UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTENSIONES CONTINUAS SOBRE ESPACIOS DE ISBELL-MRÓWKA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

MARIO ÁRCIGA ALEJANDRE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MICHAEL HRUŠÁK

MÉXICO, DF. FEBRERO, 2008

Índice general

Introducción

La meta para esta tesis es responder 4 preguntas planteadas en los artículos [15] y [17], las cuales tienen que ver con con la extensión de funciones continuas entre espacios de Isbell-Mrówka.

En el primer capítulo hablamos de las familias casi ajenas y de sus propiedades elementales. En el segundo capítulo introducimos los espacios de Isbell-Mrówka, resumiendo algunas de sus propiedades topológicas. En el tercer capítulo presentamos los resultados obtenidos dando respuesta a las 4 preguntas mencionadas. Finalmente, en el cuarto capítulo hablamos sobre el problema de Moore: La normalidad de los espacios de Isbell-Mrówka, este problema está relacionado con un caso especial de extensiones de funciones en tales espacios.

𝔐 Mario Arciga Alejandre
07-11-2007

Capítulo 1

Familias Casi Ajenas

Necesitaremos de las familias casi ajenas, veremos un poco de la notación, algunos resultados elementales y al final un par de ejemplos clásicos donde se utilizan familias casi ajenas maximales. Prácticamente todos los resultados y/o demostraciones que aparecen en esta tesis hablan sobre alguna familia casi ajena. Este será nuestro concepto fundamental y los resultados inmediatos que de éste deriven.

1.1. Preliminares

Notación 1.1 *Sea X un conjunto y κ un número cardinal, denotaremos por $[X]^\kappa$ y $[X]^{<\kappa}$ a los conjuntos de todos los subconjuntos de X con cardinal igual y menor que κ respectivamente, esto es,*

$$[X]^\kappa := \{Z \subseteq X : |Z| = \kappa\}, \ \ [X]^{<\kappa} := \{Z \subseteq X : |Z| < \kappa\}.$$

Notación 1.2 *Sean A, B conjuntos, decimos que A **está casi contenido en** B si $|A - B| < \omega$, en este caso escribimos $A \subseteq^* B$, $A =^* B$ denota el hecho de que $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.*

Definición 1.3 *Decimos que una familia infinita $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es una **familia AD** (**familia casi ajena**) si para cada par de elementos X, Y distintos de $\mathcal{A}$ se tiene que $|X \cap Y| < \omega$. Además, decimos que $\mathcal{A}$ es una **familia MAD** (**familia casi ajena maximal**) si no existe $\mathcal{A}'$, familia AD, con $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}'$.*

Una forma sencilla de construir una familia casi ajena es como sigue (para una función $f : A \to B$ y un $X \subseteq A$ denotamos por $f[X]$ al conjunto imagen de X, esto es, $f[X] = \{b \in B : \exists x \in X, \ f(x) = b\}$):

Ejemplo 1.4 *Sea $f : \mathbb{Q} \to \omega$ cualquier biyección. La familia*

$$\mathcal{A} = \{f[\mathbb{Q} \cap [n, n+1)] : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq [\omega]^\omega$$

es una familia casi ajena, de hecho, la intersección de cada par distinto de elementos de $\mathcal{A}$ es vacía.

La siguiente es notación estándar de conjuntos asociados a una familia casi ajena.

Notación 1.5 *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD y sea $X \in [\omega]^\omega$ definamos los siguientes conjuntos ($\mathcal{P}(X)$ denota al conjunto potencia de X).*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \upharpoonright X &= \{A \cap X : A \in \mathcal{A} \wedge |A \cap X| = \omega\}. \\
\mathcal{I}(\mathcal{A}) &= \{Y \in \mathcal{P}(\omega) : \exists\, \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega},\ Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}\}. \\
\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) &= \mathcal{P}(\omega) - \mathcal{I}(\mathcal{A}). \\
\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) &= \{Y : |\mathcal{A} \upharpoonright Y| \geq \omega\}. \\
\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) &= \{Y : \omega - Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})\}.
\end{aligned}$$

Sea $f : A \to B$ una función y $X \subseteq A$. Definimos la función $f \upharpoonright X : X \to B$ como $(f \upharpoonright X)(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. Ésta es la función f restringida al conjunto X.

Observación 1.6 *Si $\mathcal{A}$ una familia AD, entonces*

(1) $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal de ω, en particular $[\omega]^{<\omega} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})$.

(2) $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es un filtro de ω, en particular cada cofinito de ω está en $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$.

(3) $\bigcap \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \emptyset$, en particular un ultrafiltro que extiende a $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es libre.

(4) $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

(5) $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

Demostración. (5) Sea $Y \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ y supongamos que $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ finito que casi cubre a Y, además podemos suponer que $|A \cap Y| = \omega$ para cada $A \in \mathcal{B}$. Ahora, como $\mathcal{A}$ es familia AD $|A \cap Y| \leq |A \cap \bigcup \mathcal{B}| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Esto implica que $|\mathcal{A} \upharpoonright Y| < \omega$, es decir, $Y \notin \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, contradicción.

1.2. Propiedades elementales acerca de las familias AD

Proposición 1.7 *Existe una familia AD con cardinalidad* 2^ω.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{q_n^r : n \in \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente de números racionales que converge a r, sea $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$ una biyección, entonces $\mathcal{A} = \{g[A_r] : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia AD pues $\mathbb{R}$ es T_2. ☑

Proposición 1.8 *Sea* κ *cualquier cardinal. Si* $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ *es una colección de familias AD anidadas, esto es,* $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+1}$ *para cada* $\alpha \in \kappa$*, entonces* $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{F}$ *es también una familia AD.*

Demostración. Para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$, existen $\alpha_0, \alpha_1 \in \kappa$ con $A \in \mathcal{A}_{\alpha_0},\ B \in \mathcal{A}_{\alpha_1}$. Sea $\alpha = \max\{\alpha_0,\ \alpha_1\}$, puesto que las familia de $\mathcal{F}$ son anidadas, $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$, entonces $|A \cap B| < \omega$ por ser $\mathcal{A}_\alpha$ familia AD. ☑

Proposición 1.9 *Cada familia AD se puede extender a una familia MAD.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia AD y sea

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{B} \subseteq [\omega]^\omega : \mathcal{B} \text{ es familia AD y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Es claro que $(\mathcal{M}, \subseteq)$ es orden parcial, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$. Además, toda cadena $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{M}, \subseteq)$, por la proposición anterior, tiene como cota superior a $\bigcup \mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{M}$ tiene un elemento maximal. ☑

Proposición 1.10 $\mathcal{A}$ *es familia MAD si y sólo si para todo* $Y \in [\omega]^\omega$ *existe* $A \in \mathcal{A}$ *con* $|A \cap Y| = \omega$.

Demostración. [$\rightarrow$]Sea $Y \in [\omega]^\omega$, si $|Y \cap A| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A}$ (en particular $Y \notin \mathcal{A}$), entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{Y\}$ es familia AD con $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}'$, contradicción.
[$\leftarrow$] Supongamos que $\mathcal{A}'$ es familia AD con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, sea $A' \in \mathcal{A}'$, entonces (hipótesis) existe $A \in \mathcal{A}$ con $|A \cap A'| = \omega$. Entonces $A = A'$ pues $\mathcal{A}'$ es casi ajena. Así, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ y, por lo tanto, $\mathcal{A}$ es familia MAD. ☑

Proposición 1.11 *Si $\mathcal{A}$ es familia MAD, entonces $\bigcup\mathcal{A} =^* \omega$.*

Demostración. Si $A := \omega - \bigcup\mathcal{A}$ es infinito, entonces (prop. anterior) $A \cap A'$ es infinito para algún $A' \in \mathcal{A}$, contradicción. ☑

Proposición 1.12 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD entonces $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD, sabemos (Obs. 1.6) que $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. Sea $Y \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$, entonces ninguna subfamilia finita de $\mathcal{A}$ casi cubre a Y. Supongamos que $Y \notin \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ finito con $|Y \cap B| = \omega$ para cada $B \in \mathcal{B}$ y $|Y \cap A| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A} - \mathcal{B}$. Si $Y' = Y - \bigcup\mathcal{B}$ es infinito, entonces ($\mathcal{A}$ es maximal) existe $A \in \mathcal{A}$ con $|Y' \cap A| = \omega$ lo cual no puede ser, entonces $Y - \bigcup\mathcal{B}$ es finito, esto es, $\mathcal{B}$ casi cubre a Y, contradicción. ☑

Proposición 1.13 *Cada familia MAD es no numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_k : k \in \omega\}$ es una familia MAD. Para cada $n > 0$ tenemos $|A_n \cap \bigcup_{k<n} A_k| = |\bigcup_{k<n}(A_n \cap A_k)| < \omega$. Entonces tomamos $x_0 \in A_0$ y para $n > 0$ tomamos $x_n \in A_n - \bigcup_{k<n} A_k$, sea $A = \{x_n : n \in \omega\}$. Puesto que $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in \omega$, entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A\}$ es una familia AD con $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{A}$ es maximal. ☑

1.3. Familias AD restringidas

Sea $\mathcal{A}$ una familia AD y sea $T \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, entonces es claro que $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es una familia AD, en este caso decimos que $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es una **familia AD restringida a** T. Pensamos que $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es maximal en el siguiente sentido.

Definición 1.14 *Sea $\mathcal{A}$ familia AD y sea $T \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$. Decimos que la familia AD $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es una **familia MAD restringida a** T si no existe $\mathcal{A}' \subseteq [T]^\omega$ familia AD con $\mathcal{A} \upharpoonright T \subsetneq \mathcal{A}'$.*

Cuando tratamos con familias AD restringidas hay que tener presente que ahora nuestro “conjunto base”es el conjunto que da la restricción. Omitiremos la frase “restringida a”esperando que esto no se preste a confusiones.

Tenemos los siguientes resultados, similares a los obtenidos para las familias AD.

Proposición 1.15 *Sea $\mathcal{A}$ familia AD y sea $T \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$. La familia AD $\mathcal{A} \upharpoonright T$ se puede extender a una familia MAD.*

Demostración. Misma demostración que en prop. (1.9), sólo que ahora el conjunto al que hay que aplicar lema de Zorn es

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{B} \subseteq [T]^\omega : \mathcal{B} \text{ es familia AD y } \mathcal{A} \upharpoonright T \subseteq \mathcal{B}\}.$$

☑

Proposición 1.16 *Sea $\mathcal{A}$ familia AD y sea $T \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$. $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es familia MAD si y sólo si para cada $Y \in [T]^\omega$ existe $A \in \mathcal{A} \upharpoonright T$ con $|A \cap Y| = \omega$.*

Demostración. [$\rightarrow$]Sea $Y \in [T]^\omega$, si $|Y \cap A| < \omega$ para cada $A \in \mathcal{A} \upharpoonright T$ (en particular $Y \notin \mathcal{A} \upharpoonright T$), entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \upharpoonright T \cup \{Y\} \subseteq [T]^\omega$ es familia AD con $\mathcal{A} \upharpoonright T \subsetneq \mathcal{A}'$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es maximal.
[$\leftarrow$] Supongamos que $\mathcal{A}' \subseteq [T]^\omega$ es familia AD con $\mathcal{A} \upharpoonright T \subseteq \mathcal{A}'$, sea $A' \in \mathcal{A}'$, entonces (hipótesis) existe $A \in \mathcal{A} \upharpoonright T$ con $|A \cap A'| = \omega$, luego $A = A'$ pues $\mathcal{A}'$ es casi ajena. Entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \upharpoonright T$ y por lo tanto $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es familia MAD. ☑

Proposición 1.17 *Sea $\mathcal{A}$ familia AD y sea $T \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es familia MAD, entonces $\bigcup \mathcal{A} \upharpoonright T =^* T$.*

Demostración. Si $A' = T - \bigcup \mathcal{A} \upharpoonright T$ es infinto, entonces (prop. anterior) existe $A \in \mathcal{A} \upharpoonright T$ con $|A \cap A'| = \omega$, lo cual es una contradicción. ☑

Proposición 1.18 *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD y $T \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es una familia MAD.*

Demostración. Sea $Y \in [T]^\omega$, entonces ($\mathcal{A}$ es maximal) existe $A \in \mathcal{A}$ con $|A \cap Y| = \omega$, entonces $|(A \cap T) \cap Y| = \omega$ (pues $Y \subseteq T$) y $A \cap T \in \mathcal{A} \upharpoonright T$, por lo tanto (prop. 1.16) $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es maximal. ☑

Proposición 1.19 *Si $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es familia MAD, entonces $|\mathcal{A} \upharpoonright T| > \omega$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} \upharpoonright T = \{A_k : k \in \omega\}$ es una familia MAD. Para cada $n > 0$ tenemos $|A_n \cap \bigcup_{k<n} A_k| = |\bigcup_{k<n} (A_n \cap A_k)| < \omega$. Entonces sea $x_0 \in A_0$ y para $n > 0$ sea $x_n \in A_n - \bigcup_{k<n} A_k$. Si $A = \{x_k : k \in \omega\}$, entonces $A \subseteq T$ y $A \cap A_n \subseteq \{x_k : k \leq n\}$, entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \upharpoonright T \cup \{A\}$ es una familia MAD con $\mathcal{A} \upharpoonright T \subsetneq \mathcal{A}'$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{A} \upharpoonright T$ es maximal. ☑

1.4. Ejemplos

Como muestra de las aplicaciones de las familias MAD veremos dos ejemplos clásicos de la combinatoria infinita, ambos son versiones más fuertes de las que comúnmente aparecen en los artículos, el primero de uno de los teoremas de Ramsey, el segundo del teorema de Simon que publicó a principios de los 80's, propio de la teoría de las familias casi ajenas. Usaremos el siguiente lema para ambos resultados.

Lema 1.20 *Para toda $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia MAD y para toda sucesión decreciente $\{X_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $X \setminus x \subseteq X_x$ para toda $x \in X$*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y sea $\{X_i : i \in \omega\}$ sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. Primero, de manera recursiva, construimos sucesiones S_n de puntos distintos de $X_0 = \bigcup_{i\in\omega} X_i$. Hacemos $S_0 = \{x_i^0 : i \in \omega\} \subseteq X_0$ tal que $x_i^0 \in X_i$ para toda $i \in \omega$. Puesto que $\mathcal{A}$ es maximal existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $|A_0 \cap S_0| = \omega$. Ahora, para $k \in \omega$, $|X_0 \setminus \bigcup_{j\leq k} A_j| = \omega$ pues $X_0 \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$, entonces hacemos $S_{k+1} = \{x_i^{k+1} : i \in \omega\} \subseteq X_0 \setminus \bigcup_{j\leq k} A_j$ tal que $x_i^{k+1} \in X_i$ para toda $i \in \omega$. Nuevamente, puesto que $\mathcal{A}$ es maximal, existe $A_{k+1} \in \mathcal{A} \setminus \{A_0, ..., A_k\}$ tal que $|A_{k+1} \cap S_{k+1}| = \omega$.
Recursivamente construyamos la siguiente suceción. Sea $x_0 = \min(A_0 \cap S_0)$, y para $k \in \omega$ sea $x_{k+1} \in A_{F(k+2)} \cap S_{F(k+2)} \cap X_{x_k}$, donde $F : \omega \to \omega$

es[1] $F(n) = n - k_n(k_n+1)/2$, $k_n = \text{máx}\{t \in \omega : t(t+1) \leq 2n\}$. Es claro que $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ pues $|X \cap A_k| = \omega$ para toda $k \in \omega$, además si $x_m \in X \setminus x_r$ entonces $x_m \in X$, $x_m \geq x_r$ y $x_m \in A_{F(m+1)} \cap S_{F(m+1)} \cap X_{x_{m-1}}$ pero $X_{x_{m-1}} \subseteq X_{x_m} \subseteq X_{x_r}$ pues la suceción X_n es decreciente. Por lo que $x_m \in X_{x_r}$, esto es, $X \setminus x \subseteq X_x$ para cada $x \in X$. ☑

Definición 1.21 *Sea $f : [\kappa]^\mu \to \rho$ una función donde κ, μ, ρ son números cardinales mayores que cero, decimos que $A \subseteq \kappa$ es **f-homogéneo** si $|f[[A]^\mu]| = 1$. De manera equivalente, si existe $\theta \in \rho$ tal que $f^{-1}(\theta) = [A]^\mu$.*

Podemos pensar a f, de la definición anterior, como la asignación de alguno de los ρ colores a subconjuntos de κ, de tamaño μ. Si por ejemplo, $\mu = 2$ y pensamos a κ como los vértices de un grafo completo, entonces f asigna colores a cada arista de este grafo. El caso general, se están coloreando subgráficas μ-completas de la gráfica κ-completa.

El siguiente teorema fue probado por A. Mathias en su articulo [1] y es un fortalecimiento del famoso teorema de Ramsey.

Teorema 1.22 *Para cualquier familia MAD $\mathcal{A}$ y una función $f : [\omega]^2 \to 2$, existe $B \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ que es f-homogéneo.*

Demostración. Sean $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia MAD y $f : [\omega]^2 \to 2$ una función. Extendamos el filtro $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \{X \in [\omega]^\omega : \omega \setminus X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})\}$ a un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Sean $X_n^0 = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m,n\}) = 0\}$, $X_n^1 = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m,n\}) = 1\}$. Puesto que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre (Observación 1.6) y $X_n^0 \cup X_n^1 = \omega \setminus \{n\} \in \mathcal{U}$ [2] para cada $n \in \omega$ existe $i \in 2$ tal que $X_n^i = \{m \in \omega \setminus \{n\} : f(\{m,n\}) = i\} \in \mathcal{U}$.
Sea $g : \omega \to 2$ tal que $X_n^{g(n)} \in \mathcal{U}$, notemos[3] que además $X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.
Puesto que $\{n \in \omega : g(n) = 0\} \cup \{n \in \omega : g(n) = 1\} = \omega$ entonces existe $\varepsilon \in 2$ tal que $Y := \{n \in \omega : g(n) = \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, note que Y tiene que ser infinito pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre (obs. A.10).

[1] Note que ésta función lo que hace es "visitar" a cada A_k una infinidad de veces, F toma los valores: 0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,...

[2] Véase observación A.10 y proposición A.14

[3] Si $X_n^{g(n)} \notin \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ entonces $X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, por lo que $\omega \setminus X_n^{g(n)} \in \mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{U}$ y así $\emptyset = \omega \setminus X_n^{g(n)} \cap X_n^{g(n)} \in \mathcal{U}$, contradicción. Así pues $A \in \mathcal{U} \to A \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

Enumeremos los elementos de Y como $\{y_n : n \in \omega\}$ de tal forma que $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Sea

$$Z_0 = Y, \text{ y para cada } k \geq 1 \; Z_k = Y \cap \bigcap_{i<k} X^{\epsilon}_{y_i}$$

es una sucesión decreciente y además $Z_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \omega$, entonces $Z_n \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ para todo $n \in \omega$.
Por lema anterior existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $X \setminus x \subseteq Z_x$ para todo $x \in X$. Veamos que X es f-homogéneo. Sean x, y dos elementos distintos de X, sin perdida de generalidad $x < y$. Demostremos que $f(\{x, y\}) = \varepsilon$. Para esto basta demostrar que $y \in X^{\varepsilon}_x$. Pero

$$y \in X \setminus x + 1 \subseteq Z_{x+1} = Y \cap \bigcap_{i \leq x} X^{\varepsilon}_{y_i}.$$

Como $x \in X \setminus x \subseteq Z_x \subseteq Y$ entonces existe un $k \in \omega$ tal que $x = y_k$, además $k \leq x$. Entonces $\bigcap_{i \leq x} X^{\varepsilon}_{y_i} \cap Y \subseteq X^{\varepsilon}_{y_k} = X^{\varepsilon}_x$, por lo tanto, $y \in X^{\varepsilon}_x$ y así $f(\{x, y\}) = \varepsilon$.
Es pues $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ el conjunto f-homogéneo que buscamos. ☑

Corolario 1.23 *Para cada $\mathcal{A}$ familia MAD y toda función $f : \omega \to \omega$ existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $f \restriction X$ es constante o $f \restriction X$ es estrictamente creciente.*

Demostración. Sea $f : \omega \to \omega$ cualquier función y sea $\psi : [\omega]^2 \to 2$ función definida como sigue

$$\psi(\{x, y\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y \wedge f(x) < f(y) \\ 1 & \text{si } x < y \wedge f(x) \geq f(y). \end{cases}$$

Por teorema anterior, existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ que es ψ-homogéneo. Es decir $f \restriction X$ es estrictamente creciente o se cumple que para cada par $\{x, y\} \in [X]^2$, $f(x) \geq f(y)$. Bajo estas condiciones existe $N \in X$ tal que $f \restriction Y$ es constante donde $Y = \{x \in X : x \geq N\} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ pues no existen suce-siónes estríctamente decrecientes de números naturales. ☑

Ocupamos la siguiente definición para enunciar el teorema de Simon.

Definición 1.24 *Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ AD es **maximal en ningún lado** si $\mathcal{A} \restriction X$ no es maximal para cada $X \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.*

El siguiente teorema es una versión un poco más general del teorema de Simon presentado en el artículo [14] en el año 1980. En particular, éste teorema sirve para construir dos espacios compactos, Hausdorff y Fréchet cuyo producto no es Fréchet, teorema clásico de la topología de conjuntos.

Teorema 1.25 Teorema de Simon
Para toda $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia MAD existen $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction X$ tal que $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ son maximales en ningún lado.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia MAD.
Procedemos por contradicción i.e. suponemos para todo $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$ y para toda partición $\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1\}$ de $\mathcal{A} \restriction X$ existen $i \in 2$ y $Y \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}_i)$, tal que $\mathcal{A}_i \restriction Y$ es familia MAD, además $Y \subseteq X$ pues $\mathcal{A}_i$ es una familia AD basada en X.
Procederemos de forma recursiva usando la suposición anterior. Etiquetemos los elementos de $\mathcal{A}$ usando funciones de 2^ω. Esto es, existe $Z \subseteq 2^\omega$ tal que

$$\mathcal{A} = \{A_f : f \in Z\}.$$

Sean $\mathcal{A}_0^0 = \{A_f \in \mathcal{A} : f(0) = 0\}$ y $\mathcal{A}_1^0 = \{A_f \in \mathcal{A} : f(0) = 1\}$

Usando nuestra suposición inicial (paso 0):
Para $\omega \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^0, \mathcal{A}_1^0\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction \omega = \mathcal{A}$ existen $i_0 \in 2$ y $Y_0 \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}_{i_0}^0) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A}),\ Y_0 \subseteq \omega$ tal que $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$ es familia MAD basada en Y_0.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0 \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_0$ y $\mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_0 = \mathcal{A}_{i_0}^0 \restriction Y_0$. En particular esto implica que $|A \cap Y_0| < \omega$ para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_0}^0$.
Sean ahora,

$$\mathcal{A}_0^1 = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_0}^0 : f(1) = 0\},\ \ \mathcal{A}_1^1 = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_0}^0 : f(1) = 1\}.$$

Nuevamente usamos nuestra suposición inicial (paso 1):
Para $Y_0 \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^1 \restriction Y_0, \mathcal{A}_1^1 \restriction Y_0\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction Y_0$ existen $i_1 \in 2$ y $Y_1 \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_0) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A}),\ Y_1 \subseteq Y_0$ tal que

$$(\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_0) \restriction Y_1 = \mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction (Y_0 \cap Y_1) = \mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$$

es familia MAD basada en Y_1.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1 \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_1$ y $\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_1 =$

$\mathcal{A}_{i_1}^1 \restriction Y_1$. En particular esto implica que $|A \cap Y_1| < \omega$ para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_1}^1$.

En el paso $k+1$:
Sean

$$\mathcal{A}_0^{k+1} = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_k}^k : f(k+1) = 0\}, \;\; \mathcal{A}_1^{k+1} = \{A_f \in \mathcal{A}_{i_k}^k : f(k+1) = 1\}.$$

Usamos nuestra suposición inicial:
Para $Y_k \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y para $\{\mathcal{A}_0^{k+1} \restriction Y_k, \mathcal{A}_1^{k+1} \restriction Y_k\}$ partición de $\mathcal{A} \restriction Y_k$. existen $i_{k+1} \in 2$ y $Y_{k+1} \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_k) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A}), \; Y_{k+1} \subseteq Y_k$ tal que

$$(\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_k) \restriction Y_{k+1} = \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$$

es familia MAD basada en Y_{k+1}.
Puesto que $\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1} \subseteq \mathcal{A} \restriction Y_{k+1}$ y $\mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$ es maximal entonces $\mathcal{A} \restriction Y_{k+1} = \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1} \restriction Y_{k+1}$. En particular esto implica que

$$|A \cap Y_{k+1}| < \omega \text{ para todo } A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{i_{k+1}}^{k+1}. \tag{1.1}$$

De ésta forma hemos conseguido una sucesión decreciente $\{Y_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. Así, por el lema 1.20, existe $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tal que $X \subseteq^* Y_k$, para todo $k \in \omega$.

Sea $g \in 2^\omega$ definida por $g(n) = i_n$ para todo $n \in \omega$. Puesto que $X \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ tenemos que $|A_f \cap X| = \omega$ para una infinidad de funciones $f \in Z \subseteq 2^\omega$. Sea f una de estas funciones tal que $f \neq g$ entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$.
Puesto que $|A_f \cap X| = \omega$ y como $X \subseteq^* Y_k$ para todo $k \in \omega$ tenemos que

$$|A_f \cap Y_{n_0}| = \omega. \tag{1.2}$$

Puesto que $f(n_0) \neq g(n_0)$ entonces

$$A_f \notin \mathcal{A}_{i_{n_0}}^{n_0} = \{A_f : f(n_0) = i_{n_0} = g(n_0)\}.$$

Así, por (1.1) tenemos que

$$|A_f \cap Y_{n_0}| < \omega \tag{1.3}$$

Tenemos una contradicción de (1.2) y (1.3). ☑

Capítulo 2

Propiedades básicas de los espacios de Isbell-Mrówka

2.1. Introducción

Durante este breve capítulo introduciremos los Ψ-espacios (espacios de Isbell-Mrówka) y veremos algunas propiedades topológicas que necesitaremos. Usaremos algunos resultados conocidos de topología.

Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ una familia AD. Démosle a $\Psi(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \cup \omega$ la siguiente topología inducida por las vecindades abiertas de los puntos:

- $\forall x \in \omega \quad \mathcal{N}_x := \{\{x\}\}$.
- $\forall A \in \mathcal{A} \ \mathcal{N}_A := \{\{A\} \cup (A \setminus F) : F \subseteq A, |F| < \omega\}$.

Verifiquemos que efectívamente tenemos una topología para $\Psi(\mathcal{A})$. Como $\emptyset \in [A]^{<\omega}$ tenemos

$$\bigcup_{x\in\omega}\{x\} \cup \bigcup_{A\in\mathcal{A},\ F\in[A]^{<\omega}} \{A \setminus F\} = \omega \cup \mathcal{A} = \Psi(\mathcal{A})$$

y si $x \in U \cap V$ donde U, V son vecindades abiertas de x en $\Psi(\mathcal{A})$ entonces tenemos los siguientes casos:
Caso 1 $x \in \omega$, entonces $x \in \{x\} \subseteq U \cap V$ para todos los casos posibles de las vecindades U y V.
Caso 2 $x \in \mathcal{A}$, entonces U y V son de la forma $U = \{x\} \cup (x \setminus F),\ V =$

$\{x\}\cup(x\setminus G)$ donde $\{F,G\}\subseteq[x]^{<\omega}$, entonces $x\in\{x\}\cup(x\setminus(F\cup G))\subset U\cap V$.

A $\Psi(\mathcal{A})$ con la anterior topología lo llamamos el Ψ-espacio o el espacio de Isbell-Mrówka de $\mathcal{A}$.

2.2. Resultados elementales acerca de los Ψ-espacios.

Los siguientes son las propiedades topológicas más básicas de los ψ-espacios. Algunas de ellas se usarán en lo posterior.

Proposición 2.1 $\Psi(\mathcal{A})$ *es separable.*

Demostración. Veamos que ω es denso en $\Psi(\mathcal{A})$. Sea $x\in\Psi(\mathcal{A})$ y sea $U\in\mathcal{N}_x$. Si $x\in\omega$ entonces $U\cap\omega=\{x\}$. Si $x\in\mathcal{A}$ entonces $U=\{x\}\cup(x\setminus F)$ con $F\subseteq\omega,\ |F|<\omega$, así que, $U\cap\omega=x\setminus F\neq\emptyset$ pues $|x|=\omega$. Por lo tanto, $\overline{\omega}=\Psi(\mathcal{A})$. ☑

Proposición 2.2 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* $0\text{-}dimensional$.

Demostración. Vamos a probar que las vecindades básicas dadas en la definición de $\Psi(\mathcal{A})$ son cerradas. Sea U una vecindad local, abierta en $\Psi(\mathcal{A})$. Si $y\in\Psi(\mathcal{A})\setminus U$ entonces tenemos dos casos:
Caso 1 $y\in\omega$, entonces $y\in\{y\}\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$ para todos los casos posibles de la vecindad U.
Caso 2 $y\in\mathcal{A}$, entonces tenemos dos subcasos:
Caso 2.1 $U=\{n\}\subset\omega$, en este caso $y\in\{y\}\cup(y\setminus\{n\})\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$.
Caso 2.1 $U=\{A\}\cup(A\setminus F)$ con $A\neq y$ y $F\in[A]^{<\omega}$, en este caso $y\in\{y\}\cup(y\setminus(y\cap A))\subset\Psi(\mathcal{A})\setminus U$.

Entonces la base formada por las vecindades, locales de $\Psi(\mathcal{A})$ es una base de cerrado-abiertos. ☑

Proposición 2.3 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* T_2.

Demostración. Sea $\{x, y\} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$, $x \neq y$.
Caso 1. $\{x, y\} \subseteq \mathcal{A}$.
Sea $F = x \cap y$ entonces $U_x = \{x\} \cup (x \setminus F)$ y $U_y = \{y\} \cup (y \setminus F)$ separan a x y a y respectivamente.
Caso 2. $\{x, y\} \subseteq \omega$.
$\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos.
Caso 3. Sin perdida de generalidad, $x \in \omega$ y $y \in \mathcal{A}$.
Entonces $U_x = \{x\}$ y $U_y = \{y\} \cup (y \setminus \{x\})$ separan a x y a y respectivamente.
☑

Proposición 2.4 $\Psi(\mathcal{A})$ *es localmente compacto.*

Demostración. Como $\Psi(\mathcal{A})$ es T_2 basta demostrar que, para cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$ existe $U \in \mathcal{N}_x$ con $\overline{U}$ compacto. Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$, si $x \in \omega$ es inmediato pues $U = \{x\}$ es abierto y cerrado, así $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y claramente $\{x\}$ es compacto. Si $x \in \mathcal{A}$ sea $V \in \mathcal{N}_x$, puesto que V es cerrado, $\overline{V} = V = \{x\} \cup (x \setminus F_1)$ con $F_1 \subset x$ finito. Sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta de $\overline{V}$, existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $x \in U$, como U es abierto existe $F_2 = \{n_1, n_2, ..., n_m\} \subset x$ tal que $x \in \{x\} \cup (x \setminus F_2) \subseteq U$, sea $U_i \in \mathcal{O}$ tal que $n_i \in U_i$, $i = 1, ..., m$, entonces $\{U, U_1, U_2, ..., U_m\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{O}$ para $\overline{V}$. ☑

Corolario 2.5 $\Psi(\mathcal{A})$ *es completamente regular.*

Demostración. Sabemos que Hausdorff y localmente compacto implica completamente regular, o si lo prefiere también Hausdorff y 0-dimensional implica completamente regular. ☑

Proposición 2.6 $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 1^o *numerable.*

Demostración. Para toda $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup (x \setminus n) : n \in \omega\}$ es claramente una base local numerable. Si $x \in \omega$ entonces $\{\{x\}\}$ es una base local numerable de x.

Proposición 2.7 $\Psi(\mathcal{A})$ *no es numerablemente compacto.*

Demostración. Basta con ver que $\mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ no tiene puntos de acumulación, lo cual es inmediato por la definición de las vecindades para puntos en $\mathcal{A}$. ☑

Proposición 2.8 *Los siguientes son equivalentes*

1. $\Psi(\mathcal{A})$ *es* 2^{do} *numerable.*
2. $\Psi(\mathcal{A})$ *es metrizable.*
3. $\Psi(\mathcal{A})$ *es hereditariamente Lindelöf.*
4. $\mathcal{A}$ *es numerable.*

Demostración. $(1 \leftrightarrow 2)$ De la proposición 2.1 y el corolario 2.5 sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es separable y regular (de hecho completamente regular), entonces, por teorema de metrización de Urysohn, $\Psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable si y sólo si $\Psi(\mathcal{A})$ es metrizable.

$(1 \rightarrow 4)$ Si un espacio topológico X es segundo numerable entonces de cualquier base $\mathcal{B}$ de X se puede extraer una base numerable $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ para X, si suponemos que $|\mathcal{A}| > \omega$ entonces es imposible obtener una base numerable de la base $\{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A},\ n \in \omega \cap A\} \cup \omega$ para $\Psi(\mathcal{A})$, por lo tanto $|\mathcal{A}| \leq \omega$.

$(4 \rightarrow 1)$ Si $\mathcal{A}$ es numerable, $\{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A},\ n \in \omega \cap A\} \cup \omega$ es base numerable para $\Psi(\mathcal{A})$.

$(4 \rightarrow 3)$ $\forall\ Z \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ Z es numerable, así, si $\mathcal{O}$ es una cubierta abierta para A entonces $\forall a \in A\ \exists U_a \in \mathcal{O}\ \big(a \in U_a\big)$ entonces $\mathcal{U} = \{U_a \in \mathcal{O} | a \in A\}$ es una subcubierta de $\mathcal{O}$ numerable.

$(3 \rightarrow 4)$ Si $\mathcal{A}$ no es numerable entonces para $\mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ la cubierta abierta $\{\{A\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}$ para $\mathcal{A}$ no tiene subcubierta numerable, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es hereditariamente Lindelöf. ☑

Capítulo 3

Extensiones de funciones reales en espacios de Mrówka-Isbell

En este capítulo enunciamos y demostramos los resultados principales de esta tesis, son 4 preguntas que aparecen el los artículos [15] y [17].

3.1. Extensiones esenciales y completas

La meta para esta sección es responder afirmativamente a una pregunta hecha en el articulo de V.I. Malykhin y A. Tamariz-Mascarúa, *Extensions of functions in Mrówka-Isbell spaces*. Si $\mathcal{A}$ es una familia AD decimos que una función $f : \mathcal{A} \to Y$ continua tiene **extensión esencial** si existe $X \subseteq \omega$ tal que $\mathcal{A} \subseteq cl_{\Psi(A)}(X)$ y existe $F : \mathcal{A} \cup X \to Y$ continua que extiende a f. Si existe extensión a todo el espacio $\Psi(\mathcal{A})$, entonces diremos que F es una **extensión completa** de f. La pregunta es: *¿Existe, para cada $\mathcal{A}$ familia MAD, una función $f : \mathcal{A} \to 2$ sin extensión esencial?*. La respuesta es sí, teo. 3.5.

3.1.1. Antecedentes

Algunos de los resultados relacionados son los siguientes.

Lema 3.1 *Sean W un espacio topológico T_2, $\mathcal{A}$ una familia AD y $f, g : \mathcal{A} \to W$ dos funciones diferentes. Si $N \subseteq \omega$ y $F, G : \mathcal{A} \cup N \to W$ son extensiones esenciales de f y g respectivamente, entonces $F \restriction N \neq G \restriction N$.*

Demostración. Las funciones f y g son distintas, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ con $f(A) \neq g(A)$, como W es Hausdorff, existen W_f, W_g abiertos ajenos de W vecindades de $f(A)$ y $g(A)$ respectivamente. De la continuidad de las extensiones, existen $N_f = \{A\} \cup (A - G_f)$, $N_g = \{A\} \cup (A - G_g)$ abiertos básicos en $\Psi(\mathcal{A})$ tales que $F[N_f] \subseteq W_f$ y $G[N_g] \subseteq W_g$. Ahora, $N_f \cap N_g$ es una vecindad abierta de A en $\Psi(\mathcal{A})$ y $A \in cl_{\Psi(\mathcal{A})}(N)$, entonces $N' = N \cap N_f \cap N_g \neq \emptyset$. Para cada $n \in N'$ tenemos que $F(n) \neq G(n)$. ☑

Proposición 3.2 *Sea W un espacio topológico y sea $\mathcal{A}$ una familia AD tal que $2 \leq |W| \leq 2^\omega < 2^{|\mathcal{A}|}$. Entonces existe una función $f : \mathcal{A} \to W$ sin extensión esencial.*

Demostración. Supongamos que no, esto es, todas las funciones $f : \mathcal{A} \to W$ tienen extensión esencial. Sean $\kappa = |W^{\mathcal{A}}|$, $\mathcal{E} = \{f_k : \mathcal{A} \to W : k \in \kappa\}$ enumeración de $W^{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{E}' = \{F_k : \mathcal{A} \cup N_k \to W : k \in \kappa\}$ enumeración de todas las respectivas extensiones. Cada N_k es un subconjunto de ω y $\kappa > 2^\omega$, entonces, por el principio del casillero, existen $N \subseteq \omega$ y $K \in [\kappa]^\kappa$ tal que $N_k = N$ para cada $k \in K$. De modo que

$$|\{F_k : \mathcal{A} \cup N \to W : k \in K\}| = \kappa = |W^{\mathcal{A}}| \geq 2^{|\mathcal{A}|} > 2^\omega. \tag{3.1}$$

Por otro lado,

$$|\{F_k \restriction N : k \in K\}| = |W^N| = |W| \leq 2^\omega. \tag{3.2}$$

De las ecuaciones (3.1), (3.2) y el principio del casillero, existen $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$ con $F_{k_1} \restriction N = F_{k_2} \restriction N$, lo cual es una contradicción según lema 3.1. ☑

Como consecuencia tenemos esta otra proposición:

Proposición 3.3 *Si $\mathcal{A}$ es una familia AD tal que $|\mathcal{A}| = 2^\omega$, entonces existe una función $f : \mathcal{A} \to 2$ sin extensión esencial.*

La siguiente proposición relaciona las extensiones esenciales a funciones 2-valuadas y $\mathbb{R}$-valuadas.

Proposición 3.4 *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD, entonces*

1. *Si $f : \mathcal{A} \to 2$ tiene extensión esencial $F' : \mathcal{A} \cup N \to \mathbb{R}$, entonces f tiene extensión esencial $F : \mathcal{A} \cup N \to 2$.*

2. *Si todas las funciones $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tienen extensión esencial, entonces todas las funciones $g : \mathcal{A} \to 2$ tienen extensión esencial*

3. *Si $|\mathcal{A}| < 2^{\omega}$ y cada función $f : \mathcal{A} \to 2$ suprayectiva y con fibras infinitas no tiene extensión esencial a funciones 2-valuadas, entonces cada función $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ con al menos 2 fibras infinitas no tine extensión esencial.*

Demostración.

1. Sea $r \in (0,1) - F'[N]$ y sea $F : \mathcal{A} \cup N \to 2$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad F'(x) < r \\ 1 & \text{si} \quad F'(x) > r. \end{cases}$$

   Es claro que F extiende a f y, puesto que $F^{-1}(0) = F'^{-1}[(-\infty, r)]$ y $F^{-1}(1) = F'^{-1}[(r, \infty)]$, F es continua.

2. Es una consecuencia inmediata del resultado anterior.

3. Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ con al menos 2 fibras infinitas, digamos $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supongamos que f tiene extensión esencial $F' : \mathcal{A} \cup N \to \mathbb{R}$. Puesto que $|\mathcal{A}| < 2^{\omega} = |\mathbb{R}|$, entonces existe $c \in (a,b) - F'[\mathcal{A} \cup N]$, entonces la función $F : \mathcal{A} \cup N \to 2$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad F'(x) < r \\ 1 & \text{si} \quad F'(x) > r, \end{cases}$$

   es una extensión esencial para $F \restriction \mathcal{A} : \mathcal{A} \to 2$, lo cual contradice la hipótesis. ☑

El siguiente teorema responde a la pregunta hecha en el articulo de V.I. Malykhin A. Tamariz-Mascarúa.

Teorema 3.5 *Para cada familia MAD $\mathcal{A}$ existe una función $f : \mathcal{A} \to 2$ sin extensión esencial.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia MAD y sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ numerable, definimos $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ como

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \in \mathcal{B} \\ 1 & \text{si } A \in \mathcal{A} - \mathcal{B}. \end{cases}$$

Supongamos que f tiene extensión esencial $F : \mathcal{A} \cup X \to \mathbb{R}$. De la continuidad de F tenemos que; para cada $A \in \mathcal{A}$ existe G_A finito con $\{A\} \cup (A - G_A) \subseteq F^{-1}[(-\infty, 1/2)]$ si $A \in \mathcal{B}$ y $\{A\} \cup (A - G_A) \subseteq F^{-1}[(1/2, \infty)]$ si $A \notin \mathcal{B}$. De modo que si $Y = F^{-1}[(-\infty, 1/2)] \cap \omega$, tenemos

$$\begin{aligned} A \subseteq^* Y \ \ \text{para cada } A \in \mathcal{B} \ \text{ y} \\ A \cap Y =^* \emptyset \ \ \text{para cada } A \in \mathcal{A} - \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces $Y \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$ y por lo tanto (prop. 1.18) $\mathcal{A} \restriction Y$ es MAD, entonces (prop. 1.19) $|\mathcal{A} \restriction Y| > \omega$, por otro lado, la ecuación (3.3) implica $|\mathcal{A} \restriction Y| = |\mathcal{B}| = \omega$, contradicción. ☑

3.2. El subgrupo $Inv(\mathcal{A})$ de funciones invariantes

Nuestra meta ahora es responder a 3 preguntas hechas en el artículo Salvador Garcia Ferreira acerca de un subgrupo especial del grupo simétrico de ω. Primero un poco de notación y varios lemas.

Notación 3.6 *Denotamos al grupo de las permutaciones en un conjunto X por $Sym(X)$, esto es,*

$$Sym(X) = \{f : X \to X : f \text{ es biyección}\}.$$

Para $f \in Sym(\omega)$, denotamos por f^0 a la función identidad de ω y por f^{-1} a la función inversa de f. En general, de forma recursiva, para $n \in \omega$ definimos $f^{n+1} = f \circ f^n$ y $f^{-(n+1)} = f^{-1} \circ f^{-n}$.
Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD. Denotamos el conjunto de las funciones invariantes de $\mathcal{A}$ por $Inv(\mathcal{A})$, esto es,

$$Inv(\mathcal{A}) = \{f \in Sym(\omega) : \text{para cada } A \in \mathcal{A} \text{ existe } A' \in \mathcal{A} \text{ con } A' = f[A]\}.$$

Además, nos interesa también el conjunto de las que casi lo son,

$$Inv^*(\mathcal{A}) = \{f \in Sym(\omega) : \text{para cada } A \in \mathcal{A} \text{ existe } A' \in \mathcal{A} \text{ con } A' =^* f[A]\}.$$

Observación 3.7 *Para cada familia MAD $\mathcal{A}$, $Id_\omega \in Inv(\mathcal{A}) \subseteq Inv^*(\mathcal{A})$.*

Más aún, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.8 *Para cada $\mathcal{A}$ familia MAD, $Inv(\mathcal{A})$ e $Inv^*(\mathcal{A})$ son subgrupos de $Sym(\omega)$.*

Demostración. Sean $f, g \in Inv(\mathcal{A})$ y sea $A \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ es maximal y $g^{-1}[A] \in [\omega]^\omega$, entonces existe $A' \in \mathcal{A}$ tal que $|A' \cap g^{-1}[A]| = \omega$, entonces

$$|g[A'] \cap A| = \omega.$$

Pero $g[A'] \in \mathcal{A}$ pues $g \in Inv(\mathcal{A})$, entonces $A = g[A']$, así que $g^{-1}[A] = A' \in \mathcal{A}$. Como también $f \in Inv(\mathcal{A})$, entonces $f[g^{-1}[A]] \in \mathcal{A}$, así que $f \circ g^{-1} \in Inv(\mathcal{A})$ y por lo tanto $Inv(\mathcal{A})$ es un subgrupo de $Sym(\omega)$.
De manera similar se demuestra que $Inv^*(\mathcal{A})$ es un subgrupo de $Sym(\omega)$.
☑

Resulta inmediato el siguiente corolario.

Corolario 3.9 *Para toda familia MAD $\mathcal{A}$ se tiene*

$$Id_\omega \in Inv(\mathcal{A}) < Inv^*(\mathcal{A}) < Sym(\omega).$$

Lema 3.10 *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias MAD tales que para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $A =^* B$, entonces $Inv^*(\mathcal{A}) = Inv^*(\mathcal{B})$.*

Demostración. Primero demostramos, que hay simetría en la hipótesis, es decir,

> **Afirmación:** Para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B =^* A$.
>
> **Demostración de la Afirmación.** Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $B \in [\omega]^\omega$ y como $\mathcal{A}$ es maximal, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$. Ahora, por hipótesis, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $A =^* B'$, entonces $|B' \cap B| = \omega$ y por lo tanto $B' = B$ (porque $B', B \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es casi ajena), de modo que $B =^* A$.

Dada la simetría en la hipótesis es suficiente demostrar $Inv^*(\mathcal{A}) \subseteq Inv^*(\mathcal{B})$. Sea $f \in Inv^*(\mathcal{A})$ y sea $B \in \mathcal{B}$ cualquiera, entonces, por la afirmación anterior, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$B =^* A. \tag{3.4}$$

Puesto que $f \in Inv^*(\mathcal{A})$, tenemos que existe $A' \in \mathcal{A}$ tal que

$$f[A] =^* A'. \tag{3.5}$$

Ahora, por hipótesis, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que

$$A' =^* B'. \tag{3.6}$$

Así que

$$f[B] =^* f[A] =^* A' =^* B',$$

por lo tanto, $f \in Inv^*(\mathcal{B})$. ☑

El siguiente teorema es la respuesta a la pregunta 2.14 que el Dr. Salvador García hace en su articulo [15]. La pregunta es: *Si $F \subseteq Sym(\omega)$ es un subconjunto numerable cualquiera, ¿Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $F \subseteq Inv(\mathcal{A})$?*

Teorema 3.11 *Existe $F \subseteq Sym(\omega)$ numerable tal que $F \not\subseteq Inv(\mathcal{A})$ para toda $\mathcal{A}$ familia MAD.*

Demostración. Sea

$$F = \{f \in Sym(\omega) : \exists G \in [\omega]^{<\omega}(f \restriction (\omega - G) = Id_{\omega - G})\}.$$

F es numerable pues $|F| \leq |\bigcup_{G \in [\omega]^{<\omega}} G^G| = \omega$. Sea $\mathcal{A}$ cualquier familia MAD, sean $A \in \mathcal{A}$, $n_0 \in A$ y $n_1 \in \omega - A$. Definimos $f \in Sym(\mathcal{A})$ como

$$f(k) = \begin{cases} n_0 & \text{si } k = n_1 \\ n_1 & \text{si } k = n_0 \\ k & \text{si } k \notin \{n_0, n_1\}. \end{cases}$$

Es claro que $f \in F$, pero $f \notin Inv(\mathcal{A})$ pues $f[A] = (A \cup \{n_1\}) - \{n_0\} \notin \mathcal{A}$ porque $A \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es casi ajena. ☑

Lema 3.12 *Sean $\mathcal{A}$ una familia MAD, $g \in Inv^*(\mathcal{A})$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$, entonces existen $X, Y \in \mathcal{A} - \mathcal{B}$ tales que $Y =^* g[X]$.*

Demostración. Supongamos que no es cierto, entonces para cada $X \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ existe $Y \in \mathcal{B}$ tal que $g[X] =^* Y$. Puesto que $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$, tenemos que $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$, entonces, por el principio de las casillas, existen $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ distintos y existe $Y \in \mathcal{B}$ tales que $g[X_1] =^* Y =^* g[X_2]$, entonces $X_1 =^* X_2$, esto implica $X_1 = X_2$ pues ambos X_1, X_2 están en la familia AD $\mathcal{A}$. Esto es una contradicción. ☑

Puesto que $Sym(\omega) \subset \omega^\omega$, dotamos a $Sym(\omega)$ de la topología de subespacio, donde ω es discreto y ω^ω tiene la topología producto. $Sym(\omega)$ es T_2 pues ω^ω lo es, en particular, para cada $f \in Sym(\omega)$ el subconjunto $\{f\}$ es cerrado.

El siguiente teorema nos da respuesta afirmativa a la pregunta 2.25 del mismo articulo [15] del Dr. Salvador Garcia. La pregunta es: *¿Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $Inv(\mathcal{A})$ es cerrado en $Sym(\omega)$?*

Teorema 3.13 *Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ con $Inv(\mathcal{A}) = \{Id_\omega\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ familia MAD con $|\mathcal{C}| = 2^\omega$. Si $Inv^*(\mathcal{C}) - \{Id_\omega\} = \emptyset$, entonces $Inv(\mathcal{C}) \subseteq Inv^*(\mathcal{C}) = \{id\}$ y ya acabamos. Suponemos que $|Inv^*(\mathcal{C}) - \{Id_\omega\}| = \kappa$ para algún κ con $0 < \kappa \leq 2^\omega$ y sea

$$Inv^*(\mathcal{C}) - \{Id_\omega\} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Construiremos de manera recursiva una familia $\{B^i_\beta : i \in 2, \beta < \kappa\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que

(1) $\{B^0_\alpha, B^1_\alpha\} \cap \{B^i_\beta : i \in 2, \beta < \alpha\} = \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$ y

(2) $B^1_\alpha =^* f_\alpha[B^0_\alpha]$ para cada $\alpha < \kappa$.

Si $X \in \mathcal{C}$ es cualquiera, entonces existe $Y \in \mathcal{C}$ con $Y =^* f_0[X]$, tomamos $B^0_0 = X$ y $B^1_0 = Y$. Suponemos que hemos conseguido $\mathcal{B} = \{B^i_\beta : i \in 2, \beta < \alpha < \kappa\}$. Como $|\mathcal{B}| < |\mathcal{C}|$, entonces (lema anterior) existen $X, Y \in \mathcal{C} - \mathcal{B}$ con $Y =^* f_\alpha[X]$, tomamos $B^0_\alpha = X, B^1_\alpha = Y$ y estos cumplen (1) y (2).

Si $\alpha < \kappa$, como $f_\alpha \neq Id_\omega$, entonces existen $n_\alpha, m_\alpha \in \omega$, $n_\alpha \neq m_\alpha$ con $f_\alpha(m_\alpha) = n_\alpha$. Para cada $\alpha < \kappa$ sean $A^0_\alpha = B^0_\alpha \cup \{m_\alpha\}$ y $A^1_\alpha = B^1_\alpha - \{n_\alpha\}$.

Definimos

$$\mathcal{A} = (\mathcal{C} - \{B^i_\alpha : i \in 2, \alpha < \kappa\}) \cup \{A^i_\alpha : i \in 2, \alpha < \kappa\}.$$

Tenemos lo siguiente

(i) $\mathcal{A}$ es una familia MAD.
($\mathcal{C}$ es familia MAD y para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $C \in \mathcal{C}$ con $C =^* A$).

(ii) $Inv(\mathcal{A}) \subseteq Inv^*(\mathcal{A}) = Inv^*(\mathcal{C})$.
(Lema 3.10).

(iii) $A^1_\alpha \neq f_\alpha[A^0_\alpha]$ para cada $\alpha < \kappa$.
($m_\alpha \in A^0_\alpha$, entonces $n_\alpha = f_\alpha(m_\alpha) \in f_\alpha[A^0_\alpha]$ y $n_\alpha \notin A^1_\alpha$).

(iv) $Inv(\mathcal{A}) = \{Id_\omega\}$.
(Suponemos que existe $f \in Inv(\mathcal{A}) - \{Id_\omega\}$, entonces (ii) $f \in Inv^*(\mathcal{C}) - \{Id_\omega\}$, entonces existe $\alpha < \kappa$ con $f = f_\alpha$. Como $f \in Inv(\mathcal{A})$ y $A^0_\alpha \in \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ con $A = f_\alpha[A^0_\alpha]$. Por otra parte sabemos que $A^1_\alpha =^* f_\alpha[A^0_\alpha]$ y (iii) $A^1_\alpha \neq f_\alpha[A^0_\alpha]$, entonces $A =^* A^1_\alpha$ y $A \neq A^1_\alpha$, esto es una contradicción pues ambos A y A^1_α están en la misma familia casi ajena $\mathcal{A}$).

☑

Son ahora varios lemas que hemos de ocupar para dar una respuesta a la tercer y última de las preguntas que plantea el Dr. Salvador Garcia en su articulo [15]. La pregunta es: *¿Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $Inv(\mathcal{A})$ es denso en $Sym(\omega)$?*

Lema 3.14 *Si $f \in Sym(\omega)$ y $|\mathrm{Fix}(f)| < \omega$, entonces para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe un $B \in [A]^\omega$ tal que $f[B] \cap B = \emptyset$.*

Demostración. Sea $A \in [\omega]^\omega$ y sea $n_0 \in A - Fix(f)$ y para cada $k > 0$ escojamos

$$n_k \in A - \left(Fix(f) \cup \bigcup_{i<k} \{n_i, f(n_i), f^{-1}(n_i)\} \right).$$

Consideramos $B = \{n_i : i < \omega\}$, es claro que $B \in [A]^\omega$, supongamos que $f[B] \cap B \neq \emptyset$, entonces existe, digamos $n_a \in f[B] \cap B$, y por lo tanto existe también $n_b \in B$ con

$$f(n_b) = n_a.$$

Entonces $n_b \notin Fix(f)$ implica $b \neq a$, $n_a \notin \bigcup_{i<a}\{f(n_i)\}$ implica $b \geq a$ y $n_b \notin \bigcup_{i<b}\{f^{-1}(n_i)\}$ implica $b \leq a$, lo cual es una contradicción. ☑

Lema 3.15 *Si $G < Sym(\omega)$ es un subgrupo numerable, entonces los siguientes son equivalentes*

(i) Para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que la familia $\{f[B] : f \in G\}$ es casi ajena.

(ii) $|\mathrm{Fix}(f)| < \omega$ para cada $f \in G - \{Id\}$.

Demostración.
$[(i) \to (ii)]$ Si existe $f \in G - \{Id\}$ con $|Fix(f)| = \omega$, entonces existe, por hipótesis, $B \in [Fix(f)]^\omega$ tal que, en particular, $Id[B] \cap f[B] = B$, lo cual es una contradicción.

$[(ii) \to (i)]$ Sea $\{f_k : k \in \omega\}$ una enumeración de G con $f_0 = Id$ y sea $A \in [\omega]^\omega$. Primero construiremos recursivamente una familia $\mathcal{B} = \{B_n : n < \omega\}$ que cumpla

(1) $B_0 = A$.

Y, para cada $n \in \omega$,

(2) $B_{n+1} \subsetneq B_n$,

(3) $|B_{n+1}| = \omega$ y

(4) la familia $\{f_i[B_n] : i \leq n\}$ es ajena dos a dos.

Supongamos que hemos conseguido para $k \geq 0$ una familia $\{B_i : i \leq k\}$ que cumple con las 4 condiciones pedidas, queremos ahora decir quien será B_{k+1}. Puesto que $f_{k+1} \in G - \{Id\}$, entonces, por lema anterior,

$$\exists\, C_0 \in [B_k]^\omega \text{ tal que } f_{k+1}[C_0] \cap C_0 = \emptyset.$$

Además $f_j^{-1} \circ f_{k+1} \in G - \{Id\}$ para cada $0 < j < k+1$, por lo tanto, según lema anterior,

$$\exists\, C_j \in [C_{j-1}]^\omega \text{ tal que } (f_j^{-1} \circ f_{k+1})[C_j] \cap C_j = \emptyset.$$

Cada f_j es una biyección, entonces, la última ecuación nos dice

$$f_{k+1}[C_1] \cap f_1[C_1] = f_{k+1}[C_2] \cap f_2[C_2] = \ldots = f_{k+1}[C_k] \cap f_k[C_k] = \emptyset \quad (3.7)$$

Sea $b \in B_k$ cualquiera. Hacemos $B_{k+1} = C_k \setminus \{b\}$. Es claro que $B_{k+1} \in [B_k]^\omega$. Queremos que la familia $\{f_i[B_{k+1}] : i \leq k+1\}$ sea ajena 2 a 2. Sean $i, j \leq k+1$, $i \neq j$. Si $i < k+1$ y $j < k+1$, entonces $f_i[B_{k+1}] \cap f_j[B_{k+1}] \subseteq f_i[B_k] \cap f_j[B_k] = \emptyset$ pues hemos supuesto que la familia $\{B_i : i \leq k\}$ cumple en particular con la cuarta condicion. Ahora, si por ejemplo $i = k+1$ y $j < k+1$, entonces, puesto que $B_{k+1} \subseteq C_k \subseteq \cdots \subseteq C_0 \subseteq B_k$ y según ec. 3.7 tenemos, $f_i[B_{k+1}] \cap f_j[B_{k+1}] = f_{k+1}[B_{k+1}] \cap f_j[B_{k+1}] \subseteq f_{k+1}[C_j] \cap f_j[C_j] = \emptyset$. Con esto terminamos la construcción de la familia $\mathcal{B}$.
Sea $b_0 \in B_0$ cualquiera y para cada $n > 0$ tomamos $b_n \in B_n - B_{n-1}$. Hacemos $B = \{b_n : n \in \omega\}$, notemos que $B \subseteq^* B_n$ para cada $n \in \omega$, además $B \in [A]^\omega$. Queremos ver que la familia $\{f[B] : f \in G\} = \{f_i[B] : i \in \omega\}$ es casi ajena. Sean $m, n \in \omega$, $m < n$, entonces $f_m[B] \cap f_n[B] \subseteq^* f_m[B_n] \cap f_n[B_n] = \emptyset$ pues $B \subseteq^* B_n$ y $\{f_i[B_n] : i \leq n\}$ es ajena 2 a 2. ☑

El siguiente lema que ocupamos es el Teorema de Cayley para grupos. La segunda condición es muy importante para nosotros.

Lema 3.16 *Para cada grupo G existe un subgrupo $H < Sym(G)$ tal que*

i) $G \cong H$ *y*

ii) $\forall \pi \in H \setminus \{Id\}\ Fix(\pi) = \emptyset$.

Demostración. Si para cada $g \in G$ tomamos la función $\lambda_g \in Sym(G)$, $h \mapsto gh$, entonces es fácil ver que $H = \{\lambda_g : g \in G\}$ es el subgrupo de $Sym(G)$ que buscamos. ☑

Definición 3.17 *Sean X, Y conjuntos $X \subseteq Y$ y sean $G < Sym(X)$, $H < Sym(Y)$. Decimos que H es **extensión final** de G si existe isomorfismo $\psi : G \to H$ tal que $\psi(g) \upharpoonright X = g$ para toda $g \in G$.*

Lema 3.18 *Sean $\kappa > 1$ cualquier cardinal, $\mathcal{A} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia ajena de conjuntos no vacíos con $X_0 \in \omega$ y para cada $\alpha < \kappa$ sean H_α grupos tales que*

1. $\forall \alpha < \kappa\ H_0 \cong H_\alpha < Sym(X_\alpha)$ *y*

2. $\forall \alpha < \kappa \setminus \{0\} \forall h \in H_\alpha \setminus \{Id\}\ Fix(h) = \emptyset$.

Si $\theta = |\bigcup \mathcal{A}|$, entonces existe $G < Sym(\theta)$ tal que *a)* *G es extensión final de H_0 y*

b) *$\forall f \in G \setminus \{Id\}$ $Fix(f) \subseteq X_0$.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$ sean $\psi_\alpha : H_0 \to H_\alpha$ isomorfismos con $\psi_0 = Id$. Sea $X = \bigcup \mathcal{A}$ y para cada $h \in H_0$ sea $\pi_h : X \to X$ definida como

$$\pi_h(x) = \psi_\alpha(h)(x) \text{ cuando } x \in X_\alpha. \tag{3.8}$$

Nótese que cada π_h es una biyección bien definida pues h y cada ψ_α son biyecciones y los conjuntos X_α son ajenos dos a dos. Sea $\theta = |X|$ y sea $f : X \to \theta$ biyección tal que

$$f(x) = x \text{ para cada } x \in X_0. \tag{3.9}$$

Para cada $h \in H_0$ definimos

$$\pi'_h := f \circ \pi_h \circ f^{-1}. \tag{3.10}$$

Cada π'_h es una biyección de θ en θ. Sea

$$G = \{\pi'_h : h \in H_0\}.$$

AFIRMACIÓN 1: $G < Sym(\theta)$

G es cerrado bajo la composición de funciones: Sean $g, h \in H_0$ y $x \in X$, digamos $x \in X_i$, entonces

$$\begin{aligned}
(\pi_g \circ \pi_h)(x) &= \pi_g\big(\pi_h(x)\big) \\
&= \pi_g\big(\psi_i(h)(x)\big) && \text{Definición de } \pi_h,\ x \in X_i \\
&= \psi_i(g)\big(\psi_i(h)(x)\big) && \text{Definición de } \pi_g,\ \psi_i(h)(x) \in X_i \\
&= \big(\psi_i(g) \circ \psi_i(h)\big)(x) && \text{Composición de funciones} \\
&= \psi_i(g \circ h)(x) && \psi_i \text{ es un isomorfismo} \\
&= \pi_{g \circ h}(x). && g \circ h \in H_0, \text{ definición de } \pi_{g\circ h},\ x \in X_i
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\pi'_g \circ \pi'_h &= (f \circ \pi_g \circ f^{-1}) \circ (f \circ \pi_h \circ f^{-1}) \\
&= f \circ (\pi_g \circ \pi_h) \circ f^{-1} \\
&= f \circ \pi_{g \circ h} \circ f^{-1} \\
&= \pi'_{g \circ h}.
\end{aligned}$$

$1_G = \pi'_{Id}$: Sea $x \in X$, digamos $x \in X_i$. Por ser $\psi_i : H_0 \to H_i$ un isomorfismo de grupos, $\psi_i(Id_{X_0}) = Id_{X_i}$, entonces

$$\pi_{Id_{X_0}}(x) = \psi_i(Id_{X_0})(x) = Id_{X_i}(x) = x.$$

$\forall h \in H_0\ \pi_h'^{-1} = \pi'_{h^{-1}}$: Es inmediato pues $\pi'_h \circ \pi'_{h^{-1}} = \pi'_{h \circ h^{-1}} = \pi'_{Id}$.

AFIRMACIÓN 2: G es una extensión final de H_0.

Sea $\psi : H_0 \to G$, $h \mapsto \pi'_h$. ψ es biyección pues tiene por inversa a $\psi' : G \to H_0$, $\pi'_h \mapsto h$. Además, ψ es homomorfismo de grupos pues si $g, h \in H_0$, entonces $\psi(g \circ h) = \pi'_{g \circ h} = \pi'_g \circ \pi'_h = \psi(g) \circ \psi(h)$. Por lo tanto ψ es un isomorfismo de grupos.

Sean $h \in H_0$ y $x \in X_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(h)(x) &= \pi'_h(x) \\
&= (f \circ \pi_h \circ f^{-1})(x) \\
&= f\big(\pi_h(x)\big) && f^{-1}(x) = x \text{ pues } x \in X_0 \text{, ec. 3.9} \\
&= f\big(\psi_0(h)(x)\big) && \text{Definición de } \pi_h,\ x \in X_0 \\
&= f\big(h(x)\big) && \psi_0 = Id \\
&= h(x). && h(x) \in X_0 \text{, ec. 3.9}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(h) \upharpoonright X_0 = h$ para cada $h \in H_0$.

AFIRMACIÓN 3: $Fix(\pi'_h) \subseteq X_0$ para cada $h \in H_0 \setminus \{Id\}$.

Sea $h \in H_0 \setminus \{Id\}$ y sea $x \in Fix(\pi'_h)$, entonces $\pi_h\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(x)$. Como $f^{-1}(x) \in X_i$ para algún $i < \kappa$, entonces

$$\psi_i(h)\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}(x). \tag{3.11}$$

Si $i \neq 0$, como $\psi_i(h) \in H_i$ y $f^{-1}(x) \in Fix\big(\psi_i(h)\big)$, entonces por condición 2, debemos tener $\psi_i(h) = Id$, esto implica $h = Id$ pues ψ_i es un isomorfismo de grupos. Esto es una contradicción, por lo tanto $i = 0$, entonces $x = f^{-1}(x) \in X_0$. ☑

Lema 3.19 *Sea $G < Sym(\omega)$ un grupo finito. Sean $g \in Sym(\omega)$, $\langle g_i : i \in \omega \rangle$ sucesión de funciones en G (no todos distintos pues G es finito) y $\langle N_i : i \in \omega \rangle$ sucesión estríctamente creciente de numeros naturales. Si*

$$g \restriction N_i = g_i \restriction N_i \ \textit{para cada}\ i \in \omega,$$

entonces existe $j \in \omega$ tal que $g = g_j$.

Demostración. Puesto que G es finito, existe $\langle i_n : n \in \omega \rangle$ sucesión estríctamente creciente de naturales tales que $g_{i_0} = g_{i_n}$ para cada $n \in \omega$, entonces

$$g \restriction N_{i_n} = g_{i_0} \restriction N_{i_n} \ \text{para cada}\ n \in \omega.$$

Entonces $g = g_{i_0}$ pues $\langle N_{i_n} : i \in \omega \rangle$ es estríctamente creciente. ☑

Lema 3.20 *Sea $\{N_i : i \in \omega\}$ una sucesión estríctamente creciente de numeros naturales distintos del cero, sea $\{H_i : i \in \omega\}$ colección de grupos tales que $H_i < Sym(N_i)$ y H_{i+1} es extensión final de H_i para toda $i \in \omega$. Entonces existe un único grupo numerable $H < Sym(\omega)$ tal que H es extensión final de cada H_i.*

Demostración. Para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$ sea

$$\psi_k : H_{k-1} \to H_k$$

isomorfismo de grupos tales que, para cada $h \in H_0$,

$$\begin{array}{rlcrl} h & : N_0 \to N_0, & & & \\ \psi_1(h) & : N_1 \to N_1 & \text{con} & \psi_1(h) & \restriction N_0 = h \\ (\psi_2 \circ \psi_1)(h) & : N_2 \to N_2 & \text{con} & (\psi_2 \circ \psi_1)(h) & \restriction N_1 = \psi_1(h) \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Tales isomorfismos existen pues, por hipótesis, H_{k+1} es extensión final de H_k para cada $k < \omega$. Denotamos a la función $(\psi_k \circ \psi_{k-1} \circ \cdots \circ \psi_1)(h) \in Sym(N_k)$ simplemente por Ψ_k^h para $k \in \omega,\ k \geq 1$ y sea $\Psi_0^h = h$. Observemos que

$$\Psi_k^h \restriction N_j = \Psi_j^h \ \text{para cada}\ j < k. \tag{3.12}$$

Para cada $h \in H_0$ definimos $\Phi_h : \omega \to \omega$ como

$$\Phi_h(x) = \Psi_k^h(x), \text{ donde } k \text{ es cualquiera tal que } x \in N_k.$$

Observemos que cada Φ_h está bien definida según ecuación 3.12 y es una biyección de ω en ω. Sea

$$H = \{\Phi_h : h \in H_0\}.$$

AFIRMACIÓN 1: $H < Sym(\omega)$.

Para cada $k \geq 1$ $\psi_k \circ \cdots \circ \psi_1$ es un homomorfismo pues cada ψ_j $(1 \leq j \leq k)$ lo es , entonces, para cada $k \in \omega$ y $h_1, h_2 \in H_0$, $\Psi_k^{h_1 h_2} = \Psi_k^{h_1} \circ \Psi_k^{h_2}$. Por lo tanto, para cada $h_1, h_2 \in H_0$

$$\Phi_{h_1} \circ \Phi_{h_2} = \Phi_{h_1 h_2}.$$

Sea $k \in \omega$ y $h \in H_0$. Puesto que ψ_j es un isomorfismo de grupos para toda $j \in \omega,\ j \geq 1$, cada ψ_j envía el elemento identidad de N_{j-1} al elemento identidad en N_j, además envía inversos en inversos, entonces

$$\Psi_k^{id_{H_0}} = Id_\omega \text{ y } \Psi_k^{h^{-1}} = (\Psi_k^h)^{-1}$$

Por lo tanto, el elemento identidad en H es Φ_{Id} y si Φ_h es cualquiera en H, su inverso es $\Phi_{h^{-1}}$.

AFIRMACIÓN 2: $H \cong H_i$ para toda $i \in \omega$.

Veamos que $f : H_0 \to H$, $h \mapsto \Phi_h$ es un isomorfismo. f es biyección ($f' : H \to H_0$, $\Phi_h \mapsto h$ es inverso para f) y f es homomorfismo pues $f(h_1h_2) = \Phi_{h_1h_2} = \Phi_{h_1}\Phi_{h_2} = f(h_1)f(h_2)$ para cada $h_1, h_2 \in H_0$. Puesto que $H_i \cong H_{i+1}$ para toda $i \in \omega$, entonces también $H \cong H_i$ para cada $i \in \omega$.

AFIRMACIÓN 3: H es extensión final de cada H_i.

Sea $i \in \omega$, tenemos que

$$F = f \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \cdots \circ \psi_i^{-1}$$

es un isomorfismo entre los grupos H_i y H. Si $h \in H_i$, entonces $F(h) = f((\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)^{-1}(h)) = \Phi_{(\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)^{-1}(h)}$ y por lo tanto, para un $x \in N_i$,

$$\begin{aligned} F(h)(x) &= \Phi_{(\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)^{-1}(h)}(x) \\ &= \Psi_i^{(\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)^{-1}(h)}(x) \\ &= \Big((\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)\big((\psi_i \circ \cdots \circ \psi_1)^{-1}(h)\big)\Big)(x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F(h) \restriction N_i = h$.

Veamos ahora que H es único.

Suponemos que H' es también un grupo que cumple con las condiciones del lema, entonces para cada $i \in \omega$ existen $F_i : H_i \to H$, $F_i' : H_i \to H'$ isomorfismos tales que, para cada $i \in \omega$ y cada $h \in H_i$

$$F_i(h) \restriction N_i = F_i'(h) \restriction N_i = h.$$

Sea $x \in H$, como cada F_i es biyección, para cada $i \in \omega$ existe $x_i \in H_i$ tal que

$$F_i(x_i) = x.$$

Entonces, para cada $i \in \omega$

$$x \restriction N_i = F_i(x_i) \restriction N_i = F_i'(x_i) \restriction N_i.$$

Puesto que cada $F_i'(x_i) \in H'$ y H' es finito (pues es isomorfo a $H_0 < Sym(N_0)$), entonces según lema 3.19, existe $j \in \omega$ tal que $x = F_j'(x_j) \in H'$. Entonces $H \subseteq H'$. Dada la simetría, un argumento idéntico demuestra que $H' \subseteq H$ y por lo tanto $H = H'$, esto es, el grupo H es único. ☑

Lema 3.21 *Sean $\{N_i : i \in \omega\}$ sucesión estríctamente creciente de números naturales, $\{H_i, H_i' : i \in \omega\}$ subgrupos tales que $H' \leq H \leq Sym(N_i)$ para cada $i \in \omega$. Sean además H y H' los subgrupos de $Sym(\omega)$ tales que H es extensión final de cada H_i y H' es extensión final de cada H_i'. Entonces $H' \leq H$.*

Demostración. Para cada $i \in \omega$ existen $F_i' : H_i' \to H'$ y $F_i : H_i \to H$ isomorfismos tales que

$$\forall i \in \omega\ \forall x \in H_i'\ \ F_i' \restriction N_i = x \tag{3.13}$$

$$\forall i \in \omega\ \forall x \in H_i\ \ F_i \restriction N_i = x \tag{3.14}$$

Puesto que ambos H y H' son subgrupos de $Sym(\omega)$, basta demostrar que $H' \subseteq H$. Sea $h' \in H'$, como cada F_i' es biyección, existen $x_i' \in H_i'$ $(i \in \omega)$ tales que

$$F_i'(x_i') = h'.$$

De ecuación 3.13, para cada $i \in \omega$

$$h' \restriction N_i = F_i'(x_i') \restriction N_i = x_i'. \tag{3.15}$$

Ahora, cada $x_i' \in H_i'$, pero $H_i' \subseteq H_i$, entonces según ecuación 3.14, para cada $i \in \omega$

$$F_i(x_i') \restriction N_i = x_i'. \tag{3.16}$$

Entonces de las dos ecuaciones anteriores, para cada $i \in \omega$

$$h' \restriction N_i = F_i(x_i') \restriction N_i.$$

La sucesión $\{N_i : i \in \omega\}$ es estríctamente creciente, cada $F_i(x_i')$ está en H y H es finito pues $H \cong H_0 \leq Sym(N_0)$, entonces según lema 3.19, existe $j \in \omega$ tal que $h' = F_j(x_j') \in H$. Por lo tanto $H' \subseteq H$ como queriamos. ☑

Lema 3.22 *Sean $\{N_i : i \in \omega\}$ sucesión estríctamente creciente de números naturales, $n \in \omega$ y sea $\{H_i : i \in \omega\}$ familia de grupos tales que*

1. $\forall i \in \omega\ \ H_i \leq Sym(N_i)$ *y*

2. $\forall i \in \omega\ \forall h \in H_i - \{Id\}\ \ Fix(h) \subseteq n$.

Si $H \leq Sym(\omega)$ es el subgrupo que es extensión final de cada H_i, entonces $Fix(f) \subseteq n$ para cada $f \in H - \{Id\}$.

Demostración. Para cada $i \in \omega$ sea $\psi_i : H_i \to H$ isomorfismo tal que para cada $i \in \omega$ y cada $h \in H_i$ $\psi_i(h) \restriction N_i = h$. Sea $f \in H - \{Id\}$, puesto que cada ψ_i es isomorfismo, existen $x_i \in H_i - \{Id\}$ $(i \in \omega)$ tales que, para cada $i \in \omega$

$$\psi_i(x_i) = f. \tag{3.17}$$

Sea $z \in Fix(F)$ y sea $j \in \omega$ tal que $N_j > z$, entonces

$$f \upharpoonright N_j = \psi(x_j) \upharpoonright N_j = x_j. \tag{3.18}$$

Como $z < N_j$, entonces

$$x_j(z) = (f \upharpoonright N_j)(z) = f(z) = z. \tag{3.19}$$

Por lo tanto $z \in Fix(x_j)$, pero $x_j \in H_j - \{Id\}$, entonces por hipótesis $Fix(x_j) \subseteq n$ y por lo tanto $z \in n$. Entonces $Fix(f) \subseteq n$. ☑

Lema 3.23 *Sean $N < M < \omega$, $H < Sym(M)$ y $G < Sym(N)$. Supongamos que H es extensión final de G. Si $G' < G$, entonces existe un único subgrupo $H' < H$ extensión final de G'.*

Demostración. Existe isomorfismo de grupos $\psi : G \to H$ tal que para cada $g \in G$ $\psi(g) \upharpoonright N = g$. Sea $H' := \psi[G'] < H$ y consideremos el isomorfismo $\psi \upharpoonright G' : G' \to H'$. Sea $g \in G'$ y $x \in N$, entonces

$$\begin{aligned} \big((\psi \upharpoonright G')(g)\big)(x) = \quad & \psi(g)(x) & \qquad g \in G' \\ & g(x). & \qquad x \in N \end{aligned}$$

Entonces $\big((\psi \upharpoonright G')(g)\big) \upharpoonright N = g$ para cada $g \in G'$ y por lo tanto H' es una extensión final de G'. ☑

Teorema 3.24 *Existe un grupo $G < Sym(\omega)$ numerable, denso y para cada $g \in G \setminus \{Id\}$ $|Fix(g)| < \omega$.*

Demostración. Sea $\{\pi_i : i \in \omega\} = \bigcup_{n\in\omega-\{0\}} Sym(n)$ con $\pi_0 \in Sym(1)$, es decir, $\pi_0 = Id_1$. Construiremos de manera recursiva una familia de grupos $\{G_n^i : i \in \omega, n \leq i\}$ y al mismo tiempo una sucesión creciente de naturales $\{n_i : i \in \omega\}$ tales que

1. $\forall i \in \omega \, \forall n \leq i \quad G_n^i < Sym(n_i)$,
2. $\forall i \in \omega \, \forall n \leq i \, \forall j \in i \setminus n \quad G_n^i$ es una extensión final de G_n^j,
3. $\forall n \in \omega \, \exists \, g \in G_n^n$ tal que $\pi_n \subseteq g$ y

4. $\forall i \in \omega\, \forall j \geq i\, \forall f \in G_i^j\ Fix(f) \subseteq n_i$

La recursión la haremos sobre el índice i. Sean $n_0 = 1$ y $G_0^0 = \{Id_1\}$. Suponemos que hemos conseguido la familia de grupos $\{G_n^i : i \leq k,\ n \leq i\}$ y el conjuto de naturales $\{n_i : i \leq k\}$ cumpliendo las cuatro condiciones de arriba. Queremos decir quienes serán n_{k+1}, G_0^{k+1}, G_1^{k+1}, ... , G_{k+1}^{k+1}. Ayudará, para visualizar la disposición de los grupos, tener en mente el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Cup & & & & \Cup & & \Cup \\
G_0^{k+1} & \leq & \cdots & \leq & G_k^{k+1} & \leq & G_{k+1}^{k+1} \\
\Cup & & & & \Cup & & \\
G_0^k & \leq & \cdots & \leq & G_k^k & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
G_0^2 & \leq & G_1^2 & \leq & G_2^2 & & \\
\Cup & & \Cup & & & & \\
G_0^1 & \leq & G_1^1 & & & & \\
\Cup & & & & & & \\
G_0^0 & & & & & &
\end{array}
$$

Donde $G' \Subset G$ significa que G es extensión final de G'.

Sea t el mínimo natural que cumpla $n_k + t|G_k^k| \geq dom(\pi_{k+1})$. Sea $n_{k+1} = n_k + t|G_k^k|$. Por lema 3.16

$$\exists\ H_0^k < Sym(G_k^k)\ (H_0^k \cong G_k^k) \text{ y } \forall f \in H_0^k \setminus \{Id\} Fix(f) = \emptyset$$

y para cada $j \in \{1, 2, ..., t-1\}$

$$\exists\ H_j^k < Sym(H_{j-1}^k)\ (H_j^k \cong H_{j-1}^k) \text{ y } \forall f \in H_j^k \setminus \{Id\} Fix(f) = \emptyset.$$

Por lema 3.18 existe $G_k^{k+1} < Sym(n_{k+1})$ extensión final de G_k^k tal que

$$\forall f \in G_k^{k+1} \setminus \{Id\}\ \ Fix(f) \subseteq n_k. \tag{3.20}$$

Puesto que G_k^{k+1} es extensión final de G_k^k, entonces existe isomorfismo $F : G_k^k \to G_k^{k+1}$ tal que

$$\forall g \in G_k^k\ \ F(g) \restriction n_k = g. \tag{3.21}$$

Sabemos que $G_0^k \leq G_1^k \leq \cdots \leq G_{k-1}^k \leq G_k^k$, entonces si hacemos, para cada $j < k$

$$G_j^{k+1} := F[G_j^k],$$

como F es isomorfismo, entonces $G_0^{k+1} \leq G_1^{k+1} \leq \cdots \leq G_{k-1}^{k+1}$ y por lema 3.23 G_j^{k+1} es extensión final de G_j^k para cada $j < k$.

Sea $j < k$ y sea $g \in G_j^{k+1} - \{Id\} = F[G_j^k] - \{Id\}$, entonces $g \in G_k^{k+1} - \{Id\}$ pues $G_j^{k+1} \leq G_k^{k+1}$ así que, por la ecuación 3.20 tenemos

$$Fix(g) \subseteq n_k. \tag{3.22}$$

Puesto que F es isomorfismo y $g \in F[G_j^k] - \{Id\}$, entonces existe $x \in G_j^k - \{Id\}$ tal que

$$g = F(x). \tag{3.23}$$

Como $x \in G_j^k - \{Id\}$, entonces por hipótesis

$$Fix(x) \subseteq n_j. \tag{3.24}$$

Además $x \in G_j^k \subseteq G_k^k$, entonces por las ecuaciónes 3.23 y 3.21

$$g \restriction n_k = F(x) \restriction n_k = x. \tag{3.25}$$

De las ecuaciones 3.22, 3.24 y 3.25 tenemos que

$$Fix(f) \subseteq Fix(g) \subseteq n_j.$$

Por lo tanto, de esta última ecuación y de la ecuación 3.20, tenemos que para los grupos $G_0^{k+1}, .., G_k^{k+1}$ se cumple la condición 4.

Sea $\overline{\pi} : n_{k+1} \to n_{k+1}$ definida como

$$\overline{\pi}(x) = \begin{cases} \pi_{k+1}(x) & \text{si } x \in dom(\pi_{k+1}) \\ x & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Hacemos

$$G_{k+1}^{k+1} = \langle G_k^{k+1}, \overline{\pi} \rangle.$$

Es claro, de acuerdo a la construcción, que $n_{k+1},\ G_0^{k+1}, ..., G_{k+1}^{k+1}$ son los que buscabamos y con esto terminamos la construcción recursiva.

Para cada $i \in \omega$ G_i^{i+1} es extensión final de G_i^i, entonces, según lema 3.20, para cada $i \in \omega$ existe $G_i^\omega < Sym(\omega)$ tal que G_i^ω es extensión final de cada G_i^j, $j \geq i$. Puesto que, para cada $i \in \omega$, $G_m^i \leq G_n^i$ cuando $m \leq n \leq i$, entonces según el lema 3.21 $G_m^\omega \leq G_n^\omega$ siempre que $m \leq n$. Sea

$$G = \bigcup_{n \in \omega} G_n^\omega.$$

Las siguientes son afirmaciones referentes al grupo G

1. Es un subgrupo de $Sym(\omega)$ pues $G_n^\omega < Sym(\omega)$ para cada $n \in \omega$.

2. Es numerable pues cada G_n^ω es finito.

3. Es denso pues la condición 3 implica: Para cada $n \in \omega$ existe $g \in G_n^n \subset G$ tal que $\pi_n \subset g$.

4. Para cada $g \in G \setminus \{Id\}$, $|Fix(f)| < \omega$.

Demostremos 4.
Sea $g \in G - \{Id\}$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $g \in G_m^\omega - \{Id\}$. Por hipótesis G_m^ω es extensión final de G_m^k para cada $k \geq m$ y también por hipótesis para cada $k \geq m$ y cada $f \in G_m^k - \{Id\}$ $Fix(f) \subseteq n_m$, entonces según lema 3.22, tenemos que $Fix(g) \subseteq n_m$. ☑

Según lema 3.15 y el teorema anterior, es cierto el siguiente teorema.

Teorema 3.25 *Existe un grupo numerable y denso $G < Sym(\omega)$ tal que para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in [A]^\omega$ tal que la familia $\{f[B] : f \in G\}$ es casi ajena.*

El siguiente teorema da respuesta afirmativa a la pregunta 2.24 hecha por el Dr. Salvador García Ferreira en su artículo [15]. La pregunta es: *¿Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $Inv(\mathcal{A})$ es denso en $Sym(\omega)$?*

Teorema 3.26 *Existe una familia MAD $\mathcal{A}$ tal que $Inv(\mathcal{A})$ es denso en $Sym(\omega)$.*

Demostración. Sea $G < Sym(\omega)$ como en el teorema 3.25 y sea

$$\Sigma = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es familia casi ajena y } A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \{f[A] : f \in G\} \subseteq \mathcal{A}\}$$

Según el teorema 3.25 $\Sigma \neq \emptyset$. Además $(\Sigma, \subseteq)$ es un orden parcial. Sea $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$ una cadena, queremos ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \Sigma$, la cual sería una cota superior para $\mathcal{C}$. Según la proposición 1.8 $\bigcup\mathcal{C}$ es una familia casi ajena, ahora, si $A \in \bigcup\mathcal{C}$, entonces existe $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{A}$, entonces $\{f[A] : f \in G\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \bigcup\mathcal{C}$. Entonces según lema de Zorn, existe $\mathcal{A}_0$ maximal en $(\Sigma, \subseteq)$. Supongamos que $\mathcal{A}_0$ no es maximal como familia casi ajena, entonces existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que $\{X\} \cup \mathcal{A}_0$ es familia casi ajena. Según el teorema 3.25, existe $Y \in [X]^\omega$ tal que $\{f[Y] : f \in G\}$ es familia casi ajena, nótese que también $\{Y\} \cup \mathcal{A}_0$ es familia casi ajena pues $Y \subseteq X$. Basta demostrar que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0 \cup \{f[Y] : f \in G\}$ es familia casi ajena pues en este caso $\mathcal{A}' \in \Sigma$ y $\mathcal{A}_0 \subsetneq \mathcal{A}'$ contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}_0$. Sean $A, B \in \mathcal{A}'$, $A \neq B$ y suponemos $A \in \mathcal{A}_0$ y $B \in \{f[B] : f \in G\}$, los otros casos son inmediatos pues tanto $\mathcal{A}_0$ como $\{f[Y] : f \in G\}$ son familias casi ajenas. Existe $f \in G$ tal que $B = f[Y]$, como f es biyección también f^{-1} lo es, por lo tanto

$$|A \cap f[Y]| = |f^{-1}[A] \cap Y| =^* \emptyset,$$

pues $f^{-1}[A], Y \in \mathcal{A}_0 \cup \{Y\}$, la cual es una familia casi ajena. Por o tanto $\mathcal{A}_0$ es una familia casi ajena maximal tal que $A \in \mathcal{A}_0$ si y sólo si $\{f[A] : f \in G\} \subseteq \mathcal{A}_0$, entonces $G \subseteq Inv(\mathcal{A}_0)$, como G es denso en $Sym(\omega)$, también $Inv(\mathcal{A}_0)$ lo es. ☑

Capítulo 4

Normalidad de los Ψ-espacios

4.1. Introducción

Veremos bajo qué condiciones un Ψ-espacio resulta ser normal. Merece un capítulo aparte pues tiene que ver con un problema famoso, de hecho, en su momento considerado entre los problemas principales de la topología general, a principios del año 1930. El problema es conocido como el problema de Moore.

Los espacios de Moore son la abstracción de un espacio métrico. Estos espacios se llaman así en honor a R. L. Moore quien los introdujo por el año 1932.
Para una familia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y un $x \in X$ usamos la notación $St(x,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$, llamado el conjunto **estrella** de x respecto a la familia $\mathcal{U}$.

Definición 4.1 *Un* ***desarrollo*** *para un espacio topológico X es una familia $\{\mathcal{U}_i : i \in \omega\}$ donde cada $\mathcal{U}_i$ es una cubierta abierta de X tal que si $x \in X$, entonces $\{St(x,\mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local en x. Un* ***espacio de Moore*** *es un espacio regular que tiene un desarrollo.*

Proposición 4.2 *Todo espacio métrico es un espacio de Moore.*

Demostración. Sea (E, d) espacio métrico, si $B(x, r)$ denota la bola de radio r centrada en $x \in E$, i.e. $B(x, r) = \{y \in E : d(y, x) < r\}$. Entonces la familia de los $\mathcal{U}_i = \{B(x, 1/i) : x \in E\}$ para cada $i \in \omega$ componen un desarrollo para el espacio E. Es claro que cada $\mathcal{U}_i$ es una cubierta abierta para E. Ahora, si tomamos un $x \in E$,

$$St(x, \mathcal{U}_i) = \bigcup_{y \in B(x, 1/i)} B(y, 1/i) = B(x, 2/i).$$

Entonces $\{St(x, \mathcal{U}_i) : i \in \omega\}$ es una base local de x. ☑

Por el año 1933 un estudiante de Moore anunció la siguiente pregunta:

¿Es metrizable cualquier espacio de Moore que es además normal?

Moore conjeturó que la respuesta es afirmativa. Por más de 50 años, el problema de Moore fue considerado como el problema más importante de la topología general. Después se demostró que el problema de Moore es independiente de los axiomas de ZFC. Fue en 1937 cuando Jones hizo los primeros intentos en demostrar el problema de Moore agregando la hipótesis $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$ a ZFC, en ese año, se conoce el famoso Lema de Jones, el cual dice (agregando esa hipótesis) que todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable.
El siguiente teorema es la respuesta a la pregunta de Moore para el caso de espacios separables

Teorema 4.3 *Los siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un espacio normal, separable y Moore pero no metrizable.*
2. *Existen Q-conjuntos.*
3. *Existe una familia AD tal que $\Psi(\mathcal{A})$ es normal.*

En particular, en este capítulo demostraremos $2. \Leftrightarrow 3.$ Veremos algunas equivalencias de normalidad en Ψ-espacios y no es difícil demostrar que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Moore:

Proposición 4.4 $\Psi(\mathcal{A})$ *es un espacio de Moore.*

Demostración. Por corolario (2.5) $\Psi(\mathcal{A})$ es regular. Sea $\mathcal{U}_n = \{\{A\}\cup(A\setminus n) : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\{m\} : m \in \omega \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(A \setminus n)\}$. Entonces la familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ es un desarrollo para $\Psi(\mathcal{A})$. Es claro que cada $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta para $\Psi(\mathcal{A})$, demostremos que para cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$ $B_x = \{St(x,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ es una base local para x.
Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$, tenemos dos casos:

Caso 1 $x \in \omega$:
Para $n = x + 1$, $x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(A \setminus n)$ y por lo tanto $St(x,\mathcal{U}_{x+1}) = \{x\}$, entonces B_x es base local para x pues $\{x\} \in B_x$ es abierto.

Caso 2 $x \in \mathcal{A}$:
En este caso $St(x,\mathcal{U}_n) = \{\{x\}\cup(x\setminus n)\}$, entonces $B_x = \{\{x\}\cup(x\setminus n) : n \in \omega\}$ y es también claro que B_x es una base local para x. ☑

4.2. Separadores de una familia AD

Empecemos definiendo el concepto de “separador” para una familia casi ajena, nos servirá para dar una equivalencia de normalidad en los Ψ-espacios.

Definición 4.5 *Sea $\mathcal{A}$ una familia AD, sea $S \subseteq \omega$. Decimos que S es un **separador** de $\mathcal{A}$ si para toda $A \in \mathcal{A}$ tenemos que $A \subseteq^* S$ o $A \subseteq^* \omega \setminus S$.
S es un **separador trivial** si $\exists \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ con $S =^* \bigcup \mathcal{B}$.*

Proposición 4.6 *Las siguientes son separadores para cualquier familia AD $\mathcal{A}$.*

1. *ω y $\emptyset$.*
2. *A para cualquier $A \in \mathcal{A}$*
3. *$R =^* S$ para cualquier S separador de $\mathcal{A}$.*
4. *$S \cap S'$, $S \cup S'$ y $S \setminus S'$ para cualesquiera separadores S y S' de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ familia AD.

1. Para toda $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq \omega$ y $A \subseteq \omega \setminus \emptyset$.

2. Sea $B \in \mathcal{A}$, si $B = A$ entonces $B \subseteq^* A$, si $B \neq A$ entonces $B \cap A =^* \emptyset$ por lo tanto $B \subseteq^* \omega \setminus A$.

3. Sea $A \in \mathcal{A}$, como $R =^* S$ existen $G_1, G_2 \in [\omega]^{<\omega}$, con $R \setminus S = G_1$ y $S \setminus R = G_2$. Si $A \subseteq^* S$ entonces $A \setminus R \subseteq^* S \setminus R = G_2$ entonces $A \subseteq^* R$. Si $A \subseteq^* \omega \setminus S$ entonces $A \setminus (\omega \setminus R) \subseteq^* (\omega \setminus S) \setminus (\omega \setminus R) = R \setminus S = G_1$, por lo tanto $A \subseteq^* \omega \setminus R$ y así, R es un separador de $\mathcal{A}$.

4. Hagamos sólo el caso $S \cap S'$ los otros son análogos; F y G denotan elementos de $[\omega]^{<\omega}$, sea $A \in \mathcal{A}$
   Caso 1 $A \setminus S = F$ y $A \setminus S' = G$.
   Entonces $A \setminus (S \cap S') = F \cup G$ por lo tanto $A \subseteq^* S \cap S'$.
   Caso 2 $A \cap S = F$ o $A \cap S' = G$.
   Entonces $A \cap (S \cap S') = F \cap G$ por lo tanto $A \subseteq^* \omega \setminus (S \cap S')$, así, $S \cap S'$ es un separador de $\mathcal{A}$.

4.3. Normalidad en los Ψ-espacios.

Ahora damos una equivalencia de normalidad para los espacios $\Psi(\mathcal{A})$.

Proposición 4.7 *$\Psi(\mathcal{A})$ es normal $\Leftrightarrow$ $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ existe S separador de $\mathcal{A}$ tal que $\forall A \in \mathcal{B}$ $A \subseteq^* S$ y para toda $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $A \subseteq^* \omega \setminus S$.*

Demostración. $(\rightarrow)$ Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ son cerrados ajenos existen $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}, \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ abiertos ajenos que los separan respectivamente. Sea $S = \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega$, demostremos que S separa a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Sea $A \in \mathcal{B}$ como $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ es abierto existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $\{A\} \cup (A \setminus F) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, entonces $A \setminus F \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega = S$ por lo tanto $A \subseteq^* S$.
Sea $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, como $\mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ es abierto existe $G \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $\{A\} \cup (A \setminus G) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ entonces $A \setminus G \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \cap \omega$, como $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} = \emptyset$ entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \cap \omega \subseteq \omega \setminus (\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \cap \omega) = \omega \setminus S$, por lo tanto $A \setminus G \subseteq \omega \setminus S$, de modo que $A \subseteq^* \omega \setminus S$.
Así, S es un separador de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.

$(\leftarrow)$ Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ dos cerrados ajenos. Los podemos escribir como

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}_1 \cup N_1 \ \ y \ \ \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}_2 \cup N_2$$

donde $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{A}$ y $N_1, N_2 \subseteq \omega$.
Si $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ o $\mathcal{B}_2 = \emptyset$ entonces $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ pueden separarse por abiertos ajenos,

pues en el caso de que $\mathcal{B}_1 = \emptyset$ entonces $\mathcal{F}_1 \subseteq N_1$ y $\mathcal{F}_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus N_1$, similar si $\mathcal{B}_2 = \emptyset$.
Supongamos pues que $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset \neq \mathcal{B}_2$, por hipótesis para $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{A}$ existe $S \subseteq \omega$ separador tal que $\forall A \in \mathcal{B}_1 \; A \subseteq^* S$ y $\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}_1 \; \mathcal{A} \subseteq^* \omega \setminus S$. Sea

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}_1 \cup (S \setminus N_2) = \mathcal{B}_1 \cup (N_1 \cup (S \setminus N_2)),$$

demostremos que $\mathcal{U}$ es abierto y cerrado, sea $x \in \mathcal{U}$, si $x \in N_1 \cup (S \setminus N_2) \subseteq \omega$ entonces $\{x\}$ es abierto y $x \in \{x\} \subseteq \mathcal{U}$. Si $x \in \mathcal{B}_1$ entonces por hipótesis $x \subseteq^* S$ i.e., existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ con

$$x \setminus F \subseteq S \tag{4.1}$$

ahora, $|x \cap N_2| < \omega$ pues de no ser así $\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}_2$ no seria abierto, por lo tanto existe $G \in [\omega]^{<\omega}$ con $(x \setminus G) \cap N_2 = \emptyset$, es decir,

$$x \setminus G \subseteq \omega \setminus N_2 \tag{4.2}$$

de (4.1) y (4.2) se sigue que $x \setminus (F \cup G) \subseteq S \setminus N_2$, entonces $x \in \{x\} \cup (x \setminus (F \cup G)) \subseteq \mathcal{B}_1 \cup (S \setminus N_2) \subseteq \mathcal{U}$, donde $\{x\} \cup (x \setminus (F \cup G))$ es un abierto básico, vecindad de x, por lo tanto $\mathcal{U}$ es abierto.
Ahora,

$$\Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{U} = (\Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{F}_1) \cap (\omega \setminus (S \setminus N_2)),$$

es intersección de dos abiertos ya que $\mathcal{F}_1$ es cerrado y $\omega \setminus (S \setminus N_2)$ es abierto por ser subconjunto de ω, por lo tanto $\mathcal{U}$ es un cerrado.
Así, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{A} \setminus \mathcal{U}$ son abiertos ajenos que separan a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ respectivamente.
Con todo, $\Psi(\mathcal{A})$ es normal. ☑

Corolario 4.8 *Si $\mathcal{A}$ es una familia AD se cumplen.*

- $2^{|\mathcal{A}|} > 2^\omega \rightarrow \Psi(\mathcal{A})$ *no es normal.*
- *$\mathcal{A}$ es MAD* $\rightarrow \Psi(\mathcal{A})$ *no es normal.*

Demostración.

- Sea $\mathcal{S} = \{S \subseteq \omega : S \text{ es separador de } \mathcal{A}\}$ sea $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$ con $F(S) = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq^* S\}$ tenemos que $|\mathcal{S}| \leq 2^\omega$ y por hipótesis $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^{|\mathcal{A}|} > 2^\omega$. Entonces F no es sobre, por lo tanto existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que ningún separador de $\mathcal{A}$ separa a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, entonces por la proposición anterior $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

- Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| = \omega$. Queremos probar que no existe S separador de $\mathcal{A}$ que separe a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, supongamos que si existe dicho separador S, enumeremos a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \omega\}$ y sean

$$\begin{array}{lcl} x_0 & \in & S \cap A_0 \\ x_1 & \in & S \cap A_1 \setminus A_0 \\ x_2 & \in & S \cap A_2 \setminus A_0 \cup A_1 \\ & \vdots & \\ x_n & \in & S \cap A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m \end{array}$$

  Sea $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq S$ y por lo tanto $|A \cap B| < \omega$ para toda $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ y por construcción $|A_n \cap A| < \omega$ para toda $n \in \omega$, de modo que $\mathcal{A}$ no puede ser maximal ya $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es familia AD con $A \notin \mathcal{A}$. Contradicción. Por lo tanto $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

☑

Vemos ahora como aparecen las extensiones de funciones sobre espacios de Mrówka-Isbell, el teorema es el siguiente. Notemos que $\mathcal{A} \subset \Psi(\mathcal{A})$ como subespacio es discreto y por lo tanto cualquier función $f : \mathcal{A} \to X$ es continua.

Teorema 4.9 *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena. Los siguientes son equivalentes*

1. $\Psi(\mathcal{A})$ *es normal*
2. *Cada* $f : \mathcal{A} \to 2$ *tiene extensión completa*
3. *Cada* $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *tiene extensión completa.*

Demostración.
1. $\to$ 3.
Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ función cualquiera, notese que f es continua y que $\mathcal{A} \subset \Psi(\mathcal{A})$ es cerrado, entonces por teorema de extensión de Tietze, existe $F : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ continua que extiende a f.
3. $\to$ 2.
Es inmediato.
2. $\to$ 1.
Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ cualquiera y sea $f : \mathcal{A} \to 2$ definida como

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \notin \mathcal{B} \\ 1 & \text{si } A \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Por hipótesis existe $F : \Psi(\mathcal{A}) \to 2$ continua que extiende a f. Sea

$$S = F^{-1}[\{1\}] \cap \omega.$$

Si $A \in \mathcal{B}$, entonces $F(A) = f(A) = 1$ y de la continuidad de F tenemos $A \subseteq^* S$. Si $A \in \mathcal{A} - \mathcal{B}$, entonces $F(A) = f(A) = 0$ y en este caso $A \subseteq^* \omega - S$. Entonces, según proposición 4.7, $\Psi(A)$ es normal. ☑

4.4. El teorema de Luzin

Uno de los primeros resultados sobre familias casi ajenas fue el siguiente teorema de N. Luzin. El teorema dice, en particular, que en ZFC hay Ψ-espacios de cardinalidad ω_1 que no son normales.

Teorema 4.10 (LUZIN) *Existe una familia AD $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = \omega_1$ tal que para cada $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{\omega_1}$ ajenos, no existe S separador de $\mathcal{A}$ que separe a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Construiremos de forma recursiva una familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [\omega]^\omega$ AD con la siguiente propiedad:

$$\forall \alpha < \omega_1 \, \forall n \in \omega \big(\{\beta < \alpha : |A_\alpha \cap A_\beta| \leq n\} \text{ es finito} \big). \tag{4.3}$$

Después supondremos la existencia de dichos separadores para llegar a una contradicción con ésta última propiedad de $\mathcal{A}$.
Los primeros ω A_α los definimos simplemente como una partición de ω en conjuntos infinitos [1], esto es $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ con $A_n \cap A_m = \emptyset$ para todo $m, n \in \omega$, $m \neq n$ y $\bigcup_{n \in \omega} A_n = \omega$.
Sea α, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, suponemos que ya hemos construido $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ y queremos construir A_α. Puesto que $\beta < \alpha < \omega_1$ entonces $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ es numerable y lo podemos escribir como

$$\{A_\beta : \beta < \alpha\} = \{C_n : n \in \omega\}.$$

Del hecho que $C_n \cap C_m \in [\omega]^{<\omega}$ para cualesquiera $m, n \in \omega$ con $m \neq n$, para cada $k \in \omega$ podemos conseguir $F_k \in [\omega]^{<\omega}$ tal que

1. $|F_k| \geq k + 1$,

[1] Como se hizo en el ejemplo 1.4.

2. $F_k \subseteq C_k \setminus \bigcup_{i<k} C_i$.

Hacemos $A_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y sea $\beta < \alpha$, entonces $A_\beta = C_{n_0}$ para algún $n_0 \in \omega$ y

$$A_\beta \cap A_\alpha = C_{n_0} \cap \bigcup_{i\in\omega} F_i \subseteq \bigcup_{i\leq n_0} F_i$$

por lo tanto $A_\alpha \cap A_\beta =^* \emptyset$. Además,

$$F_{n_0} \subseteq C_{n_0} \cap \bigcup_{i\leq n_0} F_i \subseteq A_\beta \cap \bigcup_{i\in\omega} F_i = A_\beta \cap A_\alpha,$$

de modo que

$$|A_\beta \cap A_\alpha| \geq n_0 + 1. \tag{4.4}$$

esto nos garantiza que para cada $\beta < \alpha$ y para cada $n \in \omega$ $\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\}$ es finito[2], hemos pues conseguido una familia AD $\mathcal{A}$ como queríamos.
Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ no numerables ajenas y supongamos que existe S que separa a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de modo que

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad B \subseteq^* S, \tag{4.5}$$
$$\forall C \in \mathcal{C} \qquad C \subseteq^* \omega \setminus S. \tag{4.6}$$

Puesto que, para todo $A \in \mathcal{B}$ existe $F_A \in [\omega]^{<\omega}$ con $A \setminus S = F_A$ y como $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$ y $|\mathcal{B}| > \omega$, entonces por el principio de las casillas, existen $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ no numerable tal que

$$\forall B \in \mathcal{B}' \quad B \subseteq S \cup F, \tag{4.7}$$

Como $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ son no numerables, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A_\alpha \in \mathcal{C}$ y $Z = \{\beta < \alpha : A_\beta \in \mathcal{B}'\}$ es infinito,[3] de la ecuación (4.6) existe un conjunto finito $G \subset \omega$ tal que

$$A_\alpha \subseteq (\omega \setminus S) \cup G. \tag{4.8}$$

[2]Sea $\gamma_k < \alpha$ con $A_{\gamma_k} = C_k$, entonces por ecuación (4.4) $|A_{\gamma_k} \cap A_k| \geq k+1$, por lo tanto $\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\} \subseteq \{\gamma_k : k \leq n-1\}$.

[3]Como $|\mathcal{B}'| > \omega$, tomamos $Z = \{\beta < \alpha : A_\alpha \in \mathcal{B}'\}$ infinito numerable, como $|\mathcal{C}| > \omega$ y Z es numerable existe $\alpha \geq \sup Z$ con $A_\alpha \in \mathcal{C}$.

Entonces, de ecuación (4.7), para cada $\beta \in Z$,

$$A_\beta \cap A_\alpha \subseteq [S \cup F] \cap [(\omega \setminus S) \cup G] \subseteq F \cup G. \tag{4.9}$$

Digamos que $|F \cup G| = n \in \omega$, entonces $|\{\beta < \alpha : |A_\beta \cap A_\alpha| \leq n\}| = |Z| = \omega$, contradiciendo la propiedad (4.3) con la que se construyó $\mathcal{A}$. ☑

4.5. Subárboles de $2^{<\omega}$

En este apartado nos restringiremos a una clase natural de familias casi ajenas donde normalidad se puede caracterizar de manera particularmente sencilla. Primero introducimos un poco de notación.

Denotamos por 2^n al conjunto de todas las funciones con dominio $n \in \omega$ y codominio 2. Definamos además

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} 2^n.$$

Este conjunto lo podemos representar por un árbol binario como el de la figura 4.1 Cada nodo de un nivel l representa las distintas funciones que podemos tener con dominio l.
La línea de abajo, en esa figura, representa el conjunto 2^ω de las funciones con dominio ω y codominio 2.

Así, el árbol entero será $2^{<\omega} \cup 2^\omega$. Ayudados de este conjunto podemos darle una topología a 2^ω como sigue.[4]

$U \subseteq 2^\omega$ es vecindad básica de $g \in 2^\omega \Leftrightarrow$ existe $N \in \omega$ tal que

$$U = \{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\}.$$

[4]Ésta topología coincide con la topología producto en 2^ω. Si $U = 2^{\omega \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_i$ es un abierto básico en la topología producto de 2^ω, donde cada U_i es un abierto del espacio discreto 2 y F un finito de ω. Sea $g \in U$, entonces con $N = \max F$, $\{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\} \subseteq U$. Recíprocamente, si $V = \{f \in 2^\omega : f \restriction N = g \restriction N\}$ es una vecindad abierta en la recién topología de 2^ω, donde $N \in \omega$. Sea $f \in V$ y sea $U = 2^{\omega \setminus F} \times \prod_{i \in F} U_i$ vecindad de f en la topología producto, donde $F = N$. Entonces $U \subseteq V$.

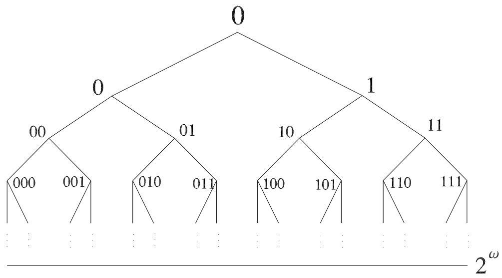

Figura 4.1: El nodo 101 representa a la función $\sigma : 3 \to 2$ tal que $\sigma(0) = 1,\ \sigma(1) = 0,\ \sigma(2) = 1$. Para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$, $\sigma : n \to\ 2$ existe una infinidad de funciones $f \in 2^{\omega}$ tales que $f \restriction n = \sigma$.

Estos básicos se ven como pequeños "conos" con el vértice sobre $g \restriction N \in 2^{<\omega}$ en el nivel N del árbol y con base en U.
Note además que dados dos básicos U, V estos son ajenos o alguno está contenido en el otro. Esto implica que los abiertos básicos también son cerrados.

Para un $f \in 2^{\omega}$ definamos A_f como el conjunto de todas las funciones que son todas las posibles restricciones de f, esto es:

Notación 4.11 *Para un $f \in 2^{\omega}$ usamos: $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$. Además, para un $X \subseteq 2^{\omega}$ infinito, $\mathcal{A}_X = \{A_f : f \in X\} \subseteq [2^{<\omega}]^{\omega}$.*

Proposición 4.12 *Para cualquier conjunto infinito $X \subseteq 2^{\omega}$, $\mathcal{A}_X \subseteq [2^{<\omega}]^{\omega}$ es una familia casi ajena[5] basada en $2^{<\omega}$.*

Demostración. Sea $X \subseteq 2^{\omega}$ infinito y sean $A_f,\ A_g$ dos elementos distintos de $\mathcal{A}_X$, entonces $f \neq g$, esto es, existe $N \in \omega$, $N > 0$ tal que $f(N) \neq g(N)$ esto implica que $f \restriction n \neq g \restriction n$ para cada $n \geq N$, entonces $|A_f \cap A_g| \leq N$.☑

Definición 4.13 *Un conjunto infinito $X \subseteq 2^{\omega}$ es un* ***Q-conjunto*** *si para cada $Y \subseteq X$, Y se escribe como unión numerable de cerrados en X (Y es F_σ en X).*

[5]En nuestra definición de familia casi ajena ésta es subconjunto de $[\omega]^{\omega}$, note que $|2^{<\omega}| = \omega$.

De forma análoga, como lo hicimos con $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$, le podemos asociar una topología ($\Psi(\mathcal{A}_X) := \mathcal{A}_X \cup 2^{<\omega}$) a la familia $\mathcal{A}_X$, para un $X \subseteq 2^\omega$.

Para $\sigma \in 2^{<\omega}$ los puntos serán aislados, para $A_f \in \mathcal{A}_X$ tenemos $\mathcal{N}_{A_f} = \{\{A_f\} \cup (A_f \setminus F) : F \in [A_f]^{<\omega}\}$.

Teorema 4.14 *$\Psi(\mathcal{A}_X)$ es normal $\Leftrightarrow$ X es Q-conjunto.*

Demostración. ($\rightarrow$) Sea $Y \subseteq X$ entonces $\mathcal{A}_Y \subseteq \mathcal{A}_X$, como $\Psi(\mathcal{A}_X)$ es normal, por la proposición (4.7), existe $S \subseteq 2^{<\omega}$ que separa a $\mathcal{A}_Y$ de $\mathcal{A}_X \setminus \mathcal{A}_Y$. Sin perdida de generalidad supongamos que para todo $A_f \in \mathcal{A}_Y$ (ó $\forall f \in Y$) $A_f \subseteq^* S$ y para todo $A_f \in \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{A}_Y$ (ó $\forall f \in X \setminus Y$) $A_f \subseteq^* 2^{<\omega} \setminus S$.
En este caso

$$\begin{aligned} Y &= \{f \in X : A_f \in \mathcal{A}_Y\} = \{f \in X : A_f \subseteq^* S\} \\ &= \{f \in X : \exists n \in \omega\, \forall k > n\, (f \restriction k \in S)\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k>n} \{f \in X : f \restriction k \in S\} \\ &= \textstyle\bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k>n} \bigcup_{\sigma \in 2^k \cap S} \{f \in X : f \restriction k = \sigma\}. \end{aligned}$$

Donde $\{f \in X : f \restriction k = \sigma\}$ es un básico, por lo tanto, cerrado-abierto, así, Y es unión numerable de cerrados, entonces X es Q-conjunto.

($\leftarrow$) Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_X$ entonces $\mathcal{B} = \mathcal{A}_Y$ para $Y = \{f \in X : A_f \in \mathcal{B}\}$. Como X es un Q-conjunto entonces $Y = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y $X \setminus Y = \bigcup_{n\in\omega} H_n$ con F_n, H_n cerrados de X.
Definamos de forma recursiva los siguientes conjuntos

$$A_0 = \{f \restriction n : f \in F_0,\ n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}.$$

$$B_0 = \{f \restriction n : f \in H_0,\ n \in \omega\} \setminus A_0.$$

y para $k \in \omega$

$$A_{k+1} = \{f \restriction n : f \in F_{k+1},\ n \in \omega\} \setminus \bigcup_{j\le k} B_j.$$

$$B_{k+1} = \{f \restriction n : f \in H_{k+1},\ n \in \omega\} \setminus \bigcup_{j \leq k+1} A_j.$$

Afirmación:

$$S = \bigcup_{k \in \omega} A_k \text{ es un separador de } \mathcal{A} \text{ que separa a } \mathcal{B} \text{ de } \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{B}.$$

Tenemos que demostrar que $A_f \subseteq^* S$ para cualquier $A_f \in \mathcal{B}$ además $A_f \subseteq^* 2^{<\omega} \setminus S$ para cualquier $A_f \in \mathcal{A}_X \setminus \mathcal{B}$.
Demostremos sólo la primer parte, la segunda es similar.
Sea $A_f \in \mathcal{B}$ entonces $f \in Y = \bigcup_{j \in \omega} F_j$. Tenemos que demostrar que existe $N \in \omega$ tal que $f \restriction k \in S = \bigcup_{j \in \omega} A_j$ para toda $k > N$. Sea $n_0 = \min\{m : f \in F_m\}$, entonces, es suficiente demostrar que existe $N \in \omega$ tal que $f \restriction k \in A_{n_0}$ para toda $k > N$. Pero $f \restriction k \in A_{n_0}$ si y sólo si $f \restriction k \notin \bigcup_{j < n_0} B_j$ por lo que definitivamente habrá que demostrar que:

$$\text{Existe } N \in \omega \text{ tal que } f \restriction k \notin \bigcup_{j < n_0} B_j \text{ para toda } k > N.$$

Como $f \in Y$ entonces $f \notin \bigcup_{j \in \omega} H_j$, así, $f \notin \bigcup_{j < n_0} H_j \subseteq X \setminus Y$, cada H_j es cerrado por lo que $H := \bigcup_{j < n_0} H_j$ es un cerrado en X entonces existe $V \subseteq X \setminus H$ vecindad de f, esto es, existe $N \in \omega$ tal que

$$V = \{g \in 2^\omega : g \restriction N = f \restriction N\}.$$

De ésta forma, si $g \in 2^\omega$ es tal que $g \restriction N = f \restriction N$ entonces $g \notin H$ pues $V \subseteq X \setminus H$. Entonces si $k > N$ y $g \in 2^\omega$ es tal que $g \restriction N = f \restriction N \to g \notin H_j$ para toda $j < n_0$.
Así pues, si $k > N$ y $j < n_0 \to f \restriction k \notin B_j$. Entonces

$$f \restriction k \notin \bigcup_{j < n_0} B_j \text{ para toda } k > N,$$

esto es a lo que queríamos llegar. ☑

La siguiente proposición dice, que los Ψ-espacios del tipo $\Psi(\mathcal{A}_X)$ generan de forma proyectiva a todos los Ψ-espacios que ya conocíamos.

Proposición 4.15 *Para cada $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ familia AD existe $X \subseteq 2^\omega$ y existe $f : \Psi(\mathcal{A}_X) \to \Psi(\mathcal{A})$ función continua, sobreyectiva, tal que $f \restriction \mathcal{A}_X$ es inyectiva.*

Demostración. Sea $X = \{\chi_A \in 2^\omega : A \in \mathcal{A}\}$.
Donde $\chi_A : \omega \to 2$ es la función característica, se define como:

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A, \\ 1 & \text{si } a \in A. \end{cases}$$

Ahora, sea $f : \Psi(\mathcal{A}_X) \to \Psi(\mathcal{A})$ tal que

$f(A_{\chi_A}) = A$ para todo $A_{\chi_A} \in \mathcal{A}_X$ y

$$f(\sigma) = \begin{cases} \text{máx}\{n \in \omega : \sigma(n) = 1\} & \text{si es posible,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \text{para todo } \sigma \in 2^{<\omega}$$

Afirmación: f es sobreyectiva:
Para $A \in \mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ $f(A_{\chi_A}) = A$ donde $A_{\chi_A} \in \Psi(\mathcal{A}_X)$.
Para $n \in \omega \subseteq \Psi(\mathcal{A})$. Sea $\sigma : n+1 \to 2$ tal que $\sigma(n) = 1$. Así $\sigma \in \Psi(\mathcal{A}_X)$ y $f(\sigma) = n$.

Afirmación: $f \restriction \mathcal{A}_X$ es inyectiva.
Sean $A_{\chi_A}, A_{\chi_B} \in \mathcal{A}_X$ tales que $f(A_{\chi_A}) = f(A_{\chi_B})$ entonces $A = B$ por lo que $A_{\chi_A} = A_{\chi_B}$.

Afirmación: f es continua.
Basta probar que la imagen inversa de las vecindades es abierta. Sea $n \in \omega \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ entonces

$$f^{-1}(\{n\}) = \{\sigma \in 2^{<\omega} : n = \text{máx}\{k \in dom(\sigma) : \sigma(k) = 1\}\} \subseteq 2^{<\omega}$$

es abierto pues $2^{<\omega}$ es discreto.

Ahora, sea $A \in \mathcal{A} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ entonces para un finito $F \subseteq A$

$$f^{-1}(\{A\} \cup A \setminus F) = f^{-1}(\{A\}) \cup f^{-1}(A \setminus F)$$

$$= f^{-1}(\{A\}) \cup \bigcup_{n \in A \setminus F} f^{-1}(\{n\}) = \{A_{\chi_A}\} \cup$$

$$\bigcup_{n \in A \setminus F} \left[\{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \cup \bigcup_{k > n+1} \bigcap_{n < j < k} \{\sigma \in 2^k : \sigma(n) = 1, \sigma(j) = 0\} \right]$$

$$= \{A_{\chi_A}\} \cup \bigcup_{n\in A\setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \cup \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in A\setminus F} \bigcup_{k>n+1} \bigcap_{n<j<k} \{\sigma \in 2^k : \sigma(n) = 1, \sigma(j) = 0\}$ es un subconjunto de $2^{<\omega}$ y por lo tanto abierto.

Note ahora que $n \in A \setminus F$ implica $\chi_A \restriction (n+1) \in \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}$, así que,

$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A \setminus F\} \subseteq \bigcup_{n\in A\setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}. \tag{4.10}$$

Pero

$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A \setminus F\} =$$
$$\{\chi_A \restriction (n+1) : n \in A\} \setminus \{\chi_A \restriction (n+1) : n \in F\} = A_{\chi_A} \setminus G,$$

donde G es un finito de $2^{<\omega}$. Entonces de la ecuación (4.10)

$$A_{\chi_A} \setminus G \subseteq \bigcup_{n\in A\setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\}.$$

De modo que podemos escribir

$$f^{-1}(\{A\}\cup(A\setminus F)) = \{A_{\chi_A}\} \cup \left[(A_{\chi_A} \setminus G) \cup \bigcup_{n\in A\setminus F} \{\sigma \in 2^{n+1} : \sigma(n) = 1\} \right] \cup \mathcal{C},$$

donde $\{A_{\chi_A}\} \cup (A_{\chi_A} \setminus G)$ es un abierto básico de $\Psi(\mathcal{A}_X)$, el resto un subconjunto de $2^{<\omega}$ y por lo tanto abierto también en $\Psi(\mathcal{A}_X)$. ☑

Apéndice A

Nociones básicas de la teoría de conjuntos

Muchos de los siguientes resultados y definiciones se encuentran en la mayoría de los libros de teoría de conjuntos, por lo que sólo se demostrarán algunos de los resultados aquí mencionados

A.1. El Lema de Zorn

Definición A.1 *Sea un conjunto X no vacío y sea R una relación ($R \subseteq X \times X$) tal que*

1. *Para todo $x \in X$, xRx[1], R es reflexiva.*
2. *Para todo $x, x' \in X$, xRx' y $x'Rx$ implica $x = x'$, R es antisimétrica.*
3. *Para todo $x, x', x'' \in X$, xRx y $x'Rx''$ implica xRx'', R es transitiva.*

*Entonces al par (X, R) se le llama **conjunto parcialmente ordenado.***

Definición A.2 *Sea (X, R) un conjunto parcialmente ordenado y sea $Y \subseteq X$, decimos que Y es una **cadena en** (X, R) si para todo $y, y' \in Y$, yRy' o $y'Ry$. Decimos que $x_0 \in X$ es una **cota superior** para Y si para todo $y \in Y$, yRx_0, llamamos a un $y_0 \in Y$ **elemento maximal** de Y en el orden R, si no existe $y \in Y$ tal que y_0Ry y $y_0 \neq y$.*

[1]Para una relación R, xRy es una forma abreviada para decir que $(x, y) \in R$.

Lema A.3 LEMA DE KURATOWSKI-ZORN
Cualquier conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior tiene elemento maximal.

A.2. Filtros, ultrafiltros e ideales

Definición A.4 *Sea X un conjunto no vacío, decimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un* ***filtro*** *basado en X (o sobre X) si se cumplen:*

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
- *Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*
- *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}$.*

Ejemplo A.5 *Sea X un conjunto no vacío infinito, entonces la colección de subconjuntos cofinitos de X es un filtro en $\mathcal{P}(X)$.*

Definición A.6 *Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un* ***filtro maximal*** *o* ***ultrafiltro*** *sobre X si es un filtro y cualquier otro filtro $\mathcal{F}'$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Definición A.7 *Un filtro $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es* ***principal*** *si existe $p \in X$ tal que $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : p \in A\}$. Un filtro principal es siempre un filtro maximal, llamamos a éste* ***ultrafiltro principal.***

Definición A.8 *Llamamos* ***ultrafiltro libre*** *a cualquier ultrafiltro que no sea principal.*

De la definición anterior es inmediata la siguiente observación:

Observación A.9 *$\mathcal{U}$ es un ultra filtro libre $\Leftrightarrow \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.*

Observación A.10 *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ultrafiltro libre, entonces $X \setminus F \in \mathcal{U}$ para cada $F \in [X]^{<\omega}$ y por lo tanto $F \notin \mathcal{U}$ para todo $F \in [X]^{<\omega}$.*

Demostración. Sea $p \in X$, como $\mathcal{U}$ es libre existe $A \in \mathcal{U}$, $A \neq X$ tal que $p \notin A$ entonces $A \subseteq X \setminus \{p\}$ así que $X \setminus \{p\} \in \mathcal{U}$, puesto que $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones se sigue que $X \setminus F \in \mathcal{U}$ para cada $F \in [X]^{<\omega}$. ☑

Proposición A.11 *Sea $F = \{\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X) : i \in I\}$ una colección de filtros basados en $X \neq \emptyset$, entonces $\bigcap F$ es un filtro sobre X.*

Demostración. $\emptyset \notin \bigcap F$ y $X \in \bigcap F$ pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ y $X \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$.
Sean $A, B \in \bigcap F$, esto es, $A, B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, entonces $A \cap B \in \bigcap F$.
Si $A \in \bigcap F$ y existe B tal que $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $A \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, como B es tal que $A \subseteq B \subseteq X$, se tiene que $B \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$, esto es, $B \in \bigcap F$. ☑

Proposición A.12 *Sea $C = \{\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{P}(X) : i \in I\}$ una cadena*[2] *de filtros basados en $X \neq \emptyset$, entonces $\bigcup C$ es un filtro sobre X.*

Demostración. $\emptyset \notin \bigcup C$ y $X \in \bigcup C$ pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ y $X \in \mathcal{F}_i$ para toda $i \in I$.
Si $A, B \in \bigcup C$ entonces $A \in \mathcal{F}_i,\ B \in \mathcal{F}_j$ para algunos $i, j \in I$. Sin perdida de generalidad supongamos que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$. Así $A, B \in \mathcal{F}_j$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_j$ esto es $A \cap B \in \bigcup C$.
Si $A \in \bigcup C$ y existe B tal que $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $A \in \mathcal{F}_i$ para algún $i \in I$ y como B es tal que $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $B \in \mathcal{F}_i$ para algún $i \in I$ entonces $B \in \bigcup C$. ☑

Teorema A.13 *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, sea además $\mathcal{O} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ es un filtro sobre X y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$, $\mathcal{O} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, demos a éste conjunto el orden de la contención, $(\mathcal{O}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y para cualquier cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ el filtro $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior. Entonces se satisface las condiciones del Lema de Zorn, por lo que $\mathcal{O}$ tiene un elemento maximal, el cual es un ultrafiltro que extiende a $\mathcal{F}$. ☑

Proposición A.14 *Los siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre X.*

[2]Dados 2 filtros de C uno de ellos esta contenido en el otro.

2. *Si* $A \cup B \in \mathcal{U}$ *entonces* $A \in \mathcal{U}$ *o* $B \in \mathcal{U}$*.*

3. *Para toda* $\{A_n : n < m\}$ *partición de* X $\exists n$ *tal que* $A_n \in \mathcal{U}$*.*

4. *Para toda* $A \in \mathcal{U}$ *y cada* $B \subseteq A$*, tenemos que* $B \in \mathcal{U}$ *ó* $A \setminus B \in \mathcal{U}$*.*

Demostración. Demostremos un poco más de lo necesario.
$(1 \to 2)$ Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathcal{U}$ y supongamos que $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$.
Sea

$$\mathcal{U}' = \{Y \subseteq X : A \cup Y \in \mathcal{U}\}.$$

Si $Y \in \mathcal{U}$, entonces $Y \cup A \in \mathcal{U}$; luego $Y \in \mathcal{U}'$ y así $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Puesto que $B \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$. Basta con demostrar que $\mathcal{U}'$ es filtro pues esto contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es maximal.
Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{U}'$ y $X \in \mathcal{U}'$ pues $A \cup \emptyset = A \notin \mathcal{U}$ y $A \cup X = X \in \mathcal{U}$.
Sean $Y, Z \in \mathcal{U}'$, entonces $A \cup Y, A \cup Z \in \mathcal{U}$, entonces $(A \cup Y) \cap (A \cup Z) = A \cup (Y \cap Z) \in \mathcal{U}$, entonces $Y \cap Z \in \mathcal{U}'$.
Finalmente si $Y \in \mathcal{U}'$ y existe $B \subseteq X$ tal que $Y \subseteq B$, entonces $A \cup Y \in \mathcal{U}$ y también $A \cup Y \subseteq A \cup B \in \mathcal{U}$ por lo que $B \in \mathcal{U}'$. Es pues $\mathcal{U}'$ un filtro.

$(2 \to 1)$ Suponemos que para un filtro $\mathcal{U}$ en X se cumple que si $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$. Demostremos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.
Sea $\mathcal{U}'$ un filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ y sea $Y \in \mathcal{U}'$ entonces $Y \subseteq X$ por lo que $Y \in \mathcal{U}$ o $X \setminus Y \in \mathcal{U}$, puesto que $X \setminus Y \notin \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ entonces $X \setminus Y \notin \mathcal{U}$ y así, necesariamente $Y \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$, esto es, $\mathcal{U}$ es filtro maximal.

$(2 \to 3)$ Sea $\{A_n : n < m\}$ partición de X. Como $A_0 \cup \left[\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right] = X \in \mathcal{U}$, entonces $A_0 \in \mathcal{U}$ o $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \in \mathcal{U}$ si $A_0 \in \mathcal{U}$ ya acabamos, y si $\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i \in \mathcal{U}$ estamos en el caso inicial con un índice menos, puesto que el conjunto de indices es finito tenemos que terminar en no más de m pasos para conseguir un $A_k \in \mathcal{U}$.

$(3 \to 2)$ Supongamos que $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $\{A, B \setminus A, X \setminus (A \cup B)\}$ es una partición de X. Puesto que $X \setminus (A \cup B) \notin \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \setminus A \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ ya acabamos y si $B \setminus A \in \mathcal{U}$ entonces $B \setminus A \subseteq B \in \mathcal{U}$.

$(2 \to 4)$ Sea $A \in \mathcal{U}$ y sea $B \subseteq A$ puesto que $B \cup X \setminus B = X \in \mathcal{U}$ entonces $B \in \mathcal{U}$ o $X \setminus B \in \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{U}$ ya acabamos y si $X \setminus B \in \mathcal{U}$ entonces

$A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{U}$.

$(4 \to 2)$ Sea $A \cup B \in \mathcal{U}$, como $A \subseteq A \cup B$, entonces $A \in \mathcal{U}$ ó $A \cup B \setminus A \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ ya acabamos y en el otro caso $B \setminus A = (A \cup B) \setminus A \in \mathcal{U}$, entonces $B \setminus A \subseteq B \in \mathcal{U}$. ☑

Proposición A.15 *Sea X un conjunto infinito. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre basado en X, entonces $|A| \geq \omega$ para toda $A \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Supongamos que no, i.e. existe $A \in \mathcal{U}$ con $1 < |A| < \omega$ (A no puede ser un solo punto porque $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre). Sea $A_0 \in \mathcal{U}$ tal que $1 < |A_0| < |A|$ para toda $A \in \mathcal{U}$ y escojamos un $Z_0 \in \mathcal{U}$ tal que

$$|Z_0 \cap A_0| \leq |Z \cap A_0| \text{ para cada } Z \in \mathcal{U}. \tag{A.1}$$

Entonces tenemos que $\{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\} = \mathcal{U}$.[3] Pero un conjunto así no puede ser maximal ya que para un $a \in Z_0 \cap A_0$ ($|Z_0 \cap A_0| > 1$ pues $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre), $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{Z_0 \cap A_0 \setminus \{a\}\}$ es filtro con $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$ pues $Z_0 \cap A_0 \setminus \{a\} \notin \mathcal{U}$, contradicción, pues $\mathcal{U}$ no sería un ultrafiltro. ☑

Proposición A.16 *Sea X conjunto infinito, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre basado en X, entonces para toda $A \in \mathcal{U}$, $A \setminus F \in \mathcal{U}$ para cualquier F conjunto finito.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{U}$ y supongamos que no, i.e. $A \setminus F \notin \mathcal{U}$ implica $X \setminus (A \setminus F) = (X \setminus A) \cup F \in \mathcal{U}$, como $A \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap [(X \setminus A) \cup F] \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap F \in \mathcal{U}$ contradiciendo la proposición anterior. ☑

Definición A.17 *Sea X un conjunto no vacío, decimos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un **ideal** basado en X (o sobre X) si se cumplen:*

- *$\emptyset \in \mathcal{I}$, $X \notin \mathcal{I}$.*
- *Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*
- *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Observación A.18 *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X entonces el dual $\mathcal{F}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal en X. El dual de un ideal es además un filtro.*

[3] De la definición de filtro $\{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\} \subseteq \mathcal{U}$, sea $Y \in \mathcal{U}$ y supongamos que $Z_0 \cap A_0 \nsubseteq Y$, entonces $|(Z_0 \cap Y) \cap A_0| = |(Z_0 \cap A_0) \cap Y| < |Z_0 \cap A_0|$, contradicción! con afirmación (A.1), por lo tanto $\mathcal{U} \subseteq \{B \subseteq X : Z_0 \cap A_0 \subseteq B\}$

A.3. Ordinales y cardinales

Definición A.19 *Un conjunto α es un **ordinal** si satisface ambas condiciones*

- *Si $x \in \alpha$, entonces $x \subseteq \alpha$*
- *Si $x, y \in \alpha$, entonces $x \in y$ ó $y \in x$ ó $x = y$*

La clase de todos los ordinales, denotada por ON, está bien ordenada por la inclusión, por lo que todo ordinal es igual al conjunto de todos los ordinales menores que él.

Teorema A.20 *Cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Para todo $\alpha \in ON$ el conjunto $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y es llamado el sucesor inmediato de α. Los ordinales que no son de la forma $\alpha + 1$ son llamados ordinales límites.

Definición A.21 *El ordinal infinito más pequeño es denotado por $\boldsymbol{\omega}$ y es conocido como el conjunto de los números naturales.*

Cada subconjunto $A \subseteq ON$ tiene un supremo y un ínfimo, a saber: $\sup A = \bigcup A$ e $\inf A = \bigcap A$.

Definición A.22 *Un ordinal $\kappa \in ON$ es llamado un **cardinal** si para cada $\alpha < \kappa$ no existe función inyectiva $f : \alpha \to \kappa$.*

Teorema A.23 *Para todo conjunto A existe un único cardinal κ tal que existe biyección $f : A \to \kappa$, en este caso escribimos $|A| = \kappa$. En este caso decimos que A tiene **cardinalidad** κ.*

Definición A.24 *Decimos que dos conjuntos A y B tienen la misma **cardinalidad** si existe un cardinal κ tal que $|A| = \kappa = |B|$. Decimos que un conjunto F es **finito** si $|F| = n$ para algún $n \in \omega$, en caso contrario decimos que X es **infinito**. Si X tiene cardinalidad igual que ω, decimos que X es **numerable**.*

A.4. Textos de referencia para teoría de conjuntos

Los siguientes son algunos de los libros donde se pueden consultar las demostraciones de los teoremas de éste apéndice.

☞ Fernando Hernández H. *Teoría de conjuntos*, Aportaciones matemáticas, 1998.

☞ N. Bourbaki. *Elements of mathematics. Theory set*, Addison-Wesley, 1968.

☞ N. Brunner. *The axiom of choice in topology*, Notre Dame J. Formal Logic 24 (1983) 305-317.

☞K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory and Logic.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North-Holland, 1968.

☞Kenneth Kunen, *Set Theory -An introduction to independence proofs.* North-Holland, New York, 1980.

☞W. W. Confort, S Negrepontis. *The theory of ultrafiltres*, Springer-Verlag, 1974

☞H. B. Ederton. *Elements of Set Theory*, Academic Press, 1977

Apéndice B

Nociones básicas de topología

Los teoremas siguientes se encuentran en la mayoría de los títulos de topología general, puede consultar su demostración en los textos de referencia citados al final de este apéndice.

B.1. Definiciones

Definición B.1 *Sea X un espacio topológico*

1. *$Y \subseteq X$ es **denso** en X si $\overline{Y} = X$.*

2. *$\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de abiertos en X es una **base local** de $x \in X$ si para cada U vecindad abierta de x existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subseteq U$.*

3. *X es **primero numerable** si para cada $x \in X$ existe una base local numerable de x.*

4. *X es **segundo numerable** si X tiene una base numerable.*

5. *X es **separable** si existe un subconjunto $Y \subseteq X$ denso y numerable.*

6. *X es **0-dimensional** si tiene una base de cerrados-abiertos.*

7. *$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **cubierta abierta** para $Y \subseteq X$ si $\mathcal{O}$ es una colección de abiertos de X tales que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{O}$, decimos además que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ es una **subcubierta** de $\mathcal{O}$ para Y si $\mathcal{U}$ es a su vez una cubierta abierta para Y.*

8. *X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

9. *X es **Lindelöf** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable, decimos que es **hereditariamente Lindelöf** si cualquier subespacio de X es Lindelöf.*

10. *X es **localmente compacto** (loc. comp.) si para toda $x \in X$ existe E compacto y $V \in \mathcal{N}_x$ con $V \subseteq E$.*

11. *X es **completamente regular** ($T_{3\frac{1}{2}}$) si para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x$ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f[X \setminus U] = 1$.*

12. *X es **normal** si para cada par de cerrados ajenos $F, G \subseteq X$ existen abiertos ajenos $U, V \subseteq X$ tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.*

13. *X es **numerablemente compacto** (num. comp.) si cada cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.*

14. *X es **pseudocompacto** si toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.*

B.2. Teoremas y proposiciones

Proposición B.2 *Un espacio topológico T_2 X es loc. comp. si y sólo si para toda $x \in X$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{V}$ es compacto.*

Teorema B.3 *Un espacio topológico T_2 y localmente compacto es completamente regular ($T_{3\frac{1}{2}}$).*

Teorema B.4 *En un espacio métrico X son equivalentes.*

1. *X es separable.*

2. *X es Lindelöf.*

3. *X es 2^{do} numerable.*

Proposición B.5 *Si X es num. comp. Entonces X es pseudocompacto.*

Teorema B.6 *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes*

1. *X es numerablemente compacto.*

2. *Cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

3. *X No tiene subespacios discretos cerrados infinitos.*

Teorema B.7 DE "METRIZACIÓN" DE URYSŎHN
En un espacio topológico X T_0, los siguientes son equivalentes

1. *X es regular y segundo numerable.*
2. *X es separable y metrizable.*

Definición B.8 *Decimos que (K, h) es una* ***compactación*** *de un espacio topológico X si.*

1. *K es compacto Hausdorff.*
2. *$h : X \to K$ es un encaje (i.e. $h : X \to h[X]$ es homeomorfismo.)*
3. *$h[X]$ es denso en K.*

Observación B.9 *Si X tiene una compactación entonces X es completamente regular Hausdorff. i.e. X es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Teorema B.10 COMPACTACIÓN POR UN PUNTO
Si un espacio topológico X que es localmente compacto, Hausdorff y no compacto, entonces el siguiente espacio es una compactación por un punto de X:

$$\boldsymbol{A}(X) := X \cup \{*\}, \quad * \notin X$$

cuyas vecindades son: Para los puntos de X las que ya tenía y $V \in \mathcal{N}_* \Leftrightarrow * \in V$ y $X \setminus V$ es compacto.
A $\boldsymbol{A}(X)$ se le conoce como la compactación de Alexandroff.

B.3. Textos de referencia para topología

Los siguientes son algunos de los libros donde se pueden consultar las demostraciones de los teoremas de éste apéndice.

☞ Engelking, R. *General Topology*, Berlin, Heldermann Verlag, 1989.

☞ García-Maynez, A. y Tamariz, A. *Topología General*, México, Porrúa, 1988.

☞ Nagata, J. *Modern General topology*, Amsterdam, North-Holland, 1985.

☞ Willard S., *General Topology*, Adisson-Wesley, 1970

☞ Lipschutz S., *Topología General. Teoría y Problemas*, McGraw-Hill (serie Schaum). 1970.

☞ J.Margalef, E. Outerelo, J.L.Pinilla: *Topología* (5 vol.) Ed. Alambra, 1975-1982.

Bibliografía

[1] A. R. D. Mathias, *Happy families,* Ann. Math. Logic **12** (1977), 59-111.

[2] B. Balcar, J. Dočkálková and P. Simon, *Almost disjoint families of countable sets,* Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Finite and Infinite sets **37** (1984), 59-88.

[3] E.K. van Douwen, *Mappings from hyperspaces and convergent sequences,* Topology Appl. **34** (1990), 35-45.

[4] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets,* Trans. AMS **71** (1951), 152-182.

[5] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter and M. Tkachenco, *Seletions and suborderability*, (Preprint).

[6] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[7] J. Ginsburg, V. Saks, *Some results on the countable compactness and pseudocompactness of hyperspaces*. Canad. J. Math. 27 (1975) 1394-1399.

[8] J. Keesling, *Normality and properties related to compactness in hyperspaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 760-766.

[9] J. van Mill and E. Wattel, *Selections and orderability,* Proc. AMS **83** (1981), 601-605.

[10] K. Kenneth, *Set Theory -An introduction to independence proofs.* North-Holland, New York, 1980.

[11] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set theory and Logic.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North-Holland, 1968.

[12] L'. Holá, H. P. Künzi, *Properties related to compactness in hyperspaces*. Topology Proc. 23 (1998) 191-205.

[13] M. Hrušák, P.J. Szeptycki, A. H. Tomita., *Selections on* Ψ*-spaces*. Math. Univ. Carolinae 42,1(2001)763-769.

[14] P. Simon, *A compact Fréchet space whose square is not Fréchet*. Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980),749-753.

[15] S. García-Ferreira, *Continuous functions between Isbell-Mrówka spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 39,1 (1998) 185-195.

[16] S. Mrówka, *Some set-theoric constructions in topology*. Fund. Math 94(1977),83-92.

[17] V.I. Malykhin, A. Tamariz-Mascarúa, *Extensions of functions in Mrówka-Isbell spaces*, Topology and its aplications (1997), 85-89.

Índice alfabético