



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS PROPIEDADES DE TRANSPORTE DE  
COMPUESTOS BIRREFRINGENTES  
CALCULADAS USANDO EL  
MÉTODO DE HOMOGENEIZACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

MATEMÁTICO

PRESENTA :

JOSÉ JUAN LEY MANDUJANO

TUTOR

DR. FEDERICO JUAN SABINA CÍSCAR

2008.





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Las Propiedades de Transporte de  
Compuestos Birrefringentes Calculadas  
Usando el Método de Homogeneización

José Juan Ley Mandujano

Marzo de 2008.

## Hoja de Datos del Jurado

<b>Formato</b>	
<b>1.</b>	<b>Datos del Alumno</b> Ley Mandujano José Juan 55942377 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 094327881
<b>2.</b>	<b>Datos del Tutor</b> Dr. Federico Juan Sabina Císcar
<b>3.</b>	<b>Datos del sinodal 1</b> Mat. Emilio Cabrera Castro
<b>4.</b>	<b>Datos del sinodal 2</b> M. en C. Rubén Becerril Fonseca
<b>5.</b>	<b>Datos del sinodal 3</b> Dr. José Lino Samaniego Mendoza
<b>6.</b>	<b>Datos del sinodal 4</b> Dr. Pablo Luis Rendón Garrido
<b>7.</b>	<b>Datos del trabajo escrito</b> Las Propiedades de Transporte de Compuestos Birrefringentes Calculadas Usando el Método de Homogeneización 53p 2008



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

Votos Aprobatorios

**Act. Mauricio Aguilar González**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**Las Propiedades de Transporte de Compuestos Birrefringentes Calculados Usando el Método de Homogeneización**

realizado por **Ley Mandujano José Juan** con número de cuenta **0-9432788-1** quien opta por titularse en la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Tutor Dr. Federico Juan Sabina Ciscar

Propietario Mat. Emilio Cabrera Castro

Propietario M. en C. Rubén Becerril Fonseca

Suplente Dr. José Lino Samaniego Mendoza

Suplente Dr. Pablo Luis Rendón Garrido

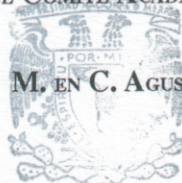
Pablo Luis Rendón

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Ciudad Universitaria, D. F., a 5 de febrero de 2008

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS



M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

# Agradecimientos

A mis padres Victor Ley Lio y Sarith Mandujano Hernández, mis hermanas Shei la y Yanshing, que siempre me apoyan en todo momento.

Al Doctor Federico Juan Sabina Císcar por su tiempo, paciencia y disponibilidad para apoyarme en esta tesis por que sin sus asesorías y sugerencias no se hubiese terminado este proyecto.

Al M. en C. Rubén Becerril Fonseca por brindarme su amistad cuando estaba en UAM Iztapalapa

A mis amigos Marco Antonio Sánchez, Rafael Mendoza, Leonardo Ortíz, Héctor Cuevas, Eduardo Enriquez, Juan Olguin, Felix Mejia, Jorge Muñoa, Erasmo García, Francisco Rodríguez, Victor Cruz, Edgar Campos, Juan Carlos Mendoza, Rafael Reyes, José García y en especial a Emilio Cabrera que siempre me apoya desinteresadamente y me brinda su valiosa amistad.

A mis sinodales Emilio Cabrera Castro, Rubén Becerril Fonseca, Pablo Luis Rendón Garrido y José Lino Samaniego Mendoza por su disposición para revisar este trabajo y sobre todo por sus comentarios y sugerencias.

Al M. en C. Agustín Ontiveros Pineda por el apoyo que me otorgo en el trayecto final del trabajo de Tesis.

Deseo dar las gracias al Consejo Departamental de Matemáticas por haberme gestionado la licencia con goce de sueldo, de acuerdo con la cláusula 69, punto IV del Contrato Colectivo de Trabajo del Personal Académico de la UNAM con oficio FCIE/0903 de la sesión ordinaria N° 2 del 15 de febrero de 2007

Agradezco el financiamiento otorgado por el proyecto CoNaCyT N° 47218R, “Modelación de andamios de hueso y compuestos magnetoelásticos”. Al departamento de Matemática y Mecánica del I. I. M. A. S., U. N. A. M., el apoyo secretarial (Alma Rosa Rodríguez Torres y Ma. de Lourdes Romero Escobar) y logístico prestado.

También a Ana Cecilia Pérez Arteaga y Rámiro Chávez por el auxilio y

disponibilidad para las asesorías en materia de computo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Solución de los Problemas Canónicos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Planteamiento de los problemas locales . . . . .	1
1.3. Solución para el problema local $_{13}L$ . . . . .	3
1.4. Solución para el problema local $_{23}L$ . . . . .	9
1.5. Propiedades efectivas . . . . .	13
1.6. Las relaciones de reciprocidad . . . . .	18
<b>2. Análisis de Resultados</b>	<b>21</b>
2.1. Introducción . . . . .	21
2.2. Módulo de rigidez efectivo . . . . .	21
2.2.1. Rectángulo de medidas $1 \times 0.2$ . . . . .	22
2.2.2. Rectángulo de $1 \times 0.8$ . . . . .	23
2.2.3. El cuadrado unitario . . . . .	25
2.3. Intercambio de fases. . . . .	26
2.3.1. Rectángulo de $1 \times 0.2$ . . . . .	28
2.3.2. Rectángulo de $1 \times 0.8$ . . . . .	29
2.3.3. Cuadrado de $1 \times 1$ . . . . .	30
2.4. Relaciones de reciprocidad . . . . .	31
2.5. Conclusiones . . . . .	31
<b>3. Epílogo</b>	<b>35</b>
<b>A. Propiedades de las Funciones Elípticas</b>	<b>37</b>



**B. Código del Programa en MATLAB**

**41**

# Introducción

El propósito de esta tesis es encontrar los dos coeficientes efectivos no triviales de transporte de un material compuesto constituido por dos materiales isotropos cualesquiera. La geometría que se considera es esencialmente bidimensional ya que las ecuaciones que gobiernan el fenómeno estudiado dependen solamente de las coordenadas en un plano. Así un material ocupa un cilindro circular con centro en el origen mientras que en el resto de una celda prismática rectangular, también centrada en el origen, está contenido el otro material. La celda se repite periódicamente llenando el espacio por completo. Así nuestro compuesto es un arreglo rectangular de cilindros circulares cuyos ejes de simetría son paralelos. Los cilindros contienen a un material y el resto está ocupado por el otro. Es decir que, el compuesto resultante es anisótropo. Su simetría material es la de ortotropía. Nuestro interés se concentra en las propiedades que dependen de las coordenadas en el plano perpendicular al eje del cilindro. O sea las propiedades birrefringentes no triviales del compuesto.

Para cumplir nuestro objetivo haremos referencia al artículo de Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20]. En ese trabajo consideran la misma geometría que en esta tesis sólo que ellos enuncian el resultado general que se obtiene para cilindros paralelos distribuidos de acuerdo a un arreglo de prismas de sección paralelográfica después de usar el método de Homogeneización Asintótica. Las ecuaciones que se plantean son las de elasticidad, vease [2], para dos materiales de isotropía transversal, ver [19].

De la independencia respecto a la coordenada a lo largo del eje del cilindro o de los cilindros, resulta que el sistema de tres ecuaciones se desacoplan en dos; uno de ellos el más sencillo es el que se estudia en la tesis. Es el correspondiente al problema, llamado de *deformación antiplana* para la componente del desplazamiento en la dirección del eje antes mencionado y que únicamente depende de las otras dos coordenadas. Este es equivalente a un problema de transporte (véase Tabla en la p. 19 de Milton (2002))[16]. Por lo que

a partir de ahora indistintamente nuestros resultados serán de utilidad en varios contextos físicos para conductividad eléctrica o térmica, dieléctricos, deformación elástica antiplana, etc.

En Rodríguez-Ramos et al. (2001)[20] resuelven las ecuaciones que plantearon al inicio por medio de método de Homogeneización Asintótica o método de dos escalas puesto que consideran que el radio de los cilindros es muy pequeño en comparación con, digamos, la más pequeña de las tres dimensiones del compuesto.

Ellos además resuelven explícitamente las ecuaciones de tipo potencial que se obtienen usando la teoría de funciones elípticas del tipo de Weierstrass para el caso de un arreglo cuadrado. La extensión para un arreglo rectangular se realiza aquí en el capítulo 1 de forma **muy** detallada y aunque el método de solución se inicia de la misma forma que en [20] se llegan a resultados analíticos que involucran matrices simétricas. No así en [20].

En el apéndice *A* está una síntesis de las principales propiedades de las funciones elípticas que se usan, tomadas del capítulo 18 Abramowitz y Stegun (1965)[1]. Nuestros resultados muestran que sólo es necesario calcular una de las sumas de latices, la  $S_4$ . Esta serie tiene el inconveniente de que converge muy lentamente, de acuerdo a su definición inicial, por lo que se hace necesario transformarla en una serie que sí converja rápidamente. Los resultados de Mityushev y Adler (2002)[17] para esta serie también aparecen en este apéndice *A*.

Hace falta mencionar que la isotropía material considerada aquí está incluida en la isotropía transversal de los materiales de Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20].

Como punto de partida tomamos los dos problemas canónicos que resultan y buscamos la solución de ecuaciones de Laplace en una celda rectangular periódica. Éstas se resuelven por medio de funciones doblemente periódicas del tipo de Weierstrass. Son dos los coeficientes efectivos que se requieren pues el compuesto es birrefringente debido a la geometría rectangular. Se obtienen fórmulas analíticas cerradas para las dos propiedades efectivas que son sencillas de calcular.

Se verifica que los resultados analíticos y numéricos cumplen la relación de reciprocidad de Flaherty y Keller (1973). Aquí se hace uso de la propiedad de simetría de las matrices, mencionadas párrafos arriba. Los resultados numéricos se obtienen usando un programa codificado en MATLAB que se encuentra en el apéndice *B*.

Los resultados numéricos se encuentran analizados en el capítulo 2. Estos

resultados, hasta donde sabemos, son nuevos. Finalmente el capítulo 3 expresa algunos problemas que se podrían trabajar más adelante con las técnicas aquí descritas y conclusiones a las que se llegaron al hacer este trabajo.



# Capítulo 1

## Solución de los Problemas Canónicos

### 1.1. Introducción

En este capítulo se planteará el problema eje de este trabajo el cual consiste en encontrar los coeficientes efectivos de elasticidad. Los cuales son tomados del artículo de Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20], que se les denomina los problemas canónicos 13 y 23, los cuales estan asociados con el campo de deformación, pero nosotros los resolveremos para un arreglo periódico rectangular, de base  $a$  y de altura  $b$ , en cuyo centro está un círculo de radio  $R$ . Vamos a separarlo en dos regiones la exterior del círculo y el interior del círculo. Las cuales las denotaremos  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente

### 1.2. Planteamiento de los problemas locales

Inicialmente haremos referencia al artículo de Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20]. En él se derivan las ecuaciones que gobiernan los problemas locales de un material compuesto como el que se está estudiando aquí. Esto es un arreglo rectangular periódico de cilindros circulares de radio  $R$ . La celda que se repite en el plano  $y_1y_2$  se muestra en la figura 1.1 en el sistema de coordenadas de la variable  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . La regiones  $S_1$  y  $S_2$  están ocupados por un material elástico cuyas propiedades se describen más adelante. La interfase  $\Gamma$  entre las regiones es circular. Por la simetría cilíndrica de la geometría del compuesto, los campos de desplazamiento, deformación y

esfuerzo no dependen de la tercera coordenada  $y_3$ .

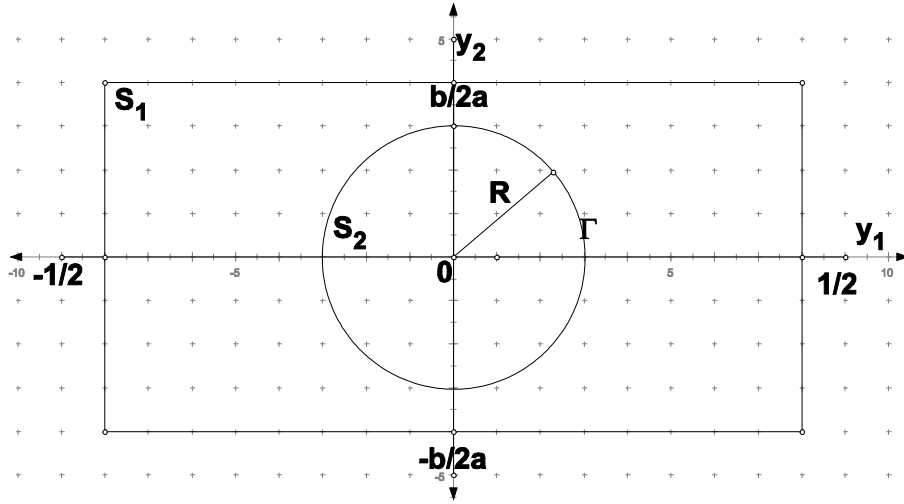


Figura 1.1: Rectángulo periódico, cilindro de radio  $R$  y la separación  $\Gamma$  del material elástico en dos dominios  $S_1$  y  $S_2$ .

En estas coordenadas el rectángulo de la figura 1.1, tiene base uno y altura  $b/a$ , donde  $a$  y  $b$  son los lados del rectángulo original. Cuando  $a = b$ , tenemos un cuadrado cuyo lado es la unidad; éste se estudió en Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20]. Esto quiere decir que podremos comparar nuestros resultados analíticos y numéricos en este caso particular. Primero que nada escribiremos las ecuaciones correspondientes a los problemas locales que denotaremos por  ${}_{13}L$  y  ${}_{23}L$  tomadas de Rodríguez-Ramos et al. (2001) [20]. Nótese que los preíndices 13 y 23, que también aparecerán asociados con el campo de desplazamiento  ${}_{13}U$  y  ${}_{23}U$  es una notación para distinguir entre los dos problemas, que llamaremos canónicos, (ver por ejemplo, [20] ecs. (3.5)).

Así el problema local  ${}_{13}L$  ésta dado por las ecuaciones siguientes:

$${}_{13}U_{,11}^{(\Upsilon)} + {}_{13}U_{,22}^{(\Upsilon)} = 0 \quad \text{en } S_{\Upsilon}, \quad (1.1)$$

$$\|{}_{13}U^{(\Upsilon)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.2)$$

$$\left\| p_{\Upsilon} ({}_{13}U_{,1}^{(\Upsilon)} n_1 + {}_{13}U_{,2}^{(\Upsilon)} n_2) \right\| = - \|p_{\Upsilon}\| n_1 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.3)$$

$$\langle {}_{13}U \rangle = 0, \quad (1.4)$$

donde  $p_\Upsilon$  es el módulo de rigidez del material que ocupa la región  $S_\Upsilon$ ,  $\Upsilon = 1, 2$ , el vector unidad normal exterior a la interfase  $\Gamma$  es  $n = (\cos \theta, \sin \theta)$ . También la notación de doble barra usada en (1.2) y (1.3) expresa el salto de la función  $f^{(\Upsilon)}(y)$  a través de la interfase, es decir,

$$\|f^{(\Upsilon)}\| \equiv f^{(1)} - f^{(2)}. \quad (1.5)$$

Los paréntesis angulares definen el promedio del volumen por unidad de longitud sobre la celda periódica, esto es,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_S f(y) dy. \quad (1.6)$$

donde la  $V$  es el área de la celda.

Análogamente para el problema local  ${}_{23}L$  las ecuaciones que resultan son las siguientes:

$${}_{23}U_{,11}^{(\Upsilon)} + {}_{23}U_{,22}^{(\Upsilon)} = 0 \quad \text{en } S_\Upsilon, \quad (1.7)$$

$$\|{}_{23}U^{(\Upsilon)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.8)$$

$$\left\| p_\Upsilon ({}_{23}U_{,1}^{(\Upsilon)} n_1 + {}_{23}U_{,2}^{(\Upsilon)} n_2) \right\| = - \|p_\Upsilon\| n_2 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.9)$$

$$\langle {}_{23}U_3 \rangle = 0. \quad (1.10)$$

### 1.3. Solución para el problema local ${}_{13}L$ .

En esta sección omitiremos los preíndices  $13$  para simplificar la notación y buscaremos una función doblemente periódica en  $S_\Upsilon$  y que cumpla con las siguientes condiciones

$$\nabla^2 U^{(\Upsilon)} = 0 \quad \text{en } S_\Upsilon, \quad (1.11)$$

$$\|U^{(\Upsilon)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.12)$$

$$\left\| p_\Upsilon (U_{,1}^{(\Upsilon)} n_1 + U_{,2}^{(\Upsilon)} n_2) \right\| = - \|p_\Upsilon\| n_1 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.13)$$

$$\langle U \rangle = 0. \quad (1.14)$$

Notemos que  $U^{(\Upsilon)}$  es armónica y una función par de  $\theta$ , pues el lado derecho de la ecuación (1.3) es par.



Entonces por medio de la teoría de las funciones elípticas proponemos que la solución de (1.11) sea una combinación lineal de tales funciones, es decir,

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \quad \text{en } S_1, \quad (1.15)$$

$$U^{(2)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \circ b_k z^k \right\} \quad \text{en } S_2, \quad (1.16)$$

donde  $z = y_1 + iy_2$ ,  $\zeta$  es la función Zeta de Weierstrass, y  $\zeta^{(k)}$  es la  $k$ ésima derivada de la función  $\zeta$ . Se sobreentiende que estas funciones están asociadas con la doble periodicidad de este problema. Los periodos son  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = ib/a$ . Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  son reales y desconocidos. El superíndice  $\circ$  en la sigma indica que la suma sólo corre sobre los números impares. Dada la periodicidad de  $U^{(1)}$  respecto a  $\omega_1$  es posible encontrar que

$$a_0 = -a_1\pi. \quad (1.17)$$

O sea, de (1.15) se sigue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \left\{ a_0(z + \omega_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z + \omega_1)}{(k-1)!} - a_0 z - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \{ a_0 \omega_1 + a_1 [\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z)] \} \\ &= a_0 + a_1\pi, \end{aligned}$$

por la cuasiperiodicidad de la función  $\zeta(z)$ . Esto es,

$$\zeta(z + \omega_1) - \zeta(z) = \pi. \quad (1.18)$$

Entonces (1.15) queda de la forma:

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ -\pi a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}. \quad (1.19)$$

Se puede deducir fácilmente que el desarrollo de Laurent de  $U^{(1)}(z)$  alrededor de  $z = 0$  está dado por

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \circ a_l z^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \sum_{l=1}^{\infty} \circ k \eta'_{kl} z^l \right\} \quad (1.20)$$

donde

$$\eta'_{11} = \pi, \quad \eta'_{kl} = \frac{(k+l-1)!}{k! l!} S_{k+l}, \quad k, l \neq 1, \quad (1.21)$$

$$S_k = \sum_{m, n} '(m + inb/a)^{-k}, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (1.22)$$

que son las sumas de la retícula asociadas a la celda rectangular de periodos 1 y  $ib/a$ . Se entiende que se suma sobre todos los enteros excepto cuando  $m = n = 0$ . Nótese que  $\eta'_{ik}$  es una matriz simétrica. La notación aquí se difiere de [20].

Para encontrar los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  de (1.15) y (1.16) vamos a usar las ecuaciones (1.12) y (1.13). Es conveniente definir a

$$A = \pi, \quad (1.23)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}, \quad (1.24)$$

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \circ b_k z^k. \quad (1.25)$$

Entonces (1.15) y (1.16) quedan como

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Re} \{Az + f(z)\}, \quad (1.26)$$

$$U^{(2)}(z) = \operatorname{Re} \{g(z)\}. \quad (1.27)$$

Si sustituimos las ecuaciones (1.26) y (1.27) en (1.12), tenemos que

$$Ay_1 + \operatorname{Re} \{f(z)\} = \operatorname{Re} \{g(z)\}. \quad (1.28)$$

Tomando en cuenta (1.20), la ecuación (1.28) queda como

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l R^{-l} \cos \theta - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \sum_{l=1}^{\infty} \circ k \eta'_{kl} R^l \cos l\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \circ b_l R^l \cos l\theta, \quad (1.29)$$

es decir, que obtenemos una serie de Fourier de cosenos nula:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \circ \cos l\theta \left\{ R^{-l} a_l + \left( - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k \eta'_{kl} - b_l \right) R^l \right\} = 0. \quad (1.30)$$

Entonces sus coeficientes son cero, o sea,

$$R^{-l} a_l - R^l \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{kl} = b_l R^l. \quad (1.31)$$

Ahora vamos a considerar la otra condición en la interfase. Sustituyendo (1.26) y (1.27) en (1.13), obtenemos

$$p_1 A n_1 + \operatorname{Re} \left\{ p_1 f'(z) - p_2 g'(z) \right\} n_1 - \operatorname{Im} \left\{ p_1 f'(z) - p_2 g'(z) \right\} n_2 = - \|p_{\Gamma}\| n_1 \quad (1.32)$$

para  $z \in \Gamma$ . Vamos a identificar la función  $p_1 f'(z) - p_2 g'(z)$  con la derivada de una función analítica.

Consideremos ahora una función analítica  $H(z) = u + iv$ , entonces su derivada es

$$H'(z) = \frac{\partial u}{\partial y_1} + i \frac{\partial v}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_2} - i \frac{\partial u}{\partial y_2}. \quad (1.33)$$

Parametrizaremos a  $\Gamma$  usando las coordenadas polares  $R, \theta$ , por lo tanto,

$$t = R e^{i\theta}, \quad \bar{t} = R e^{-i\theta} \quad (1.34)$$

y

$$y_1 = \frac{t + \bar{t}}{2} = R \cos \theta, \quad y_2 = \frac{t - \bar{t}}{2i} = R \operatorname{sen} \theta, \quad (1.35)$$

$$n_1 = \cos \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta}, \quad n_2 = \operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial y_1}{\partial \theta}. \quad (1.36)$$

Sea

$$v = \operatorname{Im} \{ p_1 f(z) - p_2 g(z) \}. \quad (1.37)$$

De (1.35) a (1.37) se sigue que (1.32) se puede escribir como

$$p_1 A \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial y_1} \left( -\frac{1}{R} \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \right) = - \|p_{\Gamma}\| \cos \theta, \quad (1.38)$$

la que se puede integrar con respecto a  $\theta$ , lo cual nos da

$$p_1 A \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{R} v = - \|p_{\Gamma}\| \operatorname{sen} \theta + C, \quad (1.39)$$

donde  $C$  es una constante de integración que se anula porque  $v$  es periódica en  $\theta$ .

Reescribiendo la (1.39) con  $v$  dado por (1.37) nos queda

$$(\|p_{\Gamma}\| + p_1 A) \operatorname{sen} \theta R + \operatorname{Im} \{p_1 f(z) - p_2 g(z)\} = 0. \quad (1.40)$$

Notemos que (1.40), al usar (1.22) a (1.25), da lugar a

$$\|p_{\Gamma}\| R \operatorname{sen} \theta - p_1 \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l R^{-l} \operatorname{sen} l\theta - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} k \eta'_{kl} R^l \operatorname{sen} l\theta \right\} - p_2 \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} b_l R^l \operatorname{sen} l\theta \right\} = 0 \quad (1.41)$$

Esta es una serie de Fourier de senos nula cuyos coeficientes, por lo tanto, son nulos.

Vamos a considerar dos casos separados de la ecuación (1.41)  $l = 1$  y  $l \neq 1$ . Para  $l = 1$ , tenemos

$$\left\{ \|p_{\Gamma}\| R - p_1 \left[ a_1 R^{-1} + R \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{k1} \right] - p_2 b_1 R \right\} \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (1.42)$$

entonces su coeficiente es nulo, i. e.,

$$\|p_{\Gamma}\| R - p_1 \left[ a_1 R^{-1} + R \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{k1} \right] = p_2 b_1 R, \quad l = 1. \quad (1.43)$$

Para el caso de  $l \neq 1$  de la ecuación (1.41) obtenemos

$$\sum_{l=3}^{\infty} \left\{ p_1 \left[ -a_l R^{-l} - R^l \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{kl} \right] - p_2 b_l R^l \right\} \operatorname{sen} l\theta = 0. \quad (1.44)$$

Por ende se tiene que

$$-p_1 \left[ a_l R^{-l} + R^l \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{kl} \right] = p_2 b_l R^l, \quad l \neq 1. \quad (1.45)$$

Recapitulando, para hallar  $a_k$  y  $b_k$  hay que resolver (1.25), (1.42) y (1.45) qué quedan como

$$R^{-l}a_l - R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}a_k k \eta'_{kl} = b_l R^l, \quad (1.46)$$

$$\|p_{\Upsilon}\| R\delta_{1l} - p_1 \left[ a_l R^{-l} + R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}a_k k \eta'_{kl} \right] = p_2 b_l R^l, \quad (1.47)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker que es igual a uno si  $i = j$  y cero en todos los caso restantes.

De (1.46) y (1.47) eliminamos  $b_k$  en favor de  $a_k$  y rearmamos para obtener

$$R\delta_{1l} \|p_{\Upsilon}\| - (p_1 + p_2)R^{-l}a_l - \|p_{\Upsilon}\| R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}a_k k \eta'_{kl} = 0. \quad (1.48)$$

Dividimos (1.48) entre  $p_1 + p_2$  y definimos

$$\chi = \frac{\|p_{\Upsilon}\|}{p_1 + p_2}, \quad (1.49)$$

y nos queda

$$R^{-1}a_l + \chi R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ}a_k k \eta'_{kl} = \chi R\delta_{1l}. \quad (1.50)$$

La ecuación (1.50) es un sistema de ecuaciones lineal para  $a_k$ . Vamos a escribirla en forma matricial.

Primero reescalaremos los coeficientes  $a_k$  tal que

$$a'_l = \sqrt{l}a_l R^{-l}, \quad a_l = \frac{1}{\sqrt{l}}R^l a'_l. \quad (1.51)$$

El segundo paso es sustituir y definir la matriz  $W$  simétrica tal que

$$w_{11} = \pi R^2, \quad (1.52)$$

$$w_{kl} = \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{l}} R^{k+l} S_{k+l}, \quad (1.53)$$

con  $k \neq 1$ ,  $l \neq 1$ , recordemos que los índices  $k$  y  $l$  corren sobre los números impares.

Entonces la ecuación (1.50) se puede escribir como

$$\chi^{-1}a'_l + \sum_{k=1}^{\infty} {}^o w_{lk} a'_k = R\delta_{1l}, \quad (1.54)$$

o equivalentemente

$$(\chi^{-1}I + W)D = U, \quad (1.55)$$

donde

$$D = (a'_1, a'_3, a'_5, \dots)^T, \quad (1.56)$$

$$U = (R, 0, 0, \dots)^T. \quad (1.57)$$

Es interesante destacar que en la ecuación (1.54), la información acerca de las propiedades de los dos materiales está contenida en  $\chi$ , las componentes de la matriz  $W$  proporcionan información geométrica. Por una parte, está el radio  $R$  de la fibra y por la otra la periodicidad del arreglo a través de las sumas de la retícula  $S_k$ . También es de resaltar que el término independiente de la ecuación es un vector con sólo una componente no nula. Esto permite escribir a  $a'_1$  en función de  $\chi$ ,  $R$  y  $S_k$ , lo cual se hará más adelante.

Para complementar la solución del sistema (1.46), (1.47), una vez que encontramos  $a_k$  hay que usar (1.46) para hallar  $b_k$ . Esta ecuación en forma matricial toma la forma

$$(I - W)D = E, \quad (1.58)$$

donde

$$E = (b'_1, b'_3, b'_5, \dots)^T \quad (1.59)$$

y

$$b'_l = \sqrt{l}R^l b_l, \quad b_l = \frac{1}{\sqrt{l}}R^{-l}b'_l. \quad (1.60)$$

## 1.4. Solución para el problema local $_{23}L$

Para abreviar la escritura en esta sección, omitimos el preíndice 23, de todas las variables relevantes. Para este problema se tiene que

$$\nabla^2 U^{(\Upsilon)} = 0 \quad \text{en } S_{\Upsilon}, \quad (1.61)$$

$$\|U^{(\Upsilon)}\| = 0 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.62)$$

$$\left\| p_{\Upsilon}(U_{,1}^{(\Upsilon)} n_1 + U_{,2}^{(\Upsilon)} n_2) \right\| = - \|p_{\Upsilon}\| n_2 \quad \text{en } \Gamma, \quad (1.63)$$

$$\langle U \rangle = 0. \quad (1.64)$$

Notemos que la función  $U^{(\Upsilon)}$  es impar en  $\theta$  pues el lado derecho de la ecuación (1.63) es proporcional a  $\sin \theta$ . En cambio para el problema  ${}_{13}L$  teníamos que  $U^{(\Upsilon)}$  era par debido a (1.13).

Vamos a buscar una función armónica  $U^{(\Upsilon)}(z)$  doblemente periódica que satisface las ecuaciones (1.62), (1.63), (1.64). Proponemos que éstas sean

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Im} \left\{ a_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \quad \text{en } S_1, \quad (1.65)$$

$$U^{(2)}(z) = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \circ b_k z^k \right\} \quad \text{en } S_2, \quad (1.66)$$

donde los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  son reales y desconocidos. Aquí también la suma corre sobre los índices impares tal y como se definió en la sección anterior. Hacemos notar que los coeficientes indeterminados aquí y en la sección anterior son diferentes. Más adelante escribiremos por ejemplo  ${}_{23}a_k$ ,  ${}_{23}b_k$ ,  ${}_{13}a_k$ ,  ${}_{13}b_k$  según sea el caso.

Ahora vamos a calcular el coeficiente  $a_0$ , usando la periodicidad  $\omega_2$ . Así

$$\begin{aligned} 0 &= U^{(1)}(z + \omega_2) - U^{(1)}(z) \\ &= \operatorname{Im} \left\{ a_0(z + \omega_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z + \omega_2)}{(k-1)!} - a_0 z - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\} \\ &= \operatorname{Im} \{ a_0 \omega_2 + a_1 [\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z)] \} \\ &= a_0 \frac{b}{a} + a_1 \left( \frac{b}{a} - 2 \right) \pi, \end{aligned} \quad (1.67)$$

por la cuasiperiodicidad de la función Zeta de Weierstrass. En este caso,

$$\zeta(z + \omega_2) - \zeta(z) = i(b/a - 2)\pi. \quad (1.68)$$

Por lo tanto

$$a_0 = -\left(1 - \frac{2a}{b}\right) a_1 \pi. \quad (1.69)$$

La ecuación (1.65) queda como

$$U^{(1)}(z) = \operatorname{Im} \left( -\left(1 - 2a/b\right) \pi a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right). \quad (1.70)$$

El desarrollo de Laurent de  $U^{(1)}(z)$  alrededor del origen está dado por

$$U^{(1)}(z) = \text{Im} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} a_l z^{-l} - \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} k \eta'_{kl} z^l \right\} \quad (1.71)$$

donde  $\eta'_{kl}$  esta dada por (1.21b) para  $k$  y  $l \neq 1$ ; en cambio aquí

$$\eta'_{11} = -(1 - 2a/b)\pi. \quad (1.72)$$

En este momento nos proponemos encontrar los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  a partir de las ecuaciones (1.71), (1.66), (1.62) y (1.63). De la penúltima ecuación obtenemos inmediatamente una serie de Fourier del seno nula

$$\sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} \text{sen } l\theta \left\{ R^{-l} a_l + \left[ \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k k \eta'_{kl} + bl \right] R^l \right\} = 0. \quad (1.73)$$

Por lo tanto obtenemos lo siguiente:

$$-R^{-l} a_l - R^{-l} \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k k \eta'_{kl} = R^l b_l. \quad (1.74)$$

Para encontrar el otro conjunto de ecuaciones hay que usar la ecuación (1.63), pero tal y como lo hicimos en la sección anterior, escribamos la ecuación (1.65) como

$$U^{(1)}(z) = \text{Im} \{Az + f(z)\} \quad (1.75)$$

con  $A = -(1 - 2a/b)\pi a_1$ , real; la función  $f(z)$  esta definida por (1.24).

También de (1.66) tenemos

$$U^{(2)}(z) = \text{Im} \{g(z)\}, \quad (1.76)$$

donde  $g(z)$  esta definida por la ecuación (1.25).

Sustituimos las ecuaciones (1.75) y (1.76) en la (1.63):

$$Ay_2 + \text{Im} \{f(z)\} = \text{Im} \{g(z)\}, \quad (1.77)$$

la cual se puede escribir como

$$p_1 A n_2 + \text{Im} \{p_1 f'(z) - p_2 g'(z)\} n_1 + \text{Re} \{p_1 f'(z) - p_2 g'(z)\} n_2 = -\|p_{\Gamma}\| n_2, \quad (1.78)$$



para  $z \in \Gamma$ . Al igual que en la ecuación (1.32) vamos a identificar  $p_1 f'(z) - p_2 g'(z)$  con la derivada de una función analítica, o sea (1.33). Por medio de (1.34), (1.35), (1.36) y definiendo

$$u = \operatorname{Re} \{p_1 f'(z) - p_2 g'(z)\}, \quad (1.79)$$

tenemos que (1.78) se puede escribir como

$$p_1 A \operatorname{sen} \theta + \left(-\frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{1}{R} \frac{\partial y_2}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial u}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial y_1}{\partial \theta}\right) = -\|p_\Gamma\| \operatorname{sen} \theta. \quad (1.80)$$

Integrando la ecuación (1.80) con respecto a  $\theta$  obtenemos

$$-p_1 A \cos \theta - \frac{1}{R} u = \|p_\Gamma\| \cos \theta + C \quad (1.81)$$

donde  $C$  es una constante de integración que vale cero por la periodicidad en  $\theta$ .

Finalmente se tiene una serie de Fourier del coseno nula

$$\begin{aligned} & \|p_\Gamma\| R \cos \theta + p_1 \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} {}^o a_l R^{-l} \cos l\theta - \sum_{k=1}^{\infty} {}^o a_k \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k \eta'_{kl} R^l \cos l\theta \right\} \\ & - p_2 \sum_{l=1}^{\infty} {}^o b_l R^l \cos l\theta = 0, \end{aligned} \quad (1.82)$$

cuyos coeficientes tienen que anularse, o sea que

$$\|p_\Gamma\| R \delta_{1l} + p_1 \left[ a_l R^{-l} - R^l \sum_{k=1}^{\infty} {}^o k a_k \eta'_{kl} \right] = p_2 b_l R^l. \quad (1.83)$$

Las ecuaciones (1.74) y (1.83) se tienen que resolver para hallar los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ . Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones (1.46) y (1.47) que se derivaron en la sección anterior para los coeficientes, digamos,  ${}_{13}a_k$  y  ${}_{13}b_k$ . Si aquí eliminamos a  $b_k$  y seguimos el mismo procedimiento que hicimos para llegar al sistema (1.54) ó (1.55) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^o (\chi^{-1} \delta_{lk} - w_{lk}) a'_k = -R \delta_{1l} \quad (1.84)$$

ó

$$(\chi^{-1}I - W)D = -U \quad (1.85)$$

donde  $\chi$ ,  $W$ ,  $D$  y  $U$  están definidas en (1.49), (1.52), (1.53), (1.56) y (1.57). El párrafo que sigue a la ecuación (1.57) también es aplicable a la ecuación (1.85). Como el caso anterior tenemos que completar la solución del sistema (1.74) ó (1.84) llegamos a

$$(I - W)D = -E, \quad (1.86)$$

donde  $E$  está dada por (1.59) y (1.60).

## 1.5. Propiedades efectivas

En el trabajo de Rodríguez-Ramos et al. (2001)[20] se encuentran las fórmulas que se obtuvieron para las propiedades efectivas de un compuesto con dos constituyentes elásticos. Las correspondientes al caso de deformación antiplana, es decir, sus ecuaciones (3.1d), las escribimos con los preíndices 13 y 23 explícitamente porque las propiedades elásticas efectivas  ${}_{13}\bar{p}$  y  ${}_{23}\bar{p}$  son, en general, diferentes para un arreglo rectangular:

$${}_{13}\bar{p} = p_v + \langle p {}_{13}U_{,1} \rangle, \quad (1.87)$$

$${}_{23}\bar{p} = p_v + \langle p {}_{23}U_{,2} \rangle, \quad (1.88)$$

donde  $p_v$  es el promedio aritmético de las propiedades, es decir,

$$p_v = p_1V_1 + p_2V_2. \quad (1.89)$$

La fracción volumétrica por unidad de longitud ocupada por el material de propiedades  $p_1$  es  $V_1$ . Análogamente para la otra propiedad. También

$$V_1 + V_2 = \frac{b}{a}, \quad (1.90)$$

como  $V = b/a$ . Cuando los lados del rectángulo son iguales, entonces ambas propiedades son iguales. Esto nos servirá como una comprobación tanto analítica como numérica de nuestra derivación. En cada fórmula (1.87) y (1.88) aparece la función local correspondiente cuya expresión analítica está dada por (1.20), (1.16), (1.66) y (1.71). A continuación usaremos el teorema

de Green para transformar, primero, la integral de volumen (área) (1.88), en una integral de línea. De la definición (1.6) y (1.88) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \langle pU,2 \rangle &= p_1 \int_{S_1} U_{,2}^{(1)} dy + p_2 \int_{S_2} U_{,2}^{(2)} dy \\ &= \|p_{\Gamma}\| \int_{\Gamma} U^{(1)} dy_1, \end{aligned} \tag{1.91}$$

después de suprimir el preíndice 23, aplicar el teorema de Green en el rectángulo  $S$ , la periodicidad de  $U^{(1)}$  y la ecuación (1.62).

En la ecuación (1.91) la función  $U^{(1)}$  toma valores en la circunferencia de radio  $R$ . La representación de Laurent de esta función nos permite escribir el resultado final en términos de  $R$ . Si usamos las coordenadas polares,

$$y_1 = R \cos \theta, \quad dy_1 = -R \operatorname{sen} \theta d\theta, \tag{1.92}$$

la integral de línea en (1.91) se transforma en

$$\int_{\Gamma} U^{(1)} dy_1 = -R \int_0^{2\pi} U^{(1)} \operatorname{sen} \theta d\theta. \tag{1.93}$$

Ahora la función  $U^{(1)}$  se puede escribir como

$$U^{(1)} = - \sum_{l=1}^{\infty} \circ a_1 R^{-l} \operatorname{sen} l\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k \sum_{l=1}^{\infty} \circ k\eta'_{k1} R^l \operatorname{sen} l\theta \tag{1.94}$$

$$= \dots - (a_1 R^{-1} + R \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k\eta'_{k1}) \operatorname{sen} \theta - \dots, \tag{1.95}$$

donde los puntos suspensivos quiere decir que contienen términos que son ortogonales al  $\operatorname{sen} \theta$  y por lo tanto no contribuyen en (1.93). Así mismo

$$U^{(2)} = \dots + b_1 R \operatorname{sen} \theta + \dots \tag{1.96}$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$\int_{\Gamma} U^{(1)} dy_1 = a_1 \pi + \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \circ a_k k\eta'_{k1}, \tag{1.97}$$

donde

$$\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\theta = \pi. \quad (1.98)$$

En la ecuación (1.91) con (1.97) y (1.88) tenemos que

$${}_{23}\bar{p} = p_v + \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ \pi a_1 + \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k k \eta'_{k1} \right\}. \quad (1.99)$$

De la ecuación (1.50) con  $l = 1$  escribimos

$$a_1 = \chi R^2 \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k k \eta'_{k1} \right] \quad (1.100)$$

Por lo tanto tenemos,

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k k \eta'_{k1} = 1 - \frac{a_1}{\chi R^2}, \quad (1.101)$$

la cual se procede sustituir en (1.99) y obtener

$$\begin{aligned} {}_{23}\bar{p} &= p_v + \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ \pi a_1 + \pi R^2 \left[ \frac{a_1}{\chi R^2} + 1 \right] \right\} \\ &= p_v + \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ \frac{2\pi p_1 a_1}{\|p_{\Upsilon}\|} + \pi R^2 \right\} \\ &= p_v + \frac{a}{b} 2\pi p_1 a_1 + \pi \frac{a}{b} R^2 \|p_{\Upsilon}\|; \end{aligned} \quad (1.102)$$

se tiene que

$$p_v = p_1 - \|p_{\Upsilon}\| \pi \frac{a}{b} R^2. \quad (1.103)$$

Entonces tenemos que

$${}_{23}\bar{p} = p_1 \left( 1 + 2\pi \frac{a}{b} a_1 \right). \quad (1.104)$$

Notemos que esta ecuación está dada exclusivamente en función del coeficiente  $a_1$ .

Usando el desarrollo de Taylor de  $U^{(2)}$ , la ecuación (1.88), también queda como

$${}_{23}\bar{p} = p_v - \frac{\|p_{\mathcal{I}}\| a}{b} \pi R^2 b_1. \quad (1.105)$$

Otra ecuación alternativa en términos de  $b_1$ . Vamos a encontrar  $a_1$  escribiendo la ecuación (1.85) en bloques, es decir,

$$(\chi^{-1} - w_{11})a'_1 - \mathcal{V}^T D' = -R, \quad (1.106)$$

$$-\mathcal{V}a'_1 + (\chi^{-1}I - W')D' = 0, \quad (1.107)$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \mathcal{V}^T \\ \mathcal{V} & W' \end{bmatrix}, \quad (1.108)$$

$$D = \begin{bmatrix} a'_1 \\ D' \end{bmatrix}; \quad (1.109)$$

donde tenemos que  $D'$  es un vector columna,  $\mathcal{V}$  es un vector columna y  $W'$  es una matriz.

De la ecuación (1.107) despejamos  $D'$

$$D' = \left(\chi^{-1}I - W'\right)^{-1} \mathcal{V}a'_1. \quad (1.110)$$

Sustituyendo (1.110) en la ecuación en (1.106), nos da

$$\left[ (\chi^{-1} - w_{11}) - \mathcal{V}^T \left(\chi^{-1}I - W'\right)^{-1} \mathcal{V} \right] a'_1 = -R \quad (1.111)$$

Por lo tanto podemos despejar a  $a'_1$ , o sea,

$$\begin{aligned} a'_1 &= -R \left[ \chi^{-1} - w_{11} - \mathcal{V}^T \left(\chi^{-1}I - W'\right)^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1} \chi \chi^{-1} \\ &= -R \chi \left[ 1 - w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T \left(I - \chi W'\right)^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1} \\ &= -R \chi \left[ 1 - w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_{23}M^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.112)$$

con

$${}_{23}M = I - \chi^2 W'. \quad (1.113)$$

Si sustituimos la ecuación (1.112) en (1.104)

$${}_{23}\bar{p} = p_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{a}{b} \chi [I - w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_{23}M^{-1} \mathcal{V}]^{-1} \right\}. \quad (1.114)$$

Ahora vamos a proceder para encontrar la relación de la propiedad efectiva  ${}_{13}p$  con lo cual se procede de manera análoga al caso anterior de (1.87) llegamos a

$${}_{13}\bar{p} = p_v - \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ \pi a_1 + \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \eta'_{k1} \right\}. \quad (1.115)$$

$$\begin{aligned} &= p_v - \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ \pi a_1 - \pi R^2 \left( 1 - \frac{a_1}{\chi R^2} \right) \right\} \\ &= p_v - \frac{\|p_{\Upsilon}\| a}{b} \left\{ -\pi R^2 + \frac{2\pi p_1}{\|p_{\Upsilon}\|} a_1 \right\} \\ &= p_v - \frac{a}{b} 2\pi p_1 a_1 + \pi \frac{a}{b} R^2 \|p_{\Upsilon}\| \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$= p_1 - \frac{a}{b} \pi R^2 \|p_{\Upsilon}\| - \frac{a}{b} 2\pi p_1 a_1 + \frac{a}{b} \pi R^2 \|p_{\Upsilon}\| \quad (1.117)$$

$$= p_1 \left( 1 - 2\pi \frac{a}{b} a_1 \right). \quad (1.118)$$

Ahora el punto de partida es la ecuación (1.55) que escribimos en bloques

$$(\chi^{-1} + w_{11})a'_1 - \mathcal{V}^T D' = -R \quad (1.119)$$

$$-\mathcal{V}a'_1 + (\chi^{-1}I + W')D' = 0 \quad (1.120)$$

De la última ecuación (1.120)

$$D' = \left( \chi^{-1}I + W' \right)^{-1} \mathcal{V}a'_1 \quad (1.121)$$

sustituyendo en la ecuación (1.119) nos da

$$\left[ (\chi^{-1} + w_{11}) - \mathcal{V}^T \left( \chi^{-1}I + W' \right)^{-1} \mathcal{V} \right] a'_1 = -R. \quad (1.122)$$

Por lo tanto tenemos que

$$a'_1 = -R \left[ \chi^{-1} - w_{11} - \mathcal{V}^T \left( \chi^{-1}I + W' \right)^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1} \chi \chi^{-1} \quad (1.123)$$

$$= -R\chi \left[ 1 - w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T \left( I + \chi W' \right)^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1} \quad (1.124)$$

$$= -R\chi \left[ 1 - w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}^T {}_{13}M^{-1}\mathcal{V} \right]^{-1} \quad (1.125)$$

donde

$${}_{13}M = I + \chi W'. \quad (1.126)$$

Finalmente la ecuación correspondiente a la (1.114)

$${}_{13}\bar{p} = p_1 \left( 1 - 2\pi \frac{a}{b} {}_{13}a_1 \right) \quad (1.127)$$

$$= p_1 \left\{ 1 - 2\pi R^2 \frac{a}{b} \chi \left[ I + {}_{13}w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}_{13}^t M^{-1} \mathcal{V} \right]^{-1} \right\}. \quad (1.128)$$

Observemos que las diferencias de las ecuaciones (1.114) y (1.128) es que los sumandos  ${}_{13}w_{11}\chi$  cambian de signo en el caso  ${}_{23}p$  se tiene que es negativo y en el caso  ${}_{13}p$  es positivo.

## 1.6. Las relaciones de reciprocidad

En esta sección vamos a verificar que los resultados que se obtuvieron en la sección anterior, es decir las ecuaciones (1.114) y (1.128), cumplen las relaciones de reciprocidad Flaherty y Keller. De la ecuación (1.128) se tiene que

$$\frac{{}_{13}\bar{p}(p_1, p_2)}{p_1} = \frac{1 + {}_{13}w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}_{13}^t M^{-1} \mathcal{V} - 2\pi \frac{a}{b} R^2 \chi}{1 + {}_{13}w_{11}\chi - \chi^2 \mathcal{V}_{13}^t M^{-1} \mathcal{V}} \quad (1.129)$$

donde

$${}_{23}w_{11} = {}_{23}\eta'_{11} R^2 \quad (1.130)$$

$${}_{23}\eta'_{11} = + \frac{\pi \left( \frac{b}{a} - 2 \right)}{\frac{b}{a}} \quad (1.131)$$

ahora llegamos

$${}_{23}w_{11}\chi + 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi = \pi\left(1 - 2\frac{a}{b}\right)R^2\chi + 2\pi R^2\chi + 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi = \pi R^2\chi \quad (1.132)$$

$$\text{y por tanto } {}_{23}w_{11}\chi = \pi R^2\chi - 2\pi\frac{a}{b}\chi. \quad (1.133)$$

En la ecuación (1.129) tenemos

$$\frac{{}_{13}\bar{p}(p_1, p_2)}{p_1} = \frac{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V} - 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi}{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V}}. \quad (1.134)$$

Análogamente para la ecuación (1.114)

$$\frac{{}_{23}\bar{p}(p_1, p_2)}{p_1} = \frac{1 - {}_{23}w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}_{23}^t M^{-1}\mathcal{V} - 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi}{1 - {}_{23}w_{11}\chi - \chi^2\mathcal{V}_{23}^t M^{-1}\mathcal{V}}, \quad (1.135)$$

$${}_{13}w_{11} = {}_{13}\eta'_{11}R^2, \quad (1.136)$$

$${}_{13}\eta'_{11} = \pi, \quad (1.137)$$

$${}_{13}w_{11}\chi - 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi = \pi R^2\chi - 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi. \quad (1.138)$$

En la ecuación (1.135) intercambiamos  $p_1$  y  $p_2$

$$\frac{{}_{23}\bar{p}(p_2, p_1)}{p_2} = \frac{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{23}M^{-1}\mathcal{V}}{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{23}M^{-1}\mathcal{V} + 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi} \quad (1.139)$$

$${}_{23}M(p_2, p_1) = {}_{13}M(p_1, p_2)$$

ya que de las ecuaciones (1.113) y (1.126)

$$= \frac{{}_{23}\bar{p}(p_1, p_2)}{p_2} = \frac{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V}}{1 + \pi R^2\chi - \chi^2\mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V} - 2\pi\frac{a}{b}R^2\chi}. \quad (1.140)$$

Comparando las ecuaciones (1.134) y (1.140) observamos

$$\frac{{}_{23}\bar{p}(p_2, p_1)}{p_2} = \frac{p_1}{{}_{13}\bar{p}(p_1, p_2)} \quad (1.141)$$

que la relación de reciprocidad Flaherty y Keller.



Si vemos el caso límite cuando  $a = b$  en las ecuaciones (1.134) y (1.139)

$$\frac{{}_{13}\bar{P}(p_1, p_2)}{p_1} = \frac{1 - \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V}}{1 + \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^t {}_{13}M^{-1}\mathcal{V}} \quad (1.142)$$

$$\frac{{}_{23}\bar{P}(p_2, p_1)}{p_2} = \frac{1 + \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^t {}_{23}M^{-1}\mathcal{V}}{1 - \pi R^2 \chi - \chi^2 \mathcal{V}^t {}_{23}M^{-1}\mathcal{V}} \quad (1.143)$$

Como  ${}_{13}M = {}_{23}M$ , se sigue que también (1.141) cumple la relación de reciprocidad como se esperaba.

# Capítulo 2

## Análisis de Resultados

### 2.1. Introducción

En este capítulo analizaremos los resultados analíticos con el cálculo numérico con lo cual lo efectuamos con varios rectángulos de distintas alturas y con la misma base.

También haremos el intercambio de fases para ver que las gráficas que se obtienen son recíprocas con las primeras que hemos mencionado, con lo cual nos lleva a verificar que se cumple el Teorema de Flaherty Keller.

Por último diremos las conclusiones que hemos obtenido con el examen de las gráficas.

### 2.2. Módulo de rigidez efectivo

En esta sección revisaremos el comportamiento de varias gráficas que se obtienen como fruto del programa que elaboré en MATLAB cuyo código se encuentra en el apéndice *C* para analizar la interacción de la matriz y de la fibra de un medio compuesto periódico para los problemas 23 y 13.

Aquí solo pondremos los gráficas de los rectángulos  $1 \times 0.2$ ,  $1 \times 0.8$ , y el caso límite que será el cuadrado unitario con el fin de ilustrar el comportamiento. En estas gráficas representan  $\bar{\chi}_p$  efectiva contra  $\chi_p$ .

En el eje horizontal representa el valor de  $\chi_p$  que esta definido en la ecuación

$$\chi_p = \frac{1 - \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \quad (2.1)$$

estos valores van del  $-1$  a  $1$ . El valor de  $-1$  expresa que hay una inclusión rígida, o sea, el valor de  $p_2$  es infinito al ir recorriendo el intervalo hacia el valor de  $1$ , se tiene una inclusión más dura que la matriz hasta  $\chi_p = 0$ , cuando la fibra tiene la misma propiedad que la matriz; siguiendo el intervalo hacia el valor de  $1$ , la inclusión es más blanda que la matriz hasta llegar al valor de  $1$ , en que hay ausencia de fibra, está vacía.

En el eje vertical son los valores de  $\overline{\chi_p}$ , que denotaremos por  $-\chi_p^*$  en las figuras, ya que en MATLAB no maneja la tilde barra. Su definición es

$$-\overline{\chi_p} = \frac{1 - \frac{\overline{p}}{p_1}}{1 + \frac{\overline{p}}{p_1}}.$$

También podemos hacer una relación análoga como hicimos con los valores de la abscisa, ya que esta función podría tomar valores de  $-1$  a  $1$ ; donde alcanza el valor de  $-1$ , será un compuesto rígido y en  $1$  el compuesto estaría vacío.

Hay que observar que la fibra es más blanda a medida que  $\chi_p$  va de cero a uno y más dura cuando va de cero a menos uno; lo mismo sucede con el comportamiento del compuesto, cuando  $-\overline{\chi_p}$  va de menos uno de a cero y de cero a uno, respectivamente. Así se observa que en las gráficas, las curvas son monótonas decrecientes indicando que al variar  $\chi_p$  de menos uno a uno (de fibra rígida a vacía), las gráficas muestran para el compuesto una variación que va del más duro al más blando.

### 2.2.1. Rectángulo de medidas $1 \times 0.2$

El primer caso ilustrativo es el rectángulo de base  $1$  y de altura  $0.2$ . Lo que podemos inferir de las gráficas es lo siguiente:

Para el problema local 23, recordemos que  ${}_{23}\overline{p}$  es el módulo de rigidez relativo al plano 23. En la figura 2.1 observamos que el valor más grande es de casi  $0.17$  y el más pequeño es de casi  $-0.14$ . Esto ocurre cuando los cilindros están en contacto para el valor de percolación  $V_2 = 0.1$ . Con lo cual tenemos que los valores de  $\chi_p$  que va de  $-1$  a  $0$  tenemos que el compuesto con una dureza máxima de  $0.17$  y se reblandece en una mezcla muy suave que llega al valor  $-0.14$ .

Antes de analizar los resultados del problema local 13 recordemos que  ${}_{13}\overline{p}$  es el módulo de rigidez del compuesto relativo al plano 13.

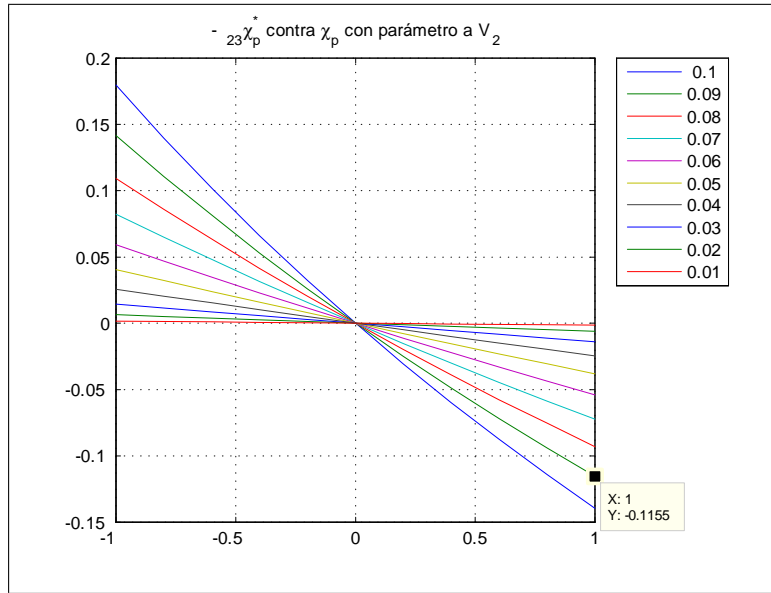


Figura 2.1: Gráfica de  $\overline{\chi}_p$  contra  $\chi_p$  para el problema 23 del rectángulo  $1 \times 0.2$

Ahora revisando la gráfica del problema local 13 de este rectángulo, figura 2.2, que esta a continuación, tenemos que su comportamiento es el siguiente: para los valores de  $-1$  a  $0$ , en el eje horizontal, el material parte de un valor de rigidez de  $0.14$  en percolación y todas las curvas para cilindros mas delgados pasan por el origen cuando  $\chi_p = 0$ , esto representa que  $p_2 = p_1$ , entonces se tiene que las propiedades de la matriz y de la fibra son iguales; del  $0$  a  $1$ , el compuesto llega a un compuesto casi suave, pues alcanza el valor de  $-0.17$   $\overline{\chi}_p$  en percolación.

Con lo cual podemos ver que las fibras están más separadas en el problema local 23 que en el 13, diciéndonos que se puede deformar más fácilmente en el plano que las fibras están más ralas ver la ilustración 2.3

Otra cosa que podemos ver es que el valor límite máximo en valor absoluto es menor que la altura, es decir, en este caso es  $0.17 < 0.2$

### 2.2.2. Rectángulo de $1 \times 0.8$

El siguiente rectángulo que hablaremos es de medidas  $1 \times 0.8$ , observamos lo siguiente:

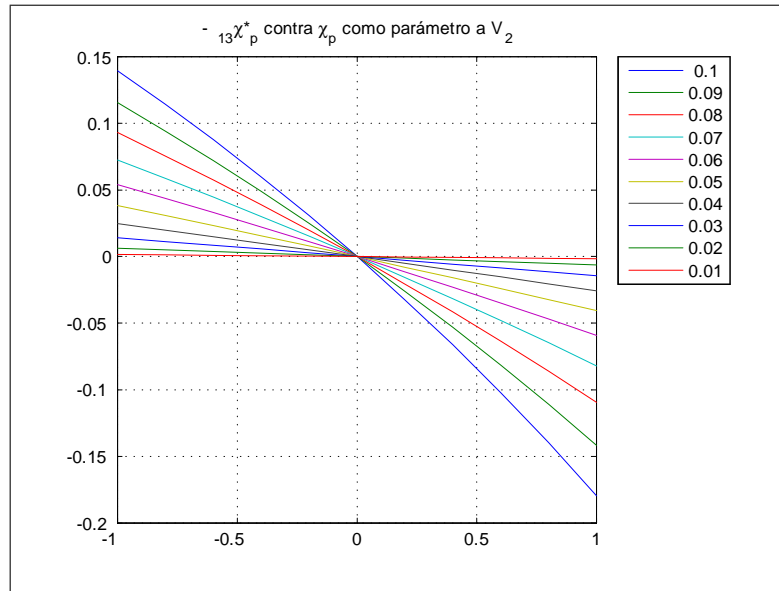


Figura 2.2: Gráfica de  $-23\bar{\chi}_p$  versus  $\chi_p$  para el problema local 13 del rectángulo de  $1 \times 0.2$ .

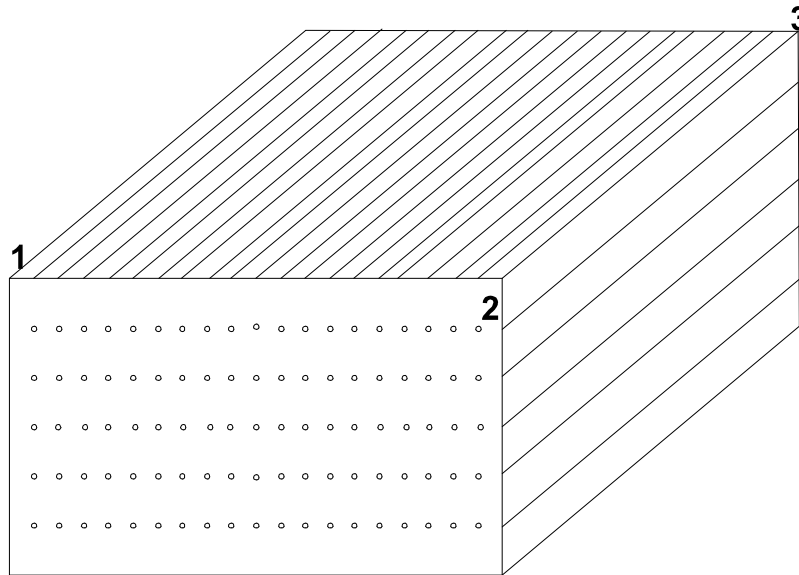


Figura 2.3: Ilustración de las distribución de las fibras.

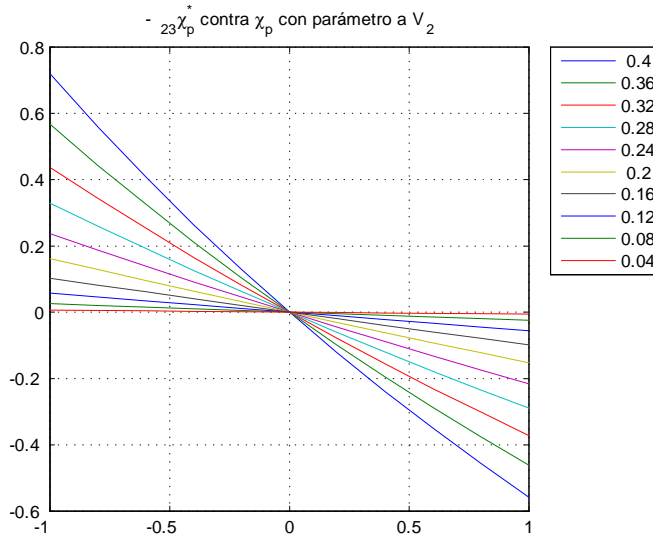


Figura 2.4: Gráfica de  $\overline{\chi_p}$  contra  $\chi_p$  para el problema 23 del rectángulo  $1 \times 0.8$

Tenemos que las curvas son monótonas decrecientes.

En el problema 23 tenemos que la curva límite alcanza en valor de molición de 0.71 y de rigidez de  $-0.58$  y la figura que muestra este comportamiento es la figura 2.4.

Para el problema 13 se tiene que el valor de suavidad es 0.58 y de rigidez de  $-0.71$ . La figura que representa esto es la figura 2.5.

Tenemos que en el plano 23 las fibras están más separadas que en el problema 13 con lo cual el plano que opone más resistencia es el 13 con lo cual se puede ver en la figura 2.3

### 2.2.3. El cuadrado unitario

El caso límite es el cuadrado, vemos que los valores en el eje vertical para las dos gráficas son el máximo es 0.97 y el mínimo es  $-0.97$ . En la gráfica del problema 23 tenemos que el valor de mayor rigidez ( $-1$ ) toma el valor de vacuidad de 0.97 y estas curvas van decreciendo, pasando por el origen y en el valor del material vacío (1), el material se comporta en forma rígida pues alcanza el valor de 0.97 de rigidez, donde esto se presenta es la curva de la fibra de radio 0.5, es decir cuando hay contacto entre ellas.

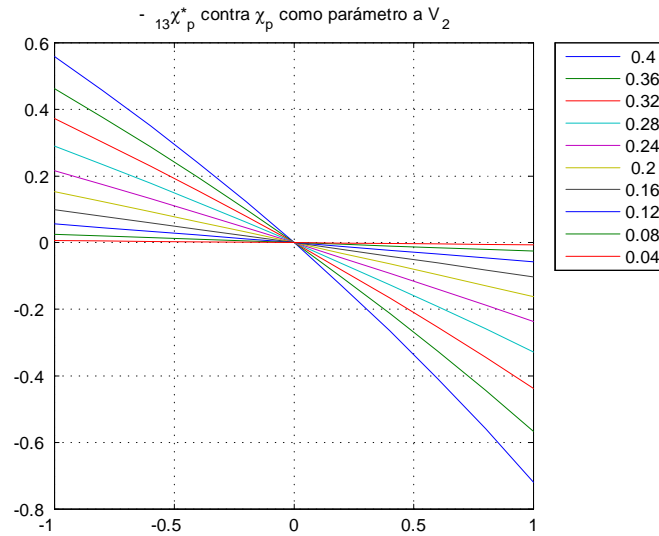


Figura 2.5: Gráfica de  $\overline{\chi}_p$  contra  $\chi_p$  del problema 13 del rectángulo  $1 \times 0.8$ .

Lo cual lo podemos ver en las figuras que son figura 2.6 y para el problema 13 figura 2.7

La curva cero, nos dice que no hay fibra y por lo consiguiente no hay interacción entre la fibra y matriz. Con lo cual tenemos que el cuadrado: las gráficas de los problemas 23 y 13 son equivalentes, debido a la simetría cuadrada.

Revisando las gráficas del 23 figura 2.6 y 13 figura 2.7 se ve que las fibras están distribuidas uniformemente en toda la matriz. Con lo cual nos cuesta el mismo trabajo para deformar alguno de los planos en cuestión.

### 2.3. Intercambio de fases.

En esta sección trabajaremos con las gráficas de los rectángulos, que hemos visto anteriormente, pero intercambiando las interfaces la matriz  $p_1$  por la fibra  $p_2$  y viceversa.

Si tomamos la fórmula (2.1), pero pondremos que  $p_1$  sea el denominador

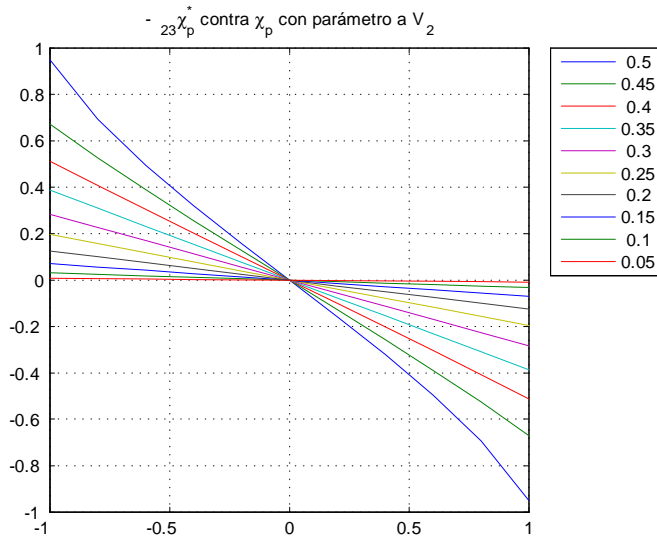


Figura 2.6: Gráfica de  $\bar{\chi}_p$  vs.  $\chi_p$  para el problema 23 del cuadrado.

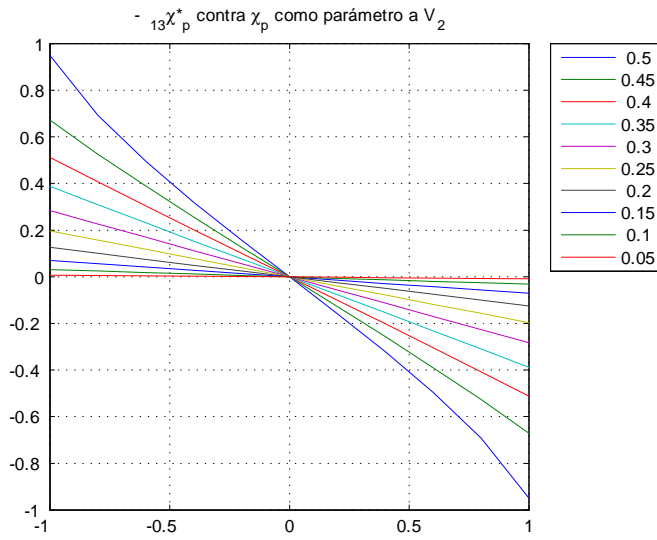


Figura 2.7: Gráfica de  $\bar{\chi}_p$  contra  $\chi_p$  para el cuadrado.



es decir

$$\chi_p' = \frac{1 - \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{p_1}{p_2}} = \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\frac{p_2}{p_1} + 1} = -\chi_p.$$

El valor de  $-1$  expresa que hay una inclusión rígida, o sea, el valor de  $p_1$  es infinito al ir recorriendo el intervalo hacia el valor de 1, se tiene una inclusión más dura que la fibra hasta  $\chi_p = 0$ , cuando la matriz tiene la misma propiedad que la fibra; siguiendo el intervalo hacia el valor de 1, la inclusión es mas blanda que la fibra hasta llegar al valor de 1, en que hay ausencia de matriz, está vacía.

Donde se tiene que

$$\overline{\chi_p}' = -\overline{\chi_p},$$

también podemos hacer una relación análoga como hicimos con los valores de la abscisa, ya que esta función podría tomar valores de  $-1$  a  $1$ ; donde alcanza el valor de  $-1$ , será un compuesto rígido y en  $1$  el compuesto estaría vacío.

Con lo cual nos da que las gráficas que vamos a ver más adelante deberán ser monótonas crecientes con las que se obtuvieron en la sección pasada y una reflexión con respecto al eje de las abscisas de las curvas ya vistas.

### 2.3.1. Rectángulo de $1 \times 0.2$

Comenzamos a observar que la gráficas son monótonas crecientes. En las gráficas del problema 23 figura 2.8 se tiene que la curva cuyo radio es de  $0.1$  donde las fibras se tocan tangencialmente en la dirección vertical tenemos que alcanza un valor de rigidez de  $-0.15$  y de ausencia de  $0.17$ , cuando la curva llega a ser cero tenemos que no hay fibra con lo cual no hay interacción de la matriz y de la fibra.

Si observamos la gráfica del problema 13 de la sección pasada figura 2.2 y esta 2.8 nos percatamos que son la reflexión sobre el eje de las abscisas, una de otra, es decir, sea  $x \in [-1, 1]$  en  $\chi_p$ , tenemos que  ${}_{23}\overline{\chi_p}(x) = -{}_{13}\overline{\chi_p}(x)$ .

Para el caso del plano 13 tenemos que el valor de percolación de la fibra es de  $0.1$  y dicha curva tiene las siguientes valores en  $\overline{\chi_p}$  en el valor de rigidez llega a  $-0.17$  y molición de  $0.14$  lo cual esta representado en la gráfica 2.9

Si compaginamos esta gráfica 2.9 con la gráfica del problema 23 figura 2.1 del mismo rectángulo de la sección pasada tenemos que son antisimétricas.

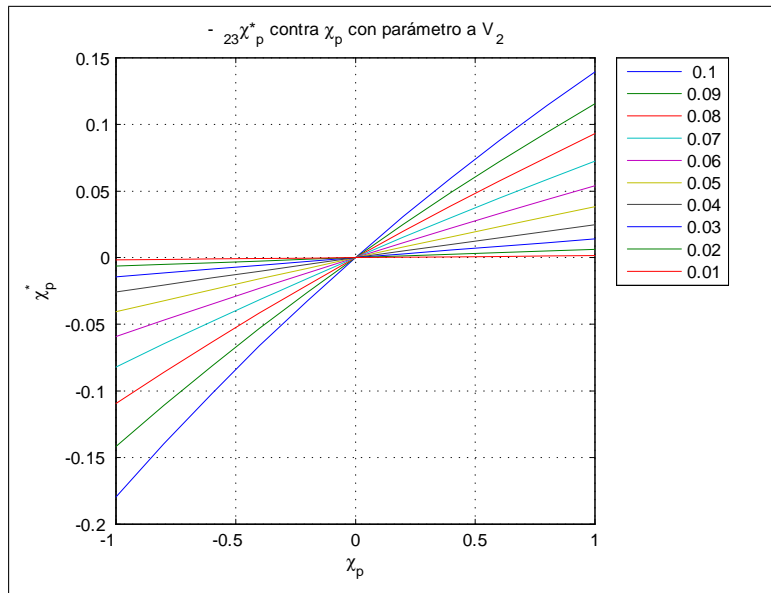


Figura 2.8: Gráfica  $\overline{\chi}_p$  vs.  $\chi_p$  con intercambio de fases del problema 23 del rectángulo  $1 \times 0.2$

### 2.3.2. Rectángulo de $1 \times 0.8$

Ahora seguimos con el estudio del penúltimo caso que es el rectángulo de  $1 \times 0.8$ . Tenemos que la fibra en donde se tocan las fibras en la dirección vertical es de 0.4 que es la mitad de la altura, tenemos que las curvas son monótonas crecientes y cuando las curvas pasan por el origen nos dice que las propiedades de la matriz y de la fibra son las mismas.

Para el problema 23 tenemos que casi alcanza el valor de  $-0.58$  de dureza y de rigidez de 0.71. La figura que representa es la 2.10

Si relacionamos la gráfica anterior 2.10 con la gráfica del problema 13 2.5 del mismo rectángulo que vimos en la sección pasada se tiene que son la reflexión sobre el eje de las abscisas de la una de la otra.

Para el problema 13 figura tiene un valor de rigidez de  $-0.71$  y de ausencia de 0.6 la curva cuyo radio es de 0.4. La figura que muestra esto es la figura 2.11.

Si comparamos la gráfica anterior figura 2.11 con la del problema 23 2.4 de este mismo rectángulo visto en la sección pasada tenemos que son antisimétricas.

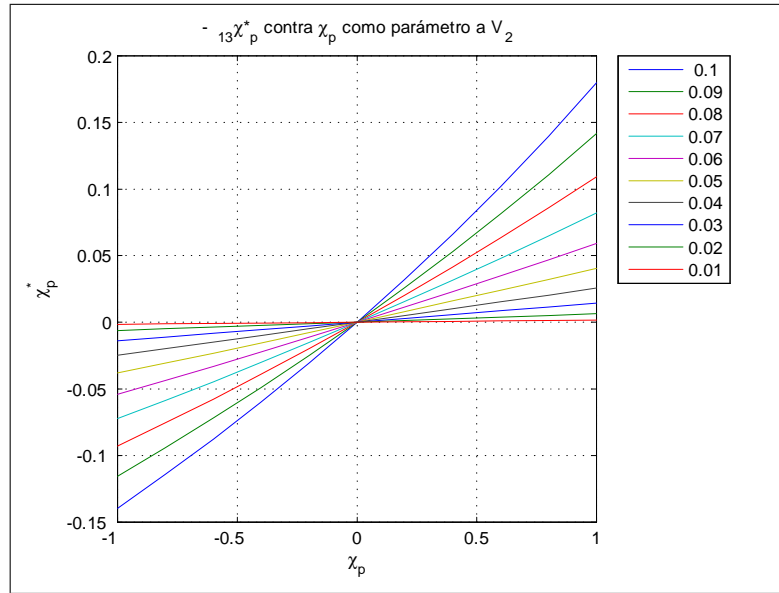


Figura 2.9: Gráfica de  $\overline{\chi}_p$  contra  $\chi_p$  para el problema local 13 del rectángulo  $1 \times 0.2$ , con las fases intercambiadas.

### 2.3.3. Cuadrado de $1 \times 1$ .

Para el caso límite del rectángulo que es el cuadrado donde el radio en donde se tocan las fibras es de 0.5, la mitad de la medida del lado.

Observamos que los valores de vacuidad y de dureza en valor absoluto es menor que el lado, y que las gráficas que son para el problema 23 2.12 y la del problema 13 es 2.13 y son las mismas puesto que las fibras se distribuyen de forma uniforme.

Si examinamos las gráficas del problema local 23 del cuadrado figura 2.12 con la del problema 13 del cuadrado figura 2.7 de la sección pasada tenemos que son antisimétricas que es equivalente a ser recíprocas en el sentido de intercambio de fases. Al igual que la del problema 13 figura 2.13 con la 23 de la sección pasada figura 2.6.

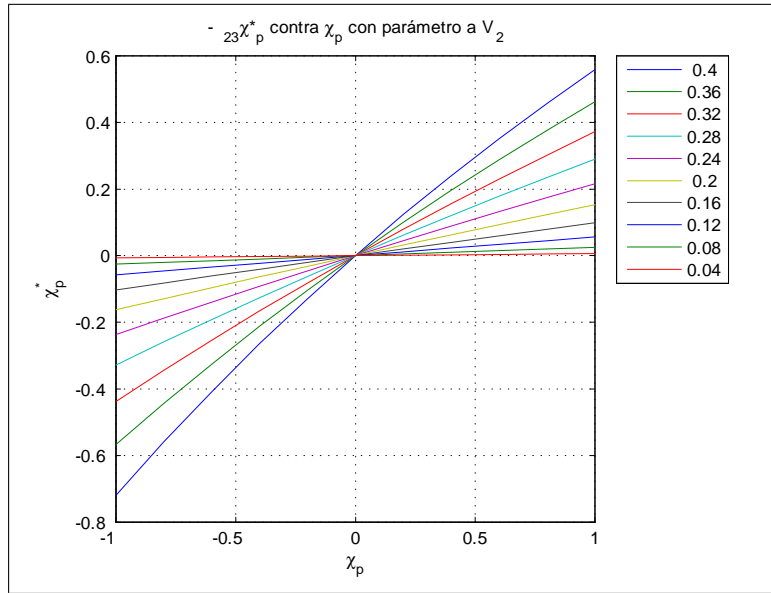


Figura 2.10: Gráfica de  $-_{23}\bar{\chi}_p^*$  vs.  $\chi_p$  para el problema local 23 para el rectángulo  $1 \times 0.8$ . Intercambiando las fases

## 2.4. Relaciones de reciprocidad

Notamos que los resultados mostrados en las 2 secciones anteriores cumplen la relación recíproca de Flaherty y Keller, a saber  $_{23}\bar{\chi}_p(p_1, p_2) = -_{13}\bar{\chi}_p(p_2, p_1)$  con lo cual da confianza en que las fórmulas analíticas (1.134), (1.139) y (1.141) que se ve en el capítulo 1 de y sus correspondientes cálculos numéricos son correctos.

## 2.5. Conclusiones

Con este análisis podemos llegar a las siguientes conclusiones

- Que el máximo valor que puede tomar  $-\bar{\chi}_p$  siempre es menor que el valor de la altura del rectángulo unidad con lo cual las tenemos que los valores de rigidez y de vacuidad nunca van a rebasar a la curva límite que se representa con la curva en donde se tocan tangencialmente las fibras;

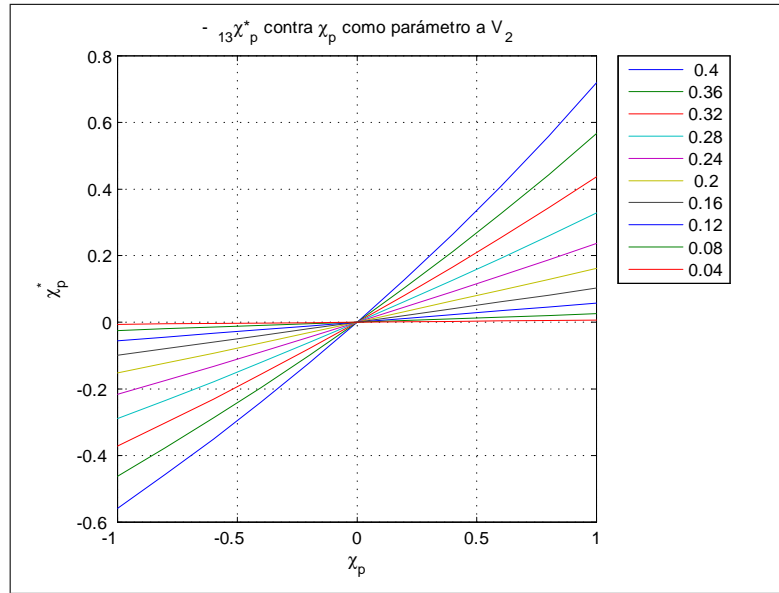


Figura 2.11: Gráfica de  $-_{13}\bar{\chi}_p$  versus  $\chi_p$  para el problema 13 del rectángulo de  $1 \times 0.8$ , con fases intercambiadas.

- Que sí conocemos sólo una gráfica de un problema local, podemos obtener la otra gráfica intercambiando las fases del problema recíproco.
- Que las ecuaciones que calculamos analíticamente (1.134) y (1.139) cumplen la relación de Reciprocidad de *Flaherty* y *Keller*.
- Si comparamos las cada una de las curvas de las gráficas 23 y 13 tienen un comportamiento *cóncavo*. Además desde el origen trazamos tangentes y secantes tenemos que estas líneas acotan a  $-\chi_p$ . Es decir, que observamos que hay curvas cotas inferiores y superiores para las propiedades del compuesto.
- Si tenemos que en un plano hay escasez de fibras, en el otro habrá mas fibras por lo cual este plano será un poco mas difícil de comprimir que el otro que carece de fibras.

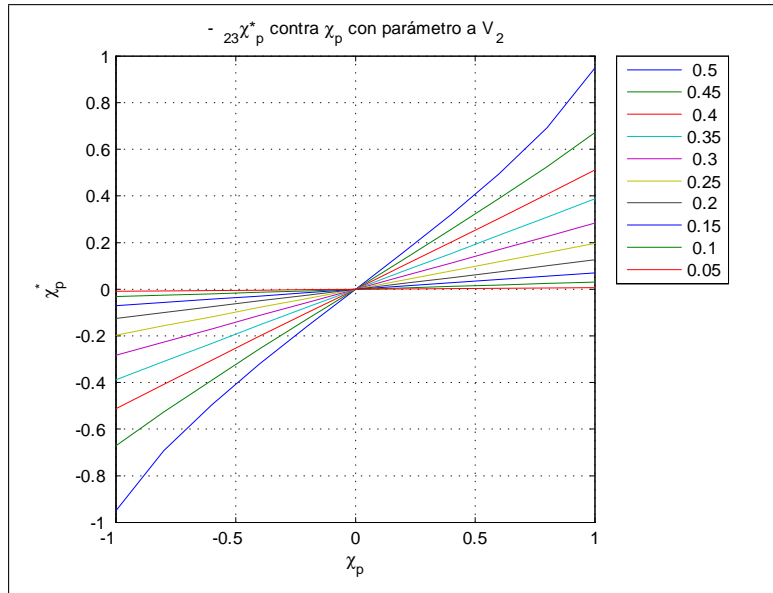


Figura 2.12: Gráfica de  $-_{23}\overline{\chi}_p^*$  contra  $_{23}\chi_p$  para el problema local 23 del cuadrado. Con intercambio de fases.

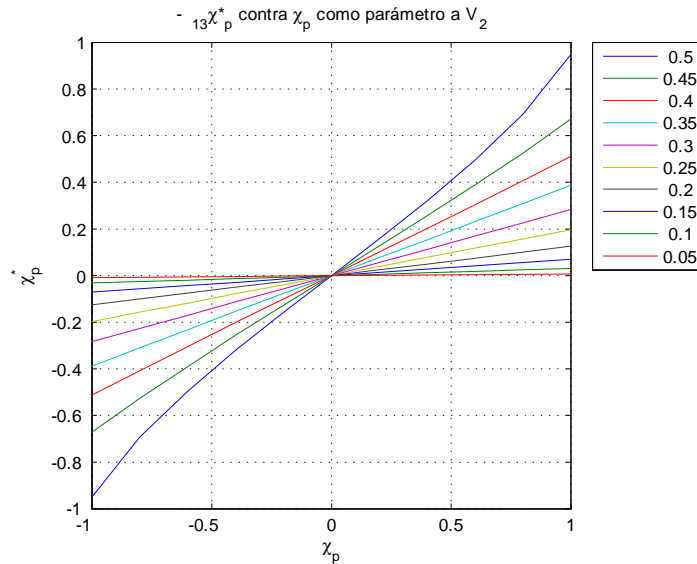


Figura 2.13: Gráfica de  $-_{23}\overline{\chi}_p^*$  contra  $\overline{\chi}_p$  del problema local 13 del cuadrado. Con intercambio de fases



# Capítulo 3

## Epílogo

En esta última sección daremos las conclusiones que hemos llegado durante el desarrollo de esta tesis

- El promedio asintótico es una técnica efectiva para investigar las propiedades macroscópica o microscópica de las estructuras periódicas.
- El método de promedio es universal, es aplicable para todo tipo de procesos que pueden ocurrir en medios periódicos tales como vibraciones elásticas, propagación de calor, difusión, refringencia, percolación de fluidos, oscilaciones electromagnéticas y radiación entre otras.
- Los números  $S_n$  son necesitados para una variedad de problemas en el plano, como problemas de la física del estado sólido y de la ciencia de materiales, como un ejemplo. Se debe al trabajo de Lord Rayleigh donde se calcula la conductividad efectivo de un compuesto.
- Las sumas de retículas de 2 dimensiones  $S_n$  es el caso especial de las series de Eisenstein la cual se presentan en funciones elípticas y la teoría analítica de números.
- El método asintótico y el teorema de Reciprocidad de Flaherty y Keller fue elaborado para encontrar la conductividad eléctrica o térmica de un medio con un arreglo rectangular de cilindros y esferas cercanamente espaciadas.

Estos resultados asintóticos indican que los módulos de corte  $xz$  y  $xy$  para cilindros rígidos y vacíos, también están relacionados en forma recíproca.



- Los resultados de este trabajo han sido expresados en forma simple para una variedad de problemas tales como la conductividad eléctrica y térmica y la elasticidad axial de corte de un medio periódico compuesto.
- Las gráficas de  $-\overline{\chi_p}$  contra  $\chi_p$  son monótonas decrecientes y cóncavas, de las propiedades representan una forma apropiada de representar los resultados de esta tesis.
- Las fórmulas exactas que se obtuvieron para los módulos de corte birrefringentes son, hasta, donde sabemos resultados nuevos.

# Apéndice A

## Propiedades de las Funciones Elípticas

Las fórmulas de este apéndice fueron tomadas de Abramowitz y Stegun (1965)[1] del capítulo 18.

Las representaciones de las funciones: la función Zeta  $\zeta(z)$  cuasi-periódica y la función  $\mathcal{P}$  periódica de Weierstrass asociadas con los periodos  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \frac{b}{a}$  son

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left( \frac{1}{z - \beta_{mn}} + \frac{z}{\beta_{mn}^2} + \frac{1}{\beta_{mn}} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left( \frac{1}{(z - \beta_{mn})^2} - \frac{1}{\beta_{mn}^2} \right); \quad (\text{A.2})$$

donde la notación de  $'$  expresa que la doble suma excluye el término  $m = n = 0$ ,

$$\beta_{mn} = m + in \text{ para } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.3})$$

Las función  $\zeta(z)$  es impar y  $\mathcal{P}$  es par. Donde se puede relacionar éstas con sus derivadas a través de las siguientes expresiones

$$\zeta(z + \omega_\alpha) - \zeta(z) = \delta_\alpha, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{P}(z) = -\zeta'(z). \quad (\text{A.5})$$

$$[\mathcal{P}'(z)]^2 = 4[\mathcal{P}(z)]^3 - 20c_2\mathcal{P}(z) - 28c_4. \quad (\text{A.6})$$

La constante  $\delta_\alpha$  esta conectada con los periodos a través de las relaciones de Legendre

En nuestra notación la veremos así

$$\frac{\delta_1}{2}\omega_2 - \frac{\delta_2}{2}\omega_1 = \pi i. \quad (\text{A.7})$$

Para el cuadrado tenemos

$$\omega_1 = 1, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_1 = \pi, \quad (\text{A.9})$$

$$\omega_2 = i, \quad (\text{A.10})$$

$$\delta_2 = -i\pi, \quad (\text{A.11})$$

De la misma manera para el rectángulo de (A.7)

$$\delta_1 = \pi, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i; \quad (\text{A.13})$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_1\omega_2 - 2\pi i}{\omega_1} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta_2 = \left( \frac{\pi i b}{a} - 2\pi i \right) / 1 = \pi i \left( \frac{b}{a} - 2 \right). \quad (\text{A.15})$$

Ya que  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = \frac{b}{a}i$ .

También vamos a escribir las sumas que usamos en el programa de graficación que se ve en la tesis. Como hemos visto, vamos a trabajar con problemas de medios periódicos porosos y usaremos la suma de retículas (lattices), también haremos uso las funciones de Eisenstein pero aplicado en nuestros cálculos. Ver Mityushev y Adler (2002)[17].

Primero vamos a considerar las sumas de retículas (lattices) introducidas por Rayleigh (1892). Lo que veremos de la Teoría de las funciones elípticas aplicado en este caso son las siguientes fórmulas

$$S_4 = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \cdot \left( \frac{1}{15} + 16 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 h^{2m}}{1 - h^{2m}} \right),$$

donde  $h = e^{-\frac{\pi}{\alpha^2}}$  y  $\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}$ , donde  $a$  y  $b$  son las dimensiones del rectángulo periódico el cual se trabajará en las secciones posteriores de este trabajo veamos la figura A.1.

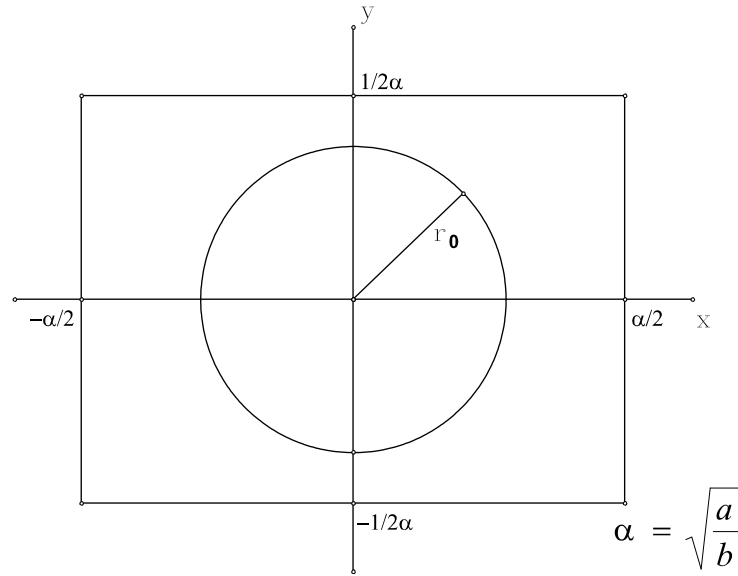


Figura A.1: Rectángulo de lado  $\sqrt{\frac{a}{b}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$

Los demás sumandos están calculados por la fórmula de recursión

$$S_{2k} = \frac{3}{(2k+1)(2k-1)(k-3)} \sum_{m=2}^{k-2} (2m-1)(2k-2m-1) S_{2m} S_{2(k-m)}$$

Solo necesitamos  $S_4$  y  $S_6$  para calcular todas, pero como  $S_6 = 0$ ; sólo necesitamos  $S_4$  numéricamente.

Ésta se obtiene a partir de la ecuación diferencial que satisface  $\mathcal{P}(z)$  (A.6). Derivándola y comparando coeficientes del desarrollo de Laurent de la función  $\zeta(z)$  se obtienen los coeficientes de  $S_k$  correspondientes.

Los primeros sumandos son funciones de  $S_4$  y  $S_6$  que son proporcionales

a los invariantes de  $\mathcal{P}(z)$  y son

$$\begin{aligned}
 S_8 &= \frac{3}{7}S_4^2, \\
 S_{10} &= \frac{5}{11}S_4S_6, \\
 S_{12} &= \frac{1}{143}(18S_4^3 + 25S_6^2), \\
 S_{14} &= \frac{30}{143}S_4^2S_6, \\
 S_{16} &= \frac{3S_4(33S_4^3 + 100S_6^2)}{2431} \\
 S_{18} &= \frac{5S_6}{46189}(783S_4^3 + 275S_6^2), \\
 S_{20} &= \frac{3S_4^2}{508079}(2178S_4^3 + 12125S_6^2)
 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que basta calcular  $S_4$  y  $S_6$  solamente. Aquí por tratarse de un rectángulo resulta que  $S_6 = 0$ .

# Apéndice B

## Código del Programa en MATLAB

En el programa tiene una rutina para que tome el valor más grande como la base del rectángulo; recordando que  $a$  es la longitud de la base y  $b$  es la altura o ancho, para el radio de la fibra  $R$  tomará como valor inicial el (mínimo)  $\min(\frac{b}{2a}, \frac{1}{2})$  e irá recorriendo en forma decreciente hasta llegar a cero, lo cuál está representado en la figura B.1.

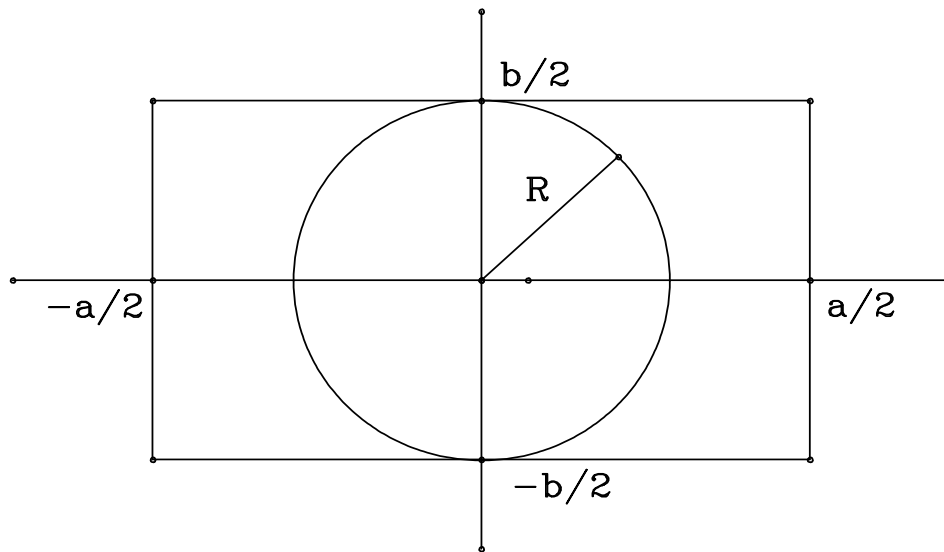


Figura B.1: Rectángulo de medidas  $a \times b$  y cilindro de radio  $R$ .

Este intervalo está dividido en  $n$  subintervalos, donde el usuario lo puede definir.

El código del programa es el siguiente

```
%Programa que grafica la xp contra xp1;
% se piden las variables que se necesitan

clear;
format long;
double precision;
ese4 = 0;
a = input('valor de a? =');
b = input('valor de b? =');
if a < b
    c = a;
    d = b;
    b = c;
    a = d;
end
%jh = input('valor de la iteracion = ');
%radio = 0;
%a = 1;
%b = 1;
jh = 20;
contadordek = 20;
%erre = 0.25;
%jji = input;
%jixx = input;
vererre = min ((b/(2*a)), (1/2));
diayb = (a/b)^2;
expoab = exp(-pi*(a/b));
ese4nu = 0;
ese4de = 0;
ese4fi = 0;
ese4dvant = 0;

%Calculo de s_4
```

```

for jj=1:1:jh
    ese4nu = (jj^(3)) * (expoab^(2*jj));
    ese4de = 1-(expoab^(2*jj));
    ese4dvant =ese4nu/ese4de;
    ese4fi = ese4dvant+ese4fi;
end
ese4ant= 16* ese4fi;
ese4 =(((1/15)+ese4ant)*(pi/diayb)^(4))/3;

%calculo de s_6;

ese6 = 0;
div6ab = sqrt(a/b);
expo6ab = exp(-pi*(a/b));
ese6nu = 0;
ese6de = 0;
ese6dv = 0;
ese6dvant = 0;
for jj=1:1:jh
    ese6nu = (jj^(5)) * (expo6ab^(2*jj));
    ese6de = 1-(expo6ab^(2*jj));
    ese6dvant =ese6nu/ese6de;
    ese6dv = ese6dvant+ese6dv;
end
ese6ant= -16* ese6dv;
ese6 =(((2/63)+ese6ant)*(pi/div6ab)^(6))/15;
%Calculo de S2
ese2 = 0;
div2ab = sqrt(a/b);
expo2ab = exp(-pi*(a/b));
ese2nu = 0;
ese2de = 0;
ese2dv = 0;
ese2dvant = 0;
for jj=1:1:jh
    ese2nu = (jj) * (expo2ab^(2*jj));
    ese2de = 1-(expo2ab^(2*jj));
    ese2dvant =ese2nu/ese2de;

```



```

    ese2dv = ese2dvant+ese2dv;
end
ese2ant= -8* ese2dv;
ese2 =(((1/3)+ese2ant)*(pi/div2ab)^(2));
%ahora definiremos las otras S iterativamente
ese (2) = ese2;
ese (4) = ese4;
ese (6) = ese6;
for cuentak=4:1:contadordek
    sumitam = 0;
    sumitamant = 0;
    for cuentam=2:(cuentak-2)
        sumitamant = (2*cuentam-1)*(2*cuentak-2*cuentam-1)*
            ese(2*cuentam)*ese(2*(cuentak-cuentam));
        sumitam = sumitam + sumitamant;
    end
    ese(2*cuentak) = (3/((2*cuentak+1)*(2*cuentak-1)*(cuentak-3)))
        *sumitam;
end
%%%
%%%Definamos al vector del radio%%%

radiodeS2=vererre;
totalis=10;
totaljotas=10;
for descuerres=1:1:totalis
    erres2=radiodeS2-((descuerres-1)/totalis)*(radiodeS2);
    for cuentaais=1:1:totalis
        if cuentaais == 1
            vectoruss (cuentaais) = erres2;
        else
            vectoruss (cuentaais)= 0;
        end
    end;
end;
Verdelosradios(descuerres)=erres2;

%%%Definamos a la matriz W

```

```

for cuentaais=1:1:totalis
  for cuentaajotas=1:1:totaljotas
    Dobleus(cuentaais,cuentaajotas)=(factorial((cuentaais+cuentaajotas)-1))
      /(factorial(cuentaais-1)*factorial(cuentaajotas-1)*sqrt(cuentaais)
        *sqrt(cuentaajotas))*erres2^(cuentaais+cuentaajotas)*
        ese(cuentaais+cuentaajotas);
  end
end
  %Dobleus;
  for cuentaais=1:1:(totalis-1)
    Vectupstras(cuentaais) = Dobleus(cuentaais+1,1);
  end
  Vectups=(Vectupstras. ');
  %%Definimos la matriz Omegasa minuscula (tantoxtanto)
for cuentaais=1:1:(totalis-1)
  for cuentaajotas=1:1:(totaljotas-1)
    Omegasa(cuentaais,cuentaajotas)=Dobleus(cuentaais+1,cuentaajotas+1);
  end
end
end

%%Definimos de a primas en funcion de la ji que va de -1 a 1
%%para el problema 23 directamente con los vectores upsilon y el
%%transpuesto y la matriz M
for cuentaajis=1:totalis
  ji=-1+((2*cuentaajis)/totalis);
  MatrizM23=inv(eye(totalis-1)-(ji*Omegasa));
  MatrizM13=inv((eye(totalis-1)+(ji*Omegasa));
  %Jipebarra(cuentaajis)=((a/b)*pi*radiodeS2*ji)/
    ((a/b)*pi*(radiodeS2)^2*ji-(ji)^2*(Vectups. '))
    *MatrizM*Vectups);
  Jipebarra23(cuentaajis)=(-(a/b)*pi*(erres2^2)*ji)/(1-(1-(a/b))*pi*
    (erres2^2)*ji-(ji^2)*((Vectups. ')*MatrizM23*Vectups));
  Jipebarra13(cuentaajis)=(((a/b)*pi*(erres2^2)*ji)/(1+(1-(a/b))*pi
    *(erres2^2)*ji-(ji^2)*((Vectups. ')*MatrizM13*Vectups)));
  Vecjis(cuentaajis)=ji;
  %end;
end
%Jipebarra23(totalis/2)=0;

```

```

Vecjis;
Jipebarra23;
Jipebarra23amp(descuerres,1)=(-(a/b)*pi*(erres2^2)*(-1))/
    (1-(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*(-1)-((-1)^2)*
    ((Vectups.')*MatrizM23*Vectups));
Jipebarra13amp(descuerres,1)=((a/b)*pi*(erres2^2)*(-1))/
    (1+(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*(-1)-((-1)^2)*((Vectups.')
    *MatrizM13*Vectups));
Vecjisamp(1)=-1;
for cuentaais=1:totalis
    Jipebarra23amp(descuerres,cuentaais+1)=Jipebarra23(cuentaais);
    Jipebarra13amp(descuerres,cuentaais+1)=Jipebarra13(cuentaais);
    Vecjisamp(cuentaais+1)=Vecjis(cuentaais);
end
for cuentaajis=1:totalis
    jip1=1-((2*cuentaajis)/totalis);
    MatrizM23p1=inv(eye(totalis-1)-(jip1*Omegasa));
    MatrizM13p1=inv((eye(totalis-1))+(jip1*Omegasa));
    Jipebarra23p1(cuentaajis)=-(-(a/b)*pi*(erres2^2)*jip1)/
        (1-(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*jip1-(jip1^2)*((Vectups.')*
        MatrizM23p1*Vectups));
    Jipebarra13p1(cuentaajis)=-((a/b)*pi*(erres2^2)*jip1)/
        (1+(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*jip1-(jip1^2)*((Vectups.')
        *MatrizM13p1*Vectups));
    Vecjisp1(cuentaajis)=jip1;
    %end;
end
Vecjisp1;
Jipebarra23p1;
Jipebarra23ampp1(descuerres,1)=-(-(a/b)*pi*(erres2^2)*(1))/
    (1-(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*(1)-((1)^2)*((Vectups.')
    *MatrizM23p1*Vectups));
Jipebarra13ampp1(descuerres,1)=-((a/b)*pi*(erres2^2)*(1))
    /(1+(1-(a/b))*pi*(erres2^2)*(1)-((1)^2)*((Vectups.')
    *MatrizM13p1*Vectups));
Vecjisampp1(1)=1;
for cuentaais=1:totalis
    Jipebarra23ampp1(descuerres,cuentaais+1)=

```

```

        Jipebarra23p1(cuentais);
        Jipebarra13ampp1(descuerres,cuentais+1)=
            Jipebarra13p1(cuentais);
        Vecjisampp1(cuentais+1)=
            Vecjisp1(cuentais);
end
for cuentais=1:(totalis+1)
    Keller1323(descuerres,cuentais)=
        Jipebarra23amp(descuerres,cuentais)/
        Jipebarra13ampp1(descuerres,cuentais);
    Keller2313(descuerres,cuentais)=
        Jipebarra13amp(descuerres,cuentais)/
        Jipebarra23ampp1(descuerres,cuentais);
end
end
radinos=num2str(Verdelosradios. ');
figure(1)
plot(Vecjisamp,Jipebarra23amp);
grid on;
legend (radinos);
title('-_{23}\chi^*_{p} contra \chi_{p} con par\'ametro a V_{2}');
figure(2)
plot(Vecjisamp,-Jipebarra13amp);
grid on;
legend (radinos);
title('-_{13}\chi*_{p} contra \chi_{p} como par\'ametro a V_{2}');
figure(3)
plot(Vecjisampp1,Jipebarra23ampp1);
grid on;
legend (radinos);
xlabel('\chi_{p}');
ylabel('\chi^*_{p}');
title('-_{23}\chi*_{p} contra \chi_{p} con par\'ametro a V_{1}');
figure(4)
plot(Vecjisampp1,-Jipebarra13ampp1);
grid on;
legend (radinos);
title('-_{13}\chi*_{p} contra \chi_{p} como par\'ametro a V_{1}');

```

```
xlabel('\chi_{p}')
ylabel('\chi^*_{p}');
figure(5)
plot(Vecjisampp1,-Keller1323);
grid on
figure (6)
plot(Vecjisampp1,-Keller2313);
grid on;
```

# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., y Stegun, I. 1965 “*Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*”. New York, Dover.
- [2] Achenbach, J. D. 1975 “Wave propagation in elastic Solids” Amsterdam, Elsevier.
- [3] Allaire, G. 2002 “*Shape optimization by the homogenization method*”. New York, Springer.
- [4] Bakhvalov, N. y Panasenko, G. 1989 “*Homogenisation: Averaging Process in Periodic Media Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*”. Dordrecht, Kluwer Academic.
- [5] Baird, D. C. 2003 “*Experimentación: Una introducción a la Teoría y al diseño de Experimentos*”. México Person Educación.
- [6] Berman, C. Leonard; Greengard, Leslie.1994 “A renormalization method for the evaluation of lattice sums”. *Journal of Mathematical Physics*, vol. **35**, pp.6036-6048.
- [7] Flaherty, Joseph E., y Keller, Joseph B. 1973 “Elastic Behavior of Composite Media” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. **XXVI**, pp. 565-580.
- [8] Hassani, B. y Hinton, E. 1999 “*Homogenization and structural topology optimization : theory, practice, and software*”. London, Springer.
- [9] Hurwitz, Adolf 1964 “*Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen*” Berlin, Springer-Verlag.

- [10] Israelachvili, Jacob, Sammut, Rowland y Snyder, Allan, W. 1975 “Birefringence and dichroism in invertebrate photoreceptors” *Journal of the Optical Society of America*, vol. **65**, pp. 221-222.
- [11] Lang, Serge.1987 “*Elliptic Functions*” New York, Berlin Spriger-Verlag.
- [12] Lawden, Derek F. 1989 “*Elliptics Functions and Applications*”. New york, Springer.
- [13] Levine, Harold 1966 “The effective conductivity of a regular composite medium” *J. Inst. Maths Applics*. Vol. **2**, pp. 12-28.
- [14] Markushevich, A. 1978 “*Teoria de las funciones Analíticas*” Tomo 2 Moscu Editorial Mir Moscu.,
- [15] Mathews, John H. y Fink, Kurtis D. 2000 “*Métodos Numéricos con matlab*” Madrid, Prentice Hall.
- [16] Milton, G. 2002 “*The theory of composites*” Cambridge, Cambridge University.
- [17] Mityushev, V. y Adler, P. M. 2002 “Longitudinal Permeability of Spatially Periodic Rectangular Arrays of Circular Cylinders I A single Cilinder in the Unit Cell” *Z. Angew Math. Mech* vol. **82-5**,pp. 335-345.
- [18] Movchan, A. B., Nicorovici, N. A. y McPhedran, R. C.1997 “Green/s tensor and Lattice sums for elastostics and elastodynamics” *R. Soc. London A* vol. **453**, pp. 643-662.
- [19] Nye, J. F. 1984 “Physical properties of crystals : their representation by tensors and matrices ” New York Oxford University.
- [20] Rodríguez-Ramos, Reinaldo, Sabina, Federico, Guinovart-Diaz, Raúl et al., 2001 “Closed-for expresions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents I Elastic-Square Symmetry” *Mechanics of Materials* vol. **33**, pp. 223-235.
- [21] Sevostianov, Igor, Sabina, Federico, Bravo-Castillero, Julián, et al., 2006 “Cross-Property connetions for fiber-reinforced composites with transversely Isotropic Constituents” *International Journal of Fracture*, vol. **142**. Números 3-4

- [22] Rayleigh, Lord (Strutt John William), 1892 “On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium”, *Philos. Mag.* Vol. **34**, pp.19-38.
- [23] Weil, André 1976 “Eliptics Funtions according to Eisenstien and Kronecker” Berlin, Springer-Verlag.



# Índice alfabético

- altura, 41
- ancho, 41
- arreglo
  - periódico, 1
  - rectangular, 13
- ausencia, 22, 28, 29
  
- base, 41
- base del rectángulo, 41
- blanda, 22, 28
- blando, 22
  
- celda, 1, 3
  - periódica, 3
  - rectangular, 5
- cilindros, *véase* fibra
- cilindros circulares, 1
- coeficientes
  - $a_o$ , 10
  - $a_k$ , 4, 5, 8, 10–12
  - $a_1$ , 15
  - $b_k$ , 4, 5, 10–12
  - efectivos, 1
- comportamiento, 21–23, 25, 32
- cóncavas, 36
- cóncavo, 32
- constituyentes
  - elásticos, 13
- curva, 25, 28, 29, 31
  - cero, 26
  - límite, 25, 31
  
- curvas, 22, 23, 25, 28, 29, 32
  
- delta de Kronecker, 8
- dura, 22, 28
- dureza, 22, 29, 30
- duro, 22
  
- fibra, 21–23, 25, 26, 28–32, 41
- función, 22, 28
  - doblemente periódica, 3
  - $f(z)$ , 11
  - $f^{(\Upsilon)}$ , 3
  - $\mathcal{P}(z)$ , 37
  - par, 3
  - $U^{(1)}$ , 14
  - $U^{(\Upsilon)}$ , 9, 10
  - Zeta de Weierstrass, 4, 10, 37, 39
  
- inclusión
  - rígida, 22, 28
- Interfase, 3, 6
  - $\Gamma$ , 1, 3
  
- módulo de
  - rigidez, 22
- material
  - elásticos, 1
- molicie, 25, 28
- monótonas
  - crecientes, 28, 29
  - decrecientes, 22, 25, 36

- $\mathcal{P}(z)$ , 37, 39, 40  
 percolación, 22, 23, 28  
 propiedades  
     elásticas  
     efectivas, 13  
  
 relaciones  
     de reciprocidad  
         Flaherty y Keller, 18, 19, 21, 31, 32, 35  
 rígida, 22, 25, 28  
 rigidez, 22, 23, 25, 28, 29, 31  
 rígido, 22, 28  
  
 $S_4$ , 39, 40  
 $S_6$ , 39, 40  
 $S_n$ , 35  
 $S_k$ , 39  
 serie de Fourier  
     de cosenos, 5, 12  
     de senos, 7, 11  
  
 $U$ , 12  
 $U^{(1)}$ , 4, 10, 13, 14  
 $U^{(2)}$ , 15  
 $U^{(\Upsilon)}$ , 3, 9, 10  
  
 vacia, 22, 28  
 vacío, 22, 25, 28  
 vacuidad, 25, 30, 31  
 variable, 1, 9  
 vector, 9  
     columna  
          $D'$ , 16  
          $\mathcal{V}$ , 16  
     normal exterior, 3  
  
 $\chi_p$ , 21–23, 28, 36  
 $-\chi_p^*$ , véase  $-\overline{\chi_p}$

- $\overline{\chi_p}$ , 21–23  
 $-_{13}\overline{\chi_p}$ , 28, 31  
 $_{23}\overline{\chi_p}$ , 28, 31  
 $-\overline{\chi_p}$ , 22, 31, 36  
 $-\overline{\chi_p}$ , 32

- $\zeta$ , 4, 37, 39  
 $\zeta^{(k)}$ , 4