



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

**“Estudio Sistemático de las Discontinuidades  
que Ocurren en la Modelación de  
Yacimientos Petroleros”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :**

**M A T E M Á T I C O**

**P R E S E N T A :**

**ALFREDO OLVERA GÓMEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:**

**DR. ISMAEL HERRERA REVILLA**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Apellido paterno: Olvera  
Apellido materno: Gómez  
Nombre: Alfredo  
Teléfono: 56760562  
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad o escuela: Facultad de Ciencias  
Carrera: Matemáticas  
No. De cuenta: 97586005

### **DATOS DEL TUTOR**

Grado: Dr  
Nombre: Ismael  
Apellido materno: Revilla  
Apellido paterno: Herrera

### **DATOS DEL SINODAL**

Grado: Dr  
Nombre: Manuel Jesús  
Apellido materno: Falconi  
Apellido paterno: Magaña

### **DATOS DEL SINODAL**

Grado: Dr  
Nombre: Guillermo  
Apellido materno: García  
Apellido paterno: Hernández

### **DATOS DEL SINODAL**

Grado: M en C  
Nombre: Antonio  
Apellido materno: Carrillo  
Apellido paterno: Ledesma

### **DATOS DEL SINODAL**

Grado: Mat  
Nombre: Agustín Alberto  
Apellido materno: Rosas  
Apellido paterno: Medina

### **DATOS DE LA TESIS**

Tituló: Estudio Sistemático de las Discontinuidades que Ocurren  
en la Modelación de Yacimientos Petroleros  
No. de paginas: 90 p  
Año: 2008

*Dedicado a*

*A mi madre:*

*Minerva Gómez González, por ser el sol de mi vida, por darme tanta sabiduría y amor. Por enseñarme lo valioso que es el conocimiento en la vida.*

*A mis hermanos:*

*Gabriela, Virginia, Raúl, Víctor, Minerva, Pilar, Javier, Eduardo y Verónica, por el amor y apoyo que me han brindado durante mi vida.*

## *Agradecimientos*

*Quiero agradecer a mi director de tesis el Dr. Ismael Herrera Revilla que por su gran sabiduría, logro enseñarme los paradigmas del pensamiento matemático que son: claridad, generalidad y sencillez, por mostrarme los caminos de la matemática aplicada, así como el apoyo brindado para la realización de este trabajo. Al instituto de geofísica de la UNAM, en la cual tuve un espacio físico y una beca para el desarrollo de esta tesis. A la facultad de Ciencias de la UNAM por brindarme una educación sólida y permitirme ser parte de ella. A mis sinodales Dr. Manuel Falconi Magaña, Dr. Guillermo Hernández García, M en C Antonio Carrillo Ledesma, Mat. Alberto Rosas Medina que gracias a su amables asesorías y brillantes consejos que fueron fundamentales en la conclusión de este trabajo de tesis.*

*También sin hacer menos quiero agradecer a mis amigos y compañeros, Francisco Pliego, Israel Sánchez, Julio Cruz, Víctor Velásquez, Edgar Rangel, Luis Acosta, Lenin Hernández, Felipe Pérez, Detmar Yañez, Rodrigo Hernández, Rafael Manzanares, Jesús Hernández, Ana Mendoza, Nora Pérez, Silvestre Cárdenas, Ernesto Rubio. A todos mis amigos que tuve la suerte de compartir una periodo de tiempo muy importante en mi vida.*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Generalidades . . . . .	6
1.2. Antecedentes . . . . .	7
1.3. Objetivos . . . . .	9
<b>2. Formulación Unificada de los Modelos Matemáticos de Sistemas Continuos</b>	<b>11</b>
2.1. Los Modelos . . . . .	11
2.1.1. Física Microscópica y Física Macroscópica . . . .	12
2.2. Cinemática de los Modelos de Sistemas Continuos . . . .	13
2.2.1. Propiedades Intensivas y sus Representaciones . .	15
2.2.2. Propiedades Extensivas . . . . .	17
2.2.3. Balance de Propiedades Extensivas e Intensivas .	19
2.3. Los Modelos de los Sistemas Continuos . . . . .	23
2.3.1. Ejemplos de Modelos . . . . .	26
<b>3. Descripción del Yacimiento Petrolero.</b>	<b>30</b>
3.1. Clasificación del Yacimiento Petrolero . . . . .	30
3.2. Propiedades de los Fluidos . . . . .	37
3.3. Propiedades Roca-Fluido. . . . .	44
3.4. Ciclo de Vida de un Yacimiento Petrolero . . . . .	51
3.4.1. Recuperación Primaria . . . . .	51
3.4.2. Recuperación Secundaria . . . . .	56
<b>4. Modelo Beta o de Petróleo Negro.</b>	<b>58</b>
4.1. La Ley de Darcy . . . . .	62
4.2. Flujo de Fluidos en Medios Porosos. . . . .	65
4.3. Condiciones Iniciales y de Frontera . . . . .	66
<b>5. Diferentes Clases de Choques de la Ingeniería Petrolera: Buckey-Leverett y Choques en Yacimientos Petroleros.</b>	<b>69</b>
5.1. Desplazamiento Insoluble . . . . .	71
5.1.1. Formación de Choques en Desplazamientos In- solubles. . . . .	77
5.2. Desplazamiento Parcialmente Soluble . . . . .	78
5.2.1. Principio de Conservación de Punto de Burbuja .	79
5.2.2. Generación de Choques . . . . .	80
<b>6. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>7. Apéndice</b>	<b>87</b>



## Nomenclatura

Los símbolos y abreviaturas usadas a lo largo del presente trabajo están definidas en la siguiente tabla:

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$f_w$	Coficiente de flujo fraccional de la fase no mojante
$\varepsilon$	Porosidad
$g$	Vector gravitacional
$g_c$	Constante de converción, $g_c=322\text{lbm}=\text{lbf ft sec}^2$
$k$	Permeabilidad
$k_{rl}$	Permeabilidad relativa en la fase $l$
$M_l$	Masa en la fase $l$
$P_c$	Presion capillar
$P_{cl}$	Presión capillar en la fase $l$
$p$	Presión
$p_l$	Presión en la fase $l$
$R_s$	Razón petróleo-gas
$S_l$	Saturación en la fase $l$
$U$	Velocidad de Darcy
$V$	Volumen
$u_l$	Velocidad de Darcy para flujo multifásico
$u_T$	Velocidad total de Darcy
$\varepsilon$	Porosidad
$\mu$	Viscosidad
$\rho$	Densidad del fluido
<b>Sub-índice</b>	<b>descripción</b>
$dg$	Gas disuelto
$f$	Fluido
$STC$	Condiciones estándar o tanque de reserva
$T$	Total
$l$	Componente o fase, $l = o; g; w$ ( petróleo, gas y agua)



## **Prefacio**

Este trabajo está enfocado a describir los mecanismos por los cuales se generan los choques en un yacimiento petrolero, tomando en cuenta de que los choques, son cambios muy rápidos tanto en la presión como en otras propiedades del fluido. Una forma de hallar solución a estos problemas es haciendo uso de las herramientas matemáticas para obtener un modelo que describa este fenómeno. En particular se utilizará la teoría de Buckley-Leverett que ha sido una gran herramienta para entender los choques en desplazamiento insoluble. También observaremos el modelo de choques en desplazamiento parcialmente soluble y la relación que con los problemas que existen en la ingeniería petrolera con la variable de punto de burbuja.

La estructura del presente trabajo está dada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 está dada la Introducción, en la cual se muestra la importancia de los modelos matemáticos en sistemas de interés para la humanidad, así también se plantea el modelo a trabajar en esta tesis, y se da referencia de algunos trabajos especializados en el mismo modelo.

En el capítulo 2, La Formulación de los Modelos de Sistemas Continuos, se presenta de manera general las bases para los modelos de sistemas continuos.

En el capítulo 3, Descripción del Yacimiento Petrolero, se definirán conceptos y propiedades importantes de la roca y las propiedades de los fluidos que son variables que afectan el comportamiento del yacimiento petrolero.

En el capítulo 4, Modelo Beta o de Petróleo Negro, se toma como hipótesis el modelo beta o de petróleo negro que es un caso particular del flujo multifásico composicional y se hace uso de la formulación de los modelos de los sistemas continuos para poder desarrollar la ecuaciones que gobiernan dicho modelo.

En el capítulo 5, Diferentes Clases de Choques de la Ingeniería Petrolera: Buckley-Leverett y Choques en Yacimientos Petroleros, se hace uso de las ecuaciones que planteadas en el capítulo 4 y con base en la clasificación de las posibles mezclas que pueden existir se hace un análisis detallado de cada caso para poder identificar cuales son los mecanismos

por los cuales se generan las discontinuidades, es decir, los choques en los yacimientos petroleros de tipo beta o petróleo negro.

## 1. Introducción

### 1.1. Generalidades

La necesidad de entender y anticiparse a los acontecimientos, tiene raíces muy profundas en el ser humano. El medio más efectivo para predecir el comportamiento de la naturaleza es el método científico y es por eso que este anhelo humano ancestral ha sido, a través de la historia, un motor del progreso de la ciencia. El estudio de las ecuaciones diferenciales es una hermosa aplicación en las ideas y procedimientos de nuestra vida cotidiana nos ayuda a entender el entorno y anticiparnos a posibles resultados de nuestro futuro, nos da una visión acerca de la naturaleza de la investigación matemática contemporánea. El método de investigación que caracteriza esta rama de la ciencia es matemático y reúne las siguientes características: claridad, generalidad y sencillez.

De ellas, llamadas paradigmas del pensamiento matemático, se derivan grandes ventajas. La claridad de pensamiento da seguridad. Al abordar sistemas tan diversos como los que intervienen en las actividades humanas, la generalidad permite una gran economía de esfuerzo. Y la sencillez, que es la magia de convertir lo complicado y difícil en sencillo y fácil, al simplificar el tratamiento de los sistemas complicados abre la puerta para abordar los aún más complejos.

Para la predicción científica se adopta un método también muy general: *la modelación*, la cual se entiende por modelo como un sustituto del sistema original, de cuyo comportamiento es posible derivar el del sistema de interés. En particular, se estudiarán modelos matemáticos de los sistemas de interés en ciencia e ingeniería. Los modelos matemáticos de los sistemas continuos son ecuaciones diferenciales, las cuales son parciales (con valores iniciales y condiciones de frontera) para casi todos los sistemas de mayor interés en la ciencia y la ingeniería, o sistemas de tales ecuaciones. Salvo para los problemas más sencillos, no es posible obtener por métodos analíticos las soluciones de tales ecuaciones, que son las que permiten predecir el comportamiento de los sistemas.

La capacidad para formular los modelos matemáticos de sistemas

complicados y de gran diversidad, es sin duda una contribución fundamental para el avance de la ciencia y sus aplicaciones, tal contribución quedaría incompleta y, debido a ello, sería poco fecunda, si no se hubiera desarrollado simultáneamente su complemento esencial: los métodos matemáticos y la computación electrónica. En cambio, la diversidad y complejidad de problemas que pueden ser tratados con métodos numéricos y computacionales es impresionante.

Los modelos de los sistemas continuos de la física macroscópica tales como los yacimientos petroleros, la atmósfera, los campos electromagnéticos, los océanos, los metalúrgicos, el aparato circulatorio de los seres humanos, la corteza terrestre, los suelos y las cimentaciones, muchos sistemas ambientales, y muchos otros cuya enumeración ocuparía un espacio enorme contienen un gran número de grados libertad.

Entendemos por un yacimiento petrolero es una área que está constituido por medios porosos, generalmente de origen sedimentario, en cuyos poros se almacenan fluidos, los cuales contienen hidrocarburos. Frecuentemente, en los poros de un yacimiento petrolero coexisten varias fases agua, petróleo y gas.

## **1.2. Antecedentes**

Antes de discutir los diferentes clases de choques, es necesario entender que los ‘choques’, son cambios muy rápidos tanto en la presión como en otras propiedades del fluido, los cuales en los modelos en que se desprecia la viscosidad, se simulan con discontinuidades

También es necesario distinguir entre desplazamiento soluble e insoluble. Por desplazamiento insoluble se entiende al proceso en cual las diferentes fases involucradas no hay una mezcla total entre ellas. Por desplazamiento soluble se entiende que sólo está formado por una sola fase, es decir que su mezcla es completa. Otra situación que puede ocurrir (ver [5]), nos referimos a ella como "mezcla parcial", este es el caso cuando dos o más fases pueden intercambiar masas, pero en la cual no hay una mezcla total, así que cada una de las diferentes fases mantienen su propiedades químicas. Esto pasa en yacimientos que contienen petróleo

y gas soluble (lo que analizaremos en este trabajo?, esto ocurre cuando el punto de burbuja variable en la fase gaseosa esta presente, dentro de la región modelada.

En previos trabajos (ver [5]), los diferentes procesos de generación de choques ocurren en flujo multifásico, en este proceso de búsqueda se han identificado, dos diferentes procesos que generan choques, el primero tiene lugar en el desplazamiento insoluble y esto sucede cuando en la solución de las ecuaciones existe intersección en las características, por otro lado el segundo caso toma en el desplazamiento parcialmente soluble.

El punto de comienzo para poder entender los choques en el desplazamiento insoluble fue desarrollada por la teoría clásica de Buckley-Leverett (ver [1]-[2]), los cuales fueron más lejos e iluminados por el trabajo Cardwell y Sheldon (ver [3]-[4]), quienes explican claramente la razón de cambio estimada en la cual el agua es inyectada a través de un medio poroso. La aproximación hace uso de la teoría de flujo fraccional y se basa en las siguientes suposiciones:

- El flujo es lineal y horizontal.
- El agua es inyectada en un yacimiento petrolero.
- El agua y el petróleo son incompresibles.
- El agua y el petróleo son insolubles.
- El efecto de la gravedad y la presión capilar no son considerables (es decir son cero)

Los mecanismos en este caso, son similares a los que ocurren en la teoría de fluidos compresibles indivisibles, en los cuales los choques son generados cuando hay intersección en las características (ver [5]).

Los choques donde las fases involucradas se tratan como parcialmente solubles, que es caso cuando el gas avanza de manera frontal hacia la región semi-saturada del petróleo, la cual no genera ninguna

intersección de las características. En este trabajo se mostrará que tales choques son generados por una brusca transformación de una partícula semi-saturada de petróleo dentro de una partícula saturada, cuando tal partícula es alcanzada, por una fase saturada, como la fase gaseosa. Para desplazamiento parcialmente soluble, los resultados mostrados en el capítulo 5 indican que los choques pueden ocurrir regularmente cuando la fuerza capilar está tomada dentro del modelo beta o de petróleo negro. Esta última afirmación implica una evolución en el entendimiento de los procesos de generación de choques, con respecto a trabajos previos Herrera, Galindo y Camacho (ver [5])

### **1.3. Objetivos**

El propósito para realizar este trabajo es mostrar las diferentes clases de choques que pueden ocurrir cuando se modela yacimientos petroleros y los modelos numéricos disponibles que existen para la solución de estos. Este trabajo está enfocado a resumir los procesos en cuales se generan dichos choques.

Para poder cubrir estos objetivos, el presente trabajo se divide en fundamentos de la física macroscópica los proporciona la ‘Teoría de los Medios Continuos’. Será parte fundamental de nuestro estudio en este trabajo y se tratará en el capítulo 2, introduciendo la formulación de los modelos matemáticos de los sistemas continuos. La base para la construcción de estos modelos, tiene su fundamento en la teoría general de los sistemas continuos y está constituida por ecuaciones de balance que son aplicables a cualquier sistema continuo de ecuaciones independientemente de su naturaleza. A partir de la ecuación de balance global se derivan las ecuaciones de balance local las cuales se constituyen por si mismas los modelos básicos de los sistemas continuos.

El capítulo 3 está enfocado a dar una descripción general del yacimiento petrolero; tal información involucra los principios básicos para predecir el comportamiento del yacimiento petrolero. Los datos del yacimiento petrolero pueden clasificarse de manera estática y dinámica dependiendo de su relación con el movimiento de los flujos de fluidos en el yacimiento

petrolero.

La caracterización estática se refiere al desarrollo y adecuación de metodologías integradas que permiten una mayor conceptualización de los yacimientos petroleros en términos físicos y geológicos. Por otro lado, la caracterización dinámica tiene como propósito investigar, desarrollar y adecuar metodologías que expliquen la interacción dinámica del sistema roca-fluido del yacimiento petrolero, tratando de reflejar y comprender de la mejor manera cómo se desplazan los fluidos a través de las rocas.

En el capítulo 4 se define de manera precisa el modelo beta o de petróleo negro que es un caso particular de modelo multifásico composicional, del cual se obtendrán las ecuaciones que modelan el fenómeno a partir de la ecuación de balance local, las cuales constituyen el punto de partida para poder entender el comportamiento del yacimiento petrolero.

Así también se define la ley de Darcy que es una ecuación constitutiva, empírica, que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido con su presión, la cual fue propuesta por un ingeniero francés, H. Darcy, en el Siglo XIX, y ha servido de base para la modelación del flujo de medios porosos desde entonces, y es necesaria para completar el modelo beta o petróleo negro.

En el capítulo 5 se mostrará la generación de choque a partir del desplazamiento insoluble usando la teoría clásica Buckley-Leverett, también la generación de choques en el desplazamiento parcialmente insoluble que como ya mencionamos, estos se producen por la transformación brusca de una partícula semi-saturada dentro de una saturada.

## **2. Formulación Unificada de los Modelos Matemáticos de Sistemas Continuos**

La técnica general que se utiliza para realizar la predicción es la modelación. Es decir, en ella se construyen modelos y con ellos se predice el comportamiento del sistema que interesa. Los fundamentos de la física macroscópica los proporciona la ‘teoría de los medios continuos’. En este capítulo, con base en ella se introduce una formulación clara, general y sencilla de los modelos matemáticos de los sistemas continuos. Esta formulación es tan sencilla y tan general, que los modelos básicos de sistemas tan complicados y diversos como la atmósfera, los océanos, los yacimientos petroleros, o los geotérmicos, se derivan por medio de la aplicación repetida de una sólo ecuación diferencial: ‘la ecuación diferencial de balance’.

Dicha formulación también es muy clara, pues en el modelo general no hay ninguna ambigüedad; en particular, todas las variables y parámetros que intervienen en él, están definidos de manera unívoca. En realidad, este modelo general de los sistemas continuos constituye una realización extraordinaria de los paradigmas del pensamiento matemático. El descubrimiento del hecho de que los modelos matemáticos de los sistemas continuos, independientemente de su naturaleza y propiedades intrínsecas, pueden formularse por medio de balances, cuya idea básica no difiere mucho de los balances de la contabilidad financiera, fue el resultado de un largo proceso de perfeccionamiento en el que concurrieron una multitud de mentes brillantes.

### **2.1. Los Modelos**

Un modelo de un sistema es un sustituto de cuyo comportamiento es posible derivar el correspondiente al sistema original. Los modelos matemáticos, en la actualidad, son los utilizados con mayor frecuencia y también los más versátiles. En las aplicaciones específicas están constituidos por programas de cómputo cuya aplicación y adaptación a cambios de las propiedades de los sistemas es relativamente fácil. También, sus bases y las metodologías que utilizan son de gran generalidad, por lo que es posible construirlos para situaciones y sistemas muy diversos.



Los modelos matemáticos son entes en los que se integran los conocimientos científicos y tecnológicos, con los que se construyen programas de cómputo que se implementan con medios computacionales. En la actualidad, la simulación numérica permite estudiar sistemas complejos y fenómenos naturales que sería muy costoso, peligroso o incluso imposible de estudiar por experimentación directa. En esta perspectiva la significación de los modelos matemáticos en ciencias e ingeniería es clara, porqué la modelación matemática constituye el método más efectivo de predecir el comportamiento de los diversos sistemas de interés. En nuestro país, ellos son usados ampliamente en la industria petrolera, en las ciencias y la ingeniería del agua y en muchas otras.

### **2.1.1. Física Microscópica y Física Macroscópica**

La materia, cuando se le observa en el ámbito ultramicroscópico, está formada por moléculas y átomos. Estos a su vez, por partículas aún más pequeñas como los protones, neutrones y electrones. La predicción del comportamiento de estas partículas es el objeto de estudio de la mecánica cuántica y la física nuclear. Sin embargo, cuando deseamos predecir el comportamiento de sistemas tan grandes como la atmósfera o un yacimiento petrolero, los cuales están formados por un número extraordinariamente grande de moléculas y átomos, su estudio resulta inaccesible con esos métodos y en cambio el enfoque macroscópico es apropiado.

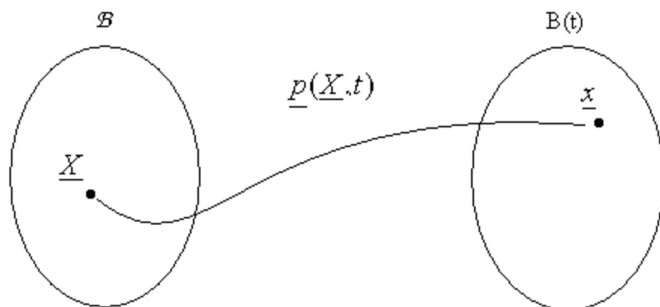
Por eso en lo que sigue distinguiremos dos enfoques para el estudio de la materia y su movimiento. El primero el de las moléculas, los átomos y las partículas elementales es el enfoque microscópico y el segundo es el enfoque macroscópico. Al estudio de la materia con el enfoque macroscópico, se le llama física macroscópica y sus bases teóricas las proporciona la mecánica de los medios continuos.

Cuando se estudia la materia con este último enfoque, se considera que los cuerpos llenan el espacio que ocupan, es decir que no tienen huecos, que es la forma en que los vemos sin el auxilio de un microscopio. Por ejemplo, el agua llena todo el espacio del recipiente donde está contenida. Este enfoque macroscópico está presente en la física clásica. La ciencia ha avanzado y ahora sabemos que la materia está llena de

huecos, que nuestros sentidos no perciben y que la energía también está cuantizada. A pesar de que estos dos enfoques para el análisis de los sistemas físicos, el microscópico y el macroscópico, parecen a primera vista conceptualmente contradictorio, ambos son compatibles, y complementarios, y es posible establecer la relación entre ellos utilizando a la mecánica estadística.

## 2.2. Cinemática de los Modelos de Sistemas Continuos

En la teoría de los sistemas continuos, los cuerpos llenan todo el espacio que ocupan. Y en cada punto del espacio físico hay una y solamente una partícula. Así, definimos como sistema continuo a un conjunto de partículas. Aún más, dicho conjunto es un subconjunto del espacio Euclidiano tridimensional. Un cuerpo es un subconjunto de partículas que en cualquier instante dado ocupa un dominio, en el sentido matemático, del espacio físico; es decir, del espacio Euclidiano tridimensional. Denotaremos por  $B(t)$  a la región ocupada por el cuerpo  $\mathcal{B}$ , en el tiempo  $t$ , donde  $t$  puede ser cualquier número real.



Frecuentemente, sin embargo, nuestro interés de estudio se limitará a un intervalo finito de tiempo. Dado un cuerpo  $\mathcal{B}$ , todo subdominio  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ , constituye a su vez otro cuerpo; en tal caso, se dice que  $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  es un subcuerpo de  $\mathcal{B}$ . De acuerdo con lo mencionado antes, una hipótesis básica de la teoría de los sistemas continuos es que en cualquier tiempo  $t \in (-\infty, \infty)$  y en cada punto  $x \in \mathcal{B}$  de la región ocupada por el cuerpo, hay una y sólo una partícula del cuerpo. Como en nuestra revisión se incluye no solamente la estática (es decir, los cuerpos en

reposito), sino también la dinámica (es decir, los cuerpos en movimiento), un primer problema de la cinemática de los sistemas continuos consiste en establecer un procedimiento para identificar a las partículas cuando están en movimiento en el espacio físico.

Sea  $\underline{X} \in \mathcal{B}$ , una partícula y  $p(\underline{X}, t)$  el vector de la posición que ocupa, en el espacio físico, dicha partícula en el instante  $t$ . Una forma, pero no la única, de identificar la partícula  $\underline{X}$  es asociándole la posición que ocupa en un instante determinado. Tomaremos en particular el tiempo  $t = 0$ , en tal caso  $\underline{p}(\underline{X}, 0) \equiv \underline{X}$ .

A las coordenadas del vector  $\underline{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ , se les llama las coordenadas materiales de la partícula. En este caso, las coordenadas materiales de una partícula son las coordenadas del punto del espacio físico que ocupaba la partícula en el tiempo inicial,  $t = 0$ . Desde luego, el tiempo inicial puede ser cualquier otro, si así se desea. Sea  $\mathcal{B}$  el dominio ocupado por un cuerpo en el tiempo inicial, entonces  $\underline{X} \in \mathcal{B}$  si y solamente si la partícula  $\underline{X}$  es del cuerpo. Es decir,  $\mathcal{B}$  caracteriza al cuerpo. Sin embargo, debido al movimiento, la región ocupada por el mismo cambia con el tiempo y será denotada por  $B(t)$ .

Formalmente, para cualquier  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{B}(t)$  se define por

$$B(t) \equiv \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \underline{X} \in \mathcal{B} \text{ tal que } \underline{x} = p(\underline{X}, t) \} \quad (2.1)$$

el vector posición  $\underline{p}(\underline{X}, t)$  es función del vector tridimensional  $\underline{X}$  y del tiempo. Si fijamos el tiempo  $t$ ,  $\underline{p}(\underline{X}, t)$  define una transformación del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  en si mismo y la Ec. (2.1) es equivalente a  $\mathcal{B}(t) = \underline{p}(\mathcal{B}, t)$ . Una notación utilizada para representar esta familia de funciones es  $\underline{p}(\cdot, t)$ . De acuerdo a la hipótesis de los sistemas continuos: En cualquier tiempo  $t \in (-\infty, \infty)$  y en cada punto  $\underline{x} \in B$  de la región ocupada por el cuerpo hay una y sólo una partícula del cuerpo  $\mathcal{B}$  para cada  $t$  fijo. Es decir,  $\underline{p}(\cdot, t)$  es una función biunívoca, por lo que existe la función inversa  $\underline{p}^{-1}(\cdot, t)$ .

Si se fija la partícula  $\underline{X}$  en la función  $\underline{p}(\underline{X}, t)$  y se varía el tiempo  $t$ , se obtiene su trayectoria. Esto permite obtener la velocidad de cualquier partícula, la cual es un concepto central en la descripción del movimiento. Ella se define como la derivada con respecto al tiempo de la posición

cuando la partícula se mantiene fija. Es decir, es la derivada parcial con respecto al tiempo de la función de posición  $\underline{p}(\underline{X}, t)$ . Por lo mismo, la velocidad como función de las coordenadas materiales de las partículas, está dada por

$$\underline{V}(\underline{X}, t) \equiv \frac{\partial \underline{p}}{\partial t}(\underline{X}, t). \quad (2.2)$$

### 2.2.1. Propiedades Intensivas y sus Representaciones

En lo que sigue consideraremos funciones definidas para cada tiempo, en cada una de las partículas de un sistema continuo. A tales funciones se les llama ‘propiedades intensivas’. Las propiedades intensivas pueden ser funciones escalares o funciones vectoriales. Por ejemplo, la velocidad, definida por la Ec. (2.2), es una función vectorial que depende de la partícula  $\underline{X}$  y del tiempo  $t$ .

Una propiedad intensiva con valores vectoriales es equivalente a tres escalares, correspondientes a cada una de sus tres componentes. Hay dos formas de representar a las propiedades intensivas: la representación Euleriana y la representación Lagrangiana. Los nombres son en honor a los matemáticos Leonard Euler (1707-1783) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813), respectivamente. Frecuentemente, el punto de vista Lagrangiano es utilizado en el estudio de los sólidos, mientras que el Euleriano se usa más en el estudio de los fluidos.

Considere una propiedad intensiva escalar, la cual en el tiempo  $t$  toma el valor  $\phi(\underline{X}, t)$  en la partícula  $\underline{X}$ . Entonces, de esta manera se define una función  $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , para cada  $t \in (-\infty, \infty)$  a la que se denomina representación Lagrangiana de la propiedad intensiva considerada. Ahora, sea  $\psi(\underline{x}, t)$  el valor que toma esa propiedad en la partícula que ocupa la posición  $\underline{x}$ , en el tiempo  $t$ . En este caso, para cada  $t \in (-\infty, \infty)$  se define una función  $\psi : B(t) \rightarrow \mathbb{R}^1$  a la cual se denomina representación Euleriana de la función considerada. Estas dos representaciones de una misma propiedad están relacionadas por la siguiente identidad

$$\phi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t). \quad (2.3)$$

Nótese que, aunque ambas representaciones satisfacen la Ec. (2.3), las funciones  $\phi(\underline{X}, t)$  y  $\psi(\underline{x}, t)$  no son idénticas. Sus argumentos  $\underline{X}$  y  $\underline{x}$

son vectores tridimensionales (es decir, puntos de  $\mathbb{R}^3$ ); sin embargo, si tomamos  $\underline{X} = \underline{x}$ , en general

$$\phi(\underline{X}, t) \neq \psi(\underline{X}, t). \quad (2.4)$$

La expresión de la velocidad de una partícula dada por la Ec. (2.2), define a su representación Lagrangiana, por lo que utilizando la Ec. (2.3) es claro que

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t) \equiv \underline{v}(p(\underline{X}, t), t) \quad (2.5)$$

donde  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  es la representación Euleriana de la velocidad. Por lo mismo

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \equiv \underline{V}(p^{-1}(\underline{x}, t), t). \quad (2.6)$$

Esta ecuación tiene la interpretación de que la velocidad en el punto  $\underline{x}$  del espacio físico, es igual a la velocidad de la partícula que pasa por dicho punto en el instante  $t$ . La Ec. (2.6) es un caso particular de la relación

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \phi(p^{-1}(\underline{x}, t), t)$$

de validez general, la cual es otra forma de expresar la relación de la Ec. (2.3) que existe entre las dos representaciones de una misma propiedad intensiva.

La derivada parcial con respecto al tiempo de la representación Lagrangiana  $\phi(\underline{X}, t)$  de una propiedad intensiva, de acuerdo a la definición de la derivada parcial de una función, es la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en una partícula fija. Es decir, si nos montamos en una partícula y medimos a la propiedad intensiva y luego los valores así obtenidos los derivamos con respecto al tiempo, el resultado final es  $\frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t}$ . En cambio, si  $\psi(\underline{x}, t)$  es la representación Euleriana de esa misma propiedad, entonces  $\frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial t}$  es simplemente la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en un punto fijo en el espacio. Tiene interés evaluar la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en una partícula fija, cuando se usa la representación Euleriana. Derivando con respecto al tiempo a la identidad de la Ec. (2.3) y la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(p(\underline{X}, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(p(\underline{X}, t), t) \frac{\partial p_i}{\partial t}(\underline{X}, t). \quad (2.7)$$

Se acostumbra definir el símbolo  $\frac{D\psi}{Dt}$  por

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

o, más brevemente,

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\psi \quad (2.9)$$

llamada derivada material, utilizando esta notación, se puede escribir

$$\frac{\partial\phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{D\psi}{Dt}(\underline{p}(\underline{X}, t)) \equiv \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\psi \right) (\underline{p}(\underline{X}, t), t). \quad (2.10)$$

Por ejemplo, la aceleración de una partícula se define como la derivada de la velocidad cuando se mantiene a la partícula fija. Aplicando la Ec. (2.9) se tiene

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (2.11)$$

una expresión más transparente se obtiene aplicando la Ec. (2.9) a cada una de las componentes de la velocidad. Así, se obtiene

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i. \quad (2.12)$$

Desde luego, la aceleración, en representación Lagrangiana es simplemente

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{p}(\underline{X}, t). \quad (2.13)$$

### 2.2.2. Propiedades Extensivas

En la sección anterior se consideraron funciones definidas en las partículas de un cuerpo, más precisamente, funciones que hacen corresponder a cada partícula y cada tiempo un número real, o un vector del espacio Euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . En ésta, en cambio, empezaremos por considerar funciones que a cada cuerpo  $\mathcal{B}$  de un sistema continuo, y a cada tiempo  $t$  le asocia un número real o un vector de  $\mathbb{R}^3$ . A una función de este tipo  $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$  se le llama ‘propiedad extensiva’ cuando esta dada por una integral

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}, t) \equiv \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.14)$$

Observe que, en tal caso, el integrando define una función  $\psi(\underline{x}, t)$  y por lo mismo, una propiedad intensiva. En particular, la función  $\psi(\underline{x}, t)$  es la representación Euleriana de esa propiedad intensiva. Además, la Ec. (2.14) establece una correspondencia biunívoca entre las propiedades extensivas y las intensivas, porqué dada la representación Euleriana  $\psi(\underline{x}, t)$  de cualquier propiedad intensiva, su integral sobre el dominio ocupado por cualquier cuerpo, define una propiedad extensiva. Finalmente, la notación empleada en la Ec. (2.14) es muy explícita, pues ahí se ha escrito  $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$  para enfatizar que el valor de la propiedad extensiva corresponde al cuerpo  $\mathcal{B}$ . Sin embargo, en lo que sucesivo, se simplificara la notación omitiendo el símbolo  $\mathcal{B}$  es decir, se escribirá  $\mathbb{E}(t)$  en vez de  $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$ .

Hay diferentes formas de definir a las propiedades intensivas. Como aquí lo hemos hecho, es por unidad de volumen. Sin embargo, es frecuente que se le defina por unidad de masa véase [14]. Es fácil ver que la propiedad intensiva por unidad de volumen es igual a la propiedad intensiva por unidad de masa multiplicada por la densidad de masa (es decir, masa por unidad de volumen), por lo que es fácil pasar de un concepto al otro, utilizando la densidad de masa.

Sin embargo, una ventaja de utilizar a las propiedades intensivas por unidad de volumen, en lugar de las propiedades intensivas por unidad de masa, es que la correspondencia entre las propiedades extensivas y las intensivas es más directa: dada una propiedad extensiva, la propiedad intensiva que le corresponde es la función que aparece como integrando, cuando aquélla se expresa como una integral de volumen. Además, del cálculo se sabe que

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \lim_{Vol \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(t)}{Vol} = \lim_{Vol \rightarrow 0} \frac{\int_{B(t)} \psi(\underline{\xi}, t) d\underline{\xi}}{Vol}. \quad (2.15)$$

La Ec. (2.15) proporciona un procedimiento efectivo para determinar las propiedades extensivas experimentalmente: se mide la propiedad extensiva en un volumen pequeño del sistema continuo de que se trate, se le divide entre el volumen y el cociente que se obtiene es una buena aproximación de la propiedad intensiva.

El uso que haremos del concepto de propiedad extensiva es, desde luego, lógicamente consistente. En particular, cualquier propiedad que

satisface las condiciones de la definición de propiedad extensiva establecidas antes es, por ese hecho, una propiedad extensiva. Sin embargo, no todas las propiedades extensivas que se pueden obtener de esta manera son de interés en la mecánica de los medios continuos. Una razón básica por la que ellas son importantes es porque el modelo general de los sistemas continuos se formula en términos de ecuaciones de balance de propiedades extensivas, como se verá más adelante.

### **2.2.3. Balance de Propiedades Extensivas e Intensivas**

Los modelos matemáticos de los sistemas continuos están constituidos por balances de propiedades extensivas. Por ejemplo, los modelos de transporte de solutos (los contaminantes transportados por corrientes superficiales o subterráneas, son un caso particular de estos procesos de transporte) se construyen haciendo el balance de la masa de soluto que hay en cualquier dominio del espacio físico. Aquí, el término balance se usa, esencialmente, en un sentido contable. En la contabilidad que se realiza para fines financieros o fiscales, la diferencia de las entradas menos las salidas nos da el aumento, o cambio, de capital. En forma similar, en la mecánica de los medios continuos se realiza, en cada cuerpo del sistema continuo, un balance de las propiedades extensivas en que se basa el modelo.

**Ecuación de Balance Global** Para realizar tales balances es necesario, en primer lugar, identificar las causas por las que las propiedades extensivas pueden cambiar. Tomemos como ejemplo de propiedad extensiva a las existencias de maíz que hay en el país. La primera pregunta es: ¿qué causas pueden motivar su variación, o cambio, de esas existencias?. Un análisis sencillo nos muestra que dicha variación puede ser debida a que se produzca o se consuma. También a que se importe o se exporte por los límites del país (fronteras o litorales). Y con esto se agotan las causas posibles; es decir, esta lista es exhaustiva. Producción y consumo son términos similares, pero sus efectos tienen signos opuestos, que fácilmente se engloban en uno solo de esos conceptos. De hecho, si convenimos en que la producción puede ser negativa, entonces el consumo es una producción negativa.



Una vez adoptada esta convención, ya no es necesario ocuparnos separadamente del consumo. En forma similar, la exportación es una importación negativa. Entonces, el incremento en las existencias  $\Delta\mathbb{E}$  en un período  $\Delta t$  queda dado por la ecuación

$$\Delta\mathbb{E} = \mathbb{P} + \mathbb{I} \quad (2.16)$$

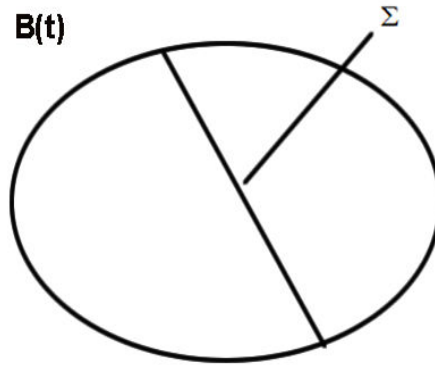
donde a la producción y a la importación, ambas con signo, se les ha representado por  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{I}$  respectivamente.

Similarmente, en la mecánica de los medios continuos, la lista exhaustiva de las causas por las que una propiedad extensiva de cualquier cuerpo puede cambiar, contiene solamente dos motivos:

- i) Por producción en el interior del cuerpo; y
- ii) Por importación (es decir, transporte) a través de la frontera.

Esto conduce a la siguiente ecuación de “balance global”, de gran generalidad, para las propiedades extensivas

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt}(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} q(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.17)$$



Donde  $g(\underline{x}, t)$  es la generación en el interior del cuerpo, con signo, de la propiedad extensiva correspondiente, por unidad de volumen, por unidad de tiempo. Además, en la Ec. (2.17) se ha tomado en cuenta la posibilidad de que haya producción concentrada en la superficie  $\Sigma(t)$ ,

la cual está dada en esa ecuación por la última integral, donde  $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$  es la producción por unidad de área. Por otra parte  $q(\underline{x}, t)$  es lo que se importa o transporta hacia el interior del cuerpo a través de la frontera del cuerpo  $\partial\mathcal{B}(t)$ , en otras palabras, es el flujo de la propiedad extensiva a través de la frontera del cuerpo, por unidad de área, por unidad de tiempo. Puede demostrarse, con base en hipótesis válidas en condiciones muy generales, que para cada tiempo  $t$  existe un campo vectorial  $\tau(\underline{x}, t)$  tal que

$$q(\underline{x}, t) \equiv \tau(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (2.18)$$

donde  $\underline{n}(\underline{x}, t)$  es normal exterior a  $\partial\mathcal{B}(t)$ . En vista de esta relación, la Ec. (2.17) de balance se puede escribir como

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt}(t) = \int_{\mathcal{B}(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial\mathcal{B}(t)} \tau(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.19)$$

La relación (2.19) se le conoce con el nombre de “ecuación general de balance global” y es la ecuación básica de los balances de los sistemas continuos. A la función  $g(\underline{x}, t)$  se le denomina generación interna y al campo vectorial  $\tau(\underline{x}, t)$  el campo de flujo.

**Condiciones de Balance Local** Los modelos de los sistemas continuos están constituidos por las ecuaciones de balance correspondientes a una colección de propiedades extensivas. Así, a cada sistema continuo le corresponde una familia de propiedades extensivas, tal que, el modelo matemático del sistema está constituido por las condiciones de balance de cada una de las propiedades extensivas de dicha familia.

Sin embargo, las propiedades extensivas mismas no se utilizan directamente en la formulación del modelo, en su lugar se usan las propiedades intensivas asociadas a cada una de ellas. Esto es posible porque las ecuaciones de balance global son equivalentes a las llamadas condiciones de balance local, las cuales se expresan en términos de las propiedades intensivas correspondientes. Las condiciones de balance local son de dos clases: ‘las ecuaciones diferenciales de balance local’ y ‘las condiciones de salto’.

Las primeras son ecuaciones diferenciales parciales, que se deben satisfacer en cada punto del espacio ocupado por el sistema continuo, y

las segundas son ecuaciones algebraicas que las discontinuidades deben satisfacer donde ocurren; es decir, en cada punto de  $\Sigma$ . Cabe mencionar que las ecuaciones diferenciales de balance local son de uso mucho más amplio que las condiciones de salto, pues estas últimas solamente se aplican cuando y donde hay discontinuidades, mientras que las primeras en todo punto del espacio ocupado por el sistema continuo.

Una vez establecidas las ecuaciones diferenciales y de salto del balance local, e incorporada la información científica y tecnológica necesaria para completar el modelo (la cual por cierto se introduce a través de las llamadas 'ecuaciones constitutivas'), el problema matemático de desarrollar el modelo y derivar sus predicciones se transforma en uno correspondiente a la teoría de las ecuaciones diferenciales, generalmente parciales, y sus métodos numéricos.

**Las Ecuaciones de Balance Local** En lo que sigue se supone que las propiedades intensivas pueden tener discontinuidades, de salto exclusivamente, a través de la superficie  $\Sigma(t)$ . Se entiende por 'discontinuidad de salto', una en que el límite por ambos lados de  $\Sigma(t)$  existe, pero son diferentes. Se utilizará en lo que sigue los resultados matemáticos que se dan a continuación, (ver [13]).

**Teorema 1** *Para cada  $t > 0$ , sea  $\mathcal{B}(t) \subset \mathbb{R}^3$  el dominio ocupado por un cuerpo. Suponga que la 'propiedad intensiva'  $\psi(\underline{x}, t)$  es de clase  $C^1$ , excepto a través de la superficie  $\Sigma(t)$ . Además, sean las funciones  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  y  $\underline{v}_\Sigma(\underline{x}, t)$  esta última definida para  $\underline{x} \in \Sigma(t)$  solamente, las velocidades de las partículas y la de  $\Sigma(t)$ , respectivamente. Entonces*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} \psi d\underline{x} \equiv \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) \right\} d\underline{x} + \int_{\Sigma} [(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \psi] \cdot \underline{n} d\underline{x}. \quad (1)$$

**Teorema 2** *Considere un sistema continuo, entonces, la ecuación de balance global se satisface para todo cuerpo del sistema continuo si y solamente si se cumplen las condiciones siguientes:*

i) *La ecuación diferencial*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (2.20)$$

*vale en todo punto  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ , de la región ocupada por el sistema.*

ii) *La ecuación*

$$[\psi(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = g_\Sigma \quad (2.21)$$

vale en todo punto  $\underline{x} \in \Sigma$ .

A las ecuaciones (2.20) y (2.21), se les llama ecuación diferencial de balance local y condición de salto, respectivamente.

Desde luego, el caso más general que se estudiará se refiere a situaciones dinámicas; es decir, aquéllas en que las propiedades intensivas cambian con el tiempo. Sin embargo, los estados estacionarios de los sistemas continuos son de sumo interés. Por estado estacionario se entiende uno en que las propiedades intensivas son independientes del tiempo. En los estados estacionarios, además, las superficies de discontinuidad  $\Sigma(t)$  se mantienen fijas (no se mueven). En este caso  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$  y  $\underline{v}_\Sigma = 0$ . Por lo mismo, para los estados estacionarios, la ecuación de balance local y la condición de salto se reducen a

$$\nabla \cdot (\underline{v}\psi) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (2.22)$$

que vale en todo punto  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  y

$$[\psi \underline{v} - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = g_\Sigma \quad (2.23)$$

que se satisface en todo punto de la discontinuidad  $\Sigma(t)$  respectivamente.

### 2.3. Los Modelos de los Sistemas Continuos

**Sistemas Continuos de una y Varias Fases** Dos conceptos relacionados, utilizados en el estudio de los sistemas continuos, son el de ‘fase’ y ‘componente’. La diferencia entre mezcla y disolución (o solución), la cual es ampliamente conocida, puede ayudar a motivar estos conceptos. Por ejemplo, si disolvemos sal de mesa (cloruro de sodio) en agua pura y aumentamos la sal disuelta por encima de la concentración de saturación el exceso de sal se separa. Entonces, esa sal no disuelta puede mezclarse, por ejemplo, utilizando un mecanismo revoledor, hasta formar una mezcla relativamente homogénea. Sin embargo, si esa mezcla se deja en reposo al poco tiempo veremos que la sal que no se disolvió

se mueve hacia la base del recipiente. En este caso podemos distinguir dos fases, la fase líquida y la fase sólida. Además, la fase líquida y la fase sólida se mueven con diferentes velocidades, pues la fase líquida está en reposo, mientras que la fase sólida (la sal no disuelta) se mueve hacia el fondo del recipiente.

**Forma General de los Modelos de los Sistemas Continuos** Los modelos de los sistemas continuos modelan sus procesos; por ejemplo: el transporte de solutos contenidos en un fluido. Como ya se dijo, se identifica a un conjunto finito, o familia, de propiedades extensivas (una, dos, tres, etc.). A cada una de las propiedades extensivas de esa familia se les impone la condición de satisfacer el Balance Global de la Ec.(2.17), en cada cuerpo del sistema continuo, lo cual es equivalente a la ecuación diferencial de Balance Local y a la Condición de Salto. Es interesante mencionar, que esta forma de proceder se aplica no solamente a sistemas continuos de una sola fase, sino también a sistemas de varias fases como los yacimientos petroleros y los geotérmicos.

**Ecuaciones Básicas de los Modelos Continuos** La discusión y resultados presentados anteriormente, se aplican a continuación para derivar una forma muy general de los sistemas de ecuaciones que gobiernan a los modelos de los sistemas continuos. Sea  $M$  el número de fases que integran a un sistema continuo. Denotaremos por  $N_\alpha$  el número de propiedades extensivas, asociadas con la fase  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$ ) Suponga además, que para  $\beta = 1, 2, \dots, N_\alpha$  y  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$ , la propiedad intensiva asociada a la extensiva  $E_\beta^\alpha$  es  $\psi_\beta^\alpha$  de manera que

$$E_\beta^\alpha = \int_{B_\alpha(t)} \psi_\beta^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (2.24)$$

Aplicando las ecuaciones de balance, Ecs.(2.20) y (2.21) se obtiene

$$\frac{\partial \psi_\beta^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \psi_\beta^\alpha) = \nabla \cdot \tau^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

$\forall \beta = 1, 2, \dots, N_\alpha$  y  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$

y las condiciones de salto

$$\begin{aligned} [\psi_\beta^\alpha (\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma) - \tau^{\alpha\beta}] \cdot n = g_\Sigma^{\alpha\beta} \\ \forall \beta = 1, 2, \dots, N_\alpha \text{ y } \alpha = 1, 2, 3, \dots, M \end{aligned} \quad (2.26)$$

Estas son las ecuaciones básicas que gobiernan a una gran diversidad de sistemas continuos. Sin embargo, ellas no constituyen modelos completos. Decimos que el modelo de un sistema continuo es completo si define un problema bien planteado. Se dice que un problema de valores iniciales y de frontera es bien planteado si se cumple que:

- a) Existe una y sólo una solución, y
- b) Esta depende de manera continua de las condiciones iniciales y de frontera del problema.

Para obtener modelos completos, además de las ecuaciones básicas, (2.25) y (2.26), es necesario evaluar la generación interna, determinada por las funciones  $g^{\alpha\beta}$  y  $g_\Sigma^{\alpha\beta}$  y el campo de flujo,  $\tau^{\alpha\beta}$  en términos de funciones conocidas de las propiedades intensivas asociadas. A través de estas funciones, llamadas “ecuaciones constitutivas”, se integra el conocimiento científico y tecnológico en los modelos matemáticos, el cual es proporcionado por las ciencias y las tecnologías. Ellas pueden ser la Física, la Química, la Biología, las Ingenierías, etc.; todo depende de la clase de procesos involucrados. Por ejemplo, al estudiar el transporte de un soluto producido por una reacción química, la rapidez con que se produce el soluto depende de la concentración de él y de las demás sustancias que participen en la reacción, por lo que el suministro externo,  $g(\underline{x}, t)$ , sería una función de esos parámetros. En este caso, a través de esta función se integraría el conocimiento químico en el modelo. Observe que en este caso el suministro externo proviene del interior del sistema en estudio, pero se origina en alguna otra, u otras componentes que son ajenas, o externas, a aquélla a la que se le hace el balance.

En resumen, los modelos de los sistemas continuos están constituidos por:

- Una colección de propiedades intensivas o, lo que es lo mismo, extensivas;
- El conjunto de ecuaciones de balance local correspondientes (diferenciales y de salto), en cada una de las cuales la velocidad de las partículas es la de la fase correspondiente;
- Suficientes relaciones que ligen a las propiedades intensivas entre sí y que definan a, y en términos de éstas, las cuales se conocen como leyes constitutivas; y
- Condiciones iniciales y de frontera que deben satisfacer las propiedades intensivas.

### 2.3.1. Ejemplos de Modelos

Una de las aplicaciones más sencillas de las condiciones de balance local es para formular restricciones en el movimiento. Aquí ilustramos este tipo de aplicaciones formulando condiciones que se deben cumplir localmente cuando un fluido es incompresible. La afirmación de que un fluido es incompresible significa que todo cuerpo conserva el volumen de fluido en su movimiento. Entonces, se consideraran dos casos: el de un ‘fluido libre’ y el de un ‘fluido en un medio poroso’. En el primer caso, el fluido llena completamente el espacio físico que ocupa el cuerpo, por lo que el volumen del fluido es igual al volumen del dominio que ocupa el cuerpo, así

$$V_f(t) = \int_{B(t)} d\underline{x} \quad (2.27)$$

aquí,  $V_f(t)$  es el volumen del fluido y  $B(t)$  es el dominio del espacio físico (es decir, de  $\mathbb{R}^3$ ) ocupado por el cuerpo. Observe que una forma más explícita de esta ecuación es

$$V_f(t) = \int_{B(t)} 1 d\underline{x} \quad (2.28)$$

porque en la integral que aparece en la Ec. (2.27) el integrando es la función idénticamente 1. Comparando esta ecuación con la Ec. (2.14), vemos que el volumen del fluido es una propiedad extensiva y que la propiedad intensiva que le corresponde es  $\psi = 1$ .

Además, la hipótesis de incompresibilidad implica

$$\frac{\partial V_f}{\partial t}(t) = 0 \quad (2.29)$$

esta es el balance global de la Ec. (2.19), con  $g = g_\Sigma = 0$  y  $\tau = 0$ , el cual a su vez es equivalente a las Ecs. (2.20) y (2.21). Tomando en cuenta además que  $\psi = 1$ , la Ec. (2.20) se reduce a

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0. \quad (2.30)$$

Esta es la bien conocida condición de incompresibilidad para un fluido libre. Además, aplicando la Ec. (2.21) donde haya discontinuidades, se obtiene  $[\underline{v}] \cdot \underline{n} = 0$ . Esto implica que si un fluido libre es incompresible, la velocidad de sus partículas es necesariamente continua.

El caso en que el fluido se encuentra en un ‘medio poroso’, es bastante diferente. Un medio poroso es un material sólido que tiene huecos distribuidos en toda su extensión, cuando los poros están llenos de un fluido, se dice que el medio poroso está ‘saturado’. Esta situación es la de mayor interés en la práctica y es también la más estudiada. En muchos de los casos que ocurren en las aplicaciones el fluido es agua o petróleo. A la fracción del volumen del sistema, constituido por la ‘matriz sólida’ y los huecos, se le llama ‘porosidad’ y se le representará por  $\varepsilon$ , así

$$\varepsilon(\underline{x}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{Volumen de huecos}}{\text{Volumen total}} \quad (2.31)$$

aquí hemos escrito  $\varepsilon(\underline{x}, t)$  para enfatizar que la porosidad generalmente es función tanto de la posición como del tiempo. Las variaciones con la posición pueden ser debidas, por ejemplo, a heterogeneidad del medio y los cambios con el tiempo a su elasticidad; es decir, los cambios de presión del fluido originan esfuerzos en los poros que los dilatan o los contraen.

Cuando el medio está saturado, el volumen del fluido  $V_f$  es igual al volumen de los huecos del dominio del espacio físico que ocupa, así

$$V_f(t) = \int_{B(t)} \varepsilon(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.32)$$



En vista de esta ecuación, la propiedad intensiva asociada al volumen de fluido es la porosidad  $\varepsilon(x, t)$  por lo que la condición de incompresibilidad del fluido contenido en un medio poroso, está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\varepsilon) = 0. \quad (2.33)$$

Que la divergencia de la velocidad sea igual a cero en la Ec. (2.30) como condición para que un fluido en su movimiento libre conserve su volumen, es ampliamente conocida. Sin embargo, este no es el caso de la Ec. (2.33), como condición para la conservación del volumen de los cuerpos de fluido contenidos en un medio poroso. Finalmente, debe observarse que cualquier fluido incompresible satisface la Ec. (2.30) cuando se mueve en el espacio libre y la Ec. (2.33) cuando se mueve en un medio poroso.

Cuando un fluido efectúa un movimiento en el que conserva su volumen, al movimiento se le llama ‘isocórico’. Es oportuno mencionar que si bien cierto que cuando un fluido tiene la propiedad de ser incompresible, todos sus movimientos son isocóricos, lo inverso no es cierto: un fluido compresible en ocasiones puede efectuar movimientos isocóricos.

Por otra parte, cuando un fluido conserva su volumen en su movimiento satisface las condiciones de salto de Ec. (2.21), las cuales para este caso son

$$[\varepsilon(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0. \quad (2.34)$$

En aplicaciones a geohidrología y a ingeniería petrolera, las discontinuidades de la porosidad están asociadas a cambios en los estratos geológicos y por esta razón están fijas en el espacio; así,  $\underline{v}_\Sigma = 0$  y la Ec. (2.34) se reduce a

$$[\varepsilon \underline{v}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.35)$$

o, de otra manera

$$\varepsilon_+ v_{n_+} = \varepsilon_- v_{n_-}. \quad (2.36)$$

Aquí, la componente normal de la velocidad es  $v_n \equiv \underline{v} \cdot \underline{n}$  y los subíndices más y menos se utilizan para denotar los límites por los lado más y menos de  $\Sigma$ , respectivamente. Al producto de la porosidad por la

velocidad se le conoce con el nombre de velocidad de Darcy  $\underline{U}$ , es decir

$$\underline{U} = \varepsilon \underline{v} \quad (2.37)$$

utilizándola, las Ecs. (2.35) y (2.36) obtenemos

$$[\underline{U}] \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{y} \quad \underline{U}_{n_+} = \underline{U}_{n_-} \quad (2.38)$$

es decir,

La Ec. (2.36) es ampliamente utilizada en el estudio del agua subterránea (geohidrología). Ahí, es frecuente que la porosidad  $\varepsilon$  sea discontinua en la superficie de contacto entre dos estratos geológicos diferentes, pues generalmente los valores que toma esta propiedad dependen de cada estrato. En tal caso,  $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$  por lo que  $v_{n_+} \neq v_{n_-}$  necesariamente.

Para más detalles de la forma y del desarrollo de algunos modelos usados en ciencias de la tierra, véase [13], [14], [15] y [16].

### 3. Descripción del Yacimiento Petrolero.

En la presente capítulo se definirán conceptos y propiedades importantes de la roca tal como porosidad, permeabilidad, etc. que son variables que afectan el comportamiento del yacimiento petrolero. Así como analizar las propiedades de los fluidos relacionados al yacimiento petrolero, el objetivo es realizar una descripción de las propiedades básicas que nos permiten entender las condiciones de los fluidos para poder caracterizar el tipo de clasificación del yacimiento petrolero.

#### 3.1. Clasificación del Yacimiento Petrolero

Entendemos que los yacimientos petroleros son estructuras geológicas que se formaron hace millones de años (Terciario-Mesozoico) y que contienen hidrocarburos. Las estructuras geológicas se componen principalmente por poros, en ellas coexisten varias fases agua, petróleo y gas. La distribución de los fluidos (agua, petróleo y gas) en un yacimiento petrolero depende de la densidad del fluido, así como de las propiedades de la roca. Si los poros son de tamaño uniforme y uniformemente distribuidos, entonces la parte superior de los poros estará ocupada por la fase del gas, y la parte media de los poros será ocupada por petróleo o petróleo con gas disuelto, y en la zona baja de los poros estará llena por agua. (Ver figura 1)

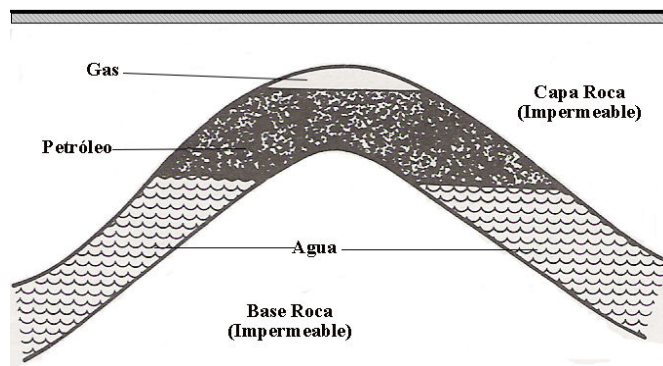


Figura 1: Acumulación de los fluidos en una reserva petrolera (agua, petróleo y gas).

La exploración de un yacimiento petrolero requiere conocimientos de

la estructura subterránea de la tierra, así como los tipos de formaciones de los yacimientos petroleros y los métodos para obtener datos acerca de la formación subterránea, principalmente los campos geofísicos. La exploración geofísica obtiene datos sobre variables en las propiedades físicas de la superficie de las rocas. Esto suministra información determinante para la localización de varios tipos de roca. Los yacimientos petroleros se pueden clasificar de acuerdo al tipo de roca y de acuerdo a los rasgos geológicos.

**a) Yacimientos Petroleros de Acuerdo a los Tipos de Roca** Los yacimientos petroleros están formados por rocas permeables (Areniscas y Carbonatos) estas rocas tienen baja permeabilidad (capa de roca o base roca) que son capaces de impedir que el hidrocarburo escape hacia arriba o hacia abajo. Las típicas capas y bases de roca que componen al yacimiento son las areniscas y carbonatos. Los tipos de roca más comunes en un yacimiento petrolero están en listadas en la tabla 3.1.

Arenisca	Sedimentos compactos conglomerados.
Pizarra	Sedimento inastillable predominantemente de arcilla.
Carbonatos	Proceso químico y bioquímico con fuentes de piedra caliza.

Tabla 3.1 Rocas más comunes en un yacimiento.

**b) Yacimientos Petroleros de Acuerdo a los Rasgos Geológicos** Los rasgos geológicos de un yacimiento petroleros usualmente se clasifican de acuerdo al mecanismo que produce la acumulación de hidrocarburos. Los dos grupos principales de rasgos geológicos están formados por fracturados y no fracturados.

**b.1) Yacimientos Fracturados** Las fracturas se definen como superficies planas de discontinuidad, en donde la roca ha perdido cohesión y los procesos de deformación y alteración de la misma pueden ser ocupadas por fluidos. Para representar los medios fracturados se utilizan diversos modelos geométricos. Desde una perspectiva general se manejan diversos modelos para representar los medios fracturados. En el modelo

más simple, se consideran bloques de roca, separados por planos de ancho variables, representando fracturas. En este modelo se considera que las fracturas tienen poca influencia sobre la porosidad de las deformaciones y alta repercusión en la permeabilidad del sistema, así la capacidad de desplazamiento de fluidos está controlada por las fracturas, mientras los bloques de la matriz se relacionan con la capacidad de almacenamiento (ver figura 2).

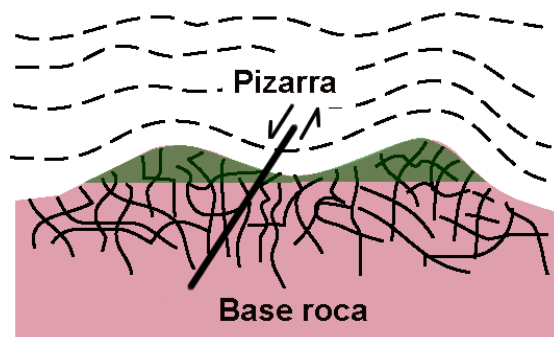


Figura 2: El aceite está atrapado en la porosidad fracturada bajo una discontinuidad.

**b.2) Yacimientos no Fracturados** Los yacimientos no fracturados se clasifican en dos principales grupos: de deformación estructural de la roca (trampas estructurales) y los reposicionales (trampas estratigráficas).

**b.21) Trampas Estructurales** Las trampas estructurales son el resultado de pliegues, fallas o ambas.

Trampas por pliegues (declinadas)

- a) Las trampas de pliegue simple (declinadas) con eje de culminación (eje del pliegue con pendiente en dos o más direcciones ver figura 3).
- b) Domos crecientes, los estratos alrededor de los domos de sal tienen una curva ascendente creando trampas contra los sellos de capa de roca (ver 3).

- c) Domos decrecientes, los domos o declinaciones que se forman durante la sedimentación cuando un área decrece muy lentamente alrededor del área (ver figura 3).

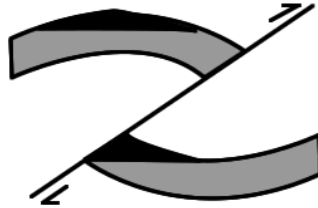


Figura 3: Trampas de domo creciente o decreciente.

**b.22) Trampas por Fallas** Una falla en el plano es el desplazamiento que sufre el yacimiento, este debe tener un efecto de sellado que funciona como una barrera de migración de fluido para una formación de rocas (ver figura 4).

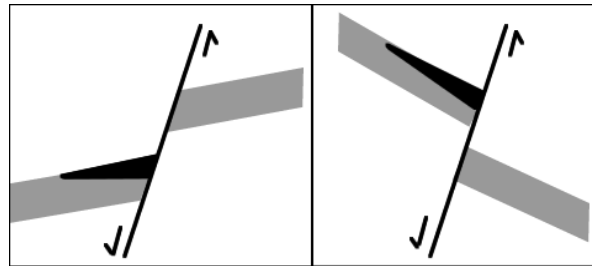


Figura 4: Fallas declinadas.

Hay varios tipos comunes de trampas por falla:

- Fallas normales, comúnmente asociada con la ruptura de la estructura.
- Fallas desplazadas, estas podrían no estar selladas debido al incremento de los movimientos, pero la base está controlada por las fallas desplazadas comúnmente produce buena declinación en diferentes sedimentos suaves.

- c) Fallas por empuje, comúnmente asociadas con la compresión tectónica.
- b) Fallas crecientes, las fallas crecientes típicamente formadas en sedimentos que son depositados rápidamente, especialmente en deltas. Las fallas ocurren durante la sedimentación, tal que la equivalencia el estrato en el lado derribe superior estará en el centro sobre el derribe inferior .

**b.23) Trampas Estratigráficas** Las trampas estratigráficas son creadas por alguna variación en la estratigrafía que es independiente de la deformación estructural, a través de algunas trampas estratigráficas que involucra a las componentes tales como la inclinación del estrato, está clasificada por siguientes grupos principales:

- a) Trampas estratigráficas primarias que resultan por la variación de las fases que se desarrollan durante la sedimentación. Esas incluyen un rasgo tal como los cristales, sellado de roca (pinch-out) y los cambios adecuados de las fases (ver figura 5).

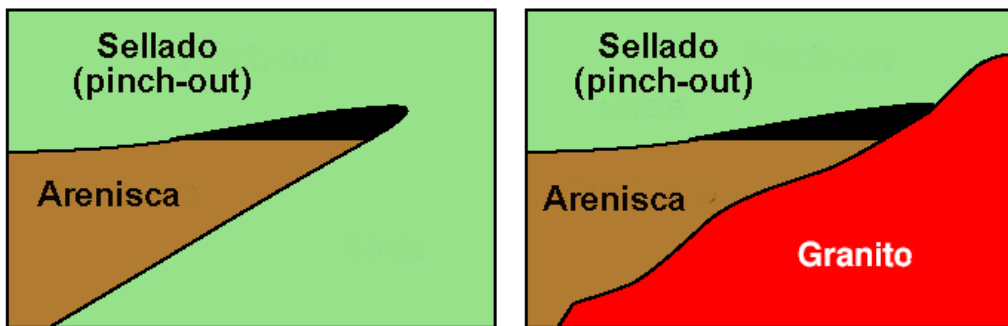


Figura 5: Canales fluviales de arenisca que son aislantes y rodeados por sedimentos ricos en arcilla.

- b) Trampas estratigráficas secundarias son el resultado de variaciones previas a la sedimentación, sobre todo por la diagénesis que es el proceso de formación de la roca. Estas incluyen las variaciones de porosidad aumento por disolución o pérdida de cementación (ver figura 6).

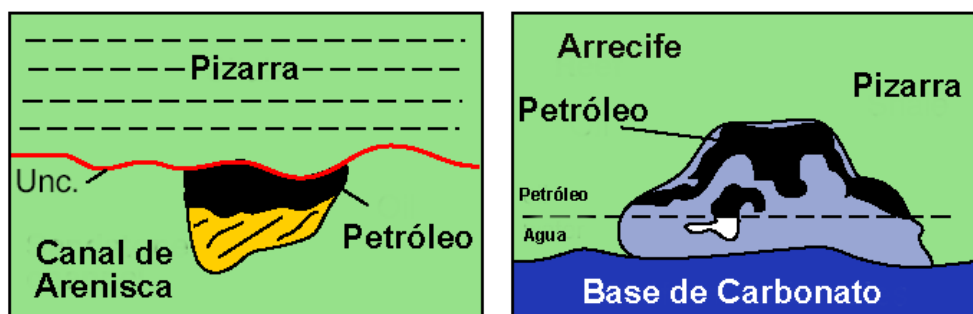


Figura 6: Canales submarinos y turbiditas de arenisca en un estrato rico en pizarra.

Trampas paleogeomorfas son controladas por el paisaje sepultado. Algunos están asociados con prominentes colinas, otras con depresiones en los valles. Algunas son también parcialmente controladas por inconformados así que también llamadas trampas inconformadas (ver figura 7).

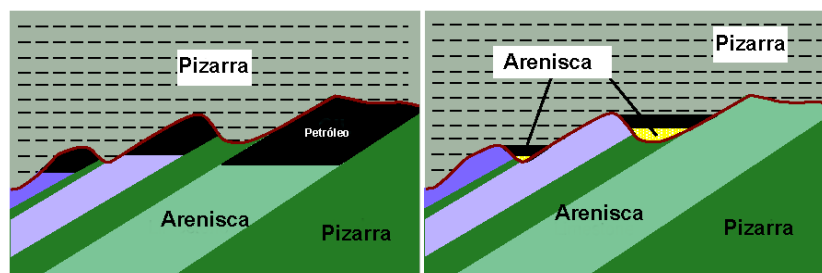


Figura 7: Aceite atrapado bajo las inconformidades en las paleotopografías altas y bajo las extensiones de pizarra (izq). Aceite atrapado arriba de las inconformidades en las paleotopografías bajas formado por canales de arenisca (der).



**c) Interfases del Yacimiento Petrolero** Se pueden considerar las siguientes interfases

- a) Contacto gas-petróleo (GOC), que se define como la superficie que separa la capa gas de la zona del petróleo. Debajo del contacto gas petróleo puede estar presente sólo dentro del petróleo.
- b) Contacto petróleo agua-gas de la zona de petróleo (WOC) de la zona gas. Debajo del contacto petróleo agua generalmente no se detecta petróleo.
- c) Nivel de agua libre (FWL), que se define como una superficie imaginaria localizada de menor profundidad en el yacimiento petrolero donde la saturación del agua es del 100 % y por lo tanto al existir un solo fluido en los poros o sistema capilar, la presión capilar es cero.

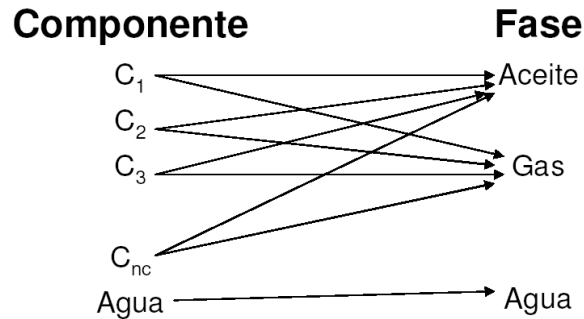
**d) Flujo Multifásico Composicional** El flujo multifásico composicional es un conjunto sustancias formadas por la combinación de dos o más elementos en proporciones definidas en peso y poseyendo las características físicas y químicas diferentes de las de los elementos combinados. En el proceso del petróleo, generalmente aceites grasos u otros materiales similares son agregados a los lubricantes para impartir características especiales.

Para entender el flujo multifásico composicional es necesario considerar:

1. Flujo isotérmico de aceite, gas y agua en un yacimiento.
2. Las fases aceite y gas forman una mezcla multicomponente de hidrocarburos (... + componentes no HC:CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>,H<sub>2</sub>S,... etc.).
3. Las fases aceite y gas están en equilibrio termodinámico.
4. La fase agua no intercambia su masa con las otras fases.

El flujo composicional multifásico implica un número grande de ecuaciones y de incógnitas, que crecen con el número de componentes a considerar. El tratamiento composicional se requiere cuando la composición

de las fases varia de manera importante durante la vida del yacimiento: yacimiento de aceite volátil y de gas condensado, o cuando se modifican por implantación de procesos de recuperación secundaria o mejorada (ver [20]).



### 3.2. Propiedades de los Fluidos

En esta subsección analizaremos las propiedades de los fluidos relacionados al yacimiento petrolero, el objetivo es realizar una descripción de las propiedades básicas que nos permiten entender las condiciones de los fluidos para poder caracterizar el tipo de clasificación del yacimiento petrolero

**Propiedades del Fluido en el Yacimientos Petrolero** Una estimación de la composición elemental (por masa, ver referencia [18] ) de petróleo está dada en la siguiente tabla:

Compuesto	Porcentaje
Carbón	84 %-87 %
Hidrogeno	11 %-14 %
Sulfato	0.6 %-8 %
Nitrógeno	0.02 %-1.7 %
Oxigeno	0.08 %-1.8 %
Metales	0 %-0.14 %

Uno puede observar de la tabla que los fluidos del petróleo predominan hidrocarburos.

Los yacimientos petroleros involucran a los yacimientos petroleros de petróleo pesado, petróleo black-oil y petróleo volátil. Los yacimientos

petroleros de gas incluyen los yacimientos de gas condensado, yacimientos de gas húmedo y yacimientos de gas seco. Estos yacimiento petroleros forman seis clases de fluidos en el yacimiento. Cada uno de estas clases de yacimientos tiene diferente comportamiento de producción y se requieren diferentes estrategias de producción para maximizar la recuperación del petróleo o/y gas. A continuación se muestran los diferentes tipos de yacimientos que pueden existir:

FLUIDO	GRAVEDAD API
Crudo Pesado (Heavy Oil)	<20
Petróleo negro (Black Oil)	30-45
Crudo Volátil (Volatile Oil)	45-70
Gas Condensado (Gas Condensate)	
Gas Seco (Dry Gas)	

La gravedad API, de sus siglas en inglés American Petroleum Institute, es una medida de densidad que describe que tan pesado o liviano es el petróleo comparándolo con el agua. Si los grados API son mayores a 10, es más liviano que el agua, y por lo tanto flotaría en esta. La gravedad API es también usada para comparar densidades de fracciones extraídas del petróleo. Por ejemplo, si una fracción de petróleo flota en otra, significa que es más liviana, y por lo tanto su gravedad API es mayor. Matemáticamente la gravedad API no tiene unidades. Sin embargo siempre al número se le coloca la denominación grado API. La gravedad API es medida con un instrumento denominado hidrómetro.

**Definición 3** *Temperatura a la cual se forma la primer burbuja de gas de un material líquido se llama punto de burbuja. Se dice que el gas alcanza el punto de burbuja si la presión diferencial de un gas en la cual la primer corriente constante de burbujas se emite de un elemento filtrante humedecido bajo condiciones especificadas por una prueba.*

**Clasificación de los tipos de yacimiento petroleros de acuerdo con los diagramas de fases** Desde el punto de vista técnico, los diferentes tipos de yacimientos petroleros pueden clasificarse de acuerdo con los niveles de temperatura y presión iniciales del yacimiento petrolero y su ubicación en el gráfico con respecto a la región de dos fases (gas

y petróleo) en los diagramas de fases que relacionan la temperatura y presión.

La figura 8 es uno de estos diagramas para un determinado fluido de un yacimiento petrolero. El área encerrada por las curvas del punto de burbuja y del punto de rocío hacia el lado izquierdo inferior, es la región de combinaciones de presión y temperatura en donde existen dos fases: líquida y gaseosa. Las curvas dentro de la región de dos fases muestran el porcentaje de líquido en el volumen total de hidrocarburo, para cualquier presión y temperatura. Inicialmente, toda acumulación de hidrocarburos tiene su propio diagrama fases que depende sólo de la acumulación (ver [19]).

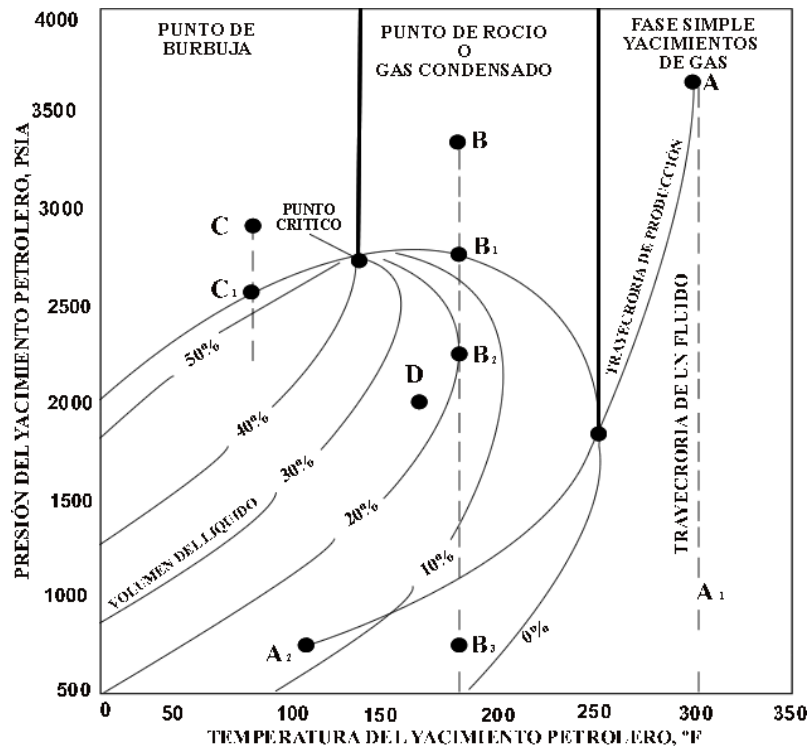


Figura 8: Diagrama de fase Presión-Temperatura de un yacimiento petrolero.

Consideremos un yacimiento petrolero con el fluido de la figura 8, a una temperatura de 300° F y presión inicial de 3700 psia (Siglas de "pounds per square inch absolute libras por pulgada cuadrada absoluta. Una atmósfera es igual a 14,696 psia. psia = psig + psia.), el punto *A*, se encuentra fuera de la región de dos fases, el fluido se hallará inicialmente en el estado de una sola fase (monofásico), comúnmente llamado gas. Como el fluido queda en el yacimiento durante la producción permanece a 300°F (proceso isotérmico, dentro del yacimiento), es evidente que dentro del fluido permanecerá en un estado de una sola fase o estado gaseoso a medida que la presión disminuya a lo largo de la trayectoria *A-A<sub>1</sub>*. Más aún, la composición del fluido producido por el pozo no variará a medida que el yacimiento se agota. Esto será cierto para cualquier acumulación de esta composición, donde la temperatura del yacimiento excede el punto criocondentérmico (máxima temperatura a la cual pueden existir dos fases) o sea 250°F.

Aunque el fluido permanece aún en el yacimiento permanecerá en estado monofásico, el fluido producido al pasar por el fondo del pozo a los separadores en la superficie, aún la misma composición, puede entrar en la región de dos fases debido a la disminución de la temperatura, a lo largo de la presente trayectoria *A-A<sub>2</sub>*. Esto explica la producción del líquido condensado en la superficie de un gas en el yacimiento. Si el punto criocondentérmico está por debajo, por ejemplo los 50°F, sólo existirá gas en la superficie a las temperaturas normales de ambiente, y la producción denominará gas seco. No obstante, la producción puede aún contener fracciones líquidas que pueden removerse por separación a baja temperatura o por plantas de recuperación de gasolina del gas natural.

Consideremos un nuevo yacimiento con el mismo fluido de la figura 8, pero a una temperatura de 180°F y presión inicial de 3300 psia, punto *B* aquí la temperatura del yacimiento excede la temperatura crítica, y como se mencionó anteriormente, el fluido se encuentra en estado monofásico denominado fase gaseosa o simplemente gas.

A medida que la presión disminuye debido a la producción, la composición del fluido producido será la misma que la del fluido del yacimien-

to en el punto  $A$ , y permanecerá constante hasta alcanzar la presión hasta el punto de rocío, a 2545 psia, punto  $B_1$  por debajo de está presión, se condensa el líquido del fluido del yacimiento en forma de rocío; de allí que a este tipo de yacimientos comúnmente se denomina yacimiento de punto de rocío. Debido a esta condensación, la fase gaseosa disminuirá su contenido líquido. Como el líquido condensado se adhiere al material sólido o paredes de los poros de la roca, permanecerá inmóvil. Por consiguiente el gas producido en la superficie tendrá un menor contenido de líquido, aumentando la relación gas-petróleo de producción.

Este proceso denominado condensación retrógrada, continúa hasta alcanzar un punto máximo de volumen del líquido, 10% a 2250 psia, punto  $B_2$  Se emplea el término retrógrado por que generalmente durante la dilatación isotérmica ocurre vaporización en lugar de condensación. En realidad, una vez producido varía, la composición del fluido permanente en el yacimiento también cambia, y la curva envolvente comienza a desviarse. El diagrama de fases de la figura 8, representa una mezcla y sólo una mezcla de hidrocarburos. Para una recuperación máxima de líquido, la desviación debe ser hacia la derecha, por lo que el caso mostrado se acentúa aún más la pérdida de líquido retrógrado en los puntos de la roca del yacimiento.

Si ignoramos por el momento esta desviación en el diagrama de fases, desde el punto de vista cualitativo, la vaporización del líquido formado por la condensación retrógrada se presenta a partir del punto  $B_2$  hasta la presión de abandono en el punto  $B_3$  está revaporización ayuda a la recuperación del líquido y se hace evidente por la disminución en la relación gas-petróleo en la superficie.

La pérdida neta de líquido retrógrado es evidentemente mayor para:

- a) Menores temperaturas del yacimiento;
- b) Mayores presiones de abandono, y
- c) Mayor desviación del diagrama de fases hacia la derecha, lo cual es, naturalmente, una propiedad del sistema de hidrocarburos.

En cualquier tiempo, el líquido producido por condensación retrógra-

da en el yacimiento esta compuesto, en gran parte, de un porcentaje de metano y etano, y es mucho mayor el volumen que el volumen líquido estable que pudiera obtenerse por condensación del fluido del yacimiento a presión y temperaturas atmosféricas.

La composición del líquido producido por condensación retrograda cambia a medida en que la presión disminuye, de esta manera el 4% del volumen del líquido retrógrado a una presión, por ejemplo de 750 psia puede contraer un condensado estable a condiciones de superficie equivalente a 6% del volumen del líquido retrógrado a 2250 psia.

Si la acumulación ocurre a 3300 psia y 75°F, punto *C*, el fluido del yacimiento se encuentra en estado monofásico, ahora llamado líquido debido a que la temperatura está por debajo de la temperatura crítica. A este tipo de yacimientos se denomina "punto de burbuja"; ya que la medida de la presión disminuye se alcanzará el punto de burbuja, en este caso 2550 psia, punto *C*<sub>1</sub>.

Por debajo del punto de burbuja aparecen burbujas, o una fase de gas libre. Eventualmente, el gas libre comienza a fluir hacia el pozo, aumentando continuamente. Inversamente el petróleo fluye cada vez en cantidades menores, y cuando el yacimiento se agota queda aún mucho petróleo por recuperar. Otros nombres empleados para este tipo de yacimientos de líquido (petróleo) son: *yacimientos de depleción, de gas disuelto, de empuje por gas en solución, de dilatación o expansión y de empuje por gas disuelto.*

Finalmente, si existe una mezcla de hidrocarburos ocurre a 2000 psia y 150°F, punto *D*, existe un yacimiento de dos fases, que contiene una zona de líquido o de petróleo con una zona o capa de gas en la parte superior. Como las composiciones de las zonas de gas y petróleo son completamente diferentes entre si, pueden representarse separadamente por diagramas de fases individuales o diagramas de mezcla.

La base o discusión en los párrafos anteriores y desde el punto de vista técnico, los yacimientos de hidrocarburos se encuentran inicialmente ya sea en estado monofásico (*A, B Y C*) o estado bifásico (*D*), de acuerdo con la posición relativa de sus presiones y temperaturas en los diagramas de fases.

### ■ **Petróleo Pesado (de bajo encogimiento)**

Un petróleo en su punto de burbuja a la temperatura del yacimiento petrolero, es considerado saturado con gas a las condiciones de presión y temperatura dadas. De esta manera el término “presión de saturación” es sinónimo de “presión al punto de burbuja” para una temperatura dada.

Una disminución en la presión causará que la muestra original cambie a un sistema de dos fases. El cambio físico es más notorio a medida que el gas es liberado del líquido.

Se considera que una cierta cantidad de gas está disuelta en el petróleo y el que ante una caída de presión, resultará la salida del gas que se encuentra en solución.

### ■ **Petróleo Liviano (de alto encogimiento)**

Ciertos petróleos son conocidos como de alto encogimiento debido a que su encogimiento con una reducción de la presión es mayor a la normal. El mayor encogimiento es originado debido a la existencia de mayores cantidades de componentes intermedios o menores cantidades de componentes intermedios o menores cantidades de componentes pesados en la mezcla.

El comportamiento de petróleos de alto encogimiento en el rango de alta presión es diferente de lo ocurrido en los petróleos de bajo encogimiento. Una ligera caída de presión a partir de la presión de saturación, no sólo de las moléculas del componente liviano sale de la solución, si no también una gran cantidad de componentes intermedios sale de la solución para formar el gas.

### ■ **Yacimientos de Gas Condensado y Gas Seco**

Para ese tipo de yacimientos, el fluido en el yacimiento es siempre gas de una sola fase durante toda la vida del yacimiento, debido principalmente a que en estos sistemas la temperatura de formación es mayor a la cricodentérmica (máxima temperatura de la fase envolvente).



### 3.3. Propiedades Roca-Fluido.

En esta sección nos limitaremos a definir conceptos relacionados al yacimiento petrolero, el objetivo es realizar una descripción de las definiciones básicas para poder entender la interacción entre roca y fluido en el modelo usando una variedad de parámetros físicos que incluyen porosidad y permeabilidad se especifican para cada grid (posición espacial), en adición a los datos referidos a geometría y límites tales como: fallas, comportamiento de la presión, etc.

**Porosidad.** Un medio poroso es un material sólido que tiene huecos distribuidos en toda su extensión (ver figura 9). La porosidad constituye una parte de la roca, y representa un espacio vacío o saturado. El almacenamiento y transmisión de fluido en un medio poroso es afectada principalmente por las propiedades físicas de los poros. Uno puede imaginar que los espacios vacíos no tienen alguna propiedad desde el punto de vista del flujo de fluidos. El tamaño y la forma pueden variar en términos de la forma global de la geometría. En un medio poroso compuesto de granos relativamente esféricos, la geometría del poro puede también ser influenciada por el arreglo de los granos, pueden estar ordenados de manera cúbica, romboédrica o aleatoria.

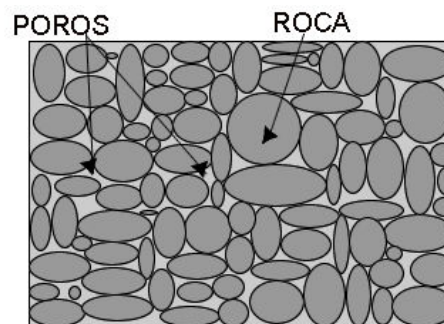


Figura 9: Representación de la porosidad en la roca.

**Definición 4** *A la fracción del volumen del sistema, constituido por la ‘matriz sólida’ y los huecos, se le llama ‘porosidad’ y se le representará por  $\varepsilon$ . Así*

$$\varepsilon(\underline{x}, t) = \frac{\text{Volumen huecos}}{\text{Volumen total}}. \quad (3.1)$$

*La porosidad absoluta se define como la fracción del volumen vacío ( $Vp$ ) (espacio poroso interconectado ( $p_i$ ) y aislado ( $p_a$ )) al volumen bruto ( $Vb$ ) de la roca se representa por la siguiente ecuación:*

$$\varepsilon_a = \frac{Vp_{(i-a)}}{Vb}. \quad (3.2)$$

*La porosidad efectiva implica el fracción del volumen vacío interconectado a través (solo interconectado  $Vp_i$ ) al volumen bruto ( $Vb$ ) de la roca y se puede representar por la siguiente ecuación:*

$$\varepsilon_e = \frac{Vp_i}{Vb}. \quad (3.3)$$

La porosidad efectiva depende de varios factores tal como el tipo de roca, heterogeneidad del tamaño del grano, empaque de los granos, cementación tipo y contenido de arcilla, volumen de hidratación, etc.

## Permeabilidad

**Definición 5** *La permeabilidad de la roca de un yacimiento petrolero es una propiedad del medio poroso que cuantifica la capacidad de un material para transmitir fluidos (en otras palabras es una medida de la conductividad de un medio poroso para un fluido). La permeabilidad está referida a su capacidad de permitir el flujo de fluidos a través del sistema de poros interconectados.*

La permeabilidad formalmente definida es un tensor, debido que a la resistencia al flujo de fluidos varía dependiendo de la dirección del flujo, sin embargo, para efectos prácticos se le da un tratamiento como si fuera un escalar, es decir se considera flujo isotrópico.

La permeabilidad absoluta es una propiedad solo de la roca, mientras que la permeabilidad efectiva es una propiedad de la roca y los fluidos presentes en la roca. Generalmente, la permeabilidad usada en la

industria del petróleo es una constante en la ecuación de Darcy (toma en cuenta la tasa de flujo, gradiente de presión y propiedades de flujo). En este sentido por definición, una medida de permeabilidad requiere un proceso dinámico de flujo.

Si se considera que no existen poros interconectados en una roca, esta sería impermeable, por lo que puede afirmarse que existe una cierta correlación entre la permeabilidad y la porosidad efectiva, y por lo tanto, todos los factores que afectan a la porosidad afectan de igual manera a la permeabilidad. En este sentido, y considerando que la medida de permeabilidad es difícil de obtener, se utiliza la porosidad correlacionada a la permeabilidad para obtener la permeabilidad entre pozos.

**Permeabilidad Relativa** La permeabilidad relativa es el factor más importante en lo que respecta al movimiento de las fases inmiscibles (petróleo, agua y gas) dentro del medio poroso. Las curvas de permeabilidad relativa es un resultado de laboratorio (experimentales), pero su forma incorpora los parámetros de flujo de fluidos dentro del yacimiento petrolero y dependen de variables tales como:

- Geometría del sistema poroso,
- Mineral de la roca,
- Permeabilidad absoluta y porosidad,
- Presencia de mojabilidad de la roca,
- Viscosidad del fluido,
- Tensión interferencial,
- Tasas de desplazamiento,
- Presión,
- Presencia de fases inmóviles.

Considerando que la permeabilidad relativa es un importante factor para determinar el comportamiento del yacimiento petrolero, es que

requiere de una exacta determinación, a fin de poder lograr una buena predicción y una buena optimización. Existen una serie de correlaciones que nos permiten disponer de datos para llevar a cabo las estimaciones, pero es necesario disponer de medidas experimentales para lograr mejores resultados en las estimaciones.

**Flujo Multifásico** El concepto de permeabilidad relativa esta relacionado con la descripción clásica del flujo multifásico en el medio poroso a través de la ecuación de Darcy. La permeabilidad relativa influye en la reducción del flujo en cada fase debido a la mutua interacción de las diferentes fases fluyentes (petróleo, agua y gas).

La Ley de Darcy es una relación empírica que reemplaza (desde el punto de vista microscópico) a las ecuaciones de conservación de momento.

**Mojabilidad** A diferencia de la presión capilar que se logra como consecuencia de la interacción de dos fluidos en presencia de un sólido, el concepto de mojabilidad se refiere a la interacción de un sólido y un fluido (líquido o gas).

**Definición 6** *Se define mojabilidad a la capacidad de un líquido a esparcirse o adherirse sobre una superficie sólida en presencia de otro fluido inmiscible.*

**Presión Capilar** La roca del yacimiento petrolero contiene tres fases (petróleo, agua y gas) y las fuerzas que mantienen a estos fluidos en equilibrio (entre si y con la roca) son expresiones de fuerzas capilares. Durante el proceso de inyección de agua, pueden actuar junto con las fuerzas friccionales para alterar el flujo de petróleo. Es por la tanto importante entender la naturaleza de las fuerzas capilares.

**Definición 7** *La presión capilar es la diferencia de presión que existe a lo largo de la interfase que separa a los dos fluidos inmiscibles. Si se tiene conocimiento de la mojabilidad, la presión capilar será definida como la diferencia de presión entre las fases no-mojante  $P_{nw}$  y mojanete  $P_w$  ( la presión capilar siempre será positiva).*

Es decir.

$$P_c = P_{nw} - P_w. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, para un sistema petróleo-agua (mojables al agua):

$$P_c = P_o - P_w. \quad (3.5)$$

Para un sistema gas-petróleo (mojable al petróleo):

$$P_c = P_g - P_o. \quad (3.6)$$

Origen de la presión capilar: La presión capilar es el resultado de la tensión interfacial que existe en la interfase que separa a dos fluidos inmiscibles.

La presión capilar es otra de las propiedades cuya unidad medida caracteriza al yacimiento petrolero. La presión capilar es la diferencia de presión que tienen dos fluidos inmiscibles en el punto que definen una interfase, siendo que uno de ellos moja la superficie del sólido. La presión capilar en el medio poroso depende de la mojabilidad, saturación de los fluidos y tamaño de los poros. La presión capilar se incrementa a medida que el diámetro de los poros disminuye, si mantenemos las otras condiciones constantes.

**Saturación** Si consideramos un volumen representativo del yacimiento petrolero, con los poros llenos de petróleo, agua y gas, en términos volumétricos podemos representarlo como:

$$V_\varepsilon = V_o + V_w + V_g. \quad (3.7)$$

donde  $V_o$  representa la fracción de volumen del petróleo,  $V_w$  representa la fracción de volumen del agua y  $V_g$  representa la fracción de volumen del gas.

**Definición 8** La saturación ( $S_i$ ), se define como una fracción de volumen poroso ocupado por un fluido en particular.

$$S_i = \frac{V_i}{V_\varepsilon} \quad (3.8)$$

donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  para lo cual “ $n$ ” significa el número total de fases fluidas presentes en el medio poroso.  $V_i$  es el espacio que ocupa el fluido,  $V_\varepsilon$  es el volumen total del espacio poroso (ver figura 10).

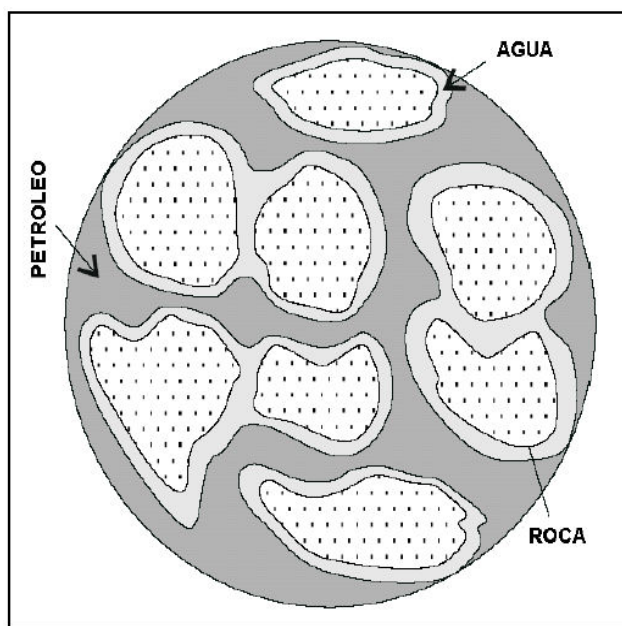


Figura 10: Representación de la saturación del petróleo, agua y gas dentro de un yacimiento petrolero.

Si en un yacimiento petrolero coexisten dos fluidos (petróleo y agua, petróleo y gas, gas y agua, etc.), estos se distribuyen en el espacio poroso de acuerdo a sus características de mojabilidad.

La saturación de fluidos cambia tanto en el espacio como en el tiempo, el yacimiento petrolero puede tener diferentes niveles de saturación en sentido horizontal y sentido vertical y también esta saturación cambia progresivamente de acuerdo al avance de la producción de fluidos.

## Histéresis

**Definición 9** *La medida de tensión interfacial y la mojabilidad pueden proporcionar resultados diferentes cuando la interfase fluido-fluido está avanzando o retrocediendo sobre una superficie sólida. Este fenómeno se denomina Histéresis.*

Las causas principales que generan la histéresis del ángulo de contacto son tres:

- Heterogeneidad de la superficie.
- Rugosidad de la superficie.
- Estabilidad de la superficie a una escala macromolecular.

La presión capilar está sujeta a la histéresis ya que el ángulo de contacto  $\theta$  es una función de la dirección del desplazamiento:  $\theta$  puede tener diferentes valores si el equilibrio alcanzado por avanzar o retroceder sobre la superficie.

**Relación Entre Propiedades Petrofísicas** Las propiedades petrofísicas han sido estudiadas para establecer relaciones entre porosidad, permeabilidad y textura. El tamaño de los granos, su forma y su ordenamiento tienen una fuente de influencia sobre la porosidad y la permeabilidad.

Teóricamente, la porosidad es independiente para empaque esféricos uniformes, las arenas de cuarzo tienden a tener una mayor porosidad que las arenas de grano fino, probablemente para reflejar variaciones en el ordenamiento y la forma esférica de los granos. La permeabilidad se reduce con la disminución del tamaño de los granos como consecuencia de que el diámetro de los poros se reduce y por consiguiente la presión capilar se incrementa. La porosidad y permeabilidad se incrementan cuando se mejora el ordenamiento.

### 3.4. Ciclo de Vida de un Yacimiento Petrolero

El ciclo de vida de un yacimiento petrolero inicia con la puesta de producción del pozo, hasta que la producción alcanza su punto máximo y entonces inicia su declinación hasta alcanzar un determinado límite económico y entonces el pozo es cerrado.

#### 3.4.1. Recuperación Primaria

El petróleo puede ser producido por un flujo natural, inducido por el flujo, o por mecanismos de extracción. En muchos yacimientos petroleros la energía es suficiente durante las primeras fases de la producción, la fuerza del petróleo dentro de los pozos lo lleva a la superficie. Mientras, algunos campos inicialmente y casi todos los campos finalmente, tienen que ser producidos con ayuda desde la superficie (ver [17]). El método más simple es el de levantamiento por gas, el cual es una bomba natural, el método consiste en colocar tubería por debajo del nivel del gas, así el petróleo es empujado hacia la superficie por la fuerza de compresión. El método más común de producción del petróleo cuando no hay flujo en los pozos es decir que hay una bomba que suministra un mecanismo de extracción del fluido en el yacimiento petrolero (ver figura 11).

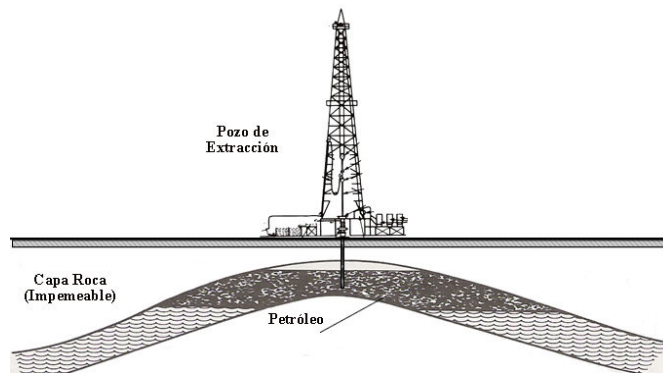


Figura 11: El petróleo es empujado hacia la superficie por la fuerza de compresión de manera natural.



**Mantenimiento de la Presión de un Yacimiento Petrolero** Durante la extracción de fluidos en un yacimiento petrolero, una práctica usual es mantener la presión de mismo yacimiento, o estar muy cerca de los niveles originales tanto del agua como del gas dentro del yacimiento así es como los hidrocarburos son extraídos. Esta práctica tiene su provecho no solamente por retardar la declinación de la explotación de los pozos individuales e incrementa considerablemente su producción.

**Índice de Productividad** La relación de la tasa de producción ( $STB$  / día para el flujo líquido) al diferencial de presión (drawdown) en el punto medio del intervalo productivo se denomina índice de productividad ( $IP$  o  $J$ ).

$$IP = J = \frac{u}{(p - p_{wf})}.$$

*El  $IP$  es una medida del potencial de un pozo, o la facilidad con la que este produce, y es medida como una propiedad del pozo. Para calcular el  $IP$  a partir de una prueba de producción, es necesario hacer fluir el pozo a un tiempo suficientemente grande para que alcance el flujo de estado pseudoestable. Sólo durante régimen de flujo la diferencia  $(p - p_{wf})$  será constante.*

En algunos pozos, el  $IP$  permanece constante a pesar que exista una gran variación en la tasa de flujo (la tasa de flujo es directamente proporcional al diferencial de fondo). En otros pozos, la linealidad no se mantiene a altas tasas, y el  $IP$  declina.

Las causas de esta declinación pueden ser:

- Turbulencias a altas tasas de flujo.
- Disminución de la permeabilidad del petróleo, debido a la presencia de gas libre causada por la caída de la presión en el pozo.
- Incremento de la viscosidad del petróleo debido a que su presión cae del punto de burbuja.
- Reducción en la permeabilidad debido a la compresibilidad de la formación.

En yacimientos petroleros por agotamiento, los *IP* de los pozos declinan a medida que producen, debido al incremento de la viscosidad del petróleo ya que el gas sale de la solución (queda menos gas disuelto) y al ocurrir esto, el porcentaje del petróleo presente en el yacimiento petrolero se reduce (hay gas y petróleo en el yacimiento petrolero, repartiéndose en el espacio poroso y cambiando la presencia porcentual) y por consiguiente la permeabilidad relativa al petróleo se reduce.

### **Mecanismos de Impulsión de un Yacimiento Petrolero**

**Yacimientos de empuje por gas en solución** El empuje por gas o solución es a veces llamado empuje por gas interno, empuje por gas disuelto, empuje volumétrico, o empuje por expansión de fluidos. Este es el principal mecanismo de empuje para aproximadamente un tercio de todos los yacimientos petroleros del mundo.

En un yacimiento de empuje por gas en solución, este mecanismo predomina por sobre uno de capa de gas o empuje por agua. La presión inicial del yacimiento está sobre la presión inicial del punto de burbuja. Si suponemos que la presión inicial está sobre la presión del punto de burbuja, entonces la presión como consecuencia de la producción declinará rápidamente hasta el punto de burbuja. Durante este periodo, todo el gas en el yacimiento petrolero permanecerá en solución. Este proceso comúnmente llamado como empuje por expansión de fluidos.

Una vez que la presión ha declinado hasta la presión del punto de burbuja, la producción original causará que esta decline por debajo del punto de burbuja con la consiguiente evolución del gas libre en el yacimiento petrolero. Después que la saturación de gas excede la saturación crítica, este se hace móvil.

A fin de que no se forme una capa de gas, la permeabilidad vertical debe ser pequeña. Sobre la base de esto el gas libre fluirá en el yacimiento y permitirá que se incremente el contacto gas-petróleo observado en los pozos. El mecanismo principal se debe al empuje de gas y a la expansión del petróleo. El efecto de la expansión del agua y de la roca es pequeño si se compara a la energía de un gas libre altamente expansible.

Arp (Acuerdos de Reparto de la Producción) desarrolló una ecuación

para estimar la eficiencia de la recuperación para yacimientos petroleros que se encuentran con una presión igual a la presión del punto de burbuja y declinan hasta la presión de abandono

$$\%RE = 41,815 \left( \frac{\varepsilon (1 - S_w)}{B_{ob}} \right)^{0,0422} \left( \frac{K}{\mu} \right) S_w^{0,3722} \left( \frac{p_b}{p_a} \right)^{0,1741} \quad (3.9)$$

- $\%RE$  =Eficiencia de recuperación, porcentaje
- $\varepsilon$  =Porosidad
- $S_w$  =Saturación de agua
- $B_{ob}$  =FVF al punto de burbuja bl/STB
- $K$  =Permeabilidad promedio de la formación
- $\mu$  =Viscosidad del petróleo al punto de burbuja
- $P_b$  =Presión al punto de burbuja
- $P_a$  =Presión de abandono

**Yacimientos de empuje por agua** Este tipo de yacimientos petroleros no existe capa de gas, por lo tanto la presión inicial es mayor que la presión del punto de burbuja. Cuando la presión se reduce debido a la producción de fluidos, se crea un diferencial de presión a través del contacto agua-petróleo. De acuerdo con las leyes básicas del flujo de fluidos en medio poroso, el acuífero reacciona haciendo que el agua contenida en él, invada al yacimiento de petróleo originando intusión o influjo lo cual no sólo ayuda a mantener la presión, si no permite un desplazamiento inmisible del petróleo que se encuentra en la parte invadida.

La eficiencia de recuperación para yacimientos por empuje de agua está en el rango 10 % a 75 %. arp desarrollo una ecuación para la eficiencia de la recuperación sobre la base de datos estadísticos

$$\%RE = 54,898 \left( \frac{\varepsilon (1 - S_w)}{B_{oi}} \right)^{0,0422} \left( \frac{K \cdot \mu_w}{\mu_o} \right) S_w^{-0,1903} \left( \frac{p_i}{p_a} \right)^{0,2159} \quad (3.10)$$

$\%RE$	=Eficiencia de recuperación, porcentaje
$\varepsilon$	=Porosidad
$S_w$	=Saturación de agua
$B_{oi}$	=FVF inicial bl/STB
$K$	=Permeabilidad promedio de la formación
$\mu_o$	=Viscosidad del petróleo a condición inicial
$\mu_w$	=Viscosidad del agua a condición inicial
$p_i$	=Presión inicial del yacimiento
$p_a$	=Presión de abandono

Esta ecuación ha sido desarrollada exclusivamente para yacimientos de empuje por agua y no debe ser usada para procesos de inyección de agua. Dependiendo como ingresa el agua a los yacimientos petroleros los yacimientos por empuje se denominan

- a) Yacimientos por empuje de fondo, el cual la formación es usualmente de gran espesor con suficiente permeabilidad vertical, tal que el agua puede moverse verticalmente.
- b) Yacimientos por empuje lateral, en la cual el agua se mueve hacia el yacimiento desde los lados

### **Yacimientos de empuje por capas de gas**

Para este tipo de yacimientos petroleros se considera que la presión inicial del yacimiento petrolero es exactamente igual a la presión del punto de burbuja. Esto ocurre debido a que en el transcurso del tiempo geológico, debe existir el equilibrio entre petróleo y el gas. Con la capa de gas, el petróleo está manteniendo la máxima cantidad de gas en la solución. A medida que la presión del yacimiento se reduce con capa de gas de 20 % al 40 % del petróleo original en sitio.

### **Yacimientos bajo segregación gravitacional**

Un yacimiento de empuje por segregación, el gas libre a medida que sale del petróleo, se mueve hacia el tope del yacimiento mientras que el petróleo hacia abajo debido a la permeabilidad vertical. Para esto debe existir suficiente permeabilidad vertical para permitir que las fuerzas de gravedad sean mayores que las fuerzas viscosas dentro del yacimiento. Aunque algunos de estos yacimientos no tienen capa de gas inicial, la recuperación será mayor si está existe. La segregación gravitacional ocurre

en yacimientos que tienen un alto relieve vertical y donde existan fluidos de baja viscosidad

### **3.4.2. Recuperación Secundaria**

Cuando en un yacimiento petrolero ha disminuido considerablemente la presión y se desea seguir obteniendo petróleo de ese yacimiento, es necesario utilizar el método de recuperación secundaria. Así este método severo ha sido desarrollado para obtener petróleo de yacimientos, donde los precios económicos dictaron que la producción ordinaria del sistema no fue largamente viable.

Considerables experimentos han sido llevados sobre el uso de diferentes tipos de gases introducidos. Ejemplos carga de gas húmedo, gas enriquecido, petróleo líquido en gas enriquecido (LPG) tal como el gas butano y propano, gas en alta presión y nitrógeno regular. La alta presión del gas no solamente empuja el petróleo a través del yacimiento petrolero, si no también puede producir exceso de hidrocarburos, la concentración de gas en el petróleo líquido se incrementa (ver referencia [17]).

La inyección de agua es aún un proceso predominante en la recuperación secundaria. La razón principal para este factor es que cuando se formo este yacimiento ordinariamente no tenía suficiente agua disponible. Mantener el agua desde fuera del yacimiento petrolero puede ser muy costoso. Sin embargo, en algunos pasajes en la formación son más largos que otros y el agua tiende a fluir libremente a través de ellos, evitando pequeños pasajes donde permanece el petróleo. Una solución parcial para este problema es la posibilidad de inundar la mezcla del fluido. El butano y el propano líquido son bombeados dentro de la tierra bajo una considerable presión disolviéndose en el petróleo llevándolo fuera de los pequeños pasajes, esta adición de la presión es obtenida por usar gas natural (ver figura 12).

**Agotamiento de un Yacimiento Petrolero** El agotamiento de un yacimiento petrolero es un fenómeno natural que acompaña durante la explotación de recurso no renovable. La depreciación es la reducción progresiva del volumen de petróleo y gas natural y está en función del tiempo y del nivel de extracción total y está asociada a la declinación de

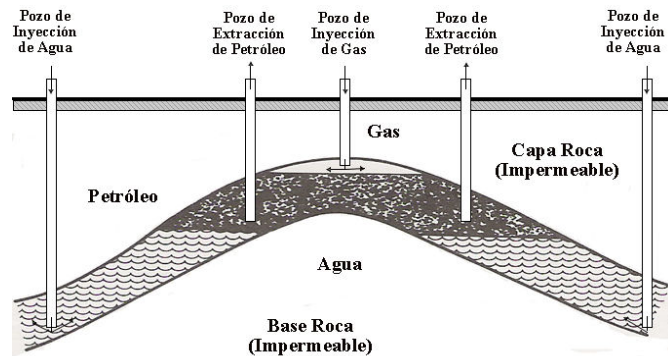


Figura 12: Simulación del fluido del petróleo desde un pozo con gas o agua.

la producción de un determinado pozo.

Las características económicas de un recurso cambian con el tiempo y al agotarse origina que los operadores abandonen antiguas áreas y desarrollen nuevas. Esto conlleva a la estrategia de desarrollar primero los grandes campos petroleros y posteriormente los menos rentables ya sea por que están más alejados o por que son menos rentables, o sin infraestructura, o son pequeños en desarrollo, se requerirán un menor esfuerzo para producir un menor volumen de recurso.

El agotamiento y sus efectos son influenciados por la tecnología. Los avances tecnológicos han permitido una perforación de pozos más exacta, extracción de un mayor porcentaje de petróleo y gas, extensión de la vida económica, desarrollo de recursos no viables económicamente y recursos no convencionales. Por otro lado la tecnología tiene efectos contradictorios sobre el agotamiento, ya que por un lado se reduce o elimina el efecto del agotamiento a través del incremento de la producción y por otro lado el recurso se produce más rápido.

## 4. Modelo Beta o de Petróleo Negro.

En el presente capítulo se hace uso de la formulación de los sistemas continuos para formular el modelo beta o petróleo negro y para tomarlo como hipótesis teniendo en cuenta de que es un caso particular del flujo multifásico composicional, también definiremos la Ley de Darcy que es una ecuación constitutiva, empírica, que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido y el flujo de un fluido contenido en un medio poroso.

Recordemos que en el capítulo 3 se definió que los yacimientos petroleros están constituidos por medios porosos, generalmente de origen sedimentario, en cuyos poros se almacenan fluidos los cuales contienen hidrocarburos. Frecuentemente, en los poros de un yacimiento petrolero coexisten varias fases. En particular, dos fases líquidas y una gaseosa. Por lo mismo, el espacio de los poros es compartido por estas tres fases. Con los símbolos  $S_w$ ,  $S_o$  y  $S_g$  representaremos la fracción del volumen de los poros ocupada por las fases agua, petróleo líquido y gas, para que el balance quede de la siguiente forma para cada componente:

$$S_w \equiv \frac{V_w}{V_\varepsilon} \quad (4.1)$$

$$S_o \equiv \frac{V_o}{V_\varepsilon} \quad (4.2)$$

$$S_g \equiv \frac{V_g}{V_\varepsilon}. \quad (4.3)$$

donde  $V_w, V_o, V_g, V_\varepsilon$ , representan el volumen agua, petróleo, gas y matriz de porosidad respectivamente.

En lo que sigue, supondremos que estas tres fases fluidas llenan completamente los poros del yacimiento, que es la situación más frecuente en las aplicaciones a la Ingeniería Petrolera. Por lo mismo, estudiaremos yacimientos ‘saturados’ exclusivamente. En este caso

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (4.4)$$

de tal forma que el balance para la porosidad queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon \equiv \frac{V_\varepsilon}{V_{total}} \quad (4.5)$$

Una de las fases líquidas, es la ‘fase agua’ y la otra es la llamada ‘fase de petróleo líquido’. El agua contenida en fase agua, puede contener diversas sustancias disueltas, pero no hidrocarburos, porque el petróleo no es soluble en agua. La fase de petróleo líquido contiene hidrocarburos que clasificaremos en dos grupos: hidrocarburos ‘no volátiles’ y ‘gas disuelto’ (hidrocarburos volátiles). La fase gas, está formada principalmente por hidrocarburos en estado gaseoso (cuya composición química es la misma que la del gas disuelto).

Algunas de las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- I. Hay tres fases fluidas en el yacimiento; dos líquidas y la fase gaseosa.  
Las líquidas son la fase del agua y la fase del petróleo líquido
- II. El yacimiento está saturado por los fluidos.
- III. Los hidrocarburos no son solubles en el agua.
- IV. Hay dos clases de hidrocarburos: volátiles y no volátiles.
- V. La fase gaseosa está formada por hidrocarburos volátiles, exclusivamente.
- VI. La fase del petróleo líquido contiene hidrocarburos volátiles y no volátiles.
- VII. Hay intercambio de hidrocarburos volátiles entre la fase del petróleo líquido y la fase gaseosa
- VIII. No hay procesos difusivos de masa

A los hidrocarburos volátiles contenidos en la fase del petróleo líquido frecuentemente se les llama ‘gas disuelto’. Además, la notación que se utiliza es

$$\bar{\rho}_o = \frac{m_o}{V_o} \text{ y } \bar{\rho}_{dg} = \frac{m_{dg}}{V_{dg}}. \quad (4.6)$$

Aquí,  $V_o$  es el volumen de la fase petróleo líquido, mientras que  $m_o$  y  $m_{dg}$  son las masas de los hidrocarburos no volátiles y del gas disuelto



(hidrocarburos volátiles), respectivamente, contenidas en la fase petróleo líquido. A  $\bar{\rho}_o$  y  $\bar{\rho}_{dg}$  a se les llama ‘densidad neta del aceite’ y ‘densidad neta del gas disuelto’, respectivamente.

Por lo anterior, tanto la fase agua como la fase gas constan de una sola componente, mientras que la fase aceite consta de dos: los hidrocarburos no volátiles y el gas disuelto. Esto da un número total de cuatro componentes. La densidad neta del aceite ( $\bar{\rho}_o$ ) y la densidad neta del gas disuelto ( $\bar{\rho}_{dg}$ ), son iguales a la masa por unidad de volumen de la fase del petróleo líquido de estas componentes. En particular, la densidad de la fase del petróleo líquido,  $\rho_o = \text{masa total de la fase} / \text{volumen de la fase}$ , satisface

$$\rho_o = \bar{\rho}_o + \bar{\rho}_{dg}. \quad (4.7)$$

Finalmente,

$$R_S = \frac{\bar{\rho}_{dg}}{\bar{\rho}_o} \quad (4.8)$$

el factor  $R_S$  es igual al cociente de la masa de gas disuelto entre la de los hidrocarburos no volátiles. Este cociente, en forma un poco diferente, se utiliza ampliamente en la práctica en la Ingeniería Petrolera. En ella se define  $R_s \equiv \bar{R}_s \rho_{oSTC} / \rho_{gSTC}$ , donde  $\rho_{oSTC}$  y  $\rho_{gSTC}$  son, respectivamente, las densidades del aceite y del gas en las condiciones del tanque de almacenamiento (stock tank conditions). Sin embargo, para nuestros propósitos, tiene ventajas adoptar la definición de la Ec.(4.8).

Las propiedades extensivas en que se basa el modelo Beta de yacimientos petroleros, son cuatro:

1. La masa del agua, en la fase del agua.
2. La masa de petróleo no volátil, en la fase del petróleo líquido.
3. La masa de petróleo volátil (gas disuelto), en la fase del petróleo líquido.
4. La masa de petróleo volátil en la fase gaseosa

Sus expresiones integrales son

$$M_w(t) \equiv \int_{B_w} \varepsilon S_w \rho_w dx, \quad (4.9)$$

$$M_o(t) \equiv \int_{B_{pl}} \varepsilon S_o \bar{\rho}_o dx, \quad (4.10)$$

$$M_{dg}(t) \equiv \int_{B_{pl}} \varepsilon S_o \bar{\rho}_{dg} dx, \quad (4.11)$$

$$M_g(t) \equiv \int_{B_g} \varepsilon S_g \bar{\rho}_g dx. \quad (4.12)$$

Aquí  $B_w, B_{pl}$  y  $B_g$  son los cuerpos de la fase agua, la fase de petróleo líquido y la fase gaseosa. Sus velocidades respectivas son  $\underline{v}^w$ ,  $\underline{v}^o$  y  $\underline{v}^g$ . Las propiedades intensivas correspondientes a estas propiedades extensivas son:

$$\psi^w \equiv \varepsilon S_w \rho_w \quad (4.13)$$

$$\psi^o \equiv \varepsilon S_o \bar{\rho}_o \quad (4.14)$$

$$\psi^{dg} \equiv \varepsilon S_o \bar{\rho}_{dg} \quad (4.15)$$

$$\psi^g \equiv \varepsilon S_g \bar{\rho}_g. \quad (4.16)$$

Las ecuaciones básicas del modelo se obtienen aplicando las Ecuaciones de Balance Local, Ecs.(2.20) y (2.21), a estas cuatro propiedades intensivas. Las aplicaremos con  $\tau^{\alpha\beta} = 0$ , porque se ha supuesto que no hay difusión de las masas de las diferentes componentes. Por lo que respecta a las fuentes,  $g^{\alpha\beta}$ , solamente se tomará en cuenta el intercambio de hidrocarburos volátiles entre la fase gaseosa y la del petróleo líquido. Al respecto, sin embargo, debe señalarse que en muchas aplicaciones de la Ingeniería Petrolera la extracción por pozos en el yacimiento se incorpora tomando  $g^{\alpha\beta} \neq 0$ , en las diferentes fases, cosa que por ahora no haremos.

Las ecuaciones diferenciales de balance local, Ecs.(2.20), correspondientes a las propiedades extensivas son

$$\frac{\partial \varepsilon S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon S_w \rho_w \underline{v}^w) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon S_o \bar{\rho}_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon S_o \bar{\rho}_o \underline{v}^o) = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \varepsilon S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o \underline{v}^o) = g_g^o \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon S_g \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon S_g \rho_g \underline{v}^g) = g_o^g \quad (4.20)$$

La Ecs.(4.17) a (4.20) proporcionan las ecuaciones diferenciales básicas del Modelo Beta, sin embargo para obtener un modelo completo, capaz de realizar predicciones del comportamiento de yacimientos petroleros, es necesario complementarlo con otras hipótesis tales como las ecuaciones de estado para los fluidos y la Ley de Darcy para flujo multifásico. Por otra parte  $g_g^o$  y  $g_o^g$  es lo que se importa o transporta del petróleo volátil al no volátil y viceversa, sin embargo, es importante observar desde ahora que  $g_g^o + g_o^g = 0$ , al sumar las ecuaciones (4.19) y (4.20), se obtiene

$$\frac{\partial \varepsilon (S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o + S_g \bar{\rho}_g)}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \varepsilon (S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o \underline{v}^o + S_g \rho_g \underline{v}^g) \} = 0. \quad (4.21)$$

Finalmente, las condiciones de salto, implicadas por la Ec.(2.21) son

$$[\varepsilon S_w \rho_w (\underline{v}^w - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0 \quad (4.22)$$

$$[\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0 \quad (4.23)$$

$$[\varepsilon S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma g}^o \quad (4.24)$$

y

$$[\varepsilon S_g \rho_g (\underline{v}^g - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma o}^g. \quad (4.25)$$

Es interesante observar que, sin necesidad de hacer hipótesis adicionales, la Ec.(4.6), en presencia de la Ec.(4.8), implica el Principio de Conservación de  $\bar{R}_s$ . El cual se verá en el capítulo 5, también se le conoce como *Principio de Conservación del Punto Burbuja*.

## 4.1. La Ley de Darcy

La Ley de Darcy, es una ecuación constitutiva, empírica, que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido con su presión, la cual fue propuesta por un ingeniero francés, H. Darcy, en el Siglo XIX, que ha servido de base para la modelación del flujo de medios porosos desde entonces.

**Ley de Darcy Para Flujo de una Sola Fase.** Para su formulación utilizaremos a la ‘velocidad de Darcy’,  $\underline{U}$ , la cual se define por la ecuación

$$\underline{U} = \varepsilon \underline{v}. \quad (4.26)$$

Observe, que ella tiene la propiedad de que cuando el vector  $\underline{n}$ , unitario, es normal a una superficie,  $\underline{U} \cdot \underline{n}$  es el gasto volumétrico de fluido que pasa a través de esa superficie.

La ley de Darcy establece que la velocidad  $\underline{U}$  es una función lineal del gradiente de la presión en ausencia de gravedad. En general, esta se expresa en presencia de gravedad como:

$$\underline{U} = \frac{1}{\underline{\mu}} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \underline{\hat{g}}) \quad (4.27)$$

donde  $\underline{\hat{g}}$  es el vector de aceleración de la gravedad; además,  $\hat{g}$  es su magnitud;

$\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido;

$\underline{k}$  es el ‘tensor de permeabilidad intrínseca’;

$p$  es la presión del fluido.

Frecuentemente al tensor de permeabilidad intrínseca, se le llama simplemente permeabilidad.

Si consideramos a  $z$  como la altura respecto a un nivel de referencia dado y la coordenada  $x_3 = z$ , entonces el vector aceleración de la gravedad se puede expresar como

$$\underline{\hat{g}} = \hat{g} \nabla z \quad (4.28)$$

Donde  $\hat{g}$  es la constante de gravedad y  $\nabla z = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) = (0, 0, 1)$  Así, la Ley de Darcy se puede describir como

$$\underline{U} = \frac{1}{\underline{\mu}} \underline{k} \cdot (\nabla p + \rho \hat{g} \nabla z). \quad (4.29)$$

La expresión equivalente en notación indicial sería:

$$U_i = \frac{k_{ij}}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho \hat{g} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right); i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

Si definimos el nivel piezométrico como:

$$h = \frac{1}{\hat{g}} \int_{p_0}^p \frac{d\xi}{\rho(\xi)} + z. \quad (4.31)$$

y correspondientemente su gradiente resulta

$$\nabla h = (\hat{g}\rho)^{-1} \nabla p + \nabla z \quad (4.32)$$

Entonces la ley de Darcy la podemos describir en términos del nivel piezométrico (medida de compresibilidad de los líquidos)

$$\underline{U} = -\frac{\rho\hat{g}}{\mu} \underline{k} \cdot \left( \frac{\nabla p}{\hat{g}\rho} + \nabla z \right) = -\underline{K} \cdot \nabla h. \quad (4.33)$$

**Ley de Darcy Para Flujo Multifásico** La ley de Darcy puede ser extendida para describir el flujo simultáneo para más de una fase:

$$\underline{u}_l = -\frac{k k_{rl}}{\mu_l} \left( \nabla p_l + \rho_l \frac{g}{g_c} \right) \quad (4.34)$$

donde  $g$  es el vector de aceleración de la gravedad;

$g_c$  es una constante de conversión;

$\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido;

$\underline{k}$  es el 'tensor de permeabilidad intrínseca';

$p$  es la presión del fluido;

$l$  es la fase  $o, w, g$  (petróleo, agua y gas);

$k_{rl}$  es la permeabilidad relativa de cada fase.

La ecuación (4.34) puede también escribirse en términos de  $\hat{g}$ .

$$\underline{u}_l = -\frac{k k_{rl}}{\mu_l} (\nabla p_l + \hat{g} \nabla z) \quad (4.35)$$

donde

$$\hat{g} = \rho_l \frac{g}{g_c} \quad (4.36)$$

y  $z$  es positivo en dirección vertical decreciente. Si la velocidad tiene como unidades de medida  $cm/sec$ , la viscosidad y el gradiente de la presión en  $atm/cm$  estas unidades de  $k$  es un darcy, esta se muestra que

$$1 \text{ darcy} = 9.869 \times 10^{-9} cm^2 \quad (4.37)$$

$$1 \text{ darcy} = 1.062 \times 10^{-11} ft^2. \quad (4.38)$$

Con frecuencia la unidad millidarcy o md (1darcy=1000 millidarcy) es usada.

## 4.2. Flujo de Fluidos en Medios Porosos.

En esta Sección se estudian tanto el flujo de un fluido contenido en un medio poroso.

**Características del Modelo de la Dinámica de Fluidos en Medios Porosos.** Las hipótesis básicas del modelo de flujo en medios porosos que se presenta aquí se enumeran a continuación:

- El sólido está saturado de fluido. Esto significa que los poros del sólido están llenos del fluido;
- No hay difusión del fluido;
- La matriz sólida está en reposo;
- La matriz sólida es elástica. Más precisamente, se supone que la porosidad del sólido es función de la presión en el fluido. Así, su porosidad puede variar al transcurrir el tiempo, a pesar de que el sólido no se mueve;
- El fluido es compresible. En este respecto, se supone que la densidad del fluido es función de la presión, exclusivamente;
- Las tracciones en el fluido, son siempre perpendiculares a su superficie. Esta hipótesis es equivalente a suponer que los esfuerzos en el fluido son exclusivamente presiones;
- La velocidad del fluido está dada por la ley de Darcy, la cual es una ecuación constitutiva, empírica, que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido con su presión.

**El Modelo General de Flujo de Fluidos en Medios Porosos.** Se explica a continuación, la forma de aplicar del método sistemático para derivar los modelos de los sistemas continuos. Claramente, el sistema está formado por dos fases; sin embargo, debido a que el movimiento de la fase sólida es conocido, pues está en reposo, basta tratar solamente la fase fluida. A su vez, ésta consta de una sola componente. Así, el modelo del flujo se construye con base exclusivamente en una propiedad extensiva:

la masa del fluido. Por la hipótesis de que el medio poroso está saturado se tiene que la propiedad intensiva asociada es  $\varepsilon(\underline{x}, t) \rho(\underline{x}, t)$ , donde  $\varepsilon$  es la porosidad (fracción del volumen del espacio físico ocupado por los poros, el cual, en este caso en que el material poroso está saturado, es igual a la fracción de volumen ocupado por el fluido). Aplicando la ecuación diferencial de balance (2.20), se obtiene

$$\frac{\partial \varepsilon \rho}{\partial t} + \nabla (\varepsilon \rho \underline{v}) = \nabla \cdot \tau + g. \quad (4.39)$$

La ecuación diferencial local de balance es la Ec.(4.39). Por la hipótesis de que no hay difusión de la masa del fluido, esta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial \varepsilon \rho}{\partial t} + \nabla (\varepsilon \rho \underline{v}) = g. \quad (4.40)$$

Por otra parte, las condiciones de salto son

$$[\varepsilon \rho (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0. \quad (4.41)$$

### 4.3. Condiciones Iniciales y de Frontera

Las Ecs.(4.17) a (4.20) proporcionan las ecuaciones diferenciales proporcionan la formulación básica de flujo de fluidos en un medio poroso se requiere definir las condiciones iniciales y frontera del medio para obtener un modelo completo, capaz de realizar predicciones del comportamiento de yacimientos petroleros, es necesario complementarlo:

Las condiciones iniciales definen en el caso más general del flujo multifásico composicional, la distribución de las presiones, saturaciones y composición de las fases al tiempo cero de nuestro problema.

Las condiciones de frontera establecen la manera en que el yacimiento interactúa con sus alrededores durante su vida productiva.

## Condiciones Iniciales

- Generalmente se considera que a  $t = 0$ , existe equilibrio gravitacional y capilar en el yacimiento.
- Se conoce  $P_{o,ref}$  a  $z_{ref}$
- Se conoce  $z_{woc}$
- Si  $P_i < P_b$  existe casquete de gas:  $z_{ref} = z_{goc}$  y  $P_{o,ref} = P_b$

Equilibrio gravitacional y capilar implica cero flujo en las fases a  $t = 0$ . los gradientes de potencia de las en cualquier punto y dirección son cero. Entonces conforme a la ley de Darcy, ecuación (4.34).

$$\frac{k k_{rp}}{\mu_p} (\nabla p_l - \gamma_l \nabla D) = 0 \quad (4.42)$$

La ecuación (4.42) implica que a lo largo de un plano horizontal, ubicado en una posición cualquiera en  $z$ , se tiene que:

$$\frac{\partial p_l}{\partial x} = 0 \quad (4.43)$$

y

$$\frac{\partial p_l}{\partial y} = 0. \quad (4.44)$$

Y además

$$\frac{\partial p_l}{\partial z} - \gamma_l = 0 \quad (4.45)$$

la ecuación (4.42) implica que a lo largo del plano horizontal, ubicado en una posición cualquiera en  $z$ , se tiene que  $P_l$  en un plano  $(x, y)$  a cierta  $z$  es constante, además la ecuación (4.45) implica que

$$p_p(x, y, z, t = 0) = p_l^0(z) \quad (4.46)$$

conocida la presión  $P_{o,ref}$  a  $Z_{ref}$  es posible calcular  $p_0(z)$ . Para esto se integra la ecuación (4.45)

$$\frac{g_c}{g} \int_{P_{p,ref}}^{P_l} \frac{dP_l}{\rho_l} = \int_{z_{ref}}^z dz \quad (4.47)$$



y de la ecuación (4.47) se obtiene

$$P_l = P_{l,ref} + \frac{g_c}{g} \bar{\rho}_l (z - z_{ref}) \quad (4.48)$$

donde

$$\bar{\rho}_l = \rho_l(\bar{p}_l). \quad (4.49)$$

De la ecuación (4.49), tenemos

$$P_l = \frac{P_l + P_{ref}}{2}. \quad (4.50)$$

La ecuación (4.48) contiene implícitamente  $P_l$  (a través de  $\rho$ ) por lo que se puede resolver por el método Newton-Rapson. Si se escribe la ecuación (4.49) para la fase aceite obtenemos

$$P_o = P_{o,ref} + \frac{g}{g_c} \bar{\rho}_o (z - z_{o,ref}) \quad (4.51)$$

podemos calcular la presión de la fase aceite en cualquier  $z$  conocida  $P_{o,z_{woc}}$ , se calcula  $P_{w,z_{woc}}$

$$P_{cwo} (S_w = 1,0) = P_{cwo} = P_{o,z_{woc}} - P_{w,z_{woc}} \quad (4.52)$$

por lo que

$$P_{w,z_{woc}} = P_{o,z_{woc}} - P_{cwo} \quad (4.53)$$

análogamente se puede calcular  $P_g$  y  $P_{g,z_{goc}}$

$$P_{g,z_{goc}} = P_{o,z_{goc}} - P_{cgo}. \quad (4.54)$$

Ahora  $P_g(z)$  y  $P_w(z)$  pueden calcularse mediante la ecuación (4.51), es decir

$$P_g = P_{g,z_{goc}} + \frac{g}{g_c} \bar{\rho}_g (z - z_{zgoc}) \quad (4.55)$$

$$P_w = P_{w,z_{woc}} + \frac{g}{g_c} \bar{\rho}_w (z - z_{zwoc}).$$

## 5. Diferentes Clases de Choques de la Ingeniería Petrolera: Buckley-Leverett y Choques en Yacimientos Petroleros.

Los llamados ‘choques’, ampliamente conocidos en el flujo supersónico de fluidos compresibles –no-viscosos-, son cambios muy rápidos tanto en la presión como en otras propiedades del fluido, los cuales en los modelos en que se desprecia la viscosidad, se simulan en como discontinuidades de dichas propiedades del fluido.

**Definición 10** *Dada una partición  $\Omega \in B(t)$  y una función  $R$  definida en  $\Omega$ , decimos que es continua por partes, para cada  $i = 1, 2, \dots, E$ , su restricción a  $\Omega_i$  es continua y se puede extender de manera continua a la cerradura de  $\Omega_i$ . Note que cuando una función es continua por partes su limite por el lado positivo y también por el lado negativo, existe. Si  $R(x)$  una función continua por partes escribiremos, en la superficie  $\Sigma$ ,*

$$[R_\Sigma] = R_+ - R_-$$

*Aquí  $R_+$  y  $R_-$  son los limites por la derecha y es el limite por la izquierda respectivamente. A la función  $[R]$  definida en  $\Sigma$ , salvo posiblemente en esquinas donde más de dos subdominios de la partición se encuentren, se le llama "salto de la función".*

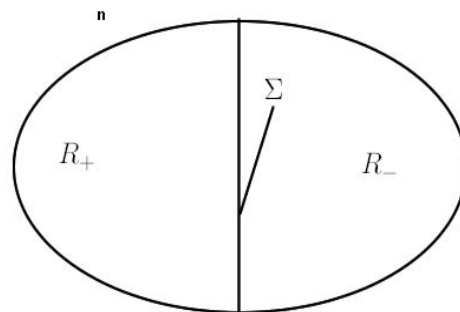


Figura 13: Tenemos que  $\Sigma$  es la superficie de salto de la función  $R$

Para estudiar los diferentes tipos de choques que pueden ocurrir cuando se modelan los yacimientos petroleros y los métodos disponibles para sus modelos numéricos. Primero hay que comenzar por entender y distinguir entre desplazamiento soluble e insoluble.

**Definición 11** *Por desplazamiento insoluble se entiende al proceso en cual las diferentes fases involucradas no tienen intercambio de masas entre ellas.*

**Definición 12** *Por desplazamiento soluble se entiende que sólo está formado por una sola fase, es decir que su mezcla es completa.*

**Definición 13** *Otra situación que puede ocurrir ( ver [5]), nos referimos a ella como "mezcla parcial", este es el caso cuando dos o más fases pueden intercambiar masas, pero en la cual no hay una mezcla total, así que cada una de las diferentes fases mantiene su identidad.*

En previos trabajos (ver [5]), un análisis de los diferentes tipos de choques que pueden ocurrir en flujo multifásico son las siguientes:

1. Intersección de características (ver método en apéndice) que ocurren solamente dentro del flujo de fluidos compresibles.
2. La transformación brusca de una partícula semi-saturada en una partícula saturada.

El primer caso toma lugar en el desplazamiento insoluble. Tal proceso es descrito por la teoría clásica de Burkley-Leverett (ver [1]-[2]), la cual fue sustentada por el trabajo Cardwell y Sheldon (ver [3]-[4]), quienes claramente explicaron la forma en que se generan los choques en tal proceso. Para una explicación más completa de estos temas, (ver [5]).

El segundo caso ocurre en el desplazamiento mezcla parcial, este tipo de choques se puede modelar con el método "modelo de choques Eulero-Lagrangiano" Para una explicación más completa (ver [6]).

## 5.1. Desplazamiento Insoluble

Para tener un análisis más preciso del desplazamiento inmisible así como los choques que son generados en este caso, es necesario tomar en cuenta las siguientes conceptos.

### Condiciones básicas y suposiciones.

- El yacimiento petrolero se encuentra durante todo el tiempo, sometido a una presión promedio de equilibrio.
- El contacto agua-petróleo (WOC) es una línea equipotencial.
- Los hidrocarburos detrás del frente son inmóviles.
- Los efectos de la gravedad son insignificantes.
- La diferencia entre la presión del yacimiento petrolero y la presión en el contacto original WOC se asume como cero.

### Suposiciones físicas para procesos inmiscibles

- **El agua desplaza al petróleo en un yacimiento petrolero mojado al agua.**

El desplazamiento de petróleo por agua en yacimiento petrolero mojado al agua es un proceso de imbibición. En tal sentido las curvas de presión capilar y permeabilidad relativa a ser usadas en la descripción del desplazamiento deben ser medidas bajo condiciones de imbibición.

- **El desplazamiento ocurre bajo condiciones de equilibrio vertical.**

Significa que durante el desplazamiento, si la saturación de agua en cualquier punto del yacimiento petrolero incrementa en una pequeña cantidad, la nueva saturación del agua es redistribuida instantáneamente.

- **El desplazamiento es considerado como incompresible.**

Esta suposición implica que existen condiciones de estado estable en el yacimiento petrolero con la posición constante a cualquier punto

$$\underline{u}_T = \underline{u}_w + \underline{u}_o = \varepsilon(S_w \underline{v}^w + S_o \underline{v}^o) \quad (5.1)$$

donde  $\underline{u}_T$ , está definida como la velocidad total de Darcy y  $\underline{u}_w$  y  $\underline{u}_o$  son las velocidades del agua y petróleo respectivamente.

▪ **El desplazamiento es considerado lineal.**

**Flujo Fraccional** El modelo de desplazamiento inmisible, uno de los más simples conocidos como la Teoría de Avance frontal, fue desarrollado inicialmente por Buckley-Leverett (ver [1]) y posteriormente por Welge.(ver [2]) Este modelo fue derivado para sistemas continuos y lineales. Cuando se requiere aplicar las ecuaciones de Buckley-Leverett y Welge (leer referencia a sistemas complejos, es necesario reducir estos sistemas a modelos de una dimensión.

La teoría de avance frontal es una importante herramienta para poder predecir el comportamiento de los yacimientos petroleros. Burckley-Leve-rett, tomaron el concepto de flujo fraccional presentado el año 1941 por Leverett, que para el caso de una inyección de agua es expresado como

$$f_w = \frac{\underline{u}_w}{\underline{u}_w + \underline{u}_o}. \quad (5.2)$$

**Desplazamiento** En el primer caso desplazamiento insoluble, los choques son generados por la intersección de las características (ver apendice método de las características), donde solamente están presentes dos fases y cada una sólo cuenta con una sola componente: petróleo no volátil y agua. No hay intercambio de masas entre las fases y se asume que no hay presión capilar.

Aplicando la definición de la velocidad de Darcy Ec. (4.26) para cada fase(petróleo y agua) tenemos:

$$\underline{u}_\alpha = \varepsilon S_\alpha \underline{v}^\alpha \quad \alpha = o, w. \quad (5.3)$$

donde  $\underline{u}_\alpha$  es la velocidad de Darcy en la fase agua o petróleo,  $S_\alpha$  es la saturación de la fase agua o petróleo,  $\varepsilon$  es la porosidad y  $\underline{v}^\alpha$  es la velocidad de en la fase agua o petróleo.

Usando la velocidad de Darcy para cada fase y sustituyéndola en las ecuaciones (4.17) y (4.18), se pueden escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \varepsilon S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \underline{u}_w) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon S_o \bar{\rho}_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}_o \underline{u}_o) = 0. \quad (5.5)$$

La velocidad total de Darcy esta definida como

$$\underline{u}_T = \underline{u}_w + \underline{u}_o = \varepsilon (S_w \underline{v}^w + S_o \underline{v}^o). \quad (5.6)$$

Cuando no hay presión capilar ni fuerza de gravedad, la velocidad de Darcy de la Ec. (4.34) se puede obtener por

$$\underline{u}_l = -\frac{k k_{rl}}{\mu_l} \nabla p, \quad l = o, w \quad (5.7)$$

por la Ec.(5.2) de flujo fraccional. De este modo tenemos

$$\underline{u}_w = f_w \underline{u}_T \quad (5.8)$$

donde  $f_w$  es un factor de proporcionalidad, también llamado flujo fraccional. Esta ecuación puede remplazar a  $\underline{u}_w$  por  $f_w \underline{u}_T$ , en la ecuación(5.4), para obtener

$$\frac{\partial \varepsilon S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w f_w \underline{u}_T) = 0. \quad (5.9)$$

Cuando los fluidos son incompresibles, la densidad del agua puede ser cancelada de la ecuación (5.9), además la matriz sólida también es incompresible, tal ecuación se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \varepsilon^{-1} \nabla \cdot (f_w \underline{u}_T) = 0 \quad (5.10)$$

por lo tanto utilizando las ecuaciones (5.6) y (5.7) tenemos lo siguiente

$$\underline{u}_T = -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} \nabla p - \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla p \quad (5.11)$$

pero por la ecuación (5.8) tenemos que la  $\underline{u}_T$  velocidad total de Darcy esta expresada de la siguiente forma

$$\underline{u}_T = \frac{1}{f_w} \left( -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} \nabla p \right) \quad (5.12)$$

entonces de las ecuaciones (5.11) y (5.12) igualando ambas con respecto a  $\underline{u}_T$  obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{f_w} \left( -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} \nabla p \right) = -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} \nabla p - \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla p \quad (5.13)$$

desarrollando

$$-\left( \frac{1}{f_w} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) k \nabla p = -\left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) k \nabla p \quad (5.14)$$

$$\left( \frac{1}{f_w} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) = \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \quad (5.15)$$

$$\frac{\mu_w}{k_{rw}} \left( \frac{k_{rw}}{f_w \mu_w} \right) = \frac{\mu_w}{k_{rw}} \left( \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \quad (2)$$

$$\left( \frac{1}{f_w} \right) = \left( 1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o} \right) \quad (5.17)$$

$$f_w(S_w) = \frac{1}{1 + \frac{k_{ro} \mu_w}{k_{rw} \mu_o}}. \quad (5.18)$$

Por lo tanto  $f_w$  está en función de  $S_w$ . Cuando la fase líquida y la matriz sólida son incompresibles las ecuaciones (5.4) y (5.5) juntas implican que

$$\frac{\partial \varepsilon (S_w + S_o)}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u}_T) = 0 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon (S_w + S_o)}{\partial t} = 0 \quad (5.20)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}_T = 0. \quad (5.21)$$

Por lo tanto la ecuación (5.10) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \varepsilon^{-1} (f_w (\nabla \cdot \underline{u}_T) + \underline{u}_T \cdot \nabla f_w(S_w)) = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \varepsilon^{-1} \underline{u}_T \cdot [f'_w(S_w) \nabla S_w] = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \varepsilon^{-1} f'_w \underline{u}_T \cdot \nabla S_w = 0 \quad (5.24)$$

como  $f_w$  está en función de  $S_w$ , ya que la saturación depende de la viscosidad y en la ecuación (5.24) se expresa claramente. Aquí  $f'_w$  es la derivada de  $f_w$  con respecto a  $S_w$ . Esta es una ecuación diferencial

de primer orden para  $S_w$  y cuando se complementa con sus condiciones iniciales y de frontera, esta puede resolverse únicamente para  $S_w$ . Tales estados de ecuación donde la tasa de avance del punto fijo saturado, es igual a la velocidad total de Darcy  $\underline{u}_T$ , multiplicado por el factor  $\varepsilon^{-1} f'_w$ . Se ha supuesto que los efectos de gravedad son insignificantes (ver por ejemplo [17]).

Buckley-Leverett ( ver [1]-[7]), fueron los primeros en derivar la versión de la ecuación en una dimensión. Para tal caso tenemos

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \varepsilon^{-1} f'_w \underline{u}_T \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0 \quad (5.25)$$

escribiendo a  $q_T$  como la tasa total del flujo a través de una sección, la velocidad de Darcy puede expresarse como  $\underline{u}_T = \frac{q_T}{A\varepsilon}$  donde  $A$  es una sección transversal del área y la ecuación (5.25) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \left( \frac{q_T}{A\varepsilon} \right) f'_w \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0. \quad (5.26)$$

Esta es la ecuación clásica de Buckley-Leverett. Si  $f'_w$  no es constante, las curvas del espacio-tiempo en las cuales permanece constante se intersectarían, en general, conduce al caso de soluciones multi-valuadas las cuales no son físicas. El problema es similar a lo que ocurre en el estudio de fluidos compresibles, cualquier flujo supersónico o el problema del pistón y está se resuelve por introducción a soluciones discontinuas o choques.

Para analizar la parte correspondiente a los saltos usamos la ecuación (5.6)

$$[\varepsilon S_w \rho_w (\underline{\mathbf{v}}^w - \underline{\mathbf{v}}_\Sigma)] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.27)$$

$$[\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{\mathbf{v}}^o - \underline{\mathbf{v}}_\Sigma)] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.28)$$

desarrollando

$$[\rho_w (\varepsilon S_w \underline{\mathbf{v}}^w - \varepsilon S_w \underline{\mathbf{v}}_\Sigma)] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.29)$$

$$[\bar{\rho}_o (\varepsilon S_o \underline{\mathbf{v}}^o - \varepsilon S_o \underline{\mathbf{v}}_\Sigma)] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.30)$$



Por la incompresibilidad de la fase líquida y la matriz sólida, las condiciones de salto (4.22) a la (4.25), pueden escribirse como:

$$[\varepsilon S_w \underline{v}^w - \varepsilon S_w \underline{v}_\Sigma] = 0 \quad (5.31)$$

$$[\varepsilon S_o \underline{v}^o - \varepsilon S_o \underline{v}_\Sigma] = 0 \quad (5.32)$$

desarrollando

$$[\varepsilon S_w \underline{v}^w] = [\varepsilon S_w \underline{v}_\Sigma] \quad (5.33)$$

$$[\varepsilon S_o \underline{v}^o] = [\varepsilon S_o \underline{v}_\Sigma] \quad (5.34)$$

Por definición de Ley de Darcy Ec.(4.26) podemos reescribirlas

$$[\underline{u}_w] = \varepsilon [S_w] \underline{v}_\Sigma \quad (5.35)$$

$$[\underline{u}_o] = \varepsilon [S_o] \underline{v}_\Sigma \quad (5.36)$$

sumando las ecuaciones anteriores, observamos que

$$[\underline{u}_T] = [\underline{u}_w + \underline{u}_o] = \varepsilon [S_w + S_o] \underline{v}_\Sigma. \quad (5.37)$$

Por hipótesis sabemos que  $S_w + S_o = 1$  y  $[1] = 0$  de esto tenemos

$$[\underline{u}_T] = \varepsilon [1] \underline{v}_\Sigma \quad (5.38)$$

$$[\underline{u}_T] = 0 \quad (5.39)$$

es decir, la velocidad total de Darcy  $\underline{v}_T$ , es continua. Haciendo uso de este resultado y de las ecuaciones (5.6) y (5.8) podemos escribir lo siguiente

$$[\underline{u}_w] = [f_w] \underline{u}_T = \varepsilon [f_w] (S_w \underline{v}^w + S_o \underline{v}^o) \quad (5.40)$$

la cual cuando se combina con (5.25), produce la siguiente ecuación

$$[\underline{v}_\Sigma] = \frac{[f_w]}{[S_w]} (S_w \underline{v}^w + S_o \underline{v}^o) = \varepsilon^{-1} \frac{[f_w]}{[S_w]} \underline{u}_T. \quad (5.41)$$

Esta relación fue derivada por primera vez por Sheldon y Cardwell (ver [4]) para problemas de una dimensión.

### 5.1.1. Formación de Choques en Desplazamientos Insolubles.

Según la discusión presentada en el análisis anterior, para desplazamiento insoluble, en ausencia de las fuerza capilares los puntos en los cuales permanecen constantes las saturaciones se mueven con una velocidad  $\varepsilon^{-1} f'_w \underline{u}_T$ . Sea  $x_c(S_w, t)$  una función de posición al tiempo  $t$ , de un punto en el cual la saturación es  $S_w$ . Entonces a tal punto que satisface la siguiente la ecuación diferencial

$$\frac{\partial x_c(S_w, t)}{\partial t} = \varepsilon^{-1} f'_w(S_w) \underline{u}_T. \quad (5.42)$$

Las soluciones de la ecuación (5.42), definen líneas rectas en el plano espacio-tiempo, esas rectas tienen pendiente constante en cada una de ellas.

Se asume que la función  $x_I(S_w)$ , es la posición inicial, en el tiempo  $t$  igual a cero, de un punto en el cual la saturación del fluido desplazado es  $S_w$ , entonces

$$x_c(S_w, t) = x_I(S_w) + t \varepsilon^{-1} f'_w(S_w) \underline{u}_T \quad (5.43)$$

y la solución de la ecuación diferencial parcial (5.25) será separable, a menos que la ecuación

$$\frac{\partial x_c(S_w, t)}{\partial x} = x'_I(S_w) + t \varepsilon^{-1} f''_w(S_w) \underline{u}_T = 0 \quad (5.44)$$

es satisfactoria para alguna  $S_w$ . Claramente para  $t$ , obtenemos

$$t = \frac{\varepsilon^{-1} x'_I(S_w)}{f''_w(S_w) \underline{u}_T} = - \frac{\varepsilon}{S'_{wI} f''_w(S_w) \underline{u}_T} \quad (5.45)$$

cuando  $S_{wI}(x)$  es la distribución inicial de  $S_w$  y principalmente es usada para denotar la derivada de tal función. Un choque tiene que ser introducido en el tiempo mínimo ( $t_{sh}$ ) el cual satisface la ecuación (5.45). Bajo la suposición que la velocidad  $\underline{u}_T$  es positiva, y que  $t$  satisface la ecuación (5.45), que podría ser positiva, solamente si  $S'_{wI} f''_w(S_w) < 0$ . Si esta última satisface  $t_{sh}$  esta se obtiene cuando  $|S'_{wI} f''_w(S_w)|$  es máximo, en la ecuación (5.45).

Por otro lado, sea  $x_\Sigma(t)$  la posición del choque en el tiempo  $t$ . Según la ecuación (5.41), tiene

$$\frac{\partial x_\Sigma}{\partial t} = \varepsilon^{-1} \frac{[f_w]}{[S_w]} \underline{u}_T. \quad (5.46)$$

En general, la saturación  $S_w$  en el choque varia con el tiempo. Una condición necesaria para que permanezca constante  $S_w$ , es que el choque se mueva con la velocidad de un punto en el cual se mantenga fijo los valores de la saturación  $S_w$ ; es decir

$$v_\Sigma = \frac{\partial x_c(S_w, t)}{\partial t} = \varepsilon^{-1} f'_w(S_w) u_T. \quad (5.47)$$

En vista de la ecuación (5.41), esta condición es

$$f'_w(S_w) = \frac{[f_w]}{[S_w]}. \quad (5.48)$$

La ecuación (5.48) se puede satisfacer durante un periodo finito de tiempo, solamente si los choques avanzan dentro de la región constante  $S_w$ . Un caso especial de esta situación es cuando  $S_w \equiv 0$  adelante del choque ( $S_{w+} = 0$ ). Para este caso

$$f'_w(S_w) = \frac{f_w}{S_w} \quad (5.49)$$

desde  $f_w(0) = 0$ . Un punto que satisface la ecuación (5.48), se puede obtener dibujando la tangente a la curva desde el origen. Esta es la primera construcción gráfica propuesta por Burcley-Leverett. Tal construcción está basada en simples métodos computacionales de recuperación de petróleo, debido a Welge.(ver [2])

En un caso más general en el cual la constante es distinta de cero, adelante del choque ( $S_{w+} \neq 0$ ), la relación (5.48) está realizada en forma más general. Puede ser escrita más explícitamente como

$$f'_w(S_w) = \frac{f_w(S_{w+}) - f_w(S_{w-})}{S_{w+} - S_{w-}}. \quad (5.50)$$

Un punto  $S_{w+}$  que satisface tal condición se puede obtener dibujando la tangente a la curva  $f_w(S_w)$  desde el punto  $(S_{w+}, f_w(S_{w-}))$ .

## 5.2. Desplazamiento Parcialmente Soluble

En la sección anterior observamos que en el desplazamiento insoluble los choques corresponden a discontinuidades de fluido saturado y que los choques son generados cuando las líneas del espacio-tiempo llevan

valores constantes  $S_w$ , que intersectan en sus características. A continuación se mostrara lo contrario, en desplazamiento soluble: los choques son asociados con las discontinuidades de la solución gas: la fracción del petróleo en  $R_S$  y que las líneas llevan valores constantes de  $R_S$  y no se pueden intersectar. Así la intersección de las características como un mecanismo de generación de choques queda fuera en este caso.

En adición, se mostrará que cuando una partícula de petróleo semi-saturado es llevada por el gas del estado semi-saturado al estado saturado, es discontinua y genera un choque.

### 5.2.1. Principio de Conservación de Punto de Burbuja

En esta sección hay que considerar dos fases: petróleo líquido y gas. Como fue explicado previamente en el modelo beta o petróleo negro, la difusión se excluye. Debido a este factor, a continuación se mostrará los siguientes resultados generales. Punto de burbuja (temperatura a la cual se forma la primer burbuja de gas de un material líquido.)

**Proposition 14** *"El principio de conservación de punto de burbuja". En ausencia del gas, las partículas de petróleo conservan su punto de burbuja.*

**Demostración.** Sabemos que  $g_g^o + g_o^g = 0$ , entonces al sumar las ecuaciones (4.19) y (4.20) obtenemos

$$\frac{\partial \varepsilon (S_o \bar{R}_s \bar{\rho}_o + S_g \bar{\rho}_g)}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \varepsilon (S_o \bar{R}_s \rho_o \underline{v} + S_g \rho_g \underline{v}^g) \} = 0. \quad (5.51)$$

Cuando no está presente la fase gaseosa,  $S_g = 0$ , por lo que la Ec. (5.51) se reduce a

$$\frac{\partial \varepsilon S_o \bar{\rho}_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon S_o \bar{\rho}_o \underline{v}^o) = 0. \quad (5.52)$$

De la ecuación (5.52) podemos sustituirla por la siguiente expresión

$$\varepsilon S_o \bar{\rho}_o \left\{ \frac{\partial \bar{R}_s}{\partial t} + \underline{v}^o \cdot \nabla \bar{R}_s \right\} = 0. \quad (5.53)$$

Notemos que la ecuación (5.53) puede ser reducida a

$$\frac{\partial \bar{R}_s}{\partial t} + \underline{v}^o \cdot \nabla \bar{R}_s = 0. \quad (5.54)$$

Los estados de esta ecuación en ausencia de fase gaseosa,  $\bar{R}_s$  permanece constante sobre las partículas en movimiento con una velocidad del petróleo. Así  $\bar{R}_s$  permanece constante sobre las partículas de petróleo y el punto de burbuja permanece conservado.

### 5.2.2. Generación de Choques

Las imposiciones anteriores sobre el principio de conservación de punto de burbuja limita algunas trayectorias que el valor de  $R_s$  sobre una partícula de petróleo se puede describir en el plano  $R_s$ -p ( ver figura 14). La trayectoria muestra en la figura 14, es factible y corresponde a lo bien que conocemos el fenómeno el cual ocurre cuando una sola fase compuesta por petróleo y gas líquido, comienza en un estado “ $n$ ”, despresurizado fuera del punto de burbuja, así que el gas libre está disponible y el petróleo líquido permanece saturado cuando la despresurización es continua. Entonces la mezcla está presurizada de nuevo hasta que todo gas presente es disuelto y el petróleo líquido llega a saturarse, finalmente alcanza el estado “ $n + 1$ ”, en la figura (14) de la primera dirección, tal camino es reversible: podemos comenzar en el estado “ $n + 1$ ” y por sucesivas despresurizaciones o presurizaciones, alcanza un estado “ $n$ ”. Obsérvese que el punto en el cual la mezcla dejará a la curva de saturación, cuando este represurizada, depende de la cantidad de gas libre disponible. En los modelos actuales de las reservas, tal cantidad de gas es suministrado por la fase gaseosa, la cual su cambio está determinado por el movimiento relativo de la fase gaseosa, con respecto al petróleo.

Por otro lado en una partícula de petróleo, los valores  $R_s$  no pueden seguir la trayectoria tal como una unión de puntos “ $n$ ” y “ $n + 1$ ”, en la figura 15, esta implica que  $R_s$  cambia sin alcanzar el punto de burbuja. Esto es, que  $R_s$  cambia cuando la fase gaseosa esta ausente, así que el principio de conservación del punto de burbuja es violado.

Eso parece que en los actuales modelos, cuando los problemas relacionados con la variable punto de burbuja, es más eficiente remplazar la ecuación (5.52) por la de “principio de conservación punto de burbuja”, en lugar de integrar ambas ecuaciones (5.52) y (5.53) simultáneamente, como lo es usualmente. Cuando esta aproximación es seguida,

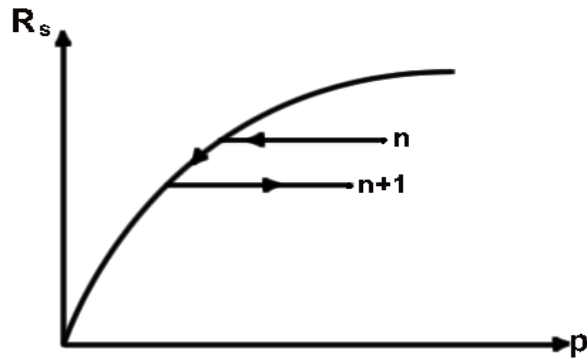


Figura 14: Plano  $R_s$ - $p$

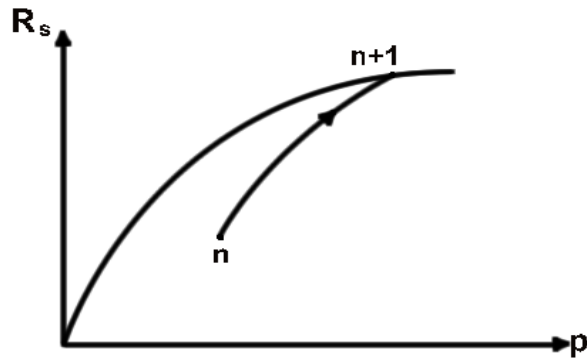


Figura 15: Plano  $R_s$ - $p$

de la ausencia de la fase gaseosa todas las trayectorias de las partículas son horizontales en el plano  $p - R_s$ . Dichas trayectorias se muestra en la figura 15, las cuales son usualmente incluidas (ver imágenes 15 y 16 de [12]), deberían de ser excluidas cuando es seguida de una partícula de petróleo.

Por otro lado, una trayectoria tal como la ilustra la figura 16, es admisible para una partícula de petróleo. Esta corresponde a una partícula de petróleo la cual está inicialmente bajo saturada (en el punto “ $n$ ”) así que la fase gaseosa necesariamente está ausente, y en algunos puntos la partícula de petróleo es alcanzada por la fase gaseosa (punto  $SH$ ) así que

repentinamente llega a la saturación y entre más presión  $R_s$  se mueve sobre la curva de saturación. Tal trayectoria tiene un punto de discontinuidad en  $SH$  y en los modelos actuales de reservas, estos toman un ascenso hacia la discontinuidad hasta el choque. Este es el mecanismo en cual se generan los choques lo cual es el principal objeto de este trabajo.

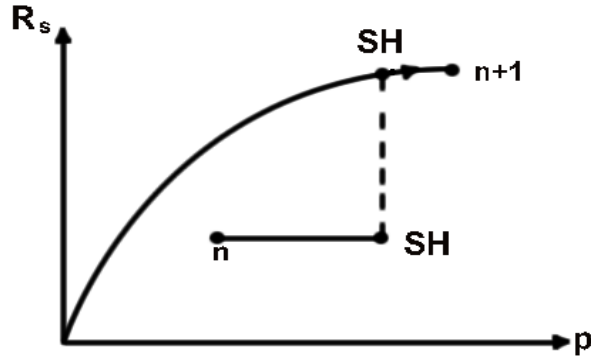


Figura 16: Plano  $R_s$ - $p$

Cuando el gas avanza de manera frontal dentro de la región semi-saturada de la superficie del petróleo, donde la propiedades son discontinuas y estará denotada por  $\Sigma$  y refiriéndose como un choque o un salto. Sobre  $\Sigma$ , las condiciones salto (4.24) y (4.25), deberían satisfacer

$$[\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.55)$$

$$[\varepsilon S_o \bar{\rho}_o R_s (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma g}^o \quad (5.56)$$

$$[\varepsilon S_g \bar{\rho}_g (\underline{v}^g - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma o}^g. \quad (5.57)$$

Nótese que en un lado de  $\Sigma$ , no está libre el gas disponible, mientras por otro lado está ocupado por el avance del gas. Es específico, el vector normal unitario " $n$ " para  $\Sigma$  será tomando puntos hacia el lado de avance del gas. Entonces  $S_{g-} = 0$ , y solamente las propiedades del gas están definidas sobre el lado positivo así definido. De este modo en los siguientes subíndices "(+)" estarán disminuyendo cuando se refiera a las propiedades del gas.

En los desarrollos que a continuación se formulan para el “salto de un producto” que ha sido usada en previos trabajos de Herrera (ver[13]), aplicaremos esta relación:

$$[rs] = \dot{r} [s] + \dot{s} [r]. \quad (5.58)$$

Tal que  $\dot{r}$  y  $\dot{s}$  son el promedio de las funciones “ $r$ ” y “ $s$ ”. Cuando se quiere saber “promedio” de un punto en la posición que cruza la superficie discontinua. Más precisamente, para una función “ $r$ ”, se tiene

$$\dot{r} = \frac{(r_+ + r_-)}{2} \quad (5.59)$$

donde  $r_+$  representa el limite por la derecha de la función  $r$ , de manera análoga  $r_-$  representa el limite por la izquierda de la función  $r$  y  $\dot{r}$  es el promedio del salto en  $\Sigma$  (ver Herrera [13]).

En presencia de (5.7), y ecuación (5.8) la ecuación puede escribirse como

$$\overline{\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)} [R_s] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma g}^o. \quad (5.60)$$

Sin embargo se ha de considerar que el producto  $\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)$  es continuo, por la ventaja de la ecuación (5.8) así que

$$\overline{\varepsilon S_o \bar{\rho}_o (\underline{v}^o - \underline{v}_\Sigma)} [R_s] \cdot \underline{n} = \varepsilon_+ S_{o+} \bar{\rho}_{o+} (\underline{v}_+^o - \underline{v}_\Sigma) \quad (5.61)$$

y de la ecuación (5.58) tenemos:

$$\varepsilon_+ S_{o+} \bar{\rho}_{o+} (\underline{v}_+^o - \underline{v}_\Sigma) \cdot \underline{n} = g_{\Sigma g}^o. \quad (5.62)$$

Así adicionando las ecuaciones (5.61) y (4.25), se obtiene: definimos la retardación de factor  $\phi$  por:

$$(\underline{v}_\Sigma - \underline{v}_+^o) \cdot \underline{n} = \phi (\underline{v}^g - \underline{v}_+^o) \cdot \underline{n}. \quad (5.63)$$

Obsérvese que  $\underline{v}_\Sigma - \underline{v}_+^o$ , es velocidad relativa del avance de la parte frontal del gas con respecto al petróleo, mientras  $\underline{v}^g - \underline{v}_+^o$  que es la velocidad relativa con respecto a las partículas en su fase gaseosa también con respecto a las del petróleo. La retardación del factor  $\phi$ , lo cual se



ve que siempre es positivo y menor que uno de acuerdo a la Ec. (5.63), expresado como una pequeña velocidad relativa frontal del gas esta en comparación que la del gas. Notamos que:

$$(\underline{v}^g - \underline{v}_\Sigma) = (\underline{v}^g - \underline{v}_+^o) - (\underline{v}_\Sigma - \underline{v}_+^o). \quad (5.64)$$

Y claramente para  $\phi$  en la ecuación (5.3), se ve que,

$$\phi = \frac{1}{1 + [R_s] \frac{S_{o+} \rho_{o+}}{S_g \rho_g}}. \quad (5.65)$$

El conjunto de sistemas de condiciones de salto pueden remplazarse por las ecuaciones (4.24), junto con la ecuación (5.63), donde  $\phi$  se toma de la ecuación (5.65). Obsérvese que como el estado,  $0 < \phi \leq 1$  desde  $R_{s+} \geq R_{s-}$ . Esto muestra que la velocidad relativa frontal del gas con respecto a petróleo, no es igual a la velocidad relativa del gas, pero esto se reduce por la “retardación del factor”  $\phi$ .

## 6. Conclusiones

Con base en el presente trabajo es posible concluir que la formulación de los Sistemas Continuos es una herramienta poderosa para plantear los modelos de sistemas que son de gran interés para el humanidad ya que de esta forma se hace uso correcto de los recursos naturales y se prevé desastres en el ambiente, en particular ha sido fundamental en este trabajo para la modelación de yacimientos petroleros de tipo Beta o Petróleo Negro.

El modelo beta del petróleo negro es un caso particular de flujo multifásico composicional, es la forma más fácil de modelar yacimientos de gas condensado y aceite volátil, en su etapa de agotamiento natural, su comportamiento termodinámico de las fases y sus propiedades físicas pueden ser descritas en función de la presión.

La principal conclusión que hay en este trabajo es el establecimiento de una clara diferencia de los mecanismos de generación de choques entre desplazamiento insoluble y desplazamiento parcialmente soluble.

En particular, la teoría de Buckley-Leverett la cual ha sido la principal herramienta para entender los choques en el desplazamiento insoluble, para este caso tenemos que la ecuación diferencial que modela tal fenómeno tiene soluciones multivaluadas debido a que son generados por la intersección de las características. El método numérico que resuelve este tipo de ecuaciones es método el Front-Traking el cual es muy usado para el trato de choques en desplazamiento insoluble.

Los choques en los cuales ocurren donde las fases son tratadas como parcialmente solubles, como es el caso cuando el gas avanza dentro de la región ocupada por el aceite líquido, son generados por la brusca transformación de una partícula semisaturada de aceite dentro de una saturada, donde tales partículas son alcanzadas por la fase saturada del gas. El método numérico que resuelven este modelo de choques es el método Eureliano-Lagrangiano la aplicación esencial para este método es diferencias finitas, para funciones con discontinuidades de salto.

Para resumir los resultados obtenidos en este trabajo, los choques que ocurren en el desplazamiento insoluble, generalmente suceden cuando las fuerzas capilares son despreciadas.

Para el caso del desplazamiento parcialmente soluble, indican que los choques pueden ocurrir cuando la fuerza capilar es tomada en cuenta, en el modelo beta del petróleo negro. Esta última afirmación implica una evolución en el entendimiento del proceso de la generación de choques.

## 7. Apéndice

### Método de las Características

El método de las características de Lagrange nos sirve para darle solución a ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Recuerde que para plantear bien una ecuación diferencial parcial es necesario tener en cuenta condiciones de frontera y valores iniciales. Considere la siguiente ecuación diferencial parcial

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u). \quad (\text{A1})$$

para una función  $u$  de dos variables independientes  $x$  y  $y$ . El método de Lagrange puede ser aplicado para una ecuación de esta forma que envuelve un número de variables independientes, pero el uso de dos variables independientes permite figurarse la geometría del método para que pueda ser visualizado en tres dimensiones en el espacio. Los coeficientes  $P, Q$  y  $R$  en general son funciones de  $x, y$  y  $u$ , pero no de la derivada de  $u$ . La ecuación general cuasi-lineal en (A1) puede escribirse de manera más usada, en términos de la superficie (A1)

$$f(x, y, u) = 0. \quad (\text{A2})$$

dado el valor de los dos argumentos de  $f$ , el valor del tercer argumento está fijo. La ecuación para coordenadas cartesianas de las características se obtiene en términos de las funciones  $P, Q$  y  $R$  las diferenciales parciales de la ecuación.

$$\frac{dx}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = Q, \quad \frac{du}{dt} = R \quad (\text{A3})$$

La ecuación (A1) se puede escribir como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (\text{A4})$$

Si observamos el lado izquierdo de la ecuación (A4) es la derivada total de  $u$  con respecto a  $t$ , la ecuación diferencial para  $f$  puede ser expresada en coordenadas características como

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (\text{A5})$$

Esto da la primera ilustración que las características proporcionan la más "natural" coordenada del sistema para ecuaciones diferenciales parciales cuasi-lineales de primer orden en ese sentido la ecuación es reducida a su simple forma. Ahí solamente permanece la determinación de la expresión explícita para las características. Para eliminar la cantidad de  $dt$  en la ecuación (A3), las tres ecuaciones pueden ser combinadas de la siguiente forma

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} \quad (\text{A6})$$

La solución de la ecuación (A6) son las características, y se obtienen por resolver sólo dos independientes ecuación diferencial ordinaria eligiendo de las tres ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \quad \frac{dx}{P} = \frac{du}{R}, \quad \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} \quad (\text{A7})$$

### Derivación de la ecuación de Flujo Fractal

Ya que  $S_w(x, t)$  es función podemos escribir la siguiente expresión para el cambio de la saturación

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt \quad (\text{A8})$$

En la solución de Buckley-Leverett, consideramos un frente de fluido de saturación constante durante el desplazamiento del fluido, de tal manera que:

$$0 = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt \quad (\text{A9})$$

Sustituyendo la ecuación de Buckley-Leverett tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{A\varepsilon} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (\text{A10})$$

Integrando con respecto al tiempo

$$\int_t \frac{dx}{dt} dt = \int_t \frac{q}{A\varepsilon} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} dt \quad (\text{A11})$$

se genera una expresión que define la posición del frente del fluido:

$$x_f = \frac{qt}{A\varepsilon} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (\text{A12})$$

Que se llama ecuación de avance frontal.

## 8. Bibliografía

### References

- [1] Leverett, M.C. , "Capillary Behavior in Porous Solids" Trans. AIME, 1941, 142, 152.
- [2] Welge, H.J. , "A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive", Petroleum Trans. AIME 1952, 195, pp91-98.
- [3] Cardwell, W.T. "The Meaning of the Triple Value in the Noncapillary Burckley-Leverret Theory", T.P.808, Trans AIME, 1959. 206, pp 271-276.
- [4] Sheldon, J.W. Cardwell, W.T. "1-Dimensional, Incompressible, Noncapillary Two-Phase Fluid in a porous Medium", Petroleum Trans. AIME, 1959, 216 pp 290-296.
- [5] Herrera, I. , A. Galindo and R. Camacho. , Shock Modelling in Petroleum Engineering, Chapter 7 of the book Computational Methods for Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow, L.C. Wrobel Ed, Computational Mechanics publications, 1993.
- [6] A. Galindo. , Herrera, I. , R.G. Camacho and L. Chargoy. , Eulerian-Lagrangian Approach to the Modeling of Shocks in Petroleum Reservoirs, 7th IMACS International Conference on Computer Methods for Partial Differential Equations, Brunswick N.J. , June 1992.
- [7] Buckley, S.E. and Leverett, M.C. "Mechanics of Fluid displacement in sands". Trans. , AIME, 1952, 146, 107.
- [8] Herrera, I. , A. Galindo and R. Camacho. , Computational Modelling of free and Moving Boundary Problems II, Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1993.
- [9] Richtmyer, R. D., Difference Methods for Initial Value Problems, Interciens Publ., New York, 1957.
- [10] Bratvet F., K. Bradvet, C.F. Buchholz, T. Gimse, H. Holden and and Riseboro, Front Tracking for Groundwater Simulation, Computational Methods in Water Resources IX, Vol. I: Numerical Methods in Water Resources, T.F. Rusell et al. Eds., CM Publicacion, Elsevier Applied Science, 97-104, 1992.

- [11] Herrera I. A. Galindo and R. Camacho. , Shock Modelling in Variable Bubble Point Problems of petroleum Engenering", Computational Modelling of Free and moving Boundary problems, Vol. 1: Fluid Flow, Eds. L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publication, pp. 399-415, 1991.
- [12] Aziz, K., and Settari, A., Petroleum Reservoir Simulation, Ed. Applied Science Publishers Ltd, London, 1979.
- [13] I. Herrera, M. Díaz; *Modelación Matemática de Sistemas Terrestres* (Notas de Curso en Preparación). Instituto de Geofísica, (UNAM).
- [14] M.B. Allen III, I. Herrera & G. F. Pinder; *Numerical Modeling in Science And Engineering*. John Wiley & Sons, Inc . 1988
- [15] X. O. Olivella, C. A. de Sacribar; *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*. Ediciones UPC, 2000.
- [16] K. Hutter & K. Jöhnk; *Continuum Methods of Physical Modeling*. Springer-Verlag Berlin Heidelber New York 2004.
- [17] Collela, P, P. Concus and J. Sethian, Some Numerical Methods for Discontinuos Flows in Porous Media, in The Mathematics of Reservoir Simulation, R.E. Edwing, Ed., Frontier in Applied Mathematics Vol. 1, STAM Philadelphia, 161-186, 1983.
- [18] Speight J. G., The Chemistry Tecnology of Petroleum New york : Dekker, c1980
- [19] L. Carrillo, M. Díaz; *Ingenieria de Yacimientos Petroleros* (Notas de Curso en actualizadas y corregidas). Facultad de Ingenieria del Petróleo, (UNI) Edición 2006.
- [20] Rodríguez F. G; *Simulación Numérica de Yacimientos* (Notas de Curso) IMP