



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Planos proyectivos y coloraciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
INGRID CHANTAL TORRES RAMOS

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

2008





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Ingrid Chantal Torres Ramos

FECHA: 19 febrero 2008

FIRMA: [Firma]



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

Votos Aprobatorios

Act. Mauricio Aguilar González
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Planos proyectivos y coloraciones

realizado por **Torres Ramos Ingrid Chantal** con número de cuenta **4-0209990-5** quien opta por titularse en la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Tutor Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Propietario Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Propietario Dr. Ricardo Strausz Santiago

Suplente Dra. Eugenia O'Reilly Regueiro

Suplente Dra. Déborah Oliveros Braniff

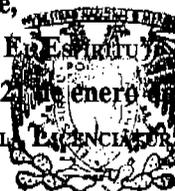
Deborah Oliveros Braniff

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Ciudad Universitaria, D. F., a 21 de enero de 2008

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS



M. EN C. AGUSTÍN ONASORO PINEDA ENCINAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE MATEMÁTICAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le entregue la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

*“Las matemáticas discretas son maravillosas
pero las matemáticas continuas son magnificas ...”*

Santiago López de Medrano

Durante este tiempo yo sólo he descubierto

lo maravilloso de las matemáticas

aunque estoy en busca de lo magnífico.

Agradecimientos

Con la publicación de esta tesis concluyo una etapa reconfortable de mi vida, la cual recuerdo con gran gratificación, en donde conocí a grandes profesores quienes contribuyeron en mi formación como matemática. También brindandome su amistad y consejos a quienes recuerdo con gran aprecio.

Gracias a mis sinodales Deborah Oliveros, Eugenia O'Reilly, Ricardo Strausz, Santiago López de Medrano y especialmente a Gaby Araujo por enseñarme una rama tan interesante como las matemáticas discretas con la cual pude realizar mi primer trabajo en investigación y concluir esta etapa.

Gracias a mis amigos por hacer esta época más agradable y placentera en la facultad y fuera de ella.

Gracias a Leo y aquellas personas que me ayudaron cuando tenía problemas con los programas.

Agradesco por último y más importante a mis padres, Francisca y Everardo por la educación, tiempo y cariño que nos han dado a mis hermanos y a mí ya que sin su apoyo y consejos tal vez no hubiese logrado concluir esta meta.

Gracias a mis hermanos Yisel, Irvin y Liu por su apoyo y cariño incondicional. Por ser una parte esencial en mi vida hoy y siempre.

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Dualidad	8
1.2. Existencia de Planos Projectivos.	10
2. Coloración de planos proyectivos	13
2.1. Coloraciones posibles en planos proyectivos	13
2.2. Coloraciones imposibles en planos proyectivos.	24
3. Coloraciones balanceadas	33
4. Jugando con planos proyectivos y afines.	43
4.1. Coloreabilidad de subconjuntos proyectivos y afines.	45

4.2. Coloraciones balanceadas de subconjuntos de planos proyectivos y afines.	50
---	----

Introducción

La geometría surge de manera empírica desde hace varios años como una herramienta para medir y resolver problemas. En el año 300 A. C. Euclides formalizó algunos conceptos geométricos básicos en su libro titulado “Elementos”, en el cual planteó toda la geometría que se estudiaba en ese momento y estaba basada en los siguientes cinco axiomas:

1) Dados cualesquiera dos puntos, es posible trazar el segmento de recta que los une.

2) Dado un punto y una distancia, es posible trazar el círculo con centro en el punto y radio igual a la distancia.

3) Un segmento de recta se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.

4) Todos los ángulos rectos son iguales.

5) Si dadas dos rectas cualesquiera y una tercera que las corta se tiene que la suma de los ángulos internos de alguno de sus lados es menos que dos ángulos rectos entonces las dos rectas se cortan y lo hacen de ese lado.

De los axiomas anteriores el quinto ha sido el más polémico ya que se afirmaba que podía ser demostrado por medio de los cuatro anteriores, hasta que, en el siglo XIX se comprobó que esto no era posible ya que la negación de este axioma generaba nuevas geometrías como la geometría proyectiva.

La geometría proyectiva finita ha tenido un creciente interés desde mediados del siglo XX. La mayoría de los trabajos que existen en esta área se basan en el estudio de planos proyectivos y espacios proyectivos finitos de dimensiones pequeñas y una herramienta muy fuerte y utilizada con frecuencia es el álgebra de Galois.

Uno de los pioneros de la geometría finita es Von Staudt ¹ quien define a la geometría proyectiva finita. Posteriormente, Gino Fano en 1892, define los planos proyectivos algebraicos de orden potencia de primo, los cuales se denotan por $PG(n, q)$.

En esta tesis estudiaremos un ejemplo concreto de la geometría finita que son los planos proyectivos, específicamente nos hemos dedicado a buscar distintas formas de colorearlos. Nuestra motivación en este tema surge a raíz de la lectura de un libro básico de combinatoria cuyos autores son Matoušek y Nešetřil [5], importantes matemáticos contemporáneos dedicados a esta área, en este libro los autores plantean algunos problemas² relacionados con los planos proyectivos y otros espacios lineales uno de estos problemas con-

¹Von Staudt (1798-1867) geómetra alemán. Fue el primero en demostrar la equivalencia entre la geometría proyectiva sintética y la analítica.

²Para más información véase el capítulo 8 pp. 248-249, 258-261.

siste en encontrar coloraciones de estas estructuras que satisfagan algunas condiciones.

A manera de introducción a este trabajo daremos la noción básica de espacio lineal y plano proyectivo así como algunos ejemplos de ellos y sus coloraciones. Posteriormente volveremos a definir estos conceptos así como algunas otras geometrías con las que trabajaremos.

Un espacio lineal es un conjunto de puntos P y un conjunto de líneas L que satisface los siguientes axiomas:

- i) Cualquier línea tiene al menos un punto.
- ii) Por cualquier par de puntos distintos existe una única línea que los contiene.

Un plano proyectivo finito es un espacio lineal que además satisface los siguientes dos axiomas:

- iii) Cualesquiera dos líneas se intersectan en un único punto.
- iv) Existen cuatro puntos en posición general.

Es sabido que existen conjuntos de puntos y líneas que satisfacen los axiomas de espacio lineal, es decir que existen espacios lineales, por otro lado diremos que un espacio lineal es 2-coloreable si al colorear sus puntos toda línea tiene al menos un punto de cada color.

A continuación mostraremos dos ejemplos de espacios lineales distintos y coloraciones en estos.

Ejemplo 1. ¿Existe un espacio lineal con 7 puntos y 7 líneas tal que cada línea contiene 3 puntos y por cualquier punto pasan 3 líneas? ¿Si ese espacio existe es posible 2-colorearlo?

El espacio lineal descrito en el párrafo anterior existe y es conocido como el plano de Fano más aún este espacio es el plano proyectivo finito cuyo número de puntos y líneas es mínimo, es decir es menor que cualquier otro plano proyectivo.

Más adelante veremos que este plano proyectivo tiene orden 2, el orden es el número de puntos por línea menos 1 (también es el número de líneas por punto menos 1), en términos matemáticos la pregunta anterior es la siguiente:

¿El plano proyectivo de orden 2 es 2-coloreable?

A lo largo de esta tesis responderemos esta pregunta, más aún veremos que todo plano proyectivo es un espacio lineal. La respuesta a esta pregunta es negativa y está dada en [5]. Además veremos que el orden de un plano proyectivo queda determinado de manera única así que una pregunta natural que nos planteamos es la generalización de la pregunta anterior:

¿El plano proyectivo de orden n es n -coloreable?

Donde n -coloreable significa que si coloreamos los puntos del plano proyectivo con n colores cualquier línea tiene al menos un punto de cada color.

La respuesta a esta pregunta también es negativa y lo demostraremos en este trabajo. Al ser este resultado negativo nos llevó a analizar si los planos proyectivos finitos de orden n son m -coloreable para algún valor de $m < n$ y si no lo son habrá subplanos de los planos proyectivos finitos que si lo sean.

Otro ejemplo es el siguiente.

Ejemplo 2. ¿Será posible 2-colorear un espacio lineal con 4 puntos y 6 líneas tal que por cada punto pasan 3 líneas y cada línea tiene 2 puntos?

La configuración anterior es el plano afín más pequeño y como veremos más adelante se obtiene si le quitamos una línea (con todos sus puntos) al plano de Fano y como veremos después tampoco es 2-coloreable.

Por lo tanto naturalmente nos preguntaremos si existe algún conjunto de puntos o líneas del plano de Fano que cumpla que el subplano obtenido de borrar dicho conjunto al plano de Fano es 2-coloreable.

Estas preguntas nos las planteamos de manera general, es decir en planos proyectivos y sus planos afines asociados (obtenidos al quitar una línea del plano proyectivo correspondiente). Algunas se resolverán fácilmente y otras quedaran abiertas o serán respondidas de manera parcial. También en esta tesis trabajaremos con otra manera de colorear a los planos proyectivos finitos y planos afines, llamada coloración balanceada [1], la cual definiremos más adelante.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definiremos a los planos proyectivos y daremos algunas de sus propiedades las cuales utilizaremos a lo largo de esta tesis.

Para definir un plano proyectivo es necesario definir primero otras geometrías finitas.

Definición 1. Un *Espacio Parcialmente Lineal*, denotado por $PL = (P, L)$, consta de dos conjuntos finitos.

El conjunto de puntos P , el cual es no vacío y el conjunto de líneas L , en donde cada línea $l \in L$ está formada por un subconjunto de puntos de P y además satisface que:

(PL_1) Cualquier línea tiene al menos un punto.

(PL_2) Por dos puntos pasa a lo más una única línea.

Algunos ejemplos de espacio parcialmente lineal son:



Figura 1.1: Espacio Parcial Lineal

Definición 2. Un *Espacio Lineal*, denotado por $L = (P, L)$, es un espacio parcialmente lineal que además satisface el axioma:

(L_1) Por cualquier par de puntos distintos $x, y \in P$, existe una única línea $l \in L$ tal que $x \in l$ y $y \in l$.

Usualmente denotaremos a la línea l que contiene a los puntos x e y por xy .

Algunos ejemplos de espacio lineal son:

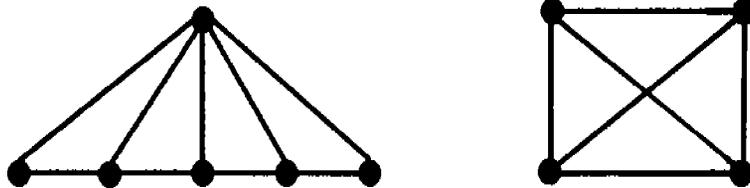


Figura 1.2: Espacio Lineal

Definición 3. Un *Plano Projectivo Finito* (P, L) . Es un espacio lineal que además satisface los siguientes axiomas:

(PP_1) Cualesquiera dos líneas se intersectan en un único punto.

(PP_2) Existe un conjunto con cuatro puntos $F \subseteq P$, tal que $|F \cap l| \leq 2$, para toda $l \in L$. Es decir existen cuatro puntos en posición **general**, no hay tres de ellos colineales. (ver figura 1.3)

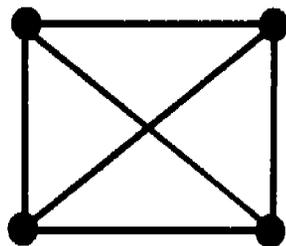


Figura 1.3: Un conjunto de puntos en posición general

El plano proyectivo finito más pequeño es el plano de Fano¹ el cual tiene 7 puntos y 7 líneas a las que nombraremos por $l_1 = 123$, $l_2 = 147$, $l_3 = 156$, $l_4 = 257$, $l_5 = 246$, $l_6 = 367$, $l_7 = 345$. Observemos que cada línea tiene 3 puntos y por cada punto pasan 3 líneas. (ver figura 1.4)

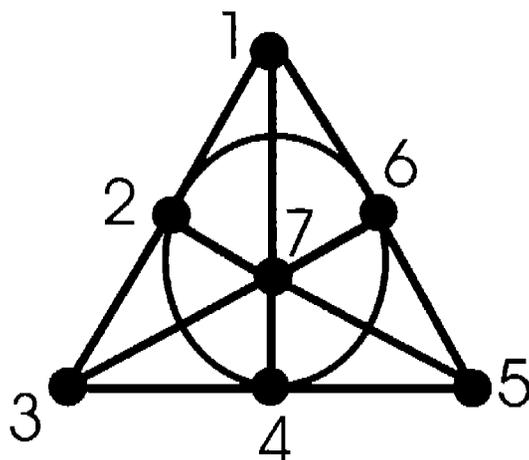


Figura 1.4: Plano de Fano

¹Gino Fano (1871-1952) geómetra italiano, pionero de la geometría finita. Fue el primer matemático en considerar la configuración, (figura 1.4), del plano proyectivo finito más pequeño en 1892.

Proposición 4. Sea (P, L) un plano proyectivo finito entonces todas las líneas tienen el mismo número de puntos, es decir $|l| = |l'|$ para cualesquiera dos líneas $l, l' \in L$.

Demostración. Sean l, l' dos líneas distintas cualesquiera, primero probaremos que existe un punto $z \in X$ que no está en l ni en l' . Sea $F = \{a, b, c, d\} \subseteq P$ que cumple con el axioma (PP_2) entonces $|F \cap l| \leq 2$ y $|F \cap l'| \leq 2$.

Caso 1) Si F no está contenido en $l \cup l'$ entonces ya terminamos.

Caso 2) Si F está contenido en $l \cup l'$ entonces suponemos que $|F \cap l| = \{a, b\}$ y $|F \cap l'| = \{c, d\}$.

Consideramos las líneas $l_1 = ac$ y $l_2 = bd$. Sea z el punto en donde se intersectan l_1 y l_2 , este punto existe por el axioma (PP_1) . (ver figura 1.5)

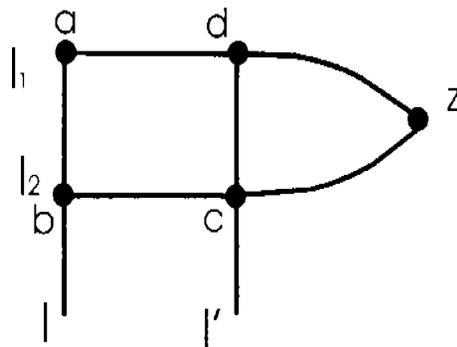


Figura 1.5: Dados cuatro puntos en posición general existe otro punto diferente

Afirmamos que $z \notin l \cup l'$, ya que si suponemos que $z \in l \cup l'$ entonces z está en al menos una de las dos líneas.

Supongamos que $z \in l$, como por hipótesis $z \in l_1 \cap l_2$ entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z = a$ entonces la línea l_2 contiene a los puntos $\{a, b, d\}$ lo que contradice al axioma (PP_2) . Por lo tanto $z \notin l$.

De manera análoga podemos demostrar que $z \notin l'$.

Ahora vamos a demostrar que $|l| = |l'|$.

Sean $z \in P$, $z \notin l \cup l'$ y $f : l \rightarrow l'$ tal que para toda $x \in l$ definimos $f(x) = zx \cap l'$. (ver figura 1.6)

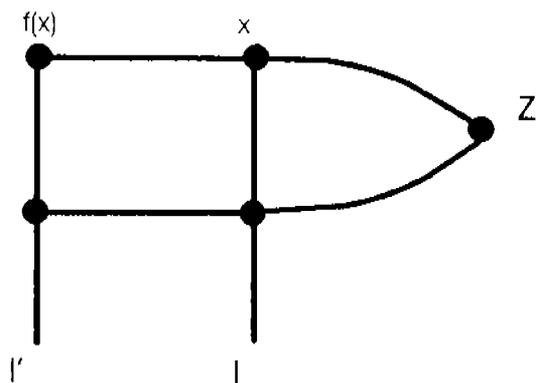


Figura 1.6: Descripción de la función $f(x)$

A continuación verificaremos que f está bien definida y es biyectiva.

Observemos que el punto $zx \cap l'$ es único, por el axioma (PP_1) entonces $f(x)$ está bien definida. Supongamos que $f(x) = f(y)$ entonces por definición tenemos $zx \cap l' = f(x) = f(y) = zy \cap l'$ entonces: $zx = zy$ y la intersección de zx con l es única y es la misma que la intersección de zy con l entonces $x = zx \cap l = zy \cap l = y$, así que $f(x)$ es inyectiva.

Sea $y \in l'$ un punto arbitrario, consideramos la línea zy y sea $x = zy \cap l$ entonces las líneas xy y zx coinciden. Por lo tanto tenemos que existe x tal que $f(x) = y$. Entonces f es biyectiva y tenemos que $|l| = |l'|$. \square

Por lo demostrado en la proposición anterior podemos definir lo siguiente:

Definición 5. El orden de un plano proyectivo finito (P, L) es el número de puntos que contiene una línea menos 1, es decir $n = |l| - 1$ para toda $l \in L$.

Si cada línea de un plano proyectivo finito tiene $n + 1$ puntos diremos que el plano proyectivo tiene orden n y denotaremos por Π_n a cualquier plano proyectivo de orden n .

Proposición 6. Sea Π_n un plano proyectivo de orden n entonces:

- i) Por cada punto de P pasan exactamente $n + 1$ líneas.
- ii) $|P| = n^2 + n + 1$.
- iii) $|L| = n^2 + n + 1$.

Demostración. i) Por cada punto de P pasan exactamente $n + 1$ líneas.

Sea l una línea y sean $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ los $n + 1$ puntos de l .

Por el axioma (PP_2) , sabemos que existe un punto $x \in P$ tal que $x \notin l$. Para cada $x_i \in l$ consideramos la línea $l_i = xx_i$, la cual es única por el axioma (L_1) para toda $i = 1, \dots, n + 1$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n+1} l_i = x$. (ver figura 1.7)

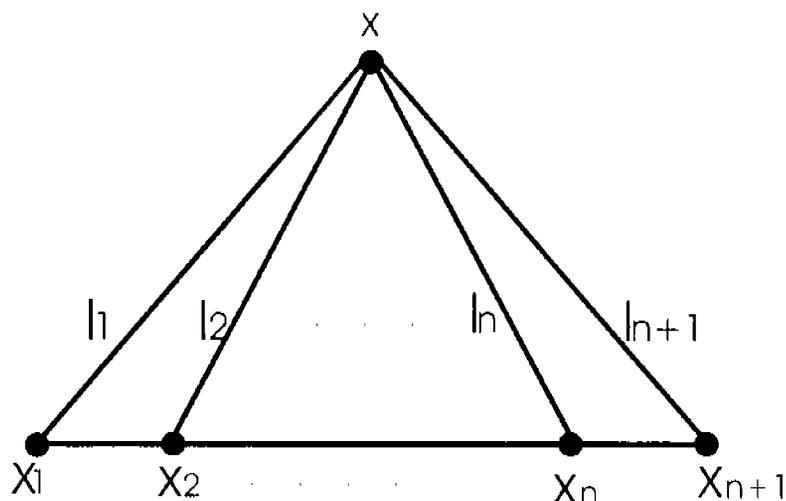


Figura 1.7: Por un punto del plano proyectivo de orden n pasan $n + 1$ líneas

Por otro lado, cualquier línea que contiene a x interseca a l en algún punto $x_i \in l$. Por lo tanto pasan $n + 1$ líneas por x , y entonces por cada punto de P pasan exactamente $n + 1$ líneas.

$$\text{ii) } |P| = n^2 + n + 1$$

Sea $l = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in L$ y sea a un punto de P tal que $a \notin l$.

Sean l_0, \dots, l_n las líneas que pasan por a tal que $l_i = ax_i$ para toda $i = \{0, 1, \dots, n\}$. Como cualesquiera dos líneas se intersectan en un único punto, es decir si $l_i \neq l_j$ entonces $l_i \cap l_j = a$ para toda $i \neq j$; $i, j = \{0, \dots, n\}$ entonces cada línea l_i para $i = \{0, \dots, n\}$ tiene n puntos sin contar a a .

Por lo tanto hay $(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$ puntos distintos, ya que hay $n + 1$ líneas y cada línea contiene n puntos distintos y al punto a .

Además estos son todos los puntos de P ya que cualquier $y \in P \setminus \{a\}$

pertenece a alguna l_i para $i \in \{0, \dots, n\}$, esto es cierto por el axioma (PP_1) . Por lo tanto $|P| = n^2 + n + 1$.

Para probar *(iii)* utilizaremos el concepto de dualidad de los planos proyectivos. □

1.1. Dualidad

La dualidad en los planos proyectivos consiste en intercambiar el conjunto de puntos por el conjunto de líneas de un plano proyectivo y viceversa. Al hacer este intercambio obtenemos un plano proyectivo dual al original.

Sea $\Pi_n = (P, L)$ un plano proyectivo finito de orden n entonces la estructura dual induce al plano proyectivo dual $\Pi'_n = (P', L')$ en donde $P' = L$ y $L' = P$ el cual también es un plano proyectivo finito de orden n .

A continuación probaremos que Π'_n es un plano proyectivo de orden n .

Proposición 7. *Los axiomas (L_1) , (PP_1) , (PP_2) son válidos para $\Pi'_n = (P', L')$*

Demostración. (L_1) Demostraremos que por cualesquiera dos puntos $l, l' \in P'$ existe una única línea $p \in L'$ tal que $p = ll'$.

Sean $l, l' \in P'$ entonces $l, l' \in L$, y por el axioma (PP_1) sabemos que en Π_n existe un único punto $p \in P$ tal que $p = l \cap l'$, así que $p \in L'$ y es la línea que pasa por los puntos $l, l' \in P'$, es decir $p = ll'$. Por lo que concluimos la demostración del axioma (L_1) para Π'_n .

(PP_1) Demostraremos que para cualesquiera líneas $p, p' \in L'$ existe un único punto $l \in P'$ tal que $p \cap p' = l$.

Si $p, p' \in L'$ entonces $p, p' \in P$, y por el axioma (L_1) sabemos que en $\Pi_n = (P, L)$ existe una única línea $l = pp'$ entonces existe un único punto $l \in P'$ tal que $l = p \cap p'$. Con lo cual queda demostrado el axioma (PP_1) .

(PP_2) En el plano proyectivo dual (Π'_n) tenemos que encontrar una estructura $F' \in P'$ de cuatro puntos en la que no haya tres colineales o lo que es lo mismo tenemos que encontrar una estructura $F \in L$ en Π_n de cuatro líneas en donde no haya tres de ellas que concurran en un mismo punto.

Sea $F = \{a, b, c, d\}$ tal que $F \subseteq P$ que satisface al axioma (PP_2) en $\Pi_n = (P, L)$.

Sea $F' = \{ab, bc, cd, da\}$ por construcción $F' \subset P'$ satisface al axioma (PP_2) en $\Pi'_n = (P', L')$.

Como probamos (L_1) , (PP_1) , (PP_2) entonces $\Pi'_n = (P', L')$ es un plano proyectivo finito. \square

Con el concepto de dualidad definido podemos probar la afirmación (iii) de la Proposición 6.

Probaremos que en $\Pi_n = (P, L)$ el conjunto L consta de $n^2 + n + 1$ líneas, es decir $|L| = n^2 + n + 1$.

Sea $\Pi'_n = (P', L') = (L, P)$

Como Π'_n es un plano proyectivo finito entonces por el inciso (i) de la Proposición 6 tenemos que $|P'| = n^2 + n + 1$ entonces $|L| = n^2 + n + 1$.

1.2. Existencia de Planos Proyectivos.

Es sabido que si n es la potencia de un primo siempre se puede construir, usando el álgebra y los campos finitos, planos proyectivos de orden n , que se conocen como planos proyectivos algebraicos, los cuales estudiaremos más adelante. Una pregunta natural, que sigue abierta, es para que otros valores de n existen los planos proyectivos y en el caso de que n sea potencia de primo si existen otros planos proyectivos de orden n además de los algebraicos.

Sabemos que para $n = \{2, 3, 4, 5, 7\}$ los planos proyectivos son únicos salvo isomorfismo; sin embargo para $n = 9$ se conocen cuatro planos proyectivos no isomorfos.

El principal teorema de no existencia de planos proyectivos finitos es el teorema de Bruck - Ryser:

Teorema 8 (Teorema de Bruck-Ryser²). *Si $n \equiv \{1, 2\} \pmod{4}$ y además n no se puede expresar como la suma de dos enteros al cuadrado entonces el plano proyectivo de orden n no existe. [4]*

²En el siglo XVIII los matemáticos R.H. Bruck y H. J. Ryser demostraron el teorema Bruck- Ryser, el cual es el único teorema general de no existencia de Planos Proyectivos Finitos. Posteriormente Ryser y el matemático Chowla generalizaron el teorema para Bloques de Simetría.

Este teorema sirve para descartar algunos valores por ejemplo prueba que no existe ningún plano proyectivo de orden 14 sin embargo existen otros valores que no se pueden descartar usando este resultado.

Tarry probó a principios del siglo XX que el plano proyectivo de orden 6 no existe y en 1989 Lam, Swiercz y Thiel probaron que tampoco existen planos proyectivos de orden 10 mientras que la existencia o no existencia del plano proyectivo de orden 12 todavía es un problema abierto.

Capítulo 2

Coloración de planos proyectivos

En este capítulo construiremos a los planos proyectivos finitos algebraicos, y describiremos la estructura combinatoria de cualquier plano proyectivo de orden n . También daremos algunos resultados de coloraciones de planos proyectivos, cotas inferiores y superiores para un cierto entero $m < n$ tal que el plano proyectivo de orden n es m -coloreable pero no es $(m + 1)$ -coloreable en donde m depende del orden del plano.

2.1. Coloraciones posibles en planos proyectivos

A continuación analizaremos la estructura combinatoria de cualquier plano proyectivo finito de orden n y daremos una descripción de la misma que nos servirá a lo largo de este trabajo.

A $\Pi_n = (P, L)$ un plano proyectivo finito de orden n se le puede asociar una estructura cuadrada de $n \times n$ puntos por construcción. En esta cuadrícula consideraremos las líneas horizontales y verticales en primer lugar.

Como cualesquiera dos líneas se intersectan en un único punto, las n líneas horizontales se intersectarán en el punto P_0 y las n líneas verticales se intersectarán en el punto P_∞ y llamaremos *línea al infinito* a la línea P_0P_∞ , y la denotaremos por l_∞ . Esta línea tiene $n - 1$ puntos además de P_0 y P_∞ , los cuales no pertenecen a la cuadrícula, y llamaremos *puntos al infinito* a los $n + 1$ puntos de l_∞ . (ver figura 2.1)

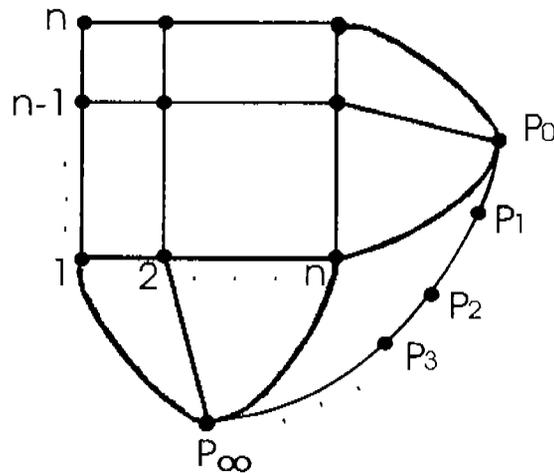


Figura 2.1: Esquema de algunos puntos y líneas nombradas en la descripción anterior

Afirmamos que cualquier otra línea $l_1 \in L$ que no pertenece a las definidas anteriormente, es decir a l_∞ , a las líneas horizontales o a las líneas verticales intersecta a cada línea de la cuadrícula y a l_∞ exactamente en un punto a cada una. A continuación demostraremos esta afirmación.

Sea l_2 una línea horizontal, vertical o l_∞ .

Supongamos que $|l_1 \cap l_2| \neq 1$ entonces $|l_1 \cap l_2| = 0$ ó $|l_1 \cap l_2| \geq 2$

Caso 1) Si $|l_1 \cap l_2| = 0$ contradice al axioma (PP_1)

Caso 2) Si $|l_1 \cap l_2| \geq 2$ contradice al axioma (PP_1)

Entonces $|l_1 \cap l_2| = 1$, y cada una de las $n^2 - n$ líneas que no son ni horizontales ni verticales tienen exactamente un punto de cada línea horizontal, un punto en cada línea vertical y un punto en la línea al infinito.

Definición 9. Una m -coloración de Π_n es una función sobreyectiva

$$f : P(\Pi_n) \longrightarrow \{C_1, \dots, C_m\}$$

tal que cada línea tiene al menos un punto de cada uno de los m colores.

Basándonos en la estructura combinatoria del plano proyectivo de orden n dada anteriormente y en las definiciones de coloraciones estudiaremos cuando un plano proyectivo finito es m -coloreable y cuando no lo es.

Teorema 10. *El plano proyectivo de orden n es 2-coloreable para cualquier $n > 2$.*

Demostración. Sean $\{h_1, \dots, h_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ las líneas horizontales y verticales del plano proyectivo ordenadas de abajo a arriba y de izquierda a derecha respectivamente.

A continuación exhibiremos una 2-coloración de Π_n .

En primer lugar colorearemos los n^2 puntos de la cuadrícula de la siguiente manera:

- El punto de intersección entre h_n y v_1 , los $n - 1$ puntos restantes de h_n (que pertenecen a la cuadrícula) y los $n - 1$ puntos restantes de v_1 (que pertenecen a la cuadrícula) de color azul.
- Los $n^2 - 2n + 1$ puntos restantes de la cuadrícula de color negro. (ver figura 2.2)

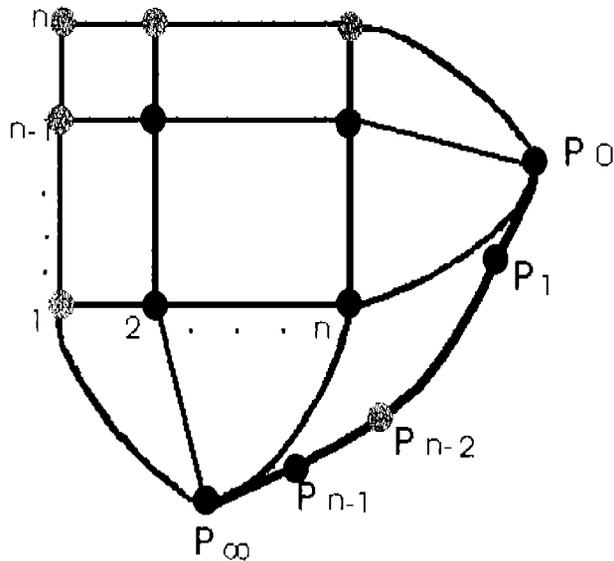


Figura 2.2: Una 2-coloración del Plano Proyectivo de orden n

Sabemos que cualquier otra línea salvo las de la cuadrícula y la del infinito interseca una única vez a cada línea de la cuadrícula, por como describimos a los planos proyectivos finitos entonces cada línea tiene al menos un punto de color azul y uno de color negro. Es claro que ninguna línea va a tener $n + 1$ puntos de color azul o de color negro.

Como la única línea que falta de 2-colorear es la línea al infinito entonces podemos colorear de azul cualquier punto al infinito excepto a los puntos P_0 y P_∞ a los que colorearemos de negro para que tanto h_n como v_1 tengan dos colores. Con esta coloración mostramos que Π_n es 2-coloreable para $n > 2$. □

Observacion 11. Si $n=2$ la demostración anterior es falsa porque en este caso tenemos:

Sean $\{h_1, h_2\}$ líneas horizontales y $\{v_1, v_2\}$ líneas verticales entonces las líneas que pasan por $h_1 \cap v_1$ y $h_2 \cap v_2$ tiene solamente puntos de color azul. Enfatizamos que este problema no aparece para $n \geq 3$.

Nos pareció pertinente hacer esta aclaración porque tanto en la introducción como más adelante afirmamos que el plano proyectivo de orden 2 no es 2-coloreable, de hecho en este capítulo generalizamos este resultado, es decir los planos proyectivos de orden n no son n -coloreables.

Para el siguiente teorema utilizaremos la construcción algebraica del plano proyectivo finito de orden n , para n primo, así que la analizaremos a continuación.

Recordemos que si n es potencia de primo siempre existe un plano proyectivo de orden n al que llamamos algebraico, sin embargo para n potencia de primo con $n \geq 9$ puede existir más de un plano proyectivo de orden n , recordemos que para $n = 9$ existen cuatro planos proyectivos no isomorfos y uno de ellos es el algebraico, se conjetura que esto sucede para otros valores

de n (siempre que n sea potencia de primo) sin embargo el plano proyectivo algebraico de orden n , si existe, se denota como $PG(2, n)$.

Nosotros daremos una descripción únicamente para los planos de orden n con n primo (porque esto es útil para nuestro objetivo) ya que cuando n no es primo (es potencia de primo) la descripción algebraica es clara sin embargo la geométrica no lo es y es esta descripción la que utilizaremos para colorear.

Sea $PG(2, n) = (P, L)$ el plano proyectivo de orden n con n primo.

Entonces definimos el conjunto

$$P = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{Z}_n\} .$$

Denotamos como $[m, b]$ a la recta $y = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{Z}_n$. Haciendo un abuso de notación denotamos como $[\ast, b]$ a la recta $x = b$ para $b \in \mathbb{Z}_n$. Entonces definimos los siguientes conjuntos

$$L_m = \{[m, b] / b \in \mathbb{Z}_n\} \text{ para toda } m \in \mathbb{Z}_n$$

$$L_\ast = \{[\ast, b] / b \in \mathbb{Z}_n\}$$

Sea $P_i = \cap L_i$ para $i \in \mathbb{Z}_n$, es decir P_i es el punto donde se interseccionan todas las rectas de pendiente i y $P_\infty = \cap L_\ast$ y finalmente sea $l_\infty = \{P_0, \dots, P_{n-1}, P_\infty\}$, es decir l_∞ es la *recta al infinito*.

Entonces

$$P = P \cup \{P_0, \dots, P_{n-1}, P_\infty\}$$

$$L = \cup_{m=0}^{n-1} L_m \cup L_\ast .$$

Observacion 12. Notemos que comparando con la construcción combinatoria el conjunto L_0 corresponde a las líneas horizontales y el conjunto L_* a las líneas verticales, además l_∞ es la recta al infinito en ambas descripciones.

La figura 2.3 muestra un esquema en el que aparecen algunos puntos y líneas de las nombradas en la descripción anterior.

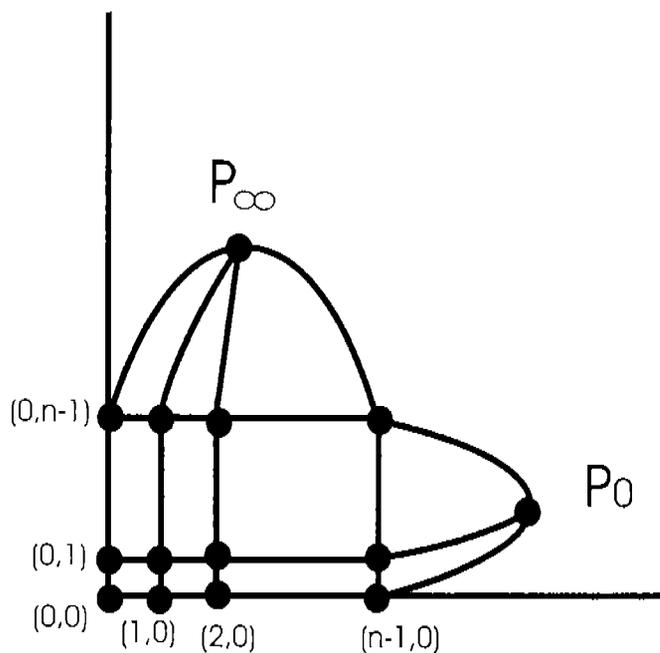


Figura 2.3: Esquema de algunos puntos y líneas nombradas en la descripción algebraica

Observacion 13. La recta de pendiente $n - i$ es congruente a la recta de pendiente $-i \pmod n$ para $i = \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$.

En la figura 2.4 aparece $PG(2,3)$ resaltando los puntos de intersección de los conjuntos L_i para $i \in \mathbb{Z}_3$ e $i = *$ y el punto que interseca a P_∞ y L_* utilizando la observación anterior.

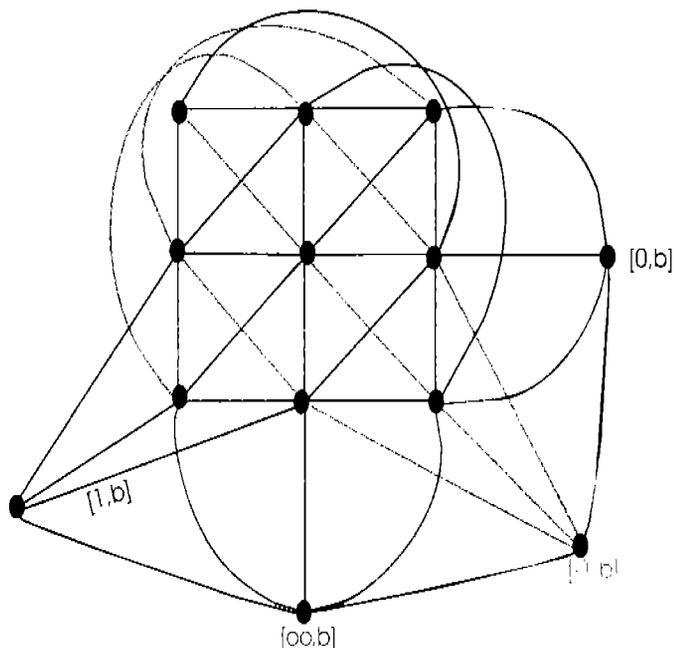


Figura 2.4: Construcción algebraica del plano proyectivo de orden 3

Teorema 14. *El plano proyectivo algebraico de orden n para $n > 3$ primo es 3-coloreable.*

Demostración. Primero definiremos cuatro subconjuntos ajenos de puntos que usaremos para exhibir una 3-coloración.

Sean $A_x := \{(x, x + y) / y \in \{1, \dots, n - (x + 2)\}\}$ y $A = \bigcup_{x=0}^{n-3} A_x$.

$B_y := \{(x, y) / x \in \{1, \dots, n - 2\}\}$ para $y \in \{0, n - 1\}$.

$C_x := \{(x, y) / y \in \{1, \dots, x - 1\}\}$ y $C = \bigcup_{x=2}^{n-1} C_x$.

$D := \{(x, x) / x \in \{1, \dots, n - 2\}\}$. (ver figura 2.5)

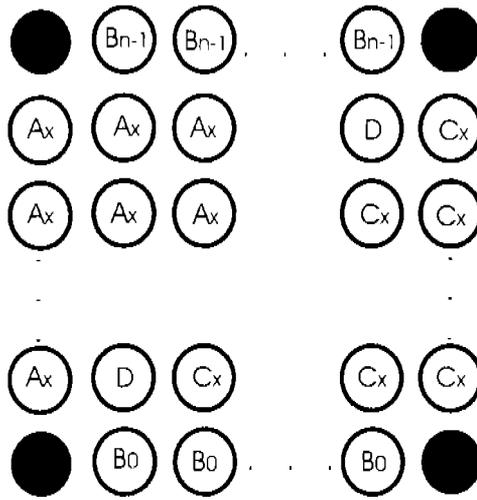


Figura 2.5: Esquema de los conjuntos Ax, By, Cx y D

En la figura 2.5 ponemos una etiqueta a los puntos del plano proyectivo dependiendo al conjunto al que pertenecen. A continuación asignaremos una 3-coloración de $PG(2, n)$ usando los colores azul, verde y rojo (ver figura 2.6)

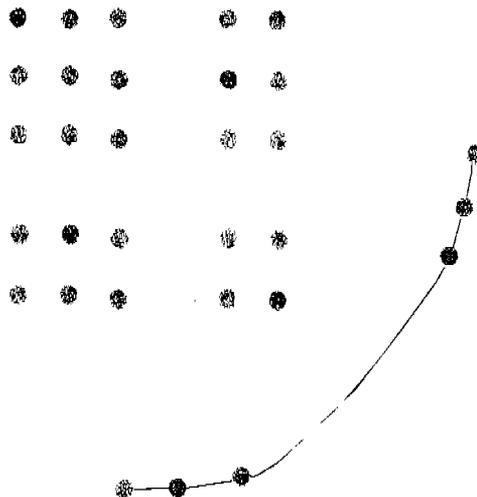


Figura 2.6: Una 3-coloración del Plano Proyectivo de orden n

- Los puntos del conjunto A , los puntos del conjunto B_0 , el punto $\{(n-1, n-1)\}$ y el punto P_0 son de color azul.
- Los puntos del conjunto C , los puntos del conjunto B_{n-1} , el punto $\{(0,0)\}$ y el punto P_∞ son de color verde.
- Los puntos del conjunto D , los puntos $\{(0, n-1), (n-1, 0)\}$ y todos los puntos al infinito excepto P_0 y P_∞ son de color rojo .

Ahora probaremos que la coloración anterior es una 3-coloración de $PG(2, n)$, es decir que cada línea tiene al menos un punto de cada color.

Observación 1: Claramente las líneas de pendiente cero, las de pendiente infinito, la línea al infinito y las líneas $[1, 0]$, $[1, n-1]$, $[n-1, n-1]$, $[n-1, n-2]$ tienen al menos un punto de cada color.

Las líneas que pasan por el $(0,0)$ son de la forma $[m, 0]$ para $m = \{0, \dots, n-1\}$ en particular si $m = \{2, \dots, n-2\}$ estas líneas pasan por los puntos $(0,0)$ de color verde, el punto $(1, m)$ de color azul y el punto al infinito P_m de color rojo. Así que sólo falta analizar la línea $[n-1, 0]$ la cual pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2, n-2)$ de color verde y azul respectivamente e intersecta a la línea al infinito en el punto P_{n-1} de color rojo. Además por la observación 1 las líneas $[0, 0]$ y $[1, 0]$ tienen los tres colores. Por lo tanto toda línea que pasa por el punto $(0,0)$ es 3-coloreable.

Las líneas que pasan por el punto $(0, n-1)$ son de la forma $[y+1, n-1]$ para $y = \{1, \dots, n-3\}$ en particular si $y = \{2, \dots, n-3\}$ estas líneas pasan por los puntos $(0, n-1)$ de color rojo, $(1, y)$ de color azul y $(n-1, (n-1)(y+2))$

de color verde entonces sólo falta verificar que la línea $[2, n - 1]$ tiene al menos un punto de cada color. Claramente esta línea pasa por el punto $(0, n - 1)$ de color rojo, el punto $(2, 3)$ de color azul y por el punto $(n - 1, n - 3)$ de color verde. Además por la observación 1 las líneas $[1, n - 1]$ y $[n - 1, n - 1]$ son 3-coloreable entonces las líneas que pasan por el punto $(0, n - 1)$ son 3-coloreable.

Por otro lado, las líneas que pasan por el punto $(n - 1, 0)$ son de la forma $[-y, -y]$ para $y = \{0, \dots, n - 1\}$ en particular si $y = \{2, \dots, n - 3\} \cup \{n - 1\}$ estas líneas pasan por los puntos $(n - 1, 0)$ de color rojo, $(0, z)$ para $z = \{1\} \cup \{3, \dots, n - 2\}$ de color azul y $(n - 2, y)$ de color verde. Así que sólo falta verificar que la línea $[2, 2]$ tiene al menos un punto de cada color, la cual claramente pasa por los puntos $(n - 1, 0)$, $(0, 2)$ y $(n - 3, n - 4)$ de color rojo, azul y verde respectivamente. Por la observación 1 tenemos que las líneas $[0, 0]$ y $[n - 1, n - 1]$ son 3-coloreable entonces podemos concluir que toda línea por el punto $(n - 1, 0)$ es 3-coloreable.

Finalmente, las líneas que pasan por el punto $(n - 1, n - 1)$ de color azul también pasan por el punto $(n - 2, y)$ para $y = \{1, \dots, n - 3\} \cup \{n - 1\}$ de color verde e intersectan a la línea al infinito en un punto de color rojo. Además por la observación 1 sabemos que las líneas $[n - 1, n - 2]$ y $[1, 0]$ son 3-coloreable, así que podemos concluir que todas las líneas que pasan por el punto $(n - 1, n - 1)$ son 3-coloreable.

Las líneas restantes, es decir, las que pasan por el punto $(0, y)$ para $y = \{2, \dots, n - 1\}$ de color azul y por el punto $(n - 1, z)$ para $z = \{2, \dots, n - 1\}$ de color verde y como todas tienen pendiente distinta de cero e infinito in-

tersectan a la línea al infinito en un punto de color rojo. Entonces todas estas líneas tienen un punto de cada color y por lo tanto $PG(2, 3)$ tiene una 3-coloración. \square

2.2. Coloraciones imposibles en planos proyectivos.

Como vimos en la sección anterior toda plano proyectivo de orden mayor que 2 es 2-coloreable sin embargo cuando el orden es 2, es decir el plano de Fano (denotado por Π_2) esto no es cierto, como se prueba a continuación.

Teorema 15. *El plano de Fano no es 2-coloreable.*

Demostración. Supongamos que el plano de Fano es 2-coloreable, es decir existe una 2-coloración de Π_2 tal que cada línea tiene exactamente dos puntos de alguno de los colores. Supongamos que los colores son verde y azul.

Como Fano tiene siete puntos podemos suponer sin pérdida de generalidad que hay al menos 4 puntos de color azul.

Como el máximo número de puntos en posición general en Π_2 es cuatro entonces si el color azul tiene cinco o más puntos hay al menos tres colineales por lo tanto hay una línea con todos los puntos azules. (figura 2.7 (a))

Entonces lo único que puede suceder es que haya exactamente cuatro puntos azules, los cuales están en posición general ya que si no lo están

nuevamente hay una línea con todos los puntos de color azul. Como por cada punto de Π_2 pasan tres líneas entonces estos cuatro puntos generan exactamente 6 líneas y como Π_2 tiene siete líneas existe una línea sin puntos azules, lo cual no es posible. Por lo tanto Π_2 no es 2-coloreable. (figura 2.7 (b)) □



Figura 2.7: a) Al menos cinco puntos del plano de Fano de color azul
 b) Cuatro puntos del plano de Fano de color azul en posición general

Definición 16. Un *óvalo* O es un subconjunto maximal de puntos de Π_n tal que cualquier línea que lo intersecta lo hace en a lo más dos puntos.

El orden de un óvalo O es el número total de puntos que lo forman y lo denotaremos por $|O|$.

De manera constructiva es posible encontrar $n + 1$ puntos en posición general en cualquier plano proyectivo de orden n más aún si n es par es posible encontrar $n + 2$ puntos.

A continuación probaremos que el número de puntos de un óvalo O es menor o igual a $n + 2$ y si el óvalo tiene $n + 2$ puntos entonces n es par.

Proposición 17. *Si O es un óvalo entonces:*

i) $|O| \leq n + 2$

ii) *Si $|O| = n + 2$ entonces n es par.*

Demostración. Sea O un conjunto con $|O| = m$ tal que cualquier línea lo interseca en a lo más 2 puntos. Sea $p \in O$ entonces cualquier línea por p y otro punto de O tiene exactamente dos puntos de O entonces $m - 1 \leq n + 1$, es decir $m \leq n + 2$. Con lo que probamos el inciso i).

Si $m = n + 2$ entonces notemos que toda línea por un punto del óvalo toca a otro punto del óvalo, es decir toda línea que toca al óvalo lo hace en exactamente dos puntos.

Sea $q \notin O$ entonces cualquier línea por q que toca a O lo hace en dos puntos entonces $n + 2$ es par, es decir n es par. \square

Más aún por la observación anterior si $m = n + 1$ entonces n es impar, por lo tanto afirmamos que:

i) Los óvalos en los planos proyectivos de orden n impar tienen $n + 1$ puntos.

ii) Los óvalos en los planos proyectivos de orden n par tienen $n + 2$ puntos.

Observemos que un plano proyectivo finito puede tener más de un óvalo. Un ejemplo de dos óvalos distintos (no ajenos) en el plano de Fano son $O_1 = \{4, 5, 6, 7\}$ y $O_2 = \{1, 2, 6, 7\}$. (ver figura 2.8)

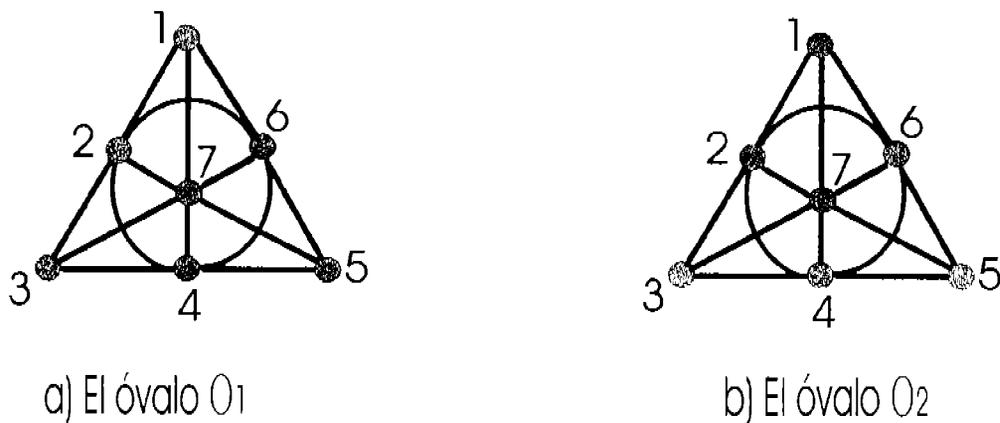


Figura 2.8: Dos óvalos distintos del plano de Fano

Con la definición anterior podemos demostrar el siguiente teorema, el cual lo generalizaremos posteriormente en el teorema 21.

En adelante, para simplificar, denotamos por C_j al conjunto de puntos de un mismo color del plano proyectivo finito. Además al hablar de la cardinalidad de color C_j nos referimos al número de puntos que contiene, y la denotamos por $|C_j|$.

Teorema 18. *El plano proyectivo de orden n no es n -coloreable.*

Demostración. Supongamos que Π_n es n -coloreable, es decir existe una n -coloración de Π_n .

Observación 1: Como Π_n es n -coloreable entonces cada línea tiene al menos un punto de cada uno de los n colores diferentes, pero como cada línea tiene $n + 1$ puntos, entonces *hay exactamente 2 puntos de algún color en cada línea y los demás puntos son todos de colores distintos.*

A continuación demostraremos que en Π_n existe un color C_j que tiene al menos $n + 2$ puntos, es decir $|C_j| \geq n + 2$ para alguna $j = 1, \dots, n$.

Supongamos que la afirmación anterior no es cierta entonces todo color C_j tiene a lo más $n + 1$ puntos, es decir $|C_j| \leq n + 1$ para toda $j = \{1, \dots, n\}$. Entonces el total de puntos de Π_n , denotado por $|P|$ satisface que

$$|P| = \sum_{j=1}^n |C_j| \leq n(n + 1) = n^2 + n, \text{ es decir:}$$

$$|P| \leq n^2 + n$$

lo cual no es posible porque sabemos que $|P| = n^2 + n + 1$ y por lo tanto existe un color C_j que tiene al menos $n + 2$ puntos.

Caso 1) Si n es impar.

Como existen $n + 2$ puntos o más del mismo color y el máximo número de puntos en posición general es $n + 1$ (óvalo) hay tres puntos colineales del mismo color, lo cual no es posible ya que contradice la **observación 1**.

Caso 2) Si n es par.

Caso 2.1) Si hay un color con más de $n + 2$ puntos, como los óvalos tienen $n + 2$ puntos entonces hay tres puntos colineales del mismo color, lo cual contradice nuevamente la **observación 1**.

Caso 2.2) Si existe un color con exactamente $n + 2$ puntos que no forma un óvalo entonces nuevamente hay tres colineales del mismo color, lo cual no es posible por la **observación 1**.

Caso 2.3) Si los $n + 2$ puntos de color C_j son un óvalo.

Observemos que los puntos de un óvalo no generan a todas las líneas del plano proyectivo, ya que por cada punto del óvalo pasan $n + 1$ líneas y como por cualesquiera dos puntos del óvalo x_i, x_j pasa una única línea para toda $i \neq j$ con $i, j = \{1, \dots, n + 2\}$ entonces el óvalo genera exactamente $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ líneas.

Es decir, el óvalo no genera a todas las líneas del plano proyectivo y entonces existe al menos una línea de Π_n que no tiene al color C_j y por lo tanto Π_n no es n -coloreable. \square

A continuación mostramos un teorema que mejora el resultado anterior, sin embargo nos pareció interesante enunciar el teorema anterior y así como su demostración ya que es una generalización de la prueba de que Π_2 no es 2-coloreable. Para este resultado utilizamos un concepto más general que el de óvalo llamado conjunto bloqueador. Probaremos el siguiente teorema haciendo uso de una definición y un teorema que son bien conocidos en la teoría de planos proyectivos.

Definición 19. Un *conjunto bloqueador* B de un plano proyectivo de orden n es un conjunto de puntos no vacío, tal que cada línea tiene al menos un punto en B y al menos un punto fuera de B . [2]

Teorema 20. *Sea B un conjunto bloqueador de un plano proyectivo de orden n entonces*

$$n + \sqrt{n} + 1 \leq |B| \leq n(\sqrt{n}) + 1$$

para $n > 2$. [2]

Claramente un óvalo no es un conjunto bloqueador del plano proyectivo de orden n .

A continuación daremos un ejemplo de un conjunto bloqueador de $PG(2, 3)$ (ver figura 2.9) este conjunto tiene 6 puntos, en la figura aparece de color azul.

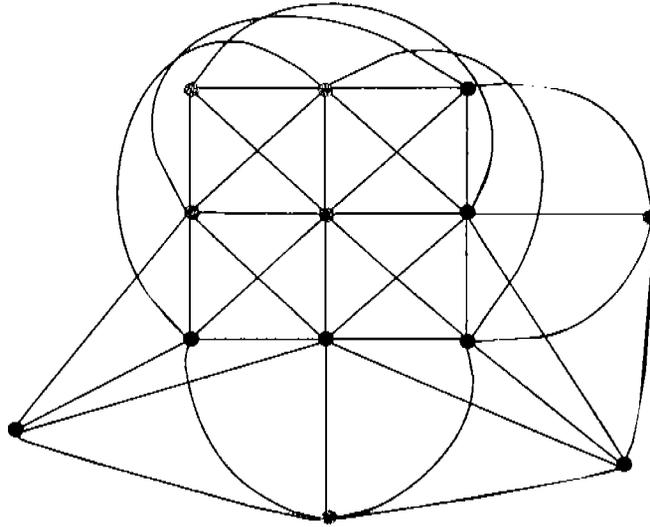


Figura 2.9: Un conjunto bloqueador de $PG(2, 3)$

Teorema 21. *El plano proyectivo de orden n no es $(n - k)$ -coloreable cuando $k < \sqrt{n} - 1$.*

Demostración. Suponemos que Π_n es $(n - k)$ -coloreable y sea $f : P(\Pi_n) \rightarrow \{C_1, \dots, C_{n-k}\}$ una $(n - k)$ -coloración.

A continuación demostraremos que existe un color C_j para alguna $j = \{1, \dots, n - k\}$ que tiene al menos $n + k + 2$ puntos.

Supongamos que todo color C_j tiene a lo más $n + k + 1$ puntos, es decir $|C_j| \leq n + k + 1$ para toda $j = \{1, \dots, n\}$. Entonces el total de puntos de Π_n es igual a

$$|P| = \sum_{j=1}^n |C_j| \leq (n - k)(n + k + 1) = n^2 - k^2 - k$$

es decir:

$$|P| \leq n^2 - k^2 - k \text{ lo que implica que}$$

$$n^2 + n + 1 \leq n^2 - k^2 - k \text{ y}$$

$$n + 1 \leq -k^2 - k \text{ entonces}$$

$$k^2 + k + n + 1 \leq 0$$

lo cual no es posible ya que n y k son enteros positivos. Por lo tanto existe un color C_j que tiene al menos $n + k + 2$ puntos pero este conjunto de puntos de color C_j debe ser un conjunto bloqueador porque Π_n es $(n - k)$ -coloreable entonces existe un conjunto bloqueador con $n + k + 2$ puntos, es decir

$$n + \sqrt{n} + 1 \leq n + k + 2$$

lo que implica que $\sqrt{n} \leq k + 1$, entonces si Π_n es $(n - k)$ -coloreable se debe cumplir que $\sqrt{n} \leq k + 1$ por lo tanto si $k < \sqrt{n} - 1$ tenemos que Π_n no es $(n - k)$ -coloreable. \square

Capítulo 3

Coloraciones balanceadas

En este capítulo estudiaremos otro ejemplo de espacios finitos, los planos afines, los cuales son un subconjunto de puntos y líneas de los planos proyectivos. También trabajaremos con otra forma de colorear a los planos proyectivos y a los planos afines, conocida como coloración balanceada.

El problema de coloraciones balanceadas ha sido estudiado en diferentes áreas.

Un bonito problema relacionado es encontrar una 4-coloración balanceada de un país dividido en 12 estados, es decir colorear los 12 países con 4 colores de tal forma que el número de estados coloreado con cada uno de los colores sea el mismo y que no haya dos estados del mismo color que compartan frontera [3].

Nuestra inquietud en los problemas de coloraciones balanceadas está relacionado con un problema planteado en la 27^a Olimpiada Internacional de

Matemáticas en 1986, en el cual se busca una 2-coloración casi-balanceada de un subconjunto de puntos de la malla de $n \times n$ donde una coloración es casi-balanceada si el número de puntos de cada color difiere en uno.

Posteriormente este problema fue generalizado por Urrutia y Akiyama quienes probaron que cualquier subconjunto de puntos en una malla de $n \times n$ puede m -colorearse de manera casi-balanceada para $1 \leq m \leq n$ [1].

Al estudiar estos resultados nos pareció natural relacionarlos con coloraciones del plano proyectivo pensando en la malla de $p \times p$ con p primo en \mathbb{Z}_p (también se podrá hacer para potencia de primo) y a las líneas de la malla con las líneas en los conjuntos L_0 y L_* definidos en el capítulo anterior entonces nos planteamos introducir también las líneas de las otras clases paralelas, es decir los conjuntos L_i para $i = \{1, \dots, p-1\}$ y nos preguntamos si es posible encontrar una coloración para los puntos del plano proyectivo de manera que las líneas quedarán coloreadas de manera balanceada, es decir que cada color aparezca el mismo número de veces.

Definición 22. Un *Plano Afín* denotado por $A = (P', L')$ consta de dos subconjuntos finitos de un plano proyectivo, $\Pi = (P, L)$ donde $P' \subset P$ y $L' \subset L$ y cada línea $l \in L'$ está formada por un subconjunto de puntos de P' . Dicho plano afín es un espacio lineal y además satisface los siguientes axiomas:

(PA_1) Cualquier punto p que no está en una línea l está en una y sólo una línea que no intersecta a l .

(PA_2) Existe un conjunto de tres puntos no colineales.

Diremos que dos líneas del plano afín son *paralelas* si satisfacen una de las siguientes condiciones:

- i) $l = l'$
- ii) $l \cap l' = \emptyset$, es decir no se intersectan.

Es conveniente aclarar que los conceptos como m -coloración o m -coloración balanceada definidos anteriormente también pueden estudiarse en planos afines.

Proposición 23. *Si a un plano proyectivo (Π) le quitamos una línea cualquiera obtenemos un plano afín (A) .*

Demostración. Sea l una línea del plano proyectivo entonces $\Pi \setminus l$ cumple los axiomas (PL_1) , (PL_2) y (L_1) de espacios lineales, además obsérvese que para toda línea $l' \in L(\Pi)$, $l \neq l'$ tenemos que $|l \cap l'| = 1$ entonces al tomar el subconjunto $\Pi \setminus l$ le quitamos a cada línea de Π , distinta de l , un punto.

Probaremos que $\Pi \setminus l$ satisface el axioma (PA_1) .

Sean $p \in P(\Pi \setminus l)$ y $l' \in L(\Pi \setminus l)$ tal que $p \notin l'$.

Como en Π existe una línea por p que intersecta a l' en el punto $l \cap l'$ entonces en $\Pi \setminus l$ existe una línea por p paralela a l' .

A continuación demostraremos el axioma (PA_2) , es decir existe un conjunto de tres puntos no colineales.

(PP_2) existe un conjunto $F = \{a, b, c, d\} \subset X$ tal que $|F \cap l'| \leq 2$, para cualquier línea $l' \in L(\Pi \setminus l)$.

Caso 1) Supongamos que el punto $a \in l$ pero $\{b, c, d\} \notin l$ entonces el conjunto $E = \{b, c, d\} \subset F$ cumple que $|E \cap l'| \leq 2$, para toda $l' \in L(\Pi \setminus l)$.

Caso 2) Supongamos que a y $b \in l$ entonces el punto $e = ac \cap bd$ satisface que $e \notin l$ y $\{c, d, e\}$ no son colineales.

Caso 3) Si $F \subset \Pi \setminus l$ entonces existe un conjunto $E = \{a, b, c\} \subset F$ tal que $|E \cap l'| \leq 2$, para toda $l' \in L(\Pi \setminus l)$. \square

Observacion 24. Un plano afín de orden n denotado por $A_n = (P', L')$ se construye al quitar una línea cualquiera (con todos sus puntos) a un plano proyectivo de orden n y cada línea tiene n puntos y por cada punto pasan $n + 1$ líneas.

Proposicion 25. Un plano afín de orden n denotado por $A_n = (P', L')$ consta de n^2 puntos y $n^2 + n$ líneas.

Demostración. Como A_n es igual a Π_n menos una línea cualquiera entonces los puntos que pertenecen a la línea l que quitamos no pertenecen al plano afín, es decir $|P'| = |P| - |l|$ donde $|l| = n + 1$ entonces

$$|P'| = n^2 + n + 1 - (n + 1) = n^2.$$

Por otro lado tenemos que en total el plano afín tiene el mismo número de líneas que el plano proyectivo menos una línea, es decir

$$|L'| = |L| - l' \text{ entonces:}$$

$$|L'| = n^2 + n + 1 - 1$$

$$|L'| = n^2 + n. \quad \square$$

Un plano afín contenido en el plano de Fano aparece en la figura 3.1 y consta de 4 puntos y 6 líneas.

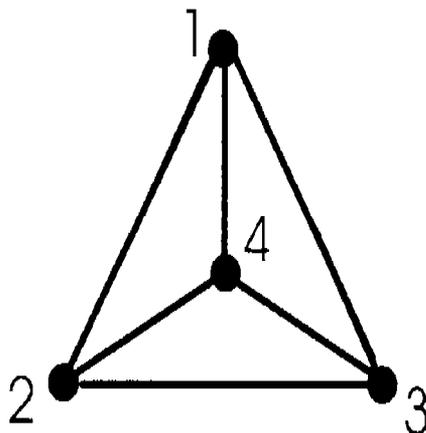


Figura 3.1: Un plano afín del plano de Peano

Observacion 26. Las $n^2 + n$ líneas están distribuidas en $n + 1$ conjuntos cada uno con n líneas paralelas entre sí, ya que en Π_n por cada punto pasan $n + 1$ líneas entonces al quitar la línea l de Π_n las n líneas son paralelas, esto pasa para cada uno de los $n + 1$ puntos de l .

Observacion 27. De la misma forma que un plano afín se construye quitando una línea cualquiera (con todos sus puntos) de un plano proyectivo, un plano proyectivo puede construirse añadiendo una línea con $n + 1$ puntos al plano afín y haciendo que en cada punto de esta línea se intersecten n líneas paralelas.

Definicion 28. Una m -coloración de A_n es una función sobreyectiva

$$f : P(A_n) \longrightarrow \{C_1, \dots, C_m\}$$

tal que cada línea tiene al menos un punto de cada uno de los m colores.

Lema 29. Si un plano afín de orden n es k -coloreable entonces el plano proyectivo construido a partir de añadir una línea es k -coloreable.

Demostración. Como A_n es k -coloreable entonces Π_n menos una línea l es k -coloreable, así que sólo falta k colorear a l , a la cual claramente se le pueden asignar k colores obteniendo una k -coloración del plano proyectivo. \square

Nuestro siguiente resultado es una consecuencia del teorema 15 del capítulo anterior y del lema que acabamos de probar. Pero antes es necesario recordar que el plano de Fano es único salvo isomorfismos, se puede probar fácilmente que al quitar una línea cualquiera del plano de Fano obtenemos un plano afín isomorfo al que resulte de quitar otra línea cualquiera (distinta de la anterior) del plano de Fano entonces podemos hablar de el plano afín contenido en el plano de Fano y por lo tanto tenemos que:

Corolario 30. *El plano afín contenido en el plano de Fano no es 2-coloreable.*

Demostración. Supongamos que el plano afín contenido en el plano de Fano es 2-coloreable entonces por el lema anterior el plano de Fano es 2-coloreable, lo cual contradice al teorema 15. \square

Corolario 31. *Un plano afín de orden n no es $(n - k)$ -coloreable para $k < \sqrt{n} - 1$.*

Demostración. Sea $k < \sqrt{n} - 1$ y supongamos que un plano afín de orden n es $(n - k)$ -coloreable entonces por el lema anterior el plano proyectivo de orden n que contiene a dicho plano afín es $(n - k)$ -coloreable lo cual es una contradicción al teorema 21. \square

A continuación trabajaremos con coloraciones balanceadas.

Definición 32. Una m -coloración balanceada de Π_n es una función sobre-yectiva

$$f : P(\Pi_n) \longrightarrow \{C_1, \dots, C_m\}$$

en donde cada línea tiene el mismo número de puntos de cada uno de los m colores.

Observación 33. Para que tenga sentido la pregunta de si un espacio lineal tiene una 2-coloración balanceada es necesario que cada línea tenga un número par de puntos, análogamente para que tenga una m -coloración balanceada necesitamos que el número de puntos en cada línea sea un múltiplo de m .

Concretamente para preguntarnos sobre 2-coloraciones balanceadas en plano proyectivo de orden n necesitamos que n sea impar para que $n + 1$ sea par.

Por lo tanto nos preguntamos si es posible que el plano proyectivo de orden n con n impar pueda 2-colorearse de manera balanceada y obtuvimos que:

Teorema 34. *Un plano proyectivo de orden n con n impar no tiene una 2-coloración balanceada.*

Demostración. Supongamos que Π_n tiene una 2-coloración balanceada.

Sea x un punto de color i y como cada línea tiene $\frac{n+1}{2}$ puntos de cada color entonces cada línea que pasa por x tiene $\frac{n+1}{2}$ puntos de color j y en

total el haz de líneas que pasa por x tiene exactamente $\frac{(n+1)^2}{2}$ puntos de color j con $j \neq i$ y los $\frac{n^2-1}{2}$ puntos restantes del haz son de color i nótese que ya coloreamos todos los puntos del plano proyectivo y denotaremos por l_x al haz de líneas que pasa por x entonces dicho haz de líneas tiene más puntos de j que puntos de color i es decir la 2-coloración balanceada que induce un haz de líneas desde un punto de color i tiene menos puntos de color i que de color j así que $|C_i| < |C_j|$.

Sea p' es un punto fijo de color j en esta coloración del plano proyectivo, haciendo el mismo análisis tomando el haz de líneas l_p que pasa por p podemos concluir que sucede lo mismo, es decir $|C_j| < |C_i|$ lo cual no es posible porque en esa coloración $|C_i| < |C_j|$ por el primer párrafo. Por lo tanto Π_n no tiene una 2-coloración balanceada. \square

Definición 35. Una m -coloración balanceada de A_n es una función sobre-yectiva

$$f : P(A_n) \longrightarrow \{C_1, \dots, C_m\}$$

tal que cada línea tiene el mismo número de puntos de cada uno de los m colores.

Por la observación 33 tiene sentido preguntarse si un plano afín tiene una 2-coloración balanceada solamente cuando n es par ya que cada línea tiene exactamente n puntos, sin embargo tenemos:

Teorema 36. *Un plano afín de orden n con n par no tiene una 2-coloración balanceada.*

Demostración. Supongamos que A_n puede 2-colorearse de manera balanceada. Como cada línea tiene $\frac{n}{2}$ puntos de cada color entonces cada color tiene exactamente $\frac{n^2}{2}$ puntos.

Caso 1) Si el plano afín de orden 2, es decir el plano afín del plano de Fano tiene una 2-coloración balanceada entonces el plano de Fano menos una línea puede 2-colorearse, por lo tanto el plano de Fano es 2-coloreable añadiendo una línea y asignándole una 2-coloración, pero esto contradice al teorema 15.

Caso 2) Si el plano afín de orden n para $n > 2$ tiene una 2-coloración balanceada.

Como cualquier línea puede 2-colorearse de manera balanceada y cada línea tiene exactamente n puntos entonces el color C_i para $i = \{1, 2\}$ tiene exactamente $\frac{n^2}{2}$ puntos y además en cualquier línea hay exactamente $\frac{n}{2}$ puntos de color C_i . Si fijamos un punto p de color C_i y denotamos por l_p a todas las líneas del plano afín que pasan por p entonces el número de puntos de color C_i menos uno es $|l_p| \left(\frac{n}{2} - 1 \right)$ y por lo anterior tenemos que:

$$|l_p| \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{n^2}{2} - 1 \text{ por lo tanto:}$$

$$|l_p| = \frac{\frac{n^2}{2} - 1}{\frac{n}{2} - 1} = \frac{n^2 - 2}{n - 2} \text{ y } \frac{n^2 - 2}{n - 2} \geq n + 2 \text{ entonces}$$

$$|l_p| \geq n + 2$$

Lo cual no es posible ya que por cada punto de Π_n pasan exactamente $n + 1$ líneas.

Por lo tanto A_n no tiene una 2-coloración balanceada. □

Capítulo 4

Jugando con planos proyectivos y afines.

Basándonos en los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores en este capítulo buscamos condiciones suficientes para ciertos subconjuntos de los planos proyectivos y de los planos afines que permitan saber si:

i) Existen subconjuntos n -coloreable, en el sentido de las coloraciones estudiadas en el capítulo 2.

ii) Existen subconjuntos del plano afín y del proyectivo que admiten coloraciones balanceadas como las estudiadas en el capítulo 3.

Para simplificar la notación de los próximos resultados de planos definiremos lo siguiente:

Si x es cualquier punto del plano proyectivo de orden n llamaremos *cla-*

se de paralelismo C_x al haz de líneas que pasa por x , nótese que C_x tiene $n + 1$ líneas. Sea l cualquier línea del plano proyectivo de orden n y sea $x \in l$ entonces definimos C'_x como

$$C'_x = C_x \setminus l$$

y nótese que C'_x tiene n líneas.

A lo largo de este capítulo probaremos las siguientes afirmaciones las cuales nos gratificaron ampliamente.

i) Un plano proyectivo de orden n para $n \in \mathbb{Z}$ (cuando Π_n existe) menos una clase de paralelismo menos una línea es n -coloreable.

ii) Un plano afín de orden n para $n \in \mathbb{Z}$ (cuando A_n existe) menos una clase de paralelismo menos una línea es n -coloreable.

iii) Un plano proyectivo de orden n impar menos una clase de paralelismo admite una 2-coloración balanceada.

iv) Un plano afín de orden n par menos una clase de paralelismo menos una línea admite una 2-coloración balanceada.

A lo largo de este capítulo cuando decimos que quitamos una línea o toda una clase de paralelismo o una clase de paralelismo menos una línea del plano proyectivo o afín no quitamos los puntos que están en dicha clase a menos que lo especifiquemos, es decir quitamos solamente las líneas, por lo tanto cada punto del plano proyectivo que pertenece a dichas líneas pierde una línea, análogamente al quitar un punto tampoco quitamos las líneas incidentes en él, es decir dichas líneas pierden un punto.

4.1. Coloreabilidad de subconjuntos proyectivos y afines.

Teorema 37. *El plano de Fano menos una línea es 2-coloreable.*

Demostración. Sea l la línea que quitamos del plano de Fano, denotado por Π_2 . Colorearemos de verde los puntos que pertenecían a l y de color azul cualquier otro punto.

Es claro que en Π_2 los cuatro puntos de color azul están en posición general. Como por cada punto de Π_2 pasan tres líneas entonces estos cuatro puntos generan seis líneas y cada línea intersecta a la línea l , por el axioma (PP_1) , entonces con esta coloración mostramos que Π_2 menos l es 2-coloreable. \square

En la figura 4.1 mostramos la coloración descrita en el teorema anterior, donde $l = 156$ es la línea que quitamos del plano de Fano y entonces los puntos $\{1, 5, 6\}$ son de color verde y los puntos $\{2, 3, 4, 7\}$ son de color azul.

El próximo resultado es una generalización del teorema anterior para planos proyectivos finitos.

Teorema 38. *El plano proyectivo de orden n menos una clase de paralelismo menos una línea es n -coloreable.*

Demostración. Sean x un punto de Π_n y $C'_x \cup \{l\}$ una clase de paralelismo por x donde las líneas están ordenadas de izquierda a derecha como en la figura 4.2, notemos que $C'_x = \{l_1, \dots, l_n\}$. También ordenaremos, como en

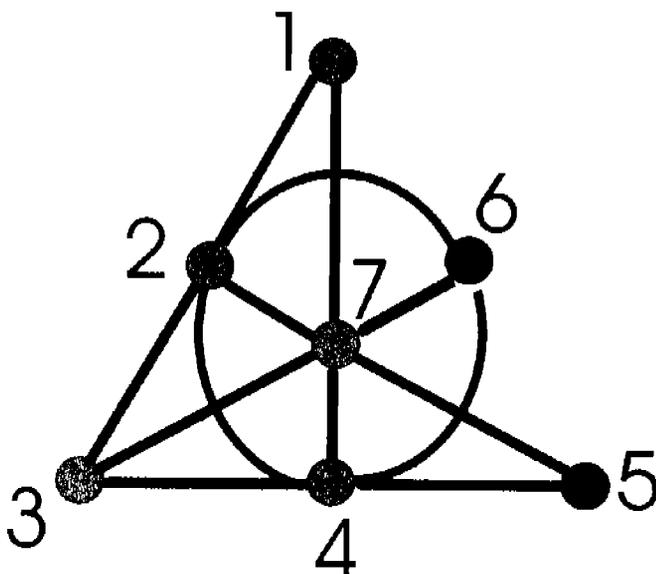


Figura 4.1: Una 2-coloración del plano de Fano menos una línea

la figura, el conjunto de puntos $\{x_1, \dots, x_n\}$ de l distintos de x iniciando de arriba. Exhibiremos una n -coloración de $\Pi_n \setminus C'_x$. Coloreando los puntos de la línea l_i de color C_i para $i = \{1, \dots, n\}$; el punto x_i de la línea l de color C_i para $i = \{1, \dots, n\}$; y el punto x de algún color C_i para $i = \{1, \dots, n\}$. (ver figura 4.2)

A continuación demostraremos que *cualquier línea $l' \notin C'_x \cup l$ intersecciona una única vez a cada línea del conjunto C'_x .*

Supongamos que la línea l' intersecciona a la línea l_i para alguna $i = \{1, \dots, n\}$ en más de dos puntos, es decir $l_i \cap l' = z$ y $l_i \cap l' = y$ para $z \neq y$ entonces $\{z, y\} \in l_i$ y $\{z, y\} \in l'$ entonces $l_i = l'$ por el axioma (L_1) , lo cual no es posible.

Por otro lado, como cualesquiera dos líneas se intersectan en un punto, por el axioma (PP_1) , entonces la línea l' intersecta a cada línea del conjunto C'_x y a la línea l una única vez y por lo tanto cada línea es n -coloreable. Más aún hay exactamente 2 puntos de algún color en cada línea. Entonces $\Pi_n \setminus C'_x$ es n -coloreable. \square

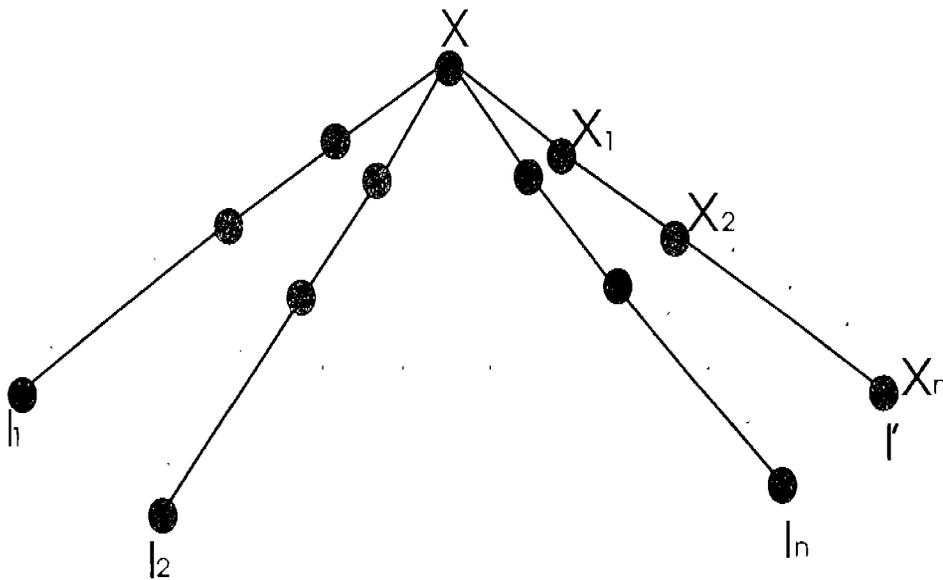


Figura 4.2: Un haz de $n+1$ líneas tal que si borramos n líneas (sin sus puntos) podemos colorear todos los puntos de cada línea con un color usando los n colores excepto una línea (que no borramos) que es n -coloreable

Observemos que si aplicamos este teorema a Π_2 obtenemos que Π_2 menos 2 líneas es 2-colorable pero el teorema 37 de este capítulo mejora claramente este resultado.

Notemos que si x es un punto al infinito y quitamos la clase de paralelismo C'_x como consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 39. *Un plano proyectivo de orden n menos una clase de paralelismo es n -coloreable.*

A continuación resolveremos la misma pregunta para planos afines.

Sea A_n un plano afín de orden n construido a partir de un plano proyectivo de orden n menos una línea l . Sean $x \in l$ y sea C_x una clase de paralelismo cualquiera que pasan por x . Notemos que C_x está formado por n líneas que no se intersectan en el plano afín, es decir son paralelas.

Teorema 40. *El plano afín de orden n menos una clase de paralelismo es n -coloreable.*

Demostración. Sean $\{l_1, \dots, l_n\}$ las líneas del conjunto C_x ordenadas de izquierda a derecha.

Exhibiremos una n -coloración de $A_n \setminus C_x$ de la siguiente manera:

Colorearemos los puntos de la línea l_i de color C_i para $i = \{1, \dots, n\}$.

Cualquier línea del plano afín $l \notin C_x$ intersecta una única vez a cada línea del conjunto C_x .

Caso i) Supongamos que la línea l intersecta a línea l_i para alguna $i = \{1, \dots, n\}$ en más de dos puntos, es decir $l \cap l_i = z$ y $l \cap l_i = y$ para $z \neq y$ entonces $\{z, y\} \in l$ y $\{z, y\} \in l_i$ entonces $l = l_i$ por el axioma (L_1) , lo cual no es posible.

Caso ii) Supongamos que la línea l no intersecta a la línea l_i para alguna $i = \{1, \dots, n\}$ entonces la línea l tiene a lo más $n - 1$ puntos, lo cual no es

posible porque cada línea tiene n puntos.

Entonces la línea l intersecta a cada línea del conjunto C_x una única vez y por lo tanto cada línea es n -coloreable. \square

En la figura 4.3 mostraremos una 3-coloración de un plano afín algebraico de orden 3 menos la clase de paralelismo de pendiente 1 (ver capítulo 2 sección 1 para entender la figura).

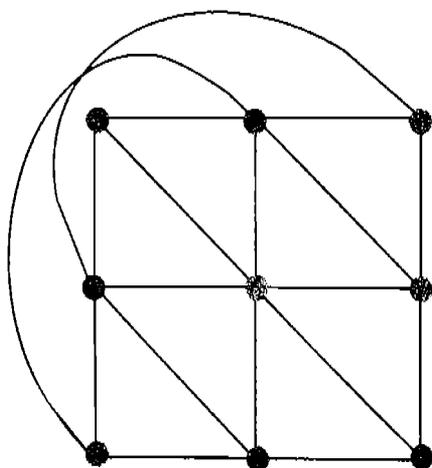


Figura 4.3: Una 3-coloración de un plano afín de orden 3 menos las líneas de pendiente 1

Como mencionamos al principio de este capítulo combinaremos todos los conceptos vistos en los capítulos anteriores. Así que los siguientes resultados serán sobre coloraciones balanceadas en planos proyectivos y en planos afines.

4.2. Coloraciones balanceadas de subconjuntos de planos proyectivos y afines.

Claramente el siguiente resultado sólo tiene sentido cuando el orden de los planos proyectivos es impar.

Sea x cualquier punto del plano proyectivo de orden n y sea C_x una clase de paralelismo entonces $|C_x| = n + 1$.

Teorema 41. *El plano proyectivo de orden n menos una clase de paralelismo C_x tiene una 2-coloración balanceada.*

Demostración. Sean $\{l_1, \dots, l_{n+1}\}$ las líneas del conjunto C_x ordenadas de izquierda a derecha, definiremos dos subconjuntos ajenos de puntos que usaremos para exhibir una 2-coloración balanceada de $\Pi_n \setminus C_x$.

$$\text{Sean } E = \{l_i \in C_x / i = 1, \dots, \frac{n+1}{2}\}.$$

$$F = \{l_i \in C_x / i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n + 1\}.$$

Colorearemos los puntos del conjunto E de color azul y los puntos del conjunto F de color verde.

¹Como cualquier línea $l \notin C_x$ intersecta una única vez a cada línea del conjunto C_x entonces cada línea tiene exactamente $\frac{n+1}{2}$ puntos de cada uno de los colores. Por lo tanto $\Pi_n \setminus C_x$ tiene una 2-coloración balanceada. \square

¹La demostración de esta afirmación es análoga a la demostración de la afirmación del **Teorema 20**.

En la figura 4.4 daremos una 2-coloración balanceada de $PG(2,3)$ menos la clase de paralelismo de pendiente 1 (ver capítulo 2 sección 1 para la descripción del plano proyectivo algebraico).

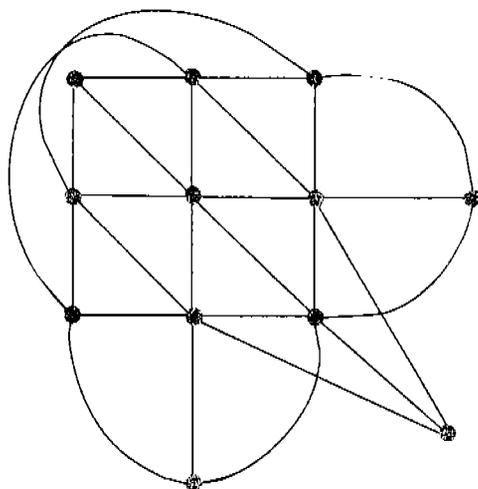


Figura 4.4: Una 2-coloración balanceada de $PG(2,3)$ menos las líneas de pendiente 1 e infinito

Curiosamente si definimos a $C'_x = C_x \setminus l$ (como en la sección anterior) y le quitamos un subconjunto de la clase de paralelismo al plano proyectivo de orden n el teorema 41 de este capítulo es falso (esto lo probaremos en el siguiente teorema), es decir el plano proyectivo menos n líneas incidentes no tiene una coloración balanceada mientras que si quitamos una línea más incidente a las anteriores obtenemos una coloración balanceada.

Teorema 42. *Un plano proyectivo de orden n menos un subconjunto C'_x no tiene una 2-coloración balanceada.*

Demostración. Supongamos que $\Pi_n \setminus C'_x$ tiene una 2-coloración balanceada. Sea x un punto de color i y como cada línea tiene $\frac{n+1}{2}$ puntos de cada color entonces cada línea que pasa por x tiene $\frac{n+1}{2}$ puntos de color j y en total el haz de líneas que pasa por x tiene exactamente $\frac{(n+1)^2}{2}$ puntos de color j con $j \neq i$ y los $\frac{n^2-1}{2}$ puntos restantes del haz son de color i nótese que ya coloreamos todos los puntos del plano proyectivo y denotaremos por l_x al haz de líneas que pasa por x entonces dicho haz de líneas tiene más puntos de j que puntos de color i es decir la 2-coloración balanceada que induce un haz de líneas desde un punto de color i tiene menos puntos de color i que de color j así que $|C_i| < |C_j|$.

Sea p' es un punto fijo de color j en esta coloración del plano proyectivo, haciendo el mismo análisis tomando el haz de líneas l_p que pasa por p podemos concluir que sucede lo mismo, es decir $|C_j| < |C_i|$ lo cual no es posible porque en esa coloración $|C_i| < |C_j|$ por el primer párrafo. Por lo tanto $\Pi_n \setminus C'_x$ no tiene una 2-coloración balanceada. \square

Como el plano proyectivo de orden n menos una línea (también quitamos los puntos) es igual al plano afín de orden n entonces es suficiente quitarle una clase de paralelas al plano afín para poder 2-colorearlo de manera balanceada.

Sea x un punto de Π_n que no es un punto del plano afín obtenido a partir de Π_n menos una línea l . Notemos que la clase de paralelismo C_x asociada al plano afín (definido como en la sección anterior) contiene n líneas del plano afín que no se intersectan.

Claramente el siguiente resultado sólo tiene sentido cuando el orden del plano afín es par.

Teorema 43. *El plano afín de orden n menos una clase de paralelismo C_x tiene una 2-coloración balanceada.*

Demostración. Sean $\{l_1, \dots, l_n\}$ las líneas del conjunto C_x ordenadas de izquierda a derecha y definimos dos subconjuntos ajenos de puntos que utilizaremos para exhibir una 2-coloración balanceada de $A_n \setminus C_x$.

$$\text{Sean } E = \{ l_i \in C_x / i = \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \}.$$

$$F = \{ l_i \in C_x / i = \{ \frac{n}{2} + 1, \dots, n \} \}.$$

Colorearemos los puntos del conjunto E de color azul y los puntos del conjunto F de color verde². Como cualquier línea $l \notin C_x$ intersecta una única vez a cada línea del conjunto C_x entonces cada línea tiene exactamente $\frac{n}{2}$ puntos de color azul y $\frac{n}{2}$ puntos de color verde.

Entonces $A_n \setminus C_x$ tiene una 2-coloración balanceada. □

En la figura 4.5 daremos una 2-coloración balanceada del plano afín del plano de Fano menos las dos líneas de pendiente infinito.

²La demostración de esta afirmación es análoga a la demostración de la afirmación del Teorema 42.

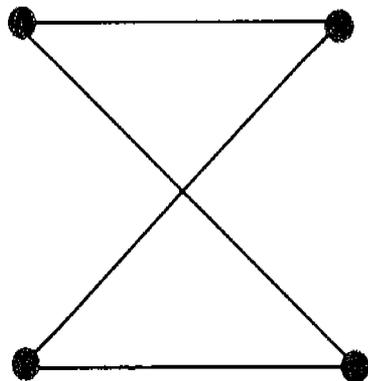


Figura 4.5: Una 2-coloración balanceada del plano afín del plano de Fano menos 2 líneas

Bibliografía

- [1] J. Akiyama y J. Urrutia, A note on balanced colourings for lattice points. *Discrete Math*, 83: 123–126, 1990.
- [2] A. A. Bruen y J. A. Thas, Hyperplane coverings and blocking sets, *Math. Z.*,181: 407–409, 1982.
- [3] Arthur Cayley, On the colourings of maps, *Proc. Royal Geographical Society*, 1: 259–261,1879.
- [4] J. H. Van Lint y R. M. Wilson, A course in combinatorics, *Cambridge University Press, Cambridge*, second edition, 1992.
- [5] Jaroslav Nešetřil y Jiří Matoušek, Invitation to discrete mathematics, *Clarendon Press, Oxford*, 1999.