

MODELO NUMERICO DEL SISTEMA
DE ACUIFEROS DEL VALLE DE MEXICO

Tesis para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias de la Computación

Por

David Balarezo

Director

Dr. Robert A. Yates

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria

Febrero, 1980



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia

El autor de esta tesis agradece
a los Drs.:

Robert A. Yates

Ismael Herrera

Jean Pierre Hennart

sin cuyo valiosísimo aporte
este trabajo no se hubiese rea-
lizado.

INDICE

	Pág.
CAPITULO 1: INTRODUCCION	1
CAPITULO 2: OBTENCION DE LAS ECUACIONES BASICAS	6
2.1 Conservación de la masa en un medio poroso no deformable	6
2.2 Ecuaciones de continuidad en acuíferos semiconfinados	9
CAPITULO 3: SOLUCION PARA EL CASO DE SIMETRIA AXIAL	19
3.1 Solución numérica	19
3.2 Integración por el método "lumping"	23
CAPITULO 4: CASO GENERAL	26
4.1 Ecuaciones generales con elementos finitos en espacio y tiempo	26
4.2 Transformación a un dominio arbitrario	36
4.3 Condiciones de frontera	39
CAPITULO 5: APLICACION AL VALLE DE MEXICO	45
5.1 El Valle de México y sus propiedades físicas	45
5.2 Cálculo de hundimiento	47
5.3 Calibración del modelo	50
APENDICE A: MANUAL DEL USUARIO	51
1. Características generales	51
2. Diagrama de flujo	52
3. Descripción de subrutinas	53
4. Datos de entrada	55
5. Interpretación de resultados	59

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1. INTRODUCCION.

El estudio de un sistema de acuíferos tiene como finalidades principales las siguientes:

- a) Aprovechamiento óptimo del agua contenida en el acuífero,
- b) Detección y predicción de la contaminación del agua,
- c) Predicción y control del hundimiento del suelo debido a la extracción de agua.

En esta introducción se revisan ligeramente los problemas fundamentales que pueden resolverse con la modelación numérica de sistemas de aguas subterráneas.

El modelo numérico, objeto de esta tesis, resuelve un sistema de ecuaciones integro-diferenciales (propuesto por I. Herrera y L. Rodarte, ref. 1.1) que son los que representan el comportamiento del abatimiento de presiones en el sistema de dos acuíferos, separados por un acuitardo. Este abatimiento de presiones se produce cuando existe una variación del contenido de agua en los acuíferos, variación que se produce cuando alguna acción externa al sistema altera su equilibrio; en otras palabras, si se extrae agua para bombeo o si las lluvias o algún elemento ubicado en la frontera producen una recarga al sistema, se está alterando el nivel piezométrico. Como se verá en el capítulo IV, cualquiera de estas acciones que afectan el nivel piezométrico son tratadas por el modelo.

Las acciones externas se propagan en el dominio del sistema dependiendo de las propiedades físicas del mismo y del tiempo. Estas propiedades físicas se refieren principalmente a:

- 1- A la permeabilidad del material,
- 2- La capacidad de almacenamiento de agua,
- 3- Los espesores de las capas que forman el sistema.

Si se combina la permeabilidad con el espesor se obtiene una propiedad adicional llamada transmisibilidad, que junto con las acciones exteriores de extracción (bombeo o gasto) o recarga (que normalmente es natural, pudiendo en algún caso ser artificial) son los parámetros que influyen en forma proporcional en el comportamiento del abatimiento.

El interés de construir un modelo que permita conocer la variación del abatimiento en el tiempo, se relaciona con:

1. Supóngase que se han establecido, por algún procedimiento confiable, para alguna región de interés las propiedades físicas y las condiciones de frontera. Entonces será posible conocer en cualquier punto el abatimiento o lo que es lo mismo: el nivel piezométrico, y además se puede ver cómo van a ser afectados estos niveles en el tiempo. Esto sugiere la posibilidad de establecer algún plan de extracción con el fin de optimizar la producción, por ejemplo,
2. Supóngase el siguiente sistema simplificado (fig. 1.1):

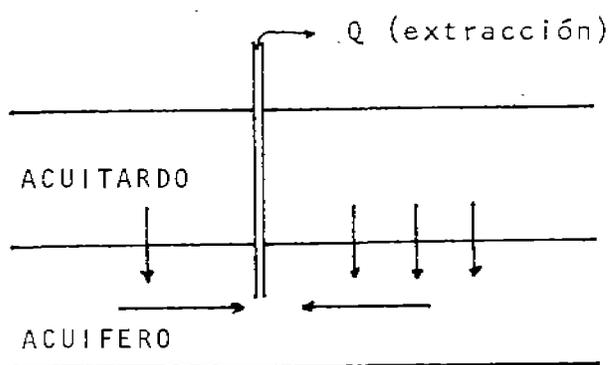


fig. 1.1

Como se analizará más adelante en este mismo capítulo, la extracción de agua del acuífero al disminuir su almacenamiento provoca que el acuitardo, formado por arcilla, pierda también su contenido de agua a través de la superficie de contacto con el acuífero.

Esta pérdida de agua de la capa de arcilla provoca en un reacomodamiento de las partículas de la misma que es causa para que se produzca hundimiento en la superficie del terreno.

La aplicación que aquí se sugiere se estudio a detalle, para el caso de la predicción del hundimiento en el Valle de México, en el capítulo V de esta tesis.

A continuación se delinea la evolución histórica de la formulación de ecuaciones hasta llegar al sistema propuesto por I. Herrera y L. Rodarte.

Estrictamente hablando, el flujo que se produce en un sistema acuífero acuitardo es tridimensional. Pero Hantush (ref. 1.2) considerando que la permeabilidad en el acuífero es mucho mayor que en el acuitardo ($K \gg K'$, en donde K es la permeabilidad en el acuífero y K' es la permeabilidad en el acuitardo), asume que el flujo en el acuífero es esencialmente horizontal y en el acuitardo esencialmente vertical, lo que permite a Hantush llegar a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{K'}{T} \frac{\partial}{\partial z} u(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} \quad e1.1$$

en donde si b es el espesor del acuífero, entonces $T=Kb$ es la transmisividad y $\alpha=T/S$, en donde S es el almacenamiento del acuí-

fero. La ecuación 1.1 está limitada a que haya simetría axial y propiedades físicas constantes.

El siguiente paso está dado por Neumann y Witherspoon (ref. 1.3) quienes formulan las ecuaciones para un sistema de dos acuíferos intercalados por un acuitardo:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{K_1}{T_1} \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{e1.2a}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{e1.2b}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{K_2}{T_2} \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=b_1} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad \text{e1.2c}$$

A estas ecuaciones se agregan las siguientes condiciones:

$$u_i(r, 0) = 0 \quad i=1,2$$

$$u_i(\infty, t) = 0 \quad i=1,2$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u_1}{\partial r} = -\frac{Q_1}{2\pi T_1}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u_2}{\partial r} = 0$$

En el trabajo de Neuman y Witherspoon se da además la solución analítica para cuando el sistema esté bajo la influencia de un pozo situado en el centro ($r=0$).

I. Herrera y L. Rodarte (ref. 1) trabajando básicamente sobre el sistema propuesto por Neuman y Witherspoon incluyen modificaciones sustanciales, a través del uso de las funciones de memoria f , g , h , que permiten plantear modelos para un sis-

tema dado. El uso de las funciones de memoria permite desacoplar el sistema de ecuaciones integrodiferenciales y además evitan que se tenga que recurrir a la acumulación de residuos en el tiempo.

Basándose en la solución propuesta por Herrera y Rodarte se han desarrollado algunos modelos numéricos. Un primer modelo para el caso de un pozo ubicado en el centro, un acuífero y un acuitardo, con simetría axial y coeficientes constantes es desarrollado por I. Herrera, R. Yates y C. Pérez (ref. 1.4). Posteriormente I. Herrera y R. Yates (ref. 1.5) desarrollan para similares condiciones, pero incorporando 2 acuíferos. Por último, R. Yates y J.P. Hennart desarrollaron un modelo en dos dimensiones que manejan una región circular y condiciones de frontera arbitrarias. (ref. 1.6)

Esta tesis fundamentalmente extiende este último modelo para tratar el problema en el caso más general, o sea, cuando la región tiene una forma arbitraria y cuando las propiedades físicas (permeabilidades, espesores, etc.) son variables, como se presenta usualmente en la realidad en los diferentes puntos de la región. El modelo ha sido implementado en un computador Burroughs B 6800 utilizando Fortran IV y opcionalmente maneja un sistema de un acuífero y un acuitardo o dos acuíferos separados por un acuitardo.

CAPITULO 2

OBTENCION DE LAS ECUACIONES BASICAS

2. OBTENCION DE LAS ECUACIONES BASICAS:

2.1 CONSERVACION DE LA MASA EN UN MEDIO POROSO NO DEFORMABLE:

La ecuación de "conservación de la masa" o "ecuación de continuidad" se obtiene considerando un pequeño cubo en coordenadas cartesianas de x, y, z . Se supone que este cubo pertenece a un medio de propiedades físicas heterogéneas, por lo cual los principales valores de la permeabilidad se asumen como k_x, k_y, k_z , en el sentido de los ejes x, y, z , respectivamente.

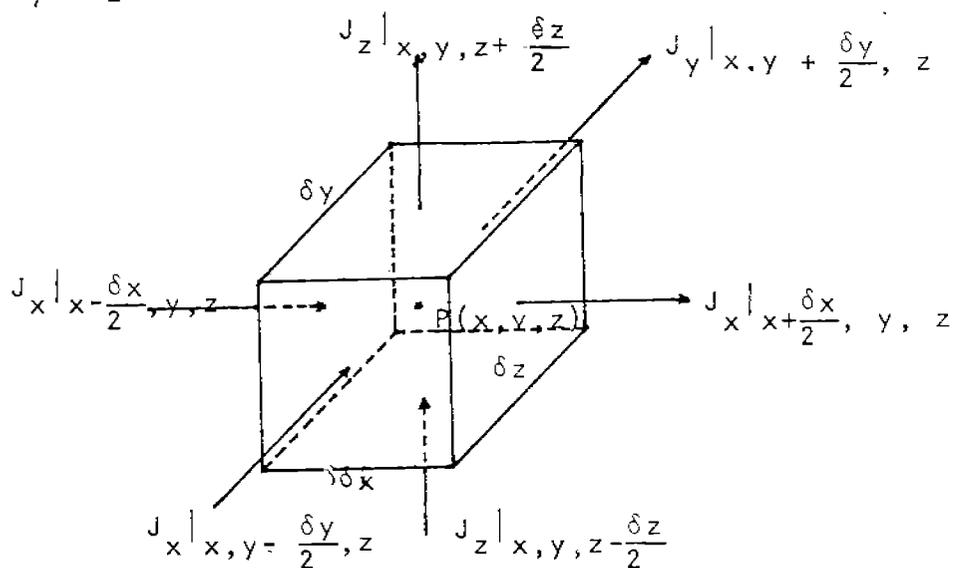


fig. 2.1

Considerando que las aristas del cubo están orientadas paralelamente a los respectivos ejes del sistema coordenado y equidistantes del punto $P(x, y, z)$. El vector \mathbf{y} con sus componentes J_x, J_y, J_z representa el flujo de masa (masa por unidad de área por unidad de tiempo) de un fluido de densidad ρ .

Para un cierto periodo de tiempo la diferencia de flujo, medida como la cantidad de fluido que entra menos la que sale, en la dirección x puede ser expresada como:

$$[J_x|_{x-\frac{\delta x}{2}, y, z} - J_x|_{x+\frac{\delta x}{2}, y, z}] \delta y \delta z \delta t \quad e2.1$$

o aproximando por una serie de Taylor en el punto P y desechando los términos de 2do. orden en adelante, quedaría como:

$$- \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t \quad e2.2$$

Haciendo una deducción análoga para los ejes y, z podemos expresar la diferencia de flujo en todo el cubo como:

$$- \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t \quad e2.3$$

Por el principio de conservación de la masa esto debe ser igual al cambio de masa contenido en el cubo en el intervalo δt que se expresa como:

$$\frac{\partial (\rho n \Delta U_0)}{\partial t} \delta t \quad e2.4$$

en donde $\Delta U_0 = \delta x \delta y \delta z = \text{constante}$, es el volumen del cubo y n es un coeficiente que especifica la porosidad del material contenido en el cubo y que en último término determina la máxima cantidad de fluido que puede contener ΔU_0

De 2.3 y 2.4 entonces se obtiene:

$$- \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial (\rho n)}{\partial t} \quad e2.5$$

El flujo puede expresarse también como

$$J = \rho q \quad e2.6$$

en donde ρ y q son valores promedio y q representa el gasto, entonces la ecuación 2.5 se transforma en:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad e2.8$$

que es la ecuación general de flujo de fluido de densidad ρ en un medio de porosidad n .

Se puede introducir el nivel piezométrico ($\phi = \phi(x, y, z, t)$) o la presión ($p = p(x, y, z, t)$) preferentemente que q como variables independientes, q se expresa como (ref. 2.1)

$$q = - \left(\frac{k\rho g}{\mu} \right) \nabla \phi \quad e2.8a$$

En donde k representa la permeabilidad específica, g la gravedad y μ la viscosidad. En medios heterogeneos k puede representarse como k_x, k_y, k_z , para las 3 direcciones principales.

La ecuación e2.8a fue obtenida experimentalmente para Darcy (1856) y se le conoce como la Ley de Darcy. En los capítulos siguientes, haciendo las consideraciones para cuando el fluido es agua, se usará la permeabilidad K con lo que la ecuación de Darcy que expresada como

$$q = -K \nabla \phi \quad e2.8b$$

en donde

$$K = \frac{k\rho g}{\mu}$$

Esta ecuación de Darcy es estable para un medio saturado, suposición que se mantiene a todo lo largo de este trabajo, si

el medio no está saturado entonces dejara de ser válidas las ecuaciones presentadas.

+De 2.7 y 2.8a se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho^2 \frac{g^k_x}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho^2 \frac{g^k_y}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho^2 \frac{g^k_z}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \eta \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad e2.10$$

que es la ecuación general para el nivel piezométrico de un fluido cualquiera en un medio con propiedades heterogéneas. A continuación se derivan las ecuaciones para un acuífero semiconfinado.

2.2 ECUACIONES DE CONTINUIDAD PARA FLUJO EN ACUIFEROS SEMICONFINADOS:

La aproximación principal, o mejor, la característica principal de flujo en un acuífero es que éste es esencialmente horizontal. Esto es exacto para acuíferos confinados, homogéneos e isotrópicos. Es también una buena aproximación cuando el espesor del acuífero varía, siempre que estas variaciones sean relativamente pequeñas con relación al espesor total.

Otro hecho importante en el flujo en un acuífero es que se puede asumir que el agua es un fluido homogéneo de $\rho = \text{cte}$. Entonces la permeabilidad K y la transmisividad $T = Kb$, en donde b es el espesor del acuífero, son independientes del tiempo.

2.2 FLUJO EN ACUIFEROS CONFINADOS:

El establecimiento de las ecuaciones para un acuífero confinado se puede derivar de una manera análoga a la obtención de la expresión 2.10 en la cual J_z o q_z se considera igual a cero.

Para la deducción que sigue se ignora la variación de b en el tiempo, se asumen pequeñas con relación a b mismo.

Definición: transmisividad de un acuífero

(T) es la descarga horizontal de agua a lo largo del espesor b por unidad de longitud (medido horizontalmente) perpendicular a la dirección del flujo y por unidad del gradiente hidráulico. Es igual a la permeabilidad (conductividad hidráulica) promedio multiplicado por el espesor del acuífero:

$$T = \bar{k}b; \quad \bar{k} = \frac{1}{b} \int_0^b k(z) dz \quad e2.11$$

En un acuífero de propiedades heterogeneas tanto b como \bar{k} puede variar por lo que tendríamos $T=T(x,y)$. Definición: almacenamiento de un acuífero (S) como el volumen de agua (ΔU_w) quitado o dividido al almacenamiento en el acuífero por unidad horizontal de área del mismo y por unidad de variación del nivel piezométrico promedio:

$$S = \frac{\Delta U_w}{\Delta A \Delta \phi} \quad e2.12$$

Definición: almacenamiento específico de un acuitardo (S_s) es el volumen de agua quitado o añadido al almacenamiento por unidad de volumen y por unidad de variación del nivel piezométrico

$$S = S_s b \quad e2.13$$

Se asume un volumen de control $b\Delta x\Delta y$, y haciendo que $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ por un proceso análogo a 2.1 se obtiene:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e2.14}$$

en donde $q_x = -Ti \frac{\partial \phi}{\partial x}$, con lo cual puede obtenerse finalmente la ecuación de un acuífero confinado en un medio anisotrópico:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e2.15}$$

Si el medio es isotrópico:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

2.2.2 ECUACIONES PARA ACUIFEROS SEMICONFINADOS:

Definición: acuífero semiconfinado es aquel que puede perder o ganar agua a través de su frontera:

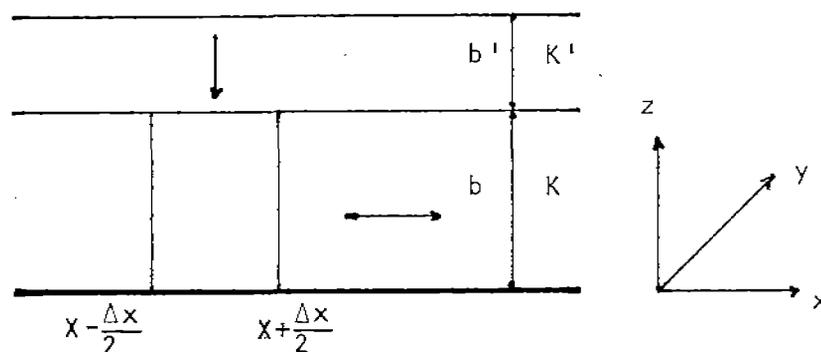


fig. 2.2

se asume, para que haya la condición de flujo vertical en parte semipermeable, que $\kappa \gg \kappa'$

Aplicando el principio de conservación al volumen de la figura 2.2 se obtiene la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & [\Delta y [q_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y) - q_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y)] + \Delta x [q_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}) - q_y(x, y + \frac{\Delta y}{2})] \times \\ & + q'_v \Delta x \Delta y] = S \Delta x \Delta y (\phi(t + \Delta t) - \phi(t)) \end{aligned} \quad \text{e2.17}$$

si en esta ecuación pasa Δt al lado derecho, sustituyendo q'_v por $-\kappa' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)$ en donde ϕ' es el nivel piezométrico en la capa semipermeable, dividiendo por $\Delta x \Delta y$ y además haciendo que $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación para un medio isotrópico:

$$\tau \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \kappa' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e2.18}$$

En la capa semipermeable, de almacenamiento S' , se asume únicamente flujo en el sentido vertical y tenemos entonces:

$$\kappa' \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} \right) = S' \frac{\partial \phi'}{\partial z} \quad \text{e2.19}$$

Para fines comparativos se establece e2.18 en tres dimensiones, para lo cual partimos de que $q_z \neq q'_n$ e introduciendo q_z en las ecuaciones iniciales como componente de q en la dirección z , entonces se llega a la siguiente ecuación:

$$\kappa \nabla_{xyz}^2 \phi = S \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e2.20}$$

que también puede expresarse como

$$\nabla_{xyz}^2 \phi = (S_o / \kappa) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e2.20b}$$

Nótese que e2.18 y e2.20 resuelven esencialmente el mismo problema, pero e2.18 tiene la ventaja que es una ecuación en dos dimensiones, mientras que e2.20 lo es en TRES dimensiones.

2.3 ECUACIONES PARA UN SISTEMA DE DOS ACUIFEROS CON UN ACUITARDO

En esta sección se presenta la deducción del sistema de ecuaciones obtenidas por Herrera y Rodarte (ref. 1.1) en el cual se

apoya teóricamente esta tesis:

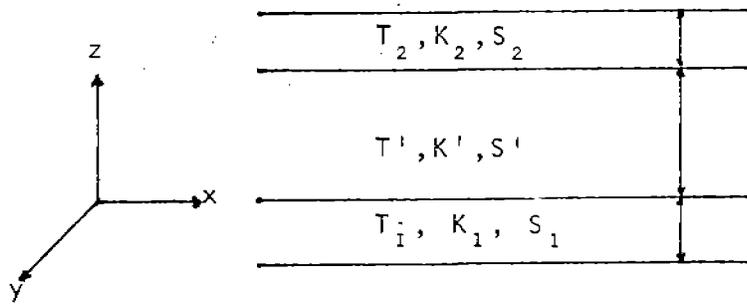


fig. 2.3

Dividiendo la ecuación e2.18 por T e introduciendo el abatimiento (u) en lugar de ϕ resulta:

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + (K/T)(\partial u / \partial z) = (S/T) \partial u / \partial t \quad \text{e2.20a}$$

pero $S/T = S_s/K$ y haciendo $\alpha = K/S_s$, la ecuación e2.20a puede expresarse como:

$$\partial^2 u_x / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + (K/T) (\partial u' / \partial z) = (1/\alpha) \partial u / \partial t \quad \text{e2.20b}$$

Utilizando esta última ecuación y la e2.19, las ecuaciones que gobiernan el sistema de fig. 2.3 pueden quedar expresadas como:

$$\partial^2 u_1 / \partial x^2 + \partial^2 u_2 / \partial y^2 + (K'/T_1) (\partial u' / \partial z)_{z=0} = (1/\alpha_1) \partial u_1 / \partial t \quad \text{e2.21a}$$

$$\partial^2 u' / \partial z^2 = (1/\alpha') \partial u' / \partial t \quad \text{e2.21b}$$

$$\partial^2 u_2 / \partial x^2 + \partial^2 u_2 / \partial y^2 - (K'/T_2) (\partial u' / \partial z)_{z=b'} = (1/\alpha_2) \partial u_2 / \partial t \quad \text{e2.21c}$$

a las cuales deben añadirse las siguientes ecuaciones de continuidad:

$$u'(x, y, 0, t) = u_1(x, y, t) \quad \text{e2.22a}$$

$$u'(x, y, b', t) = u_2(x, y, t) \quad \text{e2.22b}$$

$$u_1(x, y, 0) = 0 \quad \text{e2.22c}$$

$$u_2(x, y, 0) = 0 \quad \text{e2.22d}$$

$$u'(x, y, z, 0) = 0 \quad \text{e2.22e}$$

Las ecuaciones e2.21b y e2.22 constituyen un problema ya planteado de la ecuación de calor, cuya solución está dada por la integral de Duhamel:

$$\begin{aligned} \underline{u}'(x, y, z, t) = & \int_0^t (\partial u_1 / \partial t)(x, y, t - \tau) w(z, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t (\partial u_2 / \partial t)(x, y, t - \tau) v(z, \tau) d\tau \end{aligned} \quad \text{e2.23}$$

La función auxiliar $w(z, t)$ satisface:

$$\partial^2 w / \partial z^2 = (1/\alpha^2) \partial w / \partial t; \quad 0 < z < b', t > 0 \quad \text{e2.24a}$$

$$w(0, t) = 1 \quad t > 0$$

$$w(b', t) = 0 \quad 0 < z < b'$$

$$w(z, 0) = 0 \quad \text{e2.24b}$$

La auxiliar $v(z, t)$ satisface las mismas ecuaciones anteriores, con las condiciones de frontera siguientes:

$$v(0, t) = 0$$

$$v(b', t) = 1 \quad t > 0$$

$$v(z, 0) = 0 \quad 0 < z < b', \quad \text{e2.24c}$$

pueden normalizarse los valores de z, t de la siguiente manera:

$$\zeta = z/b' \quad \text{e2.25a}$$

$$t' = \alpha^2 t / b'^2 \quad \text{e2.25b}$$

y si reemplazando $w(z,t)$ por $\omega(\zeta,t')$ en e2.24a, se obtiene:

$$\partial^2 \omega / \partial \zeta^2 = \partial \omega / \partial t'; \quad 0 < \zeta < 1, t' > 0 \quad \text{e2.26a}$$

con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \omega(0,t') &= 1 \\ \omega(1,t') &= 0 & t' > 0 \\ \omega(\zeta,0) &= 0 & 0 < \zeta < 1 \end{aligned} \quad \text{e2.26b}$$

Esta ecuación puede resolverse aplicando el método de separación de variables, previamente se levanta la condición heterogénea de frontera ($\omega(0,t')=1$) con la sustitución de $\omega(\zeta,t')=1+\zeta$ por $\omega_1(\zeta,t')$ y entonces:

$$\begin{aligned} \omega_1(0,t') &= 0 \\ \omega_1(1,t') &= 0 \\ \omega_1(\zeta,0) &= \zeta - 1 \end{aligned} \quad \text{e2.27}$$

ahora si se procede a realizar separación de variables, resulta:

$$\omega(\zeta,t') = 1 - \zeta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 t'}}{n \pi} \operatorname{sen} n \pi \zeta \quad \text{e2.28}$$

se observa también que

$$v(z,t) = w(b' - z, t) \quad \text{e2.29a}$$

de donde:

$$v(z,t) = \omega(1 - \zeta, t') \quad \text{e2.29b}$$

Usando las últimas ecuaciones y las definiciones de t' y ζ , la ecuación e2.23 se puede transformar en:

$$(\partial u' / \partial z)(x, y, 0, t) = \frac{1}{b'} \left[\int_0^t \partial u_1 / \partial t(x, y, t-\tau) (\partial w / \partial \zeta)(0, \alpha' \tau / b'^2) d\tau - \int_0^t (\partial u_2 / \partial t)(x, y, t-\tau) (\partial w / \partial \zeta)(1, \alpha' \tau / b'^2) d\tau \right] \quad e2.30$$

De e2.28 pueden encontrarse las siguientes expresiones:

$$\partial w / \partial \zeta(0, \tau) = -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \quad e2.31a$$

$$\partial w / \partial \zeta(1, \tau) = -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \tau} \quad e2.31b$$

pero como $w(z, t) = w(\zeta, t')$, entonces puede hacerse

$$\partial w / \partial z(z, t) = (1/b') \partial w / \partial \zeta(\zeta, t') \quad e2.31c$$

Ahora se definen f y h como funciones de t' , de la siguiente forma:

$$f(t') = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'} \quad e2.32a$$

$$h(t') = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t'} \quad e2.32b$$

entonces e2.30 se transforma en:

$$\partial u' / \partial z(x, y, 0, t) = -\frac{1}{b'} \left[\int_0^t \partial u_1 / \partial t(x, y, t-\tau) f(\alpha' \tau / b'^2) d\tau - \int_0^t \partial u_2 / \partial t(x, y, t-\tau) h(\alpha' \tau / b'^2) d\tau \right] \quad e2.33$$

Si introducimos $C_i = K / T i b'$ con $i=1, 2$ y el sistema de ecuaciones que gobierna el sistema acuífero-acuitardo, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\partial^2 u_1 / \partial x^2 + \partial^2 u_1 / \partial y^2 - C_1 \int_0^t \partial u_1 / \partial t(x, y, t-\tau) f(\alpha' \tau / b'^2) d\tau + C_1 \int_0^t \partial u_2 / \partial t(x, y, t-\tau) h(\alpha' \tau / b'^2) d\tau = (1/\alpha) \partial u_1 / \partial t \quad e2.34a$$

$$\partial^2 u_2 / \partial x^2 + \partial^2 u_2 / \partial y^2 - C_2 \int_0^t \partial u_2 / \partial t(x, y, t-\tau) f(\alpha' \tau / b'^2) d\tau + C_2 \int_0^t \partial u_1 / \partial t(x, y, t-\tau) h(\alpha' \tau / b'^2) d\tau = (1/\alpha_2) \partial u_2 / \partial t \quad e2.34b$$

$$u'(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, y, t-\tau) w(z, \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, y, t-\tau) v(z, \tau) d\tau \quad e2.34c$$

Las ecuaciones e2.34 constituyen un conjunto completo de ecuaciones a las cuales se debe añadir las condiciones adecuadas de frontera para obtener la conducta de los abatimientos en el sistema.

Para la ecuación e2.34c se insiste que:

$$w(z, t) = 1 - z/b' - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \alpha' t / b'^2}}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi z / b' \quad e2.35a$$

$$v(z, t) = z/b' + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-n^2 \pi^2 \alpha' t / b'^2}}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi z / b' \quad e2.35b$$

además redefiniendo $f(t')$ como

$$f(t') = 1 + g(t') \quad e2.36a$$

en donde:

$$g(t') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'} \quad e2.36b$$

las funciones f, g se ven en la figura 2.4

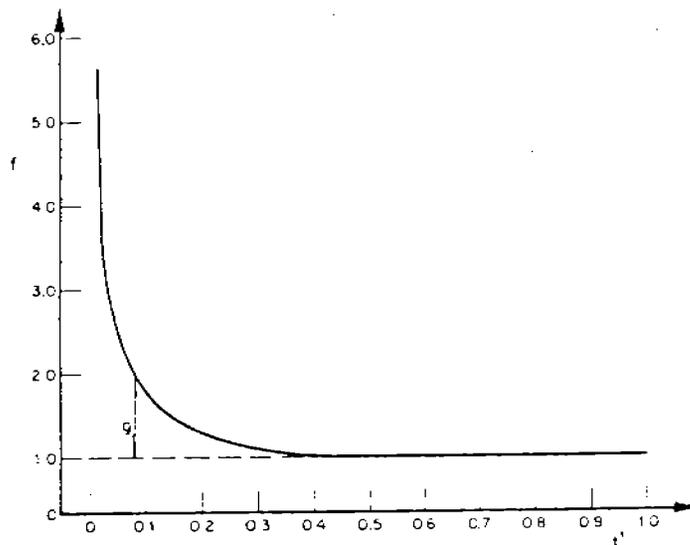


Fig. 2.4

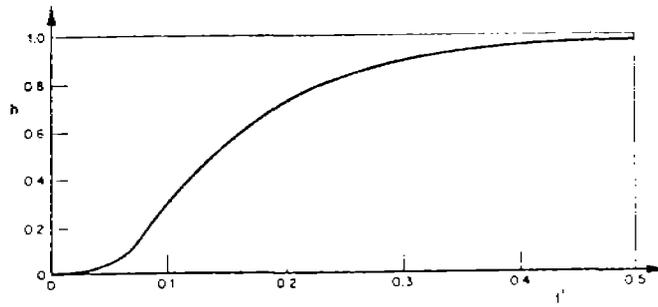


Fig. 2.5

Al introducir e2.36a en e2.34 podríamos obtener ecuaciones alternativas al sistema e2.34.

Resumiendo lo tratado en este capítulo se ve que el sistema original en 3 dimensiones se ha transformado en e2.34a y e2.34b en un sistema integrodiferencial que a más de ser un problema bi-dimensional puede ser evaluado con la aproximación deseada. Por otro lado, se prescinde de tener que acumular información a lo largo de las iteraciones en el tiempo, asunto que se consigue por medio del uso de las funciones de memoria f y h , las mismas que a su vez permiten romper el acoplamiento del sistema e2.21.

Sin embargo, todavía se mantienen limitaciones en cuanto a que se consideran propiedades físicas constantes ($K_u, T, b, \text{etc.}$), simetría axial, y condiciones de fronteras constantes. El levantamiento de estas restricciones es el propósito fundamental del presente trabajo.

CAPITULO 3

SOLUCION PARA EL CASO DE SIMETRIA AXIAL

3.1 LA SOLUCION NUMERICA

La solución del sistema de ecuaciones integrodiferenciales se encuentra aplicando el método de Galerkin para resolver por elementos finitos. Analizado en el capítulo anterior se encuentra utilizando el método de Galerkin que aproxima la solución exacta u por:

$$\hat{u}_k = \sum_{j=1}^N P_{kj}(t) \phi_j(x,y) \quad e3.1$$

k=1,2

en donde $\phi_j(x,y)$ son las funciones de base (ref. 3.1) y $P_{kj}(t)$ son calculados numéricamente.

Aplicando el método antes nombrado permite transformar las ecuaciones integrodiferenciales a un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$AP = -BP + CI(P) + S \quad e3.2$$

La solución global en el dominio D se encuentra mediante las soluciones locales que se encuentran en cada elemento en que se subdividió D.

Para la aproximación en el tiempo, puesto que es un modelo de un problema dependiente del tiempo, se derivan las ecuaciones detalladamente en el siguiente capítulo, pero se hace notar que la solución por el esquema de Krank-Nicolson (ref. 3.2) da una aproximación de segundo orden en el tiempo y errores globales de $O(\Delta t^2)$.

En forma breve se da a continuación el procedimiento numérico para una región con simetría axial.

Con algunas definiciones y transformaciones (ref. 3.3; 3.4) el sistema e2.34 puede ser escrito en la forma siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \int_0^{t'} \frac{\partial u_1(t'-\tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau + \int_0^{t'} \frac{\partial u_2(t'-\tau)}{\partial t} h(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha a_1} \frac{\partial u_1}{\partial t'} \quad \text{e3.3a}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \int_0^{t'} \frac{\partial u_2(t'-\tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau + \int_0^{t'} \frac{\partial u_1(t'-\tau)}{\partial t} h(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha a_2} \frac{\partial u_2}{\partial t'} \quad \text{e3.3b}$$

$$u_1(\zeta, t') = \int_0^{t'} \frac{\partial u_1}{\partial t'}(t'-\tau) \omega(\zeta, \tau) d\tau + \int_0^{t'} \frac{\partial u_2}{\partial t'}(t'-\tau) \omega(1-\zeta, \tau) d\tau \quad \text{e3.3c}$$

La solución es para el intervalo $0, R$, con las siguientes condiciones:

$$u_1(r, 0) = u_2(r, 0) = 0 \quad r \geq 0 \quad \text{e3.4a}$$

$$u_1(R, t') = u_2(R, t') = 0 \quad t' \geq 0 \quad \text{e3.4b}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u_k}{\partial r} = Q_k \quad k=1, 2; \quad t' > 0 \quad \text{e3.4c}$$

Se aproxima $u_k(r, t')$, $k=1, 2$, de la siguiente forma:

$$u_k(r, t') = \sum_{i=1}^L P_{ki}(t') \Phi_i(r) \quad \text{e3.5}$$

$$P_{kL} = 0 \quad k=1, 2$$

En donde Φ_i son las funciones de base. Multiplicando por

Φ_j , integrando por partes y sustituyendo las condiciones 3.4 se tiene:

$$-Q_1 \Phi_j(0) - \int_0^R r \frac{\partial u_1}{\partial r} \Phi_j' dr - \frac{1}{\alpha a_1} \int_0^R r \frac{\partial u_1}{\partial t'} \Phi_j dr =$$

$$\int_0^R r \Phi_j \frac{\partial u_1}{\partial t'} f dr - \int_0^R r \Phi_j \frac{\partial u_2}{\partial t'} h dr \quad e3.6a$$

$$-\bar{c} Q_2 \Phi_j(0) - \int_0^R \bar{c} r \frac{\partial u_2}{\partial r} \Phi_j' dr - \frac{1}{\alpha a_2} \int_0^R r \frac{\partial u_2}{\partial t'} dr =$$

$$\int_0^R r \Phi_j \frac{\partial u_2}{\partial t'} f dr - \int_0^R r \Phi_j \frac{\partial u_2}{\partial t'} h dr \quad e3.6b$$

Este sistema con la utilización adecuada de las funciones f, g, h se puede eliminar el acoplamiento. Aplicando el método de Galerkin se llega a la siguiente transformación de e3.6a:

$$-Q_1 \Phi_j(0) - \sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i' \Phi_j' r P_{1i} dr - \frac{1}{\alpha a_1} \sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i \Phi_j r P_{1i} dr =$$

$$\sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i \Phi_j r P_{1i} dr + 2G_N(0) \sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i \Phi_j r P_{1i} dr dt +$$

$$2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i \Phi_j r dr \int_0^{t'} P_{1i} e^{-n^2 \pi^2 (t' - \tau)} d\tau +$$

$$\sum_{m=0}^M a_m \sum_{i=1}^{L-1} \int_0^R \Phi_i \Phi_j r dr \int_0^{t'} P_{2i} e^{-\alpha m (t' - \tau)} d\tau \quad e3.7$$

Ahora definiendo:

$$m_{ij} = \int_0^R \Phi_i \Phi_j r dr$$

$$k_{ij} = \int_0^R \Phi_i' \Phi_j' r dr$$

entonces:

$$R_1 = [Q_1 \Phi_{10} \dots, 0]^T$$

$$M = \{m_{ij}\}$$

$$K = \{k_{ij}\}$$

$$D_1 = \sum_{n=1}^N \int_0^{t'} P_1 e^{-n^2 \pi^2 (t' - \tau)} d\tau$$

$$D_2 = \sum_{m=0}^M a_m \int_0^{t'} P_2 e^{-n^2 \pi^2 (t' - \tau)} d\tau$$

$$\alpha_N^1 = \frac{1}{\alpha a_1} + 2G_N(0)$$

$$G_N(0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

$$P_k = [P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}, \dots, P_{KL-1}]^T$$

Y e3.9 se transforma en la ecuación matricial siguiente:

$$-R_1 - [K+M] P_1 - 2MD_1 + MD_2 = \alpha_N^1 M \dot{P}_1 \quad \text{e3.10a}$$

Con análogas definiciones se obtiene la forma matricial de e3.8b:

$$-R_2 - [K+M] P_2 - 2ME_1 + ME_2 = \alpha_N^1 M \dot{P}_2 \quad \text{e3.10b}$$

en donde las matrices E, se definen como:

$$E_1 = \sum_{n=1}^N \int_0^{t'} P_2 e^{-n^2 \pi^2 (t' - \tau)} d\tau$$

$$E_2 = \sum_{m=0}^M \frac{a_m}{o} \int_0^{t'} P_1 e^{-n^2 \pi^2 (t' - \tau)} d\tau$$

Observando D_k y E_k se nota que están acopladas para los valores de P_k , este acoplamiento puede ser levantado al aplicar el esquema de Crank-Nicolson para hallar la solución iterativamente en el tiempo. El esquema antes nombrado da la solución en $\frac{\Delta t'}{2}$ con una aproximación de $(\Delta t')^2$

Un desarrollo completo del sistema e3.10 hasta llevarlo a forma computacional puede verse en la referencia 3.3.

3.2 INTEGRACION POR EL METODO DE "LUMPING": (ref. 3.5)

Si en la matriz de masa M se agrega alguna función dependiente del punto en que se encuentra en la región, el método que se describe es quizá la única forma viable, porque como se verá más adelante la matriz de masa se diagonaliza.

Si e es un elemento definido por los nodos 1, 2, 3, 4

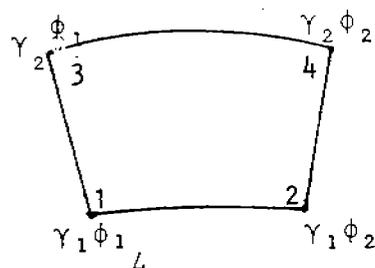


fig. 4.4

Entonces se trata de aproximar la integral de f en el elemento e de la siguiente forma:

$$\int_e f = w_1 f(1) + w_2 f(2) + w_3 f(3) + w_4 f(4)$$

los pesos w_i , $i=1,2,3,4$ se escogen de forma que las funciones 1, r , θ , θr se integran exactamente:

$$\int_e f = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

o sea:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)(r_2^2 - r_1^2)$$

$$w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_1 + w_4 r_2 = \frac{1}{3}(\theta_2 - \theta_1)(r_2^3 - r_1^3)$$

$$w_1 \theta_1 + w_2 \theta_2 + w_3 \theta_1 + w_4 \theta_2 = \frac{1}{4}(r_2^2 - r_1^2)(\theta_2^2 - \theta_1^2)$$

$$w_1 r_1 \theta_1 + w_2 r_1 \theta_2 + w_3 r_2 \theta_1 + w_4 r_2 \theta_2 = \frac{1}{6}(r_2^3 - r_1^3)(\theta_2^2 - \theta_1^2)$$

resolviendo el sistema para w se tiene:

$$w_1 = w_2 = \frac{(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)}{12}(r_2 + 2r_1)$$

$$w_3 = w_4 = \frac{(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)}{12}(2r_2 + r_1)$$

Las funciones de base se eligen de tal forma que tengan la siguiente propiedad;

$$\phi_i(n_j) = \delta_{ij} \quad n_j = \text{nodo } j$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j$$

Entonces con el método de lumping para un nodo cualquiera, sucede lo siguiente:

e_1 i	e_2
w_1	w_2
e_3	e_4
w_3	w_4

$$\int_e f \Phi_i = f(i) w_i$$

$$\int_D f \Phi_i = \int_{e_1} + \int_{e_2} + \int_{e_3} + \int_{e_4}$$

$$= (w_{e_1 i} + w_{e_2 i} + w_{e_3 i} + w_{e_4 i}) f(i)$$

$$= \bar{w}_i (f(i))$$

De donde:

$$\int_D f(n_i) \Phi_i \Phi_j = f(i) \bar{w}_i \delta_{ij}$$

por tanto la matriz de masa se vuelve diagonal.

CAPITULO 4

CASO GENERAL

4. CASO GENERAL

4.1 ECUACIONES GENERALES CON ELEMENTOS FINITOS EN ESPACIO Y

TIEMPO:

En todo este capítulo se asume una región de forma estrellada arbitraria, o sea que ningún radio puede cortar a la frontera más de una vez.

Recordando el capítulo 2, el sistema e2.21 con las ecuaciones e2.28, e2.29, e2.33 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{K_1'}{b_1'} \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial t} (t-\tau) f\left(\frac{\alpha_1' \tau}{b_1'^2}\right) d\tau + \frac{K_1'}{b_1'} \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t} (t-\tau) h\left(\frac{\alpha_1' \tau}{b_1'^2}\right) d\tau \\ = S_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + Q_1 \end{aligned} \quad e4.1a$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{K_2'}{b_2'} \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t} (t-\tau) d\tau + \frac{K_2'}{b_2'} \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial t} (t-\tau) h\left(\frac{\alpha_2' \tau}{b_2'^2}\right) d\tau \\ = S_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + Q_2 \end{aligned} \quad e4.1b$$

Este sistema es esencialmente el mismo que e2.21 sólo que se les agrega del lado derecho los términos Q que introducen al sistema las variaciones del volumen total de agua del sistema de acuíferos. Estas variaciones pueden ser positivas si es una fuente que aporta al sistema o negativos cuando se trata de gasto, como por ejemplo el bombeo de agua, que junto con las condiciones de frontera serán los elementos principales que incidirán en cambios de presiones o niveles piezométricos del acuífero.

Ahora aproxímese la solución de u_i con $i=1,2$, en el tiempo, por:

$$u_1 = \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \phi_j(x, y) \quad e4.2a$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \phi_j(x, y) \quad e4.2b$$

El sistema e4.1 puede escribirse cambiando de notación, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla T_1 \nabla u_1 - \frac{K'}{b'} \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial t} (t-\tau) f\left(\frac{\alpha' t}{b' 2}\right) d\tau + \frac{K'}{b'} \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t} (t-\tau) h\left(\frac{\alpha' \tau}{b' 2}\right) d\tau \\ = S_1 \frac{\partial}{\partial t} u_1 + Q_1 \end{aligned} \quad e4.3a$$

$$\begin{aligned} \nabla T_2 \nabla u_2 - \frac{K'}{b'} \int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial t} (t-\tau) f\left(\frac{\alpha' t}{b' 2}\right) d\tau + \frac{K'}{b'} \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial t} (t-\tau) h\left(\frac{\alpha' \tau}{b' 2}\right) d\tau \\ = S_2 \frac{\partial}{\partial t} u_2 + Q_2 \end{aligned} \quad e4.3b$$

En estas ecuaciones sustitúyase e4.2 e intégrese en los primeros términos de cada uno se aplica el teorema de Green-Gaus (ref.4.5) y se obtiene la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \int_D T_1 \nabla \phi_i \nabla \phi_j dD + \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \int_{\partial D} T_1 \phi_i \nabla \phi_j dD - \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \int_D \frac{K'}{b'} \phi_i \phi_j dD \\ - \sum_{j=1}^N P_{1j}(\tau) \int_D \frac{K'}{b'} g\left(\frac{\alpha' t}{b' 2}(t-\tau)\right) \phi_i \phi_j dD d\tau + \sum_{j=1}^N \int_0^t P_{2j}(\tau) \int_D \frac{K'}{b'} h\left(\frac{\alpha' t}{b' 2}(t-\tau)\right) \phi_i \phi_j dD d\tau \\ = \sum_{j=1}^N P_{1j}(t) \int_D S_1 \phi_i \phi_j dD \end{aligned} \quad e4.4a$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \int_D T_2 \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dD + \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \oint_{\partial D} T_2 \Phi_i \cdot \Phi_j dD - \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \int_D \frac{K'}{b_1} \Phi_i \cdot \Phi_j dD \\
& - \sum_{j=1}^N P_{2j}(t) \int_D \frac{K'}{b_1 g} \left(\frac{\alpha'}{b_1^2} (t-\tau) \right) \Phi_i \cdot \Phi_j dD d\tau + \sum_{j=1}^N \int_0^t P_{1j}(\tau) \int_D \frac{K'}{b_1 h} \left(\frac{\alpha'}{b_1^2} (t-\tau) \right) \Phi_i \cdot \Phi_j dD d\tau \\
& = \sum_{j=1}^N P_j^1(t) \int_D S_2 \Phi_i \cdot \Phi_j dD \quad e4.4c
\end{aligned}$$

En este sistema además se introdujo la sustitución de f según e2.36. Ahora se puede llevar a una forma matricial, lo cual define las siguientes matrices:

$$K_u = \int_D T_u \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dD \quad u=1,2 \quad e4.5a$$

$$R_u = \oint_{\partial D} T_u \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dD \quad u=1,2 \quad e4.5b$$

$$M = \int_D \frac{K'}{b_1} \Phi_i \cdot \Phi_j dD \quad e4.5c$$

$$M_u = \int_D S_u \Phi_i \cdot \Phi_j dD \quad e4.5d$$

$$G_u(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t P_{uj}(\tau) \int_D \frac{K'}{b_1 g} \left(\frac{\alpha'}{b_1^2} (t-\tau) \right) \Phi_i \cdot \Phi_j dD d\tau \quad e4.5e$$

$$H_u(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t P_{uj}(\tau) \int_D \frac{K'}{b_1 h} \left(\frac{\alpha'}{b_1^2} (t-\tau) \right) \Phi_i \cdot \Phi_j dD d\tau \quad e4.5f$$

$$\hat{Q}^u = \{q_i^u\} \quad q_i^u - \text{extracción en el } i\text{-ésimo nodo} \quad e4.5g$$

Entonces el sistema e4.4 queda representado en la siguiente forma:

$$-K_1 P_1 + R_1 P_1 - M P_1 - G_1 + H_2 = M_1 P_1^1 - \hat{Q}_1 \quad e4.6a$$

$$-K_2 P_2 + R_2 P_2 - M P_2 - G_2 + H_1 = M_2 P_2^1 - \hat{Q}_2 \quad e4.6b$$

Utilizando el método de "lumping" o diagonalización para la matriz de masa se puede proceder de la siguiente forma:

$$\int_D f(x) \phi_i \phi_j dD = f(n_i) \delta_{ij} W_i \quad e4.7$$

esto indica que el integral es igual al valor de la función en el i -simo nodo (n_i) multiplicado por un peso W_i y por el operador de Kronecker δ_{ij} ($\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$). Con este concepto las matrices M , M_u , R_u , S_u de e4.5 se transforman en:

$$M = \frac{K^1}{b^1} (n_i) W_i \delta_{ij} \quad e4.8a$$

$$M_u = S_u(n_i) W_i \delta_{ij} \quad u=1,2 \quad e4.8b$$

$$G_u = \int_0^t P^t u_i(\tau) \frac{K^1}{b^1} (n_i) W_i g\left(\frac{\alpha^1}{b^1 z} (n_i) (t-\tau)\right) d\tau \quad u=1,2 \quad e4.8c$$

$$H_u = \int_0^t P^t u_i(\tau) \frac{K^1}{b^1} (n_i) W_i h\left(\frac{\alpha^1}{b^1 z} (n_i) (t-\tau)\right) d\tau \quad u=1,2 \quad e4.8d$$

Definiendo:

$$\lambda_i = \frac{\alpha^1}{b^1 z} (n_i) \quad e4.9a$$

$$k_i = \frac{K^1}{b^1} (n_i) \quad e4.10$$

las ecuaciones e4.8c, e4.8d se escriben de la siguiente forma:

$$G_u = \int_0^t P^t u_i(\tau) g(\lambda_i(t-\tau)) k_i w_i d\tau \quad u=1,2 \quad e4.11a$$

$$H_u = k_i w_i \int_0^t P^t u_i(\tau) h(\lambda_i(t-\tau)) d\tau \quad u=1,2 \quad e4.11b$$

Las funciones de memoria g y h según ref. 1.5 pueden quedar expresadas por:

$$G_{N_1}(t) = A_N \delta(t) + \sum_{n=1}^{N_1} a_n e^{-n^2 \pi^2 t} \quad e4.12a$$

$$h_{N_2}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N_2} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \quad e4.12b$$

Si además se agrega la siguiente definición:

$$d_{ni}^u(t) = e^{-n^2 \pi^2 \lambda_i t} \int_0^t P^i u_i(\tau) e^{n^2 \pi^2 \lambda_i \tau} d\tau \quad u=1,2 \quad e4.13$$

Entonces las matrices G_u y H_u quedan expresadas por:

$$G_u = A_N \frac{W_i k_i}{\lambda_i} P^i u_i(t) + \sum_{n=1}^{N_1} k_i w_i a_n d_{ni}^u(t) \quad u=1,2 \quad e4.14a$$

$$H_u = W_i k_i P u_i(t) + \sum_{n=1}^{N_2} k_i w_i b_n d_{ni}^u(t) \quad u=1,2 \quad e4.14b$$

Si se definen las siguientes matrices diagonales:

$$K = \{k_i\} \quad e4.15a$$

$$\Lambda = \{\lambda_i\} \quad e4.15b$$

$$S_u = \{S_u(n_i)\} \quad e4.15c$$

y los vectores:

$$P_u = [P_1^u, \dots, P_{N_1}^u]^T \quad u=1,2 \quad e4.15d$$

$$D_{kn}^u = [d_{n1}^u, \dots, d_{nN}^u]^T \quad u=1,2 \quad e4.15e$$

Con las definiciones e4.15 las matrices e4.14 pueden ser expresadas como:

$$G_u = A_{N_1} M K \Lambda^{-1} P^i u + M K \sum_{n=1}^{N_1} a_n D_{nN}^u \quad e4.16$$

$$Hu = MKPu + MK \sum_{n=1}^N b_n D_n \quad e4.16b$$

Entonces el sistema e4.6, reagrupando términos, se representa de la siguiente forma:

$$(MS_1 + A_{N_1} MK \Lambda^{-1}) P'_1 = -(K_1 + M) P_1 - MK \sum_{n=1}^{N_1} A_n D_{1n} + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n D_{2n} \hat{Q}_1 \quad e4.17a$$

$$(MS_2 + A_{N_1} MK \Lambda^{-1}) P'_2 = -(K_2 + MK) P_2 - MK \sum_{n=1}^{N_1} a_n D_{2n} + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n D_{1n} \hat{Q}_2 \quad e4.17b$$

Se supone para este sistema que inicialmente P_u es cero. En este momento el sistema está acoplado en D , pero más adelante se encontrará una forma de desacoplarles en las iteraciones en el tiempo. Sustituyendo los coeficientes de P_u y P'_u :

$$A_u = MS_u + A_{N_1} MK \Lambda^{-1} \quad e4.18a$$

$$B_u = K_u + MK \quad e4.18b$$

el sistema de ecuaciones queda representado así:

$$A_1 P'_1 = -B_1 P_1 - MK \sum_{n=1}^{N_1} a_n D_{1n} + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n D_{2n} \hat{Q}_1 \quad e4.19a$$

$$A_2 P'_2 = -B_2 P_2 - MK \sum_{n=1}^{N_1} A_n D_{2n} + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n D_{1n} \hat{Q}_2 \quad e4.19b$$

Para realizar la integración de este sistema en el tiempo, tomando el intervalo $[t_i, t_i+h]$, se define:

$$\Gamma u = P u(t_i+h) - P u(t_i) = P^h u - P^0 u \quad e4.20$$

y puede integrarse e4.19 de la siguiente forma:

$$A_1 \Gamma_1 = B_1 \int_{t_i}^{t_i+h} P_1 dt - MK \sum_{n=1}^{N_1} a_n \int_{t_i}^{t_i+h} D_{1n} dt + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n \int_{t_i}^{t_i+h} D_{2n} dt - \int_{t_i}^{t_i+h} Q_1 dt \quad e4.21a$$

$$A_2 \Gamma_2 = B_2 \int_{t_i}^{t_i+h} P_2 dt - MK \sum_{n=1}^{N_1} a_n \int_{t_i}^{t_i+h} D_{2n} dt + MK \sum_{n=0}^{N_2} b_n \int_{t_i}^{t_i+h} D_{1n} dt - \int_{t_i}^{t_i+h} \hat{Q}_2 dt \quad e4.21b$$

Si el gasto (extracción) y las condiciones de frontera permanecen constantes entonces el sistema está formado por ecuaciones diferenciales de tipo parabólico. La solución se comporta como una exponencial ($e^{\mu t}$) donde μ es un valor propio. Por esta razón se asume que la solución Pu en $[t_i, t_i+h]$ es de la forma: (ref. 4.1.)

$$Pu \approx a + b \exp(\mu t) \quad e4.22$$

En donde μ es un real negativo tal que $-\infty \leq \mu \leq 0$.

Los coeficientes a y b se pueden escoger de modo que:

$$P u(t_i+h) = P^1 u \quad \text{y} \quad P u(t_i) = P^0 u \quad e4.23$$

Entonces se formaría el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$a + b e^{(u(t_i+h))} = p^1_u \quad e4.24a$$

$$a + b e^{u t_i} = p^0_u \quad e4.24b$$

resolviendo para a y b, y reemplazando en e4.22 resulta la aproximación de P_u en el tiempo t, si μh se define por z, entonces:

$$P_u \approx P^0_u \frac{\exp z - \exp u(t-t_i)}{\exp z - 1} + p^1_u \frac{\exp u(t-t_i) - 1}{\exp z - 1} \quad e4.25$$

Integrando esta expresión en $[t_i, t_i+h]$ resulta:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} P_u dt = P^0_u h \frac{z \exp z - \exp z + 1}{z(\exp z - 1)} + p^1_u h \frac{\exp z - 1 - z}{z(\exp z - 1)} \quad e4.26a$$

$u=1,2$

que se puede escribir como:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} P_u dt = P^0_u h (1 - \theta(\mu, h)) + p^1_u h \theta(\mu, h) \quad u=1,2 \quad e4.26b$$

en donde:

$$\theta(\mu, h) = \frac{\exp z - 1 - z}{z(\exp z - 1)} \quad e4.27$$

La variación de μ da los diferentes esquemas. Los casos límites dan los esquemas conocidos: si $\mu \rightarrow 0$, entonces $P_u \approx a + bt$ da una variación lineal de P_u que corresponde al esquema de Crank Nicolson (fig 4.1) y el integral queda definido así:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} P_u dt = P^0_u \frac{h}{2} + P^1_u \frac{h}{2} \quad e4.28a$$

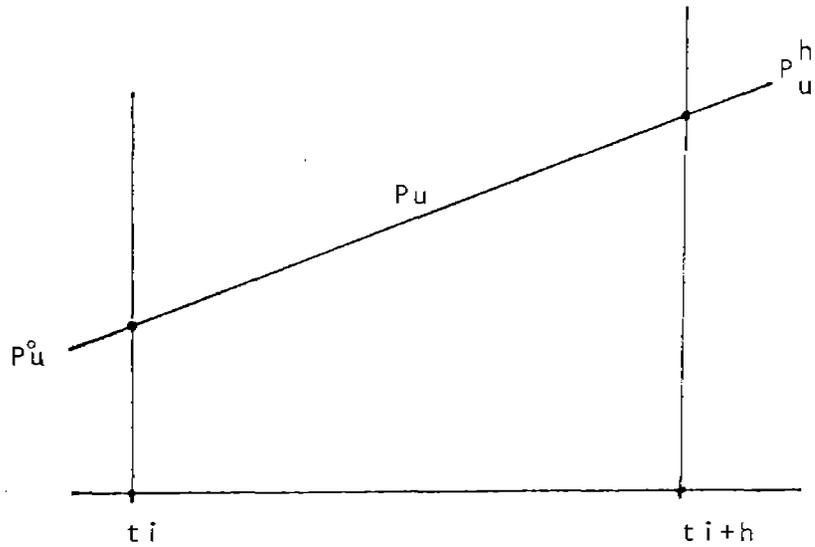


Fig. 4.1

Si $\mu \rightarrow -\infty$, P_u se aproxima como P_u^h que es el esquema de EULER HACIA ATRAS (fig. 4.2) la integración se calcula como:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} P_u dt = P_u^h h \tag{e4.28b}$$

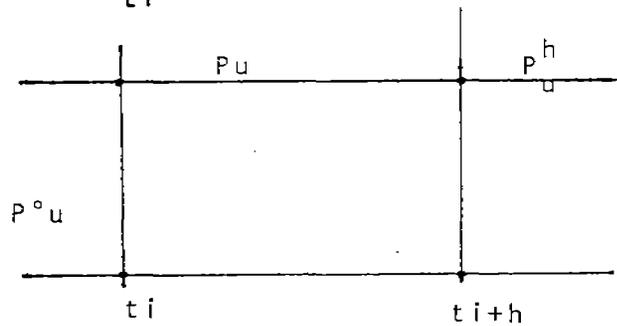


Fig 4.2

En el sistema e4.21 falta por realizar la integración de D_{un} cuya definición le dimos en e4.15e, entonces:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} D_{un} dt = \left[\int_{t_i}^{t_i+h} d_{n1}^u dt, \dots, \int_{t_i}^{t_i+h} d_{nN}^u dt \right] \tag{e4.29}$$

con la aproximación e4.25 las integrales de $d_{nm}^u dt$ se pueden encontrar con:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} d_{nm}^u dt = h d_{nm}^u(t_i) \frac{1 - \exp(-h\gamma_{nm})}{h\gamma_{nm}} + h\Gamma_u \left[\frac{1}{h(\gamma_{nm} + \mu)} + \frac{\mu}{\gamma_{nm} + \mu} \frac{1}{h\gamma_{nm}} \frac{\exp(-h\gamma_{nm}) - 1}{\exp(\mu h) - 1} \right] \quad e4.30$$

$u=1,2$

En esta última ecuación se define $\gamma_{nm} = n^2 \pi^2 \lambda m$. Los extremos de μ en los casos límites del intervalo $[-\infty, 0]$ que da: con $\mu \rightarrow 0$ CRANK-NICOLSON; y con $\mu \rightarrow -\infty$ EULER HACIA ATRAS.

La fórmula general de actualización de d_{nm}^u en el tiempo t_i+h se expresa como:

$$d_{nm}^u(t_i+h) = \exp(-\gamma_{nm} h) d_{nm}^u(t_i) + \Gamma_u \frac{\mu}{\gamma_{nm} + \mu} \frac{1}{\exp(\mu h) - 1} [\exp(\mu h) - \exp(-\gamma_{nm} h)] \quad e4.31$$

Introduciendo la siguiente notación para e4.30:

$$E_n = \text{diag}(e_{ni}) \quad \text{con} \quad -e_{ni} = \frac{1 - \exp(-\gamma_{ni} h)}{h\gamma_{ni}}; \quad y$$

$$F_n = \text{diag}(f_{ni}) \quad \text{con} \quad -f_{ni} = \frac{1}{h(\gamma_{ni} + \mu)} + \frac{\mu}{\gamma_{ni} + \mu} \frac{1}{\gamma_{ni} h} \frac{\exp(-\gamma_{ni} h) - 1}{\exp(\mu h) - 1}$$

entonces e4.29 se transforma en:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} D_{un} dt = h E_n D_{un}(t_i) + h F_n \Gamma_u \quad u=1,2 \quad e4.32$$

También el integral de $\hat{Q}_u dt$ se le da la notación siguiente:

$$C_u = \int_{t_i}^{t_i + h} \hat{Q}_u dt \quad e4.33$$

De e4.20 y e4.26a resulta:

$$P_u^0(1-\theta) + P_u^h \theta = \theta \Gamma_u + P_u^0 \quad u=1,2 \quad e4.34$$

y denotando $D_{un}(t_i)$ por D_{un}^0 , el sistema finalmente queda en la forma que se realiza la solución en el programa del modelo:

$$\begin{aligned} & (A_1 + h\theta B_1 + hMK \sum_{n=1}^{N_1} a_n F_n) \Gamma_1 \\ = & -hB_1 P_1^0 - hMK \sum_{n=1}^{N_1} a_n E_n D_{1n}^0 + hMK \sum_{n=0}^{N_2} b_n E_n D_{2n}^0 - C_1 \end{aligned} \quad e4.35a$$

$$\begin{aligned} & (A_2 + h\theta B_2 + hMK \sum_{n=1}^{N_2} a_n F_n) \Gamma_2 \\ = & -hB_2 P_2^0 - hMK \sum_{n=1}^{N_1} a_n E_n D_{2n}^0 + hMK \sum_{n=0}^{N_2} b_n E_n D_{1n}^0 - C_2 \end{aligned} \quad e4.35b$$

4.2 TRANSFORMACION A UN DOMINIO ARBITRARIO:

El dominio D deberá ser de la forma de una estrella y su frontera ∂D se define por una función $g(\theta)$ de θ . La idea es mapear este dominio D de coordenadas (r, θ) en un dominio circular D^* de radio a y coordenadas (ρ, θ) , como indica la figura 4.3:

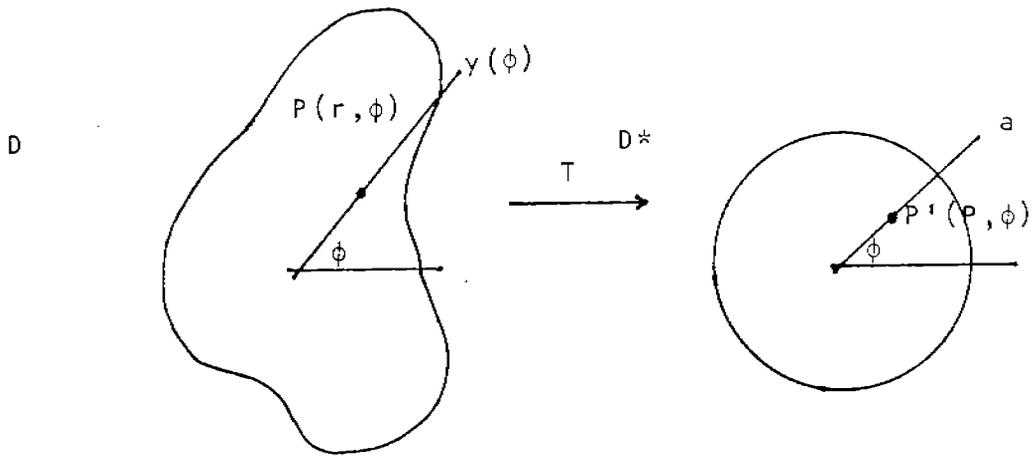


Fig. 4.3

$$T: \begin{cases} \rho = \frac{r}{g(\theta)} \\ \theta = \theta \end{cases}$$

e4.36

El problema numérico se resuelve introduciendo una malla en D^* , en la cual se definen las funciones de base $\{\phi_i\}$ $i=1, NP$ y mediante la transformación T^{-1} la malla que corresponde a D con sus respectivas funciones de base $\{\psi_i\}$ $i=1, NP$.

En D las matrices de masa (M) y rigidez (K) tienen la siguiente forma:

$$M_{ij} = \int_D f(r, \theta) \psi_i \psi_j r dr d\theta \quad e4.37a$$

$$K_{ij} = \int_D f(r, \theta) \nabla \psi_i \nabla \psi_j r dr d\theta \quad e4.37b$$

Estos valores de M y K se resuelven usando las funciones de base $\{\phi_i\}$ en el dominio D^* . Por lo tanto, es necesario aplicar la transformación $T: D \rightarrow D^*$. Si definimos T como $\rho = \frac{r}{g(\theta)}$ y $\phi = \theta$, entonces:

$$\begin{aligned} r &= \rho g(\phi) \\ \theta &= \phi \end{aligned} \quad e4.38$$

con estas definiciones se detienen las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = g(\theta) \quad \text{e4.39a}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \rho g'(\phi) \quad \text{e4.39b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = 0 \quad \text{e4.39c}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 1 \quad \text{e4.39d}$$

con lo cual se obtiene el Jacobiano $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(\rho, \phi)}$, de la siguiente forma:

$$J = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(\rho, \phi)} = \begin{vmatrix} g(\phi) & \rho g'(\phi) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = g(\phi)$$

Entonces la matriz de masa se calcularía de la siguiente forma:

$$M_{ij} = \iint_D f(r, \theta) \phi_i \phi_j r dr d\theta = \iint_{D^*} f(\rho, \phi) \psi_i \psi_j g(\phi)^2 \rho d\rho d\phi \quad \text{e4.40a}$$

utilizando el "lumping" para la integración:

$$M_{ij} = W_i f(i) g(i)^2 \delta_{ij} \quad \text{e4.40b}$$

$f(i)$ es el valor de f en el nodo i

$g(i)$ es $g(\phi)$ para un valor ϕ que corresponde el modo i de los derivados e4.39 también se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{g(\theta)} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\rho g'(\phi)}{g(\phi)} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

La matriz k puede escribirse en la forma:

$$k_{ij} = \iint_D f(r, \theta) \left[\phi_{i_r} \phi_{j_r} + \frac{1}{r^2} \phi_{i_\theta} \phi_{j_\theta} \right] r dr d\theta \quad e4.41a$$

entonces:

$$k_{ij} = \iint_D f(\rho, \phi) \left[(\psi_{i_\rho} \psi_{j_\rho} (1 + \left(\frac{g'}{g}\right)^2) \rho + \frac{1}{\rho} \psi_{i_\phi} \psi_{j_\phi} - \frac{g'}{g} (\psi_{i_\rho} \psi_{j_\phi} + \psi_{i_\phi} \psi_{j_\rho})) \right] d\rho d\phi \quad e4.41b$$

La integración de k_{ij} en un nodo e se encuentra también aplicando el método de "lumping". (integración en los nodos de e).

4.3 CONDICIONES DE FRONTERA (ref. 2.1)

La aproximación adecuada de un modelo, aparte de su correcta formulación analítica, depende básicamente de los siguientes puntos:

- 1- La forma geométrica del dominio en que ocurre el fenómeno.
- 2- Los coeficientes o parámetros dependientes de las propiedades físicas.
- 3- Las condiciones iniciales descritas en el momento que se supone comienza el fenómeno, y,
- 4- La interacción del sistema con el medio que lo rodee, lo que implica definir las condiciones de frontera en forma adecuada.

Los puntos 1 y 3 fueron ya considerados en la derivación de las ecuaciones numéricas descritas anteriormente en este capítulo. El punto 2 será tratado, en forma preliminar, cuando más

adelante se aplique el sistema al Valle de México. En esta sección se desarrolla la cuarta condición del modelo. Las condiciones de frontera usualmente se definen por observación del fenómeno o por experimentos controlados. La definición de las condiciones de frontera incluye: 1) La forma geométrica de la frontera; y 2) una función que depende de una variable que para el modelo se aplique como el abatimiento u y/o sus respectivas derivadas, derivada normal.

El dominio D en (x,y) que está limitado por la curva C (fig. 4.5)

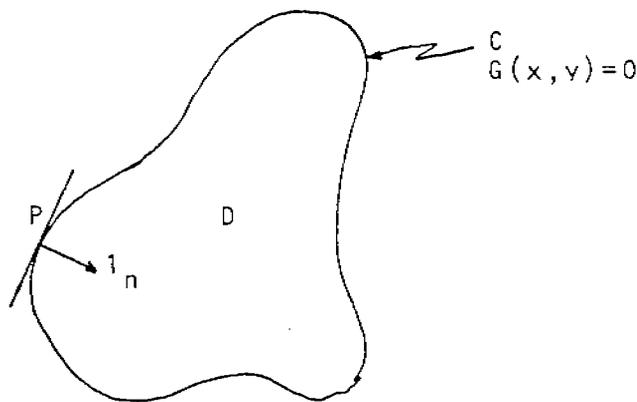


Fig. 4.5

La curva C se define para la función $G(x,y)=0$. n denota un vector unitario normal a la frontera en el punto P dirigido de fuera hacia adentro. El vector n puede ser expresado en términos de i_x , i_y , y entonces:

$$[\nabla G] n = \nabla G = \frac{\partial G}{\partial x} i_x + \frac{\partial G}{\partial y} i_y \quad e4.42$$

CONDICIONES TIPO 1 (Dirichlet):

Para el caso es fijar una función que describa el abatimiento a lo largo de la frontera:

$$u_c = u_c(X, y, t) \quad e4.43$$

con $X, Y \in C$

Si las condiciones lo permiten se puede especificar:

$$u_c = u_o \text{ -etc.}$$

que físicamente se produciría en el caso que alguna parte de la frontera esté en contacto con algún elemento de superficie libre como un lago, el mar, etc.

CONDICIONES TIPO 2 (NEUMANN):

Permite especificar el flujo normal a la frontera (de entrada o salida de sistema). Se prescribe por medio de una función de posición:

$$q_n = q \cdot 1n = q_n(x, y, t) \quad e4.44a$$

En medios isotrópicos se puede expresar como

$$\nabla u \cdot 1n = \frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y, t) \quad e4.44b$$

$$x, y \in C$$

Para una frontera impermeable:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad e4.44c$$

En el modelo, el flujo a través de la frontera, en la realidad se incluye agregando pozos a la frontera cuyo gasto es positivo o negativo según sea un flujo de entrada o de salida al sistema. Normalmente en la práctica sucede que las

condiciones de frontera son constantes para ciertos tramos de C .

4.3.1 INCORPORACION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA:

Según el dominio siguiente:

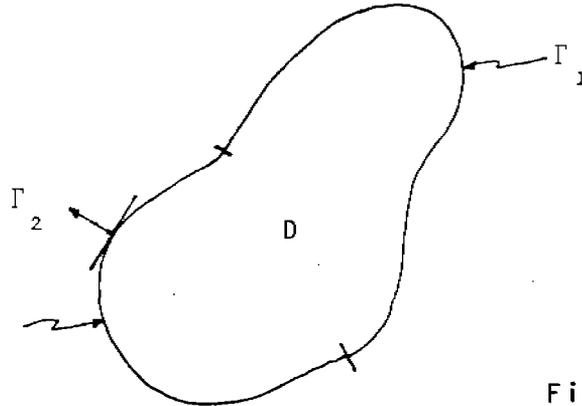


Fig. 4.6

La frontera Γ se divide en los segmentos Γ_1 y Γ_2 y se asumen las siguientes condiciones:

$$u = u_o + u_c \quad e4.45a$$

$$\text{En } \Gamma_1: \quad \left. \begin{array}{l} u_o = 0 \\ u_c \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow u = u_c \quad e4.45b$$

$$\text{En } \Gamma_2: \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad e4.45c$$

El primer término de la ecuación e4.3a está dado como:

$$-\nabla \cdot T \nabla u$$

Si nuevamente se aplica el esquema de Galerkin y la integración, como se vio antes, se tendrá:

$$-\nabla \cdot T \nabla u = (T \nabla \phi_i, \nabla u) - \int_{\Gamma} \phi_i T \nabla u \cdot \mathbf{1}_e d\Gamma \quad e4.46a$$

donde ϕ_i son las funciones de base e4. a se transforma en:

$$-\nabla \cdot T \nabla u = (T \nabla \phi_i, \nabla u_o) + (T \nabla \phi_i, \nabla u_c)$$

$$-\oint_{\Gamma_1} \phi_i T \nabla u \cdot 1_e d\Gamma - \oint_{\Gamma_2} \phi_i T \nabla u \cdot 1_e d\Gamma \quad e4.46b$$

El término $(T \nabla \phi_i, u_o)$ fue ya incorporado en las ecuaciones generales del sistema. El término $(T \nabla \phi_i, \nabla u_c)$ se lo incorpora también realizando la integración de la misma forma que el anterior. Por la condición e4.45b en Γ_1 $\phi_i = 0$, por lo tanto, el único término de frontera que queda es el

$$-\oint_{\Gamma_2} \phi_i T \nabla u \cdot 1_e d\Gamma \quad e4.47$$

en el cual si

$$h = T \nabla u \cdot 1_e \quad e4.48$$

y si g es una función que describe la frontera en coordenadas r, θ , entonces:

$$d\Gamma = (g'^2 + g^2)^{1/2} d\theta \quad e4.49$$

y e4.47 se transforma en:

$$-\oint_{\theta \in \Gamma_2} \phi_i h (g'^2 + g^2)^{1/2} d\theta \quad e4.50$$

utilizando el mapeo al dominio D^* , visto anteriormente, queda finalmente la expresión que se integra numéricamente usando el método de "lumping":

$$-\oint_{\phi \in \Gamma_2} \phi_i(\rho, \phi) h(\phi) (g'^2 + g^2)^{1/2} d\phi \quad e4.51$$

El proceso de cómputo puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1- Lectura y microlización de datos.
- 2- Construcción de las matrices bandadas.
- 3- Descomposición LU del lado izquierdo de las ecuaciones.
- 4- Solución iterativa para el abatimiento en cada nodo de la malla y en cada intervalo de tiempo.

Opcionalmente se puede calcular el abatimiento en puntos especificados del acuitardo y efectuar el cálculo del hundimiento.

CAPITULO 5

APLICACION AL VALLE DE MEXICO

5. APLICACION AL VALLE DE MEXICO

5.1 EL VALLE DE MEXICO Y SUS PROPIEDADES FISICAS:

El interés de modelar numéricamente el sistema de aguas subterráneas del Valle de México radica en que debido a la extracción de agua del subsuelo de México se ha producido un notable asentamiento de la ciudad, asentamiento que de no ser debidamente analizado y de alguna forma detenido, podría ser causa de una mayor desestabilización de las construcciones que forman la Ciudad de México.

La Extracción ⁽¹⁾ de agua, por medio de la construcción de pozos para uso doméstico se inicia alrededor del año 1926 (?), incrementándose linealmente hasta el año 1956 con una extracción, en ese año, de 2 m³/seg, la perforación de varios pozos el año 56 elevan el gasto hasta una cantidad aproximada de 10 m³/seg, que se mantiene constante hasta la fecha:

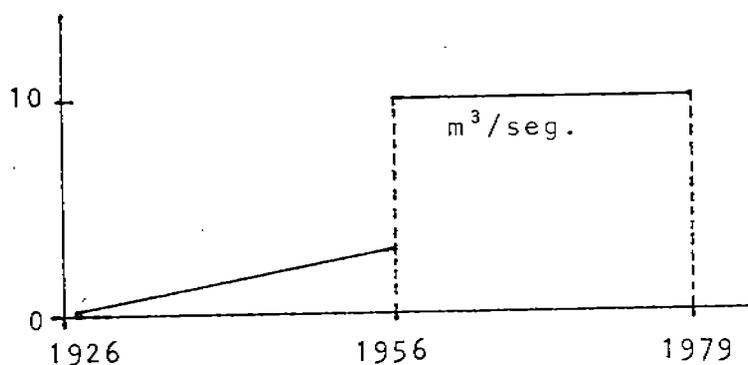


fig. 5.1

(1) Los datos sobre extracción y propiedades físicas fueron proporcionados por el Depto. de Hidráulica del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

El area de interés que se está manejando en el modelo presente es aproximadamente la que se ven en la figura 5.1

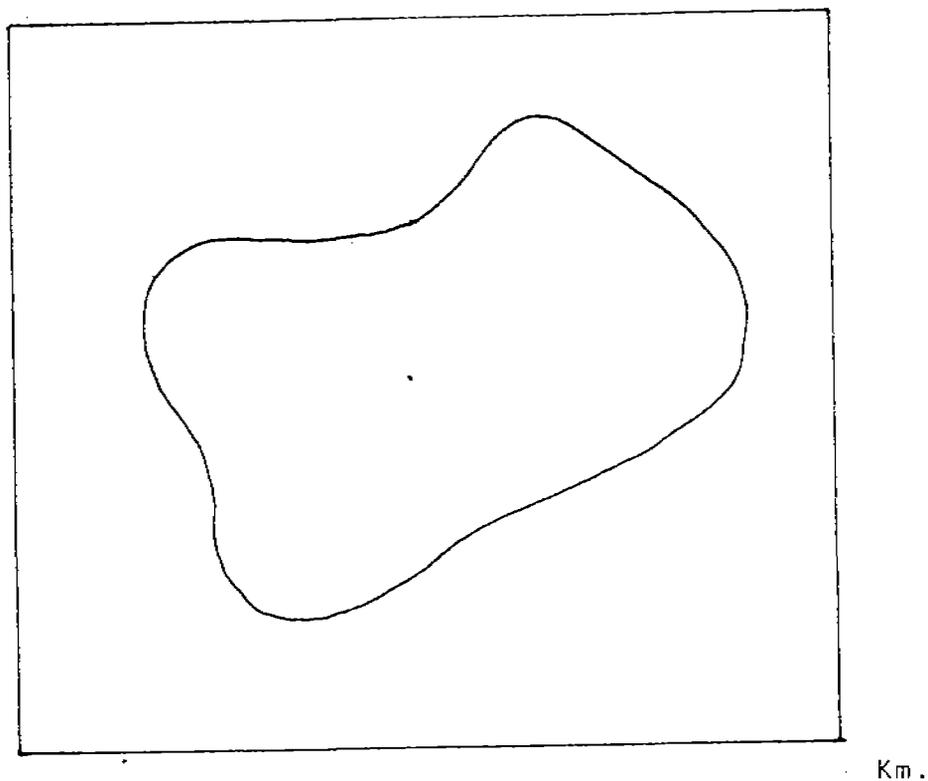


fig. 5.2

El sistema lo conforman un acuífero y un acuitardo, cuyos espesores promedios

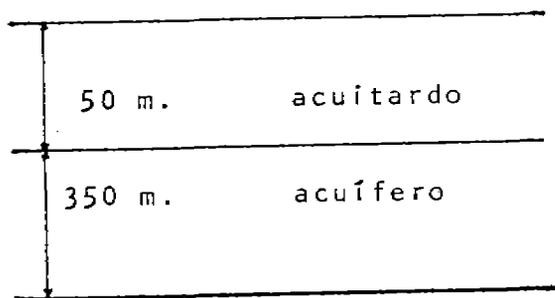


fig. 5.3

estimados preliminarmente se ven en la figura 5.3.

También se ha estimado preliminarmente, para los demás

coeficientes que intervienen en las ecuaciones, los siguientes valores promedio:

$$k' = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m/día}$$

$$s'_s = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$K_1 = 1.5 \text{ m/día}$$

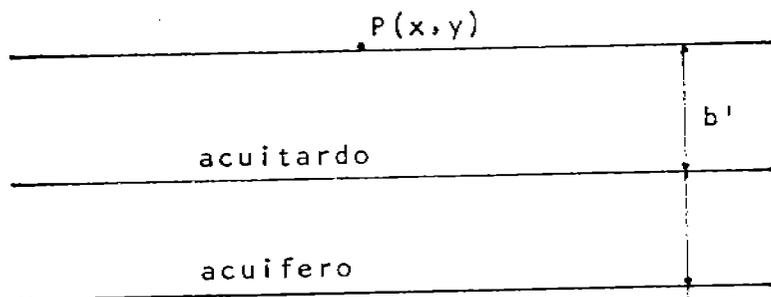
$$s_{s_1} = 7 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

5.2 CALCULO DEL HUNDIMIENTO:

El cálculo del hundimiento puede hacerse prescindiendo del hundimiento del acuífero si el espesor del acuífero es pequeño frente al espesor del acuitardo. El caso del Valle de México no se presenta de esta forma y entonces el análisis que se hace a continuación de añadirse S_1 , hundimiento del acuífero, que viene dado por:

$$S_1 = S_s \cdot u \quad \begin{array}{l} u = \text{abatimiento} \\ S_s = \text{almacenamiento esp.} \end{array}$$

Por lo tanto se puede asumir que un punto $P(x,y)$, situado en la parte superior de un acuitardo (fig. 5.4)



experimenta hundimiento directamente por la emigración de agua

del acuitardo hacia el acuífero.

De la ecuación e2.33 se tiene que

$$K' \frac{\partial u'}{\partial z}(x, y, 0, t) = -\frac{1}{b'} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(t-\tau) f(\lambda\tau) d\tau \quad e5.1$$

en donde $\lambda = \frac{\alpha'}{b' T z}$

El hundimiento S experimentado por el punto P puede determinarse directamente por:

$$S = -\int_0^t K' \frac{\partial u'}{\partial z}(x, y, 0, \tau) d\tau \quad e5.2a$$

sustituyendo e5.1 en e5.2a se obtiene:

$$S = \frac{K'}{b'} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(t-\tau) f(\lambda\tau) d\tau \quad e5.2b$$

si se asume que $u(0) = 0$, en integrando por partes, entonces:

$$S = \frac{K'}{b'} \int_0^t u(t-\tau) f(\lambda\tau) d\tau \quad e5.3a$$

Recordando la definición de la función f :

$$f(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \approx 1 + 2 \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 \tau} + A_N \delta(\tau)$$

en donde:

$$A_N = \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

con lo que la ecuación e5.3 se transformaría en:

$$S = \frac{K'}{b'} \left[\int_0^t u(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 \lambda \tau} \int_0^t u(\tau) e^{n^2 \pi^2 \lambda \tau} d\tau + \frac{AN}{\lambda} u(t) \right]$$

recordando la ecuación e4.13:

$$d_n(\tau) = e^{-n^2 \pi^2 \lambda \tau} \int_0^t u_t(\tau) e^{n^2 \pi^2 \lambda \tau} d\tau$$

Entonces se puede tener la igualdad siguiente:

$$e^{-n^2 \pi^2 \lambda t} \int_0^t u(\tau) e^{n^2 \pi^2 \lambda \tau} d\tau = \frac{u(\tau)}{n^2 \pi^2 \lambda} - \frac{dn(t)}{n^2 \pi^2 \lambda}$$

con lo cual el hundimiento quedaría expresado por:

$$S = \frac{K'}{b'} \left[\int_0^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{3\lambda} u(t) + \frac{2}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} dn(t) \right] \quad e5.4$$

Entonces:

$$S_o(t) = \frac{K'}{b'} \left[\int_0^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{3\lambda} u(t) \right] \quad e5.5$$

y en $t+\Delta t$:

$$S_o(t+\Delta t) = \frac{K'}{b'} \left[\int_0^t u(\tau) d\tau + \Delta t u\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{1}{3\lambda} u(t+\Delta t) \right] \quad e5.6$$

de donde:

$$S_o(t+\Delta t) = S_o(t) + \frac{K'}{b'} \left[u \Delta t + \Gamma \left(\frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{3\lambda} \right) \right] \quad e5.7$$

Γ está definido de acuerdo a e2.20. Y la expresión final para el cálculo del hundimiento en el tiempo t queda expre-

sada como:

$$s(t) = s_0(t) + \frac{K'}{b'} \frac{2}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} d_n(t) \quad e5.8$$

5.3 CALIBRACION DEL MODELO:

La estimación de datos promedio tuvo como objeto realizar una calibración, preliminar por su puesto, de la región circular, línea punteada en la figura 5.2.

Se realizaron algunas corridas con los datos indicados, se tomó además el gasto de los pozos ubicados en el círculo. También se tomó como comparación el abatimiento en los pozos apreciados; esta apreciación puede contener algún error.

En estas circunstancias se obtuvo una diferencia menor a un orden de magnitud entre lo observado y lo obtenido por el modelo, aproximación aceptable en esta fase preliminar.

Por otro lado hay que considerar que se asignó como condición de frontera, $u_c = 0$, lo que provoca un mayor abatimiento promedio en el modelo que en la realidad.

ANEXO A

MANUAL DEL USUARIO

MANUAL DEL USUARIO.

1. CARACTERISTICAS GENERALES.

La implementación se realizó en un computador Burroughs B6800, utilizando el lenguaje Fortran IV.

El modelo simula el comportamiento del abatimiento de un sistema acuífero-acuitardo para el caso más general. O sea, cuando la región y las condiciones de frontera son arbitrarias, y las propiedades físicas variables. Por región arbitraria se entiende que la forma geométrica de la frontera que limita al sistema acuífero-acuitardo puede tener una forma irregular cualquiera.

Las condiciones de frontera arbitrarias implican que se pueden incorporar como datos al modelo las condiciones de frontera reales del sistema, como por ejemplo la recarga.

A estas propiedades del modelo se agrega que las condiciones iniciales de bombeo son arbitrarias y además pueden ser variables en el tiempo (extracción variable en el tiempo).

Las propiedades físicas variables permiten introducir, en cada punto de la malla en la que se divide la región, el espesor del acuitardo, la transmisibilidad y el coeficiente de almacenamiento, tanto para el acuífero como para el acuitardo. Existe una opción que permite al modelo trabajar con estas propiedades constantes en la región.

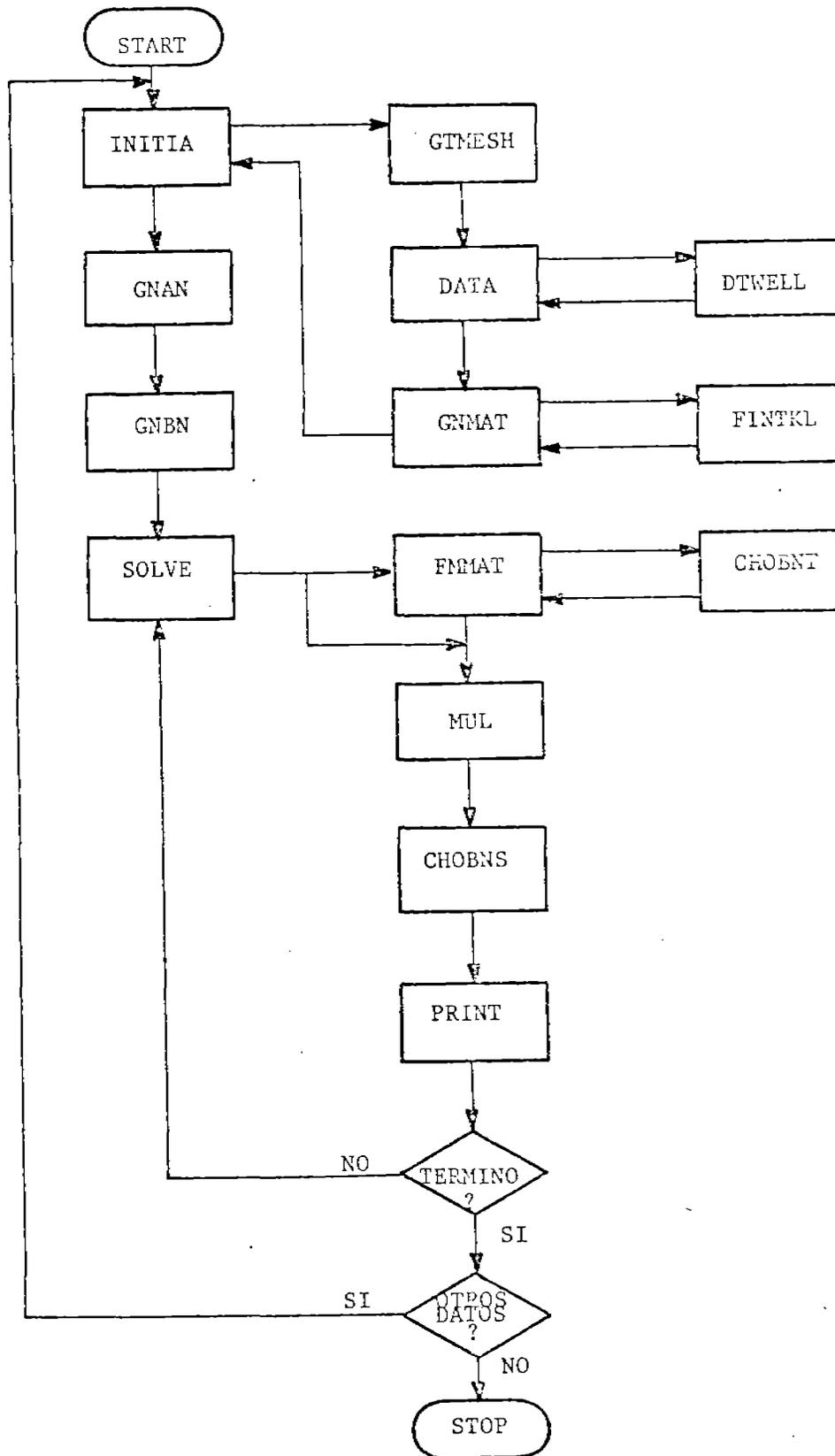


DIAGRAMA GENERAL DE FLUJO

3. DESCRIPCION DE SUBROUTINAS.

El programa tiene dos subrutinas principales. La primera (INITIA) corresponde a la fase de iniciación en la cual se leen los datos, se genera la malla y se ubican los pozos en el nodo más próximo, se genera las matrices de masa y rigidez. La segunda subrutina principal (SOLVE) corresponde a la fase de solución, prepara las matrices A del sistema, encuentra los abatimientos en los nodos y realiza las iteraciones en el tiempo.

1. INITIA: Esta subrutina principal comienza con un llamado a una subrutina secundaria DTMESH.

1.1 GTMESH: Su función es generar la malla, necesita como datos de entrada el número de puntos en R, θ y Z, realiza la lectura (con opciones) de los valores de R, θ y Z, y lee además las condiciones de frontera. Genera la malla asignando el número de ecuación que le corresponde a cada nodo.

1.2. DATA: Dependiendo de la opción que se le dé lee los datos de las propiedades físicas de la región, si la opción es "1" entonces le asigna en forma constante a todos los nodos los valores leídos. Lee los demás datos como θ , tiempo máximo, intervalo de iteración, etc. Además llama a la subrutina DTWELL y despliega los datos leídos.

1.2.1. DTWELL: Lee los datos correspondientes a los pozos: acuíferos en el que se encuentran, coordenadas y gastos, y se le asigna el nodo más cercano.

1.3 GNMAT: Principalmente genera las matrices de masa y rigidez (FK_i , FM) y además calcula los vectores FK y FLAM que de-

penden directamente de las propiedades físicas. La integración la realiza con la función FINTKL que la llama en varios lugares.

1.3.1. FINTKL: Es una función auxiliar de la subrutina GNMAT; su objetivo es relaizar la integración en un elemento de la malla, necesita los radios y ángulos que le definen, las coordenadas del elemento, la transmisibilidad y los valores de la función y su derivada que definen la frontera.

1.4 GNAN: Encuentra los coeficientes de aproximación para la función g.

1.5 GNBNT: Encuentra los coeficientes de aproximación por la función h.

2. SOLVE: Es la segunda subrutina principal, realiza la solución del sistema y las iteraciones en el tiempo.

2.1 FMMAT: Genera la matriz (o matrices) del lado izquierdo del sistema (las matrices A) y genera además los vectores C con el gasto de los pozos. Por medio de la subrutina CHOBNT factoriza las matrices del lado izquierdo del sistema.

2.1.1 CHOBNT: Subrutina de tipo general. Su función es factorizar una matriz.

2.2 MUL: Subrutina de tipo general que multiplica una matriz por un vector.

2.3 CHOBNS: También es una subrutina de tipo general que permite resolver un sistema del tipo $Ax = b$, en donde A es una matriz factorizada.

2.4 PRINT: Despliega la información de la solución del sistema.

4. DATOS DE ENTRADA:

Todos los datos se pueden suministrar en formato libre.

-Tarjeta 1: Datos de características generales:

- 1er. dato: indica el número de acuíferos del sistema (1 ó 2)
(NAQ).
- 2do. dato: número de puntos en R (radio) de la malla (NPR)
- 3er. dato: número de puntos en θ (ángulo) de la malla (NPT)
- 4to. dato: número de puntos en Z (eje vertical) (NPZ)
- 5to. dato: número de pozos (NW)
- 6to. dato: número de aproximaciones para la g (N1)
- 7mo. dato: número de aproximaciones para la h (N2)

-Tarjeta 2: Opciones para leer los valores en R, θ y Z:

- 1er. dato (IOPTR): 0 si se van a suministrar los radios
1 si se da el radio máximo
- 2do. dato (IOPTT): 0 si se va a leer los ángulos
1 si no
- 3er. dato (IOPTZ): 0 si se leen los puntos en sentido vertical en los cuales se obtendrá el abatimiento del acuitardo
1 si no

-Tarjeta 3: Si la opción para radio (IOPTR) fue 1 entonces el radio máximo (RMAX), si la opción fue 0 entonces los valores del radio (puede ser más de una tarje-

ta) (R).

- Tarjeta 4: Si la opción para el ángulo (10PTT) fue 0 entonces se deben leer los valores de 0 (T), si la opción fue 1 no se lee ningún dato.
- Tarjeta 5: Si la opción para los puntos del acuitardo (10PTZ) fue 0 se leen en Z los valores de los puntos en los cuales se desea el abatimiento. Si la opción fue 1 no se lee ningún dato.
- Tarjeta 6: Se leen para todos los puntos de frontera en el arreglo IBC las opciones (0-1) que indican de que los valores se tratan los siguientes datos:
 - 0: si se da el valor de la función que describe el abatimiento en frontera para el punto R,T.
 - 1: si se da el valor de la derivada de la función (puede usarse más de una tarjeta).
- Tarjeta 7: De acuerdo a las opciones anteriores en el arreglo VBC1 y VBC2 (si hay 2 acuíferos) los valores correspondientes a la función o su derivado (puede haber más de una tarjeta).
- Tarjeta 8: Se lee una opción (1DPT) que indica:
 - 1: que las propiedades físicas del sistema acuífero-acuitardo son constantes.
 - 0: las propiedades referidas son variables en cada punto de la malla.
- Tarjeta 9: Se lee el coeficiente de almacenamiento del acuífe-

ro uno (S1).

- Tarjeta 10: Si existen 2 acuíferos se lee el coeficiente de almacenamiento del acuífero dos (S2).
- Tarjeta 11: Se lee el coeficiente de almacenamiento del acuitardo (SP).
- Tarjeta 12: Se lee la transmisibilidad del acuífero uno (T1).
- Tarjeta 13: Si el sistema tiene dos acuíferos se da la transmisibilidad del acuífero dos (T2).
- Tarjeta 14: Se lee la transmisibilidad del acuitardo (TP).
- Tarjeta 15: Se lee el espesor del acuitardo (BP).
- Tarjeta 16: Para cada punto en T (ángulo) se da el valor de función que describe la forma geométrica de la frontera (BD (1,NPT)).
- Tarjeta 17: Para cada punto en T se da el valor de la derivada de la función que describe la forma geométrica de la frontera (BD(1+NPT,NPT2)).
- Tarjeta 18: Se lee el factor de ponderación (THETA) para las iteraciones en el tiempo; y, un número (N3) que indica cada cuantas iteraciones se presentará un resumen de resultados.
- Tarjeta 19: Para los NW pozos deben incluirse NW tarjetas con los siguientes datos de los pozos:
 - Acuífero en el que se encuentra (AQ)

- Coordenada en T (VT)
- Coordenada en R (VR)
- Gasto (XR).

- Tarjeta 19+NW: -Tiempo máximo de simulación (TM)
 - Intervalo en tiempo de cada iteración (DT)
 - Un indicador que fija cada cuantas iteraciones se imprimen los resultados (IMPT).

Si se efectúa la corrida con un solo conjunto de datos entonces una tarjeta con 7 ceros separados por una coma, si se hacen nuevas corridas entonces los datos correspondientes de acuerdo a lo descrito.

5. INTERPRETACION DE RESULTADOS.

Para cada punto de la malla y cada punto en el sentido vertical, que se haya incluido para el acuitardo, se listan los abatimientos calculados.

NOTA IMPORTANTE: El abatimiento se obtiene en unidades congruentes en las suministradas en las propiedades físicas del sistema.

ANEXO B

PROGRAMA DEL MODELO NUMERICO DEL
SISTEMA DE ACUIFEROS DEL VALLE DE MEXICO

```

1000 C*
2000 C*
3000 C*   MODELO NUMERICO DEL SISTEMA DE ACUIFEROS
4000 C*
5000 C*   DEL VALLE DE MEXICO
6000 C*
7000 C*
8000 C*   TESIS PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE MAESTRO
9000 C*   EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION
10000 C*
11000 C*
12000 C*   POR DAVID BALAREZO
13000 C*
14000 C*   DIRECTOR DR. ROBERT A. YATES
15000 C*
16000 C*
17000 C*   UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
18000 C*
19000 C*   CIUDAD UNIVERSITARIA, FEBRERO-1980
20000 C*
21000 C*
22000 FILE 5=DB/AQF/DATA,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=420
23000 FILE 6=IMP,UNIT=PRINTER,RECORD=22
24000 FILE 7=MSG,UNIT=REMOTE
25000     DIMENSION A(50000),B(1000)
26000 C*
27000 C*   NPT NUMBER OF MESH POINTS
28000 C*
29000     IFIMAX=50000
30000     FLAG=0.
31000     10 WRITE(7,1000)
32000     READ(5,/)NAQ,NPR,NPT,NPZ,NW,N1,N2
33000     IF(NPR.EQ.0) CALL EXIT
34000     WRITE(7,*)NAQ,NPR,NPT,NPZ
35000     NAQM1=NAQ-1
36000     NP=NPR*(NPT-1)-NPT+2
37000     NPRT=NPR*NPT
38000     NELR=NPR-1
39000     NELI=NPT-1
40000     LB=NPT+2

```

```

41000      IF(NPT.EQ.2) LB=2
42000      N12=MAX0(N1,N2)
43000      IR=1
44000      IT=IR+NPB
45000      IZ=IT+NPT
46000      IHR=IZ+NPZ
47000      IHT=IHR+NELR
48000      IVBC1=IHT+NELT
49000      IVBC2=IVBC1+NPT
50000      IIBC=IVBC2+NPT*NAQM1
51000      INEQ=IIBC+NPT
52000      IS1=INEQ+NPRT
53000      IS2=IS1+NPRT
54000      IFM=IS2+NPRT*NAQM1
55000      IT1=IFM+NPRT
56000      IT2=IT1+NPRT
57000      IFLAM=IT2+NPRT*NAQM1
58000      IFK=IFLAM+NPRT
59000      IED=IFK+NPRT
60000      IFK1=IED+NPT*2
61000      IFK2=IFK1+NP*LB
62000      ICBC1=IFK2+NP*LB*NAQM1
63000      ICBC2=ICBC1+NPT*2
64000      ISINZ=ICBC2+2*NPT*NAQM1
65000      IIQ=ISINZ+NPZ*N12
66000      IQ1=IIQ+NW
67000      IQ2=IQ1+NW
68000      IAN=IQ2+NW*NAQM1
69000      IBN=IAN+N1
70000      IBP=IBN+N2
71000      ITP=IBP+NPRT
72000      IVT=ITP+NPRT
73000      IF1=IVT+NPRT
74000      LVT=IFIMAX-IF1+1
75000      IF(LVT.GT.0) GO TO 20
76000      WRITE(6,1100) LVT
77000      WRITE(7,1100) LVT
78000      CALL EXIT
79000      20 CALL INITIA(NAQ,NPB,NPT,NPZ,NW,N1,N2,NP,NPRT,NELR,NELT,LB,N12,
80000      *THETA,FNU,TM,DT,IMPT,GNO,A(IR),A(IT),A(IZ),A(IHR),A(IHT),A(IVBC1),

```

```

81000 *A(IVBC2),A(IIBC),A(INEQ),A(IS1),A(IS2),A(IFM),A(IT1),A(IT2),A(IFLA
82000 *M),A(IFK),A(IBD),A(IFK1),A(IFK2),A(ICBC1),A(ICBC2),A(ISINZ),A(IIR)
83000 *,A(IQ1),A(IQ2),A(IAN),A(IBN),A(ITP),A(IEP),A(IVT))
84000 IA1=ITP
85000 IA2=IA1+NF*LB
86000 IC1=IA2+NF*LB*NAQM1
87000 IC2=IC1+NF
88000 IF1=IC2+NF*NAQM1
89000 IF2=IF1+NF
90000 IF3=IF2+NF*NAQM1
91000 ID1=IF3+NF*NFZ
92000 ID2=ID1+NF*N12
93000 IG1=ID2+NF*N12*NAQM1
94000 IG2=IG1+NF
95000 IEXP1=IG2+NF*NAQM1
96000 IVT=IEXP1+NF*N12
97000 LVT=IFIMAX-IVT
98000 IF(LVT.GT.0)GO TO 30
99000 WRITE(6,1200) LVT
100000 WRITE(7,1200) LVT
101000 CALL EXIT
102000 30 DO 35 I=IA1,IVT
103000 A(I)=0.
104000 35 CONTINUE
105000 CALL SOLVE(NAQ,NFR,NPT,NPZ,NW,N1,N2,NF,NPRT,NELR,NELT,LB,N12,
106000 *THETA,FMU,TM,DT,IMPT,GNO,A(IR),A(IT),A(IZ),A(IHR),A(IHT),A(IIBC),A
107000 *(IBV),A(INEQ),A(IS1),A(IS2),A(IFM),A(IFLAM),A(IFK),A
108000 *(ITP),A(IEP),A(IBD),A(IFK1),A(IFK2),A(ICBC1),A(ICBC2),A(ISINZ),A(I
109000 *IQ),A(IQ1),A(IQ2),A(IAN),A(IBN),A(IA1),A(IA2),A(IC1),A(IC2),A(IF1)
110000 *,A(IF2),A(IF3),A(ID1),A(ID2),A(IG1),A(IG2),A(IEXP1),A(IVT),B(1),
111000 *LVT,FLAG)
112000 C*
113000 FLAG=1.
114000 DO 40 I=1,IVT
115000 A(I)=0.
116000 40 CONTINUE
117000 GO TO 10
118000 C*
119000 1000 FORMAT(" NO OF AQUIFERS. NO MESH POINTS IN R ,T & Z. NO OF WELLS."
120000 *,/, " NO OF APROX FOR G & H ...PLS")

```

```
121000 1100 FORMAT("1 A TOO SMALL FOR INITIA LVT=",I5)  
122000 1200 FORMAT("1 A TOO SMALL FOR SOLVE LVT=",I5)  
123000 C*  
124000 END  
125000 C*  
126000 C*****  
127000 C*****  
128000 C*
```

```
129000      FUNCTION CALGNO(N1)
130000      C*
131000      DATA PI/3.1415926535898/
132000      C*
133000      CALGNO=1./3.
134000      C*
135000      DO 10 N=1,N1
136000          CALGNO=CALGNO-2./(PI*N)**2
137000      10 CONTINUE
138000      C*
139000      RETURN
140000      END
141000      C*
142000      C*****
143000      C*****
144000      C*
```

```
145000      SUBROUTINE CHOBNS (N,M,L,X,B)
146000      C*
147000      DIMENSION L(N,1),X(1),B(1)
148000      REAL L
149000      INTEGER P,Q
150000      C*
151000      C* FORWARD SWEEP
152000      C*
153000          M1=M-1
154000          DO 30 I=1,N
155000              P=1
156000              IF(I.LT.M) P=M-I+1
157000              Q=P-M+I-1
158000              Y=B(I)
159000              IF(P.GT.M1) GO TO 20
160000              DO 10 K=P,M1
161000                  Q=Q+1
162000                  Y=Y-L(I,K)*X(Q)
163000          10 CONTINUE
164000          20 X(I)=Y*L(I,M)
165000          30 CONTINUE
166000      C*
167000      C* BACKWARD SUBSTITUTION
168000      C*
169000          DO 60 I=1,N
170000              IB=N-I+1
171000              P=1
172000              IF(I.LT.M) P=M-I+1
173000              Y=X(IB)
174000              Q=IB+M-P
175000              IF(P.GT.M1) GO TO 50
176000              DO 40 K=P,M1
177000                  Y=Y-L(Q,K)*X(Q)
178000              Q=Q-1
179000          40 CONTINUE
180000          50 X(IB)=Y*L(IB,M)
181000          60 CONTINUE
182000      RETURN
183000      END
184000      C*
```

185000 C*****
186000 C*****
187000 C*

```

188000      SUBROUTINE CHOBNT (N,M,A,L)
189000      C*
190000      DIMENSION A(N,1),L(N,1)
191000      REAL L
192000      LOGICAL FAIL
193000      INTEGER P,Q,R,S
194000      FAIL=.FALSE.
195000      DT=1.
196000      ID=0
197000      DO 80 I=1,N
198000          P=1
199000          IF(I,LT,M) P=M-I+1
200000          R=I-M+P
201000          DO 70 J=P,M
202000              S=J-1
203000              Q=M-J+P
204000              Y=A(I,J)
205000              IF(P,GT,S) GO TO 20
206000              DO 10 K=P,S
207000                  Y=Y-L(I,K)*L(R,Q)
208000                  Q=Q+1
209000          10 CONTINUE
210000          20 IF(J,EQ,M) GO TO 30
211000              L(I,J) = Y*L(R,M)
212000              R=R+1
213000              GO TO 70
214000          30 DT=DT*Y
215000              IF(Y,EQ,0.) GO TO 100
216000          40 IF(ABS(DT),LT,1.) GO TO 50
217000              DT=DT*0.1
218000              ID=ID+1
219000              GO TO 40
220000          50 IF(ABS(DT),GE,0.1) GO TO 60
221000              DT=DT*10.
222000              ID=ID-1
223000              GO TO 50
224000          60 L(I,J)=1./SQRT(Y)
225000          70 CONTINUE
226000          80 CONTINUE
227000          90 RETURN

```

```
228000      100 PRINT 1000
229000      1000 FORMAT(1H0,"LA MATRIZ NO ES INVERTIBLE")
230000          CALL EXIT
231000          END
232000      C*
233000      C*****
234000      C*****
235000      C*
0
```

```

236000      SUBROUTINE DATA(NAQ,NPR,NPT,NW,N1,N2,NP,NPRT,THETA,FMU,TM,DT,
237000      *INPT,R,T,NEQ,S1,S2,FM,T1,T2,BD,IQ,Q1,Q2,TP,BP,IBC,VBC1,VBC2,VT)
238000      C*
239000      DIMENSION S1(NPRT),S2(NPRT),FM(NPRT),T1(NPRT),T2(NPRT),BD(1),
240000      *R(NPR),T(NPT),NEQ(NPRT),IQ(NW),Q1(NW),Q2(NW),TP(NPRT),BP(NPRT),
241000      *IBC(1),VBC1(1),VBC2(1),VT(1)
242000      READ(5,/)IOPT
243000      IF(IOPT.EQ.1)GO TO 5
244000      WRITE(7,1000)
245000      READ(5,/)S1
246000      IF(NAQ.EQ.2)READ(5,/)S2
247000      READ(5,/)FM
248000      WRITE(7,1100)
249000      READ(5,/)T1
250000      IF(NAQ.EQ.2) READ(5,/)T2
251000      READ(5,/)(TP(I),I=1,NPRT)
252000      WRITE(7,1200)
253000      READ(5,/)(BP(I),I=1,NPRT)
254000      GO TO 8
255000      5 WRITE(7,1000)
256000      READ(5,/)S1(1)
257000      IF(NAQ.EQ.2)READ(5,/)S2(1)
258000      READ(5,/)FM(1)
259000      WRITE(7,1100)
260000      READ(5,/)T1(1)
261000      IF(NAQ.EQ.2) READ(5,/)T2(1)
262000      READ(5,/)TP(1)
263000      WRITE(7,1200)
264000      READ(5,/)BP(1)
265000      DO 7 I=2,NPRT
266000      S1(I)=S1(1)
267000      IF(NAQ.EQ.2)S2(I)=S2(1)
268000      FM(I)=FM(1)
269000      T1(I)=T1(1)
270000      IF(NAQ.EQ.2)T2(I)=T2(1)
271000      TP(I)=TP(1)
272000      BP(I)=BP(1)
273000      7 CONTINUE
274000      C*
275000      8 NPT2=2*NPT

```

```

276000      WRITE(7,1300)
277000      READ(5,/) (RD(I), I=1, NPT2)
278000      WRITE(7,1400)
279000      READ(5,/) THETA
280000      FMU=0.
281000      IF (THETA.GE.0.) GO TO 9
282000      FMU=THETA
283000      9 IF (N2.GE.2) GO TO 10
284000      WRITE(6,1500)
285000      WRITE(7,1500)
286000      CALL EXIT
287000      10 WRITE(7,1600)
288000      CALL DTWELL(NPR,NPT,NPRT,NW,R,T,NEQ,IQ,Q1,Q2)
289000      WRITE(7,1700)
290000      READ(5,/) TM,DT,INPT
291000      IF (FMU.EQ.0.) GO TO 12
292000      E=EXP(DT*FMU)
293000      THETA=(E-1,-DT*FMU)/(DT*FMU*(E-1.))
294000      12 WRITE(7,1800) THETA,FMU,N1,N2
295000      WRITE(6,1800) THETA,FMU,N1,N2
296000      WRITE(6,1900) NPRT
297000      WRITE(7,1900) NPRT
298000      DO 15 I=1,NPRT
299000      WRITE(6,2000) I,S1(I),S2(I),FM(I),T1(I),T2(I),TP(I),
300000      *BP(I)
301000      WRITE(7,2000) I,S1(I),S2(I),FM(I),T1(I),T2(I),TP(I),
302000      *BP(I)
303000      15 CONTINUE
304000      WRITE(6,2100)
305000      WRITE(7,2100)
306000      DO 20 I=1,NPT
307000      TI=T(I)*180./3.1416
308000      WRITE(6,2200) TI,RD(I),RD(I+NPT)
309000      WRITE(7,2200) TI,RD(I),RD(I+NPT)
310000      20 CONTINUE
311000      WRITE(6,2110)
312000      WRITE(7,2110)
313000      DO 25 I=1,NPT
314000      TI=T(I)*180./3.1416
315000      IF (IRC(I).EQ.1) GO TO 27

```

```

316000      WRITE(6,2120)TI,VBC1(I)
317000      WRITE(7,2120)TI,VBC1(I)
318000      GO TO 25
319000      27  WRITE(6,2130)TI,VBC1(I)
320000      WRITE(7,2130)TI,VBC1(I)
321000      25  CONTINUE
322000      WRITE(6,2300)NW
323000      WRITE(7,2300)NW
324000      DO 30 I=1,NW
325000      WRITE(6,2400)I,Q1(I),Q2(I),IQ(I)
326000      WRITE(7,2400)I,Q1(I),Q2(I),IQ(I)
327000      30  CONTINUE
328000      DO 40 I=1,NPRT
329000      J=NEQ(I)
330000      IF(J.NE.0) VT(J)=S1(I)
331000      40  CONTINUE
332000      DO 50 I=1,NP
333000      S1(I)=VT(I)
334000      50  CONTINUE
335000      C*
336000      IF(NAQ.EQ.1) GO TO 80
337000      DO 60 I=1,NPRT
338000      J=NEQ(I)
339000      IF(J.NE.0) VT(J)=S2(I)
340000      60  CONTINUE
341000      DO 70 I=1,NP
342000      S2(I)=VT(I)
343000      70  CONTINUE
344000      C*
345000      80  DO 90 I=1,NPRT
346000      J=NEQ(I)
347000      IF(J.NE.0) VT(J)=FM(I)
348000      90  CONTINUE
349000      DO 100 I=1,NP
350000      FM(I)=VT(I)
351000      100 CONTINUE
352000      C*
353000      DO 110 I=1,NPRT
354000      J=NEQ(I)
355000      IF(J.NE.0) VT(J)=T1(I)

```

```

356000      110 CONTINUE
357000          DO 120 I=1,NP
358000              T1(I)=VT(I)
359000      120 CONTINUE
360000      C*
361000          IF(NAQ.EQ.1) GO TO 150
362000          DO 130 I=1,NPRT
363000              J=NEQ(I)
364000              IF(J.NE.0) VT(J)=T2(I)
365000      130 CONTINUE
366000          DO 140 I=1,NP
367000              T2(I)=VT(I)
368000      140 CONTINUE
369000      C*
370000      150 DO 160 I=1,NPRT
371000          J=NEQ(I)
372000          IF(J.NE.0) VT(J)=TP(I)
373000      160 CONTINUE
374000          DO 170 I=1,NP
375000              TP(I)=VT(I)
376000      170 CONTINUE
377000      C*
378000          DO 180 I=1,NPRT
379000              J=NEQ(I)
380000              IF(J.NE.0) VT(J)=BP(I)
381000      180 CONTINUE
382000          DO 190 I=1,NP
383000              BP(I)=VT(I)
384000      190 CONTINUE
385000      C*
386000      C*
387000      1000 FORMAT(" S1,S2,FM..... PLS")
388000      1100 FORMAT(" T1,T2,TF..... PLS")
389000      1200 FORMAT(" BP..... PLS")
390000      1300 FORMAT(" BD..... PLS")
391000      1400 FORMAT(" THETA.... PLS")
392000      1500 FORMAT("1 N2 MUST BE GREATER OR EQUAL TO 2")
393000      1600 FORMAT(" WELL NW&AQ,VT,VR,XR(NW TIMES).... PLS")
394000      1700 FORMAT(" MAX T,DT&INPT .... PLS")
395000      1800 FORMAT(1H1,10X,"THETA= ",F5.2,3X,"MU= ",F5.2,3X,"N1= ",I3,3X,"N2=

```

```

396000      * ",I3,/)
397000      1900 FORMAT(1H1,10X,"POINTS IN RT= ",I5,/,4X,
398000      *"      S1      S2      SP      T1      T2      TP      BF")
399000      2000 FORMAT(I4,7F8.2)
400000      2100 FORMAT("1BOUNDARY DEFINITION",/,7X," FUNCTION  DERIVATIVE",/)
401000      2200 FORMAT(F7.2,2F9.3)
402000      2110 FORMAT("1BOUNDARY CONDITIONS",/,7X," FUNCTION  DERIVATIVE",/)
403000      2120 FORMAT(F7.2,F9.3)
404000      2130 FORMAT(F7.2,9X,F9.3)
405000      2300 FORMAT("1NUMBER OF WELLS= ",I4,/,
406000      *" CHARACTERISTICS OF THE WELLS",/,10X,"Q1      Q2      IQ")
407000      2400 FORMAT(I4,2X,F6.4,2X,F6.4,5X,I3)
408000      C*
409000          RETURN
410000          END
411000      C*
412000      C*****
413000      C*****
414000      C*

```

```

415000      SUBROUTINE DTWELL(NPR,NPT,NPRT,NW,R,T,NEQ,IQ,Q1,Q2)
) 416000      C*
417000      DIMENSION R(NPR),T(NPT),NEQ(NPRT),IQ(NW),Q1(NW),Q2(NW)
418000      C*
) 419000      C* CHARACTERISTICS OF THE WELLS
420000      C*
421000      WRITE(6,1000)
) 422000      DO 100 J=1,NW
423000      READ(5,/) AQF,VT,VR,XR
424000      WRITE(6,2000)J,AQF,VT,VR,XR
) 425000      FMIN=10.**8
426000      DO 20 I=1,NPT
) 427000      IF(ABS(VT-T(I)).GT.FMIN)GO TO 20
428000      FMIN=ABS(VT-T(I))
429000      INDT=I
) 430000      20 CONTINUE
431000      FMIN=10.**8
432000      DO 30 I=1,NPRT
) 433000      IF(ABS(VR-R(I)).GT.FMIN)GO TO 30
434000      FMIN=ABS(VR-R(I))
435000      INDR=I
) 436000      30 CONTINUE
437000      IPC=INDT+NPT*(INDR-1)
438000      IQ(J)=NEQ(IPC)
439000      IF(AQF.EQ.1)GO TO 40
440000      Q1(J)=0.
441000      Q2(J)=XR
442000      GO TO 50
) 443000      40 Q1(J)=XR
444000      Q2(J)=0.
445000      50 CONTINUE
) 446000      100 CONTINUE
447000      1000 FORMAT(1H1," COORDINATES",//,
448000      *"      WELL AQF      VT      VR      XR")
) 449000      2000 FORMAT(4X,2I4,3F10.5)
450000      RETURN
451000      END
) 452000      C*
453000      C*****
) 454000      C*****

```

455000 C*

```

456000      FUNCTION FINTKL(R1,R2,T1,T2,I,J,K,L,F,G,GF)
) 457000      C*
458000      DIMENSION F(4),G(2),GF(2)
459000      C*
) 460000      FINTKL=0.
461000      IRT=0
462000      DR=R2-R1
) 463000      DT=T2-T1
464000      C*
465000      C* FIRST TERM RR & SECOND TERM TT
) 466000      C*
467000      IF(I.NE.K) GO TO 20
468000      DFINT=0.
) 469000      DO 10 NR=1,2
470000          RC=R1+DR*(NR-1)
471000          WRT=R1*(3-NR)+R2*NR
) 472000          IRT=2*(NR-1)+I
473000          DFINT=DFINT+WRT*F(IRT)
474000      10 CONTINUE
) 475000      FINTKL=FINTKL+DFINT*DT/(12.*DR)*(-1)**(J+L)*
476000      *(1.+(GF(I)/G(I))**2)
477000      C*
) 478000      C* SECOND TERM TT
479000      C*
480000      C*      1-TT
481000      C*
482000      20 IF(J.NE.L) GO TO 40
) 483000      DFINT=0.
484000      RC=R1+DR*(J-1)
485000      IF(RC.EQ.0.) GO TO 40
) 486000      WRT=R1*(3-J)+R2*J
487000      DO 30 NT=1,2
488000          TC=T1+DT*(NT-1)
) 489000          IRT=2*(J-1)+NT
490000          DFINT=DFINT+WRT*F(IRT)
) 491000      30 CONTINUE
492000      FINTKL=FINTKL+DFINT*DR/(12.*DT)*(-1)**(I+K)/(RC*RC)
) 493000      C*
494000      C*      2-TR & 3-RT
) 495000      C*

```

```

496000      40 RC=R1+DR*(J-1)
497000      IF(RC.EQ.0.) GO TO 50
498000      WRT=R1*(3-J)+R2*J
499000      IRT=2*(J-1)+K
500000      FINTKL=FINTKL-WRT*F(IRT)/RC*GF(K)/G(K)*(-1)**(I+L)/12.
501000      50 RC=R1+DR*(L-1)
502000      IF(RC.EQ.0.) RETURN
503000      WRT=R1*(3-L)+R2*L
504000      IRT=2*(L-1)+I
505000      FINTKL=FINTKL-WRT*F(IRT)/RC*GF(I)/G(I)*(-1)**(J+K)/12.
506000      C*
507000      RETURN
508000      END
509000      C*
510000      C*****
511000      C*****
512000      C*

```

```

513000      SUBROUTINE FMMAT(NAQ,ITER,NPR,NPT,NP,NPRT,NELT,LB,N1,N12,NW,THETA,
514000      *FMU,DT,GN0,S1,S2,NEQ,FM,FLAM,FK,FK1,FK2,CBC1,CBC2,IQ,Q1,Q2,AN,A1,
515000      *A2,C1,C2,P1,P2,VT,EXP1)
516000      C*
517000      DIMENSION S1(NP),S2(NP),NEQ(1),FM(NP),FLAM(NP),FK(NP),FK1(NP,LB),
518000      *FK2(NP,LB),CBC1(1),CBC2(1),IQ(NW),Q1(NW),Q2(NW),AN(N1),A1(NP,LB),
519000      *A2(NP,LB),C1(NP),C2(NP),P1(NP),P2(NP),VT(NP),EXP1(NP,N12)
520000      DATA PI/3.1415926535898/
521000      C*
522000      DO 10 J=1,N12
523000          DO 10 I=1,NP
524000              EXP1(I,J)=EXP(-DT*FLAM(I)*(J*PI)**2)
525000      10 CONTINUE
526000          DO 20 J=1,LB
527000              DO 20 I=1,NP
528000                  A1(I,J)= DT*THETA*FK1(I,J)
529000                  IF(NAQ.EQ.1) GO TO 20
530000                  A2(I,J)= DT*THETA*FK2(I,J)
531000      20 CONTINUE
532000              DO 22 I=1,NP
533000                  A1(I,LB)=A1(I,LB)+S1(I)*FM(I)
534000                  IF(NAQ.EQ.1) GO TO 22
535000                  A2(I,LB)=A2(I,LB)+S2(I)*FM(I)
536000      22 CONTINUE
537000              DO 29 I=1,NP
538000                  CT1=GN0
539000                  DO 28 J=1,N1
540000                      FNUJI=(J*PI)**2*FLAM(I)
541000                      IF(FMU.EQ.0)GO TO 23
542000                      FJI=(1.+FMU/FNUJI*(EXP1(I,J)-1.)/(EXP(DT*FMU)-1.))/
543000      *          DT*(FNUJI+FMU)
544000                      GO TO 25
545000      23          IF(THETA.EQ.1)GO TO 24
546000                      FJI=(DT*FNUJI+EXP1(I,J)-1.)/(DT+FNUJI)**2
547000                      GO TO 25
548000      24          FJI=(1.-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)
549000      25          CT1=CT1+DT*FLAM(I)*AN(J)*FJI
550000      28 CONTINUE
551000          A1(I,LB)=A1(I,LB)+CT1*FM(I)*FK(I)/FLAM(I)
552000          IF(NAQ.EQ.1)GO TO 29

```

```

553000      A2(I, LB)=A2(I, LB)+CT1*FM(I)*FK(I)/FLAM(I)
554000      29 CONTINUE
555000      CALL CHOENT(NP, LB, A1, A1)
556000      IF(NAQ.EQ.2) CALL CHOENT(NP, LB, A2, A2)
557000      DO 30 I=1, NP
558000          C1(I)=0.
559000          IF(NAQ.EQ.2) C2(I)=0.
560000          IF(ITER.EQ.0) P1(I)=0.
561000          IF(ITER.EQ.0.AND.NAQ.EQ.2) P2(I)=0.
562000      30 CONTINUE
563000      DO 40 I=1, NW
564000          KP=IQ(I)
565000          C1(KP)=Q1(I)*DT
566000          IF(NAQ.EQ.1) GO TO 40
567000          C2(KP)=Q2(I)*DT
568000      40 CONTINUE
569000      NI=(NPR-2)*NPRT+1
570000      DO 60 N=NI, NPRT
571000          IF(CBC1(N-NI+1).EQ.0)GO TO 50
572000          NEQC=NEQ(N)
573000          C1(NEQC)=C1(NEQC)+CBC1(N-NI+1)
574000      50 IF(NAQ.EQ.1.OR.CBC2(N-NI+1).EQ.0)GO TO 60
575000          C2(NEQC)=C2(NEQC)+CBC2(N-NI+1)
576000      60 CONTINUE
577000      C*
578000      RETURN
579000      END
580000      C*
581000      C*****
582000      C*****
583000      C*

```

```

553000      A2(I,LB)=A2(I,LB)+CT1*FM(I)*FK(I)/FLAM(I)
554000      29 CONTINUE
555000      CALL CHOENT(NP,LB,A1,A1)
556000      IF(NAQ.EQ.2) CALL CHOENT(NP,LB,A2,A2)
557000      DO 30 I=1,NP
558000          C1(I)=0.
559000          IF(NAQ.EQ.2) C2(I)=0.
560000          IF(ITER.EQ.0) P1(I)=0.
561000          IF(ITER.EQ.0.AND.NAQ.EQ.2) P2(I)=0.
562000      30 CONTINUE
563000      DO 40 I=1,NW
564000          KP=IQ(I)
565000          C1(KP)=Q1(I)*DT
566000          IF(NAQ.EQ.1) GO TO 40
567000          C2(KP)=Q2(I)*DT
568000      40 CONTINUE
569000      NI=(NPR-2)*NPRT+1
570000      DO 60 N=NI,NPRT
571000          IF(CBC1(N-NI+1).EQ.0)GO TO 50
572000          NEQC=NEQ(N)
573000          C1(NEQC)=C1(NEQC)+CBC1(N-NI+1)
574000      50 IF(NAQ.EQ.1.OR.CBC2(N-NI+1).EQ.0)GO TO 60
575000          C2(NEQC)=C2(NEQC)+CBC2(N-NI+1)
576000      60 CONTINUE
577000      C*
578000          RETURN
579000          END
580000      C*
581000      C*****
582000      C*****
583000      C*

```

```

584000      SUBROUTINE GNAN(N1,AN)
585000      C*
586000      DIMENSION AN(N1)
587000      C*
588000      C* AN = COEFFICIENTS OF APROXIMATION FOR G
589000      C*
590000      DO 10 I=1,N1
591000         AN(I)=2.
592000      10 CONTINUE
593000      C*
594000      RETURN
595000      END
596000      C*
597000      C*****
598000      C*****
599000      C*

```

```

600000      SUBROUTINE GNB(N2,BN)
601000      C*
602000      DIMENSION BN(N2)
603000      DATA F1/3.1415926535898/
604000      C*
605000      C* BN = COEFFICIENTS OF APROXIMATION FOR H
606000      C*
607000      G1=-(-1.)**N2
608000      G2=-1./6.
609000      N2M2=N2-2
610000      IF(N2M2.LT.1)GO TO 20
611000      DO 10 I=1,N2M2
612000      BN(I)=2.*(-1.)**I
613000      G2=G2-2.*((-1.)**I)/(I*PI)**2
614000      10 CONTINUE
615000      20 A3=1./((N2-1)*PI)**2
616000      A4=1./((N2*PI)**2)
617000      U=A4-A3
618000      BN(N2) = (G2-A3*G1)/U
619000      BN(N2-1)=(A4*G1-G2)/U
620000      C*
621000      C* WRITE(6,/) BN
622000      RETURN
623000      END
624000      C*
625000      C*****
626000      C*****
627000      C*

```

```

628000      SUBROUTINE GNMAT(NAQ,NFR,NPT,NPZ,NF,NPRT,NELR,NELT,LB,N12,R,T,Z,HR
) 629000      *,HT,UBC1,UBC2,IBC,NEQ,FM,TR1,TR2,FLAM,FK,BD,FK1,FK2,CBC1,CBC2,SINZ
630000      *,TP,BP)
631000      C*
) 632000      DIMENSION R(NFR),T(NPT),Z(1),HR(NELR),HT(NELT),UBC1(NPT),UBC2(NPT)
633000      *,IBC(NPT),NEQ(NPRT),FM(NP),TR1(NPRT),TR2(NPRT),FLAM(NPRT),FK(NPRT)
634000      *,BD(1),FK1(NP,LB),FK2(NP,LB),CBC1(1),CBC2(1),SINZ(1),TP(NPRT),
) 635000      *BP(NPRT),IND(4),G(2),GP(2),F1(4),F2(4)
636000      DATA PI/3.1415926535898/
637000      C*
) 638000      C*  INITIALIZATION
639000      C*
640000      DO 10 I=1,NF
) 641000      DO 10 J=1,LB
642000      FK1(I,J)=0.
643000      10 CONTINUE
) 644000      IF(NAQ.EQ.1) GO TO 30
645000      DO 20 J=1,LB
646000      DO 20 I=1,NF
) 647000      FK2(I,J)=0.
648000      20 CONTINUE
) 649000      30 IMAX=NPT*2
650000      DO 40 I=1,IMAX
651000      CBC1(I)=0.
652000      IF(NAQ.EQ.2)CBC2(I)=0.
) 653000      40 CONTINUE
654000      C*
) 655000      C*  STIFFNESS MATRIX (FK1,FK2)
656000      C*
657000      IBV=1+NELT*(NELR-2)
658000      DO 120 NR=1,NELR
) 659000      R1=R(NR)
660000      R2=R(NR+1)
661000      DO 120 NT=1,NELT
) 662000      T1=T(NT)
663000      T2=T(NT+1)
664000      IND(1)=NPT*(NR-1)+NT
) 665000      IND(2)=IND(1)+1
666000      IND(3)=IND(1)+NPT
) 667000      IND(4)=IND(3)+1

```

```

668000      G(1)=BD(NT)
669000      G(2)=BD(NT+1)
670000      GP(1)=BD(NT+NPT)
671000      GP(2)=BD(NT+NPT+1)
672000      DO 50 N=1,4
673000          IND(N)=NEQ(IND(N))
674000      50  CONTINUE
675000      DO 60 N=1,4
676000          F1(N)=0.
677000          IF(IND(N).NE.0)F1(N)=TR1(IND(N))
678000          IF(NAQ.EQ.1) GO TO 60
679000          F2(N)=0.
680000          IF(IND(N).NE.0)F2(N)=TR2(IND(N))
681000      60  CONTINUE
682000      DO 110 J=1,2
683000          DO 110 I=1,2
684000              IJ=(J-1)*2+I
685000              II=IND(IJ)
686000              IF(II.EQ.0) GO TO 110
687000              DO 100 L=1,2
688000                  DO 100 K=1,2
689000                      KL=(L-1)*2+K
690000                      KK=IND(KL)
691000                      IF((KK.EQ.0).OR.(KK.GT.II)) GO TO 100
692000                      LL=LB-II+KK
693000                      FK1(II,LL)=FK1(II,LL)+FINTKL(R1,R2,T1,T2,I,J,K,L,F1,G,GP)
694000                      IF(NAQ.EQ.1) GO TO 100
695000                      FK2(II,LL)=FK2(II,LL)+FINTKL(R1,R2,T1,T2,I,J,K,L,F2,G,GP)
696000      100  CONTINUE
697000          IF(NR.NE.NELR)GO TO 110
698000          DO 105 K=1,2
699000              KL=2+K
700000              KK=IND(KL)
701000              IF(KK.NE.0)GO TO 105
702000              IJ=(J-1)*NPT+NT+I-1
703000              IF(VBC1(NT+K-1).EQ.0.)GO TO 103
704000              CBC1(IJ)=CBC1(IJ)-VBC1(NT+K-1)*FINTKL(R1,R2,T1,T2,
705000                  I,J,K,2,F1,G,GP)
706000      *      IF(NAQ.EQ.1)GO TO 105
707000      103  IF(VBC2(NT+K-1).EQ.0.)GO TO 105

```

```

708000      CBC2(IJ)=CBC2(IJ)-VBC2(NT+K-1)*FINTKL(R1,R2,T1,T2,
709000      *      I,J,K,2,F2,G,GF)
710000      105      CONTINUE
711000      110      CONTINUE
712000      120      CONTINUE
713000      DO 125 NT=1,NELT
714000      IF(IBC(NT).EQ.0)GO TO 125
715000      DT=HT(NT)
716000      IF(NT.NE.1)DT=DT+HT(NT-1)
717000      IF(NT.EQ.1)DT=DT+HT(NELT)
718000      CBC1(NT)=CBC1(NT)+DT*VBC1(NT)*
719000      *      SQRT(BD(NT)**2+BD(NT+NPT)**2)
720000      IF(NAQ.EQ.1)GO TO 125
721000      CBC2(NT)=CBC2(NT)+DT*VBC2(NT)*
722000      *      SQRT(BD(NT)**2+BD(NT+NPT)**2)
723000      125      CONTINUE
724000      DO 130 I=1,NP
725000      FK(I)=TP(I)/BP(I)**2
726000      FLAM(I)=FK(I)/FM(I)
727000      130      CONTINUE
728000      C*
729000      C*      MASS(FM) MATRIX
730000      C*
731000      DO 140 I=1,NP
732000      FM(I)=0.
733000      140      CONTINUE
734000      RMAX=R(NPR)
735000      DO 170 I=1,NELT
736000      IF(I.EQ.1) HTN=HT(I)+HT(NELT)
737000      IF(I.GT.1) HTN=HT(I)+HT(I-1)
738000      DO 160 J=1,NPR
739000      IJ=NPT*(J-1)+I
740000      NIJ=NEQ(IJ)
741000      IF(NIJ.EQ.0) GO TO 170
742000      IF(J.EQ.1) GO TO 150
743000      FM(NIJ)=(R(J-1)+2.*R(J))*HR(J-1)*HTN/12.
744000      IF(J.EQ.NPR) GO TO 160
745000      150      FM(NIJ)=FM(NIJ)+(2.*R(J)+R(J+1))*HR(J)*HTN/12.
746000      160      CONTINUE
747000      FM(NIJ)=FM(NIJ)*(BD(I)/RMAX)**2.

```

```

748000      170 CONTINUE
749000          DO 180 I=1,NP
750000              FK1(I,LB)=FK1(I,LB)+FM(I)*FK(I)
751000      180 CONTINUE
752000          IF(NAQ.EQ.1) GO TO 200
753000          DO 190 I=1,NP
754000              FK2(I,LB)=FK2(I,LB)+FM(I)*FK(I)
755000      190 CONTINUE
756000      C*
757000      200 IF(NPZ.EQ.0) RETURN
758000          IJ=0
759000          DO 210 J=1,N12
760000              DO 210 I=1,NPZ
761000                  IJ=IJ+1
762000                  SINZ(IJ)= SIN(J*PI*Z(I))/(J*PI)
763000      210 CONTINUE
764000      C*
765000          RETURN
766000          END
767000      C*
768000      C*****
769000      C*****
770000      C*

```

```

771000 SUBROUTINE GNNEQ(NFR,NPT,NPRT,NP,IBC,NEQ)
772000 C*
773000 DIMENSION IBC(NPT),NEQ(NPRT)
774000 C*
775000 NELT=NPT-1
776000 NELT2=NELT/2
777000 DO 10 I=1,NPT
778000 NEQ(I)=1
779000 10 CONTINUE
780000 N=2
781000 DO 50 NR=2,NFR
782000 IRT=(NR-1)*NPT+1
783000 IF(NR.EQ.NFR,AND,IBC(1).EQ.0)GO TO 20
784000 NEQ(IRT)=N
785000 NEQ(IRT+NELT)=N
786000 N=N+1
787000 20 DO 40 I=1,NELT2
788000 J=IRT+NELT-I
789000 IF(NR.EQ.NFR,AND,IBC(NPT-I).EQ.0)GO TO 30
790000 NEQ(J)=N
791000 N=N+1
792000 30 IF(J.LE.IRT+I)GO TO 50
793000 IF(NR.EQ.NFR,AND,IBC(I+1).EQ.0)GO TO 40
794000 NEQ(IRT+I)=N
795000 N=N+1
796000 40 CONTINUE
797000 50 CONTINUE
798000 NP=N-1
799000 C*
800000 RETURN
801000 END
802000 C*
803000 C*****
804000 C*****
805000 C*

```

```

806000      SUBROUTINE GTMESH(NFR,NFT,NPZ,NF,NFRT,NELR,NELT,
807000      *R,T,Z,HR,HT,VBC1,VBC2,IBC,NEQ)
808000      C*
809000      DIMENSION R(NFR),T(NFT),Z(NPZ),HR(NELR),HT(NELT),VBC1(NFT),
810000      *VBC2(NFT),IBC(NFT),NEQ(NFRT)
811000      DATA PI/3.1415926535898/
812000      C*
813000      C* OPTION: IOPT=0 NOT UNIFORM MESH, IOPT=1 UNIFORM MESH
814000      C*
815000      WRITE(7,1000)
816000      READ(5,/) IOPTR,IOPTT,IOPTZ
817000      IF(IOPTR.EQ.1)GO TO 10
818000      C*
819000      C* R
820000      C*
821000      WRITE(7,1100)
822000      READ(5,/)(R(I),I=1,NFR)
823000      GO TO 30
824000      10 WRITE(7,1200)
825000      READ(5,/) RMAX
826000      R(1)=0.
827000      DO 20 I=2,NFR
828000          AI=I
829000          R(I)=((AI-1)/NELR)*RMAX
830000      20 CONTINUE
831000      30 DO 40 I=1,NELR
832000          HR(I)=R(I+1)-R(I)
833000      40 CONTINUE
834000      C*
835000      C* T
836000      C*
837000      IF(IOPTT.EQ.0) GO TO 60
838000      T(1)=0.
839000      DT=2.*PI/NELT
840000      DO 50 I=2,NFT
841000          T(I)=(I-1)*DT
842000      50 CONTINUE
843000      GO TO 70
844000      60 READ(5,/)(T(I),I=1,NFT)
845000      70 DO 80 I=1,NELT

```

```

846000      HT(I)=T(I+1)-T(I)
847000      80 CONTINUE
848000      C*
849000      C*  Z
850000      C*
851000      IF(NPZ.EQ.0)GO TO 110
852000      IF(IOPTZ.EQ.0) GO TO 100
853000      DZ=1./(NPZ+1)
854000      DO 90 I=1,NPZ
855000      90  Z(I)=DZ*I
856000      GO TO 110
857000      100 READ(5,/) (Z(I),I=1,NPZ)
858000      C*
859000      C*  NEQ & BC
860000      C*
861000      110 READ(5,/)IBC
862000      READ(5,/)VBC1
863000      IF(NAQ.EQ.2)READ(5,/)VBC2
864000      CALL GNNEQ(NPR,NPT,NPRT,NP,IBC,NEQ)
865000      1000 FORMAT(" OPTION PLS")
866000      1100 FORMAT(" MESH POINTS PLS")
867000      1200 FORMAT(" RMAX PLS")
868000      C*
869000
870000
871000      RETURN
872000      END
873000      C*
874000      C*****
875000      C*****
876000      C*

```

```

877000      SUBROUTINE INITIA(NAQ,NFR,NPT,NPZ,NW,N1,N2,NP,NPRT,NELR,NELT,LB,
878000      *N12,THETA,FMU,TM,DT,IMPT,GNO,R,T,Z,HR,HT,UVC1,UVC2,IBC,NEQ,S1,
879000      *S2,FM,T1,T2,FLAM,FK,BD,FK1,FK2,CBC1,CBC2,SINZ,IQ,Q1,Q2,AN,BN,TP,BP
880000      *,VT)
881000      C*
882000      DIMENSION R(NPR),T(NPT),Z(1),HR(NELR),HT(NELT),UVC1(NPT),UVC2(NPT)
883000      *,IBC(NPT),NEQ(NPRT),S1(NPRT),S2(NPRT),FM(NPRT),T1(NPRT),T2(NPRT),
884000      *FLAM(NPRT),FK(NPRT),BD(1),FK1(NP,LB),FK2(NP,LB),CBC1(1),CBC2(1),
885000      *SINZ(1),IQ(NW),Q1(NW),Q2(NW),AN(N1),BN(N2),TP(NPRT),BP(NPRT),VT(1)
886000      C*
887000      CALL GTMESH(NPR,NPT,NPZ,NP,NPRT,NELR,NELT,R,T,Z,HR,HT,UVC1,UVC2,
888000      *IBC,NEQ)
889000      CALL DATA(NAQ,NFR,NPT,NW,N1,N2,NP,NPRT,THETA,FMU,TM,DT,IMPT,R,T
890000      *,NEQ,S1,S2,FM,T1,T2,BD,IQ,Q1,Q2,TP,BP,IBC,UVC1,UVC2,VT)
891000      CALL GNMAT(NAQ,NFR,NPT,NPZ,NP,NPRT,NELR,NELT,LB,N12,R,T,Z,HR,HT,
892000      *UVC1,UVC2,IBC,NEQ,FM,T1,T2,FLAM,FK,BD,FK1,FK2,CBC1,CBC2,SINZ,TP,BP
893000      *)
894000      IAB=IQ2+NW
895000      CALL GNAN(N1,AN)
896000      GNO=CALGNO(N1)
897000      CALL GNBW(N2,BN)
898000      C*
899000      RETURN
900000      END
901000      C*
902000      C*****
903000      C*****
904000      C*

```

```

905000      SUBROUTINE MUL(A,X,NF,LB,XM)
906000      C*
907000      DIMENSION A(NF,LB), X(NF),XM(NF)
908000      C*
909000      DO 10 I=1,NF
910000      10 XM(I)=0.
911000      C*
912000      DO 30 I=1,NF
913000      JI=1
914000      IF(I.LT.LB)JI=JI+LB-I
915000      DO 20 J=JI,LB
916000      JJ=J+I-LB
917000      XM(I)=XM(I)+A(I,J)*X(JJ)
918000      IF(JJ.EQ.I)GO TO 20
919000      XM(JJ)=XM(JJ)+A(I,J)*X(I)
920000      20 CONTINUE
921000      30 CONTINUE
922000      C*
923000      RETURN
924000      END
925000      C*
926000      C*****
927000      C*****
928000      C*

```

```

929000      SUBROUTINE PRINT (NAQ,NPR,NPT,NPZ,NPRT,NELR,NELT,DT,IBC,R,T,Z,NEQ,
930000      *BP,BD,P1,P2,P3,NITER,TT2,T3,A,FLAG)
931000      C*
932000      DIMENSION IBC(NPT),R(NPR),T(NPT),Z(1),NEQ(NPRT),BP(NPRT),BD(1),
933000      *P1(1),P2(1),P3(1),A(1)
934000      DATA PI/3.1415926535898/
935000      C*
936000      WRITE(6,900)NITER,T3
937000      WRITE(7,900)NITER,T3
938000      WRITE(6,1000) TT2,DT,NITER
939000      WRITE(7,1000) TT2,DT,NITER
940000      IF(NAQ.EQ.2) WRITE(6,1100)
941000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(6,1200)
942000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(7,1200)
943000      C*
944000      DM=0.
945000      RMAX=R(NPR)
946000      N=0
947000      DM=P1(1)
948000      NP=1
949000      DO 20 I=1,NPR
950000      DO 20 J=1,NPT
951000      N=N+1
952000      RR=R(I)*BD(J)/RMAX
953000      JJ=NEQ(N)
954000      IF(JJ.EQ.0)GO TO 20
955000      IF(I.NE.NPR.OR.IBC(J).NE.0)GO TO 5
956000      C*      P1(JJ)=VBC1(J)
957000      C*      IF(NAQ.EQ.2)P2(JJ)=VBC2(J)
958000      5 IF(ABS(P1(JJ)).LE.1E-11) GO TO 20
959000      IF(J.EQ.NPT) GO TO 20
960000      IF(JJ.GT.1)NP=NP+1
961000      TG=(180./PI)*T(J)
962000      IF(JJ.GT.1)DM=DM+P1(JJ)
963000      IF(NAQ.EQ.2) WRITE(6,3000)N,RR,TG,P1(JJ),P2(JJ)
964000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(6,3300)N,RR,TG,P1(JJ)
965000      IF(NAQ.EQ.2) WRITE(7,3000)N,RR,TG,P1(JJ),P2(JJ)
966000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(7,3300)N,RR,TG,P1(JJ)
967000      IF(NPZ.EQ.0 .OR. I .EQ. NPR)GO TO 20
968000      DO 10 K=1,NPZ

```

```

969000      KK=(JJ-1)*NPZ+K
970000      ZZ=Z(K)*BF(JJ)
971000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(6,3600) ZZ,P3(KK)
972000      IF(NAQ.EQ.1) WRITE(7,3600) ZZ,P3(KK)
973000      10 IF(NAQ.EQ.2) WRITE(6,3500) ZZ,P3(KK)
974000      20 CONTINUE
975000      DM=DM/NP
976000      IF(FLAG.EQ.0.) A(NITER)=DM
977000      FACTOR=DM/A(NITER)
978000      WRITE(6,3700) DM,FACTOR
979000      WRITE(7,3700) DM,FACTOR
980000      900 FORMAT("1TOTAL TIME UP TO TIME STEP",I3," = ",
981000      *F6.3," SEGS.","/)
982000      1000 FORMAT(" TIME=",F10.6,3X," DT =",F10.6,3X," STEP NO.",
983000      *I5, /1X,50(1H-),//)
984000      1100 FORMAT(9X,"R",9X,"T",9X,"AQUIFER 1",6X,"AQUIFER 2",11X,"Z",10X,
985000      *"AQUITARD",/)
986000      1200 FORMAT(9X,"R",9X,"T",9X,"AQUIFER 1",11X,"Z",10X,"AQUITARD",/)
987000      3000 FORMAT(1X,I3,1X,F6.2,F10.4,3X,2E15.8)
988000      3300 FORMAT(1X,I3,1X,F6.2,F10.4,3X,E15.8)
989000      3500 FORMAT(55X,F10.4,3X,E15.8)
990000      3600 FORMAT(39X,F10.4,3X,E15.8)
991000      3700 FORMAT(/,10X,"DRAWDOWN AVERAGE = ",E15.8,6X,"FACTOR= ",F7.4,/)
992000      C*
993000      RETURN
994000      END
995000      C*
996000      C*****
997000      C*****
998000      C*

```

```

999000      SUBROUTINE SOLVE(NAQ,NPR,NPT,NPZ,NW,N1,N2,NF,NPRT,NELR,NELT,LB,N12
1000000      *,THETA,FMU,TH,DT,IMPT,GNO,R,T,Z,HR,HT,IBC,BV,NEQ,S1,S2,FM,
1001000      *FLAM,FK,TP,BF,BD,FK1,FK2,CBC1,CBC2,SINZ,IQ,Q1,Q2,AN,BN,A1,A2,C1,C2
1002000      *,P1,P2,P3,D1,D2,G1,G2,EXP1,VT,A,LVT,FLAG)
1003000      DIMENSION R(NPR),Y(NPT),Z(1),HR(NELR),HT(NELT),IBC(NPT),BV(NPT),NE
1004000      *Q(NPRT),S1(NPRT),S2(NPRT),FM(NPRT),FLAM(NPRT),FK
1005000      *(NPRT),TP(NPRT),BF(NPRT),BD(1),FK1(NP,LB),FK2(NP,LB),CBC1(1),CBC2(
1006000      *1),SINZ(1),IQ(NW),Q1(NW),Q2(NW),AN(N1),BN(N2),A1(NP,LB),A2(NP,LB),
1007000      *C1(NP),C2(NP),P1(NP),P2(NP),P3(1),D1(N12,NP),D2(N12,NP),
1008000      *G1(NP),G2(NP),EXP1(NP,N12),VT(1),A(1)
1009000      C*
1010000      C* A1 = INVERSION MATRIX EQUATION 1
1011000      C* A2 = INVERSION MATRIX EQUATION 2
1012000      C* C1 = WELL 1
1013000      C* C2 = WELL 2
1014000      C* P1 = SOLUTION AQUIFER 1
1015000      C* P2 = SOLUTION AQUIFER 2
1016000      C* P3 = SOLUTION AQUITARD
1017000      C* D1 = APPROXIMATION INTEGRAL FOR S1
1018000      C* D2 = APPROXIMATION INTEGRAL FOR S2
1019000      C* G1 = P1(T+DT)-P1(T)
1020000      C* G2 = P2(T+DT)-P2(T)
1021000      IX=1
1022000      IY=IX+NP
1023000      TT1=TIME(2)
1024000      DATA PI/3.1415926535898/
1025000      10 CALL FMMAT(NAQ,ITER,NPR,NPT,NF,NPRT,NELT,LB,N1,N12,NW,THETA,FMU,DT
1026000      *,GNO,S1,S2,NEQ,FM,FLAM,FK,FK1,FK2,CBC1,CBC2,IQ,Q1,Q2,AN,A1,
1027000      *A2,C1,C2,P1,P2,VT,EXP1)
1028000      C*
1029000      C*****AQUIFER1
1030000      C*
1031000      20 CALL MUL(FK1,P1,NP,LB,VT(IX))
1032000      DO 50 I=1,NP
1033000      X=0.
1034000      IF(NAQ,EO,1) GO TO 35
1035000      X=P2(I)
1036000      DO 30 J=1,N2
1037000      FNUJI=(J*PI)**2*FLAM(I)
1038000      EJI=(1,-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)

```

```

1039000      X=X+EJI*D2(J,I)*BN(J)
1040000      30 CONTINUE
1041000      35 DO 40 J=1,N1
1042000          FNUJI=(J*PI)**2*FLAN(I)
1043000          EJI=(1,-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)
1044000          X=X-EJI*D1(J,I)*AN(J)
1045000      40 CONTINUE
1046000          VT(IY+I-1)=X*FK(I)*FM(I)
1047000      50 CONTINUE
1048000          DO 60 I=1,NP
1049000              II=IX+I-1
1050000              JJ=IY+I-1
1051000              VT(II)=(-VT(II)+VT(JJ))*DT+C1(I)
1052000      60 CONTINUE
1053000          CALL CHOBNS(NP,LB,A1,G1,VT(IX))
1054000          IF(NAQ,EQ,1) GO TO 105
1055000      C*
1056000      C*****AQUIFER2
1057000      C*
1058000          CALL MUL(FK2,F2,NP,LB,VT(IX))
1059000          DO 90 I=1,NP
1060000              X=F1(I)
1061000              DO 70 J=1,N2
1062000                  FNUJI=(J*PI)**2*FLAN(I)
1063000                  EJI=(1,-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)
1064000                  X=X+EJI*D1(J,I)*BN(J)
1065000      70 CONTINUE
1066000              DO 80 J=1,N1
1067000                  FNUJI=(J*PI)**2*FLAN(I)
1068000                  EJI=(1,-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)
1069000                  X=X-EJI*D2(J,I)*AN(J)
1070000      80 CONTINUE
1071000              VT(IY+I-1)=X*FM(I)*FK(I)
1072000      90 CONTINUE
1073000              DO 100 I=1,NP
1074000                  II=IX+I-1
1075000                  JJ=IY+I-1
1076000                  VT(II)=(-VT(II)+VT(JJ))*DT+C2(I)
1077000      100 CONTINUE
1078000          CALL CHOBNS(NP,LB,A2,G2,VT(IX))

```

```

1079000 C*
1080000 105 DO 120 I=1,NP
1081000     F1(I)=F1(I)+G1(I)
1082000     IF(NAQ,EQ,2) F2(I)=F2(I)+G2(I)
1083000     DO 110 J=1,N12
1084000         X=EXP1(I,J)
1085000         FNUJI=(J*PI)**2*FLAM(I)
1086000         IF(FMU,EQ,0.)GO TO 106
1087000         FJI=FMU/(FNUJI+FMU)*(EXP(DT*FMU)-EXP1(I,J))/
1088000         * (EXP(DT*FMU)-1.)
1089000         GO TO 108
1090000 106 IF(THETA,EQ,1.)GO TO 107
1091000     FJI=(1,-EXP1(I,J))/(DT*FNUJI)
1092000     GO TO 108
1093000 107 FJI=FNUJI/(FNUJI+FMU)*EXP1(I,J)
1094000 108 D1(J,I)=X*D1(J,I)+G1(I)*FJI
1095000     IF(NAQ,EQ,1) GO TO 110
1096000     D2(J,I)=X*D2(J,I)+G2(I)*FJI
1097000 110 CONTINUE
1098000     IF(NPZ,EQ,0) GO TO 120
1099000     DO 114 K=1,NPZ
1100000         KK= NPZ*(I-1)+K
1101000         P3C = F1(I)*(1.-Z(K))+P2(I)*Z(K)*(NAQ-1)
1102000         J1=1
1103000         DO 112 L=1,N12
1104000             J1=-J1
1105000             LL= NPZ*(L-1)+K
1106000             P3C=P3C+SINZ(LL)*(J1*D2(L,I)*(NAQ-1)-D1(L,I))*2.
1107000 112 CONTINUE
1108000 114 P3(KK) = P3C
1109000 120 CONTINUE
1110000     TT2=TT2+DT
1111000     ITER=ITER+1
1112000     T3=(TIME(2)-TT1)/60.
1113000     NITER=NITER+1
1114000     IF(NOO(ITER,IMPT),EQ,0) CALL PRINT(NAQ,NFR,NPT,NPZ,NPRT,NELR,NELT,
1115000     *DT,IBC,R,T,Z,NEQ,BP,BD,P1,P2,P3,NITER,TT2,T3,A,FLAG)
1116000     IF(TT2,GE,TH) RETURN
1117000     GO TO 20
1118000     END

```

1119000 C*
1120000 C*****
1121000 C* FIN DEL PROGRAMA
1122000 C*****
1123000 C*
#ET=29:06,7 PT=6.3 IO=2.0

REFERENCIAS

- 1.1 _____ Integrodifferential Equations for Systems of Leaky aquifers and Applications.
1. The Nature of Approximate Theories.
Ismael Herrera & Leopoldo Rudarte
Water Resources Research
Vol. 9, No. 4, August, 1973.
- 1.2 _____ Steady three-dimensional flow to a well in a two-layered aquifer.
Hantush & Jacob
Trans. Am. Geophys. Union
36, 386-292, 1955a.
- 1.3 _____ Theory of Flow in a Confined Two Aquifer System.
S.P. Neuman & P. A. Witherspoon
Water Resources Research
Vol. 5, No. 4, August, 1969
- 1.4 _____ A family of approximate numerical procedures for leaky aquifer systems.
1. Herrera, R. Yates, C. Pérez
Proc. 11 International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems.
Margherita Ligure
Italia i (1976), 355-364.
- 1.5 _____ Integrodifferential Equations for Systems of Leaky Aquifers and Applications.
3. A Numerical Method of Unlimited Applicability.

I. Herrera & R. Yates
Water Resources Research,
Vol. 13, No. 4, August 1977

- 1.6 _____ A finite element in time and space model for quasi-three dimensional multiaquifer simulation.
J.P. Hennart, R. Yates, I. Herrera
Comunicaciones Técnicas, Serie Naranja, No. 209
IIMAS-UNAM, 1979.
- 2.1 _____ Dynamics of fluids in porous media.
Jacob Bear
American Elsevier Publishing Company, Inc.
1972
- 3.1 _____ Finite element analysis in Fluid Dynamics.
T. J. Chung
Mc Graw Hill Ed., 1978
- 3.2 _____ An analysis of the Finite Element Method
G. Strong & G. Fix
Prentice-Hall, Ed. 1973.
- 3.3 _____ Tesis profesional
Raul Medina Mora
Facultad de Ciencias, UNAM
- 3.4 _____ Métodos para predecir hundimientos de subsuelos similares al de la Ciudad de México.
I. Herrera, R. Yates
Instituto de Ingeniería, UNAM, Julio, 1977.

3.5 _____ The Finite Element Method.

O.C. Zienkiwicz

Mc Graw Hill Ed., 3th. Edition. 1972.

4.1 _____ Multiple colocation finite elements in time for
parabolic evolution problems.

The Mathematics of Finite Elements and Applications III,
MAFELAP 1978.

J.R. Whiteman, Ed., p. 271-278

Academic Press, London, 1979.