ASPECTOS TEÓRICOS DE LA SELECCIÓN DE CARTERAS EN ACTIVOS FINANCIEROS

1. Datos del alumno Hernández Serrano Martín 58 32 46 16 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 097158978
2. Datos del tutor Act. Marina Castillo Garduño
3. Datos del sinodal 1 Act. María Aurora Valdés Michell
4. Datos del sinodal 2 Act. Enrique Maturano Rodríguez
5. Datos del sinodal 3 Act. Miguel Santa Rosa Sierra
6. Datos del sinodal 4 Act. Ana Laura Duarte Carmona
7. Datos del trabajo escrito

Aspectos teóricos de la selección de carteras en activos financieros
78p
2007

Dedicada a:

Mi papá Jesús Hernández. Gracias por tus consejos y apoyo.

Mi mamá Delia Serrano. Gracias por tu esfuerzo y respaldo.

Mis hermanas Milly y Mari. Gracias por su ayudarme tanto.

Toda mi familia y amigos que me apoyaron de manera incondicional en el reto de realizar una carrera profesional.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En la presente tesis se desarrolla la teoría del portafolio moderno a partir de un lenguaje matricial mostrando que el criterio media varianza es un caso particular del criterio de la utilidad esperada. Se prueba la existencia y unicidad de los puntos que conforman la frontera eficiente a partir de teoremas y argumentos de convexidad.

Se deriva el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM) para toda una economía utilizando únicamente el teorema de dos fondos en presencia del activo libre de riesgo y la igualación de la oferta con la demanda del mercado de activos financieros. Se muestra también el Modelo del Índice Único como herramienta para estimar la matriz de varianzas y covarianzas.

En esta exposición se responden cuestiones como ¿por qué los rendimientos de los activos son logarítmicos y se distribuyen en forma normal más allá de la ley de los grandes números? Entre otras cosas, se analiza a la correlación como un coseno y se da a la volatilidad la interpretación del lado mayor de un triángulo a partir del la ley de los cosenos. Además de introducir el concepto de valor en riesgo con los modelos delta-normal y beta VaR para carteras.

Empero no todo el contenido se suscribe en márgenes teóricos. Conceptos como la eficiencia de los mercados financieros y el propio supuesto de normalidad de los rendimientos de los activos financieros se contrastan con la realidad utilizando datos del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores y dólar interbancario. La realidad más evidente, es la que se relata en el capítulo primero en el que se tratan de forma somera los casos, en cuanto a las inversiones, de las instituciones de seguros y los fondos de pensiones. El objetivo es mostrar la vigencia de la necesidad de apropiadas formas de inversión tanto para los inversionistas institucionales como para las personas físicas.

El supuesto clave de esta exposición es que a los inversionistas únicamente les preocupa el rendimiento esperado y el riesgo cuando deben decidir entre diferentes alternativas de inversión. Los tópicos torales son la volatilidad y el tratamiento de la misma a través de la diversificación.

Esta tesis se divide en cinco capítulos. El primero de ellos, hace referencia de los conceptos básicos presentes en la inversión en portafolios enfatizando la importancia de las buenas formas de invertir en el sector asegurador y el sistema de pensiones. En el segundo capítulo se muestra a la utilidad esperada como el medio para elegir entre alternativas aleatorias. El tercer capítulo se dedica al análisis del riesgo, rendimiento y valor en riesgo para el caso de un instrumento financiero además de presentar una observación sobre el supuesto de normalidad para los rendimientos de los activos. El penúltimo capítulo generaliza los conceptos señalados en el capítulo anterior para el caso de una cartera e indaga sobre la naturaleza de la frontera eficiente a través del teorema de dos fondos en ausencia de activo libre de riesgo y el teorema de un fondo con el activo libre de riesgo. En la parte quinta se deriva el CAPM para toda la economía y se muestran aplicaciones al respecto de la beta.

Con motivo de facilitar la lectura de los contenidos se ha diseñado un apéndice en el que se revisan la distribución normal y las operaciones del álgebra matricial.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LOS CONCEPTOS CLAVE

El presente capítulo tiene dos apartados: En el primero de ellos se plantean los conceptos básicos de la inversión en mercados financieros mientras que, en el segundo, se expresa la importancia de las correctas formas de invertir en activos sujetos a riesgo a través de carteras de inversiones en los casos del sector asegurador y del sistema de pensiones.

1.1.- Sistema financiero

El sistema financiero es el agregado de arreglos institucionales en el que se da la transferencia de fondos prestables hacia las entidades que requieren financiamiento a partir de entidades con recursos excedentes y a través de intermediarios financieros. Este sistema cuenta con siete funciones básicas que a continuación se enuncian:

1. Mecanismo de ahorro. El sistema financiero funge como receptáculo del ahorro público al ofrecer alternativas de inversión rentables y con un perfil de riesgo relativamente bajo.
2. Almacén de riqueza. Es mejor ahorrar el dinero en valores que bajo el colchón u otras alternativas que frecuentemente disminuyen el poder adquisitivo de los recursos.
3. Otorgar liquidez. En el sistema financiero es posible convertir los activos financieros en efectivo con una baja posibilidad de pérdida.
4. Proveedor de crédito. Los agentes económicos encuentran una fuente de financiamiento en el sistema financiero a tasas competitivas.
5. Sistema de pagos. Gran cantidad de pagos en las transacciones se realizan a través del sistema financiero. El pago de sueldos y salarios junto con las tarjetas de crédito constituyen ejemplos de ésta función.
6. Espacio para tratar el riesgo. En el sistema financiero se encuentra la industria del seguro para transferir los riesgos puros mientras que los riesgos especulativos se manejan con diversificación[1].
7. Medio para la política monetaria. El sistema financiero funciona como caja de resonancia para las políticas del banco central como lo son las operaciones de mercado abierto.

Los activos financieros son depósitos de valor que encarnan los fondos prestables. En general, un activo es un bien que genera un flujo de beneficios a lo largo del tiempo. Los flujos pueden ser de consumo como la vivienda, o bien, de efectivo cuando se trata de activos financieros. Acciones, bonos, derivados, divisas, commodities, productos estructurados, entre otros muchos, son ejemplos de este tipo de activos.

[1] Un riesgo puro es aquel que en caso de ocurrencia únicamente produce pérdida. El riesgo especulativo puede causar pérdidas y ganancias.

1.1.1.- Mercado financiero

El mercado se entiende como un mecanismo a través del cual oferentes y demandantes intercambian bienes y servicios.

En una economía existen tres tipos de mercados:

1. Mercado de factores. En él, se comercian los factores de la producción tierra, trabajo y capital. Pagándose por ellos renta, salario, entre otros.
2. Mercado de productos. En este mercado se intercambian bienes finales y servicios.
3. Mercado financiero. Se trata de canalizar el ahorro hacia agentes que requieren de recursos más allá de los que poseen.

El mercado financiero es la parte toral de todo sistema financiero debido a que logra la atracción de ahorros además de establecer el tipo de interés y los precios de los instrumentos financieros[2].

Los conceptos de mercado eficiente y mercado emergente representan en primer término, una idealización útil en la modelación de los mercados financieros y, en segundo lugar, la realidad en las condiciones de las finanzas en los países en vía de desarrollo.

1.1.2.- Mercado eficiente

En un mercado eficiente los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible y por tanto son precios justos. Existen tres formas de eficiencia para un mercado, a saber:

1. Forma débil de eficiencia. En esta circunstancia ningún individuo puede obtener ganancias extraordinarias al seguir estrategias de inversión basadas en la información histórica de los precios. Es decir, los precios descuentan la información pasada teniéndose como resultado la pérdida de relevancia del análisis técnico.

2. Forma semifuerte de eficiencia. En esta clase de eficiencia ningún inversionista obtiene rendimientos extraordinarios a través de reglas generadas a partir de la información pública disponible por lo que se dice que los precios descuentan tal información y en este caso el análisis fundamental es marginal.

3. Forma fuerte de eficiencia. En este tipo de eficiencia ningún individuo puede ganar rendimientos por encima del mercado utilizando cualquier información. En este caso se dice que los precios de los activos siguen un paseo aleatorio.

Para saber si un mercado financiero es eficiente se puede hacer uso de sofisticadas técnicas econométricas. Sin embargo, en ésta exposición se recurre a una sencilla regresión lineal. La Ilustración 1 plantea la relación entre los logaritmos naturales del Índice de Precios y Cotizaciones (IPyC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) de cada fin de mes y el valor

[2] En este material se usan de forma indistinta los términos: activo, valor, instrumento financiero y título.

logarítmico del mismo índice con un mes de retardo para el período de 1981-2007.

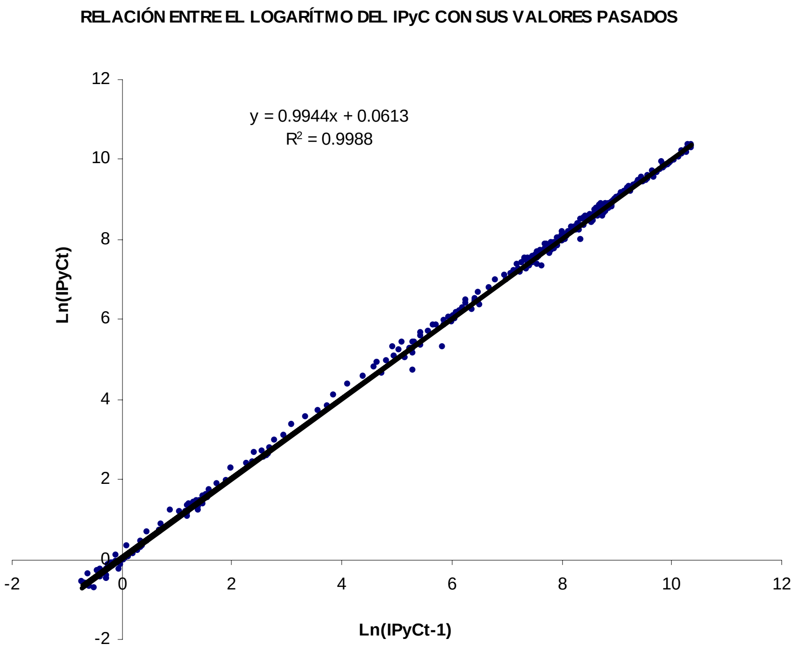

Ilustración 1El mercado mexicano de acciones puede ser eficiente. Elaboración propia con datos de Banco de México.

Nótese que la recta ajustada tiene pendiente cercana a la unidad y la ecuación que se aproxima a la siguiente:

$Ln(IPC_t) = a + Ln(IPC_{t-1}) + \varepsilon_t$

Donde

IPC_t: es el valor mensual del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.
a: es la constante de la regresión.
ε: representa un error aleatorio.

Desde el punto de vista teórico esta última ecuación significa que el rendimiento del mercado $Ln(IPC_t/IPC_{t-1}) = a + \varepsilon$ debe ser igual a un rendimiento esperado cercano a cero más, un error aleatorio debido a nueva información. Luego de introducir los datos del mercado mexicano se tiene que $Ln(IPyC_t)=0.0613+0.9944*Ln(IPyC_{t-1})$.

La evidencia empírica muestra que la hipótesis del mercado eficiente puede tener cabida en el caso mexicano. Es decir, el rendimiento del IPyC está en función de la información nueva por lo que se descarta la información pasada.

Esto último no significa que el mercado mexicano sea efectivamente eficiente debido a que en el corto plazo (minutos, horas y días) es posible predecir con precisión razonable el valor de las acciones con ayuda del análisis técnico o, en general, de información pasada.

1.1.3.- Mercado emergente

Se utiliza la expresión "mercado emergente" para designar al mercado financiero de un país en vías de desarrollo. Invertir en un mercado emergente supone asumir más riesgos que hacerlo en un mercado de un país desarrollado debido a los factores tanto políticos, económicos, sociales como de iliquidez de los títulos que cotizan en él.

En efecto, México es un mercado emergente y reflejo de ello es que tres emisoras de la BMV (América Móvil, Walmex y Cemex) concentran alrededor del 40% del peso en el IPyC por lo que casi la mitad del movimiento del mercado mexicano accionario obedece a las emisoras señaladas.

Un indicador relevante para los mercados emergentes es el que refleja la posibilidad de su incumplimiento en el pago de la deuda soberana en términos de una sobretasa en relación al rendimiento pagado por los títulos de deuda estadounidenses. Tal indicador recibe el nombre de riesgo país y es medido a través del Emerging Market Bond Index (EMBI) creado por el banco JP Morgan con base en una cesta de títulos de la deuda externa de 10 países emergentes en proporciones que reflejan el peso de cada uno en el mercado de deuda soberana.

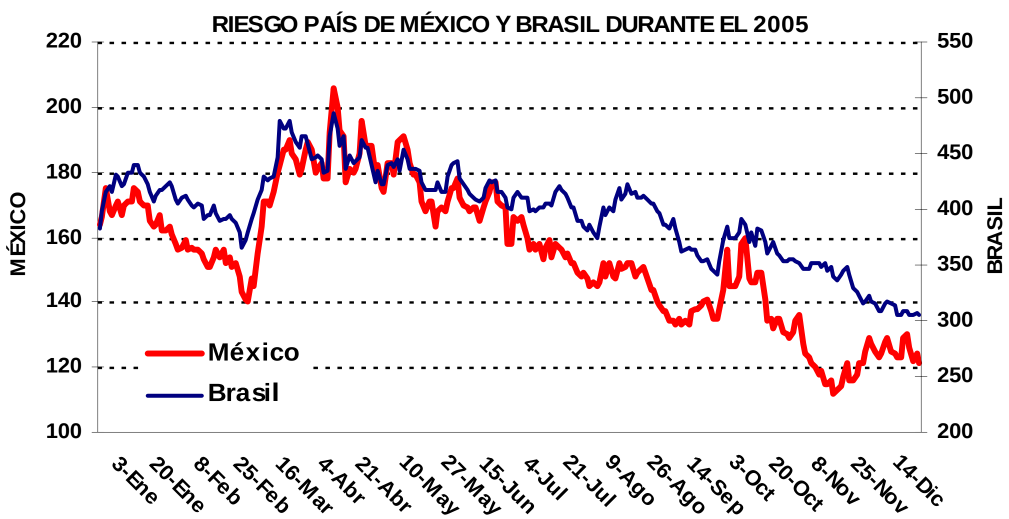

Ilustración 2 Las sobretasas por riesgo país de México y Brasil cerraron el 2005 en 121 y 305 puntos base respectivamente. Fuente: Elaboración propia con datos del Grupo Financiero Banamex.

El riesgo país se mide en puntos base en dólares y dar seguimiento a su evolución es práctica común de los participantes en los mercados financieros. La sobretasa por riesgo país puede tomar el valor desde unas cuantas decenas hasta miles de puntos base[3]. En la Ilustración 2 se muestra la evolución a la baja del riesgo país en los casos mexicano y brasileño durante el 2005. Al 30 de diciembre del mismo año los bonos mexicanos debían

[3] El 9 de junio de 2005 Argentina alcanzó un riesgo país de 6,777 puntos base.

pagar una sobretasa de 1.21%.

1.2.- La inversión

En economía, la inversión se refiere al uso de recursos en la producción de satisfactores teniéndose como consecuencia la creación de capital nuevo y se divide en tres clases: bienes de equipo (nueva planta y equipo), construcción (nuevas viviendas) y variación en las existencias (disminución o aumento de las existencias de una firma). Sin embargo, la acepción que encaja en esta exposición es aquella que aduce la colocación de recursos en bienes o servicios de forma tal, que a través de ellos, se esperan plusvalías. La inversión se puede realizar en dos facetas en la economía nacional o en el extranjero:

1. Directa. Se realiza en activos tangibles tales como maquinaria y, activos intangibles como la educación. Esta clase de inversión generalmente es de largo plazo y presenta poca liquidez.

2. Indirecta o inversión en cartera. Se refiere a la compra de instrumentos financieros como acciones. Generalmente es de corto plazo dada la existencia de mercados secundarios que otorgan liquidez a los activos financieros. La presente exposición trata este tipo de inversión.

Las inversiones no son completamente seguras, incluso las que se hacen en papeles gubernamentales dado que están sujetas a riesgos de mercado, crédito y operacional. El riesgo de una inversión condiciona la rentabilidad ofrecida por la misma en función del coste de oportunidad.

Una vez entendido el concepto de inversión el siguiente paso es analizar la conveniencia de una inversión sobre otra. En el caso de la inversión directa existen técnicas de evaluación de proyectos de inversión mientras que en la inversión en cartera, se hace análisis bursátil y se cuenta con la Teoría Moderna del Portafolio que es el tópico de esta exposición.

1.3.- Cartera de inversiones en una primera definición

Una cartera o portafolio de inversiones es un conjunto de al menos dos instrumentos financieros en los que se ha invertido de forma simultánea. Los activos con los que puede ser creada una cartera son variados y pueden proceder de los siguientes mercados:

- Mercado de dinero. Instrumentos de deuda de corto plazo.
- Mercado de capitales. Acciones, bonos e híbridos como los estructurados.
- Mercado de derivados. Futuros, opciones, warrants.
- Mercado de divisas. Monedas duras. Dólar, euro, yen, franco suizo y libra.
- Mercado de commodities[4]. Metales, ganado, granos, energéticos, entre otros.

Las carteras de inversiones sustentan su existencia en la idea de la diversificación que

[4] Siempre y cuando cuenten con la liquidez necesaria para hacer a las inversiones de corto plazo.

facilita la disminución del riesgo mejorando el rendimiento.

1.3.1.- Diversificación

El siguiente ejemplo brinda una idea intuitiva de lo que significa diversificar.

La fonda

En una pequeña fonda se ofrece a los comensales limonada. En los días calurosos, las limonadas incrementan los ingresos pero en los días frescos la gente disminuye el consumo de bebidas frías por lo que se siente una merma en las ventas. Si el dueño de la fonda introduce en su carta algo de café, entonces, cuando los días sean calurosos se podría ofrecer limonada en tanto que en los días fríos se puede ofrecer café por lo que se disminuye la posibilidad de pérdidas.

En este caso, la diversificación de productos conduce a la compensación de pérdidas en la limonada por medio de las ventas de café en los días frescos. Cuando los días sean calurosos disminuirá la venta de café pero aumentará la venta de limonadas por lo que en ambos casos la posibilidad de pérdida se reduce.

La diversificación encuentra sus orígenes en la *teoría de la diana* elaborada por Alfred Cowles en los años veinte. Esta teoría indica que es preferible comprar de todo lo que se encuentre en el mercado accionario para formar una cartera diversificada. Cowles concluyó que una cartera diversificada es mejor, en promedio, que seguir las mejores estrategias de inversión de los corredores de bolsa debido al pago de comisiones[5].

Posteriormente la idea de Cowles se perfeccionó a través de la Teoría Moderna del Portafolio iniciada por Markowitz. No debe olvidarse la frase clásica de la diversificación “no poner todos los huevos en una cesta” debida a Tobin.

La clave de la diversificación se encuentra en el grado de dependencia entre los instrumentos que conforman una cartera. Tales relaciones de dependencia se estiman con la correlación aunque existen nuevas técnicas como las cópulas y las ultramétricas que también son medidas de dependencia. Mientras menor sea la correlación de los activos, la cartera estará más diversificada.

1.3.2.- Rendimiento y Riesgo

Cuando se debe elegir entre dos carteras los indicadores más importantes son el riesgo y el rendimiento que presentan.

El rendimiento muestra el crecimiento en el valor de la cartera. Se debe distinguir entre rendimiento realizado y rendimiento esperado. El primero se refiere al rendimiento que en la realidad tuvo el portafolio en tanto que el segundo es una estimación del rendimiento futuro de la cartera.

[5] Las comisiones para corredores o brokers son fijas sin importar la no existencia de ganancias.

Frecuentemente el riesgo se define como la posibilidad de pérdida y se puede vincular con un mercado a la baja. Sin embargo, aún en este escenario es posible obtener ganancias mediante posiciones cortas. Por tanto, en estas notas el riesgo indica la dispersión de los rendimientos realizados con el rendimiento esperado.

Tanto el rendimiento como el riesgo cuentan con diferentes métodos de estimación como promedios móviles. Sin embargo, en este material se hace uso únicamente del rendimiento promedio y de la desviación estándar como estimadores del rendimiento y del riesgo respectivamente.

1.3.3.- Plazo

El horizonte de inversión es una estimación del periodo de tiempo que debe transcurrir para qua aumente la probabilidad de lograr el rendimiento esperado. La noción de horizonte de inversión está estrechamente vinculada a la de volatilidad. Cuanto más elevada sea la volatilidad, más prolongado deberá ser el horizonte de inversión. De allí la importancia de un horizonte de tiempo adaptado al tipo de inversión.

Los modelos presentados en esta tesis tienen validez para un período único considerado como el tiempo mínimo para rebalancear (cambiar la composición) o bien liquidar la cartera.

1.4.- Las inversiones de los inversionistas

En los mercados financieros existen diferentes tipos de inversionistas. No obstante, la necesidad de invertir y las condiciones en las que se encuentre el inversionista son los factores que determinan los tipos de inversiones en que participan.

Una institución financiera puede contar con distintos portafolios con base a las políticas de la alta dirección. Así, un banco, puede contar con un portafolio de trading conformado por instrumentos líquidos para rebalancear con frecuencia y un fondo de pensiones compuesto de instrumentos de mayor plazo con menor liquidez. Ambos portafolios pueden ofrecer la posibilidad de explotar ciertos arbitrajes regulatorios. Dicho arbitraje consiste en la inversión en instrumentos para los cuales los organismos que regulan el mercado soliciten un capital regulatorio que sea menor al capital económico[6]. El lector notará una pizca de la realidad sobre las inversiones en las instituciones de seguros y en el caso de las Afore.

1.4.1.- La industria del seguro

Las instituciones de seguros deben invertir las reservas debido a que éstas son los recursos con los que dan respuesta a los siniestros. En la circular S-11.2 emitida por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas se establecen las características de las inversiones en las que

[6] Con base en el acuerdo de Basilea, los organismos reguladores exigen un porcentaje de la inversión como capital regulatorio para impedir que la banca pierda solvencia. El capital económico es el que los modelos de estimación de riesgo crediticio señalan como el verdadero capital para garantizar la solvencia.

puede participar una aseguradora. Esta circular señala límites de inversión con base en el tipo de activos y en la clase de reserva como se muestra en las tablas I y II.

Tabla 1. Restricciones de inversión de reservas por parte de las autoridades regulatorias.

Tipo de valor	Porcentaje del portafolio
Valores emitidos o respaldados por el gobierno federal	Hasta el 100%
Valores emitidos o respaldados por instituciones de crédito	Hasta el 60%
Cualquier inversión distinta a las anteriores	Hasta el 30%

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Las instituciones de seguros deben también cuidar la liquidez de sus inversiones debido a que sus pasivos (siniestros) ocurren de forma aleatoria[7].

Tabla 2. Restricciones de liquidez en las inversiones de las reservas.

Reserva	Porcentaje mínimo de inversión en corto plazo
Obligaciones contractuales	100%
Siniestros ocurridos pero no reportados	75%
Riesgo en Curso	50%
Matemática	30%
Previsión	30%
Especial de Contingencia	30%
Riesgos Catastróficos	20%

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

La correcta administración de las inversiones en una empresa aseguradora es fundamental en su funcionamiento en virtud de al menos dos razones:

> 1.- El activo de las aseguradoras se compone mayoritariamente de inversiones en valores y operaciones con productos derivados, préstamos de distintas clases e inmobiliarias. La Tabla 3 contiene el porcentaje que del activo total (dado en miles de pesos) representan las inversiones para el mercado asegurador mexicano. Nótese que dicho valor fluctúa alrededor del 75%.

Tabla 3 Porcentaje del rubro de inversiones con respecto al activo del mercado asegurador mexicano.

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Activo	$ 229,706,620	$ 258,512,146	$ 300,630,347	$ 341,366,107	$ 378,635,730
Inversiones	$ 169,223,435	$ 197,490,919	$ 237,219,775	$ 254,280,790	$ 302,265,135
Inversiones/Activo	73.67%	76.40%	78.9%	74.48%	79.83%

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

[7] Las aseguradoras pagan las sumas aseguradas de acuerdo a distintas políticas como pago inmediato o pago en fin de mes.

2.- El estado de resultados refleja que una pérdida de operación puede ser compensada por el producto financiero. En la Tabla 4 (cifras en miles de pesos) se aprecia la evolución de la utilidad en operación, el producto financiero y la utilidad antes de impuestos del mercado de seguros. En el año 2002 la pérdida de operación no pudo ser compensada por el producto financiero a diferencia de los demás años.

Tabla 4 El producto financiero puede compensar la pérdida de operación en una aseguradora.

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Utilidad de operación	-$ 3,298,593	$ 9,407,735	-$ 3,843	-$ 5,837,437	-$ 6,078,962
Producto financiero	$ 10,030,878	$ 12,281,769	$ 11,060,352	$ 16,439,270	$ 19,649,279
Utilidad antes de impuestos	$ 6,732,285	$ 21,689,504	$ 9,798,521	$ 10,601,833	$ 13,570,317

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

1.4.2.- Fondos de inversión y fondos de pensiones

A diferencia del caso de las instituciones de seguro, los fondos de inversión y de pensiones hacen mayor eco en el caso de las personas físicas aunque éstos pueden ser empleados por cualquier firma[8].

Las sociedades de inversión son sociedades mercantiles que reúnen a un gran grupo de inversionistas, los cuales al participar en la misma se convierten en accionistas. El dinero de estos accionistas se invierte en un fondo (portafolio) con características bien definidas, diversificado en instrumentos de los diferentes mercados financieros y que busca optimizar los recursos con los que se cuenta. Los fondos se pueden componer de bonos y/o acciones nacionales o extranjeros además de contar con distintos grados de liquidez (diaria, mensual, etc.). Estos instrumentos cuentan con un prospecto de información en el que se describen las características del portafolio así como los derechos y obligaciones del inversionista. Cuando el fondo se compone de instrumentos de deuda debe contar con una calificación crediticia para discriminar el riesgo de impago de los activos del mismo.

Los fondos más importantes para la economía mexicana son los invertidos en el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) a través del cual las pensiones de los trabajadores participantes en este régimen se financian fundamentalmente por medio del ahorro individual. Esto último significa que el monto de la pensión está en función de la cantidad ahorrada y por supuesto de los rendimientos que dichos ahorros alcancen.

El proceso es simple, en principio el trabajador elige alguna Administradora de Fondos para el Retiro (AFORE). Esta institución, a través de una Sociedad de Inversión Especializada en el Ahorro para el Retiro (Siefore) invierte las cotizaciones del trabajador y da conocimiento de la evolución de sus ahorros por medio de estados de cuenta.

---

[8] Existen los planes privados de pensiones que complementan los beneficios de la seguridad social. Existen también fondos de inversión para personas morales.

A fin de incrementar los beneficios del futuro pensionista, el régimen de inversión de las Siefore contempla la obligación de alcanzar como mínimo una tasa de 3% real anual.

Sin embargo, aún con esta obligación la pensión proyectada que se alcanzaría es inferior a lo deseable por lo que el régimen de inversión ha ganado con el tiempo flexibilidad. Inicialmente, las Siefore únicamente podían invertir en instrumentos de renta fija en moneda nacional mas, en la actualidad, estas instituciones pueden invertir en valores internacionales e instrumentos que garantizan el ahorro original al vencimiento y que están ligados a índices accionarios. Para ello, existen dos tipos de canastas de activos en los que los ahorradores invierten: Siefore básica1 y Siefore básica 2.

Siefore básica 1

Se compone de valores gubernamentales, no gubernamentales e internacionales. El tipo de trabajadores que podrán invertir en esta Sociedad de Inversión son: los asignados; aquellos que tengan 56 años de edad o más, y quienes tengan menos de 56 años de edad que hayan elegido invertir sus recursos en la Siefore1. La Ilustración 3 muestra la composición del agregado de siefores básicas del tipo 1 al 31 de diciembre de 2005.

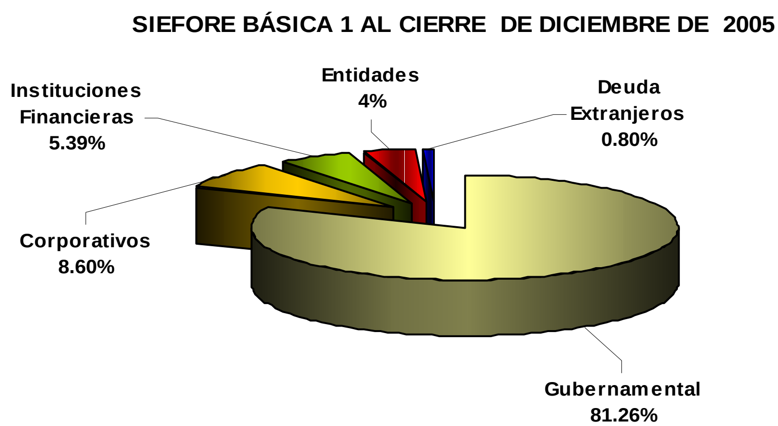

Ilustración 3. Composición de la Siefore básica 1 del mercado de Siefores. Fuente: Elaboración propia con datos de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.

Siefore básica 2

Al igual que el fondo 1, esta siefore contiene valores gubernamentales, no gubernamentales e internacionales y se agregan Notas de Capital Protegido vinculadas a índices accionarios. Dichas notas son resultado de la ingeniería financiera y permiten alcanzar mayor rendimiento con la salvedad de que el capital invertido queda garantizado. El tipo de trabajadores que podrán invertir en esta Sociedad de Inversión son: los asignados; los trabajadores que tengan 56 años de edad o más pero que deberán migrar a la siefore 1 y, quienes tengan menos de 56 años de edad que hayan elegido invertir sus recursos en la Siefore 2. La Ilustración 4 muestra la composición de la Siefore básica 2 para el mercado de siefores al 31 de diciembre. Nótese que en este portafolio se invierte en renta variable.

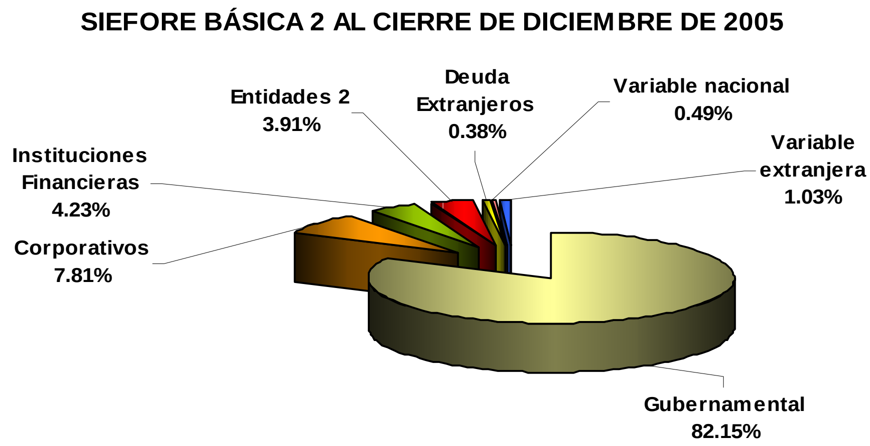

Ilustración 4. Con la adición de inversiones en renta variable nacionales y extranjeros se tiene mayor diversificación y se esperan mayores rendimientos.

Con los casos de la industria del seguro y la seguridad social se prueba que los tópicos referentes a las inversiones y la forma de realizarlas son de relevancia en el quehacer de un profesional de la actuaría. En los siguientes capítulos se hace abstracción de una economía en la que se tiene una cierta cantidad de activos y se busca la forma óptima de invertir en ellos a partir de la diversificación con el objeto de minimizar el riesgo dado un nivel de rendimiento.

CAPÍTULO 2 TEORÍA DE LA UTILIDAD ESPERADA

En este capítulo se presenta la teoría de la utilidad esperada como herramienta para la elección ante alternativas inciertas. Tal teoría, se expone de forma limitada pero sin sustraer los elementos clave sobre la comprensión de la selección de carteras. En los siguientes parágrafos se muestran los axiomas de la teoría de la utilidad así como la derivación de la utilidad esperada. Posteriormente se tratan los tópicos de dominancia estocástica, aversión al riesgo y el criterio de media-varianza. La Ilustración 5 indica el derrotero de este bloque de contenido.

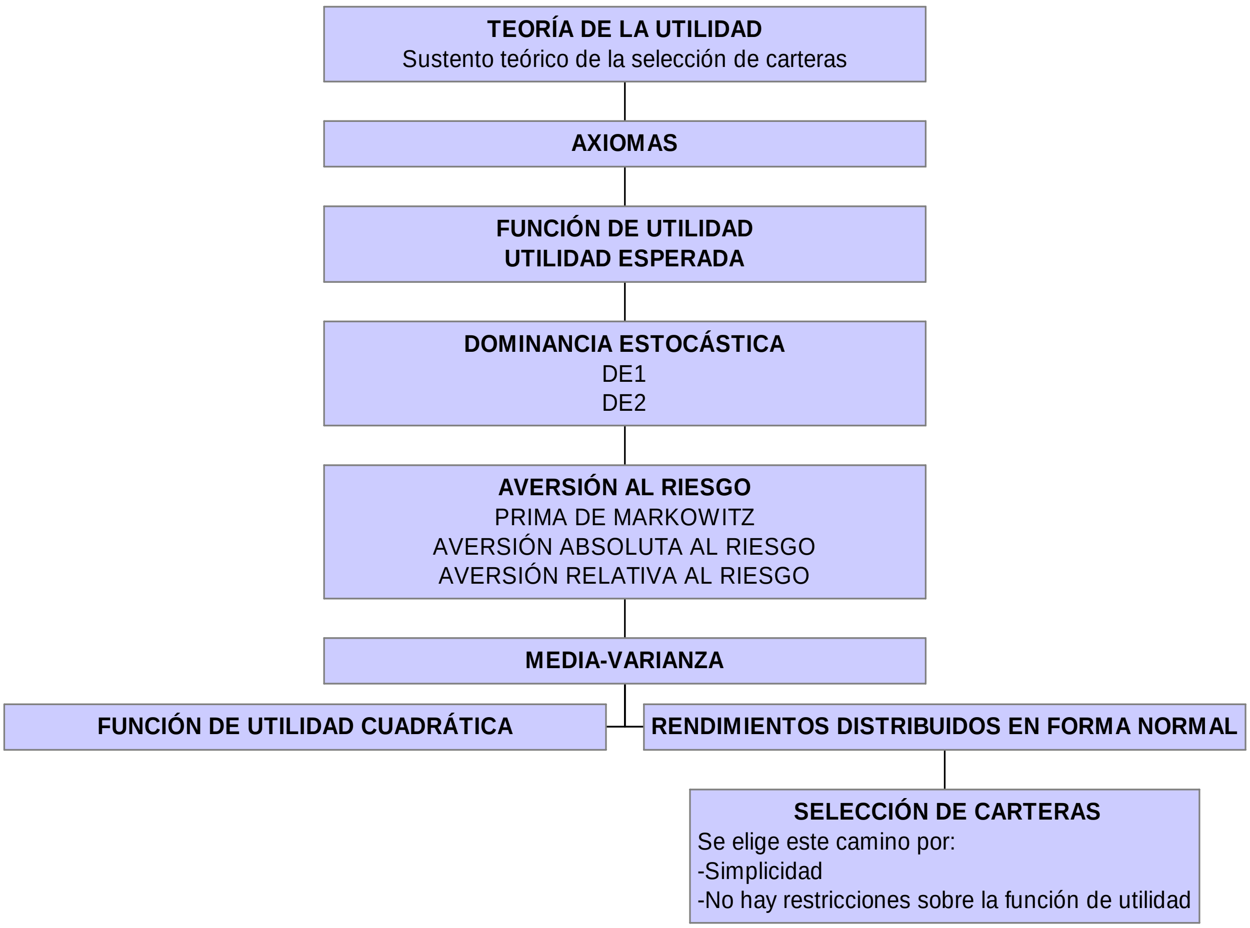

Ilustración 5. Sustento teórico de la selección de carteras de inversiones.

2.1.- El criterio del valor esperado para elegir entre alternativas inciertas

Frecuentemente se asume que las personas deciden sobre alternativas inciertas con base en el criterio del valor esperado. La invalidez de dicho criterio se ejemplifica a continuación considerando a un individuo con las siguientes alternativas:

1. Un billete de lotería *M1* que premia con 2000 unidades monetarias (u.m) con 5% de probabilidades y 2 u.m. con 95% de posibilidad. Suponiendo que el billete es gratuito, la representación de esta apuesta es:

$$M1=\begin{cases}2000 & 0.05\\ 2 & 0.95\end{cases} \qquad E[M1]=2000*0.05+(2)*0.95=101.9$$

2. La inversión *M2* de 100 u.m. en una cuenta de banco que paga sin riesgo *1%* de interés.

$$E[M2]=101$$

3. Un juego *M3* consistente en el lanzamiento de una moneda justa que se detiene en la primera aparición del anverso y en este caso paga 2^r unidades monetarias donde *r* es el número de lanzamientos hasta que se detiene el juego. El valor de la probabilidad del *r-ésimo* lanzamiento es 2^{-r} por lo que la esperanza de este juego es:

$$E[M3]=\sum_{r=1}^{\infty} 2^r * 2^{-r} = \infty$$

Bajo el criterio del valor esperado la tercer alternativa es la elección correcta. Sin embargo, al contar con un premio esperado infinito el costo de participar en tal juego es también infinito por lo que nadie querría participar en el mismo, es decir, el juego tiene una preferencia menor del que representa su valor esperado. El juego *M3* es mejor conocido como la paradoja de San Petersburgo.

La inconsistencia del criterio del valor esperado se resuelve con la idea de la utilidad esperada que en los siguientes parágrafos se construye a partir de axiomas.

2.2.- Teoría de la utilidad esperada

La teoría de la utilidad esperada da lugar a la elección cuando se tienen alternativas inciertas. Para comprender este tópico se deben conocer las ideas de relación de preferencia y lotería.

2.2.1.- Relaciones de preferencia

Dado un conjunto *K*, una relación de preferencia débil es un subconjunto del producto cartesiano de *K* consigo mismo y se denotará por ($\lesssim$). De manera tal que si $x,y \in K$ entonces $x \lesssim y$ significa *y* es al menos tan bueno como *x*.

Con base en la relación de preferencia ($\lesssim$) se obtienen las relaciones de preferencia estricta y de indiferencia.

- Preferencia estricta ($\prec$). Se define como $x \prec y \Leftrightarrow x \lesssim y \wedge$ no $y \lesssim x$.
- Indiferencia ($\approx$). Definida como $x \approx y \Leftrightarrow x \lesssim y \wedge y \lesssim x$.

Finalmente, una relación de preferencias es racional cuando se le atribuyen las propiedades de completez y transitividad.

- Completez. La relación ($\precsim$) es completa si $\forall x,y \in X$ se tiene $x \precsim y \;\vee\; y \precsim x$[1].
- Transitividad. La relación ($\precsim$) es transitiva si dados $x,y,z \in X$ si $x \precsim y \;\wedge\; y \precsim z \Rightarrow\; x \precsim z$.

La primer propiedad refleja la idea de que es posible comparar cualquier par de elementos del conjunto *K* en tanto que la transitividad es requerida para que se alcancen óptimos únicos en los problemas de optimización como se presentan en la teoría del consumidor.

2.2.2.- Loterías

Antes de presentar los axiomas de la teoría en cuestión es indispensable el entendimiento de la idea de lotería. Una lotería simple es un juego en el que se obtienen diferentes premios mutuamente excluyentes con probabilidades asociadas y tiene la siguiente expresión:

$$\ell(x_1, x_2, .., x_n : p_1, p_2, .., p_n) = \begin{cases} x_1 & \mathrm{p}_1 \\ x_2 & \mathrm{p}_2 \\ \vdots & \\ x_n & \mathrm{p}_\mathrm{n} \end{cases}$$

donde el premio x_i tiene p_i por probabilidad de ocurrencia. Esta expresión de lotería simple se puede abreviar al agrupar a los premios[2] y a las probabilidades en vectores $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ y $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,..,p_n)$ por lo que $\ell(\boldsymbol{x}:\boldsymbol{p})$ es una notación parsimoniosa.

También existen las loterías compuestas tales como $\ell(\ell_1, \ell_2 : p) = \begin{cases} \ell_1(\mathrm{x}:\mathrm{q}) & \mathrm{p} \\ \ell_2(\mathrm{y}:\mathrm{r}) & 1-\mathrm{p} \end{cases}$ en la que cada premio es una lotería.

Ejemplos. Sean dos loterías simples $\ell_1(\boldsymbol{x}:\boldsymbol{q})$, $\ell_2(\boldsymbol{y}:\boldsymbol{r})$ y sea $\ell(\ell_1, \ell_2:\boldsymbol{s})$ una lotería compuesta. Las loterías son tales que $\boldsymbol{x}=(2,4,6)$ $\boldsymbol{q}=(0.5,0.3,0.2)$ $\boldsymbol{y}=(6,8)$ $\boldsymbol{r}=(0.6,0.4)$ y $\mathbf{s}=(0.5,0.5)$.

$$\ell_1(2,4,6:0.5,0.3,0.2) = \begin{cases} 2 & 0.5 \\ 4 & 0.3 \\ 6 & 0.2 \end{cases} \qquad \ell_2(6,8:0.6,0.4) = \begin{cases} 6 & 0.6 \\ 8 & 0.4 \end{cases} \qquad \ell = \begin{cases} \ell_1 & 0.5 \\ \ell_2 & 0.5 \end{cases}$$

La lotería ℓ se puede reducir a una lotería simple al entenderse como una combinación lineal de las loterías. Es decir $\ell=0.5\ \ell_1+0.5\ \ell_2$ por lo que toma la siguiente forma simple:

[1] Se trata de una disyuntiva no excluyente.
[2] Los premios pueden ser positivos, negativos o nulos.

$$\ell = \begin{cases} 2 & p = 0.25 \\ 4 & p = 0.15 \\ 6 & p = 0.40 \\ 8 & p = 0.20 \end{cases}$$

Nótese que ahora ℓ es una lotería simple con vector de probabilidad $\boldsymbol{p}$. Para estimar las probabilidades de este vector se tiene el ejemplo del premio con valor de 6 que se ofrece en las loterías ℓ_1 y ℓ_2 por lo que la probabilidad de éste es *0.5(0.2)+0.5(0.6)*. Las probabilidades de los otros premios se calculan de forma análoga.

2.2.3.- Axiomas para la teoría de la utilidad esperada

Ahora que se dominan la ideas de relación de preferencia y lotería se presentan los cinco axiomas de la teoría de la utilidad.

Sea ℓ el conjunto de loterías concernientes a un individuo y sea X el conjunto acotado de resultados posibles, no negativos, para todas las loterías.

Axioma 1. Completez. Para todo $x,y \in X$ el agente presenta alguna de las siguientes situaciones:

- Prefiere a x sobre y denotado $y \prec x$
- Prefiere a y sobre x denotado $x \prec y$
- Es indiferente entre ambos $y \approx x$

Axioma 2. Transitividad. Se da con las siguientes situaciones para $x,y,z \in X$:

- $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
- $x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$

Axioma 3. Independencia fuerte. Sean $x,y,z \in X$ y $\ell_1, \ell_2 \in \ell$. Este axioma señala que:

$x \approx y \Rightarrow \ell_1(x,z : p) \approx \ell_2(y,z : p)$

Axioma 4. Mensurabilidad. Sean $x,y,z \in X$ y $\ell \in \ell$. El axioma indica que

$x \succ y \succeq z \vee x \succeq y \succ z \Rightarrow \exists!\, p$ tal que $y \approx \ell(x,z : p)$

Axioma 5. Graduación. Sean cuatro resultados $x,y,u,z \in X$. Suponiendo que $(x \preceq y \preceq z) \wedge (x \preceq u \preceq z)$ se tiene por el axioma 4 que existen loterías ℓ_1, $\ell_2 \in \ell$ tales que $y \approx \ell_1(x,z : p)$ y $u \approx \ell_1(x,z : q)$. Este axioma indica lo siguiente: Si $q \le p \Rightarrow u \preceq y$.

2.3.- Criterio de la utilidad esperada

Para desarrollar cl criterio de la utilidad esperada se requieren dos supuestos más:

1.- Los individuos siempre prefieren más riqueza.

2.- Para el individuo las desviaciones favorables sobre el promedio de la riqueza no pueden compensar a las desviaciones desfavorables sobre la riqueza promedio.

El primer supuesto indica la condición lógica de individuos que siempre desean mayor bienestar en tanto que el segundo detalla que existe aversión al riesgo pues por más elevado que sea el premio la posibilidad de una gran pérdida aleja a los individuos de eventos inciertos. Con estos supuestos y los cinco axiomas escritos es viable el desarrollo de la teoría.

2.3.1.- Función de utilidad

Es una función escalar que está definida en el conjunto de resultados X tal que representa los grados de preferencia para los diferentes resultados que en realidad representan niveles de riqueza. En forma matemática la función de utilidad toma la siguiente forma:

$U: X \to \Re$
$x \to U(x)$

El valor funcional $U(x)$ es irrelevante pues lo que importa es la preservación del orden $(X, \precsim)$ a través del orden de los números reales. Para ello se hace uso de transformaciones crecientes como las potencias o las afines $V(x)=aU(x)+b$ con $a>0$. Con el ánimo de ejemplificar esta situación considérense tres alternativas: peras, manzanas y naranjas y un individuo cuyas preferencias sobre las frutas son:

$manzana \prec naranja \prec pera$

La función de utilidad del individuo es:

$U(manzana)=12$
$U(naranja)=16$
$U(pera)=20$

Nótese que ahora se tienen números reales que se pueden comparar y es claro que $U(manzana) < U(naranja) < U(pera)=20$ por lo que se preserva el orden inicial. La transformación afín $2*U(x)+3$ es equivalente a la función $U(x)$ pues también preserva el orden inicial.

Proposición 1. Para todo $x,y \in X$ la función de utilidad debe respetar el orden de preferencias de la siguiente forma:
$U(x)>U(y) \Rightarrow x \succ y$

$U(x)<U(y) \Rightarrow x \prec y$
$U(x)=U(y) \Rightarrow x \approx y$

Demostración

Dado que X es un conjunto acotado el elemento $x_I=inf(X)$ se denomina equis infierno y es el peor resultado; el máximo $x_P=sup(X)$ se conoce como equis paraíso y es el mejor resultado.

Para todo $x,y \in X$ se tiene $x_P \succ x \succeq x_I \vee x_P \succeq x \succ x_I$ y $x_P \succ y \succeq x_I \vee x_P \succeq y \succ x_I$

Con base en el axioma 4 se tienen las siguientes equivalencias $x \approx \ell_1(x_I , x_P: p(x))$ y $y \approx \ell_2(x_I ,x_P: q(y))$.

Si se hace $U(x)=p(x)$ y $U(y)=q(y)$ entonces por el axioma 5 se tiene que:

- $U(x)>U(y) \Rightarrow x \succ y$
- $U(x)<U(y) \Rightarrow x \prec y$
- $U(x)=U(y) \Rightarrow x \approx y$ ■

2.3.2.-Teorema de la utilidad esperada

Proposición 2. La función de utilidad sirve para comparar alternativas aleatorias a través de la utilidad esperada.

Demostración

Sean $x,y,z \in X$. Partiendo de las equivalencias alcanzadas en la proposición 1 se tiene que $x \approx \ell_1(x_I , x_P : p(x))$ y $y \approx \ell_2(x_I , x_P : q(y))$ se construye una lotería compuesta tal que $z \approx \ell(\ell_1, \ell_2:r)$ como se muestra.

$$z \approx \begin{cases} x \approx \begin{cases} x_P & p(x) \\ x_I & 1 - p(x) \end{cases} & r(z) \\ y \approx \begin{cases} x_P & q(y) \\ x_I & 1 - q(y) \end{cases} & 1 - r(z) \end{cases}$$

Entonces $z \approx \ell(x_P , x_I: r(z)p(x)+(1-r(z))q(x))$ y se recuerda que $U(x)=p(x)$ y $U(y)=q(y)$ por lo que $U(z)=r(z)U(x)+(1-r(z))U(y)$ que se entiende como la utilidad esperada. ■

En términos más generales la utilidad esperada de una riqueza futura es $E[U(x)]=\sum U(x_i)p_i$ donde p_i es la probabilidad del *i-ésimo* premio. Para el caso continuo se tiene que la esperanza de la utilidad es $E[U(x)] = \int_{\Re} U(x) f(x) dx$ en donde *f(x)* es la función de densidad de los premios.

2.3.3.- Características de la función de utilidad

La preferencia de los individuos por mayor riqueza asentada en el supuesto 1 implica una función de utilidad creciente. Esta condición equivale a que la derivada de una función de utilidad, conocida como **utilidad marginal**, es positiva $U(x)^{/}>0$.

El supuesto 2 significa que el individuo tiene **aversión al riesgo** por lo que la utilidad marginal es decreciente, es decir $U(x)^{//}<0$, y esta condición equivale a una función de utilidad cóncava.

Ejemplos. La función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$ es creciente y cóncava pues $U^{/}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ y $U^{//}(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0$ véase la Ilustración 6.

Sin embargo, la función de utilidad cuadrática $U(x)=ax^2+bx+c$ puede ser cóncava y creciente dependiendo de los parámetros *a*, *b* y *c*.

Asumiendo que la función es creciente se debe considerar que conforme se avance en el nivel de bienestar se llega a un punto de inflexión en el que la primera derivada cambia de signo por lo que la función de utilidad es creciente y cóncava únicamente en el intervalo $\left[0, -\frac{b}{2a}\right]$ mientras que para valores mayores a $-\frac{b}{2a}$ el individuo prefiere cada vez menos riqueza.

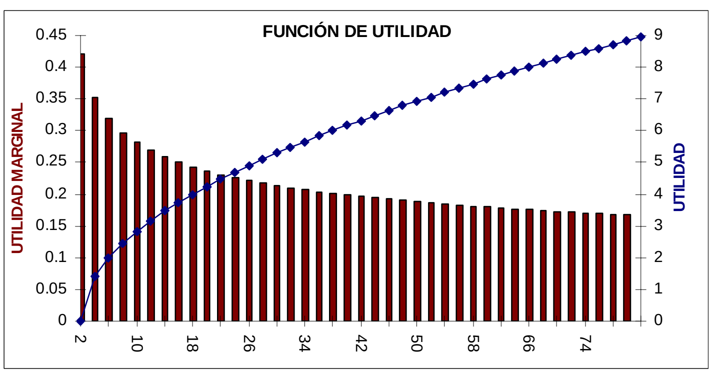

Ilustración 6 Características de la función de utilidad raíz cuadrada con derivada decreciente.

Las funciones de utilidad proporcionan la herramienta matemática para la toma de decisiones ante alternativas aleatorias como los rendimientos de las acciones en una cartera. En el tema que trata este documento, un inversionista racional opta siempre por la cartera de mayor utilidad esperada.

2.3.4.- Solución a la Paradoja de San Petersburgo

El teorema de la utilidad esperada da solución a la paradoja de San Petersburgo al encontrar un valor finito.

$$E[U(M3)] = \sum_{r=1}^{\infty} U(2^r) * 2^{-r} < \infty$$

Si se considera una función de utilidad *U(x)=Ln(x)* entonces la paradoja la utilidad esperada sería $E[U(M3)] = \sum_{r=1}^{\infty} Ln(2^r) * 2^{-r} = Ln(2) \sum_{r=1}^{\infty} r 2^{-r} = 1.39$ que en efecto es finito[3].

2.3.5.- Utilidad y rendimientos con distribución normal

Hasta este punto se presentó la idea de una función de utilidad como la representación de las preferencias de un individuo. Se supuso que tal función es creciente $U(x)^{/} > 0$ y cóncava $U(x)^{//} < 0$.

Además se han presentado ejemplos de funciones de utilidad como la función raíz y la función cuadrática pero, la selección de carteras no debe estar restringida a una familia de funciones de utilidad por lo que se precisa el siguiente supuesto:

Supuesto adicional. La función de utilidad se puede aproximar por un polinomio de Taylor.

Si x_0 es un punto del dominio de una función de utilidad *U(x)* entonces
$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sea *x* una variable aleatoria con esperanza $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ tal que representa el beneficio futuro de una inversión.

Si se hace $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(\mu)}{k!} (x - \mu)^k$ entonces para determinar la utilidad esperada $E[U(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(\mu)}{k!} E[(x - \mu)^k]$ se deben conocer todos los momentos centrales de la variable aleatoria *x*. Esta situación se evita cuando la función de utilidad es cuadrática pues las derivadas de orden mayor o igual a tres se anulan. Lamentablemente esta función no se puede asignar a todos los inversionistas por lo que es preferible suponer que $x \sim N(\mu, \sigma)$ debido a que todos los momentos de esta variable aleatoria se obtienen a partir de los dos primeros como se prueba en el apéndice.

---

[3] Ciertamente pueden diseñarse otras apuestas de forma tal que la paradoja ocurra nuevamente. En este caso se puede utilizar una función de utilidad acotada aunque de no hacerse esto último en realidad no existe un impacto en la teoría.

Bajo el supuesto de normalidad para *x* no se requieren más supuestos para la función de utilidad solicitándose únicamente que se pueda aproximar por un polinomio de Taylor además de ser cóncava y creciente.

2.4.- Aversión al riesgo

La concavidad de una función de utilidad es síntoma de la aversión al riesgo del inversionista pero se puede obtener más información sobre la cantidad de riesgo que un inversionista está dispuesto a tolerar por medio de las siguientes medidas:

- Coeficiente de Arrow-Pratt *A(x)*
- Aversión relativa al riesgo *R(x)*

Previa derivación de tales medidas se debe conocer el concepto de equivalente cierto.

2.4.1.- Equivalente cierto

El equivalente cierto de un nivel de riqueza incierto es una cantidad segura tal que la su utilidad es igual a la utilidad esperada de la riqueza incierta.

En términos matemáticos el valor de *C* es equivalente cierto del nivel de riqueza *x* cuando $U(C)=E[U(x)]$ o de forma explícita $C=U^{-1}(E[U(x)])$.

Para ejemplificar considérese a un inversionista con función de utilidad $U(x) = -e^{-x}$, una riqueza actual de 10 y una riqueza nueva $x=10+\ell$ tal que $\ell = \begin{cases} -5 \text{ con p} = \frac{1}{2} \\ 5 \text{ con p} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Entones $E[U(x)] = -\frac{1}{2}[e^{-5} + e^{-15}] = -0.003369$ por lo que el valor del equivalente cierto es $C=-ln(-(-0.003369))=5.6931$ y $U(C)=0.003369$.

Por lo tanto, el inversionista es indiferente entre *5.69* unidades monetarias ciertas y el nuevo nivel de riqueza. La diferencia entre el nivel de bienestar actual y el equivalente cierto *10-5.6931=4.3069* se entiende como una prima de seguro que el inversionista pagaría por no enfrentar el nivel futuro de renta $x+\ell$.

2.4.2.- Coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow -Pratt

Considere un inversionista con función de utilidad *U(x)* tal que *x* es el nivel de riqueza inicial y un nivel de riqueza final $x+\varepsilon$ donde ε una variable aleatoria con varianza σ_ε^2 que representa un juego justo por lo que $E[\varepsilon]=0$.

Con estos datos se desea calcular la prima Π que el inversionista pagaría por no encarar la incertidumbre del nivel de riqueza final.

Sea *C* el equivalente cierto de $x+\varepsilon$ es decir que $U(C)=E[U(x+\varepsilon)]$. Con el objeto de encontrar una expresión analítica para la prima Π se hace una aproximación de Taylor de segundo orden alrededor del nivel de *x* para $U(x+\varepsilon)$.

$$U(x+\varepsilon)=U(x)+U'(x)(x+\varepsilon-x)+\frac{1}{2}U''(x)(x+\varepsilon-x)^2$$

Se toma la esperanza de esta aproximación recordando que *x* es un valor dado

$$E[U(x+\varepsilon)]=U(x)+U'(x)E[\varepsilon]+\frac{1}{2}U''(x)E[(\varepsilon)^2]=U(x)+\frac{1}{2}U''(x)\sigma_\varepsilon^2$$

Si se recuerda que la prima es la diferencia entre el nivel de riqueza actual y el equivalente cierto se tiene la siguiente expresión:

$$\Pi=x-C\Rightarrow C=x-\Pi\Rightarrow U(C)=U(x-\Pi)$$

Al realizar una aproximación de Taylor de primer orden alrededor[4] de *x* se obtiene:

$$U(x-\Pi)=U(x)+U'(x)(x-\Pi-x)$$

Dado que *C* es equivalente cierto entonces $U(x-\Pi)=E[U(x+\varepsilon)]$ por lo que al igualar las aproximaciones se tiene:

$$U(x)+U'(x)(-\Pi)=U(x)+\frac{1}{2}U''(x)\sigma_\varepsilon^2\Rightarrow -\Pi U'(x)=\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2U''(x)\Rightarrow$$

$$\Pi=-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

Esta prima Π se conoce como la prima de Arrow-Pratt y dado que $\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2$ es constante se hace la definición del coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt $A(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}$.

Para analizar la aversión al riesgo de un individuo se toma la derivada del coeficiente. Si la derivada es positiva entonces el individuo está dispuesto a destinar mayores recursos a inversiones riesgosas. Cuando la derivada es negativa entonces existe aversión al riesgo por

[4] Alrededor de otro punto distinto de X sería ilegítimo pues la primera aproximación se hizo para ese punto.

lo que cada vez se destinarán menores recursos a inversiones riesgosas y, si la derivada es nula, se mantiene la misma cantidad de unidades monetarias en las inversiones riesgosas.

2.4.3.- Coeficiente de aversión relativa al riesgo

La aversión relativa al riesgo indica el porcentaje de riqueza que se sacrificaría por no participar en una lotería.

Como en el caso anterior, una derivada positiva indica que el individuo incrementa el porcentaje de riqueza destinado a inversiones riesgosas. Si la derivada es negativa entonces existe aversión al riesgo cada vez se destinará un menor porcentaje de riqueza a inversiones riesgosas y, si la derivada es nula, se mantiene el mismo porcentaje de unidades monetarias en las inversiones riesgosas. De forma análoga a como se hizo con el coeficiente de Arrow-Pratt se obtiene el coeficiente de aversión relativa al riesgo $R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)}$.

Ejemplo: Analizar a un individuo con función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$. Por la definición de los coeficientes se requieren las primeras dos derivadas con respecto a la riqueza.

$$U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \text{y} \quad U''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0. \quad A(x) = -\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow A'(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$$

$$R(x) = -\frac{xU''(x)}{U(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow R'(x) = 0$$

Se observa que la derivada del coeficiente de aversión absoluta al riesgo es negativa por lo que el individuo invertirá mayor cantidad de recursos en activos riesgosos. La aversión relativa al riesgo es constante por lo que el individuo siempre invertirá el mismo porcentaje en activos riesgosos. En la Ilustración 7 se muestra el comportamiento de ambos coeficientes.

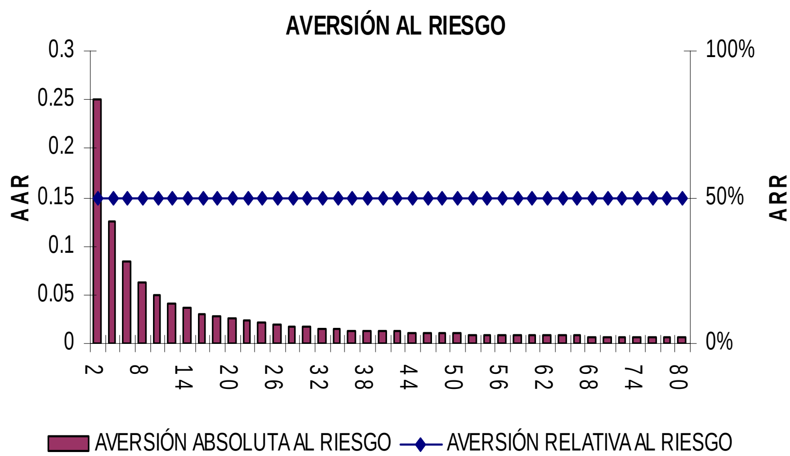

Ilustración 7. Coeficientes de aversión absoluta (AAR) y aversión relativa (ARR) al riesgo de la función de utilidad raíz cuadrada.

2.5.- Dominancia estocástica

Si el objetivo es elegir entre distintas carteras con base en los indicadores de riesgo y rendimiento se debe hacer la definición de dominancia estocástica para fincar los criterios de decisión. Para este apartado *A* y *B* son dos activos diferentes, R_A y R_B son los respectivos rendimientos con funciones de distribución $F_A(x)$ y $F_B(x)$.

Dominancia estocástica de primer orden. El activo *A* domina en este sentido al activo *B* cuando $F_A(x) \leq F_B(y)$.

Para entender esta definición se requieren unas cuantas operaciones matemáticas como se muestran:

$$F_A(x) \leq F_B(x) \Leftrightarrow -F_B(x) \leq -F_A(x) \Leftrightarrow 1-F_B(x) \leq 1-F_A(x) \Leftrightarrow P\{R_A \geq x\} \geq P\{R_B \geq x\}$$

Significa que es mayor la probabilidad de obtener un rendimiento superior con el activo *A* que con el activo *B*.

Dominancia estocástica de segundo orden. El activo *A* domina en este sentido al activo *B* cuando $\int_{-\infty}^{t} F_A(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} F_B(x)dx$.

Esta definición asume aversión al riesgo por parte del inversionista y significa que se preferirá al activo *A* pues se acumula menor probabilidad en la cola izquierda de la distribución $F_A(x)$ que es la menos desfavorable sin importar la renuncia a un mejor rendimiento. Para aterrizar estas ideas de dominancia estocástica se muestran a continuación las distribuciones de tres variables aleatorias normales con distintos parámetros.

Tabla 1. Distribuciones normales y dominancia estocástica.

Distribución normal	*Media*	*Desviación estándar*
F1	*0.1*	*0.17*
F2	*0.2*	*0.17*
F3	*0.21*	*0.3*

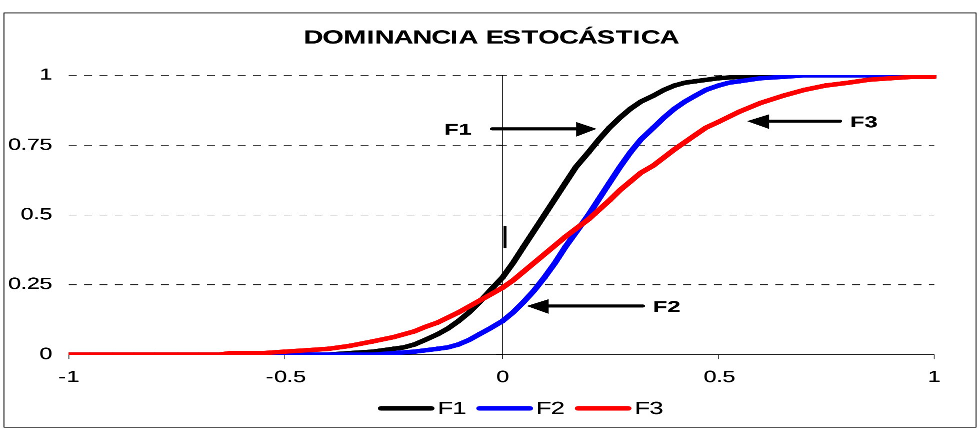

Ilustración 8. Dominancia estocástica.

En la Ilustración 8 se observa que F2 domina en primer orden a F1 mientras que F3 es dominada en segundo orden por F2 pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda a pesar de tener una media menor que F3 y esto muestra la aversión al riesgo.

2.5.1.- Dominancia estocástica y función de utilidad

Dominancia estocástica de primer orden con utilidad esperada. Se dice que el activo A domina en éste sentido al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$ y $U^{\prime}>0$.

Dominancia estocástica de segundo orden con utilidad esperada. El activo A domina en éste sentido al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$ y $U^{\prime\prime}<0$.

Dominancia estocástica con utilidad esperada. Si se considera que $U^{\prime}>0$ y $U^{\prime\prime}<0$ el activo A domina al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$.

Esta última definición de dominancia estocástica y el supuesto de rendimientos con distribución normal conduce a criterios de dominancia conocidos como media-varianza.

2.5.2.- Criterios de media y varianza para la dominancia estocástica

Sean $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$, $R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$, $Y \sim N(\mu, \sigma)$, $U^{\prime}>0$, $U^{\prime\prime}<0$ y sea y_0 el nivel de riqueza inicial. Entonces son válidos los siguientes criterios de dominancia.

Proposición 3. Dominancia estocástica de primer orden. El activo A domina al activo B cuando $\mu_A \geq \mu_B$ y $\sigma_A = \sigma_B$.

Demostración.

$Y = \sigma Z + \mu$ con $Z \sim N(0,1)$

El nivel de riqueza futuro es $y_0(1+\sigma Z+\mu)$ con utilidad esperada $E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]$.

Al tomar la derivada parcial de esta esperanza con respecto al parámetro de localización μ se observa que es positivo por lo que la utilidad esperada es creciente con respecto a la media de los rendimientos normales y se sostiene la nueva definición de dominancia estocástica de primer orden.

$$E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))] = \int_{\Re} U(y_0(1+\sigma z+\mu)) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma z+\mu))]}{\partial \mu} = \int_{\Re} U^{\prime}(y_0(1+\sigma z+\mu)) y_0 \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz > 0 \text{ pues } U^{\prime}>0. \ \blacksquare$$

Con este resultado se tiene la siguiente regla: Dado un nivel de riesgo elegir el activo o cartera de mayor rendimiento.

Proposición 4. Dominancia estocástica de segundo orden. El activo *A* domina al activo *B* cuando $\sigma_A \leq \sigma_B$ y $\mu_A = \mu_B$. La prueba de esta afirmación sigue la misma tónica que la anterior pero se hace uso de la concavidad de la función de utilidad.
Demostración.

$$\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma z+\mu))]}{\partial \sigma} = \int_{-\infty}^{0} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))zy_0 \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))zy_0 \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma(-z)+\mu))(-z)y_0 \frac{e^{-\frac{(-z)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + \int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))z\sigma \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} zy_0 \{U^{/}(y_0(\sigma z+\mu+1)) - U^{/}(y_0(-\sigma z+\mu+1))\} dz < 0$$

Dado que $U^{//}<0$ y U es una función creciente se tiene que la derivada parcial de la utilidad esperada con respecto a la desviación estándar es negativa por lo que a menor volatilidad se tiene afecta en menor grado a la utilidad. ■

Entonces la aversión al riesgo $U^{//}<0$ significa la siguiente regla: Dado un nivel de rendimiento elegir el activo de menor riesgo.

Para mostrar éstas ideas se tiene la siguiente lista de activos que se identifican con base a riesgo y al rendimiento.

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
A	*30%*	*17%*
B	*30%*	*53%*
C	*30%*	*19%*
D	*15%*	*12%*
E	*-2%*	*12%*
F	*18%*	*12%*

Tabla 2. Ejemplos de dominancia estocástica.

Dominancia estocástica de primer orden.

Para aplicar este criterio se debe fijar un nivel de riesgo. Para los activos D, E y F el nivel de riesgo es 12% por lo que a continuación se ordenan.

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
F	*18%*	*12%*
D	*15%*	*12%*
E	*-2%*	*12%*

Tabla 3. Dominancia estocástica de primer orden.

El activo F domina en este sentido a los activos D y E.

Dominancia estocástica de segundo orden

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
A	*30%*	*17%*
C	*30%*	*19%*
B	*30%*	*53%*

Tabla 4. Dominancia estocástica de segundo orden.

En este caso el activo A domina a los activos C y B al tener menor volatilidad dado un nivel de rendimiento. En la Ilustración 9 están los seis activos en el plano riesgo-rendimiento. En este momento surge la pregunta sobre la preferencia entre los activos A y F. Para responder a esta cuestión se requiere de la utilidad esperada. Si la utilidad esperada del activo A es mayor que la utilidad esperada del activo F entonces el activo que se elige es el A. En caso contrario se elige a F. Es decir, la elección depende de las características personales del inversionista.

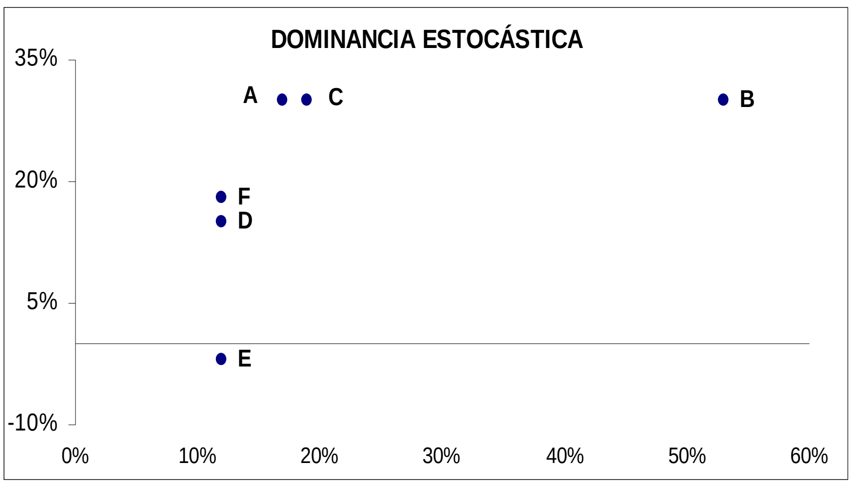

Ilustración 9. Dominancia estocástica con media y desviación típica.

Hasta este punto se ha determinado que cuando el rendimiento de un activo financiero se distribuye en forma gaussiana entonces se puede hacer uso de cualquier función de utilidad continua y doblemente diferenciable. Esta condición da lugar la selección de cartera con los criterios de media-varianza y de dominancia estocástica con la teoría de la utilidad esperada.

CAPÍTULO 3 RENDIMIENTO, RIESGO Y TEMAS ACCESORIOS

En este capítulo se aterrizan los conceptos de rendimiento, riesgo, venta en corto y valor en riesgo para un activo financiero. Todos estos tópicos son torales en la compresión del capítulo siguiente en donde se generalizan para el caso de un portafolio. En la parte final de este bloque se hace una observación al supuesto de normalidad para los rendimientos de los activos.

3.1.-Rendimiento

Como se justificó en el capítulo anterior, debe suponerse que los rendimientos de los activos se distribuyen en forma normal por lo que se pasa ahora a la determinación de los mismos a partir de los precios de las acciones asumiendo que no hay pago de dividendos.

Sea S_t el precio de un activo en el día t. Entonces el rendimiento del activo en ese día es $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$.

Al hacer una aproximación de Taylor de primer orden alrededor del precio anterior se obtiene otra definición para el rendimiento conocida como variación porcentual.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \approx \ln\left(\frac{S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) + \frac{1}{S_{t-1}}\frac{S_{t-1}}{S_{t-1}}\left(S_t - S_{t-1}\right) \Rightarrow R_t \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Sin embargo, desde el punto de vista teórico, el uso de esta aproximación conduce a probabilidades positivas para precios negativos pues al estar R_t distribuido en forma normal cuando $R_t \to -\infty \Rightarrow \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} < -1 \Leftrightarrow S_t - S_{t-1} < -S_{t-1} \Leftrightarrow S_t < 0$ partiendo de $S_{t-1}>0$.

Con el uso de los rendimientos logarítmicos este detalle teórico se salva pues cuando $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \to -\infty \Rightarrow \frac{S_t}{S_{t-1}} \to 0 \Rightarrow S_t \to 0 \Rightarrow S_t > 0$ por lo que nunca existen precios negativos al estar inferiormente acotados por cero.

Otra ventaja de los rendimientos logarítmicos es que se pueden agregar facilitando la presentación del rendimiento medio anualizado. El rendimiento para τ periodos esta dado por $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-n}}\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\frac{S_{t-1}}{S_{t-2}}\cdots\frac{S_{t-n+1}}{S_{t-n}}\right) = \sum_{k=0}^{\tau-1} R_{t-k}$.

Generalmente se considera que un año tiene 252 días para el mercado accionario por lo que al tenerse el estimado del rendimiento medio diario *E[R]* simplemente se multiplica por este número de días para obtener el rendimiento medio anualizado[1].

A partir de la estadística paramétrica se tiene que el estimador máximo verosímil del rendimiento medio es $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} R_i}{\tau}$ para una muestra de tamaño τ.

3.2.- Volatilidad

La desviación estándar indica la dispersión alrededor del rendimiento medio de las observaciones y sirve como un estimador del riesgo que representa la inversión en un activo. El estimador máximo verosímil de la desviación estándar es $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\tau}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{\tau}}$ no obstante el estimador que se utilizará en lo siguiente es $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\tau}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{\tau - 1}}$ debido a que es insesgado.

Existen numerosos métodos para estimar a la desviación estándar y entre ellos se encuentran los modelos GARCH que perciben cambios en el tiempo de la varianza condicional dejando constante la varianza incondicional. Es decir que el proceso estocástico que siguen las acciones no es estacionario en forma local pero si lo es en forma asintótica.

Para anualizar la volatilidad se debe considerar la regla de la raíz cuadrada que parte del supuesto de que la varianza se escala con el tiempo. Para explicar esta idea supóngase que se tienen τ observaciones del rendimiento de un activo las cuales se consideran independientes debido a la hipótesis del mercado eficiente.

Si $R_1, R_2, \ldots, R_\tau$ son las observaciones independientes e idénticamente distribuidas con varianza σ^2 entonces el agregado de estas variables es el rendimiento para un periodo de τ días por lo que la varianza de $\sum_{t=1}^{\tau} R_t$ que es la suma de las varianzas de los rendimientos de forma individual dada la independencia.

$$Var\left(\sum_{t=1}^{\tau} R_t\right) = \sum_{t=1}^{\tau} Var(R_t) = \tau\sigma^2 \Rightarrow desv.est\left(\sum_{t=1}^{\tau} R_t\right) = \sqrt{\tau}\sigma\ .$$

[1] Todos los rendimientos del mercado deben presentarse en forma anual o anualizados.

Es decir que la volatilidad para un periodo τ es la raíz cuadrada de ese periodo por la volatilidad diaria. Entonces, para anualizar la volatilidad diaria se debe multiplicar a esta por la raíz de 252 que es el número de días en los que está activo el mercado.

3.3.-Venta en corto

Para los empresarios, la regla de *compra barato y vende caro* es común y necesaria para la viabilidad de una firma. Para un inversionista en cartera, además de esta regla puede cumplirse la siguiente: *vende caro y compra barato* la cual proviene de la posibilidad de ventas en corto.

Para una mejor explicación de este concepto se debe comprender los significados de posición larga y posición corta.

Posición larga. Se asume una posición larga en un activo cuando se apuesta a que el precio de éste se incremente. Es decir, un alza en el valor del bien beneficia al dueño. En este sentido el dueño compra barato con la expectativa de vender caro.

Como ejemplo se tiene una posición larga en un futuro. Si en la fecha de entrega el precio de contado del subyacente es mayor que el precio de entrega entonces el comprador habrá obtenido un beneficio debido al incremento en el precio del subyacente.

Posición corta. La posición corta implica la posibilidad de obtener ganancias en un mercado a la baja. Es decir que el dueño de la posición corta se beneficia si el precio del activo baja y el ejemplo es la venta de un futuro.

Venta en corto. Un caso particular de posición corta es la venta en corto. Esta idea se puede explicar a partir de los siguientes pasos:

- Solicitar en préstamo un activo con la promesa de entregarlo luego de un periodo de tiempo T.
- Al tiempo de recibir el activo, éste se vende por una cantidad S_0.
- Transcurrido el plazo se debe comprar el activo por un precio S_T y entregarlo al dueño original.

Como se aprecia, la venta en corto significa la venta de un activo que no se posee y esta operación brinda ganancia cuando el precio del activo decrece. Es decir que se habrá ganado cuando $S_0>S_T$ y la ganancia o prima realizada es $S_0 - S_T$.

Las ventas cortas implican elevados riesgos debido a que las ganancias están acotadas pues el precio sólo puede disminuir hasta cero en tanto que la pérdida puede ser ilimitada cuando el precio tiende a infinito.

Obsérvese que el flujo de efectivo de esta operación es siempre negativo pues al inicio es $-S_0$ y al final $-S_T$. Curiosamente la tasa de rendimiento es negativa cuando se tienen ganancias pues en este caso $S_0 > S_T \Rightarrow \frac{S_T - S_0}{S_0} < 0$ pero dado que la inversión inicial es $-S_0$ se tiene ganancia positiva $-S_0 \frac{S_T - S_0}{S_0} = S_0 - S_T > 0$.

Debe advertirse que en la práctica las ventas cortas requieren de garantías procuradas por el elevado riesgo que representan. También, en la venta corta hay que otorgarle un premio a quien presta las acciones. Además si en el periodo de tiempo en que la acción está tomada en préstamo existe pago de dividendo éste debe pagarse al dueño.

Ejemplo de venta en corto.

Suponga que un agente económico posee 1000 acciones de la emisora A que hoy cotizan a 25 unidades monetarias. La venta en corto se ejemplifica de la siguiente forma:

- Un inversionista pide esas acciones al agente con la promesa de entregárselas en siete días.
- El inversionista vende esas acciones al precio actual de 25 obteniendo 25,000 unidades monetarias que puede o no invertir en otros instrumentos en los que estaría largo.
- Pasados los siete días el inversionista compra 1000 acciones de la emisora A a un precio de 24 u.m. y las regresa al agente obteniendo una ganancia de 1000 u.m.

Ilustración 10. La venta en corto puede crear ganancias finitas y pérdidas no acotadas.

En la Ilustración 10 se observa el perfil de riesgos de esta operación. Si pasados los siete días el precio de la acción de la emisora A es inferior a 25 u.m. entonces el inversionista obtiene ganancias mientras que en caso contrario las pérdidas pueden ser ilimitadas.

3.4.- Valor en riesgo de un activo financiero

Cuando se toma una posición en un activo es necesario conocer el nivel de exposición al riesgo de mercado en términos monetarios. Es decir, determinar el monto de la pérdida que se puede tener en caso de un mercado bajista.

El riesgo de mercado es la incertidumbre acerca de los rendimientos futuros de una inversión, como resultado de movimientos adversos en las condiciones de los mercados financieros. La forma de determinar el grado de perdida monetaria por riesgo de mercado se da a través del Valor en Riesgo (VaR) entendido como una medida de riesgo que, para un horizonte de tiempo, estima la pérdida máxima posible dado un nivel de confianza. En términos más formales se brinda la siguiente definición:

Valor en Riesgo. Es un cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias de un activo o portafolio de inversiones. En otros términos, si X es la variable aleatoria que representa las pérdidas y ganancias de una posición con distribución F, entonces para un horizonte T y nivel de confianza q>0.5

$$VaR_q=F^{-1}(1-q)=inf\{x\in\Re : F(x)\geq 1-q\}$$

En la Ilustración 11 se describe el VaR para un nivel de confianza de 95%. Esto último significa que, en promedio, en 5% de las veces la pérdida rebasará el valor del VaR.

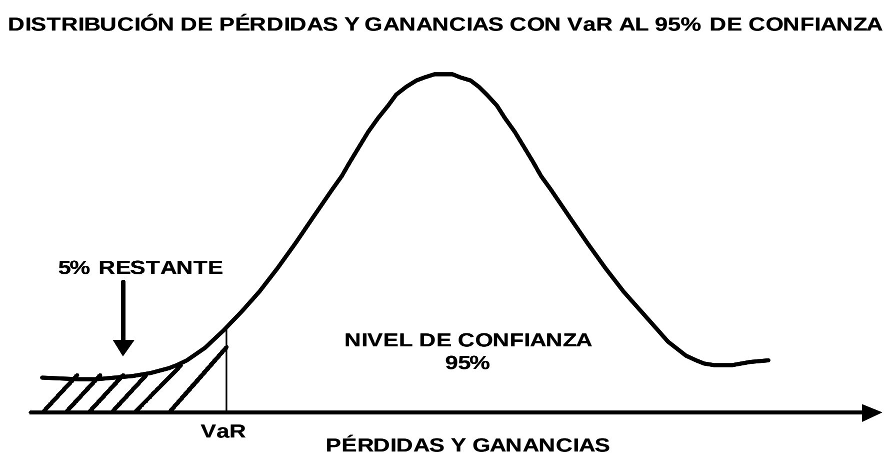

Ilustración 11. Valor en Riesgo al 95% de confianza para un período dado.

Existen distintas formas de estimar el VaR de un activo o cartera de inversiones[2]. Sin embargo, con el ánimo de mostrar las aplicaciones de la teoría moderna del portafolio, en esta tesis se presentan únicamente dos técnicas: el método delta-normal también conocido

[2] Simulación histórica, factores subyacentes y simulación Monte Carlo son algunas de las técnicas utilizadas en las estimación del VaR. Mayor profundidad en éstos tópicos se encuentra en [9].

como varianza-covarianza y el beta VaR. Dichos métodos son tratados en los capítulos 4 y 5 respectivamente reservándose para este apartado la estimación del VaR para un activo.

Ejemplo. En el cálculo del VaR de una acción es común suponer que el rendimiento de la misma es nulo. Bajo el supuesto de rendimientos gaussianos se tiene la siguiente fórmula:

$$VaR=M*NC*\sigma\sqrt{T}$$

Donde
M: Es el monto expuesto al riesgo
NC: Nivel de confianza. Al 95% es 1.65 y al 99% NC=2.33
T: Es el horizonte de tiempo
σ: Volatilidad diaria del activo

Si una acción tiene una volatilidad anual de 20% y se tienen 20,000 u.m. invertidas en ella, el VaR de esta inversión al 95% de confianza y con un mes por horizonte es:

$$VaR = 20000*1.65*0.20*\sqrt{\frac{20}{252}} = 18593.39$$

Esto significa que en promedio en 95% de las veces que se tenga una inversión en este activo con un horizonte de un mes (equivalente a 20 días) la pérdida, si es que se da, no será mayor a 18,593.39 u.m.

3.5.- Observaciones al supuesto de rendimientos con distribución normal

En el capítulo 2 se planteó la necesidad de utilizar el supuesto de normalidad para los rendimientos de los activos financieros. En la vida real existe un contraste que puede llegar a ser significativo cuando los mercados muestran grandes variaciones. Para entender esta sección son necesarios dos nuevos términos: el sesgo y la curtosis.

Sesgo. Indica la simetría de una distribución. Si su valor es negativo entonces existe un sesgo hacia la derecha mientras que si es positivo se trata de un sesgo a la izquierda. En el apéndice A1 se prueba que el sesgo de una distribución normal es cero. El estimador del sesgo k_3 para una muestra de tamaño τ es el siguiente:

$$k_3 = \frac{\sum_{i=1}^{\tau}(R_i - \overline{R})^3}{(\tau-1)\sigma^3}$$

Curtosis. Es un indicador del peso de los valores extremos en una distribución. La curtosis de una distribución normal es 3 y la prueba de ello se encuentra en el anexo A1. el estimador de éste parámetro es:

$$k_4 = \frac{\sum_{i=1}^{\tau}(R_i - \overline{R})^4}{(\tau - 1)\sigma^4}$$

Con estos dos parámetros se puede realizar una prueba de hipótesis.

H_0: La muestra se distribuye como una normal.

El estadístico Jarque-Bera (*JB*) se utiliza para contrastar la hipótesis planteada.

$$JB = \tau\left[\frac{k_3^2}{6} + \frac{(k_4 - 3)^2}{24}\right] \sim \lambda_2^2$$

JB se distribuye como una chi-cuadrada con dos grados de libertad. Los valores críticos de la prueba para el 95% y 99% son 5.99 y 9.21 respectivamente. Las Ilustración 12 describe el sesgo (skewness), la curtosis (kurtosis) y el estadístico *JB* para el tipo de cambio pesos por dólar interbancario.

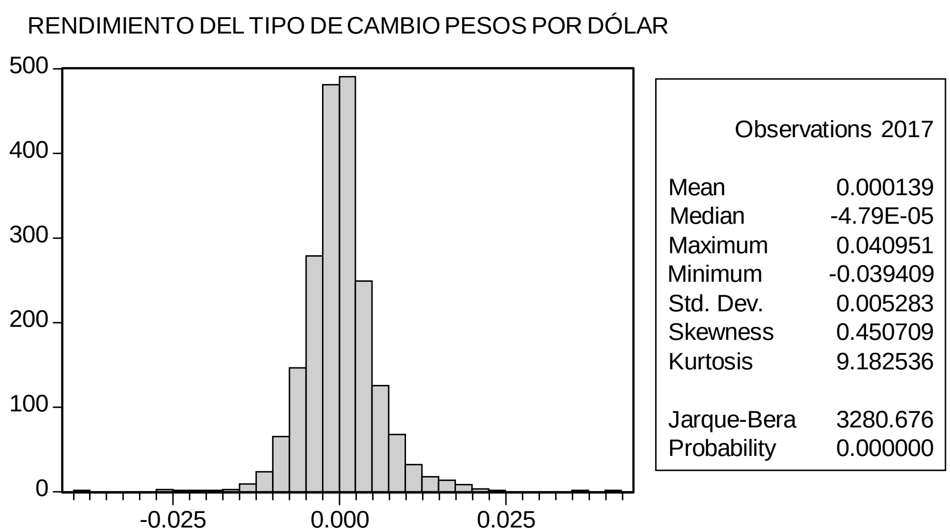

Ilustración 12. El rendimiento del tipo de cambio pesos por dólar interbancario no satisface la prueba Jarque-Bera al rebasar en demasía los valores críticos citados.

Los datos arrojados muestran que $k_3=0.45$, $k_4= 9.18$ y $JB=3280.67$ por lo que se rechaza la hipótesis nula para el caso del tipo de cambio pesos por dólar interbancario. En realidad, la mayoría de los rendimientos de los activos financieros no se ajusta a una distribución gaussiana.

Es claro que el rendimiento de un activo no puede ser menor que –1 y que no tiene cotas superiores pero el supuesto de normalidad aún así resulta viable pues es difícil que un activo cambie demasiado en un periodo breve de tiempo. Empero la evidencia puesta a la luz, el supuesto de normalidad para los rendimientos de los activos financieros es el más utilizado en la modelación de los mercados financieros en la actualidad.

CAPÍTULO 4 CARTERAS DE INVERSIONES

La Teoría Moderna del Portafolio aborda la selección de carteras óptimas, esto es, carteras que proporcionan el rendimiento más alto posible para determinado grado de riesgo, o bien, el riesgo más bajo para una tasa de rendimiento establecida. En este capítulo se generalizan los tópicos vistos en el capítulo anterior y, se da luz a la determinación de la frontera eficiente en ausencia y presencia del activo libre de riesgo.

4.1.-Rendimiento y riesgo de una cartera

A partir de las definiciones de posición larga y corta asentadas en el capítulo anterior se puede enunciar una nueva definición de cartera:

Cartera de inversión. Es un conjunto de instrumentos financieros en los que se tiene alguna posición.

En adelante son válidos los siguientes supuestos:

1. El número de emisoras es finito.
2. El número total de acciones de las emisoras es constante.
3. No hay fusiones ni quiebras.
4. La negociación de los activos es continua.
5. No hay costos de transacción e impuestos en la negociación de los activos.
6. Los activos son perfectamente divisibles.
7. No existe pago de dividendos.

De forma inicial considérense N instrumentos financieros con precios $S_1,S_2,...,S_N$ y sus respectivos rendimientos $R_1,R_2,...,R_N$. Sea w_i el tanto por unidad monetaria invertida que se asigna al activo S_i, se deduce con facilidad que $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

Encontrar la selección óptima de cartera significa hallar una combinación de pesos o ponderadores tal que minimice el riesgo dado un nivel de rendimiento. En atención a lo anterior es menester dar significado a los términos de rendimiento y el riesgo de un portafolio.

4.1.1.- Rendimiento de una cartera

El rendimiento de una cartera, denotado por R_P, es el promedio ponderado de los rendimientos de los activos que la conforman en donde el valor de w_i es el peso o ponderación del *i-ésimo* activo en el portafolio.

$$R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + ... + w_NR_N$$

El rendimiento esperado del portafolio es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos.

$E[R_P] = w_1E[R_1] + w_2E[R_2] + ... + w_N E[R_N]$

Es preciso aclarar que los rendimientos del portafolio deben ser diferentes o, de otra forma, no debe ser que $E[R_1]=E[R_2]=...=E[R_N]$ aunque la probabilidad de que se de dicha situación es casi nula.

4.1.2.- Riesgo de una cartera

El riesgo se estima a partir de la desviación estándar que es la raíz cuadrada de la varianza. La varianza de una cartera contiene el concepto de matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los activos y toma la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

donde σ_i^2 es la varianza de los rendimientos del *i-ésimo* activo y σ_{ij} es la covarianza entre los activos *i,j* con $i \neq j$..

Con base en el rendimiento de la cartera $R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + ... + w_NR_N$ se obtiene la varianza del portafolio. Dicha varianza será denotada por $\sigma_P^2 = Var(R_P)$.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

La varianza de una cartera se puede mostrar en forma matricial y para ello se define al vector $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$ que contiene a todos los pesos de los activos. Entonces la varianza se expresa como la siguiente forma cuadrática: $\sigma_P^2 = W^{/}\Sigma W$.

Cabe señalar que se supone que la matriz Σ es definida positiva, es decir, para cualquier vector $W \neq 0$ se tiene que $W^{/}\Sigma W > 0$. Dicha condición de la matriz de varianzas y covarianzas soporta la idea de que ninguna tasa de rendimiento es combinación lineal de los restantes rendimientos. Otra ventaja de ésta situación es que existe la inversa Σ^{-1} que también es positiva definida.

La volatilidad es simplemente $\sigma_P = \sqrt{W^{/}\Sigma W}$ y de igual manera sigue la regla de la raíz del tiempo para un periodo de T días $\sigma_P = \sqrt{T}\sqrt{W^{/}\Sigma W}$.

4.1.3.- Ejemplos sobre el rendimiento y riesgo de una cartera

Para ilustrar estas ideas se consideran dos activos S_1 y S_2 con los siguientes datos anuales:

$E[R_1]=0.15$
$E[R_2]=0.12$
$\sigma_1 = 0.21 \Rightarrow \sigma_1^2 = 0.0441$
$\sigma_2 = 0.17 \Rightarrow \sigma_2^2 = 0.0289$
$\sigma_{12}=0.01785$
$w_1=0.3$
$w_2=0.7$

Entonces el rendimiento del portafolio es 12.9%.

$E[R_P]=w_1E[R_1]+w_2E[R_2]=0.3*0.15+0.7*0.12=0.129$

Y la volatilidad de la cartera es 16.08%.

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} = (0.3)^2(0.0441) + (0.7)^2(0.0289) + 2(0.3)(0.7)(0.01785) = 0.025627$$
$\sigma_P=0.1608$

Ahora supóngase que se tiene un monto inicial de 1’000,000 de u.m. y se vende en corto el activo S_1 obteniéndose tras la operación 300,000 u.m. adicionales por lo que ahora se tienen 1’300,000 u.m. que se invierten en S_2.
Entonces el peso del activo S_1 es $w_1 = \frac{-300000}{1000000} = -0.3$ que es negativo pues se tomó en préstamo este instrumento y se trata como un pasivo.

El peso del activo S_2 es $w_2 = \frac{1300000}{1000000} = 1.3$ pues se han depositado el monto inicial más el monto obtenido de la venta en corto.

Es claro que $w_1 + w_2 = -0.3+1.3=1$ y se concluye que una venta en corto implica un peso negativo para ese activo.

Con estos nuevos ponderadores o pesos se tiene que el rendimiento es de 11.1% $E[R_P]=w_1E[R_1]+w_2E[R_2]=-0.3*0.15+1.3*0.12=0.111$.

En tanto que la volatilidad es de 19.71% como lo muestran los cálculos de la varianza.

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} = (-0.3)^2(0.0441) + (1.3)^2(0.0289) + 2(-0.3)(1.3)(0.01785) = 0.3888$$
$\sigma_P=0.1971$

Hasta este punto, se ha dedicado poca atención a la covarianza entre los activos del mercado pues sólo se ha mencionado como parte de una fórmula y no como factor clave para una buena diversificación.

4.2.- Covarianza

La covarianza y la correlación estiman el grado de asociación de los rendimientos de los activos y constituyen la base de la diversificación por lo que se requiere de un estudio algo detallado de tales medidas de dependencia.

Con $i,j \in \{1,2,...,N\}$ sean S_i y S_j los precios de dos activos con rendimientos R_i y R_j. La covarianza entre los activos se define como $\sigma_{ij}=E[(R_i-E[R_i])(R_j-E[R_j])]$ y tiene las características de un producto interior pero se señalan dos propiedades de interés:

1. $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
2. $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ por lo que la matriz Σ es simétrica.

El signo de la covarianza y la nulidad de la misma proporcionan información sobre la dependencia de los activos S_i y S_j como se indica:

- $\sigma_{ij}>0$ Significa que, en promedio, cuando un activo produce un rendimiento mayor o menor a la media el otro tenderá al mismo patrón. Es decir que S_i acompaña a S_j cuando éste último se aprecia o deprecia.
- $\sigma_{ij}<0$ En promedio, cuando un activo produce un rendimiento inferior o superior a su valor medio el otro tenderá a un patrón inverso en cada caso.
- $\sigma_{ij}=0$ En este caso no se puede establecer un vínculo claro sobre los activos.

El estimador de la covarianza es $\hat{\sigma}_{ij} = \dfrac{\sum_{t=1}^{\tau}(R_{it} - E[R_i])(R_{jt} - E[R_j])}{\tau}$ para τ observaciones donde R_{it} es el rendimiento observado del activo i en el día t.

4.3.- Correlación

La covarianza depende de la magnitud de la variable aleatoria por lo que es preferible una medida estandarizada. Tal medida de dependencia se encuentra en la correlación definida como sigue:

$\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ además $-1 \le \rho_{ij} \le 1$

Para ejemplificar la importancia de la correlación considérese el portafolio de dos activos S_1 y S_2 con los siguientes datos:

$E[R_1]=0.12$
$E[R_2]=0.15$

$$\sigma_1 = 0.17 \Rightarrow \sigma_1^2 = 0.0289$$
$$\sigma_2 = 0.21 \Rightarrow \sigma_2^2 = 0.0441$$

La varianza de la cartera es $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}$ y a partir de la igualdad $\sigma_{12}=\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ se obtiene una nueva fórmula para la varianza del portafolio.

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

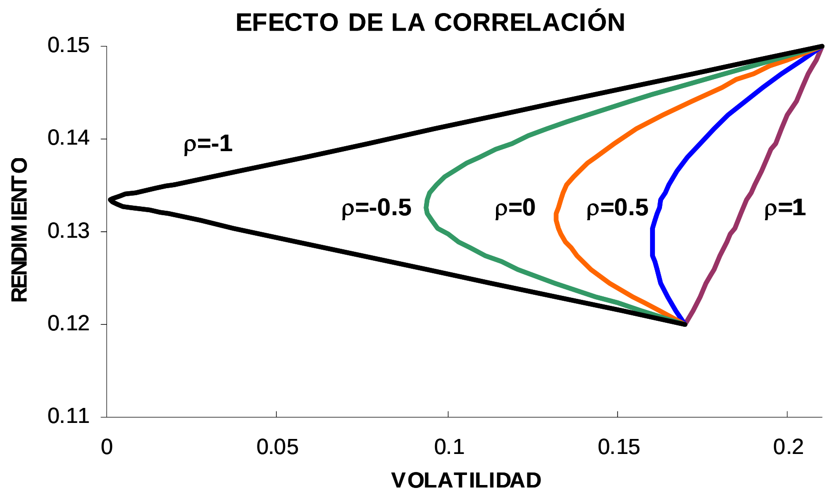

Ilustración 13. Al disminuir la correlación se logran mejores rendimientos para un nivel de riesgo.

Si se varían a los pesos de los activos y a la correlación se obtiene la Ilustración 13. Se observa que conforme disminuye la correlación es posible encontrar mejores rendimientos para un nivel de riesgo. Entonces es preferible que las carteras cuenten con activos negativamente correlacionados.

Se ha mencionado que la covarianza tiene las propiedades de un producto interior y ello hace de la correlación una medida de dependencia lineal. La interpretación geométrica de la correlación se puede ver con las siguientes transformaciones en la fórmula de la varianza.

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}.$$

$a=\sigma_P$
$b=w_1\sigma_1$
$c=w_2\sigma_2$

Entonces al utilizar la ley de los cosenos para el triángulo a,b,c se tiene la igualdad $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)$ de la que resulta que $\cos(\theta)=-\rho_{12}$ y θ es el ángulo entre los lados b y c.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CORRELACIÓN

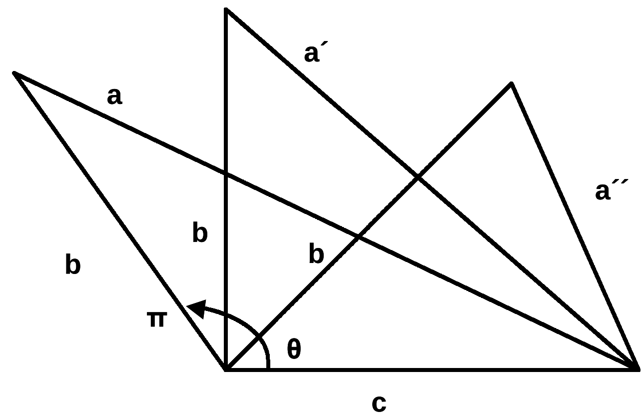

Ilustración 14 La correlación es el negativo del coseno del ángulo theta. Conforme dicho ángulo tiende a π radianes la correlación tiende a la unidad.

La interpretación económica se tiene en que el lado *a* es la volatilidad de la cartera y que este lado crece al aumentar la correlación. Cuando la correlación es nula se tiene $a'^2 = b^2 + c^2$ que es el teorema de Pitágoras y la volatilidad de la cartera se puede ver como la hipotenusa del triángulo. Si la correlación es negativa se crea un triángulo con lados *a´´*, *b* y *c* como se muestra en la Ilustración 14.

Debe aclararse que la correlación es también una medida de dependencia lineal por lo que tiene limitaciones cuando los activos tienen una relación no lineal como lo sugiere el siguiente ejemplo:

Sean $V_1 \sim U(-1,1)$ y $V_2 = \sqrt{1 - V_1^2}$

Se puede probar que $E[V_1]=0$ y $E[V_1 V_2]=0$ por lo que $\sigma_{V_1 V_2} = 0$ y se tienen variables aleatorias con covarianza nula pero que están relacionados de forma no lineal pues $V_1^2 + V_2^2 = 1$.

4.4.- La varianza de una cartera como función de sus ponderadores

Al inscribir las definiciones de dominancia estocástica se derivó la necesidad de lograr, para una cartera, el menor riesgo dado un nivel de rendimiento esperado. Entonces se tiene un problema de optimización en el que la variable objetivo es la varianza del portafolio y se pueden tener numerosas restricciones como las prohibición de las ventas en corto. El primer paso para resolver este problema de optimización es el estudio de la varianza como función de los pesos de los activos.

La varianza del portafolio es $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$ que en términos matriciales es la forma cuadrática $\sigma_P^2 = W' \Sigma W$ donde *W* es el vector de pesos y *Σ* es la matriz de varianzas y covarianzas.

Bajo el supuesto de que las entradas de Σ son constantes entonces la varianza está en función de los ponderadores de los activos $\sigma_P^2 = f(w_1, w_2, ..., w_N)$.

A partir de este momento es conveniente un nivel más de abstracción al colocar los rendimientos medios y las ponderaciones de los activos en vectores como se muestra a continuación junto con un vector auxiliar.

$$R = \begin{bmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_N] \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con base en los distintos requerimientos estratégicos o legales existen diferentes problemas de optimización. A continuación se muestran algunos de ellos.

$$\begin{aligned} & min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W \\ & s.a. \\ & W^{/} R = E[R_P] \\ & W^{/} I = 1 \end{aligned}$$

Este problema busca minimizar el riesgo sujeto a un nivel dado de rendimiento y a la restricción de que los ponderadores o pesos sumen la unidad.

$$\begin{aligned} & min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W \\ & s.a. \\ & W^{/} R = E[R_P] \\ & W^{/} I = 1 \\ & w_i \geq 0 \; \forall i \end{aligned}$$

En este problema adhieren N restricciones al prohibirse las ventas cortas pues como se sabe una venta corta implica un ponderador negativo. Cabe señalar que Markowitz nombró ilegítimos a los portafolios con ventas cortas. Un problema más general es el que obliga a incorporar a los ponderadores en intervalos definidos por las autoridades como sucede en México con las carteras de las aseguradoras.

$$\begin{aligned} & min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W \\ & s.a. \\ & W^{/} R = E[R_P] \\ & W^{/} I = 1 \\ & \delta_i \leq w_i \leq \gamma_i \;\; \forall i \end{aligned}$$

El primer problema se puede resolver mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange del cálculo diferencial mientras que los siguientes problemas pertenecen al área de la programación no lineal.

En todos los casos, el estudio de las características de la función objetivo y del conjunto que generan las restricciones es fundamental para construir a la frontera eficiente.

4.4.1.- Portafolio eficiente

Cuando se resuelve alguno de los problemas de optimización arriba descritos entonces se ha determinado un portafolio de varianza mínima. Sin embargo, pueden encontrarse dos carteras con la misma varianza mínima y distinto rendimiento por lo que se precisa una definición concreta de portafolio eficiente.

Portafolio eficiente. Un portafolio P es eficiente, bajo el criterio de media-varianza, cuando no existe otro portafolio Q tal que $E[R_Q] \geq E[R_P]$ y $\sigma_Q^2 < \sigma_P^2$. Es decir para un nivel de rendimiento dado se ha obtenido el portafolio de menor riesgo. Con esta definición se puede avanzar con la idea de frontera eficiente como el conjunto de las carteras eficientes.

4.4.2.- Frontera eficiente

Cuando algún problema de optimización para carteras se resuelve para todos los niveles posibles de rendimiento esperado entonces los puntos generados conforman la frontera eficiente siempre y cuando tengan significado económico.

Por simplicidad para la comprensión de temas ulteriores se da la solución del problema en el que se permiten ventas cortas. Para ello, se muestra un breve repaso al análisis de la convexidad y se aplican estas ideas al presente problema financiero.

4.5.- Elementos de análisis convexo

La convexidad es una característica presente en muchos de los problemas de optimización. La construcción de la frontera eficiente con o sin activo libre de riesgo conlleva la solución de dos problemas de optimización, a partir las soluciones de tales problemas y en virtud del teorema de dos fondos, que se presenta posteriormente, se obtiene cualquier portafolio eficiente. Las definiciones y resultados siguientes constituyen la justificación matemática de la construcción de la frontera eficiente.

4.5.1.- Conjunto convexo

El conjunto $E \subseteq \Re^N$ es convexo si dados $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in E$ con $\alpha \in [0,1]$. De forma intuitiva un conjunto convexo es aquel en el que dados dos puntos del mismo el segmento que los une es un subconjunto de E.

El punto $\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}\in E$ se conoce como combinación convexa y se puede generalizar como $\alpha_1\mathbf{x_1}+\alpha_2\mathbf{x_2}+,\ldots,+\alpha_n\mathbf{x_n}\in E$ para n elementos $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}\in E$ y para n escalares $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

Como ejemplos de este tipo de conjuntos se tienen en los triángulos, la recta real y en general $\Re^N$ pero también lo es $(\Re^+)^N$.

4.5.2.- Existencia y unicidad del mínimo de una función convexa

Una función $f:\Re^n\to\Re$ definida en un conjunto convexo E es convexa si para $\mathbf{x,y}\in E$ en donde $\alpha\in[0,1]$ se tiene la siguiente desigualdad:

$f(\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y})\leq \alpha f(\mathbf{x})+(1-\alpha)f(\mathbf{y})$

En el caso de las funciones doblemente diferenciables en todo el conjunto E la siguiente definición alternativa de función convexa es de ayuda para los objetivos que se persiguen en estas notas.

Definición alternativa. Una función es convexa si tiene matriz hessiano semipositiva definida.

Proposición 5. Sea una función convexa $f:\Re^N\to\Re$ doblemente diferenciable definida sobre un conjunto convexo. Entonces ésta función tiene mínimo.

Demostración.

A través de una expansión de Taylor alrededor de un punto crítico x_0 se tiene que $df\approx\nabla f(x_0)h+h^{/}H(x_0)h$ donde h es un vector columna de N entradas tal que $h=x-x_0$. En x_0 se tiene que $\nabla f=0$ por lo que $df=h^{/}Hh$ y por hipótesis $h^{/}Hh\geq 0$ por lo que f tiene mínimo. ■

Ejemplo. La función de la varianza del portafolio $\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{N}w_i^2\sigma_i^2+2\sum_{i\neq j}w_i\sigma_{ij}$ tiene mínimo.

$$\frac{\partial\sigma_P^2}{\partial w_i}=2w_i\sigma_i^2+2\sum_{j\neq i}w_j\sigma_{ij}=2\sum_{j=1}^{N}w_j\sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_P^2}{\partial w_j\partial w_i}=2\sigma_{ij}$$

Esto significa que la primer derivada de la forma cuadrática $\sigma_P^2=W^{/}\Sigma W$ es $2\Sigma W$ y la segunda derivada es 2Σ. Entonces el hessiano de la varianza del portafolio es una matriz positiva definida al ser dos veces la matriz de covarianzas por lo que se puede afirmar que la varianza de una cartera tiene mínimo.

Proposición 6. (Unicidad) Dado el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}&min \;\; f(x)\\&s.a.\\&x \in E\end{aligned}$$

En el que $f : \Re^n \to \Re$ es una función estrictamente convexa y el conjunto E es convexo entonces el problema de optimización tiene a lo más un minimizador.

Demostración.

Supóngase que $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in E$ son dos soluciones distintas, es decir, $f(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{b})\leq f(x) \;\; \forall \boldsymbol{x} \in E$ dado que f es convexa entonces $f(\alpha \boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b}) < \alpha f(\boldsymbol{a}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$ **!** para $\alpha \in (0,1)$.

La contradicción reside en que el punto $\alpha \boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b} \in E$ por lo que existiría un valor menor que el mínimo. ■

4.6.- Frontera eficiente

A partir de este momento el objetivo es crear la frontera eficiente y para ello se hace uso de los multiplicadores de Lagrange pues ya se sabe que la varianza de un portafolio tiene un mínimo único. Nótese que las proposiciones 5 y 6 prueban la existencia y la unicidad de la frontera eficiente. El problema inicial, sin activo libre de riesgo es:

$$\begin{aligned}&min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W\\&s.a.\\&W^{/} R = E[R_P]\\&W^{/} I = 1\end{aligned}$$

Resulta conveniente señalar que minimizar σ_P^2 equivale a minimizar $\frac{1}{2}\sigma_P^2$ por lo que para resolver éste último caso se consideran dos escalares λ_1 y λ_2 en una función de Lagrange.

Una convención técnica reside en el supuesto de que los vectores R e I son linealmente independientes. Este supuesto tomará relevancia cuando se presente el teorema de dos fondos. La función de Lagrange toma la forma siguiente:

$$L(w_1,..,w_N,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2} W^{/} \Sigma W + \lambda_1 (E[R_P] - W^{/} R) + \lambda_2 (1 - W^{/} I)$$

La derivada de la forma cuadrática es $2\Sigma W$ por lo que al derivar la función L con respecto a sus argumentos e igualar a cero se tiene:

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$
$$E[R_P] = W' R$$
$$1 = W' I$$

La primera de estas últimas tres ecuaciones muestra la forma general de la frontera eficiente y el importante teorema de dos fondos.

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I \Rightarrow W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$$

A partir de *W*, la solución del problema de optimización, se obtienen relaciones interesantes y por comodidad se definen los siguientes términos:

$A=R'\Sigma^{-1}I$
$B=R'\Sigma^{-1}R$
$C=I'\Sigma^{-1}I$
$D=BC-A^2$

Sobre el término *D* se tiene el siguiente resultado que será de utilidad en posteriores líneas.

Proposición 7. El coeficiente *D* es positivo.

Demostración.

Considérese el vector *AR-BI*. Dado que se ha supuesto que *R* e *I* son linealmente independientes entonces $AR-BI \neq 0$. Ahora bien Σ^{-1} es positiva definida por lo que la forma cuadrática siguiente toma valores positivos.

$$[AR-BI]'\Sigma^{-1}[AR-BI]=A^2R'\Sigma^{-1}R+ABR'\Sigma^{-1}I - ABI'\Sigma^{-1}R-B^2I'\Sigma^{-1}I=A^2B-A^2B-A^2B+B^2C$$
$$= B^2C- A^2B=B(BC-A^2)>0$$

Una vez más utilizando el hecho de que Σ^{-1} es positiva definida se tiene que B>0 por lo que $BC-A^2=D>0$. ■

Con este resultado se prosigue con la derivación de la frontera eficiente. Si se multiplica por la izquierda a la solución *W* por el vector de rendimientos transpuesto y por el vector I' entonces se tiene:

$$R'W = \lambda_1 R' \Sigma^{-1} R + \lambda_2 R' \Sigma^{-1} I$$
$$I'W = \lambda_1 I' \Sigma^{-1} R + \lambda_2 I' \Sigma^{-1} I$$

En realidad lo que se obtuvo es un sistema de ecuaciones donde los multiplicadores de Lagrange son las incógnitas.

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[R_P] \\ 1 \end{bmatrix}$$ con soluciones $\lambda_1 = \dfrac{CE[R_P] - A}{D}$ y $\lambda_2 = \dfrac{B - AE[R_P]}{D}$.

Las soluciones del sistema permiten interpretar en forma geométrica a la frontera eficiente. Nótese que toma relevancia el hecho de que D>0 puesto que es el valor del determinante que permite dar solución al sistema de ecuaciones.

Al multiplicar por la izquierda con el vector transpuesto de ponderadores a la igualdad $\Sigma W=\lambda_1 R+\lambda_2 I$ se obtiene una identidad para la varianza da la cartera.

$$W^{/}\Sigma W = \lambda_1 W^{/} R + \lambda_2 W^{/} I$$

$$\sigma_P^2 = \lambda_1 E[R_P] + \lambda_2 = \frac{CE[R_P]^2 - AE[R_P]}{D} + \frac{B - AE[R_P]}{D}$$

$$\sigma_P^2 = \frac{CE[R_P]^2}{D} - \frac{2AE[R_P]}{D} + \frac{B}{D}$$

Esta última igualdad corresponde a una parábola en el plano media-varianza. El rendimiento y la varianza del portafolio de mínima varianza global, denotado por *G*, se alcanza a través de la derivada de la varianza con respecto al rendimiento medio.

$$\frac{d\sigma_P^2}{dE[R_P]} = 2\frac{CE[R_P] - A}{D} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} E[R_G] = \dfrac{A}{C} \\ \sigma_G^2 = \dfrac{1}{C} \end{array}$$

Por otra parte, en el plano desviación típica-rendimiento medio, éstos parámetros del portafolio *G* dan lugar a la localización del vértice de una hipérbola cuya rama superior es la frontera eficiente como se marca en la Ilustración 15. Para obtener la ecuación de la hipérbola simplemente se usa el método de completar cuadrados.

$$\sigma_P^2 = \frac{CE[R_P]^2}{D} - \frac{2AE[R_P]}{D} + \frac{B}{D} \Leftrightarrow \frac{C}{D}\left(E[R_P]^2 - 2\frac{A}{C}E[R_P] + \frac{A^2}{C^2}\right) + \frac{1}{C} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma_P^2}{\dfrac{1}{C}} - \frac{\left(E[R_P] - \dfrac{A}{C}\right)^2}{\dfrac{D}{C^2}} = 1$$

El vector de ponderadores de este portafolio se denotará como W^G y para determinarlo se deben hallar los multiplicadores de Lagrange correspondientes a $E[R_G]$ y ellos son:

$\lambda_1^G = \dfrac{C\dfrac{A}{C} - A}{D} = 0$ y $\lambda_2^G = \dfrac{B - A\dfrac{A}{C}}{D} = \dfrac{1}{C} \Rightarrow W^G = \dfrac{\Sigma^{-1} I}{C}$ a partir de la solución $W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$.

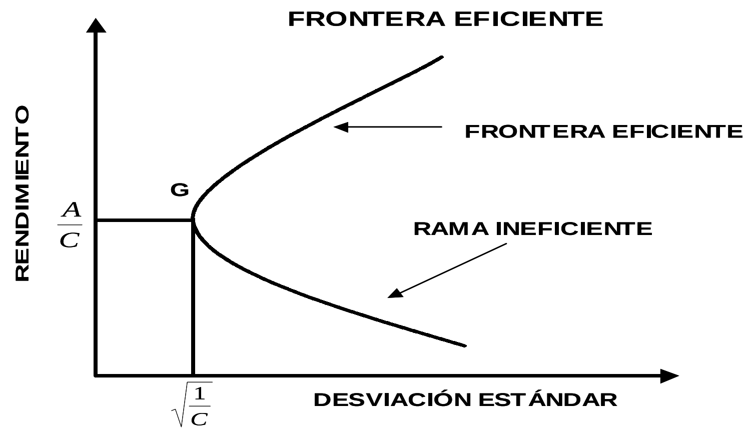

Ilustración 15. La frontera eficiente es la rama superior de la hipérbola. El vértice de la misma contiene el rendimiento y el riesgo del portafolio de mínima varianza global.

4.6.1.- Teorema de dos fondos

Los vectores de ponderadores de dos carteras de mínima varianza pueden ser establecidas de tal manera que cualquier cartera igualmente de mínima varianza se genera a partir de esas dos carteras iniciales. Ello significa que se puede crear la hipérbola con base en dos fondos.

Proposición 8 (Teorema de dos fondos). Sean *P* y *Q* dos portafolios de mínima varianza y sea también $\alpha \in \Re$. Entonces cualquier portafolio de mínima varianza con vector de ponderadores *W* puede generarse como una combinación lineal de *P* y *Q* de forma tal que $W = \alpha W^Q + (1-\alpha)W^P$.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad se sustituye el portafolio *P* por el de mínima varianza global *G* por tanto, se debe probar que cualquier portafolio *W* es de la forma $W = \alpha W^Q + (1-\alpha)W^G$.

Los ponderadores de las carteras de mínima varianza toman la forma:

$$W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$$

Haciendo $W^Q = \dfrac{\Sigma^{-1}R}{A}$ (ponderadores del portafolio *Q*) y $W^G = \dfrac{\Sigma^{-1}I}{C}$ se tiene que $W = \lambda_1 A W^Q + \lambda_2 C W^G$ en la que como ya se observó $\lambda_1 A + \lambda_2 C = 1$.

Entonces cuando $\alpha = \lambda_1 A \Rightarrow 1-\alpha = \lambda_2 C$ se tiene el resultado deseado por lo que cualquier vector de ponderadores de una cartera de mínima varianza es combinación lineal de otras dos carteras también de mínima varianza. ■

4.6.2.- Uso de la técnica de carteras de inversiones

Con el ánimo de mostrar la técnica se ha diseñado una cartera de tres activos y en ella se aplican los resultados obtenidos en líneas anteriores.

Supóngase una economía con tres activos riesgosos cuyos rendimientos y matriz de varianzas y covarianzas se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} E[R_1] &= 0.14 \\ E[R_2] &= 0.11 \\ E[R_3] &= 0.13 \end{aligned} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.02 & -0.10 \\ 0.02 & 0.15 & 0.10 \\ -0.10 & 0.10 & 0.17 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix}$$

El primer paso consiste en determinar las constantes A, B, C y D para luego determinar los vectores W^Q y W^G.

$$A = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.11 & 0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.1584$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.11 & 0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.11 \\ 0.13 \end{bmatrix} = 0.4829$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 22.4796$$

$D=BC-A^2=0.2053$

$$W^Q = \frac{\begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.11 \\ 0.13 \end{bmatrix}}{A} = \begin{bmatrix} 0.5761 \\ -0.3816 \\ 0.8055 \end{bmatrix}$$

$$W^G = \frac{\begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{C} = \begin{bmatrix} 0.5321 \\ -0.2591 \\ 0.7270 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

- $w_1^G + w_2^G + w_3^G = 0.5321 - 0.2591 + 0.7270 = 1.$
- Se vende en corto el activo 2 y los ingresos procedentes de esta operación se envían a los activos 1 y 3.

El rendimiento y la varianza del portafolio G son:

$$E[R_G] = 0.14 * w_1^G + 0.11 * w_2^G + 0.13 * w_3^G = 0.1405$$

$$\sigma_G^2 = \begin{bmatrix} 0.5321 & -0.2591 & 0.7270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.23 & 0.02 & -0.10 \\ 0.02 & 0.15 & 0.10 \\ -0.10 & 0.10 & 0.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5321 \\ -0.2591 \\ 0.7270 \end{bmatrix} = 0.0445$$

La pareja $(\sigma_G, R_G) = (0.2110 \ , \ 0.1405)$ es el primer punto de la frontera eficiente.

Por el teorema de dos fondos se construye la frontera eficiente a partir de la siguiente combinación lineal como se muestra en la Ilustración 16:

$$W^{\alpha} = \alpha \begin{bmatrix} 0.5761 \\ -0.3816 \\ 0.8055 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0.5321 \\ -0.2591 \\ 0.7270 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \Re$$

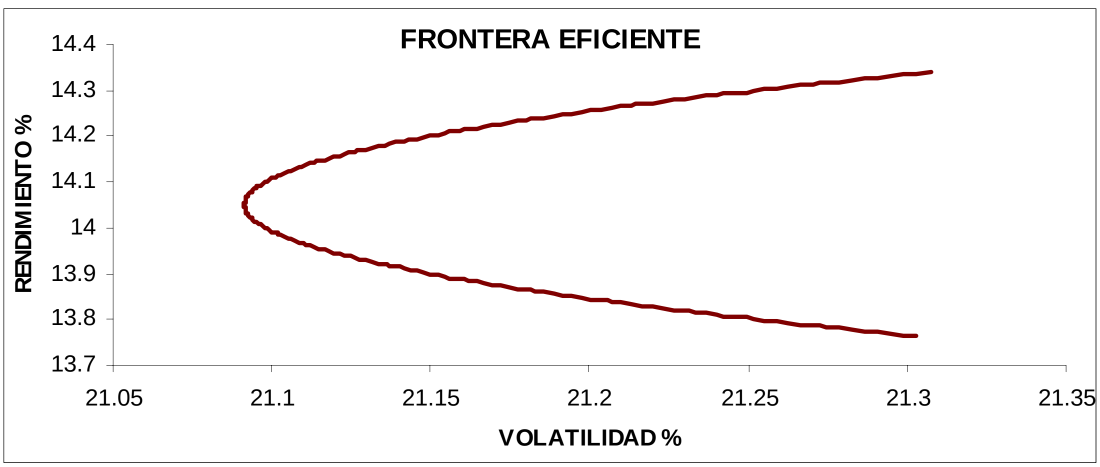

Ilustración 16. La frontera eficiente es una hipérbola en el plano volatilidad – rendimiento.

4.7.- Utilidad esperada y carteras eficientes

Con el objeto de conocer cuál portafolio de la frontera eficiente debe considerarse al momento de invertir se hace uso de las curvas de indiferencia de la utilidad esperada.

Para conocer la naturaleza de las curvas de utilidad esperada se hace uso de los resultados obtenidos en el capítulo 2. Una curva de indiferencia se entiende como el conjunto de opciones de inversión igualmente preferidas. Dichas curvas son el lugar geométrico de parejas de rendimientos medios y desviaciones típicas tales que otorgan el mismo nivel de utilidad. Para determinar las curvas de indiferencia de la utilidad esperada se parte de la igualdad $E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]=c$.

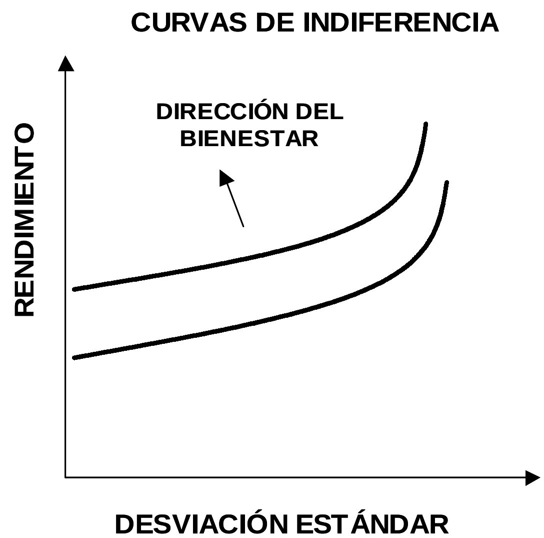

Ilustración 17 Forma de las curvas de indiferencia.

Para determinar la forma de las curvas de indiferencia se aplica la diferencial total de la utilidad esperada.

$$dE[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))] = \frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \mu} d\mu = dc = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \sigma} d\sigma = -\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \mu} d\mu$$

$$\Rightarrow -\frac{\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \sigma}}{\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \mu}} = \frac{d\mu}{d\sigma}$$

En el capítulo 2 se mostró que $\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \sigma} < 0$ y $\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]}{\partial \mu} > 0$ por lo que $\frac{d\mu}{d\sigma} > 0$ lo que significa que un aumento marginal en el riesgo requiere de una compensación en el rendimiento. En consecuencia las curvas de indiferencia son crecientes como se muestra en la Ilustración 17. Éste hecho implica que el individuo elige el punto de tangencia entre alguna curva de indiferencia y la frontera eficiente (véase la Ilustración 18).

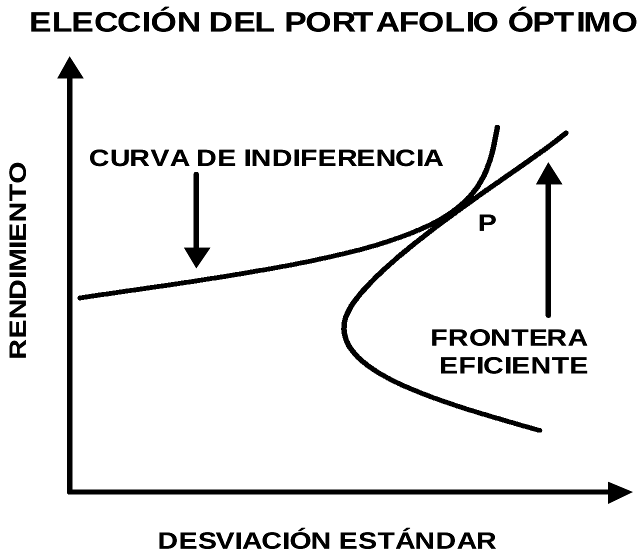

Ilustración 18 La elección óptima se alcanza en el punto de tangencia entre las curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

Es así como la utilidad esperada permite la toma de decisiones entre portafolios de inversión eficientes. El mismo proceso se encuentra al construir la Línea del Mercado de Capitales en líneas posteriores.

4.8.- Inclusión del activo libre de riesgo

Hasta este punto se han tratado únicamente activos riesgosos como acciones mas puede incluirse un activo libre de riesgo como el T-bill, una cuenta bancaria o los Cetes de México.

El activo libre de riesgo es denotado por S_0 por lo que se tienen ahora $N+1$ instrumentos. Este activo libre de riesgo ofrece un rendimiento conocido R_L.

Con la inclusión de este activo es de interés saber si existen alteraciones en la frontera eficiente pues ahora se puede crear una cartera con un portafolio de activos riesgosos y el activo libre de riesgo.

La respuesta a esta inquietud se obtiene al resolver un nuevo problema de optimización. Para ello se supone de manera adicional que se puede prestar y pedir en préstamo a la tasa R_L. Este último supuesto implica que no siempre $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$. Si $\sum_{i=1}^{N} w_i < 1$ entonces se ha decidido colocar alguna cantidad de recursos en el activo libre de riesgo mientras que si $\sum_{i=1}^{N} w_i > 1$ se ha solicitado un crédito teniéndose a R_L por tasa de interés. Sin embargo, al denotar por w_0 al tanto por unidad monetaria invertido en el activo libre de riesgo, se tiene que $\sum_{i=0}^{N} w_i = 1$. El problema de optimización es el siguiente:

$$\min \sigma_P^2 = \frac{1}{2} W^{/} \Sigma W$$
$$s.a.$$
$$w_0 R_L + W^{/} R = E[R_P]$$
$$\sum_{i=0}^{N} w_i = 1$$

Nuevamente se tiene una función de Lagrange a la que se toman derivadas parciales que son igualadas a cero.

$$L(w_0, w_1,.., w_N, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} W^{/} \Sigma W + \lambda_1 (E[R_P] - W^{/} R - w_0 R_L) + \lambda_2 (1 - W^{/} I - w_0)$$
$$\frac{\partial L}{\partial W} = \Sigma W - \lambda_1 R - \lambda_2 I = 0 \Rightarrow \Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = -\lambda_1 R_L - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 R_L$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = E[R_P] - W^{/} R - w_0 R_L = 0 \Rightarrow W^{/} R = E[R_P] - w_0 R_L = R^{/} W$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - W^{/} I - w_0 = 0 \Rightarrow W^{/} I = 1 - w_0 = I^{/} W$$

Ahora deben ser hallados un vector W y los valores de w_0, λ_1 y λ_2 tales que satisfagan las igualdades obtenidas a partir de las derivadas de la función de Lagrange.

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I = \lambda_1 R - \lambda_1 R_L I \Rightarrow W = \lambda_1 \Sigma^{-1} (R - R_L I)$$

Multiplicando por la izquierda esta última igualdad por los vectores R e I transpuestos se tiene lo siguiente:

$$R^{/} W = \lambda_1 R^{/} \Sigma^{-1} (R - R_L I) = \lambda_1 (B - R_L A) = E[R_P] - w_0 R_L$$
$$I^{/} W = \lambda_1 I^{/} \Sigma^{-1} (R - R_L I) = \lambda_1 (A - R_L C) = 1 - w_0$$

Con estas ecuaciones se tiene un sistema de ecuaciones con w_0, λ_1 como incógnitas**.**

$$\begin{bmatrix} B - R_L A & R_L \\ A - R_L C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[R_P] \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se denotará en adelante como H al polinomio $B - 2R_L A + R_L^2 C$ en R_L que es el determinante del sistema de ecuaciones. Dicho sistema tiene solución debido a que H es no nulo. H no cambiará de signo siempre y cuando posea raíces complejas lo que es posible si tiene discriminante negativo. Es decir $4A^2\text{-}4BC<0 \Rightarrow D>0$ lo que es cierto en virtud de la proposición 7 de la sección 4.6. Entonces las soluciones del sistema para λ_1 y w_0 son:

$$\lambda_1 = \frac{E[R_P] - R_L}{H} \qquad\qquad w_0 = \frac{H - (E[R_P] - R_L)(A - R_L C)}{H}$$

Con estas soluciones se tiene que $W = \frac{E[R_P] - R_L}{H}\Sigma^{-1}(R - R_L I)$ y puede manejarse también $w_0 = 1 - W^{/}I$.

Ahora es posible determinar la varianza de los portafolios eficientes que se han encontrado.

$$\sigma_P^2 = W^{/}\Sigma W = \left[\frac{E[R_P] - R_L}{H}\Sigma^{-1}\left[R - R_L I\right]\right]^{/}\Sigma\left[\frac{E[R_P] - R_L}{H}\Sigma^{-1}\left[R - R_L I\right]\right]$$

$$\sigma_P^2 = \left[\frac{E[R_P] - R_L}{H}\right]^2\left[R - R_L I\right]^{/}\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\left[R - R_L I\right] = \left[\frac{E[R_P] - R_L}{H}\right]^2 H$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\left[E[R_P] - R_L\right]^2}{H} \Rightarrow \sigma_P = \frac{\left|E[R_P] - R_L\right|}{\sqrt{H}}$$

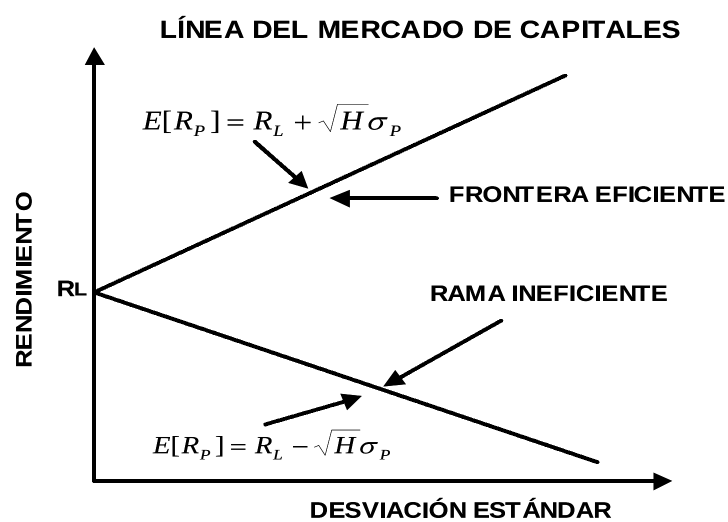

Ilustración 19. La línea del mercado de capitales es la rama superior del conjunto de mínima varianza que se dedujo.

Con la ecuación de la volatilidad de un portafolio eficiente se encuentra el lugar geométrico de la frontera eficiente. La Ilustración 19 muestra que se trata de dos semirrectas con pendientes $\pm\sqrt{H}$ y unidas en el vértice *(0,R_L)*.

$$\sigma_P = \frac{\left|E[R_P] - R_L\right|}{\sqrt{H}} \Rightarrow E[R_P] = R_L \pm \sqrt{H}\sigma_P$$

A partir de esta última igualdad se deduce que la ecuación de la frontera eficiente debe ser $E[R_P] = R_L + \sqrt{H}\sigma_P$ pues indica que a mayor volatilidad se tiene mayor rendimiento. Esta ecuación corresponde a la denominada Línea del Mercado de Capitales (LMC) como se muestra en la Ilustración 19.

4.8.1.- El portafolio tangente

Se ha señalado que al incluir el activo libre de riesgo la suma de los ponderadores de una cartera puede diferir de la unidad. Cuando $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ se ha decidido invertir la totalidad de los recursos en los activos riesgosos por lo que, únicamente en este caso, se tiene un portafolio que pertenece tanto a la Línea del Mercado de Capitales como a la hipérbola desarrollada en la sección 4.5. Dicho portafolio se denomina portafolio tangente y para determinarlo simplemente se hace $w_0=0$ en la ecuación $\lambda_1(A - R_L C) = 1 - w_0$ de la que se obtiene $\lambda_1 = \dfrac{1}{A - R_L C}$.

Entonces el vector de ponderadores del portafolio tangente tiene la forma $W^T = \dfrac{1}{A - R_L C}\Sigma^{-1}(R - R_L I)$.

4.8.2.- Teorema de un fondo

El teorema de un fondo es el análogo del teorema de dos fondos y señala que es posible generar la frontera eficiente únicamente con un vector de ponderadores de activos riesgosos y un vector que considera la inversión en el activo libre de riesgo.
Para derivar éste teorema se hace uso del portafolio tangente. Cualquier vector de ponderadores de un portafolio de la frontera eficiente tiene la forma $W = \dfrac{E[R_P] - R_L}{H}\Sigma^{-1}(R - R_L I)$.
Si ésta expresión se multiplica y divide por A-$R_L C$ se tiene que $W = \dfrac{(E[R_P] - R_L)(A - R_L C)}{H(A - R_L C)}\Sigma^{-1}(R - R_L I) = \dfrac{(E[R_P] - R_L)(A - R_L C)}{H}W^T = (1 - w_0)W^T$. Con éste resultado se puede probar el teorema de un fondo.

Proposición 9 (Teorema de un fondo). Sea $\widehat{W} = \begin{bmatrix} w_0 \\ W \end{bmatrix}$ el vector del activo libre de riesgo y los activos riesgosos. Dado $\alpha \in \Re$ entonces todo portafolio $\widehat{W}$ en la LMC se construye a partir de una combinación lineal entre el portafolio de mercado y el activo libre de riesgo de la forma siguiente:

$$\widetilde{W} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix}0\\w_1^T\\\vdots\\w_N^T\end{bmatrix}$$

Demostración.

El vector $\widehat{W}$ se descompone de la siguiente forma $\widehat{W} = \begin{bmatrix}w_0\\W\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\w_1\\\vdots\\w_N\end{bmatrix}$. Utilizando el hecho de que cualquier vector de ponderadores de un portafolio eficiente depende en forma lineal del vector de ponderadores del portafolio tangente y haciendo $\alpha = w_0$ se tiene que:

$$\widehat{W} = w_0\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + (1-w_0)\begin{bmatrix}0\\w_1^T\\\vdots\\w_N^T\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix}0\\w_1^T\\\vdots\\w_N^T\end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Cuando el valor de α=0 entonces se ha invertido la totalidad de los recursos en activos riesgosos y se tiene el portafolio tangente. El caso α=1 indica que se ha invertido únicamente en el activo libre de riesgo.

4.8.3.- Aplicación del teorema de un fondo

En este apartado se asume que una tasa libre de riesgo de 10% y los datos de los activos de la sección 4.4.3. El primer paso entonces es la determinación del portafolio tangente.

$$W^T = \frac{1}{A - R_L C}\Sigma^{-1}(R - R_L I)$$

$$W^T = \frac{1}{3.15 - 0.10 * 22.48}\begin{bmatrix}9.71 & -8.39 & 10.64\\-8.39 & 18.22 & -15.65\\10.64 & -15.65 & 21.35\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}0.14\\0.11\\0.13\end{bmatrix} - 0.10\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0.6850\\-0.6842\\0.9992\end{bmatrix}$$

Con las entradas del portafolio tangente se construye $\widehat{W} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix}0\\0.6850\\-0.6842\\0.9992\end{bmatrix}$ para determinar los vectores de ponderadores.

Con base en estos ponderadores se obtiene el rendimiento del portafolio tangente es $E[R_T]=0.14*0.6850+0.11*(-0.6842)+0.13*0.9992=0.1505$ junto con la volatilidad

σ_T=*0.2356*. La línea del mercado de capitales se aprecia en la Ilustración 20 tiene la siguiente ecuación $R_P = 0.10 + \dfrac{0.1505 - 0.10}{0.2356}\sigma_P$.

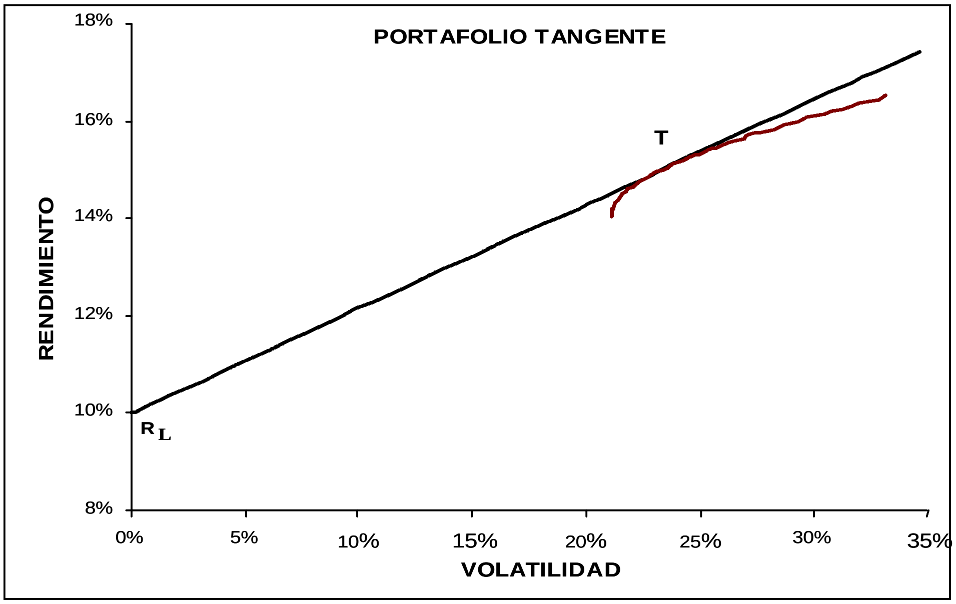

Ilustración 20. El activo libre de riesgo da lugar a la Línea del Mercado de Capitales.

4.9.- Valor en riesgo de una cartera

En el capítulo anterior se estableció la definición de VaR así como la estimación del mismo para un activo. En esta sección se determina el VaR de una cartera mediante el modelo paramétrico varianza-covarianza o delta normal. En realidad resulta sencillo encontrar el VaR de un portafolio ya que la fórmula es idéntica a la del caso del activo individual.

$$VaR = M * NC * VaR = M * NC * [W^{/}\Sigma W]^{\frac{1}{2}}\sqrt{T}$$

Donde:
M: Es el monto expuesto al riesgo
NC: Nivel de confianza. Al 95% es 1.65 y al 99% *NC*=2.33
T: Es el horizonte de tiempo

Ejemplo: Calcular el VaR mensual al 95% de confianza de un portafolio de mínima varianza global *G* de la sección 4.2.3 cuando se tiene una inversión total de 10000 unidades monetarias.

$\sigma_G = 0.2110$

$$VaR = 10000 * 1.65 * 0.2110 * \sqrt{\frac{20}{252}} = 984.71$$

El resultado alcanzado significa que con un 95% de confianza, si se invierten 10000 u.m. en el portafolio de mínima varianza global entonces la pérdida máxima sería de 984.71 u.m. en un mes.

Hasta este punto se han cumplido los objetivos del capítulo y se da lugar al modelo de equilibrio denominado Capital Asset Pricing Model en el siguiente y último bloque.

CAPÍTULO 5 MODELO DE VALORACIÓN DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM)

El modelo de valuación de activos de capital (CAPM) explica el rendimiento de un activo en términos del riesgo de mercado considerando que los inversionistas de la economía conforman sus portafolios de acuerdo a la teoría moderna del portafolio y que cuentan con expectativas homogéneas. En este capítulo se presenta la derivación del CAPM, el Modelo del Índice Único (MIU) y se muestran aplicaciones del concepto de la beta en las finanzas corporativas y la medición del riesgo de mercado.

5.1.- Limitaciones de la diversificación

La diversificación es de gran utilidad para disminuir el riesgo de una cartera de inversiones. No obstante, este mecanismo de tratamiento de riesgo se encuentra limitado como se puede ver al suponerse un conjunto de N activos riesgosos tales que todas las parejas de los mismos tienen covarianza igual a cov_m que se asume positiva[1]. La varianza de cada activo es la misma para todos y la ponderación para el activo *i-ésimo* es $\frac{1}{N} = w_i$. Entonces la varianza de esta cartera es constante en el límite.

$$\sigma_N^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2 + 2\sum_{i\neq j}\frac{1}{N}\frac{1}{N}cov_m = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\sigma^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{i\neq j}cov_m = \frac{\sigma^2}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)cov_m$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sigma^2}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)cov_m = cov_m$$

Esto significa que mientras mayor sea el número de activos la varianza de la cartera disminuye. Sin embargo, tal reducción del riesgo está acotada por lo que siempre existe riesgo sin importar el número de activos que compongan una cartera. Esta observación da lugar a las siguientes definiciones de riesgo:

- **Riesgo diversificable**. Es aquel que es potencialmente eliminado a causa de la diversificación y proviene de las características particulares de una emisora o de sus competidores inmediatos. Es importante notar que el portafolio de mercado tiene la mayor diversificación posible por lo que el riesgo restante da lugar al riesgo sistemático.

- **Riesgo sistemático**. Es aquel que la diversificación no puede eliminar debido a que se deriva de factores que afectan a toda la economía como los cambios políticos.

En la Ilustración 21 se describen las limitantes de la diversificación así como la partición del riesgo total en riesgo diversificable y riesgo sistemático.

[1] Es razonable que al incrementarse el número de activos en la economía la covarianza tenderá a ser positiva.

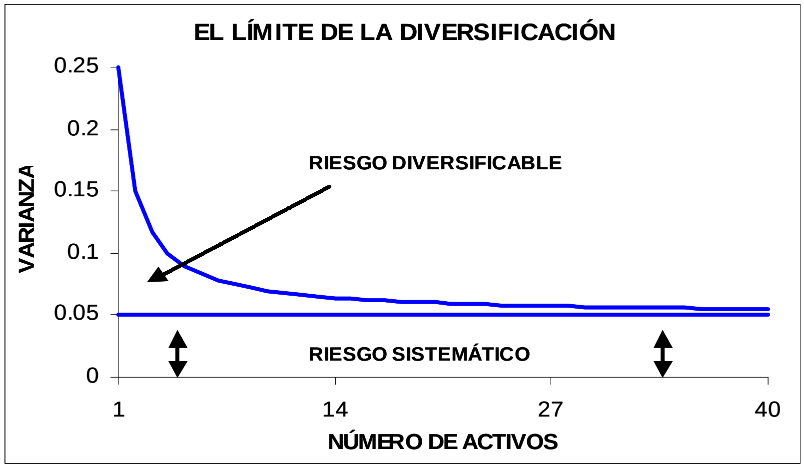

Ilustración 21. Riesgos diversificable y sistemático.

Entonces el riesgo total o específico de la un instrumento es igual al agregado del riesgo diversificable más el riesgo sistemático.

Riesgo Total = Riesgo diversificable + Riesgo sistemático

En una economía en la que los inversionistas hacen uso de la diversificación para conformar sus carteras los activos financieros únicamente deben pagar un diferencial por el riesgo sistemático pues la diversificación se ha llevado al límite.

5.2.- Modelo de Valoración de Activos de Capital CAPM

El CAPM vincula la prima por riesgo sistemático de un activo financiero con la prima del portafolio de mercado mediante una relación lineal entendiendo que se trata de un modelo de equilibrio.

Supuestos del CAPM

- Los inversionistas deciden con base en el criterio de media-varianza con rendimientos distribuidos en forma normal.
- Los inversionistas tienen el mismo horizonte de tiempo.
- Los inversionistas tienen expectativas homogéneas sobre los retornos de los activos lo que significa que ven la misma frontera eficiente.
- El mercado es eficiente.
- Existe un instrumento libre de riesgo a cuya tasa los inversionistas pueden prestar y pedir prestado cantidades ilimitadas.
- No existen costos de transacción u otras imperfecciones del mercado.

Algunos de estos supuestos se pueden debilitar para obtener extensiones del CAPM pero, entre ellos, resulta fundamental el que hace referencia a la homogeneidad de las expectativas de los rendimientos de los activos debido a que posibilita la eficiencia del portafolio de mercado.

5.2.1.- Derivación del CAPM

Considérense *m* participantes en el mercado de capitales. Sea X_i la riqueza inicial que posee el *i-ésimo* inversionista, $i=1,2,...,m$.

El equilibrio económico se alcanza cuando son iguales la oferta y la demanda de algún satisfactor. El CAPM es un modelo de equilibrio debido a que considera esta situación para los activos financieros. En este modelo, la demanda es la suma de todos los portafolios pertenecientes a los *m* inversionistas mientras que la oferta se aprecia en el portafolio de mercado.

Demanda

Sea $\tilde{W}_i$ el vector de ponderadores de la cartera del *i-ésimo* inversionista entonces $\tilde{W}^D = \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{m} X_i \tilde{W}_i$ es el vector de ponderadores de la demanda total con $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$.
Con base en el teorema de un fondo (Proposición 8) se tiene que el vector de la demanda total es $\tilde{W}^D = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i\alpha_i}{X}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)X_i}{X}\begin{bmatrix}0\\w_1^T\\\vdots\\w_N^T\end{bmatrix}$.

Además $\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i\alpha_i}{X} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)X_i}{X} = 1$ por lo que al hacer $\alpha^D = \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i\alpha_i}{X}$ se tiene que el vector de ponderadores de la demanda total pertenece a la LMC.

Para el vector W^D se hace uso de las igualdades siguientes (véase la sección 4.6.1 del capítulo anterior):

$$\Sigma W^D = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$
$$-\lambda_2 - \lambda_1 R_L = 0$$
$$\Sigma W^D = \lambda_1 (R - R_L I)$$
$$W^{D/}\Sigma W^D = \lambda_1 (E[R_P] - R_L)$$
$$\frac{\Sigma W^D}{W^{D/}\Sigma W^D} = \frac{R - R_L I}{E[R_P] - R_L}$$

Oferta

La oferta total está dada por el portafolio de mercado W^M. En donde $w_i^M = \dfrac{Valor\ de\ mercado\ del\ activo\ \ i}{Valor\ de\ mercado\ de\ todos\ los\ activos}$.

El equilibrio

Para que el mercado de activos alcance el equilibrio se requiere que todos los activos sean comprados. Sea V_i el valor de mercado del *i-ésimo* activo. Entonces el valor de mercado de los activos de la economía es $\sum_{i=1}^{N} V_i$. Si toda la oferta se consume entonces el portafolio de mercado en efecto tiene por ponderadores $w_i^M = \dfrac{V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i}$. Dado que los inversionistas cuentan con expectativas homogéneas (ven la misma frontera eficiente), cada uno de ellos tiene entonces una combinación del activo libre de riesgo y el portafolio tangente por lo que $W^M=W^T$. Es decir, el equilibrio se alcanza hasta que el portafolio tangente es igual al portafolio de mercado.

El equilibrio se tiene cuando $W^M=W^D$. Con ésta igualdad se obtiene el CAPM para toda la economía.

$$W^D = W^M \Rightarrow \frac{\Sigma W^M}{W^{M\prime}\Sigma W^M} = \frac{R - R_L I}{E[R_P] - R_L} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \left(E[R_P] - R_L\right) + \begin{bmatrix} R_L \\ R_L \\ \vdots \\ R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_N] \end{bmatrix}$$

La *i-ésima* entrada del vector ΣW^D es la covarianza entre el rendimiento R_i y el rendimiento del mercado R_M y $\beta_i = \dfrac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$. Por lo que se ha derivado el CAPM para toda la economía.

5.3.- Línea del Mercado de Valores

La Línea del Mercado de Valores (LMV) es la relación entre la beta de los activos y los rendimientos correspondientes como se describe en la Ilustración 22. La beta de un activo es una medida de riesgo sistemático y ayuda a evidenciar la sensibilidad al riesgo de mercado de una acción. Las acciones con beta superior (inferior) a la unidad se denominan agresivas (defensivas).

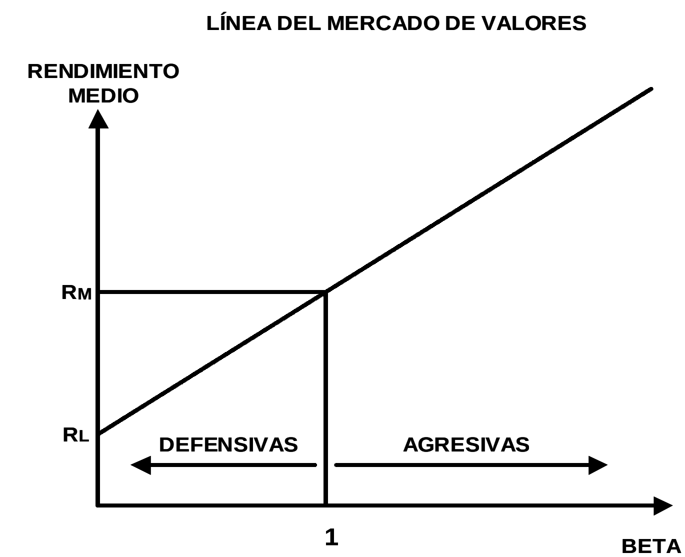

Ilustración 22. Las acciones con beta superior (inferior) a la unidad se denominan agresivas (defensivas).

Si la beta de un activo es mayor que la unidad entonces el rendimiento de dicho activo, en promedio, mostrará un incremento o decremento más que proporcional con respecto al portafolio de mercado. Cuando la beta del activo es menor que la unidad entonces el rendimiento del activo acompañará en forma menos que proporcional al rendimiento del portafolio de mercado. En el caso de que el activo cuente con beta unitaria entonces el rendimiento del activo se moverá, en promedio, en la misma proporción que el portafolio de mercado.

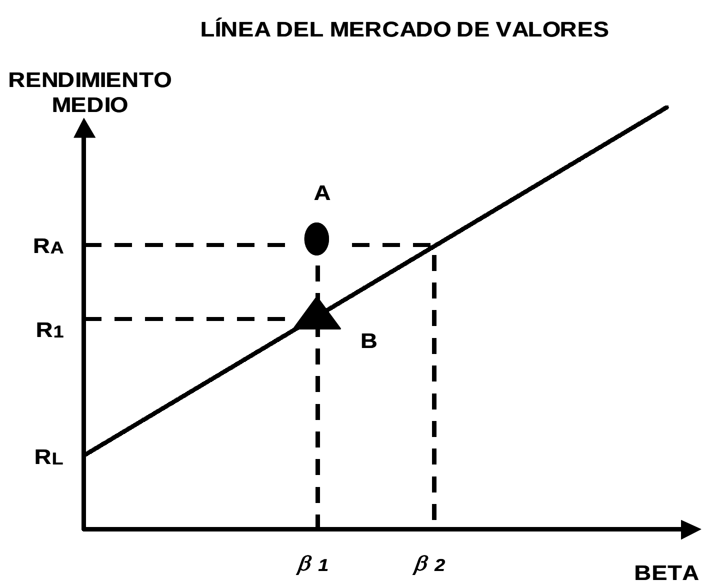

Ilustración 23 Si un activo se encuentra fuera de la LMV se da lugar a ganancias extraordinarias.

En la Ilustración 23 se aprecia un activo con una perturbación en el rendimiento. El activo *A* paga un rendimiento superior dado su nivel de beta. Es decir $R_A > R_1$ cuando *A* tiene beta con valor $\beta_1 < \beta_2$ por lo que este activo está subvaluado para el nivel de beta que ostenta.

Si los participantes del mercado notasen esta discordancia de rendimientos entonces sucedería lo siguiente:

- Realizarían una venta en corto sobre el activo *B* (triángulo) con mismo nivel de beta (β_1) pero con rendimiento R_1.
- Con los recursos de la venta en corto comprarían el activo A tiene el mismo nivel de riesgo sistemático (β_1) pero con mayor rendimiento R_A.
- La demanda del activo A presionaría su precio al alza reduciéndose el rendimiento que ofrece hasta llegar a la LMV.

Cuando un activo se encuentra bajo la LMV sucede un proceso similar para aprovechar la coyuntura en los rendimientos.

5.4.- Modelo del Índice Único (MIU)

El MIU se sustenta en la idea básica que el rendimiento de los activos que cotizan en el mercado, en promedio, crecen o decrecen a la par del rendimiento de algún índice del mercado. Las relaciones entre los rendimientos del índice y los activos es lineal y toma las formas:

$R_i - R_L = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_L) + \varepsilon_i$ para $i=1,2,...,N$.

Donde

R_i : Rendimiento del activo *i-ésimo*
R_M : Rendimiento del índice del mercado
α_i : Componente del rendimiento del activo *i-ésimo* independiente del rendimiento del índice.
β_i : Elasticidad el rendimiento del *i-ésimo* activo ante cambios en el rendimiento del índice.
ε_i : Error aleatorio proveniente de la diferencia entre el rendimiento del activo observado y el valor teórico.
R_L: Tasa libre de riesgo

Es decir se tiene una regresión lineal entre la prima de riesgo que paga un activo y la prima de riesgo del mercado. Respecto del error aleatorio deben hacerse algunas suposiciones:

- ε_i tiene media cero $E[\varepsilon_i]=0$ y varianza ς_i^2.
- $cov(\varepsilon_i , R_M) = 0$
- $cov(\varepsilon_i , \varepsilon_j) = 0$

Tales supuestos, facilitan los cálculos de esperanzas, varianzas y covarianzas. El primer paso es encontrar la esperanza y varianza del *i-ésimo* activo.

$E[R_i - R_L] = \alpha_i + \beta_i E[R_M - R_L]$

Este valor esperado implica que el parámetro α_i debe se nulo en caso de que el CAPM sea válido. La varianza del modelo también da luz sobre los conceptos de riesgo sistemático y específico.

$$\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(\alpha_i+\beta_i(R_M-R_L)+\varepsilon_i) = \beta_i^2\sigma_M^2 + \varsigma_i^2$$

Como se observa, la varianza calculada, parte el riesgo del activo en los mencionados riesgo sistemático $\beta_i^2\sigma_M^2$ y riesgo específico ς_i^2. Para la obtención de la covarianza se requieren más operaciones.

$$cov(R_i-R_L, R_j-R_L)=E[(R_i-R_L - E[R_i-R_L])(R_j-R_L-E[R_j-R_L])]$$
$$cov(R_i-R_L, R_j-R_L)=E[(\beta_i(R_M-E[R_M])+\varepsilon_i)(\beta_j(R_M-E[R_M])+\varepsilon_j)]$$
$$= E[\beta_i\beta_j(R_M - E[R_M])^2 + \beta_i(R_M - E[R_M])\varepsilon_j + \beta_j(R_M - E[R_M])\varepsilon_i + \varepsilon_i\varepsilon_j]$$
$$cov(R_i-R_L, R_M-R_L)=\sigma_{ij}= \beta_i\beta_j\sigma_M^2$$

Sólo falta considerar la covarianza entre la prima de riesgo de un activo y la prima de riesgo de mercado.

$$cov(R_i-R_L, R_M-R_L)=cov(\alpha_i+\beta_i(R_M-R_L)+\varepsilon_i, R_M-R_L)=0+cov(\beta_i(R_M-R_L), R_M-R_L)+0$$
$$cov(R_i-R_L, R_M-R_L)= \beta_i\sigma_M^2$$

Dado que $cov(R_i-R_L, R_M-R_L)= \sigma_{iM}= \beta_i\sigma_M^2 \Rightarrow \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ por lo que se trata de la misma beta del CAPM.

Hasta este punto, se han logrado nuevas fórmulas para la estimación de las varianzas y covarianzas de los activos del mercado. En ello, reside la importancia del MIU. En la Tabla 9 se exhibe un cuadro comparativo de la cantidad de parámetros que deben estimarse para configurar la matriz de varianzas y covarianzas.

N	Rendimientos	Varianzas	Covarianzas	Total
2	2	2	1	5
5	5	5	10	20
10	10	10	45	65
20	20	20	190	230
50	50	50	1225	1325
N	N	N	N(N-1)/2	N(N+3)/2

Tabla 9. El número de parámetros para estimar la frontera eficiente crece como una función cuadrática.

Nótese que cada parámetro estimado conlleva un error por lo que una matriz de varianzas y covarianzas puede acumular un sesgo que conduzca a una varianza negativa del portafolio.

Con las nuevas fórmulas en términos de las betas y la volatilidad del índice del mercado se obtiene una matriz de varianzas y covarianzas de la forma siguiente:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1^2\sigma_M^2 + \varsigma_1^2 & \beta_1\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_1\beta_N\sigma_M^2 \\ \beta_2\beta_1\sigma_M^2 & \beta_2^2\sigma_M^2 + \varsigma_2^2 & \cdots & \beta_2\beta_N\sigma_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_N\beta_1\sigma_M^2 & \beta_N\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_N^2\sigma_M^2 + \varsigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Para determinar la frontera eficiente con base en el MIU se requieren *N* betas, la volatilidad del mercado, *N* rendimientos y *N* estimadores de riesgo único. En total se requieren *3N+1* parámetros que comparados con los *N(N+3)/2* conduce a mayor parsimonia en los cálculos.

Cuando *N* es lo suficientemente grande los errores ς_i^2 son prácticamente despreciables por lo que la matriz Σ se estima de forma sencilla a través del MIU.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1^2\sigma_M^2 & \beta_1\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_1\beta_N\sigma_M^2 \\ \beta_2\beta_1\sigma_M^2 & \beta_2^2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_2\beta_N\sigma_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_N\beta_1\sigma_M^2 & \beta_N\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_N^2\sigma_M^2 \end{bmatrix}$$

5.4.1.- Ventajas y desventajas del MIU

Entre las ventajas del MIU son:

- Permite crear la frontera eficiente con mayor parsimonia.
- Facilita el análisis de activos por industria a través de índices sectoriales.

Las desventajas más señaladas son:

- Puede ser una simplificación excesiva de la explicación del rendimiento de un activo.
- Los portafolios resultantes de la aplicación de éste método pueden no ser eficientes.

5.5.- La beta y sus aplicaciones

El CAPM es un modelo ex ante, el cual no puede ser calculado, lo que se calcula es el CAPM ex post, a partir de datos históricos.

Lo anterior se traduce en que la mayoría de las estimaciones de betas contienen errores, los cuales finalmente impactan en la estimación de la tasa de costo de capital. A pesar de esto, este concepto de riesgo sistemático, resumido en la beta es uno de los más usados en las finanzas modernas.

La estimación de la beta requiere del rendimiento del portafolio de mercado. Este último, no puede ser determinado en forma exacta pero existen variables proxy que permiten simularlo. Dichas variables proxy son los índices accionarios como el S&P 500 de Estados Unidos y en el caso mexicano se tiene al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores que contempla un grupo de alrededor de 35 acciones, ratificadas o sustituidas cada año, con ponderadores que varían en tiempo real.

Una vez que se tiene un aproximado del portafolio de mercado se puede determinar la beta a partir de la definición de la misma o mediante una regresión lineal en la que se considera que el rendimiento de un activo depende en forma lineal del rendimiento del portafolio de mercado.

5.5.1.- El beta-VaR

El beta VaR se entiende como el uso del MIU en la ejecución de la técnica delta-normal vista en el capítulo anterior. Al recordar que la varianza de un portafolio en términos de las betas de los activos que lo componen es:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1^2\sigma_M^2 & \beta_1\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_1\beta_N\sigma_M^2 \\ \beta_2\beta_1\sigma_M^2 & \beta_2^2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_2\beta_N\sigma_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_N\beta_1\sigma_M^2 & \beta_N\beta_2\sigma_M^2 & \cdots & \beta_N^2\sigma_M^2 \end{bmatrix}$$

Las ganancias de este método se aprecian, una vez más, por la parsimonia numérica en los cálculos. La fórmula es la que se presentó en la sección 4.6 del capítulo 4.

VaR=M*NC*$VaR = M * NC * [W^{/}\Sigma W]^{\frac{1}{2}}\sqrt{T}$

Donde:
M: Es el monto expuesto al riesgo
NC: Nivel de confianza. Al 95% es 1.65 y al 99% *NC*=2.33
T: Es el horizonte de tiempo

Como se ha señalado, existen distintas técnicas para la determinación del VaR, sin embargo, en este material se han presentado las técnicas más sencillas a fin de dar una primera aproximación a un curso de administración de riesgos financieros. Mayor detalle sobre este campo de las finanzas se encuentra en [9], y [12].

5.5.2.- CAPM y WACC

El CAPM encuentra aplicaciones en la vida real para determinar el costo de capital de una firma. El WACC (Weighted Average Cost of Capital) es el promedio ponderado del costo de capital propio y el costo de capital de la deuda financiera.

$$WACC = K_d \frac{d}{d+e} + K_e \frac{e}{d+e}$$

donde

K_d es el costo de capital de la deuda financiera
K_e es el costo de capital propio
d es el valor de mercado de la deuda financiera
e es el valor de mercado del capital contable de la firma

En particular, la beta sirve para estimar el costo de capital propio K_e que en el caso mexicano toma la siguiente forma:

$K_e=R_L+\beta(E[R_M]-R_L)*RVA+Rsm+RP$

Donde

R_L es la tasa que pagan los bonos del tesoro a 30 años
β se determina con respecto al índice S&P 500
$E[R_M]$ es el rendimiento medio del S&P 500
RVA es un ajuste por una inversión fuera del entorno de Estados Unidos
Rsm es un premio que debe considerarse por el tamaño de la firma
RP es el riesgo país de los eurobonos mexicanos

5.5.3.- La beta de un portafolio

Para conocer cuál es la beta de un portafolio debe ejecurarse la fórmula del valor de la beta. Dado un portafolio P sin activo libre de riesgo (éste activo tiene beta con valor nulo) con ponderadores $w_1, w_2,...,w_N$ el valor de β_P es:

$$\beta_P = \frac{\operatorname{cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i, R_M\right)}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i \operatorname{cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i$$

Por lo tanto la beta de una cartera es la media ponderada de las betas respectivas de los activos que componen el portafolio. El cálculo de éste tipo de betas se da cuando se desea conocer la beta de todo un sector económico.

CONCLUSIONES

En general, la diversificación es una tarea diaria. Una nación debe diversificar sus exportaciones y diversificar los países a los que exporta, una familia tiene que diversificar sus fuentes de financiamiento en tanto que una institución financiera debe diversificar para ser competitiva en rendimiento como tienen que serlo las Afore.

Los modelos son abstracciones de la realidad y la utilidad de los mismos reside en que fungen como herramientas para el raciocinio aunque el usuario de cualquier modelo debe ser consciente de las bondades y limitaciones del mismo. Las conclusiones de ésta tesis son simples:

1. Dado un nivel de riesgo, elegir el rendimiento más alto y dado un nivel de rendimiento se debe tomar la alternativa de menor volatilidad.

2. La diversificación conduce a la posibilidad de reducir la exposición al riesgo. Cuestiones como la diversificación no se restringen al ámbito de las inversiones en acciones. Es razonable pensar que ninguna institución de seguros tiene toda su cartera de riesgos por daños en una sola ciudad.

3. Así como en microeconomía el precio de un bien está sujeto a las condiciones de los precios de otros bienes como en el caso de la elasticidad cruzada, en la teoría del portafolio moderno la sobretasa de un activo está en función de la sensibilidad de éste con respecto a un portafolio de mercado encarnado por un índice.

4. La teoría desarrollada por Harry Markowitz se suscribe a la teoría neoclásica de la utilidad esperada como un caso particular.

En éstas conclusiones se encuentran, de forma implícita, todos los resultados y razonamientos desarrollados en ésta tesis.

En la vida diaria, es común encontrar que los bancos ofrecen alternativas de ahorro - inversión con tasas que ligeramente superan la tasa de inflación. Es importante entonces ensalzar la viabilidad de nuevas alternativas como los fondos de inversión para obtener mejores rendimientos sin exponerse de forma irracional al riesgo. Es en ese ámbito donde la teoría expuesta en el presente documento puede ayudar al ciudadano promedio.

Para un profesional de la Actuaría, el saber razonar sobre el intercambio entre riesgo y rendimiento es fundamental ya que normalmente entiende el riesgo como riesgo puro y dedica poco espacio al riesgo especulativo. Es en este momento en el que los conceptos desarrollados en esta tesis toman sentido.

APÉNDICE: DISTRIBUCIÓN NORMAL Y ÁLGEBRA MATRICIAL

A1.- Distribución normal

Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución normal con parámetros μ y σ de localización y de escala respectivamente si la función de densidad es:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad \text{donde } -\infty < \mu < \infty \text{ y } \sigma > 0.$$

Cuando X tiene una distribución normal con sus respectivos parámetros se denota como $X \sim N(\mu,\sigma)$.

Si se realiza la transformación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ se obtiene que $Z \sim N(0,1)$ y Z se conoce como normal estándar. La transformada $X=\sigma Z+\mu$ conduce a la normal X original a partir de Z.

Por conveniencia, a continuación se utiliza la variable Z para derivar resultados sobre cualquier variable normal X.

Resultado 1. Sea $Z \sim N(0,1)$. Entonces todos los momentos de esta variable son finitos.

P.D. $E[Z^n] < \infty \ \forall n \in N$

Demostración.

$$E[|Z|^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Si se hace el cambio de variable $y = \frac{z^2}{2}$ se obtiene la siguiente expresión en la que Γ denota la función gama.

$$E[|Z|^n] = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) < \infty \qquad \blacksquare$$

Resultado 2. Si n es impar entonces $E[Z^n]=0$.

Demostración.

$$E[Z^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \quad \text{debido a que } f(z) = z^n e^{-\frac{z^2}{2}} \text{ es una función impar.} \ \blacksquare$$

Resultado 3. Si n es par entonces $E[Z^n]=1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)$

$$E[Z^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Por inducción sobre $k \in N$ tal que $n=2k$ se prueba que $\frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k - 1)$

■

Una vez que se han obtenido resultados para la normal estándar es posible encontrar otros resultados para una normal cualquiera.

Sean $m_n=E[Z^n]$ y $X \sim N(\mu,\sigma)$. Si se recuerda que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ entonces $m_n = E[Z^n] = E\left[\frac{(X - \mu)^n}{\sigma^n}\right]$. Son de interés los valores de m_3 y m_4 pues conducen a los valores del sesgo y curtosis respectivamente para una normal cualquiera.

Resultado 4. El sesgo, entendido como el tercer momento centrar de una normal dividido por la desviación estándar al cubo, es denotado por k_3 es igual a cero.

Demostración.

Por el resultado 1 $m_3 = E\left[Z^3\right] = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{E\left[(X - \mu)^3\right]}{\sigma^3} = 0$ ■

Resultado 5. La curtosis k_4 es el valor del cuarto momento central de una normal divido por la desviación estándar a la cuarta potencial. Para una variable aleatoria normal $k_4=3$.

Demostración.

Por el resultado 2 $m_4 = 3 \cdot 1 = E\left[\frac{(X - \mu)^4}{\sigma^4}\right] \Rightarrow k_4 = \frac{E\left[(X - \mu)^4\right]}{\sigma^4} = 3$ ■

Resultado 6. El *n-ésimo* momento central de una variable aleatoria normal está en función de los valores de la media μ y de la desviación estándar σ.

A partir de la igualdad $X=\sigma Z+\mu$ se tiene que $X^n = (\sigma Z+\mu)^n$ y con base en el binomio de Newton $(\sigma Z + \mu)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \sigma^{n-j} Z^{n-j} \mu^j$ donde $C_n^j = \frac{n!}{(n - j)!\, j!}$.

P.D. $E[X^n]=f(\mu,\sigma)$

Demostración

$$E[X^n] = \sum_{j=0}^{n} (C_n^j \sigma^{n-j} E[Z^{n-j}] \mu^j) = \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j \sigma^{n-j} m_{n-j} \mu\right) = f(\mu,\sigma)$$ ■

A2.- Álgebra matricial

Matriz. Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de números con m filas y n columnas. Sabiendo que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ una matriz toma la forma siguiente:

$$A = A[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrices especiales. Sea A una matriz de mxn entonces se tienen los siguientes casos especiales: (1) Si $m=n$ entonces la matriz se denomina matriz cuadrada. (2) Si $m=1$ entonces se tiene un vector fila. (3) Si $n=1$ se tiene un vector columna. (4) Si $a_{ij}=0$ con $i \neq j$ entonces se tiene una matriz diagonal. (5) Si $m=n$, $a_{ij}=0$ con $i \neq j$ y $a_{ij}=1$ en los demás casos se tiene la matriz identidad denotada por I_n. (6) Si $a_{ij}=0$ entonces se tiene la matriz cero.

Multiplicación por un escalar. Dada la matriz A de mxn el producto de un escalar γ y la matriz resulta $\gamma A=A[\gamma a_{ij}]$.

Suma de matrices. Dadas las matrices $A=A[a_{ij}]$ y $B=B[b_{ij}]$ ambas de mxn entonces la suma y resta que resultan de dimensión mxn se definen como $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ y $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]$. Las propiedades de la suma son las siguientes: (1) $A+B= B+A$. (2) Dada una matriz C de mxn entonces $(A+B)+C=A+(B+C)$. (3) Dados los escalares γ y η entonces $(\gamma+\eta)A=\gamma A+\eta A$. (4) $(\gamma\eta)A=\gamma(\eta A)$. (5) $\gamma(A+B)= \gamma A+\gamma B$.

Producto de matrices. Con las matrices $A=A[a_{ij}]$ de mxn y $B=B[b_{ij}]$ de nxp el producto matricial de dimensión mxp se define como $AB = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}\right]$. El producto matricial tiene las siguientes propiedades: (1) $\gamma(AB)= (\gamma A)B$ (2) Con una tercer matriz C de pxq entonces $(AB)C=A(BC)$. (3) Suponiendo que C es de nxp entonces se tiene que $A(B+C)=AB+AC$. (4) $AB \neq BA$, en general.

Transposición. La transpuesta de una matriz $A=A[a_{ij}]$ de mxn es el resultado del intercambio las columnas por los renglones y es denotada por $A^{\prime}= A[a_{ji}]$. La transposición tiene las siguientes propiedades: (1) $(A^{\prime})^{\prime}=A$. (2) $(A+B)^{\prime}=A^{\prime}+B^{\prime}$. (3) $(AB)^{\prime}=B^{\prime}A^{\prime}$.

Matriz simétrica. Una matriz A de mxm es simétrica si $A=A^{\prime}$.

Matriz inversa. Una matriz A de nxn tiene inversa A^{-1} si $A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$. Una matriz con inversa se denomina invertible o no singular.

Forma cuadrática. Sea A una matriz simétrica de nxn. La forma cuadrática asociada a A es, para un vector columna W de $nx1$ con entradas w_i , la siguiente función vectorial:

$$W^{/}AW = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 a_i^2 + 2\sum_{i\neq j} w_i w_j a_{ij}$$

La matriz A es positiva definida si $W^{/}AW>0$ excepto cuando las entradas de W son todas cero. Cuando $W^{/}AW\geq 0$ para todo W entonces A es una matriz semidefinida positiva. Las matrices definidas y semidefinidas positivas tienen las siguientes propiedades: (1) Si A es definida positiva entonces A^{-1} existe y también es positiva definida. (2) Si A es definida positiva entonces sus elementos diagonales son no negativos. (3) La derivada de una forma cuadrática es $2AW$.

REFERENCIAS

[1] Brealey, Richard A., *Principios de Finanzas Corporativas*, España, Mc Graw Hill, 1998.

[2] Copeland, Thomas, Weston, John Fred, *Financial Theory and Corporate Policy*, Estados Unidos, Addison Wesley, 1988.

[3] Dornbusch, Rudiger, *Macroeconomía*, España, Mc Graw Hill, 2002.

[4] Elton, Edwin J., Gruber Martin J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Estados Unidos, John Wiley & Sons, 1995.

[5] Grinblatt, Mark, *Financial Markets and Corporate Strategy*, Estados Unidos, Mc Graw Hill, 1998.

[6] Haugen, Robert A., *Modern investment theory*, Estados Unidos, Prentice Hall, 2001.

[7] Heyman, Timothy, *Inversión en la Globalización*, México, IMEF, Milenio, IMCP, ITAM y BMV, 1998.

[8] Kozikowski Z, Zbigniew, *Finanzas Intenacionales*. México, Mc Graw Hill, 2001.

[9] Lara Haro, *Alfonso de, Medicion y control de riesgos financieros*, México, Limusa, 2005.

[10] Nicholson, Walter, *Teoría Microeconómica*, España, Mc Graw Hill, 2000.

[11] Rose, Peter, *Money and Capital Markets*, Estados Unidos, Mc Graw Hill, 2000.

[12] Sánchez Cerón, Carlos, Valor en riesgo y otras aproximaciones, Valuación, Análisis y Riesgo, S.C., México, 2001.

[13] Valdivieso Martínez, Raúl, *Validación de la eficiencia y modelos de fijación de precios en el mercado mexicano de valores*. México, Tesis de doctorado. UNAM. Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración, 2004.

[14] Univesidad Nacional Autónoma de México, Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, Pricewaterhousecoopers, *Valuación de empresas y creación de valor*, México, Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, 2002.

[15] Varian, Hal R., *Microeconomía intermedia*, España, Antoni Bosch, 2003.

Páginas de internet.

www.cnsf.gob.mx
www.banxico.org.mx
www.consar.gob.mx