UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN DE PROPOSICIONES MATEMÁTICAS

T E S I N A
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A
JOSÉ LUIS PUEBLA RAMÍREZ

ASESOR: ACT. HARVEY SPENCER SÁNCHEZ
RESTREPO

FEBRERO 2008

¡Gracias!

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por los conocimientos adquiridos y todas las experiencias que forman parte de mi vida.

A mi esposa Alma Torres por su apoyo y paciencia a lo largo de todo este tiempo. Solo puedo agradecerle y expresarle mi amor por ella.

A mis padres José Luis Puebla y Rosa María Ramírez, por su apoyo y amor brindados en todo momento. Porque siempre me ayudaron y apoyaron.

Al Act. Harvey Spencer Sánchez Restrepo por su tiempo, conocimientos, apoyo y paciencia para dirigir este trabajo.

A mis sinodales Fis. Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga, Mtra. Maria del Carmen González Videgaray, Mtro. Victor Manuel Ulloa Arellano y Dr. Luis Alejandro Tavera Pérez

Al Act. Alejandro Mina Valdez, por su tiempo y disposición en la revisión de este trabajo y por sus valiosas observaciones.

A mis amigos Daniel, Nora, Fernando, Erica, Miguel y Andrea, por sus palabras de apoyo y su confianza en mi.

A mi amiga Ruth González Cedillo por su disposición en la corrección de los detalles.

A todos ellos !GRACIAS¡

Índice general

Prólogo

La ciencia actuarial es la encargada de la aplicación del conocimiento matemático a los seguros, las finanzas, las pensiones, la demografía, la informática y muchas otras disciplinas. La Actuaría se ocupa de la medición de los riesgos en las diferentes áreas de actividad del ser humano y se encarga de la creación de medidas preventivas contra la materialización de estos riesgos.

El actuario es considerado a nivel mundial un profesional indispensable para la sociedad por su formación interdisciplinaria y sus conocimientos fundados sobre la sólida báse de las matemáticas. Desempeña papeles de gran importancia no solo en las compañías aseguradoras o reaseguradoras, sino también en las instituciones relacionadas con la seguridad social, los fondos de retiro, los centros de investigación, etc. Sus actividades exigen un elevado nivel de conocimiento matemático, ya que debe formular, estructurar y construir modelos para simular y representar diversos problemas con el fin de resolverlos. Por esta razón, debe tener una rigurosa formación matemática; formación que para ser integral, requiere necesariamente la práctica de desarrollar las demostraciónes de las proposiciones matemáticas.

Un reto que enfrentan los estudiantes de la carrera de actuaría desde el primer curso es el de desarrollar demostraciones; actividad propia y necesaria de todas las materias del plan de estudios que pertenecen al área del conocimiento matemático y que provoca múltiples complicaciones durante los estudios. Las complicaciones mencionadas se hacen presentes porque los alumnos ingresan a la carrera sin una preparación en cuanto al desarrollo del razonamiento matemático. Los estudiantes se encuentran con una actividad compleja y abstracta con la que no están familiarizados: se introducen conceptos desconocidos como axiomas, lemas, corolarios, etc. y se les exige la habilidad de conjeturar, inducir, deducir y generalizar. Si añadimos a esto la escasa bibliografía en español que aborda el tema, la situación se convierte en un problema relevante.

Son estas consideraciones las que han impulsado el desarrollo del presente trabajo. Con este material se pretende apoyar a los estudiantes presentando un panorama general de los métodos más comunes de demostración, es decir, los presentados en este trabajo no son los únicos aplicables a todas las ramas de las matemáticas,pero se tiene la seguridad de que serán los de mayor utilidad para los alumnos, ya que les proporcionará una guia del proceso a seguir al desarrollar demostraciones y fomentará la habilidad de razonar de manera estructurada y lógica al enfrentarse con la prueba de lemas, teoremas, corolarios o en general, cualquier idea matemática que intente convencerlos de que algo es verdad. Se espera como logro adicional, quitar de la mente de los futuros actuarios la idea de que las demostraciones son infructuosas e incomprensibles y motivarlos a entenderlas y desarrollarlas para su mejor formación.

Capítulo 1

Preliminares

> La matemática, cuando se la comprende bien, posee no solamente la verdad sino también la suprema belleza.
>
> Bertrand Russell (1870-1972)

1.1. ¿Qué es la matemática?

La palabra matemática tiene su origen en el vocablo griego $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) que quiere decir ciencia, conocimiento, aprendizaje. De esta palabra se desprende $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\sigma\varsigma$ (mathematicós) que se traduce como amante del conocimiento, vocablo que dá origen a la palabra matemático. El actuario posee una sólida formación matemática y la capacidad de aplicarla a las necesidades presentes en dichos campos de trabajo, por tanto, debe integrarse a este concepto y convertirse en amante del conocimiento matemático.

Por si misma, la palabra **matemática** sugiere que se habla de **conocimiento** y **ciencia**. Las ciencias se clasifican en dos grupos: las formales y las factuales. Esta división atiende al propósito de cada una de ellas. El propósito de las ciencias factuales es la comprobación o confirmación de sus hipótesis y el de las ciencias formales es la demostración o la prueba de sus hipótesis. Dentro de la clasificación de las ciencias formales se encuentran únicamente dos disciplinas: la Lógica y la Matemática. Estas ciencias han estado siempre relacionadas a tal grado que han dado origen a la lógica matemática.

La matemática **es un arte**, pues al igual que las que son consideradas como tales, muestra belleza. Solo que la belleza matemática es muy diferente a la que se puede apreciar en una pintura o en una composición musical; la belleza de la matemática radica en la forma en como sus conocimientos se van uniendo de forma armoniosa. La matemática establece un orden perfecto en los razonamientos, permitiendo secuencias de ideas y conceptos que encajan de manera exacta y que provocan una sensación de placer intelectual.
Como lo expresa Fausto Ongay [1]:

> "Pero entonces cabe la pregunta: ¿que es un arte, sino la sublimación de algo que todos somos capaces en principio de realizar? En efecto, en mayor o menor medida, todos somos capaces de tomar un lápiz y garabatear o de tararear una melodía; pero sólo cuando se subliman estas actividades es que hablamos de pintura o de música, es decir, que podemos hablar de arte. Del mismo modo, aunque todos somos en cierta medida capaces de analizar con juicio, más o menos crítico, cierta construcción matemática, no es sino cuando la llevamos a un estadio superior de abstracción, de alguna manera desproveyéndola de atributos superfluos, que hacemos matemáticas"

También **es un lenguaje** universal y formal, pues permite comunicar ideas completas sin ambigüedad alguna a cualquier persona en el mundo que lo entienda. El lenguaje matemático utiliza una gramática y un vocabulario definidos con extrema precisión.
Pablo Amster [2] dice:

> "Un teorema en español conserva su belleza si se lo traduce al alemán, al francés, a un lenguaje simbólico o al lenguaje que sea. Cosa que no ocurre por ejemplo con una poesia, cuya belleza se ve alterada con las traducciones".

Las ideas matemáticas pueden ser expresadas por medio de una simbología propia, es decir, la matemática tiene su propio sistema de escritura que completa esta forma de transmisión de conocimiento. Las personas que hablan de matemáticas deben conocer su lenguaje. Imagine un músico que toca excelentemente de forma empírica, pero que no es capaz de leer las notas de una partitura. Nunca podrá comunicar a otros sus composiciones ni tocar las notas de otra persona. Así sería el matemático que conoce y utiliza correctamente el álgebra y otras ramas de la matemática, pero que no es capaz de leer, hablar y escribir el lenguaje matemático.

Las matemáticas **son una técnica**, ya que su desarrollo es un procedimiento o conjunto de procedimientos que tiene como objetivo obtener un resultado determinado dentro del mismo campo de las matemáticas y en otras ciencias. Las demás ciencias se apoyan en la matemática para obtener sus datos con precisión, les permite hacer predicciones por medio de modelos y les facilita el camino para obtener resultados cuantitativos. La idea anterior se resume en el título del libro escrito por E.T. Bell [3]: *Matemáticas: Reina y esclava de las ciencias.*

No es posible definir a la matemática de manera sencilla. Anteriormente se describía como la ciencia que estudia los números y sus relaciones, pero dado que en la actualidad el progreso matemático ha crecido de manera descomunal, la definición anterior ha quedado obsoleta y es preciso considerar una nueva.

Por esta misma razón, es muy difícil dar una clasificación de las diversas ramas de conocimiento que integran las matemáticas, pero a continuación daremos una por demás simple.

Aritmética. Se encarga de estudiar los números, sus operaciones y las relaciones existentes entre ellos. Dentro de la aritmética se encuentra la teoría de números.

Geometría. Tiene por objeto de estudio las formas, el espacio y su relación entre ellos. Dentro de la geometría se encuentran la trigonometría, la geometría diferencial, las geometrías no euclideanas, etc.

Álgebra. El álgebra se encarga del estudio de las ecuaciones, los conjuntos las estructuras, etc.

Análisis. Este es el nombre moderno que se le ha dado al cálculo diferencial e integral. Estudia también las funciones.

Cálculo numérico. Estudia la solución aproximada o exacta de problemas mediante algoritmos específicos.

Probabilidad. Se encarga del estudio del azar.

Topología. Estudia las relaciones de cercanía en los espacios.

Cada una de estas ramas contiene su propia especialización de disciplinas matemáticas, y éstas hoy en día empiezan a mostrar interrelaciones, lo cual manifiesta que no son casos aislados e independientes de las matemáticas, sino al contrario, es común observar que algunas áreas determinadas de conocimiento usan ideas, conceptos o teorías de otra área, lo cual permite que las matemáticas se esten convirtiendo en una unidad de conocimientos.

1.2. El pensamiento matemático

El desarrollo de las matemáticas tiene su origen en la mente humana, es un proceso en el que el hombre a través de la abstracción, obtiene ideas que se refieren a objetos que existen dentro del mundo de las matemáticas y las expresa por medio de **proposiciones**, las cuales son traducidas a un lenguaje simbólico con la finalidad de verificarlas para poder hacer uso de ellas.

Es importante considerar que la finalidad de las matemáticas de verificar que es o no cierto, está relacionada directamente con el concepto de verdad, asunto que el hombre ha debatido desde la antigüedad, y que es una idea filosófica a la que quizá nunca se pueda dar una definición absoluta.

Asimismo, dentro del terreno matemático, para poder comprobar la veracidad de las ideas matemáticas, es necesario construir un conjunto de argumentos racionales que permitan dar un sustento al proceso de demostrar la verdad de dichas proposiciones. Para poder lograrlo, la matemática se apoya en otra ciencia a la que ha estado ligada íntimamente durante toda su existencia: la Lógica, debido a que el objeto de estudio de esta ciencia es la forma y estructura del pensamiento. La lógica es la que permite una correcta ordenación de las ideas, que en cooperación con un conjunto de conocimientos previos permite constatar la veracidad o falsedad de alguna idea matemática.

Justamente el comprobar la veracidad de alguna sentencia matemática es lo que se conoce como demostración. Y es el propósito de colocar a la matemática sobre un fundamento en el que se pudiera establecer con claridad si una proposición es verdadera o falsa, lo que propició el desarrollo de las principales corrientes de pensamiento matemático las cuales son: El logicismo, el intuicionismo, el formalismo y más recientemente el realismo.

El logicismo establecía que la aritmética se podía derivar de la lógica y por lo tanto que todas las matemáticas deberían desprenderse de la lógica pura. El principal representante de esta corriente es Bertrand Russell (1870-1972), de quien se hablará más adelante.

Desde 1907, algunos matemáticos concluyeron que no es seguro aplicar la ley del tercio excluido a proposiciones infinitas. [1] El intuicionismo no considera como válidas algunas suposiciones que se hacen con respecto al infinito, y desecha la universalidad de algunas leyes lógicas. Fueron llamados intuicionistas porque decían que al ser verdadera un proposición para conjuntos finitos, su intuición no les decía si eran verdaderas para conjuntos infinitos. A la cabeza de este movimiento se encontraba el matemático holandés Leopold Brower.

El formalismo comienza desligando a las matemáticas del mundo real. Esto es porque se considera que el tipo de razonamiento utilizado en matemáticas

[1] La ley del tercio excluido, de fundamental importancia en las matemáticas, establece que una proposición matemática es verdadera o falsa y no las dos cosas de manera simultanea.

no depende del objeto matemático sobre el que se está razonando y establece que las matemáticas son una colección de sistemas formales sin significado, para los cuales se tiene que demostrar que no contiene contradicciones. El máximo exponente de esta corriente es el matemático David Hilbert (1862-1943).

Pero a partir de que ninguno de los programas descritos anteriormente tuvo un éxito total, ha surgido una nueva corriente llamada realismo que sostiene que los entes matemáticos existen de manera independiente al pensamiento del hombre, es decir, el hombre no inventa los objetos matemáticos sino que los descubre. El matemático austriaco Kurt Gödel (1906-1978) pertenece a esta corriente de pensamiento, él mismo estaba seguro de que la realidad matemática podía ser percibida de una forma muy parecida a la que experimentan los sentidos.

Todos estos esfuerzos de proporcionar a la matemática una base sólida surgen de la necesidad de los matemáticos de explicarse a si mismos qué es una demostración. Es importante mencionar que estas corrientes de pensamiento surgieron dentro de un contexto histórico verdaderamente interesante y complejo. Podremos apreciar un poco más de esto al considerar las secciones siguientes y el último capítulo de este trabajo.

En este primer capítulo se da de manera muy sencilla: una definición del concepto de demostración matemática, un breve relato histórico que permita comprender la importancia actual de dicho concepto y tratar de explicar cómo es que se obtiene una proposición matemática, ya que es el concepto básico sobre el cual se desarrollan las demostraciones.

1.3. ¿Qué es una demostración?

Responder a esta pregunta es darle un significado al propósito de este trabajo. No tendría sentido hablar de las técnicas para demostrar proposiciones matemáticas si no se sabe lo que involucra el concepto de demostración ni los beneficios que podría traer el aprender a desarrollarlas.

A continuación se dan tres definiciones que han dado diferentes autores a dicho concepto.

> Una demostración es una argumentación que constituye una prueba lógicamente concluyente de que algo es o no es el caso.
> Luis Vega [5]

> Prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado,(...), y si un enunciado se conoce como verdadero y bien definido, a estas pruebas les llamaremos demostraciones.
> Balacheff [6]

> Una demostración es un razonamiento probatorio expresado en lenguaje matemático.
> Daniel Solow [12]

Las tres definiciones anteriores se pueden resumir de la siguiente manera: una demostración es una serie de pasos apoyados por la lógica y el razonamiento deductivo que llevan de una hipótesis que se supone verdadera a una conclusión, la cual se tiene que verificar que es o no cierta.

Por lo tanto, se puede concluir que es el razonamiento el que lleva de una proposición o conjunto de proposiciones previamente aceptadas como verdaderas, a un nuevo resultado matemático.

Las principales propiedades o características de las demostraciones matemáticas, son las siguientes [16]:

- Consiste en una prueba lógicamente concluyente, por cuanto nos da a conocer la verdad de una proposición y la seguridad de que lo propuesto no puede ser de otra manera.
- El resultado se obtiene mediante un proceso deductivo, a partir de nociones básicas elementales
- La prueba tiene un alcance general

Las razónes principales para dedicarle nuestra atención a las demostraciones radica en:

- El hecho de estar **seguros** de que algo es verdad.
- Explican el **por qué** algo es verdad
- Tienen una **razón pedagógica**.
- Y **comunican** sin ambigüedad una proposición verdadera a otra persona.

Una vez que hemos comprendido qué es una demostración, sus características y sus propósitos, se dará una definición propia:

Una demostración es un razonamiento estructurado apoyado en argumentos lógicos y deductivos que permiten comprobar la veracidad de las proposiciones matemáticas. Y que ayudan a comprender los conceptos y la estructura del pensamiento matemático.

Aprender a desarrollar demostraciones ayuda al intelecto a ver más allá de la verificación de que algo es verdadero o no, y ayuda a un correcto razonamiento e interpretación de los conceptos matemáticos.

1.4. Breve historia de las demostraciones

El concepto de demostración matemática no surgió al mismo tiempo que esta ciencia. Al principio la intención de probar que alguna idea matemática era verdadera ni siquiera existía, sino que se ha ido desarrollando conforme se da el avance en el campo del conocimiento matemático.

Las primeras ideas de número se remontan hasta la edad de piedra, en donde era necesario poder cuantificar las cosas que se comerciaban por medio de intercambios.

Al paso del tiempo, se desarrollaron nuevas culturas, y en cada una de ellas se hacia presente la necesidad natural de medir el tiempo, de llevar registros de mercancías y pago de tributos, de calcular las medidas de superficie para construir edificaciones, etc. Es decir, se necesitaba contar. En esta etapa del desarrollo del hombre es claro que se consideraba como natural la actividad de contar y no era necesaria ninguna demostración.

Los primeros indicios de matemáticas más avanzadas se dieron en las civilizaciones babilónica y egipcia, en donde se tenía principal interés en las medidas y en los cálculos geométricos. En la actualidad, se sabe que los babilonios tenían conocimiento de las ecuaciones de primero y segundo grado y del teorema de Pitágoras; y es aquí donde parece estar el primer indicio del concepto de demostración, pues se han descubierto tablillas de barro que contienen algunos dibujos en los que se trata de explicar por qué es correcta la aplicación de algunos conocimientos.

Posteriormente los griegos tomaron algunas ideas matemáticas de los egipcios y babilonios. Es en esta cultura donde se desarrolla la matemática abstracta, basada en una estructura de razonamiento lógico, proposiciones, definiciones, postulados y demostraciones.

En esta etapa de desarrollo matemático griego se creó una atmósfera en la que ya no era suficiente saber el cómo, sino que era necesario el por qué de las ideas matemáticas, y es aquí donde se tiene la primera aparición formal del concepto de demostración.

Aquí, destaca un filósofo y matemático llamado Pitágoras, que marca una importante división en el desarrollo de las matemáticas, pues antes de él la geometría estaba basada en reglas derivadas de la experiencia y la observación y fue él quien fundamentó la necesidad de realizar demostraciones de las proposiciones matemáticas.

Es en esta época en donde se desarrolla la célebre demostración de la irracionalidad de la raíz de dos, demostración que se apoya en el método de reducción al absurdo y que ha permanecido hasta nuestros días.

Euclides fué otro matemático griego perteneciente a esta etapa y merece especial atención, ya que fue el primero en usar el método deductivo de manera rigurosa. El trabajo de Euclides empieza con la definición de los conceptos fundamentales como punto, recta, etc. Posteriormente, al definir los objetos trató de establecer verdades absolutas o axiomas, es decir, verdades que al ser tan obvias no requerían de demostración alguna; y tomando como punto de partida estos axiomas probó gran cantidad de teoremas utilizando un sistema de razonamiento lógico y deductivo.

Todos estos conocimientos están plasmados en su célebre obra *Elementos*, que es una recopilación exhaustiva de los conocimientos matemáticos hasta el año 300 a.C.

Como se mencionó anteriormente, entre los griegos ya se comenzaba a organizar el conocimiento matemático, pero es Eudoxo el primero en tener la idea de organizar la matemática en teoremas. Su trabajo también es reconocido por el cálculo de áreas y volúmenes utilizando el método de exhaución, que fue la base del actual método de integración. Su trabajo ayudó en gran manera a la axiomatización del conocimiento matemático griego.

Posteriormente a este periodo de esplendor, poco se realizó en cuanto al desarrollo del concepto de demostración, y no fue sino hasta el siglo XIX, en donde el concepto de límite permite darle rigor al análisis matemático y resurge la formalización de este conocimiento.

En 1870, la Matemática se había diversificado en tantos campos, que ya era una enorme estructura de conocimientos. Solamente los especialistas en cada una de estas áreas podían dominarlas totalmente. Esta especialización ha crecido constantemente hasta el presente, y sigue creciendo.

Un matemático alemán llamado David Hilbert, en 1899 publicó un libro con el título *"Fundamentos de Geometría"*, en el que formaliza los principios de axiomatización de ésta. En esencia, es la misma idea que la de Euclides, pero va más allá de la Geometría, debido a que propuso un fundamento axiomático de todas las matemáticas iniciando por la Aritmética.

Hilbert propuso demostrar que las teorías matemáticas fundamentales poseen dos aspectos: consistencia y completitud. A continuación se explican brevemente cada una de ellas.

La consistencia busca que una teoría matemática no tenga ninguna contradicción, es decir, si habiendo especificado una hipótesis y establecido que determinada afirmación es cierta, dentro de la misma teoría no puede ser cierto ningún resultado que la contradiga.

La segunda propiedad, llamada de completitud, pide que todos los razonamientos verdaderos puedan ser demostrados dentro de la misma teoría. Si sabemos que un resultado es verdadero, éste debe ser demostrado en un número finito de pasos.

Pero un matemático austriaco llamado Gödel, demostró dos teoremas que derrumban el ideal de Hilbert.

En el último capítulo de este trabajo se describe de una manera simple esta singular etapa de formalización del conocimiento matemático.

Posteriormente a este episodio en la rigorización del pensamiento exacto, en julio de 1935, se formaría una agrupación de matemáticos que se dieron cuenta de la necesidad de presentar las matemáticas en una forma diferente. Esta comunidad tomaría el nombre de Nicolás Bourbaki.

Él o más bien ellos, deseaban escribir un tratado que sirviera como base para todos los matemáticos. Los trabajos de Bourbaki fueron los primeros en tener una organización rigurosa y con una presentación completamente axiomática, dando seguimiento en cierto modo al ideal de Hilbert.

Bourbaki en su obra *Eléments de Mathématique* manifiesta una clara intención de imitar actualmente el papel que tomaría la obra de Euclides, *Elementos*, en la matemática griega de su tiempo. El trabajo de Bourbaki ha tenido influencia hasta hoy en el desarrollo del pensamiento matemático estructurado.

1.5. Terminología matemática

Como se mencionó anteriormente, las matemáticas son en si mismas un lenguaje que puede ser leído, escrito y transmitido a otras personas que lo entienden. No hay limitante para una persona que habla español el poder comprender una demostración realizada por una persona que escribió un teorema sea alemán o ruso. Las matemáticas son un lenguaje universal.

Para poder comprender el lenguaje de las demostraciones, es necesario conocer y entender la terminología matemática.
Dentro del mundo de las matemáticas existen diferentes conceptos que es necesario conocer y manejar, por esta causa a continuación se da la definición de estos conceptos y algunos ejemplos que ayuden a comprender mejor el papel que desarrollan.

- Una ***proposición*** es un enunciado que se asume como verdadero y que se quiere demostrar. Es una frase que afirma o que niega algo.

En el capítulo siguiente se hablará ampliamente sobre las proposiciones.

- Una ***definición*** en matemáticas es un acuerdo al que llegan los matemá ticos en lo que se refiere al significado de algún término. Expresa una noción compleja mediante la enumeración de las nociones más simples que la integran.

Ejemplo. 1. *Definicion.Un intervalo cerrado es el conjunto de elementos x determinado por dos números a y b, donde $a \leq b$, tal que $a \leq x \leq b$.*

Ejemplo. 2. *Definicion. Decimos que L es el límite de la función f en el punto x_0 si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x pertenece al dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L_0| < \epsilon$.*

Ejemplo. 3. *Definicion. Un vector β de V se dice que es combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ en V , si existen los escalares $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ tales que $\beta = c_1a_1, c_2a_2, c_3a_3, \ldots, c_na_n$*

- Los ***términos*** son conceptos utilizados en las definiciones. Se suelen llamar términos indefinidos porque para especificar el significado de un término se tiene que recurrir a otro término, que tampoco ha sido definido. Para tratar de ejemplificarlo veamos que sucede con el caso de conjunto: el término conjunto se define utilizando el término de colección, que no ha sido definido, y que para serlo necesita de otro término indefinido. Este proceso lleva a una cadena infinita de definiciones. Para evitar esta situación es conveniente dejar algunos términos sin definir, a los que se llamarán términos indefinidos.

- Los ***axiomas*** son verdades matemáticas que por su obviedad se aceptan como verdaderos sin necesidad de ser corroborados con una demostración. Realmente con los axiomas ocurre algo semejante que con lo términos indefinidos; no se pueden probar todos los hechos por la recurrencia que se presenta, por lo que se asumen ciertos sin demostración alguna. Los axiomas también son conocidos como ***postulados***.

Ejemplo. 4. Axioma. *Para todo número a y b que pertenecen al conjunto de los números reales, $a + b$ tambien pertenece al conjunto de los números reales.*

Ejemplo. 5. Axioma. *Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

Ejemplo. 6. Axioma. *Dado un punto cualquiera en un plano, se pueden trazar infinitas rectas que pasen por el.*

- Un ***lema*** es una proposición preliminar que se utiliza en la demostración de algún teorema. Los lemas son proposiciones cuyos resultados permiten que de manera conjunta se construya la demostración del teorema. Un lema es un teorema que debe anteponerse a otro por ser necesario para la demostración de éste útimo.

El lema siguiente está relacionado con el ejemplo número 9.

Ejemplo. 7. Lema. *Sea S un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V. Supóngase que β es un vector de V que no pertenece al subespacio generado por S. Entonces el conjunto que se obtiene agregando β a S, es linealmente independiente.*

- Un ***teorema*** es una proposición a la que se le ha dado una importancia relevante. Es una verdad que no es tan evidente y que por lo tanto requiere de una demostración.

Ejemplo. 8. Teorema. *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Entonces todo conjunto independiente de vectores de V es finito y no contiene más de n elementos.*

Ejemplo. 9. Teorema. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V, todo subconjunto linealmente independiente de W es finito y es parte de una base (finita) de W.*

- Un ***corolario*** es una proposición que surge de manera inmediata a la demostración de algún teorema. Es decir, al demostrar que el teorema es cierto se desprenden inmediatamente algunas proposiciones que son consecuencias de la veracidad del teorema.

Los siguientes ejemplos son corolarios de los ejemplos 8 y 9 respectivamente

Ejemplo. 10. Corolario. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número (finito) de elementos.*

Ejemplo. 11. Corolario. *Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $dimW < dimV$.*

- Un ***contraejemplo*** es un resultado particular que permite verificar la falsedad de una proposición.

Ejemplo. 12. *La función* $f(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$ *está definida para todos los números reales.*

Es evidente que la función está definida en todos los puntos de la recta real, a excepción del punto $x = 1$*. El punto* $x = 1$ *es un contraejemplo que permite verificar que la proposición anterior es falsa.*

- Una ***conjetura*** es una proposición que se asume como verdadera, usualmente basada en alguna evidencia parcial o por la intuición de algún experto. Es también una proposición cuyo valor de verdad es desconocido. Cuando se encuentra una demostración a una conjetura, se convierte en teorema.

Ejemplo. 13 (Conjetura de Goldbach). *Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos.*

Ejemplo. 14 (Conjetura de Dirichlet). *Sea* $n \in N$*, entonces existen infinitos números primos de la forma* $n^2 + 1$*.*

Ejemplo. 15 (Conjetura de Polignac). *Todo número entero par* n *es la diferencia de dos números primos en infinitas formas.*

1.6. El origen de las proposiciones

En las matemáticas modernas es comunmente utilizado el método axiomático, que como ya se dijo, su origen puede fijarse desde los primeros intentos por darle un punto de apoyo a la estructura de la geometría que estudiaban los griegos. En una teoría matemática es necesario tomar como punto de inicio algunos términos y un conjunto de axiomas relacionados con éstos términos.

Así, al haber definido los objetos con los que se desarrolla toda la teoría, surgirán algunas otras definiciones que complementarán todo el campo de conocimiento relacionado a estos objetos. De esta manera, una vez definidos los objetos y establecido los axiomas que regirán este campo del conocimiento, se procede a obtener resultados siguiendo la lógica y el razonamiento deductivo. Esta es la forma de construir un sistema matemático.

De esta manera, los sistemas axiomáticos formales son aquellos que poseen tres propiedades fundamentales, consistencia, completitud y decidibilidad. Un sistema axiomático es consistente cuando no pueden darse contradicciones dentro del mismo sistema, la completitud es la posibilidad de realizar la demostración de todas las formulas bien formadas dentro del sistema, y la decidibilidad se da cuando no existe ninguna proposición bien formada dentro del sistema que no sea demostrable.

El **razonamiento deductivo** del que se está hablando, es aquél en el cual llegamos a conclusiones verdaderas derivadas necesariamente de premisas verdaderas. Esta forma de razonamiento parte de lo general y llega a lo particular.

Como ya se ha mencionado, una conjetura es una proposición matemática para la cual no se tiene una demostración que permita verificarla como verdadera, ni cuenta con un contraejemplo que la haga falsa. El trabajo del matemático es investigar y formular nuevas conjeturas con la finalidad de verificarlas por medio de una demostración.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, asimilemos al juego de ajedrez como si fuera un sistema matemático, el cual está compuesto por términos, definiciones, axiomas y proposiciones o teoremas. Los Términos que integran este juego son las piezas mismas, es decir, el peón, el alfil, la torre, el rey, etc.

Las definiciones pueden ser consideradas como el papel que desarrolla cada pieza en el juego, es decir, los peones representan las fuerzas de infantería, los caballos la caballería, el rey es la pieza fundamental sobre la cual gira la victoria del jugador, etc.

Los axiomas son las bases sobre las cuales se desarrolla el juego; sabemos que el movimiento de los peones es hacia adelante dos casillas cuando es su primer movimiento, y una casilla a partir de ese momento; y que los peones no "comen" de frente sino en diagonal hacia adelante una casilla. Los peones nunca retroceden. Otro axioma sería que el movimiento de las torres se da únicamente de manera horizontal o vertical.

Los teoremas pueden ser representados por estrategias que permiten mover determinadas piezas en un orden para llevar a cabo alguna jugada específica y obtener como resultado posicionarse en un lugar estratégico o simplemente eliminar alguna pieza del contrincante.

Es claro que el intentar una jugada para eliminar a otra pieza del jugador contrario, en la cual se pretenda que el caballo abandone su forma definida de avanzar y se desplace como si fuera la reina o un alfil, sería una completa aberración dentro del juego que rompe con todo el esquema planteado desde un principio. En este caso dicho teorema no sería válido por no cumplir con los principios sobre los que descansa el juego.

Con esta sencilla comparación queremos transmitir a los estudiantes la idea de que las proposiciones matemáticas no surgen de la nada, ni están dadas de una manera arbitraria y preestablecida, sino que en algún momento alguien al seguir las reglas básicas del juego matemático logró identificar una serie de movimientos que derivó en una "bella jugada". Cada quien puede encontrar su propia "jugada" o teorema, y basados en los axiomas del juego matemático y el razonamiento deductivo, puede demostrar que la aplicación de la jugada es válida.

Todos aquellos que estudian matemáticas pueden sugerir sus propias conjeturas o proposiciones, porque al igual que en el ajedrez, la posibilidad de realizar jugadas es casi ilimitado, también lo es la de establecer proposiciones matemáticas.

En este momento es importante considerar que hoy en día existen proposiciones que no tienen demostración a pesar de haber sido dadas a conocer desde hace mucho tiempo y que por lo tanto siguen siendo conjeturas. La conjetura de Goldbach del ejemplo 13 fue dada a conocer en año 1742 y ha sido verificada por computadora mostrando cientos de miles de resultados en los cuales se verifica la proposición, pero a pesar de ello, no se le considera demostrada.

El último teorema de Fermat propuesto en 1637, el cual sugiere que no hay números naturales n, a, b y c tal que $n > 2$ y $a^n + b^n = c$. Permaneció siendo una conjetura, ya que por más de 300 años nadie había sido capaz de demostrarla. Pero en 1994 un matemático ingles llamado Andrew Willis, en una prueba de cerca de 200 páginas logró demostrarlo usando métodos sofisticados de la matemática moderna que no tienen ninguna relación obvia con la teoría de números.

Este matemático fué reconocido por esta demostración con la medalla Fields, que es una distinción que concede la Unión Matemática Internacional cada cuatro años ante la inexistencia de un premio Nobel de matemáticas. La medalla Fields es el mayor honor al que puede aspirar un matemático.

No es bien sabido en la actualidad el porqué Alfred Nobel no constituyera un premio para la matemática, pero existen muchas suposiciones al respecto entre las cuales se encuentra que Alfred Nobel compitió por el amor de una mujer con un matemático. Pero la razón más aceptada es que Nobel no consideró esta ciencia como importante por su escasa aplicación a la vida cotidiana.

Sea cual fuere la idea de Nobel, en la actualidad las matemáticas está encontrando aplicación aún de las teorías más abstractas. Y es importante reconocer que aún falta mucho camino por recorrer y mucho trabajo que desarrollar dentro del área del conocimiento matemático.

Capítulo 2

Introducción a las Demostraciones

> La lógica es la higiene que practica la matemática para mantener sus ideas saludables y fuertes.
>
> Herman Weyl (1885-1955)

2.1. Proposiciones matemáticas

Toda idea matemática por abstracta que sea, puede ser expresada por medio de frases compuestas por palabras o puede también expresarse por medio de un lenguaje simbólico. Un concepto fundamental dentro del terreno del razonamiento matemático es el de proposición, que no es mas que una sentencia que declara algo. Como su nombre lo indica, una proposición propone, es decir, sugiere que en el mundo de los objetos matemáticos ocurre algo.

La labor más adelante será la de realizar la demostración de estas proposiciones para verificar si lo que sugieren es correcto o no, es decir, si la proposición es falsa o verdadera.

Definición. 1. *Una **proposición** es un pensamiento expresado en palabras, por ello puede ser plasmada en enunciados u oraciones que pueden ser falsas o verdaderas.*

Definición. 2. *Una **proposición matemática** es una idea o pensamiento abstracto que también puede ser expresada en palabras o en símbolos y que puede ser falsa o verdadera, pero que hace referencia a ideas, abstracciones o entes matemáticos.*

Dentro de las proposiciones matemáticas existe una importante división en:

1. Proposiciones matemáticas simples
2. Proposiciones matemáticas compuestas.

Definición. 3. *Las **proposiciones matemáticas simples** son aquellas que están formadas únicamente por una sola frase que trata de darnos a conocer una idea simple.*

Como ejemplos de proposiciones matemáticas simples tenemos las siguientes:
7 es un número primo
8 es un número par

Como lo expresa la definición, una proposición puede tener la cualidad de ser verdadera o la de ser falsa.

Es evidente que las proposiciones anteriores son verdaderas y que las dos siguientes son falsas.

$3 < 2$

$(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$

Definición. 4. *Las* ***proposiciones matemáticas compuestas*** *son aquellas proposiciones que están formadas por más de una proposición simple, unidas entre si por alguna conectiva lógica.*

Las conectivas lógicas se tratarán en la sección siguiente.
Ahora bien, las siguientes proposiciones son ejemplos de proposiciones matemáticas compuestas:

Si 8 es un número par, entonces 8^2 también es un número par.
-6 es un número negativo y es entero.

Las proposiciones matemáticas también pueden ser clasificadas de la siguiente manera:

a) categoricas	d) hipotéticas
b) conjuntivas	e) disyuntivas
c) negación	f)cuantificación

Consideremos a continuación algunos ejemplos de esta clasificación:
Categórica:
Para toda x, x es real

Hipotética:

Si x es mayor que cero, entonces x pertenece al conjunto de números positivos.

Conjunción:

El número x es real y positivo.

Negación:

No es cierto que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sea solución.

Cuantificación:

Existe x tal que x es una solución

Para todo y, existe un x tal que...

La mayoría de las proposiciones con las que se trabajan en matemáticas son del tipo hipotético o condicional, ya que se supone que se parte de premisas verdaderas para llegar a una conclusión verdadera.

Definición. 5. *En cualquier proposición condicional $P \rightarrow Q$. La proposición P es llamada hipótesis y Q es la conclusión o tesis.*

La hipótesis es aquella parte de la expresión que se asume verdadera y de la cual se parte para llegar a una conclusión. La tesis es lo que se quiere demostrar, el punto al que se debe llegar utilizando la información que proporciona la hipótesis. Es la parte medular de la demostración.

Por lo regular las proposiciones matemáticas compuestas del tipo condicional tienen la siguiente estructura:

Si "**condición**" entonces "**algo sucede**"

Lo que está después de la palabra **Si** y lo que está antes de la palabra **entonces** se considera como la hipótesis. Todo lo que está después de la palabra **entonces** se considera la tesis

En la siguiente expresión:
Si x es un número par, entonces x es divisible por dos.

La hipótesis es: x es un número par.
Y la tesis es: x es divisible por dos.

Las expresiones que sirven para formar proposiciones compuestas a partir de proposiciones simples se llaman conectivas lógicas y se consideran a continuación.

2.2. Las conectivas lógicas

Para representar las proposiciones hacemos uso de las letras P,Q,R,... las cuales serán llamadas **variables proposicionales**

La falsedad o veracidad de las proposiciones matemáticas compuestas está determinada por la veracidad o falsedad de las proposiciones simples que la componen. Y para poder unir dos o más proposiciones son necesarias algunas expresiones especiales llamadas conectivas lógicas, que como ya mencionamos, ayudan a agrupar dos ideas matemáticas simples en una más compleja.

Definición. 6. *Se llaman **conectivas lógicas** a las expresiones que permiten formar proposiciones compuestas a partir de proposiciones simples.*

Las conectivas lógicas son las siguientes:

"No es cierto que..."	Negación
y	Conjunción
o	Disyunción
"si... entonces"	Condicional o hipotética
"si y solo si"	Bicondicional

La **negación** tiene el propósito de indicar un cambio en el sentido de la proposición. Como se ha dicho, la importancia de una proposición matemática radica en el hecho de que es verdadera o es falsa. Así, al negar una proposición que es verdadera se convierte en una proposición falsa.

Ejemplo. 16. *La proposición: 8 es un número par, es verdadera, y al aplicarle la negación se obtiene: 8 no es un número par, que es una proposición falsa.*

La **conjunción** tiene el propósito de indicar que las proposiciones unidas por la palabra "y" son verdaderas.
Así, la proposición compuesta que resulte de unir dos o más proposiciones simples por medio de la conjunción será verdadera siempre y cuando las proposiciones que la integran sean simultaneamente verdaderas; y será falsa cuando al menos una de las proposiciones componentes sea falsa.

Ejemplo. 17. *La proposición: 6 es un número par y 6 es mayor que 2, es verdadera, ya que las proposiciones simples que la componen son ambas verdaderas; mientras que la proposición: 6 es un número par y 6 es menor que 4 es falsa, ya que una de sus proposiciones componente es falsa.*

La conectiva **disyunción** tiene por objeto indicar que la proposición compuesta que surge de unir dos proposiciones simples por medio de la palabra "o" es verdadera si al menos una de las proposiciones componentes es verdadera.

Ejemplo. 18. *Considere la proposición: 6 es un número par o 6 es menor que 4, esta proposición compuesta es verdadera ya que una de las dos proposiciones componente es verdadera. Pero la proposición: 6 es un número impar o 6 es menor que 4, es falsa ya que ambas componentes son falsas.*

El sentido de la **implicación** es indicar que si la proposición antecedente es verdadera, también será verdadera la proposición consecuente. Se debe poner especial atención en esta conectiva ya que en las demostraciones matemáticas se parte de una proposición que se supone verdadera y se debe llegar a la veracidad de una proposición final a través de implicaciones

Ejemplo. 19. *Si $n > 2$ es un número primo, entonces n es un número impar. La implicación anterior es verdadera, ya que un número primo siempre es impar. Pero si considera ahora la proposición: Si n es un número impar, entonces n es un número primo. Se observa que es falsa, ya que un número impar no siempre es primo.*

La expresión "si y solo si" o **bicondicional** indica que al relacionar dos proposiciones, el valor de verdad de ambas es el mismo, es decir, si una es verdadera forzosamente la otra también es verdadera. Muchos teoremas matemáticos hacen uso de esta conectiva llamada también doble implicación.

Ejemplo. 20. *Considere la proposición: Un número n es par si y solo si es divisible por 2. Es verdadera ya que si un número es par implica que divisible por dos y si un número es divisible por dos implica que éste es par.*

Una herramienta básica dentro del desarrollo del pensamiento matemático y lógico son las llamadas tablas de verdad [1], que no son más que estructuras de razonamiento que permiten conocer la verdad o la falsedad de la interrelación de dos o más proposiciones, pero que están expresadas en forma de tabla.
En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos de la aplicación de cada una de las conectivas lógicas, al igual que sus respectivas tablas de verdad.

2.3. Tablas de verdad

Las tablas de verdad son una herramienta básica para los matemáticos. En ellas se pueden comprobar los resultados de los razonamientos dependiendo de la veracidad o falsedad de las proposiciones.

Negación

La negación se encarga de cambiar el sentido de una proposición. Si P es verdadera entonces NO P es falsa y si P es falsa entonces NO P es verdadera. La negación se suele denotar con el símbolo "$\neg$".
Para el primer caso en el que la proposición P es verdadera.
El número $\sqrt{2}$ es un número irracional. Verdadero
El número $\sqrt{2}$ NO es un número irracional. Falso

Para el segundo caso en el que la proposición P es falsa.
El número 14 es un número primo. Falso
El número 14 No es un número primo. Verdadero

[1] Si desea conocer un poco más acerca de las tablas de verdad puede consultar *Iniciación a la lógica simbólica* de José Antonio Arnaz,[12] en la biliografía

La tabla de verdad para la negación queda como sigue:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Figura 2.1: Negación

Conjunción

Cuando se habla de conjunción, se indica que la proposición compuesta es verdadera, si las proposiciones simples que la integran son simultáneamente verdaderas; y es falsa cuando alguna de las componentes es falsa.

El conector "*y*" se usa para ligar dos proposiciones y está representado por el símbolo "$\wedge$".

En la conjunción, el resultado de unir dos proposiciones siempre es falso salvo en el caso en que ambas proposiciones son verdaderas.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figura 2.2: Conjunción

Disyunción

La disyunción tiene el propósito de enlazar dos proposiciones, indicando que al menos una de ellas es verdadera, (también puede darse el caso de que ambas sean verdaderas). El conector "*o*" se representa por el símbolo "$\vee$".

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figura 2.3: Disyunción

En la disyunción el resultado de unir dos proposiciones siempre es verdadero, salvo en el caso en que las dos proposiciones son falsas.

Condicional o implicación

El propósito de esta conectiva es señalar que si en la proposición compuesta: P implica Q, la proposición antecedente es verdadera, entonces también lo es la proposición consecuente. A la proposición antecedente también se le llama hipótesis y a la consecuente tesis.
La conectiva condicional se simboliza con "$\rightarrow$".

La mayoría de las proposiciones matemáticas tienen como estructura una implicación, es decir, al suponer que la información de la hipótesis es verdadera, se tiene como consecuencia que la tesis también debe ser verdadera.

Se observa en la tabla siguiente que el único caso en que la conclusión de la implicación es falsa, se da cuando la hipótesis es verdadera y la tesis falsa.

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figura 2.4: Implicación

Bicondicional

La conectiva "si y solo si", la cual se abrevia "ssi", expresa que el valor de verdad de dos proposiciones es el mismo sea verdadero o falso. El simbolo con el cual se representa esta conectiva es "$\leftrightarrow$". De esta manera la expresión $P \leftrightarrow Q$ es una proposición que establece que si P es verdadera, también Q es verdadera y de manera simultanea que si Q es verdadera, entonces P también lo es. Por lo anterior la conectiva bicondicional establece que la proposición $P \leftrightarrow Q$ es igual a considerar la proposicion $P \to Q \wedge Q \to P$.

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \to Q \wedge Q \to P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Figura 2.5: Bicondicional

2.4. Introducción a las demostraciones

Hasta la sección anterior se ha trabajando en la construcción de proposiciones complejas a partir de proposiciones simples, unidas entre si por las conectivas lógicas. Pero en esta sección se trabajará con las relaciones que se pueden establecer entre proposiciones compuestas.
A continuación se dan algunas definiciones que más adelante serán de gran utilidad .

Definición. 7. *Una proposición* ***tautológica*** *es una proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero en todos los casos.*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \rightarrow (P \wedge Q)$
V	F	V	**V**
V	V	V	**V**
F	V	V	**V**
F	F	F	**V**

Figura 2.6: Tautologia

Definición. 8. *Una proposición* ***contradictoria*** *es una proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre falso en todos los casos.*

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	**F**
F	V	**F**

Figura 2.7: Proposición contradictoria

Definición. 9. *Una proposición* ***indeterminada*** *es una proposición compuesta que es verdadera en algunos casos y falsa en otros, dependiendo del valor de verdad de las proposiciones simples que la integran.*

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Figura 2.8: Proposición indeterminada

Definición. 10. *Dos proposiciones son llamadas* ***equivalencia proposicional*** *cuando al relacionarlas por medio del conectivo bicondicional resulta una tautología.*

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**V**	V

Figura 2.9: Equivalencia proposicional

Si dos proposiciones son equivalentes de acuerdo a la definición anterior, entonces tienen los mismos valores de verdad y pueden sustituirse la una por la otra. Esta sustitución será de gran utilidad cuando se construyan los argumentos de demostración que serán vistos más adelante.

Definición. 11. *Se dice que una proposición Q es una* ***consecuencia proposiconal*** *de las proposiciones $P_1, P_2, ...P_n$ si y solo si la proposición $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ es una tautología.*

Es importante dar a conocer en este punto que existe una diferencia entre las expresiones siguientes $P \to Q$ y $P \Rightarrow Q$. La notación $P \to Q$ expresa que se está tratando con dos proposiciones cuya implicación es también una proposición. Y la notación $P \Rightarrow Q$ establece no solo que P implica a Q sino que además es una tautología.

Lo mismo sucede con $P \leftrightarrow Q$ y $P \Leftrightarrow Q$, mientras que $P \leftrightarrow Q$ indica una implicación bidireccional de ambas proposiciones, $P \Leftrightarrow Q$ establece que P y Q son equivalentes.

Para aclarar este punto de importancia fundamental se analizan los casos siguientes:

Caso 1.
Considere las proposiciones $(P \to Q \wedge \neg Q)$ y $\neg Q$.
Si se establece una relación de implicación entre ellas se observa (en la tabla de verdad siguiente), que la proposición compuesta $(P \to Q \wedge \neg Q) \to \neg Q$ resulta ser una tautología, es decir, no importa que valores de verdad tengan las proposiciones P y Q, el valor de verdad de relacionar $(P \to Q \wedge \neg Q)$ y $\neg Q$ por medio de una implicación siempre será verdadero. Entonces el signo $\to$ debe ser sustituído por $\Rightarrow$. Es importante resaltar que $(P \to Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$, pero no así $\neg Q \Rightarrow (P \to Q) \wedge \neg Q$, pues esta relacion entre proposiciones no es una tautología. (El lector puede comprobarlo desarrollando la tabla de verdad correspondiente)

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \to Q \wedge \neg Q$	$\Rightarrow$	$\neg Q$
V	V	V	F	F	**V**	F
V	F	F	V	F	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	F	V	V	V	**V**	V

Figura 2.10: Relación de implicación

Caso 2.

Considere ahora las proposiciones compuestas $(P \to Q)$ y $(\neg Q \to \neg P)$.

Si se relacionan dichas proposiciones por medio de una implicación, como lo muestra la siguiente tabla de verdad, se obtiene que $(P \to Q) \Rightarrow (\neg Q \to \neg P)$, es decir, es una tautología y que $(\neg Q \to \neg P) \Rightarrow (P \to Q)$ también es una tautología.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\Leftrightarrow$	$\neg Q \to \neg P$
V	V	F	F	V	**V**	V
V	F	F	V	F	**V**	F
F	V	V	F	V	**V**	V
F	F	V	V	V	**V**	V

Figura 2.11: Equivalencia proposicional

Definición. 12. *Un* ***argumento*** *es una serie de proposiciones que parten de otras llamadas* ***premisas****, y cuya proposicion final o conclusión se obtiene de las premisas anteriores.*

Considerando la definición anterior y la definición 11, se tiene que si Q

es la consecuencia de una lista de proposiciones, a esta lista se le llama argumento. Ahora bien, a pesar de que los argumentos están construidos de proposiciones, no se consideran como verdaderos o falsos, sino válidos o no válidos. La validez o invalidez de los argumentos no depende de la veracidad o falsedad de las proposiciones, sino mas bien de su correcta o incorrecta construcción.

De esta manera, un argumento es válido si partiendo de premisas verdaderas se llega a una conclusión verdadera, y un argumento no es válido si partiendo de premisas verdaderas se obtiene una conclusión falsa.

Premisas	Conclusión	Argumento
Verdaderas	Verdadera	Válido
Verdaderas	Falsa	No Válido
Falsas	Verdadera	Válido
Falsas	Verdadera	Válido

La tabla anterior es muy parecida en cuanto a su significado con la tabla de verdad de la implicación. Es muy importante destacar que cualquier argumento puede ser representado por medio de una proposición condicional, es decir, de la forma $P \to Q$, donde las premisas se consideran como hipótesis y la conclusión como tesis.

Definición. 13. *Un argumento se llama* ***deductivo*** *cuando la conclusión se desprende directamente de las premisas.*

Teniendo en cuanta las consideraciones anteriores se tiene la siguiente

Definición. 14. *Un argumento es* ***válido*** *si al ser transformado en una proposición condicional, se convierte en una tautología.*

Definición. 15. *Una* ***regla de inferencia*** *es una regla lógica precisa que describe la construcción de argumentos validos.*

Una regla de inferencia es un esquema que establece una relación sintáctica entre un conjunto de premisas y una proposición final llamada conclusión. Este tipo de relaciones sintácticas son usadas para llegar a aserciones nuevas verdaderas a partir de unas ya conocidas y son usadas en los procesos de inferencia.

De esta manera, cuando los matemáticos se refieren a un método de demostración de proposiciones matemáticas, se está hablando de la aplicación de alguna regla de inferencia.

En los siguientes dos cuadros (páginas siguientes) se dan algunas de las principales reglas de inferencia, que serán de gran utilidad al llegar el momento de tratar las diferentes técnicas de demostración.

Cuadro 2.1: Reglas de inferencia (Implicación)

1)	$[(P \rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$	**Modus Ponens**
2)	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$	Modus Tollendo Ponens
3)	$[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$	Modus Tollens
4)	$[(P \vee Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow P$	Modus Tollendo Ponens
5)	$P \Rightarrow \neg\neg P$	Doble negación
6)	$\neg\neg P \Rightarrow P$	Doble negación
7)	$P \Rightarrow P$	Repetición
8)	$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplificación
9)	$Q \wedge P \Rightarrow Q$	Simplificación
10)	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	Adjunción
11)	$P \Rightarrow P \wedge Q$	Adición
12)	$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Adición
13)	$[(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	Bicondicional Condicional
14)	$[(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$	Bicondicional Condicional
15)	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)] \Rightarrow (P \leftrightarrow)Q$	Condicional Bicondicional
16)	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$	Silogismo Hipotético
17)	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow R) \Rightarrow Q \vee S$	Dilema Constructivo

Cuadro 2.2: Reglas de inferencia (Equivalencia)

1)	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$	Doble Negación
2)	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	Ley Conmutativa
3)	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	Ley Conmutativa
4)	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	Ley Asociativa
5)	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	Ley Asociativa
6)	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Ley Distributiva
7)	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Ley Distributiva
8)	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
9)	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	**Contrapositivo**
10)	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$	
11)	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	
12)	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	Ley de Morgan
13)	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	Ley de Morgan
14)	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
15)	$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	
16)	$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$	**Por Casos**
17)	$P \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	**Indirecta**

Los argumentos permiten obtener conocimiento nuevo y verdadero a partir de proposiciones que ya se han aceptado como verdaderas. [2]

De esta manera, si un argumento cualquiera que trate con proposiciones relacionadas con el mundo físico o el matemático, tiene la misma forma que

[2] El lector interesado en adentrarse más en la lógica matemática puede consultar, *Lógica matemática* de Julio E. Solís, citado en la bibliografía

una ley de implicación, entonces es un argumento válido.

En la sección correspondiente a la historia del concepto de demostración se hizo mención acerca de la intención de darle a la matemática rigor en su desarrollo, y que esto se logra por medio de la axiomatización de sus conocimientos. En la actualidad, casi todas las ramas de las matemáticas puras están basadas en sistemas axiomáticos. Así que para poder comprender que significa esto se dan a continuación las siguientes definiciones.

Definición. 16. *Un **sistema axiomático** consiste de dos listas: una de proposiciones consideradas como axiomas y otra de reglas de inferencia.*

En el último capitulo encontrará una explicación de las limitantes de fundamentar a la matemática sobre sistemas axiomáticos. Pero por el momento enfocaremos nuestra atención a la parte que culminará con esta introducción para iniciar con los métodos de demostración.

Definición. 17. *Una **demostración formal** es una secuencia finita de pasos, cada uno de los cuales puede ser la aplicación de un axioma, una definición, una proposición probada previamente o alguna regla de inferencia, que nos lleva a la verificación de la proposición.*

Con ésta definición concluimos la parte correspondiente a la lógica de las proposiciones, base sobre la que se construyen las técnicas de demostración de las proposiciones matemáticas. En la sección correspondiente a terminología matemática se podrán aclarar algunos conceptos que intervienen en la definición anterior, con lo que esperamos que los lectores puedan tener un conocimiento completo del concepto de demostración matemática.

Capítulo 3

El método Directo

> Señores, es cierto que $e^{i\pi} + 1 = 0$, pero es totalmente paradójico; no lo podemos entender y no conocemos su significado, pero lo hemos demostrado, y por tanto sabemos que tiene que ser verdad.
>
> Benjamin Pierce

3.1. Introducción

Esta es la primera técnica de demostración que se trata en este trabajo. Existen otros métodos que se alnalizarán en capítulos posteriores, pero ya que los otros métodos dependen de la forma en como se entienda y desarrolle bien esta técnica, se considera antes que todos los demás.

Cuando se tiene una proposición de la forma $P \to Q$, sea lema, teorema, corolario, o cualquier proposición que sea una implicación, se debe llegar de la hipótesis P que se supone verdadera, a la conclusión o tesis Q por medio de la lógica y el razonamiento deductivo.

El método de demostración directa consiste en aplicar a la hipótesis P, la cual se supone que es verdadera, una definición, axioma, regla de inferencia o algún teroema demostrado previamente, con el fin de obtener una nueva proposición P_1. Como P_1 se desprende de P que es verdadera entonces P_1 también lo es. De esta nueva proposición P_1 se puede obtener una nueva proposición P_2 al aplicar nuevamente algún otro axioma, teorema, etc a P_1. El propósito es encaminar las proposiciones deducidas de P hacia la verificación de la tesis Q; es decir, se debe verificar que Q se puede obtener de la información que proporciona P.

De acuerdo a la tabla de verdad para la implicación de dos proposiciones matemáticas, $P \to Q$ es verdadera cuando P es verdadera y Q es verdadera. Intersa principalmente este caso, pues no tiene razón tratar de demostrar una proposición partiendo de la falsedad de la hipótesis.

3.2. El método

El método directo de demostración de proposiciones matemáticas tiene su soporte en la regla de inferencia llamada **Modus Ponens** (Cuadro 2.1 inciso 1) cuya tabla de verdad se da a continuación.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q \wedge P$	$P \rightarrow Q \wedge P \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Figura 3.1: Modus Ponens

En donde se puede observar que no importa que valor de verdad tengan P y Q, el resultado de $P \rightarrow Q \wedge P \Rightarrow Q$ siempre será verdadero. Esto se puede explicar de manera sencilla como sigue: Si se sabe que P implica Q y se tiene P, entonces forzosamente se obteniene Q.
El modo Ponens permite obtener como conclusión, la consecuencia de la proposición condicional.

El método directo puede explicarse de la siguiente manera:

Sea la proposición $P \rightarrow Q$
Se identifican las componentes fundamentales de la proposición
Hipótesis: P
Conclusión o tésis: Q

Se supone que P es verdadero y se tiene que mostrar que a partir de la información que proporciona P, se puede concluir que Q también es verdadero.

Como P es verdadero, al aplicarle algún axioma, definición, teorema, regla de inferencia, etc. se obtiene P_1 entonces, siguiendo la regla de inferencia Ponens se tiene que si $P \rightarrow P_1$ y P es verdadero, entonces P_1 también es verdadero.

Como P_1 es verdadero, al aplicarle algún axioma,definición, teorema, regla de inferencia, etc. se obtiene P_2. Si se aplica la regla de inferencia Ponens se tiene que si $(P \wedge P_1) \to P_2$ y como $P \wedge P_1$ es verdadero, entonces P_2 es verdadero.

Este proceso continúa hasta que

Como P_n es verdadero, al aplicarle algún axioma, definición, teorema, regla de inferencia, etc. se obtiene Q. Si se aplica la regla de inferencia Ponens se tiene que $(P \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$. Como $(P \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n)$ es verdadero, se puede concluir que Q también es verdadero.

Como se vio en la definición 11, Q es una consecuencia proposicional de $P, P_1, P_2, \ldots, P_n$ pues por la regla de inferencia Ponens resulta una tautología, lo que asegura la veracidad de Q a partir de la veracidad de la hipótesis P.

Al desarrollar una demostración se debe tener cuidado y poner atención en que es lo que está tratando de demostrar, pues muchas veces por algún descuido se puede llegar a resultados que pueden ser incorrectos. Para tratar de ejemplificar esto considere las dos siguientes "demostraciones".

Suponga que

$$\begin{gathered}
a = b \\
a^2 = ab \\
a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
(a+b)(a-b) = b(a-b) \\
a + b = b \\
2 = 1?
\end{gathered}$$

En el caso anterior, en la cuarta línea se dividió por $b - a$, pero esto no es correcto ya que si $a = b$ su diferencia es 0, y no es posible realizar divisiones por cero. Este es el error que conduce a una inconsistencia. Otro caso también conocido es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1} &= \sqrt{(-1)(-1)} \\
1 &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} \\
1 &= i * i \\
1 &= i^2 \\
1 &= -1 \ ?
\end{aligned}$$

Para este caso el error se da desde un comienzo, no es posible establecer la igualdad en el primer paso ya que el valor a la izquierda del símbolo $=$ es un número real, mientras que el de la derecha es un número imaginario. Los resultados a los que se han llegado no son verdaderos, y han surgido porque en determinado momento no se aplicó bien algún concepto, o se trató de forzar la lógica a realizar algo indebido.

3.3. Aplicación del método

Esta sección será el primer contacto con las demostraciones en el presente trabajo e inicia con algunos ejemplos sencillos para incrementar gradualmente su dificultad.

Proposición. 1. *Si un número n es impar, entonces n^2 también es un número impar*

En este caso se puede distinguir fácilmente las dos partes fundamentales que componen esta proposición matemática, es decir, la hipótesis y la tesis. Éste es el primer paso que tenemos que considerar al desarrollar una demostración, cualquiera que sea.

Hipótesis P: el número n es impar.
Asumimos esta proposición como verdadera.
Tesis Q: por demostrar que n^2 también es impar.

Un número impar tiene la forma $2k+1$, para cualquier número entero k, entonces se puede representar este número impar como sigue: $n = 2k+1$
Ya se tiene el número impar, ahora la proposición indica que se debe elevar al cuadrado.
Entonces se obtiene

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

si se reordena el trinomio anterior se llega a

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

que también por su estructura es un número impar; este es el punto donde se quería llegar. Al obtener este resultado concluye la demostración, ya que se comprueba que es verdad que n^2 también tiene una estructura de número impar.

Un ejemplo más elaborado es el de la siguiente proposición, que es de especial atención por la cantidad de "pasos" necesarios para llegar de la hipótesis a la conclusión y porque muestra que para poder desarrollar demostraciones más elaboradas es necesario una buena cantidad de conocimientos previos que serán de gran ayuda en la tarea de llegar de P a Q.

Proposición. 2. *Si $f(x) = lnx$ entonces la derivada de la función $f(x)$ es igual a $\frac{1}{x}$.*

En este caso la hipótesis P es que la función $f(x)$ es la función logaritmo la cual se supone verdadera. El propósito es verificar que la conclusión Q sea verdadera.

Este es un ejemplo que se desarrolla paso a paso incluyendo el argumento lógico que sustenta cada uno de esos pasos. Como se puede observar una demostración es una concatenación de razonamientos apoyados en definiciones, axiomas, teoremas, desarrollo algebraico, manipulaciones y la lógica, que permiten darle validez al paso siguiente.

Si $f(x) = \ln x$	hipótesis
$f(x+h) = \ln x + h$	Se desprende de la hipótesis
$f(x+h) - f(x) = \ln x + h - \ln x$	Por la definición de derivada,
$f(x+h) - f(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$	Por la ley de logaritmos
$f(x+h) - f(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$	Usando algebra
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$	Dividiendo ambos por h
$= \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$	Se sabe que $\ln a^n = n \ln a$
$= \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}}$	Multiplicando y dividiendo el exponente
	Para cambiar de forma pero sin alterar
$= \ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{x}}}\right]^{\frac{1}{x}}$	Se sabe que $(a)^{mn} = (a^m)^n$
$= \frac{1}{x}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{x}}}\right]$	Como $\ln a^n = n \ln a$
$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{x}}}$	Tomando limites

$= \frac{1}{x} \ln \text{lím}_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{h}{x}}}$	El logaritmo del limite es el limite del logaritmo
$= \frac{1}{x} \ln e$	Dado que $\text{lím}_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	Dado que $\ln e = 1$

Con lo que concluye la demostración.

Un punto importante al desarrollar demostraciones es el grado de detalle con el que se explica el sustento lógico y matemático de cada paso. El grado de detalle con el que se realiza una demostración depende de quien demuestra la proposición. El problema con el que muchos estudiantes se enfrentan en los libros es que las demostraciones son en extremo condensadas. Con esto no se quiere decir que todas las demostraciones tienen que ser como la anterior mostrando absolutamente todo lo que se hizo de principio a fin. Se puede condensar la demostración, pero no en exceso.

Un concepto fundamental dentro del desarrollo de las matemáticas es el de conjunto; asi que a continuación se considera un ejemplo de demostración directa que involucra este tema.

En el capítulo Aplicaciones se encontrarán las definiciones que se aplican en esta demostración.

Proposición. 3.

$$A \cap (B_1 - B_2) = (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$$

Para demostrar la igualdad de dos conjuntos de acuerdo a la definición 28 de la página 154 se tiene que mostrar que $A \cap (B_1 - B_2) \subseteq (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$ y que $(A \cap B_1) - (A \cap B_2) \subseteq A \cap (B_1 - B_2)$

Consideremos primero que $A \cap (B_1 - B_2) \subseteq (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$

Se selecciona un elemento x de $A \cap (B_1 - B_2)$, ahora bien, como $x \in A \cap (B_1 - B_2)$ se tiene que $x \in A$ y $x \in (B_1 - B_2)$.

Como $x \in (B_1 - B_2)$, de acuerdo a la definición de diferencia de conjuntos (definición 31 página 154) $x \in B_1$ y $x \notin B_2$

De lo anterior se tiene que $x \in A$ y $x \in B_1$, por lo tanto $x \in (A \cap B_1)$

También tenemos que como $x \in A$ y $x \notin B_2$, entonces $x \notin (A \cap B_2)$

Pero si $x \in (A \cap B_1)$ y $x \notin (A \cap B_2)$, se tiene que $x \in (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$ y así $A \cap (B_1 - B_2) \subseteq (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$

B) Ahora se tiene que demostrar que $(A \cap B_1) - (A \cap B_2) \subseteq A \cap (B_1 - B_2)$

Se selecciona un $x \in (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$, entonces $x \in (A \cap B_1)$ y $x \notin (A \cap B_2)$

Como $x \notin A \cap B_2$, se tiene que $x \notin A$ y $x \notin B_2$

Pero como $x \in B_1$ y $x \notin B_2$, entonces $x \in (B_1 - B_2)$

Se sabe que $x \in (A \cap B_1)$ asi que $x \in A$ y $x \in B_1$, entonces como $x \in A$ y $x \in (B_1 - B_2)$ se tiene que $x \in A \cap (B_1 - B_2)$

Como hemos probado que $A \cap (B_1 - B_2) \subseteq (A \cap B_1) - (A \cap B_2)$ y que $(A \cap B_1) - (A \cap B_2) \subseteq A \cap (B_1 - B_2)$ podemos dar por concluida la demostración estableciendo la veracidad de la proposición.

Otro concepto fundamental dentro de la matemática es el de derivada de una función, por lo cual, para poder tener una idea de como se realizan algunas de las demostraciones de proposiciones que involucran a las derivadas se da a continuación su definición y un ejemplo de demostración.

Definición. 18. *La derivada de una función f, denotada por f' es la función con regla de correspondencia*

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En el capítulo Aplicaciones se da la demostración de más proposiciones que involucran este concepto. Notación: La derivada de una función f puede representarse de las siguientes maneras: f', $D[f]$.

Proposición. 4. *Si f y g son dos funciones diferenciables, entonces*

$$D[fg] = fD[g] + gD[f]$$

Se puede observar que la hipótesis de la proposición establece que f y g son dos funciones diferenciables; ésta suposición ya está dada y se considera como verdadera. Lo que debe preocuparnos es como llegar de esta hipótesis a la conclusión de que la derivada del producto de f yg es en verdad $fD[g]+gD[f]$

Sea $h(x) = f(x)g(x)$. Y de acuerdo a la definición de derivada,

$$D[h(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Para ajustar la expresión anterior y concuerde con la definición se suma y resta én el numerador $f(x+\Delta x) \cdot g(x)$. Esta es una manipulación en el desarrollo pero que no afecta en ningún sentido salvo en el de facilitar las cosas.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) + f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Reaordenando el numerador de la expresión anterior se obtiene

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Ahora bien, la hipótesis establece que f y g son diferenciables, entonces f y g son continuas en el valor x y por tanto $\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ y también $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = D[f(x)]$$

y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = D[g(x)]$$

Así que por lo anterior se tiene que

$$D[h(x)] = f(x)\cdot D[g(x)] + g(x)\cdot D[f(x)]$$

Puede llegar un momento al desarrollar la demostración en el cual no se pueda continuar hacia adelante, es decir, al obtener la secuencia de proposiciones $P_1, P_2, P_3, \ldots$ que se derivan de P , se llega a una proposición P_i la cual no es posible encaminar hacia la verificación de Q; en este momento lo que se debe hacer es desarrollar la demostración hacia atrás, esto significa que se puede tomar la tesis como punto de partida y tratar de llegar hasta el punto en donde el proceso de ida quedó interrumpido. Esto podría parecer extraño, pero si un paso tiene el sustento lógico para ir hacia delante, debe haber también un paso sustentado en la lógica que permita volver atrás.

Para tratar de ejemplificar lo dicho considere la siguiente proposición, que está desarrollada en su totalidad desde el punto final hacia el principio.

Proposición. 5. *Para todos los números reales a y b, diferentes de cero, se tiene que $a < b$ implica que $4ab < (a+b)^2$*

En este caso se puede observar que la conclusión a la que se quiere llegar es mucho más complicada que la proposición de donde se parte. Parecería más complicado llegar de la proposición P :$(a < b)$ a la proposición Q: $(4ab < (a+b)^2$). Así que se comienza a partir de Q, tratando de llegar a P por medio de argumentos válidos y lógicos.

La proposición final asegura que $4ab < (a+b)^2$
Ahora bien, desarrollando un poco de álgebra se tiene

$$4ab < a^2 + 2ab + b^2$$

Lo cual lleva a que

$$0 < a^2 - 2ab + b^2$$

que implica

$$0 < (a-b)^2$$

Pero el cuadrado de un número real diferente de cero siempre es positivo. Así que por esta causa

$$a - b \neq 0$$

Lo cual implica que uno de estos números es mayor que el otro. Y así $a < b$, con lo que concluye la demostración.

Una correcta prueba hacia atrás siempre pude ser escrita de la manera tradicional, es decir, de la hipótesis a la tesis, únicamente hay que colocar la secuencia de pasos en orden inverso.

Otro concepto de gran importancia dentro de las matemáticas es el de combinación; a partir de este concepto se desarrolla el análisis combinatorio, por ello se da la demostración de algunas proposiciones matemáticas que hacen referencia a los coeficientes binomiales, que son otra forma en la que se llama a las combinaciones.
En el capítulo Aplicaciones se da la demostración de más proposiciones que involucran este concepto.

Definición. 19. *El número de formas de elegir k objetos de entre n objetos, sin tener en cuenta el orden se denota por* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *y se define como*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Proposición. 6.

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior, se procede a realizar la demostración comenzando por la conclusión, de esta manera, considerando la definición anterior se tiene que

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Para poder obtener el mismo denominador en ambas fracciones, se realiza una pequeña manipulación multiplicando la primera fracción por $\frac{r}{r}$ y la segunda por $\frac{n-k+1}{n-k+1}$. Entonces se tiene

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{k\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}=$$

$$\frac{k\cdot n!}{k\cdot(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdot n!}{k\cdot(n-k+1)!}=\frac{k\cdot n!+(n-k+1)\cdot n!}{k!(n-k+1)!}=$$

$$\frac{[k+(n-k+1)]\cdot n!}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!}=\binom{n+1}{k}$$

3.4. Demostracion por casos

En muchas proposiciones matemáticas puede aparecer como parte de la hipótesis, la conectiva lógica O, es decir, proposiciones que tienen la forma $(A\vee B)\rightarrow Q$ la cual tiene una equivalencia lógica a la proposición $(A\rightarrow Q)$ y $(B\rightarrow Q)$ lo que permite demostrar la proposición $(A\vee B)\rightarrow Q$ probando las dos implicaciones $(A\rightarrow Q)$ y $(B\rightarrow Q)$.

Las cuadros 3.1 y 3.2 corresponden a las tablas de verdad que permiten verificar que realmente $(A\vee B)\rightarrow Q$ tiene el mismo resultado lógico que $(A\rightarrow Q)$ y $(B\rightarrow Q)$.

Además, podemos observar en el cuadro 2.2 caso 16, que existe una equivalencia proposicional llamada *por casos* que es la que permite la aplicación de esta regla de inferencia.

Formalmente se usa la prueba por casos cuando la premisa o hipótesis P puede ser escrita en la forma A o B, lo cual toma la forma $(A\vee B)\rightarrow Q$,

Cuadro 3.1: Tabla de verdad $(A \vee B) \to Q$

A	B	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \to Q$	Q
V	V	V	**V**	V
V	V	V	**F**	F
V	F	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F
F	V	V	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F

que como se dijo anteriormente equivale a $A \to Q$ y $B \to Q$. Para realizar demostraciones de este tipo de proposiciones se debe probar que cada uno de los casos es verdadero.

Un ejemplo sencillo de demostración por casos se da con la siguiente:

Proposición. 7. *Sea n un número entero, entonces $n^2 + n$ es par.*

La hipótesis de este teorema establece que cualquier número n entero par o impar satisface la tesis de que $n^2 + n$ es par.
Para poder manejar esta proposición y construir una demostración, es necesario dividir ese conjunto de números en pares e impares.

De esta manera se puede rescribir la proposición considerando los dos casos de la siguiente manera:
Sea A la proposición: los números n que son pares y B la proposición: los números n que son impares. La tesis Q, no cambia en ningún sentido.

Cuadro 3.2: Tabla de verdad $(A \to Q) \vee (B \to Q)$

A	B	$A \to Q$	$\vee$	$B \to Q$	Q
V	V	V	**V**	V	V
V	V	F	**F**	F	F
V	F	V	**V**	V	V
V	F	F	**F**	V	F
F	V	V	**V**	V	V
F	V	V	**F**	F	F
F	F	V	**V**	V	V
F	F	V	**V**	F	F

Entonces se debe probar $A \to Q$ y $B \to Q$, de manera separada y llegando a la conclusión de que ambas proposiciones deben ser verdaderas.

- Caso 1. n es par.

  Demostración de $A \to Q$.

  Como se supone que n es par, existe un número k, para el que $n = 2k$. Así

  $$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

  Observe que el resultado es un número par.

- Caso 2. n es impar.

  Demostración de $B \to Q$

  En este caso n es impar y por lo tanto puede ser escrito de la manera siguiente: $n = 2k + 1$, entonces

  $$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1)$$

$$= 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

que también es un número par.

Como se llega a la conclusión de que ambos casos son verdaderos, se puede dar a la proposición la calidad de verdadera, con lo cual concluye la demostración.

Considere ahora otro ejemplo:

Proposición. 8. *Si n es un número real diferente de cero, entonces* $n^2 > 0$

Es sabido por la propiedad de tricotomia de los números reales que si $n \neq 0$, entonces $n > 0$ o $n < 0$.
Entonces se tiene que $A = n > 0$ y $B = n < 0$

- Caso 1. Si $n > 0$.
  Demostración de $A \to Q$.
  Como n es un número positivo, es posible multiplicar ambos lados de la desigualdad por n, sabiendo que al realizar esta operación, el signo de la desigualdad no cambia. Así:
  $n \cdot n > 0 \cdot n$ por la ley de multiplicación de desigualdades por numeros positivos.
  Entonces $n > 0 \to n^2 > 0$

- Caso 2. Si $n < 0$
  Demostración de $B \to Q$.
  Como $n < 0$, entonces se puede multiplicar ambos lados de la desigualdad por n, lo cual implica por la ley de multiplicación de desigualdades

por un número positivo, un cambio en el sentido de la desigualdad.

$n < 0 = n \cdot n > 0 \cdot n$

Entonces $n < 0 \rightarrow n^2 > 0$

Al ser verdaderos cada uno de los casos se puede concluir que la proposición es verdadera, y con esto concluye la demostración.

Proposición. 9. *Si A y B son conjuntos, entonces $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.*

Para demostrar la igualdad de conjuntos, de acuerdo a la definición se debe demostrar que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

Iniciemos considerando que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Se selecciona $x \in (A \cap B)^c$. Así por la definición de complemento $x \notin A \cap B$.

Si $x \notin A \cap B$ entonces $x \notin A$ o $x \notin B$. La palabra "o" obliga a considerar cada uno de los casos, entonces

- Si $x \notin A$ entonces $x \in A^c$. Así $x \in A^c \cup B^c$
- Si $x \notin B$ entonces $x \in B^c$. Así $x \in A^c \cup B^c$

Con lo que se demuestra que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Ahora bien, hay que demostrar $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

Se selecciona $x \in A^c \cup B^c$. Entonces $x \in A^c$ o $x \in B^c$. Asi que debe considerar ambos casos.

- Si $x \in A^c$, entonces $x \notin A$, pero si $x \notin A$ entonces $x \notin A \cap B$, por lo cual $x \in (A \cap B)^c$

- Si $x \in B^c$, entonces $x \notin B$, por lo cual $x \notin A \cap B$, lo cual indica que $x \in (A \cap B)^c$

Con lo que se demuestra que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
Como $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ y $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$ entonces $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
Con lo que concluye la demostración

3.5. Proposiciones “si y solo si”

Al igual que con los números, dentro del manejo de las proposiciones existe una noción de equivalencia. Aquí se hace referencia a las proposiciones que tienen incluida la expresión “si y solo si”, y cuya representación es $P \leftrightarrow Q$.

Probar teoremas con ésta estructura es equivalente a probar que $P \rightarrow Q$ y que $Q \rightarrow P$, probadas cada una de éstas con el método directo o con cualquiera de los métodos que se verán en capítulos posteriores. En el cuadro 2.2 de equivalencias proposiconales caso 11 puede encontrar que

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Ésta es la equivalencia que da soporte a éste método.

La frase “si y solo si” puede ser abreviada en la forma “ssi”. Para tratar de ejemplificar este tipo de proposiciones, considere la siguiente:

Proposición. 10. *Sean m y n enteros, entonces mn es impar si y solo si m y n son impares.*

El símbolo $\Rightarrow$ corresponde a la parte "*si*", La cual dice que si m y n son impares, entonces su multiplicación mn es impar.

El símbolo $\Leftarrow$ corresponde a la parte "*solo si*", dice que si mn es impar, entonces m y n deben ser impares.

Se inicia la demostración de ida, es decir de P hacia Q. Es importante mencionar que para realizar la demostración de ida en este caso, hacemos uso de una técnica de demostración llamada por contrapositivo, que no ha sido considerada hasta el momento, pero que será tratada en un capitulo posterior.

- Demostración de ida

  $\Rightarrow$

  Suponga que m y n no son ambos impares. Si m y n no son ambos impares, entonces al menos uno de ellos es par. Suponga que m es par, entonces existe un j tal que $m = 2j$, entonces al multiplicar
  $mn = 2jn = 2(jn)$ que es un número par.
  Si ahora supone que n es par, entonces existe un k tal que $n = 2k$ y al multiplicar se tiene
  $mn = 2km = 2(km)$ que también es un número par.
  Por lo tanto la suposición de que alguno de los dos no era impar, es falsa y ambos números deben ser impares.

- Demostración de regreso

  $\Leftarrow$

  Para demostrar esta proposición se usa el método directo.
  Se asume que ambos números m y n son impares, entonces existen

números j y k tal que

$m = 2j + 1$ y $n = 2k + 1$, entonces

$mn = (2j + 1)(2k + 1) = 4jk + 2j + 2k + 1 = 2(2jk + j + k) + 1$

que es un número impar.

Al haber demostrado estas dos implicaciones se da por terminada la demostración de la proposición.

Proposición. 11. *$a < b$ si y solo si $b - a > 0$*

- $\Rightarrow$

  Si $a < b$ entonces $b - a > 0$.

  Se suma $-b$ a ambos lados de la desigualdad sin afectarla, entonces

$$a + (-b) < b + (-b)$$

$$a - b < b - b$$

$$a - b < 0$$

$$-(a - b) > 0$$

$$b - a > 0$$

- $\Leftarrow$

  Si $b - a > 0$ entonces $a < b$.

  Se tiene que $b - a > 0$, si se suma a ambos lados a, obtenemos

$$b - a + a > 0 + a$$

e inmediantamente se observa que

$$b > a$$

.

Proposición. 12.

$$lim_{x\to c}f(x) = L si\ y\ solo\ si lim_{x\to c}[f(x) - L] = 0$$

- $\Rightarrow$

  La proposición afirma que $lim_{x\to c}f(x) = L$, asi que se obtiene

  $$lim_{x\to c}[f(x) - L] = lim_{x\to c}f(x) + lim_{x\to c}(-L) = L - L = 0$$

- $\Leftarrow$

  Ahora, se asume que $lim_{x\to c}[f(x) - L] = 0$. Entoces realizando una pequeña manipulación y se tiene
  $f(x) = [f(x) - L] + L$, entonces

  $$lim_{x\to c}\{[f(x) - L] + L\} = lim_{x\to c}[f(x) - L] + lim_{x\to c}L = 0 + L = L$$

3.6. Proposiciones con múltiples conclusiones

Existen algunas proposiciones matemáticas que establecen que tres o más conclusiones son equivalentes. Este tipo de teoremas incluyen la frase, "los siguientes incisos son equivalentes". Las proposiciones que tienen esta estructura, son un caso especial de las proposiciones de la forma "si y solo si". Considere la siguiente

Proposición. 13. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
una matriz triangular superior de 2 X 2, supongamos que a, b, c *son enteros. Entonces lo siguiente es equivalente:*

1. *det* $A = 4$

2. $a = d = \pm 2$

3. *tr* $A = \pm 4$ *y* $a = d$

Lo que el teorema dice al establecer que los incisos son equivalentes, es que 1) ssi 2), 2) ssi 3) y 1) ssi 3). Esto equivaldría a desarrollar 6 demostraciones considerando 3 de ida y 3 de regreso. Pero para este tipo de proposiciones es suficiente demostrar que 1)$\Rightarrow$ 2), que 2)$\Rightarrow$ 3) y que 3)$\Rightarrow$ 1).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores

- 1)$\Rightarrow$2)

  Se asume que $\det A = 4$. De la definición de determinante se sabe que esto implica que $ad = 4$. Como la proposición establece que a y d son enteros entonces $a = 2 = d$ o bien $a = -2 = d$. Con lo que se demuestra que 1) implica 2)

- 2)$\Rightarrow$ 3)

  Se asume que $a = d = \pm 2$. Ahora Supongamos que $a = d = 2$, entonces, por la definición de traza de una matriz $a + d = 4$. Si ahora suponemos que $a = d = -2$. Entonces la $trA = a + d = -4$. Con esto probamos que 2)implica 3).

- 3)$\Rightarrow$ 1)

  Se asume que $trA = \pm 4$ y $a = d$. Podemos escribir $trA = \pm 4$ como $a + d = \pm 4$. En este punto es donde entra la intuición, y hacemos $16 = (a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$. Dado que $a = d$, se deduce que

$a^2 = d^2 = ad$. Entonces $16 = 16ad$. Así $ad = 4$ y dado que el determinante de A es ad, se sigue que $detA = 4$.

Al haber demostrado cada una de las implicaciones anteriores, se puede dar por conlcuida la demostración, y asegurar que la proposición es verdadera.

3.7. Discusión

El método directo para realizar demostraciones consiste en suponer que la hipótesis es verdadera y a partir de ella derivar el paso siguiente por medio de la lógica y el razonamiento. Para construir los escalones que llevan de P hasta Q se puede echar mano de definiciones, teoremas ya probados, cambio de notación, manipulaciones, etc. que permitan trasladarse desde el punto inicial P (hipótesis) hasta el punto final Q (tesis).

Como puede observar, la técnica es realmente simple. Lo difícil es encontrar los elementos matemáticos que permitan comenzar a trabajar con la hipótesis, es decir, se debe poseer una buena cantidad deconocimientos previos tales como conceptos, definiciones, axiomas y demás elementos que cooperen con la información de la hipótesis para cumplir el objetivo de mostrar que Q se puede obtener de P. Por esta razón es fundamental estudiar de manera constante y repasar perfectamente lo que se aprende en el salón de clase, pues si bien es cierto que muchas demostraciones se realizan por el método directo, que no es difícil, si se necesita una buena cantidad de conocimientos como se vió en los ejemplos del capítulo.

En la carrera de actuaría no hay que conformarse únicamente con los que se aprende en las aulas, sino que es de vital importancia darse tiempo para investigar por cuenta propia, con el propósito de incrementar la cantidad de conocimientos que pueden ser de utilidad llegado el momento de demostrar alguna proposición matemática.

Un punto que es importante resaltar en este momento es que debe intentar hacer sus propias demostraciones. Es posible que al principio no logre demostrar nada al primer intento, incluso, puede ser que sienta un poco de molestia o incluso desánimo; pero con la experiencia, es decir, realizando gran cantidad de demostraciones y ejercitando el intelecto, podrá identificar con el tiempo, el camino de muchas demostraciones que son semejantes en su estructura y demostrarlas con relativa facilidad. Debe tener la paciencia necesaria para enfrentar la demostración y estar conciente de que muchas veces se aprende por ensayo y error, lo cual implica una buena cantidad de paciencia y entusiasmo para no caer en la desesperación.

Capítulo 4

Los Cuantificadores

El rigor es a los matemáticos como la moral es a los hombres.

Andre Weil (1906-1998)

4.1. Introducción

Dentro de las expresiones matemáticas existen algunas que no pueden ser consideradas como proposiciones, por ejemplo las siguientes:

1) $x < y$

2) $z^2 - 3z > 0$

Estas expresiones vienen a ser proposiciones cuando se les asigna un valor numérico a cada una de las literales contenidas en los enunciados. Así, los símbolos a los cuales es necesario asignar un valor en una expresión matemática para obtener una proposición se llaman **variables libres**. Por ejemplo, si para el primer caso se asigna los valores $x = 4$ y $y = 2$ se obtiene una proposición verdadera. Y si en el segundo caso $z = 2$, se obtiene una proposición falsa.

Definición. 20. *Una función proposicional es una expresión matemática, la cual contiene una o más variables libres, que como tales, al ser sustituidas por elementos de un conjunto determinado la transforman en una proposición.*

No es sino hasta el momento en que una función proposicional se convierte en proposición cuando ya es posible considerar su valor de verdad. Una función proposicional de una variable se representa por $P(x)$ y la de dos variables por $P(x, y)$.

De esta manera, cuando las proposiciones dependen de los elementos de un conjunto para poder establecer su valor de verdad, surge de manera natural la necesidad de conocer si la proposición es verdadera para: un valor en particular, un conjunto de valores determinados o si depende de la totalidad de los elementos del conjunto, es decir, se necesita cuantificar.

Así, un **cuantificador** es una expresión matemática que proporciona información acerca de la cantidad de elementos que se requieren para poder concluir que una proposición matemática es verdadera o falsa. Este tipo de proposicónes no son tan simples como las presentadas en el capítulo anterior, pues requieren de mayor atención y cuidado para poder entender lo que tratan de decir con el fin de demostrarlas correctamente.

En algunos casos existen cuantificadores múltiples en la misma proposición y es muy importante comprender el papel que desarrollan dentro de ella, pues incluso el lugar en el que esta posicionado el cuantificador cambia de manera radical el sentido de la proposición.

4.2. El cuantificador existencial

Para demostrar la veracidad de muchas proposiciones matemáticas es necesario comprobar que existe un objeto matemático que pertenece a un conjunto determinado, (sean números, funciones, intervalos, matrices, etc.) el cual al introducirlo en la proposición le da la capacidad de ser verdadera. Puede ser que no solamente sea un elemento el que haga a la proposición verdadera, puede haber más. Lo que el cuantificador existencial trata de decir, es que al menos hay un elemento en un conjunto determinado que satisface la proposición. Si no existe aunque sea un único elemento, la proposición simplemente es falsa. El cuantificador existencial se representa por el símbolo $\exists$ y puede ser interpretado por alguna de las siguientes expresiones, es decir, tiene los siguientes significados:

- Para alguno
- Para al menos uno
- Existe un... tal que...

Definición. 21. *Una proposición de la forma $\exists x P(x)$ es definida como verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor de x de su dominio.*

El tipo de proposiciones más común que incluye al cuantificador existencial, está dado por la forma $(\exists x \in A)P(x)$, es decir, existe al menos un elemento en el conjunto A tal que la proposición P es verdadera. Para demostrar una proposición de esta forma es necesario encontrar algún elemento x_n en A, tal que $P(x_n)$ sea verdadera. Solo se necesita encontrar un elemento para afirmar que la proposición se satisface. Como se mencionó anteriormente, podemos escribir una proposición matemática que incluya al cuantificador existencial como $(\exists x \in A)\ P(x)$, expresión que puede ser leída de cualquiera de las formas siguientes:

1. Para algún valor de x en el conjunto A, la proposición $P(x)$ es verdadera.
2. Es el caso que $P(x)$ es verdadera para algún x en A.
3. Existe al menos un x en A tal que $P(x)$ es verdadera.
4. Existe un x en A que hace a la proposición $P(x)$ verdadera.

Una proposición de este tipo $(\exists x \in A)\ P(x)$ tiene la forma $P \Rightarrow Q$, lo cual manifiesta que se está tratando con una implicación, cuya hipótesis es $(\exists x \in A)$ y tesis $P(x)$.

Para tratar de aclarar este concepto o la función que desempeña un cuantificador dentro de una proposición matemática, considere los dos ejemplos siguientes que son proposiciones realmente muy simples en los cuales está contenido el cuantificador existencial y que darán una idea muy clara de lo que éste trata de decir.

Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición, considerando que el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Proposición. 14. $\exists x \in A \mid 2x^2 - 3x = 22$

Esta proposición establece que existe un número entero mayor o igual que uno, pero menor o igual que cinco tal que satisface la condición $2x^2 - 3x = 22$.

x	$2x^2 - 3x = 22$	Valor
1	-1	Falso
2	2	Falso
3	9	Falso
4	20	Falso
5	35	Falso

En este caso la proposición es falsa, ya que dentro del conjunto donde esperamos encontrar la solución, no existe al menos un elemento que al introducirlo en la proposición arroje un valor verdadero.

Considere ahora la siguiente proposición tomando el mismo conjunto A.

Proposición. 15. $\exists x \in A | x^2 - x > 15$

x	$2x^2 - x > 15$	Valor
1	$0 > 15$	Falso
2	$2 > 15$	Falso
3	$6 > 15$	Falso
4	$12 > 15$	Falso
5	$20 > 15$	Verdadero

Esta proposición es verdadera ya que al menos hay un elemento dentro del conjunto A que la satisface.

4.3. El cuantificador universal

Dentro de las matemáticas existen muchas proposiciones que para ser consideradas como verdaderas requieren que todos y cada uno de los elementos de un conjunto determinado las satisfagan. Este tipo de proposiciones son la que incluyen dentro de su estructura al cuantificador universal.

El símbolo de este cuantificador es $\forall$, y tiene los siguientes significados:

- Para todo(a)
- Para cualquier
- Para cada uno

Definición. 22. *Una proposición de la forma $\forall x P(x)$ se define como verdadera, si $P(x)$ es verdadera para cada valor x de su dominio.*

Cuando el cuantificador universal forma parte de una proposición matemática tiene la estructura $(\forall x \in A)P(x)$ y puede ser leída de cualquiera de las formas siguientes:

- Para todos los elementos x de A, la proposición$P(x)$ es verdadera
- Para cada x en A, la proposición $P(x)$ es verdadera
- Todos los valores de x en A, satisfacen $P(x)$.

Considere los suguientes ejemplos con el mismo conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Proposición. 16. $\forall x \in A, x^2 < 20$

x	$x^2 < 20$	Valor
1	$1 < 20$	Verdadero
2	$2 < 20$	Verdadero
3	$9 < 20$	Verdadero
4	$16 < 20$	Verdadero
5	$25 < 20$	Falso

En este caso la proposición es falsa, ya que el supuesto de que la proposición se cumple para todos los elementos del conjunto A no es verdad. Para considerar esta proposición como verdadera todos los elementos del conjunto deben satisfacer la proposición.

Consideremos con el mismo conjunto A la siguiente

Proposición. 17. $\forall x \in A, 4x - 1 > 2$

x	$4x - 1 > 2$	Valor
1	$3 > 2$	Verdadero
2	$7 > 2$	Verdadero
3	$11 > 2$	Verdadero
4	$15 > 2$	Verdadero
5	$19 > 2$	Verdadero

La proposición es verdadera ya que se verifica el supuesto de que todo elemento del conjunto A la satisface.

Los siguientes resultados son de gran utilidad al momento de realizar demostraciones matemáticas, además de que pueden ayudarnos a comprender aún más el significado de los dos cuantificadores.

- $\neg\,[(\forall x \in A)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x \in A)\neg P(X)$
- $\neg\,[(\exists x \in A)P(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg P(X)$

Para el primer caso, $\neg\,[\forall x \in A : P(x)]$ significa que no es verdad que para todo $x \in A$,$P(x)$ sea verdadero, lo cual quiere decir que existe un elemento $x \in A$ que hace que $P(x)$ sea falsa.

Y para el segundo caso $\neg\,[\exists x \in A : P(x)]$ significa que no es verdadero que que existe un $x \in A$, tal que $P(x)$ sea verdadero, y al no existir tal elemento en A, entonces para todos los $x \in A$, la proposición $P(x)$ es falsa.

Suponga que quiere demostrar una proposición que tiene la forma $(\forall x \in A)\,P(x)$ es falsa.

Entonces, usando la primera de las dos expresiones dadas anteriormente se tiene que $\neg\,(\forall x \in A)\,P(x)$, es decir no es cierto que para todo elemento x del conjunto A la proposición es verdadera.
Esto es equivalente a $(\exists x \in A)\,\neg P(x)$. Así, para probar que la proposición original es falsa, es suficiente probar que existe un elemento en el conjunto que la hace falsa y ese elemento del que estamos hablando es llamado *contraejemplo* de la proposición original.

Considere la siguiente

Proposición. 18. *No existe ningún número real n tal que $n^2 = -2$*

Esta proposición tiene la forma $\neg\,[\exists x \in A : P(x)]$ correspondiente al segundo caso, en donde n asume el papel de x, A es el conjunto de los reales y $P(x)$ expresa que $n^2 = -2$. La forma de demostrar esta proposición es diciendo que para todos los elementos del conjunto de los reales, es verdad que ninguno de ellos cumple con la condición $n^2 = -2$.

4.4. Cuantificadores múltiples en una proposición

Muchas proposiciones matemáticas, contienen más de un cuantificador, porque dada la complejidad de la idea que trata de establecer la proposición, necesita de múltiples cuantificadores.

Cuando una proposición contiene más de un cuantificador del mismo tipo, ya sea universal o de existencia, es permitido escribir el cuantificador una sola vez, separando las variables por comas. De esta manera, si se tiene una proposición que este formada por $\forall x \forall y \exists z$ la podemos simplificar escribiéndola de la siguiente manera: $\forall x, y \exists z$. Lo mismo puede hacerse para el cuantificador existencial.

4.4.1. El orden de los cuantificadores

Existen muchas proposiciones matemáticas que incluyen más de un cuantificador universal o existencial, es decir incluyen más de dos variables. De esta manera si $P(a, b)$ es la proposición que incluye dos variables a y b, entonces se pueden realizar las siguientes combinaciones:

- $\forall a \in A, \forall b \in B, P(a, b)$
- $\forall b \in B, \forall a \in A, P(a, b)$
- $\forall a \in A, \exists b \in B, P(a, b)$
- $\exists a \in A, \forall b \in B, P(a, b)$
- $\forall b \in B, \exists a \in A, P(a, b)$
- $\exists b \in B, \forall a \in A, P(a, b)$
- $\exists a \in A, \exists b \in B, P(a, b)$
- $\exists b \in B, \exists a \in A, P(a, b)$

El orden en el que se encuentran colocados los cuantificadores dentro de una proposición, es esencial para poder realizar su demostración. El cambiar el orden de los cuantificadores puede resultar en una idea matemática completamente diferente.

Para ejemplificar la importancia que tienen los cuantificadores dentro de una proposición matemática considere el siguiente caso.

Representemos con la letra x los alumnos de la carrera de actuaría del primer semestre y representemos con la letra y las materias del plan de estudios correspondientes a ese semestre. Ahora propongamos una relación entre ellas, que llamaremos $P(x, y)$, y que establece que el alumno x aprueba la materia y.

1.-$(\forall x)\,(\forall y)\,P(x,y)$

Para cada alumno x y para todas las materias y, x aprueba y. **Todos los alumnos x del primer semestre aprueban todas sus materias**. Verificaría esta proposición, preguntando a cada uno de los alumnos del semestre si aprobaron todas sus materias. En el momento en que alguno de ellos diera una negativa, dejamos de preguntar y la proposición entonces sería falsa.

2.-$(\forall y)\,(\forall x)\,P(x,y)$

Para todas las materias y para todos los alumnos, x aprueba y. **Todas las materias y son aprobadas por todos los alumnos**. Esta ordenación de cuantificadotres tiene exactamente el mismo significado que la anterior.

3.- $(\forall x)\,(\exists y)\,P(x,y)$

Para todos los alumnos x, existe una materia y, tal que x aprueba y. **Todos los alumnos aprueban por lo menos una materia** (no importa cual), o bien cada uno de todos los alumnos aprueban cuando menos una materia y. No tiene porqué ser la misma materia para todos.

Una manera de verificar esta afirmación, sería preguntar a cada uno de los alumnos del semestre si pasó cuando menos una materia. En el momento en que encontráramos a alguien de este conjunto que no haya pasado ninguna materia, entonces la proposición sería falsa.

4.- $(\exists x)\,(\forall y)\,P(x,y)$

Hay un elemento x, para el que todas las materias y, tal que x aprueba y. **Existe al menos un alumno x que aprueba todas las materias.**

Podría demostrar esta proposición preguntando a todos los alumnos x uno por uno si aprobó todas las materias. Tan pronto como encontremos una persona que cumpla con esta condición, dejamos de preguntarle a los demás, y la proposición sería verdadera.

5.- $(\forall y)\,(\exists x)\,P(x,y)$

Para todas las materias, existe un alumno, tal que x aprueba la materia y. Esto quiere decir que **para cada materia, por lo menos hay un alumno que la aprueba**, es decir, no reprueban todos los alumnos de todas las materias, por lo menos hay un alumno que pasa en cada una de las asignaturas. Podría verificar esto haciendo una lista de las materias del semestre y preguntar a cada alumno, si aprobó cualquiera de las materias de la lista. Una vez que terminamos de preguntar a todos los alumnos, por lo menos un nombre debe estar anotado en cada una de las materias.

6.- $(\exists y)\,(\forall x)\,P(x,y)$

Hay una materia y tal que todos los alumnos x de la carrera x aprueba y. Esto quiere decir que **todos los alumnos aprueban una materia determinada**. Para verificar esta proposición, preguntaría a cada alumno del semestre si aprobó determinada materia; en el momento en que alguien conteste que no la aprobó, se detiene la encuesta y la proposición adquiere la calidad de falsa.

7.-$(\exists x)\,(\exists y)\,P(x,y)$

Existe una persona x y existe una materia y, tal que x pasa y. Existe al menos un alumno x que al menos paso la materia y. Es decir, por lo menos un alumno pasó una materia específica. **No todos los alumnos reprobaron todas las materias. Al menos alguien aprobó una materia**.

Podría verificar la veracidad de ésta proposición, comenzando a preguntar a cada alumno si aprobó alguna materia. Tan pronto como encuentre una persona que satisfaga la condición, se detiene la encuesta ya que se verifica la veracidad de la proposición.

8.- $(\exists y)\,(\exists x)\,P(x,y)$
Esta proposición, tiene exactamente el mismo significado que la proposición anterior.

El ejemplo anterior sirvió para mostrar la importancia de la disposición de los cuantificadores dentro de una proposición. Ahora se considerará el caso de una proposición matemática.

Para desarrollar este ejemplo se asume que x y y son números reales, y que la proposición es $P(x,y) = x + y = 0$.

1.- $\exists x, \exists y P(x,y) = \exists x, y\ (x+y) = 0$
En palabras lo que la proposición trata de decir es que existe al menos un elemento (si hay más no importa, uno es suficiente) del conjunto de los reales llamado x para el que existe al menos un elemento del mismo conjunto, tal que $x + y = 0$. Esta proposición es cierta, pues si se toma por ejemplo el número 5, es posible asignarle un número (-5) tal que la proposición se satisface.

2.- $\forall x \forall y P(x,y) = \forall x, y\ (x+y) = 0$
La proposición trata de decir que para cada elemento x del conjunto de los números reales se puede asignar todos y cada uno de los números reales y tal que la suma de ambos números es cero. Evidentemente, la proposición es falsa.

3.-$\forall x \exists y P(x,y) = \forall x \exists y\ (x+y) = 0$
Esta proposición dice que para todos y cada uno de los números reales x es

posible encontrar un número y, tal que la proposición se cumpla. Es evidente que esta proposición es verdadera.

4.-$\exists y \forall x P(x, y) = \forall x \exists y \ (x + y) = 0$
Esta proposición establece que se puede encontrar un número real y, para el que todos los valores reales de x satisfagan que $(x + y) = 0$. Lo cual no es verdad.

Es posible que las siguientes ilustraciones puedan ayudar a comprender y retener en la mente el significado de los cuantificadores universal y existencial.

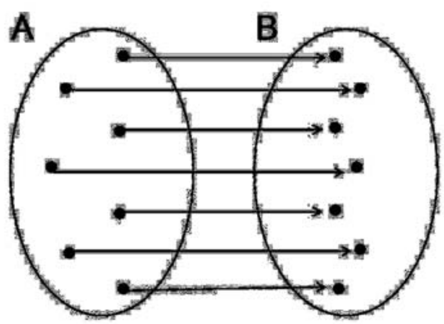

Figura 4.1: $\forall x \in A, \, \exists y \in B | P(x, y)$

En este caso, como la proposición comienza con el cuantificador universal y después el existencial, quiere decir, que a cada uno de los elementos del conjunto A, le corresponde un elemento del conjunto B.

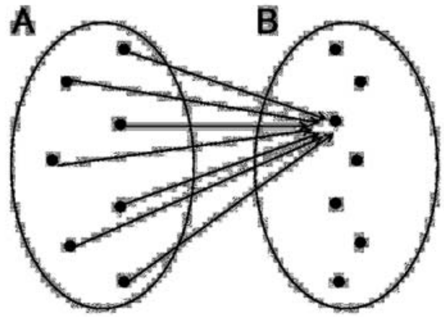

Figura 4.2: $\exists y \in B$, $\forall x \in A | P(x, y)$

En la figura claramente se puede observar que un solo valor del conjunto B, ayuda a que todos los valores del conjunto A hagan a la proposición verdadera.

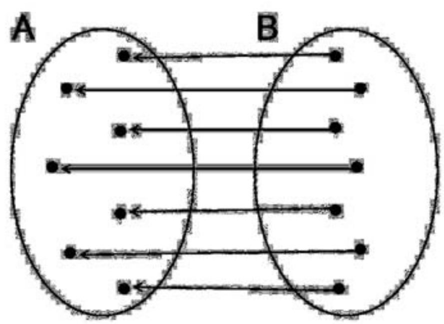

Figura 4.3: $\forall y \in B$, $\exists x \in A | P(x, y)$

En este caso podemos observar que iniciamos considerando todos los elementos del conjunto B y le hacemos corresponder a cada uno de ellos un elemento del conjunto A que hacen verdadera a la proposición.

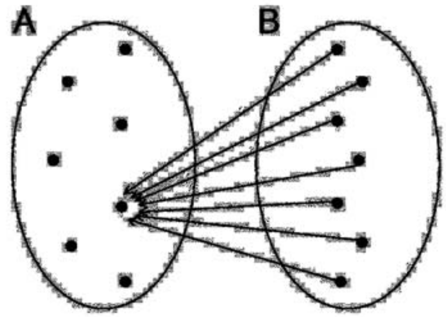

Figura 4.4: $\exists x \in A, \forall y \in B | P(x,y)$

Es evidente que al comenzar la proposición con el cuantificador existencial, habrá al menos un elemento en el conjunto A que al hacer corresponder cada uno de los elementos de B con él, verificarán la proposición.

4.5. Discusión

Los cuantificadores están presentes en expresiones que forman parte incluso de nuestro lenguaje diario. Podemos utilizarlas al hacer mención de algún objeto en particular o de alguna situación, por ejemplo cuando decimos existe un libro del tema x, o bien, podemos hacer afirmaciones como que todas las aves tienen plumas; y no es de extrañarse que el lenguaje de las matemáticas tenga su propia expresión para hacer mención de uno o más objetos.

Los cuantificadores son una parte medular dentro de algunas proposiciones matemáticas, ya que éstos hacen referencia a la cantidad de objetos matemáticos que pueden hacer que la proposición sea verdadera o falsa. Y no solo eso, también debe estar conciente al momento de estar desarrollando una demostración de una proposición que contenga cuantificadores, que el orden en que están dispuestos es fundamental.

Los teoremas que involucran el concepto de límite son proposiciónes que contienen cuantificadores. Por esta razón, en el capítulo aplicaciones, se da la demostración de algunos teoremas que involucran éste concepto, con la esperanza de que el lector pueda comprender la estructura de la proposición y el procedimiento de la demostración.

En el próximo capítulo veremos las técnicas que se tienen que usar para realizar demostraciones de proposiciones que incluyen cuantificadores.

Capítulo 5

Proposiciones con Cuantificadores

La escencia de las matemáticas es su libertad.

Georg Cantor (1845-1918)

5.1. Introducción

Anteriormente se trató el tema de los cuantificadores, parte fundamental en proposiciones matemáticas más complejas y por tal motivo más elaboradas en su demostración. Las proposiciones pueden contener uno, dos o en algunos casos hasta tres cuantificadores.

Como se vió en el capitulo pasado, existen muchas combinaciones en el orden en el que los cuantificadores pueden formar parte de una proposición matemática y cada una de estas combinaciones comunica una idea totalmente diferente a la otra.

En este capitulo ya no se considerará la definición de cada uno de los cuantificadores, ni ningún ejemplo que tenga como intención ejemplificar su funcionamiento, pues esto se consideró en el capítulo pasado. Lo que se va atratar son las demostraciones de proposiciones que pueden tener un único cuantificador y proposiciones que incluyen múltiples cuantificadores. Cada una de estas proposiciones sugiere su propia técnica de demostración, es decir, dependiendo del cuantificador que aparezca primero en la proposición, será el método de demostración que se va a considerar en primer lugar, para posteriormente tratar con el segundo cuantificador y su respectiva técnica de demostración.

5.2. Proposiciones que incluyen un cuantificador

5.2.1. Proposiciones con cuantificador universal

La función del cuantificador universal dentro de una proposición, es dejar claro que para todos los elementos de un conjunto determinado la proposición se verifica, entonces, en ocasiones es posible tomar todos y cada uno de esos elementos para los cuales se quiere demostrar que proposición es verdadera. Pero si llega a encontrarse con alguna proposición que requiera de un conjunto que sea infinito, como el siguiente caso, $\forall x \in R \quad P(x)$ sería totalmente impráctico tratar de verificar la proposición para cada elemento de ese conjunto.

Es de gran importancia tener en mente la estructura básica de las proposiciones que incluyen el cuantificador universal la cual es:

Para todo *elemento* con determinada *propiedad* sucede algo.

Ahora bien, la forma "lógica" de demostrar proposiciones como la anterior, que incluyen al cuantificador universal sería tomar todos y cada uno de los elementos de un conjunto, digamos A, que satisfacen la condición de la proposición. Es decir, tomar los elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ y verificar que la condición se cumple para todos estos elementos, estableciendo así la veracidad de la proposición. Pero gran cantidad de conjuntos importantes dentro de la matemática son infinitos, así que no es posible llevar a cabo la verificación de la proposición para cada uno de los elementos de dichos conjuntos, así que se procede de la siguiente manera:

Se selecciona un elemento cualquiera del conjunto llamado x_0 y se verifica que la proposición se cumple para este elemento. Entonces el reto es construir una demostración que permita "ver" que al sustituir el elemento x_0 por x_1 la proposición sigue siendo verdadera. Entonces no sería necesario escribir una nueva demostración para el elemento x_1 , simplemente habría que sustituirlo en la demostración, y de esta manera con cada uno de los elementos del conjunto. El objetivo es construir una demostración que sea un "modelo", para verificar que no importa cual de los elementos se introduzca en la demostración, siempre se cumplirá la condición para cada uno de ellos. Si se tuviera esta demostración modelo, no sería necesario verificar cada uno de los elementos en particular, al introducir cualquiera de ellos verificaríamos que la proposición es verdadera.

Para generar esta demostración modelo se utiliza la técnica de demostración directa.

Consideremos la siguiente

Proposición. 19. *Para todos los números reales x con $x^2 - 1 \leq 0$,*

$$-1 \leq x \leq 1$$

.

Recuerde que la estructura de una proposición que involucra al cuantificador existencial tiene la forma:
Para todo *elemento* con determinada *propiedad* sucede algo.

En este caso se puede observar que el objeto es un número real, la propiedad determinada es que al introducirlo en $x^2 - 1$ su valor sea menor o igual a cero, y una vez que se sabe que números se van a considerar debe verificar que estos números se encuentran dentro del intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, no es posible tomar cada uno de los números reales para verificar cuales son los que al introducir en la desigualdad darán valores menores o iguales a cero. Para evitar este problema se intenta construir la demostración modelo que permita saber que no importa cual valor se elija, la proposición siempre será verdadera para cada uno de ellos. Entonces considere

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \leq 0$$

Para que ésto sea cierto, entonces $(x + 1) \leq 0$ y $(x - 1) \geq 0$ ó $(x + 1) \geq 0$ y $(x - 1) \leq 0$.

Consideremos el primer caso

Si $(x+1) \leq 0$ y $(x-1) \geq 0$, entonces $x \leq -1$ y $x \geq 1$, lo cual es imposible, pero si considera el otro caso $(x+1) \geq 0$ y $(x-1) \leq 0$, entonces $x \geq -1$ y $x \leq 1$, lo cual da el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Observe que el conjunto donde la desigualdad arroja valores menores o iguales a cero es el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, con lo que se verifica que es verdad que los números reales que cumplen con la desigualdad se encuentran dentro del intervalo que sugería la proposición. Con lo que concluye la demostración.

5.2.2. Proposiciones con cuantificador existencial

El cuantificador existencial tiene la función de indicar que al menos un elemento de un conjunto determinado, cumple con una condición necesaria que hace a la proposición verdadera.

La estructura de una proposición que incluye al cuantificador existencial es:

Existe un "objeto" con una "propiedad determinada" tal que sucede algo.
Tiene la forma $\exists x \in A \quad P(x)$.

Para probar proposiciones del tipo $\exists x \in A \quad P(x)$ se necesita encontrar al menos un elemento x_0 del conjunto A que al cumplir una condición determinada haga verdadera a la proposición.

Al demostrar proposiciones que incluyen al cuantificador existencial, se presenta un caso relativamente complicado. Pues al realizar la demostración de este tipo de proposiciones se necesita crear el objeto que pertenece al conjunto y para el que se quiere demostrar que la proposición se cumple.

Pero ¿cómo se produce, crea o encuentra tal objeto necesario?, la respuesta a esta pregunta es la dificultad de la que se hablaba con anterioridad. Normalmente se construye el objeto necesitado considerando la información contenida en la misma proposición, pero en muchos caso hay que experimentar, es decir, buscarlo por ensayo y error.

Al realizar demostraciones de proposiciones de este tipo, no es necesario explicar cómo se obtuvo el elemento x_0 del conjunto A, el propósito consiste únicamente en definir ese x_0 y mostrar que al introducirlo en la proposición $P(x_0)$, ésta es verdadera. Considere la siguiente

Proposición. 20. *Existe una matriz A_{2X2} de números enteros tal que*

$$detA = 4 \text{ } y \text{ } trA = 7$$

.

Como se puede observar en este caso, el conjunto en el que vamos a buscar el elemento que satisface la proposición es el de las matrices, y no solo eso, sino el de las matrices que son cuadradas de 2 por 2.

Se elige un elemento de ese conjunto de matrices cuadradas
Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Entonces, se utiliza la información dada en la misma proposición para construir el objeto necesario.
La condición de que $detA = 4$ significa que $ad - bc = 4$, y la condición de que $trA = 7$, significa que $a + d = 7$.

Sustituyendo $d = 7 - a$ en la primera ecuación obtenemos

$a^2 - 7a + (bc + 4) = 0.$

Aplicando la formula para encontrar raíces de la ecuación cuadrática, se tiene que $b = 2$ y $c = 3$, lo que lleva a que $a = 5$ y $d = 2$ o a que $d = 5$ y $a = 2$. Como se puede ver, en el conjunto de las matrices cuadradas de dos por dos existen más de un elemento que satisface la proposición haciéndola verdadera, pero como el cuantificador existencial solicita verificar que al menos un elemento en el conjunto verifica la proposición, los demás elementos pierden interés para nuestro propósito.

Es muy importante mencionar que en una demostración de una proposición que incluye el cuantificador existencial, se tiene que seleccionar un objeto de un conjunto determinado. Es decir, se debe producir ese objeto, y verificar que satisface la proposición. El producir este objeto, no da por concluida la demostración, es necesario verificar que el objeto que encontramos la hace verdadera.

5.3. Proposiciones con múltiples cuantificadores

La forma de demostrar de proposiciones que incluyen más de un cuantificador es la siguiente:

Se comienza por poner atención al cuantificador que está más al exterior de la proposición, para ejemplificar lo dicho, se da una proposición que incluye dos cuantificadores.

Sea $\exists x, \forall y | P(x, y)$ En este caso el cuantificador con el que inicia la demostración es el existencial. Y una vez que se ha elegido un valor x es

posible rescribir la proposición de la siguiente forma $\exists x|Q(x)$ donde $Q(x) = \forall y|P(x, y)$.
Una vez que se ha encontrado un valor que hace verdadera la proposición, se continúa con el siguiente cuantificador, que en este caso es universal.

Este es el procedimiento que debe seguir con proposiciones que contengan dos o incluso hasta tres cuantificadores.

Proposición. 21. *Para todo número real x,existe un número real y tal que*

$$x^2 - y^2 + 4 = 0$$

.

Esta proposición tiene la forma $\forall x, \exists y|(x^2 - y^2 + 4 = 0)$
Primero, se tiene que tratar a cada uno de los cuantificadores que intervienen en la proposición, considerándolos desde afuera hacia adentro.

En este caso se inicia con el cuantificador universal $\forall x$, considerando $Q(x) = \big(\exists y|x^2 - y^2 + 4 = 0\big)$, entonces se trata de demostrar que $\forall x Q(x)$ la cual es una proposición con solo un cuantificador que se puede tratar como ya se dijo; es decir, se selecciona un elemento cualquiera x_0 y se muestra que $Q(x_0)$ es verdadera. Al llegar a este punto,se puede pasar a tratar con el siguiente cuantificador, y se necesita mostrar que $\exists y|(x^2 - y^2 + 4 = 0)$ es verdadera para el valor dado x_0.
Ahora bien, una vez que se ha seleccionado un valor cualquiera x_0 , nos empeñamos en descubrir que existe un número y , tal que la proposición se cumple. De esta manera se tiene que $x_0^2 - y^2 + 4 = 0$ lo que lleva a $y^2 = 4 + x_0^2$ que implica que $y = \sqrt{4 + x_0^2}$.

En ésta última expresión se puede observar que el valor de y depende únicamente del valor que se le haya dado a x_0, es decir, al tomar para x cualquier valor que se desee, es posible encontrarle a ese valor su respectiva y que satisface la ecuación, con lo que se demuestra la proposición.

Solo como una aclaración, cuando se realizan demostraciones, no es correcto intercalar simbolos como $\Rightarrow$ o $\Leftrightarrow$ dentro de la estructura de la demostración, pues éstos símbolos corresponden a expresiones de la lógica de las cuales ya se habló, lo más correcto es utilizar palabras. Por ejemplo en el caso de la proposición anterior:
Correcto: $y^2 = 4 + x_0^2$ que implica que $y = \sqrt{4 + x_0^2}$.
Incorrecto: $y^2 = 4 + x_0^2 \Rightarrow y = \sqrt{4 + x_0^2}$.

Proposición. 22. *Existe un número real* x *tal que* $(3 - x)(y^2 + 1) > 0$ *para todo numero real* y*.*

Esta proposición tiene la forma siguiente: $\exists x, \forall y | (3 - x)(y^2 + 1) > 0$
El primer cuantificador con el que se tiene que tratar en esta proposición es el de existencia, entonces, se puedes escribir la proposición como $(\exists x)R(x)$ donde $R(x) = (\forall y)(3 - x)(y^2 + 1) > 0$. Iniciemos por probar la proposición produciendo un número real x_0 para el cual $R(x)$ es verdadera. Es decir, se necesita encontrar un número particular x_0 , tal que si se selecciona cualquier número y_0 , entonces $(3 - x)(y^2 + 1) > 0$ será verdadero.
Como lo que se quiere es que el resultado de $(3 - x)(y^2 + 1)$ sea positivo, se puede observar que $(y_0^2 + 1)$ siempre será mayor que cero para cualquier valor y_0, y que $3 - x_0$ será siempre mayor que cero para valores menores que 3.
Es decir, si existe al menos un elemento en el conjunto de los reales tal que

la proposición $(3-x)(y^2+1) > 0$ se cumple para cualquier valor de y_0. Y como sí existe al menos un valor x_0 entre los números reales que satisface la condición, la proposición es verdadera.

Los siguientes cuatro ejemplos consisten en demostrar la misma proposición pero intercambiando el lugar de los cuantificadores para verificar la importancia de la posición en la que se encuentran.

Proposición. 23. *Para cada número real x, existe un número real y tal que*

$$e^x - y > 0$$

.

Esta proposición tiene la forma
$\forall x, \exists y | P(x,y) = \forall x \in R, \exists y \in R | e^x - y > 0$
Se inicia la demostración con el cuantificador que esté más al exterior de la proposición.
Como el cuantificador es el universal, se tiene que demostrar $\forall x Q(x)$ donde $Q(x) = \exists y \in R | P(x,y)$ y se necesita construir una demostración modelo que sea verdadera para cada uno de los elementos $x \in R$.
Entonces se selecciona un x cualquiera del conjunto de los reales, por ejemplo x_0 y se tiene que $e^{x_0} - y > 0$. Hasta este punto solo se ha construido el molde para todos los números reales x. Sabemos que e^x siempre será un número positivo, independientemente del valor que tome x. Es aquí donde entra en escena $Q(x) = \exists y \in R | P(x,y)$.
Se requiere demostrar que para cada valor que pueda tomar e^x, es posible encontrarle al menos un número real y, tal que su diferencia sea mayor que cero.

Se sabe que un número es mayor que otro si su diferencia es mayor que cero. Entonces, como e^x siempre será positivo para todos los valores x, basta con elegir un número real mas pequeño que e^x para que su diferencia sea positiva. Con esto se verifica que la proposición es verdadera.

Proposición. 24. *Existe un número real y tal que para todo numero real x,*

$$e^x - y > 0$$

.

Esta proposición tiene la estructura $\exists y, \forall x | P(x, y) = \exists y \in R, \forall x \in R | e^x - y > 0$.

La proposición trata de decir que existe un particular número real y, para el que todos los valores que pueda tomar x se cumple que $e^{x_0} - y > 0$. Se debe iniciar la demostración tomando en cuanta el cuantificador existencial, entonces la proposición toma la forma $\exists y Q(y)$ donde $Q(y) = \forall x \in R | P(x, y)$. Se inicia produciendo un objeto, que en este caso es un número real, digamos y_0 y se tiene que $e^x - y_0 > 0$. Se considera a y_0 como si fuera una constante dentro de una ecuación. Ahora lo que resta es considerar $Q(y) = \forall x \in R | P(x, y_0)$. Es decir, para todos los valores que pueda tomar x, $e^x - y_0 > 0$. Evidentemente esto no puede ser verdad, porque al tener una y fija, para infinidad de valores de x, e^x será menor que ese valor predeterminado de y. Por o tanto la proposición es falsa.

Proposición. 25. *Para cada número real y, existe un numero real x tal que*

$$e^x - y > 0$$

.

Evidentemente la proposición es de la forma $\forall y, \exists x P(x,y) = \forall y \in R, \exists x \in R | e^x - y > 0$

La proposición afirma que para todos los valores reales y, se puede encontrar para cada uno de ellos por lo menos un valor x, que haga a la proposición ser verdadera. Para iniciar considere $\forall y Q(x,y)$ donde $Q(x,y) = \exists x \in R | e^x - y > 0$.

Como es el cuantificador universal el primero con el que se tratará, se inicia seleccionando un elemento arbitrario y_0 y se intenta construir una demostración modelo que sea verdadera para cada valor de y, ésta es $e^x - y_0 > 0$.

Llegó el momento de considerar $Q(x, y_0)$. Entonces para cada valor de y , que son todos los números reales, se tiene que encontrar al menos un valor de x que satisfaga $e^x - y_0 > 0$.

Puede observar que independientemente del valor que pueda tomar y, es posible encontrar no solo uno sino infinitos x tal que e^x siempre sea mayor que cualquier valor que pueda tomar y, así e verifica que la proposición es verdadera.

Proposición. 26. *Existe un número real x tal que para todo número real y, $e^x - y > 0$.*

La proposición tiene la estructura

$\exists x, \forall y P(x,y) = \exists x \in R, \forall y \in R | e^x - y > 0$.

La cual trata de decir que existe un número real x, para el que todos los valores que pueda asumir y, (todos los reales) $e^x - y > 0$.

Entonces consideremos $\exists x Q(x)$, donde $Q(x) = \forall y \in R | e^x - y > 0$ y se inicia por crear el objeto, que en este caso es un número real llamado x_0.

Ya que se tiene este valor, considere que $\forall y \in R | e^{x_0} - y > 0$. Es necesario

verificar que existe aunque sea un valor de x que al variar y a través de todos los reales, su diferencia sea positiva.
Puede observar que al elegir cualquier valor para x e introducirlo en e^x y obtener un valor, como y tomará todos los valores reales, siempre habrá números que sean mayores a ese valor de e^x, cuya diferencia ya no será positiva. Por tanto la proposición es falsa.

Uno de los conceptos más importantes dentro de la matemática es el de limite de una función; la definición de este concepto involucra ambos cuantificadores; y como gran parte de las demostraciones relacionadas con los límites se realizan por medio de la definición, a continuación se da un ejemplo con el propósito que el lector comprenda el concepto. En el capítulo llamado aplicaciones se dan más ejemplos de demostraciones de teoremas que involucran límites.

Definición. 23. *El número L se dice que es el límite de la función f en x si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Considere la sección de la definición que hace referencia al cuantificador universal:
Para cada número $\epsilon > 0$.
Para este cuantificador se considera el conjunto de los números reales positivos, sin importar cual sea. El propósito es verificar que la información siguiente se cumpla para todos y cada uno en particular de los elementos del conjunto de los números reales positivos.

Existe un número $\delta > 0$.

Esta es la información de la que se habla en el párrafo anterior. Esta sección de la definición, establece que para cada uno de los elementos del conjunto de los números reales positivos que son usados por el cuantificador universal, hay un número también real y positivo que satisface una determinada condición.

Proposición. 27. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*,*
entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$
Para cualquier $\epsilon > 0$ se debe probar que existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|[f(x) + g(x)] - [L - M]| < \epsilon$
Como el límite L existe, entonces de la definición de límite se infiere que para $\frac{1}{2}\epsilon$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que
Si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$
De manera semejante para el límite M, $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon$
Ahora consideramos δ como el menor de δ_1 y δ_2.
De este modo si
$0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$ y
$0 < |x - a| < \delta$ entonces $|g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon$
En consecuencia si $0 < |x - a| < \delta$, entonces
$|[f(x) - g(x)] - [L - M]| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + (|g(x) - M)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$

El propósito de las demostraciones de proposiciones que involucran el concepto de límite es encontrar cual es el valor del δ correspondiente al valor del ϵ elegido.

5.4. Discusión

Como puede observar en este capítulo, existen proposiciones que incluyen cuantificadores y este tipo de proposiciones nos dan información acerca de un determinado conjunto de objetos.

Cuando la proposición hace mención al cuantificador universal, lo que trata de informar es que la proposición es verdadera para todos los números u objetos de determinado conjunto que satisfacen la proposición. Obviamente, al realizar demostraciones de este tipo de proposiciones es necesario verificar que en verdad éste sea el caso. No es posible darle a la proposición la calidad de verdadera si no se satisface la condición "para todos" los elementos del conjunto.

Si es el caso en que el cuantificador que aparece dentro de la proposición es el existencial, la proposición indica que es verdadera para al menos un elemento del conjunto, y por lo tanto, al realizar demostraciones de este tipo de proposiciones es necesario comprobar que efectivamente dentro del conjunto, "existe" al menos un elemento, que haga a la proposición verdadera. Se necesita primero encontrar este objeto, para posteriormente introducirlo a la proposición y verificar que la satisface.

Cuando la proposición incluye más de un cuantificador, lo único que se está haciendo es poner más restricciones al conjunto en el cual se va a buscar el elemento o elementos que la satisfacen. Es algo así como pasar por un filtro la proposición y seleccionar determinados elementos de un conjunto que la satisfacen, para después colar esos elementos a través de un nuevo cuantificador y obtener un conjunto más reducido de ellos.

Para desarrollar demostraciones de éste tipo de proposiciones con cuantificadores múltiples, se debe iniciar con el cuantificador que primero se haga presente en la proposición, y dependiendo de que cuantificador se trate aplicamos la técnica de demostración que le corresponde para posteriormente continuar con el siguiente cuantificador.

Debe tener muy presente que el orden de los cuantificadores es fundamental y que no existe la conmutatividad entre ellos. Este tipo de proposiciones son las más interesantes y por lo mismo más difíciles de demostrar, pero que obedecen siempre a las mismas reglas lógicas y de razonamiento.

Capítulo 6

Método Inducción Matemática

> Más que la lógica, es la estética el elemento dominante en la creatividad matemática.
>
> Poincaré (1854-1912)

6.1. Introducción

Las proposiciones pueden clasificarse como generales o particulares.

Unos ejemplos de proposiciones generales son las siguientes:

Todos los estudiantes de actuaría pasan cálculo.

Todos los números terminados en par son divisibles entre dos.

Ejemplos de proposiciones particulares son las siguientes:

Luis va a pasar cálculo.

124 es divisible entre dos

El proceso de obtener una proposición particular de una general se llama deducción y al proceso de obtener proposiciones generales de proposiciones particulares se llama inducción.

La inducción matemática se usa cuando se quiere demostrar que una proposición es verdadera para todos los enteros positivos, es decir, que la proposición no se cumple únicamente para algunos números enteros positivos determinados sino que se puede tener la seguridad de que no importa de que numero natural dependa, la proposición siempre será verdadera.
Para tratar de ejemplificar la importancia de este método considere el ejemplo siguiente:

Sea el polinomio x^2+x+41 que fue analizado por Leonard Euler, el famoso matemático suizo. Si en este trinomio se introduce el valor 0, se obtiene 41 que es un número primo. Si $x=1$ se obtiene como resultado 43, que es un número primo. Si esta vez es el valor $x=2$ se obtiene 47 que es también un número primo. Si se procede de igual forma con el valor $x=3$ se tiene como resultado 53, que es primo.

En la siguiente tabla se dan los valores de este polinomio para algunos números enteros positivos x
Estos resultados sugieren que éste polinomio continuará dando números primos con la introducción de valores enteros positivos. Parecería que se encontró una formula general para encontrar dichos números. De hecho, éste polinomio se comporta de esta manera, hasta que se introduce el valor $x=39$, dado que al introducir el valor $x=40$ el resultado es 1681 que ya no es un número primo.

Valor de x	Resultado	Valor de x	Resultado
0	41	11	173
1	43	12	197
2	47	13	223
3	53	14	251
4	61	14	281
5	71	15	313
6	83	16	347
7	97	17	383
8	113	18	421
9	131	19	461
10	151	20	503

La inducción matemática evita que se cometan errores de este tipo, al suponer que una proposición es verdadera para todos los enteros positivos.

A continuación se da otro ejemplo sencillo del porqué es importante contar con un método poderoso para demostrar proposiciones que deben ser verdaderas para todos los números enteros positivos

Proposición. 28. $n^2 - 3n - 1 < 0$***, para todo numero*** $n \in N$

Fácilmente se puede verificar que esta proposición es verdadera para los valores $n = 1, 2, 3$, sin embargo, no se cumple para $n = 4$.

Este ejemplo sencillo también muestra que existen proposiciones que son verdaderas para determinados números naturales y es falsa para los demás.

6.2. El principio de la inducción matemática

Definición. 24. *El principio de la inducción matemática consiste de todas aquellas proposiciones de la forma*

$$[P(1) \wedge \forall n\,(P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall n P(n)$$

donde $P(n)$ es cualquier proposición cuya variable libre n es un número natural.

Una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. La proposición es válida para $n = 1$.
2. La veracidad de la proposición para cualquier número natural $n = k$, implica su veracidad para el número natural siguiente $n = k + 1$.

En este tipo de proposiciones se puede identificar las dos componentes fundamentales: la hipótesis y la tesis.

Hipótesis de la inducción matemática:
Se supone que la proposición se cumple para cualquier número natural $n = k$, donde k es cualquier número natural.
Tesis de la inducción matemática:
Se demuestra que la proposición es verdadera para $n = k + 1$ o bien, que si la proposición es verdadera para $n = k$, entonces debe ser verdadera para $n = k + 1$.

Los pasos a seguir en el desarrollo de una demostración por inducción son los siguientes:
Si llamamos a la proposición P, se verifica que la proposición se cumple para el valor 1, es decir, $P(1)$ es verdadera. Se usa el supuesto de que la proposición se cumple para el valor n, es decir, se asume que $P(n)$ es verdadera, con el fin de comprobar que la proposición también es verdadera para $(n+1)$.

Una manera de tener una visualización de lo que hace el método de la inducción matemática, es compararlo con el efecto dominó. Si se colocan las fichas una delante de otra, a una distancia que se puedan alcanzar entre ellas, y si empuja la primera ficha y cae, ésta a su vez afectará a la siguiente haciéndola caer. Si se tuviera un conjunto infinito de fichas dispuestas de la manera que acabamos de describir, entonces, al empujar la primera se desatará una "reacción en cadena" que permitirá que todas las fichas caigan en algún momento.

Para poder comprender el método, es necesario realizar algunos ejercicios, para lo cual se iniciará con algunas proposiciones matemáticas que son sencillas de demostrar, y posteriormente incrementará el grado de dificultad para mostrar lo poderoso que es esta técnica para realizar demostraciones.

6.3. Demostración del principio de inducción matemática

La inducción matemática es otra técnica de demostración para proposiciones matemáticas que pertenecen a una clase muy especial, y es de gran importancia en determinados teoremas, es decir, la proposición matemática debe tener una determinada estructura. En esta sección se demuestra el principio de inducción matemática por medio de la reducción al absurdo que se estudiará en el siguiente capítulo.

La proposición de la inducción matemática:
Una proposición se cumple para todo número natural m si se satisfacen las condiciones siguientes:

- Condición 1. La proposición se cumple para $m = 1$
- Condición 2. La veracidad de la proposición para cualquier número natural $m = k$ implica su veracidad para el número natural siguiente $m = k + 1$.

Podemos obervar que el principio de inducción matemática es una proposición, en la cual existen las componentes fundamentales de las proposiciones matemáticas.
Hipótesis:

- a) La proposición se cumple para $m = 1$
- b) Suponemos que la proposición se cumple para $m = n$

Tesis

- Se cumple para todo número natural n

Como este principio se demuestra por medio de la reducción al absurdo, se debe negar la tésis, con lo cual se obtiene: La proposición no se cumple para todo número natural n.

Análisis de la demostración.

Se desea demostrar que si se cumplen las condiciones 1 y 2 , entonces la proposición debe ser verdadera para todo número natural n.

Si la proposición no fuera verdadera para todo número natural, habría un número, al cual llamaremos m, el menor número para el cual la proposición es falsa. Por la condición 1 se establece que $m \neq 1$. De donde $m > 1$. De manera que $m - 1$ es también un número natural. Ahora bien, supusimos que m es el menor número natural para el que la proposición es falsa, esto quiere decir, que la proposición aún es verdadera en el valor $m-1$. Entonces podemos observar que la proposición es verdadera para $m - 1$ y falsa para el valor m, lo cual es una contradicción a nuestra condición 2. Por lo tanto, la proposición debe ser verdadera para todo valor de m.

6.4. Aplicación del método de inducción matemática

Proposición. 29. *la suma de los n primeros números naturales es* $\frac{n(n+1)}{2}$

Es decir:

$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Análisis de la demostración

Como lo establece el principio de inducción matemática, el primer paso para llevar a cabo una demostración de este tipo, es verificar que la condición se cumple para $n = 1$

$P(1) = \frac{1(1+1)}{2}$

Con esto se verifica que la primera proposición, es verdadera, ya que la suma de 1 hasta 1 da como resultado 1.

Ahora suponga que se cumple para $n = k$ es decir, al sustituir el valor k en la proposición, ésta es verdadera. Entonces la suma de los números desde 1 y hasta k es $\frac{k(k+1)}{2}$

$P(k) = S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ Esta es la **hipótesis Inductiva**

Y como paso final para concluir que la proposición es verdadera para todo número natural, se demuestra que se cumple para $n = k + 1$. Esta es la Tesis, lo que se quiere demostrar. Pero, ¿Cómo se logra esto?. Lo que dice la proposición es que la suma de los números desde el 1 hasta el k es$\frac{k(k+1)}{2}$

Es decir,

$\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + k}_{S_k} = \frac{k(k+1)}{2}$

Es lógico entonces suponer que la suma de los números desde 1 hasta el $(k + 1)$ es: $\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + k}_{S_k} + (k + 1)$

Entonces, usando un poco de álgebra se llega lo siguiente:

$P(k + 1) = S_{k+1} = S_k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2}(k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Con lo que concluye la demostración.

Pero, podría surgir la pregunta siguiente ¿Y cómo se sabe que al llegar a esta última expresión, la demostración está concluida? ¿Cómo se está seguro que al terminar la demostración la proposición es verdadera? La respuesta es simple, lo que hay que hacer es verificar que si el resultado final al que se ha llegado de una manera algebraica, tiene la misma estructura que la de la hipótesis, se ha llegado al final de la demostración. Por ejemplo

$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ tiene la misma estructura que $\frac{n(n+1)}{2}$

En la primera expresión del lado izquierdo (que es el resultado) se puede observar que es el producto de dos números enteros consecutivos, divididos por dos, que es el mismo caso que la proposición de la derecha (que es la inicial).

Considere la siguiente

Proposición. 30. $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

Análisis de la demostración

Para garantizar que el "efecto dominó" que se busca ocurra, debe, como primer paso, verificar que la proposición sea verdadera para el caso en que $n = 1$. Y es evidente que la primera condición se cumple para $n = 1$, dado que $(-1)^0 = 1$

El método de inducción marca que como segundo paso para realizar una demostración, debe suponer que la proposición se cumple para algún entero $n = k$, es decir, que es verdadera la siguiente proposición:

$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

Y a partir de la veracidad de la suposición anterior, se tiene que probar que la proposición se cumple para el número entero siguiente.

Como el objetivo de la proposición es establecer que la suma de los cuadrados de los números del 1 hasta k, alternando los signos de dichos cuadrados es $(-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

Entonces, al suponer que se cumple para el número natural siguiente equivale a sumar los cuadrados de los números del 1 hasta el $k + 1$, (alternando los signos por supuesto).

$S_{k+1} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)(k + 1)^2$ o bien,

$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k + 1)^2 = \underbrace{1^2 - 2^2 + ... + (-1)k^2}_{S_k} + (-1)^k(k + 1)^2$

En efecto, desarrollando algebraicamente

$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$
$= (-1)^k\left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1) = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Se puede verificar que la expresión a la que se ha llegado tiene la misma estructura que la proposición inicial de donde se inició. Al llegar a esta expresión, es posible verificar que no importa a que número natural se haga referencia, la proposición siempre será verdadera para todos los enteros positivos. Con esto queda demostrada la veracidad de la proposición.

Proposición. 31. *El producto de tres números consecutivos impares es siempre divisible por 6*

Representemos estos tres números consecutivos de la siguiente manera:
$(2k-1),(2k+1),(2k+3)$
Probemos para k=1, entonces $1 * 3 * 5 = 15 = 6q$ lo cual implica que $q = \frac{5}{2} \notin N$. Ahora bien , si probamos con los siguientes números naturales, 2,3,4,... se observa que la condición de ser divisible por 6 no se cumple para ninguno de ellos, por esta causa se concluye que la suposición es falsa. Además, es posible demostrar de manera directa haciendo lo siguiente:

$$(2k-1)(2k+1)(2k+3) = 8k^3 + 12k^2 - 2k - 3 =$$

$$2(4k^3 + 6k^2 - k - 1) - 1$$

Este último número tiene la forma $2k-1$ que es un número impar y que por lo tanto no es divisible por 6.

Es obvio que desde el momento en que la proposición no su cumplió para el número natural uno, la proposición estaba condenada a no ser verdadera, en este caso el "efecto dominó" no se dio, ya que ni siquiera la primera ficha cayó.

Una de las demostraciones por el método de inducción matemática más elegantes e interesantes, es la del teorema del binomio, que se analiza a continuación.

Proposición. 32. *Para dos números cualesquiera x y y para todo número natural n, entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k$$

Es necesario insistir, en que debe tener presente los conceptos que son necesarios para desarrollar la demostración, por ejemplo en este caso, es indispensable conocer y manejar bien el concepto de combinación.

Verifique la primera condición que exige el método de inducción matemática. Para $n = 1$es evidente que la condición se cumple y consta de lo siguiente.

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} x^{1-k} y^k = \frac{1!}{1!0!} x^1 y^0 + \frac{1!}{0!1!} x y^1 = x + y$$

Ahora se supone que se cumple para $n = m$, es decir,

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k} y^k = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} x^m y^0 + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} x^{m-1} y^1 +$$

$$\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} x^{m-2} y^2 + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} x^0 y^m$$

Entonces se verifica que se cumple para el número natural siguiente $n = m + 1$, es decir elevamos el binomio a la potencia $n = m + 1$, lo que es equivalente a hacer

$$(x+y)^{m+1} = (x+y)^m (x+y)$$

pero sabemos que

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m-k} y^k$$

entonces se puede transformar para obtener

$$(x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m-k} y^k (x+y)$$

Y al hacer uso de un poco de álgebra tenemos que

$$\sum_{k=0}^{m} \left[\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k + \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m-k} y^{k+1} \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m-k} y^{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m+1} \left(\begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k =$$

$$\left(\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array} \right) x^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \left[\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right) \right] x^{m+1-k} y^k + \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right) y^{m+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k$$

Al igual que los casos anteriores

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left(\begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right) x^{m+1-k} y^k$$

tiene la misma estructura que

$$\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k}y^{k}$$

Con lo que se llega al final de la demostración. A partir de este punto, el análisis de la demostración ya no será tan minucioso, pues suponemos que a través de los ejemplos que ha desarrollado, la técnica ha sido comprendida.

Proposición. 33.

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^{n}$$

Primero se verifica que la proposición es cierta para $n = 1$, así que

$$\sum_{k=0}^{1}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1) = 2^{1}$$

Ahora suponga que se cumple para n, entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

Verifiquemos si se cumple para $n + 1$

$$(1+1)^{n+1} = (1+1)(1+1)^{n} = (1+1)\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(1+1) = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Pero sabemos que $\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = (1+1)^n = 2^n$, asi que tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = 2^n + 2^n = 2^n(1+1) = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Con lo que termina la demostración.

Proposición. 34. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

La igualdad se cumple para $n = 1$, dado que

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora bien, suponemos que se cumple para $n = k$.

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

Entonces

$$(1+i)^{k+1} = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right) \cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1\pi}{4} + i\sin\frac{1\pi}{4}\right) =$$

$$2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{k+1\pi}{4} + i\sin\frac{k+1\pi}{4}\right)$$

Ya que la proposición final tiene exactamente la misma estructura que la proposición inicial, se da por terminada la demostración.

Proposición. 35. *Probar que para cualquier entero positivo n.*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Verificamos que la proposición se cumple para $n = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{1}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k = a_1 + b_1$$

Supongamos ahora que se cumple para $n = m$, entonces

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k$$

ahora bien con estas dos suposiciones que son ciertas verificamos que se cumple para $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k) + (a_{m+1} + b_{m+1} = \\
\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k + a_{m+1} + b_{m+1} \\
\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} b_k + b_{m+1} \\
\sum_{k=1}^{m+1} a_k + \sum_{k=1}^{m+1} b_k
\end{aligned}$$

Con esto se concluye que no importa el valor de n que se tome, la proposición será siempre cierta para cualquier entero positivo.

El principio de Inducción matemática no se encarga únicamente de probar proposiciones matemáticas que contengan sumas, también es útil para demostrar proposiciones matemáticas en las cuales hacen presencia las desigualdades y los productos, como veremos a continuación con estos dos ejemplos.

Demostrar la siguiente proposición que involucra desigualdades

Proposición. 36. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n > 2^n$

De manera empírica es posible ver que la proposición es falsa para los valores de $n = 1, 2, 3$ y que para $n = 4$, la proposición es verdadera.
Supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$, con $k \geq 4$. Ésta es la hipótesis de Inducción
Es necesario demostrar que la desigualdad es verdadera para $n = k + 1$, es decir que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot k + 1 > 2^{k+1}$$

Partiendo de la hipótesis y aplicando las propiedades de las desigualdades se obtiene

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k > 2^k$$

Si multiplica ambos lados de la desigualdad por $k + 1$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot k + 1 > 2^k \cdot k + 1$$

Recordando que desde un principio se estableció que $k \geq 4$, es posible asumir lo siguiente:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot k + 1 > 2^k \cdot k + 1 > 2^k \cdot 2 > 2^{k+1}$$

Con lo que se llega al fin de la demostración, al establecer que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot k + 1 > 2^{k+1}$$

Proposición. 37. $\prod_{k=2}^{m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{m+1}{2m} \qquad m \geq 2$

Suponga que la proposición se cumple para $n = m$. El lector puede extrañarse de que en este caso no verificamos que la primera proposición se cumpliera, y esto se debe a que desde un principio la misma proposición solicitó considerar valores mayores o iguales a 2. Esta situación no es ningún impedimento para seguir desarrollando la demostración como se ha estado haciendo.

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \qquad m \geq 2$$

Se debe verificar la Tesis, es decir, que la proposición se cumple para $m = n + 1$

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Y desarrollando un poco de álgebra

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+19^2}\right) = \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Que no es otra cosa sino

$$\frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$$

Como puede observar, ésta última expresión tiene la misma estructura que la inicial, con lo cual se concluye que no importa que número mayor que dos introduzca en la proposición, siempre será verdadera.

6.5. Discusión

El método de demostración por inducción matemática, se utiliza para probar una determinada clase de proposiciones cuya veracidad depende de los números naturales. Se prueban este tipo de proposiciónes demostrando que la proposición es verdadera para el número 1 como una base, y se comprueba que la veracidad de la proposición se mantiene independientemente del número entero positivo que se introduzca en ella. Sin embargo, como se vio en algunos ejemplos, la misma idea puede ser aplicada a algunas proposiciones que no se cumplen para un determinado conjunto finito de números naturales. Esto se logra haciendo a un lado dichos números, entonces, se puede partir de un número base y verificar que la proposición es verdadera para ese número base y los subsecuentes.

Es de gran importancia resaltar que la demostración por inducción matemática, busca llegar a una proposición final, que tenga la misma estructura que la proposición inicial pero valuada en el número $n + 1$. Una vez que se ha llegado a esta proposición la demostración ha concluido.

Este método es de gran importancia y utilidad, y que debe ser parte del arsenal de técnicas para realizar demostraciones, pues no solo prueba proposiciones en las que intervienen las sumas, sino también, desigualdades y multiplicaciones. Ésto quiere decir que no importa que operador esté presente en la proposición, siempre se aplican la mismas condiciones y se realiza la misma secuencia de pasos lógicos.

Al llegar este momento, sabe que cuando necesite demostrar una proposición matemática que afirma ser verdadera para todos los enteros positivos, debe recurrir al método de inducción matemática para comprobarlo.

Capítulo 7

Método de Reducción al Absurdo

La matemática es una vasta tautología.

Bertrand Russell (1870-1972)

7.1. Introducción

El método de reducción al absurdo (*reductio at absurdum*) ha sido de los métodos usados por los matemáticos de todos los tiempos. El primero en usarlo fué Zenón de Elea [1] en la paradoja de Aquiles y la tortuga, la cual dice que no es posible que Aquiles alcance a la tortuga cuando se le da una ligera ventaja en una carrera.

[1] Filósofo y matemático griego que vivió en el siglo V a.C. Formuló varias paradojas intentando mostrar que el movimiento es imposible.

El matemático inglés G.H. Hardy, refiriéndose a este método expresa:

> "El método de reducción al absurdo, que tanto complacía a Euclides, es una de las armas más finas que puede emplear un matemático."

La siguiente figura puede dar una idea de lo que propone este método: Suponga que quiere llegar de un punto A de la ciudad a un punto B de la misma, pero el camino que lleva de forma directa es demasiado difícil, entonces, puede recurrir a otra ruta, una que rodee la dificultad y que permita llegar al miso punto B pero de manera indirecta. Así es el método de reducción al absurdo. Cuando resulta muy difícil llegar de la hipótesis a la tesis de manera directa, lo que se puede hacer es rodear la dificultad y probarla por un método indirecto.

Al momento de demostrar por reducción al absurdo debe tener presente que este método no da más que la certeza de que determinado objeto matemático tiene una propiedad determinada, tampoco dice cómo encontrar dicho objeto, éste debe ser hallado con alguna otra técnica.

Por ejemplo, la famosa demostración de Euclides sobre la infinidad de los números primos, aunque es realmente elegante e ingeniosa, no dice nada sobre como se obtienen dichos números, sólo establece que este conjunto tiene la característica de ser infinito.

7.2. El método de reducción al absurdo

El método de reducción al absurdo para demostrar proposiciones matemáticas de la forma $P \rightarrow Q$, consiste en negar la conclusión o tesis de la proposición, es decir, obtener $\neg Q$ manteniendo la hipótesis P como verdadera. Al suponer que este es el caso y desarrollar la demostración, la secuencia de proposiciones obtenidas de considerar P y $\neg Q$ verdaderas de manera simultánea, llevará directamente a una contradicción, es decir, a una inconsistencia dentro de la estructura del razonamiento que permitirá ver que el error se desprende de haber negado la veracidad de la conclusión, y por tanto, ésta debe ser verdadera.

Para poder establecer las bases lógicas sobre las que se apoya este método es necesario considerar que si la proposición $P \rightarrow Q$ es verdadera, entonces, al negarla sería falsa, es decir, $\neg(P \rightarrow Q)$ es una contradicción.

Para poder demostrar que $\neg(P \rightarrow Q)$ es una contradicción se hace uso de la equivalencia lógica $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ que puede observar en el cuadro 2.2 inciso 14.

En la tabla siguiente puede observar que $\neg(P \rightarrow Q)$ y $P \wedge \neg Q$ tienen los mismos valores de verdad, lo que permite establecer una equivalencia proposicional.

P	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\Leftrightarrow$	$P \wedge \neg Q$
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Figura 7.1: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

Así, el método de demostración por contradicción muestra que $P \rightarrow Q$ es verdadero asumiendo que $P \wedge \neg Q$ es verdadero, lo cual derivará en una contradicción que mostrará que $P \wedge \neg Q$ es falso. En pocas palabras, una demostración de este tipo se encarga de mostrar que $P \wedge \neg Q$ no es posible y que por lo tanto $P \rightarrow Q$.

Otra forma de considerar al método de demostración por contradicción es observando que el único caso en que una implicación resulta falsa, se da cuando la proposición inicial P es verdadera y la proposición Q es falsa, es decir, $\neg Q$ es verdadero. La cualidad de que sólo un caso en la tabla de implicación es falso permite dar el sustento lógico para el método de reducción al absurdo. Así, si se asume que P y $\neg Q$ son verdaderas, entonces, al obtener la secuencia de proposiciones derivadas de $(P \wedge \neg Q)$, se llegará a una contradicción, así que $(P \rightarrow Q)$ no puede ser falso y por lo tanto debe ser verdadero.

La técnica de demostración por contradicción se apoya en la **ley del medio excluido** la cual establece que una proposición no puede ser al mismo tiempo falsa y verdadera. Si una proposición es falsa entonces no puede ser verdadera y si es verdadera no puede ser falsa. Entonces, para demostrar que una proposición es verdadera, basta con demostrar que ésta no puede ser falsa.

Una consideración que debe tener presente al utilizar este método, es que no se sabe exactamente que contradicción es la que se hará presente al momento de desarrollar la demostración. Debe estar atento para tratar de identificarla, pues esta contradicción es la que da el argumento para probar que al suponer que Q es falsa, lleva a un error lógico.

El siguiente pequeño esquema de la estructura de la técnica de demostración puede ser muy ilustrativo.

Proposición: Si P entonces Q

Hipótesis: P. Se asume que es verdadera.

Tesis: Q. Se negará más adelante

Demostración:

Se acepta P y seniega Q de manera simultánea.

Entonces $P \wedge \neg Q$ es verdadero.

Al aplicar a $P \wedge \neg Q$ algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene K_1

Si $(P \wedge \neg Q) \rightarrow K_1$, entonces K_1 es verdadero.

Al aplicar a K_1 algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene K_2

Si $K_1 \rightarrow K_2$, entonces K_2 es verdadero.

Se continúa de esta manera hasta llegar a una proposición K_n

Al aplicar a K_n algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene J.

Si $K_n \rightarrow J$ entonces, J es verdadero. Pero resulta que J no es verdadero, es decir, existe una contradicción que surge de suponer que P es verdadero y $\neg Q$ también es verdadero. Por lo tanto el supuesto de que $\neg Q$ es falso, y por lo tanto, Q es verdadero.

7.3. Aplicación de la reducción al absurdo

Un ejemplo clásico de la aplicación de la técnica de reducción al absurdo es el de probar que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Esta demostración fue realizada en la escuela pitagórica aproximadamente en el año 500 a.C.

Proposición. 38. *El número $\sqrt{2}$ es un número irracional.*

La proposición está compuesta por:

Hipótesis P: $\sqrt{2}$. Que suponemos que es verdadera.

Tesis Q: es irracional. Lo que se quiere demostrar.

Como establece el método para desarrollar una demostración por reducción al absurdo, se niega que la tesis es verdadera, es decir, que $\sqrt{2}$ es irracional. Si niega que $\sqrt{2}$ es un número irracional, entonces, $\sqrt{2}$ debe ser racional. De esta manera se obtiene $\neg Q$: $\sqrt{2}$ es un número racional.

El suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional llevará a una contradicción, que hace ver que ésta suposición es incorrecta y por lo tanto dicho número debe ser irracional.

Si $\sqrt{2}$ es irracional, entonces, no existen dos números p y q con $q \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Se supone que tales números no tienen divisores comunes, porque si los tuvieran se podría simplificar la fracción hasta su mínima expresión.

El método de reducción al absurdo consiste en suponer que existen tales números p y q, y que además $q \neq 0$. Es decir, $\sqrt{2}$ es racional y se puede expresar como $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

De este punto se desprende toda la demostración del teorema.

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la expresión anterior se obtiene

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Si se multiplica ambos lados de la igualdad por q^2

$$2q^2 = p^2$$

La expresión $2q^2$ es un número par, así que p^2 también lo es. Lo anterior dice que p también debe ser par, porque de no serlo p^2 tampoco sería par, con lo cual no sería posible la igualdad.
Como p y q son pares, esto quiere decir que al menos tienen un factor común que es 2. Pero esta conclusión contradice lo que se asumió en un principio de que ni p ni q tenían factores comunes, con lo que se puede concluir que es falsa la premisa inicial de que $\sqrt{2}$ es racional y por lo tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

En una demostración por reducción al absurdo interesa probar que un objeto matemático tine una propiedad determinada, es decir, no se quiere llegar a una igualdad numérica o a una expresión matemática que sea equivalente a otra. Una demostración por reducción al absurdo consiste en dar argumentos de porqué dicho objeto tiene determinada propiedad. Por ejemplo, en el caso anterior de la raíz de dos, el propósito no es demostrar a que es igual, ni tampoco como obtenerla, lo que importa es probar es el hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional.

Considere otro caso sencillo en el que es útil la técnica de demostración por reducción al absurdo.

Proposición. 39. *Si a, b, c son números enteros, tal que $a > b$ entonces $ac < bc \Rightarrow c \leq 0$.*

Esta proposición puede probarse por demostración directa utilizando las propiedades de las desigualdades, pero el objetivo es mostrar que también se puede demostrar usando el método de reducción al absurdo.
Hipótesis P: $a > b$ y $ac < bc$

Tesis Q: $c \leq 0$

Si se niega Q, es decir, la propiedad de que el número c es menor o igual que cero, entonces, por la propiedad de tricotomia de los números reales c tiene que ser mayor que cero . Así

$\neg Q$: $c > 0$

Por la ley de multiplicación de desigualdades, se tiene que si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

Lo cual es una contradicción, pues se supone que la hipótesis es verdad, es decir, $ac \leq bc$ y la conclusión a la que se llega es que $ac > bc$, entonces, la suposición que se hizo de que $c > 0$ debe ser falsa, y por lo tanto, debe ser cierto que $c \leq 0$.

Proposición. 40. *El conjunto de los números primos es infinito.*

Suponga que el conjunto de los números primos es finito, en cuyo caso puede establecer que existen n números primos. Entonces se tendría el conjunto formado por $P_1, P_2, P3, \ldots, Pn$

Considere ahora el producto de ellos para obtener

$$S = P_1 \cdot P_2 \cdot P3 \cdots Pn$$

Si suma uno a cada lado de la igualdad obtiene

$$S + 1 = P_1 \cdot P_2 \cdot P3 \cdots Pn + 1$$

Que no puede ser un número primo y que por lo tanto debe contar con un divisor que sea un número primo al que se denota como P. Ahora bien, S es divisible por P, con lo que $S + 1$ no puede ser divisible por P. Con lo que se llega a una contradicción que surge de suponer que el conjunto de los números primos es finito, por lo tanto es infinito.

Proposición. 41. *Si* $|a| \leq \epsilon$ *para todo* $\epsilon > 0$*, entonces* $a = 0$

Hipótesis:$|a| \leq \epsilon$

Tesis: $a = 0$

Se niega que $a = 0$, es decir, se supone que $a \neq 0$

Teniendo en cuenta esta suposición se puede afirmar que $\frac{1}{2}|a| > 0$ Esto lo puede deducir ya que el valor absoluto de un número siempre es positivo, y dado que un número diferente de cero es positivo, si se divide por dos sigue siendo un número positivo.

Ahora bien, recordando la definición de límite, y tomando un $\epsilon = \frac{1}{2}|a|$ se puede observar que

$|a| \leq \frac{1}{2}|a|$ y si restamos $\frac{1}{2}|a|$ a cada lado de la desigualdad

$\frac{1}{2}|a| \leq 0$, lo cual es una contradicción, ya que el valor absoluto de un número nunca podrá ser negativo. Esta contradicción surge de negar la hipótesis, que es verdadera, por lo tanto $a = 0$.

Considere ahora un caso que corresponde a un tipo muy especial de relaciones llamadas *ecuaciónes diofanticas.*

Proposición. 42. *La ecuación diofantica* $x^2 - y^2 = 1$ *no tiene soluciones positivas y enteras.*

En esta proposición matemática se identifican sus componentes

Hipótesis P: $x^2 - y^2 = 1$

Tesis Q: No tienen soluciones positivas y enteras.

Lo que se debe hacer es negar que la ecuación no tiene soluciones enteras, esto es equivalente a decir que la ecuación si tiene dichas soluciones.
Negación de la tesis $\neg Q$: La ecuación si tiene soluciones enteras positivas.
Considerando esta situación y haciendo uso del álgebra se obtiene

$$x^2 - y^2 = (x + y(x - y) = 1$$

Aplicando un poco de conocimiento algebraico y astucia.
La única forma de que al multiplicar dos números (que deben ser enteros por la proposición misma), de cómo resultado el número 1 es la siguiente:
$(x + y) = 1$ y $(x - y) = 1$
o
$(x + y) = -1$ y $(x - y) = -1$
Se Obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y = 1$$

$$x - y = 1$$

Que al resolver por el método de suma y resta, eliminando el valor y, da como resultado

$$2x = 2$$

lo cual implica que $x = 1$ y que $y = 0$, lo cual contradice la suposición inicial de que x y y eran positivos.
Con lo cual se prueba que la suposición es falsa y por lo tanto no existen soluciones a la ecuación que sean enteras y positivas.

Proposición. 43. *Sea A un conjunto, entonces $\phi \subseteq A$*

Para iniciar la demostración se niega la tésis, es decir, se afirma que $\phi \nsubseteq A$. Un conjunto A es subconjunto de otro llamado B si se cumple que

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Como se asumió que $\phi \nsubseteq A$, se tiene que $x \in \phi$ y que $x \notin A$, pero esto es una contradicción a la definición de conjunto vacío que surge de negar que $\phi \subseteq A$. Por tanto, se tiene que $\phi \subseteq A$. Con lo que termina la demostración.

7.4. Discusión

Las demostraciones por reducción al absurdo son, en general, pequeñas pero realmente eficientes y que pueden ser de gran utilidad cuando algún otro método de prueba falla.

Lo fundamental de este método es ubicar de manera precisa lo que se va a negar, y una vez que se ha logrado, continuar con el desarrollo lógico de pasos que llevan de una proposición a otra, hasta llegar al punto en el cual la lógica nos hace suponer que se ha cometido un error al negar la tesis, y por tanto, ésta debe ser verdadera como se supuso desde un principio.

Desafortunadamente no existe un criterio uniforme para realizar demostraciones, se requiere de conocimiento, creatividad y mucha paciencia. Lo que da el elemento fundamental para poder comprender las demostraciones es la práctica. Solamente realizando ejercicios se obtiene la capacidad para hacerle frente a los teoremas y poderlos demostrar.

Una desventaja de este método es que no se sabe exactamente cual es la contradicción ni en que momento se hará presente. Solo se puede esperar que la inconsistencia sea suficiente para declarar como verdadera la tesis.

El método de reducción al absurdo, es uno de los métodos para realizar demostraciones matemáticas más importante, y una herramienta realmente poderosa que establece que si una proposición no puede ser falsa, entonces debe ser verdadera.

Capítulo 8

Método del Contrapositivo

> He encontrado una demostración de esta proposición, realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla
>
> Pierre de Fermat (1601-1665)

8.1. Introducción

Existe otro método para realizar demostraciones de proposiciones matemáticas llamado **contrapositivo** y es muy similar al de reducción al absurdo que se estudió en el capítulo pasado, es decir, es un caso particular de prueba por contradicción. En este método de demostración se niega la veracidad de la tesis y al hacer esto, el mismo desarrollo de la demostración llevará a una contradicción. Ésta técnica tiene una ventaja que lo hace superior al método de reducción al absurdo y lo convierte en una valiosa herramienta al momento de trabajar en las demostraciones: en éste método se puede conocer desde el comienzo cual será la contradicción.

Recuerde del capítulo pasado, que debía estar realmente atento y a la expectativa esperando que se produjera alguna contradicción. En este método no es necesario buscarla, nosotros mismos la hemos producido desde el inicio y sólo es cuestión de esperar su aparición al momento de desarrollar la demostración.

8.2. El método del contrapositivo

En el método de reducción al absurdo visto en el capitulo anterior, se iniciaba la demostración suponiendo que P y $\neg Q$ eran verdaderas, y a partir de suponer que éste era el caso se encontraba una contradicción, una inconsistencia en los razonamientos que permitían llegar a la conlcusión de que el error surgía de aceptar la veracidad de P y negar la veracidad de Q. En el método del contrapositivo se parte únicamente de negar la conclusión o tesis Q.

Esta técnica de demostración se contruye sobre la equivalencia siguiente:

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

El soporte lógico de la técnica de demostración por contrapositivo se puede comprender por medio de la tabla de la implicación, que ya se ha visto, y la siguiente tabla de verdad:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Cuadro 8.1: $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Como puede observar, los resultados de ambas tablas de verdad son exactamente iguales, es decir, existe una equivalencia lógica entre estas estructuras de razonamiento, lo que permite comprobar la veracidad de la conclusión o tésis suponiendo que si ésta no es verdadera, entonces, la lógica lleva directamente a que la hipótesis tampoco es verdadera. En lógica ésta estructura es conocida como *modus tollens* que puede observar en el cuadro 2.1 caso 3.

Para tratar de aclarar cualquier duda en cuanto a la estructura de razonamiento del método del contrapositivo, se ha colocado la tabla de verdad siguiente.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$	$((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Observe que todos los valores de la última columna son verdaderos, en ella se estructura que si P implica Q y se considera que Q es falsa, entonces como consecuencia se obtiene $\neg P$.

Esta estructura no falla bajo ninguna circunstancia, es decir, no mimporta cuales sean los valores de verdad de las proposiciones P y Q. En una proposición condicinal $P \to Q$, si se considera la negación de Q, se obtendrá siempre como conclusión la negación de P. Este hecho permite confiar en que la demostración de proposiciónes matemáticas por medio de ésta técnica es completamente válida. En el cuadro de reglas de infrerencia 2.2 caso 9, puede observar esta equivalencia.

El método del contrapositivo se puede reducir al siguiente esquema:
Si P, entonces Q
Hipótesis: P Se asume que es verdadera.
Tesis: Q
Demostración:
Se acepta P como verdadera (pero no se usa) y se niega Q
Entonces $\neg Q$ es verdadera.
Al aplicar a $\neg Q$ algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene Q_1
Entonces $\neg Q \to Q_1$
Al aplicar a Q_1 algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene Q_2
Se continúa de esta manera hasta llegar el punto en que al aplicar a Q_n algún axioma, definición, teorema o regla de inferencia se obtiene $\neg P$.
Es decir, $\neg P$ se obtiene de una secuencia de proposiciones derivadas de $\neg Q$; pero desde un principio se estableció que P era verdadero, por lo cual se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto suponer $\neg Q$ es falso, es decir, Q es verdadero.

Es importante resaltar que el método de reducción al absurdo inicia considerando P y $\neg Q$ de manera simultánea, mientras que en el método del contrapositivo, se parte de solamete de $\neg Q$.

8.3. Aplicación del método del contrapositivo

Proposición. 44. *Si n^2 es par, entonces n es un entero y n es par.*

Hipótesis P: n^2 es par
Tesis Q: n es entero y n es par
El método del contrapositivo establece que se debe negar la tesis, es decir, suponga que n NO es un número par. De esta manera si un número no es par tiene que ser impar.
$\neg Q$: n es impar.
Por definición un número impar se representa de la siguiente manera: $2k+1$, en donde k puede ser cualquier número entero.
Entonces $n = 2k + 1$ es un número impar, ahora bien, si eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad como lo establece la proposición se obtiene
$n^2 = (2k + 1)^2$
$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
Observe que el resultado $2(2k^2 + 2k) + 1$ también es un número impar, lo que contradice la suposición inicial de que n^2 es par. La hipótesis establece que n es par, pero el desarrollo de la demostración lleva a la negación de la hipótesis. Así que n^2 no puede ser par e impar al mismo tiempo. Con esta contradicción se llega a la conlcusión de que n debe ser par.

La ventaja de éste método está en que desde un principio se espera una contradicción ya conocida. Por ejemplo, en el caso anterior esperamos claramente que la contradicción se de al llegar a que n^2 fuera impar. Es decir, la demostración termina observando que $\neg P$ es verdadero.

En el caso de la demostración por reducción al absurdo de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, no se sabía en qué momento surgiría una contradicción, pero en este método, se puede conocer de antemano, como también se verá en el caso siguiente.

Proposición. 45. *Si m y b son números reales con $m \neq 0$, entonces la función $mx + b$ es inyectiva.*

Antes de iniciar la demostración, recuerde que una función inyectiva se define como una función para la que todos los valores de x y y, con $x \neq y$, implica que $f(x) \neq f(y)$.
Las partes fundamentales de la proposición son:
Hipótesis P: Si m y b son números reales con $m \neq 0$
Tesis Q : la función $mx + b$ es inyectiva.
Como ya se dijo, el método del contrapositivo se basa en la negación de la conlcusión, que en este caso sería negar que las funciones evaluadas en x y y son iguales.
Entonces $\neg Q$ quiere decir: $mx + b = my + b$. Éste es el punto de inicio.
Si se resta b a ambos lados de la ecuación anterior se tiene que

$$mx = my$$

Se puede dividir por m ya que la misma proposición establece que $m \neq 0$, y obtener
$x = y$

Pero no puede ser posible que $x \neq y$ y $x = y$ de manera simultánea. Al llegar esta contradicción se termina la demostración, y se conluye que la función $mx + b$ es inyectiva.

Este ejemplo muestra que el suponer que la conlcusión es falsa, lleva directamente a la negación de la hipótesis.

Proposición. 46. *Si $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$.*

Hipótesis P: Si $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$
Tesis Q: $p \neq q$
Debe partir de la negación de la conlcusión, entonces
$\neg P$: $p = q$
Como la negación de la tesis conduce a que $p = q$, se puede ver que
$\sqrt{pq} = \sqrt{p^2} = p = \frac{2p}{2} = \frac{p+p}{2} = \frac{p+q}{2}$
Es evidente que la negación de Q llevó directamente a la negación de P. Con lo que concluye la demostración.

Proposición. 47. *Si c es un entero impar, entonces la ecuación*

$$n^2 + n - c = 0$$

no tiene una solución entera para n.

Para este caso tenemos que:
Hipótesis P: es c es un entero impar
Tesis Q : la ecuación $n^2 + n - c = 0$ no tiene una solución entera para n.
El primer paso es negar Q, entonces al hacer esto se obtiene
$\neg Q$: la ecuación **SI** tiene una solución entera para n. Al suponer que este es el caso, se debe culminar en la negación de P.

Si la ecuación $n^2+n-c=0$ tiene una solución entera, entonces dicha solucón está dada por:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

Utilizando álgebra se llega a

$2n = -1 \pm \sqrt{1+4c}$

$2n + 1 = \pm\sqrt{1+4c}$

$(2n+1)^2 = 1 + 4c$

$4n^2 + 4n + 1 = 1 + 4c$

$2(2n^2 + 2n) = 2(2c)$

$2n^2 + 2n = 2c$

$n^2 + n = c$

En donde se observa (proposición 7) que c es un número par.

La proposición P establece que c es entero y c es impar. Y el resultado al que se llegó es que n es entero par. Lo que es suficiente para observar que se llegó a $\neg P$. Con lo que conluye la demostración.

Proposición. 48. *Sean A y B conjuntos. Si $A \subseteq B$, entonces $A \backslash B = \phi$*

Suponga que $A\backslash B \neq \phi$. Esto quiere decir que existe un $x \in A\backslash B$. Así, por definición, $x \in A \cap B^c$, lo cual quiere decir que $x \in A$ y que $x \in B^c$. Pero esto es una contradicción a la difinición de subconjunto. Asi que $A \nsubseteq B$

Con lo que concluye la demostración.

8.4. Discusión

El método del contrapositivo es una clase especial de las demostraciones por contradicción. El método de demostración por reducción al absurdo supone que la hipótesis es verdadera y que la tesis es falsa, y teniendo en cuenta estas consideraciones se desarrolla la demostración esperando encontrar alguna contradicción que haga suponer que la negación de la tesis es la responsable de que haya ocurrido la inconsistencia. El problema de éste método es que no se sabe cual va a ser la contradicción.

Pero el método de demostración por contrapositivo permite salvar este obstáculo, y establecer desde un principio cual será la contradicción que dará validez al razonamiento, y esa contradicción es llegar a la negación de la hipótesis. Una vez que al desarrollar la demostración se llega a una expresión derivada de $\neg Q$ que es igual negación de P, la demostración ha concluido.

Éste es un método más que pasa a formar parte de nuestras herramientas para poder trabajar en la demostración de las proposiciones matemáticas cuando alguna otra técnica no da resultados.

Capítulo 9

Método de Unicidad

> Es verdad que un matemático que no tenga algo de poeta nunca será un matemático perfecto.
>
> K. Weierstrass (1815-1897)

9.1. Introducción

Existen muchas proposiciones matemáticas para las cuales el método directo, el de inducción o cualquiera de los métodos de contradicción, no son la técnica correcta para demostrarlas. Por esta razón se incluye un método particular, que permite la demostración de un tipo especial de proposiciones matemáticas llamado de unicidad.

En muchas proposiciones matemáticas es de gran importancia comprobar que se tiene sólo un resultado, es decir, no existe más de un objeto matemático que da solución a algún problema. Es necesario estar seguros de que no existe otra solución. Trataremos de ejemplificar lo dicho con el caso de la raíz exacta de cualquier cuadrado perfecto. Sabemos que existen dos soluciones, una para el caso positivo y una para el caso negativo. ¿Qué sucedería si sólo se considerara un caso de los dos que existen? Se perdería la oportunidad de obtener más información de dicha raíz y la comprensión de alguna proposición quedaría incompleta. Pues bien, el método de unicidad permite verificar que no existen dos o más resultados para una proposición matemática.

Este método consiste en suponer que hay dos soluciones a la misma proposición, es decir, existen dos objetos con la propiedad deseada, los cuales verifican la proposición que se quiere demostrar, entonces, siguiendo el método se llega a que ambos objetos son el mismo y, por lo tanto, el único que satisface la proposición

9.2. El método de unicidad

El método de unicidad se utiliza cuando dentro de alguna proposición matemática existe la afirmación de que es único el objeto que satisface la hipótesis. Una señal clara y evidente de que se debe utilizar este método es la aparición de las palabras "único" o "uno y solo uno" dentro de la proposición.

A continuación se dan las dos estructuras básicas que puede tener una proposicion que manifiestan que para demostrarlas es necesario aplicar la técnica de unicidad:

- Si "hipótesis", entonces, "objeto que satisface la hipótesis" es único.

- Si "hipótesis", y "existen dos objetos que la satisfacen", entonces, "los dos objetos son el mismo"

La proposición 49 corresponde a la estructura del primer caso, mientras que la 51 corresponde al segundo caso.

Ahora bien, dentro del método de unicidad existen dos maneras de atacar el problema:

1. El método de unicidad directa y
2. El método de unicidad indirecta

En el caso de unicidad directa se supone que existen dos objetos que tienen la propiedad deseada y para los cuales ocurre aquello que se plantea en la hipótesis, entonces, utilizando estos objetos con sus respectivas propiedades y la información proporcionada en el teorema, al desarrollar la demostración, se llega a que los dos objetos con los que se está tratando son uno y son el mismo.

Para el caso de la unicidad indirecta, se supone que existen dos objetos diferentes que tienen la propiedad que interesa demostrar y para los que ocurre aquello que se planteó en la proposición, es decir, que satisfacen la hipótesis. Utilizando la información dada en la proposición y desarrollando la demostración considerando los dos objetos se llega a una contradicción, por lo cual, los objetos no pueden ser dos sino uno.

9.3. Aplicación del método de unicidad

Proposición. 49. *Si una matriz cuadrada A es invertible, entonces su inversa es única.*

Analisis de la demostración.
Como lo establece el método, suponga que existen dos objetos que satisfacen la proposición (en este caso son matrices), entonces, se tienen dos matrices inversas diferentes llamadas C y B.

Por definición, una matriz es inversa de la otra si al realizar la multiplicación de ellas se obtiene la matriz identidad. Entonces se tiene que $AB = BA = I$ y de igual manera $AC = CA = I$.
Esto quiere decir que
$B(AC) = BI = B$ y
$(BA)C = IC = C$
Por la asociatividad para la multiplicación de matrices se tiene que
$B(AC) = (BA)C$
Por tanto $B = C$, es decir, al suponer que existen dos matrices y utilizar sus propiedades, se llega a la conlcusión de que se está hablando de la misma matriz, que es lo que se quería demostrar.

Proposición. 50. *Si a, b, c, d, e y f son números reales con $ad - bc \neq 0$, entonces existen los números reales únicos x y y, tales que $ax + by = e$ y $cx + dy = f$.*

Suponga que los números x y y no son únicos y que existen otros que también son solución al sistema de ecuaciones, los cuales denotamos como x' y y', entonces, como ambos pares (x, y) y (x', y') son soluciones diferentes se tiene que

$ax + by = e$

$cx + dy = f$

y

$ax' + by' = e$

$cx' + dy' = f$

Considere el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$ax + by = e \qquad (1)$

$cx + dy = f \qquad (2)$

$ax' + by' = e \qquad (3)$

$cx' + dy' = f \qquad (4)$

Si resta (3) de (1) y (4) de (2) obtiene el siguiente resultado:

$a(x - x') + b(y - y') = 0 \qquad (5)$

$c(x - x') + d(y - y') = 0 \qquad (6)$

Si se multiplica (5) por d y (6) por b se tiene que

$ad(x - x') + bd(y - y') = 0 \qquad (7)$

$bc(x - x') + bd(y - y') = 0 \qquad (8)$

Si se resta (8) a (7) obtiene que $(ad - bc)(x - x') = 0$.

Se sabe de la proposición que $ad - bc \neq 0$, por lo que se puede concluir que $x = x'$.

Si desarrolla un proceso similar al anterior se puede demostrar también que $y = y'$.

Con lo que concluye la demostración.

Proposición. 51. *Si $lim_{x\to a} = L_1$ y $lim_{x\to a} = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.*

Se asume que $L_1 \neq L_2$ y se mostrará que esta suposición lleva a una contradicción.
Dado que $lim_{x\to a} = L_1$, sabemos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.
De igual manera, como $lim_{x\to a} = L_2$, entonces, existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L_2| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.
Ahora bien, podemos escribir $L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ y aplicar la desigualdad del triangulo para obtener
$|L_1 - L_2| = |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \leq |L_1 - f(x)\| + |f(x) - L_2|$
Podemos concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $|L_1 - L_2| < \epsilon + \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$
Si δ es el más pequeño de δ_1 y δ_2 entonces $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$
entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
$|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$
Sin embargo, si elegimos un $\epsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$, entonces por el párrafo anterior
$|L_1 - L_2| > |L_1 - L_2|$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$
Pero esto es una contradicción, así que la suposición de que $L_1 \neq L_2$ debe ser falsa, con lo que se comprueba que el límite es único.

Proposición. 52. *Si r es un número real positivo, entonces existe un número real único x tal que $x^3 = r$.*

Suponga que existen dos números con la propiedad deseada llamados x y y y que son diferentes $(x \neq y)$, entonces $x^3 = r$ y $y^3 = r$.
Como ambos son iguales a r se puede hacer
$x^3 = y^3$ y reagrupando se tiene $x^3 - y^3 = 0$

Si se factoriza la expresión anterior se obtiene

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$

Como se supone que $x \neq y$ es posible dividir ambos lados por $x - y$ obteniendo $x^2 + xy + y^2 = 0$

Ahora bien, aplicando la formula para obtener raíces de la ecuación cuadrática se tiene que

$x = \frac{-y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}$

Para que x pueda ser real como lo establece la proposición, y debe ser cero, ya que si no la raíz sería imaginaria. Y como $r = y^3 = 0$, contradice la suposición inicial de que $r > 0$. Por lo que x y y son el mismo número. Con lo que concluye la demostración.

Proposición. 53. *Sea $f : X \to Y$, entonces si f es invertible, su función inversa es única.*

Como lo establece la técnica de demostración, lo primero que debe hacer para demostrar la unicidad, es suponer que existen dos entes matemáticos que dan solución a la proposición, y que en este caso corresponde a dos funciones que son inversas de f, y llamadas g_1 y g_2 , entonces por la definición de inversa se tiene $g_1 : Y \to X$ y $g_2 : Y \to X$ son inversas de la función f.

Para demostrar esta proposición, debe probar que las dos funciones inversas de las que se está hablando son la misma, es decir, $g_1 = g_2$.

Una forma de hacer esto es demostrar que $g_1(y) = g_2(y)$ para toda y que pertenece a Y.

Se toma una y_0 cualquiera que pertenezca al conjunto Y.

Entonces, por la definición de función inversa se puede conlcuir que

$x_1 = g_1(y_0)$ y que $x_2 = g_2(y_0)$.

Para probar que las funciones inversas g_1 y g_2 son la misma, basta demostrar que $x_1 = x_2$.
Ahora bien, si

$$x_1 = g_1(y_0) \text{ implica que } y_0 = f(x_1)$$
$$x_2 = g_2(y_0) \text{ implica que } y_0 = f(x_2)$$

Como se sabe que la función es inyectiva, es decir uno a uno, se puede deducir del paso anterior que $x_1 = x_2$, lo cual quiere decir que $g_1(y_0) = g_2(y_0)$, y por lo tanto las dos funciones inversas en realidad son la misma, como se quería demostrar.

9.4. Discusión

Existen muchos teoremas en matemáticas para los cuales es necesario verificar que existe sólo un elemento que le da a la proposición la propiedad de ser verdadera. Para demostrar este tipo de proposiciones fundamentales dentro de las matemáticas se hace uso de la técnica de unicidad.

El método de unicidad permite demostrar aquellas proposiciones que incluyen la expresión "es único" o "si existen dos elementos que satisfacen la hipótesis, entonces dichos elementos son el mismo".

Capítulo 10

Aplicaciones

La finalidad del presente capítulo es mostrar al lector la demostración de algunos teoremas relacionados con sólo algunas áreas básicas del conocimiento matemático. Esperamos que al haber estudiado los métodos descritos en los capítulos precedentes, al llegar a éste punto, pueda comprender lo que tratan de decir los teoremas y pueda desarrollar de manera sencilla la demostración.

Conjuntos

Definición. 25 (Subconjuntos). *Si A y B son conjuntos, decimos que A es un subconjunto de B,($A \subseteq B$) si cada elemento de A es también elemento d B. $A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow \forall x \in Ax \in B$*

Definición. 26 (Unión). *Si A y B son conjuntos, la union A y B repesentada por $A \cup B$ es el conjunto de elementos que pertenecen por lo menos a uno de ellos. $A \cup B = x | x \in A \vee x \in B$ Así $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$*

Definición. 27 (Intersección). *Si A y B son conjuntos, la intersección de A y B representada por $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos* *que pertenecen simultaneamente a A y B.*

$A \cap B = x|x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Definición. 28 (Igualdad). *Si A y B son conjuntos, se dice que $A = B$ si y solo si poseen los mismos elementos.*

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$

Definición. 29 (Complemento). *El complemento de un conjunto A denotado A^c con respecto a un conjunto universal Ω se define como*

$A^c = x|x \in \Omega \vee x \notin A$

Definición. 30 (Disjuntos). *Los conjuntos A y B se dice que son disjuntos si $A \cap B = \phi$*

$A \cap B = \phi \Leftrightarrow \neg(\exists x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x \in A|x \in B)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \notin B$

Definición. 31 (Diferencia). *Si A y B son dos conjuntos, definimos la diferencia de A y B como $A \backslash B = x|x \in A \wedge x \notin B = A \cap B^c$*

Definición. 32 (Diferencia simétrica). *Si A y B son conjuntos, la diferencia simética de A y B se define como*

$A \Delta B = x|x \in A \cap B^c \vee x \in A^c \cap B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

Definición. 33 (Conjunto potencia). *Sea A un conjunto. El conjunto pitencia de A, denotado por $P(A)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.*

Definición. 34. *Sea I un conjunto no vacío. Para cada elemento i del* *conjunto I, hay un conjunto denotado A_i. Tal colección es llamada familia de conjuntos indizada por I. Denotamos esta familia de conjuntos por $A_{i i \in I}$*

Definición. 35. *La unión e intersección de todos los conjuntos de una familia de conjuntos se define respectivamente por:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i para\ algunosi \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i\ para\ todoi \in I\}$$

Teorema 1. *Si $A \subseteq B$, enetonces $A \cap B = A$.*

Demostración. De la defincion de igualdad de conjuntos sabemos que
$A \cap B = A$ si $A \cap B \subseteq A$ y $A \subseteq A \cap B$.
Primero demostramos que $A \subseteq A \cap B$.
Seleccionamos un $x \in A$. Como la hipótesis es que $A \subseteq B$, entonces de la definición de subconjunto, también $x \in B$. Así, dado que $x \in A$ y $x \in B$, se sigue que $x \in A \cap B$. De este modo demostramos que $A \subseteq A \cap B$.
Ahora demostramos que $A \cap B \subseteq A$
Elegimos $x \in A \cap B$. Entonces sabemos que $x \in A$ y $x \in B$. Como la intersección expresa claramaente que $x \in A$, tenemos de manera inmediata que $A \cap B \subseteq A$. $\square$

Teorema 2. *Sean A y B conjuntos, enetonces $(A \cap B)' = A' \cup B'$.*

Demostración. Tenemos que mostrar que $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ y que
$A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$

$(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$

Seleccionamos un $x \in (A \cap B)'$, entonces $x \notin A$ o $x \notin B$

Si $x \notin A$, entonces $x \in A'$ y así $x \in A' \cup B'$

Si $x \notin B$, entonces $x \in B'$ y así $x \in A' \cup B'$

En cualquiera de los casos se tiene que $x \in A' \cup B'$, así se tiene que $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$

$A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$

Seleccionamos un $x \in (A' \cup B')$, entonces $x \in A'$ o $x \in B'$

Si $x \in A'$, entonces $x \notin A$. Si $x \notin A$, entonces x no puede estar en $A \cap B$ y por lo tanto x está en $(A \cap B)'$

Si $x \in B'$, entonces $x \notin B$. Si $x \notin B$, entonces x no puede estar en $A \cap B$ y por lo tanto x está en $(A \cap B)'$

En cualquiera de los casos tenemos que $x \in (A \cap B)'$, asi que $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$

Dado que $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ y que $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$, tenemos que

$$(A \cap B)' \subseteq A' \cup B' = A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$$

□

Teorema 3.

$$A \cup (B_1 \cap B_2) \subseteq (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$$

Demostración. Seleccionamos un $x \in A \cup (B_1 \cap B_2)$, entonces $x \in A$ o $x \in (B_1 \cap B_2)$

De $x \in (B_1 \cap B_2)$ se observa que $x \in B_1$ y $x \in B_2$

Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B_1$ lo cual implica que $x \in A \cup B_1$ y también $x \in A \cup B_2$

Entonces $x \in (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$

Si $x \in (B_1 \cap B_2)$, entonces $x \in B_1$ y $x \in B_2$

por lo que tenemos $x \in A \cup B_1$ y $x \in A \cup B_2$

De donde obtenemos que $x \in (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2)$ $\square$

Teorema 4. $A - (B_1 \cup B_2) \subseteq (A - B_1) \cap (A - B_2)$

Demostración. Si $x \in A - (B_1 \cup B_2)$, entonces $x \in A$ y $x \notin (B_1 \cup B_2)$.

Como $x \notin (B_1 \cup B_2)$ se tiene que $x \notin B_1$ y $x \notin B_2$.

Si $x \in A$ y $x \notin B_1$, entonces $x \in (A - B_1)$

Si $x \in A$ y $x \notin B_2$, entonces $x \in (A - B_2)$

Como $x \in (A - B_1)$ y $x \in (A - B_2)$ implica que $x \in (A - B_1) \cap (A - B_2)$ $\square$

Teorema 5.

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

Demostración. Elegimos $x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, entonces $x \in B$ y $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ como $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ entonces $x \in A_k$ para algún $k \in I$. De aquí tenemos que $x \in B \cap A_k$, entonces por la definición tenemos que

$$x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

$\square$

Desigualdades

Axiomas de orden de los números reales

1. Para cuales quiera números reales "a y b se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:
   - $a < b$
   - $a > b$
   - $a = b$
2. si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
3. si $a < b$ y c es cuaquier número real, entonces $a + c < b + c$
4. si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

Teorema 6. *Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$*

Demostración. Si $a < b$, entonces, de acuerdo al axioma 3, si sumamos c a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$a + c < b + c$$

Ahora bien, si sumamos b a ambos lados de $c < d$ obtenemos

$$c + b < b + d$$

y por el axioma 2 tenemos que $a + c < b + c = c + b < d + b$ □

Teorema 7. *Si $a < b$ entonces $-a > -b$*

Demostración. Sumamos a ambos lados de la desigualdad la misma catidad y obtnemos $a + (-a) + (-b) < b + (-b) + (-a)$ y por las prpiedades de los números reales $-b < -a$ lo que es lo mismo que $-a > -b$ □

Teorema 8. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$*

Demostración. Si $c < 0$ entonces por el teorema anterior $-c > 0$. Ahora bien, por el axioma 4 tenemos que $a(-c) < b(-c)$, entonces $-ac < -bc$, pero usando el teorema anterior obtenemos

$$ac > bc$$

□

Teorema 9. *Si a, b y c son números enteros tal que $a < b$, entonces si $ac \geq bc$ implica que $c \leq 0$*

Demostración. Supongamos que no es verdad $c \leq 0$, entonces sería verdadero que $c > 0$. Si sabemos que $a < b$ y que $c > 0$, tendríamos que $ac < bc$, pero esto contradice el supuesto de que $ac \geq bc$, por lo tanto $c \leq 0$ □

Teorema 10. *Si a es un número real entonces a^{-1} tiene el mismo signo*

Demostración. Supongamos que $a > 0$ y que $a^{-1} < 0$. Sabemos que al multiplicar una desigualdad por un número negativo, el signo de la desigualdad cambia, entonces tendríamos que $a \cdot a^{-1} < a^{-1} \cdot 0$ lo cual nos llevaría a que $1 < 0$, lo que es un absurdo.

Ahora bien, supongamos que $a < 0$ y que $a^{-1} > 0$. Al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número positivo, el signo de ésta no cambia, tendríamos que $a \cdot a^{-1} < a^{-1} \cdot 0$, lo cual nos lleva a que $1 < 0$, que también es un absurdo, por lo tanto a y a^{-1} deben tener el mismo signo. $\square$

Teorema 11. *Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces si $a > b$ implica que $a^2 > b^2$*

Demostración. Al multiplicar ambos lados de $a > b$ por a obtenemos $a^2 > ab$
Si hacemos lo mism pero multiplicando por b obtnemos $ab > b^2$
De sta manera por el axioma de transitividad

$$a^2 > b^2$$

$\square$

Valor Absoluto

Definición. 36. *Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a se denota como $|a|$ y se define*

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Es importante tener en cuenta que el valor absoluto también se conoce como la raíz cuadrada del cuadrado de cualquier número real. De esta manera se define al valor absoluto como

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Es de gran utilidad tener en cuenta las dos siguientes propiedades

1. $|a| = |-a|$ y
2. $|a| \geq a$. De la definición de valor absoluto se obtiene directamente
3. $|a-b| = \begin{cases} a-b & a \geq b \\ b-a & b < a \end{cases}$

Teorema 12. *Para cualesquiera dos números realaes a y b se tiene que $|a|\,|b| = |ab|$*

Demostración. Esta demostración, dado que se está hablando de que a y b pueden tomar cualquier valor sea positivo o negativo, la desarrollamos por casos.

Caso 1.- $a \geq 0$ y $b \geq 0$. En este caso, como ambos números son positivos, por la misma definición de valor absoluto tenemos que $|a| = a$ y $|b| = b$, de modo que $|a|\,|b| = ab$ y como el resultado de multiplicar dos números positivos es positivo tenemos que $|a|\,|b| = |ab|$.

Caso 2.- $a \geq 0$ y $b < 0$. Sabemos que el resultado de multiplicar estos números es negativo asi que tenemos
$|ab| = |-(ab)| = |(a)(-b)|$ pro sabemos que $|a| = |-a|$, asi que podemos escribir $|(a)(-b)| = |a|\,|-b| = |a|\,|b|$

Caso 3.- $a < 0$ y $b \geq 0$. Es exactamente el mismo caso que el anterior pero intercambiando los papeles de a y b.

Caso 4.- Si $a < 0$ y $b < 0$. $|ab| = |(-a)(-b)| = |-a|\,|-b| = |a|\,|b|$ □

Otra forma de realizar esta demostración es la siguiente:
$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a|\,|b|$

Teorema 13. *Si a y b son dos números reales cualesquiera, con $b \neq 0$, se tiene que*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Demostración. Dado que sucede lo mismo que en el teorema anterior desarrollamos la demostración por casos.

Caso 1.-$a \geq 0$ y $b > 0$.En este caso como ambos números son positivos, se tiene directamente de la definición que $|a| = a$ y que $|b| = b$. De esta manera obtenemos $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Caso 2.- $a \geq 0$ y $b < 0$. Si este es el caso tenemos que

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{-b}\right| = \frac{|a|}{|-b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

.

Caso 3.- $a \leq 0$ y $b > 0$. Es exactamente el mismo procedimiento que el anterior pero invirtiendo los papeles de a y b.

Caso 4.- $a \leq 0$ y $b < 0$. Se tiene que si los don números son negativos, su resultado será positivo. Asi que

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{-b}\right| = \frac{|a|}{|-b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Con lo que concluimos la demostración. $\square$

Otra forma de realizar la demostración de este teorema es la siguiente:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2}}{b^2} = \frac{|a|}{|b|}$$

Teorema 14 (Desigualdad del triangulo).

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Demostración. Sabemos que $|a| = (\sqrt{a})^2$, asi que podemos hacer

$$|a+b|^2 = \left[\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pero dado que $|a| \geq a$, tenemos que

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\,|ab| + b^2$$

$$= |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Eliminando elcuadrado de ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$\square$

Teorema 15. *Si ay b son dos números reales cualesquiera, entonces*

$$|a-b| \leq |a| + |b|$$

Demostración.

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

□

Teorema 16.

$$|a-b| \leq |a| + |b|$$

Demostración. Si utilizamos la propiedad uno tenemos

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

□

Teorema 17.

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

Demostración.

$$|a| = |(a-b)+b|$$

Pero utilizando la desigualdad del triangulo obtenemos

$$|(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$

Si restamos $|b|$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

□

Teorema 18.

$$||a| - |b|| \leq |a + b|$$

Demostración.

$$|a| = |a + b - b| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$$

De donde obtenemos

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

Ahora veamos con b

$$|b| = |b + a - a| = |b + a + (-a)| \leq |b + a| + |-a| = |b + a| + |a|$$

y tenemos que

$$|b| - |a| \leq |b + a|$$

Asi que tenemos que

$|a| - |b| \leq |a + b|$ y $|b| - |a| \leq |b + a|$

Tomando en cuenta la propiedad 3, tenemos que alguno de $|a| - |b|$ ó $|b| - |a|$ es el valor absoluto de $|a| - |b|$, y por lo tanto tenemos que

$$||a| - |b||$$

$\square$

Combinaciones

Definición. 37. *El número de formas de elegir k objetos de entre n objetos, sin tener en cuenta el orden se denota por* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *y se define como*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Teorema 19. $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$

Demostración. De acuerdo a la definición sabemos que

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$$

□

Teorema 20. $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Demostración.

$$\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{(n+k-n)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

□

Teorema 21.

$$\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \frac{n-k}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Demostración. Iniciamos la demostración de atras hacia adelante, es decir iniciamos de la siguiente manera:

$$\frac{n-k}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n-k}{k+1}\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} =$$

$$\frac{n!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k+1)!} = \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

. □

Teorema 22.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$$

Demostración.

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} =$$

Multiplicamos la primera fracción por $\frac{k}{k}$ y la segunda por $\frac{n-k}{n-k}$ para igualar los denominadores y obtenemos:

$$\frac{k}{k}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{n-k}{n-k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} =$$

$$\frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)![k+(n-k)]}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

□

Limites

Teorema 23. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *y* $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$*, entonces* $L_1 = L_2$*.*

Demostración. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, sabemos de la definición que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (a éste delta lo llamaremos δ_1), tal que $|f(x) - L_1| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$

De igual manera tenemos que

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, existe un $\delta_2 > 0$, tal que $|f(x) - L_2| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$

Dandole una nueva forma a $L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ y aplicando la desigualdad del triagulo tenemos que

$$|L_1 - L_2| = |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

Podemos observar que para cualquier $\epsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 talque $|L_1 - L_2| < \epsilon_1 + \epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$.

Si δ es el más pequeño de δ_1 y δ_2. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Pero si elegimos para ϵ el valor $\frac{1}{2}|L_1 - L_2|$, debe haber un $\delta > 0$ tal que $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Pero esto es una contradicción que surge de considerar L_1 diferente de L_2. Por lo tanto $L_1 = L_2$. $\square$

Teorema 24. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *si y solo si* $\lim_{x\to c} [f(x) - L] = 0$

Demostración. $\Rightarrow$

Asumimos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to c}[f(x) - L] = lim_{x\to c} f(x) + lim_{x\to c}(-L) = L - L = 0$$

$\Leftarrow$

Asumimos que $\lim_{x\to c}[f(x) - L] = 0$. Hacemos $f(x) = [f(x) - L] + L$, entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c}\{[f(x) - L] + L\}$$
$$= \lim_{x\to c}[f(x) - L] + \lim_{x\to c} L = 0 + L = L$$

$\square$

Teorema 25. *Sean f, g y h funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todos los x en un intervalo abierto I, exepto posiblemente en el punto $c \in I$. Si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ entonces $\lim_{x\to c} g(x) = L$*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado que el $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, existen los números positivos δ_1 y δ_2, tal que para $x \in I$

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

y

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$

Si elegimos $\delta = min\delta_2, \delta_2$, entonces para $x \in I$ $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ y $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$
Dado que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq c$ en I, se sigue que
$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$
Como para cada $\epsilon > 0$ existe alguna $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \epsilon <$

$g(x) < L + \epsilon$

Así $\lim_{x \to c} g(x) = L$. $\square$

Teorema 26. *Si* $\lim_{x \to c} f(x) = l$ *y* $\lim_{x \to c} g(x) = m$, *entonces*

$$\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = lm$$

Demostración. Hacemos

$$|f(x)g(x) - lm| = |f(x)g(x) - f(x)m + -f(x)m - lm| \leq |f(x)| \, |g(x) - m| + |m| \, |f(x) - l|$$

$$\leq |f(x)| \, |g(x) - m| + (|m| + 1) \, |f(x) - l|$$

Sabemos que $\lim_{x \to c} f(x) = l$ por lo cual existe $\delta_1 > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta_1$$

entonces

$$|f(x) - l| < 1$$

De la desigualdad anterior tenemos que $|f(x)| < |l| + 1$

Ahora bien, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - m| < \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{|l| + 1}$$

y también existe $\delta_3 > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_3$, entonces

$$|f(x) - l| < \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{|m| + 1}$$

Sea $\delta = min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y podemos observar que si $0 < |x - c| > \delta$, entonces

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)| \, |g(x) - m| + (|m| + 1) \, |f(x) - l|$$

$$< (|l| + 1) \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{|l| + 1} + (|m| + 1) \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{|m| + 1} = \epsilon$$

$\square$

Derivadas

Teorema 27. *Si f y g son funciones diferenciables en un intervalo ζ, entonces la función $f+g$ es diferenciable en ζ y*

$$D[f+g] = D[f] + D[g]$$

Demostración. Hagamos $h(x) = f(x) + g(x)$. De acuerdo a la definición de derivada,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Sabemos de la misma definición que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ es la derivada de $f(x)$

Así que $h'(x) = f(x) + g(x)$ □

Teorema 28. *Si f y g son dos funciones diferenciables en el intervalo ζ, entonces $\frac{f}{g}$ con $g(x) \neq 0$ es diferenciable en ζ y $D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gD[f] - fD[g]}{[g]^2}$*

Demostración. Hagamos $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces por la definición de derivada

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

Desarrollando la fracción

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

Manipulamos un poco la expresión anterior sumando y restando $f(x)\cdot g(x)$ en el numerados para obtener

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x)}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\Delta x\cdot g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim_{\Delta x\to 0} g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0} f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} g(x)\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)}$$

El teorema dce que f y g son diferenciables, por lo tanto tenemos que

$$D[h(x)]=\frac{g(x)\cdot D[f(x)]-f(x)\cdot D[g(x)]}{D[g(x)]^2}$$

□

Teorema 29. *Si $f(x)=x^n$, entones su derivada es nx^{n-1}*

Demostración. Hagamos $\Delta x=h$.
Según la definición de derivada tenemos que calcular $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En este caso $f(x)=x^n$ y por tanto $f(x+h)=(x+h)^n$, de esta manera, desarrollando $f(x+h)=(x+h)^n$ de acuerdo al binomio de Newton tenemos

$$f(x+h)-f(x)=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n$$

De donde obtenemos

$$f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n$$

Dividimos ambos miembros por h y calculamos el límite cuando h tiende a cero

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=nx^{n-1}+\lim_{h\to 0}\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2+\cdots+\lim_{h\to 0}h^{n-1}$$

Con lo que obtenemos

$$D(x^n)=nx^{n-1}$$

□

Teorema 30. *Si* $f(x)=\operatorname{sen}x$*, entonces su derivada es* $\cos x$

Demostración. Si $f(x)=\operatorname{sen}x$, entonces $f(x+\Delta x)=\operatorname{sen}(x+\Delta x)$, por lo que tnemos

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\operatorname{sen}(x+\Delta x)-\operatorname{sen}x$$

Por medio de una igualdad trigonométrica $\left(\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\frac{p-q}{2}\right)$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{(x+\Delta x)+x}{2}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}$$

Si dividimos ambos lados por Δx tenemos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Si tomamos el límite cuando Δx tiende a cero obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Pero sabemos que $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$, entonces tenemos que

$$D[f(x)]=\cos\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

Por lo tanto

$$D[\operatorname{sen}x]=\cos x$$

□

Capítulo 11

Paradojas

> Quzás la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en las matemáticas.
>
> Kasner y Newmann

Desde los tiempos de los antiguos matemáticos griegos se plantearon algunas paradojas, que no son sino callejones lógicos sin salida. La mayor parte de las paradojas tienen su origen en la ley del tercio excluido, que afirma que dada una proposición P, ésta es falsa o verdadera pero no ambas de manera simultanea.

Por ejemplo, se tienen las famosas paradojas de Zenón, un filósofo de Elea y discípulo de Parménides. Tal ves la más famosa de ellas es la que habla de una competencia entre el guerrero Aquiles y una tortuga: en una carrera a campo traviesa, para que las cosas no sean demasiado disparejas, se acuerda dar a la tortuga una ventaja sobre Aquiles. Entonces, al iniciar la carrera, Aquiles tiene primero que alcanzar el punto de donde partió la tortuga, pero al llegar ese momento la tortuga ha avanzado más. Otra vez, cuando Aquiles llega a este segundo punto, la tortuga ha avanzado un poco más. Esta situación se repite infinitamente, por lo cual Aquiles nunca podría alcanzar a la tortuga.

La paradoja de la flecha, también de Zenón, establece lo siguiente: si se considera una flecha que se encuentra volando, ésta deberá ocupar un lugar en el espacio exactamente de su mismo tamaño, lo cual quiere decir que en cualquier momento, la flecha estará inmóvil, suspendida pero sin moverse, ya que cualquier objeto que ocupe un lugar del mismo tamaño no puede moverse. Como esto es verdad en cada instante, la flecha nunca está en movimiento.

En el siglo IV a.C. un cretense llamado Epiménides pronunció la siguiente frase: *todos los cretenses son mentirosos*. Si él siendo cretense afirma que los cretenses son mentirosos, ¿su frase es verdadera o falsa? Para aclarar más esta afirmación se puede considerar una derivación de la expresión como: Esta proposición es falsa, entonces, si se miente se dice la verdad, mientras que si se dice la verdad, se está mintiendo

En 1895 Georg Cantor, descubrió la paradoja que lleva su nombre. Para comprender un poco esta paradoja considere que él mismo había probado que para un conjunto cualquiera, el conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto, contenía más elementos que el conjunto original.

Por ejemplo, sea el conjunto $A = \{a, e, i\}$
Los subconjuntos que tiene el conjunto A son los siguientes:
$\phi, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}$

Entonces, surge la pregunta: ¿Qué sucede con el conjunto de todos los conjuntos? Dado que el conjunto de todos los conjuntos incluye a todos los conjuntos, cada uno de sus subconjuntos debe ser un elemento de él. Por tanto no puede haber más subconjuntos que elementos en el conjunto de todos los conjuntos.

La paradoja de Russell, fue dada a conocer en una carta al matemático Bertrand Frege en 1902. (Posteriormente hablaremos de esta carta y sus implicaciones). Esta paradoja establece lo siguiente: en una ciudad hay un barbero que afeita a todos aquellos que no se afeitan a si mismos. Entonces surge una pregunta de manera natural: ¿El barbero se afeita a si mismo?

Dado que el barbero afeita a aquellos que no se afeitan a si mismos, si él no se afeita a si mismo debería ser afeitado por el barbero. Pero si el se afeita a si mismo, entonces no se debería afeitar. Razonando un poco podemos observar que cualquiera de las respuestas a la pregunta ¿Se afeita a si mismo el barbero?, llevan a un absurdo. Si la respuesta es si, entonces la respuesta debería ser no. Pero si la respuesta es no, entonces debería ser si.

La paradoja de Kart Grelling dada en 1908, enuncia cómo adjetivos se describen a si mismos y otros no, llamándolos de manera correspondiente autológicos y heterológicos. Asi, el adjetivo corto es una palabra corta, es decir se auto describe y es auto lógico. El adjetivo roto no se auto describe, por lo tanto es heterológico. La palabra autológico, se describe a si misma y por lo tanto es autológica, pero, ¿Qué pasa con la palabra heterológico?,

De ser heterológica se denota a si misma y es autológica. De ser autológica, no se denota a si misma y es heterológica.

¿Pero por qué es importante considerar este tipo especial de contradicciones en el lenguaje? Simplemente se puede pensar que son situaciones artificiales en las que se obliga a la lógica a decir algo sin sentido. Pero dado que las matemáticas son enteramente abstractas, trascienden el mundo físico y es posible que en el terreno de las matemáticas se hagan presentes estas contradicciones. La situación viene a ser de consideración cuando se percibe que este tipo de paradojas si existen dentro de la estructura de las matemáticas.

En la segunda mitad del siglo XIX , Cantor desarrolló la teoría de conjuntos estableciendo que existían diferentes clases de infinitos, permitiendo que las estructuras algebráicas se entendieran como propiedades impuestas en conjuntos mediante una lista de axiomas. Entonces se pudo observar que toda la matemática podía ser estructurada por medio de la teoría de conjuntos y la lógica.

Pero Cantor descubrió también que dentro de su estructura de conjuntos, se hacía presente la *paradoja de Cantor* de la que ya se habló. Él había probado que para cualquier conjunto, el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto contenía más elementos que el conjunto original. ¿Qué sucede con el conjunto de todos los conjuntos?

Esta paradoja surgió en medio de un ambiente en que los matemáticos se habían propuesto iniciar programas para probar que la Matemática se encontraba libre de contradicciones, y se pretendía lograr un desarrollo riguroso y completo de ella.

Gottlob Frege fue uno de los primeros que intentó estructurar la aritmética en términos de la teoría de conjuntos y la lógica formal. Durante el desarrollo de su trabajo expreso la frase siguiente:

> *"Los matemáticos deben hacer frente a la posibilidad de encontrar una contradicción que convierta el edificio completo en ruinas. Por esta razón me he sentido obligado a volver a los fundamentos lógicos generales de la ciencia..."*

Considerando la expresión anterior, Frege se dio a la tarea de escribir su obra *Fundamentos de la Aritmética*, (un tratado en dos volúmenes que le llevaron veinticinco años), considerando que la aritmética estudia los números naturales, sobre los cuales descansa prácticamente toda la matemática; así que él pretendía establecer el concepto de número a partir de la lógica, con la intención de que el concepto de número dejara de ser abstracto y darle un soporte lógico al edificio de la Matemática.

Todo su trabajo estaba sostenido en los siguientes dos principios:

- *Principio de extensionalidad.* Dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos.
- *Principio de abstracción.* Toda propiedad define un conjunto.

Ya se había publicado su primer volumen y el segundo estaba ya casi en imprenta cuando recibió una carta del matemático inglés Bertrand Russell, en la cual elogiaba su trabajo; pero en determinado punto de la carta Russell le expone un punto en el cual no está de acuerdo con éste:

> *"Sobre muchas cuestiones encuentro en su obra discusiones, distinciones y definiciones que busco en vano en la de otros lógicos. Especialmente en lo que concierne a las funciones he llegado a conclusiones*

> *similares hasta en sus detalles. Hay tan solo un punto en el que encontré una dificultad. Usted dice que una función puede también jugar el papel de elemento indeterminado."*

Esto pone de manifiesto la existencia de la paradoja del barbero dentro de la estructura matemática desarrollada por Frege. Esto sucede cuando se definen dos clases de conjuntos: Normales y Anormales.

- *Normales*. Conjuntos que no se contienen a si mismos. El conjunto de los alumnos no es un alumno.

- *Anormales*. Conjuntos que son elemento de si mismos. El conjunto de los conjuntos.

El conjunto de los conjuntos normales es el personaje principal, el barbero. Sea A el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a si mismos, es decir el conjunto de los conjuntos normales. Si suponemos que A pertenece a A, entonces es normal y no pertenece a A. Si en lugar de eso suponemos que A no pertenece a A, entonces es anormal y no pertenece a A.

A lo que Frege le responde:

> *"Su descubrimiento de la contradicción me produjo la mayor sorpresa y casi diría la mayor consternación: conmueve efectivamente la base sobre la que esperaba construir la Aritmética. Parece pues que la transformación que yo creía posible*[...] *no siempre está permitida, que mi regla número* 5 *es falsa y que mi explicación del párrafo* 31 *no basta para asegurar que mi combinación de signos tiene sentido en todos los casos..."*

La cuestión es en realidad alarmante como el propio Frege expresa:

> *"No sólo los fundamentos de mi Aritmética, sino los únicos fundamentos de la aritmética parecen desvanecerse"*

La paradoja de Russell convertía en contradictoria las bases mismas de toda la obra de Frege.

De esta manera, Frege escribe una nota al pie de la última página de su segundo volumen:

> *"Difícilmente puede encontrarse un científico con algo más indeseable que notar que ceden los fundamentos de una obra que acaba de terminar. En esta situación me encuentro al recibir una carta de Mr. Bertrand Russell cuando el trabajo estaba casi en imprenta."*

Mucho tiempo después Russell, hablando de Frege expresaría lo siguiente:

> *"Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado por hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosos."*

La causa de muchas de estas paradojas según Russell y Whitehead, radica en la definición de un objeto en términos de una clase que contiene como elemento al objeto que se está definiendo. Este tipo de definiciones son llamadas impredicativas.

La presencia de las paradojas dentro de la estructura lógica y matemática propició que los matemáticos se empeñaran en la búsqueda de un fundamento sólido y sin la presencia de estas desagradables contradicciones.

Como se puede imaginar, el programa de Frege tuvo impacto en Russell quien junto con otro matemático ingles llamado Alfred North Whitehead, trataron de eliminar las paradojas de la estructura matemática, y concibieron la teoría de tipos, desarrollada en un tratado llamado *Principia Matemática*, en el que se pretendía encuadrar a la Aritmética dentro del programa de Frege, y tratando de dejar sin paradojas a la lógica, la teoría de conjuntos y la teoría de números.

Uno de aquellos que iniciaron su programa para probar que las matemáticas estaban libres de contradicciones fue David Hilbert, quien en el año 1900 pronunció un famoso discurso en una conferencia internacional de matemáticos. Propuso los logros matemáticos que se esperarían para el siglo XX, estableciendo 23 problemas que deberían ser resueltos. El problema numero uno estaba dividido en dos partes: la primera de ellas era determinar la verdad o falsedad de la potencia del continuo, y la segunda, la de encontrar una buena ordenación del conjunto de los números reales.

El problema número dos consistía en probar que la matemática es consistente.

Poco tiempo después del discurso de Hilbert, Russell expuso su paradoja, agravando mas las cosas.

Muchos matemáticos optaron por no prestar atención a las cuestiones surgidas de las paradojas en los conjuntos, y se dispusieron a trabajar con ellos siguiendo la misma línea que Cantor.

A ésta forma de trabajar con los conjuntos se le conoció como la teoría de conjuntos ingenua, y le llamaban de esta manera porque a pesar de contener paradojas permitía obtener resultados útiles y aplicables.

A continuación se da una breve demostración de que la teoría ingenua de conjuntos, a pesar de ser de gran utilidad, no era del todo confiable por la aparición de paradojas.

- *Teorema. La teoría ingenua de conjuntos es inconsistente.*

Demostración. Sea $A = \{B | B \notin B\}$. La pregunta que surge de manera casi natural es ¿A es miembro de si mismo?. De acuerdo a la definición anterior, si A pertenece a A, entonces $A \notin A$. Pero además, si $A \notin A$, entonces $A \notin A$. Asi se tiene de manera simultanea que $A \in A$ y que $A \notin A$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ésta es precisamente la aplicación de la paradoja de Russel al mundo de las matemáticas.

Otro grupo de matemáticos no se sintieron conformes con esta manera de trabajar con los conjuntos, y se dieron a la tarea de buscar una nueva teoría de conjuntos que fuera lo suficientemente sólida para el uso matemático y que eliminara de una vez por todas la aparición de las paradojas.

En 1908 Ernst Zermelo desarrolló su propio sistema axiomático, que elimina las paradojas dentro de la estructura de los conjuntos y que permite trabajar con ellos no perdiendo ninguna idea matemática. También el matemático Morris Kline expuso su propio sistema axiomático para la teoría de conjuntos en un libro llamado: *Mathmatics: The Loss of Certainty.*

De esta manera, se lograron eliminar de la teoría de conjuntos las paradojas, entre ellas la de Cantor. Con esto no se quiere decir que ya no existan pardojas dentro de la teoría de conjuntos sino que hasta el presente no se han dado a conocer en esta nueva axiomática, aunque pudiera ser que nuevas paradojas hicieran acto de presencia en este nuevo sistema.

En 1920, el mismo Hilbert se decidió a probar la consistencia de las matemáticas en vista del trabajo insatisfactorio de otros matemáticos por lograrlo. Su programa es conocido como formalismo.

Esta corriente de pensamiento matemático establece que las matemáticas parten de una serie de objetos abstractos cuya naturaleza específica no importa, sino únicamente las relaciones que se pueden establecer entre ellos, y que deben ser expresadas como axiomas. Además, la lógica debe ser la que permita un claro método de razonamiento. Así Hilbert se propuso demostrar que la estructura de las matemáticas poseía las cualidades fundamentales: Coherencia y Completitud. La coherencia puede ser traducida como libre de contradicciones y la completitud como que toda proposición válida dentro de la estructura matemática puede ser demostrada en un número finito de pasos.

Hilbert pretendía que los métodos matemáticos fueran la base para demostrar la solidez de todas las Matemáticas.

Pero en 1931, Kurt Gödel, un lógico austriaco demostró dos teoremas que establecen que cualquier sistema que pretenda dar fundamento a la Aritmética sin dar lugar a paradojas, contiene proposiciones cuya verdad o falsedad no puede ser probada, y con esto, pone de manifiesto que el programa de Hilbert no es posible. Esto se dio a conocer en un trabajo llamado *"Sobre proposiciones formalmente no decidibles en Principa Matemática y sistemas relacionados".*

El primero de estos dos teoremas de Gödel, llamado teorema de incompletitud, establece que ninguna teoría matemática que incluya la Aritmética puede ser completa y el segundo, que la consistencia de la Aritmética no puede demostrarse con los razonamientos de la misma Aritmética.

Gödel demostró que cualquier sistema matemático construido sobre un conjunto finito de axiomas y reglas de inferencia, debe contener algunas proposiciones que no son demostrables ni indemostrables con los reglas establecidas en el mismo sistema.

Además, realizó una traducción de la paradoja de Epimenides al mundo matemático. Ésta contradice la dicotomía de las proposiciones falsas o verdaderas establecidas por la ley del tercio excluido. Gödel no estableció la paradoja en términos de "esta proposición es falsa" sino "esta proposición no es demostrable".

Estas proposiciones son llamadas indecidibles ya que aunque sean falsas o verdaderas, las reglas del mismo sistema son insuficientes para probarlo. Un ejemplo de esto es la conjetura de Goldbach, que en la actualidad no ha sido ni demostrada ni desechada, aunque al parecer es verdadera.

Para que un conjunto de axiomas esté bien construido es necesario que cuente con tres requisitos fundamentales:

1. Independencia. Establece que ninguno de los axiomas puede derivarse de los demás.
2. Consistencia. Sencillamente expresa que no es posible encontrar dentro de la misma teoría la demostración de un teorema y a la vez un resultado que lo contradiga.
3. Completitud. Es la propiedad de determinar dentro del sistema si una proposición es verdadera o falsa.

Precisamente, la aplicación de estas condiciones, fue la que llevó a Gödel a sus famosos teoremas, los cuales ponen de manifiesto los límites de los sistemas formales axiomáticos, ya que establecen que dentro del mismo sistema existen proposiciones que son indecidibles, es decir proposiciones que no puede decirse si son verdaderas o falsas.

En la actualidad, los matemáticos están conscientes de que dentro de la estructura matemática existen proposiciones que son verdaderas en los sistemas axiomáticos pero que no pueden ser demostradas, sin embargo, hasta la fecha no se conoce alguna proposicion que se sepa es indemostrable.

Epílogo

La gran actividad matemática que exhibe el mundo actual, permite comprobar que es falsa aquella idea que se tenía en el pasado, de que el avance en el conocimiento matemático estaba llegando a su fin.

En visperas del siglo XIX, algunos de los mas destacados matemáticos creían que el campo de investigación de las matemáticas estaba agotado. Después de los trabajos de Euler, Lagrange y D´Alambert que habían conducido a los teoremas más importantes, los matemáticos del siglo venidero tendrían que conformarse con buscar solución a problemas menores [4].

Pero, es claro que en la actualidad la Matemática sigue estando completamente viva y en un franco desarrollo de nuevas teorías. Los conocimientos y resultados matemáticos están encontrando un lugar en las diferentes ciencias, que van desde la Física, que es una ciencia que se apoya en gran manera en el desarrollo matemático, hasta la Sociología. Como expresa Fausto Ongay [1]:

> ...“ es un hecho que áreas como la biología, la economía, la sociología e incluso la historia, han visto aumentar en forma notable el número de ecuaciones que aparecen en sus revistas y publicaciones...”

Dado el incremento actual que presentan las matemáticas, se debe tener en cuenta que se requiere de la verificación de los nuevos conocimientos, además de que las conjeturas que en la actualidad no han sido probadas necesitan de una demostración.

Es evidente que la actividad de realizar demostraciones no puede estar basada solamente en algunas pocas técnicas, para ratar de ejemplificar esto considere los siguientes dos ejemplos:

El *teorema de Poinccaré* fué una de las hipótesis más importantes de la topología. [1]. Este teorema afirma que la esfera tridimensional, es la única variedad compacta tridimensional en la que todo lazo o circulo cerrado se puede transformar en un punto. Esta prpoposición no pudo ser demostrada durante un siglo, hasta que el matemático ruso Grigori Pereleman anunació haberlo demostrado en 2002. Su trabajo fué reconocido en agosto del 2006, en el XXV Congreso Internacional de Matemáticos. Este teorema no había sido demostrado por falta de elementos y de una correcta técnica de demostración.

Otro caso que es de especial consideración es el *teorema de los cuatro colores*, propuesto en 1852 por Frederik Guthrie, un estudante de De Morgan y que no pudo ser resuelto sino hasta 1976. La demostración de la hasta entonces conjetura, requirió de 1200 horas de trabajo por parte de una computadora de alta velocidad.

[1] Henri Poincaré, fué el más grande matemático frances del la segunda mitad del siglo XIX, que propuso el teorema que lleva su nombre

En 1993 se realizó otra demostración que requería de igual manera el uso de la computadora. En un principio la demostración fué polémica debido a la imperiosa necesidad de utilizar un ordenador.

Las consideraciones anteriores obligan a detenerse un momento, reflexionar y darse cuenta de que está llegando el momento de considerar el cambio de la percepción del concepto tradicional de demostración matemática.

Se comenta que Hilbert alguna vez dijo que si él durmiera cien años, al despertar, su primera pregunta sería: ¿Ya demostraron la hipótesis de Rieman? Aunque han pasado casi cien años desde que la proposición fue hecha, sigue siendo un problema abierto que está en espera de una demostración que la haga verdadera o de un contraejemplo para considerarla falsa.

Es importante hacer conciencia que es mucho el trabajo que falta desarrollar en el terreno de las matemáticas, y por lo tanto, en el campo del razonamiento lógico para llevar a cabo las demostraciones correspondientes.

En la actualidad, el uso de la computadora está permitiendo dar solución a problemas matemáticos planteados desde hace tiempo y el uso de esta nueva herramienta en el campo de las matemáticas necesita forzosamente de un pensamiento estructurado para desarrollar programas que permitan dar la demostracion a los nuevos teoremas.

Siempre será un requisito indispensable del ser humano, desarrollar un pensamiento estructurado, racional y lógico para poder dar una demostración a los conocimientos matemáticos pasados, presentes y futuros.

Para concluir este trabajo de la misma manera en que comenzó, es decir, definiendo qué es la matemática, le invitamos a considerar el siguiente pensamiento expresado por el asesor de esta tesina:

> "Que la pasión da arte y la razón método. Como producto de la unión entre ellas nace la matemática, como una ninfa que al contemplarla deja claro que lo que es se impone sobre lo que se cree. Pues es la más grande obra inconclusa con actos de pasión, dirigida por el ser humano en un mundo abstracto inmerso en complicadas relaciones con bellas y complejas estructuras."

Act. Harvey Spencer Sánchez R.

Bibliografía

[1] Ongay Fausto. *Máthema: El arte del conocimiento*. Fondo de cultura económica, 2000.

[2] Amnster Pablo. *La matemática como una de las bellas artes*. Siglo XXI 2004.

[3] E.T. Bell. *Mathematics Queen and Servant of Science*. Colección Spectrum. Mathematical Association of America, 1979.

[4] Dirk J. Struik. *Historia concisa de las matemáticas*. Instituto Politécnico Nacional. 1998.

[5] Luis Vega. *La encrucijada de la demostración*. Separata Agora. Universidad de Santiago de Compostela. España. 1993

[6] N. Balacheff. *Processus de preuve et situations de validation*. Educational studies in mathematics. 1987.

[7] Ethan D. Block. *Proofs and fundamentals*. An First Course in Mathematics Abstract. Birkhaüser.

[8] Peter J. Eccles. *An Introduction to mathematical reasoning. Numbers, Sets and functions*. Cambridge University Press, 2001

[9] Randall B. Maddox. *Mathematical Thinking and writing. A transition to Abstract Mathematics.* Harcourt Academic Press, 2002

[10] Robert S Wolf. *Proof, logic and conjeture. The mathematician´s toolbox.* W.H. Freeman and Company, 1998.

[11] Daniel J. Vlleman. How to prove it. A structured approach. Cambridge University Press, 1998

[12] Daniel Solow. *Introducción al razonamiento matemático.* Limusa- Noriega Editores, 2006.

[13] José Antonio Arnaz. *Iniciación a la lógica simbólica.* Trillas, 1997

[14] I. S. Sominskii. *El método de la inducción matemática.* Limusa, 1976

[15] Repetto Celina. *Manual de análisis matemático.* Edicionesones Macchi, 1989.

[16] del Valle Aroca Silva. *La demostración: Un aspecto esencial en la demostración matemática.* Congreso Regional de Ciencia y Tecnología. 2003

[17] Zubieta Gonzalo. *Taller de lógica matemática. Análisis lógico.* Mc. Graw Hill.

[18] Julio Ernesto Solís Durán, Yolanda Torres Falcón. *Lógica matemática.* Universidad Autónoma Metropolitana. Primera edición 1995.

[19] Bryan H. Brunch. *Matemática Insólita. Paradojas y paralogismos.* Reverté. 1997.

[20] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle.* CONACIT 1982.