



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIÓN DE UN CIRCUITO
CUÁNTICO MEDIANTE UNA
COMPUTADORA CLÁSICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA: JULIO
ALBERTO LÓPEZ SALDIVAR

DIRECTOR DE TESIS: DR.
JORGE RAMÓN SOTO MERCADO



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
López
Saldivar
Julio Alberto
2. Datos del tutor
Dr.
Jorge Ramón
Soto
Mercado
3. Datos del sinodal 1
Dra.
Enriqueta
Hernández
Saldaña
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Juan Carlos
López
Vieyra
5. Datos del sinodal 3
Dra.
Vicenta
Sánchez
Morales
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Ramón
López
Peña
7. Datos del trabajo escrito
Simulación de un circuito cuántico mediante una computadora clásica
30 p
2008

Dedicatoria

A mi familia y a Esmeralda por todo su apoyo.

Agradecimientos

Quisiera agradecer al Dr. Jorge Ramón Soto por su apoyo y sus consejos.

índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Introducción	1
Capítulo 1. Aspectos Teóricos	2
1.1. . Computación cuántica	2
1.1.1. . Quantum bits (qubits).....	3
1.1.2. . Compuertas lógicas	4
1.2. . Transformación de Hubbard-Stratonovich.....	7
Capítulo 2. Simulación estocástica de la computadora cuántica. . .	10
2.1. . Ejemplo: Transformada Rápida de Fourier	14
Capítulo 3. Aplicación: Compuertas CNOT, traductora y tratamiento de estados enredados	22
3.1. . Resultados	25
Conclusiones	29
Apéndice: Algoritmos computacionales	31
Bibliografía	33

Introducción

La computación cuántica es una teoría que está actualmente en desarrollo. Aunque se han propuesto algoritmos (como el de Shor [1] y el de Groover [2]) que demuestran su poder para cierto tipo de cálculos, no se ha encontrado aún el sistema físico idóneo que sirva como componente básico de una computadora cuántica.

En esta tesis se lleva a cabo una simulación, mediante una computadora clásica, del funcionamiento de algunos circuitos cuánticos. En el capítulo 1 se dan algunas definiciones, como las de qubit, compuerta lógica, etc., relacionándolos con eigenestados, operadores unitarios, etc., los cuales son conceptos básicos que se manejan en un curso introductorio de Mecánica Cuántica. En la segunda sección de este mismo capítulo, se define la transformación de Hubbard-Stratonovich, la cual nos permitirá traducir un problema de cómputo cuántico a un lenguaje binario programable en una computadora clásica. Ésto se logra mediante la descomposición de los circuitos o compuertas lógicas de N qubits a N compuertas de un solo qubit, incorporando un conjunto de campos auxiliares fluctuantes y convirtiendo a la computadora en "no determinista", lo cual para nosotros es reflejo de su naturaleza cuántica.

La simulación de la computadora cuántica como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas en términos de los campos auxiliares y su solución como proceso estocástico son abordados en el capítulo 2. También se ejemplifica en forma sencilla la simulación con una transformada de Fourier rápida.

En el capítulo 3 se presenta una aplicación al problema de las compuertas CNOT que enredan estados. Como ejemplo de este tipo de sistemas están los de dos partículas con espín que se representan experimentalmente mediante Resonancia Magnética Nuclear (NMR por sus siglas en inglés). Finalmente se presentan las conclusiones generales de la tesis.

Capítulo 1

Aspectos Teóricos.

1.1. Computación cuántica

La computación cuántica se puede definir en un contexto donde la esencia de la información pasa de ser de naturaleza clásica a cuántica [3]. En la computación clásica se utiliza un sistema binario como base para determinar el estado de las cantidades mínimas de información o bits (binary digits). Los sistemas cuánticos podemos encontrar aquéllos sistemas cuyos estados propios o eigenestados son análogos a los del sistema binario; este tipo de sistemas poseen sólo dos eigenestados, a los cuales llamaremos $|0\rangle$ y $|1\rangle$ dentro de esta analogía. Sin embargo cualquier combinación lineal de ambos ($\lambda|0\rangle + \mu|1\rangle$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) puede ser un eigenestado válido también. Este hecho, aunado a que los eigenestados son vectores ortonormales que forman una base en el espacio de Hilbert del sistema en estudio, constituye una de las principales diferencias entre la computación cuántica y la clásica. Otra de las diferencias es que la información del estado del sistema en todo instante de tiempo es de carácter probabilístico. Al analizar el sistema obtendremos que se encuentra en el estado $|0\rangle$ con una probabilidad $|\lambda|^2$ o en el estado $|1\rangle$ con una probabilidad $|\mu|^2$, con $|\mu|^2 + |\lambda|^2 = 1$. Ésto implica que no podemos hablar de valores deterministas de salida como los que resultan de la computación clásica.

Uno de los primeros científicos en sugerir un sistema cuántico como componente básico para ensamblar una computadora fue Richard Feynman [4]. Ésto lo planteó como una respuesta a la pregunta: “¿Una computadora clásica puede simular probabilísticamente la física cuántica?”, el mismo Feynman establece que “es imposible representar los resultados de la mecánica cuántica con un aparato clásico universal” la razón con la cual justifica este argumento es que “la diferencia entre un mundo probabilístico clásico y las ecuaciones

del mundo cuántico es que de alguna forma u otra parece como si las probabilidades pudieran ser negativas y no sabemos como simularlas”. Para resolver este problema lo más lógico es tratar de construir una computadora cuyos componentes sean sistemas de naturaleza cuántica.

1.1.1. Quantum bits (qubits)

Un sistema que tenga dos estados cuánticos linealmente independientes (como un sistema con espín total $1/2$) es candidato para la computación cuántica, puesto que las operaciones computacionales pueden ser reducidas a operaciones booleanas de bits (información que sólo tiene los valores binarios 0 o 1). Los sistemas cuánticos de este tipo se les llama qubits (quantum binary digits) y sus dos diferentes estados se denotan como $|0\rangle$ y $|1\rangle$, $|+\rangle$ y $|-\rangle$ (espín hacia arriba y espín hacia abajo respectivamente). Este conjunto de estados puede representarse como una base canónica [5], es decir,

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Muchos sistemas han sido propuestos con el fin de ensamblar una computadora cuántica y muchos de estos sistemas han presentado un comportamiento que podría facilitar la implementación de sistemas de lectura y escritura de qubits. Dentro de estos sistemas podemos mencionar los siguientes:

1. En los últimos años se ha encontrado que algunos sistemas macroscópicos pueden tener un comportamiento cuántico, como p. e. los superconductores [6, 7]. Uno de los grandes retos de la mecánica cuántica es que a nivel macroscópico no se había podido demostrar la superposición coherente de dos diferentes estados cuánticos. Se ha mostrado por primera vez en [6] que un par de Cooper en un superconductor presenta superposición de dos estados cuánticos de carga. Puesto que este sistema sólo tiene dos estados, es un candidato propicio para la computación cuántica. Por otra parte, Plantenberg et al [7] ha construido compuertas lógicas como la compuerta CNOT en un sistema superconductor lo cual hace más factible la utilización de estos elementos como base de una computadora.

2. Las imperfecciones de un cristal de diamante (estos centros de color le dan un tono rosa al diamante) conocidas como vacancias de nitrógeno, pueden ser manipuladas apropiadamente para generar qubits [8, 9]. Estas vacancias de nitrógeno (VN) tienen dos estados de carga: Neutra (VN^0) y con carga negativa (VN^-). Esta última tiene un electrón extra que es probablemente donado por otro defecto del nitrógeno. Existen seis átomos que son los vecinos más cercanos, que no forman un enlace con el defecto, de esta vacancia, estos átomos tienen un estado base con espín total $S = 1$ donde el número cuántico magnético $m_s = +1, 0, -1$. Un estado de espín en el centro VN^- puede ser preservado por más de 50 microsegundos a temperatura ambiente. Este es un logro importante, puesto que algunos estados de espín no pueden mantenerse por tanto tiempo. Sin esta cualidad no sería posible ejecutar una operación que “lea” o “escriba” sobre los estados de espín de este sistema. Son necesarios fotones en la frecuencia de las microondas para manipular los estado de espín de la vacancia.
3. Muchos otros sistemas que tienen dos niveles como fotones [10], átomos [11] y iones [12, 13, 14], han sido usados para almacenar información cuántica en forma de qubits, lo cual ha abierto la puerta para que una computadora cuántica de muchos qubits pueda realizarse finalmente con sistemas macroscópicos como los mencionados anteriormente.

1.1.2. Compuertas lógicas.

Cada operación sobre nuestros qubits se puede representar mediante operadores unitarios [15] que llamaremos compuertas lógicas. A las compuertas que pueden operar en estados que sean el producto directo de muchos qubits: $|a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \otimes \cdots |a_N\rangle$ se les llamará compuertas de N qubits. El hecho de que los operadores sean unitarios implica que la operación es reversible dado que la operación inversa siempre existe; es decir, si nosotros operamos a nuestro sistema de qubits con el operador U al resultado que obtengamos tendremos que aplicar U^{-1} para obtener el valor inicial de la información. Es decir, $U^{-1}U |\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Si tenemos un sistema de N qubits necesitamos un operador en forma matricial que tenga $2^N \times 2^N$ elementos como compuerta para poder operar sobre el conjunto de qubits.

Se ha demostrado [15] que cualquier compuerta que actúa sobre un sistema de N qubits puede ser descrita en términos de dos operaciones básicas:

una llamada la operación de rotación y la otra una operación de dos espines llamada la compuerta controlada y negada (Controlled-NOT o también conocida como CNOT), por lo cual estas compuertas se denominan universales. Sin embargo, ésta no es la única posibilidad de obtener todo tipo de compuertas a partir de operaciones básicas, por ejemplo se ha mostrado [16] que también las compuertas de dos qubits son universales. Cualquier conjunto de compuertas a las que pueda ser reducida cualquier operación de qubits, se les llama compuertas universales, por ello su estudio es primordial para el objetivo de esta tesis. A continuación se definen estas dos compuertas básicas.

1. Las compuertas de rotación.

Un qubit, en la forma más general, puede ser representado por el estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ donde $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Este estado puede verse como un punto en una esfera de radio uno, es decir la norma del qubit es igual a uno si $a = \cos \theta$ y $b = e^{i\varphi} \sin \theta$, donde los ángulos (θ, φ) determinan la posición de nuestro punto. Esta esfera es llamada la esfera de Bloch [17] y el vector $(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ es llamado el vector de Bloch. Las compuertas de rotación representan las rotaciones en los tres diferentes ejes de un vector de Bloch. Estas compuertas se pueden expresar en términos de las matrices de Pauli en la forma:

$$e^{i\sigma_x\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$e^{i\sigma_y\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$e^{i\sigma_z\gamma} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde α, β, γ son los ángulos de rotación.

2. La compuerta CNOT

Ésta es una compuerta de dos qubits $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ o simplemente $|\alpha\beta\rangle$. Este tipo de qubits pueden tener cuatro estados: $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle,$ y $|--\rangle$ (por convención se usará una notación similar a la empleada en los problemas de espín 1/2). La compuerta CNOT permite que dependiendo del valor de uno de los dos qubits (al cual llamaremos qubit de control) el valor del otro qubit

(al cual llamaremos qubit de destino) se cambie por el valor negado¹ de este segundo qubit. Ésto sin que el valor del qubit de control cambie.

Por ejemplo, supongamos que el segundo qubit β es el qubit de control y que el primer qubit α es el qubit destino; queremos una transformación donde, si el valor del qubit de control es “-” entonces el qubit de destino cambie su valor por el valor negado sin que el valor del segundo qubit cambie. Esto define las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}
 |++\rangle &\rightarrow |++\rangle, \\
 |-\rangle &\rightarrow |-\rangle, \\
 |+-\rangle &\rightarrow |--\rangle, \\
 |--\rangle &\rightarrow |+-\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

como vemos el primer qubit sólo cambia cuando el segundo qubit es negativo y el valor del segundo qubit no cambia.

Estas transformaciones en particular se escriben en forma matricial de la siguiente manera:

$$C_{2-}^1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

donde el superíndice indica que el primer qubit es el qubit de destino y el subíndice implica que el segundo qubit es el de control y que el estado del sistema cambia solo cuando este qubit de control es negativo.

Existen otras tres matrices que dan todas las posibilidades de combinación de qubits de control y de destino.

El método que se utilizará para simular los resultados de una computadora cuántica está basado en el trabajo de Cerf y Koonin [18]². En este método, una de las principales condiciones para su puesta en marcha es que cada una

¹ El valor negado de + es - y viceversa

² Este tratamiento ha sido generalizado a compuertas de n qubits por Manssur y Portugal [19]

de las compuertas de dos qubits que se utilice en un circuito cuántico sea transformada en dos compuertas de un qubit por medio de la transformación de Hubbard-Stratonovich, la cual abordaremos en la siguiente sección.

1.2. Transformación de Hubbard-Stratonovich

El objetivo de esta sección es la descomposición de cada compuerta de dos qubits que componen un circuito cuántico en términos de dos compuertas de un solo qubit. Para ello utilizaremos la transformación de Hubbard-Stratonovich.

Es importante señalar que en esta tesis sólo trabajaremos con compuertas de dos qubits, por lo que llamaremos a los qubits de entrada a y b .

Cualquier circuito cuántico se puede descomponer en términos de un producto de n compuertas lógicas cada una denotadas U_i (operadores unitarios) que puede ser representada por una matriz de dimensión $2^n \times 2^n$, es decir:

$$U = \prod_{i=n}^1 U_i = U_n \dots U_1, \quad (1.7)$$

donde las U_i son las compuertas individuales que componen el circuito, las cuales actúan sobre dos qubits de entrada a_i y b_i . U es la matriz resultante y es la compuerta que representa el algoritmo que llevará a cabo nuestro circuito cuántico. Se hace notar que éste es un producto ordenado de izquierda a derecha por lo que los qubits (kets de entrada), sobre los que se ejecuta el circuito, primero son operados por U_n , después por U_{n-1} y así sucesivamente decrece el índice de las compuertas a operar hasta llegar finalmente a U_1 . Es decir $U|\psi\rangle = U_1 \dots U_n|\psi\rangle$.

Cada compuerta U_i se representa por un operador unitario, por lo que es natural que nosotros la expresemos en forma exponencial; una compuerta que actúa sobre dos qubits a_i y b_i se puede escribir en general como:

$$U_i = e^{-i\alpha_i A_i \otimes B_i}, \quad (1.8)$$

en donde A_i y B_i son compuertas que actúan sobre un solo qubit, A_i opera sólo sobre a_i , B_i sólo opera sobre b_i , y α_i es un número real arbitrario.

El argumento de la exponencial puede ser expresado de la siguiente manera:

$$i\alpha_i A_i \otimes B_i = i\alpha_i (A_i - \tau_i I_i) \otimes (B_i - \sigma_i I_i) + i\alpha_i \tau_i I_i \otimes B_i + i\alpha_i A_i \otimes \sigma_i I_i - i\alpha_i \tau_i I_i \otimes \sigma_i I_i, \quad (1.9)$$

siendo σ_i y τ_i los campos reales auxiliares correspondientes a la i -ésima compuerta e I_i es la matriz unidad de 2×2 elementos que actúa sobre los qubits. La función de estos campos auxiliares es enlazar (mediante una suma de estos campos auxiliares), los dos qubits de entrada que en un principio son independientes, dado que el sistema inicial debe ser descrito como un producto de estados. Estos campos auxiliares tienen solo sentido físico cuando su promedio en un tiempo de simulación (este tiempo no tiene relación con el tiempo de nuestro sistema), converge a un valor específico esto es porque las observables de nuestro sistema dependerán de esos valores. Utilizando la propiedad selectiva de la función delta de Dirac podemos expresar U_i en la siguiente forma integral:

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_i e^{-i\alpha_i A_i \otimes \sigma_i I_i} \delta(I_i \otimes (B_i - \sigma_i I_i)). \quad (1.10)$$

donde la función delta a su vez tiene la representación integral siguiente:

$$\delta(I_i \otimes (B_i - \sigma_i I_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_i e^{-2\pi i \rho_i I_i \otimes (B_i - \sigma_i I_i)}. \quad (1.11)$$

Si definimos a $\rho_i = \frac{\tau_i \alpha_i}{2\pi}$, sustituyendo en (1.11) obtenemos

$$\delta(I_i \otimes (B_i - \sigma_i I_i)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_i \alpha_i e^{-i\alpha_i \tau_i I_i \otimes (B_i - \sigma_i I_i)}. \quad (1.12)$$

Por lo tanto, de (1.10) y (1.12) se sigue que:

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_i d\tau_i \alpha_i e^{-i\alpha_i A_i \otimes \sigma_i I_i - i\alpha_i \tau_i I_i \otimes B_i + i\alpha_i \tau_i I_i \otimes \sigma_i I_i}. \quad (1.13)$$

Finalmente la transformación de U , que representa al circuito cuántico completo, queda expresada de la siguiente manera:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=n}^1 \left(\frac{\alpha_i}{2\pi} d\sigma_i d\tau_i \right) \exp \left(i \sum_{i=n}^1 \alpha_i \tau_i I_i \otimes \sigma_i I_i \right) \prod_{i=n}^1 (V_i(\sigma_i) W_i(\tau_i)), \quad (1.14)$$

donde $V_i(\sigma_i) = e^{-i\alpha_i A_i \otimes \sigma_i I_i}$ y $W_i(\tau_i) = e^{-i\alpha_i \tau_i I_i \otimes B_i}$.

Reescribiendo la ecuación (1.14) en forma compacta, tenemos que:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} D\sigma \exp \left(i \sum_{i=n}^1 \alpha_i \tau_i I_i \otimes \sigma_i I_i \right) U[\sigma], \quad (1.15)$$

donde $D\sigma = \prod_{i=n}^1 \left(\frac{\alpha_i}{2\pi} d\sigma_i d\tau_i \right)$ es la medida sobre los campos auxiliares y $U[\sigma]$ es la transformación unitaria resultante de transformar todas las compuertas de dos qubits en dos compuertas de un qubit. Obsérvese que σ (sin subíndice) hace referencia a todos los campos auxiliares σ_i y τ_i . La ecuación (1.15) representa la transformación del circuito cuántico que inicialmente estaba representado por operadores de dos qubits, en términos de compuertas de un sólo qubit, representados por las matrices V_i y W_i .

Donde $U[\sigma]$ es el producto de compuertas de un bit:

$$U[\sigma] = \prod_{l=1}^n U^{[l]}[\sigma], \quad (1.16)$$

con,

$$U^{[l]}[\sigma] = \prod_{i=n}^1 U_i^{[l]}(\sigma_i, \tau_i), \quad (1.17)$$

donde se define

$$U_i^{[l]}(\sigma_i, \tau_i) = \begin{cases} V_i(\sigma_i) & \text{si } l = a_i, \\ W_i(\tau_i) & \text{si } l = b_i, \\ I_i & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Análogamente si nosotros quisiéramos saber el valor de U^\dagger tendríamos que utilizar otros campos auxiliares σ'_i y τ'_i tales que:

$$U^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} D\sigma' \exp \left(-i \sum_{i=n}^1 \alpha_i \tau'_i I_i \otimes \sigma'_i I_i \right) U[\sigma']. \quad (1.19)$$

Capítulo 2

Simulación estocástica de la computadora cuántica.

Supongamos ahora que nuestra compuerta U está asociada a una observable O . Esta suposición es muy ventajosa puesto que recuperamos el método para calcular valores esperados de la mecánica cuántica y además tenemos tanta libertad para definir nuestra observable que incluso podemos definir una que tenga una varianza igual a cero; es decir, U sería una compuerta determinista.

Entonces supongamos un circuito que toma en cuenta un total de L qubits de los cuales L_p son qubits previstos, que puede ser que su valor no cambie al operar nuestro circuito o pueden ser qubits cuyo valor no interese a nuestros objetivos, y el resto $L_m = L - L_p$ son los qubits de salida del circuito, es decir, los qubits que se quieren medir. Por otro lado supongamos que el valor de cada uno de nuestros qubits de salida puede ser medido como una observable, y que estas observables pueden ser medidas simultáneamente. Asumimos entonces que existe una observable cuyo operador es el producto directo de los operadores de cada una de las observables de un qubit.

$$O = \prod_{\{m\}}^{L_m} O_i, \quad (2.1)$$

por lo cual podemos obtener el valor esperado de nuestra observable como

$$\langle O \rangle = \frac{\langle 0_1 \cdots 0_L | U^\dagger O P U | 0_1 \cdots 0_L \rangle}{\langle 0_1 \cdots 0_L | U^\dagger P U | 0_1 \cdots 0_L \rangle}, \quad (2.2)$$

donde $|0_1 \cdots 0_L\rangle = |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle \cdots \otimes |0_L\rangle$ es el producto directo de cada uno de los estados iniciales¹ de cada qubit. Se hace hincapié de que este estado inicial no puede ser un estado enredado (entangled state) dado que suponemos un

¹ De aquí el valor 0 en los valores de los qubits; sin embargo esto representa un abuso de notación ya que puede haber confusión con el valor binario 0.

estado separable; sin embargo, al operar con nuestras compuertas tampoco se puede obtener un estado final enredado; no obstante, siempre podemos hacer un mapeo de estados enredados a estados no enredados por medio de una compuerta de traducción como se verá en el siguiente capítulo.

Definiendo el proyector:

$$P = \prod_{\{p\}}^{L_p} |\pi_p\rangle \langle \pi_p|, \quad (2.3)$$

puesto que U y U^\dagger solo operan sobre los qubits de salida necesitamos del proyector para que el resultado sea el correcto. De esta forma aseguramos que la varianza de O sea cero cuando todos los qubits prescritos tengan el mismo valor que el esperado por el proyector. En ese caso tendremos que la salida de nuestro circuito será determinista.

De las ecuaciones (1.15), (1.16), (1.19) y (2.2) se sigue que

$$\langle O \rangle = \frac{\int D\sigma D\sigma' e^{i\sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i)} \prod_{l=1}^L \langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] O^{[l]} P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle}{\int D\sigma D\sigma' e^{i\sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i)} \prod_{l=1}^L \langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle}. \quad (2.4)$$

Más aún, ésto puede ser escrito como

$$\langle O \rangle = \frac{\int D\sigma D\sigma' e^{i\sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i)} \prod_{l=1}^L \langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle O[\sigma, \sigma']}{\int D\sigma D\sigma' e^{i\sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i)} \prod_{l=1}^L \langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle}, \quad (2.5)$$

con $O[\sigma, \sigma']$ siendo el “estimador” de O , definido mediante

$$O[\sigma, \sigma'] = \prod_{l=1}^L \frac{\langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] O^{[l]} P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle}{\langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle}, \quad (2.6)$$

donde $O^{[l]}$ es un operador asociado a una observable de un solo qubit. Hago hincapié que en su representación matricial este operador $O^{[l]}$ puede prestarse a ambigüedades dado que la matriz que representa un operador para el qubit 1 podría ser la misma que la matriz que representa un operador para el qubit 2². Además para saber unívocamente el estado final de los qubits de salida necesitamos que se cumpla una de estas dos condiciones:

² Estos casos serán señalados con un ejemplo posterior

1. En el caso de que trabajemos con observables de un qubit necesitamos que esta observable tenga una probabilidad de 1³(tenemos el 100% de seguridad que los qubits estén en los estados correspondientes).
2. O en el caso de que 1. no se cumpla tenemos que trabajar con observables de dos qubits. Lo cual no se hará en esta tesis.

Si definimos la acción de la siguiente forma:

$$S[\sigma, \sigma'] = - \sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i) + i \ln \left(\prod_{l=1}^L \langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle \right), \quad (2.7)$$

puesto que el logaritmo de una multiplicación es la suma de los logaritmos:

$$S[\sigma, \sigma'] = - \sum_i \alpha_i (\sigma_i \tau_i - \sigma'_i \tau'_i) + i \sum_{l=1}^L \ln (\langle 0_l | U^{\dagger[l]} [\sigma'] P^{[l]} U^{[l]} [\sigma] | 0_l \rangle), \quad (2.8)$$

Finalmente obtenemos

$$\langle O \rangle = \frac{\int D\sigma D\sigma' e^{-iS[\sigma, \sigma']} O[\sigma, \sigma']}{\int D\sigma D\sigma' e^{-iS[\sigma, \sigma']}}, \quad (2.9)$$

La forma en la que solucionaré esta ecuación estocástica es mediante el método de la ecuación de Langevin [20].

Cuando resolvemos una ecuación integral el método más común es el de dividir el intervalo de integración en partes uniformemente distribuidas y evaluar la función cuya integral queremos saber a lo largo de esta trayectoria. Comúnmente en la física los valores esperados de una cantidad $O(\sigma)$ (donde σ es un conjunto de campos) está dada por la siguiente integral de línea:

$$\langle O(\sigma) \rangle_S = \frac{\int O(\sigma) e^{-S(\sigma)} d\sigma}{\int e^{-S(\sigma)} d\sigma}, \quad (2.10)$$

donde $S(\sigma)$ es la acción del sistema. Esta acción por lo general es real pudiendo ser compleja [20] como en los sistemas con un potencial químico, teorías de norma con cargas externas y con fermiones además de teorías de campo en el espacio de Minkowsky. Uno de los posibles métodos para evaluar el valor

³ En algunos casos puede sacarse más información del sistema aunque esta condición no se cumpla como veremos en el siguiente capítulo

esperado (2.10) es el resolviendo ecuaciones tipo Langevin [21]. La ecuación de Langevin para una acción real es:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\partial S(\sigma)}{\partial \sigma} + \eta(t), \quad (2.11)$$

donde t es el tiempo de simulación. En esta expresión hay una fuerza de arrastre que es la derivada de la acción con respecto al campo y $\eta(t)$ es un ruido blanco Gaussiano. Por ejemplo, en la mecánica clásica la acción está determinada por la función de Hamilton y si nuestro campo es el momento generalizado p_i , aplicando las Ecs. de Hamilton obtendríamos la ecuación de Langevin que describe el movimiento Browniano [22]:

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} = -\gamma \dot{q}_i + \delta \eta(t), \quad (2.12)$$

con γ y δ constantes de proporcionalidad.

El ruido blanco Gaussiano obedece las siguientes propiedades:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \text{ y } \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (2.13)$$

las cuales quieren decir básicamente que este ruido es de media cero, varianza uno y que un valor a un cierto tiempo t no está correlacionado con el valor del ruido en el tiempo t' , por lo que la solución de la Ec. (2.12) es un proceso de Markov.

Supongamos que $\sigma_n(t)$ es la solución a la Ec. (2.11), si promediamos O en un tiempo muy largo con esta solución estaremos obteniendo el valor esperado de la Ec. (2.10), es decir,

$$\lim_{T, \tilde{t} \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t}+T} dt O(\sigma_n(t)) \rightarrow \langle O(\sigma) \rangle_S. \quad (2.14)$$

Sin embargo la ecuación de Langevin para una acción compleja está definida de la siguiente forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{i}{2} \frac{\partial S(\sigma)}{\partial \sigma} + \eta(t) \quad (2.15)$$

es la forma que se utilizará en este trabajo.

En la siguiente sección se resolverá el circuito cuántico de la Transformada de Fourier.

2.1. Ejemplo: Transformada Rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier [1] está compuesta por dos transformaciones de Hadamard H_1 y H_2 , y una compuerta de dos qubits que es la compuerta de fase controlada C_{12} , arregladas en un producto de la siguiente forma $U = H_1 C_{12} H_2$. El circuito lógico al que hacemos referencia tiene la siguiente forma:

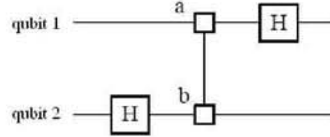


Figura 2.1. Diagrama del circuito asociado a la Transformada Rápida de Fourier.

en esta figura se ve que cada qubit es operado por una transformación de Hadamard y después cada uno de los estados intermedios (denotados por a y b), son operados por la compuerta de fase controlada.

Definimos como estado inicial de nuestro sistema el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |1_1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2\rangle + |1_2\rangle)$. Con ésto tenemos un estado inicial que podemos interpretar como una función constante de cuatro puntos, donde todos los estados posibles del sistema se presentan con el mismo factor de peso: $\frac{1}{2}(|0_1\rangle|0_2\rangle + |0_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|0_2\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle)$. En este caso ningún qubit es prescrito por lo que el valor de $L_m = L = 2$. Por otro lado sabemos que la transformada de Fourier de una función constante es una delta de Dirac, por lo que el resultado esperado es una función de un solo punto multiplicado con un factor de peso de infinito; este factor de peso no puede ser reproducido por este método dado que la única información que podemos determinar, hasta cierto punto como lo hemos discutido al principio de este capítulo, es el estado en el que se encuentran los qubits de salida.

Como pudimos ver en la sección anterior, debemos descomponer todas las compuertas de dos qubits en término de dos compuertas de un qubit, y puesto que la única compuerta de dos qubits es la compuerta de fase controlada, se tiene que $C_{12} = e^{i\omega A \otimes B}$ con $A = B = \frac{1-\sigma_z}{2}$ y $\omega = \frac{\pi}{2} = cte$. Así

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = H_2. \quad (2.16)$$

Utilizando la descomposición de Jordan [23] para obtener C_{12} tenemos:

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\omega} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto

$$e^{i\omega\sigma(1-\sigma_z)/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\omega\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$e^{i\omega\tau(1-\sigma_z)/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\omega\tau} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$U_1(\sigma) = H_1 e^{i\omega\sigma(1-\sigma_z)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega\sigma} \\ 1 & -e^{i\omega\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$U_2(\tau) = e^{i\omega\tau(1-\sigma_z)/2} H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\omega\tau} & -e^{i\omega\tau} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$U[\sigma] = U_1(\sigma)U_2(\tau) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\omega(\sigma+\tau)} & 1 - e^{i\omega(\sigma+\tau)} \\ 1 - e^{i\omega(\sigma+\tau)} & 1 + e^{i\omega(\sigma+\tau)} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

La acción determinada por la ecuación (2.8) es

$$S[\sigma, \sigma'] = \omega(\sigma\tau - \sigma'\tau') + i \ln \left(\frac{1 + e^{i\omega(\sigma-\sigma')}}{2} \right) \quad (2.23)$$

Con lo cual el sistema de ecuaciones estocásticas definido por la ec. (2.15) son:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -i\frac{\omega}{2}(\tau - 1/2) - \frac{\omega}{4} \tan \left(\frac{\omega}{2}(\sigma - \sigma') \right) + \eta_\sigma,$$

$$\frac{d\sigma'}{dt} = i\frac{\omega}{2}(\tau' - 1/2) + \frac{\omega}{4} \tan \left(\frac{\omega}{2}(\sigma - \sigma') \right) + \eta_{\sigma'},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -i\frac{\omega}{2}\sigma + \eta_\tau,$$

$$\frac{d\tau'}{dt} = i\frac{\omega}{2}\sigma' + \eta_{\tau'}, \quad (2.24)$$

donde η_i es un ruido blanco Gaussiano. Las condiciones iniciales con las que se resolverá el sistema de ecuaciones serán tomadas al azar. Ésto es para asegurar que la convergencia de la solución no sea dependiente de estas condiciones.

Nuestras observables estarán ligadas a la probabilidad de encontrar a los qubits en los estados $|0\rangle$ o $|1\rangle$, es decir,

$$\begin{aligned} O_0 &= |0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ O_1 &= |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Obsérvese que estos operadores no contienen algún índice en los qubits a los que hacen referencia; ésto es porque en forma matricial no importa cual combinación de estos qubits pongamos (podemos poner las cuatro combinaciones diferentes de índices), la matriz resultante siempre será la misma, con lo cual si la probabilidad es diferente de 1 en alguna observable puede haber una ambigüedad en el estado de los qubits de salida.

Por lo que se sigue

$$O_0[\sigma, \sigma'] = \frac{1}{2} \frac{(1 + e^{i\omega\sigma})(1 + e^{-i\omega\sigma'})}{(1 + e^{i\omega(\sigma - \sigma')})}, \quad (2.26)$$

$$O_1[\sigma, \sigma'] = 0. \quad (2.27)$$

para las cuales necesitamos el valor de los campos auxiliares arrojados por la simulación. Los valores esperados para estos campos como función del tiempo se muestran en las figuras (2.2) a (2.6)

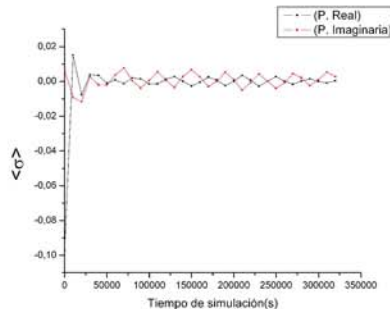


Figura 2.2. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ

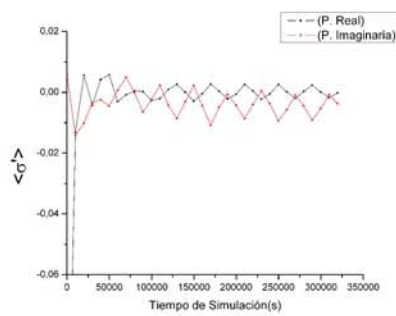


Figura 2.3. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ'

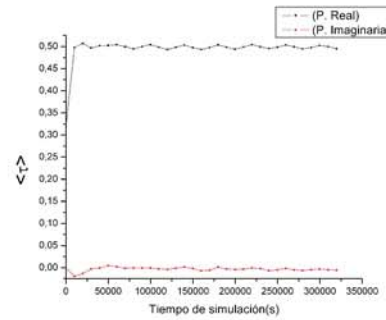


Figura 2.4. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ

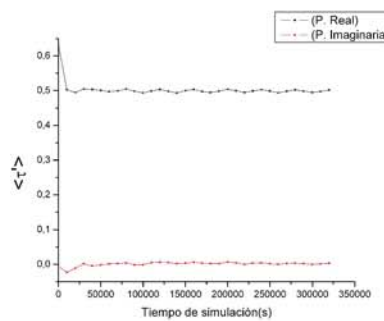


Figura 2.5. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ'

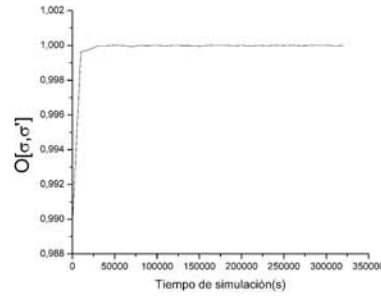


Figura 2.6. Evolución temporal de la observable descrita por la ec. (2.25)

Tiempo de simulación(s)	Campo $\langle \sigma \rangle$	Campo $\langle \sigma' \rangle$	Campo $\langle \tau \rangle$	Campo $\langle \tau' \rangle$
0.10001	0.09737	0.14442	0.31933	0.63088
9990.00	0.01769	0.01939	0.49832	0.50295
19980.0	0.01385	0.01165	0.50746	0.49445
29970.0	0.00473	0.00555	0.49663	0.50514
39960.0	0.00391	0.00483	0.50215	0.50347
49950.0	0.00225	0.00728	0.50242	0.50064
59940.0	0.00377	0.00313	0.50419	0.49684
69930.0	0.00781	0.00497	0.49963	0.49957
79920.0	0.00204	0.00044	0.49472	0.50483
89910.0	0.00405	0.00646	0.50019	0.49813
99900.0	0.00153	0.00359	0.50417	0.49371

Cuadro 2.1. Evaluación de los campos auxiliares de la simulación a diferentes tiempos.

Como podemos ver en las figuras, los campos solución para este circuito rápidamente convergen a los valores

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma' \rangle = 0,$$

$$\langle \tau \rangle = \langle \tau' \rangle = \frac{1}{2}, \quad (2.28)$$

por lo que sustituyendo estos valores en la ecuación (2.25) podemos asegurar que el estado final en el que se encuentra los qubits de salida es el estado $|00\rangle$, es decir, el estado final del sistema es un estado puro tal como lo suponíamos, y hay un 100% de probabilidad de que ése sea el estado final.

Asimismo trabajaremos con la transformada inversa de este resultado que hemos obtenido. Si tenemos como estado inicial el qubit $|0_1 0_2\rangle$ es como si tuviéramos una función de un solo punto, y al obtener la transformada de Fourier de esta función tendremos que obtener una superposición de los cuatro eigenestados posibles: $\lambda(|0_1 0_2\rangle + |1_1 0_2\rangle + |0_1 1_2\rangle + |1_1 1_2\rangle)$. Análogamente al caso anteriormente descrito la transformación de Hubbard-Stratonovich da como resultado que

$$U_1(\sigma) = H_1 e^{i\omega\sigma(1-\sigma_z)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega\sigma} \\ 1 & -e^{i\omega\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$U_2(\tau) = e^{i\omega\tau(1-\sigma_z)/2} H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\omega\tau} & -e^{i\omega\tau} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Esta vez la acción determinada por la ecuación (2.8) es

$$S[\sigma, \sigma'] = \omega(\sigma\tau - \sigma'\tau') + i \ln \left(\frac{1 + e^{i\omega(\tau-\tau')}}{2} \right), \quad (2.31)$$

y las ecuaciones diferenciales (ec. (2.15)) a resolver son las siguientes:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -i\frac{\omega}{2}\tau + \eta_\sigma,$$

$$\frac{d\sigma'}{dt} = i\frac{\omega}{2}\tau' + \eta_{\sigma'},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = -i\frac{\omega}{2}(\sigma - 1/2) - \frac{\omega}{4} \tan \left(\frac{\omega}{2}(\tau - \tau') \right) + \eta_\tau,$$

$$\frac{d\tau'}{dt} = i\frac{\omega}{2}(\sigma' - 1/2) + \frac{\omega}{4} \tan \left(\frac{\omega}{2}(\tau - \tau') \right) + \eta_{\tau'}. \quad (2.32)$$

Definiendo los siguientes operadores de un qubit:

$$O_0 = |0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 O_{01} &= |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 O_{10} &= |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 O_1 &= |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

tenemos las siguientes observables:

$$O_0[\sigma, \sigma'] = \frac{1}{2(1 + e^{i\omega(\tau')})}, \tag{2.34}$$

$$O_{01}[\sigma, \sigma'] = \frac{e^{i\omega\tau}}{2(1 + e^{i\omega(\tau-\tau')})}, \tag{2.35}$$

$$O_{10}[\sigma, \sigma'] = \frac{e^{-i\omega\tau'}}{2(1 + e^{i\omega(\tau-\tau')})}, \tag{2.36}$$

$$O_1[\sigma, \sigma'] = \frac{e^{-i\omega\tau'}}{2(1 + e^{i\omega(\tau-\tau')})}. \tag{2.37}$$

Sin embargo, las ecuaciones (2.30) son completamente análogas a las de (2.23), sólo hay que intercambiar $\sigma \longleftrightarrow \tau$ y $\sigma' \longleftrightarrow \tau'$. Por la Ec. (2.27), el resultado de la simulación será que:

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma' \rangle = \frac{1}{2}, \\
 \langle \tau \rangle &= \langle \tau' \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

De las ecuaciones (2.32) a (2.35) se tiene como resultado que:

$$O_0[\sigma, \sigma'] = O_{01}[\sigma, \sigma'] = O_{10}[\sigma, \sigma'] = O_1[\sigma, \sigma'] = \frac{1}{4}. \tag{2.39}$$

Ésto establece que todos los estados del sistema son igualmente probables. Por lo cual podemos decir que el estado $|0_10_2\rangle + |1_10_2\rangle + |0_11_2\rangle + |1_11_2\rangle$ es el

estado final, puesto que es el único estado en el que todos los eigenvectores tienen la misma probabilidad de ser medidos⁴.

Los valores esperados para los campos en el tiempo tiempo de simulación se muestran en las figuras (2.7) a (2.12).

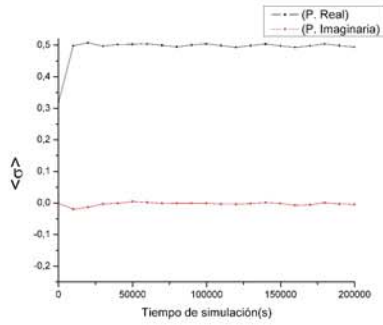


Figura 2.7. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ

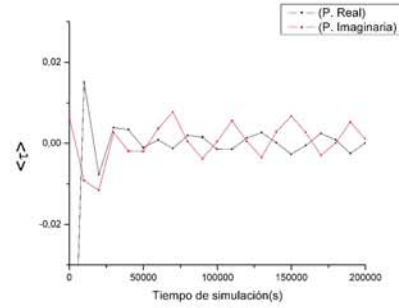


Figura 2.9. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ

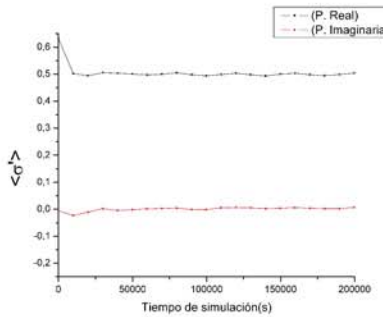


Figura 2.8. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ'

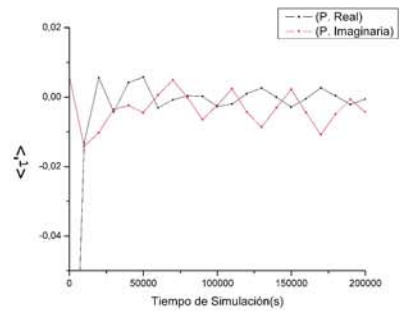


Figura 2.10. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ'

⁴ Parece que este estado superpuesto es el único que puede determinarse con este método sin utilizar una compuerta que rompa esta superposición.

Capítulo 3

Aplicación: Compuertas CNOT, traductora y tratamiento de estados enredados.

Nuestro sistema físico está conformado por dos partículas de espín $1/2$, por lo que tendremos cuatro posibles eigenestados del sistema [24] : $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-\rangle$, y $|--\rangle$. Nos interesan las transiciones de baja frecuencia (que involucra la transición de espín de una sola partícula) de los estados $|+-\rangle \rightarrow |-\rangle$ y $|--\rangle \rightarrow |+-\rangle$ ¹. Estas dos transiciones pueden ser representadas por un operador unitario (una compuerta lógica de dos qubits), cuya dimensión es 4×4 . La compuerta a la que hago referencia es una de las compuertas CNOT:

$$C_{2-}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde el superíndice indica que el qubit objetivo es el primero y el subíndice indica que el qubit de control es el segundo, y que la transición se da cuando este segundo qubit tiene signo negativo.

Sin embargo nuestro modelo no está completo de esta manera dado que una de las propiedades peculiares de esta compuerta CNOT es que un estado no enredado como el que podría ser el estado $|++\rangle + |+-\rangle$ puede transformarse en un estado enredado $|++\rangle + |--\rangle$. Este tipo de transiciones no pueden ser descritas utilizando los métodos utilizados hasta ahora, dado que primero necesitamos romper ese enredamiento, es decir, mapear estos estados enredados en estados no enredados, de los cuales tengamos la seguridad de identificar unívocamente el estado enredado del cual provienen. En pocas palabras, necesitamos una compuerta traductora que nos indique a qué

¹ Podemos trabajar con cualquier transición posible si embargo solo se reportarán estas transiciones

estado enredado podemos llegar. Esta compuerta traductora proviene de la transformación de los llamados estados de Bell [17] a estados puros y engloba las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle + |--\rangle) &\rightarrow |++\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) &\rightarrow |+-\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} (|++\rangle - |--\rangle) &\rightarrow |-+\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) &\rightarrow |--\rangle,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

dando como resultado la matriz [5] que resulta de esta traducción de estados:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Recordemos que éste es un producto ordenado, por lo cual la primer compuerta, la compuerta CNOT enreda el estado inicial y la matriz de traducción desenreda a este estado intermedio, y el resultado de esta traducción es un solo estado y no una superposición de estados, es decir, la probabilidad de encontrar a nuestro sistema en ese estado es 1. Básicamente lo que estamos haciendo al traducir nuestro estado enredado es muy parecido a la acción de medir una observable en la Mecánica Cuántica, sólo medimos un estado que de ninguna forma está superpuesto, aunque la ventaja de trabajar con los operadores unitarios de nuestras compuertas es que nosotros sí podemos saber de qué estado (enredado y superpuesto) proviene el sistema.

Si se analiza el sistema antes de empezar con la simulación se observará que se puede predecir el estado final que ocupara nuestro sistema. Si el estado inicial a trabajar es el estado $|+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ la compuerta CNOT transformará a este estado en el estado enredado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$, y finalmente la traducción nos llevará al estado $|++\rangle$. Éste es el resultado que se intentará reproducir a través de la simulación.

Nuestra compuerta total está representada por la matriz

$$U = TC_{2-}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

que puede ser escrita en términos de una exponencial $e^{i\omega A \otimes B}$ con $A = 1$, $B = \sigma_y$ y $\omega = \frac{\pi}{4}$. Por lo tanto la transformación de esta matriz a las dos matrices que son funciones de los campos auxiliares la podemos escribir

$$U_1(\sigma) = \begin{pmatrix} e^{i\omega\sigma} & 0 \\ 0 & e^{i\omega\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$U_2(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau) & \sin(\omega\tau) \\ -\sin(\omega\tau) & \cos(\omega\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Si como hemos visto, el estado inicial a trabajar es el estado $|+\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ la acción S expresada por la ecuación (2.8) queda como

$$S = \omega(\sigma(\tau - 1) + \sigma'(1 - \tau')) + i \ln(\cos(\omega(\tau - \tau'))), \quad (3.7)$$

Por lo que las cuatro ecuaciones estocásticas a resolver (ec. (2.15)) son

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{i\omega}{2}(1 - \tau) + \eta_\sigma, \\ \frac{d\sigma'}{dt} &= \frac{i\omega}{2}(\tau' - 1) + \eta_{\sigma'}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{-i\omega}{2}\sigma + \frac{\omega}{2} \tan(\omega(\tau - \tau')) + \eta_\tau, \\ \frac{d\tau'}{dt} &= \frac{i\omega}{2}\sigma' - \frac{\omega}{2} \tan(\omega(\tau - \tau')) + \eta_{\tau'}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definiendo las siguientes observables de un qubit

$$\begin{aligned} O_0 &= |+\rangle \langle +| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ O_1 &= |-\rangle \langle -| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

utilizando la expresión (2.6) finalmente llegamos a

$$O_0[\sigma, \sigma'] = \frac{\cos(\omega(\tau - \tau')) + \sin(\omega(\tau + \tau'))}{2 \cos(\omega(\tau - \tau'))},$$

$$O_1[\sigma, \sigma'] = 0. \quad (3.10)$$

3.1. Resultados

Se resolvieron las ecuaciones de (3.8) con diferentes condiciones iniciales tomadas al azar.

Los resultados que arrojó la simulación de la compuerta expresada por las ecuaciones diferenciales de la ec. (3.8), se muestran en las figuras (3.1) a (3.4):

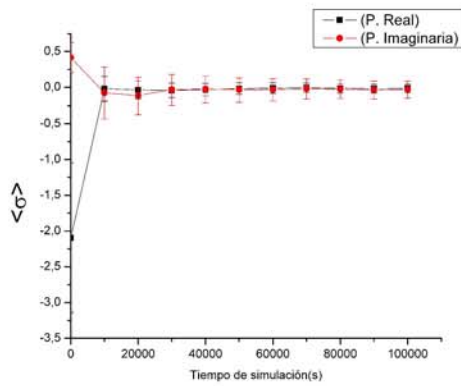


Figura 3.1. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ

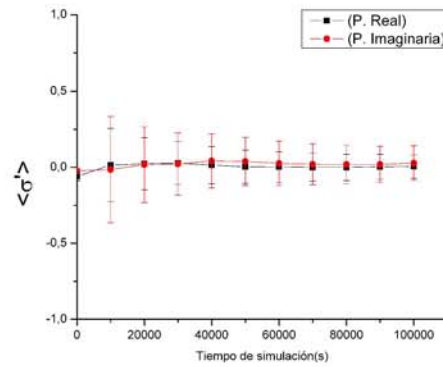


Figura 3.2. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de σ'

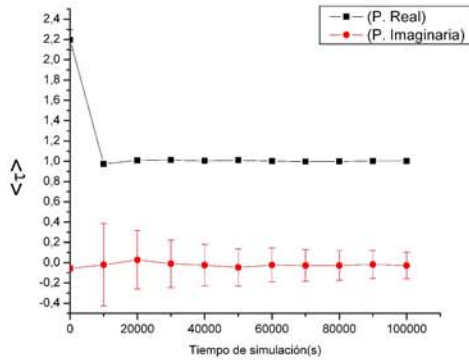


Figura 3.3. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ

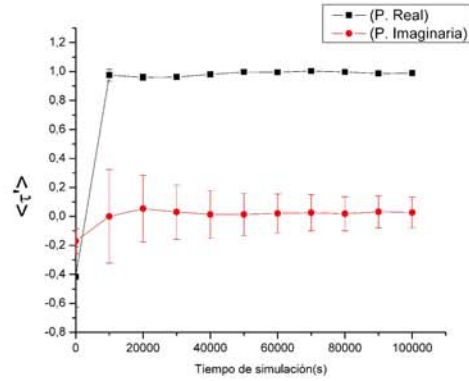


Figura 3.4. Evolución temporal (en el tiempo de simulación) de las partes real e imaginaria de τ'

Como podemos ver en las figuras, el promedio de los campos auxiliares tiende asintóticamente a valores bien definidos en un tiempo relativamente corto, y arroja los siguientes resultados a diferentes tiempos.

Tiempo de simulación(s)	Campo $\langle\sigma\rangle$	Campo $\langle\sigma'\rangle$	Campo $\langle\tau\rangle$	Campo $\langle\tau'\rangle$
1	15.88 ± 7.94	17.68 ± 8.84	28.86 ± 13.68	15.36 ± 7.66
9999	0.11 ± 0.63	0.04 ± 0.51	1.00 ± 0.43	1.01 ± 0.94
19999	0.04 ± 0.45	0.03 ± 0.36	1.01 ± 0.29	1.02 ± 0.22
29999	0.03 ± 0.37	0.03 ± 0.30	1.01 ± 0.24	1.00 ± 0.18
39999	0.03 ± 0.32	0.02 ± 0.26	1.01 ± 0.21	0.99 ± 0.16
49999	0.04 ± 0.28	0.03 ± 0.23	1.01 ± 0.18	0.98 ± 0.14
59999	0.04 ± 0.26	0.04 ± 0.21	1.00 ± 0.17	1.00 ± 0.13
69999	0.03 ± 0.24	0.04 ± 0.20	1.00 ± 0.16	1.00 ± 0.12
79999	0.04 ± 0.23	0.03 ± 0.19	1.00 ± 0.15	1.00 ± 0.11
89999	0.04 ± 0.21	0.03 ± 0.18	1.00 ± 0.14	1.00 ± 0.11
99999	0.03 ± 0.20	0.03 ± 0.17	1.00 ± 0.13	1.00 ± 0.10

Cuadro 3.1. Evaluación de los campos auxiliares de la simulación a diferentes tiempos.

En la figura (3.5) podemos ver cómo es la evolución de las observables en el tiempo de simulación.

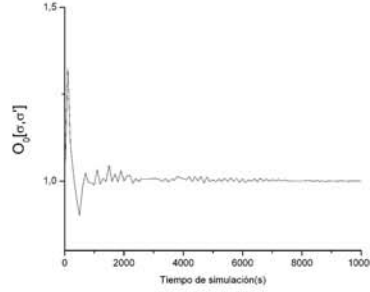


Figura 3.5. Evolución temporal de la observable descrita por la ec. (3.10)

Los campos tienden a los siguientes valores constantes:

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma' \rangle = 0,$$

$$\langle \tau \rangle = \langle \tau' \rangle = 1, \quad (3.11)$$

por lo que al sustituir estos valores obtenidos en la Ec. (3.10), podemos asegurar que el estado final en el que se encuentra los qubits de salida es el estado $|++\rangle$ es decir el estado final del sistema es un estado puro tal como lo suponíamos, y hay un 100 % de probabilidad de que ese sea el estado final.

Por otro lado, si nuestro estado inicial es el estado $|-\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle - |+\rangle)$, podemos ver que la compuerta CNOT nos llevará al estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ por lo que el estado final al que se llegaría al traducir este estado de Bell con la compuerta de la Ec. (3.3) sería el estado $|--\rangle$. Entonces si tomamos el estado inicial como $|-\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle - |+\rangle)$ la acción determinada por la Ec. (2.8) es

$$S = \omega(\sigma(\tau - 1) + \sigma'(1 - \tau')) + i \ln(\cos(\omega(\tau - \tau'))). \quad (3.12)$$

Esta acción es la misma que la del caso anterior, por lo cual las ecuaciones diferenciales a resolver son las mismas que las ecuaciones escritas en (3.8), de las cuales ya tenemos la solución. Aunque este problema parece completamente análogo al anterior, no lo es, puesto que las observables cambian de papel de como las expresamos en la Ec. (3.10), es decir

$$O_0[\sigma, \sigma'] = 0,$$

$$O_1[\sigma, \sigma'] = \frac{\cos(\omega(\tau - \tau')) + \sin(\omega(\tau + \tau'))}{2 \cos(\omega(\tau - \tau'))}. \quad (3.13)$$

por lo cual podemos asegurar que el estado final del sistema es el estado $|--\rangle$. Este resultado es tal como lo esperábamos.

Conclusiones

En esta tesis se demostró que es posible simular algunos circuitos cuánticos simples de dos qubits mediante una computadora clásica con la siguiente restricción: tanto la entrada como la salida deben ser estados no enredados. Sin embargo, como lo vimos en el capítulo 3, se pueden manejar este tipo de estados mediante una compuerta traductora e identificando uno a uno los estados puros de salida con estados enredados resultantes de la compuerta original. Cerf y Koonin [18], quienes exponen la teoría más general, consideran que el tratamiento de estados enredados puede ser factible sin ejemplificar cómo hacerlo. Nosotros consideramos que ese intento estaba fuera del alcance de esta tesis pero que podría ser abordado en un trabajo posterior.

Los resultados del ejemplo de la transformada directa e inversa de Fourier (sección 2.1) convergen en forma muy similar. Los campos auxiliares parecen converger en todas sus componentes a su valor medio esperado en 320000 segundos en el tiempo de simulación, con un error promedio del 1%. En el proceso de realizar la transformada de Fourier y su inversa, demostramos la reversibilidad intrínseca de los operadores unitarios que representan los circuitos computacionales, aún cuando el proceso estocástico que simula el cómputo cuántico es irreversible; esta aparente paradoja puede ser explicada en el sentido de que las salidas de la computadora cuántica son muy cercanas a valores deterministas con errores asociados menores al 1% en valor absoluto por una compensación del campo debido al amortiguamiento del campo estocástico externo.

En el sistema tratado en el capítulo 3, los campos auxiliares llegan a sus estados estacionarios en tiempos menores que 10000, los cuales son menores que los expuestos en la transformada de Fourier y creemos que es debido a la presencia de una compuerta traductora. Estos resultados se obtuvieron con corridas realizadas en el servidor HP AlphaServer SC45 de DGSCA ocupan-

do cuatro procesadores en donde el tiempo de reloj invertido fue alrededor de seis horas por cada corrida. Este tiempo es extraordinariamente grande comparado con el tiempo que le tomaría a una computadora cuántica real realizarla.

Con las aplicaciones vistas en esta tesis se logró un mejor entendimiento del mecanismo con el cual trabaja una computadora cuántica: obedece las mismas reglas que los operadores unitarios de la Mecánica Cuántica cuyo espacio natural es el espacio de Hilbert.

El procedimiento de simulación expuesto en este trabajo podría ser aplicado a cualquier compuerta incluso extendido a estados de n qubits con facilidad, siempre y cuando los estados no sean enredados.

Es pertinente señalar que en una computadora cuántica real hay otros fenómenos colaterales como la interacción con el medio ambiente. Esta interacción se manifestará en formas de errores no previstos en una situación ideal. No obstante estos efectos pueden ser corregidos con circuitos que podrían expresarse a su vez en términos de compuertas universales.

Apéndice: Algoritmos computacionales

El lenguaje de programación que se utilizó para nuestra simulación fue el lenguaje C. El algoritmo utilizado para la resolución de la ecuación diferencial de Langevin fue implementado por Greenside y Helfand [25] y es una variación del algoritmo de Euler para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Si la ecuación diferencial a resolver es expresada en como la Ec. (2.15) con $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$, ésta puede ser discretizada de la siguiente manera.

$$\sigma_R(t_{i+1}) = \sigma_R(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \operatorname{Re} \left[-\frac{i}{2} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] + \sqrt{t_{i+1} - t_i} \eta(t_i) \quad (3.14)$$

$$\sigma_I(t_{i+1}) = \sigma_I(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \operatorname{Im} \left[-\frac{i}{2} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] \quad (3.15)$$

con $\eta(t_i)$ el ruido blanco Gaussiano que satisface la Ec. (2.13).

Para generar el ruido blanco Gaussiano se tomó como distribución de probabilidad [26]:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (3.16)$$

donde σ es la varianza de dicha distribución sin embargo en la presente tesis se utilizó una varianza igual a 1. Esta función de probabilidad puede obtenerse de una distribución uniforme $f(\phi) = 1$ para $\phi \in [0, 2\pi]$ y una distribución exponencial $p(t) = e^{-t}$ con $t \in [0, \infty]$, puesto que podemos expresar la Ec. (3.16) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2\pi} f(\phi) p(t) d\phi dt = g(x) g(y) dx dy, \quad (3.17)$$

Siguiendose que

$$e^{-t} d\phi dt = e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy. \quad (3.18)$$

Esta ecuación puede verse como una transformación de coordenadas polares (r, ϕ) a cartesianas con $r = \sqrt{2t}$, por lo que las coordenadas (x, y) que parametrizan la función de distribución son

$$x = \sqrt{2t} \cos \phi, \quad (3.19)$$

$$y = \sqrt{2t} \sin \phi, \quad (3.20)$$

siempre y cuando t provenga de una función de distribución exponencial. La distribución exponencial puede reescribirse en términos de otra distribución uniforme $f(z)$ con $z \in [0, 1]$

$$p(t)dt = f(z)dz = dz, \quad (3.21)$$

Que implica que

$$z(t) - z(0) = 1 - e^{-t} \quad (3.22)$$

si fijamos $z(0) = 0$ e invertimos la función finalmente tendremos la siguiente expresión para t

$$t = -\ln(1 - z). \quad (3.23)$$

Esto implica finalmente que la expresión para las dos distribuciones Gaussianas queda de la siguiente manera

$$x = \sqrt{-2 \ln(1 - z)} \cos \phi, \quad (3.24)$$

$$y = \sqrt{-2 \ln(1 - z)} \sin \phi, \quad (3.25)$$

con z, ϕ dos distribuciones uniformes $z \in [0, 1)$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

Bibliografía

- [1] P. W Shor, Proc. of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press (1994).
- [2] L.K. Grover, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 212 (1996).
- [3] D. Deutsch, Proc. R. Soc. Lond. A. **400**, 97 (1985).
- [4] R. P Feynman, Int. J. of Theor. Phys. **21**, 467 (1982).
- [5] V. Scarani. Am. J. Phys. **66**, 956 (1998).
- [6] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin y J. S. Tsai, Nature, **398**, 786 (1999).
- [7] J. H. Plantenberg, P. C. de Groot, C. J. P. M. Harmans y J. E. Mooij, Nature, **447**, 836 (2007).
- [8] P. Kok y B. W. Lovett, Nature, **444**, 49 (2006).
- [9] T. Gaebel et al, Nature Phys., **2**, 408, (2006).
- [10] G. Nogues et al., Nature, **400**, 239 (1999).
- [11] O. Mandel et al., Nature, **425**, 937 (2003).
- [12] D. Leibfried et al., Nature, **438**, 639 (2005).
- [13] F. Schmidt-Kaler et al. Nature, **422**, 408 (2003).
- [14] H. Häffner et al., Nature, **438**, 643 (2005).
- [15] A. Barenco, C.H Bennett, R. Cleve, D.P DiVicenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J.A Smolin, y H. Weinfurter, Phys. Rev. A **52**, 3457 (1995).
- [16] D. Deutsch, A. Barenco y A. Ekert, **449**, 669 (1995).
- [17] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press (2001).
- [18] N.J Cerf, y S.E Koonin, Math. and Comp. in Simulation **47**, 143 (1998).
- [19] L. R. U. Manssur y R. Portugal, Europhys. Lett., **63**, 492 (2003).
- [20] K. Okano, L. Schulke y B. Zheng, Prog. of Theor. Phys. Suppl. **111**, 313 (1993).
- [21] G. Parisi y Y. S. Wu, Sci. in China A. **24**, 483 (1981).
- [22] R. Kubo, M. Toda y N. Hashitsume. Statistical Physics II, Springer-Verlag (1985).

- [23] N. Dunford y J.T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, (1958).
- [24] D. J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall (1995).
- [25] H. S. Greenside y E. Helfand, Bell Sys. Tech. J. **60**, 1927 (1981).
- [26] T. Pang, An introduction to computational physics, Cambridge University Press, (2006).