renglones) se intercambian:

k	$k + 1$		
$\dots p_b \dots p$	q	$\dots p_a \dots$	$m - 1$
$\dots p_b \dots q$	p	$\dots p_a \dots$	m

Si p_b y p se intercambian en la $(n - k)$ -ésima columna, es exactamente lo mismo: en el renglón i p está a la izquierda de la columna $(n - k)$, y en el renglón $j - 1 > i$ se encuentra a la derecha; lo cual quiere decir que entre ambos renglones existe otro en el que p se intercambia con un elemento q (distinto a p_a y p_b). Como p y q se intercambian en la k -ésima (o $(n - k)$ -ésima) columna, \vec{pq} es una k -arista de P .

Además, como q está a la derecha de p en el $(m - 1)$ -ésimo renglón, y se intercambian en el siguiente, esto quiere decir que al inicio también estaba a la derecha de p , lo que significa que el punto q está arriba del punto p en P . Y como $i < m - 1 < m < j - 1$, entonces $s(a) < s(\vec{pq}) < s(b)$; por lo tanto, \vec{pq} es la k -arista que buscábamos.

Si el intercambio entre p_a y p ocurre en la $(n - k)$ -ésima columna, lo único extra que tenemos que hacer es fijarnos en los renglones entre el $j - 1$ y el i -ésimo, tomando en cuenta el periodo completo de la sucesión permisible: el mismo argumento se aplica. \square

Hemos tratado de ser muy detallados con la demostración, pero realmente podría resumirse a que en un renglón el elemento p está a la izquierda de la columna k , y en otro está a la derecha, y que por lo tanto hay un renglón intermedio donde p cruza dicha columna utilizando un elemento distinto a p_a y p_b . Lo importante además es que (para motivos prácticos) nos podemos olvidar de las posiciones geométricas de los puntos, y trabajar únicamente con la información combinatoria que nos dan las sucesiones permisibles.

3.5.2. $2n$ puntos, $2n$ direcciones

Dados n puntos, no todos colineales, ¿cuántas direcciones determinan? En \mathbb{R}^2 esto es equivalente a preguntar cuántas pendientes distintas nos generan n puntos en el plano. Paul Scott [32] parece ser el primero en haberse planteado la pregunta, cuando notó que $2n + 1$ puntos pueden determinar tan pocas direcciones como $2n$ (por ejemplo, en un $2n$ -ágono y su centro; ver Figura 3.16).

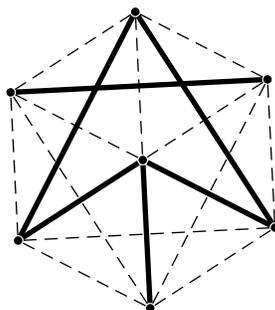


Figura 3.16: $2n + 1$ puntos pueden generar pocas direcciones: $2n$ en este caso. Las direcciones determinadas por las líneas punteadas son todas repetidas.

La mejor cota (antes de la que presentaremos) era $\frac{n}{2}$, de Geoffrey Burton y George

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

Purdy [16] y la publicaron en 1979. La mejor cota actual (que es la que vamos a ver) es de Peter Ungar [35] y apareció en 1982, y es justamente $2n$ cuando el número de puntos es $2n$.

Lo que nos interesa de la demostración es que utiliza sucesiones permisibles; sin embargo, no son *exactamente* las que hemos estado viendo. El planteamiento del problema únicamente dice que no todos los puntos pueden ser colineales; pero no dice que deban estar en posición general, y mucho menos que no haya cuatro con las mismas pendientes par a par.

Pero realmente no es tan grave; sencillamente ahora tendremos transposiciones de más de dos elementos. Cuando k puntos sean colineales, ocurrirá que tendremos renglones donde k elementos se invierten en un solo paso:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots \\ \dots & a_k & a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 & \dots \end{array}$$

Y si tenemos cuatro o más puntos cuyas pendientes generadas sean iguales, entonces en un mismo renglón tendremos dos o más transposiciones:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b_1 & b_2 & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & b_2 & b_1 & \dots \end{array}$$

Una consecuencia de esto es que el semiperiodo de nuestras sucesiones no necesariamente tendrá $\binom{n}{2}$ renglones; a veces ocurrirá que serán menos.

Para demostrar el resultado, Ungar demuestra dos conjeturas de Goodman y Pollack, respecto a cuando queremos transformar una cadena que es permutación de $1, 2, \dots, n-1, n$ a $n, n-1, \dots, 2, 1$ utilizando una secuencia de transposiciones. Demostraremos cada conjetura como un lema.

Lema 3.2. *Si cada transposición consiste en invertir una subcadena creciente maximal, entonces alcanzamos $n, n-1, \dots, 2, 1$ en a lo más $n-1$ movimientos.*

Demostración. Vamos a demostrar que para cualquier k , los números menores o iguales a k se encuentran a la derecha de los números $k+1, k+2, \dots, n$ después de a lo más $n-1$ movimientos. Sea S el conjunto de los elementos menores o iguales a k , y L los demás.

Dadas una permutación de $1, 2, \dots, n-1, n$ y $1 \leq k \leq n$, un patrón sl es el patrón que consiste en reemplazar cada elemento de la cadena por s si el elemento está en S , o por l si está en L . Por ejemplo, si $n = 10$ y $k = 4$, el patrón sl de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ es $s, s, s, s, l, l, l, l, l, l$.

Definimos W_0 como el patrón sl con la permutación inicial (que no está necesariamente en orden), y W_i como el patrón sl de la permutación después de la i -ésima transposición. También definimos a V_0 como el patrón sl de la permutación $1, 2, \dots, n-1, n$, y V_i igual a V_{i-1} reemplazando cada sl por ls (al mismo tiempo).

Las cadenas V_i cumplen con la siguiente propiedad: si hay ss o ls consecutivas entonces están en los extremos, y en medio se intercalan ss y ls .

En las cadenas V_i la s más a la derecha en V_0 alcanza la n -ésima posición en exactamente $n - k$ movimientos, porque esa s siempre está a la izquierda de una l , y en cada movimiento se intercambia con ella moviéndose un lugar a la derecha. Como comienza en la posición k , llega a la n -ésima en $n - k$ movimientos; en el último de los cuales la l más a la derecha también se mueve una posición a la izquierda. Y después de otros $k - 1$ movimientos, la l más a la derecha llega a la $(n - k)$ -ésima posición, siguiendo la misma argumentación. Entonces, después de $n - k + k - 1 = n - 1$ movimientos, tenemos que $V_{n-1} = l, l, \dots, l, s, \dots, s, s$.

Y ahora hacemos la siguiente afirmación: la j -ésima l en W_i no está más a la derecha que la j -ésima l en V_i . O en otras palabras: las l s en las W_i se mueven hacia la izquierda al menos tan rápido como las l s en V_i .

Por inducción sobre i :

- Caso base. Para $i = 0$ es trivial por definición de W_0 y V_0 .
- Hipótesis de inducción. Suponemos que es verdad para $i - 1$.
- Demostramos para i . En las W la primera l se mueve a la izquierda *al menos* de uno en uno. Para las V , la primera l se mueve a la izquierda *exactamente* de uno en uno. Por lo tanto, se cumple para $j = 1$.

Sea j la primera tal que la afirmación no se cumple; entonces la j -ésima l en W_{i-1} no se movió en el i -ésimo movimiento, mientras que la j -ésima l en V_{i-1} sí lo hizo (y exactamente un lugar, porque así se comportan las V).

Además, por hipótesis de inducción la j -ésima l en W_{i-1} está en el mismo lugar que la j -ésima l en V_{i-1} ; no puede estar más a la izquierda porque entonces el j -ésimo movimiento no podría fallar.

Pero acabamos de decir que la j -ésima l en W_{i-1} no se movió en el i -ésimo movimiento; por lo tanto *tiene que* estar precedida de una l , mientras que en V_{i-1} está precedida de una s .

Pero esto es una contradicción; querría decir que la $(j - 1)$ -ésima l en W_{i-1} está a la derecha de la $(j - 1)$ -ésima l en V_{i-1} (encerramos en una caja a la $(j - 1)$ -ésima l en cada permutación):

$$\begin{array}{rccccccc} W_{i-1} & = & \dots & \dots & \boxed{1} & l & \dots \\ V_{i-1} & = & \dots & \boxed{1} & s & l & \dots \end{array}$$

Y por lo tanto, en las W alcanzamos $n, n - 1, \dots, 2, 1$ en a lo más $n - 1$ movimientos, porque lo hacen al menos tan rápido como las V . □

Lema 3.3. Si n es par y comenzamos con $1, 2, \dots, n$, y no invertimos toda la permutación en un solo paso, entonces el número de movimientos para alcanzar $n, \dots, 2, 1$ es al menos n .

Capítulo 3. Sucesiones permisibles

Demostración. Para que alcancemos $n, n - 1, \dots, 2, 1$, necesitamos que cada número atraviese el centro en algún momento; por lo tanto debemos tener al menos n cruces en el centro (el centro es $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$; recordemos que n es par).

Una cadena que atraviese el centro (no necesariamente de forma simétrica) es invertida en un cruce en el centro. Si d es la distancia más corta de uno de los extremos de la cadena al centro, entonces hay exactamente $2d$ números que cruzan el centro en ese movimiento:

$$\begin{array}{cccc|cccc} \dots & a & b & & c & d & e & \dots \\ \dots & e & d & & c & b & a & \dots \end{array}$$

Sean d_1, \dots, d_t las d s correspondientes a cada movimiento de cruce en el centro. Por lo dicho arriba, se cumple que

$$2d_1 + \dots + 2d_t \geq n. \quad (3.1)$$

Antes del i -ésimo cruce en el centro teníamos una cadena creciente que se extiende una distancia mayor a d_i en algún lado del centro, y después del cruce en el centro, tenemos una cadena decreciente que se extiende una distancia mayor a d_i al otro lado del centro. Y como una cadena decreciente se acorta a lo más por un elemento en cada extremo por movimiento (porque en este caso sólo los extremos se pueden mover, si pertenecen a una cadena creciente), y una cadena creciente se alarga a lo más por un elemento en cada extremo por movimiento (porque el número que se mueva será parte de una cadena decreciente), entonces tenemos al menos $d_i + d_{i+1} - 1$ movimientos que no cruzan el centro entre el i -ésimo y el $(i + 1)$ -ésimo cruces por el centro.

Tenemos

$$(d_1 + d_2 - 1) + \dots + (d_{t-1} + d_t - 1)$$

movimientos que no cruzan el centro. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} & (d_1 + d_2 - 1) + \dots + (d_{t-1} + d_t - 1) = \\ & d_1 + (d_2 + d_2) + \dots + (d_{t-1} + d_{t-1}) + d_t \underbrace{- 1 - 1 \dots - 1}_{t-1} = \\ & d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_{t-1} + d_t - (t - 1). \end{aligned}$$

Por la ecuación 3.1, el número total de movimientos es mayor o igual a

$$n + 1 - d_1 - d_t.$$

(También contamos los t movimientos que ocurren en el centro)

Para completar la prueba sólo hay que demostrar que el número de movimientos antes del primer centro y el número de movimientos después del último centro son más que $d_1 + d_t - 1$.

Pero estamos haciendo todo esto en una sucesión permisible; por lo tanto nuestro primer renglón puede ser el que queramos, así que sencillamente elegimos uno que ocurra exactamente después de una transposición que atraviesa en el centro. Entonces d_t es igual a cero (porque la sucesión permisible termina justamente con un centro), y evidentemente

$$d_1 > d_1 - 1.$$

Por lo tanto el número de movimientos para alcanzar $n, \dots, 2, 1$ es al menos n . \square

Con estos dos lemas, es trivial demostrar el resultado de Ungar.

Teorema 3.3 (Ungar 1982). *Sea P un conjunto de $2n$ puntos en \mathbb{R}^2 , no todos colineales. El número de direcciones distintas generada por los puntos en P es al menos $2n$.*

Demostración. Por el último lema, hay al menos $2n$ movimientos en la sucesión permisible que resulta de secuencializar P , y cada movimiento cuenta por una pendiente o dirección distinta determinada por dos o más puntos de P . Por lo tanto, el número de direcciones distintas generada por los puntos en P es al menos $2n$. \square

A las sucesiones permisibles que vimos hasta antes de la demostración de Ungar (las que sólo intercambian dos elementos por renglón) les vamos a llamar *simples*. Dado que a partir de este momento todas las sucesiones permisibles que veremos serán simples, vamos a decirles sencillamente *sucesiones permisibles*; se dará por sentado que son simples.

Capítulo 4

Manipulando sucesiones permisibles

Ya que tenemos claro qué son las sucesiones permisibles y sus características más importantes, vamos a definir varias herramientas en torno a ellas que nos ayudarán determinar el número de líneas medianas que un conjunto de determinado tamaño puede tener.

4.1. Secuencias de Ls , Cs y Rs

Dado el semiperiodo Π de una sucesión permisible de n elementos, n par¹, llamaremos su *secuencia de Ls , Cs y Rs* a los intercambios que ocurran en las columnas $\frac{n}{2} - 1$, $\frac{n}{2}$, y $\frac{n}{2} + 1$ en Π , en el mismo orden que los renglones.

Formalmente:

Definición 4.1 (Secuencias de Ls , Cs y Rs). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible de n elementos, n par. Construiremos la secuencia S de la siguiente manera: si en el renglón i -ésimo de Π ocurrió un intercambio en la columna $\frac{n}{2} - 1$, agregamos L a S . Si ocurrió un intercambio en el centro, agregamos C . Y si ocurrió un cambio en la columna $\frac{n}{2} + 1$, agregamos R a S . En cualquier otro caso, no agregamos nada (Figura 4.1).

Llamaremos a S la *secuencia de Ls , Cs y Rs* de Π , y la denotaremos con $lr(\Pi)$.

En el ejemplo de la Figura 4.1 el semiperiodo Π comienza con un centro (una C en su secuencia), pero esto es realmente arbitrario: bien podríamos pensar que el semiperiodo comienza con el renglón donde está el intercambio $3\ 2$, y que termina con el intercambio $4\ 5$ (que sería el correspondiente inverso a $5\ 4$; recordemos que cada semiperiodo de una sucesión permisible es idéntico al anterior, pero reflejado de izquierda a derecha). Explicaremos más adelante porqué en este y todos los demás ejemplos siempre supondremos que el semiperiodo comienza (o termina; es lo mismo) con un centro.

¹Aquí sí es importante que n sea par.

Capítulo 4. Manipulando sucesiones permisibles

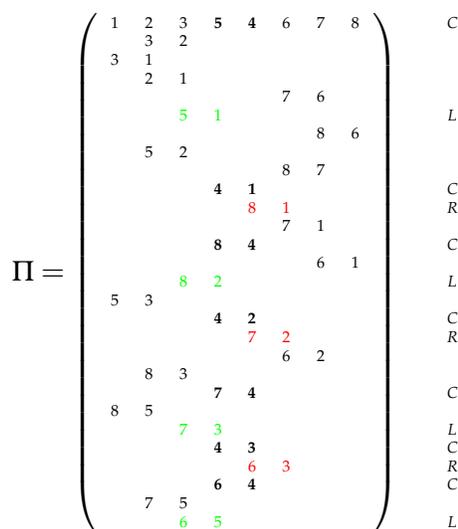


Figura 4.1: Secuencia de Ls, Cs y Rs de Π .

Resaltamos varias cosas respecto a las secuencias de Ls, Cs y Rs: por ejemplo, que no es posible que haya dos Cs consecutivas, porque eso implicaría que dos elementos se intercambian dos veces en el mismo semiperiodo. Una consecuencia inmediata de esto es que después de una C siempre ocurre una L o una R; un elemento *distinto* a los dos que hay en el centro debe entrar, y sólo puede hacerlo por la derecha (generando una R), o por la izquierda (generando una L). El inverso no es cierto: después de una L o R no siempre ocurre una C; existen secuencias que tienen varias Rs y/o Ls consecutivas. Sin embargo, en los ejemplos que estudiaremos vamos a ver que *casi* siempre ocurre una C después de una L o R. Veremos porqué más adelante.

Definición 4.2 (Ocurriencias en las secuencias). Sea S una secuencia de Ls, Cs y Rs. El número de ocurriencias de R en S lo denotaremos por $r(S)$, el número de ocurriencias de L en S por $l(S)$, y el número de ocurriencias de C en S por $c(S)$.

En general lo que nos va a interesar de las secuencias de Ls, Cs y Rs son las Cs (o centros), porque cada uno de ellos nos determina una línea mediana. Si un semiperiodo tiene una secuencia donde después de una L o R no ocurre una C, dicha secuencia se vería de la siguiente manera:

$$RCLCLCLCRC \boxed{RL} CRC \dots$$

Si vemos a las Ls y a las Rs como espacios en blanco, las Cs siguen un patrón regular (una C después de cada L o R) hasta que aparecen dos espacios seguidos; ahí es como

si se “saltaran” el lugar que deberían ocupar para seguir cumpliendo con dicho patrón. Así es como definiremos cuando después de una L o R no ocurra una C .

Definición 4.3 (Saltos). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Para cada dos elementos consecutivos de la secuencia $lr(\Pi)$ donde ambos sean distintos de C , diremos que $lr(\Pi)$ tiene un *salto*.

Si en $lr(\Pi)$ después de cada L o R siempre hay una C , diremos que *no tiene saltos*.

Si una secuencia $S = lr(\Pi)$ no tiene saltos, entonces siempre ocurre que $c(S) = l(S) + r(S)$. Más aún, como en S siempre hay una C entre cada dos L o R , entonces diremos que S es una *secuencia de L s y R s*, y la escribiremos sin utilizar ninguna C , ya que al no tener saltos sabremos que hay una C implícita entre cada dos elementos de S .

Como la sucesión permisible de la Figura 4.1 no tiene saltos, su secuencia de L s y R s sería entonces

$$L R L R L R L.$$

La secuencia de L s y R s de un semiperiodo es el inverso (o sea cambiando R s por L s y viceversa) del otro semiperiodo de una misma sucesión permisible. De igual forma, dada la periodicidad de una sucesión permisible, vamos a considerar a dos secuencias de R s y L s idénticas si podemos “rotar” una para que sea igual a la otra. Tal rotación siempre deberá ser tomando en cuenta a la secuencia de L s y R s del periodo completo de la sucesión, no sólo el semiperiodo, y consistirá en tomar los últimos k elementos de la secuencia y colocarlos al inicio.

Las secuencias de L s y R s nos interesan porque dos sucesiones permisibles que tengan la misma secuencia de L s y R s son casi idénticas para lo que nos interesa, que es contar líneas medianas.

4.2. Bloques

Si en un renglón del semiperiodo de una sucesión permisible ocurre una transposición en el centro, vamos a definir a todos los renglones anteriores donde no haya una transposición en el centro y a él como un *bloque* del semiperiodo.

Definición 4.4 (Bloques). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Supongamos que en el renglón r_j de Π ocurre un intercambio en el centro, y que r_i es el primer renglón antes de r_j con otra transposición en el centro. Llamaremos a los renglones r_{i+1}, \dots, r_j un *bloque* de Π (ver Figura 4.2).

Denotaremos por $b(\Pi)$ al número de bloques que tenga Π .

Por definición si Π es el semiperiodo de la sucesión permisible correspondiente a un conjunto de puntos P , entonces $h(P) = b(\Pi)$ (si P es un conjunto de puntos geométricos), o bien $\tilde{h}(P) = b(\Pi)$ (si P es una configuración generalizada de puntos).

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ & 3 & 2 & & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & \\ \vdots & \vdots \\ & & & 8 & 4 & & & \\ \hline & & & & & & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & & \\ & & & & & 7 & 2 & \\ & & & & & & 6 & 2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Figura 4.2: Ejemplo de un bloque en Π .

Definición 4.5 (Bloques escalonados). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Sea B uno de los bloques de Π , y sean a y b los elementos que se intercambian en el último renglón de B . Antes del intercambio entre a y b , alguno de los dos elementos entró al centro de Π (por definición). Sin perder generalidad, supongamos que a fue el que entró, y que lo hizo por la izquierda.

Diremos que B es *escalonado* si en todos los renglones del mismo los intercambios en ellos siempre incluyen a a (ver Figura 4.3).

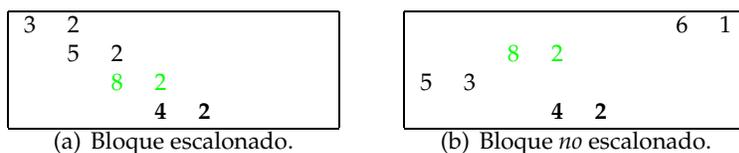


Figura 4.3: Ejemplo de un bloque escalonado y otro no escalonado.

Les decimos escalonados porque si seguimos la trayectoria de a , ésta parece formar escalones. Esto ocurre porque como todas las transposiciones involucran a un mismo elemento, este elemento sólo puede moverse en una dirección: no puede cambiar de dirección porque implicaría que hubo un intercambio con el mismo elemento en dos renglones seguidos.

A los bloques escalonados los podremos codificar de forma más eficiente, utilizando una operación que llamaremos *contracción*.

Definición 4.6 (Contracciones). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Si B es un bloque escalonado de Π , por definición un elemento a_t se va moviendo hacia el centro; sin perder generalidad supongamos que a_t se mueve hacia la izquierda. Entonces B tiene la siguiente forma:

$$B = \begin{array}{c|cccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}+2} & \dots & a_{t-2} & a_{t-1} & a_t & a_{t+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}+2} & \dots & a_{t-2} & a_t & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}+2} & \dots & a_t & a_{t-2} & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_t & \dots & a_{t-3} & a_{t-2} & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_t & a_{\frac{n}{2}+1} & \dots & a_{t-3} & a_{t-2} & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_t & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & \dots & a_{t-3} & a_{t-2} & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \end{array}$$

Si a_t se mueve $k - 1$ columnas a la izquierda en B , entonces B tiene k renglones. Siempre y cuando B sea escalonado, podremos abreviar sus k renglones en sólo dos:

$$c(B) = \begin{array}{c|cccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & a_{\frac{n}{2}+2} & \dots & a_{t-2} & a_{t-1} & a_t & a_{t+1} & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_t & a_{\frac{n}{2}} & a_{\frac{n}{2}+1} & \dots & a_{t-3} & a_{t-2} & a_{t-1} & a_{t+1} & \dots & a_n \end{array}$$

Llamaremos a esta operación una *contracción*, y $c(B)$ se leerá como B *contraído*. Si en Π reemplazamos todos sus bloques escalonados por sus respectivas contracciones, al resultado le llamaremos $c(\Pi)$, y se leerá como Π *contraído*.

A la operación inversa $e(B)$ le llamaremos una *expansión de B*.

Ambas operaciones funcionan de forma análoga cuando el elemento a_t se mueve a la derecha.

Hay un tipo más de bloques que nos van a interesar, relacionados en parte a los bloques escalonados. Les vamos a llamar *bloques codiciosos*, y los definiremos de la siguiente manera:

Definición 4.7 (Bloques codiciosos). Sea B un bloque escalonado de la sucesión permisible Π . Supongamos por ahora que a_k es el elemento de B que se mueve al centro y que lo hace por la derecha; entonces $c(B)$ es de esta forma:

$$B = \begin{array}{c|cccccc} \dots & l & r & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots \\ \dots & a_k & l & r & a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & \dots \end{array}$$

Si $a_k > l$ y $a_i < l$ para toda $i < k$, diremos que B es un *bloque codicioso*.

De igual forma, si a_k se mueve hacia el centro por la izquierda, entonces $c(B)$ es de esta forma:

$$B = \begin{array}{c|cccccc} \dots & a_k & a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 & l & r & \dots \\ \dots & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & l & r & a_k & \dots \end{array}$$

En este caso, si $a_k < r$, y $a_i > r$ para toda $i < k$, también diremos que B es un *bloque codicioso*.

Como todas nuestras sucesiones permisibles comienzan con $1\ 2\ \dots\ n-1\ n$ (excepto tal vez por una transposición en el centro), la única manera en que dos elementos $a\ b$ pueden intercambiarse es si $a < b$. Podemos pensar que en un bloque escalonado un

Capítulo 4. Manipulando sucesiones permisibles

elemento fuera del centro es “jalado” hacia él. En un bloque codicioso dicho elemento es el más cercano al centro que puede ser jalado.

El nombre de *codicioso* quedará claro en la siguiente sección.

4.3. Los algoritmos

Es mucho más fácil trabajar con los bloques de una sucesión permisible si son escalonados o codiciosos que si no lo son, porque en tal caso no sabemos casi nada del bloque excepto qué elementos se intercambian en el centro al final y (tal vez) cuál de ellos fue el que entró al centro, y por qué lado.

Con los bloques escalonados en cambio sabemos exactamente cómo se ve *todo* el bloque, y para ello sólo necesitamos fijarnos en su primer renglón y en los dos elementos centrales del último. Con los bloques codiciosos nos basta con el primer renglón y el símbolo correspondiente en la secuencia de Ls y Rs .

Nos gustaría por lo tanto poder siempre trabajar con sucesiones permisibles que consistan únicamente (o en gran mayoría) de bloques escalonados o codiciosos.

4.3.1. Normalización

Definición 4.8 (Sucesiones normalizadas). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Diremos que Π está *normalizado* si todos sus bloques (con la posible excepción del último) son escalonados.

Usamos el término *normalizadas* porque resulta que dada la secuencia de Ls y Rs de una sucesión permisible Π , siempre podemos encontrar una sucesión permisible Π' (posiblemente distinta) tal que todos sus bloques (excepto tal vez el último) son escalonados, y tal que su secuencia de Ls y Rs es idéntica a la de Π . Esto nos normaliza las sucesiones permisibles respecto a sus secuencias de Ls y Rs ; que es al fin y al cabo lo que nos va a importar al momento de querer contar su número de líneas medianas.

Teorema 4.1. *Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible sin saltos en $lr(\Pi)$. Entonces existe una sucesión permisible con semiperiodo Π' tal que $lr(\Pi) = lr(\Pi')$ y donde Π' está normalizado.*

Antes de demostrarlo formalmente, explicaremos la idea del algoritmo. Lo que queremos hacer es que para cada transposición que ocurra en el centro de Π , modificar el bloque B donde ocurre para que sólo estén transposiciones que involucren al elemento que entró al centro en algún renglón de B . O visualmente, queremos que ese elemento (llamémosle a) vaya de donde sea que esté al inicio del bloque al centro por la ruta más corta.

Veamos un ejemplo concreto: en la Figura 4.4 se muestra el semiperiodo no normalizado de una sucesión permisible sin saltos.

$$\Pi = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & 3 & 2 & & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & 7 & 6 & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & 5 & 2 & & & & 8 & 6 \\ & & & & 4 & 1 & & \\ \hline & & & & & 8 & 1 & \\ & & & & & 7 & 1 & \\ & & 8 & 4 & & & & \\ \hline & & & & & & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 2 & & & & \\ \hline & & & & 4 & 2 & & \\ & & & & & 7 & 2 & \\ & & & & & 6 & 2 & \\ & 8 & 3 & & 7 & 4 & & \\ \hline 8 & 5 & & & & & & \\ & & 7 & 3 & & & & \\ & & & 4 & 3 & & & \\ \hline & & & & 6 & 4 & 3 & \\ & & & & 6 & 4 & & \\ \hline & 7 & 5 & & & & & \\ & & 6 & 5 & & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.4: Semiperiodo Π no normalizado.

Vamos a construir Π' bloque por bloque, pero haciendo que su primer renglón sea idéntico al de Π . En el primer bloque de Π el elemento que se mueve hacia el centro es el 1; esto lo sabemos porque Π comienza con una transposición en el centro que consiste de los elementos 5 y 4, y en el siguiente centro el intercambio es entre el 4 y el 1: por lo tanto el elemento que entra es el 1. Además, el 1 entra al centro por la izquierda; esto lo sabemos porque el 4 se desplaza hacia la izquierda.

Queremos entonces mover el 1 al centro; esto quiere decir que las transposiciones 3 2, 7 6, 8 6, 5 2 y 8 7 no nos interesan. Son, por decirlo de alguna manera, desechables, y las vamos a mandar lo más lejos que se pueda. Nuestro nuevo bloque en Π' entonces sólo consistirá de los intercambios 3 1, 2 1, 5 1 y 4 1; pero ocurre algo interesante con las primeras dos. Como estamos “empujando” 3 2 hasta que lo necesitemos, esta transposición no ocurre y entonces en Π' , hasta que la necesitemos, el 3 jugará el papel del 2 y el 2 el del 3 con respecto a las transposiciones de Π . El algoritmo se encargará automáticamente de esto; sólo lo hacemos notar.

El primer bloque de Π' se vería como en la Figura 4.5.

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.5: Primer bloque de Π' ya normalizado.

En el siguiente bloque el elemento que entra al centro es el 8 y lo hace por la derecha

Capítulo 4. Manipulando sucesiones permisibles

(usando las mismas razones del bloque anterior). Ahora reutilizamos dos de las transposiciones que desechamos en el paso anterior: 8 6 y 8 7, y descartamos 7 1. Como además seguimos guardando la transposición 7 6, entonces el 6 y el 7 se intercambian (con respecto a Π). El segundo bloque de Π' se vería como la Figura 4.6.

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 6 \\ & & & 8 & 1 & & & \\ & & 8 & 4 & & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.6: Segundo bloque de Π' ya normalizado.

El siguiente elemento que entra es el 2, y lo hace por la izquierda. Desechamos 6 1 y 5 3, y utilizamos 3 2 y 5 2 de los descartados anteriormente (Figura 4.7).

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 6 \\ & & & 8 & 1 & & & \\ & & 8 & 4 & & & & \\ \hline 3 & 2 & & & & & & \\ & 5 & 2 & & & & & \\ & & 8 & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.7: Tercer bloque de Π' ya normalizado.

En el cuarto bloque entra el 7 por la derecha; descartamos 6 2 y 8 3 y reutilizamos 7 6 y 7 1 (Figura 4.8).

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 6 \\ & & & 8 & 1 & & & \\ & 8 & 4 & & & & & \\ \hline 3 & 2 & & & & & & \\ & 5 & 2 & & & & & \\ & & 8 & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 6 \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & & 7 & 2 & & & & \\ & 7 & 4 & & & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.8: Cuarto bloque de Π' ya normalizado.

Para el quinto bloque entra el 3 por la izquierda; descartamos 8 5 y reutilizamos 5 3

y 8 3 (Figura 4.9).

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 6 \\ & & & & 8 & 4 & 1 & \\ \hline 3 & 2 & & & & & & \\ & 5 & 2 & & & & & \\ & & 8 & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 6 \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & 7 & 4 & 2 & \\ \hline 5 & 3 & & & & & & \\ & 8 & 3 & & & & & \\ & & 7 & 3 & & & & \\ & & & 4 & 3 & & & \end{array} \right)$$

Figura 4.9: Quinto bloque de Π' ya normalizado.

En el sexto bloque entra el 6 por la derecha; ahora no descartamos nada, sólo reutilizamos 6 1 y 6 2 (Figura 4.10).

$$\Pi' = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 7 \\ & & & & & & 8 & 6 \\ & & & & 8 & 4 & 1 & \\ \hline 3 & 2 & & & & & & \\ & 5 & 2 & & & & & \\ & & 8 & 2 & & & & \\ & & & 4 & 2 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 6 \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & 7 & 4 & 2 & \\ \hline 5 & 3 & & & & & & \\ & 8 & 3 & & & & & \\ & & 7 & 3 & & & & \\ & & & 4 & 3 & & & \\ \hline & & & & & & 6 & 1 \\ & & & & & & 6 & 2 \\ & & & & 6 & 4 & 3 & \end{array} \right)$$

Figura 4.10: Sexto bloque de Π' ya normalizado.

Para el último bloque el 5 entra por la izquierda, y ya sólo reutilizamos 8 5, que es la única transposición que nos queda guardada de las desechadas (Figura 4.11).

Por suerte (y porque elegimos con premeditación el ejemplo) en esta ocasión *todos* los bloques de Π' son escalonados; pero en la mayoría de los casos el último bloque no lo será, pues incluirá todas las transposiciones desechadas en bloques anteriores. En estos casos acomodaremos dichas transposiciones como mejor se pueda; ninguna de ellas nos

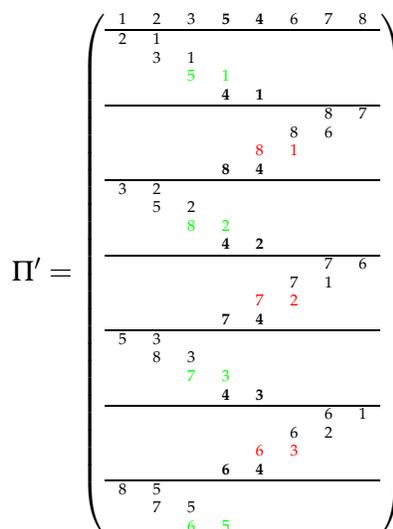


Figura 4.11: Π' normalizado.

interesa: literalmente serán desechables. Vamos a necesitar acomodarlas, porque si no Π' no sería un semiperiodo válido, pero no nos afectan en el sentido de que no generan líneas medianas nuevas; podemos verlas como ruido, o (de nuevo) como desechables.

El algoritmo también explica porqué comenzaremos (o terminaremos; es lo mismo) nuestros semiperiodos con una transposición en el centro: estamos trabajando sobre bloques todo el tiempo. Si comenzamos este algoritmo (o alguno de los que veremos más adelante) en un renglón distinto a uno que siga un centro, eso significa que no estamos al inicio de un bloque, lo que quiere decir que nos falta información de las transposiciones donde algún elemento se mueve hacia el centro.

Π' y Π tienen exactamente el mismo número de bloques, la misma secuencia de L s y R s, y por lo tanto exactamente los mismos centros. Para lo que nos interesa son iguales; sólo que es mucho más fácil trabajar con Π' y codificarla. El algoritmo para normalizar un semiperiodo se muestra en la Figura 4.12.

Primero describiremos las funciones auxiliares:

- Π, Π' y cada bloque B son arreglos bidimensionales con n columnas. $A_{[i]}$ se entiende como el i -ésimo renglón de A y $A_{[i][j]}$ como el j -ésimo elemento del i -ésimo renglón de A .
- $\text{BLOQUES}(\Pi)$ regresa Π por bloques.
- $\text{ÚLTIMOBLOQUE}(\Pi)$ regresa el último bloque de Π .
- $\text{TAMAÑO}(B)$ regresa el tamaño (número de renglones) del bloque B .

```

1: procedure NORMALIZA( $\Pi, n$ )
2:    $E \leftarrow \emptyset$ 
3:    $prev \leftarrow \Pi_{[1]}$ 
4:    $\Pi' \leftarrow \{prev\}$ 
5:   for  $B \in \text{BLOQUES}(\Pi)$  do
6:     if  $B = \text{ÚLTIMOBLOQUE}(\Pi)$  then
7:       break
8:      $bn \leftarrow \text{TAMAÑO}(B)$ 
9:     if  $\text{DERECHO}(B)$  then
10:       $a \leftarrow B_{[bn][\frac{n}{2}-1]}$ 
11:     else
12:       $a \leftarrow B_{[bn][\frac{n}{2}]}$ 
13:      $A \leftarrow \emptyset$ 
14:     for  $e \in E$  do
15:       if  $a \in e$  then
16:          $A \leftarrow A \cup \{e\}$ 
17:      $E \leftarrow E \setminus A$ 
18:     for  $r \in B$  do
19:        $t \leftarrow \text{TRANSICIÓN}(r)$ 
20:       if  $a \in t$  then
21:          $A \leftarrow A \cup \{t\}$ 
22:       else
23:          $E \leftarrow E \cup \{t\}$ 
24:      $A \leftarrow \text{ORDENA}(A, prev)$ 
25:     for  $t \in A$  do
26:        $r \leftarrow \text{RENGLÓN}(prev, t)$ 
27:        $\Pi' \leftarrow \Pi' \cup \{r\}$ 
28:        $prev \leftarrow r$ 
29:   for  $r \in B$  do
30:      $E \leftarrow E \cup \{\text{TRANSICIÓN}(r)\}$ 
31:    $\Pi' \leftarrow \Pi' \cup \text{ACOMODA}(E)$ 
32:   return  $\Pi'$ 

```

Figura 4.12: Algoritmo para normalizar semiperiodos.

- $\text{DERECHO}(B)$ nos dice si B es un bloque derecho o izquierdo; si el elemento que se mueve al centro en B lo hace por la izquierda o la derecha.
- $\text{TRANSICIÓN}(r)$ nos regresa los dos elementos de la transición que ocurre en el renglón r .
- $\text{ORDENA}(A, prev)$ ordena las transiciones en A tomando $prev$ como renglón inicial. Hay que reordenar porque, como vimos en la descripción del algoritmo arriba, es posible que varios elementos hayan intercambiado “papeles” al momento de descartar transposiciones. Esta función se encarga de que los intercambios del bloque normalizado estén en el orden en que deben de estar (el orden lo da el renglón $prev$).

Capítulo 4. Manipulando sucesiones permisibles

- $\text{RENGLÓN}(prev, t)$ regresa el renglón que sigue después de $prev$ con la transición t .
- $\text{ACOMODA}(E)$ acomoda las transiciones de E (que se entiende por “en espera”) para el último bloque de Π' . La función acomoda las últimas transposiciones cuidándose únicamente de que el último bloque sea válido y de que no sobren transposiciones.

El algoritmo de la Figura 4.12 termina porque sólo recorre conjuntos finitos. Vamos a demostrar su corrección con una serie de lemas.

Lema 4.1. *El algoritmo NORMALIZA regresa el semiperiodo de una sucesión permisible.*

Demostración. Π es el semiperiodo de una sucesión permisible, y lo único que hace el algoritmo es tomar las transposiciones de Π y reacomodarlas. Todas las transposiciones de Π' vienen del conjunto (arreglo) A , que a su vez las obtiene del bloque de Π en turno, o del conjunto (arreglo) E , que son los intercambios desechados de bloques anteriores. Por último, en el último bloque de Π' se acomodan las transposiciones de E que no se hayan utilizado en bloques anteriores.

Como Π era el semiperiodo de una sucesión permisible, esto quiere decir que tiene $\binom{n}{2}$ transposiciones, todas las cuales las utiliza Π' (y ninguna más). Por lo tanto, Π' es un semiperiodo válido de una sucesión permisible. \square

Pero Π' no sólo es un semiperiodo válido; además *todos* sus bloques (con la posible excepción del último) son escalonados.

Lema 4.2. *NORMALIZA(Π) regresa el semiperiodo de una sucesión permisible normalizada.*

Demostración. Para cada bloque B de Π (que no sea el último) tomamos el elemento a que se mueve al centro (en la línea 10 ó 12, dependiendo de si el bloque es derecho o izquierdo), y después tomamos todas las transposiciones del bloque y las que estén en espera que involucren a a . Por definición esto genera un bloque escalonado.

¿Cómo sabemos que no nos “faltan” o “sobran” transposiciones? Supongamos que “faltaran” transposiciones; esto querría decir que una transposición x y que es parte del camino de a al centro no se llevó a cabo. Pero entonces alguno de x o y tendría que ser a , y estamos usando todas las transposiciones que involucren a a , ya sea del bloque de Π o de las desechadas que guardamos en E . Tampoco es posible que x y no estuviera en el bloque o en E , porque el bloque B de Π y el equivalente bloque B' de Π' comparten el mismo renglón inicial, y en B a llega al centro, entonces x y tiene que darse en el bloque en cuestión o en alguno de los anteriores. Por exactamente la misma razón no pueden “sobrar” intercambios; dado que utilizamos los mismos intercambios de Π , en el bloque de Π' estarán las transposiciones para llevar a al centro, y ninguna más.

El último bloque no es necesariamente escalonado; pero no importa, porque sólo acomodamos las transposiciones que nos sobren de E en él. \square

Más aún; Π' tiene *exactamente* los mismos centros de Π .

Lema 4.3. $\text{NORMALIZA}(\Pi)$ *regresa el semiperiodo de una sucesión permisible con los mismos centros de Π .*

Demostración. Por el lema anterior, todos los bloques de Π' (excepto tal vez el último) tienen los mismos centros de Π . El último también; sólo hay que recordar que, para motivos del algoritmo, Π comienza con el renglón siguiente al que es $1 \ 2 \ \dots \ \frac{n}{2} \ \frac{n}{2} - 1 \ n - 1 \ n$. Para otros casos podemos pensar que ese es el primer renglón (es lo mismo); pero el algoritmo trabaja con bloques, y un centro es el *final* de un bloque, no el inicio.

Entonces ya acabamos: ambos semiperiodos empiezan (y por lo tanto terminan; ambos son semiperiodos de sucesiones permisibles) igual. Por lo tanto sus últimos renglones (que es un centro en ambos casos) son iguales. \square

Esto último implica que las secuencias de L s y R s también son idénticas.

Corolario 4.1. $\text{NORMALIZA}(\Pi)$ *tiene la misma secuencia de L s y R s que Π .*

Con lo anterior podemos ya demostrar el Teorema 4.1.

Demostración Teorema 4.1. Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible tal que $lr(\Pi)$ no tiene saltos. $\Pi' = \text{NORMALIZA}(\Pi)$ es el semiperiodo de una sucesión permisible tal que $lr(\Pi) = lr(\Pi')$, y donde Π' está normalizado. \square

4.3.2. Generando bloques codiciosos

Como veremos en el siguiente capítulo, los bloques codiciosos nos van a ser de extrema utilidad. Vamos a extender la definición de *bloque codicioso* a *semiperiodo codicioso* de la manera obvia.

Definición 4.9 (Semiperiodos codiciosos). Sea Π el semiperiodo de una sucesión permisible. Si todos (excepto tal vez el último) de los bloques de Π son codiciosos, entonces diremos que Π es un *semiperiodo codicioso*.

Abusando del lenguaje a veces diremos que Π es una *sucesión permisible codiciosa*. Nos gustaría poder tomar un semiperiodo cualquiera y transformarlo en uno codicioso, como hacemos con la normalización de la sección anterior. Lamentablemente todavía no hemos conseguido esto, aunque seguimos investigando la posibilidad.

Lo que sí podemos hacer es generar bloques codiciosos. Dado un renglón y una dirección (L o R), sólo podemos obtener un bloque codicioso válido; la misma definición de bloque codicioso nos dice cómo construirlo. A veces también ocurrirá que no podamos construirlo; esto será de particular importancia en el algoritmo que estudiaremos en el siguiente capítulo.

El algoritmo para generar un bloque codicioso a partir de un renglón y dirección dadas lo presentamos en la Figura 4.13.

Usamos $r_{[i:j]}$ para denotar el rango $[i, j]$ (inclusive) del renglón r , es decir, las posiciones $i, i + 1, \dots, j$ dentro de r . Lo que hace el algoritmo es regresarnos un renglón, que

Capítulo 4. Manipulando sucesiones permisibles

```

1: procedure CODICIOSO( $r, n, D$ )
2:    $nr \leftarrow \emptyset$ 
3:   if  $D = L$  then
4:      $i \leftarrow \frac{n}{2} - 1$ 
5:     while  $i > 0$  and  $r_{[i]} > r_{[\frac{n}{2}+1]}$  do
6:        $i \leftarrow i - 1$ 
7:     if  $i > 0$  then
8:        $nr \leftarrow r_{[1:i-1]} \cup r_{[i+1:\frac{n}{2}+1]} \cup \{r_{[i]}\} \cup r_{[\frac{n}{2}+2:n]}$ 
9:     return  $nr$ 
10:  else
11:     $i \leftarrow \frac{n}{2} + 2$ 
12:    while  $i \leq n$  and  $r_{[i]} < r_{[\frac{n}{2}]}$  do
13:       $i \leftarrow i + 1$ 
14:    if  $i \leq n$  then
15:       $nr \leftarrow r_{[1:\frac{n}{2}]} \cup \{r_{[i]}\} \cup r_{[\frac{n}{2}+1:i-1]} \cup r_{[i+1:n]}$ 
16:    return  $nr$ 

```

Figura 4.13: Algoritmo para generar semiperiodos codiciosos.

junto con el renglón r que recibe como parámetro, nos genera un bloque codicioso contraído. Para esto hay que quitar un elemento del renglón anterior, desplazar todo un rango de r a la derecha o izquierda dependiendo del caso, y recolocar el elemento en el hueco que hicimos.

Teorema 4.2. *Sea $r' = \text{CODICIOSO}(r, n, D)$. Si $r' \neq \emptyset$, entonces r y r' son los dos renglones de un bloque codicioso contraído. Si $r' = \emptyset$, entonces no existe un bloque codicioso con renglón inicial r al que desplace un elemento en la dirección D .*

Demostración. La condición del **while** para cada caso es exactamente la definición de bloque codicioso; el ciclo **while** busca el primer elemento válido de r que pueda jalarsse hacia el centro. A veces el algoritmo no podrá crear un bloque codicioso; si le piden que haga una R y todos los elementos de la mitad derecha son menores que el $\frac{n}{2}$ -ésimo elemento, no puede haber bloque codicioso con R . Pero en ese caso el **while** termina con i valiendo $n + 1$, y por lo tanto el algoritmo regresa \emptyset . Lo equivalente ocurre con L cuando los elementos de la mitad izquierda son todos mayores que el $(\frac{n}{2} + 1)$ -ésimo elemento. \square

El nombre “codicioso” viene de *algoritmo codicioso* (*greedy algorithm* en inglés). El algoritmo CODICIOSO es, por definición, un algoritmo codicioso: realiza la acción óptima para cada renglón; dados múltiples elementos que podría intentar jalar al centro, jala al primero que encuentra.

El uso de algoritmos codiciosos en sucesiones permisibles no es nuevo; la demostración del Capítulo 2 de Ungar para probar que $2n$ puntos generan $2n$ direcciones son básicamente dos algoritmos codiciosos para determinar a qué velocidad se intercambian los elementos de un renglón. En el siguiente capítulo veremos cómo usamos el algoritmo

codicioso para buscar configuraciones generalizadas de puntos óptimas en líneas medianas, y la clave de ello estará en las secuencias de R_s y L_s .

Capítulo 5

Codiciando sucesiones permisibles

Vamos ahora a ver cómo utilizar las sucesiones permisibles y los algoritmos que hemos revisado para tratar de calcular de forma precisa el número de líneas medianas que tiene un conjunto de n puntos. También vamos a extender el algoritmo codicioso del capítulo anterior para que podamos construir sucesiones permisibles con un determinado número de líneas medianas, y hacia el final del capítulo enunciaremos la conjetura que aún no hemos podido demostrar, pero que nos parece es cierta y con la cual podremos ajustar la cota (al menos) para $n = 28$.

5.1. Líneas medianas y número de cruces

Como vimos en el primer capítulo las líneas medianas y los k -conjuntos están fuertemente relacionados: las primeras son un caso particular de los segundos. Vimos también el lema de cruces, porque nos permite demostrar de forma relativamente sencilla la cota superior para k -conjuntos, pero no dijimos que ambos (líneas medianas y número de cruces) también se relacionan al momento de querer calcularlos para un conjunto de tamaño n fijo. O al menos así es con valores de n relativamente pequeños; no queda todavía claro si siga cumpliéndose para valores arbitrariamente grandes de n .

El número de cruces para un conjunto de n puntos se toma como el número de cruces de K_n , la gráfica completa de n vértices, y dependiendo de si nuestro conjunto de puntos es geométrico o generalizado, lo denotaremos con $\overline{cr}(K_n)$ y $\tilde{cr}(K_n)$ (o $\overline{cr}(n)$ y $\tilde{cr}(n)$ para abreviar).

Definición 5.1 (Máximo número de cruces). Denotaremos con $\overline{cr}(n)$ el máximo número de cruces para K_n con segmentos de línea recta, y $\tilde{cr}(n)$ el máximo número de cruces para K_n con segmentos de pseudolíneas.

También definiremos $\mathcal{N}_k(n)$ como el mínimo número de k -conjuntos y $\mathcal{N}_{\leq k}(n)$ como el mínimo número de $\leq k$ -conjuntos.

Definición 5.2 (Máximo número k -conjuntos). Denotaremos con $\mathcal{N}_k(n)$ el máximo número de k -conjuntos para un conjunto generalizado de n puntos, y $\mathcal{N}_{\leq k}(n)$ el máximo número de $\leq k$ -conjuntos para un conjunto generalizado de n puntos.

También extenderemos la definición de h y \tilde{h} para que $h(n)$ denote el máximo número de líneas medianas de un conjunto de n puntos geométricos, y que $\tilde{h}(n)$ denote el máximo número de pseudolíneas medianas de una configuración generalizada de n puntos. Debe ser trivial el ver de que $h(n) \leq \tilde{h}(n)$ y que $\bar{c}r(n) \geq \tilde{c}r(n)$.

En un momento veremos cómo relacionamos el máximo número de cruces con el máximo número de k -conjuntos; como ha quedado claro desde el primer capítulo, el máximo número de líneas medianas es un caso particular del último. Pero antes haremos una rápida revisión de los resultados que se conocen hasta ahora.

5.1.1. Dos modos de calcular el número de cruces

Aunque ha habido varios grupos de trabajo que se han dedicado al problema del máximo número de líneas medianas y k -conjuntos, en fechas muy recientes dos equipos se han destacado por obtener los últimos resultados en el tema.

Por un lado, Oswin Aichholzer y otros han ido generando una base de datos con las mejores construcciones geométricas conocidas para conjuntos de hasta 100 puntos [5]¹, y usando eso y la clasificación de todos los tipos de orden de hasta 11 puntos han conseguido acotar (en algunos casos de forma justa) el máximo número de cruces y líneas medianas de varios conjuntos.

Por otro lado, Bernardo Ábrego, Silvia Fernández-Merchant y otros [4] han utilizado técnicas relacionadas con sucesiones permisibles para extender los resultados de Aichholzer a configuraciones generalizadas de puntos (los casos no rectilíneos), para ajustar varias cotas que aún no lo estaban, y para calcular de forma independiente el máximo número de cruces y líneas medianas de otros conjuntos.

El trabajo de ambos equipos ha permitido determinar de forma exacta el número de cruces y líneas medianas, en el caso geométrico y generalizado, para conjuntos de hasta 27 puntos.

Antes de ver en detalle este resultado, vamos a repasar quiénes y cuándo consiguieron los resultados que le precedieron.

Para n entre 2 y 8 los valores de $h(n)$ son fáciles de calcular incluso a mano, y como por un resultado de Goodman y Pollack [21] se sabe que todas las configuraciones generalizadas de puntos de hasta 8 puntos son rectificables, entonces $h(n) = \tilde{h}(n)$ para $n \leq 8$.

En 1992 David Eppstein encontró conjuntos de n puntos con n par entre 10 y 18 con muchas líneas medianas [19], en particular alcanzando la cota superior para $\tilde{h}(10)$ que Gerd Stöckl publicó en su tesis de doctorado en 1984 [33].

¹Mejores en el sentido de que maximizan el número de cruces.

En 1998 Artur Andrzejak y Boris Aronov demostraron que $h(12) = 18$, y Alina Beygelzimer junto con Stanislaw Radziszowski extendieron este resultado en 2002 para demostrar que $\tilde{h}(12) = 18$, también probando que $h(14) = 22$.

Para el caso impar, Oswin Aichholzer, Jesús García, David Orden y Pedro Ramos encontraron cotas justas para $h(n)$ con n impar para $11 \leq n \leq 21$.

El número de cruces $\overline{cr}(n)$ es fácil de determinar para $n \leq 7$. En 1971 Richard Guy calculó $\overline{cr}(8)$ y $\overline{cr}(9)$ [24], y no fue sino hasta el año 2001 que Alex Brodsky, Stephane Durocher y Ellen Gethner determinaron $\overline{cr}(10)$ [15]. De forma independiente Aichholzer, Franz Aurenhammer y Hannes Krasser [6] obtuvieron ese valor en el año 2006 a través de la clasificación de todos los tipos de orden con 11 puntos o menos, y también encontraron $\overline{cr}(11)$ y $\overline{cr}(12)$.

En 2007 Aichholzer y Krasser usaron esa misma base de datos para ampliar el rango de valores conocidos hasta $n \leq 17$ [8]. En la segunda mitad del 2006 usaron esa misma técnica y un algoritmo distribuido en muchísimas máquinas de voluntarios a través de Internet para poder calcular finalmente $\overline{cr}(18) = 1029$ [5].

Para configuraciones generalizadas de puntos no se hizo mucho hasta antes del 2006. En ese año Bernardo Ábrego, Jozsef Balogh, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leños y Gelasio Salazar demostraron que $\overline{cr}(n) = \tilde{cr}(n)$ para $n \in \{10, 11, 12, 15\}$ [2], y Aichholzer, García, Orden y Ramos encontraron una demostración analítica (sin utilizar la computadora) para $\overline{cr}(14)$ y $\overline{cr}(n)$ para n impar entre 11 y 17, además de determinar $\overline{cr}(19)$ y $\overline{cr}(21)$ [7].

Extendiendo estos últimos resultados a configuraciones generalizadas de puntos, Ábrego, Balogh, Fernández-Merchant, Leños y Salazar demostraron que $\overline{cr}(n) = \tilde{cr}(n)$ para n impar entre 11 y 21 [1].

La Figura 5.1 muestra un resumen de los valores conocidos para estas funciones.

n	$\overline{cr}(n)$ $\tilde{cr}(n)$	$\tilde{h}(n)$ $h(n)$	$\overline{cr}(n)$	$\tilde{cr}(n)$	$h(n)$	$\tilde{h}(n)$
≤ 9			Guy 1971 [24]	Guy 1971 [24]	fácil	fácil
10	62	13	Aichholzer et al. 2006 [6]†, Brodsky et al. 2001 [15]	Ábrego et al. 2006 [2]	Eppstein 1992 [19]	Stöckl 1984 [33]
11	102	24	Aichholzer et al. 2006 [6]†, Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [2]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]
12	153	18	Aichholzer et al. 2006 [6]†	Ábrego et al. 2006 [2]	Eppstein 1992 [19], Andrzejak et al. 1998 [10]	Beygelzimer et al. 2002 [12]
13	229	31	Aichholzer et al. 2007 [8]†, Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]
14	324	22	Aichholzer et al. 2007 [8]†, Aichholzer et al. 2006 [7]		Eppstein 1992 [19], Beygelzimer et al. 2002 [12]	
15	447	39	Aichholzer et al. 2007 [8]†, Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [2]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]
16	603		Aichholzer et al. 2007 [8]†			
17	798	47	Aichholzer et al. 2007 [8]†, Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]
18	1029		Aichholzer 2006 [5]†			
19	1318	56	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]
21	2055	66	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]	Aichholzer et al. 2006 [7]	Ábrego et al. 2006 [1]

†Prueba por computadora basada en la base de datos del tipo de orden.

Figura 5.1: Valores conocidos y referencias.

5.1.2. Los resultados para $n \leq 27$

Recordemos del tercer capítulo que una transposición en la k -columna de Π es equivalente a una $(k-1)$ -pseudoarista de la configuración generalizada de puntos P correspondiente a Π ; que además corresponde con la $(k-1)$ -arista (recta) si Π es rectificable. Vamos a llamar a las transposiciones que ocurran en la columna i como i -críticas, y denotaremos con $\mathcal{N}_k(\Pi)$ y $\mathcal{N}_{\leq k}(\Pi)$ al número de transposiciones k -críticas y $(\leq k)$ -críticas en Π respectivamente.

La idea de la demostración (autoría de Ábrego, Fernández-Merchant, Leños y Salazar [4]) es muy sencilla; se acota por debajo $\mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi)$, y utilizando las construcciones obtenidas por Aichholzer et al. se ve que dichas cotas son justas hasta $n \leq 27$, lo que da el resultado deseado.

La demostración utiliza dos resultados; el primero de ellos obtenido por Ábrego y Fernández-Merchant en 2005 [3], y de forma independiente por Lovász, Katalin Vesztergombi, Uli Wagner y Welzl en 2004 [28], es el que nos relaciona el número de cruces con el número de k -pseudoaristas (o transposiciones k -críticas):

$$\tilde{cr}(\Pi) = 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (k-1)(n-k-1) \mathcal{N}_k(\Pi),$$

o equivalentemente:

$$\tilde{cr}(\Pi) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (n-2k-1) \mathcal{N}_{\leq k}(\Pi) - \frac{3}{4} \binom{n}{3} + (1 + (-1)^{n-1}) \frac{1}{8} \binom{n}{2}. \quad (5.1)$$

El segundo resultado es la mejor cota inferior para $\mathcal{N}_{\leq k}(\Pi)$, obtenida recientemente por Ábrego et al. en 2006 [1]. Esta cota fue obtenida primero únicamente para el caso geométrico por Aichholzer et al. en 2006 [7]:

$$\mathcal{N}_{\leq k}(S) \geq 3 \binom{k+1}{2} + 3 \binom{k+1 - \lfloor n/3 \rfloor}{2} - \max\{0, (k - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)\}. \quad (5.2)$$

La cota inferior para $\mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi)$ es la siguiente:

Teorema 5.1. *Sea Π una sucesión permisible asociada a una configuración generalizada de n puntos. Entonces*

$$\mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) \rfloor & \text{si } n \text{ es par,} \\ \lfloor \frac{2}{3} \binom{n}{2} - \frac{2}{3} \mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) + \frac{1}{3} \rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Demostración. Para n par vamos a demostrar que debe haber al menos una transposición $(n/2 - 1)$ -crítica entre cualesquiera dos transposiciones $n/2$ -críticas consecutivas τ_i y τ_j ($i < j$). Sean a b los dos elementos que se intercambian en τ_i ; entonces antes de τ_j uno de a o b debe haber dejado el centro. Esto significa que hay al menos una transposición $(n/2 - 1)$ -crítica entre τ_i y τ_j . Para cualquier semiperiodo ocurre lo mismo entre la última y la primera transposición $n/2$ -crítica. Por lo tanto

$$\mathcal{N}_{n/2}(\Pi) \leq \mathcal{N}_{n/2-1}(\Pi).$$

Ya que $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor}(\Pi) = \binom{n}{2}$ entonces $\mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi) \leq \binom{n}{2} - \mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi)$ y el resultado se sigue.

Para n impar sean $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_w$ con $w = \mathcal{N}_{(n-3)/2}(\Pi)$ las transposiciones $(n-3)/2$ -críticas de un semiperiodo Π ordenadas respecto a cómo ocurren en Π . Supongamos sin pérdida de generalidad que la primera transposición de Π es τ'_i . Sea b_i el número de transposiciones $(n-1)/2$ -críticas que ocurren después de τ'_i y antes de τ'_{i+1} (o el final del semiperiodo si $i = w$).

Hay que resaltar que $b_i \leq 3$ ya que los tres elementos en el centro (estamos en el caso impar; el centro ocurre en las columnas $\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}, y \frac{n}{2} + 1$, o en otras palabras en las columnas $(n \pm 1)/2$ y $(n + 3)/2$) permanecen en el centro entre dos transposiciones $(n-3)/2$ -críticas consecutivas. Vamos a probar que si $b_i = b_j = 3$ para alguna $i < j$ y ninguna otra b en medio es igual a 3, entonces existe alguna l entre i y j tal que $b_l \leq 1$. Y por tanto a lo más una $b_i = 3$ o el promedio de b_1, b_2, \dots, b_2 es menor o igual que 2. Por lo tanto

$$\mathcal{N}_{(n-1)/2}(\Pi) = \sum_{i=1}^w b_i \leq 2w + 1 = 2\mathcal{N}_{(n-3)/2}(\Pi) + 1.$$

Primero hay que notar que $j \neq i + 1$ ya que los tres elementos en el centro se intercambiaron entre τ'_i y τ'_{i+1} y dos de ellos permanecen en el centro entre τ'_{i+1} y τ'_{i+2} (o al final de Π). Esto es, $b_{i+1} \leq 2$. Supongamos que $b_l = 2$ para toda $i < l < j$. Entonces una de las tres transposiciones después de τ'_j no involucra al nuevo elemento que termina en el centro en τ'_j . Por lo tanto esta transposición puede ocurrir justo después de τ'_j sin modificar $\mathcal{N}_k(\Pi)$ (las otras dos transposiciones se intercambian). Pero ahora $b_{j-1} = 3$, o en otras palabras, el espacio entre "tercias" se ha reducido. Podemos repetir esto hasta que $b_{i+1} = 3$, lo cual es imposible; contradicción.

Por lo tanto, ya que $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor}(\Pi) = \binom{n}{2}$ entonces

$$3\mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi) \leq 2\binom{n}{2} - 2\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) + 1,$$

y el resultado se sigue. □

Capítulo 5. Codiciando sucesiones permisibles

El Teorema 5.1 da una nueva cota superior para $\tilde{h}(n)$ si usamos la cota en 5.2 para $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi)$. Los valores numéricos de esta cota en nuestro rango de interés se muestran en la Figura 5.2.

n	14	16	18	20	22	23	24	25	26	27
$h(n) = \tilde{h}(n)$	22	27	33	38	44	75	51	85	57	96
$\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(n)$	69	93	120	152	187	178	225	215	268	255
$\overline{cr}(n) = \tilde{cr}(n)$	324	603	1029	1657	2528	3077	3699	4430	5250	6180

Figura 5.2: Nuevos valores conocidos.

Del Teorema 5.1 y el hecho de que $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(\Pi) = \binom{n}{2} - \mathcal{N}_{\lfloor n/2 \rfloor}(\Pi)$ obtenemos la siguiente cota inferior:

$$\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(\Pi) \geq \begin{cases} \lceil \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) \rceil & \text{si } n \text{ es par,} \\ \lceil \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \frac{2}{3} \mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) - \frac{1}{3} \rceil & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora, si aplicamos la cota en 5.2 para $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi)$, tenemos para $n \geq 10$:

$$\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(n) \geq \begin{cases} \binom{n}{2} - \lfloor \frac{1}{24}n(n+30) - 3 \rfloor & \text{si } n \text{ es par,} \\ \binom{n}{2} - \lfloor \frac{1}{18}(n-3)(n+45) + \frac{1}{9} \rfloor & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Esta nueva cota es al menos tan buena como 5.2 con $k = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ para toda $n \geq 10$ par y toda $n \geq 21$ impar. En la Figura 5.2 mostramos las cotas obtenidas para nuestro rango de valores de n . También podemos calcular una nueva cota inferior para $\tilde{cr}(n)$ usando 5.1 con $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor}(n) = \binom{n}{2}$, la cota previa para $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(n)$, y 5.2 para $k \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2$.

Todas las cotas mostradas en la Figura 5.2 se pueden alcanzar con las construcciones de Aichholzer et al. [5], y por lo tanto la Figura 5.2 de hecho muestra los valores exactos de $h(n)$, $\tilde{h}(n)$, $\mathcal{N}_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 1}(n)$, $\overline{cr}(n)$ y $\tilde{cr}(n)$ para las n en el rango especificado.

Para $28 \leq n \leq 33$ se muestra en la Figura 5.3 la distancia reducida en las cotas superiores e inferiores de $h(n)$, $\tilde{h}(n)$, $\overline{cr}(n)$ y $\tilde{cr}(n)$ (hay que recordar que $h(n) \leq \tilde{h}(n)$ y que $\overline{cr}(n) \geq \tilde{cr}(n)$).

n	28	29	30	31	32	33
$h(n) \geq$	63	105	69	115	73	126
$\tilde{h}(n) \leq$	64	107	72	118	79	130
$\overline{cr}(n) \geq$	7233	8419	9723	11207	12827	14626
$\tilde{cr}(n) \leq$	7234	8423	9726	11213	12836	14634

Figura 5.3: Nuevas cotas reducidas.

5.2. Buscando secuencias

Como ya vimos las sucesiones permisibles nos ayudaron a demostrar el resultado que nos permitió ajustar las cotas que existían hasta $n = 27$. Pero utilizando los algoritmos que presentamos el capítulo anterior vamos a poder usarlas para encontrar de hecho ejemplos que cumplan las cotas que ya demostramos existen. Y con ello además estaremos a un paso de poder ajustar otras cotas.

5.2.1. Extendiendo la codicia

El algoritmo codicioso del capítulo anterior nos permitía construir un bloque codicioso contraído utilizando sólo un renglón y una dirección (derecha o izquierda). Teniendo esto es muy natural preguntarse qué podemos conseguir si, en lugar de obtener la secuencia de Ls y Rs de una sucesión permisible, mejor construimos una sucesión permisible codiciosa a partir de una secuencia de Ls y Rs dada.

Por supuesto, al igual que no siempre podemos obtener un bloque codicioso (a lo mejor ya no podemos jalar un elemento al centro en la dirección que se nos pide), tampoco podremos construir una sucesión permisible codiciosa para *cualquier* secuencia de Ls y Rs ; pero cuando sí se pueda será relativamente sencillo.

En la Figura 5.4 se muestra el algoritmo que extiende al codicioso para construir una sucesión permisible a partir de una secuencia de Ls y Rs .

```

1: procedure CODICIOSOEXTENDIDO( $S, n$ )
2:    $r \leftarrow \{1..n\}$ 
3:   INTERCAMBIA( $r_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, r_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ ) ▷ Siempre empezamos con un centro.
4:    $\Pi \leftarrow \{r\}$ 
5:    $k \leftarrow \text{TAMAÑO}(S)$ 
6:   for  $i = 1$  to  $k$  do
7:      $d \leftarrow S_{[i]}$ 
8:      $r \leftarrow \text{CODICIOSO}(r, n, d)$ 
9:     if  $r = \emptyset$  then
10:      if  $i = k$  and  $\text{ÚLTIMOMOVIMIENTO}(\Pi) = d$  then
11:        return  $\Pi$ 
12:      else
13:        return  $\emptyset$ 
14:       $\Pi \leftarrow \Pi \cup \{r\}$ 
15:   return  $\emptyset$ 

```

Figura 5.4: Algoritmo para generar una sucesión permisible a partir de una secuencia de Ls y Rs .

Explicamos rápidamente el algoritmo; primero que nada, siempre empezamos (o terminamos; puede verse de ambas formas) con un centro. Después lo único que hacemos es ir generando los renglones de los demás centros utilizando el algoritmo codicioso del

Capítulo 5. Codiciando sucesiones permisibles

capítulo anterior. Esto nos va a ir generando una sucesión permisible contraída donde sólo estarán los renglones de los centros; como todos los bloques de Π (con la posible excepción del último) son codiciosos, ello nos permite generar los bloques completos.

El último bloque es posible que no sea codicioso, y entonces CODICIOSO regresará \emptyset . En ese caso sólo revisamos que sólo haya que acomodar los elementos del último bloque (la basura) generándonos una L o R en la secuencia de L s y R s; si esta última L o R es igual a d , ya terminamos y regresamos Π . En cualquier otro caso regresamos \emptyset porque no podemos construir una Π válida.

La función ÚLTIMOMOVIMIENTO es importante porque además de determinar la dirección del último bloque, comprueba que los n elementos se hayan invertido; que los menores o iguales a $\frac{n}{2}$ estén en la mitad derecha y el resto en la mitad izquierda del renglón. Si esto ocurre, Π es una sucesión permisible válida porque ya se habrán intercambiado todos los elementos, excepto unos cuantos (la basura) que hay que acomodar en el último bloque. Es justo por esto que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2. *El algoritmo CODICIOSOEXTENDIDO regresa una sucesión permisible válida o \emptyset .*

Demostración. Se sigue de lo que dijimos arriba; estamos garantizando que se intercambien todos los elementos entre sí. \square

Veamos un ejemplo de cómo funciona el algoritmo CODICIOSOEXTENDIDO; suponiendo que nos dan la secuencia $rl S = \{R, R, L, R, L, L, R, R, L\}$ y $n = 8$, el algoritmo se ejecutaría de la siguiente manera. Primero, siempre comenzamos (o terminamos; es lo mismo) con el mismo renglón; los n elementos en orden, excepto $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$, que están intercambiados:

$$\left(\underline{1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8} \right)$$

El primer elemento de la secuencia es R ; entonces debemos buscar en los elementos a la derecha del centro el primero que sea mayor que 5. El elemento es el 6, así que lo jalamos al centro:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 6 & 4 & & \\ & & & 6 & 5 & & & \end{array} \right)$$

Realmente el algoritmo sólo nos regresa el último renglón del bloque, el que contiene al centro $6 \ 5$; pero aquí vamos a expandir los bloques contraídos para facilitar la visualización.

El siguiente elemento de la secuencia es R de nuevo; buscamos el primer elemento a la derecha del centro que sea mayor que 6. Es 7, y lo jalamos al centro:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 6 & 4 & & \\ & & & 6 & 5 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 & 5 & & \\ & & & 7 & 6 & & & \end{array} \right)$$

Después sigue una *L*; buscamos el primer elemento a la *izquierda* del centro que sea *menor* a 6; es 3, y lo jalamos al centro:

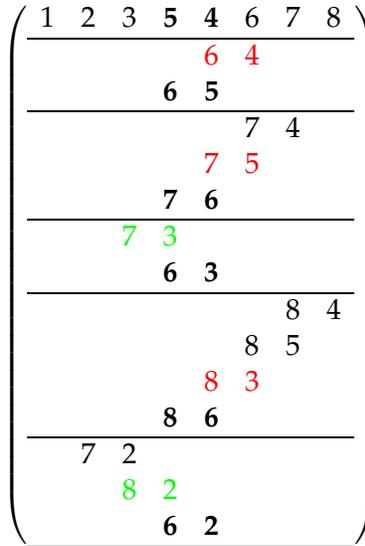
$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 6 & 4 & & \\ & & & 6 & 5 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 & 5 & & \\ & & & 7 & 6 & & & \\ \hline & & 7 & 3 & & & & \\ & & 6 & 3 & & & & \end{array} \right)$$

Sigue otra *R*; buscamos el primer elemento a la derecha mayor que 6, vemos que es 8, y lo jalamos al centro:

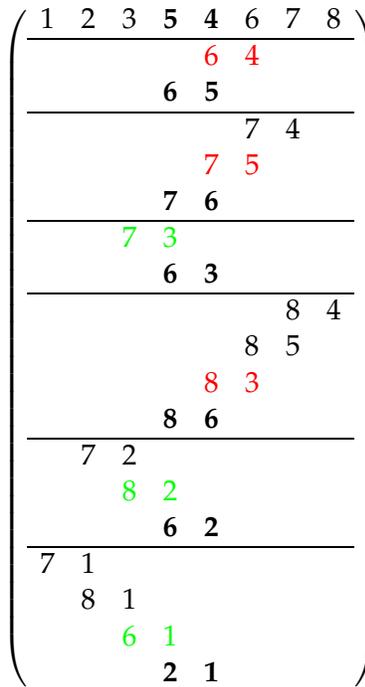
$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 6 & 4 & & \\ & & & 6 & 5 & & & \\ \hline & & & & & & 7 & 4 \\ & & & & 7 & 5 & & \\ & & & 7 & 6 & & & \\ \hline & & 7 & 3 & & & & \\ & & 6 & 3 & & & & \\ \hline & & & & & & 8 & 4 \\ & & & & & & 8 & 5 \\ & & & & 8 & 3 & & \\ & & 8 & 6 & & & & \end{array} \right)$$

Otra *L*; a la izquierda del centro el primer elemento menor que 6 es 2, así que lo jalamos al centro:

Capítulo 5. Codiciando sucesiones permisibles



Sigue otra L ; el primer elemento a la izquierda del centro menor a 2 es 1, y lo jalamos:



Una R ; el primer elemento a la derecha del centro mayor a 2 es 3, y lo jalamos al centro:

1	2	3	5	4	6	7	8
				6	4		
			6	5			
						7	4
				7	5		
			7	6			
		7	3				
			6	3			
							8
							4
							8
				8	3		
			8	6			
7	2						
		8	2				
			6	2			
7	1						
	8	1					
		6	1				
			2	1			
				3	1		
			3	2			

Otra R más; el primer elemento a la derecha del centro mayor que el 3 es el 5, que jalamos al centro:

1	2	3	5	4	6	7	8
				6	4		
			6	5			
						7	4
				7	5		
			7	6			
		7	3				
			6	3			
							8
							4
							8
				8	3		
			8	6			
7	2						
		8	2				
			6	2			
7	1						
	8	1					
		6	1				
			2	1			
				3	1		
			3	2			
							5
							1
				5	2		
			5	3			

Capítulo 5. Codiciando sucesiones permisibles

Aquí el algoritmo nota que sólo falta una R para terminar con la secuencia. En este ejemplo, habiendo sido elegido con premeditación, podemos hacer que el último bloque (que tiene que ser R por la secuencia) también sea codicioso porque el 4 no se ha intercambiado con el 1, ni con el 2 ni con el 3 (ni tampoco con el 5, si nos olvidamos del primer renglón; que podemos hacerlo si ahora lo consideramos el último invertido). Pero al algoritmo le basta poder comprobar que se puede realizar una R más, y realizar cualquier intercambio que haga falta.

El teorema 5.2 nos da un corolario, que es realmente lo que nos interesa del algoritmo extendido.

Corolario 5.1. *Sea S una secuencia de L s y R s sin saltos con k elementos. Si CODICIOSO-EXTENDIDO(S, n) regresa una sucesión permisible Π (y no \emptyset), entonces Π tiene k líneas medianas.*

El resultado es obvio; si construimos una sucesión permisible con k bloques, entonces tiene k centros y por lo tanto k líneas medianas. Lo cual es muy conveniente; si podemos encontrar una secuencia de L s y R s de un tamaño que nos interese tal que nuestro algoritmo codicioso extendido le construya una sucesión permisible, entonces podemos ajustar varias de las cotas que todavía no son justas.

Y por supuesto lo mejor de todo es que podemos automatizar esta búsqueda; si codificamos las L s como 0s y las R s como 1s, entonces una secuencia de L s y R s de k elementos se convierte en un número entero binario de k bits. Y probar todas las secuencias posibles de k elementos es sencillamente correr el algoritmo codicioso extendido 2^k veces. De hecho es menos, con algunos atajos técnicos que describiremos un poco más adelante; pero sigue siendo exponencial (el problema es NP-Completo; no podíamos esperar mejor).

Por suerte las k con las que trabajamos no son *tan* grandes, y es *trivial* paralelizar el algoritmo distribuyendo en varias máquinas el espacio de búsqueda. Que es justo lo que hicimos en California.

5.2.2. El experimento en California

Durante mi estancia de investigación en la California State University, Northridge, utilizamos cinco semanas para correr el algoritmo codicioso extendido en 32 computadores de uno de los laboratorios de la universidad. De forma intermitente porque el laboratorio era usado para algunas clases.

Utilizamos una implementación optimizada del algoritmo en C que para conjuntos con n menor a 20 fue capaz de encontrar las sucesiones permisibles codiciosas con el número requerido de líneas medianas en segundos; y con n menor o igual a 24 en horas. Dado que ya se conocían los resultados hasta $n = 27$, decidimos ejecutar el algoritmo para $n = 28$.

Hubo que hacer ciertos cambios; para $n = 28$ los mejores ejemplos que se conocen tienen *exactamente* un salto, así que tuvimos que tomar eso en cuenta (lo cual es muy

sencillo; en lugar de comenzar únicamente con un centro, comenzamos con un centro, el salto y otro centro). También dado que siempre podemos garantizar que al menos dos L s o dos R s estarán juntas pudimos eliminar dos bits del espacio total de búsqueda.

Al final corrimos el algoritmo con un espacio de búsqueda de 63 bits para buscar una secuencia de L s y R s de 65 elementos con un salto; que si la hubiéramos encontrado nos hubiera dado una sucesión permisible con 64 centros y entonces habríamos podido ajustar la cota que demostramos en la sección anterior.

Tal cual describimos el algoritmo más arriba hubiera comprobado $2^{63} - 1 = 9, 223, 372, 036, 854, 775, 807$ secuencias de L s y R s (donde además cada comprobación es $O(n^3)$). Pero una de las ventajas del algoritmo es que una vez que una subsecuencia falla, podemos garantizar que si existe una secuencia que sí funcione entonces no contendrá la subsecuencia que falló. Esto nos permitió hacer *backtracking* para eliminar un número no trivial de secuencias. Lamentablemente, interesados como estábamos en que el algoritmo terminara lo más rápidamente posible, no se nos ocurrió guardar las secuencias descartadas.

El algoritmo se ejecutó sin parar durante cinco semanas; cuando no usaban el laboratorio u ocurría algo que hacía que las máquinas se reiniciaran. Se implementó un pequeño servidor central (en Java) que se encargaba de mandarle a una máquina que lo solicitara el rango de enteros (recordemos que codificamos cada secuencia de L s y R s como un entero binario) que le tocaba, y a donde se enviarían las secuencias si se llegaba a encontrar alguna. Ninguna se encontró, que ciertamente era lo que sospechábamos ocurriría.

A unos cuantos días de tener que regresar a México el algoritmo por fin terminó, de forma ligeramente anticlimática al no encontrar ninguna secuencia. Además de que analizando con cuidado el programa vimos que no recorrimos *todo* el espacio de búsqueda que debimos haber recorrido: el salto puede ser $R R$, $R L$, $L R$ o $L L$; realmente sólo hay que comprobar $R R$ y $R L$, por la simetría entre semiperiodos, pero de cualquier forma nos faltaron los saltos de la forma $R L$, que calculamos deberán tomar más o menos la mitad del tiempo que utilizamos en California. A menos que el *backtracking* acelerara esa ejecución en particular.

De cualquier forma el algoritmo es un avance substancial sobre el que están utilizando Aichholzer et al., que distribuyen su ejecución en *cientos* de computadoras y tardan *meses* en regresar un resultado. El algoritmo codicioso extendido es trivial de paralelizar (sólo hay que dividir el espacio de búsqueda), y es no sólo muy sencillo de entender, sino que es (para un problema NP-Completo) relativamente rápido.

Pero además, aunque no encuentre nada el algoritmo seguirá siendo de mucha importancia cuando logremos demostrar la conjetura, que será lo que veremos ahora.

5.3. La conjetura

El experimento en California (aunque sin duda interesante por sí mismo) no deja de ser sólo un ejercicio mientras no demos la siguiente conjetura.

Capítulo 5. Codiciando sucesiones permisibles

Conjetura 5.1. *Sea P un conjunto generalizado de n puntos (n par) óptimo en líneas medianas. Entonces P tiene asociada a él una sucesión permisible Π codiciosa.*

Lo que nos dice la conjetura, en otras palabras, es que si corremos el algoritmo codicioso extendido para *todas* las posibles secuencias de R s y L s de tamaño k , y con *ninguna* de ellas podemos construir una sucesión permisible de tamaño n , entonces el número máximo de líneas medianas para conjuntos generalizados de puntos de tamaño n es menor que k .

O todavía en otras palabras: el algoritmo codicioso extendido encuentra las sucesiones permisibles óptimas en líneas medianas, y si no puede encontrarlas entonces *no existen*. Con lo cual en particular el experimento en California confirmaría que el máximo número de líneas medias para $n = 28$ es exactamente 63.

El resultado es muy fuerte, pero toda la evidencia disponible apunta a que es cierto. En particular para $n \in \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26\}$ el algoritmo ha confirmado las cotas justas conocidas. Y lo ha hecho en un tiempo *sorprendentemente* corto: para $n < 20$ el algoritmo tarda segundos, para $n = 22$ minutos, y para $n = 24$ horas; sin paralelizar además.

Tenemos varias líneas de investigación para demostrar la conjetura, y seguimos trabajando en el problema. Una vez demostrada y con suficiente poder de cómputo podremos ajustar varias de las cotas que hasta el momento siguen abiertas, y posiblemente descubrir algunas nuevas.

Capítulo 6

Desenterrando diamantes

Vamos a suponer que tenemos un diamante enterrado debajo de varias rocas, y que disponemos de una grúa que nos permite quitar una piedra a la vez, elevándola verticalmente; por supuesto, sólo podemos levantar una piedra si ninguna otra la está bloqueando. Queremos alcanzar el diamante moviendo el menor número de piedras.

Podemos modelar este problema en \mathbb{R}^2 si pensamos que las piedras y el diamante son convexos con interiores disjuntos e intersecándose en a lo más un punto. Planteado así, es bastante sencillo de resolver: trazamos líneas verticales tangentes al convexo que representa nuestro diamante, y vemos qué otros convexos intersecan esa franja por arriba de él. Tenemos que quitar todos esos convexos, así que repetimos el procedimiento para determinar qué otros convexos los bloquean; y así hasta que ya no haya convexos que bloqueen.

Para hacer el problema más interesante, supongamos que podemos elegir la dirección en que vamos a mover los convexos; que no tenga que ser vertical de abajo hacia arriba necesariamente. La pregunta natural que surge es: ¿cuál es la dirección que minimiza el número de rocas a mover?

6.1. Definiciones

Vamos a llamar a nuestro conjunto de n convexos $C = \{m_1, \dots, m_n\}$, y recordemos que todos tienen interiores disjuntos y se intersecan unos a otros en a lo más un único punto.

Definición 6.1 (Vecinos). Diremos que un convexo m_j es *visible* a otro convexo m_i si y sólo si podemos trazar un segmento de recta s de un punto de m_i a un punto de m_j de tal forma que s no interseque a ningún otro convexo (ver Figura 6.1).

Dado un convexo m , llamaremos los *vecinos de m* a todos los convexos en C tales que sean visibles a él.

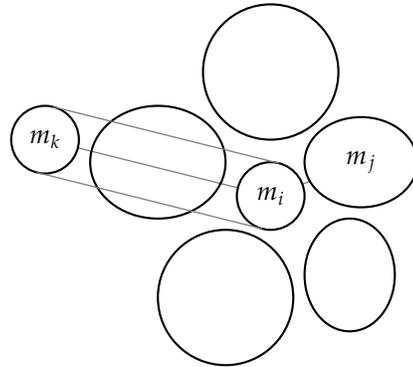


Figura 6.1: m_i puede ver a m_j , pero no a m_k .

Evidentemente un convexo bloquea a otro directamente en una dirección dada si y sólo si son vecinos. Formalmente:

Definición 6.2 (Bloqueos). Dada una dirección α entre 0 y 2π , diremos que un convexo m_j bloquea a su vecino m_i en la dirección α si podemos trazar un segmento de recta de algún punto de m_i a un punto de m_j de tal forma que el ángulo entre el eje de las x y dicho segmento sea α (ver Figura 6.2).

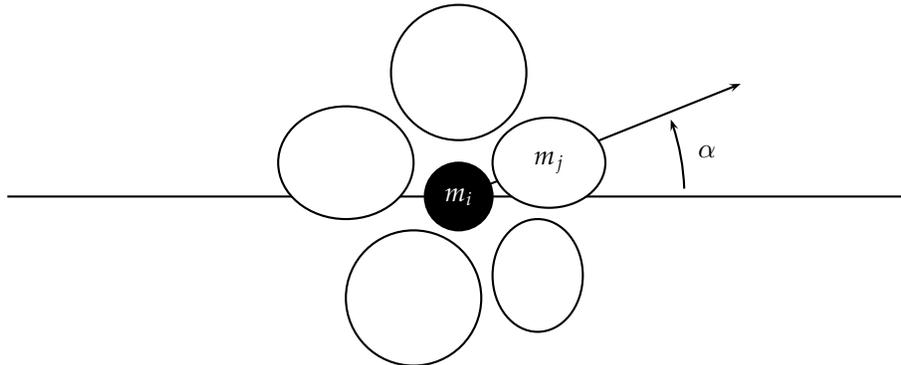


Figura 6.2: m_i está siendo bloqueado por m_j en la dirección α .

Hay que notar que si m_i es bloqueado por m_j en la dirección α , entonces m_j es bloqueado por m_i en la dirección $\alpha + \pi$ si $\alpha \leq \pi$, o m_j es bloqueado por m_i en la dirección $\alpha - \pi$ si $\alpha > \pi$.

Definición 6.3 (Conos). Llamaremos un *cono* a cualquier rango no vacío $[\alpha, \beta]$, con $0 \leq$

$\alpha \leq \beta < 2\pi$ y tal que $\beta - \alpha < \pi$. También llamaremos un cono al “rango” $[\alpha, \beta]$ donde $\alpha > \beta$ si y sólo si $\alpha - \beta > \pi$. En este último caso:

$$[\alpha, \beta] := [\alpha, 2\pi) \cup [0, \beta].$$

Dados dos convexos m_i y m_j , definiremos el *rayo tangente izquierdo* como el rayo que es tangente a m_i en su lado izquierdo y tangente a m_j en su lado derecho si suponemos que m_j está justo arriba de m_i ; el punto de origen del rayo será el punto tangente con m_i . Definimos el *rayo tangente derecho* de forma análoga (ver Figura 6.3.)

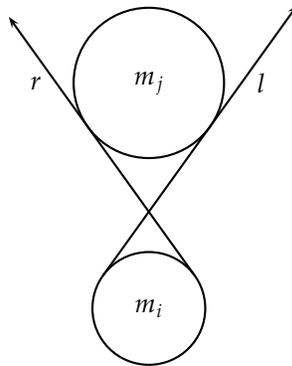


Figura 6.3: Rayos tangentes izquierdo (l) y derecho (r) de m_i y m_j .

6.2. Recorriendo direcciones

Queremos encontrar la dirección que minimiza el número de convexos que hay que quitar para poder mover m . A primera vista podría parecer que el número de direcciones es infinito, pero esto es falso. Si m_i es vecino de m , hay un cono para m en el que no importa qué dirección dentro del cono elijamos, necesitaremos mover m_i para poder llegar a m (ver Figura 6.4). Usaremos este hecho para sólo probar un número discreto de direcciones.

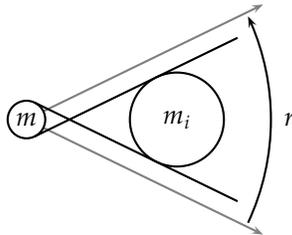


Figura 6.4: En todas las direcciones en el cono r , m es bloqueado por m_i .

Capítulo 6. Desenterrando diamantes

Vamos a ordenar los vecinos de m en la dirección de las manecillas del reloj, y para cada vecino de m determinaremos sus rayos tangentes izquierdo y derecho (ver Figura 6.5).

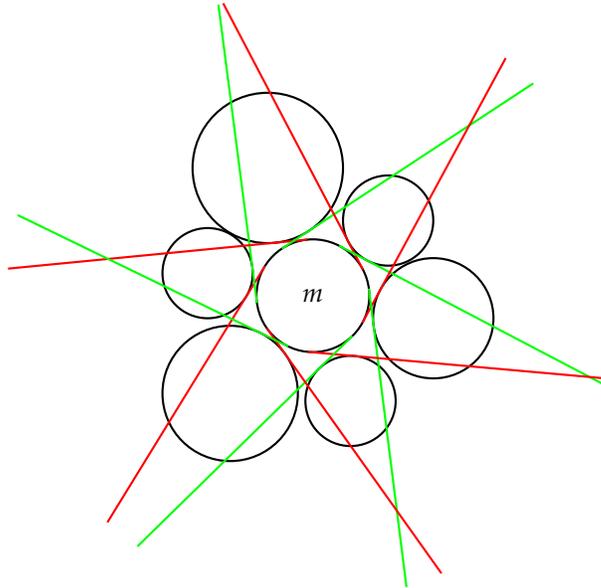


Figura 6.5: Rayos tangentes izquierdos (verde) y derechos (rojo) de m y sus vecinos.

Dado un rayo tangente izquierdo l , vamos a encontrar el primer rayo tangente derecho r en la dirección de las manecillas del reloj que no lo interseque; estos dos rayos definen un cono (ver Figura 6.6).

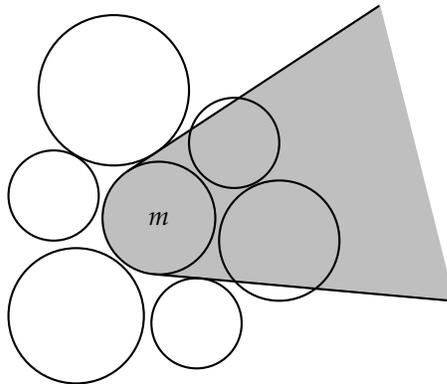


Figura 6.6: Un cono de m .

Tenemos ahora un cono para cada vecino de m ; muchos de ellos se intersecan, pero lo importante es que ya sólo hay que probar un número discreto de direcciones. Por cómo los construimos, los conos tienen la propiedad de que sólo los convexos que los intersecan bloquean a m en el rango de direcciones que determinan; podemos ignorar al resto.

Haremos lo mismo para cada vecino m_i de m , con la siguiente restricción: sólo probaremos los conos de m_i que tengan al menos una de sus tangentes completamente contenidas en su cono correspondiente (ver Figura 6.7).

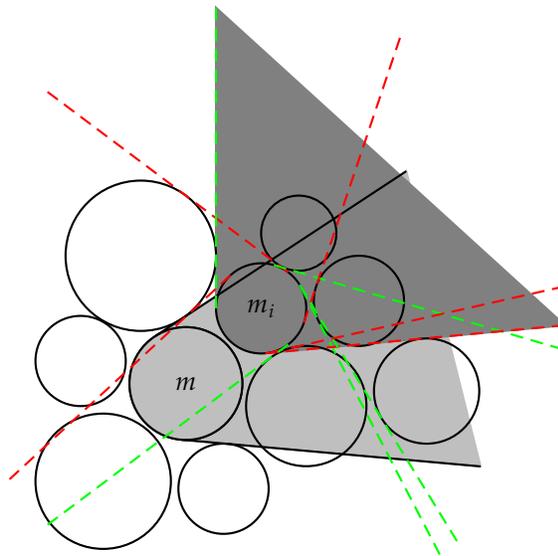


Figura 6.7: Para m_i sólo probamos los conos con al menos una de sus tangentes contenidas dentro del cono original; y sólo probaremos las direcciones en la intersección de dichos conos.

Esto nos da una estructura parecida a un árbol, siendo las hojas los convexos sin vecinos visibles en las direcciones de su cono.

6.3. El algoritmo

En la Figura 6.8 presentamos el algoritmo que encuentra la dirección que minimiza el número de convexos para alcanzar m .

```

1: procedure RAYOMINERO( $m$ )
2:    $min \leftarrow \text{NULL}$ 
3:   for  $v \in \text{VECINOS}(m)$  do
4:      $cono \leftarrow \text{CONO}(m, v)$ 
5:      $cono.bloquean \leftarrow \emptyset$ 
6:     for  $w \in \text{VECINOS}(m, cono)$  do
7:        $cono.bloquean \leftarrow cono.bloquean \cup \text{BLOQUEADORES}(w, cono)$ 
8:     if  $min = \text{NULL}$  then
9:        $min \leftarrow cono.bloquean$ 
10:    else
11:       $min \leftarrow \text{MIN}(min, cono.blockers)$ 
12:    return  $min$ 

1: procedure BLOQUEAN( $w, cono$ )
2:   if  $\text{VECINOS}(w, cono) = \emptyset$  then
3:     return  $\{w\}$ 
4:    $min \leftarrow \text{NULL}$ 
5:   for  $v \in \text{VECINOS}(w, cono)$  do
6:      $cono_v \leftarrow \text{CONO}(w, v, cono)$  ▷ cono de intersección con  $cono$ 
7:     for  $m \in \text{VECINOS}(w, cono_v)$  do
8:        $cono_v.bloquean \leftarrow cono_v.bloquean \cup \text{BLOQUEAN}(m, cono_v)$ 
9:     if  $min = \text{NULL}$  then
10:       $min \leftarrow cono_v.bloquean$ 
11:    else
12:       $min \leftarrow \text{MIN}(min, cono_v.bloquean)$ 
13:    return  $min$ 

```

Figura 6.8: Algoritmo para encontrar la dirección óptima para sacar un convexo.

6.4. Correctez y complejidad

Teorema 6.1. *El algoritmo RAYOMINERO nos regresa el mínimo conjunto de convexos necesarios para llegar a m .*

Demostración. El algoritmo nos regresa min , el que decimos es el mínimo conjunto de convexos que hay que mover para llegar a m . Dados los elementos en min podemos fácilmente reconstruir los conos, y definimos d como la bisectriz de la intersección de todos ellos. La dirección que obtenemos a partir del algoritmo es d .

Supongamos que hay una dirección d' tal que toma menos convexos que d para alcanzar m . Si d' está completamente contenida en una intersección de algunos de los conos que generamos con el algoritmo, entonces sería equivalente a d y tomaría el mismo número de convexos para llegar a m .

Pero si d' no está completamente autocontenida en una intersección de los conos, entonces tomaría todos los convexos que intersecan al cono donde inicialmente esté contenida d' , y además los otros conos que intersecara: por cómo los construimos, una inter-

sección con un cono es una colisión entre los convexos y uno de sus vecinos. Así que necesitaría más convexos para llegar a m que d . \square

Teorema 6.2. *El algoritmo RAYOMINERO tiene complejidad $O(kn^2)$.*

Aquí n es el número de convexos y k el tiempo promedio que toma determinar los rayos tangentes izquierdo y derecho para cualquier par de convexo. Si los convexos son círculos o elipses en particular $k = O(1)$.

Demostración. El algoritmo es recursivo y por lo tanto su ejecución puede verse como un árbol T donde cada rama son los vecinos dentro de un cono de cada convexo. En la raíz de T (cuando consultamos los vecinos de m , el "diamante") el árbol puede tener en el peor de los casos $n - 1$ ramas, si todos los demás convexos son visibles desde m . En todos los demás niveles el número de ramas es a lo más $\frac{n}{2}$, porque restringimos la recursión a los convexos que intersequen el cono determinado por m y un convexo vecino a él. Además, los conos van disminuyendo en apertura en cada nivel de la recursión.

Por tanto el peor de los casos para una rama de recursión es que haya n convexos alineados; pero entonces el algoritmo termina en $O(kn)$ porque sólo recorre *esa* rama (la línea 2 de BLOQUEAN así lo garantiza). Y como m tiene (como ya dijimos) a lo más $n - 1$ vecinos, trivialmente el algoritmo es $O(kn^2)$. \square

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

Las sucesiones permisibles abren toda una nueva serie de posibilidades para estudiar problemas relacionados con k -conjuntos y número de cruces. También ofrecen la oportunidad de utilizar nuevos algoritmos que pueden aprovechar la capacidad de distribuir de forma sencilla el trabajo en la red para comprobar nuevos resultados.

Por supuesto el primer punto en el trabajo a futuro es demostrar la conjetura 5.1, pero hay mucho más que se puede hacer utilizando las herramientas que aquí presentamos.

Por ejemplo; en este momento estamos buscando en *todo* el espacio de búsqueda para encontrar secuencias de L s y R s; si pudiéramos encontrar una forma de determinar cuándo una secuencia es “mejor” que otra, podríamos utilizar técnicas de recalentado simulado (*simulated annealing*) o de Algoritmos Genéticos para poder buscar en un tiempo computacional humanamente razonable las secuencias que nos interesan.

También podemos seguir investigando algoritmos para transformar sucesiones circulares, parecidos al algoritmo de normalización que vimos en el capítulo 4. Si pudiéramos diseñar un algoritmo que dada una sucesión circular no óptima le pudiera “agregar” una línea mediana más, sería un avance todavía más significativo.

Una posibilidad que se nos ocurrió, pero que no tuvimos tiempo de explorar más a fondo, fue aplicar de manera consecutiva el algoritmo de normalización; pero que en la segunda ejecución el primer bloque sea el último de la primera (a donde enviamos los intercambios desechables). Parece ser (al menos en los experimentos que conducimos) que con ello se descartan de forma completa las transposiciones desechables; en otras palabras, todos los bloques se transforman en escalonados. Con eso en mano tenemos varias ideas que nos permitirían encontrar líneas medianas adicionales.

Por supuesto también está la parte combinatoria. Algorítmicamente todos estos problemas son NP-Complejos o NP-Duros; podemos seguir investigando técnicas que nos permitan evadir tiempos computacionalmente inhumanos, pero eventualmente tendremos que hacerles frente. Y en ese caso las demostraciones analíticas siguen siendo nuestra mejor herramienta.

Capítulo 7. Conclusiones y trabajo futuro

Justamente por eso (aunque parezca contradictorio) hay que seguir investigando estos algoritmos, aun cuando son sean exponenciales. El diseñarlos, implementarlos, probarlos y mejorarlos nos permiten entender mucho mejor al tema, lo que a su vez nos da más herramientas para las demostraciones analíticas.

Además están todos los problemas relacionados: estudiar la posibilidad de usar Algoritmos Genéticos u otras técnicas para decidir rápidamente si una sucesión permisible es geometrizable; tratar de geometrizar sucesiones permisibles; si no es posible tratar de dibujar arreglos de pseudolíneas de la forma más “recta” que se pueda; ver si de verdad siempre hay casos óptimos con casco convexo de tres elementos.

Es un tema es relativamente novedoso y fascinante desde múltiples puntos de vista; teórico, práctico, técnico, geométrico, combinatorio y algorítmico, por mencionar sólo algunos. Este trabajo de tesis espera haber logrado hacer una contribución, por modesta que ésta sea, a un tema que sin duda tiene aún mucho material por ofrecer.

Apéndice A

Construcciones óptimas conocidas

Los siguientes son los conjuntos de n puntos, n par y $n \leq 27$, óptimos en número de cruces que Aichholzer *et. al* obtuvieron con su base de datos del tipo de orden, hechos públicos en [5], y que gracias a los resultados de Ábrego *et. al* en [4] sabemos que son los mejores conjuntos posibles para $n > 16$ en términos de líneas medianas (para $n \leq 6$ se sabía por resultados anteriores).

En cada uno de los ejemplos se dice el número de puntos de cada conjunto (n) y el máximo número de líneas medias que puede tener ($h(n)$). Sólo ponemos los ejemplos con n par, dado que para el caso impar el número de líneas medianas es en general más del doble y al dibujarlas todas se vuelven prácticamente indistinguibles.

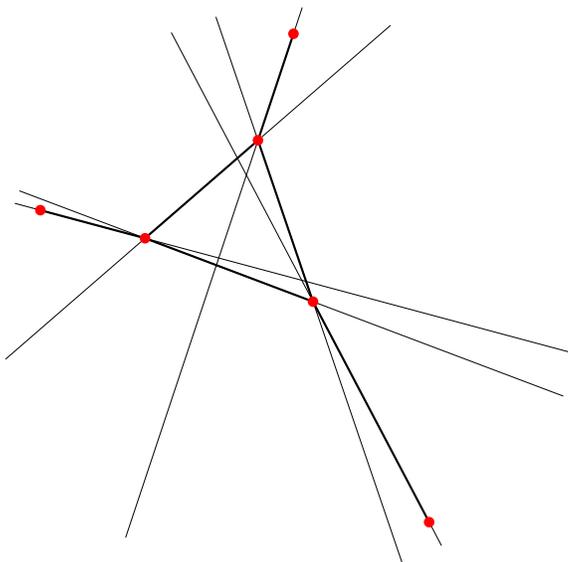


Figura A.1: $n = 6$, $h(n) = 6$

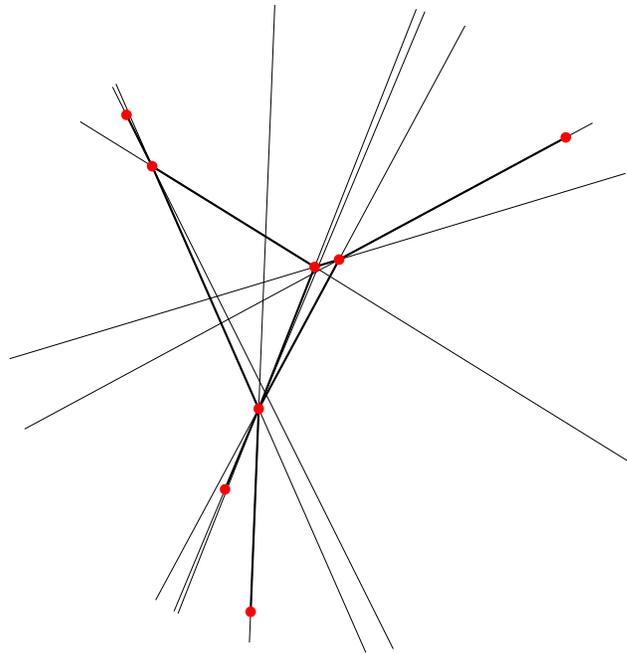


Figura A.2: $n = 8, h(n) = 9$

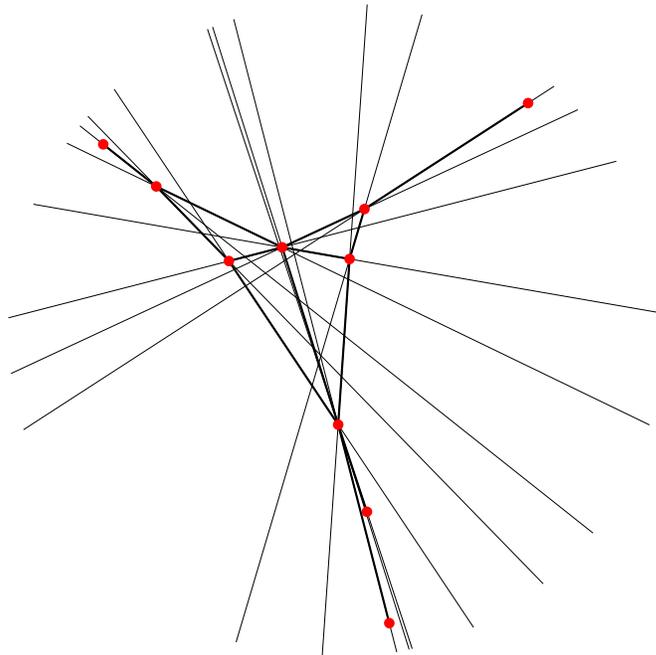


Figura A.3: $n = 10, h(n) = 13$

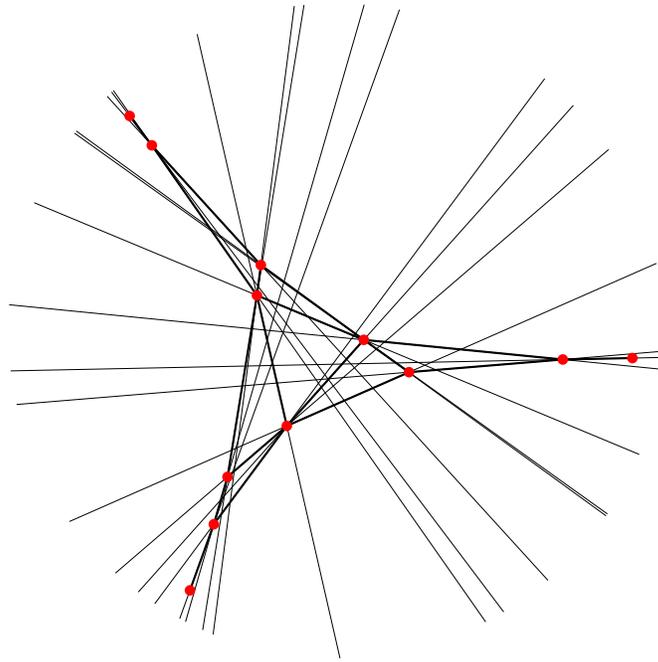


Figura A.4: $n = 12, h(n) = 18$

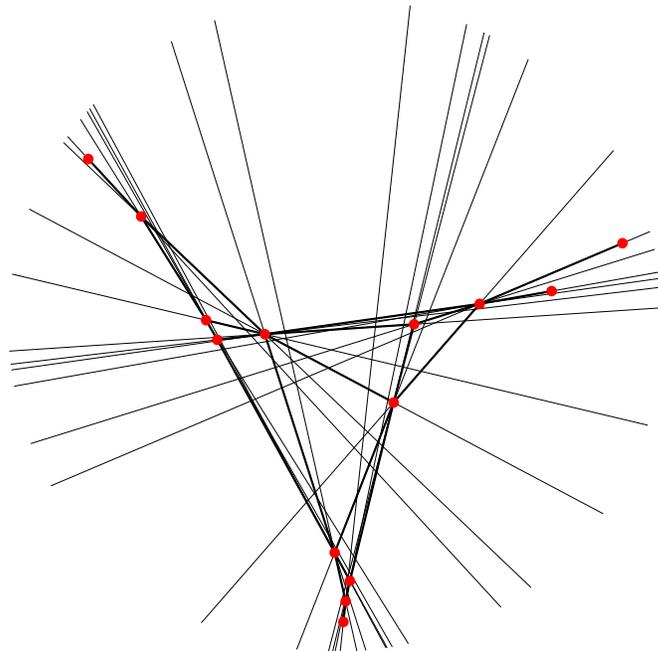


Figura A.5: $n = 14, h(n) = 22$

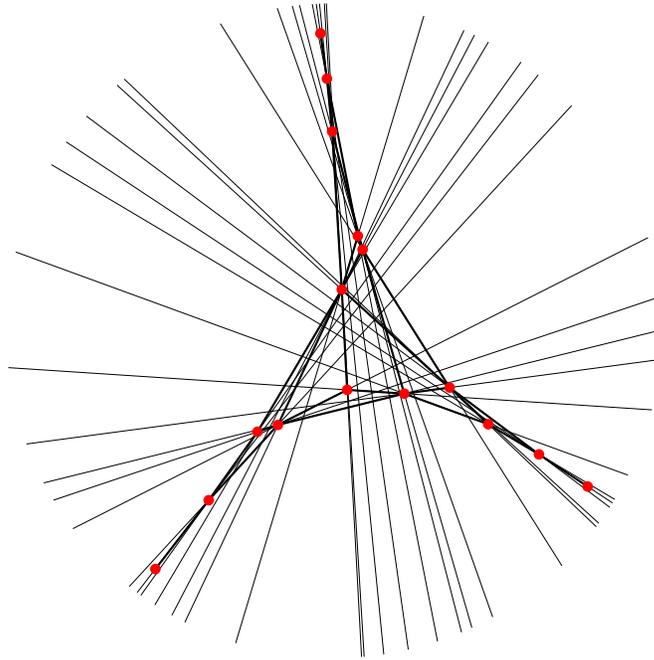


Figura A.6: $n = 16, h(n) = 27$

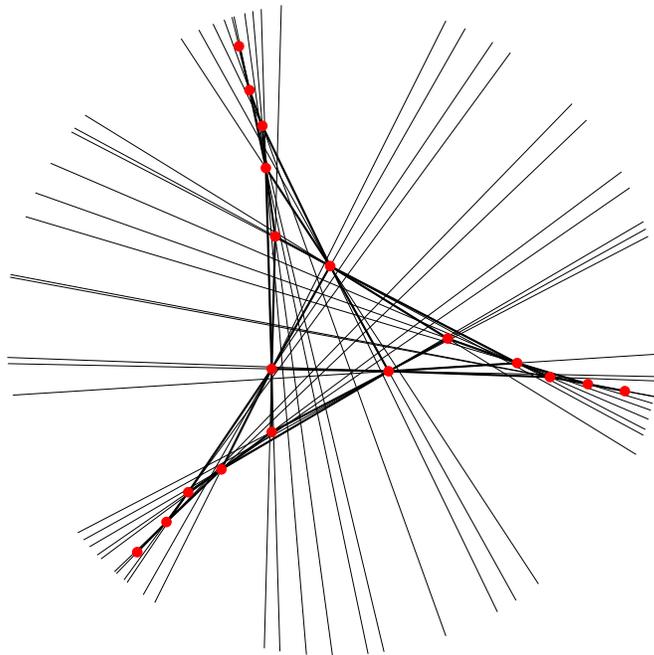


Figura A.7: $n = 18, h(n) = 33$

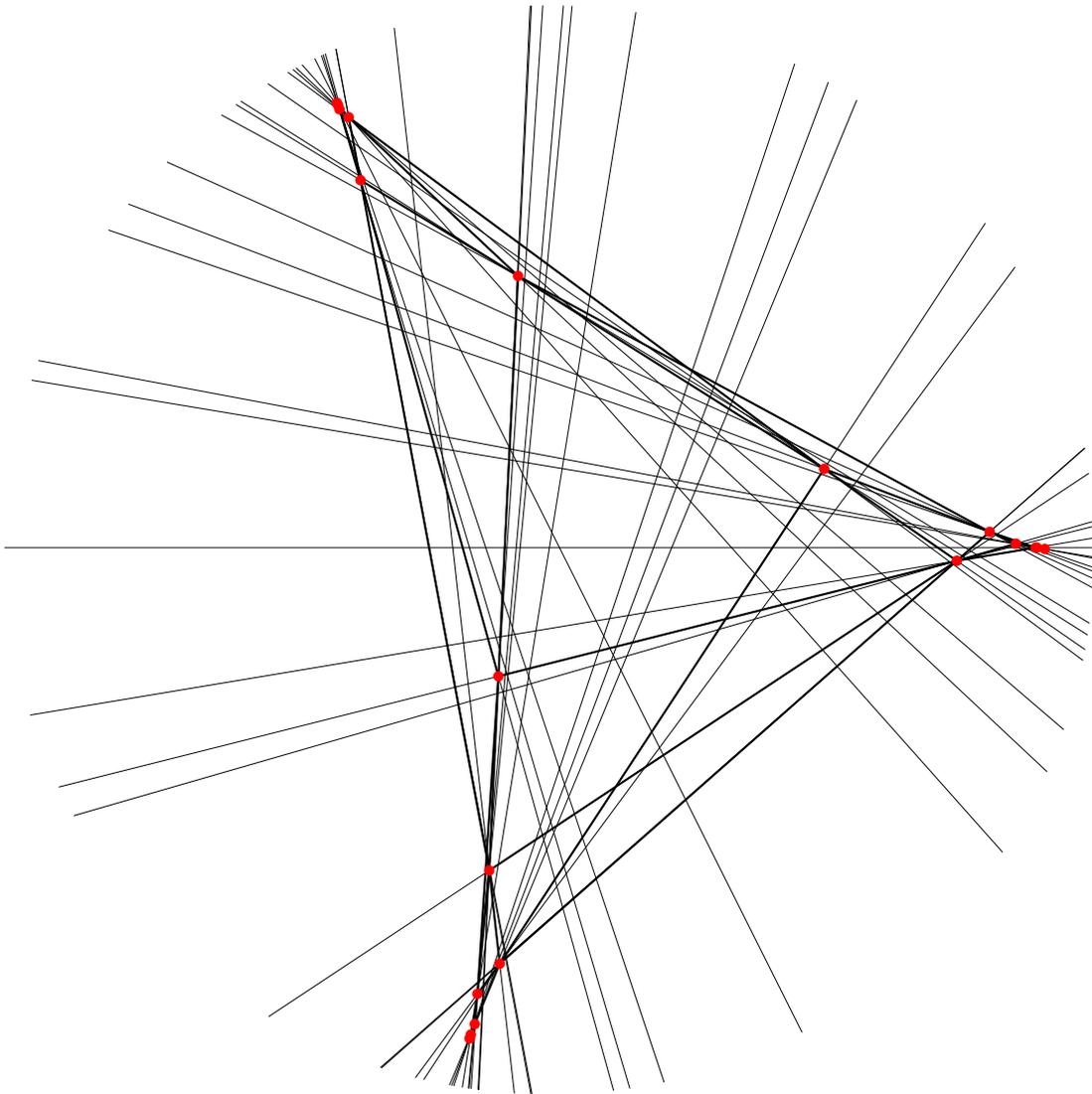


Figura A.8: $n = 20$, $h(n) = 38$

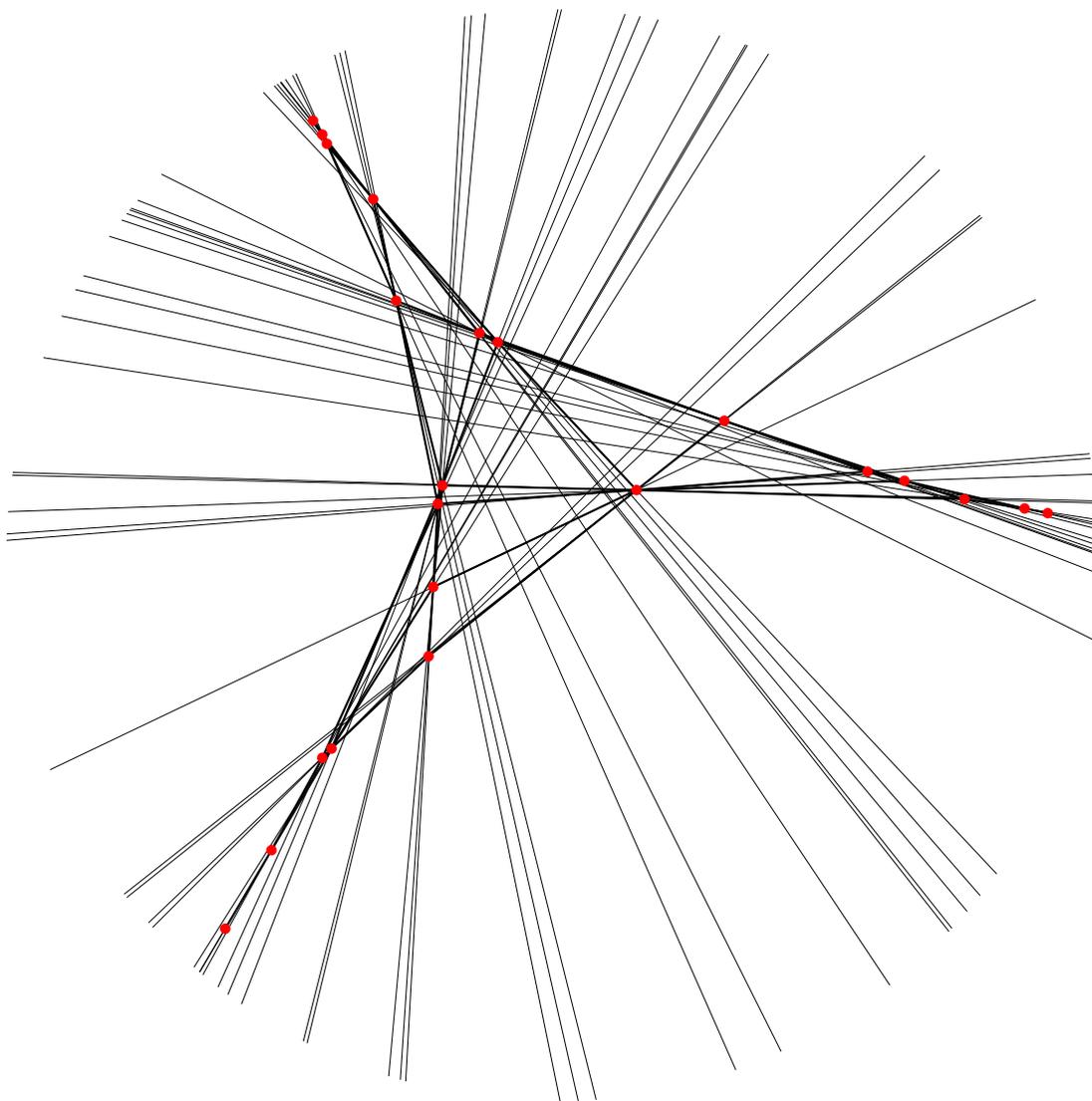


Figura A.9: $n = 22$, $h(n) = 44$

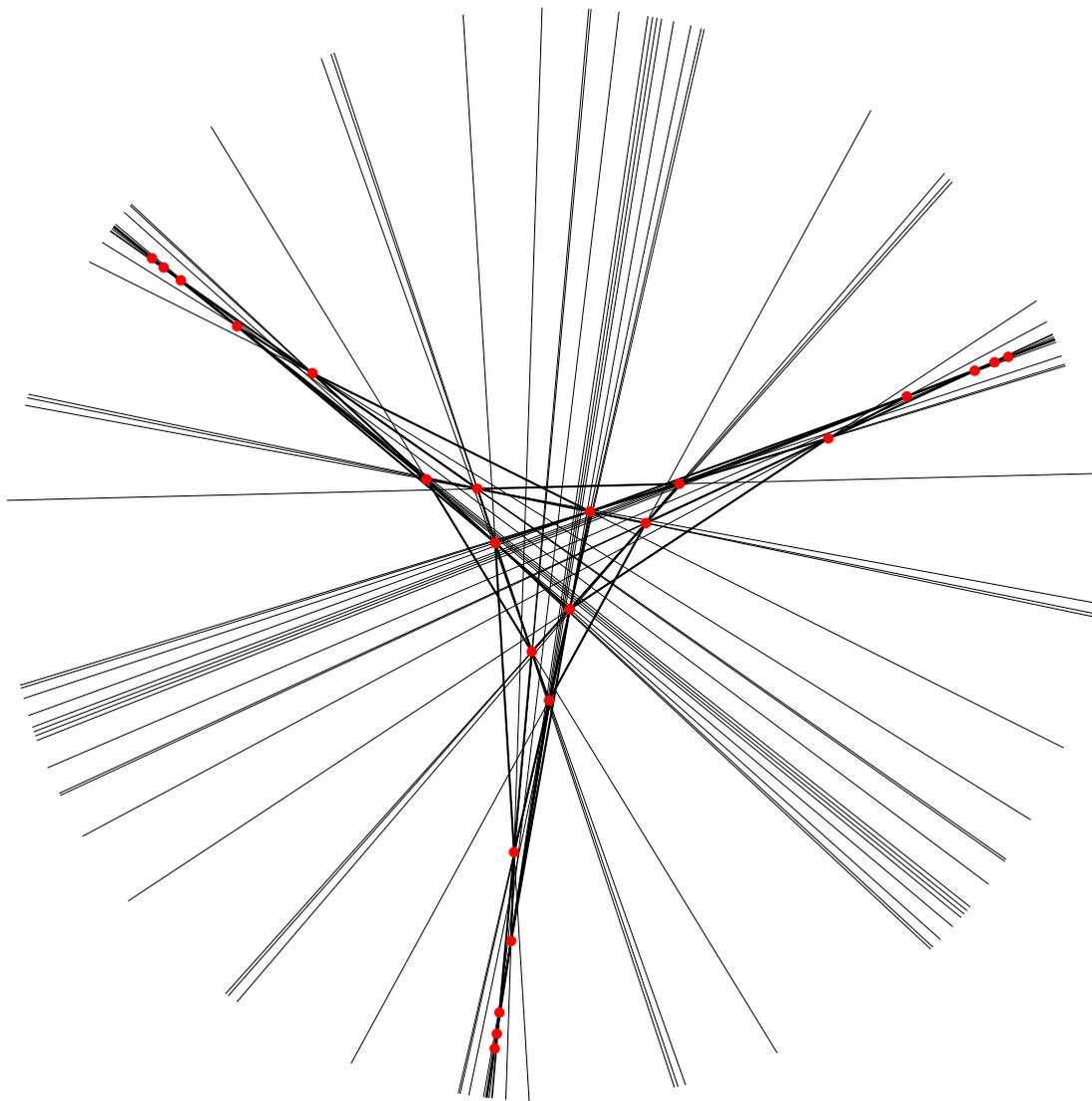


Figura A.10: $n = 24, h(n) = 51$

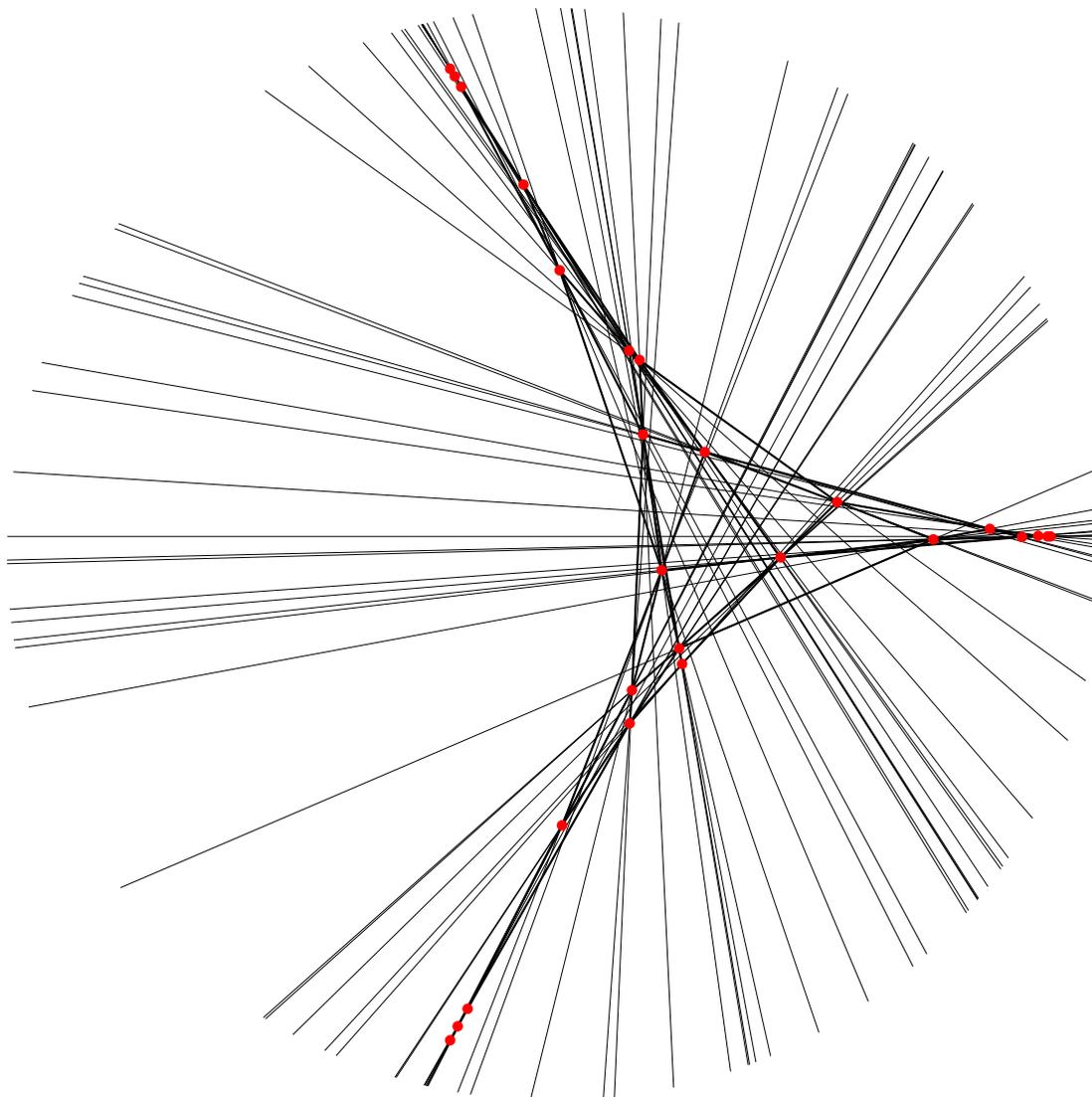


Figura A.11: $n = 26, h(n) = 57$

Bibliografía

- [1] Bernardo Abrego, Jozsef Balogh, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leaños, and Gelasio Salazar. An extended lower bound on the number of $(\leq k)$ -edges to generalized configurations of points and the pseudolinear crossing number of K_n . *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 2006. To appear.
- [2] Bernardo Abrego, Jozsef Balogh, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leaños, and Gelasio Salazar. On $(\leq k)$ -pseudoedges in generalized configurations and the pseudolinear crossing number of K_n . 2006. Submitted.
- [3] Bernardo Abrego and Silvia Fernández-Merchant. A lower bound for the rectilinear crossing number. *Graphs and Combinatorics*, **21**(3):293–300, 2005.
- [4] Bernardo Abrego, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leaños, and Gelasio Salazar. The maximum number of halving lines and the rectilinear crossing number of K_n for $n \leq 27$. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2007. To appear.
- [5] Oswin Aichholzer. On the rectilinear crossing number. Disponible en línea en <http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/>.
- [6] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, and Hannes Krasser. On the crossing number of complete graphs. *Computing*, **76**(1-2):165–176, 2006.
- [7] Oswin Aichholzer, Jesús García, David Orden, and Pedro Ramos. New lower bounds for the number of $(\leq k)$ -edges and the rectilinear crossing number of K_n . *Discrete and Computational Geometry*, **38**(1):1–14, 2006.
- [8] Oswin Aichholzer and Hannes Krasser. Abstract order type extension and new results on the rectilinear crossing number. *Computational Geometry*, **36**(1):2–15, 2007.
- [9] Miklos Ajtai, Vašek Chvátal, Monroe Newborn, and Endre Szemerédi. Crossing-free subgraphs. *Theory and practice of combinatorics*, **60**:9–12, 1982.
- [10] Artur Andrzejak, Boris Aronov, Sariel Har-Peled, Raimund Seidel, and Emo Welzl. Results on k -sets and j -facets via continuous motions. In *COMPGEOM: Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Artur Andrzejak and Emo Welzl. *k*-sets and *j*-facets - A tour of discrete geometry, 1997.
- [12] Alina Beygelzimer and Stanislaw Radziszowski. On halving line arrangements. *Discrete Mathematics*, **257**:267–283, 2002.
- [13] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter Ziegler. *Oriented matroids*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1999.
- [14] Jürgen Bokowski, Susanne Mock, and Ileana Streinu. The Folkman-Lawrence Topological Representation Theorem for Oriented Matroids – An Elementary Proof in Rank 3, 1999.
- [15] Alex Brodsky, Stephane Durocher, and Ellen Gethner. The rectilinear crossing number of K_{10} is 62. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **8**(1), 2001. Resarch Paper 23.
- [16] Geoffrey Burton and George Purdy. The directions determined by n points in the plane. *Journal of the London Mathematical Society*, **20**(2):109–114, 1979.
- [17] Tamal Dey. Improved bounds for planar k -sets and related problems. *Discrete & Computational Geometry*, **19**(3):373–382, 1998.
- [18] Herbert Edelsbrunner and Emo Elzl. On the number of line separations of a finite set in the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **38**:15–29, 1985.
- [19] David Eppstein. Sets of points with many halving lines. Technical Report ICS-TR-92-86, Department of Information and Computer Science University of California, 1992.
- [20] Jacob Goodman and Richard Pollack. On the combinatorial classification of nondegenerate configurations in the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **29**:220–235, 1980.
- [21] Jacob Goodman and Richard Pollack. Proof of Grünbaum’s conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudolines. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **29**(3):385–390, 1980.
- [22] Jacob Goodman and Richard Pollack. A combinatorial perspective on some problems in geometry. In *Proceedings, Twelfth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Baton Rouge, 1981.
- [23] Jacob Goodman and Richard Pollack. On the number of k -subsets of a set of n points in the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **36**:101–104, 1984.

-
- [24] Richard Guy. *Latest results on crossing numbers*, volume **186** of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 143–156. Springer Berlin/Heidelberg, 1971.
- [25] Friedrich Levi. Die teilung der projektiven ebene durch gerade oder pseudogerade. *Berichte über die Mathematisch-Physischen Klasse*, **78**:285–289, 1926.
- [26] Lázló Lovász. On the number of halving lines. *Ann Universiatis Scientarium Budapest, Eötvös, Sectio Mathematica*, **14**:107–108, 1971.
- [27] Lázló Lovász, Paul Erdős, A. Simmons, and Ernst Strauss. Dissection graphs of planar point sets. *A survey of combinatorial theory*, North-Holland, Amsterdam, pages 139–149, 1973.
- [28] Lázló Lovász, Katalin Vesztergombi, Uli Wagner, and Emo Welzl. *Convex quadrilaterals and k -sets*, volume **342** of *Contemporary Mathematics Series*, pages 139–148. AMS, 2004.
- [29] János Pach, William Steiger, and Endre Szemerédi. An upper bound on the number of planar k -sets. *Discrete and Computational Geometry*, **7**(1):109–123, 1992.
- [30] Jürgen Richter-Gebert. Testing orientability for matroids is **NP**-complete. *Advances in Applied Mathematics*, **23**, 1999.
- [31] Jürgen Richter-Gebert and Günter Ziegler. *Oriented matroids*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997.
- [32] Paul Scott. On the sets of directions determined by n points. *American Mathematical Monthly*, **77**:502–505, 1970.
- [33] Gerd Stöckl. *Gesammelte und neue Ergebnisse über extreme k -Mengen für ebene Punkt-mengen*. PhD thesis, Technische Universität Graz, 1984.
- [34] Géza Tóth. Point sets with many k -sets. *Discrete & Computational Geometry*, **26**(2):187–194, 1999.
- [35] Peter Ungar. $2n$ noncolinear points determine at least $2n$ directions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **33**:343–347, 1982.