UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUAVIDAD EN DENDROIDES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

TZOLKIN GARDUÑO ALVARADO

TUTORA

DRA VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

2008

Hoja de datos del Jurado

Formato
1. Datos del alumno Garduño Alvarado Tzolkin 53 36 53 42 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 099116318
2. Datos del tutor Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla
3. Datos del Sinodal 1 Dr. Alejandro Illanes Mejía
4. Datos del sinodal 2 Dr. Adalberto García Maynez y Cervantes
5. Datos del sinodal 3 Dr. Carlos Prieto De Castro
6. Datos del sinodal 4 Dr. Gerardo Acosta García
7. Datos del trabajo escrito Suavidad en dendroides 77 2008

“And I have no compass
And I have no map
And I have no reasons
No reasons to get back
And I have no religion
And I don’t know what’s what
And I don’t know the limit
The limit of what we’ve got"

U2

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi Male, a mi Pale y a mi Chelikirrikipiki, por apoyarme en las buenas y en las malas, por darme su amor, su tiempo, su esfuerzo y su alegría. Quiero que sepan que son correspondidos.

A mis abuelitos Rebe, Pepe, Veva y Carlos, que me han ayudado a comprender cosas que mi inmadurez no habría entendido tan fácilmente.

A mis profesores: Verónica Martínez de la Vega y Alejandro Illanes por tenerme tanta paciencia, Carlos Prieto por enseñarme que no hay límites sino obstáculos, Eduardo Arellano por enseñarme que hay que darle átomos, Silvestre Cárdenas por ayudarme en tiempos difíciles, Noemí Martínez por mostrarme el mundo desde otra perspectiva, Carlos Candelaria y Norma Corado por expandir mi panorama y Rogelio Guerra por enseñarme a no tener miedo.

A mis cuates: Danae, Sayab, David (el Gnomo), Marco (Markiki), Ivan (Ivanovich), Maximiliano (Max), Erantzcani, Victor (Gabo), Victor (Vikitivik), Hiram, Gerardo, Alicia, Javier (Jarocho), Rodolfo (Rush), Karel, Mathieu, Claudia (Clauclau), Franklin, Leslie, Magali, Arturo, Elvia, Esmeralda, Cesar (Rattoni), Isaac, Hiroki, Omar, Ursula (Ucha), Christian (Tief), Aurelio, Rosalía, Alberto, Jesús (Chucho)

Índice general

Introducción

En el extenso campo de la topología, los espaciós métricos ocupan un lugar muy importante porque comparten una gran cantidad de propiedades con los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Estos espacios son más fáciles de visualizar y en ellos se cumplen muchas propiedades que podemos describir geométricamente.

Los *continuos*, que son los espacios métricos compactos y conexos, son espacios muy interesantes para ser estudiados. Aunque ya tienen propiedades que los harían parecer muy simples, esto es sólo una ilusión pues muchos de los problemas básicos sobre ellos están muy lejos de ser resueltos. Entre estos problemas podemos mencionar: (a) No se conocen todos los continuos homogéneos del plano $\mathbb{R}^2$ (sólo se conocen 3 de ellos y no se sabe si son todos); (b) No se conocen todos los continuos que son homeomorfos a todos sus subcontinuos no degenerados (sólo se conocen 2 de ellos y no se sabe si son todos); No se sabe si todos los subcontinuos de $\mathbb{R}^2$, cuyo complemento en $\mathbb{R}^2$ es conexo, tienen la propiedad del punto fijo.

Los *dendroides* son los continuos conexos por trayectorias en los que la intersección de cualesquiera dos subcontinuos es conexa. Nótese que los dendroides no contienen circunferencias (topológicamente hablando), de manera que entre cualesquiera dos puntos p y q de un dendroide, existe un único arco que los une y que se denota por pq. Los dendroides son continuos muy simples. Por ejemplo, se sabe que todos ellos son de dimensión uno, y entonces se pueden encajar en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, como casi todo en matemáticas, esta simplicidad no quiere decir que los dendroides son triviales. Todavía hay muchos problemas abiertos sobre ellos. El más notorio es el de la misma definición. A mediados del siglo XX, B. Knaster los definió como los continuos X tales que, para toda $\varepsilon > 0$, existe un árbol $T \subset X$ y existe una retracción $r : X \to T$ tal que todas las fibras de r tienen diámetro menor que ε. Hasta ahora todavía no se ha podido determinar si la definición dada por Knaster es equivalente a la que dimos al principio de este párrafo. Este problema ha estado en el ambiente desde hace más de 50 años y ha captado el interés de las personas que se dedican a la Teoría de Continuos. Se conocen algunas respuestas parciales. Se sabe que las definiciones son equivalentes para las *dendritas* (dendroides localmente conexos) y para los dendroides *suaves*.

Cuando se tiene un dendroide X y dos sucesiones convergentes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $\lim p_n = p$ y $\lim q_n = q$. Una pregunta interesante es cuándo $\lim p_n q_n = pq$ (los arcos únicos arcos que unen a los puntos p_n y q_n convergen al arco pq). Es muy fácil construir dendroides donde esto no ocurre. De hecho, se sabe que un dendroide X es una dendrita si y sólo si siempre se cumple a igualdad $\lim p_n q_n = pq$. Viendo esta equivalencia, resulta entonces tentador, definir dendroides donde la igualdad se cumple bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, se dice que un dendroide X es suave, si existe un punto $p \in X$ (llamado punto de suavidad) tal que, para cualquier sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $\lim q_n = q$, se tiene que $\lim pq_n = pq$. Además de las dendritas, uno de los dendroides suaves más simple es el abanico armónico, el cual se define como el cono sobre el conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, es claro que este dendroide es suave en el vértice del cono.

Los estudiosos de los continuos y, en particular de los dendroides, han definido nociones de suavidad un poco más relajadas que incluyen: semi-suavidad, suavidad débil y suavidad puntual. El objetivo de este trabajo es estudiar algunas relaciones entre estas nociones. Todo nuestro trabajo está basado en un artículo de T. Czuba ([1]). Después de dar las definiciones correspondientes, para entender bien las definiciones, ofrecemos ejemplos y contraejemplos. A diferencia del artículo de Czuba, hemos dado las pruebas completas que justifican las propiedades de los ejemplos.

Hemos escrito este trabajo de manera que pueda ser entendido por alguien que haya tomado un primer curso de topología general. Los conceptos más importantes que se tienen que conocer para leerlo son: la topología de los espacios métricos, la conexidad y la compacidad.

Capítulo 1

Preliminares

El siguiente capítulo es para que el lector se familiarice con las nociones básicas de los continuos y sus hiperespacios. Tres conceptos que son medulares en esta lectura son los de conexidad, compacidad y espacios métricos.

Dentro del área de espacios métricos daremos una noción de cercanía con una métrica llamada "de Hausdorff". Esta mètrica la definimos y la explicamos más formalmente en 1.8.

Comenzaremos por dar la primera:

Definición 1.1 *Sea X un espacio topológico. Se dice que dos conjuntos A y B de X son* ***una separación*** *de X, denotada como $A \mid B$, si:*
1) $A \cup B = X$
2) $A \neq \varnothing$ *y* $B \neq \varnothing$
3) $A \cap B = \varnothing$
4) A *y* B *son abiertos.*

Definición 1.2 *Un espacio topológico X es* ***conexo*** *si no existe una separación de él.*

Definición 1.3 *Un* ***continuo*** *X es un espacio topológico que es compacto, conexo y métrico.*

Definición 1.4 *Un* ***subcontinuo*** *Y es un subespacio de un continuo X que cumple con ser continuo. (i. e. subespacio cerrado y conexo)*

Ejemplo 1.5 *Por el Teorema de Heine-Borel, [6, Teorema VI.1.1]Es fácil ver que el intervalo $[0, 1]$, el círculo S^1, el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ son continuos. De hecho los cerrados convexos acotados de $\mathbb{R}^n$ son continuos y sos productos finitos lo son.*

A lo largo del texto se utilizarán algunos Teoremas que no se demuestran ya que están fuera del tema principal de este trabajo, sin embargo, se dan referencias en donde es posible encontrar las demostraciones de dichos Teoremas.

Definición 1.6 *Los siguientes conjuntos los denominaremos* ***hiperespacios del continuo*** X*.*

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado } y \ A \neq \varnothing\}$$
$$C(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es subcontinuo de } X\}$$

Como todo subcontinuo X es cerrado debido a su compacidad, entonces todo elemento de $C(X)$ está contenido en 2^X así que $C(X) \subset 2^X$.

Dentro de estos continuos se define una métrica, llamada la métrica de Hausdorff; pero antes de referirnos a ella necesitamos otra definición.

Definición 1.7 *Sea* X *un espacio métrico con métrica* d*. Dada* $\varepsilon > 0$ *y* $A \in 2^X$*,* ***la nube de radio*** ε ***con centro*** *en* A *se define como* $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } x \in \beta_\varepsilon(a)\}$*, donde* $\beta_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$ *es la bola abierta en* X *con centro en* a *y radio* ε*.*

Observemos que $N(\varepsilon, A)$ es abierto, ya que es unión de abiertos.

Definición 1.8 ***La métrica de Hausdorff en*** 2^X *se define como:*
$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \ y \ B \subset N(\varepsilon, A)\}$

Veremos que efectivamente H es una métrica.

Proposición 1.9 *Dados elementos* A*,* B*,* C *de* 2^X*, se cumple que:*
(a) $H(A, B)$ *está bien definida,*
(b) $H(A, B) \geq 0$,
(c) $H(A, B) = H(B, A)$,
(d) $H(A, B) = 0$ *si y sólo si* $A = B$,
(e) H *satisface la desigualdad del triángulo, es decir:*

$$H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)\,.$$

Demostración. Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$ definimos el conjunto:
$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$
Por la definición de $H(A, B)$, $H(A, B) = \text{ínf } E(A, B)$. Para ver que $H(A, B)$ está bien definida, tenemos que mostrar que el conjunto $E(A, B)$ es diferente del vacío y está acotado inferiormente. Para ver que es no vacío, notemos que $d(p, q) < diam(X) + 1$ para cualesquiera $p, q \in X$.

Así que $A \subset N(diam(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diam(X) + 1, A)$. De manera que el número $diam(X)+1$ pertenece a $E(A, B)$. Esto muestra que el conjunto $E(A, B)$ es no vacío. Claramente este conjunto está acotado inferiormente por el 0, por tanto, $H(A, B)$ está bien definido. Además $H(A, B) \geqslant 0$.

La prueba de (c) es inmediata pues en la definición del conjunto $E(A, B)$ pueden intercambiarse los conjuntos A y B sin que cambie el conjunto $E(A, B)$.

Para mostrar (d), primero veamos que $H(A, A) = 0$. Para esto observemos que, para cualquier $\varepsilon > 0$, $A \subset N(\varepsilon, A)$, de modo que $E(A, A) = (0, \infty)$ y como el ínfimo de este conjunto es el 0, concluimos que $H(A, A) = 0$. Ahora supongamos que $H(A, B) = 0$, tenemos que probar que $A = B$. Tomemos un punto $a \in A$ y un número positivo cualquiera ε. Entonces estamos suponiendo que $\text{ínf } E(A, B) = 0 < \varepsilon$, por lo que existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$ y entonces $A \subset N(\delta, B)$. Así que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$. Con esto hemos probado que $B_\varepsilon(a) \cap B \neq \varnothing$, y como esto ocurre para cualquier ε, concluimos que a pertenece a la cerradura de B en X, pero B es cerrado, así que $a \in B$. Ya tenemos entonces que $A \subset B$, la contención $B \subset A$ se prueba en forma similar. Por tanto $A = B$. Esto termina la prueba de (d).

Finalmente probaremos (e). De acuerdo con la definición de H, tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A, C) \leq \text{ínf } E(A, B) + \text{ínf } E(B, C).$$

Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A, C) \leq \text{ínf}\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}.$$

Para hacer esto, tomemos dos elementos cualesquiera $\delta \in E(A, B)$ y $\eta \in E(B, C)$. Por definición, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\eta, C)$. Dada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, además existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \eta$. Por la desigualdd del triángulo tenemos que $d(a, c) < \delta + \eta$. Hemos probado que $A \subset N(\delta + \eta, C)$. En forma similar se puede probar que $C \subset N(\delta + \eta, A)$.

De manera que $\delta + \eta \in E(A, C)$. Y entonces $\text{ínf}\, E(A, C) \leq \delta + \eta$. Con esto podemos concluir que el número $\text{ínf}\, E(A, C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}$. Por tanto este número es menor o igual al ínfimo de tal conjunto. Esto es precisamente lo que teníamos que ver para completar la prueba de (e) y, por ende, la de la proposición. ■

Para poder ver la convergencia en los hiperespacios es necesario tener clara la noción de límite en ellos. Tomemos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X y definamos el límite superior y el límite inferior de esta sucesión como sigue:

$$\begin{aligned} \text{lím ínf}\, A_n &= \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ \beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing \text{ para casi toda} \\ &\qquad n \in \mathbb{N} \text{ excepto un número finito}\} \\ \text{lím sup}\, A_n &= \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ \beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing \text{ para una infinidad} \\ &\qquad \text{de } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Se dice que una sucesión converge, o que A_n tiene un límite, denotado por $\lim_{n \to \infty} A_n$, en 2^X si el límite inferior y el límite superior de la sucesión coinciden. En este caso escribiremos

$$\text{lím sup}\, A_n = \text{lím ínf}\, A_n = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

Teorema 1.10 *Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son continuos. ([5, Corolario 6.13])*

Así que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.11 *(De los Golpes en la Frontera) [5, Teorema 6.5]. Sea Z un espacio conexo, compacto y de Hausdorff y sea U un subconjunto propio, abierto y no vacío de Z. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \varnothing$.*

Otras herramientas, que resultarán importantes en algunas de las demostraciones que se presentan aquí, son las funciones de Whitney, estas funciones nos dan una idea del tamaño de los elementos de 2^X. A continuación se da una definición de tales funciones.

Definición 1.12 *Sea S una curva. Decimos que S es una **curva cerrada simple** si S es homeomorfa al conjunto S^1.*

Definición 1.13 *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es* ***localmente conexo*** *si todo $x \in X$ tiene una base local de vecindades abiertas y conexas.*

Definición 1.14 *Se dice que un espacio topológico X es* ***conexo en pequeño*** *en un punto $x \in X$, si para todo abierto U que contiene a x existe un abierto $V \subset U$ tal que cualesquiera dos puntos $x, y \in V$ pertenecen a un subconjunto conexo de U.*

Teorema 1.15 *Si para toda $x \in X$, X es conexo en pequeño en x, entonces X es localmente conexo. [7, Theorem 27.16]*

Dado que los espacios que estaremos estudiando son arcononexos será de gran ayuda enunciar algunos teoremas concernientes a espacios arcoconexos.

Teorema 1.16 *Los abiertos conexos de los espacios localmente conexos son arcoconexos. En particular los espacios localmete conexos son arcoconexos. [4, Theorem 3-16]*

Capítulo 2

Continuos y Dendroides

2.1. Definiciones Básicas

Definición 2.1 *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un* ***continuo*** *si es compacto, conexo y métrico.*

En los siguientes ejemplos se muestran algunos continuos.

Notación 2.2 *A partir de ahora denotaremos al segmento de recta que une dos puntos x, y en $\mathbb{R}^n$ como $\overline{xy}$. En caso de que $x = y$, tendremos que $\overline{xy} = \{x\}$.*

Definición 2.3 *Sea $\mathfrak{P}$ una propiedad topológica y X un continuo. Se dice que $\mathfrak{P}$* ***es hereditaria, o que*** *X* ***tiene*** *$\mathfrak{P}$* ***hereditariamente****, si para toda $A \in C(X)$ se cumple que A tiene la propiedad $\mathfrak{P}$.*

Definición 2.4 *Un continuo X es* ***unicoherente*** *si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 2.5 *Un continuo X es* ***hereditariamente unicoherente*** *si siempre que dos subcontinuos A y B de X se intersequen, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 2.6 *Un continuo X es* ***arcoconexo*** *si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe un arco que los une, es decir, existe un encaje $\lambda : [0, 1] \to X$ que cumple que $\lambda(0) = x$ y $\lambda(1) = y$.*

Definición 2.7 *Un continuo arcoconexo X es* ***únicamente arcoconexo*** *si para cualesquiera dos puntos x, y de X existe un único arco que los une.*

La siguiente definición es la más importante de todo este trabajo.

Definición 2.8 *Un* ***dendroide*** *X es un continuo hereditariamente unicoherente y arcoconexo.*

En los siguientes ejemplos se muestran algunos dendroides.

Ejemplo 2.9 *Cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es un dendroide.*

Ejemplo 2.10 *Sea $L_k = \overline{(0,0)(1, \frac{1}{k})}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Si $X = \left[\bigcup_{k=1}^{n} L_k\right]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, se dice que X es un $n-$odo simple. Se tiene que X es un continuo, en especial, es un dendroide. Al punto $v = (0,0)$ lo llamaremos vértice de X.*

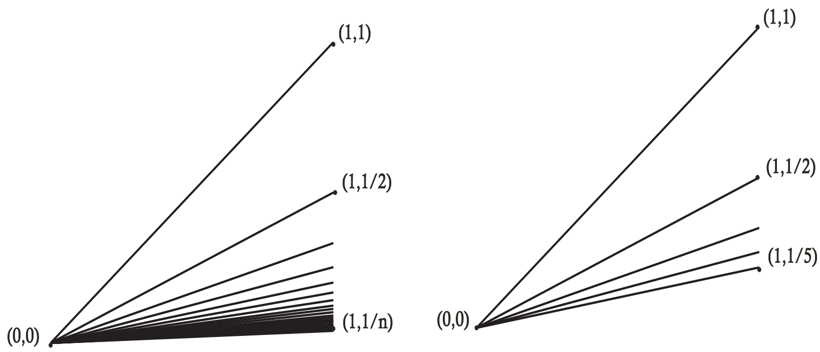

Figura 2.1: A la izquierda tenemos un abanico armónico y a la derecha un 5-odo.

Ejemplo 2.11 *Sea $L_0 = \overline{(0,0)(1,0)}$. Definimos $X_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$, a X_∞ lo llamaremos el abanico armónico. Notemos que X_∞ es un continuo.*

Mostraremos que X_∞ es un dendroide.

Sea $v = (0,0)$. Para ver que X_∞ es arcoconexo tomemos dos puntos $p, q \in X_\infty$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $p \in L_n$ y $q \in L_m$. Tenemos entonces dos casos:

i) $n = m$

Si p y q pertenecen a L_n en especial el segmento de recta $\overline{pq}$, que une a p con q, está contenido en L_n, el cual es un segmento. Dado que el segmento $\overline{pq}$ es homeomorfo al arco entonces el segmento $\overline{pq}$ es un arco que une a p con q.

ii) $n \neq m$

Observemos que $v \in L_k$ para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en especial, $v \in L_n$ y $v \in L_m$, lo que implica que los segmentos de recta pv y qv están contenidos en L_n y L_m, respectivamente. Observemos que $pv \cup qv$ es homeomorfo a un arco, de modo que, en este caso también hemos encontrado un arco que une a p con q.

En ambos casos hemos encontrado que podemos unir a los puntos p y q por un arco. Por tanto X_∞ es arcoconexo.

Ahora veamos que X_∞ es hereditariamente unicoherente.

Analicemos cómo son los subcontinuos de X_∞. Sea $A \in C(X_\infty)$, consideremos dos posibilidades.

i) Si $v \in A$, entonces A es de la forma $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} J_k$, donde cada J_k es un segmento contenido en L_k y $v \in J_k$ o $J_k = \{v\}$.

ii) Si $v \notin A$, entonces existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que A es un segmento o un conjunto de un solo elemento contenido en $L_k - \{v\}$.

Ahora tomemos dos subcontinuos $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \varnothing$, analicemos tres casos.

i) $v \in A$ y $v \in B$

Entonces $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} J_k$ y $B = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} M_k$, donde para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que J_k y M_k son como se indica en (*i*). Entonces cada intersección $J_k \cap M_k$ es conexa, tiene a v y tomando la intersección de A con B tenemos que $A \cap B = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (J_k \cap M_k)$, lo cual es conexo.

ii) $v \in A$ y $v \notin B$

En este caso tomaremos $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} J_k$ como en el caso anterior. Dado que $v \notin B$ existe $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $B \subset L_{k_0} - \{v\}$ y B es un segmento o un conjunto con un elemento.

De esta foma tenemos que $A \cap B = J_{k_0} \cap B$, el cual es una intersección de segmentos de recta. Por tanto $A \cap B$ es conexo.

iii) $v \notin A$ y $v \notin B$.

En este caso tenemos que A y B están contenidos en $L_{k_0} - \{v\}$ para alguna $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De modo que $A \cap B$ es una intersección de conexos en un segmento de recta. Por tanto $A \cap B$ es conexo.

En los tres casos tenemos que $A \cap B$ es conexo. Por tanto X_∞ es hereditariamente unicoherente.

Hemos visto que X_∞ es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Por tanto X_∞ es un dendroide.

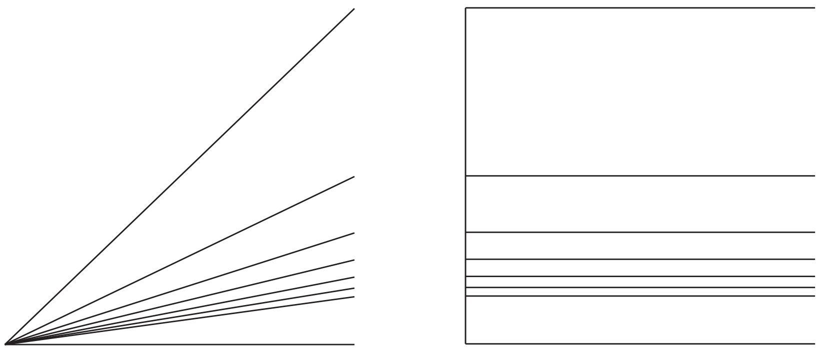

Figura 2.2: Figura Peine y Abanico Armónico.

Ejemplo 2.12 *El espacio peine se define como*

$$X = \left[\bigcup_{k=1}^{n} \overline{(0, \tfrac{1}{k})(1, \tfrac{1}{k})} \right] \cup \overline{(0,0)(1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)},$$

Es fácil ver que también X es un dendroide.

Ejemplo 2.13 S^1 *no es un dendroide.*

Veremos que S^1 no es unicoherente ni es únicamente arcoconexo. Tomemos dos puntos a, b en S^1, entonces tenemos dos arcos $l, m \subset S^1$ que los unen, estos dos arcos pertenecen a $C(S^1)$ y cumplen con que su intersección, $l \cap m = \{a, b\}$, consta de dos puntos únicamente. Entonces no es conexa. Así S^1 no es hereditariamente unicoherente. Por tanto S^1 no es un dendroide.

Teorema 2.14 *Los dendroides son únicamente arcoconexos.*

Demostración. Sea X un dendroide y sean a, b dos puntos de X, supongamos por el contrario que existen dos arcos l, m que los unen. Como X es hereditariamente unicoherente, $l \cap m$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos a y b. Como $l \cap m \subset l$ y $l \cap m \subset m$, tenemos que $l \cap m$ es un subarco de l que contiene a sus extremos, así que $l \cap m = l$. De la misma forma deducimos que $l \cap m = m$. Por tanto $l = m$. Con esto se prueba que X es únicamente arcoconexo. ■

Notación 2.15 *Hemos visto que los dendroides son únicamente arcoconexos. Así que, cuando X es un continuo únicamente arcoconexo, dados dos puntos $x, y \in X$, denotaremos al único arco que une a x con y en X como xy. Entonces usaremos esta notación en los dendroides. Ampliaremos esta notación poniendo $xx = \{x\}$ para toda $x \in X$.*

Notación 2.16 *Sea X un dendroide. Si $A \in C(X)$, entonces a A le llamaremos* ***subdendroide*** *de X. Si*

Los siguientes resultados son propiedades de los dendroides que nos serán muy útiles a lo largo de este trabajo.

Teorema 2.17 *Los subcontinuos de los dendroides son dendroides.*

Demostración. Sea $A \in C(X)$. Veamos que A es arcononexo. Sean a y b dos puntos de A notemos que $ab \cap A \subset ab$, esta intersección es conexa ya que el arco ab y A están en $C(X)$ y X es hereditariamente unicoherente, además $ab \cap A$ es un subarco de ab que contiene a los puntos a y b, así que $ab = ab \cap A$, lo que a su vez está contenido en A, de esta forma se tiene que A es arcoconexo.

Ahora veamos que A es hereditariamente unicoherente. Tomemos C y D dos subcontinuos de A. Entonces C y D son subvcontinuos de X. Como X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $C \cap D$ es conexo. Esto prueba que A es hereditariamente unicoherente. Como A es arcoconexo y hereditariamente unicoherente, concluimos que A es un dendroide. ■

Hemos visto que los subcontinuos de los dendroides son dendroides. Así que ahora nos referiremos a los subcontinuos de los dendroides como subdendroides. Más aún si X es un dendroide y $A \in C(X) - \{X\}$, entonces a A le llamaremos **subcontinuo propio** o **subdendroide propio** de X.

A continuación veremos una manera equivalente de describir a los dendroides.

Teorema 2.18 *Sea X un continuo. Entonces X es un dendroide si y sólo si X es hereditariemente arcoconexo y únicamente arcoconexo.*

Demostración. $\Rightarrow$] Por el Teorema 2.17 sabemos que todo subcontinuo A de X es un dendroide y por tanto es arcoconexo. De manera que X es hereditariamente arcoconexo. Además por el Teorema 2.14 sabemos que X es únicamente arcoconexo.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que X es un continuo hereditariamente arcoconexo y únicamente arcoconexo. Entonces, en particular, X es arcoconexo.

Ahora veamos que X es hereditariamente unicoherente. Sean A, B, C subcontinuos de X tales que $A = B \cup C$. Sean p y q dos puntos en $B \cap C$. Como B y C son arcoconexos, entonces el único arco en X que conecta a p con q debe complir que $pq \subset B$ y $pq \subset C$, esto implica que $pq \subset B \cap C$. Sabemos que pq es conexo y los puntos p y q son dos puntos arbitrarios en $B \cap C$. Es decir, $B \cap C$ es conexa por arcos. Lo que implica que $B \cap C$ es conexa. Por lo tanto X es hereditariamente unicoherente. ■

Lema 2.19 *Si X es dendroide, entonces X no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que X contiene una curva cerrada simple S. Por definición S es homeomorfa a S^1. Entonces S no es unicoherente (Ejemplo 2.13). De modo que X no es hereditariamente unicoherente. Esto es absurdo pues X es un dendroide. Por tanto X no puede contener curvas cerradas simples ■

Teorema 2.20 *Sean A un subcontinuo de un dendroide X y $y \in X$ un punto. Entonces existe un único punto $r \in A$ tal que $r \in yx$, para toda $x \in A$. Además r tiene la propiedad de que $yr \cap A = \{r\}$.*

Demostración. Fijemos un punto $a \in A$ y consideremos el arco ay. Sabemos que $ay \cap A$ es un subcontinuo de ay, de hecho es un subarco de ay que tiene a a como uno de sus extremos. Entonces $ay \cap A = ar$, para alguna $r \in ay$.

Veamos que $yr \cap A = \{r\}$. Supongamos que existe $q \in yr \cap A$ tal que $r \neq q$. Dado que $q \in yr$, tenemos que en el arco ay el subarco $ar \subset aq \subset A$.

Lo que implica que $q \in ay \cap A = ar$, esto contradice la elección de q. Por tanto $yr \cap A = \{r\}$.

Veremos que $r \in yx$ para toda $x \in A$. Sea $x \in A$, como $r \in A$, por el Teorema 2.17 tenemos que $xr \subset A$. Como $yr \cap rx \subset yr \cap A = \{r\}$, tenemos que $yr \cup rx = yx$ y $r \in yx$, que es lo que buscamos.

Ahora veremos que r es el único punto de A tal que $r \in yx$ para toda $x \in A$. Supongamos que existe un punto $r' \in A$ tal que $r' \in yx$ para toda $x \in A$. Entonces $r \in yr'$ y $r' \in yr$. De modo que $yr \subset yr'$ y $yr' \subset yr$. Esto implica que $yr = yr'$. Por tanto $r = r'$. El teorema queda demostrado. ■

No todos los continuos cumplen con ser arcoconexos y hereditariamente unicoherentes al mismo tiempo. A continuación se enlistan algunos ejemplos de continuos que no cumplen con la definición de dendroide.

Ejemplo 2.21 *Sea* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(\frac{1}{x}), x \in (0, \frac{1}{\pi}]\} \cup \overline{(0,1)(0,-1)}$. *A S le llamaremos Çurva del Topólogo". (Ver Figura 2.3)*

Este espacio cumple con ser compacto conexo y métrico, es decir, X es un continuo. Es fácil probar que X es hereditariamente unicoherente. Sin embargo, no es un dendroide, ya que si tomamos un punto p en $\overline{(0,1)(0,-1)}$ y un punto q en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(\frac{1}{x}), x \in (0, \frac{1}{\pi}]\}$, entonces no existe un arco dentro de S que una a p con q. Por tanto S no es arcoconexo, luego S no es un dendroide.

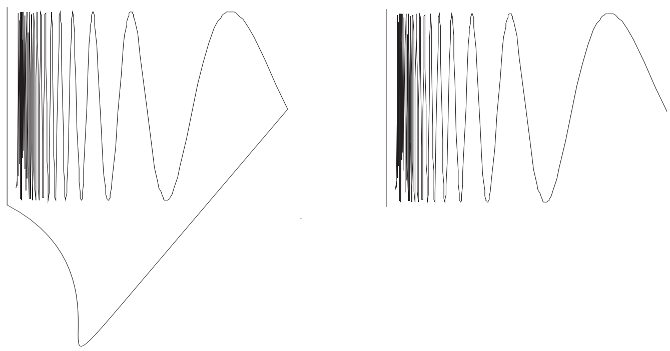

Figura 2.3: Círculo de Varsovia y Curva del Topólogo.

Ejemplo 2.22 *Sea l un arco en $\mathbb{R}^2$ que une a los puntos $(0,-1)$ y $(\frac{1}{\pi},0)$ y que no interseca a S (del Ejemplo 2.21) más que en esos dos puntos. Sea $V = S \cup l$, a V le llamaremos el Círculo de Varsovia. (Ver Figura 2.3)*

Este continuo cumple con ser arcoconexo y únicamente arcoconexo. Sin embargo, no es hereditariamente arcoconexo ya que S es uno de sus subcontinuos y éste no es arcoconexo.

A continuación nos fijaremos en un tipo especial de dendroides.

Definición 2.23 *Un dendroide X es una* ***dendrita*** *si X es localmente conexo.*

Algunos ejemplos de dendritas son los siguientes.

Ejemplo 2.24 *El intervalo $[0,1]$ es un dendroide localmente conexo, por tanto es una dendrita.*

Ejemplo 2.25 *Sea $F_\omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{(0,0)(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})}$. Este dendroide cumple con ser localmente conexo en todos sus puntos.*

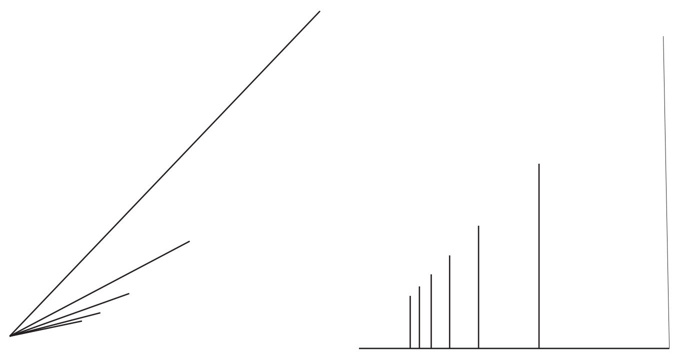

Figura 2.4: F_ω y Peine Nulo

Ejemplo 2.26 *Sea $P = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{(\frac{1}{n},0)(\frac{1}{n},\frac{1}{n})} \cup \overline{(0,0)(1,0)}$. A este continuo lo llamaremos el Peine Nulo.*

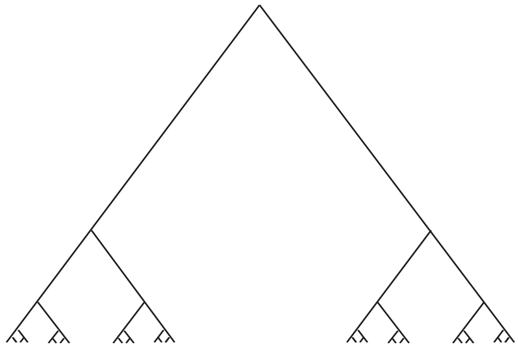

Figura 2.5: La dendrita de Gehman

Entonces P es una dendrita, ya que es localmente conexo en todos sus puntos y no contiene curvas cerradas simples.

Ejemplo 2.27 *La "Dendrita de Gehman", la cual se muestra en la Figura 2.5, es un dendroide localmente conexo en todos sus puntos.*

Teorema 2.28 *Sea X un continuo. Entonces X es una dendrita si y sólo si X es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si X es una dendrita, entonces es un dendroide localmente conexo. Se sigue del Lema 2.19 que X no contiene curvas cerradas simples.

$\Leftarrow$] Como X es un continuo localmente conexo, entonces X es arcoconexo (por el Teorema 1.16). Sólo falta ver que X es hereditariamente unicoherente. Supongamos que existen dos subcontinuos A, B de X tales que $A \cap B$ no es conexo. Tomemos una separación por cerrados $H \mid K$ de $A \cap B$. Como X es métrico existen abiertos ajenos U y V tales que $H \subset U$ y $K \subset V$. Debido a que $A - (U \cup V)$ y $B - (U \cup V)$ son cerrados y ajenos, existen abiertos ajenos W y Z tales que $A - (U \cup V) \subset W$ y $B - (U \cup V) \subset Z$. Luego $A \subset U \cup V \cup W$ y $B \subset U \cup V \cup Z$. Sean G y F las componentes de $U \cup V \cup W$ y $U \cup V \cup Z$ que contienen a A y B, respectivamente. Elegimos dos puntos $p \in H$ y $q \in K$. Como G y F son abiertos y conexos del espacio localmente conexo X, por el Teorema 1.16, G y F son arcoconexos. Por tanto existen arcos l y m de p a q tales que $l \subset G$ y $m \subset F$.

Si $l = m$, entonces $l = m \subset G \cap F \subset (U \cup V \cup W) \cap (U \cup V \cup Z) \subset U \cup V$. Esto implica que $l \subset U$ o $l \subset V$, lo que es absurdo. Entonces $l \neq m$. Esto implica que existen dos arcos distintos cuyos extremos coinciden, así que $l \cup m$ tiene una curva cerrada simple, lo cual también es absurdo. Por lo tanto $A \cap B$ es conexo. Esto prueba que X es hereditariemente unicoherente. ■

2.2. Convergencia en dendroides

En esta sección veremos un conjunto de definiciones que nos ayudarán a tener una noción más clara de lo que son los dendroides. Sin embargo, para poder hacer esto necesitamos tener bien claras las definiciones que a continuación se presentan.

Tomemos un continuo X. Recordemos que el **límite superior** y el **límite inferior** de una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en 2^X son los conjuntos:

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ \beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing \text{ para una infinidad de números } n\ \}.$$
$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para toda } \varepsilon > 0,\ \beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ excepto un número finito}\}.$$

Estos dos conjuntos nos ayudarán a tener más clara la noción de convergencia en un hiperespacio.

Lema 2.29 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Entonces* $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

Demostración. Sea $x \in \liminf A_n$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que la $\beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$ excepto un número finito, en especial se tiene que la $\beta_\varepsilon(x)$ interseca a A_n para una infinidad de números n. Así que $x \in \limsup A_n$. Por tanto $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. ■

Lema 2.30 *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Entonces* $\liminf A_n$ *es arcoconexo.*

Demostración. Tomemos dos puntos p y q en $\liminf A_n$ y supongamos que el arco pq no está totalmente contenido en $\liminf A_n$. Entonces existe un punto $x \in pq$ tal que $x \notin \liminf A_n$. De modo que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que el conjunto $J = \{n \in \mathbb{N} : \beta_{\varepsilon_0}(x) \cap A_n = \varnothing\}$ es infinito. Entonces podemos ordenar los elementos de J en una sucesión $n_1 < n_2 < \cdots$ Tomemos ahora la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dado que $C(X)$ es compacto [5, Corolario 4.3], existe una subsucesión $\{A_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento A en $C(X)$, es decir, $\lim_{j\to\infty} A_{n_{k_j}} = A$.

Ahora veamos que $p, q \in A$.

Como p y q están en $\liminf A_n$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$, entonces $\beta_\varepsilon(p) \cap A_n \neq \varnothing$ y $\beta_\varepsilon(q) \cap A_n \neq \varnothing$. Observemos que como $n_j \geq j$, para toda $j \in \mathbb{N}$, tenemos que para toda $j > N$, $\beta_\varepsilon(p) \cap A_{n_{k_j}} \neq \varnothing$ y $\beta_\varepsilon(q) \cap A_{n_{k_j}} \neq \varnothing$. Lo que implica que $p, q \in \liminf A_{n_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} A_{n_{k_j}} = A$. Por tanto p y q están en A y la afirmación queda probada.

Como $A \in C(X)$, por el Teorema 2.17, se tiene que A es un dendroide. Entonces A es arcoconexo, así que $pq \subset A$, luego $x \in A$, ya que $x \in pq$.

Hemos visto que $x \in \lim_{j\to\infty} A_{n_{k_j}} = \liminf A_{n_{k_j}}$. Entonces para $\varepsilon_0 > 0$ se cumple que $\beta_{\varepsilon_0}(x) \cap A_{n_{k_j}} \neq \varnothing$ para toda $j \in \mathbb{N}$ excepto un número finito. Esto es una contradicción pues supusimos que $\beta_{\varepsilon_0}(x) \cap A_{n_{k_j}} = \varnothing$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $pq \subset \liminf A_n$. Esto muestra que $\liminf A_n$ es arcoconexo. El lema queda probado. ■

Lema 2.31 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$, entonces* $\liminf A_n$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\liminf A_n$ que converge a un punto $q \in X$. Probaremos que $q \in \liminf A_n$.

Tomemos un abierto U que contiene a q. Dado que $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a q, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, toda $m > N$ cumple que $q_m \in U$, entonces U es un abierto que contiene a q_m para toda $m > N$. Sabemos que $q_{N+1} \in \liminf A_n$, así que $U \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \in N$ excepto un número finito. Dado que U es cualquier abierto que contiene a q, concluimos que $q \in \liminf A_n$. Hemos probado que $\liminf A_n$ es cerrado. ■

Lema 2.32 *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Si* $\liminf A_n \neq \varnothing$, *entonces* $\liminf A_n$ *es un dendroide.*

Demostración. Por el Lema 2.30, $\liminf A_n$ es arcoconexo, lo que implica que $\liminf A_n$ es conexo. Por el Lema 2.31, $\liminf A_n$ es cerrado en X, el cual es compacto. Así que $\liminf A_n$ es compacto. Además $\liminf A_n$ es no vacío por hipótesis. De esta forma deducimos que $\liminf A_n$ es un subcontinuo de X. Por el Teorema 2.17 tenemos que $\liminf A_n$ es un dendroide. ■

Lema 2.33 *Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$, entonces* $\limsup A_n$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\limsup A_n$ que converge a un punto q. Probaremos que $q \in \limsup A_n$.

Tomemos un abierto U que contiene a q. Dado que $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a q entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que toda $m > N$ cumple que $q_m \in U$, entonces U es un abierto que contiene a q_m para toda $m > N$. Sabemos que $q_{N+1} \in \limsup A_n$, así que $U \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$. Dado que U es cualquier abierto que contiene a q tenemos que $q \in \limsup A_n$. Hemos probado que $\limsup A_n$ es cerrado. ■

Lema 2.34 *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Si* $\liminf A_n \neq \varnothing$, *entonces* $\limsup A_n$ *es conexo.*

Demostración. Sea $A = \liminf A_n$. Por el Lema 2.32 tenemos que A en un subdendroide de X.

Supongamos, por el contrario, que $\limsup A_n$ no es conexo. Entonces existen dos abiertos ajenos U y V tales que $U \cap [\limsup A_n] \neq \varnothing$ y $V \cap [\limsup A_n] \neq \varnothing$ y, además, $\limsup A_n \subset U \cup V$. Por el Lema 2.30 sabemos que A es conexo y, por hipótesis, es no vacío. Así que, $A \subset U$ o $A \subset V$.

Supongamos que $A \subset U$. Tomemos un punto $u \in A \subset U$ y otro punto $v \in [\limsup A_n] \cap V$. Dado que U es un abierto que contiene a u y $u \in A = \liminf A_n$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > M$ se tiene que $U \cap A_n \neq \varnothing$.

Como V es un abierto que contiene a v y $v \in \limsup A_n$, tenemos que el conjunto $J = \{n \in \mathbb{N} : V \cap A_n \neq \varnothing\}$ es infinito. Podemos ordenar los elementos de J en una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde $n_1 < n_2 < \cdots$ de modo que la subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $V \cap A_{n_k} \neq \varnothing$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

De esta forma, para toda $n_k > M$, tenemos que $U \cap A_{n_k} \neq \varnothing$ y $V \cap A_{n_k} \neq \varnothing$. Notemos que U y V no pueden ser una separación de A_{n_k} ya que cada A_{n_k} es conexo. De modo que $A_{n_k} - (U \cup V) \neq \varnothing$ para toda $n_k > M$.

Sea $K = \{k \in \mathbb{N} : n_k > M\}$. Dado que $K \subset \mathbb{N}$ tenemos que tiene un primer elemento k_0. Tomemos una sucesión $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en X tal que $r_j \in A_{n_{k_0+j}} - (U \cup V)$. Supongamos que $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $r \in X - (U \cup V)$. Esto es posible ya que $X - (U \cup V)$ es cerrado en X, lo que implica que $X - (U \cup V)$ es compacto.

Probaremos que $r \in \limsup A_n$.

Sea W un abierto de X que contiene a r. Como $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a r, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que toda $j > N$ cumple que $r_j \in W$. Esto implica que $W \cap A_{n_{k_0+j}} \neq \varnothing$ para toda $j > N$. Se sigue que $W \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de números n. Por tanto $r \in \limsup A_n$.

Hemos encontrado un punto $r \in \limsup A_n$ tal que $r \notin U \cup V$. Esto contradice el hecho de que $\limsup A_n \subset U \cup V$. Esta contradicción surgió de suponer que existe una separación del $\limsup A_n$. El caso en que $A \subset B$ se resuelve de forma similar. Por tanto $\limsup A_n$ es conexo. ■

Lema 2.35 *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Si* $\liminf A_n \neq \varnothing$, *entonces* $\limsup A_n$ *es dendroide.*

Demostración. Por los Lemas 2.33 y 2.34, $\limsup A_n$ es compacto y conexo. Como por hipótesis $\varnothing \neq \liminf A_n \subset \limsup A_n$, tenemos que $\limsup A_n \neq \varnothing$. Por el Teorema 2.17 se concluye que $\limsup A_n$ es un dendroide. ■

Lema 2.36 *Sean X un dendroide y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$. Si* $p \in \limsup A_n$, *entonces existen una subsucesión $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X tales que $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a p y $p_i \in A_{n_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $p \in \limsup A_n$. Construyamos las sucesiones deseadas.

Sabemos que $\beta_{\frac{1}{i}}(p)$ es abierta para toda $i \in \mathbb{N}$. De modo que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\beta_{\frac{1}{i}}(p)$ interseca a A_n para una infinidad de números n. Escojamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_1(p) \cap A_{n_1} \neq \varnothing$ y tomemos un punto p_1 de dicha intersección.

Dado que $\beta_{\frac{1}{2}}(p) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de números n, es posible tomar $n_2 \in \mathbb{N}$, que cumpla que $n_2 > n_1$, $\beta_{\frac{1}{2}}(p) \cap A_{n_2} \neq \varnothing$. Tomemos $p_2 \in \beta_{\frac{1}{2}}(p) \cap A_{n_2}$.

Para el paso i-ésimo. Tomemos $n_i \in \mathbb{N}$, que cumpla que $n_i > n_{i-1} > \cdots > n_1$, tal que $\beta_{\frac{1}{i}}(p) \cap A_{n_i} \neq \varnothing$ y un punto $p_i \in \beta_{\frac{1}{i}}(p) \cap A_{n_i}$.

Hemos construido una subsucesión $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X. Observemos que las p_i convergen a p y que $p_i \in A_{n_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por tanto el lema queda probado. ■

Sea X un continuo. Recordemos que, en los preliminares, dijimos que una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, en $C(X)$, converge cuando $\limsup A_n = \liminf A_n$ y cuando esto ocurre, a este conjunto lo denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Por otra parte, también se puede definir la convergencia de la suceción $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ usando la métrica de Hausdorff. En el siguiente teorema veremos que las dos formas de definir convergencia coinciden.

Teorema 2.37 *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ y A en $C(X)$. Entonces $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, $H(A_n, A) < \varepsilon$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que el $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup A_n = \liminf A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Así, si $x \in A$, entonces $\beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$ excepto un número finito. Así existe $L \in \mathbb{N}$ tal que si $n > L$, entonces $\beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$. Tomemos $n > L$. Luego existe $x_n \in A_n$ tal que $x_n \in \beta_\varepsilon(x) \cap A_n$, De modo que $x \in \beta_\varepsilon(x_n) \subset N(\varepsilon, A_n)$. Por tanto $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$.

Probaremos ahora que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$.

Sea $P = \{n \in \mathbb{N} : A_n \subsetneq N(\varepsilon, A)\}$. Tenemos que probar que P es finito.

Supongamos que P es infinito. De modo que para cada $n \in P$, existe $x_n \in A_n - N(\varepsilon, A)$. Sabemos que X es compacto, de modo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in P}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto x_0. Entonces, para toda $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i > N$, $x_{n_i} \in \beta_\delta(x_0)$. Esto implica que $x_0 \in \limsup A_n = A$. Además para ε, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_i} \in \beta_\varepsilon(x_0) \subset N(\varepsilon, A)$. Lo que contradice la elección de x_{n_i}. Esta contradicción surgió de suponer que P es infinito, lo que implica que es finito. Por tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$, entonces $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Elijamos $N = \max\{L, M\}$. Entonces tenemos que, si $n > N$, $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$. Por tanto, $H(A_n, A) < \varepsilon$.

$\Leftarrow]$ Ahora supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Sean $x \in A$ y $\eta > 0$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, $A_n \subseteq N(\eta, A)$ y $A \subseteq N(\eta, A_n)$.

Tomemos $n > N$. Dado que $A \subseteq N(\eta, A_n)$, tenemos que $\beta_\eta(x) \cap A_n \neq \varnothing$. Así que $x \in \liminf A_n$.

Como $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$, resulta que $x \in \limsup A_n$. Luego $A \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

Sea $y \in \limsup A_n$. Probaremos que $y \in \overline{A} = A$.

Para esto tomemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, $H(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $P_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{n \in \mathbb{N} : \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap A_n \neq \varnothing\}$. Dado que $y \in \limsup A_n$, $P_{\frac{\varepsilon}{2}}$ es infinito. Tomemos ahora $n \in P_{\frac{\varepsilon}{2}}$ tal que $n > N$ y $x \in \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap A_n$. Entonces

$A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Lo que implica que existe $a \in A$ tal que $a \in \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Por la desigualdad del triángulo $d(a,y) \leq d(a,z) + d(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Con esto hemos probado que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset B_\varepsilon(y)$.

Hemos probado que para toda $\varepsilon > 0$, $\beta_\varepsilon(y) \cap A \neq \varnothing$. Luego $y \in \overline{A} = A$. De modo que $\limsup A_n \subseteq A$. Concluimos que $A \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq A$. Por tanto $A = \limsup A_n = \liminf A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. ■

Lema 2.38 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Supongamos que existen dos sucesiones de números naturales $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ y $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tales que $\{m_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{k_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Además supongamos que $\lim\limits_{i\to\infty} A_{m_i} = A$ y $\lim\limits_{j\to\infty} A_{k_j} = B$. Entonces* $\limsup A_n = A \cup B$.

Demostración. Observemos que $A \cup B \subset [\lim\limits_{i\to\infty} A_{m_i}] \cup [\lim\limits_{j\to\infty} B_{k_j}] = [\limsup A_{m_i}] \cup [\limsup B_{k_j}] \subset \limsup A_n$. De modo que $A \cup B \subseteq \limsup A_n$.

Ahora veamos que $\limsup A_n \subseteq A \cup B$.

Sea $y \in \limsup A_n$. Para cada $\eta > 0$ definamos $F_\eta = \{i \in \mathbb{N} : \beta_\eta(y) \cap A_{m_i} \neq \varnothing\}$ y $G_\eta = \{j \in \mathbb{N} : \beta_\eta(y) \cap A_{k_j} \neq \varnothing\}$. Analizaremos tres casos.

Caso 1. Para toda $\eta > 0$, F_η es infinito.

Entonces, para cada $\eta > 0$, $\beta_\eta(y) \cap A_{m_i} \neq \varnothing$ para una infinidad de números i. Así que $y \in \limsup A_{m_i} = A$.

Caso 2. Para toda $\eta > 0$, G_η es infinito.

Por el mismo argumento $y \in \limsup A_{k_j} = B$.

Caso 3. Existen $\eta_1 > 0$ y $\eta_2 > 0$ tales que F_{η_1} es finito y G_{η_2} es finito.

Sea $\eta_0 = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Entonces F_{η_0} y G_{η_0} son finitos. De modo que $\{m_i : i \in F_{\eta_0}\}$ y $\{k_j : j \in G_{\eta_0}\}$ son finitos. Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{m_i : i \in F_{\eta_0}\} \cup \{k_j : j \in G_{\eta_0}\} \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Dada $n > N$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n = m_i$ o existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n = k_j$. En el primer caso $i \notin F_{\eta_0}$, así que $\beta_{\eta_0}(y) \cap A_n = \varnothing$. En el segundo caso $j \notin G_{\eta_0}$, y entonces $\beta_{\eta_0}(y) \cap A_n = \varnothing$. Hemos mostrado que $\beta_{\eta_0}(y) \cap A_n = \varnothing$ para toda $n > N$. Esto es absurdo porque $y \in \limsup A_n$. Por tanto, este caso no se puede dar.

Con esto termina la prueba del lema. ■

Lema 2.39 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Supongamos que existen dos sucesiones de números naturales $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ y $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tales que $\{m_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{k_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Además supongamos que $\lim\limits_{i\to\infty} A_{m_i} = A$ y $\lim\limits_{j\to\infty} A_{k_j} = B$. Entonces* $\liminf A_n = A \cap B$.

Demostración. Sea $x \in A \cap B$. Entonces $x \in \lim_{i\to\infty} A_{m_i} = \liminf A_{m_i}$ y $x \in \lim_{j\to\infty} A_{k_j} = \liminf A_{k_j}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que toda $i > N$ cumple que $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{m_i} \neq \varnothing$ y existe $L \in \mathbb{N}$ tal que toda $j > L$ cumple que $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{k_j} \neq \varnothing$. Sea $M = \max\{m_N, n_L\}$.

Recordemos que $\{m_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{k_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$, tenemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n = m_i$ o existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n = k_j$. Si $n = m_i$, entonces $m_i > M \geq m_N$, así que $i > N$, de modo que $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{m_i} \neq \varnothing$. Si $n = k_j$, entonces $j > L$, de modo que $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{k_j} \neq \varnothing$.

Por tanto, para toda $n > M$, tenemos que $\beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$. Como ε fue arbitraria, concluimos que $x \in \liminf A_n$. Esto implica que $A \cap B \subseteq \liminf A_n$.

Sean $y \in \liminf A_n$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > M$, $\beta_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$. Tomemos $N, L \in \mathbb{N}$ tales que $m_N > M$ y $k_L > M$. De modo que para toda $i > N$ y toda $j > L$, $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{m_i} \neq \varnothing$ y $\beta_\varepsilon(x) \cap A_{k_j} \neq \varnothing$. Se sigue que $y \in \liminf A_{m_i} = \lim_{i\to\infty} A_{m_i} = A$ y $y \in \liminf A_{k_j} = \lim_{j\to\infty} A_{k_j} = B$. Luego $y \in A \cap B$.

En conclusión, $\liminf A_n \subseteq A \cap B$.

Por tanto $\liminf A_n = A \cap B$. ■

Capítulo 3

Suavidad y Propiedades Derivadas

3.1. Dendroides Suaves

En este capítulo comenzaremos con la parte medular de este trabajo. Veremos cuatro definiciones que, a pesar de su similitud, no son equivalentes. Sin embargo, es posible encontrar nexos entre ellas. Es necesario tener clara la noción de convergencia en un hiperespacio para comprender dichas definiciones.

Definición 3.1 *Se dice que un* ***dendroide*** X ***es suave*** *si existe un punto* $p \in X$ *tal que para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *que converge a un punto* $x \in X$*, la sucesión de arcos* $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al arco* px*. Al punto* p *le llamaremos* ***punto inicial*** *de* X*. Diremos que* X ***es suave en*** p*, si* p *es punto inicial de* X*.*

Remark 1 *En la definición anterior hablamos de convergencia de arcos, esta convergencia la tomaremos en* $C(X)$ *con la métrica de Hausdorff (Ver Definición 1.8). De igual forma se considerará esta métrica cuando se hable de subcontinuos de un dendroide* X*.*

Ejemplo 3.2 *Un intervalo* $[a, b]$ *es suave. Este dendroide tiene la peculiaridad de que todos sus puntos son iniciales.*

El siguiente lema nos ayudará a tener una noción de cercanía entre arcos. Por ello recurriremos a él en varias ocasiones.

Lema 3.3 *Sean p, q, u y v puntos en $[0,1]^2$. Sean $\overline{pu}$ y $\overline{qv}$ los segmentos de recta que unen a p con u y a q con v, respectivamente. Si $d(p,q) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(u,v) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $H(\overline{pu}, \overline{qv}) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sean p, q, u y v puntos en $[0,1]^2$ tales que $d(p,q) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(u,v) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sabemos que los puntos de $\overline{pu}$ son de la forma $tu + (1-t)p$ con $t \in [0,1]$ y los puntos de $\overline{qv}$ son de la forma $tv + (1-t)q$ con $t \in [0,1]$.

Probaremos que $\overline{pu} \subset N(\varepsilon, \overline{qv})$ y que $\overline{qv} \subset N(\varepsilon, \overline{pu})$.

Fijemos $t_0 \in [0,1]$. Tomemos el punto $t_0u + (1-t_0)p$ en $\overline{pu}$. Entonces

$$\|t_0u + (1-t_0)p - [t_0v + (1-t_0)q]\|$$

$$\begin{aligned} &\leq |t_0|\,\|u-v\| + |1-t_0|\,\|p-q\| \\ &\leq \|u-v\| + \|p-q\| < \varepsilon \end{aligned}$$

De modo que el punto $t_0u + (1-t_0)p$ pertenece a la $\beta_\varepsilon([t_0v + (1-t_0)q]) \subset N(\varepsilon, \overline{qv})$. Así que $\overline{pu} \subset N(\varepsilon, \overline{qv})$.

De forma análoga se prueba que $\overline{qv} \subset N(\varepsilon, \overline{pu})$. Se sigue la desigualdad deseada. ■

Ejemplo 3.4 *El abanico armónico es suave.*

Probaremos que $p = (0,0)$ es un punto inicial de X_∞. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X_∞ que converja a un punto $x \in X_\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n > N$, $x_n \in \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Por el Lema 3.3 se tiene que, para toda $n > N$, $H(px, px_n) < \varepsilon$. De modo que la sucesión de arcos $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco px. Por tanto p es un punto inicial de X_∞.

Definición 3.5 *Sea $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función continua. Entonces μ* ***es función de Whitney*** *si cumple que*

i) $\mu(\{0\}) = 0$ para toda $x \in X$

ii) Si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Observemos que con este tipo de funciones se está dando un orden parcial dentro de 2^X.

Teorema 3.6 *Si X es un dendroide suave, con punto inicial p, entonces X es localmente conexo en p.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y definamos $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ por $\varphi(x) = \mu(xp)$.

Afirmación 1: La función φ es continua.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Dado que p es punto inicial de X, la sucesión de arcos $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al arco px. Como μ es continua, esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(x_n p) = \mu(xp)$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(x_n p)$. Por definición $\mu(xp) = \varphi(x)$, así que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

Se ha probado la afirmación.

Para $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto $D_\varepsilon = \{x \in X : \varphi(x) < \varepsilon\}$.

Afirmación 2: El conjunto D_ε es no vacío, abierto y conexo.

Sabemos que D_ε es no vacío ya que $\varphi(p) = 0$, lo que implica que $p \in D_\varepsilon$.

Observemos que $D_\varepsilon = \varphi^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. Dado que φ es continua y $(-\infty, \varepsilon)$ es abierto en $[0,1]$, tenemos que D_ε es abierto en X.

Ahora veremos que D_ε es conexo. Observemos que si $x \in D_\varepsilon$, entonces para toda $y \in xp$ se tiene que $yp \subset xp$, lo que implica que $\varphi(y) = \mu(yp) \leq \mu(xp) = \varphi(x)$. Así que $xp \subset D_\varepsilon$. Luego $D_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in D_\varepsilon} xp$. Dado que xp es conexo y $p \in xp$ para toda $x \in D_\varepsilon$, deducimos que $D_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in D_\varepsilon} xp$ es conexo. La Afirmación 2 queda probada.

Por último veremos que $\{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es una base local en p.

Sea U un abierto tal que $p \in U$. Tomemos $\gamma > 0$ tal que $\overline{B_\gamma(p)} \subset U$. Sea D la frontera de $B_\gamma(p)$. Si $D = \varnothing$, como X es conexo , tenemos que $\beta_\gamma(p) = X$, así que $U = X$. Entonces $D_\varepsilon \subset U$ pare cualquier $\varepsilon > 0$. Supongamos entonces que $D \neq \varnothing$. Como D es cerrado en X, entonces es compacto. Además φ es continua, lo que implica que φ alcanza y su mínimo en D. Tomemos $\eta_0 = \min\{\varphi(x) : x \in D\}$ y sea $\eta > 0$ tal que $\eta < \eta_0$.

Veamos que $D_\eta \subset \overline{B_\gamma(p)}$.

Sea $x \in D_\eta$. Entonces $\varphi(x) < \eta$. Dado que para toda $y \in px$ se tiene que $\varphi(y) = \mu(py) \leq \mu(px) = \varphi(x) < \eta$, tenemos que $xp \cap D = \emptyset$. Como xp es un conexo que interseca a $B_\gamma(p)$ y no interseca a su frontera, $xp \subset B_\gamma(p)$. Esto muestra que $D_\eta \subset \beta_\gamma(p)$. Por lo tanto $\{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es una base de conexos en p. Así que X es localmente conexo en p. ■

Lema 3.7 *Sean X un dendroide, p y x puntos en X y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Supongamos que X es localmente conexo en x. Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} px_n = px$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, p y x puntos arbitrarios en X y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x. Como X es localmente conexo en x, entonces existe un abierto y conexo U tal que $x \in U \subset \beta_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)$. Notemos que $diam(\overline{U}) < \varepsilon$. Dado que $\overline{U}$ es compacta y conexa en X, tenemos que $\overline{U}$ es un subcontinuo de X, como X es un dendroide, por el Teorema 2.17, tenemos que $\overline{U}$ es un subdendroide de X. Observemos que como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$, $x_n \in U \subset \overline{U}$.

Probaremos que $H(px, px_n) < \varepsilon$ para toda $n > N$.

Tomemos $n > N$. Sabemos que $px \cup \overline{U}$ es un subdendroide de X. Además $px \cup \overline{U}$ contiene a p y a x_n. Lo que implica que $px_n \subset px \cup \overline{U}$. Observemos que $px \cup \overline{U} \subset N(\varepsilon, px)$, se sigue que $px_n \subset N(\varepsilon, px)$.

Tomemos en cuenta que $px_n \cup \overline{U}$ es un dendroide que contiene a los puntos p y x. Así que $px \subset px_n \cup \overline{U}$. Como $\overline{U} \subset \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \subset N(\varepsilon, px_n)$, entonces $px_n \cup \overline{U} \subset N(\varepsilon, px_n)$. De modo que $px \subset N(\varepsilon, px_n)$.

Hemos probado que para toda $n > N$ se cumple que $px_n \subset N(\varepsilon, px)$ y $px \subset N(\varepsilon, px_n)$. Por tanto $H(px, px_n) < \varepsilon$, para toda $n > N$.

Luego la sucesión $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a px. ■

Lema 3.8 *Si X es una dendrita, entonces X es suave en todos sus puntos.*

Demostración. Tomemos $p, x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a X. Dado que X es localmente conexo en p, por el lema anterior, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} px_n = px$. Se sigue que p es un punto inicial, es decir, X es suave en p. Dado que p fue un punto arbitrario tenemos que X es suave en todos sus puntos. ■

3.2. Dendroides semisuaves

Definición 3.9 *Se dice que un **dendroide** X **es semisuave** si existe $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a un punto x en X, se tiene que $\limsup px_n$ es un arco o el conjunto $\{p\}$. Al punto p se le llamará un punto de semisuavidad de X.*

Veamos que el que un dendroide sea suave implica que es semisuave. Sin embargo, si un dendroide es semisuave, no necesariamente es suave.

Lema 3.10 *Si X es un dendroide suave, entonces X es semisuave. Además, si p es un punto inicial de X, entonces p es un punto de semisuavidad de X.*

Demostración. Como X es un dendroide suave, existe $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} px_n = px$. En especial, $\lim\limits_{n\to\infty} px_n = \limsup px_n = px$ o $px = \{p\}$ (en el caso $x = p$) y px es un arco. Hemos probado además que p es un punto de semisuavidad. ■

Veremos un ejemplo en el que se demuestra que el recíproco del lema anterior no es cierto, es decir, que un dendroide puede ser semisuave sin ser suave. Antes de ello veremos dos lemas que nos ayudarán a comprender mejor dicho ejemplo.

A continuación veremos un ejemplo de un dendroide que no es suave pero que es semisuave.

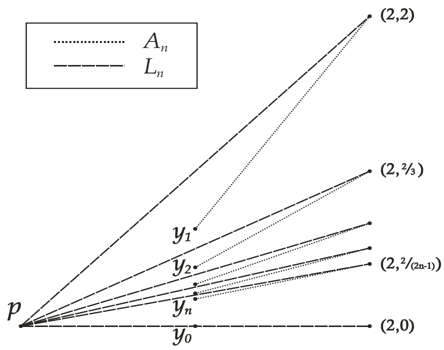

Figura 3.1: Dendroide semisuave que no es suave.

Ejemplo 3.11 *Sean* $A_n = \overline{\left(1, \frac{1}{2n}\right)\left(2, \frac{2}{2n-1}\right)}$ *y* $L_n = \overline{(0,0)\left(2, \frac{2}{2n-1}\right)}$. *Sea*

$$Y = ([0,2] \times \{0\}) \cup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cup L_n]\}.$$

El contnuo Y se muestra en la Figura 3.1. Observemos que $([0,2] \times \{0\}) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n)$ es homeomorfo al abanico armónico X_∞, del Ejemplo 3.4. Así que a lo largo de la explicación de este ejemplo nos referiremos a $([0,2] \times \{0\}) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n)$ como X_∞. Entoces $Y = X_\infty \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Es fácil ver que Y es un dendroide.

Afirmación 1: Y no es suave.

Para ver esto tomemos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $y_n = \left(1, \frac{1}{2n}\right)$. Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (1,0)$. Definamos $y_0 = (1,0)$.

Supongamos que existe un punto inicial $p \in Y$.

(i) Si $p \in \overline{y_0(2,0)} = \overline{(1,0)(2,0)}$ entonces $(0,0) \notin \overline{y_0 p}$. Observemos que $\lim_{n\to\infty} y_n p = \overline{(0,0)(2,0)}$. Luego $\lim_{n\to\infty} y_n p \neq \overline{y_0 p}$. En este caso se obtiene que p no puede ser el punto inicial para Y.

(ii) Si $p \in Y - \overline{y_0(2,0)}$, entonces $(2,0) \notin \overline{y_0 p}$. Observemos que $\overline{(0,0)(2,0)} \subseteq \lim_{n\to\infty} y_n p$. Luego $\lim_{n\to\infty} y_n p \neq \overline{y_0 p}$. Así que p no es punto inicial para Y.

De los dos casos anteriores se concluye que si p es un punto inicial para Y entonces p no puede estar en $\overline{y_0(2,0)}$ o en $Y - \overline{y_0(2,0)}$. Así que Y no tiene puntos iniciales. Luego, Y no es un dendroide suave.

Afirmación 2: Y es un dendroide semisuave.

Para esto probaremos que $p = (0,0)$ es un punto de semisuavidad de Y.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y que converge a un punto x_0. Haremos la prueba por casos.

(i) Y es localmente conexo en x_0.

Por el Lema 3.7 tenemos que $\lim_{i\to\infty} px_i = px$, así $\limsup px_i = px$ es un arco.

(ii) Y no es localmente conexo en x_0.

Entonces $x_0 \in ([0,2]\times\{0\}) - \{p\}$.

Nuestra meta es probar que $\limsup px_i$ es un arco. Usaremos el Lema 2.38.

Sean $J = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in X_\infty\}$ y $K = \{i \in \mathbb{N} :$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in A_n\}$. Notemos que $J \cup K = \mathbb{N}$.

En el caso en que J es infinito podemos ordenar los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que la subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Recordemos que X_∞ es suave y p es un punto de suavidad de X_∞. Por el Lema 3.10 tenemos que $\limsup px_{i_j} = \lim_{j\to\infty} px_{i_j} = px_0$.

Ahora veamos qué ocurre cuando K es infinito.

En este caso podemos ordenar los elementos de K en una subsucesión $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que la subsucesión $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Para cada $k \in K$, sea $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_k} \in A_{n_k}$.

Observemos que $x_{i_k}p = \overline{x_{i_k}(2, \frac{2}{2n_k-1})} \cup \overline{(2, \frac{2}{2n_k-1})p}$. En este caso tenemos que $x_{i_k} \in \overline{(1, \frac{1}{2n_k})(2, \frac{2}{2n_k-1})}$. La recta que contiene a $(1, \frac{1}{2n_k})$ y $(2, \frac{2}{2n_k-1})$ tiene pendiente positiva, de modo que el punto $(2, \frac{2}{2n_k-1})$ es el más alejado del eje x y $(1, \frac{1}{2n_k})$ es el más cercano al eje x. De modo que, si $(z, w) \in \overline{(1, \frac{1}{2n_k})(2, \frac{2}{2n_k-1})}$, entonces $1 \leq z \leq 2$ y $\frac{1}{2n_k} \leq w \leq \frac{2}{2n_k-1}$. De igual forma, la recta que contiene a $(2, \frac{2}{2n_k-1})$ y p tiene pendiente positiva, de modo que en esta recta, el punto $(2, \frac{2}{2n_k-1})$ es el más alejado del eje x. Así, si $(z, w) \in \overline{(2, \frac{2}{2n_k-1})p}$, entonces $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq w \leq \frac{2}{2n_k-1}$. De modo que, si $x = (z, w) \in \overline{(1, \frac{1}{2n_k})p}$, entonces $0 \leq w \leq \frac{2}{2n_k-1}$.

Probaremos que $\overline{(2,0)p} = \lim\limits_{k\to\infty} px_{i_k}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = x_0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k > K$, $x_{i_k} \in \beta_\varepsilon(x_0)$. Tomemos $k > K$. Escribiremos $x_{i_k} = (z_k, w_k)$. Por lo visto anteriormente, tenemos que

$$\frac{1}{2n_k} \leq w_k < \varepsilon$$

Dado que $2n_k - 1 > n_k$, tenemos que

$$\frac{2}{2n_k - 1} < \frac{2}{n_k} < 4\varepsilon$$

Ahora probemos que $px_{i_k} \subset N(4\varepsilon, \overline{(2,0)p})$ y que $\overline{(2,0)p} \subset N(4\varepsilon, px_{i_k})$.

Si $(z, w) \in px_{i_k}$, entonces $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq w \leq \frac{2}{2n_k-1} \leq 4\varepsilon$. Luego $(z, w) \in \beta_{4\varepsilon}((z, 0)) \subset N(4\varepsilon, \overline{(2,0)p})$. Por tanto $px_{i_k} \subset N(4\varepsilon, \overline{(2,0)p})$.

Si $(u, 0) \in \overline{(2,0)p}$, tomemos el punto $(u, \frac{u}{2n_k-1})$. Observemos que $(u, \frac{u}{2n_k-1}) \in \overline{(2, \frac{2}{2n_k-1})p}$ y $\frac{u}{2n_k-1} \leq \frac{1}{2n_k-1} < 4\varepsilon$. De modo que $(u, 0) \in \beta_{4\varepsilon}((u, \frac{u}{2n_k-1})) \subset N(4\varepsilon, px_{i_k})$.

Por tanto $H(\overline{(2,0)p}, px_{i_k}) < 4\varepsilon$ para toda $k > K$. En conclusión $\overline{(2,0)p} = \lim\limits_{k\to\infty} px_{i_k}$.

Ahora revisemos las posibles combinaciones para los conjuntos J y K. Como $J \cup K = \mathbb{N}$, al menos uno de ellos es infinito.

Caso 1. J es infinito y K es finito.

Como antes, ordenamos los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Ya que K es finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Dado $y \in \limsup px_i$ y dada $\varepsilon > 0$, $\{i \in \mathbb{N} : \beta_\varepsilon(y) \cap px_i \neq \varnothing\}$ es infinito. De manera que $\{i \in \mathbb{N} : i > N$ y $\beta_\varepsilon(y) \cap px_i \neq \varnothing\}$ es infinito. Como $\{i \in \mathbb{N} : i > N\} \subset \{i_j : j \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $\{j \in \mathbb{N} : \beta_\varepsilon(y) \cap px_{i_j} \neq \varnothing\}$ es infinito. Esto prueba que $y \in \limsup px_{i_j}$. Por tanto $\limsup px_i \subseteq \limsup px_{i_j}$. Por el Lema 2.38, claramente $\limsup px_{i_j} \subseteq \limsup px_i$. Por tanto $\limsup px_i = \limsup px_{i_j} = px_0$ (esta última igualdad ya la habíamos probado).

En conclusión $\limsup px_i = px_0$.

Caso 2. J es finito y K es infinito.

Este caso es similar al Caso 1 y la conclusión es que $\limsup px_i = \overline{(2,0)p}$.

Caso 3. J es infinito y K es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y los elementos de K en una subsucesión $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Anteriormente analizamos qué sucede cuando J es infinito y obtuvimos que $\lim_{j\to\infty} px_{i_j} = px_0$. De igual forma analizamos el caso en que K es infinito y concluimos que $\lim_{k\to\infty} px_{m_k} = \overline{(2,0)p}$.

Recordemos que $x_0 \in ([0,2]\times\{0\}) - \{p\} = \overline{(2,0)p} - \{p\}$. Por el Lema 2.38 tenemos que

$$\limsup px_i = [\lim_{k\to\infty} px_{m_k}] \cup [\lim_{j\to\infty} px_{i_j}] = px_0 \cup \overline{(2,0)p} = \overline{(2,0)p}$$

En los tres casos tenemos que $\limsup px_i$ es un arco.

Hemos probado que, independientemente de la elección de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\limsup px_i$ es un arco. Por tanto p es un punto de semisuavidad de Y. Luego Y es un dendroide semisuave.

Teorema 3.12 *Sea X un dendroide no semisuave. Si Y es un dendroide tal que $X \in C(Y)$, entonces Y no es semisuave.*

Demostración. Supongamos que existe un punto de semisuavidad p en Y. Por el Teorema 2.20 existe un punto r en X tal que $r \in px$ para toda $x \in X$ y $pr \cap X = \{r\}$.

Dado que X no es semisuave, tenemos que r no es un punto de semisuavidad de X. Luego existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a un punto $x_0 \in X$, tal que $\limsup rx_i$ no es un arco y tampoco es un conjunto de un solo elemento.

De modo que

$$\limsup px_i = \limsup(pr \cup rx_i) = pr \cup [\limsup rx_i]\,.$$

Como $r \in \liminf rx_i$, por el Lema 2.35, tenemos que $\limsup rx_i$ es un dendroide. Además sabemos que $\limsup rx_i$ no es un arco. Ya que $\limsup rx_i \subset \limsup px_i$, éste último tampoco puede ser un arco.

Hemos encontrado una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para la cual $\limsup px_i$ no es un arco. Esto contradice el hecho de que p sea un punto de semisuavidad en Y.

Luego no existe un punto de semisuavidad $p \in Y$. Por tanto Y no es semisuave. ■

3.3. Dendroides Débilmente Suaves

Definición 3.13 *Se dice que un* ***dendroide*** X ***es débilmente suave*** *si existe $p \in X$ tal que toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, que converge a un punto x, cumple que $\liminf px_n = py$ para alguna $y \in X$. Al punto p le llamaremos un punto de suavidad débil de X.*

Lema 3.14 *Si X es un dendroide suave, entonces X es débilmente suave. Además un punto p de suavidad de X es un punto de suavidad débil de X.*

Demostración. Dado que existe $p \in X$, tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converge a x, los arcos px_n convergen a px, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} px_n = \liminf px_n = px$. Luego los arcos px_n convergen a un arco de la forma px. Dado que el punto x y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fueron arbitrarios, tenemos que p es un punto de suavidad débil. ■

Ahora veremos que el recíproco del Lema 3.14 no es cierto. Es decir, mostraremos un dendroide débilmente suave que no es suave.

Ejemplo 3.15 *Sean $A_n = \overline{(-2,0)(-1,\frac{1}{n})}$, $B_n = \overline{(1,\frac{1}{n})(2,0)}$ y $A = \overline{(-2,0)(2,0)}$. Sea $X = \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)\right] \cup A$. Entonces X es un dendroide. (ver Figura 3.2)*

Observemos que $\overline{(-2,0)(-1,0)} \cup [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n]$ es homeomorfo a X_∞. Así que nos referiremos a $\overline{(-2,0)(-1,0)} \cup [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n]$ como X_∞

Afirmación 1: X es un dendroide débilmente suave.

Mostraremos que el punto $p = (0,0)$ es un punto de suavidad débil de X.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a un punto x_0. Veamos los casos posibles.

(i) X es localmente conexo en x_0.

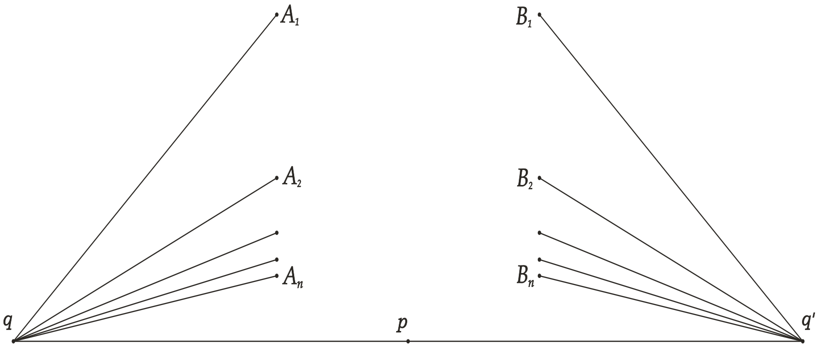

Figura 3.2: Dendroide débilmente suave que no es suave

Por el Lema 3.7 tenemos que $\liminf px_i = \lim_{i\to\infty} px_i = px_0$.

(ii) X no es localmente conexo en x_0.

.

Entonces $x_0 \in \overline{(-2,0)(-1,0)} - \{(-2,0)\}$ o $x_0 \in \overline{(2,0)(1,0)} - \{(2,0)\}$.

Supongamos que $x_0 \in \overline{(-2,0)(-1,0)} - \{(-2,0)\}$, el caso en que $x_0 \in \overline{(2,0)(1,0)} - \{(2,0)\}$ es similar así que no lo haremos.

Sean $J = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$, $K = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \overline{(-2,0)(1,0)}\}$ y $L = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \overline{(2,0)(1,0)} \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n]\}$. Notemos que $J \cup K \cup L = \mathbb{N}$

Probaremos que L es finito.

Como $E = \overline{(2,0)(1,0)} \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n]$ es compacto, $x_0 \notin E$ y $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \notin E$, para toda $n > N$. Esto muestra que $L \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Por tanto L es finito.

Analicemos lo que sucede cuando J es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, entonces $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Probaremos que $\lim_{j\to\infty} px_{i_j} = pq$ para $q = (-2, 0)$.

Tenemos que $x_{i_j} \in X_\infty$. Por el Ejemplo 3.4, X_∞ es suave y q es un punto inicial de X_∞. Así $\lim_{j\to\infty} qx_{i_j} = qx_0$. Observemos que $px_{i_j} = pq \cup qx_{i_j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. De modo que

$$\lim_{j\to\infty} px_{i_j} = \lim_{j\to\infty} (pq \cup qx_{i_j}) = [\lim_{j\to\infty} pq] \cup [\lim_{j\to\infty} qx_{i_j}] = pq \cup qx_0 = pq$$

Así que $\lim_{j\to\infty} px_{i_j} = p(-2, 0)$.

Ahora veamos qué pasa cuando K es infinito.

Ordenemos los elementos de K en una subsucesión $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $x_{0,}$ entonces $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Recordemos que los arcos cumplen que todos sus puntos son iniciales, apliquemos esto al arco $\overline{(-2,0)(1,0)}$ y al punto p, entonces p es un punto inicial de $\overline{(-2,0)(1,0)}$. Por tanto $\lim\limits_{k\to\infty} px_{i_k} = px_0$.

Por último probaremos que $\liminf px_i = py$ para alguna $y \in X$. Analizaremos tres casos.

Caso 1. J es infinito, K es infinito.

Recordemos que L es finito. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Notemos que $\liminf px_i = \liminf px_{N+i}$. Además, para toda $i \in \mathbb{N}$, $(N+i) \in J \cup K$. Ordenemos los elementos de $J \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ y también los elementos de $K \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Por lo visto anteriormente, tenemos que $\lim\limits_{j\to\infty} px_{i_j} = p(-2,0)$ y $\lim\limits_{k\to\infty} px_{m_k} = px_0$. Observemos que $x_0 \in p(-2,0)$. Por el Lema 2.39, tenemos que $\liminf px_i = \liminf px_{N+i} = p(-2,0) \cap px_0 = px_0$.

Caso 2. J es finito, K es infinito.

Procediendo en forma parecida al caso 1, concluimos que $\liminf px_i = px_0$.

Caso 3. J es infinito, K es finito.

Con un procedimiento parecido al del caso 1 concluimos que $\liminf px_i = (-2,0)p$.

Hemos probado que cuando X no es localmete conexo en x_0, el punto $p = (0,0)$ cumple que $\liminf px_i = py$ para alguna $y \in X$.

Luego p es un punto de semisuavidad. Por tanto X es un dendroide semisuave.

Afirmación 2: X no es suave.

Antes de ver la prueba, haremos algunas observaciones. Fijémonos en los subdendroides $Y = \left[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right] \cup \overline{(0,0)(2,0)}$ y $Z = \left[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \cup \overline{(0,0)(-2,0)}$ de X. Estos dendroides son tales que $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = \{(0,0)\}$.

Tomemos en cuenta las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = (-1, \frac{1}{n})$ y $y_n = (1, \frac{1}{n})$, las cuales convergen a $x_0 = (-1,0)$ y $y_0 = (1,0)$, respectivamente.

Supongamos que existe un punto inicial p en X. Analicemos los distintos casos.

(i) $p \in Z$

Observemos que el punto $q = (2, 0) \in py_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de esta forma se tiene que $q \in \lim_{n\to\infty} py_n$. Sin embargo el punto $q \notin py_0$. Por tanto, $py_0 \neq \lim_{n\to\infty} py_n$. Por tanto p no puede estar en Z.

(ii) $p \in Y$

Este caso es similar al anterior, de modo que p no puede estar en Y.

Dado que $Y \cup Z = X$, tenemos que X no puede tener puntos iniciales de suavidad. Por tanto X no es suave.

Con esto terminamos de analizar el ejemplo.

A pesar de que las definiciones de suavidad débil y semisuavidad son parecidas a simple vista, no son equivalentes. El siguiente ejemplo lo ilustra.

Ejemplo 3.16 *Sean* $A_n = \overline{(-1,0)(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})} \cup \overline{(\frac{-1}{n},\frac{1}{n})(\frac{-1}{n},1)}$, $B_n = \overline{(1,0)(\frac{1}{n},\frac{1}{n})} \cup \overline{(\frac{1}{n},\frac{1}{n})(\frac{1}{n},1)}$ *y* $C = \overline{(-1,0)(1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)}$. *Sea*

$$X = C \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) \right).$$

No es difícil probar que X es un dendroide. (ver Figura 3.3)

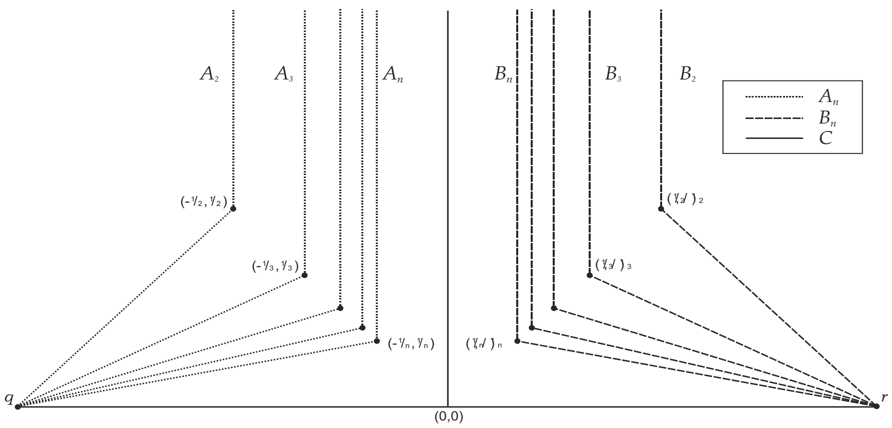

Figura 3.3: Dendroide débilmente suave que no es semisuave.

Veamos que X es débilmente suave y no es semisuave.

Observemos que $Y = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \overline{(-1,0)(0,1)}$ y $Z = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup \overline{(1,0)(0,1)}$ son homeomorfos a X_∞. Además $X = Y \cup Z$, donde el punto $q = (-1,0)$ es un punto inicial de Y y $r = (1,0)$ es un punto inicial de Z.

Afirmación 1: X es débilmente suave.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a un punto x_0. Probaremos que el punto $p = (0,1)$ es un punto de suavidad débil de X. Haremos la prueba por casos.

(i) X es localmente conexo en x_0.

Por el Lema 3.7, tenemos que $\liminf px_i = \lim_{i\to\infty} px_i = px_0$.

(ii) X no es localmente conexo en x_0.

Entonces tenemos que $x_0 \in C - \{(-1,0),(1,0)\}$.

Definamos

$$J = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\},$$
$$K = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\} \text{ y}$$
$$L = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in C\}.$$

Observemos que $K \cup J \cup L = \mathbb{N}$.

(a) Analicemos qué sucede cuando J es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Observemos que para toda $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_{i_j} \in Y$, lo que implica que $x_0 \in Y \cap [C - \{(-1,0),(1,0)\}]$. Además $x_{i_j}p = x_{i_j}q \cup qp$ y $x_0 \in qp$. De modo que

$$\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = \lim_{j\to\infty} [x_{i_j}q \cup qp] = [\lim_{j\to\infty} x_{i_j}q] \cup [\lim_{j\to\infty} qp] = x_0q \cup qp = qp$$

Hemos probado que $\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = qp$.

(b) Analicemos qué sucede cuando K es infinito.

Ordenemos los elementos de K en una subsucesión $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Este caso es análogo al anterior, de modo que $\lim_{k\to\infty} x_{i_k}p = rp$.

(c) Ahora analicemos el caso en que L es infinito.

Podemos ordenar los elementos de L en una subsucesión $\{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que $\{x_{i_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Observemos que C es homeomorfo a un triodo. Dado que los triodos son localmente conexos, tenemos que C es localmente conexo, en particular, C es localmente conexo en p. Por el Lema 3.7, tenemos que $\lim_{l\to\infty} x_{i_l}p = x_0p$.

A continuación analizaremos la forma en la que J, K y L están distribuidos en $\mathbb{N}$.

1. J es infinito, K es infinito y L es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 \cdots$, los de K en otra sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ y los elementos de L en una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Observemos que $x_0 \in \lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = qp$, $x_0 \in \lim_{k\to\infty} x_{m_k}p = rp$ y $\lim_{l\to\infty} x_{n_l}p = x_0p$. De modo que $x_0 \in qp \cap rp \cap C = \overline{(0,0)(0,1)}$. Por el Lema 2.39, $\liminf x_ip = qp \cap rp \cap x_0p = x_0p$.

2. J es infinito, K es infinito y L es finito.

Dado que L es finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Claramente $\liminf px_i = \liminf px_{N+i}$. Además, para toda $i \in \mathbb{N}$, $(N+i) \in J \cup K$.

Ordenemos los elementos de $J \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ y también los elementos de $K \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Por lo visto anteriormente, tenemos que $\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = qp$ y $\lim_{k\to\infty} x_{m_k}p = rp$. Por el Lema 2.39, tenemos que $\liminf px_i = \liminf px_{N+i} = qp \cap rp = \overline{(0,0)(0,1)}$.

3. J es infinito, K es finito y L es infinito.

Procediendo de forma parecida al caso 1. Concluimos que $\liminf x_ip = x_0p$.

4. J es finito, K es infinito y L es infinito.

En este caso se obtiene que $\liminf x_ip = x_0p$.

Los casos en los que dos de los conjuntos J, K o L son finitos se reducen a los casos $(a), (b)$ y (c), y estos casos ya han sido analizados. Observemos también que no es posible que J, K y L sean finitos al mismo tiempo ya que $J \cup K \cup L = \mathbb{N}$.

Hemos probado que $\liminf x_ip$ es un arco con p como un extremo. Esto implica que p es un punto de suavidad débil. Por tanto X es débilmente suave.

Afirmación 2: X no es semisuave.

Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = (\frac{(-1)^n}{n}, 1)$, la cual converge al punto $(0,1)$.

Supongamos que existe un punto de semisuavidad p en X. Veamos en dónde puede estar p.

(i) $\quad p, \in [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n]$ o $p \in [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n]$.

Supongamos que $p \in A_{n_0}$, para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Observemos que $(1,0) \in x_{2n}p$ y $(-1,0) \in x_{2n+1}p$, para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n+1 \neq n_0$. Lo que implica que $(1,0)$ y $(-1,0)$ pertenecen al $\limsup x_n p$. Tomemos en cuenta que $\liminf x_n p \neq \varnothing$ ya que $p \in \liminf x_n p$. Por el Lema 2.35, se tiene que $\limsup x_n p$ es un dendroide, es especial, es arcoconexo. De forma que $C = \overline{(1,0)(-1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)} \subset \limsup x_n p$. Observemos que $C = \overline{(1,0)(-1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)}$ es un triodo. Lo que implica que $\limsup x_n p$ no es un arco. Por tanto $p \notin [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n]$.

El caso en que $p \in [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n]$ es similar al anterior. De modo que $p \notin [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n]$.

(ii) $\quad p \in C$.

Observemos que $(1,0) \in x_{2n}p$ y $(-1,0) \in x_{2n-1}p$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica que $(1,0)$ y $(-1,0)$ pertenecen a $\limsup x_n p$. Tomemos en cuenta que $\liminf x_n p \neq \varnothing$, ya que $(1,0) \in \liminf x_n p$. Por el Lema 2.35, se tiene que $\limsup x_n p$ es un dendroide, es especial, es arcoconexo. De forma que $C = \overline{(1,0)(-1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)} \subset \limsup x_n p$. Observemos que $C = \overline{(1,0)(-1,0)} \cup \overline{(0,0)(0,1)}$ es un triodo. Esto implica que $\limsup x_n p$ no es un arco. Por tanto p no puede estar en C.

Dado que $X = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] \cup [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n] \cup C$, tenemos que X no puede tener puntos de semisuavidad. Por tanto X no es un dendroide semisuave.

Con esto terminamos la prueba de este ejemplo.

A continuación veremos que el que X sea semisuave no implica que X sea débilmente suave.

Ejemplo 3.17 *Sea $a = (1,1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos los puntos $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$ y $c_n = (1 + \frac{1}{n}, -1)$. Sean $A_n = (\overline{ab_n} \cup \overline{b_n c_n})$, $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x,y) \in A_n\}$, $C = \overline{a(0,0)} \cup \overline{(0,0)(1,-1)}$ y $C' = \overline{(-1,1)(0,0)} \cup \overline{(0,0)(-1,-1)}$. Sea $X = [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n)] \cup C \cup C'$.*

Afirmación 1: *X es semisuave.*

Prueba: Probaremos que el punto $p = (0,0)$ es un punto de suavidad débil de X. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a un punto x_0. Probaremos que $\limsup px_i$ es un arco. Haremos esto por casos.

(i) X es localmente conexo en x_0.

Por el Lema 3.7, tenemos que $\liminf px_i = \lim\limits_{i\to\infty} px_i = px_0$.

(ii) X no es localmente conexo en x_0.

Observemos que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup C$ es homeomorfo a X_∞, así que nos referiremos a él como X_∞.

En este caso tenemos que $x_0 \in [C \cup C'] - \{(1,1),(-1,1)\}$. Supondremos que $x_0 \in C - \{(1,1)\}$. El caso en que $x_0 \in C' - \{(-1,1)\}$ es similar, de modo que no lo haremos.

Definamos $J = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$, $K = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$ y $L = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in C \cup C'\}$. Observemos que $K \cup J \cup L = \mathbb{N}$.

(a) Analicemos qué sucede cuando J es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Tenemos que el punto $q = (1,1)$ es un punto inicial de X_∞. Además $q \in x_{i_j}p$ para toda $j \in \mathbb{N}$. De manera que

$$\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = \lim_{j\to\infty}[x_{i_j}q \cup qp] = [\lim_{j\to\infty} x_{i_j}q] \cup [\lim_{j\to\infty} qp] = x_0q \cup qp.$$

Claramente $x_0 \in pq$ o $p \in x_0q$. En el primer caso concluimos que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j}p = pq$. En el segundo tenemos que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j}p = x_0q$.

Hemos probado que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j}p$ es un arco.

(b) Analicemos el caso en que K es infinito.

Ordenemos los elementos de K en una subsucesión $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Dado que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup C'$ es compacto, tenemos que $x_0 \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup C'$. De modo que $x_0 \in \left[\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup C'\right] \cap [C - \{(1,1)\}] = \{p\}$. Luego $x_0 = p$.

Por otra parte tenemos que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup C'$ es homeomorfo a X_∞ y tiene al punto $q' = (-1,1)$ como punto inicial. Observemos que $q' \in x_{i_k}p$ para toda

$k \in \mathbb{N}$. De modo que

$$\lim_{k\to\infty} x_{i_k}p = \lim_{k\to\infty}[x_{i_k}q' \cup q'p] = [\lim_{k\to\infty} x_{i_k}q'] \cup [\lim_{k\to\infty} q'p] = x_0q' \cup q'p = q'p$$

(c) Por último veamos qué sucede cuando L es infinito.

Podemos ordenar los elementos de L en una subsucesión $\{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, tenemos que $\{x_{i_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.

Observemos que $C \cup C'$ es homeomorfo a un 4-odo. Dado que los 4-odos son localmente conexos, tenemos que $C \cup C'$ es localmente conexo, en particular, C es localmente conexo en p. Por el Lema 3.7, tenemos que $\lim_{l\to\infty} x_{i_l}p = x_0p$.

A continuación analizaremos la forma en la que J, K y L están distribuidos en $\mathbb{N}$.

1. J es infinito, K es infinito y L es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 \cdots$, los de K en otra sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ y los elementos de L en una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Dado que K es infinito, tenemos que $x_0 = p$. De modo que, por el caso (a) y dado que $x_0 = p$, $\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = x_0(1,1)$. Además sabemos que, por el caso (b) y dado que $x_0 = p$, $\lim_{k\to\infty} x_{m_k}p = (-1,1)p$ y $\lim_{l\to\infty} x_{n_l}p = x_0p = \{x_0\}$. Por el Lema 2.38 tenemos que

$$\begin{aligned}\limsup x_ip &= \left[\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p\right] \cup \left[\lim_{k\to\infty} x_{m_k}p\right] \cup \left[\lim_{l\to\infty} x_{n_l}p\right] \\ &= x_0(1,1) \cup (-1,1)p \cup \{x_0\} = (1,1)(-1,1).\end{aligned}$$

De modo que $\limsup x_ip = (1,1)(-1,1)$.

2. J es infinito, K es infinito y L es finito.

Dado que L es finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. Claramente $\limsup px_i = \limsup px_{N+i}$. Además, para toda $i \in \mathbb{N}$, $(N+i) \in J \cup K$.

Ordenemos los elementos de $J \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ y también los elementos de $K \cap \{N+i : i \in \mathbb{N}\}$ en una sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Dado que K es infinito, tenemos que $x_0 = p$. Por lo visto anteriormente, tenemos que $\lim_{j\to\infty} x_{i_j}p = (1,1)p$ y $\lim_{k\to\infty} x_{m_k}p = (-1,1)p$. Por el Lema 2.38 , tenemos que $\limsup px_i = \limsup px_{N+i} = (1,1)p \cap (-1,1)p = (1,1)(-1,1)$.

3. J es infinito, K es finito y L es infinito.

Procediendo de forma parecida al caso 2 y usando (a), concluimos que $\limsup x_i p = (1,1)p$ o $\limsup x_i p = (1,1)x_0$.

4. J es finito, K es infinito y L es infinito.

En este caso se obtiene que $\limsup x_i p = (-1,1)p$.

Los casos en los que dos de los conjuntos J, K o L son finitos se reducen a analizar los casos $(a), (b)$ y (c), estos ya han sido analizados en $(a), (b)$ y (c). Observemos también que no es posible que J, K y L sean finitos al mismo tiempo ya que $J \cup K \cup L = \mathbb{N}$.

Hemos probado que $\limsup x_i p$ es un arco. Esto implica que p es un punto de semisuavidad. Por tanto X es semisuave.

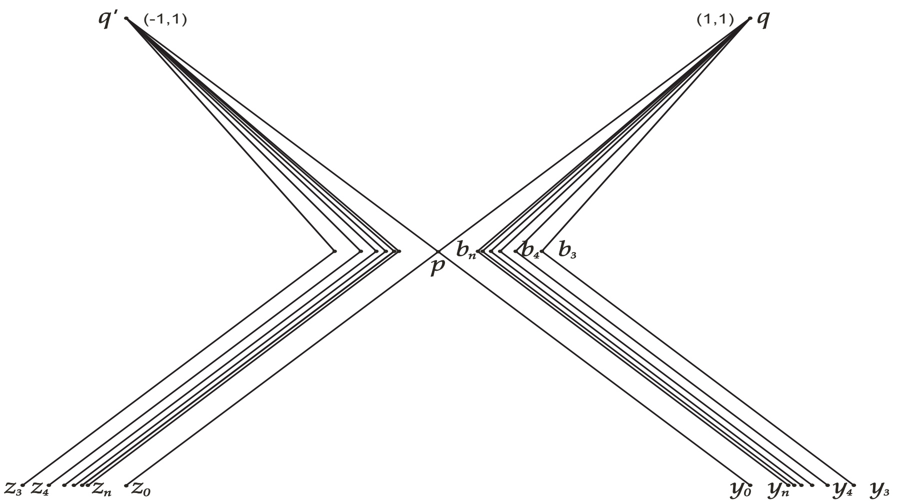

Figura 3.4: Dendroide semisuave que no es débilmente suave.

Afirmación 2: X no es débilmente suave.

Tomemos las sucesiones $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dadas por $y_i = (1+\frac{1}{i}, -1)$ y $z_i = (-1-\frac{1}{i}, -1)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Estas dos sucesiones convergen a los puntos $y_0 = (1,-1)$ y $z_0 = (-1,-1)$, respectivamente. Sean $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup C$ y $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup C'$, estos dos dendroides son homeomorfos a X_∞ y tienen a los puntos $q = (1,1)$ y $q' = (-1,1)$ como puntos iniciales, respectivamente. Claramente $X = Y \cup Z$.

Supongamos que existe un punto p de suavidad débil. Pueden pasar dos casos.

(i) $\quad p \in Y$

Tenemos que $q' \in z_i p$, para toda $i \in \mathbb{N}$. De modo que

$$\liminf z_i p = \liminf [z_i q' \cup q'p] = [\liminf z_i q'] \cup q'p = z_0 q' \cup q'p.$$

En caso de que $p = (0,0)$, tenemos que $\liminf z_i p = z_0 q'$ es un arco, sin embargo, no tiene a p como extremo.

En caso de que $p \neq (0,0)$, tenemos que $z_0 q' \cup q'p$ es un triodo, así que $\liminf z_i p$ no es un arco.

Esto es una contradicción al hecho de que p es un punto de suavidad débil.

(ii) $\quad p \in Z$

De forma parecida al caso anterior obtenemos una contradicción . Por tanto X no es débilmente suave.

Lema 3.18 *Sea X un dendroide no débilmente suave. Si Y es un dendroide tal que $X \in C(Y)$, entonces Y no es débilmente suave.*

Demostración. Supongamos que existe un punto de suavidad débil p en Y. Esto implica que $p \notin X$. Por el Teorema 2.20 existe un punto r en X tal que $r \in px$ para toda $x \in X$ y $pr \cap X = \{r\}$.

Dado que X no es débilmente suave, tenemos que r no es un punto de suavidad débil de X. Lo que implica que existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ contenida en X, que converge a un punto $x_0 \in X$, tal que $\liminf x_i r$ es un arco ab que no tiene a r como extremo o $\liminf x_i r$ no es ni un arco ni un conjunto de un solo punto.

En caso de que $\liminf x_i r$ sea un arco ab que no tiene a r como extremo, tenemos que

$$\liminf px_i = \liminf (pr \cup rx_i) = pr \cup [\liminf rx_i] = pr \cup ab.$$

Sin embargo, $pr \cup ab$ es un triodo simple y en consecuencia no es un arco. De modo que $\liminf px_i$ no es un arco.

Consideremos ahora el caso en que $\liminf x_i r$ no es un arco.

Claramente

$$\liminf rx_i \subseteq \liminf px_i.$$

De modo que $\liminf px_i$ no es un arco.

Hemos encontrado una sucesión convergente $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para la cual $\liminf px_i$ no es un arco. Esto contradice el hecho de que p sea un punto de suavidad débil.

Luego no existe un punto de suavidad débil $p \in Y$. Por tanto Y no es débilmente suave. ∎

Con esto damos por terminada la sección y comenzamo con una nueva definición de suavidad.

3.4. Dendroides Puntualmente Suaves

Definición 3.19 *Se dice que un* ***dendroide*** X ***es puntualmente suave*** *si para toda $x \in X$, existe $p_x \in X$ tal que toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contenida en X, que converge al punto x cumple que los arcos x_np_x convergen al arco xp_x. A un punto p_x definido así, lo llamaremos punto inicial de x.*

Lema 3.20 *Si X es un dendroide suave, entonces es puntualmente suave. Además, si p es un punto inicial de X, entonces p es un punto inicial de x, para toda $x \in X$.*

Demostración. Si X es suave, entonces existe un punto inicial p en X, de modo que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X convergente a un punto $x \in X$, los arcos px_n convergen al arco px. Luego para toda x en X se tiene que el punto inicial p es un punto inicial de x para toda x en X. ∎

Lema 3.21 *Si X es un dendroide puntualmente suave, entonces X es hereditariamente puntualmente suave.*

Demostración. Sean K un subcontinuo de X, x un punto en K y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión en K que converge a x. Denotemos por p_x el punto inicial de x en X, de modo que $\lim_{n\to\infty} x_np_x = xp_x$.

Mostraremos ahora que existe un punto $r \in K$ tal que $\lim_{n\to\infty} rx_n = rx$.

Por el Teorema 2.20 existe $r \in K$ tal que $p_xr \cap K = \{r\}$ y, para toda $y \in K$, $p_xy = p_xr \cup ry$. De manera que

$$x_np_x = x_nr \cup rp_x.$$

Luego

$$xp_x = \lim_{n\to\infty} x_n p_x = \lim_{n\to\infty} [x_n r \cup rp_x] = \left[\lim_{n\to\infty} x_n r\right] \cup \left[\lim_{n\to\infty} rp_x\right].$$

Observemos que rp_x no depende de la n, lo cual implica que $\lim\limits_{n\to\infty} rp_x = rp_x$. Se sigue que

$$xp_x = \left[\lim_{n\to\infty} x_n r\right] \cup rp_x.$$

Como $x \in K$ tenemos que $xp_x = xr \cup rp_x$. Entonces

$$xr \cup rp_x = \left[\lim_{n\to\infty} x_n r\right] \cup rp_x.$$

Observemos que $xr \cap rp_x = \{r\}$. Además $\lim\limits_{n\to\infty} x_n r \subset K$ y $rp_x \cap K = \{r\}$, lo que implica que

$$\left[\lim_{n\to\infty} x_n r\right] \cap rp_x = \{r\}.$$

Así que

$$\begin{aligned} xr &= \{r\} \cup \{[xr \cup rp_x] - \{rp_x\}\} \\ &= \{r\} \cup \left\{\left[\left[\lim_{n\to\infty} x_n r\right] \cup rp_x\right] - \{rp_x\}\right\} = \lim_{n\to\infty} x_n r. \end{aligned}$$

Concluimos que $xr = \lim\limits_{n\to\infty} x_n r$. Así r es punto inicial de x en K. Por tanto K es puntualmente suave. Con esto concluimos que X es hereditariamente puntualmente suave. ■

El dendroide que a continuación se muestra es puntualmente suave sin ser suave.

Ejemplo 3.22 *Consideremos el dendroide del ejemplo 3.15.*

Afirmación 1: X es puntualmente suave.

Probaremos que todo $x \in X$ tiene un punto inicial.

Recordemos que el dendroide X_∞ es suave. Por el Lema 3.20 tenemos que X_∞ es puntualmente suave. Además, por el Lema 3.21, tenemos que X_∞ es hereditariamente puntualmente suave.

Observemos que Y y Z son homeomorfos a subdendroides de X_∞, lo que implica que son puntualmente suaves. Los puntos $p = (-2, 0)$ y $p' = (2, 0)$

son puntos iniciales de Y y Z, respectivamente. Por el Lema 3.20, tenemos que p es punto inicial de y, para toda $y \in Y$. También tenemos que p' es punto inicial de z, para toda $z \in Z$.

Sean $x \in X$ y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Tenemos que $x \in X - Z$ o $x \in X - Y$. Desarrollemos estos dos casos.

(a) $\quad x \in X - Z$.

Dado que Z es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta_\varepsilon(x) \cap Z = \varnothing$. De modo que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_{N+i} \in \beta_\varepsilon(x) \subset Y$. Dado que p es un punto inicial de Y, tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} px_i = \lim_{i\to\infty} px_{N+i} = px$$

(b) $\quad x \in X - Y$.

Este caso es similar al anterior. Concluimos que $\lim\limits_{i\to\infty} p'x_i = p'x$.

De modo que toda $x \in X$ tiene un punto inicial. Por tanto X es puntualmente suave.

Afirmación 2: $\quad X$ no es suave.

Por el Ejemplo 3.15 Afirmación 2 sabemos que X es suave.

Una variante del ejemplo anterior, con propiedades similares, es el siguiente.

Ejemplo 3.23 *Sean* $A_n = \overline{(-2,\frac{1}{n})(-1,\frac{1}{n})}$, $B_n = \overline{(1,\frac{1}{n})(2,\frac{1}{n})}$, $A = \overline{(-2,0)(-2,1)}$, $B = \overline{(2,0)(2,1)}$. *Sean* $Y = [\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k] \cup A \cup \overline{(-2,0)(0,0)}$, $Z = [\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k] \cup B \cup \overline{(2,0)(0,0)}$. *Tomemos* $X = Y \cup Z$. *El lector encontrará fácil ver que este dendroide es puntualmente suave y no es suave. (ver figura 3.5)*

Lema 3.24 *Sea* X *un dendroide. Si existen* Y *y* Z *subdendroides suaves de* X *con el mismo punto inicial* p, *tales que* $X = Y \cup Z$, *entonces* X *es puntualmente suave.*

Demostración. Sea $x \in X$, veremos que p es un punto de inicial de X.

Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Sean $J = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in Y\}$ y $K = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in Z\}$. Claramente $\mathbb{N} = J \cup K$.

Ahora analicemos las formas en las que J y K están distribuidos en $\mathbb{N}$.

(a) $\quad J$ es infinito y K es finito.

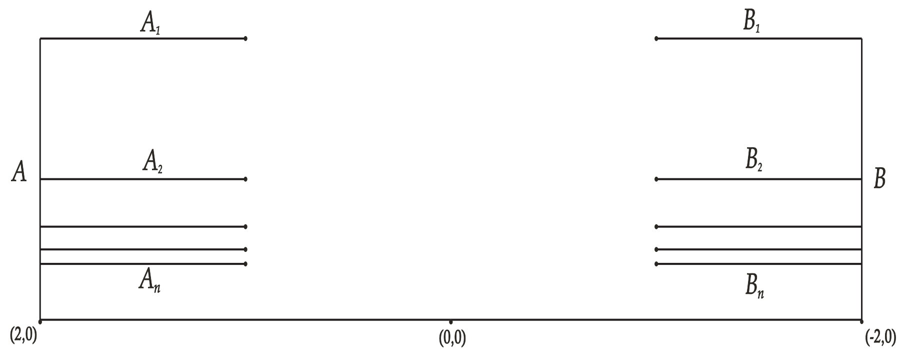

Figura 3.5:

Dado que K es finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \{1, 2, \cdots, N\}$. De modo que $\{N + i : i \in \mathbb{N}\} \subset J$. Ordenemos los elementos de J en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$.

Claramente

$$\lim_{i\to\infty} px_i = \lim_{i\to\infty} px_{N+i} = \lim_{j\to\infty} px_{i_j} = px.$$

De modo que $\lim_{i\to\infty} px_i = px$.

(b) J es finito y K es infinito.

Este caso es similar al anterior. Concluimos que $\lim_{i\to\infty} px_i = px$.

(c) J es infinito y K es infinito.

Ordenemos los elementos de J en una sucesión $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ y los elementos de K en una sucesión $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Dado que p es punto inicial de Y y Z, tenemos que $\lim_{j\to\infty} px_{i_j} = px$ y $\lim_{k\to\infty} px_{m_k} = px$. Por el Lema 2.38, tenemos que

$$\limsup px_i = [\lim_{j\to\infty} px_{i_j}] \cup [\lim_{k\to\infty} px_{m_k}] = px.$$

Además, por el Lema 2.39, tenemos que

$$\liminf px_i = [\lim_{j\to\infty} px_{i_j}] \cap [\lim_{k\to\infty} px_{m_k}] = px.$$

De modo que

$$\limsup px_i = \liminf px_i = px.$$

Luego $\lim_{i\to\infty} px_i = px$.

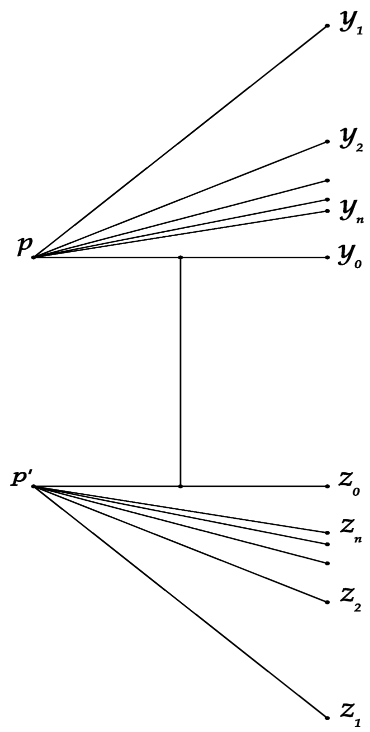

Figura 3.6: Dendroide puntualmente suave que no es débilmente suave ni semisuave.

En (a), (b) y (c) obtuvimos que $\lim\limits_{i\to\infty} px_i = px$. Luego p es un punto inicial de x. Por tanto X es puntualmente suave. ■

Ejemplo 3.25 *Consideremos el abanico armónico X_∞, del Ejemplo 3.4. Sean $Y = X_\infty \cup \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)}$ y $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,-3-y) \in X_\infty\} \cup \overline{(\frac{1}{2},-3)(\frac{1}{2},-1)}$ y $X = Y \cup Z$. Veremos que X es puntualmente suave y sin embargo X no es semisuave ni débilmente suave. (Ver Figura 3.7)*

Afirmación 1: X es puntualmente suave.

Prueba: Observemos que $Y = X_\infty \cup \left[\overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)} \cup \overline{(0,0)(1,0)}\right]$. Sabemos que X_∞ es suave en $p = (0,0)$. Además el triodo $T = \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)} \cup \overline{(0,0)(1,0)}$ es suave en todos sus puntos, en particular, T también es suave en p. Por el Lema 3.24, tenemos que Y es puntualmente suave con p como punto inicial. Dado que Y y Z son homeomorfos, tenemos que Z es puntualmente suave y $p' = (0,-3)$ es un punto inicial de Z.

Sean $x \in X$ y $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Tenemos que $x \in X - Z$ o $x \in X - Y$. Desarrollemos estos dos casos.

(a) $\quad x \in X - Z$.

Dado que Z es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta_\varepsilon(x) \cap Z = \varnothing$. De modo que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_{N+i} \in \beta_\varepsilon(x) \subset Y$. Dado que p es un punto inicial de Y, tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} px_i = \lim_{i\to\infty} px_{N+i} = px$$

(b) $\quad x \in X - Y$.

Este caso es similar al anterior. Concluimos que $\lim\limits_{i\to\infty} p'x_i = p'x$.

De modo que toda $x \in X$ tiene un punto inicial. Por tanto X es puntualmente suave.

Afirmación 2: $\quad X$ no es débilmente suave ni semisuave.

Tomemos las sucesiones $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (1, \frac{1}{n})$ y $z_n = (1, -\frac{1}{n} - 3)$. Estas sucesiones convergen a los puntos $y_0 = (1,0)$ y $z_0 = (1,-3)$, respectivamente.

Sean $q \in X$ y $r = (\frac{1}{2}, -3)$. Analicemos cómo convergen los arcos qz_n. Hagámoslo por casos.

1. $\quad q \in Y \cup \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)}$.

Observemos que $qz_n = qr \cup rp' \cup p'z_n$ y que $r \in p'z_0$. Dado que p' es un punto inicial de Z, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} qz_n = [\lim_{n\to\infty} qr] \cup [\lim_{n\to\infty} rp'] \cup [\lim_{n\to\infty} p'z_n] = qr \cup rp' \cup p'z_0 = qr \cup p'z_0.$$

Observemos que $qr \cup p'z_0$ es un triodo, así que no es un arco.

Tenemos que q no puede ser un punto de suavidad débil ya que

$$\lim_{n\to\infty} qz_n = \liminf qz_n = qr \cup p'z_0.$$

Tampoco es posible que q sea un punto de semisuavidad ya que

$$\lim_{n\to\infty} qz_n = \limsup qz_n = qr \cup p'z_0.$$

Por tanto ningún punto $q \in Y \cup \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)}$ puede ser un punto de suavidad débil de X y tampoco puede ser un punto de semisuavidad de X.

2. $\quad q \in Z \cup \overline{(\frac{1}{2},-1)(\frac{1}{2},-3)}$.

De forma similar al caso anterior concluimos que $Z \cup \overline{(\frac{1}{2},-1)(\frac{1}{2},-3)}$ no puede contener puntos iniciales de suavidad débil de X ni tampoco puntos iniciales de semisuavidad de X.

Dado que $X = [Y \cup \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-2)}] \cup [Z \cup \overline{(\frac{1}{2},-1)(\frac{1}{2},-3)}]$, concluimos que X no es débilmente suave ni semisuave.

Ejemplo 3.26 *Sean* $A_n = \overline{(0,\frac{1}{n})(1,\frac{1}{n})}$, $B_n = \overline{(0,-1-\frac{1}{n})(1,-1-\frac{1}{n})}$, $A = \overline{(0,0)(0,1)}$, $B = \overline{(0,-1)(0,-2)}$. *Sea* $X = [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup B_n] \cup A \cup B \cup \overline{(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},-1)}$. *El lector encontrará fácil ver que este dendroide es puntualmente suave y no es suave. Ver figura 3.7*

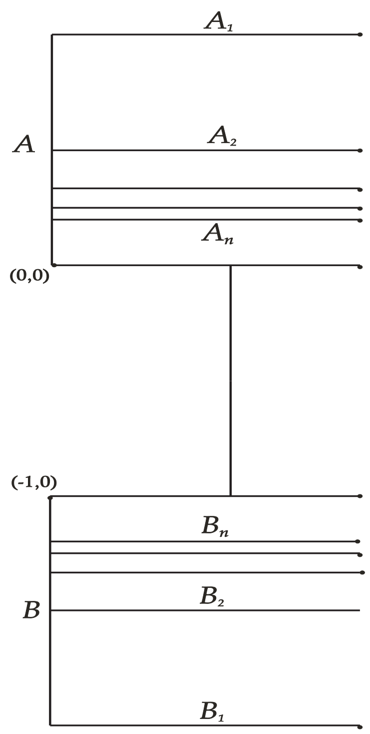

Figura 3.7:

Por último veremos un dendroide que es semisuave y débilmente suave, pero no es puntualmente suave.

Ejemplo 3.27 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$A_n = \overline{(0,0)(1,\frac{1}{n})} \cup \overline{(1,\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n},0)} \cup \overline{(1+\frac{1}{n},0)(1,-\frac{1}{n})} \cup \overline{(1,-\frac{1}{n})(0,-\frac{1}{n})}.$$

Sea $X = \overline{(-1,0)(1,0)} \cup \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [A_n]\right]$ *.(ver figura 3.8*

Observemos que $Y = \overline{(0,0)(1,0)} \cup \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{(0,0)(1,\frac{1}{n})} \cup \overline{(1,\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n},0)}\right]$ es homeomorfo a X_∞ y que Y tiene a $q = (0,0)$ como punto inicial.

Afirmación 1: X no es puntualmente suave.

Probaremos que $x_0 = (\frac{1}{2},0)$ no tiene puntos iniciales.

Tomemos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = (\frac{1}{2},-\frac{1}{n})$, ésta converge a x_0. Supongamos que existe un punto inicial p de x_0 en X.

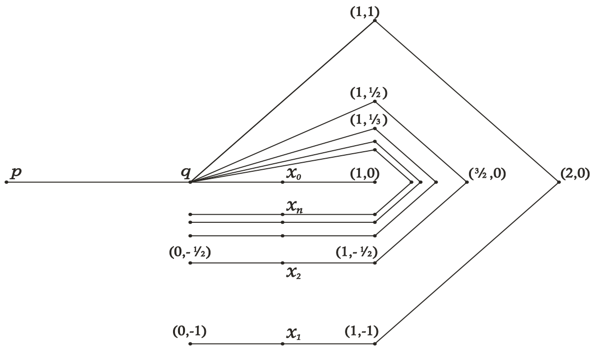

Figura 3.8: Dendroide débilmente suave y semisuave que no es puntualmente suave.

Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ y $p \notin A_n$, entonces $px_n = pq \cup q(1+\frac{1}{n},0) \cup (1+\frac{1}{n},0)x_n$. Dado que q es punto inicial de Y y $(1+\frac{1}{n},0) \in Y$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} q(1+\frac{1}{n},0) = q(1,0).$$

Claramente $\lim_{n\to\infty} q(1+\frac{1}{n},0) \subseteq \lim_{n\to\infty} px_n$. En especial, fijémonos en que q y $(1,0)$ pertenecen a $\lim_{n\to\infty} px_n$.

Veamos los posibles casos.

(i) $\quad p \in X - x_0(1,0)$.

En este caso $(1,0) \notin px_0$. De modo que $px_0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} px_n$.

(ii) $\quad p \in x_0(1,0)$.

En este otro caso, $q \notin px_0$. De modo que $px_0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} px_n$.

Luego x_0 no tiene puntos iniciales. Por tanto X no es puntualmente suave.

Afirmación 2: $\quad X$ es débilmente suave y semisuave.

Veremos que el punto $p = (-1,0)$ es un punto de semisuavidad y un punto de suavidad débil.

Sean y_0 un punto en X y $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a y_0. Veamos los distintos casos.

(i) $\quad X$ es localmente conexo en y_0.

Por el Lema 3.7, tenemos que $\lim\limits_{i\to\infty} py_i = py_0$. De modo que $\liminf py_i$ es el arco py_0 y $\limsup py_i$ es un arco.

(ii) $\quad X$ no es localmente conexo en y_0.

Tenemos que $y_0 \in \overline{q(1,0)}$. Probaremos que $\limsup py_i \subseteq p(1,0)$.

Supongamos que existe $z \in \limsup py_i$ tal que $z \in A_{n_0} - \{q\}$. Por el Lema 2.36, existe una subsucesión $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y puntos $z_{i_j} \in py_{i_j}$, para toda $j \in \mathbb{N}$ tales que $\lim\limits_{j\to\infty} z_{i_j} = z$. Como $z \in A_{n_0} - \{q\}$ y este conjunto es abierto, podemos suponer que $z_{i_j} \in A_{n_0} - \{q_0\}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Dada $j \in \mathbb{N}$, ya que $z_{i_j} \in A_{n_0} - \{q\} \cap py_{i_j}$, tenemos que $y_{i_j} \in z_{i_j}(0, -\frac{1}{n_0})$. Como A_{n_0} es un arco, tenemos que $y_0 = \lim\limits_{j\to\infty} y_{i_j} \in z(0, -\frac{1}{n_0}) \subset A_{n_0} - \{q_0\}$. Esto es absurdo pues $y_0 \in \overline{q(1,0)}$. Hemos probado que $\limsup py_i \subseteq p(1,0)$.

Sabemos que $p \in py_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, luego $p \in \liminf py_i$, así que $\liminf py_i \neq \varnothing$. Recordemos que

$$\liminf py_i \subseteq \limsup py_i \subseteq p(1,0).$$

Por el Lema 2.32 tenemos que $\liminf py_i$ es un dendroide contenido en $p(1,0)$ que tiene a p. Luego $\liminf py_i = py$, para alguna $y \in p(1,0)$.

Por el Lema 2.35 tenemos que $\liminf py_i$ es un dendroide contenido en el arco $p(1,0)$. Luego $\limsup py_i$ es un arco.

En (i) y (ii) obtuvimos que $\liminf py_i = py$, para alguna $y \in p(1,0)$ y que $\limsup py_i$ es un arco. Luego p es un punto de suavidad débil y un punto de semisuavidad. Por tanto X es débilmente suave y semisuave.

En este capítulo vimos las diferentes definiciones de suavidad en dendroides, dimos ejemplos de estos y mostramos con contraejmplos porque todas estas definiciones son diferentes.

Capítulo 4

Relaciones de suavidad

En este capítulo veremos cómo se relacionan entre sí las propiedades que estudiamos en el capítulo anterior. Hemos visto que estas definiciones no son equivalentes, sin embargo, es posible deducir una de ellas a partir de dos.

Teorema 4.1 *Si X es un dendroide débilmente suave y puntualmente suave, entonces es semisuave.*

Demostración. Probaremos que X es semisuave, es decir, que existe un punto p en X tal que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a un punto x, se tiene que $\limsup px_n$ es un arco.

Como X es débilmente suave existe un punto de suavidad débil q.

Veamos que dado $x_0 \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a x_0, se cumple que $qx_0 \subset \liminf qx_n$. Ya sabemos que $\liminf qx_n$ es de la forma qz para alguna $z \in X$. Dado que q y x_0 pertenecen a $\liminf qx_n$, éste no es vacío. Por el Lema 2.32, tenemos que $\liminf qx_n$ es arcoconexo, de modo que

$$qx_0 \subset \liminf qx_{n.} \tag{4.1}$$

Como X es puntualmente suave, existe $p_0 \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_0x_n = p_0x_0$.

A continuación probaremos que

$$\limsup qx_n \subseteq qp_0 \cup p_0x_0. \tag{4.2}$$

Por el Lema 2.29, sabemos que $\liminf qx_n \subseteq \limsup qx_n$. Por otra parte tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $qx_n \subseteq qp_0 \cup p_0x_n$. Esto implica que

$$\limsup qx_n \subseteq \limsup\, [qp_0 \cup p_0x_n] = qp_0 \cup \limsup p_0x_n.$$

Como $p_0x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} p_0x_n = \limsup p_0x_n$ tenemos que

$$qp_0 \cup \limsup p_0x_n = qp_0 \cup p_0x_0.$$

Así que $\limsup qx_n \subseteq qp_0 \cup p_0x_0$.

Por último, mostraremos que q es un punto de semisuavidad de X.

Probaremos que $\limsup qx_n$ es un arco o un conjunto de un solo elemento. Supongamos por el contrario que $\limsup qx_n$ es un triodo. Caminando de p_0 a x_0 en el arco p_0x_0, tenemos que existe $t \in qx_0$ tal que $p_0t \cap qx_0 = \{t\}$. Notemos que $qp_0 \cup p_0x_0 = qx_0 \cup tp_0$.

Probaremos que

$$[\limsup qx_n] \cap p_0t = \{t\}.$$

Dado que $t \in qx_0 \subset \limsup qx_n$ y $t \in p_0t$, tenemos que $t \in [\limsup qx_n] \cap p_0t$.

Supongamos que existe un punto $r \neq t$ tal que $r \in [\limsup qx_n] \cap p_0t$. Por el Lema 2.36 existe una subsucesion $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en X, que converge a r, tal que $r_i \in qx_{n_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Dado que los puntos r, t, x_0 y q pertenecen a $\liminf qx_{n_i}$, por el Lema 2.32, $\liminf qx_{n_i}$ es un dendroide que contiene a $qx_0 \cup tr$. Observemos que el dendroide $qx_0 \cup tr$ es un triodo, esto contradice el hecho de que q sea un punto de suavidad débil de X. Esta contradicción muestra que $[\limsup px_n] \cap p_0t = \{t\}$. Ya que $\limsup qx_n \subset qp_0 \cup p_0x_0 = qx_0 \cup tp_0$. Concluimos que $\limsup qx_n \subset qx_0$. Por tanto $\limsup qx_n$ es un subcontinuo de X (Lema 2.35). Por tanto $\limsup qx_n$ es un arco o un conjunto de un solo punto. Así que q es un punto de semisuavidad. Por tanto X es un dendroide semisuave. ■

Definición 4.2 *Sea X un continuo. Se define* ***la función T de Jones*** *como*

$$T(A) = \{x \in X : \text{ todo } Y \in C(X) \text{ tal que } x \in int(Y) \text{ cumple que } Y \cap A \neq \varnothing\}$$

Sabemos que si X es un continuo entonces el conjunto $\{x\}$ es un subcontinuo de X, es decir, $\{x\} \in C(X)$. De esta forma podemos pensar en $T(\{x\})$ como el conjunto de $y \in X$ tales que si $Y \subset X$ es un subcotinuo con $y \in intY$ entonces $x \in Y$ y lo podemos escribier como $T(x) = \{y \in X :$ toda $K \in C(X)$ tal que $y \in intK$ se tiene que $x \in K\}$.

Lema 4.3 *Para todo punto x en un continuo X se tiene que $T(x)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Veamos que

$$\overline{T(x)} \text{ es compacto.}$$

Sea $y \in \overline{T(x)}$. Para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $\beta_\varepsilon(y) \cap T(x) \neq \varnothing$, así que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a y y tal que $y_n \in T(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea K un subcontinuo de X tal que $y \in intK$. De modo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$ se tiene que $y_n \in intK$ y, como $y_{N+1} \in T(x)$, se concluye que $x \in K$. Por lo tanto $y \in T(x)$ y $T(x)$ es cerrado. Luego $T(x)$ es compacto.

Ahora veamos que

$$T(x) \text{ es conexo.}$$

Supongamos que $T(x)$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados, ajenos y no vacíos L y K en X tales que $T(x) = L \cup K$. Como $x \in T(x)$, obtenemos que $x \in L$ o $x \in K$. Supongamos que $x \in L$. Como X es un espacio métrico, tenemos que X es normal, por lo que existen dos abiertos ajenos U y V en X tales que $L \subset U$ y $K \subset V$. Para cada $w \in \partial V$ se tiene que $w \notin T(x)$, así existe un continuo C_w tal que $w \in intC_w$ y $x \notin C_w$. Como X es compacto y ∂V es cerrado, tenemos que ∂V es compacto. Además $\{intC_w : w \in \partial V\}$ es una cubierta abierta de ∂V. De modo que existe una subcubierta finita $\{intC_{w_1},\ intC_{w_2}, \cdots,\ intC_{w_n}\}$ de ∂V. Sea $E = V \cup intC_{w_1} \cup intC_{w_2} \cup \cdots \cup intC_{w_n} = \overline{V} \cup intC_{w_1} \cup intC_{w_2} \cup \cdots \cup intC_{w_n}$. Notemos que $x \notin E$.

Probemos que

$$E \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes.}$$

Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, sea E_i la componente conexa de E que contiene a C_{w_i}.

Aseguramos que $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$. Es claro que $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \subset E$ y $C_{w_1} \cup C_{w_2} \cup \cdots \cup C_{w_n} \subset E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$.

Sean $v \in V$ y Z_v la componente conexa de V que contiene a v. Por el Teorema 1.11, $\overline{Z_v} \cap \partial V \neq \varnothing$. Como $\partial V \subset intC_{w_1} \cup intC_{w_2} \cup \cdots \cup intC_{w_n}$, tenemos que $\overline{Z_v} \cap C_{w_i} \neq \varnothing$ para alguna $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Así que $\overline{Z_v} \cup C_{w_i}$ es conexo y está contenido en E. Por tanto $Z_v \subset E_i$. Luego $\overline{V} \subset E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$. De manera que $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$. Esto muestra que E tiene a lo más n componentes.

Sean $C_{1,}$ C_2, $C_3, \cdots, C_s$ las componentes conexas de E donde $s \leq n$. Sea $y \in K \subset V$. Tenemos que $y \in C_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Definimos $W = V \cap (X - C_1) \cap (X - C_2) \cap \cdots \cap (X - C_{i-1}) \cap (X - C_{i+1}) \cap \cdots \cap (X - C_s)$.

Sea $w \in W$. De modo que $w \in V \subset C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s$ y $w \notin C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \cdots \cup C_s$, por lo que $w \in C_i$. De donde $W \subset C_i$ y $y \in W$.

Como W es intersección finita de abiertos, tenemos que W es abierto, de donde, $y \in W \subset intC_i$ y como $y \in T(x)$, podemos conluir que $x \in C_i \subset E$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(x)$ es conexo.

De modo que $T(x)$ es un subcontinuo de X. ■

Teorema 4.4 *Sea x_0 un punto en un dendroide X. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) Todo punto de X es punto inicial para x_0.
(ii) Cada punto $y \in X \setminus \{x_0\}$ es tal que $T(y) \subset X \setminus \{x_0\}$.
(iii) X es conexo en pequeño en x_0.

Demostración. $(i) \Rightarrow (iii)$ Veamos que si todo punto de X es punto inicial para x_0, tenemos que X es conexo en pequeño en x_0.

Supongamos que X no es conexo en pequeño en x_0. Esto implica que existe una vecindad W de x_0 tal que ninguna vecindad $U \subset W$ de x_0, es conexa.

Sea C la componente conexa de W que tiene a x_0.

Mostremos que $x_0 \notin int\ C$.

Supongamos que $x_0 \in int\ C$. Sabemos que C es conexa y $C \subset W$, esto contradice la forma en la que elegimos a W.

De modo que, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $[\beta_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap W] \nsubseteq C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $x_n \in [\beta_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap W] - C$.

Observemos que toda x_n pertenece a una componente conexa C_n de W tal que $C_n \neq C$.

Probemos ahora que

$$x_n x_0 \nsubseteq W, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n x_0 \subset W$.

Dado que $x_n x_0$ es un conexo, tenemos que $x_n x_0 \subset C_n$ y $x_n x_0 \subset C$. Así que $C \cap C_n \neq \varnothing$, luego $C_n = C$. Sin embargo $C_n \neq C$. Con esto se prueba (4.3).

Por construcción, tenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dado que todo punto en X es punto inicial de x_0, en especial, x_0 es punto inicial de él mismo. De modo que $\lim_{n\to\infty} x_n x_0 = x_0 x_0 = x_0$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N x_0 \subset W$. Esto contradice (4.3)

Esta contradicción surgió de suponer que X no es conexo en pequeño en x_0. Por tanto X es conexo en pequeño en x_0.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Esta implicación se probó en el Lema 3.7.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea U un abierto tal que $x_0 \in U$. Mostraremos que existe un conexo $K \subset U$ que contiene a x_0 en su interior.

Por hipótesis se sabe que toda $y \in X - U$ satisface que $x_0 \notin T(y)$. Así que para cada y en $X - U$ existe un continuo K_y que contiene a x_0 en su interior y que no contiene a y. Así $X - U \subset \bigcup_{y \in X-U} X - K_y$. Por otra parte $X - U$ es cerrado en X, lo que implica que $X - U$ es compacto. De modo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, y_2, \cdots, y_n \in X - U$ tales que

$$X - U \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X - K_{y_i}) = X - \bigcap_{i=1}^{n} K_{y_i}.$$

Esto último implica que $\bigcap_{i=1}^{n} K_{y_i} \subset U$. Sin embargo, cada K_{y_i} es un continuo y X es hereditariamente unicoherente, así que $\bigcap_{i=1}^{n} K_{y_i}$ es un continuo que contiene al punto x_0. Como cada K_{y_i} contiene a x_0 en su interior, se sigue que $\bigcap_{i=1}^{n} K_{y_i}$ tiene a x_0 en su interior. Luego X es conexo en pequeño en x_0.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que X es conexo en pequeño en x_0 y probemos que para cada punto $y \in X - \{x_0\}$ se tiene que $T(y) \subset X - \{x_0\}$.

Sea $y \neq x_0$. Tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \notin \beta_\varepsilon(x_0)$. Por hipótesis existe una vecindad conexa $U \subset \beta_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ de x_0. Dado que $\overline{U}$ es conexo y compacto, tenemos que $\overline{U}$ es un continuo que contiene a x_0 en su interior y $y \notin \overline{U}$. Se sigue que $x_0 \notin T(y)$. Por lo tanto $T(y) \subset X \setminus \{x_0\}$.

Hemos probado que (i) es equivalente a (iii) y que (iii) es equivalente (ii). La prueba queda terminada. ■

Definición 4.5 *Sea X un dendroide, se dice que un arco α contenido en X es un **arco maximal** si α no está contenido propiamente en ningún otro arco de X.*

Teorema 4.6 *Sea Y un espacio segundo numerable y $\mathfrak{K}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de Y con la propiedad de que para cada sucesión creciente $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ de elementos de $\mathfrak{K}$, existe $K \in \mathfrak{K}$ tal que $K_n \subset K$ para toda $n \geq 0$. Entonces $\mathfrak{K}$ contiene un elemento maximal en K; es decir, un elemento de $\mathfrak{K}$ que no está contenido en ningún otro elemento de $\mathfrak{K}$.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \geq 0\}$ una base numerable para la topología de Y. Fijamos $K_0 \in \mathfrak{K}$. Elegimos $K_1 \in \mathfrak{K}$ con las siguientes propiedades (suponiendo que existe):

(1) $K_0 \subset K_1$

(2) $K_1 \cap U_1 \neq \varnothing$

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathfrak{K}$, entonces hacemos $K_1 = K_0$.

De manera inductiva, elegimos $K_{n+1} \in \mathfrak{K}$ (suponiendo que existe) tal que

(1) $K_n \subset K_{n+1}$

(2) $K_{n+1} \cap U_{n+1} \neq \varnothing$

Si estas propiedades no se cumplen para ninguna $K \in \mathfrak{K}$, entonces hacemos $K_{n+1} = K_n$. Con esto terminamos la construcción de la sucesión creciente $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$

Por hipótesis tenemos que existe $K \in \mathfrak{K}$ tal que $K_n \subset K$ para toda $n \geq 0$.

Veremos que

$$K \text{ es un elemento maximal en } \mathfrak{K}. \tag{4.4}$$

Para esto supongamos que existe $K' \in \mathfrak{K}$ tal que $K \subseteq K'$ y $K \neq K'$. Tomemos un elemento x tal que $x \in K' - K$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m \subset Y - K$.

Como $K_m \subset K$, tenemos que $K_m \cap U_m = \varnothing$.

Por otra parte, $K_{m-1} \subset K'$ y $K' \cap U_m \neq \varnothing$. De acuerdo con la definición de K_m, teníamos que haber tomado a K_m con la propiedad de que $K_m \cap U_m \neq \varnothing$. Esto es una contradicción y por lo tanto K es un elemento maximal de $\mathfrak{K}$. ■

Teorema 4.7 *Sea X un dendroide. Tenemos que*

(*i*) Para toda sucesión creciente de arcos $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, existe un arco ab tal que $a_n b_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Dado un arco α en X, existe un arco maximal $\gamma \subset X$, tal que $\alpha \subset \gamma$.

Demostración. Nos concentraremos en porbar (ii), la demostración de (i) está claremente implícita en lo que haremos.

Sea $\alpha = a_0 b_0$ un arco en X. Vamos a aplicar el Teorema de Reducción de Brower a la familia $\mathfrak{K} = \{\beta : \beta \text{ es un arco en } X \text{ y } \alpha \subset \beta\}$. Para esto, tomemos una sucesión creciente $a_0 b_0 \subset a_1 c_1 \subset a_2 c_2 \subset \cdots$ de elementos de $\mathfrak{K}$. Tenemos que probar que existe un elemento de $\mathfrak{K}$ que contiene a todos estos arcos.

Elegimos una $a \in a_0 b_0 - \{a_0, b_0\}$.

Primero veremos que existe un arco ab tal que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Como X es compacto, la sucesión $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a un punto $b \in X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \overline{\bigcup\{b_n b_m : m > n\}}$. Claramente B_n es conexo y compacto, por tanto B_n es un subcontinuo de X.

Dado que B_n es un dendroide, es descomponible(ver [3, Corolario 2.16]) y por tanto se puede escribir en la forma $B_n = A_n \cup C_n$, donde A_n y C_n con subcontinuos propios de $B_.$ Como $\{b_n b_m : m > n\} \subset A_n \cup C_n$, podemos suponer que $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito.

Veremos entonces que $b_n \in A_n - C_n$.

Supongamos por el contrario que $b_n \in C_n$. Dada $x \in \bigcup\{b_n b_m : m > n\}$, tenemos que $x \in b_n b_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Como $\{k \in \mathbb{N} : b_k \in C_n\}$ es infinito, tenemos que existe $m' > m$ tal que $b_{m'} \in C_n$. Como C_n es arcoconexo, tenemos que $b_n b_{m'} \subset C_n$. Como $b_n b_m \subset b_n b_{m'}$, tenemos que $x \in b_n b_m \subset C_n$.

Hemos probado que $\bigcup\{b_n b_k : k > n\} \subset C_n$ y como C_n es cerrado, concluimos que $C_n = B_n$. Esto es una contradicciòon que nace de suponer que $b_n \in C_n$. Por lo tanto $b_n \in A_n - C_n$.

Por el Lema 2.20 existe $p \in C_n$ tal que $b_n p \cap C_n = \{p\}$ y $p \in b_n y$ para toda $y \in C_n$.

Veremos ahora que $B_n = b_n p \cup C_n$.

Sea $x \in \bigcup\{b_n b_m : m > n\}$. Como $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito, $x \in b_n b_m$ para alguna $b_m \in C_m$, por la forma en que elegimos a p, $p \in b_n b_m$. Entonces $x \in b_n p \cup p b_m$. De manera que $x \in b_n p \cup C_n$. Por tanto $\bigcup\{b_n b_m : m > n\} \subset b_n p \cup C_n$, como este conjunto es cerrado, concluimos que $B_n = b_n p \cup C_n$.

Como $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in C_n\}$ es infinito y C_n es cerrado, tenemos que $b \in C_n$.

Por el Lema 2.20 existe $q \in B_n$ tal que $aq \cap B_n = \{q\}$ y $q \in ay$ para toda $y \in B_n$.

Aseguramos que $q = b_n$.

Tomemos $m > n$ tal que $b_m \in C_n$. Tomamos el orden natural del arco ab_m que cumple que $a < b_m$.

Por hipótesis, $ab_n \subset ab_m$. Así que $b_n \in B_n$, $q \in ab_n$. Por la elección de p, tenemos que $p \in b_n b_m$. Por tanto, $a \leq q \leq b_n < b_m$. Si ocurre que $q \in C_n$, entonces $b_n \in qb_m \subset C_n$. Esto es una contradicción pues ya habíamos probado que $b_n \notin C_n$. Por tanto $q \notin C_n$. Como $q \in B_n = b_n p \cup C_n$, tenemos que $q \in b_n p$. Esto prueba que $b_n \leq q$. Por tanto $b_n = q$.

Ya que $b_n \in B_n$, por la propiedad que define a q, concluimos que $b_n = q \in ab$.

Hemos probado que $b_n \in ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $ab_n \subset ab$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Dada $k \in \mathbb{N}$, existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > k$ y $c_m = b_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces $ac_k \subset ac_m = ab_n \subset ab$. Esto muestra que $ac_k \subset ab$ para toda $k \in \mathbb{N}$. De manera análoga existe $g \in X$ tal que $a_k a \subset ga$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Queremos ver que el arco gb contiene a todos los arcos $a_k c_k$.

Primero veremos que $a \in gb$. Para esto basta mistrar que $ga \cap ab = \{a\}$.

Supongamos, por el contrario, que existe un punto $x \in ga \cap ab - \{a\}$. entonces $xa \subset ga \cap ab$. Como $a_0 \in ga - \{a\}$ y $b_0 \in ab - \{b\}$, tenemos que existe un punto $y \in ax \cap a_0 a \cap ab_0 - \{a\}$. Esto es una contradicción puesto que $a_0 a \cap ab_0 = \{a\}$. Con esto hamos probado que $a \in gb$.

Entonces $ac_k \subset ab \subset gb$ y $a_k a \subset ga \subset gb$. Por tanto $a_k c_k \subset gb$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Como X es un espacio separable, podemos aplicar el Teorema de Reducción de Brower a la familia $\mathfrak{K}$. De modo que $\mathfrak{K}$ contiene un elemento maximal γ. ■

Definición 4.8 *Decimos que un dendroide tiene la **propiedad** Γ si para cualesquiera $x, y \in X$, con $x \neq y$, se tiene que $T(x) \cap xy = \{x\}$ o $T(y) \cap xy = \{y\}$ o $T(x) \cap T(y) = \varnothing$.*

Teorema 4.9 *Un dendroide X es puntualmente suave si y solo si X tiene la propiedad Γ.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea X un dendroide y supongamos que X no tiene la propiedad Γ, es decir, existen dos puntos $x, y \in X$ tales que

$$T(x) \cap xy \neq \{x\} \text{ y } T(y) \cap xy \neq \{y\} \text{ y } T(x) \cap T(y) \neq \varnothing. \qquad (4.5)$$

Hagamos tres observaciones.

Probaremos que

$$xy \cap T(x) \cap T(y) \neq \varnothing. \tag{4.6}$$

Sabemos que, por el Lema 4.3 $T(x)$ y $T(y)$ son subdendroides de X. Por (4.5) $T(x) \cap T(y) \neq \varnothing$, de modo que $T(x) \cup T(y)$ es un subdendroide de X.

Como $x, y \in T(x) \cup T(y)$. Así que $xy = [xy \cap T(x)] \cup [xy \cap T(y)]$. Como xy es conexo, $[xy \cap T(x)] \cap [xy \cap T(y)] \neq \varnothing$. Esto prueba (4.6).

Tomemos $z \in xy \cap T(x) \cap T(y)$. Como X es puntualmente suave y $z \in X$, existe un punto inicial p_z de z en X.

Mostraremos que

$$xy \subset zp_z. \tag{4.7}$$

Probaremos que $x \in zp_z$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $U_n = \beta_{\frac{1}{n}}(z)$ y $V_n = \overline{\bigcup_{t \in U_n} zt}$. Dado que, para toda $t \in U_n$, zt es conexo y $z \in zt$, tenemos que $\bigcup_{t \in U_n} zt$ es conexo, lo que implica que V_n es conexo. Además V_n es compacto por ser cerrado en X, que es compacto.

Por otra parte, tenemos que $x, y \in V_n$ pues $z \in intV_n$ y $z \in T(x) \cap T(y)$. Lo que implica que yz y xz están contenidos en V_n.

Dado que $z \in T(x)$, $x \in V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que $\beta_{\frac{1}{n}}(x) \cap \left[\bigcup_{t \in U_n} zt\right] \neq \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in U_n$ tal que $a_n z \cap \beta_{\frac{1}{n}}(x) \neq \varnothing$. Elegimos un punto $b_n \in a_n z \cap \beta_{\frac{1}{n}}(x)$.

Notemos que las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a z y x respectivamente.

Observemos que

$$\liminf za_n \subset \liminf [zp_z \cup p_z a_n] = zp_z \cup \liminf p_z a_n$$

Como p_z es el punto inicial de z, tenemos que $p_z z = \lim_{n\to\infty} p_z a_n = \liminf p_z a_n$. De modo que

$$\liminf za_n \subset zp_z.$$

Dado que $b_n \in a_n z$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = x$, tenemos que $x \in \liminf za_n$. Luego $x \in zp_z$.

De manera similar, se prueba que $y \in zp_z$.

Sabemos que zp_z es un continuo que contiene a x y y. Por tanto $xy \subset zp_z$. Esto termina la prueba de (4.7).

Por último veremos que

$$z = x \text{ o } z = y. \tag{4.8}$$

Tenemos que $xy \subset zp_z$ y que $z \in xy$, lo que implica que $z = x$ o $z = y$.

Como z es un punto arbitrario en $xy \cap T(x) \cap T(y)$. Por (4.8), obtenemos que

$$xy \cap T(x) \cap T(y) \subset \{x, y\}\,. \tag{4.9}$$

Dado que $xy \cap T(x) \cap T(y)$ es una intersección de continuos, tenemos que $xy \cap T(x) \cap T(y) = \{x\}$ o $xy \cap T(x) \cap T(y) = \{y\}$.

Supongamos que $xy \cap T(x) \cap T(y) = \{x\}$. Entonces x e y pertenecen a $T(y) \cap xy$, se sigue que $xy \subset T(y) \cap xy$. De modo que

$$xy \cap T(x) \subset [T(y) \cap xy] \cap T(x).$$

Por (4.5), $xy \cap T(x) \neq \{x\}$, lo que implica que $xy \cap T(y) \cap T(x) \neq \{x\}$.

De modo que $xy \cap T(x) \cap T(y) = \{y\}$. Sin embargo, procediendo de manera parecida, llegamos a que $xy \cap T(y) \cap T(x) \neq \{y\}$.

Esta contradicción se obtuvo de suponer que X no tiene la propiedad Γ. Por lo tanto sí la tiene.

$\Leftarrow$] Supongamos que X tiene la propiedad Γ. Mostraremos que X es puntualmente suave.

Sea x en X fijo, podemos dividir el problema en dos casos.

(i) X es conexo en pequeño en x.

Por el Teorema 4.4 se tiene que x es punto inicial de sí mismo.

(ii) X no es conexo en pequeño en x.

Por el Teorema 4.4, existe un punto $y_0 \neq x$ tal que $x \in T(y_0)$. A continuación haremos algunas afirmaciones para poder completar la prueba.

Sea $Z = \{y \in X : x \in T(y)\}$. Observemos que $Z \neq \varnothing$ ya que x y y_0 pertenecen a Z.

Probaremos que para cada $y, z \in Z$ se tiene que

$$z \in xy \text{ o } y \in xz. \tag{4.10}$$

Por definición $x \in T(z) \cap T(y)$. Por el Teorema 2.20, existe $t \in xy$ tal que $zt \cap xy = \{t\}$ y que $t \in zw$ para toda $w \in xy$. Si ocurriera que $z = t$, tendríamos que $z \in xy$ y entonces se cumpliría (4.10). Supongamos entonces que $z \neq t$. En particular $z \neq y$. Tenemos dos casos.

(i) $\quad t = y$.

En este caso tenemos que $y \in xz$.

(ii) $\quad t \neq y$.

Dado que $x, z \in T(z)$ y $T(z)$ es un dendroide tenemos que $xz \subset T(z)$, así que $tz \subset T(z) \cap yz$. De manera parecida obtenemos que $ty \subset T(y) \cap yz$. Luego $T(z) \cap yz \neq \{z\}$ y $T(y) \cap yz \neq \{y\}$. Además, tomemos en cuenta que y y z pertenecen a Z, de modo que $T(z) \cap T(y) \neq \varnothing$. Las tres últimas expresiones contradicen el que X tenga la propiedad Γ. Por tanto este caso no es posible. Esto completa la prueba de (4.10).

Mostraremos ahora que

$$Z \text{ es compacto.} \tag{4.11}$$

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Z que converge a un punto y. Tenemos que $x \in T(y_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $K \in C(X)$ tal que $x \in intK$. Luego $y_n \in K$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $y \in K$. Esto implica que $y \in Z$. De modo que Z es cerrado en X. Luego Z es compacto.

Ahora veremos que

$$Z \text{ está contenido en un arco de la forma } xz. \tag{4.12}$$

Sea $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(z) = \mu(xz)$, donde $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney. Sea $s_0 = \sup\limits_{z\in Z}\varphi(z)$ y sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Z tal que $s_0 = \lim\limits_{n\to\infty} p(z_n)$. Podemos suponer que $\varphi(z_1) < \varphi(z_2) < \varphi(z_3) < \cdots$. Por (4.10) tenemos que $xz_1 \subset xz_2 \subset \cdots$ Por el Teorema 4.7 tenemos que existe $c \in X$ tal que $xz_n \subset xc$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De la compacidad de Z, podemos suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Ya que el arco xc es suave en todos sus puntos y $xz_n \subset xc$, para toda n, tenemos que $z \in xc$ y $\lim\limits_{n\to\infty} xz_n = xz$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(xz_n) = \mu(xz)$. Así que $s_0 = \mu(xz)$. Dada $y \in Z$, $\mu(xy) \leq s_0 = \mu(xz)$. Entonces, por (4.10), $xy \subset xz$. Hemos probado que $Z \subset xz$.

Ahora probemos que

$$z \text{ es un punto inicial de } x. \tag{4.13}$$

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge al punto x. Por el Lema 2.30 sabemos que $\liminf x_n z$ es arcoconexo. Como x y z pertenecen a $\liminf x_n b$, tenemos que

$$xz \subset \liminf x_n z \subset \limsup x_n z.$$

Sea $K \in C(X)$ tal que $x \in int(K)$. Tenemos que, por definición, $z \in K$. Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $x_n \in K$. Así $x_n z \subset K$ para toda $n > N$.

Probemos que $\limsup x_n z \subset K$.

Sea $y \in \limsup x_n z$. Por el Lema 2.36 existe una subsucesión $\{n_i\}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $y_i \in x_{n_i} z$ y $\lim_{i\to\infty} y_i = y$. Como $y_i \in K$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y K es cerrado, tenemos que $y \in K$. Por tanto $\limsup x_n z \subset K$.

Como consecuencia de lo anterior, si $r \in \limsup x_n z$, entonces $r \in K$, así que $x \in T(r)$, es decir, $r \in Z$. Y como $Z \subset xz$. Concluimos que

$$\limsup x_n z \subset xz.$$

Deducimos que $\lim_{n\to\infty} x_n z$ existe y es igual a xz. De modo que z es un punto inicial de x.

Por lo tanto X es puntualmente suave. ■

Corolario 4.10 *Un dendroide X es puntualmente suave si y sólo si para toda $x \in X$ existe un punto p_x en X que cumple las siguientes dos condiciones.*

i) *Toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x es tal que $\lim_{n\to\infty} p_x x_n = p_x x$*

ii) $x \in T(p_x)$

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea x en X. Veamos los casos.

(1) X es conexo en pequeño en x.

Por el Teorema 4.4 se tiene que todo punto en X es punto inicial para x, en especial x es punto inicial de sí mismo y cumple con que $x \in T(x)$.

(2) X no es conexo en pequeño en x.

Sea $Z = \{y \in X : x \in T(y)\}$. De las afirmaciones (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13) del teorema anterior tenemos que existe un punto $b \in X$ tal que b es un punto inicial de x y $x \in T(b)$.

En ambos casos se cumplen las dos condiciones.

$\Leftarrow]$ Observemos que para hacer esta implicación no es necesaria la segunda condición, la forma en la que se define p_x con respecto de x es precisamente la defiición de punto inicial para x, así que X es puntualmente suave. ■

Definición 4.11 *Dados dos subcontinuos ajenos A y B de un continuo X, definimos **el arco irreducible entre** A **y** B como $I(A,B) = A \cup B \cup a_0 b_0$ donde $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y son tales que $a_0 b_0 \cap A = \{a_0\}$ y $a_0 b_0 \cap B = \{b_0\}$.*

Observemos que si Y es un subcontinuo de X tal que A y B están contenidos en Y, entonces el arco $a_0b_0 \subset Y$. Por tanto no hay un subcontinuo propio de $I(A,B)$ que contenga $A \cup B$. Así que podemos decir que $I(A;B)$ es irreducible respecto a $A \cup B$.

Corolario 4.12 *X es un dendroide puntualmente suave si y sólo si para todo par de subcontinuos ajenos A y B en X se tiene que alguna de las tres ecuaciones siguientes se cumple*
(i) $\quad T(A) \cap I(A,B) = A$
(ii) $\quad T(B) \cap I(A,B) = B$
(iii) $\quad T(A) \cap T(B) = \varnothing$

Demostración. $\Leftarrow$] Para probar que X es puntualmente suave sólo falta ver que tiene la propiedad Γ.

En especial sabemos que para cualesquiera dos puntos x, y en X se tiene que $\{x\}$ y $\{y\}$ pertenecen a $C(X)$, además cumplen que $\{x\} \cap \{y\} = \varnothing$. Observemos que $I(\{x\}, \{y\}) = xy$. Por hipótesis, $T(\{x\}) \cap I(\{x\}, \{y\}) = \{x\}$ o $T(\{y\}) \cap I(\{x\}, \{y\}) = \{y\}$ o $T(\{x\}) \cap T(\{y\}) = \varnothing$. Por el Teorema 4.9 se tiene que X es puntualmente suave.

$\Rightarrow$] Sean X un dendroide puntualmente suave, A y B dos subcontinuos ajenos de X y a_0, b_0 dos puntos en A y B respectivamente tales que $I(A,B) = A \cup B \cup a_0b_0$.

Supongamos que (i) y (ii) no se satisfacen, es decir,

$$\{T(A) \cap I(A,B)\} - A \neq \varnothing \text{ y } \{T(B) \cap I(A,B)\} - B \neq \varnothing \tag{4.14}$$

Probaremos que se cumple (iii), es decir, $T(A) \cap T(B) = \varnothing$.

A continuación probaremos que

$$T(A) \cap a_0b_0 = T(a_0) \cap a_0b_0 \text{ y } T(B) \cap a_0b_0 = T(b_0) \cap a_0b_0 \tag{4.15}$$

Dado que $a_0 \in A$, tenemos que $T(a_0) \subseteq T(A)$. Luego

$$T(a_0) \cap a_0b_0 \subseteq T(A) \cap a_0b_0$$

Sólo falta probar que $T(A) \cap a_0b_0 \subseteq T(a_0) \cap a_0b_0$. Sea $z \in T(A) \cap a_0b_0$. Sea K un continuo que contiene a z en su interior. Entonces $K \cap A \neq \varnothing$.

Probaremos que $z \in T(a_0)$. Para esto sólo tenemos que ver que $a_0 \in K$. Tomemos en cuenta dos casos.

– $z = a_0$

En este caso, $z \in T(a_0) \cap a_0b_0$. Entonces $a_0 \in K \cap A$.

– $z \neq a_0$

Recordemos que a_0 es tal que $a_0b_0 \cap A = \{a_0\}$. Dado que $z \in a_0b_0$, tenemos que $a_0 \in za$ para toda $a \in A$. Sea $a \in K \cap$. Luego z, $a \in K$, así $za \subset K$, lo que implica que $a_0 \in K$.

En ambos casos obtuvimos que $a_0 \in K$, así que $z \in T(a_0)$. Luego $z \in T(a_0) \cap a_0b_0$. Por tanto

$$T(A) \cap a_0b_0 \subseteq T(a_0) \cap a_0b_0$$

De la doble contención concluimos que $T(A) \cap a_0b_0 = T(a_0) \cap a_0b_0$.

La prueba para la igualdad $T(B) \cap a_0b_0 = T(b_0) \cap a_0b_0$ se hace de forma similar.

Ahora veremos que

$$T(A) \cap B = \varnothing \text{ y } T(B) \cap A = \varnothing. \tag{4.16}$$

Supongamos por el contrario que $T(A) \cap B \neq \varnothing$. Probaremos que $b_0 \in T(A) \cap B$.

Sabemos que $T(A) \cap B$ es un subdendroide de X. Por el Teorema 2.20, existe $c_0 \in T(A) \cap B$ tal que $a_0c_0 \cap [T(A) \cap B] = \{c_0\}$.

Veamos que $c_0 = b_0$.

Recordemos que b_0 es tal que $a_0b_0 \cap B = \{b_0\}$ y $b_0 \in a_0b$ para toda $b \in B$.Como $c_0 \in B$, $b_0 \in a_0c_0$.

Como a_0 y c_0 pertenecen a $T(A)$, tenemos que $a_0c_0 \subset T(A)$, así que $b_0 \in T(A) \cap B$. De modo que $c_0 \in a_0b_0$. Así que $c_0 = a_0$ o $c_0 = b_0$, pero $a_0 \notin B$, luego $b_0 = c_0$.

De este modo tenemos que a_0 y b_0 están en $T(A)$, se sigue que $a_0b_0 \subset T(A)$. Luego $T(A) \cap a_0b_0 = a_0b_0$. En especial se tiene que $b_0 \in T(A) \cap a_0b_0$. Por (4.15) tenemos que $b_0 \in T(a_0) \cap a_0b_0$. Así que $b_0 \in T(a_0)$ y $b_0 \in T(b_0)$, luego $T(a_0) \cap T(b_0) \neq \varnothing$.

Por hipótesis sabemos que $T(a_0) \cap a_0b_0 \neq \{a_0\}$ y $T(b_0) \cap a_0b_0 \neq \{b_0\}$. Además $T(a_0) \cap T(b_0) \neq \varnothing$, así que X no tiene la propiedad Γ. Por el Teorema anterior X no puede ser puntualmente suave. Por lo tanto $T(A) \cap B = \varnothing$. De forma similar se prueba que $T(B) \cap A = \varnothing$. Hemos probado (4.16).

A continuación haremos una serie de igualdades importantes en esta prueba.

Notemos que $T(A) \cap I(A,B) \neq \varnothing$ ya que $a_0 \in T(A) \cap I(A,B)$. Además,

$$T(A) \cap I(A,B) = T(A) \cap [A \cup B \cup a_0b_0].$$

Lo que a su vez es igual a $[T(A) \cap A] \cup [T(A) \cap B] \cup [T(A) \cap a_0b_0]$.
Dado que $T(A) \cap B = \varnothing$ y que $A \subset T(A)$,

$$T(A) \cap [A \cup B \cup a_0b_0] = [T(A) \cap a_0b_0] \cup A.$$

Por (4.15) tenemos que $T(A) \cap a_0b_0 = T(a_0) \cap a_0b_0$, así que

$$[T(A) \cap a_0b_0] \cup A = [T(a_0) \cap a_0b_0] \cup A.$$

Lo que implica que

$$T(A) \cap I(A,B) = [T(a_0) \cap a_0b_0] \cup A.$$

De forma análoga se prueba que $T(B) \cap I(A,B) = [T(b_0) \cap a_0b_0] \cup B$.
Recordemos que A y B son ajenos, así que

$$T(A) \cap T(B) \cap I(A,B) = [T(A) \cap I(A,B)] \cap [T(B) \cap I(A,B)].$$

Lo que a su vez es igual a

$$\{[T(a_0) \cap a_0b_0] \cup A\} \cap \{[T(b_0) \cap a_0b_0] \cup B\}. \tag{4.17}$$

Sabemos que $T(a_0) \cap a_0b_0 \subset T(A)$ y que $T(b_0) \cap a_0b_0 \subset B$, además por (4.16) tenemos que $T(A) \cap B = \varnothing$ y $T(B) \cap A = \varnothing$. Luego $[T(a_0) \cap a_0b_0] \cap B = \varnothing$ y $[T(b_0) \cap a_0b_0] \cap A = \varnothing$

De esta forma obtenemos que (4.17) es igual a

$$T(a_0) \cap T(b_0) \cap a_0b_0.$$

Hemos visto que

$$T(A) \cap T(B) \cap I(A,B) = T(a_0) \cap T(b_0) \cap a_0b_0. \tag{4.18}$$

A continuación probaremos que

$$T(a_0) \cap a_0b_0 \neq \{a_0\} \text{ y } T(b_0) \cap a_0b_0 \neq \{b_0\}. \tag{4.19}$$

Sabemos que $T(A)\cap I(A,B)=[T(a_0)\cap a_0b_0]\cup A$. Además, por hipótesis, se tiene que $\{T(A)\cap I(A,B)\}-A\neq\varnothing$. Luego

$$\{[T(a_0)\cap a_0b_0]\cup A\}-A=\{T(A)\cap I(A,B)\}-A\neq\varnothing.$$

Obsservemos que $\{[T(a_0)\cap a_0b_0]\cup A\}-A=[T(a_0)\cap a_0b_0]-A$ es distinto de vacío. Además $a_0\in A$.

Luego $[T(a_0)\cap a_0b_0]-\{a_0\}\neq\varnothing$, es decir,

$$T(a_0)\cap a_0b_0\neq\{a_0\}\,.$$

De forma similar se prueba que $T(b_0)\cap a_0b_0\neq\{b_0\}$ .Hemos probado (4.19).

Ahora estamos listos para concluir la prueba.

Como X es puntualmente suave, por el Teorema 4.9, $T(a_0)\cap T(b_0)=\varnothing$. Así $T(a_0)\cap T(b_0)\cap a_0b_0=\varnothing$. De (4.18) se deduce que

$$T(A)\cap T(B)\cap I(A,B)=\varnothing \tag{4.20}$$

Estamos listos para probar que $T(A)\cap T(B)=\varnothing$.

Supongamos que $T(A)\cap T(B)\neq\varnothing$. Sea $z\in T(A)\cap T(B)$.

Como $I(A,B)$ es un subdendroide de X entonces por el Teorema 2.20 existe $r\in I(A,B)$ tal que $zr\cap I(A,B)=\{r\}$ y $r\in zy$ para toda $y\in I(A,B)$.

Fijémonos en que los puntos z y a_0 pertenecen a $T(A)$ y los puntos z y b_0 pertenecen a $T(B)$. Dado que $T(A)$ y $T(B)$ son dendroides $za_0\subset T(A)$ y $zb_0\subset T(B)$. Sabemos que $r\in za_0$ y que $r\in zb_0$, así que $r\in T(A)\cap T(B)$. Pero $r\in I(A,B)$, de modo que $T(A)\cap T(B)\cap I(A,B)\neq\varnothing$. Lo que contradice (4.20). Por tanto se tiene que $T(A)\cap T(B)=\varnothing$.

De esta forma se ha probado que en caso de que no se cumpla (i) o (ii) entonces se cumple (iii). El teorema queda probado. ■

Bibliografía

[1] Czuba, Stanislau, On pointwise smooth dendroids, Fund. Math.114 (1981), no. 3, 197–207.

[2] García Maynez, Adalberto, Topología General. México, Porrúa Editores, 1988.

[3] Guzmán Tristán, Araceli Dendroides y la Propiedad de Kelley, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F. 2002

[4] Hocking, John G and Young, Gail S. Topology. EUA, Dover, 1961

[5] Illanes, Alejandro. Hiperespacios de Continuos. México, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] Prieto, Carlos. Topología Básica. México, Fondo de Cultura Económica, 2003.

[7] Willard, Stephen. General Topology. EUA, Dover, 2004.