UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

LICENCIATURA EN ECONOMÍA

CONFLICTO SOCIAL Y NEGOCIACIÓN ECONÓMICA: UN ENFOQUE DE TEORÍA DE JUEGOS, EL CASO DE OAXACA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN ECONOMÍA

P R E S E N T A :

ARMANDO PÉREZ DELGADILLO

DIRECTOR DE TESIS: PROF. IGNACIO PERROTINI HERNÁNDEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

MARZO 2008

Agradecimientos

A Inés y Armando, por guiarme en esta vida, por el amor, cuidados, comprensión y regaños. Por ser mis padres, esta tesis y mi admiración son para ustedes.

A mis hermanos Liliana y Ricardo, a una por su ejemplo, al otro por sus enseñanzas, a ambos por ser mi soporte.

A Fabiola por su amor y comprensión.

A Ignacio Perrotini Hernández, profesor, amigo y mentor académico.

A todas las personas que en algún momento se incluyeron en mi vida, y dejaron en esta, la marca reconocible de su presencia.

INDICE

I. Introducción.

Los fenómenos económicos, se muestran como fallas o variaciones en los modelos que aseguran alcanzar un estado que sea lo más parecido al óptimo.

Las soluciones a estas situaciones, son variadas políticas económicas diseñadas para "redirigir" la senda de una empresa, un país, o cualquier ente económico.

¿Qué pasa cuando el fallo económico no proviene del modelo?, podemos pensar en esta pregunta bajo la premisa de que ningún modelo económico es perfecto.

Una respuesta son los desajustes sociales, los cuales tienen repercusiones entre grupos de poder, creando a la larga, efectos indirectos en la economía de un agente.

Oaxaca, es uno de los tres estados más pobres del país, el PIB estatal oscila en 52 mil millones de pesos (en comparación al D.F. que asciende a los 500 mil millones), se calcula que el 58.8% de la población económicamente activa recibe tan solo uno o menos de un salario mínimo ($48.67MN/ $4.5Dlls/ 3,8€ por día). Gran número de Oaxaqueños emigran anualmente fuera de sus comunidades.

A esto se le debe sumar, el fenómeno causado por el conflicto magisterial en el año 2006. Las actividades pilares de la economía estatal se fundamentan en el comercio, turismo y la producción artesanal (cabe mencionar que la tercer fuente de ingresos del estado son las remesas).

¿Cuál es el efecto de un conflicto como el mencionado en una economía con estas características? La respuesta es simple, es fácil ver que es devastador.

Los periódicos, tanto especializados en economía como los que no, hablan sobre pérdidas económicas equiparables a las que hubiera dejado un desastre natural.

Para comenzar, Oaxaca, sostiene actualmente el último lugar en niveles de educación en México, aún con esto, el conflicto dejó por cinco meses a más de un millón 300 mil niños y jóvenes sin clases Dadas las condiciones de pobreza de la mayoría de estos, es posible que no vuelvan a estudiar. Lo cual es un retraso en la formación de capital humano.

Por otro lado, a solo cien días del conflicto, Sergio García de Alba, Secretario de Economía Federal, anunciaba costos ocasionados por el plantón los cuales ascendían a 4 mil millones de pesos. Cifra cercana a la anunciada por la COPARMEX en su estancia estatal.

Las pérdidas de empleos se relacionaban con más de dos mil plazas. El Consejo del Centro Histórico (COCENTRO) de Oaxaca anunciaba luego de 5 meses de conflicto, pérdidas por 4 mil millones de pesos solo en esa zona (además de 200 edificios dañados).

Las mermas económicas por concepto de nómina ascendieron a 5 millones 709 mil 902 pesos, en rentas se calculó 3 millones 567 mil 621 pesos, facturas vencidas en 31 millones 91 mil 724 pesos; pérdidas en ventas 55 millones 448 mil 411 pesos.

El turismo se vio afectado de igual manera. Los gobiernos de Canadá, Estados Unidos, Alemania, Inglaterra, Francia y los Países Bajos emitieron alertas a sus ciudadanos, donde prevenían del peligro que representaba viajar a la capital del estado.

Jorge Luís Tamayo Portillo, Secretario de Economía de Oaxaca, anunció que para el 25 de Octubre del 2006, el turismo ocupaba el tercer lugar en pérdidas que se aproximaban a 442 millones 521 mil pesos. La industria registró pérdidas por 295 millones 424 mil pesos. El transporte 4690 millones 341 mil pesos.

¿Existe algún modelo que lleve a la economía Oaxaqueña a recuperarse de este daño económico? La respuesta es afirmativa. Existen varios modelos económicos a nivel micro y macroeconómico que harán esto posible.

Pero hay secuelas de este conflicto que tardarán mucho en solucionarse (e.g. el retraso en capital humano), tal vez, en el largo plazo, donde los que ahora están vivos estarán muertos (parafraseando a J. M. Keynes), aún resientan estas secuelas.

¿Qué fue lo que pasó? Tal vez la rezonificación que pedían los profesores era demasiado alta. Pero esto no es así. Las pérdidas que se calcularon a 100 días del conflicto "político-magisterial" sobrepasaron los mil 400 millones de pesos que pedían para la rezonificación.

¿Cuánto duró el efecto económico del conflicto? Es claro que no se puede saber la respuesta. Pero lo más aproximado es decir que el levantamiento del plantón y el regreso a clases, se dio hasta el día 167 del conflicto (4 de noviembre del 2006). ¿Cuántas pérdidas se generaron hasta entonces?

La pregunta entonces no es como remediarlo, sino como evitarlo.

¿Existe un modelo económico capaz de evitar este tipo de conflictos?

La respuesta no es clara, puede que si exista. Por otro lado, la Teoría de Juegos nos puede ayudar a analizar la situación, entenderla y darnos las herramientas necesarias para aprender de ella.

Con esto podríamos generar políticas adecuadas, en momentos adecuados, para terminar o dejar avanzar el conflicto. Las formas y los trámites son los necesarios en las horas necesarias. Y la Teoría de Juegos nos puede brindar señales para hacerlo.

El presente trabajo de tesis, busca encontrar una descripción puramente teórica del conflicto Magisterial. Esta descripción *puramente teórica* es generada a partir de supuestos que son consecuencia de la imposibilidad de calibración de los modelos.

¿Por qué una tesis no explícitamente enfocada a la Economía?

La razón es básicamente idea de Herbert Simon y su contribución a la Economía y a la Ciencia Política, i.e. la racionalidad limitada ("Bounded Rationality"). Esta contribución nos ayuda a relajar los modelos matemáticos inherentes a la economía y a la ciencia política que están vinculados con los agentes hiperracionales. Además, acarrea un mayor realismo a la Teoría de la Decisión evitando (para los modelos altamente matematizados) supuestos que desestiman las premisas racionales del comportamiento humano.

El hecho es que la *racionalidad limitada* salta a la vista cuando se contrasta la optimización y la satisfacción del agente, i.e. buscar el mejor resultado que se podría obtener en algunas circunstancias ya dadas vs. fijar un resultado que es preferido a cualquier otro bajo las mismas circunstancias. Esto, bajo la teoría de la decisión y bajo modelos de agentes hiperracionales, es lo mismo debido al supuesto de "no saciedad local" la cual es implicada por monotonicidad fuerte, pero desestima el comportamiento humano.

Esto lleva a Simon a contrastar dos modelos de racionalidad, el primero es el de la racionalidad substantiva, el cual representa una optimización objetiva, el segundo es el de la racionalidad de procedimiento, el cual incorpora los límites cognoscitivos que están reflejados en la noción de satisfacción.

La racionalidad limitada captura particularmente un problema para los agentes que deciden, i.e. existen limites en la capacidad cognoscitiva del cerebro humano. Los agentes tomadores de decisiones en el mundo real están restringidos en tiempo y atención que pueden dedicar a alguna decisión.

Pero, aun con esto se insiste que la racionalidad limitada no es irracional, ya que esta se mantiene en forma de un comportamiento de búsqueda de objetivo de parte de los agentes. Dados estos limites, bajo los cuales la racionalidad opera, es fácil ver que los agentes inevitablemente se equivocan de vez en vez. Debido a la ignorancia, descuidos o cálculos erróneos, los agentes a veces escogen las acciones equivocadas en términos de alcanzar los objetivos que se quieren.

Si la racionalidad esta definida en términos substantivos, i.e. hacer la elección correcta, las elecciones erróneas se deberían clasificar como irracionales. Pero según Simon, esta mal llamarlas de esta forma, ya que son mejor observadas bajo la racionalidad limitada, o como las llama Russell Hardin "son manifestaciones de la racionalidad con limitaciones de la razón (humana)."

Los modelos económicos de elección racional ofrecen una forma muy rígida de lo que "está" en el cerebro humano. En este modelo de "reconocimiento" de las restricciones humanas en las elecciones y la consecuente forma de la frontera de posibilidades, tiene un impacto importante en lo que al final es elegido. Pero según Simon estas restricciones que son reconocidas por los economistas son paradigmáticas.

Entonces para entender y predecir el comportamiento humano se tiene que tratar con las realidades de la racionalidad humana y esto se refiere a la racionalidad limitada. Hasta cierto grado el propósito es que se quiera explicar acciones particulares y elecciones, conocimiento detallado de los tomadores de decisiones, la información disponible y las interacciones entre los agentes, lo cual es esencial. Incluso, hasta cierto grado el propósito es alcanzar algunas generalizaciones limitadas, algunos tipos de características de restricciones cognoscitivas y por supuesto interacciones que se puedan trasladar en ciertas respuestas características a ciertos tipos de problemas de decisión.

Con esto se puede incorporar algunos de estos puntos, que se refieren a como las personas realmente toman decisiones, i.e. heurística y "atajos", a modelos económicos formales de elección racional.

Por lo tanto, esta tesis es lo que pretende realizar, analizar el comportamiento predeterminado de agentes comunes en cualquier situación no económica, con el fin de examinar indirectamente la heurística maximizadora dirigida a las elecciones. Elecciones que "podrían" (pero que no se hace en este trabajo) trasladarse para captar características enriquecedoras de la actual teoría de la elección, la cual nos servirá directamente la próxima vez que deseemos maximizar la utilidad de algún agente.

En el segundo capítulo de la presente, encontraremos una breve historia del conflicto y de los orígenes de la herramienta. En el tercer capítulo se encuentra un híbrido de teoría y aplicación, que se ha pensado de esta forma con el fin de obtener un enfoque pragmático en la lectura.

II. Marco Histórico.

En este capítulo se tratará de abordar de manera ligera, una parte importante de la historia de los hechos ocurridos durante el conflicto magisterial reciente en el estado de Oaxaca, como también parte de los orígenes de la herramienta que se utilizará para el análisis del conflicto.

En la primera sección de este capítulo comenzaremos con una descripción de los sucesos ocurridos en el conflicto del 2006 en el estado de Oaxaca, con el objetivo primario de enmarcar el tema de análisis, abordaremos como ya he mencionado, de manera ligera estos hechos, que se han recopilado de una serie de periódicos, revistas de divulgación y programas de televisión.

Estas fuentes de información han sido elegidas a falta de fuentes bibliográficas que describan los hechos, por lo que existen sucesos que han sido omitidos debido a su irrelevancia en el carácter descriptivo o por omisión de conocimiento y recopilación de estos.

Cabe mencionar que se ha tratado de describir los hechos de manera objetiva, de tal forma que no se manifieste algún juicio sobre los hechos ocurridos y que además la descripción se ha realizado de una manera neutral con el fin de no obstaculizar el análisis posterior.

En la segunda sección trataré de describir el origen y desarrollo de la herramienta. Esto se ha hecho de manera puramente informativa con el fin de dar a conocer algunos nombres de grandes investigadores que han contribuido a enriquecer la herramienta que permite analizar hechos económicos, sociales, etc.

También cabe la aclaración que en esta sección me he concentrado en los resultados más conocidos e importantes, de tal forma que cualquier omisión puede ser debida a falta de conocimiento.

II.I. Breve Historia del Conflicto en Oaxaca.

Lo que debió ser una revisión de la relación contractual de maestros con los Gobiernos Federal y Estatal, se convirtió en una grave crisis que sacó a Oaxaca de la legalidad institucional.

El caso Magisterial en Oaxaca debe tener un punto de arranque. Aunque no está del todo definido. Se puede decir al menos, el origen de la negociación primaria.

Lo que intentaba el Magisterio de esta entidad era lograr una respuesta favorable a un pliego petitorio de prestaciones sociales y económicas, cuyo punto central se basaba en la rezonificación salarial. i.e. el cambio de la zona 2, zona en la que estaban en ese momento considerados, por la zona 3. Esta última zona tiene asociado un salario mayor.

El establecimiento de zonas económicas en el país es un mecanismo diseñado por la federación que tiene por objeto asignar los sueldos al personal de la educación pública. Entonces, el problema básico del Magisterio, era la inconformidad sobre este y la petición de revisión y actualización.

Esta rezonificación implicaba un gasto adicional de aproximadamente mil 500 millones de pesos anuales, que el Gobierno de Oaxaca, argumentaba no poder sufragar.

Para el 1 de mayo del 2006, los miembros de la sección 22 del SNTE, entregaron al entonces Gobernador Ulises Ruiz un documento con las principales peticiones del Magisterio en su calidad de movimiento.

Las acciones del Gobierno, indicaron algunas señales sobre el resultado de la petición, por lo que el movimiento Magisterial anunció que para el 22 de mayo de ese mismo año, 70 mil maestros agremiados en la sección 22, tomarían las calles del Centro Histórico de Oaxaca. Esto claro esta ejercería presión sobre el Gobierno y la ciudadanía.

No existió respuesta favorable por parte del Gobierno, entonces, para la fecha indicada inició el plantón "indefinido." A esto se le agregó una serie de eventos que llevaron a grupos Sociales a intervenir y a apoyarlo.

Es difícil explicar que sucedió después, el hecho es que las presiones por parte del Magisterio y la pasividad por parte del Gobierno resultaron en hechos ocurridos del 22 de mayo al 14 de junio que enumero de la siguiente forma:

1. Bloqueos de calles.

2. Marchas dentro de la Ciudad de Oaxaca.
3. Bloqueos a Aeropuertos y a carreteras principales de acceso a la ciudad.
4. Eliminación de los suministros de PEMEX a la ciudad de Oaxaca.
5. Negociaciones a la sombra del conflicto.

Para el 14 de junio del 2006, el Gobierno de la ciudad de Oaxaca intentó desalojar el plantón que se instalaba en el Centro Histórico. El fallo de esta acción agravó la secuencia de negociaciones y las confrontaciones dentro y fuera de la ciudad.

Para entonces la ciudad era un campo de batalla abierto a cualquier desorden. Se cancelaron celebraciones típicas de Oaxaca y los efectos relacionados a la economía de la entidad se agravaron.

Hechos sucedidos del 1 de agosto al 2 de Octubre del 2006:

1. Confrontaciones entre militantes del movimiento magisterial y seguridad estatal.
2. El Magisterio toma centros de comunicación del estado.
3. Descontento de la ciudadanía y de sectores económicos de la ciudad.
4. Cierre de fuentes de empleo y quiebra de varios negocios.
5. Peticiones por parte del movimiento Magisterial para desaparecer los poderes del estado.
6. Marchas.
7. Creación de la Asamblea Popular de los Pueblos Oaxaqueños. La cual incluía integrantes de grupos sociales radicales no oaxaqueños (e.g. grupos armados de Guerrero, “tendencia Democrática Revolucionaria-Ejercito del Pueblo, Movimiento Revolucionario Lucio Cabañas Barrientos, etc.).
8. El Gobierno de Oaxaca decreta alerta máxima.
9. Movimientos empresariales para la detención del conflicto.
10. Movilizaciones Militares dentro del Estado.
11. Consecuentes fracasos de negociaciones entre el Gobierno del estado y la APPO.

Para el 11 de octubre la situación era insostenible, el movimiento magisterial con la APPO dominaban las calles. Entonces la SEGOB invoca negociaciones con representantes de la ciudadanía, sector empresarial y el movimiento.

En estas negociaciones se logra el acuerdo donde la seguridad pública quedaba a cargo del Gobierno federal. Se inician visitaciones de una comisión del Senado de la Republica para evaluar este acuerdo. El cual no fue aprobado el 19 de octubre.

El 28 de octubre entra la PFP a Oaxaca, y para el día posterior replegó las fuerzas del movimiento magisterial del centro de Oaxaca. El conflicto se hizo más violento por ambas partes, lo cual derivó en muertes y actos de terrorismo contra el Gobierno y la ciudad (e.g. disparos contra casas habitacionales, bombas a diferentes centros comerciales y edificios gubernamentales).

El 30 de Octubre se levanta el plantón de los profesores, y se reinician las clases. Pero los disturbios continuaron por mucho tiempo (al menos los disturbios se continuaron dando un plazo de 160 días desde el inicio del conflicto).

¿Qué sucedió?

Por una parte el Gobierno no evaluó los costos de largo plazo de una simple negociación. Por otro lado el movimiento Magisterial cometió el exceso de apoderarse de las calles, lo que llevó al Gobierno a instrumentar un desalojo sin control.

II.II. Orígenes y Desarrollo de la Teoría de Juegos.

Todo parece comenzar cuando James Waldegrave en 1713 proporciona una solución del tipo mínimax de estrategia mixta a una versión para dos agentes de un juego de de cartas "Le Her."

Aun con este precedente, en general, no se publicó un análisis teórico de la teoría de juegos sino hasta la publicación de "***Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses",*** de Antoine Agustin Cournot en 1838, donde se considera un duopolio y presenta una solución que es una versión restringida del equilibrio de Nash.

Pero la teoría de juegos como tal, fue creada por el matemático húngaro John Von Neumann (1903-1957) y por Oskar Morgenstern (1902-1976) en 1944 gracias a la publicación de su libro ***"The Theory of Games Behavior".***

Como ya se ha mencionado los economistas Cournot y además Edgeworth habían anticipado ya ciertas ideas, a las que se sumaron otras posteriores de los matemáticos Borel y Zermelo que en uno de sus trabajos (1913) muestra que juegos como el ajedrez son resolubles. Sin embargo, no fue hasta la aparición del libro de Von Neumann y Morgenstern cuando se comprendió la importancia de la teoría de juegos para estudiar las relaciones humanas.

Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima.

En la segunda parte de su libro, Von Neumann y Morgenstern desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores.

En los años 50 hubo un desarrollo importante de estas ideas en la Universidad de Princeton, con Luce y Raiffa (1957), difundiendo los resultados en su libro introductoria, Kuhn (1953) que permitió establecer una forma de atacar los juegos cooperativos, y por fin Nash (1950) quien definió el equilibrio que lleva su nombre, lo que permitió extender la teoría de juegos no cooperativos más generales que los de suma cero.

John Forbes Nash (1928-) es el nombre más destacado relacionado con la teoría de juegos. A los 21 años escribió una tesina de menos de treinta páginas en la que expuso por primera vez su solución para juegos estratégicos no cooperativos, lo que desde entonces se llamó "el equilibrio de Nash", que tuvo un inmediato reconocimiento entre todos los especialistas.

Neumann y Oskar Morgenstern habían ya ofrecido una solución similar pero sólo para los juegos de suma cero. Para la solución formal del problema, Nash utilizó funciones de mejor respuesta y el teorema del punto fijo de los matemáticos Brouwer y Kakutani.

En los años siguientes, Nash publicó nuevos escritos con originales soluciones para algunos problemas matemáticos y de la teoría de juegos, destacando la "solución de regateo de Nash" para juegos bipersonales cooperativos. Propuso también lo que se ha dado en llamar "el programa de Nash" para la reducción de todos los juegos cooperativos a un marco no cooperativo.

En la década de 1950 surgieron los conceptos base como el juego de forma extensiva, el juego ficticio, los juegos repetitivos y el valor de Shapley. Aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de juegos en la filosofía y las ciencias políticas.

Ante la multiplicidad de equilibrios de Nash, muchos de los cuales no eran soluciones razonables a juegos, Selten (1975) definió el concepto de equilibrio perfecto en el subjuego para juegos de información completa y una generalización para el caso de juegos de información imperfecta.

En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de los juegos bayesianos y de la información incompleta es decir, aquellos en que los jugadores no conocen todas las características del juego, e.g. no saben lo que obtienen los otros jugadores como recompensa.

Él, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganaron el Premio Nóbel de Economía en 1994.

Otra aportación importante a la teoría de juegos es de Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling, por la que han obtenido el premio Nóbel de economía en el año 2005.

En "*The Strategy of Conflict*", Schelling, aplica la teoría del juego a las ciencias sociales. Sus estudios explican de qué forma un partido puede sacar provecho del empeoramiento de sus propias opciones de decisión y cómo la capacidad de represalia puede ser más útil que la habilidad para resistir un ataque.

Aumann desarrolló la teoría de los juegos repetidos la cual es útil para entender los requisitos para una cooperación eficiente y explica por qué es más difícil la cooperación cuando hay muchos participantes y cuándo hay más probabilidad de que se rompa la interacción. La profundización en estos asuntos ayuda a explicar algunos conflictos, como la guerra de precios y las guerras comerciales.

Mientras Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la teoría de juegos evolutiva.

Para terminar, el premio Nóbel de Economía del año pasado ha sido otorgado a tres investigadores estadounidenses, Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson, por sus trabajos relacionados a una rama de la teoría de juegos que tiene relación con la Economía y las ciencias Políticas contemporáneas.

La investigación de los tres profesores han sido aplicadas en numerosos campos, e.g. negociaciones laborales, regulación de mercados financieros, subastas y han ayudado además a encontrar una explicación a los procesos que se siguen en la toma de decisiones en cualquier transacción, en función de la información privada que poseen los distintos agentes que intervienen en el sistema y de cómo la utilizan según sus objetivos.

La tesis central de estos tres investigadores va más allá de la ley de oferta y demanda base que se creía cierta hasta hace unas décadas, la cual asegura que "bajo las condiciones ideales, se produciría una asignación eficiente de los recursos disponibles."

Pero como ahora sabemos, bajo imperfecciones de mercado la competencia no puede ser total dado que los consumidores no poseen la perfecta visión del mercado, en cuyo caso la regulación de mercados entra en acción, mientras que bajo la información imperfecta, las negociaciones buscan mecanismos óptimos para que se produzcan las transacciones.

III. Aplicación Teórica al Conflicto Magisterial del Estado de Oaxaca.

III.I. Planteamiento del Problema.

El objetivo del trabajo es el representar los hechos que tuvieron lugar en el Estado de Oaxaca, mediante un análisis de teoría de juegos, utilizando modelos de guerra y paz, análisis de terrorismo y negociación.

El juego (1) se basa en lo siguiente:

El sindicato magisterial, desde tiempos inmemorables ha tenido la costumbre de pedir aumentos salariales, prestaciones para ellos mismos y prestaciones para la comunidad estudiantil.

Por otro lado, el Gobierno de Oaxaca, desde tiempos inmemorables, ha tenido la costumbre de negar cualquier cosa relacionada con las peticiones del sindicato magisterial.

Sobre el mismo argumento, podemos decir que después de cierta fecha al año, los profesores han pedido y por lo regular el Gobierno ha negado, por lo que se declaran en huelga plantándose en el zócalo de la ciudad, buscando cierta negociación.

En el caso concreto, todo comenzó desde el 29 de abril del 2006, cuando el secretario general de la sección 22 del SNTE, Enrique Rueda Pacheco, mostró intenciones de negociar una rezonificación de los 70 mil trabajadores de la educación del estado, exigiendo alrededor de 1400 millones de pesos para este fin.

Las peticiones de este movimiento magisterial no se limitaban a cuestiones puramente monetarias, sino a la vez, pedía el cese de la política "represiva y autoritaria" que el Gobierno estatal sostenía en contra de sus militantes.

Para el primero de Mayo del mismo año la sección 22 del SNTE entregó al todavía gobernador del estado Ulises Ruiz, un documento con las principales peticiones del movimiento magisterial.

Sus peticiones fueron negadas y cualquier intento de negociación fue desechado.

El día 22 de mayo del 2006, más de 70 mil maestros tomaron más de 50 calles del Centro Histórico de Oaxaca, para exigir el cumplimiento de los puntos de su pliego petitorio.

Supongamos que esta es la forma de presionar un arreglo, por lo cual esta pérdida de comodidad se verá recompensada con un aumento en sus salarios (por mínimo que sea) y otras prestaciones tanto para ellos como para el pueblo.

Mientras tanto, el Gobierno obtiene la oportunidad de negociar un aumento más pequeño, menor a 1400 millones de pesos, el cual le permitirá utilizar recursos sobrantes como mejor le plazca, ya sea en proyectos estatales o para el "fortalecimiento de su esencia gubernamental."

No obstante recibe quejas ciudadanas por las acciones de la masa magisterial (e.g. bloqueos de calles, accesos al aeropuerto estatal) e incomodidades que ellos mismos reciben (e.g. cortes a los suministros de PEMEX).

III.II. Definición del Juego en Forma estratégica.

Un juego en forma estratégica es un modelo de interacción de acciones en el cual cada jugador escoge su plan de acción una sola vez, y estas elecciones son hechas simultáneamente.

Definición 1: Un juego en forma estratégica como la tripleta $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$.

Donde:

(i) N es el conjunto de jugadores $N = \{1,2,..., N\}$.

(ii) A_n es el conjunto de acciones del jugador $n \in N$.

(iii) $U_n : A \to \Re$ es la función de pagos del jugador $n \in N$, con $A = \prod_{n\in N} A_n$ y el elemento típico $a \in A$ y $a = (a_1, a_2, ...a_N)$.

Definimos el juego (1) aplicado en forma estratégica de la forma siguiente:

Sea $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma estratégica

Donde:

$N : \{G, M\}$

G: Gobierno

M: Magisterio

$A_G : \{n, a\}$

$A_M : \{h, nh\}$

n: negar petición.

a: aceptar petición.

h: huelga.

nh: No hacen huelga.

$U_n : A_n \to \Re$ Función de pagos del jugador *n=G,M.*

Ahora:

Gobierno:

Estrategia	Pago
(a,nh)	2
(n,nh)	1
(n,h)	-5
(a,h)	-10

Justificación de pagos:

- Cuando el Gobierno acepta las peticiones del Magisterio y este se ve conforme con lo recibido, el Gobierno "gana puntos" ante la opinión pública, mientras que asegura una estabilidad social y el apoyo del Magisterio. Por lo tanto este debe ser el mejor escenario.

- Cuando el Gobierno no acepta las peticiones del Magisterio, y este último no se va a huelga, "debería" ser el mejor escenario, pero desde mi punto de vista no lo es, ya que la opinión pública cuenta, entonces se percibe un ambiente de autoritarismo que puede ser propicio para un disturbio social.

- Cuando el Gobierno no acepta las peticiones y el Magisterio se va a huelga, el cual es el resultado más lógico, el Gobierno tiene molestias propias y quejas ciudadanas, pero, se encuentra mejor que en el caso anterior ya que no ha desembolsado dinero de sus arcas. Debe ser el segundo peor escenario.

- Cuando el Gobierno acepta las peticiones del Magisterio, y estos últimos se van a huelga, es el peor escenario, ya que el Gobierno desembolsó dinero de sus arcas, pero además tendrá que desembolsar aún más, mientras que aun recibe quejas ciudadanas y molestias propias.

Magisterio:

Estrategia	Pago
(a,nh)	2
(a,h)	-2
(n,h)	-5
(n,nh)	-10

Justificación de pagos:

- Cuando el Gobierno acepta las peticiones del Magisterio y este se ve conforme con lo recibido, no tiene que perder comodidad en un plantón o marcha, mientras que obtiene lo pedido y se unen los lazos con el Gobierno para futuros apoyos económicos. Por lo que este es el mejor escenario.

- Cuando el Gobierno acepta las peticiones y el Magisterio se va a huelga, el Magisterio "pierde puntos" ante la opinión publica, ya que esta ultima la podría tachar de extremista (o algo parecido) ocasionando una falta de credibilidad en sus acciones lo cual se resiente en una futura petición, pero esta mejor que en cualquier posición anterior dado que tiene dinero en sus arcas.

- Cuando el Gobierno no acepta las peticiones del Magisterio y este se va a la huelga, el Magisterio no obtiene el incremento pedido, mientras tiene que resentir los hechos de plantarse pero vislumbra una futura renegociación, por lo cual es el segundo peor escenario.

- Cuando el Gobierno no acepta las peticiones del Magisterio y este se no va a huelga, debe ser el peor escenario para el Magisterio, ya que no recibe los incrementos pedidos, mientras que el Gobierno ha ejercido una fuerza tal que ha disminuido el poder de negociación del Magisterio.

III.III. Equilibrios de Nash en Estrategias Puras.

Ordenados y justificados los pagos, es posible formar una matriz que represente las acciones y los pagos.

Juego 1

		Magisterio	
		h	nh
Gobierno	n	-5, -5	1, -10
	a	-10, -2	2, 2

Necesitamos un criterio para que me facilite el análisis, por lo tanto utilizamos Equilibrios de Nash.

El equilibrio de Nash captura el estado estacionario del juego en forma estratégica en el cual cada jugador sostiene la expectativa correcta acerca del comportamiento de los otros jugadores y en el que todos actúan racionalmente.

Definición 2: Sea Γ un juego en forma estratégica. Decimos que la combinación de acciones $a \in A$ es un equilibrio de Nash si:

$$U_n(a_n, a_{-n}) \geq U_n(a'_n, a_{-n})$$
$$\forall a'_n \in A_n$$
$$\forall n \in N$$

Con
$a_{-n} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, \ldots., a_N)$.

Es decir, un equilibrio de Nash es una combinación de acciones en la cual ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse.

"El que se mueve no sale en la foto." (Don Fidel Velásquez).

Podemos observar que para este juego existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras.

$ENEP : \{(n,h),(a,nh)\}$

Por lo tanto, podemos decir que de los escenarios posibles a este problema, solo uno concuerda con lo sucedido, (n,h).

III.IV. Equilibrios de Nash en Estrategias Mixtas.

Digamos ahora, que el Gobierno no sabe si aceptar o no aceptar las demandas del Magisterio, ya que cualquier descuido podría dejarlos en la peor situación, mientras que el Magisterio también tiene este problema, por lo que deciden elegir según una distribución de probabilidad dada.

Entonces formalizaremos la idea en la cual permitimos que los jugadores tomen elecciones no determinísticas y entonces tengan la necesidad de añadir al juego original una especificación de su relación de preferencia (que es capturada por la función de pagos) sobre "loterías" en su conjunto de acciones A.

Definición 3: Sea Γ un juego en forma estratégica. Definimos la extensión mixta de Γ, denotada por Γ^m con la siguiente tripleta:

$$\Gamma^m = \left\{N, \{\Delta A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\right\}$$

Donde:

(i) N: conjunto de jugadores, i.e. $N = \{1,2,3,...,N\}$

(ii) ΔA_n: El conjunto de estrategias mixtas del jugador $n = 1,2,3,...,N$.

$$\Delta A_n = \left\{\lambda : A_n \to [0,1] : \sum_{a_n \in A_n} \lambda(a_n) = 1\right\}$$

(iii) $U_n : \Delta A_n \to \Re$ función de pagos del jugador $n = 1,2,3,...,N$. Donde:

- $\Delta A = \prod_{n\in N} \Delta A_n$

- $U_n(\lambda) = U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_N)$

  $U_n(\lambda) = \sum_{a\in A} \lambda_1(a_1) \cdot \lambda_2(a_2) \cdot ... \cdot \lambda_N(a_N)$

  $U_n(\lambda) = \sum_{a\in A} \prod_{n\in N} \lambda_n(a_n)$: Función de Utilidad esperada (Von Neumann – Morgenstern).

Por lo tanto tenemos el juego (2):

Sea $\Gamma^m = \{N, \{\Delta A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma estrategia en su extensión mixta.

Donde:

$N:\{G, M\}$
G: Gobierno
M: Magisterio

ΔA_n: Conjunto de estrategias mixtas del jugador $n = G, M$

$\Delta A_G = \{\lambda_n : A_G \to [0,1) : \lambda_G(n) + \lambda_G(a) = 1\}$
$\lambda_G(n) = \alpha$
$\lambda_G(a) = 1 - \alpha$

$\Delta A_M = \{\lambda_n : A_M \to [0,1) : \lambda_M(h) + \lambda_M(nh) = 1\}$
$\lambda_M(n) = \beta$
$\lambda_M(a) = 1 - \beta$

α: Probabilidad de no aceptar las demandas del Magisterio por parte del Gobierno.

$(1-\alpha)$: Probabilidad de aceptar las demandas del Magisterio por parte del Gobierno.

β: Probabilidad de irse a huelga por parte del Magisterio.

$(1-\beta)$: Probabilidad de no irse a huelga por parte del Magisterio.

Con funciones de Utilidad Esperada (genérica):

$$U_n(\lambda) = \sum_{a\in A}\prod_{m\in N}\lambda_m(a_m)U_n(a)$$

Por lo tanto el problema del Gobierno es maximizar su utilidad esperada con respecto a la probabilidad de negar la petición cuando la probabilidad de irse a huelga toma distintos valores:

$$Max\left\{U_G(\lambda) = \sum_{a\in A}\prod_{m\in N}\lambda_m(a_m)U_G(a)\right\}$$

La Condición de Primer Orden es:

$$\frac{\partial U_G(\bullet)}{\partial \alpha} = 0$$

Resolviendo obtenemos el valor crítico:

$$\beta = 1/6$$

Por lo tanto deducimos que:

$$\alpha = \begin{cases} 1\ldots\ldots\ldots si\ldots..\beta \succ 1/6 \\ \in [0,1]\ldots si\ldots..\beta = 1/6 \\ 0\ldots\ldots\ldots.si\ldots..\beta \prec 1/6 \end{cases}$$

Análogamente para el Magisterio:

$$Max\left\{ U_M(\lambda) = \sum_{a \in A} \prod_{m \in N} \lambda_m(a_m) U_M(a) \right\}$$

Con Condición de Primer Orden:

$$\frac{\partial U_M(\bullet)}{\partial \beta} = 0$$

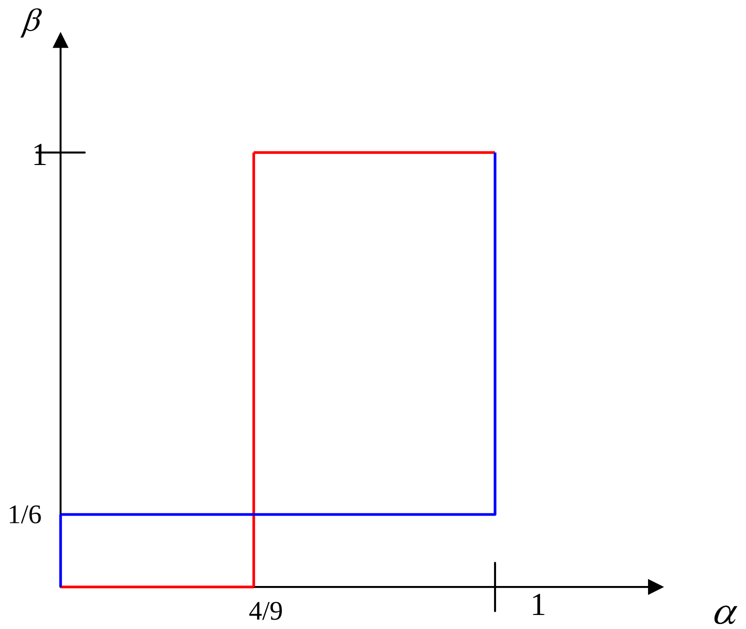
Y valor crítico:

$$\alpha = 4/9$$

Por lo tanto:

$$\beta = \begin{cases} 1\ldots\ldots\ldots si\ldots..\alpha \succ 4/9 \\ \in [0,1]\ldots si\ldots..\alpha = 4/9 \\ 0\ldots\ldots\ldots.si\ldots..\alpha \prec 4/9 \end{cases}$$

Luego



Debido a esto podemos encontrar los equilibrios Nash en estrategias Mixtas:

$$ENEM = \{[(1,0);(1,0)],[(4/9,5/9);(1/6,5/6)],[(0,1);(0,1)]\}$$

Definición 4: Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de un juego en forma estratégica es un equilibrio de Nash de su extensión mixta.

Esta definición nos dice que un equilibrio de Nash en estrategias puras, es un equilibrio de Nash en estrategias puras, donde el jugador *n*, asigna toda la probabilidad a un solo elemento de sus acciones, i.e. la distribución de probabilidad es degenerada ($ENEM = \{[(1,0);(1,0)],[(0,1);(0,1)]\}$).

La conclusión principal de esta definición es que el conjunto de equilibrios de Nash en estrategias puras, es un subconjunto de los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

III.V. Equilibrios Correlacionados.

Ahora, tomamos el equilibrio de estrategia mixta no degenerada, y suponemos lo siguiente:

El Gobierno, esta indeciso, por lo cual decide tomar cartas en el asunto, y llama a sus 9 asesores, 4 de ellos aconsejan que no acepte las peticiones del Magisterio mientras que los 5 restantes aseguran que la mejor opción es aceptar las peticiones (podemos pensar que el gobernador del estado de Oaxaca elegirá al azar).

El Magisterio, convoca a 6 representantes, los cuales se reunirán para decidir sobre el destino de la masa magisterial. Tan solo un representante vota a favor de la huelga, mientras que los 5 restantes votan por seguir trabajando (podemos pensar que el presidente del sindicato magisterial elegirá al azar).

Analizaremos un equilibrio que representa un estado estacionario donde las acciones de cada jugador provienen de una señal, que es privada e independiente.

Formalizamos esta concepción con la siguiente definición:

Definición 5 Sea Γ un juego en forma estratégica. Definimos un mecanismo de coordinación para Γ como la tripleta $\{\Omega, \{\wp_n\}_{n\in N}, \{\pi_n\}_{n\in N}\}$, donde:

(i) Ω: es el conjunto de estados de la naturaleza.

(ii) $\wp_n$: es la partición del conocimiento del jugador $n \in N$.

(iii) π_n: es la distribución de probabilidad sobre Ω para el jugador $n \in N$.

Por lo tanto consideramos el siguiente juego (3):

Definimos un mecanismo de coordinación para Γ:

$$MC = \{\Omega, \{\wp_n\}_{n\in N}, \{\pi_n\}_{n\in N}\}$$

Con:

$\Omega = \{(n,h);(n,nh);(a,h);(a,nh)\}$: Conjunto de estados de la naturaleza.

$\Omega =$

n,h	n,nh
a,h	a,nh

$\wp_n$: Partición de conocimiento del jugador $n \in N$.

$\wp_G = \{\{(n,h)\};\{(n,nh)\};\{(a,h);(a,nh)\}\}$
$\wp_M = \{\{(n,h)\};\{(a,h)\};\{(n,nh);(a,nh)\}\}$

Lo cual podemos representar de la siguiente forma:

$\wp_G =$

<table>
<tr><td>n,h</td><td>n,nh</td></tr>
<tr><td colspan="2">a,h a,nh</td></tr>
</table>

$\wp_M =$

<table>
<tr><td>n,h</td><td rowspan="2">n,nh
a,nh</td></tr>
<tr><td>a,h</td></tr>
</table>

π_n : Distribución de probabilidad sobre Ω para el jugador $n \in N$.

Sabemos que la probabilidad (o frecuencia) de que sea escogida (con la que es escogida) la acción de no aceptar las peticiones del Magisterio por parte del Gobierno es 4/9.

También sabemos que la probabilidad (o frecuencia) de que sea escogida (con la que es escogida) la acción de irse a huelga por parte del Magisterio es 1/6.

Entonces, con esta información podemos representar la siguiente tabla:

$\pi(n,h) =$	4/54
$\pi(n,nh) =$	20/54
$\pi(a,h) =$	5/54
$\pi(a,nh) =$	25/54

Lo que podemos representar de la siguiente forma:

Juego 3

Gobierno / **Magisterio**

	h	nh
n	-5, -5	1, -10
a	-10, -2	2, 2

$\Rightarrow$

	h	nh
n	4/54	20/54
a	5/54	25/54

Definido el mecanismo el paso siguiente es definir:

Definición 6: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $MC = \{\Omega, \{\wp_n\}_{n\in N}, \{\pi_n\}_{n\in N}\}$ un mecanismo de coordinación.
Decimos que $f_n : \Omega \to A_n$ es una estrategia para el jugador $n \in N$ si $\forall \omega, \hat{\omega} \in P_n \in \wp_n$ tenemos que $f(\omega) = f(\hat{\omega})$.

Estrategias para el Gobierno.

Ω	f_G^1	f_G^2	f_G^3	f_G^4	f_G^5	f_G^6	f_G^7	f_G^8
n,h	n	a	n	a	n	a	n	a
n,nh	n	n	a	a	n	n	a	a
a,h	n	n	n	n	a	a	a	a
a,nh	n	n	n	n	a	a	a	a

Estrategias para el Magisterio

Ω	f_M^1	f_M^2	f_M^3	f_M^4	f_M^5	f_M^6	f_M^7	f_M^8
n,h	h	nh	h	h	nh	h	nh	nh
n,nh	h	h	h	nh	h	nh	nh	nh
a,h	h	h	nh	h	nh	nh	h	nh
a,nh	h	h	h	nh	h	nh	nh	nh

Por lo tanto tenemos la siguiente matriz de pagos para el juego en forma estratégica asociado al correlacionado:

	f_M^1	f_M^2	f_M^3	f_M^4	f_M^5	f_M^6	f_M^7	f_M^8
f_G^1	(-5,-5)	(-4.55,-5.37)	(-4.44,-5.46)	(0,-9.16)	(-4,-5.83)	(0.55,-9.62)	(0.44,-9.53)	(1,-10)
f_G^2	(-5.37,-4.77)	(-4.55,-4.77)	(-4.81,-5.24)	(-0.37,-8.94)	(-3.92,-4.94)	(0.18,-9.40)	(0.51,-8.64)	(1.07,-9.11)
f_G^3	(-6.85,-3.88)	(-6.40,-4.25)	(-6.29,-4.35)	(0.37,-4.7)	(-5.85,-4.72)	(0.92,-5.18)	(0.81,-5.09)	(1.37,-5.55)
f_G^4	(-7.22,-3.66)	(-6.33,-3.37)	(-6.66,-4.12)	(0,-4.5)	(-5.77,-3.83)	(O.55,-4.96)	(0.88,-4.20)	(1.44,-4.66)
f_G^5	(-7.77,-3.33)	(-7.33,-3.70)	(-6.66,-2.96)	(0,-3.33)	(-6.22,-3.33)	(1.11,-2.96)	(0.44,-3.70)	(-8,-1.33)
f_G^6	(-8.14,-3.11)	(-7.25,-2.81)	(-7.03,-2.74	(-0.37,-3.11)	(-6.14,-2.44)	(0.74,-2.96)	(0.51,-2.81)	(1.11,1.70)
f_G^7	(-9.62,-2.22)	(-9.18,-2.59)	(-8.51,-1.85)	(0.37,1.11)	(-8.07,-2.77)	(1.48,1.48)	(0.81,0.74)	(0.88,1.62)
f_G^8	(-10,-2)	(-9.11,-1.70)	(-8.88,-1.62)	(0,1.33)	(-8.00,-1.33)	(1.11,1.70)	(0.88,1.62)	(2,2)

Entonces:

Definición 7: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea un mecanismo de coordinación. Decimos que el par $\left[\left(f_1, f_2, ..., f_N\right), \left\{\Omega, \left\{\wp_n\right\}_{n\in N}, \left\{\pi_n\right\}_{n\in N}\right\}\right]$ es un equilibrio correlacionado si para todo $n \in N$ se cumple que:

$$\sum_{\omega\in\Omega} \pi_n(\omega) U_n(f*_1(\omega), ..., f*_N(\omega)) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \pi_n(\omega) U_n(f*_1(\omega), ..., f*_{n-1}(\omega), f'_n(\omega), f*_{n+1}(\omega), ..., f*_N(\omega))$$

Para toda función medible del jugador $n \in N$ con respecto de $\wp_n$, i.e. para toda estrategia $f_n : \Omega \to A_n$.

Con lo que podemos definir los equilibrios en estrategias puras para este juego (3) que serán los correlacionados para el juego (1):

$$ENC_1 = \left\{\left(f_G^1, f_M^1\right), \left(\Omega, \left\{\wp_n\right\}_{n\in N}, \left\{\pi_n\right\}_{n\in N}\right)\right\}$$
$$ENC_2 = \left\{\left(f_G^8, f_M^8\right), \left(\Omega, \left\{\wp_n\right\}_{n\in N}, \left\{\pi_n\right\}_{n\in N}\right)\right\}$$
$$ENC_3 = \left\{\left(f_G^2, f_M^2\right), \left(\Omega, \left\{\wp_n\right\}_{n\in N}, \left\{\pi_n\right\}_{n\in N}\right)\right\}$$

III.V.I. Funciones de Distribución de Equilibrios Correlacionados.

Definición 8: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $g : A \to [0,1]$ una distribución de probabilidad sobre A. Decimos que g es una distribución de equilibrio correlacionado si $\forall n \in N$ y $\forall a_n \in A_n$ se cumple que:

$$\sum_{a_{-n} \in A_{-n}} g(a_n, a_{-n}) U_n(a_n, a_{-n}) \geq \sum_{a_{-n} \in A_{-n}} g(a_n, a_{-n}) U_n(a'_n, a_{-n})$$

Por lo que el paso natural será calcular distribuciones que pueden fungir como mecanismo para un equilibrio correlacionado.

Del juego (1) obtenemos las especificaciones y la matriz de pagos:

$N : \{G, M\}$

G: Gobierno
M: Magisterio

$A_G : \{n, a\}$
$A_M : \{h, nh\}$

n: negar petición.
a: aceptar petición.
h: huelga.
nh: No hacen huelga

		Magisterio h	Magisterio nh
Gobierno	**n**	-5, -5	1, -10
	a	-10, -2	2, 2

Mientras que del juego (3) obtenemos el estado de la naturaleza:

$\Omega =$

n,h	n,nh
a,h	a,nh

Aplicamos para cada jugador la definición 8:

Para el Gobierno:

Para acción *n:*

(i) $g(n,h)U_G(n,h) + g(n,nh)U_G(n,nh) \geq g(n,h)U_G(a,h) + g(n,nh)U_G(a,nh)$

Para acción *a*:

(ii) $g(a,h)U_G(a,h) + g(a,nh)U_G(a,nh) \geq g(a,h)U_G(n,h) + g(a,nh)U_G(n,nh)$

Para el Magisterio:

Para acción *h*:

(iii) $g(n,h)U_M(n,h) + g(a,h)U_M(a,h) \geq g(n,h)U_M(n,nh) + g(a,h)U_M(a,nh)$

Para acción *nh*:

(iv) $g(n,nh)U_M(n,nh) + g(a,nh)U_M(a,nh) \geq g(n,nh)U_M(n,h) + g(a,nh)U_M(a,h)$

De lo cual (i), (ii),(iii) y (iv) nos queda de la siguiente forma:

(i') $g(n,h)[U_G(n,h) - U_G(a,h)] + g(n,nh)[U_G(n,nh) - U_G(a,nh)] \geq 0$

(ii') $g(a,h)[U_G(a,h) - U_G(n,h)] + g(a,nh)[U_G(a,nh) - U_G(n,nh)] \geq 0$

(iii') $g(n,h)[U_M(n,h) - U_M(n,nh)] + g(a,h)[U_M(a,h) - U_M(a,nh)] \geq 0$

(iv') $g(n,nh)[U_M(n,nh) - U_M(n,h)] + g(a,nh)[U_M(a,nh) - U_M(a,h)] \geq 0$

Pero conocemos el valor de los pagos por tanto tenemos el siguiente sistema de restricciones que nos genera las distribuciones de equilibrio correlacionado.

(i'') $g(n,h)[-5+10] + g(n,nh)[1-2] \geq 0$
$g(n,h)[5] - g(n,nh)[1] \geq 0$

(ii'') $g(a,h)[-10+5] + g(a,nh)[2-1] \geq 0$
$g(a,h)[-5] + g(a,nh)[1] \geq 0$

(iii'') $g(n,h)[-5+10] + g(a,h)[-2-2] \geq 0$

$g(n,h)[5]+g(a,h)[0]\geq 0$

(iv'') $g(n,nh)[-10+5]+g(a,nh)[2+2]\geq 0$
$g(n,nh)[-5]+g(a,nh)[4]\geq 0$

Como resultado común sabemos que:

$$g(n,h)+g(a,h)+g(n,nh)+g(a,nh)=1$$

$0\leq g(n,h)\leq 1$
$0\leq g(a,h)\leq 1$
$0\leq g(n,nh)\leq 1$
$0\leq g(a,nh)\leq 1$

Luego todas las distribuciones que cumplan con estas 9 restricciones serán distribuciones de equilibrio correlacionado, e.g.:

g(n,h) =	1	0	4/54	2/5
g(a,h) =	0	0	5/54	0
g(n,nh) =	0	0	20/54	1/5
g(a,nh) =	0	1	25/54	2/5
$\sum g(\bullet)=$	1	1	1	1

Esto lo podemos representar de la siguiente forma:

G_1=

1	0
0	0

G_2=

0	0
0	1

G_3=

4/54	20/54
5/54	25/54

G_4=

2/5	1/5
0	2/5

III.VI. Juegos en Forma Extensiva.

Un juego extensivo es una descripción detallada de una estructura secuencial de problemas de decisión con los que se tropiezan los jugadores en una situación estratégica.

Existe información perfecta en tal juego si cada jugador, al momento de tomar las decisiones, esta informado perfectamente de todos los eventos que han ocurrido previamente.

Por lo tanto supondremos que los jugadores secuencian sus acciones, de tal forma que saben perfectamente las acciones realizadas en el pasado.

Pensemos ahora, en que el juego (4) sucede de la siguiente forma:

(i) Primero el Magisterio decide entre pedir un aumento salarial o seguir en el estado en que se encuentran. Si eligen pedir un aumento salarial el juego puede continuar, si eligen lo otro, el juego lógicamente termina.

(ii) Seguido a esto, el Gobierno decidirá si acepta o no las peticiones del Magisterio. Si el Gobierno acepta las peticiones del Magisterio, es lógico que el juego termine. Mientras que si no acepta dichas peticiones el juego continúa.

(iii) Entonces, el Magisterio después de deliberar, decidirá si se va a la huelga o no. El juego termina no importando que elija.

Es claro que se ha modificado el juego original donde existía implícita la acción del Magisterio, mientras que en este juego modificado se hace explícita la acción. Esto es con el fin de diferenciar este juego del original y debido a la implicación real que existe entre elecciones simultáneas y elecciones secuenciales.

Por otro lado se modificarán arbitrariamente los pagos realizados a las historias finales.

Formalicemos la idea de juegos extensivos (juego 4):

Definición 9: Un juego en forma extensiva, Γ_x, esta dada por:

$$\left\{N, \{A_n\}_{n\in N}, P, H, \{U_n\}_{n\in N}\right\}$$

Donde:

(i) N es el conjunto de jugadores

(ii) A_n es el conjunto de acciones para el jugador $n \in N$.

(iii) P es la función del jugador $n \in N$.

(iv) H es el conjunto de historias.

(v) U_n es la función de pagos del jugador $n \in N$.

Entonces el juego aplicado en forma extensiva:

Sea, $\Gamma_x = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, P, H, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma extensiva donde:

N : conjunto de jugadores.

$N = \{G, M\}$

G: Gobierno
M: Magisterio

A_n: Conjunto de acciones para el jugador $n \in N$

$A_G : \{n, a\}$
$A_M : \{p, np, h, nh\}$

n: negar petición.
a: aceptar petición.

p: pedir incremento salarial.
np: no pedir incremento salarial.
h: huelga.
nh: no hacen huelga.

Definición 10: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Definimos el conjunto de historias *H*, como sigue:

- $\phi \in H$
- Sea $(a_1, a_2, ..., a_k) \in H$, entonces $(a_1, a_2, ..., a_{\hat{k}}) \in H$, $\forall k > \hat{k}$.
- Sea $(a_1, a_2, ...) \in H$, entonces $(a_1, a_2, ..., a_k) \in H$, $\forall k \geq 1$. (Historia sin fin)
- Sea $(a_1, a_2, ..., a_k) \in H$ una historia. Si no existe a_{k+1} tal que $(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}) \in H$, decimos que $(a_1, a_2, ..., a_k)$ es historia final.

- Sea $(a_1,a_2,...,a_k)\in H$, si existe a_{k+1}, $\forall k\geq 1$ tal que $(a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1})\in H$, entonces $(a_1,a_2,...,a_k)\in H$.
- Denotamos por Z al conjunto de historias finales.

Como ya hemos mencionado, la secuencia de acciones es comenzada por el Magisterio, por lo tanto tenemos:

Conjunto de historias:

$H=\{\phi;\phi p;\phi np;\phi p.n;\phi p.a;\phi p.n.h;\phi p.n.nh\}$

Conjunto de historias finales:

$Z=\{\phi np;\phi p.a;\phi p.n.h;\phi p.n.nh\}$

Conjunto de historias no finales:

$H\setminus Z=\{\phi;\phi p;\phi p.n\}$

Por otro lado:

Definición 11: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Definimos la función del jugador $n\in N$ como:

$$P:H\setminus Z\to N$$

Con

$P(h)=n$

Sea $h=(a_1,a_2,...,a_k)$

$h\in H\setminus Z$, $n\in N$.

Esta definición nos dice que h es una sucesión de acciones pero es una historia, mientras que $P(h)=n$ nos dirá quien juega después de cada historia.

La función de jugador:

$P : H \setminus Z$	$\rightarrow$	N
ϕ	$\rightarrow$	M
ϕp	$\rightarrow$	G
$\phi p.n$	$\rightarrow$	M

Entonces podemos definir:

Definición 12: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Definimos la función de pagos como la función:

$$U_n : Z \rightarrow \Re$$

$\forall n \in N$.

Por lo que la función de pagos:

Para el Gobierno:

$\mathrm{U_G} : Z$	$\rightarrow$	$\Re$
ϕnp	$\rightarrow$	5
$\phi p.n.nh$	$\rightarrow$	4
$\phi p.a$	$\rightarrow$	2
$\phi p.n.h$	$\rightarrow$	2

Para el Magisterio:

$\mathrm{U_M} : Z$	$\rightarrow$	$\Re$
$\phi p.a$	$\rightarrow$	4
$\phi p.n.h$	$\rightarrow$	3
$\phi p.n.nh$	$\rightarrow$	1
ϕnp	$\rightarrow$	0

Definición 13: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Definimos una estrategia del jugador $n \in N$, como la función

$$f_n : H \setminus \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{A_n}(h)$$

Siempre que $P(h) = n$ donde $\mathrm{A_n}$ es el conjunto de estrategias disponibles después de la historia $h \in H \setminus \mathrm{Z}$.

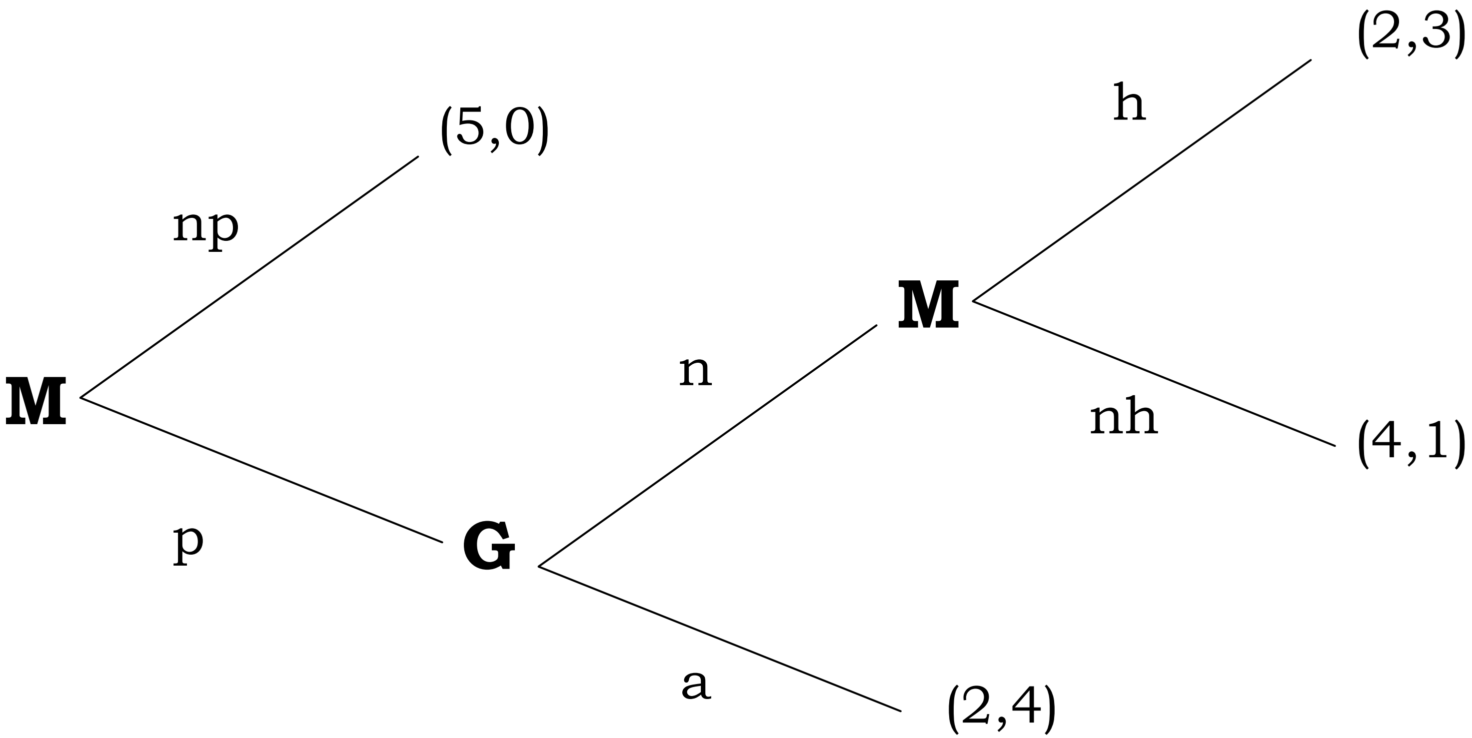
Entonces tenemos lo siguiente:

Estrategias para el Magisterio:

$f_M^1 =$	*p,h*
$f_M^2 =$	*p,nh*
$f_M^3 =$	*np,h*
$f_M^4 =$	*np,nh*

Estrategias para el Gobierno:

$f_G^1 =$	*a*
$f_G^2 =$	*n*



Representación Gráfica del Juego (4) en forma extensiva.

Para encontrar el equilibrio de este juego definimos lo siguiente:

Definición 14: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Un equilibrio de Nash para Γ_x es una combinación de estrategias $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ el cual es un equilibrio de nash para el juego en forma estratégica asociado a Γ_x.

Por lo que podemos representar al juego (4) de la siguiente forma:

Juego (4'):

		Magisterio.			
		f_M^1	f_M^2	f_M^3	f_M^4
Gobierno.	f_G^1	(2,4)	(2,4)	(5,0)	(5,0)
	f_G^2	(2,3)	(4,1)	(5,0)	(5,0)

Por la *definición 14*, podemos ver que podemos calcular los equilibrios de Nash al juego en forma estratégica (4'), y así, tendremos los equilibrios para el juego en forma extensiva.

Por la *definición 2* calculamos dichos equilibrios.

$$ENEP: \{(f_G^1, f_M^1), (f_G^2, f_M^1)\}$$

Más los que existan en estrategias mixtas.

Entonces las secuencias de equilibrio son las siguientes:

1. El Magisterio pide un aumento salarial, en seguida el Gobierno acepta y el juego se termina.

2. El Magisterio pide un aumento salarial, el Gobierno no acepta, entonces el Magisterio se va a huelga y el juego se termina.

III.VI.I. Equilibrios de Nash de Subjuego Perfecto.

Podemos observar que el concepto de equilibrio de Nash no es satisfactorio para estos modelos, la razón se encuentra en que este tipo de equilibrio ignora la estructura secuencial de los problemas de decisión.

Definiremos pues, una noción alternativa de equilibrio de subjuego perfecto, en el cual cada jugador requiere volver a examinar su plan de juego así como este procede.

Definición 15: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. Definimos un subjuego de Γ_x denotado por $\Gamma_x|_h$, como:

$$\Gamma_x|_h = \left\{N, \left\{A_n|_h\right\}_{n\in N}, P|_h, H|_h, \left\{U_n|_h\right\}_{n\in N}\right\}$$

Para $h \in H \setminus \mathrm{Z}$.

Donde:

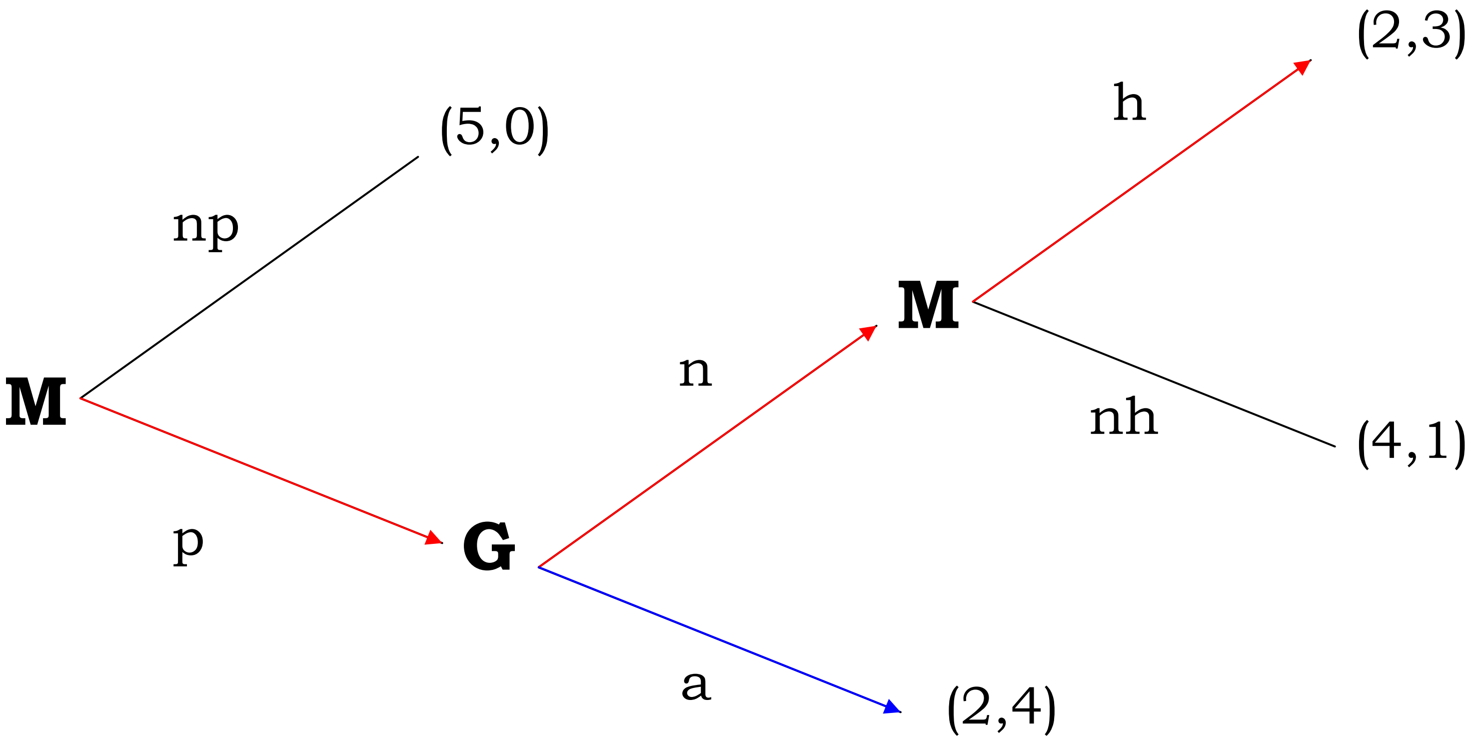
a) $A_n|_h$ es el conjunto de acciones disponibles para el jugador $n \in N$ después de la historia *h* para el resto del juego.
b) $P|_h$ satisface $P|_h(\hat{h}) = P(h\hat{h})$.
c) $H|_h$ es el conjunto de historias después de la historia *h*.
d) $U_n|_h$ satisface $U_n|_h(\hat{h}) = U_n(\hat{h})$ con $\hat{h} \in Z$.

Es claro ver que la *definición 9* es similar a esta última, la diferencia es que se aplica a cada nodo de acción del jugador n, por lo que no es necesario definir nuevamente los incisos a), b), c) y d).

Sin embargo, necesitamos una definición de equilibrio que sea consistente con la *definición 15*, por lo tanto:

Definición 16: Sea Γ_x un juego en forma extensiva. La combinación de estrategias $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ es un equilibrio de Nash de un subjuego perfecto si $(f_1|_h, f_2|_h, \ldots, f_n|_h)$ se mantiene como equilibrio de Nash en $\Gamma_x|_h$ para toda $h \in H \setminus \mathrm{Z}$.

Utilizaremos un método para calcular dichos equilibrios, *inducción hacia atrás*, el cual esta limitado a encontrar solo los equilibrios de Nash de subjuego perfecto. Para fines prácticos es útil ya que solo queremos encontrar estos equilibrios.



Solución Gráfica para Equilibrios de Nash de Subjuego Perfecto.

Por tanto el conjunto de Equilibrios de Nash de Subjuegos Perfectos es igual al conjunto de equilibrios de Nash en estrategias puras.

$$ENSP : \left\{(\mathrm{f}_{\mathrm{G}}^{1}, \mathrm{f}_{\mathrm{M}}^{1}), (\mathrm{f}_{\mathrm{G}}^{2}, \mathrm{f}_{\mathrm{M}}^{1})\right\}$$

Entonces las secuencias de equilibrio son las mismas.

III.VII. Negociación.

Juego 5: El Gobierno hace una oferta, entonces el Magisterio acepta o rechaza, si acepta se termina el juego y ambos se quedan con los pagos resultantes, si rechaza hace una contraoferta, entonces el Gobierno decide entre aceptar o aceptar, si acepta se termina el juego y ambos se quedan con los pagos resultantes, si rechaza hace una contraoferta y así sucesivamente.

Las dos partes negociadoras pierden en cada ronda parte de su premio, debido a cuanto más se prolonga la negociación las dos partes agotan la paciencia de la ciudadanía (el Gobierno por las quejas ciudadanas, el Magisterio por provocar con molestias inherentes al plantón). Suponemos que tienen diferentes factores de descuento (δ_G, δ_M).

- Si los pagos obtenidos al rechazar y al aceptar son iguales, el jugador acepta.

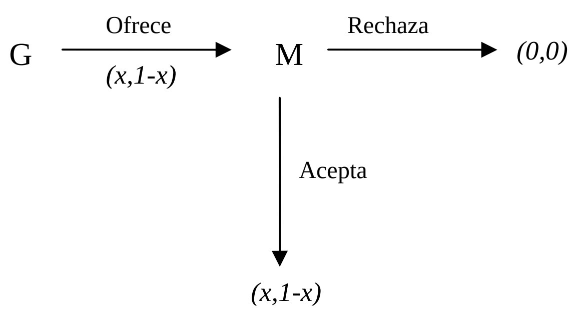
- Si después de todas las rondas de negociación no se llega a un acuerdo, el premio no va para nadie, esto es, la ciudadanía se indigna y retira su confianza o agradecimiento a ambos.

Por último supondremos que hay R rondas de negociación.

Por lo tanto:

Supongamos R=1

Como solo existe una ronda no hay "desgaste" del premio:



Por Inducción hacia atrás:

Gobierno ofrece un pago tal que sea mayor o igual a lo que obtendría el Magisterio en caso de que rechazara.

Entonces el Gobierno ofrece:

$1 - x \geq 0$

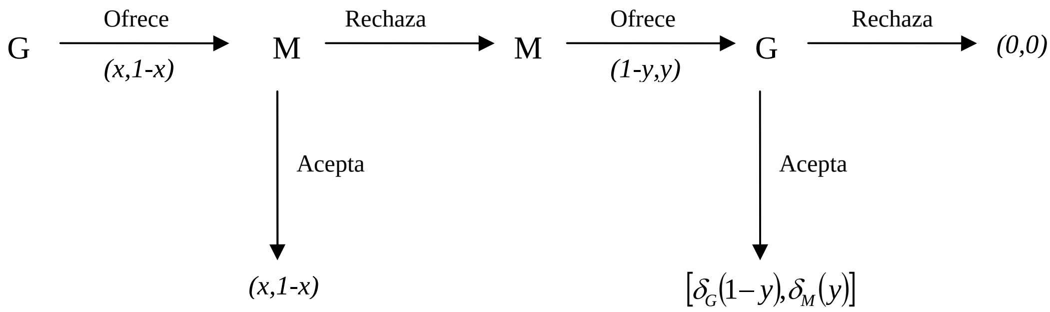
Por el supuesto de aceptar en la igualdad entonces Magisterio acepta:

$1 - x = 0$

$\Rightarrow x = 1$

Pagos de Equilibrio: $[x,(1-x)] = (1,0)$

Supongamos R=2



Por Inducción hacia atrás:

Magisterio ofrece un pago tal que sea mayor o igual a lo que obtendría el Gobierno en caso de que rechazara.

Entonces el Magisterio ofrece:

$\delta_G(1-y) \geq 0$

$(1-y) \geq 0$

El Gobierno acepta en la igualdad por lo que:

$(1-y) = 0$

$\Rightarrow y = 1$

Si acabara en ese momento el juego los pagos serian:

$[0, \delta_M]$

Pero el Magisterio hubiera aceptado, en la primera ronda, si el Gobierno hubiera ofrecido al menos δ_M :

$1 - x \geq \delta_M$

Pero Magisterio acepta en la igualdad por lo que:

$1 - x = \delta_M$

$\Rightarrow x = 1 - \delta_M$

Por lo que los *pagos de equilibrio son:*

$[1 - \delta_M, \delta_M]$

Presentemos los siguientes resultados:

Para R=4

Pagos de Equilibrio:

$(1 - \delta_2 + \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta^2{}_2, \delta_2 - \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta^2{}_2)$

Para R=5

Pagos de Equilibrio:

$(1 - \delta_2 + \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta^2{}_2 + \delta^2{}_1\delta^2{}_2, \delta_2 - \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta^2{}_2 - \delta^2{}_1\delta^2{}_2)$

Esto lo podemos generalizar de la siguiente forma:

Para Ronda Par R=2k rondas

$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 - \delta^0{}_1\delta^1{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 - \ldots - \delta^{k-1}{}_1\delta^k{}_2$

Como $\delta_1 < 1$ y $\delta_2 < 1$, solucionamos de la siguiente manera:

$$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2 - \left[\delta^0{}_1\delta^1{}_2 + \delta^1{}_1\delta^2{}_2 \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^k{}_2\right]$$
$$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2 - \delta_2\left[\delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2\right]$$
$$P_G = \sum_{t=1}^{k}(\delta_1\delta_2)^{t-1} - \delta_2\sum_{t=1}^{k}(\delta_1\delta_2)^{t-1} = [1-\delta_2]\sum_{t=1}^{k}(\delta_1\delta_2)^{t-1}$$
$$P_G = \frac{1-(\delta_1\delta_2)^k}{1-(\delta_1\delta_2)}[1-\delta_2]$$

Entonces el pago del Magisterio es:

$$P_M = 1 - P_G$$

Entonces *los pagos de equilibrio son:*

$$(P_G, P_M)$$

Para Ronda Impar R=k

$$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 - \delta^0{}_1\delta^1{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 - \ldots - \delta^{k-2}{}_1\delta^{k-1}{}_2 + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2$$

Como $\delta_1 < 1$ y $\delta_2 < 1$, solucionamos de la siguiente manera:

$$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2 - \left[\delta^0{}_1\delta^1{}_2 + \delta^1{}_1\delta^2{}_2 \ldots + \delta^{k-2}{}_1\delta^{k-1}{}_2\right]$$
$$P_G = \delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2 - \delta_2\left[\delta^0{}_1\delta^0{}_2 + \delta^1{}_1\delta^1{}_2 + \ldots + \delta^{k-1}{}_1\delta^{k-1}{}_2\right]$$
$$P_G = \sum_{t=1}^{k}(\delta_1\delta_2)^{t-1} - \delta_2\sum_{t=1}^{k-1}(\delta_1\delta_2)^{t-1}$$
$$P_G = \sum_{t=1}^{k-1}(\delta_1\delta_2)^{t-1} + (\delta_1\delta_2)^{k-1} - \delta_2\sum_{t=1}^{k-1}(\delta_1\delta_2)^{t-1} = [1-\delta_2]\sum_{t=1}^{k-1}(\delta_1\delta_2)^{t-1} + (\delta_1\delta_2)^{k-1}$$
$$P_G = \frac{1-(\delta_1\delta_2)^{k-1}}{1-(\delta_1\delta_2)}[1-\delta_2] + (\delta_1\delta_2)^{k-1}$$

Entonces el pago del Magisterio es:

$$P_M = 1 - P_G$$

Entonces *los pagos de equilibrio son:*

$$(P_G, P_M)$$

Caso cuando $R \to \infty$

Caso Par:

$$\lim_{k\to\infty} P_G = \frac{1-(\delta_1\delta_2)^k}{1-(\delta_1\delta_2)}[1-\delta_2]$$

Caso Impar:

$$\lim_{k\to\infty} P_G = \frac{1-(\delta_1\delta_2)^{k-1}}{1-(\delta_1\delta_2)}[1-\delta_2]+(\delta_1\delta_2)^{k-1}$$

De esto es claro ver que para ambos casos los pagos son:

$$P_G = \frac{1-\delta_2}{1-(\delta_1\delta_2)}$$

$$P_M = 1-P_G$$

$$(P_G, P_M)$$

III.VIII. Juegos Repetidos.

La idea básica es pensar un caso en el cual los individuos juegan repetidamente (ya sea finita o infinitamente) el mismo juego, pensemos en lo siguiente:

Han pasado 160 días desde el inicio del conflicto y las partes involucradas durante cada periodo (que puede ser un mes, una semana, un día, una hora, un minuto.....) tienen que decidir entre reunirse en una sala para negociar, o no hacerlo.

Es claro ver que esta situación tiene un horizonte finito, aunque no implica que debamos modelarlo como tal.

Un modelo con horizonte infinito es factible para agentes que en cada periodo piensan que el juego continuará por un periodo adicional. Por otro lado, un modelo con horizonte finito es factible para agentes que saben bien en que periodo se acaba.

En el segundo caso mencionado, el problema entra cuando los agentes toman en cuenta sus acciones para el periodo final. Si esto es así, ambos tienen incentivos para jugar una estrategia que lleva a un Equilibrio de Nash y no cooperar. Entonces el equilibrio será (*na,na*).

Para que no suceda esto, supongamos que en el caso de un horizonte finito, el Gobierno y el Magisterio, se comprometen a seguir una estrategia desde el principio, y que, si se desvían solo lo harán en el primer periodo. De caso contrario no se desviarán.

Para poder introducir el caso de horizonte finito, pensaremos que el Gobierno y el Magisterio no saben si al *aceptar negociar*, el resultado de la negociación puede acabar o no el conflicto, por lo que piensan que puede haber un periodo más.

Definimos el juego (6) aplicado en forma estratégica de la forma siguiente:

Sea $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma estratégica

Donde:

$N : \{G, M\}$
G: Gobierno
M: Magisterio

$A_G : \{a, na\}$
$A_M : \{a, na\}$
a: acepta negociar.
na: no acepta negociar.

$U_n : A_n \to \Re$ Función de pagos del jugador ***n=G,M.***

Pensemos en el siguiente esquema de pagos:

Gobierno:

Estrategia	Pago
(na,a)	5
(a,a)	4
(na,na)	2
(a,na)	0

Justificación de pagos:

- Cuando el Gobierno no acepta negociar y el Magisterio busca esta negociación, el primer agente sabe que su oponente esta debilitado, por lo que sabe que en cualquier momento terminará el conflicto. Esta situación es la mejor para el Gobierno.

- Cuando ambas partes deciden aceptar negociar, el Gobierno se encuentra en la segunda mejor situación, debido a que la ciudadanía lo verá como un Gobierno que trata de solucionar el problema, pero sabe que la negociación podría ser poco beneficiosa para el.

- Cuando ambas partes deciden no negociar, el Gobierno pierde "puntos" con la ciudadanía afectada y también sabe que el Magisterio puede continuar el conflicto, por lo que espera continuar por más tiempo la confrontación. Por otro lado ha lanzado una señal de su fuerza, entonces esta situación debe ser la segunda peor situación.

- Cuando el Gobierno acepta negociar y el Magisterio se niega, el primer agente ha mostrado que esta en una situación difícil, y que probablemente esta pronto a "perder" el conflicto. Aunque ha ganado puntos con la ciudadanía, estos se anulan con la confianza que toma su rival. Esta es la peor situación en la que se puede encontrar.

Magisterio:

Estrategia	Pago
(a,na)	4
(a,a)	3
(na,na)	1
(na,a)	0

Justificación de pagos:

- Cuando el Gobierno acepta negociar y el Magisterio se ha negado a hacerlo, el oponente se ve debilitado. El Magisterio sabe que puede continuar hostigando al Gobierno de tal forma que obtendrá lo que quiere y hasta "un poco más." Esta es la mejor situación en la que se puede encontrar.

- Cuando ambos agentes aceptan negociar, el Magisterio sabe que obtendrá (dependiendo del resultado de la negociación) un premio monetario o prestaciones para su gremio. Pero sabe que no obtendrá todo lo que pidió. Esta es la segunda mejor situación en la que se puede encontrar.

- Cuando ambos agentes no aceptan negociar, el Magisterio sabe que el Gobierno puede continuar el conflicto pero a su vez ha lanzado un mensaje de su fuerza. Este es el segundo peor escenario en el cual puede estar envuelto.

- Cuando el Gobierno no acepta negociar y el Magisterio si, debe ser entonces el peor escenario en el cual se puede encontrar, debido a que ha lanzado una señal de debilidad y sabe que el Gobierno aprovechará esta situación para beneficiarse.

Con los pagos justificados, podemos representar una matriz de pagos:

Juego 6

		Magisterio	
		na	**a**
Gobierno	**na**	2, 1	5, 0
	a	0, 4	4, 3

Por *definición 2*, encontramos los equilibrios de Nash en estrategias Puras:

$ENEP:\{(na,na)\}$

Este resultado ha sido obtenido cuando no existe cooperación entre los agentes. Podemos observar que bajo esta premisa el resultado no es óptimo en el sentido Pareto.

Podemos observar que la estrategia que mejora la situación de a ambos agentes en equilibrio de Nash, sin perjudicar a ninguno, es cuando ambos aceptan negociar.

Para poder alcanzar este resultado podemos fijar una estrategia tal que para un horizonte finito o infinito se juegue (*a,a*), dado un factor de descuento δ.

Consideremos las siguientes estrategias para el Gobierno y para el Magisterio.

Gobierno:
Acepta negociar en r=1.

- Si el Magisterio acepta negociar en r=1, entonces el Gobierno acepta negociar en r>1.
- Si el Magisterio no acepta negociar en r=1, entonces el Gobierno lo "castiga" en r>1.

Magisterio:
Acepta negociar en r=1.

- Si el Gobierno acepta negociar en r=1, entonces el Magisterio acepta negociar en r>1.
- Si el Gobierno no acepta negociar en r=1, entonces el Magisterio lo "castiga" en r>1.

¿Cómo lo castiga?

Definición 17: Sea Γ un juego en forma estratégica. Definimos el pago **minimax** para el jugador $n \in N$ denotado V_n por como:

$$V_n = \min_{a_{-n}\in A_{-n}} \max_{a_n \in A_n} \{U_n(a_{-n}, a_n)\}$$

Entonces, cualquiera de los dos agentes, utilizará esta forma de "castigar" para cualquier desvío de su oponente.

Calculemos entonces el pago minimax para cada uno de los agentes:

$V_G = 2$
$V_M = 1$

Estos son los pagos minimax de cada uno de los agentes, los cuales coinciden, para este juego, con los pagos obtenidos con el equilibrio de Nash.

¿Es posible que ambos jugadores elijan *(a,a)*, dado un factor de descuento δ, en cada repetición?

La respuesta viene dada por los Teoremas de Folk:

Teorema F1: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a^* \in A$ tal que $U_n(a^*) \geq V_n \quad \forall n \in N \Rightarrow \exists$ un δ suficientemente grande tal que a^* es jugada en cada repetición en Γ^∞.

Teorema F2: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a^* \in A$ un equilibrio de Nash para Γ. Sea $b \in A$ tal que $U_n(b) \geq U_n(a^*) \quad \forall n \in N$. Entonces $\exists$ un δ suficientemente grande tal que b es jugada en cada repetición en Γ^∞.

Con esto podemos ver que es posible. Podemos observar, además que al coincidir el pago asociado a la estrategia minimax y al del equilibrio de Nash, cualquiera de estos dos teoremas nos sirven indistintamente.

Juego 7: Veamos pues el caso de un juego que se repite finitamente, han sido 160 días, entonces supongamos que cada día se enfrentan ambos agentes a este juego:

Caso 1:

Si ambos no se desvían:

r=	1	2	3	...
a_G	a	a	a	...
a_M	a	a	a	...
$U_G(a)$	4	4	4	...
$U_M(a)$	3	3	3	...

Definición 18: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea Γ^R un juego repetido R veces. Definimos el pago del jugador $n \in N$ como:

$$U_n^R(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{R} \delta^{r-1} U_n(a^r)$$

con

$$0 < \delta < 1$$

Por lo que obtenemos el siguiente pago para el Gobierno:

$$U_G^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160} \delta^{r-1} U_G(a^r) = 4(1-\delta)\sum_{r=1}^{160} \delta^{r-1} = 4(1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{160}}{1-\delta}\right]$$
$$U_G^{160}(\bullet) = 4(1-\delta^{160})$$

y para el Magisterio:

$$U_M^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160} \delta^{r-1} U_M(a^r) = 3(1-\delta)\sum_{r=1}^{160} \delta^{r-1} = 3(1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{160}}{1-\delta}\right]$$
$$U_M^{160}(\bullet) = 3(1-\delta^{160})$$

Caso 2:

Cuando se desvía el Magisterio:

r=	1	2	3	...
a_G	a	na	na	...
a_M	na	na	na	...
$U_G(a)$	0	2	2	...
$U_M(a)$	4	1	1	...

De la *definición 18* tenemos que:

Los pagos para el Gobierno son

$$U_G^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160} \delta^{r-1} U_G(a^r) = (1-\delta)\left[U_G(a') + \sum_{r=2}^{160} \delta^{r-1} U_G(a^r)\right] = 2(1-\delta)\left[\sum_{r=2}^{160} \delta^{r-1}\right]$$
$$U_G^{160}(\bullet) = 2(1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{159}}{1-\delta}\right] = 2(1-\delta^{159})$$

y los pagos para el Magisterio

$$U_M^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160}\delta^{r-1}U_M(a^r) = (1-\delta)\left[U_M(a') + \sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}U_M(a^r)\right] = (1-\delta)\left[4 + 1\sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}\right]$$

$$U_M^{160}(\bullet) = 4(1-\delta) + (1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{159}}{1-\delta}\right] = 4(1-\delta) + (1-\delta^{159})$$

Caso 3:

Cuando el Gobierno se desvía:

r=	1	2	3	...
a_G	na	na	na	...
a_M	a	na	na	...
$U_G(a)$	5	2	2	...
$U_M(a)$	0	1	1	...

Por la *definición 18* tenemos:

Los pagos del Gobierno

$$U_G^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160}\delta^{r-1}U_G(a^r) = (1-\delta)\left[U_G(a') + \sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}U_G(a^r)\right] = (1-\delta)\left[5 + 2\sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}\right]$$

$$U_G^{160}(\bullet) = 5(1-\delta) + 2(1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{159}}{1-\delta}\right] = 5(1-\delta) + 2(1-\delta^{159})$$

y los pagos del Magisterio

$$U_M^{160}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{160}\delta^{r-1}U_M(a^r) = (1-\delta)\left[U_M(a') + \sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}U_M(a^r)\right] = 1(1-\delta)\left[\sum_{r=2}^{160}\delta^{r-1}\right]$$

$$U_M^{160}(\bullet) = (1-\delta)\left[\frac{1-\delta^{159}}{1-\delta}\right] = (1-\delta^{159})$$

Es claro ver que el Gobierno no se desviará si:

$$4(1-\delta^{160}) > 5(1-\delta) + 2(1-\delta^{159})$$

y el Magisterio no lo hará si:

$$3(1-\delta^{160}) > 4(1-\delta) + (1-\delta^{159})$$

Los teoremas de Folk nos ayudarán a obtener el valor de δ para el cual la estrategia óptima en el sentido Pareto se juega en cada repetición en Γ^{∞}.

Definición 19: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea Γ^{∞} un juego repetido infinitas veces. Definimos el pago del jugador $n \in N$ como:

$$U_n^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty} \delta^{r-1} U_n(a^r)$$

con

$$0 < \delta < 1$$

Por *definición 19* obtenemos para los casos 1, 2 y 3 los pagos para el Gobierno y para el Magisterio.

Caso 1':

Gobierno

$$\lim_{R \to \infty} U_G^R(\bullet) = 4(1-\delta^R)$$

$$U_G^{\infty}(\bullet) = 4$$

Magisterio

$$\lim_{R \to \infty} U_M^R(\bullet) = 3(1-\delta^R)$$

$$U_M^{\infty}(\bullet) = 3$$

Caso 2':

Gobierno

$$U_G^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty} \delta^{r-1} U_G(a^r) = (1-\delta)\left[U_G(a') + \sum_{r=2}^{\infty} \delta^{r-1} U_G(a^r)\right] = 2(1-\delta)\left[\sum_{r=2}^{\infty} \delta^{r-1}\right]$$

$$U_G^{\infty}(\bullet) = 2(1-\delta)\left[\frac{\delta}{1-\delta}\right] = 2\delta$$

Magisterio

$$U_M^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty} \delta^{r-1} U_M(a^r) = (1-\delta)\left[U_M(a') + \sum_{r=2}^{\infty} \delta^{r-1} U_M(a^r)\right] = (1-\delta)\left[4 + 1\sum_{r=2}^{\infty} \delta^{r-1}\right]$$

$$U_M^{\infty}(\bullet) = 4(1-\delta) + (1-\delta)\left[\frac{\delta}{1-\delta}\right] = 4(1-\delta) + \delta$$

Caso 3':

Gobierno

$$U_G^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty}\delta^{r-1}U_G\left(a^r\right) = (1-\delta)\left[U_G(a') + \sum_{r=2}^{\infty}\delta^{r-1}U_G\left(a^r\right)\right] = (1-\delta)\left[5 + 2\sum_{r=2}^{\infty}\delta^{r-1}\right]$$

$$U_G^{\infty}(\bullet) = 5(1-\delta) + 2(1-\delta)\left[\frac{\delta}{1-\delta}\right] = 5(1-\delta) + 2\delta$$

Magisterio

$$U_M^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty}\delta^{r-1}U_M\left(a^r\right) = (1-\delta)\left[U_M(a') + \sum_{r=2}^{\infty}\delta^{r-1}U_M\left(a^r\right)\right] = 1(1-\delta)\left[\sum_{r=2}^{\infty}\delta^{r-1}\right]$$

$$U_M^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\left[\frac{\delta}{1-\delta}\right] = \delta$$

Entonces el Gobierno no se desvía si:

$$U_G(b) > U_G(a')$$

i.e.

$$4 > 5(1-\delta) + \delta$$
$$4 > 5 - 5\delta + \delta$$
$$\delta > 1/4$$

y el Magisterio no se desvía si:

$$U_M(b) > U_M(a')$$

i.e.

$$3 > 4(1-\delta) + \delta$$
$$3 > 4 - 4\delta + \delta$$
$$\delta > 1/3$$

Como resultado final, ninguno de los dos se desvía si $\delta > 1/4$.

III.IX. El CORE.

En esta parte analizaremos los juegos coalicionales. El Core es un concepto de solución para juegos coalicionales, el cual requiere que ningún conjunto de jugadores sea capaz desprenderse y tome una acción conjunta tal que todos mejoren.

Ahora, pensemos en el siguiente *juego (8)*:

Pensemos que ahora entran al conflicto algunos grupos sociales, los cuales tomaremos como un tercer agente. Estos pueden apoyar al Gobierno o al Magisterio.

El apoyo "incondicional" que estos grupos sociales puedan brindar estará en función de quien pague más por sus servicios. Así entonces se formará una *coalición*. Suponemos que solo puede apoyar a un bando.

Pongámoslo de la siguiente forma:

Definición 20: Sea N el conjunto de jugadores. Definimos una **Coalición**, denotada por C, como un conjunto no vacío de N, $C \subset N$. A la coalición N la llamamos "*la gran coalición*."

Ahora vemos claramente que la gran coalición en el conflicto es la siguiente:

$N = \{G, M, MS\}$

Donde:

G: Gobierno.
M: Magisterio.
MS: Movimiento Social.

Consideremos lo siguiente:

1. El Movimiento Social "presta" un servicio el cual consta de movilización de personas incluidas en el. Por lo cual, para poder actuar su costo es de 200 unidades.

2. El Gobierno, sabe que el apoyo del Movimiento Social es vital para el desarrollo del conflicto. Esto es, tendría una oportunidad de ganar más alta si contara con el soporte de MS. Por lo que esta dispuesto a pagar hasta 250 unidades por su apoyo.

3. Por otro lado, el Magisterio no tiene tantos recursos como el Gobierno, así que su "precio de reserva" es de 200 unidades, pero puede prometer, que si el resultado es favorable para su "causa," al final del conflicto dará 100 unidades más.

Definición 21: Sea C una coalición. Definimos el pago de la coalición mediante la función $V : 2^N \setminus \{\phi\} \rightarrow \Re$ llamada "función característica, la cual asigna a C el pago más alto que pueden obtener por si solos. Estos pagos los denotamos por $V(C)$.

Con la definición anterior podemos obtener lo siguiente

$V(\{G\}) = 0$

$V(\{M\}) = 0$

$V(\{MS\}) = 200$

$V(\{G, M\}) = 0$

$V(\{G, MS\}) = 250$

$V(\{M, MS\}) = 300$

$V(\{N\}) = 300$

Es claro observar que si el Gobierno se incluye a sí mismo en una coalición de un solo participante, las unidades que este dispuesto a ofrecer no sirven de nada. Esto es porque no obtiene el "servicio" que desea.

El caso donde el Magisterio se incluye a sí mismo en una coalición de un solo participante es análogo al anterior.

Cuando el Movimiento Social se incluye a sí mismo en una colación de un solo participante, es claramente diferente. Esto se debe a que se "ahorra" la movilización de sus agremiados.

Cuando entran a una coalición el Gobierno y el Magisterio, ninguno de los dos obtendrá lo que desea, y esto es el apoyo del Movimiento Social.

Cuando se coluden el Gobierno y el Movimiento Social, el segundo agente movilizará sus fuerzas con el fin de ayudar al Gobierno, esta movilización le costará 200 unidades, el primer agente pagará hasta 250 unidades.

Cuando se coluden el Magisterio y el Movimiento Social, el segundo agente movilizará sus fuerzas con el fin de ayudar al primero, esta movilización le costará 200 unidades, el Magisterio pagará hasta 300 unidades.

Cuando se coluden los tres agentes, el Movimiento Social, solo apoyará a uno solo. Es natural pensar que brindará sus servicios al mejor postor.

Definición 22: Sea N un conjunto de jugadores. Definimos al conjunto de imputaciones como:

$$I = \left\{ x \in \Re^{N} : x_n \geq V(\{n\}), \forall n \in N : \sum_{n=1}^{N} x_n = V(\{N\}) \right\}$$

Cabe mencionar que para que este conjunto exista, la función característica debe ser *superaditiva*.

Entonces podemos definir nuestro conjunto de imputaciones:

$$I = \{ x \in \Re^{3} : x_G \geq 0, x_M \geq 0, x_{MS} \geq 200, x_G + x_M + x_{MS} = 300 \}$$

Definición 23: Sean $x, y \in I$. Decimos que la imputación y domina fuertemente a la imputación x, esto denotado por $x < y$, si existe una coalición C tal que:

i) $x_n < y_n \quad \forall n \in N$

ii) $\sum_{n \in C} y_n = V(C)$

La *definición 23* es una analogía de la definición de optimalidad en el sentido de Pareto, mientras que ii) nos asegura la factibilidad.

Definición 24: Sea N el conjunto de jugadores. Definimos el CORE como el conjunto:

CORE={$\boldsymbol{x} \in$ I tal que no $\exists$ una $\boldsymbol{y}$ que domine fuertemente a $\boldsymbol{x}$}

Aplicamos *definición 24* al ejemplo:

$$CORE = \left\{ x \in I : \begin{array}{l} i) x_G \geq 0 \\ ii) x_M \geq 0 \\ iii) x_{MS} \geq 200 \\ iv) x_G + x_M \geq 0 \\ v) x_G + x_{MS} \geq 250 \\ vi) x_M + x_{MS} \geq 300 \\ vii) x_G + x_M + x_{MS} = 300 \end{array} \right\}$$

De vii) y vi) obtenemos lo siguiente:

$$x_M + x_{MS} \geq 300$$

$$x_G + x_M + x_{MS} = 300$$

$$x_G + x_M + x_{MS} \geq 300 + x_G$$

$$300 \geq 300 + x_G$$

$$0 \geq x_G$$

de i)

$$0 \geq x_G$$

$$0 \leq x_G$$

Luego

$$x_G = 0$$

Entonces tenemos que vii) se expresa:

$$x_M + x_{MS} = 300$$

Ahora de v) y vii) tenemos que:

$$x_G + x_{MS} \geq 250$$

$$x_M + x_{MS} = 300$$

$$x_M + x_{MS} \geq 250 + x_M$$

$$300 \geq 250 + x_M$$

$$50 \geq x_M$$

de ii)

$$x_M \geq 0$$

entonces

$$50 \geq x_M \geq 0$$

Del resultado anterior, v) y vii) obtenemos lo siguiente

$$50 \geq x_M \geq 0$$

$$x_G + x_{MS} \geq 250$$

$$x_{MS} \geq 250$$

$$x_G + x_M + x_{MS} = 300$$

$$x_M + x_{MS} = 300$$

Por lo que

$$300 \geq x_{MS} \geq 250.$$

Por lo tanto:

$$CORE = \left\{ x \in I : \begin{array}{l} x_G = 0 \\ 50 \geq x_M \geq 0 \\ 300 \geq x_{MS} \geq 250 \\ x_G + x_M + x_{MS} = 300 \end{array} \right\}$$

El apoyo lo obtiene el Magisterio.

Conclusiones.

Hemos pues, cumplido el propósito de la tesis, el cual fue representar de manera teórica los hechos ocurridos en parte del conflicto Magisterial en el estado de Oaxaca.

¿Cuáles son los resultados?

Podemos observar que dentro de un juego en forma estratégica (véase el juego 1), encontramos, que las decisiones por parte de ambos involucrados en el conflicto son indiferentes entre acciones que llevan a una estabilidad social y acciones que llevan al conflicto directo, i.e. (a,nh) y (n,h).

Esto parece sonar lógico cuando el Gobierno acepta las peticiones del Magisterio, este último no va a huelga. Por otro lado cuando Gobierno no acepta la rezonificación, el Magisterio se planta.

Veamos que resultados podemos obtener de mixtas. Los equilibrios muestran una tendencia de los participantes por aceptar las propuestas (en el caso de Gobierno) y no irse a huelga (por parte del Magisterio).

¿Cuál fue el error?, ¿Qué inclinó la balanza de esta indiferencia?

Es posible que el Magisterio haya fallado en sus acciones primarias, también es posible que el Gobierno no haya tomado las acciones necesarias o las correctas. También es posible que un percutor, al cual llamaremos Movimiento Social, haya cambiado esta indiferencia.

Supongamos el siguiente juego para comprobar esta hipótesis:

Ahora suponemos que ya existe la huelga, el estado se ha llenado de personas quieren participar en el conflicto ya sea por solidaridad ante la situación o porque les conviene unirse a esta.

El Gobierno mantiene sus opciones de juego y además sus pagos, es decir, puede aceptar las peticiones del Magisterio, o puede seguir negándolas (si no las hubiese negado desde el principio, el juego no hubiese llegado hasta este punto).

Mientras que el Magisterio también mantiene sus acciones en el juego y además sus pagos (en cierta medida), es decir, puede levantar la huelga o simplemente seguirla como hasta ahora.

El tercer jugador, es un movimiento social, en el cual se anexan todo tipo de personas, estudiantes, ciudadanos, campesinos, etc. Estos pueden decidir si crear desordenes sociales, y así "ayudar a su causa" o mantenerse en un apoyo discreto, en el cual forman parte de los magisteriales. Cabe aclarar que este grupo busca que exista un conflicto entre los jugadores originales debido a que puede recibir un pago mayor, ya que pueden recibir un bono por su participación o ganar beneficios para la sociedad. Por lo tanto cuando no existe conflicto ellos no ganan.

Definimos el juego en forma estratégica de la forma siguiente:

Sea $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma estratégica

Donde:

$N : \{G, M, MS\}$

G: Gobierno
M: Magisterio
MS: Movimiento Social

$A_G : \{n, a\}$
$A_M : \{h, nh\}$
$A_{MS} : \{nd, d\}$

n: negar.
a: aceptar.
h: seguir en la huelga.
nh: levantar la huelga.
nd: no hacen desorden.
d: desorden.

$U_n : A_n \rightarrow \Re$ Función de pagos del jugador *n=G,M,MS.*

Supongamos que si los movimientos sociales escogen no hacer desordenes, pero se unen de manera pasiva al grupo magisterial, entonces el juego es igual al juego original, donde había solo dos jugadores, esto es debido a que al Gobierno le da igual negociar con un grupo de *n* personas que con uno de *n+m* personas (también suponemos que la cantidad de personas involucradas en la negociación no afecta a esta).

Gobierno:

Estrategia	Pago
(n,h,nd)	-5
(n,nh,nd)	1
(a,h,nd)	-10
(a,nh,nd)	2
(n,h,d)	-5
(n,nh,d)	1
(a,h,d)	-10
(a,nh,d)	2

Justificación de los pagos:

- La justificación de los primeros cuatro pagos es idéntica a la utilizada en el juego original.

- Supongamos ahora que el daño recibido por la participación del movimiento social, va directamente a la ciudadanía, esta ejerce presión a los gobernantes, pero estos no resienten este hecho debido a que ya antes estaban siendo presionados. Por lo que los pagos son similares a los del juego original.

Magisterio:

Estrategia	Pago
(n,h,nd)	-5
(n,nh,nd)	-10
(a,h,nd)	-2
(a,nh,nd)	2
(n,h,d)	-5
(n,nh,d)	-10
(a,h,d)	-2
(a,nh,d)	-1

Justificación de los pagos:

- La justificación de los primeros cuatro pagos es idéntica a la utilizada en el juego original.

- Bajo el desorden social los primeros tres pagos quedan idénticos al juego original, pero, en el ultimo pago (a,nh,d), estos pueden sufrir presiones por parte de sus nuevos aliados (MS) debido a que estos han arriesgado su integridad, por lo que el pago que antes obtenían desciende.

Movimiento Social:

Estrategia	Pago
(n,h,nd)	5
(n,nh,nd)	5
(a,h,nd)	5
(a,nh,nd)	0
(n,h,d)	5
(n,nh,d)	5
(a,h,d)	5
(a,nh,d)	0

Justificación de los pagos:

- Cuando existe un conflicto entre los jugadores originales, el movimiento social gana, porque sabe que a la larga ganará ya sea un premio monetario en recompensa por el apoyo prestado al Magisterio, o porque gana ciertas cosas que después de participar de alguna forma a favor del grupo magisterial son incluidas en el pliego petitorio del Magisterio.

- Cuando no existe conflicto entre los jugadores originales, el movimiento social, no tiene oportunidad de ganar nada ya que su participación no es del todo necesaria.

Ordenados y justificados los pagos, es posible formar una matriz que represente las acciones y los pagos.

		Movimiento Social			
		nd		*d*	
		Magisterio		**Magisterio**	
		h	*nh*	*h*	*nh*
Gobierno	*n*	-5,-5,5	1,-10,5	-5,-5,5	1,-10,5
	a	-10,-2,5	2,2,0	-10,-2,5	2,-1,0

Podemos observar que para este juego existen tres equilibrios de Nash en estrategias puras.

$$ENEP : \{(n,h,nd),(a,nh,nd),(n,h,d)\}$$

Entonces, podemos pensar en la primera casilla como el juego original, y a la segunda casilla como un juego con un integrante extra, por lo que podemos inferir que la participación activa del tercer jugador eliminará un equilibrio el cual resulta de un acuerdo y pronta resolución del conflicto. Dejando lo que en realidad sucedió en el estado de Oaxaca, un conflicto largo, económica y moralmente doloroso para la sociedad.

Esto nos lleva a pensar que el error de ambas partes, fue coordinado por la intervención de otros grupos.

Por otro lado en la sección de equilibrios correlacionados, vemos que la situación de equilibrios mixtos se sostiene a las "loterías" utilizadas. Y se muestran diferentes funciones de distribución de probabilidad que "podrían" utilizarse y que nos llevarían a equilibrios correlacionados.

Podemos coordinar estos equilibrios a la "frecuencia" con la que el Gobierno acepta o rechaza las propuestas del Magisterio, este análisis es completado mediante la coordinación de las "frecuencias" con las que el Magisterio se va a huelga (siempre y cuando se cumplan las restricciones incluidas en la sección). Este enfoque estaría basado en la observación.

En la sección asociada a los juegos extensivos, podemos ver que el resultado también es indiferente entre acciones que se dirigen a la solución del conflicto como al enfrentamiento directo. La estructura secuencial es respetada por los equilibrios originales de Nash, por lo que coinciden con los equilibrios de Nash de subjuego perfecto.

Este problema se puede solucionar, buscando una estrategia que permita que "un" equilibrio óptimo en el sentido Pareto. ¿Podemos evitar confrontamientos directos?, pudimos observar que si. Solo necesitamos una estrategia que asegure un "castigo," y un factor de descuento temporal. Así, es posible que el Gobierno (o la autoridad competente en el sentido de regulación del conflicto), encuentre un equilibrio que sea benéfico para ambas partes y la sociedad.

Con esto se ha representado la situación, y se han llegado a conclusiones que pueden llegar a evitar la confrontación, o simplemente a mantenerla en un ámbito de tranquilidad. Lo cual, no afectaría a la sociedad ni a la economía.

¿Es posible que se puedan evitar este tipo de conflictos? Teoría de Juegos nos dice que probablemente no. Pero nos da herramientas para solucionarlos de manera rápida, o mantenerlos imperceptibles en un marco de legalidad.

Por último, desde un punto de vista personal. La presente tesis, posee una estructura tal que puede ser utilizada como manual para la aplicación de Teoría de Juegos a cualquier situación.

Apéndice Matemático.

I. Definiciones Esenciales.

Definición de Juego.

Es una descripción de la interacción estratégica que incluye restricciones en las acciones que los jugadores pueden tomar, pero no especifica las acciones que los jugadores toman.

En un sentido más simple podemos decir que un juego es una actividad competitiva, en la cual los jugadores compiten entre ellos de acuerdo a un conjunto de reglas.

En adelante se referirá a los participantes como jugadores.

Definición de Solución.

Es una descripción sistemática de resultados que emergen en la familia de juegos.

Entonces con estas definiciones podemos decir que la teoría de juegos sugiere soluciones razonables para los juegos y examina sus propiedades.

Por otro lado es importante establecer que es el comportamiento racional ya que los modelos que estudiaremos se asume que cada jugador es racional en el sentido de que esta al tanto de sus alternativas, forma sus expectativas acerca de lo desconocido, tiene preferencias y escoge deliberadamente su acción después del proceso de optimización.

Definición de Comportamiento Racional.

En ausencia de incertidumbre los siguientes elementos constituyen un modelo de elección racional:

(a) Un conjunto A de acciones de donde el jugador hace una elección: A es un conjunto que consiste en todas las acciones que bajo ciertas circunstancias, están disponibles para el jugador. En cualquier situación dada, el jugador se encontrará con un subconjunto de A, del cual deberá escoger un solo elemento. El jugador conoce este subconjunto de acciones disponibles y las toma como dadas. En particular este subconjunto no esta influenciado por las preferencias del jugador.

(b) Un conjunto C de consecuencias de esas acciones.

(c) Una función de consecuencia $g: A \to C$ que asocia una consecuencia a cada acción.

(d) Una relación de preferencia (relación binaria completa, transitiva y reflexiva) en el conjunto C. ($\succsim$)

II. Equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash captura el estado estacionario del juego en forma estratégica en el cual cada jugador sostiene la expectativa correcta acerca del comportamiento de los otros jugadores y en el que todos actúan racionalmente.

Definición: Sea Γ un juego en forma estratégica. Decimos que la combinación de acciones $a \in A$ es un equilibrio de Nash si:

$$U_n(a_n, a_{-n}) \geq U_n(a'_n, a_{-n})$$
$$\forall a'_n \in A_n$$
$$\forall n \in N$$

Con
$a_{-n} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, \ldots, a_N)$.

Es decir, un equilibrio de Nash es una combinación de acciones en la cual ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse.

Definición: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a_{-n} \in A_{-n}$ arbitraria, con $A_{-n} = \prod_{\substack{m \in N \\ m \neq n}} A_m$. Decimos que la correspondencia de mejor respuesta del jugador $n = 1,2,\ldots,N$ ante a_{-n} esta denotada por:

$$MR(a_{-n}) : A_{-n} \rightarrow\rightarrow A_n \text{ entonces } a_n \in \arg\max_{a'_n \in A_n} \{Un(a'_n, a_{-n})\} = MR(a_{-n})$$

Es fácil notar que $MR(a_{-n}) \subset A_n$, y que además esta formulación alternativa de la definición 2, nos señala un método (no necesariamente eficiente) para encontrar el equilibrio de Nash:

1. Primero calcular la función de mejor respuesta para cada jugador
2. encontrar un a de acciones para las cuales $a_n \in MR(a_{-n})$ $\forall n \in N$.

Ahora que si todas las funciones de mejor respuesta de el jugador $n = 1,2,\ldots,N$ son “singletones”, entonces el segundo paso implica resolver N ecuaciones en las N $(a_n)_{\forall n \in N}$ desconocidas.

De lo anterior surge la siguiente proposición:

Proposición: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a \in A$ arbitrario, entonces a es un equilibrio de Nash si y solo si $a = MR(a)$

Demostración:

$a \in A$ es equilibrio de Nash $\Leftrightarrow U_n(a_n, a_{-n}) \geq U_n(a'_n, a_{-n})$, $\forall a_n \in A_n$, $\forall n \in N$
$\Leftrightarrow a_n \in MR_n(a)$, $\forall n \in N$
$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, ..., a_N) \in MR_1(a) \times MR_2(a) \times MR_3(a) \times ... \times MR_N(a) = \prod_{n \in N} MR_n(a)$
$\Leftrightarrow a \in MR(a)$.

Q. E. D.

Existencia del Equilibrio de Nash.

No todos los juegos en forma estratégica tienen equilibrio de Nash, por esto, las condiciones bajo las cuales el conjunto de equilibrios de Nash es no vacío en algún juego, han sido investigadas exhaustivamente.

Un resultado de existencia tiene tres propósitos:

- Si tenemos un juego que satisface la hipótesis del resultado entonces sabemos que existe al menos un equilibrio.
- La existencia de un equilibrio muestra que el juego es consistente con la solución de estado estacionario.
- Nos permite estudiar las propiedades del equilibrio.

Para mostrar que el juego tiene un equilibrio de Nash es suficiente mostrar que existe un a de acciones tal que $a_n \in MR(a_{-n})$ $\forall n \in N$. Definimos el conjunto $MR : A \to\to A$ dado por $MR(a) = \prod_{n \in N} MR_n(a_{-n})$. Entonces $a_n \in MR(a_{-n})$ se puede escribir en un vector de forma más simple: $a = MR(a)$ (punto fijo). Por lo tanto los teoremas de punto fijo dan condiciones para MR bajo las cuales existe un valor de a para el cual $a \in MR(a)$.

Entonces usaremos el siguiente teorema de punto fijo. Que por el nivel matemático utilizado y por el poco contenido de sentido en el trayecto de la presente, será omitida la demostración.

Teorema: (Teorema de punto fijo de Kakutani (1941)). Sea C un subconjunto de $\Re^n$ compacto, convexo y no vacío; y sea $\psi : C \to\to C$ una correspondencia hemicontinua superior que toma valores no vacíos, cerrados y convexos. Entonces existe un $x^* \in C$ tal que $x^* \in \psi(x^*)$.

Por otro lado, utilizaremos para la demostración de existencia algunos resultados que enseguida se enuncian:

Lema: Sea A_n un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio $\Re^{k_n}$ para $n=1,2,3,\ldots,N$. Entonces el conjunto $A=\prod_{n=1}^{N} A_n$ es no vacío, compacto y convexo con $K=\sum_{n=1}^{N} k_n$.

Demostración:

Puesto que cada A_n es **no vacío** entonces existe un elemento $a_n \in A_n$ para $n=1,2,3,\ldots,N,$ luego el elemento $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)\in A$ por lo que A es no vacío.

El paso siguiente es demostrar que A es **compacto**, i.e. A es cerrado y acotado.

- A cerrado:

Sea una sucesión $\{(a_1^l,a_2^l,a_3^l,\ldots,a_N^l)\}_{l\in N}\subset A$ tal que converge a $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)$, cada sucesión $\{(a_n^l)\}_{l\in N}\subset A_n$ converge a a_n; puesto que cada A_n es cerrado, tenemos que $a_n \in A_n$ para cada $n=1,2,3,\ldots,N,$ i.e. $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)\in A$.

- A acotado:

Es acotado ya que $\exists$ números M_i tales que $\|a_n\|\le M_i, \forall a_n \in A_n$. Notemos que:

$$\|(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)\|\le\|a_1\|+\|a_2\|+\ldots+\|a_N\|\le M_1+M_2+\ldots+M_N$$

luego $M=M_1+M_2+\ldots+M_N$ es una cota para A.

Entonces, el siguiente paso es probar que A es **convexo**, sean $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)$, $(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_N)\in A$, además sea $\lambda\in[0,1]$. La combinación convexa:

$$\lambda(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)+(1-\lambda)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_N)=(\lambda a_1+(1-\lambda)t_1,\ldots,\lambda a_N+(1-\lambda)t_N)$$

pero

$\lambda a_n+(1-\lambda)t_n\in A_n$ porque cada conjunto A_n es convexo, por lo tanto:

$$\lambda(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_N)+(1-\lambda)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_N)\in A.$$

$\therefore A$ convexo.

Por otro lado necesitaremos la definición de cuasiconcavidad, por lo tanto:

Definición*: Sea $f: A \to \Re$ una función definida sobre el conjunto convexo $A \subseteq \Re^l$. Decimos que f es cuasicóncava en A si el conjunto:

$$\{x \in A | f(x) \geq k\}$$

es convexo, para todo $k \in \Re$.

Teorema (Existencia de Equilibrio de Nash):

Sea Γ un juego en forma estratégica. Para todo jugador $n = (1,2,3,...,N)$ se cumple que:

- A_n es no vacío, compacto y convexo.
- La función de pagos, U_n, es continua en $A = \prod_{n=1}^{N} A_n$ y cuasicóncava en a_n

Entonces, existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras para Γ.

Demostración:

Definamos para cada jugador n, su correspondencia de mejor respuesta MR_n, que asigna a cada perfil de estrategias puras $a = (a_n, a_{-n})$ el conjunto $MR_n(a)$, que esta formado por todas las soluciones del problema:

$$\max_{a_n} \{U_n(a_n, a_{-n})\}$$
$$s.a: a_n \in A_n$$

Ya que U_n es continua en A, y por lo tanto en A_n para a_{-n} fijo, y como A_n es compacto, entonces, por el teorema de Weierstrass, el problema de maximización tiene solución, i.e. MR_n toma valores no vacíos. Con las correspondencias de mejor respuesta de cada jugador, definimos la correspondencia de mejor respuesta global $MR: A \to\to A$, como

$$MR(a) = MR_1(a) \times MR_2(a) \times MR_3(a) \times ... \times MR_N(a)$$

Ahora verificamos que se cumplen las hipótesis del teorema de Kakutani, para la correspondencia de MR:

I. A es no vacío, convexo y compacto, tal como lo establecimos en el lema 1.

II. Como cada $MR_n(a)$ es no vacío, el producto:

$$MR_1(a)\times MR_2(a)\times MR_3(a)\times\ldots\times MR_N(a)$$

también es no vacío, luego MR toma valores no vacíos.

III. MR es hemicontinua superior y toma valores cerrados o, equivalentemente, dado que A es compacto, la grafica de MR es un conjunto cerrado. Para ver esto ultimo, consideremos la siguiente sucesión:

$$\{a^k,t^k\}_{k\in N}\subseteq gr(MR)\,\text{con}\,\lim_{k\to\infty}(a^k,t^k)=(a,t)$$

Por definición de *gr(MR)* tenemos que $t^k\in MR(a^k)$, o bien, para cada jugador n, $t_n^{\ k}\in MR_n(a_n^{\ k})$, ahora usamos la definición de las correspondencias de MR_n, con lo cual, para cada jugador n tenemos:

$$U_n(t_n^{\ k},a_{-n}^{\ k})\geq U_n(z_n^{\ k},a_{-n}^{\ k})$$
$$\forall z_n\in A_n$$

Como cada U_n es continua, haciendo $k\to\infty$ conseguimos:

$$U_n(t_n,a_{-n})\geq U_n(z_n,a_{-n})$$
$$\forall z_n\in A_n$$

Como A_n es cerrado, entonces $t_n\in A_n$, más aun, $t_n\in MR_n(a)$ para cada jugador n, y en consecuencia $t\in MR(a)$ de forma equivalente $(a,t)\in gr(MR)$.

IV. Nos queda ver que MR toma valores convexos. Sea n un jugador arbitrario y consideremos $t_1,t_2\in MR_n(a_n,a_{-n})$ y $\lambda\in[0,1]$, i.e.:

$$U_n(t_1,a_{-n})\geq U_n(z_n,a_{-n})$$
$$U_n(t_2,a_{-n})\geq U_n(z_n,a_{-n})$$
$$\forall z_n\in A_n$$

Como U_n es cuasicóncava en la variable a_n tenemos

$$U_n(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,a_{-n})\geq\min\{U_n(t_1,a_{-n}),U_n(t_2,a_{-n})\}\geq U_n(a_n,a_{-n})$$

O bien $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \in MR_n(a_n, a_{-n}) = MR_n(a)$. Entonces MR toma valores convexos, ya que es el producto cartesiano de los conjuntos convexos A_n.

Entonces podemos aplicar el teorema de Kakutani.

Existe un $a^* \in A$ tal que

$$a^* \in MR(a^*)$$

i.e. a^*, es un equilibrio de Nash.

Q. E. D.

Proposición: Cualquier juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Demostración:

Sea $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego en forma estratégica, y para cada jugador n sea m_n el número de elementos en el conjunto A_n. Entonces podemos identificar el conjunto ΔA_n de estrategias mixtas para el jugador n con el vector:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{m_n})$$

Para el cual

$\lambda_k \geq 0$, $\forall k$

Y

$$\sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k$$

Siendo λ_k la probabilidad con la cual el jugador n usa la k-ésima estrategia pura.

Entonces el conjunto es no vacío, convexo y compacto. Como su pago esperado es lineal en probabilidades, la función de pagos de cada jugador en la extensión mixta del juego en forma estratégica es cuasicóncava en sus estrategias y continua.

Entonces la extensión mixta del juego en forma estratégica, satisface los requisitos del teorema de existencia del equilibrio de Nash.

Q. E. D.

El supuesto esencial de esta demostración es que el conjunto de acciones de cada jugador es finito.

Por otro lado podemos enunciar el siguiente teorema que nos será de utilidad al momento de calcular el equilibrio.

Teorema: Sea $\Gamma = \{N, \{A_n\}_{n\in N}, \{U_n\}_{n\in N}\}$ un juego finito en forma estratégica. Entonces $a^* \in \prod_{n\in N} \Delta A_n$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego si y solo si para cada jugador $n \in N$ cualquier estrategia pura a favor de $a_n{}^*$ es la mejor respuesta a $a_{-n}{}^*$.

Demostración:

Primero suponemos que existe una acción a_i en estrategias puras a favor a $a_n{}^*$ (en estrategias mixtas) y que esta ultima no es mejor respuesta a $a_{-n}{}^*$. Entonces por la linealidad de U_n en a_n (dada la función de utilidad esperada antes definida), el jugador *n* puede incrementar su pago al transferir probabilidad de a_n (acción en estrategias puras), a otra que sea mejor respuesta. Entonces $a_n{}^*$ no es mejor respuesta a $a_{-n}{}^*$

Ahora, supongamos que existe una estrategia mixta a'_n, que nos da un pago esperado mayor que a^*_n en respuesta a lo que los demás hacen $a_{-n}{}^*$. Entonces por la linealidad de U_n, al menos una acción a favor de a'_n debe dar un mayor pago que alguna acción a favor de a^*_n, entonces no todas las acciones a favor de a^*_n son mejor respuesta a $a_{-n}{}^*$.

Q. E. D.

III. Folk.

Hay dos teoremas de Folk. Lo siguiente es demostrarlos:

Teorema F1: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a^* \in A$ tal que $U_n(a^*) \geq V_n \quad \forall n \in N \Rightarrow \exists$ un δ suficientemente grande tal que a^* es jugada en cada repetición en Γ^∞.

Demostración:

Consideremos la siguiente estrategia para el jugador $n \in N$:

1. Jugar en a^*_n r=1
2. En r>1 jugar a^*_n si $a_{-n} = a^*_{-n}$ en r=1.
3. En r>1 jugar la estrategia $a_n \in A_n$ que castiga al jugador que se desvió en r=1. Esto lo hace para r>1.

Sin pérdida de generalidad se elegirá al jugador que todos van a castigar, dentro del conjunto de jugadores que se desviaron.

Ningún jugador $n \in N$ se desvía:

r=	1	2	3	...
a_n	a^*_n	a^*_n	a^*_n	...
a_{-n}	a^*_{-n}	a^*_{-n}	a^*_{-n}	...
$U_n(\bullet)$	$U_n(a^*)$	$U_n(a^*)$	$U_n(a^*)$	...

Por lo que el pago del jugador $n \in N$ es:

$$U_n^\infty(\bullet) = (1-\delta)\sum_{r=1}^{\infty} \delta^{r-1} U_n(a^*)$$

$$U_n^\infty(\bullet) = U_n(a^*)$$

El jugador $n \in N$ se desvía:

r=	1	2	3	...
a_n	$\hat{a}_n$	$a_n^{\min\max}$	$a_n^{\min\max}$	...
a_{-n}	a^*_{-n}	$a_{-n}^{\min\max}$	$a_{-n}^{\min\max}$	...
$U_n(\bullet)$	$U_n(\hat{a}_n, a^*_{-n})$	V_n	V_n	...

Lógicamente para que el jugador $n \in N$ tenga incentivos para desviarse de la estrategia:

$$U_n(a*_n) > U_n(\hat{a}_n, a*_{-n})$$

El pago por desviarse es:

$$U_n^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)\left[U_n(\hat{a}_n, a*_{-n}) + \sum_{r=2}^{\infty} \delta^{r-1} V_n\right]$$

$$U_n^{\infty}(\bullet) = (1-\delta)U_n(\hat{a}_n, a*_{-n}) + \delta V_n$$

El jugador $n \in N$ no se desvía si:

$$U_n(a*_n) > (1-\delta)U_n(\hat{a}_n, a*_{-n}) + \delta V_n$$

Resolviendo para δ:

$$1 > \delta > \frac{U_n(\hat{a}_n, a*_{-n}) - U_n(a*_n)}{U_n(\hat{a}_n, a*_{-n}) - V_n}$$

QED.

Teorema F2: Sea Γ un juego en forma estratégica. Sea $a* \in A$ un equilibrio de Nash para Γ. Sea $b \in A$ tal que $U_n(b) \geq U_n(a*)$ $\forall n \in N$. Entonces $\exists$ un δ suficientemente grande tal que b es jugada en cada repetición en Γ^{∞}.

Demostración: Análoga a la anterior.

Bibliografía.

(1) Gibbons, Robert, “An introduction to applicable Game Theory,” NBER, Twp: 199. (1996).

(2) Schelling, Thomas, “The strategy of Conflict,” Harvard University Press, (1980).

(3) Osborne, “An Introduction to Game theory,” Oxford University Press, (2000).

(4) Osborne, Martin & A. Rubinstein, “A course in Game theory,” MIT Press, (1994).

(5) Jehle G. & Reny P., “Advance Microeconomic Theory,” Addison Wesley, (2001).

(6) Kreeps, D., “Curso de Teoría Microeconómica,” Mc Graw Hill, (1995).

(7) Kreeps, D. “Teoría de Juegos y Modelación Económica,” FCE, (1994).

(8) Alt, E. James, Margaret Levi & Elinor Ostrom, “Competition and Cooperation,” Russell Sage Foundation, New York (1999).

(9) MasCollel, A., M. Whinston, and J. Green, “Microeconomic Theory”, New York: Oxford University Press, (1995).

(10) Varian, Hal R., “Análisis Microeconómico,” Editor Antoni Bosch. Tercera edición, Barcelona (1994).

(11) Rudin, Walter, “Principles of Mathematical Analysis”. McGraw-Hill, Inc., (1964).

(12) Sydsaeter, Knut, Arne Strom & Peter Berck, “Economists’ Mathematical Manual”, Springer Press, Alemania (2000).

(13) Sydsaeter, Knut & Peter J. Hammond, “Matematicas para el Análisis Económico”, Prentice Hall Ed., (2000).

(14) El imparcial, www.imparcialenlinea.com

(15) El Noticias, www.noticias-oax.com.mx

(16) Expresión, www.lopezlena.com.mx

(17) Extra de Oaxaca, www.extradeoaxaca.com.

(18) A Diario, www.adiario.com.mx

(19) Secretaria de Economía de Oaxaca, http://economia.oaxaca.gob.mx.

(20) Wikipedia: Teoría de Juegos, http://es.wikipedia.com