



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y  
DESPLAZAMIENTOS EN PRESAS DE  
ENROCAMIENTO CON CARA DE CONCRETO  
POR MEDIO DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :

**MAESTRA EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL - GEOTECNIA

PRESENTA :

DALIA ALEJANDRA ZALDÍVAR SALINAS

DIRECTOR: DR. ALBERTO JAIME PAREDES



MÉXICO, D.F., 2008.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO:

Presidente:	Dr. Rigoberto Rivera Constantino
Secretario:	M.I. Agustín Demeneghi Colina
Vocal:	Dr. Alberto Jaime Paredes
Primer suplente:	M.I. Roberto Magaña del Toro
Segundo suplente:	Dr. Venancio Trueba López

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, UNAM.

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alberto Jaime Paredes

## *Agradecimientos*

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** y a la **Facultad de Ingeniería**, porque me brindaron la oportunidad de continuar mi formación profesional. Por el gran honor y el orgullo que es ser Universitaria. Les reitero mi cariño y compromiso.

“Por mi raza hablará el espíritu”

- ❧ -

Al CONACYT por el apoyo recibido para la realización de mis estudios de Maestría.

- ❧ -

A la Subgerencia de Seguridad de Estructuras de la CFE por facilitarme parte de la información para la realización de este trabajo. De forma especial a su Subgerente, Ing. Enrique Mena Sandoval, por el gran apoyo que me ha brindado para completar esta etapa de mi formación profesional. Al M.I. Reginaldo José Hernández Romero por su apoyo a lo largo de mis estudios de licenciatura y maestría, y por su valiosa amistad; le reitero mi admiración y respeto.

- ❧ -

A mis profesores; en especial al Dr. Venancio Trueba por sus valiosos comentarios al respecto de este trabajo y a los demás miembros del jurado, Dr. Rigoberto Rivera, M.I. Agustín Demeneghi y M.I. Roberto Magaña, por la revisión que del mismo efectuaron ya que con sus observaciones lo enriquecieron.

- ❧ -

Al Dr. Alberto Jaime Paredes por dirigirme en la realización de este trabajo. Por contribuir a mi formación profesional y personal, y por todos los conocimientos que durante sus cátedras y sesiones de trabajo compartió conmigo.

Dedico este trabajo

*A DIOS*

- ❧ -

*A mis padres*

*Yolanda Salinas Flores y Jaime Zaldívar García*

Por el gran apoyo que han sido para mí siempre. Porque con su ejemplo siguen inspirando mi superación constante y con su confianza me alientan a conseguir mis metas. Este es un nuevo logro que tengo el honor de compartir con ustedes y también son parte de él. Gracias por hacerme llegar hasta donde estoy y por haberme dado las herramientas para seguir adelante. Gracias otra vez por su esfuerzo. Siempre han sido mi luz y mi guía. Los amo.

- ❧ -

*A mi hermana Paulina*

Por tu apoyo y tu cariño. Porque hemos compartido nuestras vidas y has sido mi gran amiga. Te dedico esto porque también has sido parte de ello. Te quiero.

- ❧ -

*A la familia Zaldívar García y a las familias Salinas Flores, Salinas Lair, Treviño Salinas y Giegé Salinas*

Por compartir mis metas y ser gran parte de mis alegrías.

- ❧ -

*A mis amigos*

Dona, Mariana, Rodrigo, Rolando, Memo, Sergio, Gidi, Kiwi, Kuri, Héctor, Salvador, Bere y Liz, porque siguen siendo parte importante de mi vida.

*A mis compañeros de la Maestría*

Carmen, Catalina, Eduardo, Omar, Alejandro y Salvador, porque recorrimos esta etapa juntos, por la amistad que he encontrado en ustedes y por todo lo que les he aprendido.

- 03 -

*A Juan*

Porque no hay palabras para agradecer lo que haces por mí. Porque todo este tiempo has sido mi gran apoyo y he encontrado en ti motivación para conquistar mis metas. Porque has sido una parte fundamental de esta etapa y lo eres de mi vida. Por lo que hemos construido. Porque aún nos falta mucho por compartir. Por tus constantes comprensión y cariño. Porque me haces ser una mejor persona. Porque sigues impulsándome en el camino y lo recorres a mi lado. Porque te amo.



**ANÁLISIS DE ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS  
EN PRESAS DE ENROCAMIENTO CON CARA DE CONCRETO  
POR MEDIO DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO**

Contenido	Página
Resumen	<i>i</i>
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivo	2
1.3. Alcances	2
<b>Capítulo 2. Presas de materiales térreos</b>	<b>4</b>
2.1. Clasificación según su proceso constructivo	4
2.1.1. Presas de relleno hidráulico	4
2.1.2. Presas de materiales compactados	5
2.2. Clasificación según sus materiales constituyentes	6
2.2.1. Presas de tierra	6
2.2.2. Presas de enrocamiento	8
2.2.3. Presas de concreto rolado compactado	11
2.3. Elección del tipo de presa	13
2.4. Resumen y conclusiones	14
<b>Capítulo 3. Comportamiento de enrocamientos y gravas</b>	<b>16</b>
3.1. Rotura de granos	16
3.2. Efectos de escala	18
3.3. Determinación de las propiedades mecánicas de gravas y enrocamientos	24
3.3.1. Pruebas de laboratorio	24
3.3.2. Pruebas de campo	33
3.4. Propiedades mecánicas de gravas y enrocamientos	35
3.4.1. Resistencia al corte	35
3.4.2. Compresibilidad	39
3.4.3. Propiedades mecánicas de algunos enrocamientos	41



---

3.5.	Resumen y conclusiones	42
<b>Capítulo 4. Método del elemento finito (MEF)</b>		<b>44</b>
4.1.	Generalidades	44
4.2.	Materiales con comportamiento lineal	45
4.2.1.	Discretización del problema	45
4.2.2.	Aproximación por desplazamientos	46
4.2.3.	Formulación de las ecuaciones de los elementos	50
4.2.4.	Ecuaciones globales	55
4.2.5.	Condiciones de frontera	55
4.2.6.	Solución de las ecuaciones globales	56
4.2.7.	Cálculo de esfuerzos y deformaciones	56
4.3.	Materiales con comportamiento no lineal	56
4.3.1.	Método de la rigidez tangente	57
4.4.	Elementos finitos tridimensionales	58
4.5.	Análisis estático en LUSAS	59
4.6.	Análisis dinámico	61
4.7.	Resumen y conclusiones	62
<b>Capítulo 5. Análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas utilizando el Método del Elemento Finito</b>		<b>64</b>
5.1.	Procedimiento de construcción por incrementos	64
5.2.	Elección del modelo constitutivo	69
5.2.1.	Análisis elástico lineal	70
5.2.2.	Análisis elástico no lineal	72
5.3.	Análisis del primer llenado	78
5.4.	Análisis dinámico	81
5.4.1.	Método de la viga de cortante	81
5.5.	Resumen y conclusiones	83
<b>Capítulo 6. Aplicación: Análisis de una presa de enrocamiento con cara de concreto con el programa LUSAS</b>		<b>84</b>
6.1.	Introducción	84
6.2.	Características de la cortina	84
6.3.	Propiedades de los materiales	85





6.3.1.	Enrocamientos	87
6.3.2.	Concreto de la cara impermeable	89
6.4.	Procedimiento de análisis	89
6.4.1.	Construcción del modelo: malla de elementos finitos	90
6.4.2.	Análisis estático: construcción	92
6.4.3.	Análisis estático: primer llenado	95
6.4.4.	Análisis dinámico: sismo	96
6.5.	Resultados	97
6.5.1.	Etapas de construcción	97
6.5.2.	Primer llenado	104
6.5.3.	Sismo	106
6.6.	Mediciones de campo	109
6.6.1.	Módulos elásticos	109
6.6.2.	Asentamientos	109
6.7.	Discusión de los resultados	110
6.8.	Resumen y conclusiones	112
<b>Capítulo 7. Conclusiones</b>		<b>115</b>
<b>Referencias</b>		<b>119</b>



## Resumen

Las presas son estructuras de gran relevancia para el hombre, se construyen con el propósito de aportar diversos beneficios a las comunidades; sin embargo, su potencial falla representa grandes riesgos por las pérdidas materiales y de vidas humanas que podría ocasionar. Por ello es que resulta de gran importancia su estudio, buscando que los diseños sean cada vez más seguros y funcionales y que sus costos e impactos desfavorables disminuyan. El interés se centra en que el desempeño de la obra durante su construcción y vida útil sea satisfactorio, para lo cual es fundamental conocer la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos que ocurren en el cuerpo de la cortina por los efectos directos que ellos tienen sobre el comportamiento de la estructura. La tendencia actual hacia la construcción de presas de gran altura constituidas completamente por enrocamiento y con una cara impermeable de concreto aguas arriba, por las mayores ventajas que ofrece y por los resultados satisfactorios observados en estructuras de este tipo, reitera la importancia de su estudio.

Este trabajo presenta los fundamentos suficientes para llevar a cabo un análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas de enrocamiento con cara de concreto. El estudio incluye desde las bases teóricas del comportamiento de los enrocamientos y gravas, hasta el método del elemento finito, y posteriormente el procedimiento para efectuar dicho análisis. La teoría expuesta fue aplicada por medio del análisis de una obra real cuyos resultados fueron corroborados por medio de su comparación con las mediciones de campo efectuadas en la estructura.

Se divide en siete capítulos, de los cuales el primero es la introducción. El segundo presenta los diferentes tipos de presas y sus características. El tercer capítulo aborda el comportamiento de los enrocamientos y las gravas como materiales constituyentes de una presa de enrocamiento con cara de concreto. En el capítulo cuatro se introducen los principios y procedimientos básicos del análisis de elemento finito como herramienta para el objeto de estudio. El quinto capítulo resume el procedimiento de análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas, enfocándose en las de enrocamiento con cara de concreto. El sexto capítulo consiste en la aplicación de la teoría expuesta para el análisis de la cortina de enrocamiento con cara de concreto de la Central Hidroeléctrica El Cajón, Nayarit. El séptimo capítulo contiene las conclusiones del trabajo.

El análisis de la cortina de la presa El Cajón fue realizado con el software LUSAS (de análisis con elementos finitos) en su versión 13.8. Al tratarse de un software comercial no especializado, fue necesario complementarlo con algunos procesos adicionales debido a que guardaba ciertas limitaciones. El procedimiento arrojó resultados satisfactorios que concuerdan con las mediciones de campo. Tanto los desplazamientos calculados como los medidos registraron los mayores asentamientos durante la fase de construcción del terraplén, con lo que se espera que los desplazamientos posteriores sean menores. Los desplazamientos calculados tienen magnitudes que no representan riesgo para la seguridad y la funcionalidad de la estructura. El proceso aplicado muestra que con el uso de herramientas adecuadas y accesibles es posible llevar a cabo un análisis que proporcione resultados válidos para el diseño de estructuras tan importantes como son las de este tipo, esto mientras se incluya de forma correcta el comportamiento de los materiales constitutivos y el proceso constructivo del terraplén.



## Capítulo 1

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1. ANTECEDENTES

Las presas son estructuras que han sido construidas por el hombre desde las primeras civilizaciones. Desde obras pequeñas como bordos o diques, hasta las grandes presas construidas en la actualidad, estas estructuras se planean para proporcionar distintos beneficios para las poblaciones, como la retención de agua para consumo y riego, la regulación de las avenidas y/o la generación de energía. Sin embargo, su potencial falla representa grandes riesgos por las pérdidas materiales y daños al medio ambiente que ocasionaría, y de manera especialmente importante la pérdida de vidas humanas.

Ello ha motivado el continuo estudio de estas obras, buscando que los diseños sean más seguros y funcionales y que los costos e impacto de los mismos disminuyan. La investigación se ha dedicado tanto al comportamiento de los materiales que constituyen la presa, los tipos de diseño y los procesos constructivos, como a los métodos que permitan evaluar el comportamiento de las estructuras en las diferentes fases del proyecto. A este respecto, lo que se desea es conocer el desempeño de una presa desde la etapa de proyecto, para conocer el comportamiento esperado y así valorar la conveniencia de una u otra alternativa de diseño. También interesa prever el comportamiento durante la construcción, ya que así es posible corregir ciertas irregularidades que pudieran presentarse durante este proceso. Finalmente, este conocimiento previo permitirá su corroboración con lo que sucede en la realidad por medio de mediciones instrumentales, para así calibrar los modelos utilizados y mejorar los diseños futuros.

Así, se evidencia la importancia de la evaluación del comportamiento de una presa, la cual debe incluir un análisis de la distribución de esfuerzos y deformaciones en el cuerpo de la cortina por los efectos directos que ellos tienen sobre el desempeño de la obra. Esta consideración obedece a varias razones, entre las cuales está la estimación de la pérdida de bordo libre por asentamientos en la corona, los asentamientos diferenciales que puedan provocar agrietamientos, así como el diseño del sistema y programa de auscultación ya que la instrumentación se instala con el fin de observar la evolución de ciertas variables cuyos rangos de oscilación y ubicación deben ser estimados anticipadamente.

Para el análisis de dichas variables se han utilizado a lo largo de los años diversos métodos de cálculo. Los primeros consistían en expresiones matemáticas enfocadas prácticamente en la determinación de los asentamientos tanto en el terraplén como en su cimentación. Sin embargo, el desarrollo de herramientas de análisis numérico ha permitido la modelación y estudio de los problemas de forma global, con la posibilidad de conocer la distribución de los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos en todo el cuerpo del terraplén de acuerdo con las condiciones de carga impuestas. En consecuencia, es posible realizar los análisis de esfuerzos y deformaciones para distintas fases críticas del desarrollo de la obra, como son su construcción, el primer llenado y la ocasión de un evento sísmico. Estas etapas son las que se consideran primordiales ya que es durante ellas que ocurren los cambios más significativos en las condiciones de carga. Entre los métodos numéricos aplicados para tal fin, el de los elementos finitos es el más utilizado ya que ha probado ser de gran utilidad práctica.



Por otro lado, conforme el diseño y la construcción de presas han seguido su evolución, se han desarrollado más y mejores técnicas para el estudio de las propiedades de los materiales térreos y para el control de los procesos constructivos. El conocimiento más profundo que se tiene acerca del comportamiento de los distintos materiales ante las cargas impuestas por la construcción de un terraplén, así como la fabricación de mejores y más grandes equipos de compactación ha permitido que las presas alcancen cada vez mayores dimensiones conservando la seguridad que estas obras requieren. Así mismo, el estudio de los diseños anteriores ha contribuido para mejorar y hacer más eficientes las obras, con lo que se logra su ejecución en lapsos menores y se reduce su costo. La tendencia actual hacia la construcción de presas de gran altura constituidas completamente por enrocamiento y con una cara impermeable de concreto aguas arriba obedece a las mayores ventajas que ellas representan sobre las de otro tipo y a los resultados satisfactorios que se han obtenido con estructuras de este tipo construidas en todo el mundo.

## **1.2. OBJETIVO**

El objetivo de este trabajo es presentar los fundamentos suficientes para llevar a cabo un análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas de enrocamiento con cara de concreto. El estudio incluye desde las bases teóricas del comportamiento de los enrocamientos y gravas, hasta el método del elemento finito, y posteriormente el procedimiento para efectuar dicho análisis. Parte fundamental del objeto de este estudio fue la ejemplificación de la teoría expuesta por medio de una aplicación práctica sobre una estructura real, cuyos resultados fueron corroborados por medio de su comparación con las mediciones de campo efectuadas en la presa.

## **1.3. ALCANCES**

Este trabajo se enfoca en el análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas de enrocamiento con cara de concreto. En él se hace una recopilación de la teoría detrás de dicho análisis, así como del procedimiento a seguir para su realización, con un ejemplo de aplicación práctica referente a una estructura real ya construida.

El trabajo se divide en siete capítulos, de los cuales el primero es esta introducción. El segundo capítulo presenta los diferentes tipos de presas, con sus características, materiales utilizados y una breve descripción de sus procedimientos de construcción. En algunos casos se mencionan ciertas particularidades propias del tipo de presa, así como las ventajas de unas sobre otras. También se presentan los factores más importantes que influyen en la elección del tipo de presa, entre los cuales están los de tipo geológico, geotécnico, climático, de costo y de seguridad.

El tercer capítulo aborda el comportamiento de los enrocamientos y las gravas como materiales constituyentes primordiales de una presa de enrocamiento con cara de concreto. Se tratan las propiedades mecánicas de dichos materiales, resistencia y deformabilidad, así como las pruebas y equipos de campo y laboratorio que sirven para la determinación de las mismas. Parte importante del estudio de estos materiales son los fenómenos particulares que en ellos ocurren, como lo es la rotura de granos, y los efectos de escala que tienen lugar al ensayar muestras de menor tamaño de partículas que las presentes en campo, debido a la gran dificultad que representa hacerlo sobre estas últimas. Todo ello también es tratado en este capítulo.



En el capítulo cuatro se introducen los principios y procedimientos básicos del análisis de elemento finito para problemas estáticos, en materiales con comportamiento lineal y no lineal. Asimismo, se indica el procedimiento del método para la realización de un análisis dinámico.

El quinto capítulo resume el procedimiento por medio del cual se lleva a cabo un análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas, enfocándose en las de enrocamiento con cara de concreto, con las consideraciones especiales que deben hacerse para este tipo de estructuras. Dicho análisis incluye las fases de mayor interés para el estudio del comportamiento, es decir la construcción del terraplén, el primer llenado del embalse, y la ocurrencia de un evento sísmico. Para la realización de este análisis se presentan los modelos constitutivos más utilizados para describir el comportamiento de los enrocamientos.

El sexto capítulo conjunta el contenido de los anteriores en la aplicación de la teoría expuesta para el análisis de la cortina de enrocamiento con cara de concreto de la Central Hidroeléctrica El Cajón, Nayarit, la última construida a la fecha en México y recién terminada el año anterior. En el capítulo se exponen las hipótesis y el procedimiento de análisis con el programa de elementos finitos LUSAS 13.8. Enseguida se presentan los resultados de los módulos elásticos, desplazamientos y esfuerzos calculados, y éstos se comparan con las mediciones de campo efectuadas y proporcionadas por la Comisión Federal de Electricidad. Finalmente, se discuten el análisis y los resultados frente a las mediciones instrumentales.

Por último, el séptimo capítulo contiene las conclusiones del trabajo.



## Capítulo 2

### PRESAS DE MATERIALES TÉRREOS

Las presas de tierra son de las estructuras más antiguas construidas por el hombre. Los chinos, antes de la era cristiana, habían construido bordos de gran longitud y compactaban la tierra con varas de carrizo manejadas por grandes grupos de obreros. Los hindúes desarrollaron este tipo de obra desde el año 500 AC y hace 450 años construyeron una presa de 33 m de altura, la cual falló por falta de una obra de excedencias. Los mexicas, bajo el gobierno de Netzahualcóyotl en 1450, construyeron estructuras de este tipo para protección contra inundaciones, como el albarradón que dividía los lagos de Texcoco y Xaltocan, (Benassini, 1975). En 1798, en España se terminó la presa Estrecho de Riente de 45 m de altura, pero su falla 3 años después causó desaliento en la ingeniería de presas europea con lo que se dejaron de construir presas de tamaño similar por varios años. A partir del siglo XX es cuando adquiere mayor auge la construcción de presas de materiales térreos, y es desde la segunda mitad de éste cuando se llevan a cabo numerosas investigaciones que han permitido extender el conocimiento en diversos campos alrededor de este tipo de estructuras, así como mejorar los criterios de diseño y su comportamiento.

Las presas o cortinas pueden clasificarse de acuerdo con varios criterios, en el presente texto se considerarán dos: según su proceso constructivo y según los materiales que la constituyen. De acuerdo con su proceso constructivo las presas pueden clasificarse en presas de relleno hidráulico y presas de materiales compactados. Según los materiales que las conforman, pueden distinguirse las de tierra y las de enrocamiento, aunque muchos de los materiales utilizados se encuentran en una zona intermedia entre ambos. De hecho las presas de tierra contienen una parte de enrocamientos en sus taludes externos, por lo que la diferencia consiste en que en las de enrocamiento este tipo de material constituye el mayor elemento estructural de la cortina.

A continuación se mencionan los distintos tipos de presa dentro de las clasificaciones mencionadas.

#### 2.1. CLASIFICACIÓN SEGÚN SU PROCESO CONSTRUCTIVO

##### 2.1.1. Presas de relleno hidráulico

Se les denomina de esta forma ya que su principal característica es que los materiales que las integran, tanto los finos del corazón como los granulares de los respaldos, son atacados en la cantera, conducidos a la cortina y colocados en ella por medios hidráulicos. Su construcción requiere de la realización de un estanque al centro del terraplén y canales de distribución que partan de los taludes exteriores. Manteniendo un control estricto de las pendientes de estos canales, se logra que los fragmentos de mayor tamaño se depositen en la vecindad de los taludes exteriores y la fracción arcillosa o limosa se sedimente en la parte central, quedando entre ambos una zona de transición gradual, figura 2.1.

La cantera debe prestarse a un ataque hidráulico con chiflones y tener una composición granulométrica aceptable y homogénea. La conducción de los materiales es también por medios hidráulicos por lo que se requiere contar con un desnivel importante entre la cantera y la cortina para que el flujo mantenga una velocidad alta. En caso contrario puede explotarse la cantera y transportar el material con camiones a la cortina, donde se coloca y

se ataca por medio de chiflones para que sedimente según el diseño, desde los taludes exteriores hasta el centro de la sección.

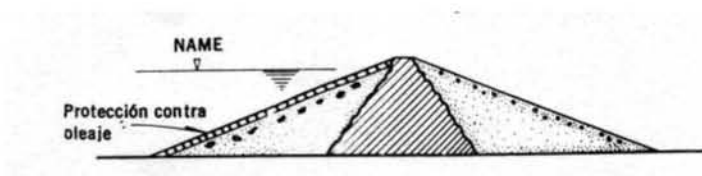


Figura 2.1. Presa de relleno hidráulico.

Debido al proceso constructivo, las fronteras entre los distintos tamaños de materiales son variables, y más bien se cuenta con una sección en la cual se pasa de las partículas mayores hasta las finas de forma gradual. Para verificar la estabilidad de la cortina se requiere determinar el límite entre los materiales granulares y los cohesivos, lo cual se puede lograr a partir de la composición granulométrica media del material utilizado. Sin embargo, una variación importante en el material de cantera o un control deficiente de la colocación del material en la cortina producirá fronteras irregulares entre sus componentes, efecto indeseable para una presa.

A pesar de lo accesible que resulta este método constructivo en términos de costo, cuenta con algunas desventajas que han provocado que su uso se haya reducido. La más importante es que los materiales son colocados en estado suelto, con lo que se disminuye su resistencia al corte y aumenta su compresibilidad, además de que son más susceptibles a licuación que aquellos que se compactan. El desarrollo de los equipos y métodos de compactación, así como los buenos resultados que con ella se obtienen, también han contribuido al desuso de este tipo de presas.

### 2.1.2. Presas de materiales compactados

El estudio del proceso de compactación de los suelos y el desarrollo de equipo adecuado para este fin han tenido gran efecto en el avance de la ingeniería de presas. La compactación de los materiales térreos comenzó con el uso de rebaños de ovejas en la Europa del siglo XIX, al que siguió la utilización de rodillos pesados de concreto o hierro. Posteriormente se desarrolló el rodillo *pata de cabra* en California, en 1905, y más tarde los rodillos vibratorios que permiten compactar desde materiales granulares finos hasta enrocamientos. Paralelamente, los estudios en laboratorio y en campo han permitido ampliar el conocimiento acerca del comportamiento de los materiales compactados, incluyendo los suelos finos cohesivos, los suelos granulares y las gravas y enrocamientos. Lo anterior ha permitido disminuir los costos de las obras, así como el lapso de la construcción de los terraplenes.

Las características de la sección de una presa de materiales compactados dependen de varios factores, entre los cuales se cuentan la disponibilidad de suelos y roca para los terraplenes, las propiedades mecánicas de dichos materiales, la topografía del lugar y las condiciones geológicas.

Algunas de las variantes de este tipo de presas son: presas homogéneas (con o sin filtros), presas de materiales graduados, y presas de enrocamiento. En el siguiente inciso se detalla acerca de las generalidades de estos tipos.

## 2.2. CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS MATERIALES CONSTITUYENTES

### 2.2.1. Presas de tierra

#### *PRESA HOMOGÉNEA*

Está construida casi en su totalidad por suelos arcillosos compactados, a través de los cuales se establece la red de flujo. En el talud aguas arriba cuenta con una protección contra oleaje formada por enrocamientos de gran tamaño (*rip rap*). Se le pueden colocar filtros con el fin de que interseca el flujo de agua y que éste no alcance el talud de aguas abajo. Los filtros se forman con arena bien graduada generalmente en la base del terraplén. Cuando los materiales de la cortina son susceptibles al agrietamiento y se prevé que esto pueda suceder (e.g. la presa se cimentó en materiales compresibles) se suelen colocar drenes verticales o chimeneas conectadas al filtro horizontal, o a un sistema de drenaje en la cimentación.

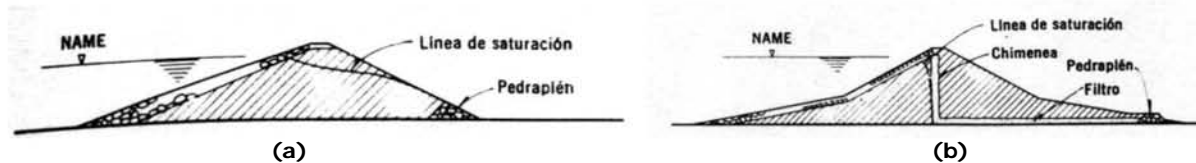


Figura 2.2. (a) Presa homogénea, (b) presa homogénea con filtros vertical y horizontal.

#### *PRESA DE MATERIALES GRADUADOS*

Se le denomina de materiales graduados ya que la distribución del tamaño de materiales es gradual. Los suelos finos que constituyen la barrera impermeable se colocan en el corazón, al centro de la cortina; en seguida se colocan los filtros, compuestos por material granular fino; hacia los costados se encuentran las transiciones, compuestas por materiales más gruesos; y finalmente, en los taludes exteriores se colocan los enrocamientos, en los que también se trata de colocar el material de forma gradual respecto de sus tamaños. Generalmente la sección de este tipo de presas es simétrica, como muestra la figura 2.3, y su uso depende de que se cuente con la serie de materiales mencionados en las cantidades adecuadas para proveer de seguridad a la estructura en cuanto a estabilidad y capacidad de retención de agua. Los materiales adyacentes deben cumplir con algunas condiciones de granulometría y permeabilidad para garantizar que las filtraciones a través de la cortina no produzcan pérdidas de material.

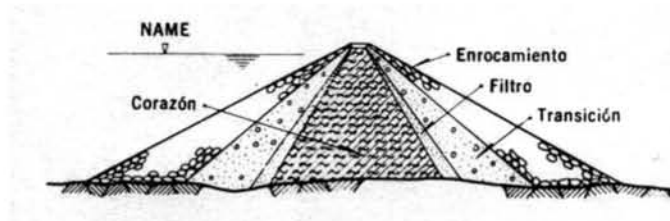


Figura 2.3. Presa de materiales graduados.

Ha sido frecuente que en la construcción de este tipo de estructuras se incluya a las ataguías dentro del cuerpo de la cortina, para lo cual deben ser diseñadas como estructuras permanentes y acordes con las características y zonificación de la sección.





El flujo de agua se impide o minimiza por medio de la zona impermeable localizada en la parte central o hacia aguas arriba de la cortina. El espesor de dicha zona depende de la cantidad de materiales disponibles para su construcción, y debe ser tal que se eviten altos gradientes hidráulicos y que se prevenga su arqueado sobre las transiciones y la formación de grietas horizontales.

En ocasiones en el cauce del río existen depósitos aluviales permeables en la zona de cimentación de la presa. Cuando el espesor de los mismos es tal que retirarlos resultaría en un alto costo para la obra, una alternativa es llevar el corazón impermeable hasta la roca mediante una trinchera, de cuando mucho 20 m de profundidad. Si el estrato de aluvión es de una mayor profundidad o alta permeabilidad (alrededor de  $10^{-1}$  cm/s) se puede colocar un delantal de arcilla compactada (prolongación horizontal del núcleo hacia aguas arriba) o una pantalla impermeable formada por inyecciones o pilotes o muros de concreto colados *in situ*. Es posible también utilizar una combinación de las opciones anteriores.

Las presas de tierra se han construido en casi cualquier tipo de topografía, pero generalmente no se utilizan en sitios con laderas muy verticales. Las boquillas amplias son más propicias para la construcción de presas de corazón central. Las condiciones que favorecen la selección de una cortina de tierra para un sitio específico son:

- Espesor significativo de los depósitos de suelo que subyacen a la roca.
- Roca de cimentación débil o blanda, con lo que los esfuerzos impuestos por otro tipo de presas serían excesivos.
- Laderas formadas por depósitos de suelo o roca blanda.
- Disponibilidad de suelos para el terraplén en zonas cercanas y en las cantidades requeridas.

Las boquillas donde las laderas sean muy verticales, especialmente cuando tengan fuertes cambios de pendiente, contribuyen a la aparición de grietas transversales en el terraplén. Las grietas transversales se desarrollan como resultado de tensiones en el terraplén, causadas por asentamientos diferenciales excesivos o cambios abruptos en las pendientes de los empotramientos. Por tanto, las zonas de transición, particularmente la de aguas arriba, deben construirse con rellenos no cohesivos y bien graduados que permitan el relleno de las grietas transversales que puedan presentarse. Para minimizar el agrietamiento, el corazón impermeable debe compactarse con una humedad poco mayor que la óptima para lograr un comportamiento plástico que permita mayores deformaciones. Las grietas longitudinales ocurren cuando el núcleo es menos compresible que las transiciones y enrocamientos, al ajustarse éstos a su peso propio o con el primer llenado. Las grietas horizontales del núcleo pueden presentarse si éste fue compactado en su rama seca y muy alejado de su humedad óptima; al saturarse con el llenado del embalse se asienta y si las transiciones son menos compresibles se presenta arqueado, el cual resulta en agrietamiento horizontal.

Los taludes exteriores del terraplén se determinan de acuerdo con la resistencia de los materiales que lo componen y de la cimentación. Las condiciones que se consideran para la estabilidad son durante y al final de la construcción, primer llenado, vaciado rápido del embalse y sismo. En ocasiones se colocan bermas en los taludes para favorecer la estabilidad.

El talud y las bermas de aguas abajo deben estar protegidos contra la lluvia. El de aguas arriba debe protegerse además contra erosión por las olas del embalse, lo cual se logra con la colocación de enrocamientos de gran tamaño o *rip rap*. Sus dimensiones se determinan



con base en la altura esperada de las olas que a su vez depende de la velocidad máxima y duración del viento, así como de la configuración del embalse.

En la altura de la presa deben considerarse futuros asentamientos del terraplén y la cimentación, de manera que las olas que se formen en el embalse en condición de llenado no sobrepasen la cortina. También deben tomarse previsiones respecto de los asentamientos producidos por la acción de sismos que se traducen en pérdida de bordo libre, al igual que si existe la posibilidad de deslizamientos de masas de tierra hacia el embalse que produzcan olas de grandes dimensiones.

La magnitud de los sismos a que pueda estar sujeta la estructura determina en gran medida la zonificación de la presa y las proporciones cada uno de sus materiales componentes.

Las presas con corazones delgados han sido utilizadas para superar las dificultades impuestas en el proceso constructivo cuando el clima es lluvioso. Sin embargo, en el proyecto de este tipo de estructuras deben tomarse en cuenta las condiciones climáticas, ya que el programa de construcción dependerá de que la temperatura y humedad ambientales sean adecuadas para el manejo y colocación de los materiales finos, especialmente, según lo marque el diseño.

### **2.2.2. Presas de enrocamiento**

Los enrocamientos han servido como materiales para las estructuras de retención de agua desde las primeras presas construidas por el hombre. La presa más antigua de que se tiene conocimiento (Kerisel, 1985), fechada alrededor de 4000 A.C., fue construida de tierra con caras de mampostería. Algunas de las primeras presas construidas mayormente de enrocamiento, en California a mitad del siglo XIX, tenían barreras impermeables formadas por tablonces de madera colocados en la cara de aguas arriba. Más tarde la madera fue sustituida por concreto reforzado, sin embargo las deformaciones de la cara de aguas arriba se convirtieron en un serio problema. Bajo la carga impuesta por el llenado del embalse, la losa de concreto se flexionaba e incluso se agrietaba, o las juntas en el perímetro se abrían, permitiendo el flujo de agua a través de la cortina. Inmediatamente se presentaban asentamientos importantes que conducían a mayores filtraciones.

El escaso conocimiento acerca del comportamiento de los enrocamientos hacía creer que los asentamientos se debían a la utilización de rocas blandas que se rompían en sus contactos. Se pensaba también que los finos en la masa no permitían contactos eficientes entre las partículas mayores y al ser lavados por el agua de filtraciones, los asentamientos se incrementaban. Por ello se especificaba, de forma errónea, el uso de enrocamientos uniformes, sin finos, compuestos por rocas competentes. En 1934 se constató, por efecto de la lluvia durante la construcción de la presa Cogswell, que la inyección de agua aún con partículas sin finos produce asentamientos importantes. Para esta época el material se colocaba a volteo.

Los estudios realizados por diversos investigadores con objeto de evaluar el comportamiento de los enrocamientos para la construcción de nuevas presas durante la segunda mitad del siglo XX, así como las experiencias acumuladas, condujeron al reconocimiento de que un material bien graduado producía menores asentamientos, además de que la aplicación de agua durante la colocación del material favorecía que éstos sucedieran durante la construcción y no después, con lo que el mismo proceso constructivo los subsanaba. Paralelamente, el desarrollo del proceso y los equipos para la compactación de los suelos,

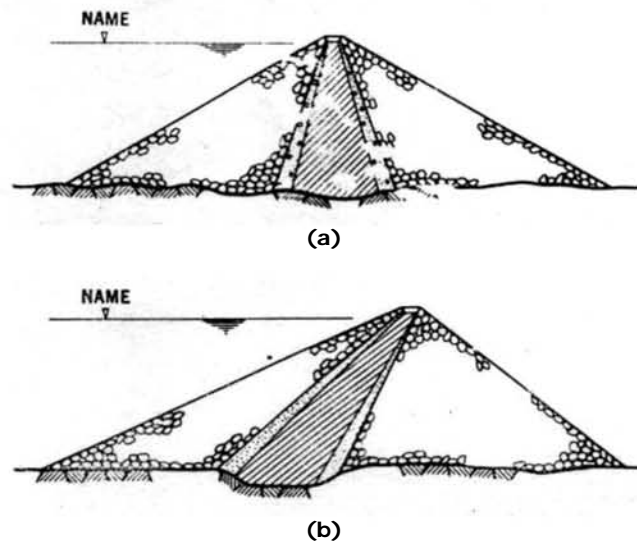
así como el ensaye en terraplenes de prueba ha permitido obtener mejores resultados (menor deformabilidad y mayor resistencia) de los enrocamientos compactados.

Actualmente la colocación de los enrocamientos se lleva a cabo con base en especificaciones del espesor de las capas, del número de pasadas y el peso del equipo compactador, y de la cantidad de agua que se aplica para una granulometría dada.

A continuación se mencionan algunos aspectos importantes de las presas de enrocamiento, las cuales pueden subdividirse en dos grupos: las de enrocamiento con corazón impermeable y las de enrocamiento con pantalla impermeable.

#### *PRESAS DE ENROCAMIENTO CON CORAZÓN IMPERMEABLE*

Las de corazón impermeable tienen un núcleo formado por material arcilloso el cual está protegido en sus costados por filtros de arena. Lo pueden tener de forma vertical en la parte central, o inclinado hacia aguas abajo (figura 2.4). Al igual que en las presas de materiales graduados, los materiales adyacentes deben cumplir con las condiciones granulométricas de retención y permeabilidad.



**Figura 2.4. Presa de enrocamiento con núcleo (a) central, (b) inclinado.**

#### *PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA IMPERMEABLE*

Las de pantalla impermeable se constituyen en su totalidad por enrocamiento y cuentan con una pantalla (losa) de concreto o asfalto en el talud aguas arriba, como aparece en la figura 2.5. Éstas presentan algunas dificultades respecto de otras alternativas, como lo es la junta entre la pantalla y la cimentación o los empotramientos debido a la ocurrencia de asentamientos diferenciales que producen la rotura de la unión y consecuentemente se presentan filtraciones que pueden llegar a ser importantes.

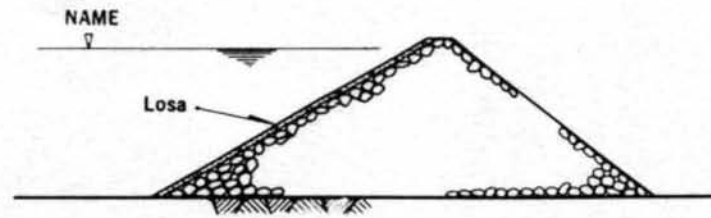


Figura 2.5. Presa de enrocamiento con pantalla impermeable.

El diseño básico de una presa de enrocamiento con cara de concreto (CFRD por sus siglas en inglés) es muy similar para todas las presas. Son tres sus componentes principales (Cooke, 2000):

- El plinto es el elemento de apoyo no erosionable. Si el material de cimentación es roca sana no erosionable, el tratamiento es menor. Si se cimenta sobre roca erosionable o con discontinuidades importantes debe tenerse especial atención al proceso de inyecciones y sellos de impermeabilización, así como a los filtros aguas abajo del plinto.
- El terraplén de enrocamiento es el elemento estructural. La sección se diseña con distintas zonas, de manera que pueda soportar la carga del agua en el embalse con asentamientos mínimos, y para contar con una cortina segura ante flujo a través del cuerpo en caso de que la cara de concreto sufra agrietamientos. Este tipo de diseño es capaz de soportar de manera segura casi cualquier filtración que pueda ocurrir.
- La cara de concreto es el elemento impermeable, sin embargo su agrietamiento no compromete la seguridad de la obra, debido a lo mencionado en el punto anterior. Las grietas pueden ser subsanadas inyectándoles material fino. Requiere especial atención el tratamiento y los materiales de las juntas entre las losas y entre las losas y el plinto, ya que son éstas quienes estarán sujetas a esfuerzos que pueden causar ruptura debido a los asentamientos diferenciales.

Este tipo de presa ha permitido que los volúmenes de material utilizado se reduzcan, ya que la resistencia al corte y el peso de los enrocamientos generalmente permiten que los taludes exteriores tengan mayor pendiente y conserven su estabilidad. Así mismo, los procedimientos constructivos favorecen la reducción de los tiempos de construcción. Tienen la ventaja de que pueden ser construidas bajo casi cualesquiera que sean las condiciones climáticas, algunas de las cuales para las de otro tipo resultan adversas, como en climas fríos, secos o muy húmedos. Como consecuencia de los puntos anteriores, el costo esperado de la obra también se ve disminuido.

Las presas con pantalla impermeable tienen varias ventajas sobre las de otro tipo. Proveen mayor seguridad contra deslizamiento que las presas de núcleo central, las inyecciones de impermeabilización pueden realizarse al mismo tiempo que se construye el pedraplén, y la pantalla puede construirse durante o después de la colocación de los enrocamientos; además, si el uso de la presa lo permite, puede ser vaciada para inspeccionar el diafragma. Esta opción resulta económica también si es necesario que el embalse sea utilizado mientras se construye la presa. Además pueden diseñarse para que algunas avenidas fluyan sobre o a través de la estructura parcialmente construida.

La cimentación de una presa de enrocamiento debe ser capaz de soportar asentamientos y deformaciones. Adicionalmente, el costo de la obra se ve disminuido si se cimienta en una topografía en la que la roca sana se encuentre cerca de la superficie.

Los terraplenes de prueba y pruebas de resistencia sirven para determinar si los materiales disponibles son aptos para ser utilizados para la cortina. Generalmente las obras alternas, como el vertedor, los túneles de desvío y obras subterráneas proveen gran parte del enrocamiento para el cuerpo de la cortina.

### 2.2.3. Presas de concreto compactado rodado

Las presas de concreto compactado rodado (CCR) son un desarrollo relativamente reciente, y surgen como la evolución de dos tecnologías: la de "relleno estabilizado" y la tradicional de presa de concreto masivo. Su sección transversal es similar a aquella de concreto tipo gravedad, como aparece en la figura 2.6. Los conceptos iniciales del uso de concreto rodado compactado se originaron a partir de los rellenos estabilizados. Sin embargo, los criterios de diseño y técnicas de análisis utilizados en una gran cantidad de proyectos son los de una presa de gravedad convencional.

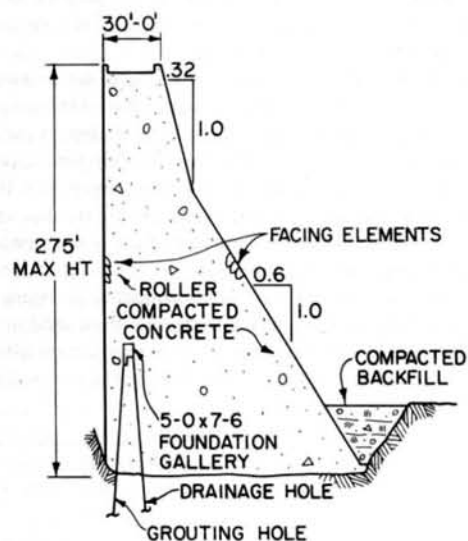


Figura 2.6. Sección transversal de la presa de CCR Upper Stillwater (USBR citado por Dolen, 1988).

El concreto compactado rodado recién mezclado tiene la apariencia de una grava bien graduada y húmeda. Es una mezcla que frecuentemente contiene bajas cantidades de cemento en comparación con un concreto convencional. Puede ser transportado en camiones, esparcido con bulldozer, y compactado con un rodillo vibratorio. El tamaño máximo de agregado para su uso masivo fluctúa entre 152 y 38 mm. Generalmente se le coloca y compacta en capas de 23 a 46 cm. Después de la compactación, el material se endurece y se convierte en un concreto áspero en su superficie, la cual no está compactada y es no uniforme; no obstante, en su interior es muy similar a un concreto convencional.

Como cualquier concreto, el CCR puede tener diversas calidades, contenidos de cemento, y propiedades materiales. También puede contener una gran variedad de agregados, incluso aquellos que por su composición mineralógica o granulometría se consideran no aptos para un concreto convencional. De hecho, la adición de una cantidad sustancial de finos no

plásticos permite mejorar la compactación, la resistencia y el manejo del concreto. La granulometría típica del concreto CCR contiene una cantidad significativa de partículas más pequeñas que las usadas para el concreto convencional, incluso la cantidad de partículas menores que la malla No. 200 es sustancialmente mayor. El límite máximo recomendado de contenido de finos es 10%, ya que se ha observado que una cantidad mayor reduce la calidad y resistencia de la mezcla. Si lo que se busca es una mezcla de alta resistencia, se sugiere un contenido de finos de 1 o 2%. La figura 2.7 muestra las curvas granulométricas típicas para ambos tipos de concreto.

Adicionalmente, su bajo contenido de cemento reduce la cantidad de álcali disponible, con lo que es posible el uso de algún agregado potencialmente reactivo, cuidando únicamente que la reacción que se produzca no ocasione expansiones excesivas. Dolan (1988) presenta una discusión más amplia de los materiales y mezclas utilizados para la construcción de presas de CCR, aunque es necesario mencionar que cada proyecto es independiente y en cada uno deben analizarse de forma particular las características del concreto que resulten más adecuadas.

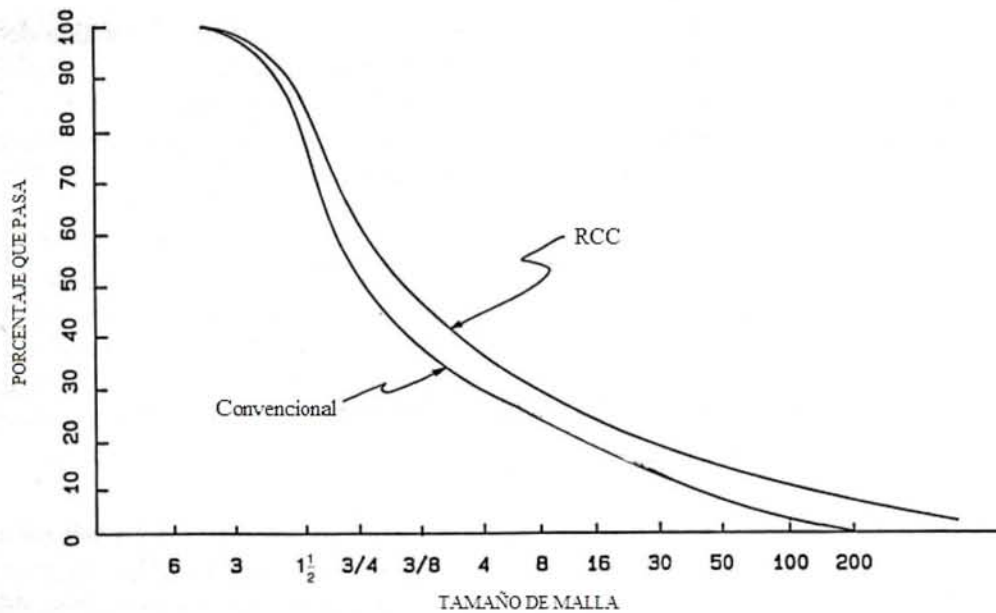


Figura 2.7. Curvas granulométricas típicas del concreto convencional y el CCR.

A diferencia de una presa de concreto masivo convencional, el CCR se coloca a lo largo de grandes áreas en cada capa, generalmente de un margen a otra y de la cara de aguas arriba a la de aguas abajo. En consecuencia, la planeación y programación previas y detalladas del proceso constructivos son cruciales. Además, será necesario contar con la cantidad suficiente de agregados para el concreto y un sistema de transporte y colocación eficiente. Se deben tomar las previsiones necesarias en cuanto a equipo disponible, tiempo y costo. Es común que este tipo de estructuras se construya en boquillas angostas para que la colocación del material sea de manera continua, aunque generalmente no se utilicen para proyectos de gran altura.

Debido al proceso constructivo, tanto la preparación de la mezcla, como el transporte, colocación y compactación del concreto son etapas cruciales que requieren especial atención. En cuanto a la mezcla de los agregados, debe contarse con el equipo adecuado



que alimente el cemento de manera uniforme, especialmente cuando el contenido de cemento es muy bajo. Como regla, el acarreo debe completarse a los diez minutos del mezclado, el concreto debe extenderse en diez minutos después de la colocación, y debe compactarse en los diez minutos siguientes. El tiempo total de construcción de cada capa debe ser alrededor de 40 minutos, con el fin de que no se desarrollen juntas frías entre capas con la resultante pérdida de estabilidad. Una vez colocado, el CCR, como cualquier concreto, requiere un procedimiento de curado, sin embargo entre capas sucesivas no se recomienda utilizar componentes de curado ya que pueden romper la liga entre ellas. Únicamente deben mantenerse húmedas las capas previo a la colocación de la siguiente.

### 2.3. ELECCIÓN DEL TIPO DE PRESA

La selección del tipo de cortina se basa en un criterio predominantemente económico. La concepción general y los detalles de diseño de una presa se determinan eligiendo la alternativa que, adaptándose a las condiciones del sitio, resulta en el menor costo total esperado para la obra, el cual se puede expresar como (Reséndiz, 1975):

$$C_T = C_0 + \sum_i P[c_i p_i] \quad (2.1)$$

donde:

- $C_0$  = costo inicial esperado
- $c_i$  = costo consecuente del daño tipo  $i$
- $p_i$  = probabilidad del daño tipo  $i$
- $P[c_i p_i]$  = valor presente de  $c_i p_i$

La ecuación anterior es útil para la comparación de las opciones, aún cuando la estimación de  $p_i$  y  $c_i$  no es determinista. Debe considerarse también que el costo de imprevistos en la construcción puede ser significativo, particularmente en los aspectos geológicos relacionados con las obras. Este costo puede disminuirse si las investigaciones de campo se llevan a cabo con más detalle, si el programa de construcción considera las condiciones climáticas del lugar y si se cuenta con personal experimentado en las distintas áreas del diseño y construcción.

Los principales factores que afectan el diseño de una presa son:

- Función de la obra
- Tipo, cantidad y localización de los materiales a utilizar
- Características de la boquilla, cimentación y vaso
- Clima y tiempo disponible para la ejecución
- Características geológicas y sismológicas regionales

A estos se les ha llamado factores objetivos del diseño, no obstante, fijos todos ellos pueden existir varias alternativas que parezcan igualmente satisfactorias para muchos aspectos del proyecto. La gran cantidad de variables involucradas y sus relaciones tan estrechas hace imposible evaluar a todas ellas de forma estricta, por lo que se consideran además factores subjetivos como la experiencia y preferencia del proyectista o su interpretación de un comportamiento satisfactorio o indeseable de otras obras en condiciones similares.

Excepto en los casos en que la elección del tipo de presa resulta obvio, los cuales son reducidos, resultará necesario realizar diseños preliminares y estimaciones para diversos



tipos de presas antes de encontrar la alternativa definitiva respecto de todos los factores influyentes incluido el económico. En muchos casos el tipo de presa será elegido respondiendo a las dificultades que represente el desvío del río, o en otros casos la disponibilidad de equipo o mano de obra, e incluso la accesibilidad del sitio. La elección final atenderá a las características de cada tipo de presa en relación con la función de la obra y las particularidades del sitio, así como la economía y la seguridad, Aunque generalmente el factor determinante en la selección será el costo de la construcción.

La función de la obra es un factor determinante de las dimensiones de la cortina y de las obras complementarias, lo que a su vez tiene efecto sobre la elección del tipo de cortina.

La topografía es un factor que afecta en gran medida la elección preliminar del tipo de presa. Un cauce angosto que fluye entre laderas verticales y rocosas sugiere la construcción de una presa de concreto. Una boquilla más abierta puede ser propicia para una presa de tierra con vertedor lateral. Sin embargo, esta preselección puede no ser definitiva y entonces otras consideraciones toman mayor importancia, al igual que en los casos en los que se presentan condiciones topográficas intermedias.

Las condiciones geológicas del material en el que se planea cimentar la presa pueden determinar hasta cierto punto la elección del tipo de obra. Una cimentación sobre roca sólida generalmente no impone muchas restricciones en cuanto al tipo de presa debido a su alta resistencia y baja permeabilidad, aunque siempre será necesario remover la roca alterada e inyectar las fracturas y discontinuidades. Las cimentaciones en grava son usualmente aptas para presas de tierra, de enrocamiento o de concreto cuando son de poca altura; por la naturaleza granular de estos materiales será necesario efectuar trabajos de impermeabilización que impidan de forma efectiva el paso del agua. Las arenas finas o limos pueden constituir el material de cimentación de cortinas de tierra, o de concreto con poca altura si se diseñan apropiadamente; en estos casos los principales problemas a resolver serán los asentamientos excesivos, las filtraciones y erosión del material, así como su susceptibilidad de licuación. Las arcillas como suelo de cimentación pueden ser utilizadas para presas de tierra, pero requieren de tratamientos especiales para evitar asentamientos excesivos si el estrato no está consolidado o si el contenido de agua es alto; por tanto, no son recomendables para cimentar presas de concreto o de enrocamiento. En todos los casos el material de cimentación debe estudiarse cuidadosamente, sobre todo si no es uniforme.

La disponibilidad de materiales también es un factor de gran importancia para la elección del tipo de cortina, ya que la reducción de los costos de transporte tendrá un efecto considerable en el costo total de la obra. Frecuentemente se hace uso de materiales producto de excavaciones de obras alternas para la construcción de los terraplenes.

#### **2.4. RESUMEN Y CONCLUSIONES**

Las presas de materiales térreos son estructuras que han estado presentes en la historia de las civilizaciones y que han evolucionado en cuanto a sus diseños, procesos constructivos y materiales. Según su proceso constructivo pueden distinguirse en presas de relleno hidráulico y presas de materiales compactados. Según los materiales que las constituyen pueden clasificarse en presas de tierra y presas de enrocamiento.

En las presas de relleno hidráulico, todos los materiales que la forman son atacados, transportados y colocados por medios hidráulicos, desde los finos del corazón hasta los granulares de los respaldos. Su construcción es cada vez menos frecuente ya que el proceso





de colocación hace que los materiales se depositen en estado suelto, con menor resistencia y mayor compresibilidad, además de su susceptibilidad de licuación. Los avances en equipo y métodos de compactación así como la investigación en laboratorio y campo de este proceso han permitido que las presas de materiales compactados sean construidas con mayor seguridad y tiempos de construcción y costos reducidos, contribuyendo al eventual desuso de las de relleno hidráulico.

Entre las presas de tierra pueden mencionarse la homogénea, que generalmente incluye filtros dentro del cuerpo de la cortina, y la de materiales graduados. En esta última la distribución de los tamaños de los materiales es gradual, encontrándose los más finos al centro como barrera impermeable, enseguida los filtros granulares, seguidos de las transiciones de materiales más gruesos y finalmente los enrocamientos en los taludes exteriores. El proceso constructivo de las presas de tierra debe tomar en cuenta de manera especial que las condiciones climáticas en el lapso de la ejecución de la obra sean las adecuadas.

La construcción de presas de enrocamiento había sido prácticamente descartada durante varios años debido al poco conocimiento que de este tipo de materiales se tenía. Sin embargo, en la actualidad su uso se ha incrementado ya que se cuenta con diversas investigaciones acerca de su comportamiento. Este tipo de estructuras cuentan con una barrera impermeable formada ya sea por un corazón de arcilla (vertical o inclinado) o de una cara de concreto en el talud de aguas arriba. Las de enrocamiento con cara de concreto han permitido que los taludes tengan mayor pendiente, por la mayor resistencia y peso del material, reduciendo así los volúmenes, costos y tiempos de colocación. Además pueden ser construidas en climas que para otro tipo de presas resultan adversos.

Las presas de concreto rolado compactado son relativamente recientes y surgen como la combinación del relleno estabilizado y el concreto tradicional. La apariencia del concreto rolado compactado es la de una grava bien graduada y húmeda, y contiene cemento en bajas cantidades. El CCR se coloca en grandes áreas en cada capa, por lo que se requiere de una minuciosa planeación previa a la construcción. En este proceso es crucial la disponibilidad de agregados, y sistemas de transporte y colocación eficientes.

La elección del tipo de presa se realiza buscando que el costo total esperado para la obra sea el mínimo, incluyendo el costo de los daños potenciales. La función y la consecuente seguridad de la obra son determinantes en el tipo de diseño que se seleccione. Las condiciones de la boquilla, cimentación y vaso, así como la geología, el clima y la sismicidad del lugar son factores que influyen en esta elección. Generalmente será necesario realizar diseños preliminares de varios tipos de presa y compararlos, antes de llegar a la alternativa definitiva.



## Capítulo 3

### COMPORTAMIENTO DE ENROCAMIENTOS Y GRAVAS

Las gravas y enrocamientos constituyen materiales de gran interés para la construcción de presas. Se trate de aquellas formadas por un núcleo impermeable de suelo soportado por enrocamientos, de materiales graduados o de las de enrocamiento con cara de concreto, el estudio del comportamiento y las propiedades de dichos materiales ha cobrado importancia desde hace varias décadas.

Los materiales de enrocamiento consisten principalmente en partículas angulosas a subangulosas obtenidas por voladuras de la masa rocosa o partículas redondeadas a subredondeadas provenientes de los lechos de ríos. El comportamiento de los enrocamientos está afectado por diversos factores, como son: composición mineralógica, graduación de sus partículas, tamaño y forma de las partículas y condiciones de esfuerzo. Las propiedades físicas de las partículas o fragmentos de roca varían notablemente no sólo en las gravas y arenas que contienen los granos más competentes arrastrados por el agua dentro de cuencas con geología diversa, sino también en los enrocamientos explotados de una misma fuente por causa del intemperismo y los defectos naturales (diaclasas, inyecciones hidrotermales, cavidades, etc.) y los inducidos por los explosivos y el manejo de la roca durante su extracción, transporte y colocación.

La gran variedad de factores que intervienen en el comportamiento de dichos materiales ha motivado un gran número de trabajos al respecto para llevar a cabo diseños confiables y eficientes, especialmente en estructuras de gran relevancia como lo son las presas. A pesar de los avances, queda aún mucho por estudiar.

La reciente tendencia de construir presas de gran altura constituidas en su totalidad de enrocamiento, con una cara o losa de concreto como barrera impermeable, ha reafirmado la necesidad de continuar las investigaciones al respecto de dichos materiales.

#### 3.1. ROTURA DE GRANOS

Los enrocamientos y gravas, en comparación con los suelos, presentan dificultades adicionales cuando se emplea un enfoque teórico en la descripción de su comportamiento. Una de las más importantes es que para el intervalo de esfuerzos usuales en los problemas de ingeniería civil las partículas de materiales granulares sufren ruptura, la cual puede ser significativa incluso para pequeños incrementos en los niveles de esfuerzo.

El grado de ruptura que sufren los granos depende principalmente de la granulometría del material, de la resistencia de las partículas y del nivel de esfuerzos. Marsal (1975) define una medida cuantitativa de la rotura de granos por medio de la variación  $\Delta W_k$  entre los pesos retenidos inicial y final,  $W_{ki}$  y  $W_{kf}$ , correspondientes a las fracciones  $k$  de diámetro nominal  $d_{nk}$  (figura 3.1). La suma algebraica de todas las variaciones  $\Sigma W_k$  será igual a cero. Se define entonces la rotura de granos,  $B_g$ , como la suma de los valores positivos de  $\Delta W_k$ , la cual representa el porcentaje en peso de los granos que han sufrido fragmentación. El parámetro  $B_g$  multiplicado por la concentración de sólidos  $q=1/(1+e)$  es el volumen de las partículas fragmentadas por unidad del volumen total de la fase sólida, es decir, que toma en cuenta la relación de vacíos del material.

$$B_g q = \frac{B_g}{1 + e} \tag{3.1}$$

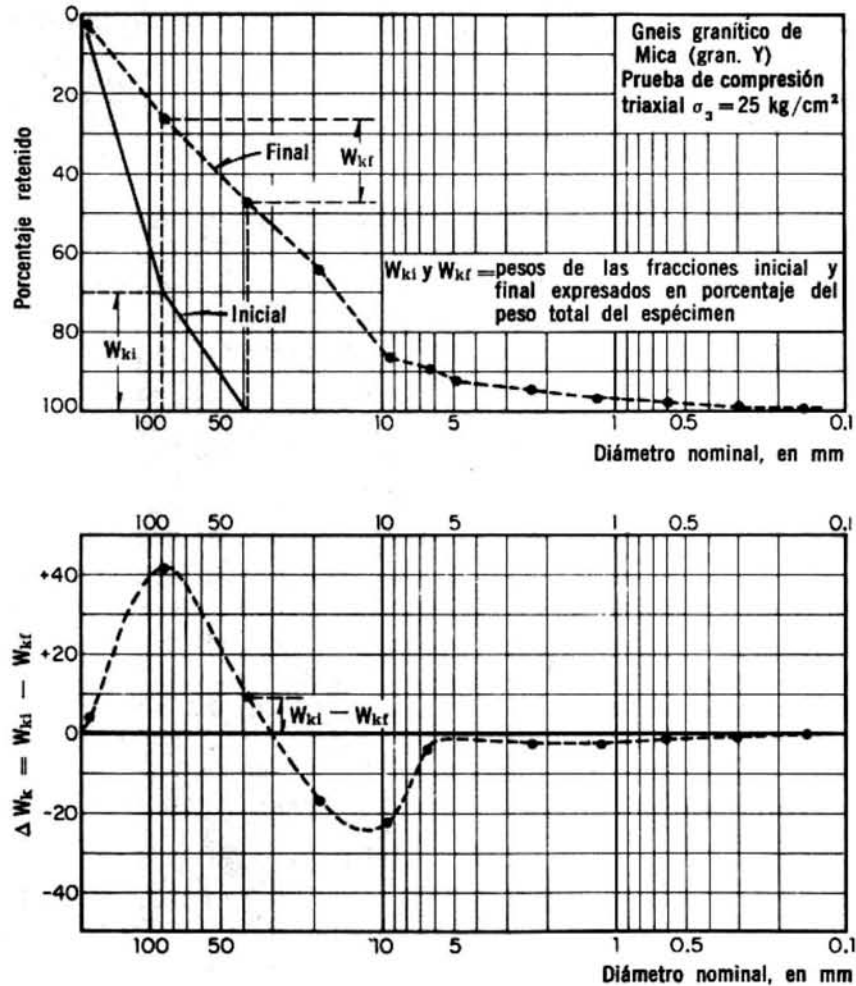


Figura 3.1. Definición de rotura de granos a partir de las curvas granulométricas antes y después del ensaye. (Marsal, 1965).

Los suelos granulares y los enrocamientos son agregados de partículas individuales, su comportamiento depende en gran medida de la distribución del tamaño de partículas que lo constituyen. Al incrementar el nivel de esfuerzos a que está sometido el material y fragmentarse los granos que lo componen, la distribución del tamaño de partículas se modifica. Este cambio afecta de forma apreciable las características de deformación del material y puede influir también en su resistencia, como se discute más adelante.

Para evaluar la influencia de la rotura de granos en la compresibilidad de los materiales Marsal (1975) realizó una prueba que somete a los fragmentos de roca a estados de esfuerzo (fuerzas concentradas y condiciones de apoyo diversas) similares a los que se presentan dentro de una masa granular. La prueba consiste en aplicar a tres granos de aproximadamente igual tamaño  $d_m$  fuerzas transmitidas mediante una placa de acero. Se miden el número de contactos  $N_c$  y la carga  $P$  que produce la rotura del primer grano,

reconociendo como rotura a la separación de un grano en varias partículas y no al desprendimiento de pequeñas partículas en esquinas o aristas. La relación  $P/N_c$  es la denominada carga de ruptura  $P_a$  de la roca para la dimensión  $d_m$ . Esta prueba involucra condiciones de apoyo diversas en las partículas, además de la existencia de defectos en la roca, tales como fisuras, poros, rellenos de grietas, zonas alteradas, etc.; por ello se estimó necesaria la realización de varios ensayos para un mismo diámetro  $d_m$ , considerando el valor promedio de la carga de ruptura  $P_a$  y el coeficiente de variación de la misma  $v(P_a)$ . Adicionalmente, se utilizaron dos condiciones de humedad de los granos: secados al aire o sumergidos en agua.

De los resultados de esta prueba se definió una relación empírica de la carga de ruptura  $P_a$  en función de la dimensión de los granos  $d_m$ , expresada como  $P_a = \eta d_m^\lambda$ , la cual se justifica con las investigaciones de Joisel (1962) y las teorías de Griffith (1921) sobre la propagación de grietas en una masa por huecos. Al combinar las proposiciones de ambos investigadores, y con base en las pruebas por él realizadas, Marsal (1969) concluye que la carga de ruptura  $P_a$  es proporcional a la dimensión del grano  $d_m$  elevado a la potencia 3/2.

### 3.2. EFECTOS DE ESCALA

Para obtener de forma confiable las propiedades mecánicas de gravas y enrocamientos, las pruebas de laboratorio deben simular las condiciones en campo tanto como sea posible. Sin embargo, las dimensiones de las partículas de los enrocamientos y la forma en que se éstas se acomodan hace imposible que estos materiales sean ensayados como otros suelos. Por ello, los especímenes de laboratorio deben ser escalados a un cierto nivel y reconstituidos por medio de compactación. Además, las muestras de material son generalmente pequeñas respecto del tamaño del prototipo. Por estas y otras razones, el grado de confianza con el que los parámetros obtenidos en laboratorio pueden ser utilizados para predecir el comportamiento en campo ha sido siempre sujeto de incertidumbre. No por eso debe desecharse el uso de ensayos de laboratorio para determinar las propiedades de interés, sino que deben tenerse en cuenta los factores que influyen en los resultados de estas pruebas.

Se han desarrollado diversas técnicas para evaluar las propiedades de enrocamientos en campo con base en la información obtenida a partir de especímenes de laboratorio que contienen la fracción pequeña del material de campo. Una de las técnicas más utilizadas, y que ha dado buenos resultados, consiste en modelar la distribución del tamaño de partículas del material en campo y formar especímenes de laboratorio con una curva granulométrica exactamente paralela (Lowe, 1964). En este caso la curva se traslada multiplicándola por un factor constante, tal que el tamaño máximo de partículas se reduzca a  $d$ . Lo anterior se logra seleccionando los tamaños requeridos del enrocamiento total y combinándolos nuevamente, sin embargo, debe tenerse cuidado de que estos componentes más finos sigan siendo representativos del enrocamiento principal en cuanto a su dureza, resistencia y forma (Fumagalli et al, 1970). Puede suceder que esta granulometría trasladada contenga una gran cantidad de finos, lo cual tendría un efecto sobre el ángulo de resistencia y podría causar que la muestra deje de tener libre drenaje, consecuencia de gran importancia cuando se hace uso de especímenes de grandes dimensiones. Otra técnica consiste en utilizar únicamente la fracción de diámetro menor que  $d$  de la muestra de enrocamiento y el porcentaje de cada diámetro se multiplica por un factor constante. Como en el caso anterior, se deben tomar las debidas previsiones respecto de su representatividad del enrocamiento de campo. Ambas opciones se ilustran en la figura 3.2.

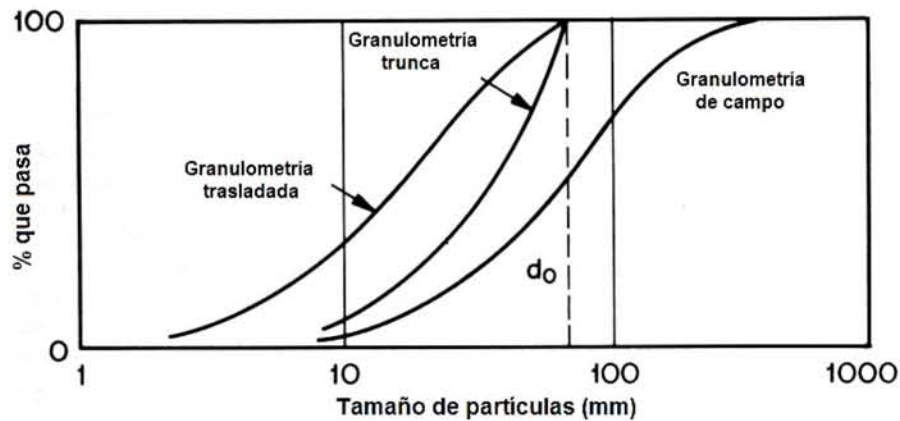


Figura 3.2. Modificación de granulometrías para ensayos, Parkin (1991).

La elección de cualquiera de las técnicas dependerá del tipo de roca y de su granulometría en campo. Para rocas duras con curvas granulométricas angostas se considera apropiada la traslación de la curva. En el caso de materiales cuya granulometría es más amplia y con mayor contenido de finos es conveniente la técnica de truncamiento de la curva para evitar el exceso de finos.

La relación que guarda el tamaño de la probeta respecto del tamaño máximo de partículas también tiene efecto sobre los resultados de las pruebas. El tamaño máximo se determina usualmente por la dimensión más pequeña del espécimen. Diversos autores han mencionado distintos valores para esta proporción, Penman (1971) afirma que la relación mínima es de 4 para una muestra bien graduada y 6 para una uniforme. Holtz y Gibbs (1956) lograron obtener una envolvente de Mohr constante para relaciones mayores a 6. La elección de esta relación mínima tiene un efecto sobre la compactación de la probeta ya que se desea obtener una muestra con una densidad y una relación de vacíos representativas.

Uno de los estudios más extensos que al respecto de los efectos de escala se han llevado a cabo es el efectuado por Marachi et al (1972), con pruebas triaxiales de compresión efectuadas en especímenes provenientes de las presas Pyramid y Oroville así como de basalto triturado. En ellos reportan que los valores de relación de esfuerzos principales en la falla son mayores para los especímenes pequeños y menores para los especímenes más grandes (figura 3.3).

El ángulo de fricción interna de todos los materiales ensayados y para todos los tamaños de especímenes disminuye, con una pendiente decreciente, conforme aumenta el esfuerzo de confinamiento (figura 3.4). Con base en pruebas efectuadas en enrocamientos, se ha encontrado que la relación entre el ángulo de fricción y la presión normal aplicada es lineal cuando esta última se traza en escala logarítmica. Adicionalmente, Marachi et al (1972) obtuvieron como resultado que, para una misma presión de confinamiento, el ángulo de fricción interna es mayor para los especímenes pequeños y menor para los grandes. El efecto del tamaño de partículas sobre el ángulo de fricción es el decremento del mismo conforme el tamaño máximo de partículas aumenta. Con base en sus resultados, los autores proponen que la gráfica de ángulo de fricción *versus* tamaño máximo de partículas sea utilizada para estimar  $\phi$  en el caso de que los materiales a utilizar en campo sean muy grandes para ser probados en laboratorio.

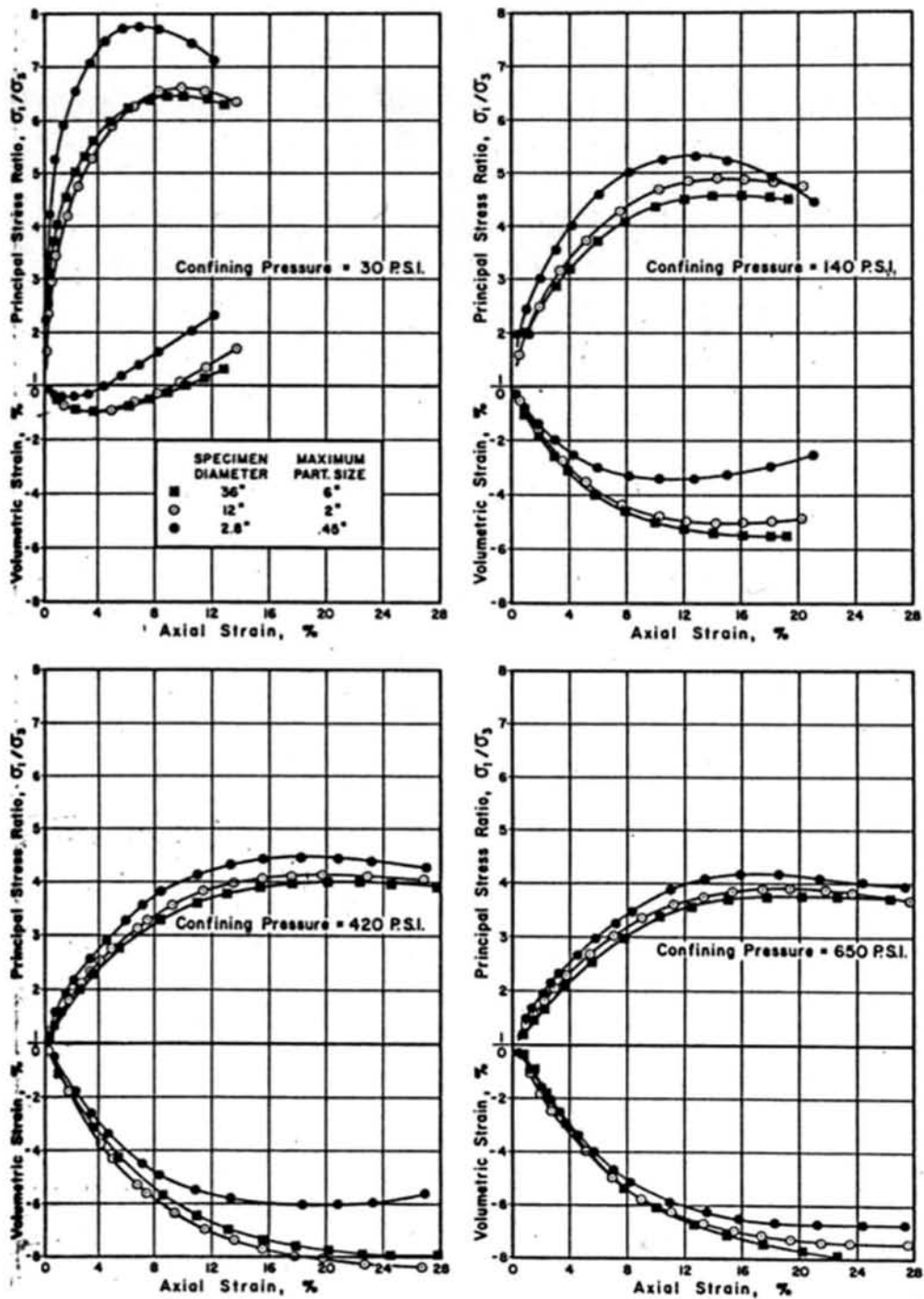


Figura 3.3. Resultados de pruebas triaxiales (Marachi et al, 1972).

En pruebas realizadas por Varadarajan et al (2003), el ángulo de fricción aumentó con el tamaño de partículas en el caso del enrocamiento de Ranjit Sagar, formado por material aluvial; pero en el material triturado del proyecto Purulia se observó la tendencia opuesta.

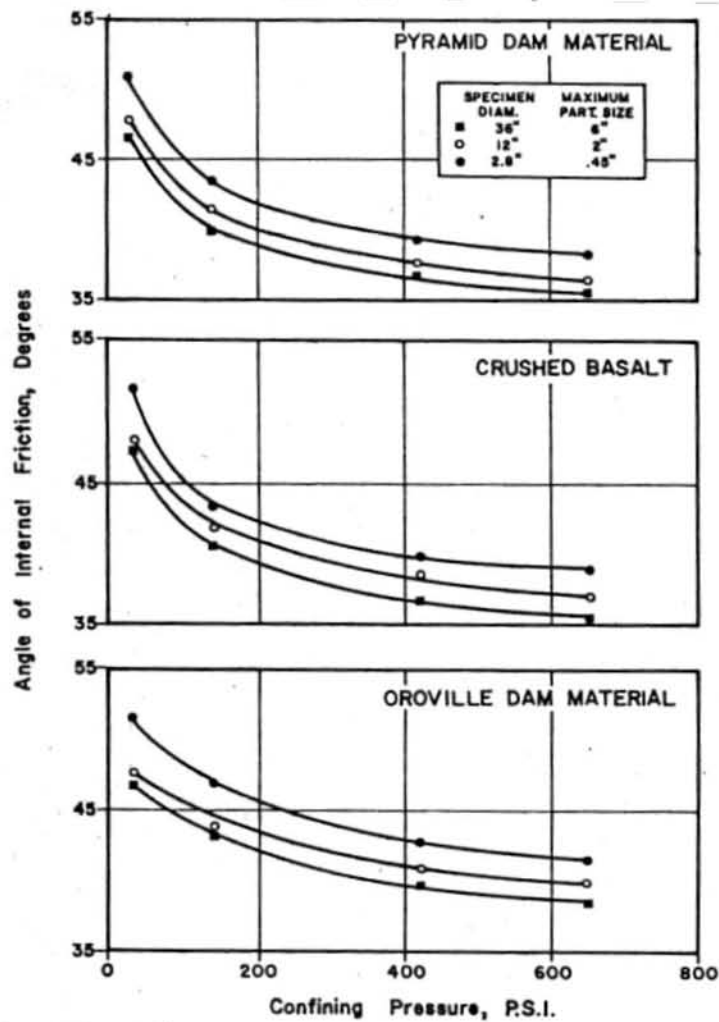


Figura 3.4. Ángulo de fricción vs. presión confinante (Marachi et al, 1972).

En relación con la compresibilidad de los enrocamientos, los resultados obtenidos por Marachi et al (1972), en muestras de la presa Pyramid, sugieren que la consolidación es mayor mientras el tamaño de partículas se incrementa. Encontraron también que las deformaciones volumétricas en la falla para especímenes grandes y medianos eran generalmente iguales y mostraron mayor compresibilidad que los especímenes pequeños. La tendencia indicó además que la deformación volumétrica a compresión en la falla aumenta con la presión de confinamiento para intervalos de presión bajos, hasta que se alcanza una cierta presión confinante para la cual la deformación volumétrica no sufre cambios significativos, como ilustra la figura 3.5. De igual forma, la deformación axial en la falla aumentó a medida que la presión de confinamiento se incrementaba, hasta que para un cierto valor de presión confinante la deformación axial no aumentó (figura 3.6). A este respecto, bajo condiciones de prueba similares, parece que la forma de las partículas tiene mayor efecto en el cambio de volumen que la mineralogía, siendo las partículas redondeadas las que mostraron menor compresibilidad que las angulosas.

En la tabla 3.1 se presenta un resumen de los resultados de Marachi et al (1972).

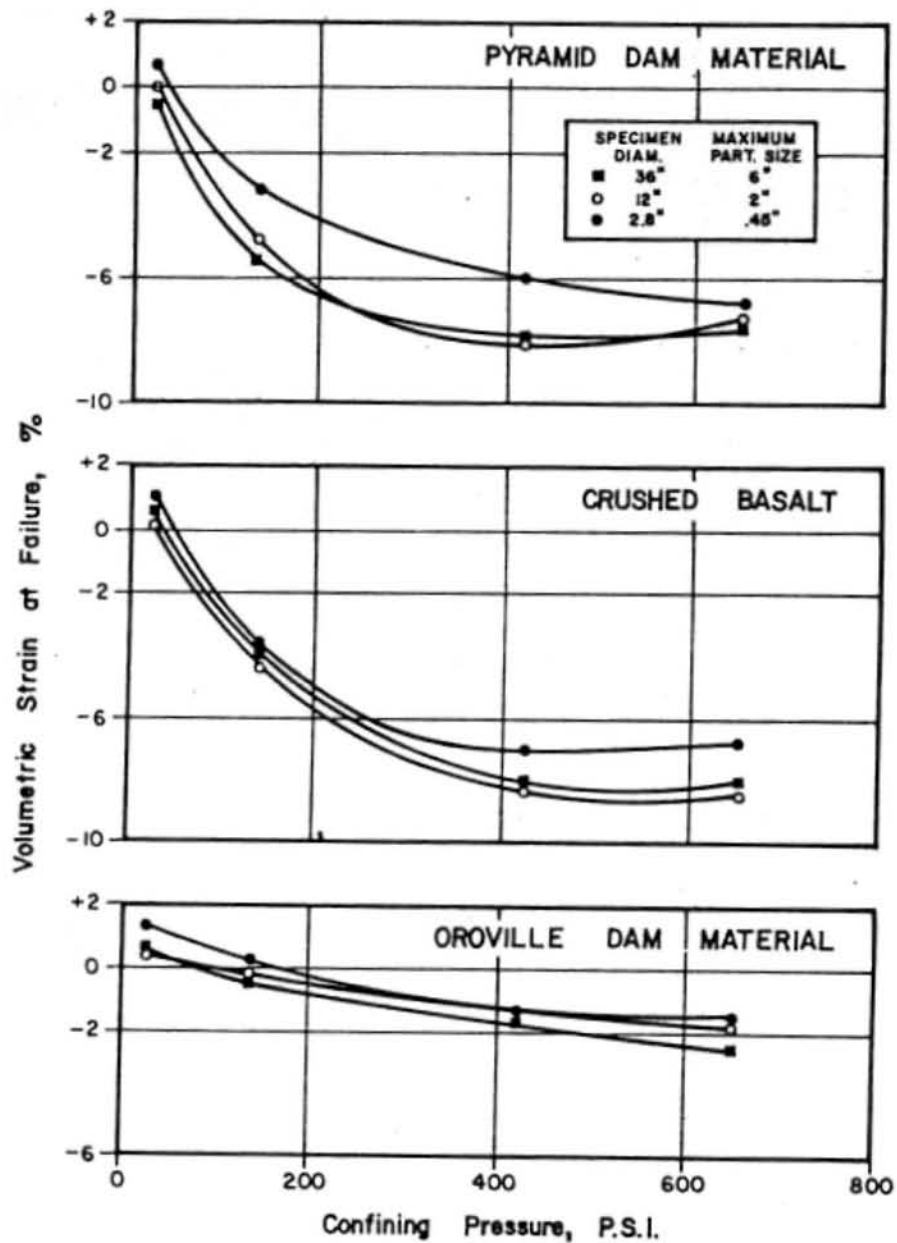


Figura 3.5. Resultados de pruebas triaxiales (Marachi et al, 1972).

Tabla 3.1. Efectos de escala en pruebas triaxiales (Marachi et al, 1972).

Tamaño de especímenes	Especímenes pequeños (2.8")	Especímenes grandes (36")
Relación de esfuerzos a la falla $\sigma_1/\sigma_3$	MAYOR	MENOR
Ángulo de fricción (misma presión confinante)	MAYOR	MENOR
Compresibilidad	MENOR	MAYOR

Tamaño máximo de partículas	Partículas pequeñas (0.45")	Partículas grandes (6")
Ángulo de fricción	MAYOR	MENOR
Compresibilidad	MENOR	MAYOR



Forma de partículas	Partículas redondeadas	Partículas angulosas
Compresibilidad	MENOR	MAYOR

Presión de confinamiento y presión aplicada	
Ángulo de fricción	<i>Disminuye conforme aumenta el confinamiento</i>
Ángulo de fricción en función de presión normal aplicada	<i>Lineal cuando la presión se traza en escala logarítmica</i>
Deformación volumétrica a la falla (compresión)	<i>Aumenta a presiones de confinamiento bajas Se mantiene constante después de un cierto valor de presión confinante</i>
Deformación axial a la falla (compresión)	<i>Aumenta a presiones de confinamiento bajas Se mantiene constante después de un cierto valor de presión confinante</i>

Tabla 3.1. (Continuación). Efectos de escala en pruebas triaxiales (Marachi et al, 1972).

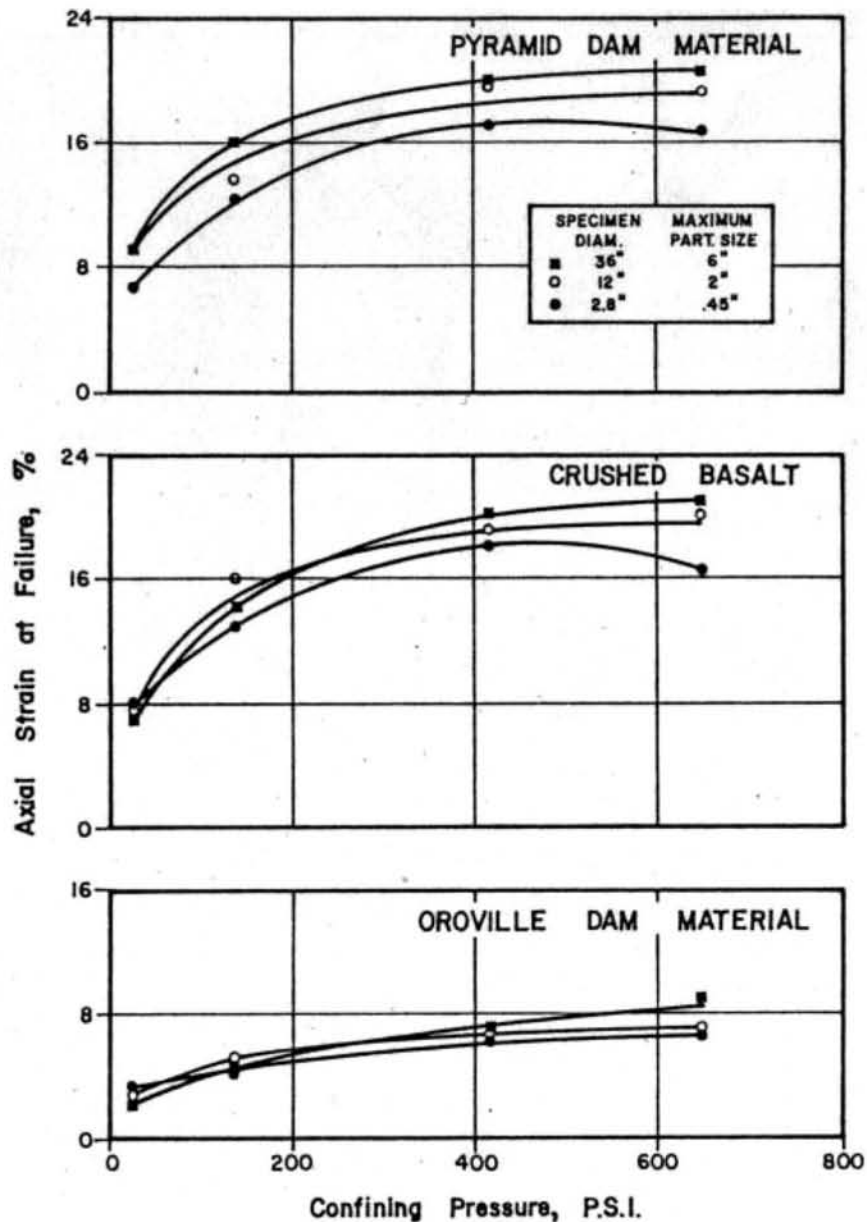


Figura 3.6. Resultados de pruebas triaxiales (Marachi et al, 1972).



### 3.3. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DE ENROCAMIENTOS Y GRAVAS

La determinación de las propiedades mecánicas de las gravas y los enrocamientos requiere que las condiciones de esfuerzo a que estén sujetas las muestras para estudio sean similares a las que se presentarán en campo una vez que la estructura sea construida. Sin embargo, las dimensiones de las partículas de enrocamiento demandarían de grandes equipos de laboratorio que resulta poco práctico y muy costoso utilizar. Se han llevado a cabo varias investigaciones en el mundo con aparatos triaxiales y de deformación plana que alcanzan poco más de 1 m de dimensión transversal máxima (Marsal, 1965 y Marachi et al, 1969). Sin embargo los resultados de estas y otras pruebas han motivado que la tendencia actual sea la de utilizar probetas de laboratorio de menores dimensiones, en su mayoría comprendidas entre 300 y 500 mm.

Paralelamente, se han desarrollado diversas técnicas para determinar las propiedades de dichos materiales en campo, ya sea en modelos a escala o terraplenes de prueba para nuevos proyectos, o en estructuras ya construidas para verificar los diseños.

Varios investigadores han propuesto relaciones experimentales entre algunas propiedades índice de las partículas de grava o enrocamiento y sus propiedades mecánicas aproximadas. Una de ellas es la propuesta por Marsal (1975), tabla 3.2 y figuras 3.7, 3.8 y 3.9, la cual consiste en una clasificación de los enrocamientos y gravas con base en las pruebas índice utilizadas para evaluar la calidad de las gravas para la elaboración de concreto (absorción de agua, desgaste Los Ángeles e intemperismo) y que después se hace corresponder con la resistencia y compresibilidad aproximadas del material. Al ordenar los resultados de carga de ruptura  $P_a$  de todos los materiales ensayados y agregarlos a los de las pruebas índice mencionadas, el autor complementa la clasificación de enrocamientos y gravas de la tabla 3.2 para obtener una relación aproximada entre estos parámetros y sus propiedades de resistencia y compresibilidad.

#### 3.3.1. Pruebas de laboratorio

Para obtener de forma confiable las propiedades mecánicas de los enrocamientos, las pruebas de laboratorio que en ellos se efectúen deben simular las condiciones en campo tanto como sea posible, como se hace generalmente en el caso de presas de tierra.

Las primeras pruebas realizadas a muestras de grava se efectuaron en la Universidad de Harvard en 1944 utilizando una cámara triaxial para especímenes con diámetros de 4 in, sometidos a una presión confinante menor que  $1 \text{ kg/cm}^2$ . En 1961 se desarrolló en México, por parte de la Comisión Federal de Electricidad, una cámara triaxial que permitía ensayar especímenes de  $1 \text{ m}^2$  de sección transversal a presiones confinantes de hasta  $25 \text{ kg/cm}^2$ , para el proyecto de la presa El Infiernillo, Mich. Desde entonces y a lo largo de los años, diversos investigadores han estudiado el comportamiento y las propiedades de los enrocamientos, por medio de pruebas de laboratorio y pruebas de campo complementadas con mediciones instrumentales en obras ya construidas.

A continuación se describen dos de los equipos triaxiales utilizados en México para el ensaye de enrocamientos. El primero es el mencionado anteriormente, diseñado y mejorado por Marsal, pionero en su clase, pero que actualmente ha sido sustituido por otros de menores dimensiones. El segundo es el que hoy en día se utiliza en la misma Comisión Federal de Electricidad, desarrollado inicialmente por Jaime (1977). También se describe un oedómetro, empleado para evaluar en laboratorio la compresibilidad de estos materiales.



Tabla 3.2. Clasificación de enrocamientos, Marsal (1975).

Material	$P_n$ , para $d_n = 2$ plg, en kg	Absorción de agua, en porcentaje	Desgaste Los Angeles, en porcentaje	Granulometría	$C_u$	Tipo de enrocamiento*
Granos duros (basalto de San Francisco, grava de Pinzandarán)	$> 1000$	1 a 2.5	10 - 15	Uniforme	1 - 3	1 U
				Bien graduado	$> 10$	1 W
Granos semiduros (gneis granítico de Mica, diorita de El Infiernillo)	500 - 1000	1 a 2.5	15 - 25	Uniforme	1 - 3	2 U
				Bien graduado	$> 10$	2 W
Granos blandos (caliza de La Angostura, esquisto de Mica, toba volcánica de Las Piedras)	$< 500$	2.5 a 15	$> 25$	Uniforme	1 - 3	3 U
				Bien graduado	$> 10$	3 W

\* Para determinar el orden de magnitud de la relación de esfuerzos principales ( $\sigma_1/\sigma_3$ ) y el módulo de deformación ( $M_{oc}$ ) recúrrase a las figuras 3.8 y 3.9, previa estimación de la rotura de granos ( $B_g$ ) mediante la figura 3.7.

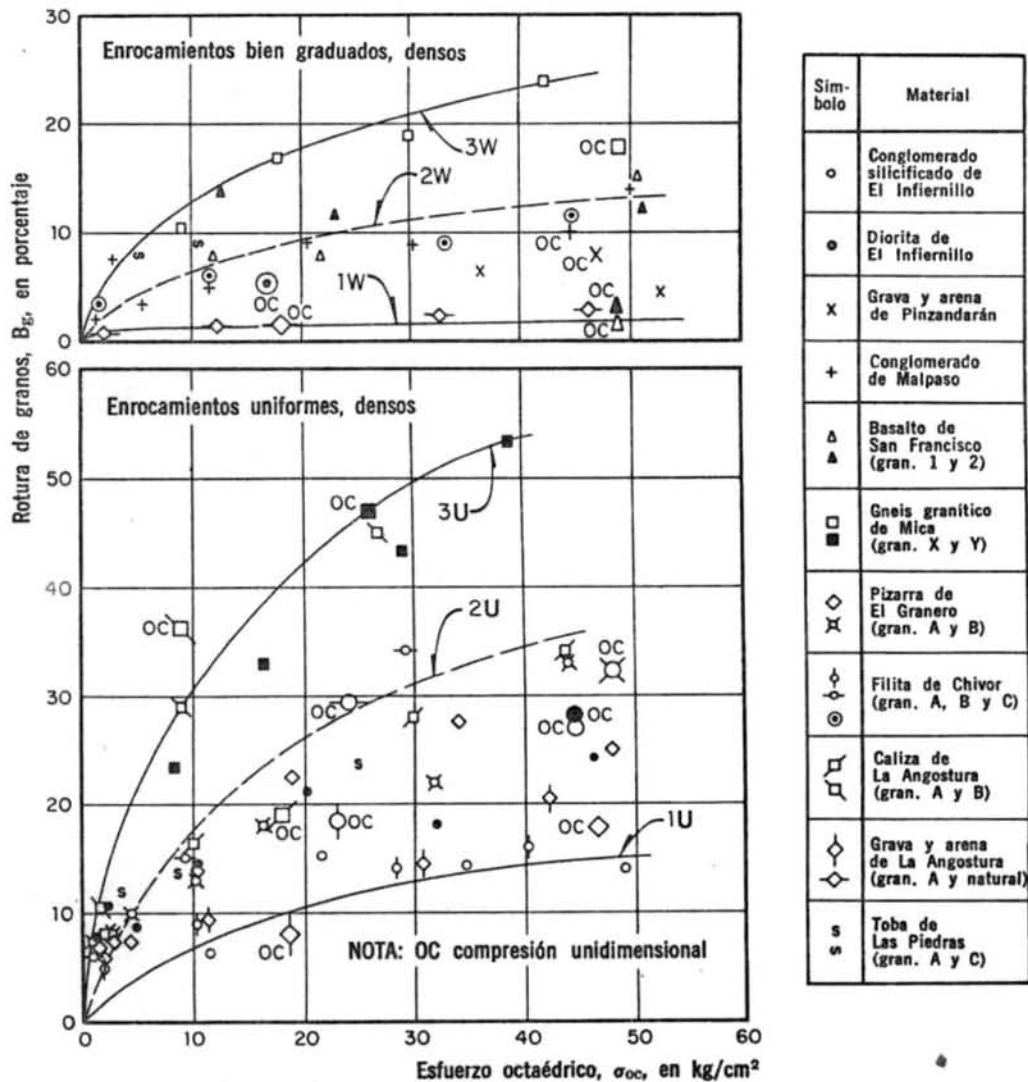


Figura 3.7. Rotura de granos vs. nivel de esfuerzos en pruebas de compresión triaxial y compresión unidimensional, Marsal (1975).

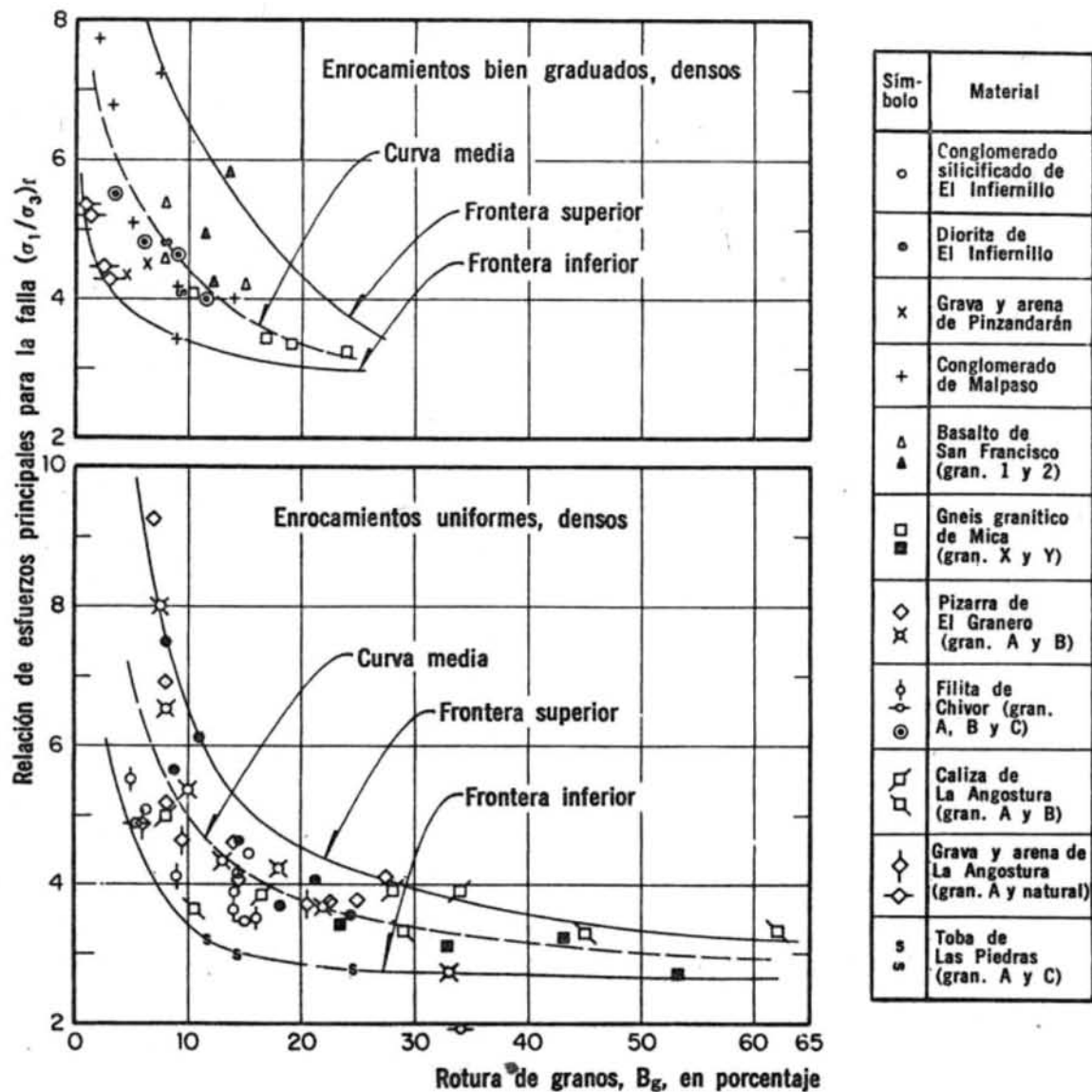


Figura 3.8. Relación de esfuerzos principales para la falla en pruebas de compresión triaxial vs. rotura de granos, Marsal (1975).

Nótese que existen otros tipos de aparatos para la evaluación de las propiedades mecánicas de los enrocamientos, como los de deformación plana y corte directo, además de las variantes de los que aquí se presentan. De modo que los que a continuación se refieren únicamente sirven para mostrar los principios en los cuales se fundamentan este tipo de equipos.

#### CÁMARA TRIAXIAL T-113-25

El dispositivo consta de una cámara esférica de acero con un marco interior de carga y un sistema hidroneumático para producir y regular presiones confinantes de hasta 25 kg/cm<sup>2</sup> (Marsal, 1973). La máxima carga axial disponible era 1600 t. En su interior se preparaban y ensayaban especímenes de 113 cm de diámetro y 250 cm de altura.

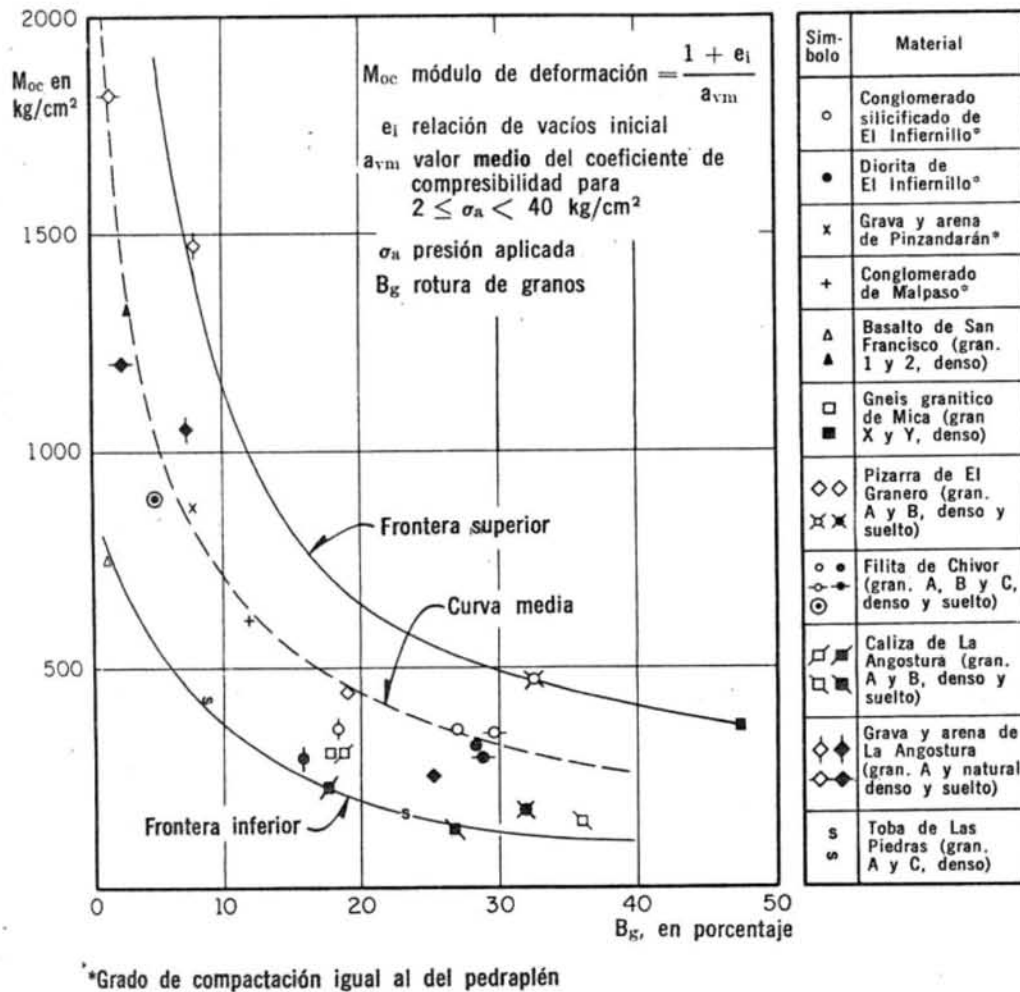
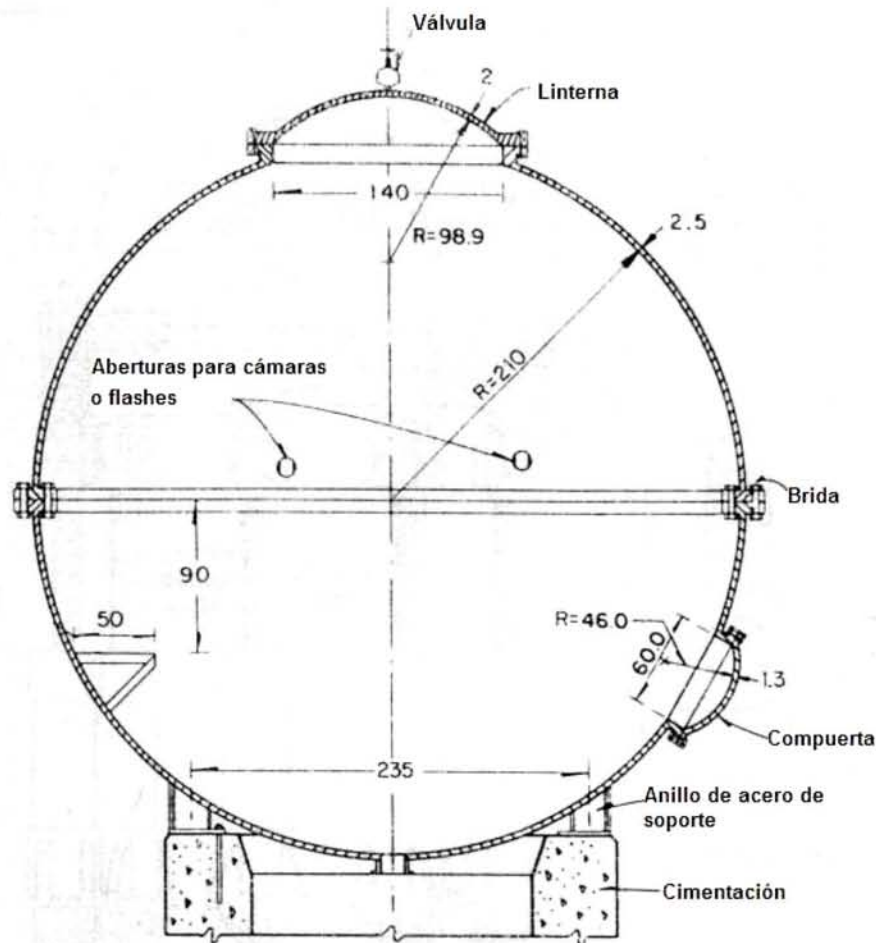


Figura 3.9. Módulo de deformación en compresión unidimensional vs. rotura de granos, Marsal (1975).

La cámara de presión es una cubierta esférica de 420 cm de diámetro, construida con placas de acero soldadas de 2.5 cm de espesor. Esta cubierta se compone de dos mitades conectadas por medio de bridas de 7.5 cm de espesor (figura 3.10). La mitad superior cuenta con una linterna de 140 cm de diámetro para introducir los materiales de ensaye por medio de una grúa y tiene unas aberturas pequeñas para instalar una cámara fotográfica, dos flashes electrónicos y seis dispositivos para medir deformaciones axiales. La mitad inferior tiene una tapa de 60 cm de diámetro que permite el acceso durante las operaciones previas al ensaye. El agua se inyecta por medio de una tubería de 15 cm soldada a la base de la cámara. El aparato se apoya en un anillo de acero anclado a la cimentación de concreto. La esfera pesa 20 t y su volumen es de aproximadamente 40 m<sup>3</sup>.

El marco de carga consiste en una cubierta sostenida por un anillo de carga, nueve gatos hidráulicos y una placa base de acero de 27 cm de espesor (figura 3.11). El peso de la estructura de carga y de la muestra se transmite al anillo de cimentación a través de la cámara esférica. Las cargas axiales se aplican por medio de gatos hidráulicos de doble acción conectados mediante juntas universales tanto al anillo de carga como a la placa base.

Estos gatos trabajan a tensión y cada uno de ellos tiene una capacidad máxima de 180 t y 75 cm de carrera en el pistón. El movimiento lateral es restringido por tres resortes radiales, y la rotación horizontal del marco de carga se limita por tres pares de barras guía. Los esfuerzos desviadores se calculaban a partir de las presiones del aceite en los gatos medida con dinamómetros de péndulo Amsler. Para mejorar la medición de la carga axial, así como determinar su excentricidad, se colocaron tres celdas de presión del tipo gato plano en la base del espécimen. La presión en las celdas se mide con tres manómetros de precisión de  $\pm 0.1\%$ , cada uno de ellos cubre un intervalo distinto de presión (0-40, 0-150 y 0-400  $\text{kg}/\text{cm}^2$ ).



Dimensiones en cm

Figura 3.10. Cámara de presión del aparato triaxial T-113-25 (Marsal, 1973).

El sistema hidráulico para aplicar la presión de confinamiento al espécimen se compone de un compresor de aire, diez contenedores de 50 litros a alta presión y un tanque de acero de  $3.5 \text{ m}^3$  parcialmente lleno de agua. Cuando fue instalado en campo, la presión confinante se proporcionaba con un sistema de cinco tanques de nivel constante a distintas elevaciones tales que los especímenes se pudieran ensayar a 2, 5, 10, 17 y  $25 \text{ kg}/\text{cm}^2$ .

Las deformaciones axiales de los especímenes se medían con tres extensómetros eléctricos que leen al mm y tienen una carrera de 75 cm. Las deformaciones radiales se calculan con

las mediciones del cambio del perímetro tomadas por seis extensómetros eléctricos circunferenciales de precisión  $\pm 1$  mm y carrera de 60 cm, colocados a distintas elevaciones sobre la probeta. Las deformaciones volumétricas se medían con una bureta de 500 l cuya precisión era  $\pm 0.2$  l.

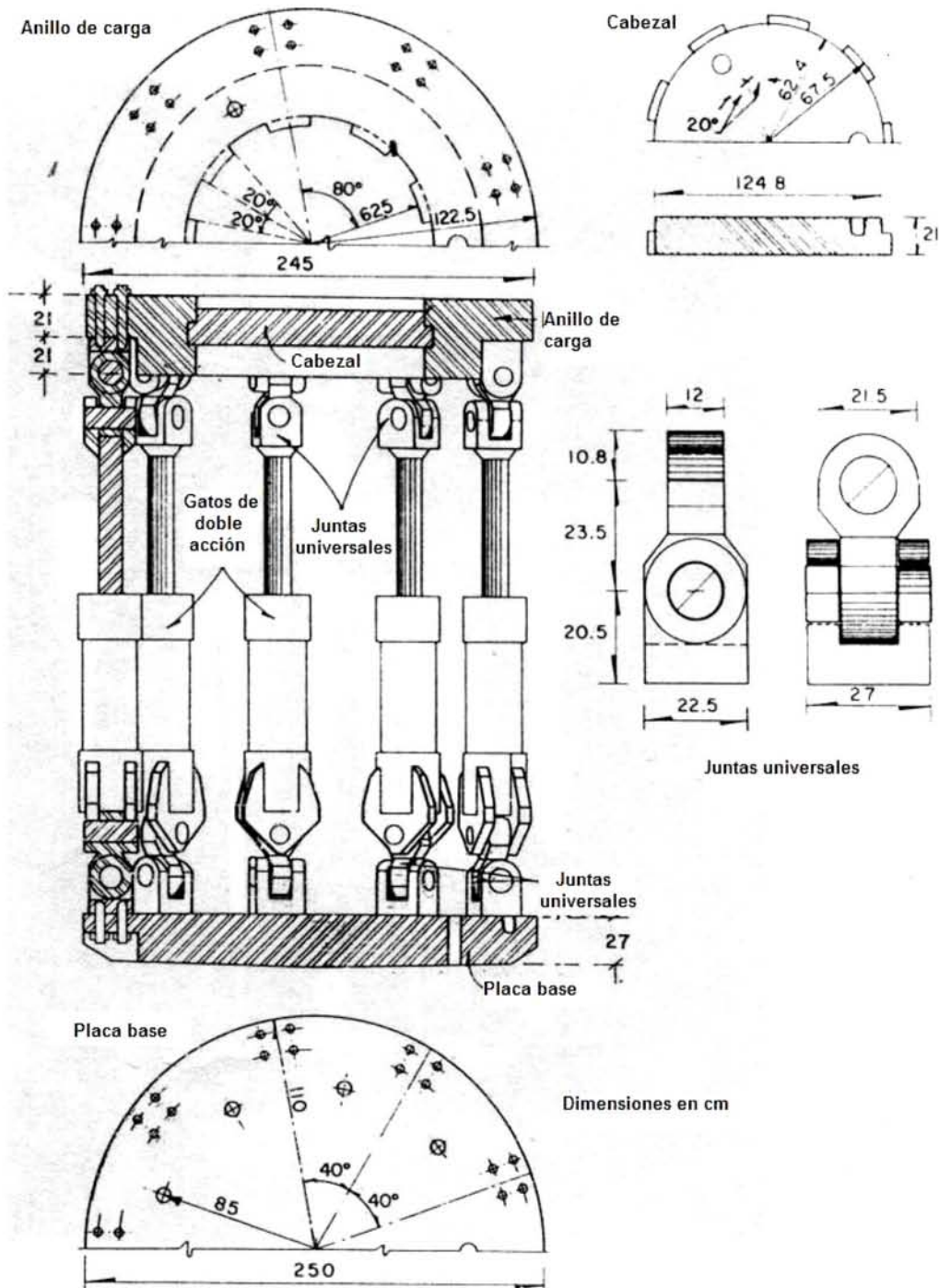


Figura 3.11. Marco de carga del aparato triaxial T-113-25 (Marsal, 1973).

Este aparato también fue utilizado en pruebas triaxiales de extensión, para lo cual se le debieron hacer algunas modificaciones (Marsal, 1973).

#### CÁMARA TRIAXIAL TC-30-75

Esta cámara triaxial permite ensayar especímenes de suelo de 30 cm de diámetro y 75 cm de altura bajo presiones confinantes que varían de 0 a 75 kg/cm<sup>2</sup>, con un tamaño máximo de partículas de 5 cm.

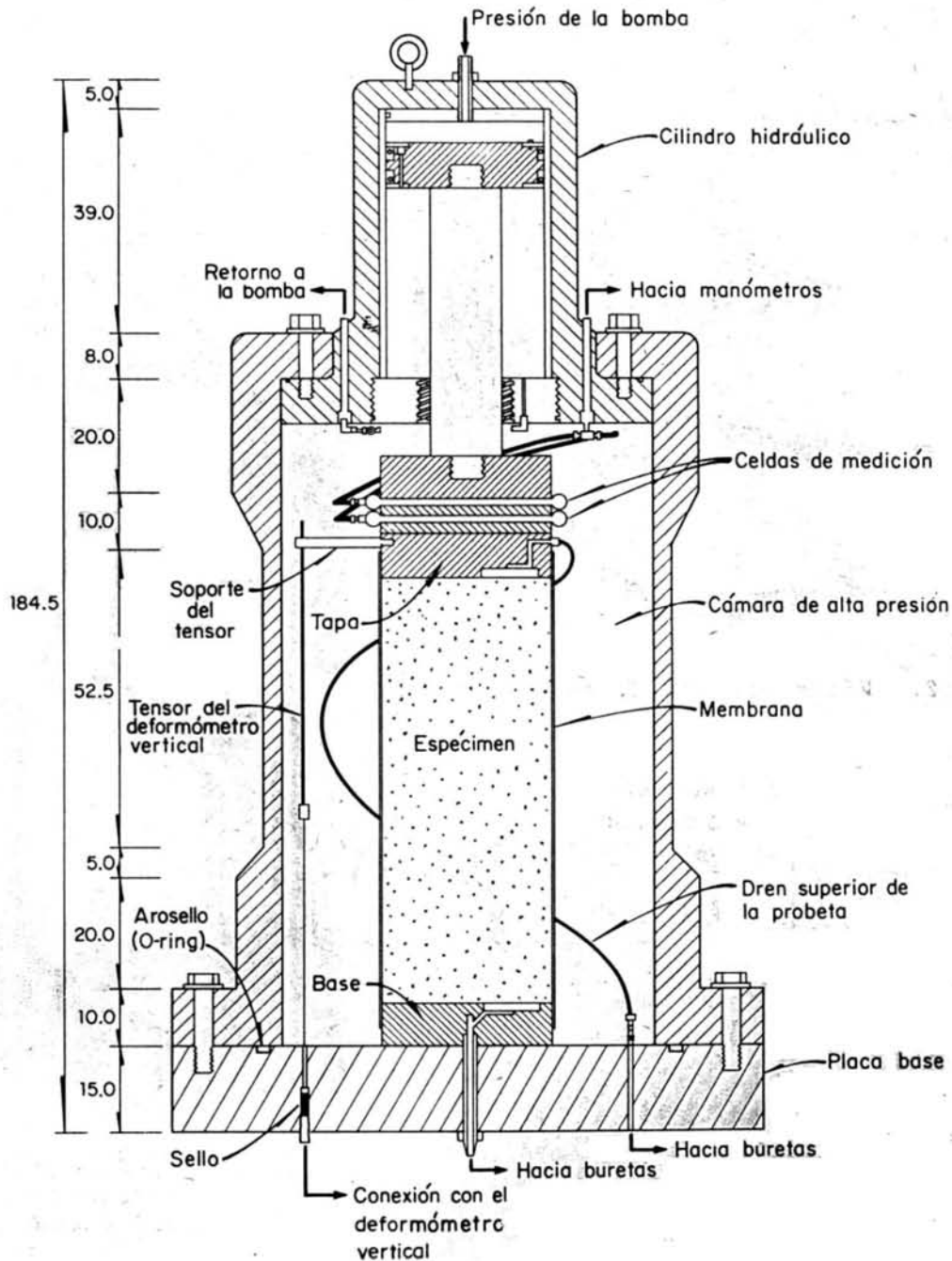


Figura 3.12. Cámara triaxial TC-30-75 (Jaime, 1977).



El aparato está constituido por un gato hidráulico, una cámara de alta presión y una placa base (figura 3.12). El cuerpo del gato hidráulico es de acero fundido y tratado, su eje longitudinal se hizo coincidir con el de la cámara de alta presión, y ambos al centro de la placa base para evitar excentricidad en la carga aplicada. Éste se introduce en la cámara de alta presión para formar la tapa superior de la misma. El cuerpo de la cámara es de acero fundido y tratado, y tiene en la parte superior una perforación por la que atraviesa un tubo con una válvula que sirve como purga durante el llenado.

La presión confinante se aplica con aire de alta presión por medio de dos recipientes intercomunicados parcialmente llenos de agua, los cuales se conectan a la cámara de alta presión a través de la placa base del aparato. La presión del gato hidráulico se proporciona por medio de una bomba eléctrica, cuya máxima presión es  $350 \text{ kg/cm}^2$ .

El sistema de medición de la fuerza aplicada al espécimen consta de una placa circular atornillada al extremo exterior del vástago del cilindro, una lámina troquelada, una celda de carga, un separador, otra celda de carga y otro separador. Tres resortes ligados al último separador se conectan a la placa circular para sostener el arreglo en posición. Al retraerse el vástago del cilindro todo el sistema lo sigue y viceversa, de esta manera se forma una especie de rótula que admite pequeños giros de la tapa del espécimen.

Las variaciones volumétricas del espécimen se miden por medio de dos buretas de 1.5 y 5.3 l, a las que se acopló un tubo de vidrio en el cual se lee directamente el cambio de volumen. Para medir la deformación axial de la probeta se cuenta con tres deformómetros fijos en la superficie inferior de la placa base de la cámara, tres tensores y tres soportes. El elemento sensible del deformómetro es un potenciómetro eléctrico. El valor de la deformación axial se obtiene con el promedio de las deformaciones medidas.

#### *OEDÓMETRO O-50-32*

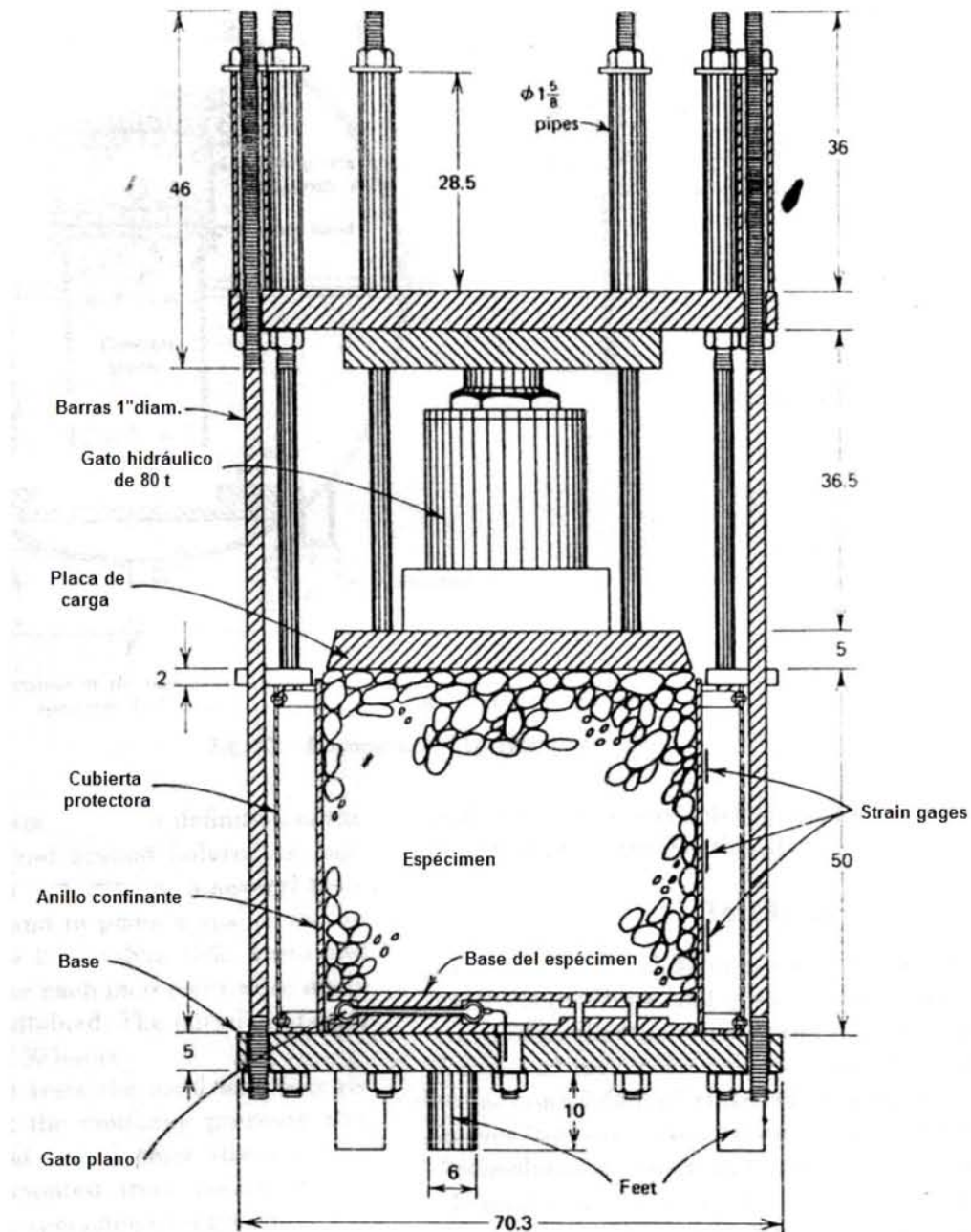
La figura 3.13 muestra los componentes de este equipo. El anillo de confinamiento es un cilindro de acero de 50 cm de diámetro, 55 cm de altura y 6 mm de espesor. Para medir las presiones laterales ejercidas por el espécimen sobre el anillo, se colocaron 12 *strain gages* eléctricos de 15 cm de longitud en la pared del cilindro, cuatro de ellos a tres distintas elevaciones. La carga axial en el espécimen es aplicada por medio de un gato hidráulico de 80 t. Los esfuerzos axiales se calculan a partir de las mediciones de presión en el cilindro hidráulico superior y en la celda de carga colocada en la base, la cual consiste de tres gatos planos. Las deformaciones axiales se miden a través de tres extensómetros que registran hasta 0.01 mm.

#### *OBSERVACIONES ACERCA DE LOS EQUIPOS DE LABORATORIO*

Debido a que las gravas y enrocamientos son materiales altamente friccionantes, se desarrollan esfuerzos cortantes que pueden ser significativos en los contactos del material con las placas o partes de los aparatos. Esto es, en el contacto base-enrocamiento y enrocamiento-cabezal, en el caso de pruebas triaxiales, y también en la pared del oedómetro en pruebas de compresión. En consecuencia, la carga aplicada no se transmite de forma homogénea a toda la probeta. En las pruebas de compresibilidad es posible que hasta el 50% de la carga aplicada por el cabezal se pierda por fricción con la pared (Parkin, 1991).

Para minimizar estos efectos, en pruebas oedométricas se han utilizado membranas compresibles formadas por anillos de acero alternadas con material compresible, como lo

hizo Fumagalli (1969). Marsal (1973) utilizó un lubricante y notó que las deformaciones axiales aumentaban un 20% en un anillo rígido. Sin embargo, el enrocamiento in situ generalmente muestra una mayor rigidez que la prevista con base en pruebas con oedómetro.



Dimensiones en cm

Figura 3.13. Oedómetro O-50-32 (Marsal, 1973).

La relación de la altura al diámetro (H/D) de la probeta también tiene efectos sobre la fricción desarrollada. Mientras que la fricción en la pared de un oedómetro puede



minimizarse (respecto de la carga axial aplicada) disminuyendo la altura de la probeta, las condiciones no homogéneas de apoyo del cabezal tienen menor influencia en la relación carga-deformación cuando esta relación aumenta.

En las pruebas de laboratorio al final de la compactación, la cara superior del espécimen queda un tanto dispareja y poco uniforme. Si se desea uniformizar, será necesario recortar la probeta, lo cual puede provocar mayor alteración en el material. Así mismo, el cabezal y la base suelen contener elementos de filtro para permitir la saturación y el drenaje de la muestra. Estos factores pueden conducir a una situación en la que los extremos de la probeta (especialmente el superior) sean menos rígidos, lo que puede producir errores en la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación. Una mayor altura de la probeta puede minimizar estos efectos.

### 3.3.2. Pruebas de campo

Son tres las propiedades que resultan de mayor interés para el diseño cuando se trata de terraplenes compactados: permeabilidad, resistencia al corte y deformabilidad. Todas ellas, y en especial las últimas dos, tienen una relación directa con la densidad en el caso de enrocamientos, por lo que se ven afectadas por el proceso de compactación.

Las pruebas de campo han probado ser el mejor método para el control de la compactación de cualquier tipo de suelo. Tratándose de enrocamientos, las pruebas de compactación no pueden llevarse a cabo en laboratorio debido a las grandes dimensiones de sus partículas. El uso de tamaños menores y factores de corrección no es recomendable cuando las partículas gruesas (no incluidas en el molde) representan más del 30% del peso total del enrocamiento, ya que en campo los granos finos no se compactan bien dentro del esqueleto formado por los fragmentos de roca.

#### *TERRAPLENES DE PRUEBA*

Los terraplenes de prueba se construyen para el estudio de materiales en obras de gran importancia. Se llevan a cabo con el objeto de evaluar el mejor método de colocación y compactación para mejorar las propiedades de los mismos y garantizar la estabilidad de la obra, y en consecuencia reducir costos.

Algunos de los aspectos que pueden estudiarse con los terraplenes de prueba son:

- El mejor método de excavación y colocación de los materiales.
- La influencia de la cantidad de agua aplicada al material en su colocación y compactación sobre su peso volumétrico.
- El proceso de compactación, incluyendo los equipos a utilizar, el número de pasadas y el espesor de las capas de material.
- La segregación de los materiales.
- Las propiedades de resistencia y deformabilidad de los materiales *in situ* en comparación con las obtenidas en laboratorio.

Debido a la mayor dificultad que involucra realizar pruebas de densidad en terraplenes constituidos por enrocamientos, una de las formas más utilizadas para controlar la compactación en campo es la observación de los asentamientos ocurridos en la estructura. Para asegurar que dichas mediciones sean realmente promedios representativos del comportamiento del material, es importante que los terraplenes tengan una superficie

suficiente que permita realizar un gran número de lecturas distantes. Bertram (1973) recomienda que las dimensiones mínimas de un terraplén de prueba rectangular sean  $9 \times 18$  m. Debe existir un espacio suficiente, fuera del área de prueba, para que la maquinaria dé vuelta después de cada pasada. Los taludes recomendados en los lados son de  $1V:1.5H$ .

El material es colocado en el sitio del terraplén y se le aplica agua según lo especificado. En seguida se le extiende hasta que alcanza un espesor uniforme. Generalmente se prueban distintos espesores de capa para seguir la evolución de los asentamientos correspondientes. Posteriormente se ubican los puntos de medición formando una malla (Bertram sugiere alrededor de 25 puntos). Se llevan a cabo nivelaciones de los puntos de medición antes de la compactación y después de un cierto número de pasadas del equipo. Con los resultados se trazan los perfiles de asentamiento en las direcciones longitudinal y transversal.

Mediante muestreos se pueden hacer pruebas de densidad antes y después de la compactación, así como granulometrías para conocer la rotura de granos que sufre el material. Puede estudiarse también la rotura producida por el transporte. Es deseable examinar la apariencia de cada capa después de la compactación. Entre cada capa medida y colocada, se puede pintar la superficie de la ya compactada para identificar el contacto entre capas en observaciones futuras. Al final de la construcción del terraplén se pueden excavar cortes y trincheras para examinar secciones donde se observe la uniformidad de la compactación, la segregación de partículas finas y la liga entre capas sucesivas.

Es importante definir la composición granulométrica de los materiales del terraplén, determinando la distribución y el tamaño máximo de granos. Estos parámetros son fundamentales para tomar en cuenta el efecto de escala ya que el comportamiento mecánico de los enrocamientos varía en función del peso volumétrico seco y el tamaño máximo de granos. Dado el tamaño máximo de granos, la resistencia al corte y el módulo de deformación se incrementan con el aumento del peso volumétrico seco. Dado el peso volumétrico seco, ambos parámetros mecánicos disminuyen con el aumento del tamaño de granos. Por tanto, es posible que un buen comportamiento observado en laboratorio del material se deteriore en campo.

#### PRUEBAS DE PLACA

Para determinar la deformabilidad de una masa de enrocamiento se utiliza la prueba de placa rígida, y se lleva a cabo en los terraplenes de prueba. En ella se emplea una placa circular de acero de 30 a 50 cm de diámetro, a la cual se aplica una carga mediante gatos hidráulicos para inducir deformaciones al terreno. Esta placa permite medir sólo las deformaciones que se generan en la superficie de apoyo y en la superficie del terreno lateralmente a la placa, figura 3.14.

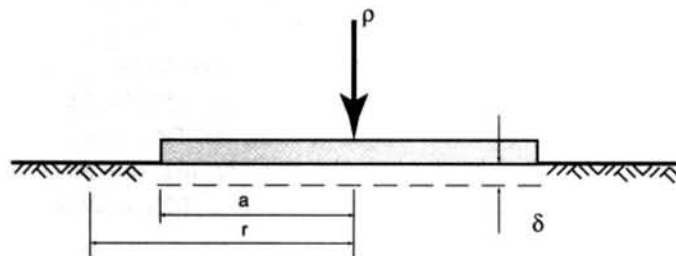


Figura 3.14. Prueba de placa rígida.

El módulo de deformabilidad se obtiene considerando a la placa infinitamente rígida y al medio homogéneo, isótropo y elástico, por medio de las expresiones:

$$E_E = \frac{P(1-\nu^2)}{2\delta a} \quad \text{para } r < a \quad (3.2)$$

$$E_E = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi\delta a} \sec^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) \quad \text{para } r > a \quad (3.3)$$

donde:

$P$  es la carga aplicada

$a$  es el radio de la placa

$\delta$  es el desplazamiento producido por la carga

$\nu$  es la relación de Poisson

$r$  es la distancia al punto donde se mide el desplazamiento

En este caso, la relación de Poisson  $\nu$  no se puede medir, por lo que es necesario considerar una magnitud aproximada de dicha relación, ya que este valor no influye de manera significativa en la magnitud de  $E$ . El tamaño reducido de la placa permite aplicar mayores presiones al terreno, sin embargo el volumen afectado por los esfuerzos es muy reducido, por lo que los resultados son relativamente representativos.

El sitio del terraplén donde se realicen los ensayos debe ser representativo de la masa de enrocamiento.

### 3.4. PROPIEDADES MECÁNICAS DE GRAVAS Y ENROCAMIENTOS

Las propiedades de mayor interés para el diseño de una estructura de enrocamiento son la resistencia al corte y la compresibilidad del material. Entre los factores que influyen en estas propiedades se consideran la granulometría del material, la forma y rugosidad de las partículas que lo constituyen, la relación de vacíos, la mineralogía y la resistencia de la roca original, y los defectos existentes en los fragmentos de roca. Aunado a lo anterior deben tomarse en cuenta los efectos de escala debidos a las dimensiones de las muestras en que se evalúan las propiedades mecánicas respecto del tamaño de la estructura en que serán utilizados.

#### 3.4.1. Resistencia al corte

Marsal (1975) realizó pruebas triaxiales en el aparato T-113-25 en dos tipos de material de la presa La Angostura: enrocamiento formado por caliza blanda (resistencia a la compresión simple de 100 a 250 kg/cm<sup>2</sup>) extraída de cantera por medio de explosivos, con partículas de forma angulosa; y grava-arena bien graduada de origen aluvial, con partículas redondeadas, sanas y resistentes. Los resultados muestran que las deformaciones axiales  $\epsilon_a$  a la falla en el caso del enrocamiento fueron hasta 6 veces mayores que las de la grava y arena, incluso en algunos casos (para  $\sigma_3 = 15$  y 22 kg/cm<sup>2</sup>) no se alcanzó el esfuerzo desviador máximo ya que la magnitud de las deformaciones axiales no permitió finalizar la prueba. Tal diferencia en los valores de  $\epsilon_{af}$  se atribuyó a que la rotura de granos en el enrocamiento de caliza fue mucho mayor que la ocurrida en la grava-arena ( $B_g = 8.6$  a 34 % y  $B_g = 0.8$  a 2.8 %, respectivamente). De estos resultados se observa que la rotura de granos se incrementa con

el tamaño de partículas y la presión confinante, además de que las partículas angulosas resultan más susceptibles a la ruptura que las redondeadas.

Las envolventes de Mohr que resultan de pruebas triaxiales de compresión y extensión efectuadas por Marsal (1965) son curvas convexas, concurrentes al origen, que tienden a una ley lineal de variación para esfuerzos efectivos mayores de  $10 \text{ kg/cm}^2$ , aproximadamente. Las relaciones de esfuerzos principales disminuyen conforme la presión confinante crece, pero sus razones de cambio varían dependiendo del tipo de material.

Se observó que la resistencia al corte fue menor en las muestras poco compactas o sueltas ( $D_r < 70\%$ ) y en los enrocamientos con granulometría uniforme sometidos a esfuerzos elevados ( $\sigma_3 > 5 \text{ kg/cm}^2$ ).

En pruebas de deformación plana efectuadas en el aparato PS-75-22 las relaciones de esfuerzos principales  $\sigma_1/\sigma_3$  a la falla fueron bastante más altas que las obtenidas en pruebas triaxiales. Hill (1960) señala que el criterio de Mohr no es aplicable a una masa granular sujeta a deformación plana y demuestra que en este caso la falla está controlada por el esfuerzo normal  $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$  y el tangencial máximo  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ . Como consecuencia de estas consideraciones, Marsal (1975) llega a la conclusión de que la envolvente de Mohr representa estados de esfuerzos que producen falla pero que no constituye la ley de resistencia al corte del material. Más tarde introduce una teoría que unifica ambos criterios (Marsal, 1971) con el concepto de resistencia friccionante asociada a la trayectoria media de los granos durante un cambio en el estado de esfuerzos. Según dicha teoría, la envolvente de Mohr de pruebas triaxiales coincide aproximadamente con la ley de resistencia al corte del suelo granular.

La figura 3.15 muestra los resultados de las pruebas triaxiales y de deformación plana obtenidos por Marsal aplicando los criterios de Mohr y Hill, los puntos que representan los estados de falla definen la ley de resistencia al corte de cada material. Los ensayos de corte directo proporcionan la resistencia al corte para la presión normal aplicada y, por tanto, dichos valores deben pertenecer a la curva correspondiente (Marsal, 1975). De acuerdo con la teoría de este autor, cuando se conoce la ley de resistencia de un suelo se pueden obtener las envolventes de esfuerzos que producen falla con el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 3.15. Es necesario estimar la inclinación  $\theta$  con respecto al plano principal mayor de la trayectoria media granular durante la falla. Para compresión triaxial  $\theta = \pi/4 + \phi/2$ , donde  $\phi$  es el ángulo de la tangente a la envolvente de Mohr; y para deformación plana  $\theta$  es aproximadamente igual a  $\pi/4$ .

Varadarajan et al (2003) efectuaron pruebas triaxiales consolidadas drenadas en muestras del material aluvial del proyecto de Ranjit Sagar y de material triturado utilizado en el proyecto Purulia. Ambos materiales mostraron un incremento en la deformación axial y volumétrica en la falla al incrementar la presión de confinamiento y el tamaño de partículas. Es importante resaltar que durante la etapa de carga sobre el espécimen ocurren compresión, reacomodo y rotura de granos. Las muestras de Ranjit Sagar sufrieron compresión y reacomodo por el deslizamiento de las partículas redondeadas. La rotura de granos se añade a la compresión volumétrica, presentándose en este material una continua disminución del volumen. En el material de Purulia, la compresión de la muestra se debe a la compresión y la rotura de las partículas. Sin embargo, las partículas granulares proporcionan un mayor grado de enlace entre las mismas, lo que produce dilatancia durante la carga y por tanto un aumento de volumen.

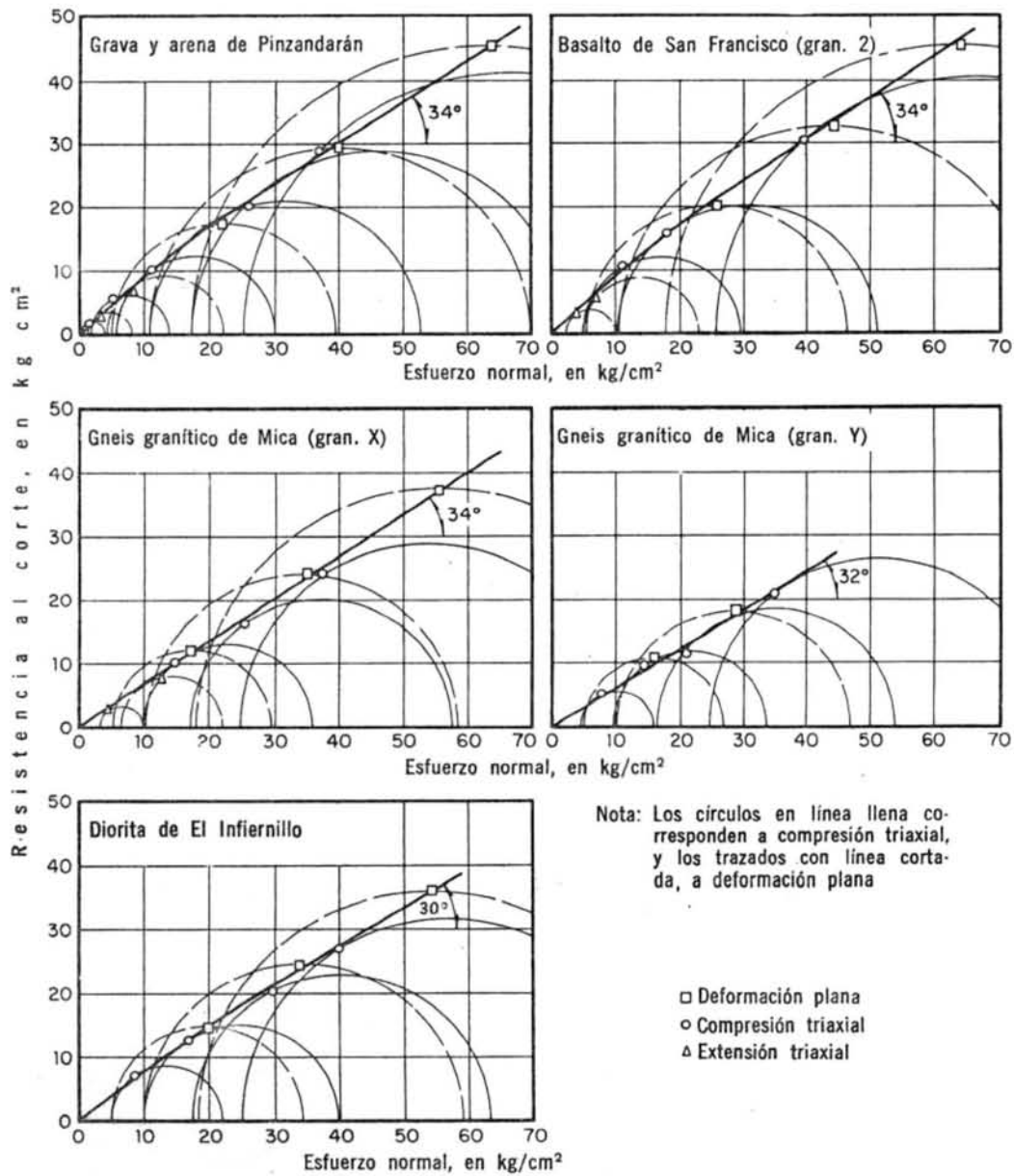


Figura 3.15. Comparación de resistencias al corte obtenidas en pruebas triaxiales y de deformación plana, Marsal (1975).

Alberro y Gaziev (2000) desarrollaron una herramienta analítica que relaciona la resistencia al corte de los enrocamientos con algunas de las propiedades índice que tienen efecto sobre ella: la densidad relativa  $D_r$ , el coeficiente de uniformidad  $C_u$ , el tamaño máximo de partícula  $d_{max}$ , la resistencia de las partículas  $P_a$  (carga de ruptura), la rotura de granos  $B_g$  y el esfuerzo confinante  $\sigma_3$  aplicado. En el estudio se utiliza la ley de resistencia

$$\sigma_{oct}^* = B(\tau_{oct}^*)^\alpha \quad (3.4)$$

que relaciona los esfuerzos normal y cortante a la falla,  $\sigma_{oct}^*$  y  $\tau_{oct}^*$ , en el plano octaédrico en forma parabólica.

En el caso de pruebas triaxiales de compresión, la expresión anterior puede escribirse de la forma adimensional

$$\frac{\sigma_1^* + 2\sigma_3^*}{R} = \left( \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{R} \right)^\alpha \quad (3.5)$$

Al corroborar el modelo con los datos de pruebas triaxiales de compresión efectuadas por Marsal el valor de  $\alpha$  fue casi constante e igual en promedio a 1.15, y el valor mínimo de  $R$  fue 0.03 kg/cm<sup>2</sup>. Analizando los valores experimentales del parámetro  $R$  para cada material, así como sus propiedades índice, se puede establecer una correlación entre ellos

$$R_{calc} \approx 0.0027D_r(\%) + 0.06C_{ue} + 0.002P_a - 0.033d_{max} \quad (3.6)$$

donde:

$D_r$  es la densidad relativa en porcentaje

$C_{ue}$  es el coeficiente de uniformidad efectivo

$P_a$  es la carga de ruptura en kg para una partícula de diámetro nominal  $d_n=2$  cm

$d_{max}$  es el diámetro máximo de partículas en cm

Si  $R_{calc}$  resulta negativo se considerará  $R_{calc}=0.03$  kg/cm<sup>2</sup>.

Para determinar la envolvente de Mohr de un cierto material se utiliza la expresión genérica de los círculos de Mohr y la expresión (3.5) de donde se obtiene

$$\tau = \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2} \sqrt{1 - \frac{9}{\left[ 1 + 2.3 \left( \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{R} \right)^{0.15} \right]^2}} \quad (3.7)$$

que es el esfuerzo cortante en la envolvente de falla.

El ángulo  $\phi_i$  que forma la tangente a la envolvente con el eje de los esfuerzos normales resulta

$$\phi_i = \sin^{-1} \frac{3}{1 + 2.3 \frac{\sigma_1^* + 2\sigma_3^*}{\sigma_1^* - \sigma_3^*}} \quad (3.8)$$

y el plano de falla está inclinado a  $45^\circ - \phi_i/2$  respecto del eje vertical.

Un razonamiento similar para el caso en que se determine la resistencia al corte por medio de pruebas de deformación plana, considerando  $\nu=0.25$ , da como resultado una expresión de la forma



$$\tau = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} \sqrt{\frac{1.64}{\left(\frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2R}\right)^{0.25}} - 0.08 - \frac{\left(2 - 0.12 \left[\frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2R}\right]^{0.25}\right)^2}{1.4 \left[\frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2R}\right]^{0.25}}} \quad (3.9)$$

### 3.4.2. Compresibilidad

En pruebas triaxiales efectuadas en 11 tipos de gravas y enrocamientos (Marsal, 1975) se encontraron distintas relaciones entre el esfuerzo principal mayor a la falla  $\sigma_{If}$  y el producto  $B_g q$  (el volumen de las partículas fragmentadas por unidad del volumen total de la fase sólida, ec. 3.1). En algunos materiales y ciertas granulometrías la relación es lineal y no concurrente al origen, lo que indica que las partículas tienen fisuras en su masa, las cuales con esfuerzos pequeños producen una rotura significativa. En otros casos se observó una variación aproximadamente lineal hasta que al alcanzar un cierto valor de esfuerzo  $\sigma_{If}$  característico no se registra mayor rotura de partículas. Para un tercer grupo de materiales, la rotura de granos fue menor del 10%, sin que se pudiera definir alguna relación entre ambas variables.

Los resultados de pruebas efectuadas en nueve enrocamientos y dos muestras de grava y arena en el aparato O-114-100 (Marsal, 1965) son similares al comportamiento que se observa en arenas al trazar las curvas relación de vacíos-presiones ( $e$  vs.  $\sigma_a$ ) y las de deformación total-presiones ( $\varepsilon$  vs.  $\sigma_a$ ). En ellas se presentan cambios súbitos de las deformaciones que corresponden a los momentos en que se inundaron los especímenes. Al evaluar los coeficientes de compresibilidad se observó que en general  $a_v$  disminuye al aumentar el esfuerzo aplicado  $\sigma_a$ . La rotura de granos y el grado de compactación mostraron una fuerte influencia en el coeficiente de compresibilidad.

La deformación producida por la aplicación de un incremento de carga no es instantánea, lo cual se observa tanto en gravas como en arenas aún cuando los especímenes no estén saturados. El reacomodo de los granos y la rotura de algunos de ellos induce un proceso de difusión que se explica con la teoría del camino casual debido a Marcov (Marsal, 1965). El asentamiento más importante o primario ocurre justo después de la aplicación del incremento de carga y hasta 5 minutos después de la misma. Enseguida la deformación describió una ley lineal en función del logaritmo del tiempo. A esta fase se llamó secundaria y constituye en realidad una sucesión de procesos de difusión menores que el primario y de amplitud decreciente con el tiempo. Las deformaciones inducidas por el humedecimiento también parecen ajustarse a un fenómeno de difusión que no interfiere con el flujo de agua, pues el espécimen drena libremente.

Debido a que el proceso de difusión primario es muy rápido en un suelo granular de espesor relativamente reducido (alrededor de 1 m en ensayos oedométricos) es difícil registrarlo y en la mayoría de los casos las mediciones están afectadas por el lapso durante el cual se aplica el incremento de carga. La predicción de los asentamientos en función del tiempo puede ser importante en grandes masas granulares en presas o pedraplenes.

Alberro y Gaziev (2000) proponen una relación empírica para conocer el valor del módulo de deformación a partir de pruebas de compresión unidimensional, considerando que éste depende del esfuerzo máximo aplicado  $\sigma_{I\max}$  y de la magnitud de la rotura de partículas  $B_g$  que sufre el enrocamiento.

$$MB_g = 320\sigma_{1\max}^{0.75} \quad (3.10)$$

Conociendo el valor del esfuerzo máximo aplicado y el de  $B_g$ , en porcentaje, de acuerdo con la figura 3.16 se puede inferir el valor numérico de  $M$  de acuerdo con la expresión anterior.

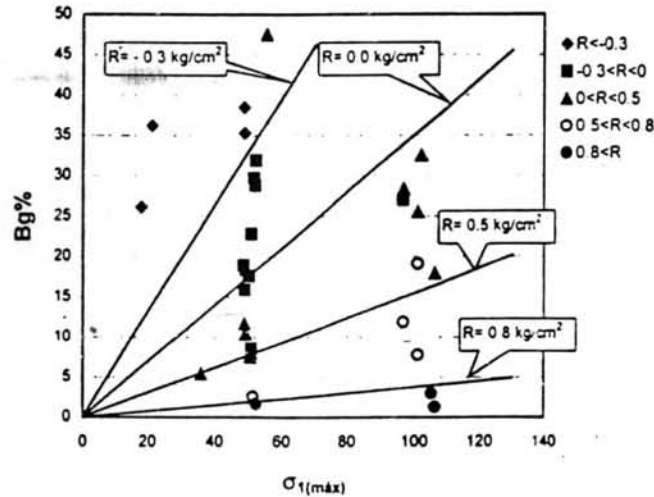


Figura 3.16. Rotura de partículas vs.  $\sigma_{1\max}$  y  $R$ , de pruebas de compresión unidimensional.

En cuanto a la deformabilidad de los enrocamientos, estos mismos autores mencionan los trabajos de Colonetti (1961) basados en los de Volterra y Boltzmann, quienes consideran que el comportamiento esfuerzo-deformación de este tipo de materiales es, además de inelástico, "hereditario", ya que depende de su trayectoria de esfuerzos. Es decir,

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_{oct} = f(\sigma_1 - \sigma_{oct}) \quad (3.11)$$

Colonetti dedujo una expresión general para la deformación plástica  $\varepsilon_p$  en términos de la deformación elástica del cuerpo  $\varepsilon_e$  sometido a un proceso de carga unidimensional

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \varepsilon_e + k_1\varepsilon_e^2 + k_2\varepsilon_e^3 + k_3\varepsilon_e^4 + \dots \quad (3.12)$$

siendo  $k_1, k_2, k_3, \dots$  coeficientes constantes. Se demuestra que la expresión empírica comúnmente utilizada propuesta por Kondner (1963) es un caso particular de la anterior, cuando  $k_2 = k_1^2, k_3 = k_1^3, \dots, k_n = k_1^n$ .

Considerando que esta ley teórica es válida para describir el comportamiento esfuerzo-deformación de los enrocamientos, es posible obtener una expresión para evaluar el módulo tangente  $E_t$

$$E_t = K(\sigma_3^*)^2 \left( 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1^* - \sigma_3^*} \right)^2 \quad (3.13)$$

donde  $K$  es tal que  $G_i = K(\sigma_3^*)^{2/3}$  y depende de  $R$  (ecuación 3.6), al igual que  $\sigma_1^* - \sigma_3^*$  (ecuación 3.5).

Es importante mencionar que las expresiones deducidas por Alberro y Gaziev (2000) respecto de la compresibilidad y la resistencia de los enrocamientos no sustituyen en ningún momento las propiedades que se obtengan a partir de pruebas de laboratorio y campo. Sirven únicamente como una correlación preliminar entre las propiedades índice de los materiales y sus propiedades mecánicas, sin que sean determinantes de su comportamiento.

#### INFLUENCIA DEL HUMEDECIMIENTO EN LA COMPRESIBILIDAD

A través de la práctica en el uso de enrocamientos para distintas estructuras térreas, se ha observado que el humedecimiento del material contribuye en su compresibilidad. Ello ha motivado a la realización de pruebas de laboratorio, sin que se haya concluido en una relación directa entre la cantidad de agua inyectada y el incremento en la compresibilidad.

La experiencia en la colocación de los enrocamientos acerca de la influencia del humedecimiento del material en su compresibilidad muestra que a partir de una tasa comprendida entre 300 y 400 l/m<sup>3</sup> el efecto de la inyección de agua es despreciable.

#### 3.4.3. Propiedades mecánicas de algunos enrocamientos

Nombre de la presa	Tipo	Altura (m)	Módulo de Young $E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	Relación de Poisson $\nu$	Características del enrocamiento y procedimiento de colocación	Referencia
Guadalupe (1ª presa), 1943	Enrocamiento con cara de concreto	28.50	$514.5\sigma_3^{0.6} \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3.57\sigma_3} \right]^2$ <sup>(1)</sup>	0.30	-	SRH, CFE, II-UNAM (1976)
Guadalupe (3ª presa), 1968	Enrocamiento con núcleo impermeable inclinado	30	$627.5\sigma_3^{0.6} \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3.57\sigma_3} \right]^2$ <sup>(1)</sup>	0.15	En capas de 1.50 m, compactado con el paso del equipo de acarreo	SRH, CFE, II-UNAM (1976)
Requena, rehabilitada en 1966	Mixta: enrocamiento y arcilla con muro central celular de mampostería	28	1500 <sup>(2)</sup>	0.25	Enrocamiento bien graduado (tam. máx. 50 cm) en capas de 1 m compactados con banda de tractor	SRH, CFE, II-UNAM (1976)
La Villita, 1967	Materiales graduados	60	$15000\sigma_3^{1/3} \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{4\sigma_3} \right]^2$ <sup>(1)</sup>	0.49	Enrocamiento bien graduado (tam. máx. 40 cm) compactado con tractor de bandas	SRH, CFE, II-UNAM (1976)
Malpaso, 1964	Enrocamiento con núcleo central	138	$235\sigma_3^{0.676} \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3.38\sigma_3} \right]^2$ <sup>(1)</sup> (a) $150\sigma_3^{0.676} \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3.38\sigma_3} \right]^2$ <sup>(2)</sup> (b)	-	(a) Enrocamiento compactado (b) Enrocamiento a volteo	SRH, CFE, II-UNAM (1976)

(1) Estimado a partir de pruebas triaxiales.

(2) Valores supuestos después de la construcción.

Tabla 3.3. Propiedades mecánicas de algunos enrocamientos.



La tabla 3.3 incluye algunas propiedades mecánicas de enrocamientos utilizados en la construcción de ciertas presas. Algunas de las propiedades son supuestas después de la construcción, al no contar con mayor información. En otros casos los valores de las propiedades se derivan de resultados de pruebas de laboratorio y de relaciones empíricas. En la tabla se indica el nombre de la presa, su altura y el año de término de la construcción como indicativos de la evolución en la utilización de este tipo de materiales, en presas cada vez más altas. Así mismo, se menciona su procedimiento de colocación, el cual como se ha mencionado tiene un gran impacto sobre las características de resistencia y compresibilidad del material.

### 3.5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Los materiales de enrocamiento consisten principalmente de partículas angulosas a subangulosas obtenidas por voladura de una masa rocosa o partículas redondeadas a subredondeadas de origen aluvial. Su comportamiento se ve afectado por factores tales como su composición mineralógica, graduación tamaño y forma de sus partículas, la dureza de la roca madre y las condiciones de esfuerzo; las propiedades de las partículas pueden ser muy variables.

Una de las dificultades que presenta el estudio del comportamiento de los enrocamientos es la rotura de granos, la cual ocurre aún para niveles de esfuerzo bajos. El grado de ruptura depende de la granulometría del material, de la resistencia de las partículas y del nivel de esfuerzos. Marsal propone una medida cuantitativa de la rotura de granos denominada  $B_g$ .

Las dimensiones de las partículas de enrocamientos hacen imposible que se les pruebe en equipos de laboratorio convencionales. Por ello, es necesario ensayar especímenes cuyas granulometrías tengan un cierto grado de escalamiento, teniendo en cuenta los efectos que esto produce sobre los resultados de las pruebas. Una de las técnicas que para tal efecto se han empleado es la elaboración de especímenes que tengan una curva granulométrica trasladada respecto de la del material en campo. Otra es utilizar únicamente la fracción de la muestra de enrocamiento que es de diámetro menor que uno determinado. En ambos casos debe cuidarse la representatividad del material de laboratorio respecto del de campo. En los estudios realizados por Marachi et al (1972) de los efectos de escala en enrocamientos, se encontró que la relación de esfuerzos a la falla y el ángulo de fricción son mayores en especímenes pequeños, mientras que la compresibilidad de los mismos disminuye. Así mismo, el ángulo de fricción aumentó y la compresibilidad disminuyó al ensayar materiales con partículas de menor tamaño máximo. Las partículas redondeadas exhiben menor compresibilidad que las angulosas.

Para la determinación de las propiedades de resistencia y compresibilidad de los enrocamientos se han fabricado diversos equipos tanto de laboratorio como de campo. Entre los de laboratorio están la cámara triaxial gigante T-113-25, creada por Marsal para ensayar muestras de 113 cm de diámetro y 250 cm de altura a presiones confinantes de hasta 25 kg/cm<sup>2</sup>; y la cámara triaxial TC-30-75 para especímenes de 30 cm de diámetro y 75 cm de altura bajo presiones confinantes que varían de 0 a 75 kg/cm<sup>2</sup>; la primera de las mencionadas está en desuso. También se cuenta con oedómetros como el O-50-32 para consolidar muestras de 50 cm de diámetro. Para realizar pruebas de campo se utilizan más frecuentemente las pruebas de placa y los terraplenes de prueba, en estos últimos es posible simular y evaluar las condiciones de compactación del material.



Se han llevado a cabo un gran número de estudios para evaluar las propiedades de los enrocamientos. Entre otros, Marsal encontró que materiales blandos extraídos de cantera tuvieron mayor deformabilidad y menor resistencia que otros de origen aluvial. Se observó también que la resistencia al corte fue menor en los especímenes poco compactos o sueltos y en los enrocamientos con granulometría uniforme sometidos a esfuerzos elevados. Al evaluar la compresibilidad de los materiales se encontró que, en general, ésta disminuye al aumentar el esfuerzo aplicado. Adicionalmente, se ha observado que el humedecimiento de los materiales de enrocamiento contribuye a su compresibilidad.

Alberro y Gaziev (2000) desarrollaron una herramienta analítica para relacionar la resistencia al corte de enrocamientos con algunas de sus propiedades índice, así como una relación empírica para evaluar el módulo de deformación a partir de pruebas de compresión unidimensional.



## Capítulo 4

### MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Geoméricamente, las presas son estructuras relativamente simples. Sin embargo, los materiales utilizados tanto para la construcción del terraplén como el material en el que se cimienta pueden variar enormemente. El material de la cimentación puede ser desde roca sana hasta arcillas blandas, el terraplén puede conformarse con arcillas compactadas o incluso enrocamientos. Dependiendo de estos materiales, de la geometría del terraplén y del uso que tenga la estructura, los mecanismos que se involucran en el comportamiento de las presas pueden llegar a ser muy complejos. Se han realizado muchos intentos para predecir el comportamiento de este tipo de obras, y la investigación continúa. En este campo, el método de elementos finitos ha probado ser de gran utilidad, por lo que actualmente es el más utilizado. El presente capítulo trata los principios teóricos involucrados en el análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de presas de materiales térreos. Lo que a continuación se presenta fue tomado del texto *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering* de Potts y Zdravkovic, 1999.

#### 4.1. GENERALIDADES

El concepto básico del método de elementos finitos es la idealización de un continuo real como un arreglo de elementos discretos interconectados en sus puntos nodales. Para mantener la compatibilidad entre los bordes de elementos adyacentes, se asume que las deformaciones dentro de cada elemento varían linealmente en todas direcciones. Con base en ello, es posible calcular las propiedades de rigidez de los elementos. Finalmente, la rigidez del arreglo estructural completo se obtiene con la simple superposición de los coeficientes de rigidez apropiados de los elementos individuales que se conectan en cada punto nodal.

Si el vector de todos los desplazamientos nodales del arreglo se denomina  $\{d\}$  y el vector de las correspondientes fuerzas nodales es  $\{R\}$ , entonces la matriz de rigideces de la estructura  $[K]$ , obtenida por la superposición de las rigideces de los elementos finitos, expresa la relación entre estas cantidades como

$$\{R\} = [K] \{d\} \quad (4.1)$$

Si se trata de un problema bidimensional representado por elementos placa, el orden de estas matrices es  $2N$  cuando existen  $N$  puntos nodales en la idealización de la estructura. Esto es, cada desplazamiento nodal debe incluir ambos componentes,  $x$  y  $y$ . De manera análoga, para un problema tridimensional en el cual los desplazamientos de los elementos deben ser descritos por tres componentes, el orden de las matrices será  $3N$ . En aquellos puntos nodales donde las condiciones de frontera imponen restricciones en el desplazamiento, las matrices pueden reducirse por medio de la eliminación de las correspondientes columnas y/o renglones.

En un análisis elástico estándar de elemento finito, estas ecuaciones lineales de equilibrio son resueltas para los desplazamientos nodales que resultan de las fuerzas nodales aplicadas. Posteriormente, se obtienen los esfuerzos  $\{\sigma\}$  en todos los elementos a partir de los desplazamientos nodales con la transformación matricial

$$\{\sigma\} = [S] \{d\} \quad (4.2)$$

donde la matriz de transformación de esfuerzos  $[S]$  toma en cuenta los patrones de desplazamiento supuestos para los elementos, así como sus propiedades materiales.

## 4.2. MATERIALES CON COMPORTAMIENTO LINEAL

En general, los materiales en la naturaleza tienen un comportamiento esfuerzo-deformación no lineal; sin embargo, gran parte de los problemas en ingeniería pueden ser resueltos por medio de la teoría de la elasticidad. En muchos de los casos los materiales trabajan únicamente en su intervalo lineal, o su comportamiento puede describirse como una aproximación al mismo. Por ello resulta de gran interés el planteamiento y la solución de problemas de este tipo; adicionalmente, éstos suelen servir como base para la solución de otros problemas más complejos.

A continuación se presenta la teoría en la cual se basa el método del elemento finito para resolver problemas con materiales cuyo comportamiento es elástico lineal. Por simplicidad, se considera un problema bidimensional, sin embargo, lo aquí expuesto es aplicable en problemas de tipo tridimensional.

### 4.2.1. Discretización del problema

La discretización en elementos es el proceso de modelar la geometría del problema en estudio por medio de un arreglo de pequeñas regiones delimitadas por fronteras, a las cuales se les llama elementos finitos. La geometría del problema a estudiar debe ser definida y cuantificada, para después ser reemplazada por una malla equivalente de elementos finitos. Durante este proceso es común que se requieran de ciertas aproximaciones que permitan modelar la estructura por medio de los elementos, sin que las características geométricas del problema se vean significativamente modificadas. En el caso de problemas bidimensionales, los elementos finitos son usualmente triángulos o cuadriláteros. Para el análisis de campos de esfuerzo se ha encontrado conveniente la utilización de elementos triangulares en la idealización. Cuando se trata de problemas en tres dimensiones, los elementos pueden estar constituidos por elementos regulares de cinco o seis lados.

Los elementos se definen por medio de nodos ubicados en las fronteras o el interior de los mismos, y su geometría se especifica en términos de las coordenadas de los nodos. Cuando se trata de elementos con lados rectos, los nodos se localizan generalmente en sus vértices. Si se desea modelar elementos cuyos lados sean curvos, se añaden nodos adicionales colocados usualmente en el punto medio de cada lado, como se aprecia en la figura 4.1. El conjunto de elementos se conecta entre sí por medio de sus lados y nodos. Para hacer referencia a los elementos y los nodos que constituyen la malla de elementos finitos, éstos deben ser numerados de forma sistemática.

La geometría del problema de valores en la frontera debe definirse de la forma más precisa posible. Las discontinuidades o cambios de material que existan en el modelo son indicativos de divisiones naturales en la malla de elementos finitos. De igual forma, las condiciones de frontera determinarán en gran medida el diseño de la malla, tomando en cuenta los tipos de apoyo, las cargas puntuales y las discontinuidades en las cargas.

El número y tamaño de los elementos dependen del comportamiento del material y tienen gran influencia sobre la solución. En las regiones del modelo donde se espera que los valores

de las incógnitas cambien significativa o rápidamente suele ser necesario refinar la malla, es decir, construir un mayor número de elementos de menor tamaño para describir de mejor manera las variaciones que ocurren y obtener resultados más precisos.

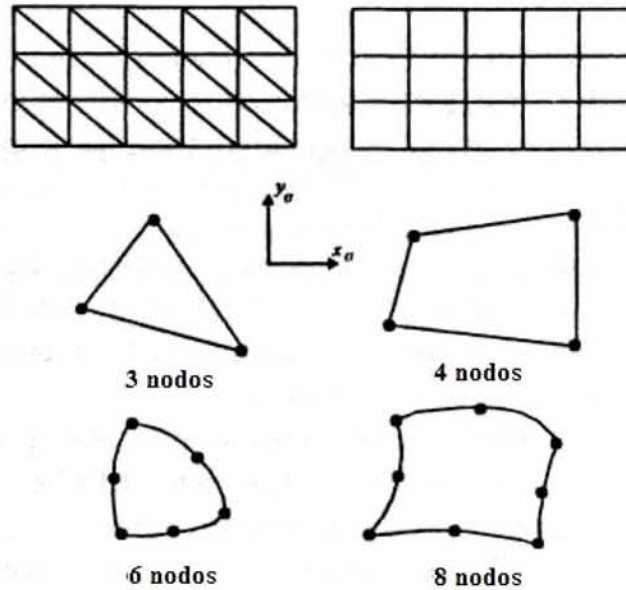


Figura 4.1. Elementos finitos típicos en dos dimensiones.

Es muy recomendable que los elementos finitos guarden formas regulares, además de cumplir con condiciones de relaciones de aspecto y distorsión, como más adelante se menciona, de manera que se eviten condicionamientos pobres en las ecuaciones del método que deriven en soluciones imprecisas o notablemente erróneas.

#### 4.2.2. Aproximación por Desplazamientos

En el método del elemento finito basado en desplazamientos, la principal incógnita es el campo de desplazamientos, el cual varía en todo el dominio del problema. Los esfuerzos y las deformaciones se tratan como cantidades secundarias que pueden ser halladas una vez que el campo de desplazamientos fue determinado. Éste se caracteriza por medio de los desplazamientos globales  $u$ ,  $v$  y  $w$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

La principal aproximación en el método del elemento finito es asumir una forma particular en que estos desplazamientos varían en el dominio en estudio, la cual debe satisfacer las condiciones de compatibilidad. Se asume además que en cada elemento los componentes del desplazamiento tienen una forma polinomial simple, donde el orden del polinomio depende del número de nodos del elemento. Los componentes del desplazamiento se expresan en términos de sus valores en los nodos.

Considérense las ecuaciones de desplazamiento del elemento bidimensional triangular con tres nodos mostrado en la figura 4.2.



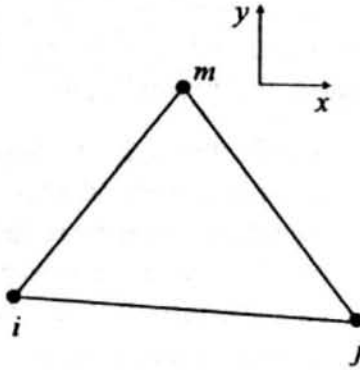


Figura 4.2. Elemento bidimensional con tres nodos.

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= b_1 + b_2x + b_3y \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las seis constantes  $a_1$  a  $b_3$  pueden expresarse en términos de los desplazamientos nodales sustituyendo las coordenadas nodales en las ecuaciones anteriores, y después resolviendo los dos sistemas de ecuaciones simultáneas que resultan:

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ u_j &= a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ u_m &= a_1 + a_2x_m + a_3y_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

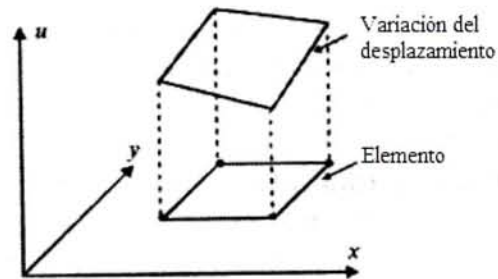
$$\begin{aligned} v_i &= b_1 + b_2x_i + b_3y_i \\ v_j &= b_1 + b_2x_j + b_3y_j \\ v_m &= b_1 + b_2x_m + b_3y_m \end{aligned} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones simultáneas anteriores se resuelven para las constantes  $a_1$  a  $b_3$  en términos de los desplazamientos nodales  $u_i$ ,  $u_j$ ,  $u_m$ ,  $v_i$ ,  $v_j$  y  $v_m$  para obtener

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{u_i u_j u_m v_i v_j v_m\}^T = [N] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\text{nodos}} \quad (4.6)$$

Donde la matriz  $[N]$  es la *matriz de funciones de forma*. Los componentes de desplazamiento  $u$  y  $v$  se expresan entonces en términos de sus valores en los nodos. Para elementos de tres y cuatro nodos existe entonces una variación lineal de los desplazamientos a través del elemento, según lo muestra la figura 4.3. Para los elementos de seis y ocho nodos, el campo de desplazamientos varía de forma cuadrática a través del elemento.

La precisión del análisis de elementos finitos depende del tamaño de los elementos y de la naturaleza de la aproximación de los desplazamientos. Para que la precisión aumente conforme se disminuye el tamaño de los elementos, la aproximación de los desplazamientos debe satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad:



**Figura 4.3. Variación lineal de los desplazamientos a través de un elemento de 4 nodos.**

- Continuidad del campo de desplazamientos, para evitar espacios o traslapes entre los elementos. Lo anterior se logra asegurando que los desplazamientos de un lado del elemento dependan sólo de los desplazamientos de los nodos ubicados en ese lado.
- La aproximación de los desplazamientos debe ser capaz de representar el movimiento de cuerpo rígido, como traslaciones y rotaciones, las cuales no inducen deformaciones en un elemento.
- La aproximación de los desplazamientos debe poder representar variaciones constantes de las deformaciones.

La aproximación polinomial presentada satisface estas condiciones de compatibilidad.

La característica esencial de la aproximación basada en elementos es que la variación de los desplazamientos dentro de cada elemento se expresa como una función simple de los desplazamientos en sus nodos. El problema de determinar el campo de desplazamientos a través de la malla de elementos finitos se reduce a la obtención de los componentes de desplazamiento en un número finito de nodos. Estos desplazamientos nodales se denominan los *grados de libertad* desconocidos. En problemas bidimensionales de deformación plana existen dos grados de libertad en cada nodo: los desplazamientos  $u$  y  $v$ .

#### *Elementos finitos isoparamétricos*

La elección de los elementos finitos a utilizar en problemas bidimensionales depende en gran medida de la geometría a modelar y del tipo de análisis requerido. En problemas geotécnicos, el principal requerimiento es que los tipos de elementos sean útiles en todas las situaciones geométricas que puedan surgir, incluyendo los casos donde las estructuras tienen fronteras o interfaces materiales curvas. Los elementos triangulares o cuadriláteros resultan convenientes ya que ambos pueden ser modificados, por medio de la adición de nodos en el punto medio de sus lados, para representar adecuadamente la curvatura de los mismos.

Debido a que las ecuaciones de elementos finitos son más sencillas de plantear para la familia de elementos isoparamétricos cuadriláteros se les considerará para las derivaciones sucesivas, sin que ello represente su mayor conveniencia para la solución de este método. Si el lector desea estudiar las deducciones de las ecuaciones correspondientes a los elementos triangulares, consulte Potts y Zdvkovic (1999).

La figura 4.4 muestra un elemento cuadrilátero isoparamétrico de 8 nodos, el cual puede ser utilizado como un elemento general de lados curvos. El elemento *global* se deriva de un elemento *madre*, con el mismo número de nodos, pero definido respecto de un sistema

*natural* de coordenadas. La misma figura muestra la configuración del elemento madre, cuyas coordenadas naturales  $S - T$  satisfacen las condiciones  $-1 \leq S \leq 1$  y  $-1 \leq T \leq 1$ .

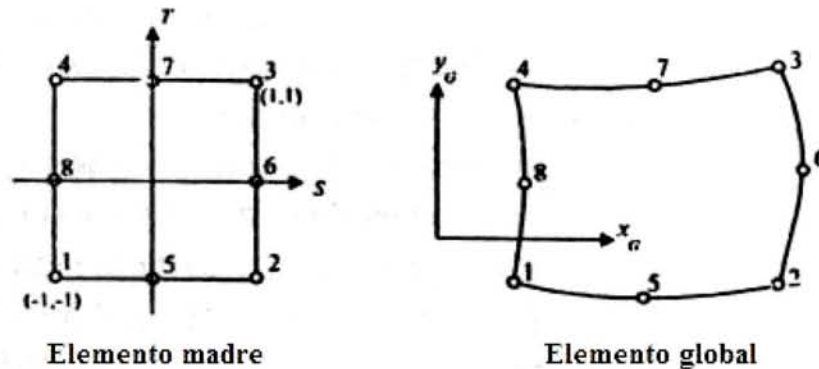


Figura 4.4. Elemento isoparamétrico de 8 nodos.

El procedimiento básico de la formulación de elementos finitos isoparamétricos es expresar los desplazamientos y la geometría de los elementos en términos de funciones de interpolación utilizando el sistema de coordenadas naturales. El término *isoparamétrico* surge del hecho de que la descripción paramétrica utilizada para la variación de los desplazamientos incógnita dentro de un elemento es exactamente la misma que la utilizada para correlacionar la geometría del elemento de los *ejes globales* a los *ejes naturales*.

Para el elemento de la figura 4.4, las coordenadas globales de un punto en el mismo pueden ser expresadas por interpolaciones de las coordenadas de la forma:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (4.7)$$

Donde  $x_i$  y  $y_i$  son las coordenadas globales de los ocho nodos del elemento y  $N_i$ ,  $i=1, \dots, 8$ , son las *funciones de interpolación*. Para los elementos isoparamétricos, las funciones de interpolación se expresan en términos de las coordenadas naturales  $S$  y  $T$ , las cuales varían de  $-1$  a  $+1$ . Para construir las funciones de interpolación para el elemento isoparamétrico de ocho nodos se utilizan las siguientes propiedades. Primero, existe una función de interpolación correspondiente a cada nodo en el elemento y cada función es cuadrática en las coordenadas naturales  $S$  y  $T$ . Segundo, la función de interpolación  $N_i$  es igual a 1 en el nodo 1 ( $S=-1$ ,  $T=-1$ ) y es igual a cero en los siete nodos restantes; una condición similar existe para las funciones de interpolación  $N_2, N_3, \dots, N_8$ . Utilizando estas propiedades se puede demostrar que las funciones de interpolación resultan:

<i>Nodos de las esquinas</i>	<i>Nodos en el punto medio de los lados</i>	
$N_5 = \frac{1}{2}(1-S^2)(1-T)$	$N_1 = \frac{1}{4}(1-S)(1-T) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$	
$N_6 = \frac{1}{2}(1+S)(1-T^2)$	$N_2 = \frac{1}{4}(1+S)(1-T) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6$	
$N_7 = \frac{1}{2}(1-S^2)(1+T)$	$N_3 = \frac{1}{4}(1+S)(1+T) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7$	(4.8)
$N_8 = \frac{1}{2}(1-S)(1-T^2)$	$N_4 = \frac{1}{4}(1-S)(1+T) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$	



Como el elemento es isoparamétrico, los desplazamientos en el mismo se interpolan de la misma manera que la geometría. Por tanto, las funciones de interpolación anteriores  $N_1, N_2, \dots, N_8$  son las funciones de forma en la ecuación (4.6). Consecuentemente, los desplazamientos dentro del elemento isoparamétrico de ocho nodos también se asumen como cuadráticos respecto de  $S$  y  $T$ .

La principal ventaja de la formulación isoparamétrica es que las ecuaciones del elemento sólo requieren ser evaluadas en el sistema coordenado del elemento madre. Entonces, para cada elemento en la malla las integrales de la matriz de rigideces pueden ser evaluados por un procedimiento estándar. Las integraciones sólo deben realizarse en un cuadrado en el que las coordenadas  $S$  y  $T$  varían entre  $-1$  y  $+1$ . Las condiciones de frontera pueden determinarse de manera similar. Si se aplican cargas por gravedad, las fuerzas nodales se obtienen a partir de integrales en el elemento, las cuales nuevamente se reducen a integrales sobre el elemento madre. Si se aplican condiciones de frontera para los esfuerzos, se obtienen las fuerzas nodales por medio de integrales sobre la frontera de la malla. En este caso, las integrales pueden reducirse a integrales de línea sobre los lados del elemento madre.

Para todo tipo de elementos finitos se obtienen mejores resultados si los elementos tienen formas razonables. Elementos fuertemente distorsionados pueden producir distintas formas de imprecisión. Cuando se utilizan elementos isoparamétricos, se pueden encontrar dificultades si las distorsiones conducen a una correspondencia no única entre los elementos globales y los elementos madre. Para el caso de los elementos cuadriláteros mencionados, debe observarse lo siguiente:

- Para evitar una correspondencia no única de los elementos globales con los elementos madre, todos los ángulos interiores en las esquinas de los elementos deben ser menores de  $180^\circ$ . Se ha observado que los mejores resultados se obtienen si estos ángulos varían entre  $30^\circ$  y  $150^\circ$ .
- Si un elemento se hace muy delgado, los coeficientes de rigidez de los grados de libertad transversales son considerablemente más grandes que aquellos correspondientes a los desplazamientos longitudinales, lo cual resulta en un condicionamiento pobre de los sistemas de ecuaciones y puede conducir a errores grandes en la solución. Para evitarlo, es recomendable que la relación de aspecto (la relación entre el lado más largo y el más corto) de un elemento sea cuando mucho 5:1. En materiales anisótropos, esta relación puede excederse si la dirección longitudinal de un elemento es paralela a la dirección de su mayor rigidez.
- La colocación de nodos en los puntos medios de los lados afecta fuertemente la unicidad de la correspondencia entre el elemento global y el elemento madre. La experiencia ha mostrado que para los elementos con lados curvos se obtienen mejores resultados si el radio de curvatura de cada lado es mayor que la longitud del lado más largo.

#### 4.2.3. Formulación de las ecuaciones de los elementos

Las ecuaciones de los elementos son aquellas que gobiernan el comportamiento de la deformación de cada elemento. Esencialmente combinan la compatibilidad, el equilibrio y las condiciones constitutivas.

Los desplazamientos en un elemento bidimensional están dados por:

$$\{\Delta d\} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix}_n = [N] \{\Delta d\}_n \quad (4.9)$$

Las deformaciones correspondientes a estos desplazamientos son (asumiendo pequeñas deformaciones y signo positivo para la compresión):

$$\Delta \varepsilon_x = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} \quad \Delta \varepsilon_y = -\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y} \quad \Delta \gamma_{xy} = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial y} - \frac{\partial(\Delta v)}{\partial x}$$

$$\Delta \varepsilon_z = \Delta \gamma_{xz} = \Delta \gamma_{yz} = 0 \quad (4.10)$$

$$\{\Delta \varepsilon\}^T = \{\Delta \varepsilon_x \quad \Delta \varepsilon_y \quad \Delta \gamma_{xy} \quad \Delta \varepsilon_z\}$$

Combinando las ecuaciones (4.9) y (4.10) para un elemento con  $n$  nodos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \varepsilon_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

De forma breve:

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \{\Delta d\}_n \quad (4.12)$$

donde la matriz  $[B]$  contiene las derivadas de las funciones de forma  $N_i$ , mientras que  $\{\Delta d\}_n$  contiene los desplazamientos nodales de un elemento.

Si se utilizan elementos isoparamétricos, las funciones de forma son las mismas que las de interpolación, ecuaciones (2.8), y  $N_i$  dependen sólo de las coordenadas naturales  $S$  y  $T$ . Por tanto, las derivadas globales  $\partial N_i/\partial x$  y  $\partial N_i/\partial y$  en (4.11) deben determinarse relacionando las derivadas de  $x$  y  $y$  con las de  $S$  y  $T$  por medio de:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} & \frac{\partial N_i}{\partial T} \end{Bmatrix}^T = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \quad (4.13)$$

donde  $[J]$  es la matriz Jacobiana

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial y}{\partial S} \\ \frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial y}{\partial T} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Entonces, invirtiendo la ecuación (4.13), las derivadas globales de las funciones de interpolación están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial T} & -\frac{\partial y}{\partial S} \\ -\frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial x}{\partial S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial T} \\ \frac{\partial N_i}{\partial S} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Las derivadas de las coordenadas en (4.15) que surgen por la transformación Jacobiana se determinan diferenciando las relaciones isoparamétricas dadas por la ecuación (4.7).

El modelo constitutivo, que expresa el comportamiento esfuerzo deformación del material, relaciona las condiciones de equilibrio y compatibilidad. Se expresa matemáticamente como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.16.a)$$

para un elemento tridimensional, o de forma breve

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\Delta\varepsilon \quad (4.16.b)$$

donde  $[D]$  es la matriz de rigideces, la cual para un material isótropo, elástico y lineal toma la forma siguiente:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde  $E$  y  $\nu$  son el módulo de Young y la relación de Poisson, respectivamente.

Tratándose de un elemento bidimensional se tiene que  $\{\Delta\sigma\}^T = [\Delta\sigma_x \Delta\sigma_y \Delta\tau_{xy} \Delta\sigma_z]$ . Para determinar las ecuaciones de los elementos en el caso de un comportamiento elástico lineal se hace uso del principio de energía potencial mínima. Este principio establece que la posición estática de equilibrio de un cuerpo elástico lineal cargado es aquella que minimiza la energía potencial total, definida como:



*Energía potencial total (E) = Energía por deformación (W) – Trabajo realizado por las cargas aplicadas (L)*

El principio de la energía potencial mínima expresa que para el equilibrio:

$$\delta\Delta E = \delta\Delta W - \delta\Delta L = 0 \quad (4.18)$$

La energía por deformación  $\Delta W$  se define como:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma\} dVol = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta\varepsilon\}^T [D] \{\Delta\varepsilon\} dVol \quad (4.19)$$

donde las integraciones se realizan sobre el volumen del cuerpo.

El trabajo realizado por las fuerzas aplicadas  $\Delta L$  puede dividirse en las contribuciones de las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de tracción en las superficies, expresándose como:

$$\Delta L = \int_{Vol} \{\Delta d\}^T \{\Delta F\} dVol + \int_{Sup} \{\Delta d\}^T \{\Delta T\} dSup \quad (4.20)$$

donde:

$$\begin{aligned} \{\Delta d\}^T &= \{\Delta u \ \Delta v\} = \text{desplazamientos} \\ \{\Delta F\}^T &= \{\Delta F_x \ \Delta F_y\} = \text{desplazamientos} \\ \{\Delta T\}^T &= \{\Delta T_x \ \Delta T_y\} = \text{desplazamientos} \end{aligned}$$

y la segunda integral en la expresión considera la parte de la frontera del dominio sobre la cual se aplican las tracciones.

Combinando las ecuaciones (4.19) y (4.20) la energía potencial total del cuerpo queda como:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta\varepsilon\}^T [D] \{\Delta\varepsilon\} dVol - \int_{Vol} \{\Delta d\}^T \{\Delta F\} dVol - \int_{Sup} \{\Delta d\}^T \{\Delta T\} dSup \quad (4.21)$$

La esencia del método del elemento finito consiste ahora en discretizar el problema en elementos, con lo cual, la energía potencial resulta de la suma de las energías potenciales de los elementos:

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N \Delta E_i \quad (4.22)$$

donde N es el número de elementos. Adicionalmente, se tiene que la variación de los desplazamientos puede expresarse en términos de los valores en los nodos por medio de la ecuación (4.9), por lo que la ecuación (4.21) queda como:

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} \int_{Vol} \left( \{\Delta d\}_{n}^T [B]^T [D] [B] \{\Delta d\}_n - 2 \{\Delta d\}_{n}^T [N]^T \{\Delta F\} \right) dVol - \int_{Sup} \{\Delta d\}_{n}^T [N] \{\Delta T\} dSup \right]_i \quad (4.23)$$

Donde la integral de volumen es ahora sobre el volumen de un solo elemento, y la integral de superficie es sobre la porción de la frontera del mismo elemento sobre la cual se especifican las tracciones. Las incógnitas principales son los desplazamientos nodales incrementales en la malla completa  $\{\Delta d\}_n$ . Minimizando la energía potencial respecto de estos desplazamientos, resulta:

$$\delta \Delta E = \sum_{i=1}^N \left( \{\delta \Delta d\}_n^T \right)_i \left[ \int_{Vol} [B]^T [D][B] dVol \{\Delta d\}_n - \int_{Vol} [N]^T \{\Delta F\} dVol - \int_{Sup} [N]^T \{\Delta T\} dSup \right]_i = 0 \quad (4.24)$$

que es equivalente a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\sum_{i=1}^N [K_E]_i (\{\Delta d\}_n)_i = \sum_{i=1}^N \{\Delta R_E\} \quad (4.25)$$

donde:

$$[K_E] = \int_{Vol} [B]^T [D][B] dVol = \text{Matriz de rigidez del elemento}$$

$$\{\Delta R_E\} = \int_{Vol} [N]^T \{\Delta F\} dVol + \int_{Sup} [N]^T \{\Delta T\} dSup = \text{Vector de cargas}$$

Entonces el problema se reduce a la determinación y suma de las ecuaciones de equilibrio de los elementos:

$$[K_E] \{\Delta d\}_n = \{\Delta R_E\} \quad (4.26)$$

La matriz de rigidez para los elementos isoparamétricos se evalúa utilizando el sistema de coordenadas naturales, de tal forma que la transformación isoparamétrica de las coordenadas resulta en:

$$dVol = t dx dy = t |J| dS dT \quad (4.27)$$

Donde el espesor  $t$  es unitario en problemas de deformación plana y la matriz de rigidez del elemento queda como:

$$[K_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t [B]^T [D][B] |J| dS dT \quad (4.28)$$

En la ecuación (4.28)  $|J|$  es el determinante de la matriz Jacobiana que surge de la correlación entre los elementos globales y los elementos madre. La evaluación directa de la expresión (4.28) usualmente no puede ser realizada, excepto para elementos de ciertas formas específicas; en general será conveniente utilizar algún método de integración numérica.



#### 4.2.4. Ecuaciones globales

El siguiente paso en la formulación de las ecuaciones de elementos finitos es el ensamble de las ecuaciones de equilibrio de los elementos en un conjunto de ecuaciones globales:

$$[K_G]\{\Delta d\}_{nG} = \{\Delta R_G\} \quad (4.29)$$

donde:

$[K_G]$  = la matriz global de rigideces

$\{\Delta d\}_{nG}$  = un vector conteniendo los grados de libertad incógnita (desplazamientos nodales) para la malla de elementos finitos completa

$\{\Delta R_G\}$  = el vector global de cargas

Los términos que forman la matriz global de rigideces se obtienen sumando las contribuciones individuales de los elementos mientras se consideran los grados de libertad comunes entre elementos. De forma similar se obtienen los términos del vector de fuerzas o cargas sumando las cargas individuales que actúan en cada nodo.

De la ecuación (4.28) se observa que si la matriz constitutiva  $[D]$  es simétrica, las matrices de rigidez de los elementos y, en consecuencia, la matriz global de rigideces también lo serán. Esta situación ocurre para una gran variedad de comportamientos materiales, incluyendo el elástico lineal. Los términos diferentes de cero en la matriz de rigideces surgen de las conexiones entre los grados de libertad a través de los elementos. A partir de la geometría de la malla se tiene que cada grado de libertad está conectado únicamente a un pequeño número de otros grados de libertad, por tanto, la matriz global de rigideces contendrá muchos términos iguales a cero. Éstos estarán, en su mayoría, fuera de una banda diagonal, lo cual facilita el ensamble, almacenamiento y solución de la matriz.

#### 4.2.5. Condiciones de frontera

La última etapa del planteamiento del sistema de ecuaciones globales es la aplicación de las condiciones de frontera, las cuales corresponden a las condiciones de carga y desplazamiento que definen el problema de valores en la frontera a analizar.

Las cargas puntuales, lineales y presiones por sobrecarga afectan el miembro derecho del sistema de ecuaciones globales. Si se indican cargas puntuales o lineales, éstas pueden incluirse directamente en el vector de fuerzas  $\{\Delta R_G\}$ . Si el problema establece presiones por sobrecarga, éstas deben ser expresadas primero como fuerzas equivalentes sobre los nodos antes de añadirse al vector  $\{\Delta R_G\}$ . Las fuerzas de cuerpo también contribuyen al vector  $\{\Delta R_G\}$ , así como las fuerzas debidas a los elementos *excavados y construidos*.

Los desplazamientos iniciales que corresponden a condiciones de frontera afectan el vector  $\{\Delta d\}_{nG}$ . La ecuación que corresponde al grado de libertad prescrito debe ser eliminada durante el proceso de solución. En todos los casos los desplazamientos prescritos como condiciones de frontera deben ser suficientes para evitar cualquier modo de deformación de cuerpo rígido, tales como rotaciones o traslaciones del modelo completo de elementos finitos. Si lo anterior no se satisface, la matriz global de rigideces será singular y las ecuaciones del sistema no podrán resolverse.

#### 4.2.6. Solución de las ecuaciones globales

Una vez que se ha establecido la matriz global de rigideces y se han incluido las condiciones de frontera, se tiene un sistema de ecuaciones simultáneas el cual debe ser resuelto para obtener los valores de los desplazamientos nodales  $\{\Delta d\}_{nG}$ . Para ello, existe un gran número de técnicas matemáticas, de las cuales las más comunes son aquellas que se basan en el método de eliminación de Gauss. Sin embargo, para problemas tridimensionales pueden resultar más eficientes las técnicas iterativas.

#### 4.2.7. Cálculo de esfuerzos y deformaciones

Cuando se han resuelto las ecuaciones globales y se conocen los valores de los desplazamientos se pueden calcular las cantidades secundarias, tales como esfuerzos y deformaciones. Las deformaciones se obtienen utilizando

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

que al combinarse con la matriz constitutiva (4.16.b) permite conocer los esfuerzos.

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \Delta \varepsilon \quad (4.31)$$

#### 4.3. MATERIALES CON COMPORTAMIENTO NO LINEAL

Para analizar el comportamiento de materiales cuyos modelos constitutivos son no lineales se hace uso de técnicas que involucran la aplicación de las condiciones de frontera de manera incremental. Si el problema se resuelve por incrementos suficientemente pequeños, los distintos métodos de solución arrojarán resultados similares, sin embargo, conforme aumenta el tamaño de los incrementos se puede llegar a predicciones extremadamente imprecisas.

En el inciso anterior se consideraron materiales con comportamiento lineal, para los cuales la matriz constitutiva  $[D]$  es constante. Cuando el material a estudiar es no lineal, la ecuación constitutiva equivalente no es constante, sino que varía con los esfuerzos y las deformaciones, por lo que cambia a lo largo del análisis de elementos finitos. Por ello, es necesario utilizar una estrategia de solución que tome en cuenta esta variación del comportamiento, la cual influye fuertemente en la precisión de los resultados.

Al introducir la no linealidad de los materiales en las ecuaciones de los elementos finitos, el sistema de ecuaciones globales queda de la forma incremental

$$[K_G]^i \{\Delta d\}_{nG}^i = \{\Delta R_G\}^i \quad (4.32)$$

donde  $[K_G]^i$  es la matriz incremental global de rigideces del sistema,  $\{\Delta d\}_{nG}^i$  es el vector de desplazamientos nodales incrementales,  $\{\Delta R_G\}^i$  es el vector de fuerzas nodales incrementales y el índice  $i$  es el número de incremento. Para obtener la solución de un problema de valores en la frontera, el cambio en las condiciones de frontera se aplica en una serie de incrementos y para cada incremento debe satisfacerse la ecuación (4.32). La solución final se obtiene sumando los resultados de cada incremento. Debido al comportamiento no lineal de los materiales, la matriz global de rigideces depende de los niveles actuales de esfuerzos y deformaciones y es por tanto variable dentro de un incremento. Esta variación debe ser considerada a menos que se utilice un gran número de pequeños incrementos para el análisis.

### 4.3.1. Método de la rigidez tangente

Este método, también conocido como el método de la rigidez variable, constituye la estrategia de solución más sencilla para problemas con materiales no lineales. En él, la matriz incremental de rigideces de la ecuación (4.32) se asume constante en cada incremento y se calcula utilizando el estado de esfuerzos existente al inicio de cada incremento. Esto es equivalente a realizar una aproximación "lineal por partes" al comportamiento no lineal del material.

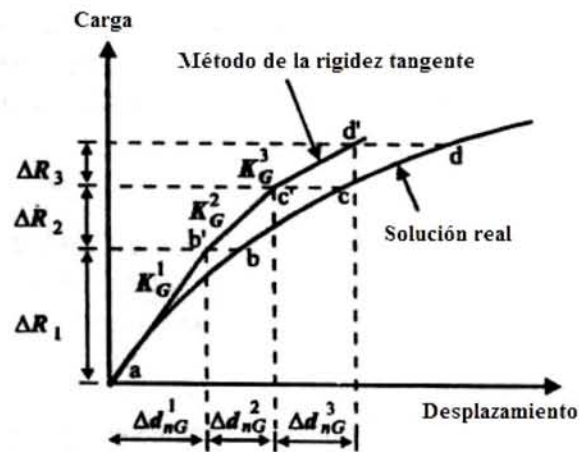


Figura 4.5. Método de la rigidez tangente

En el método de la rigidez tangente, la carga aplicada se divide en una serie de incrementos, como se muestra en la figura 4.5 donde aparecen tres incrementos de carga  $\Delta R_1$ ,  $\Delta R_2$  y  $\Delta R_3$ . El análisis comienza con la aplicación de  $\Delta R_1$ . La matriz global de rigideces para este incremento  $[K_G]^1$  se obtiene con base en el estado inicial correspondiente al punto  $a$ , sin esfuerzos; si se tratara de un material elasto-plástico se podría obtener utilizando la matriz elástica constitutiva  $[D]$ . Enseguida se resuelve la ecuación (4.32) para determinar los desplazamientos nodales  $\{\Delta d\}_{nG}^1$ . Como se asume que la matriz de rigideces es constante, la curva carga-desplazamiento sigue la trayectoria lineal  $ab'$  de la figura 4.5. En la realidad la matriz de rigidez no permanece constante durante el incremento de carga, y la solución verdadera está representada por la curva  $ab$ . Existe, por tanto, un error en el desplazamiento calculado igual a la distancia  $b'b$ . Sin embargo, en este método se desprecia dicho error y se prosigue con la aplicación de los incrementos de carga. En el siguiente incremento, se aplica  $\Delta R_2$  y se evalúa la matriz global de rigideces utilizando los esfuerzos y deformaciones correspondientes al final del incremento 1, es decir, el punto  $b'$  en la figura

4.5. Al resolver la ecuación 4.32 nuevamente, se obtienen los desplazamientos nodales  $\{\Delta d\}_{nG}^2$ . La curva carga-desplazamiento continua por la trayectoria  $b'c'$ , mostrada en la misma figura, con lo cual los desplazamientos calculados se desvían aún más de la solución real y el error es ahora igual a la distancia  $c'c$ . Una situación similar ocurre cuando se aplica la carga  $\Delta R_3$ , la matriz de rigideces  $[K_G]^3$  se calcula con los esfuerzos y deformaciones correspondientes al final del segundo incremento (punto  $c'$  en la figura 4.5), la curva de carga-desplazamiento se mueve al punto  $d'$  y se aleja una vez más de la solución verdadera.

Se observa que la precisión de la solución depende del tamaño de los incrementos de carga, por lo que si el tamaño del incremento se reduce de manera que se requiera un mayor número de ellos para alcanzar una misma carga acumulada, el método de la rigidez tangente proveerá una solución más cercana a la real. La magnitud del error es distinta en cada problema y depende del grado de no linealidad del material, de la geometría del problema y del tamaño de los incrementos de carga utilizados. En general, no es posible conocer de antemano el tamaño de incrementos requerido para obtener un error aceptable.

El método de la rigidez tangente puede proporcionar resultados incorrectos cuando el comportamiento del suelo cambia de elástico a plástico o viceversa. Esto puede suceder cuando el incremento de carga utilizado es muy grande ya que se asume que, si un elemento está en estado elástico al inicio del incremento, se comporta elásticamente en todo el incremento.

#### 4.4. ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONALES

A pesar de que existen muchos problemas geotécnicos que pueden ser aproximados a modelos de dos dimensiones, hay otros cuyo comportamiento debe ser analizado en tres dimensiones. Uno de ellos es el estudio de los esfuerzos y las deformaciones en presas, ya que la geometría de este tipo de estructuras suele tener particularidades en todas direcciones y el resultado de los análisis se ve afectado por ellas.

Lo anterior implica que deben tomarse en cuenta los tres componentes del desplazamiento y que la geometría tridimensional completa debe ser considerada. En este caso, la teoría básica expuesta anteriormente también es aplicable, sin embargo, la cantidad de información y el tamaño de varios de los vectores y las matrices utilizadas crece enormemente. Las implicaciones que esto tiene en términos recursos de cómputo son significativas. En gran medida se requiere de dichos recursos para la inversión de las matrices, por lo que se han desarrollado mejoras para dicho proceso como las técnicas iterativas para resolver las ecuaciones matriciales de rigidez, en lugar de los métodos directos.

El análisis tridimensional de elementos finitos sigue el mismo procedimiento descrito para dos dimensiones. La diferencia consiste en que en lugar de analizar una sección bidimensional del problema original, se considera todo el dominio del problema. La geometría se discretiza por medio de un arreglo de elementos finitos tridimensionales, de los cuales los más utilizados son los tetraedros y los hexaedros. De igual forma que en el caso bidimensional, su geometría se especifica en términos de las coordenadas de los puntos nodales.

Asimismo, es posible utilizar elementos isoparamétricos según lo expuesto en el inciso 4.2.2, y se utiliza la misma forma de las funciones de interpolación, con la particularidad de que en



este caso se expresan en términos de las coordenadas naturales  $S$ ,  $T$  y  $U$  y el número de ecuaciones se incrementa.

Se recomienda al lector el texto de Potts y Zdravkovic (1999) para más profundidad en el tema.

#### 4.5. ANÁLISIS ESTÁTICO EN LUSAS

El software LUSAS para análisis por medio del método de elementos finitos trabaja bajo los principios anteriormente mencionados. A continuación se presentan las ecuaciones que le sirven como base para la evaluación de la respuesta de una estructura.

Para el análisis del equilibrio estático en una estructura tridimensional el software considera tres tipos de fuerzas a las cuales puede estar sujeto el cuerpo:

- $\{t\}$  : fuerzas de superficie
- $\{f\}$  : fuerzas de cuerpo
- $\{F\}$  : fuerzas concentradas

El cuerpo será desplazado de su configuración inicial en una cantidad  $u$ , la cual dará lugar a deformaciones  $\varepsilon$  y sus correspondientes esfuerzos  $\sigma$ .

Las ecuaciones de equilibrio se forman utilizando el principio del trabajo virtual, por el cual se establece que, para cualesquiera pequeños (virtuales) desplazamientos  $\delta u$  producidos en el cuerpo, el trabajo interno total debe ser igual al trabajo externo total para que se mantenga el equilibrio, es decir

$$\int_v \delta \varepsilon^T \sigma dv = \int_v \delta u^T f dv + \int_s \delta u^T t ds + \sum du^T F \quad (4.3)$$

donde  $\delta \varepsilon$  son las deformaciones virtuales correspondientes a los desplazamientos virtuales  $\delta v$ .

En el método de elementos finitos, los desplazamientos en un elemento son interpolados de los desplazamientos de los puntos nodales correspondientes a dicho elemento, es decir, para el elemento  $e$  se tiene

$$\{u\}_e = [N]_e \{a\}_e \quad (4.4)$$

donde  $[N]_e$  es la matriz de funciones de interpolación de desplazamientos o la matriz de función de forma y  $\{a\}_e$  es el vector de desplazamientos nodales.

Las deformaciones  $\{\varepsilon\}$  de un elemento pueden relacionarse con los desplazamientos  $\{a\}$  por medio de

$$\{\varepsilon\} = [B] \{a\} \quad (4.5)$$

donde  $[B]$  es la matriz de deformación-desplazamiento.

En el caso de elasticidad lineal, los esfuerzos en el elemento finito se relacionan con las deformaciones por medio de una relación constitutiva de la forma

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (4.6)$$

donde  $[D]$  es la matriz de constantes elásticas del elemento, y  $\{\varepsilon_0\}$  y  $\{\sigma_0\}$  son las deformaciones y los esfuerzos iniciales, respectivamente.

Por tanto, utilizando (4.4), (4.5) y (4.6), la ecuación del trabajo virtual (4.3) puede ser discretizada de la forma

$$\sum_{e=1}^n \delta a^T \int_v B_e^T D_e B_e dv = \delta a^T \left[ \sum_{e=1}^n \int_v N_e^T f_e dv + \sum_{e=1}^n \int_s N s_e^T t_e ds - \sum_{e=1}^n \int_v B_e^T (\sigma_{0e} - D_e \varepsilon_{0e}) dv + F \right] \quad (4.7)$$

donde  $N s_e$  son las funciones de interpolación para las superficies de los elementos y  $n$  es el número de elementos en el arreglo.

Utilizando el teorema del desplazamiento virtual, las ecuaciones de equilibrio del arreglo de elementos se convierten en (4.1)

$$[K] \{a\} = \{R\} \quad (4.8)$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez de la estructura, definida como

$$K = \sum_{e=1}^n \int_v B_e^T D_e B_e dv \quad (4.9)$$

y  $\{R\}$  es el vector de fuerzas de la estructura, definido como

$$\{R\} = \{R_b\} + \{R_s\} - \{R_0\} + \{R_c\} \quad (4.10)$$

$\{R_b\}$  es el vector de fuerzas de cuerpo del elemento

$$R_b = \sum_{e=1}^n \int_v N_e^T f_e dv \quad (4.11)$$

$\{R_s\}$  es el vector de fuerzas debido a las tracciones de las superficies del elemento

$$R_s = \sum_{e=1}^n \int_s N s_e^T t_e ds \quad (4.12)$$

$\{R_0\}$  es el vector de fuerzas debido a los esfuerzos y deformaciones iniciales

$$R_0 = \sum_{e=1}^n \int_v B_e^T (\sigma_{0e} - D_e \varepsilon_{0e}) dv \quad (4.13)$$

$\{R_c\}$  es el vector de fuerzas de cuerpo del elemento

$$R_c = F \quad (4.14)$$

La ecuación (4.8) puede utilizarse para situaciones en que las cargas aplicadas son independientes del tiempo o cuando varían muy lentamente. Si ocurren cambios rápidos en los niveles de cargas aplicadas, se deben incluir fuerzas de inercia y de amortiguamiento en las ecuaciones de equilibrio.

#### 4.6. ANÁLISIS DINÁMICO

El desplazamiento del material en cualquier punto dentro del elemento,  $\{v\}^T = \{u \ v\}$ , se expresa en términos de los desplazamientos de los puntos nodales  $\{q\}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4\}$  (en el caso de elementos cuadriláteros), por medio de:

$$\{v\} = [N] \{q\} \quad (4.15)$$

donde  $[N]$  es la matriz de funciones de forma.

La matriz deformación-desplazamiento  $[B]$  permite determinar las deformaciones a partir de los desplazamientos de los puntos nodales, como sigue:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (4.16)$$

y la matriz esfuerzo-deformación  $[D]$  relaciona los esfuerzos con las deformaciones:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (4.17)$$

Las ecuaciones de movimiento del elemento se pueden escribir como:

$$[m_e] \{\ddot{q}\} + [c_e] \{\dot{q}\} + [k_e] \{q\} = \{Q(t)\} \quad (4.18)$$

donde  $\{Q(t)\}$  es el vector de fuerzas en el elemento.

Una vez que se obtienen las ecuaciones de movimiento de cada elemento, se combinan de tal forma que se cumpla con la compatibilidad de desplazamientos para obtener la ecuación global de movimiento, como sigue:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{R(t)\} \quad (4.19)$$

donde  $[M]$  es la matriz global de masa,  $[C]$  la matriz global de amortiguamiento,  $[K]$  la matriz global de rigideces,  $\{u\}$  es el vector global de desplazamiento del punto nodal y  $\{R(t)\}$  el vector global de fuerzas nodales.

En el caso de que la carga sea inducida por el movimiento de la base, la ecuación de movimiento queda de la forma:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = -[M] [1] \ddot{u}_b(t) \quad (4.20)$$

donde  $\ddot{u}_b(t)$  es la aceleración en el movimiento de la base.

Si se utiliza un enfoque lineal, el problema se resuelve de forma similar a uno unidimensional. En él, el movimiento de entrada es representado por una serie de Fourier y las ecuaciones de movimiento se resuelven para cada frecuencia de la serie. Los resultados se suman para obtener la respuesta total.

El equilibrio dinámico requiere que la ecuación (4.21) sea satisfecha

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K^*]\{u\} = -[M][1]\ddot{u}_b(t) \quad (4.21)$$

donde  $[M]$  es la matriz de masa,  $[K^*]$  es la matriz de rigideces compleja,  $[K^*] = [K] + i\omega[C]$ ,  $\{u\}$  es el vector de desplazamientos nodales relativo a la base y es desconocido, y  $\ddot{u}_b(t)$  es la historia de aceleraciones de la base.

Las matrices de masa y de rigideces se conforman a partir de las correspondientes matrices de rigidez de los elementos. El amortiguamiento  $\xi$  se introduce en la ecuación utilizando el módulo complejo de rigidez al cortante  $G^*$  cuando se forman las matrices complejas de rigidez de los elementos.

Si se supone que el movimiento de la base sea armónico, el vector de desplazamiento relativo se puede expresar como:

$$\{u\} = \{H(\omega)\}\tilde{u}_b(\omega)e^{i\omega t} \quad (4.22)$$

donde  $\{H(\omega)\}$  es un vector de funciones de transferencia y  $\tilde{u}_b(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\ddot{u}_b(t)$ . Sustituyendo la ecuación (4.22) en la ecuación de movimiento se obtiene:

$$-\omega^2[M]\{H(\omega)\}\tilde{u}_b(\omega)e^{i\omega t} + [K^*]\{H(\omega)\}\tilde{u}_b(\omega)e^{i\omega t} = -[M][1]\tilde{u}_b(\omega)e^{i\omega t} \quad (4.23)$$

El vector de funciones de transferencia se expresa como:

$$\{H(\omega)\} = \frac{[M]}{\omega^2[M] - [K^*]} \quad (4.24)$$

con el cual se calcula la respuesta del suelo de igual forma que en análisis unidimensional.

Para mayor facilidad en el cálculo cuando se tiene un gran número de elementos, las funciones de transferencia se evalúan en un número limitado de frecuencias.

#### 4.7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En el análisis de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en presas de materiales térreos, el método del elemento finito ha probado una gran utilidad, por lo que es el método más utilizado en la actualidad.

El concepto básico del método de elementos finitos es la idealización de un continuo por medio de un modelo formado por un arreglo de elementos discretos interconectados por sus





puntos nodales (elementos finitos). Los elementos suelen ser triángulos o cuadriláteros cuando se trata de problemas bidimensionales. En problemas tridimensionales los elementos pueden ser de cinco o seis lados. La geometría del problema debe definirse de manera precisa, incluyendo las discontinuidades y las condiciones de frontera.

En el método del elemento finito basado en desplazamientos, éstos se calculan primero, y los esfuerzos y deformaciones son cantidades secundarias que se obtienen a partir de ellos. Los desplazamientos varían en todo el dominio del problema y la principal aproximación del método es asumir una forma particular en que estos desplazamientos varían en el dominio en estudio, satisfaciendo las condiciones de compatibilidad. La precisión del análisis depende del tamaño y número de elementos y de la naturaleza de la aproximación de los desplazamientos.

Las ecuaciones de los elementos son las que gobiernan el comportamiento de la deformación de cada elemento, combinan la compatibilidad, el equilibrio y las ecuaciones constitutivas. A partir de ellas se establecen las matrices de rigidez de los elementos. Entonces es posible ensamblar las ecuaciones globales del sistema, en las cuales deben incluirse también las condiciones de frontera. La matriz global de rigideces se obtiene con la superposición de las rigideces de los elementos que se conectan en cada punto nodal, de forma similar se obtienen los términos del vector global de fuerzas. De ello resulta un sistema de ecuaciones simultáneas que debe ser resuelto para obtener los desplazamientos nodales. Posteriormente se pueden calcular los esfuerzos y las deformaciones con ayuda de la matriz constitutiva.

Cuando el material estudiado tiene un comportamiento no lineal se utilizan técnicas que aplican las condiciones de frontera de manera incremental, ya que la matriz constitutiva varía con los esfuerzos y las deformaciones por lo que cambia a lo largo del análisis. Las ecuaciones de los elementos finitos quedan expresadas de forma incremental. La estrategia de solución más sencilla es el método de la rigidez tangente, donde la matriz incremental de rigideces se supone constante en cada incremento y se calcula con el estado de esfuerzos existente al inicio de cada incremento.

El análisis dinámico de elemento finito utiliza las ecuaciones de movimiento de cada elemento en términos de los desplazamientos de los puntos nodales, con éstas se conforma la ecuación global de movimiento cumpliendo con la compatibilidad de desplazamientos. Si el movimiento es inducido por una excitación dinámica en la base de la estructura, se incluye en la ecuación global de movimiento la expresión del movimiento de la base.



## Capítulo 5

### ANÁLISIS DE ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN PRESAS UTILIZANDO EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Una parte importante del diseño de presas de materiales térreos es la determinación de los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos que se desarrollan durante la construcción, tanto en la cortina como en su cimentación. Sólo se tiene un análisis de estabilidad completo si es posible predecir de manera confiable la distribución de esfuerzos dentro de la cortina. La suficiencia de cualquier diseño no depende únicamente de la estabilidad de los taludes de la cortina, sino también requiere que las deflexiones o desplazamientos excesivos sean evitados.

El análisis de elementos finitos en presas de terraplén permite determinar la distribución interna de los esfuerzos. Esto es necesario para saber si existe el riesgo de que se desarrollen esfuerzos efectivos de tensión (esfuerzos totales menores que la presión de poro) que puedan producir grietas. También es de interés calcular los desplazamientos, que en presas de enrocamiento con pantalla de concreto son de especial importancia por las deformaciones que puedan ocasionar en la losa y las consecuentes filtraciones. Además, los desplazamientos son relativamente fáciles de medir, con lo que es posible calibrar un análisis frente a mediciones tomadas durante la construcción de la estructura o en un terraplén de prueba, con lo que pueden suponerse valores más precisos de los parámetros que definen el comportamiento del suelo. En consecuencia, se podrá tener una mejor aproximación al estado de esfuerzos real en la estructura.

La primera etapa del análisis es la idealización geométrica, que incluye determinar si el análisis será en dos o tres dimensiones, si la cimentación será o no incluida en el modelo y qué tipo de elementos deben usarse. Otro factor a considerar en esta fase es la secuencia de construcción para que las fronteras entre capas correspondan con la superficie del terraplén conforme es construido. Enseguida deben elegirse las propiedades de los materiales, lo que implica la elección del modelo constitutivo y de los valores de los parámetros correspondientes.

En los casos en los que se involucran presiones de poro, el análisis puede efectuarse en términos de esfuerzos totales o esfuerzos efectivos. Cuando el material del terraplén se trata de enrocamiento seco, como se supone en presas con cara impermeable aguas arriba, ambos tipos de análisis son el mismo.

Las técnicas utilizadas para modelar la construcción no se ven afectadas considerablemente por los modelos constitutivos elegidos para describir el comportamiento del suelo, por lo que se tratan de manera independiente uno del otro. Algunos de dichos modelos constitutivos se presentan más adelante en este capítulo.

#### 5.1. PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN POR INCREMENTOS

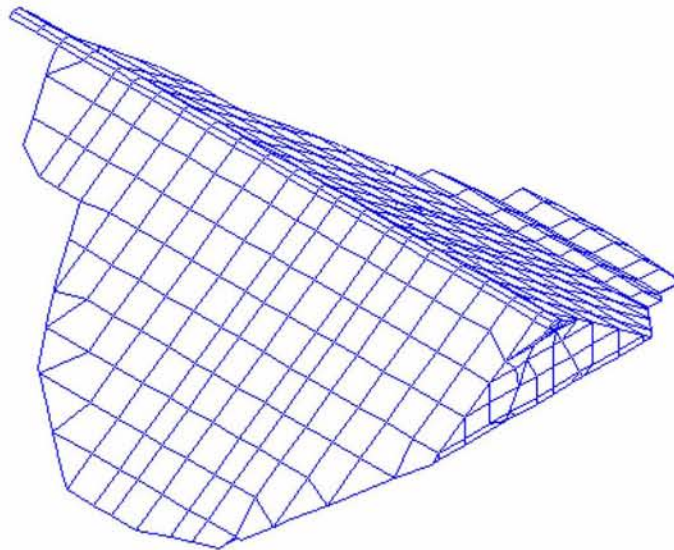
Los terraplenes se construyen de capas compactadas, las cuales varían en espesor, desde 150 mm para rellenos arcillosos hasta 1 m o más en el caso de enrocamientos. En consecuencia, el espesor de la capa real será notablemente pequeño en comparación con la altura final del terraplén. Por ello no resulta práctico idealizar las capas del modelo del mismo o similar espesor que las reales ya que implicaría la modelación de un gran número

de elementos finitos. En cambio, se utilizan elementos de espesor mayor, con lo cual el número de capas se reduce a unas cuantas.

Distintos investigadores (Goodman y Brown, 1963; Clough y Woodward, 1967) han mostrado que la suposición de que los esfuerzos y deformaciones en un terraplén pueden obtenerse por la aplicación directa de las fuerzas de cuerpo gravitacionales en la estructura completa es generalmente equívoca. La mayoría de los terraplenes son construidos por procesos incrementales y la carga se acumula gradualmente durante la construcción, en lugar de ser aplicada instantáneamente a la estructura terminada.

El análisis por medio de elementos finitos ha sido adaptado para tomar en cuenta el procedimiento de construcción por incrementos (Clough y Woodward, 1967). Para ello, es necesario que la idealización de la estructura sea configurada en capas horizontales que correspondan con las etapas constructivas. Debido a que los terraplenes se construyen en capas de espesor pequeño respecto de la altura de los mismos, y que su representación fiel en un modelo de elementos finitos resultaría en un gran número de elementos y operaciones, es necesario reducir el número de capas a analizar, aumentando su espesor. La figura 5.1 muestra un ejemplo de este tipo de idealización por medio de un modelo tridimensional.

El procedimiento básico es una sucesión de análisis de elemento finito, en cada uno de los cuales la carga asignada consiste en la aplicación de la gravedad a la nueva capa. Cada análisis sucesivo hereda los esfuerzos y desplazamientos de su predecesor y éstos se acumulan. Los elementos finitos de las capas que no han sido construidas se definen desde el inicio del análisis, cuando se crea el modelo, y únicamente se les asigna una rigidez muy pequeña de manera que no tengan efecto sobre el resto de la malla.



**Figura 5.1. Idealización con elementos finitos de una presa de materiales térreos.**

El análisis consiste entonces en la evaluación de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en una sucesión de estructuras que corresponden a las diversas capas constructivas a considerar. En el primer análisis sólo se considera la primera capa de elementos, se evalúan las rigideces de dichos elementos y las cargas muertas que



producen, y entonces se procede a calcular los esfuerzos y deformaciones que se desarrollan en esta capa debido a su peso propio.

Después de almacenar los esfuerzos y desplazamientos que resultan de la construcción de la primera capa, se considera la estructura formada por las dos primeras capas. Se calculan las rigideces de los elementos en estas dos capas, pero sólo se consideran los pesos propios de los elementos de la segunda capa. Se obtienen entonces los esfuerzos y desplazamientos desarrollados en la estructura como resultado de este nuevo incremento de carga, y se añaden a los obtenidos con el incremento anterior. Para cada capa sucesiva se realiza el mismo procedimiento, con lo cual se obtiene la historia completa del desarrollo de los esfuerzos y desplazamientos.

Debe mencionarse que este procedimiento de análisis considera que las deformaciones calculadas no tienen efecto sobre la geometría del sistema, y que las dimensiones originales, no distorsionadas, de los elementos son utilizadas en todos los cálculos de rigidez, equilibrio y compatibilidad. En caso contrario, antes de aplicar el siguiente incremento, los desplazamientos de los nodos que sólo pertenecen a los elementos recién construidos, es decir que no están conectados a elementos considerados en el incremento anterior, deben reiniciarse a ceros. Esto, debido a que la suposición anterior no es consistente con los procedimientos constructivos convencionales, ya que en la práctica los desplazamientos de la capa superior debidos a las deformaciones de las capas inferiores son compensados con la colocación de más material, con lo que las capas resultan ligeramente más gruesas. Consecuentemente, el terraplén real tendría una altura final igual a la proyectada, mientras que el modelo analítico sería de menor altura debido a los desplazamientos acumulados. Sin embargo, el efecto práctico que el material adicional colocado tiene sobre el terraplén es poco significativo; únicamente representa la aplicación de mayor peso en la realidad que aquel que se considera en el análisis, y esta diferencia puede ser absorbida fácilmente en la incertidumbre de la densidad real del material.

La tabla 5.1 contiene un resumen del procedimiento descrito. En ella se ilustran las consideraciones que deben hacerse para el análisis de la construcción incremental de un terraplén. Los renglones corresponden a las etapas de análisis, una para cada etapa constructiva de las consideradas; el ejemplo que se muestra consiste de 6 capas y consecuentemente 6 etapas de análisis. Las columnas corresponden a los valores de las propiedades  $E$  y  $\gamma$  a considerar durante el análisis y los desplazamientos  $\delta$  que se almacenan para la siguiente fase. Los esfuerzos que se calculen para cada etapa se heredan y acumulan para las sucesivas, tal cual fueron obtenidos; éstos no se incluyen en la tabla. Así, para cada etapa de análisis se asigna a la nueva capa, cuya construcción se analiza, un módulo elástico con valor correspondiente al del material recién colocado  $E_{ini}$  y el peso volumétrico acorde  $\gamma_{mat}$ . Las capas inferiores tendrán pesos volumétricos nulos, de manera que no se incluyan en el análisis sus pesos propios; y sus módulos elásticos serán dependientes del estado de esfuerzos alcanzado hasta ese momento en cada capa, los cuales son los acumulados de los análisis anteriores. Los desplazamientos que serán almacenados para el siguiente análisis son únicamente los que corresponden a los nodos inferiores de la nueva capa y los de las capas inferiores, ya que los superiores de la capa analizada deben reiniciarse a ceros como ya se mencionó. Al final de la construcción los desplazamientos totales son la suma de los de cada etapa analizada.

Para que el análisis mencionado pueda ser llevado a cabo en un programa de elementos finitos, es necesario que éste sea capaz de adicionar nuevos elementos durante su proceso para simular las capas construidas o que todos los elementos sean definidos desde la creación del modelo, pero que puedan ser activados o desactivados cuando sea necesario.



ETAPA CONSTRUCTIVA	Propiedades mecánicas $E$ y $\gamma$ , y asentamientos $\delta$ de las capas que constituyen el modelo						
		Capa 1	Capa 2	Capa 3	Capa 4	Capa 5	Capa 6
	$E$	$E_{inicial}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$\gamma$	$\gamma_{mat}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$\delta$	$\delta_{11}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$E$	$E_{12}$	$E_{inicial}$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$\gamma$	$0$	$\gamma_{mat}$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$\delta$	$\delta_{12}$	$\delta_{22}$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$E$	$E_{13}$	$E_{23}$	$E_{inicial}$	$0$	$0$	$0$
	$\gamma$	$0$	$0$	$\gamma_{mat}$	$0$	$0$	$0$
	$\delta$	$\delta_{13}$	$\delta_{23}$	$\delta_{33}$	$0$	$0$	$0$
	$E$	$E_{14}$	$E_{24}$	$E_{34}$	$E_{inicial}$	$0$	$0$
	$\gamma$	$0$	$0$	$0$	$\gamma_{mat}$	$0$	$0$
	$\delta$	$\delta_{14}$	$\delta_{24}$	$\delta_{34}$	$\delta_{44}$	$0$	$0$
	$E$	$E_{15}$	$E_{25}$	$E_{35}$	$E_{45}$	$E_{inicial}$	$0$
	$\gamma$	$0$	$0$	$0$	$0$	$\gamma_{mat}$	$0$
	$\delta$	$\delta_{15}$	$\delta_{25}$	$\delta_{35}$	$\delta_{45}$	$\delta_{55}$	$0$
	$E$	$E_{16}$	$E_{26}$	$E_{36}$	$E_{46}$	$E_{56}$	$E_{inicial}$
	$\gamma$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$\gamma_{mat}$
	$\delta$	$\delta_{16}$	$\delta_{26}$	$\delta_{36}$	$\delta_{46}$	$\delta_{56}$	$\delta_{66}$
Desplazamientos totales al final de la construcción		$\sum_{i=1}^6 \delta_{1i}$	$\sum_{i=2}^6 \delta_{2i}$	$\sum_{i=3}^6 \delta_{3i}$	$\sum_{i=4}^6 \delta_{4i}$	$\sum_{i=5}^6 \delta_{5i}$	$\delta_{66}$

$E_{inicial}$  : módulo de Young inicial, correspondiente a la capa recién construida.

$E_{ij}$  : módulo de Young de la capa  $i$  debido a la construcción de la capa  $j$ , corresponde al estado de esfuerzos acumulado hasta ese instante.

$\delta_{ij}$  : asentamiento de los nodos inferiores de la capa  $i$  debido a la construcción de la capa  $j$ .

$\gamma_{mat}$  : peso volumétrico del material de la capa recién construida.

**Tabla 5.1. Variación de las propiedades mecánicas de las capas de un terraplén en el análisis de su construcción.**



El procedimiento más utilizado para ello es aquel en el que los elementos que representan el material a construir están presentes en el modelo original, pero están 'desactivados' al iniciar el análisis. La herramienta de activación y desactivación de elementos es utilizada para modelar un proceso de construcción por etapas tal como excavaciones, túneles y construcción de terraplenes. Para lograr esta simulación los elementos son añadidos o removidos conforme avanza el análisis, es decir, que conforme sean construidos, los elementos serán activados. Un elemento desactivado permanece en la solución del método pero con una matriz de rigidez reducida, de tal manera que tiene un efecto despreciable en los elementos que lo rodean. Adicionalmente, durante la construcción, los elementos que representen el material nuevo deben seguir un modelo constitutivo congruente con su comportamiento en dicha etapa. Una vez construidos, las propiedades de los elementos deberán cambiar para representar el comportamiento del material ya colocado. Esto dependerá del modelo constitutivo elegido para representar el comportamiento real del material.

Cuando se considera la historia incremental de construcción en el análisis es sencillo incluir en el mismo procedimiento los efectos de las propiedades no lineales de los materiales. Esencialmente, se asume que el suelo se comporta linealmente durante cada incremento constructivo, y las propiedades de rigidez de los elementos se definen con base en el estado de esfuerzos local existente al inicio del incremento. Sin embargo, después de que se aplica cada nuevo incremento y se ha determinado el estado de esfuerzos totales desarrollado hasta ese momento, deben reevaluarse las rigideces de todos los elementos basándose en las propiedades del suelo correspondientes al nuevo estado de esfuerzos antes de que el análisis siguiente pueda realizarse.

Así, se observa que el procedimiento de análisis incremental puede incluir tanto la no linealidad por la construcción incremental, como la debida al comportamiento del material. De esta última se puede utilizar cualquier modelo no-lineal que se prefiera, como los que se describen adelante.

En general, deberán introducirse esfuerzos iniciales, los cuales deben equilibrarse, y si la cimentación es incluida en el modelo puede ser necesario asignarle esfuerzos in situ (cuando la cimentación se modela como elástica lineal se pueden omitir ya que su rigidez no se ve afectada por el nivel de esfuerzos).

Los esfuerzos iniciales en el terraplén son iguales a cero, lo que concuerda con el concepto de que una capa nueva no tiene peso originalmente, el peso lo impone la gravedad aplicada y por tanto es ella quien produce los esfuerzos. Sin embargo, esto no toma en cuenta cualquier esfuerzo interno del material provocado por el proceso de compactación, lo cual puede ser de consideración en materiales arcillosos.

Varios investigadores han señalado la necesidad de reducir la rigidez de la nueva capa construida debido a que ocurre en ella una flexión al aplicarle la gravedad, la cual no ocurriría completamente si se le asigna desde el inicio la rigidez final a la capa construida. Esto porque en la realidad dicha flexión se presenta progresivamente conforme la capa es colocada. Para ello se considera un factor de reducción de la rigidez que produce una rigidez menor, entre cero y la rigidez final, que permita que la capa de elementos finitos se asemeje a la capa real.

$$D_r = \frac{1}{f} D \quad (5.1)$$



donde  $D$  es la matriz de rigidez una vez colocada la capa,  $f$  es el factor de reducción y  $D_r$  es el valor de la rigidez reducida de la nueva capa.  $1 < f < \infty$ .

Se observa que el valor de  $f$  es variable y puede tomar un infinito número de valores. Sin embargo, el valor preciso del factor de reducción es menos crítico y disminuye conforme aumenta el número de capas o conforme ocurre menor flexión en el terraplén. Kulhawy y Duncan (1972) obtuvieron una precisión similar con 7 capas y un factor de reducción alto que con un análisis con 14 capas y  $f=1$  en la 'presa estándar' de Clough y Woodward (1967). En los terraplenes de enrocamientos se considera que no ocurre una flexión significativa por la rigidez propia del material.

## 5.2. ELECCIÓN DEL MODELO CONSTITUTIVO

El factor más influyente en el análisis de elemento finito de presas de terraplén es la modelación del comportamiento esfuerzo-deformación del relleno por medio de un modelo constitutivo apropiado (Duncan, 1992). Una ley constitutiva o relación esfuerzo-deformación puede relacionar tanto esfuerzo acumulado como esfuerzo incremental con las deformaciones correspondientes, lo que puede expresarse como:

$$\Delta\sigma = [D]\Delta\varepsilon \quad (5.2)$$

Donde  $\Delta$  indica incremento, y puede interpretarse como el incremento desde cero en cuyo caso  $\Delta\sigma$  y  $\Delta\varepsilon$  se convierten en  $\sigma$  y  $\varepsilon$ . El incremento puede ser tan pequeño de manera que  $\Delta$  se aproxime al operador diferencial.  $\sigma$  y  $\varepsilon$  son los vectores de los tensores de esfuerzo y deformación, de dimensiones 6, 4 o 3, respectivamente, para los casos tridimensional, axisimétrico y de deformación plana.  $[D]$  es la matriz constitutiva correspondiente y es generalmente simétrica.

La expresión (5.2) es esencial para el método del elemento finito, y la matriz constitutiva debe modelar de la forma más aproximada posible el comportamiento real del material para que los resultados de un análisis por medio de elementos finitos sean válidos. Es usual definir la matriz  $[D]$  en términos de esfuerzos efectivos, sin embargo, en algunas situaciones será más apropiado definirla en términos de esfuerzos totales, como en el caso de los rellenos parcialmente saturados. Entonces se vuelve importante asegurarse que la velocidad de carga y las condiciones de drenaje en laboratorio correspondan con las condiciones en campo.

De acuerdo con Naylor (1991a) una relación esfuerzo-deformación que describa de forma ideal el comportamiento de los materiales de relleno debe incorporar las siguientes características:

1. El aumento de módulo de deformación volumétrica del material debido al incremento en el nivel de esfuerzos (la forma cóncava de la curva esfuerzo-deformación de una prueba de compresión isotrópica o prueba de odómetro, en enrocamientos no siempre se presenta dicha concavidad).
2. La reducción de la rigidez al corte con el incremento en el esfuerzo desviador (la forma convexa de la curva esfuerzo desviador-deformación en una prueba triaxial).
3. Un criterio de falla del tipo Mohr-Coulomb o similar, lo que implica que el módulo incremental de rigidez al corte tiende a cero conforme el estado de esfuerzos se acerca a la falla.



4. Una rigidez mayor ante la recarga.
5. Una rigidez mayor bajo niveles de esfuerzo bajos y ante la recarga después de una descarga.
6. Los efectos de la dilatancia.
7. Asentamiento por colapso en enrocamientos, es decir, la reducción de volumen por saturación en materiales inicialmente no saturados. Existen métodos que permiten considerarlo por separado de cualquier modelo utilizado.

Sin embargo, es difícil que un solo modelo incorpore todas las consideraciones anteriores y que lo haga de forma adecuada para todos los tipos de relleno. Por ello, los modelos utilizados, aunque no incluyen todos los puntos anteriores, buscan aproximarse al comportamiento real de los materiales sin que ello implique una mayor complejidad en su formulación. En algunas publicaciones por Naylor (1991a) y Duncan (1992) se revisan algunos de los modelos constitutivos utilizados en el análisis numérico de presas de terraplén, los cuales incluyen modelos elásticos y elasto-plásticos. A continuación se describen algunos de ellos, con énfasis en los modelos elásticos ya que proporcionan resultados satisfactorios con un alto nivel de simplicidad, además de que son los más comúnmente utilizados.

### 5.2.1. Análisis elástico lineal

La forma más simple de la matriz  $D$  es la elástica isotrópica lineal. La hipótesis básica del comportamiento elástico es que tanto los esfuerzos como las deformaciones principales incrementales tienen la misma dirección. La matriz constitutiva general relaciona incrementos de esfuerzo total con incrementos de deformación:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

La matriz constitutiva en términos de esfuerzos totales  $[D]$  puede ser expresada como la suma de la matriz de esfuerzos efectivos  $[D']$  y la de presión de poro  $[D_f]$ . Por tanto, el comportamiento del material puede definirse en términos de  $[D]$  o  $[D']$ .

Un material isotrópico es aquel que guarda simetría en todas direcciones, es decir, cualquier plano en el cuerpo es un plano de simetría respecto de su comportamiento material. Para caracterizar el comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales elástico-lineales isotrópicos sólo se requiere de dos constantes elásticas, las cuales son usualmente el módulo de Young,  $E$ , y la relación de Poisson,  $\nu$ . La matriz constitutiva se vuelve simétrica y toma la forma mostrada en la ecuación (5.4), expresada en términos de esfuerzos efectivos.





$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'}{(1+\nu')(1-2\nu')} \begin{bmatrix} (1-\nu') & \nu' & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & (1-\nu') & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & \nu' & (1-\nu') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

En geotecnia, es usual y en ocasiones más conveniente caracterizar el comportamiento del suelo en términos del módulo elástico de corte  $G$ , y el módulo de deformación volumétrica efectivo  $K'$ , con lo que la ecuación (5.4) queda como sigue.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_x \\ \Delta\sigma'_y \\ \Delta\sigma'_z \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K' - \frac{2}{3}G & K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K' - \frac{2}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & K' + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Donde:

$$G = \frac{E'}{2(1+\nu')} \quad \text{y} \quad K' = -\frac{E'}{3(1-2\nu')} \quad (5.6)$$

La matriz constitutiva puede expresarse también en términos de esfuerzos totales, sustituyendo únicamente  $K'$  o  $K_u$ .

Con el fin de obtener valores razonables de los esfuerzos y particularmente de los desplazamientos, es esencial encontrar los valores más representativos de dichas constantes.

A pesar de que los suelos no siguen un comportamiento ni lineal ni elástico en la realidad, por simplicidad se les ha caracterizado frecuentemente utilizando modelos idealizados de elasticidad isotrópica lineal. Con estos modelos se pueden obtener resultados satisfactorios para condiciones lejanas a la falla, cuando se tiene un factor de seguridad significativo. En general, las presas de enrocamiento son diseñadas bajo estas condiciones, por lo que los análisis elástico-lineales han resultado exitosos en un gran número de casos. Adicionalmente, en las presas con cara de concreto se desea que todos los materiales trabajen dentro de su intervalo elástico, ya que la rigidez tanto de la losa como del plinto requiere que los desplazamientos que se produzcan sean mínimos debido a que estos elementos no soportan deformaciones importantes. En presas de materiales graduados, si se excede el rango elástico pueden producirse esfuerzos que generen grietas en el material.

Sin embargo, el suelo en la realidad es difícilmente isotrópico, por lo que debe considerarse un modelo que describa un comportamiento anisotrópico. Si un material es completamente anisotrópico, el número de parámetros requeridos para definir la matriz constitutiva  $[D]$  son 21, ya que ésta conserva su simetría. El suelo, además, muestra una anisotropía



generalmente relacionada con su forma de depositación y su historia de esfuerzos; con lo que los suelos depositados en dirección normal a un plano tienen un eje de simetría en la misma dirección, es decir que sus características no varían en el plano de depositación. A esto se le conoce como *anisotropía transversa* u *ortotropía* y reduce el número de parámetros materiales a siete. La matriz  $[D]$  toma la forma siguiente:

$$[D] = \begin{bmatrix} A(1 - \nu'_{SP}{}^2 \frac{E'_P}{E'_S})E'_S & A(\nu'_{PP} + \nu'_{SP}{}^2 \frac{E'_P}{E'_S})E'_S & A\nu'_{SP}(1 + \nu'_{PP})E'_S & 0 & 0 & 0 \\ A(\nu'_{PP} + \nu'_{SP}{}^2 \frac{E'_P}{E'_S})E'_S & A(1 - \nu'_{SP}{}^2 \frac{E'_P}{E'_S})E'_S & A\nu'_{SP}(1 + \nu'_{PP})E'_S & 0 & 0 & 0 \\ A\nu'_{SP}(1 + \nu'_{PP})E'_S & A\nu'_{SP}(1 + \nu'_{PP})E'_S & A(1 - \nu'_{PP}{}^2 \frac{E'_S}{E'_P})E'_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{PS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E'_P}{2(1 + 2\nu'_{PP})} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Donde:

$$A = \frac{1}{(1 + \nu'_{PP}) \left[ \frac{E'_S}{E'_P} (1 - \nu'_{PP}) - 2\nu'_{SP}{}^2 \right]} \quad (5.8)$$

Expresiones que igualmente pueden darse en términos de esfuerzos totales o no drenados. No obstante, este modelo aún no describe algunas otras características que exhibe el suelo en cuanto a su comportamiento.

### 5.2.2. Análisis elástico no lineal

Una relación constitutiva elástica no lineal describe mejor el comportamiento de los suelos ya que incluye la consideración de que los parámetros materiales dependen del nivel de esfuerzos y/o deformaciones. Es relativamente sencillo incluir la no linealidad en el comportamiento elástico isotrópico, sin embargo, en el caso del comportamiento anisotrópico resulta de mayor dificultad ya que los parámetros materiales involucrados son cinco. En consecuencia, la mayor parte de los modelos no lineales utilizados asumen un comportamiento isotrópico.

Este tipo de análisis contempla el hecho de que en un terraplén la rigidez del material aumenta conforme avanza la construcción del mismo y el nivel de esfuerzos (esfuerzo de confinamiento) es mayor. Consiste esencialmente en considerar que el suelo se comporta linealmente durante cada incremento de carga, con propiedades de rigidez en cada elemento definidas con base en el estado de esfuerzos local que existía al inicio del incremento. Sin embargo, después de que se aplica cada nueva capa y se determina el estado de esfuerzos totales desarrollado hasta ese momento, las rigideces de los elementos deben ser reevaluadas con base en las propiedades del suelo correspondientes al nuevo estado de esfuerzos antes de que el siguiente incremento sea aplicado.

El procedimiento considera entonces el cambio en la rigidez del material debido al cambio en el nivel de esfuerzos, con lo cual puede modelarse de mejor manera el comportamiento



de los materiales que constituyen las capas de un terraplén. El método de elementos finitos puede tomar en cuenta la no linealidad de las propiedades de los materiales y de la construcción por incrementos. La precisión de los resultados depende del número de incrementos considerados, sin embargo, la experiencia indica que no se requiere un modelo refinado en cuanto al número de capas para obtener buenos resultados en el análisis de presas de materiales térreos.

La relación esfuerzo-deformación no lineal que se utilice en cada caso dependerá de las propiedades específicas de los materiales, obtenidas de las pruebas efectuadas a los mismos. Dicha relación debe describir el comportamiento de las propiedades materiales bajo distintos niveles de esfuerzos o aquellos que puedan presentarse dentro del terraplén en la realidad.

Existen varios modelos constitutivos del tipo elástico no lineal. A continuación se presentan algunos de ellos, los cuales son más apropiados para describir el comportamiento de materiales de relleno o terraplenes y enrocamientos.

### MODELO BILINEAL

Este modelo asume que la rigidez al corte  $G$  y la deformación volumétrica  $K$  son constantes hasta que el estado de esfuerzos alcanza la condición de falla. Una vez que esto ocurre, el módulo tangencial de rigidez al corte  $G$  se vuelve cero. En la realidad, con el uso del método de elementos finitos esto no es posible ya que llevaría a un condicionamiento pobre de las ecuaciones correspondientes; en cambio, se le asigna un valor muy pequeño pero finito. Este modelo requiere dos parámetros elásticos,  $K$  y  $G$  (o sus equivalentes  $E$  y  $\nu$ ) para definir el comportamiento elástico previo a la falla. Además es necesario definir la superficie de falla por medio de los parámetros adecuados, por ejemplo, si se utiliza una superficie del tipo de Mohr-Coulomb es preciso definir la cohesión  $c'$  y el ángulo de resistencia  $\phi'$ .

### MODELO K-G

La formulación isotrópica lineal de este modelo considera que el módulo incremental o tangencial de deformación volumétrica  $K$  aumenta conforme se incrementa el esfuerzo medio, y que el módulo de rigidez al corte disminuye cuando aumenta el esfuerzo desviador. Además, incorpora un criterio de falla, que puede ser del tipo Mohr-Coulomb o Drucker-Prager (Von Mises extendido).

En este modelo los módulos tangenciales  $K_t$  y  $G_t$  se definen en términos de los invariantes de esfuerzo

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5.9)$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.10)$$

siendo

$$K_t = K_{t0} + \alpha_K p \quad (5.11)$$

$$G_t = G_{t0} + \alpha_G p + \beta_G J \quad (5.12)$$

Para problemas de deformación plana, es particularmente apropiado utilizar el modelo K-G en términos de los invariantes

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (5.13)$$

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.14)$$

con lo cual los módulos son

$$K'_t = K'_{t0} + \alpha'_K \sigma_s \quad (5.15)$$

$$G'_t = G'_{t0} + \alpha'_G \sigma_s + \beta'_G \sigma_d \quad (5.16)$$

donde  $K' = K + \frac{1}{3}G$ , ya que resulta más conveniente su uso debido a que define la pendiente de la curva  $p_s$  vs. deformación volumétrica en condiciones de deformación plana (como  $K$  en el caso general de  $p$  vs.  $\varepsilon_v$ ).

Por tanto, el modelo requiere de cinco parámetros para describir el comportamiento del material:  $K'_{t0}$ ,  $\alpha'_K$ ,  $G'_{t0}$ ,  $\alpha'_G$  y  $\beta'_G$  (o  $K'_{t0}$ ,  $\alpha'_K$ ,  $G'_{t0}$ ,  $\alpha'_G$  y  $\beta'_G$ ). Éstos pueden seleccionarse de manera tal que la rigidez al corte tangencial (incremental) sea muy pequeña al acercarse a la falla, lo cual se logra dando un valor negativo a  $\beta'_G$ . Como en el caso anterior, se requiere de la definición de una superficie de falla, por lo que los valores de la cohesión  $c$  y el ángulo de resistencia  $\phi$  son necesarios para determinar los valores de los cinco parámetros.

Las curvas esfuerzo-deformación del modelo se muestran en la figura 5.2.

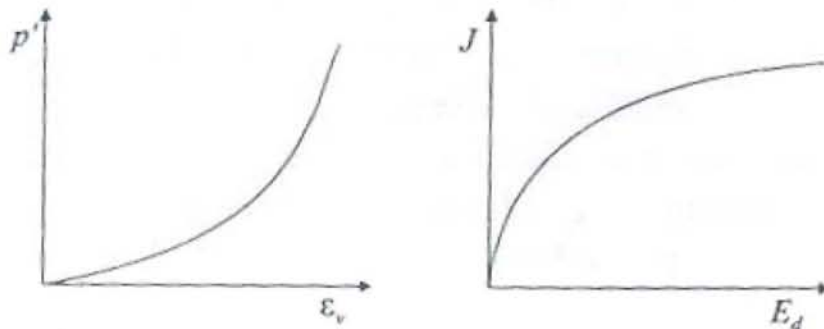


Figura 5.2. Modelo K-G

Si se asume que el suelo obedece un criterio de falla del tipo Mohr-Coulomb, es apropiado utilizar las ecuaciones (5.15) y (5.16), ya que esta versión del modelo considera ese criterio como se muestra a continuación. En la falla, el módulo de corte tangencial  $G$  se vuelve cero, y al sustituir dicho valor en (5.16) se puede obtener

$$\sigma_d = \frac{G'_{t0}}{-\beta'_G} + \frac{\alpha'_G}{-\beta'_G} \sigma_s \quad (5.17)$$

El criterio de falla de Mohr-Coulomb puede expresarse de la forma



$$\sigma_d = 2c \cos \phi + 2p_s \sin \phi \quad (5.18)$$

Comparando (5.17) y (5.18) se tiene que

$$\frac{\alpha'_G}{-\beta'_G} = 2 \sin \phi \quad (5.19)$$

$$\frac{G'_{t0}}{-\beta'_G} = 2c \cos \phi \quad (5.20)$$

Estas relaciones ayudan a asignar valores a dichas constantes.

De forma similar, puede demostrarse que la versión del modelo en términos de  $p$  y  $J$  incorpora un criterio de falla del tipo Drucker-Prager o Von Mises extendido.

Los parámetros  $K_{t0}$  y  $\alpha_K$  pueden determinarse directamente de una prueba de consolidación isotrópica. La pendiente de la curva  $J$  vs.  $\varepsilon_v$  es  $K$ , el cual puede trazarse en una gráfica vs.  $J$ . La recta que mejor ajuste arrojará los valores de  $K_{t0}$  y  $\alpha_K$ .

Los parámetros relacionados con el módulo al cortante pueden obtenerse al notar que las ecuaciones (5.13) y (5.15) definen un plano en los espacios  $G$ - $p$ - $J$  y  $G$ - $s_s$ - $s_d$ , respectivamente. La línea formada por la intersección de dicho plano y el plano  $G=0$  identifica una condición de falla (Mohr-Coulomb o Drucker-Prager según se comentó anteriormente). Por tanto, los parámetros  $G_{t0}$ ,  $\alpha_G$  y  $\beta_G$ , o  $G'_{t0}$ ,  $\alpha'_G$  y  $\beta'_G$  pueden determinarse al ubicar los resultados de una prueba triaxial convencional como puntos en un espacio  $G$ - $p$ - $J$  o  $G$ - $s_s$ - $s_d$ , según corresponda, y encontrar el plano que proporcione el mejor ajuste a dichos puntos.

En el caso de enrocamientos, las propiedades correspondientes podrán obtenerse a partir de pruebas triaxiales gigantes o de su escalamiento a partir de las convencionales, ya que la poca disponibilidad de las primeras obliga a trabajar con el equipo más accesible. Sin embargo, al realizar dicho escalamiento deben tomarse en cuenta los efectos mencionados en el inciso 2.2, de manera que se obtengan propiedades representativas del material en campo a partir del de laboratorio. Los efectos de escala disminuyen cuando la roca es de mayor dureza y resistencia. En caso contrario será difícil garantizar que las propiedades escaladas sean correctas.

### MODELO HIPERBÓLICO

Mientras que los modelos descritos anteriormente son esencialmente incrementales ya que definen directamente el cambio en los módulos tangentes, el modelo hiperbólico relaciona el esfuerzo acumulado con la deformación acumulada. Entonces, se requiere de diferenciación para obtener la forma incremental equivalente a utilizarse en los análisis de elementos finitos.

Este modelo es el más conocido de los primeros que relacionan los esfuerzos y las deformaciones de manera no lineal para su uso con elementos finitos. El modelo original se le atribuye a Kondner (1963), sin embargo, ha sido desarrollado de forma más extensa por Duncan y sus colaboradores (Duncan y Chang, 1970). Inicialmente fue formulado para utilizar los resultados de pruebas triaxiales no drenadas y requería de dos parámetros,

además de que asumía que el valor de la relación de Poisson era constante e igual a 0.5. Posteriormente el modelo fue refinado, con lo cual fue utilizado en problemas de fronteras drenadas y no drenadas. El número de parámetros requeridos aumentó a nueve.

El modelo original proponía que la curva esfuerzo desviador vs. deformación axial de pruebas triaxiales debía aproximarse por medio de la ecuación hiperbólica

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (5.21)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son los esfuerzos principales mayor y menor, respectivamente,  $\varepsilon_1$  es la deformación axial y  $a$  y  $b$  son constantes del material. Puede demostrarse que si  $\sigma_1 = \sigma_3$  el recíproco de  $a$  es el módulo de Young tangente inicial  $E_i$ . El recíproco de  $b$  es el valor de  $\sigma_1 - \sigma_3$  a la falla, al cual se aproxima asintóticamente la curva esfuerzo-deformación. Figura 5.3.

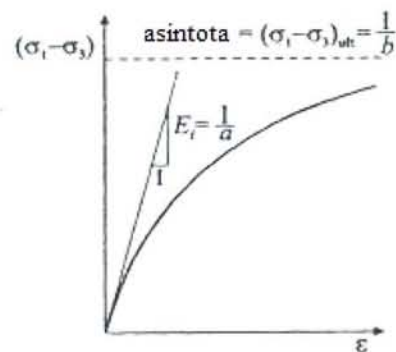


Figura 5.3. Curva esfuerzo-deformación hiperbólica.

Kondner mostró que los valores de de las propiedades materiales pueden determinarse más fácilmente si los resultados de pruebas de laboratorio de esfuerzo-deformación se trazan sobre ejes transformados según se muestra en la figura 5.4. Por lo que rescribiendo la ecuación (5.21) de la misma forma se tiene:

$$\frac{\varepsilon_1}{(\sigma_1 - \sigma_3)} = a + b\varepsilon_1 \quad (5.22)$$

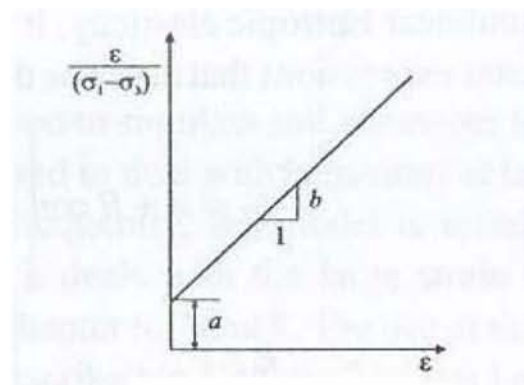


Figura 5.4. Transformación de la relación hiperbólica.



Se puede observar que  $a$  es la ordenada al origen de la recta resultante y  $b$  es su pendiente. Si se dibujan los resultados de las pruebas de laboratorio de la forma mencionada, es sencillo obtener los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  de la hipérbola que mejor les ajuste.

Para el uso de este modelo en un análisis de elementos finitos, es usual diferenciar la ecuación (5.21) para obtener la variación del módulo de Young tangente de acuerdo con el nivel de esfuerzos ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ):

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \varepsilon_1} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (5.23)$$

A partir del trabajo de Kondner, Duncan y Chang (1970) desarrollaron una ley constitutiva con los principios del modelo hiperbólico pero que considera un módulo de Poisson variable. En él, el módulo de Young tangente está expresado como:

$$E_t = \kappa p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \chi^2 \quad (5.24)$$

donde

$$\chi = \left| 1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \phi)}{2\sigma_3 \sin \phi + 2c \cos \phi} \right| \quad (5.25)$$

$p_a$  es la presión atmosférica,  $c$  y  $\phi$  son los parámetros de resistencia según Mohr-Coulomb,  $R_f$  es un factor de reducción que afecta el valor de ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) para la deformación axial asintótica  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$  tal que corresponda con el esfuerzo desviador a la falla, y  $\kappa$  y  $n$  son constantes del material a determinar experimentalmente.

El módulo de Poisson queda definido por otra relación hiperbólica entre las deformaciones axial y radial durante la etapa de carga de la prueba triaxial, como sigue:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_3}{F + D\varepsilon_3} \quad (5.26)$$

Al diferenciar la ecuación anterior se obtiene la expresión para la relación de Poisson tangente:

$$\nu_t = \frac{G - F \log(\sigma_3/p_a)}{\left[ 1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{\kappa p_a (\sigma_3/p_a)^n \chi} \right]^2} \quad (5.27)$$

$\chi$  es la expresión (5.14) y  $G$ ,  $F$  y  $D$  son parámetros adicionales que deben determinarse de forma experimental. Por tanto, los parámetros necesarios para definir el modelo son ocho:  $\kappa$ ,  $c$ ,  $\phi$ ,  $R_f$ ,  $n$ ,  $G$ ,  $F$  y  $D$ . Si se desea incorporar una respuesta con mayor rigidez ante la descarga, se debe incluir un valor aumentado de  $\kappa$ , es decir  $\kappa_{ur}$ .



Una variación de la formulación anterior, adecuada para rellenos con una envolvente de falla de Mohr-Coulomb de forma curva, consiste en utilizar  $c=0$  y un ángulo  $\phi$  variable de acuerdo con:

$$\phi = \phi_0 - \Delta\phi \log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \quad (5.28)$$

con lo que  $\phi_0$  y  $\Delta\phi$  definen la envolvente de falla en sustitución de  $c$  y  $\phi$ .

Los parámetros de este modelo se obtienen generalmente de pruebas triaxiales consolidadas drenadas. Se requiere un conjunto de ellas a distintas presiones confinantes como se haría para definir una envolvente de falla.

### 5.3. ANÁLISIS DEL PRIMER LLENADO

Las etapas de interés que siguen a la construcción de una presa son el primer llenado, el establecimiento del flujo en presas de corazón impermeable, y finalmente el vaciado rápido. En comparación con la modelación de la construcción, se ha realizado poco trabajo con respecto a la aplicación del método de elementos finitos a las etapas posteriores.

El análisis de los esfuerzos producidos en una presa por el primer llenado del embalse estudian los efectos de la carga que ejerce el agua sobre y dentro de la estructura del terraplén y su cimentación (si esta última es compresible y/o permeable). Ya que los esfuerzos y desplazamientos correspondientes suelen ser significativos, esta etapa debe contemplarse en el análisis con el método de elementos finitos. La experiencia ha demostrado que los mayores asentamientos después de la construcción ocurren durante el llenado.

El caso de las presas con cara impermeable es el más simple. Únicamente debe considerarse una presión hidrostática debido a la carga del agua que actúa sobre la cara de aguas arriba, figura 5.5. (En cambio, si se trata de una cortina de membrana central impermeable o de corazón central es necesario incluir los efectos que el agua en el cuerpo de la presa tiene sobre la misma.)

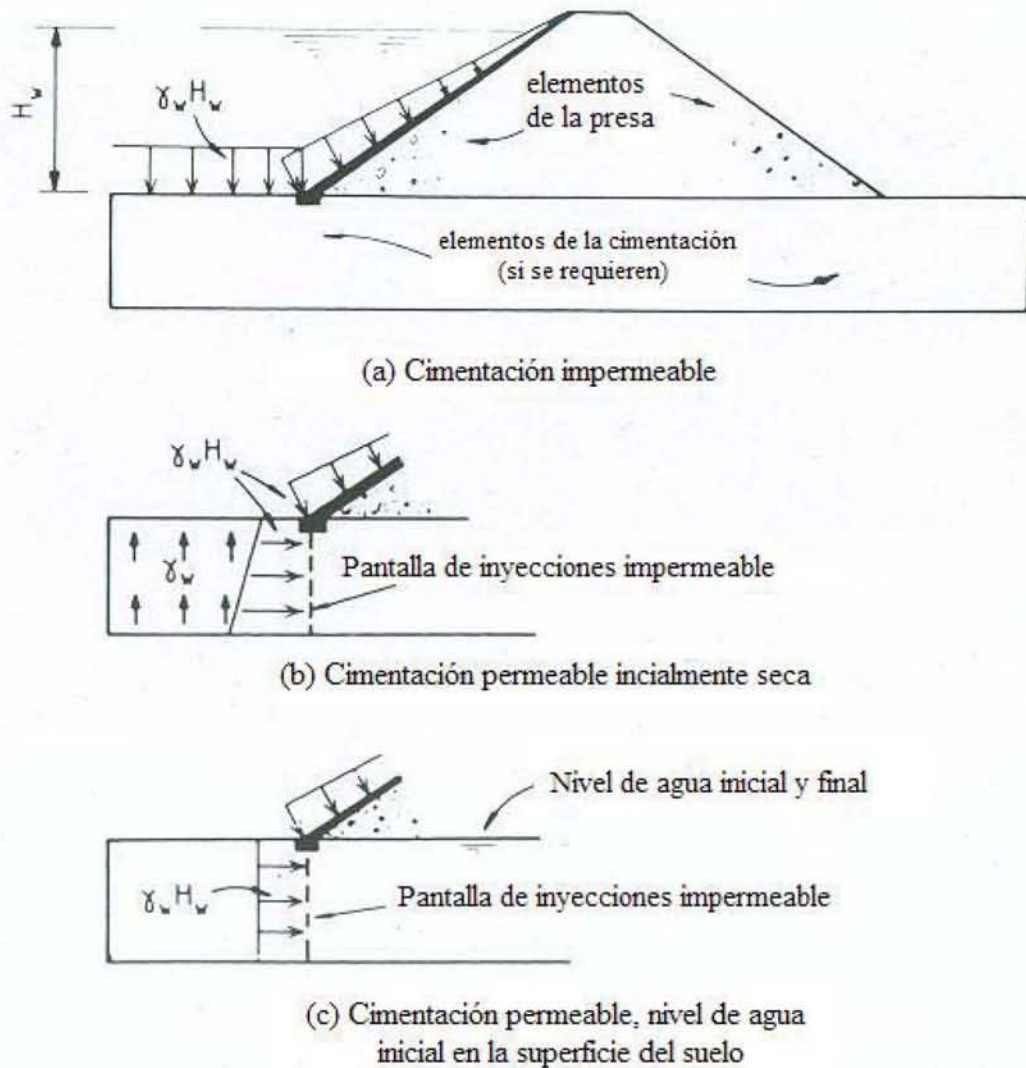
Si la cimentación es compresible y se incluye en la malla de elementos finitos, se pueden utilizar distintas idealizaciones de la carga, de acuerdo con las condiciones que se presenten. Las siguientes cubren la mayoría de los casos:

- a) Cimentación impermeable. Fig. 5.5.a.
- b) Cimentación permeable inicialmente seca con una pantalla impermeable inyectada bajo el pie de la membrana. Fig. 5.5.b.
- c) Cimentación permeable con un nivel de aguas freáticas en la superficie del suelo y una pantalla impermeable vertical como en el caso anterior. Fig. 5.5.c.

El análisis de elemento finito de esta etapa tiene como esfuerzos iniciales los heredados del análisis previo de la construcción, y la nueva carga por efecto del agua se aplica como ya fue mencionado. Si es necesario, también los desplazamientos y las deformaciones pueden ser heredados. En grandes presas es deseable que también esta fase del análisis se realice por etapas, lo cual suele hacer mayor diferencia si al material se le modela como no-lineal.



Entonces se recomienda que el número de etapas de llenado sea similar al número de capas utilizadas para la construcción, o en el rango de 3 a 6 (Naylor, 1991b), figura 5.6.



**Figura 5.5. Carga que ejerce el empuje del embalse sobre la membrana impermeable aguas arriba.**

Las cargas aplicadas únicamente corresponden a las hidrostáticas sobre la cara impermeable conforme el nivel del agua se incrementa. La distribución de dicha carga en cada etapa es sólo la incremental, de manera que en la parte superior tendrá forma triangular variable con la profundidad, pero en las capas inferiores que han sido previamente cargadas la distribución es constante e igual al espesor de la capa multiplicado por el peso volumétrico del agua, como se observa en la figura 5.6.

El procedimiento para el análisis del primer llenado por etapas es relativamente sencillo y libre de las consideraciones especiales que deben hacerse para interpretar los desplazamientos en el análisis de la construcción.

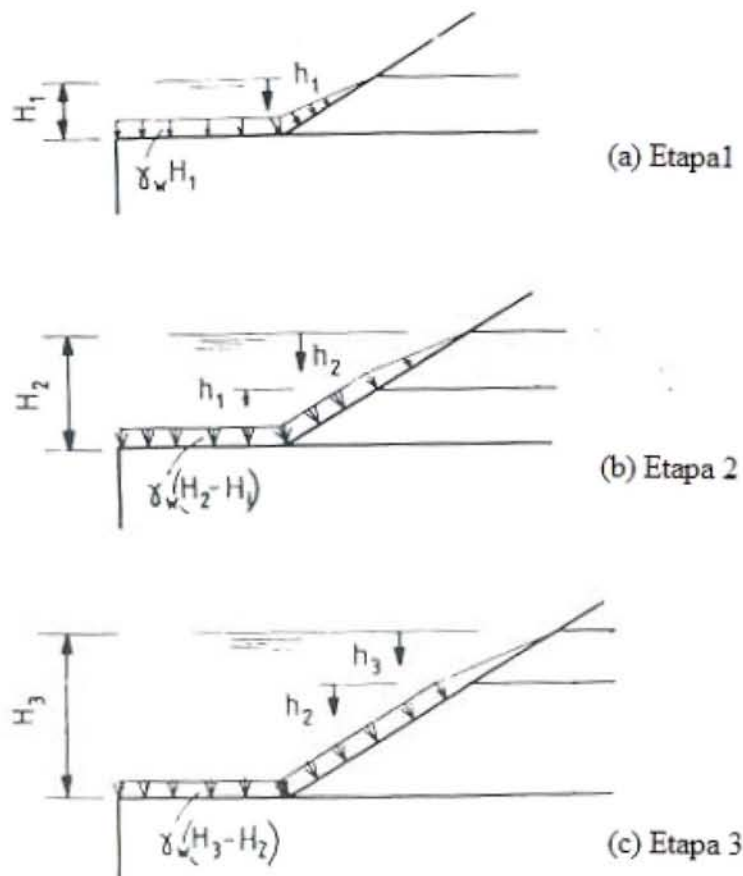


Figura 5.6. Llenado de una presa en tres etapas.

Un factor importante que afecta a los terraplenes construidos de enrocamiento es el *asentamiento por colapso*, fenómeno en el cual la saturación del material produce asentamiento (sin que en realidad se hable de *colapso* como *falla* del material). Esto sucede principalmente en enrocamientos provenientes de rocas de baja calidad especialmente si no están vigorosamente compactados. Un ejemplo clásico de dicho fenómeno sucedió en la presa El Infiernillo (Marsal y Ramírez, 1967) de enrocamiento con corazón central y con 148 m de altura. Durante el llenado del embalse el núcleo se deformó inicialmente hacia aguas abajo, como era de esperarse; pero para cuando el embalse había alcanzado su nivel de operación, el asentamiento por colapso ocurrido en el enrocamiento de aguas arriba había provocado que el núcleo volviera casi a su posición original. Se concluye que en algunos casos la presencia de este fenómeno puede ser de importancia para la presa y debe formar parte del análisis con elementos finitos.

Sin embargo, en el caso de presas de enrocamiento con membrana impermeable aguas arriba es difícil establecer la magnitud de su impacto, ya que en ellas todo el cuerpo del terraplén está formado de material que puede sufrir asentamiento al saturarse pero que se considera impermeable en general, por lo que no se espera que se establezca una red de flujo que produzca dicha saturación. Además, el objetivo de contar con una barrera impermeable aguas arriba es que no existan filtraciones hacia el cuerpo de la presa. En la actualidad, en la mayoría de la obras se procura que dicho asentamiento, o al menos la mayor parte, ocurra durante la colocación y compactación de las capas de enrocamiento, al

agregarles agua durante este proceso. Ello ayuda a controlar y corregir los asentamientos de manera que la cortina no sufra deformaciones posteriores que pongan en riesgo su funcionamiento.

#### 5.4. ANÁLISIS DINÁMICO

El análisis dinámico de presas ha sido siempre un tema de interés y fue estudiado antes de que se desarrollaran las herramientas de análisis numérico disponibles actualmente. Uno de los métodos más utilizados para evaluar la respuesta dinámica de una presa es el método de la viga de cortante, presentado a continuación. Sin embargo, el método más empleado en la actualidad para tal fin y que proporciona resultados bastante satisfactorios es el del elemento finito. Su desarrollo no se presenta en esta sección debido a que ya fue expuesto en el capítulo anterior.

##### 5.4.1. Método de la viga de cortante

Uno de los primeros métodos para llevar a cabo el análisis dinámico de sistemas geotécnicos bidimensionales es el método de la viga de cortante aplicado a presas de tierra por Mononobe et al (1936). Desde entonces ha sido verificado y extendido para cubrir una gran variedad de condiciones, de las cuales Gazetas (1987) preparó una revisión extensa.

El método de la viga de cortante está basado en la suposición de que una presa se deforma en cortante simple, y por tanto se producen únicamente desplazamientos horizontales. Hatanaka (1952) y otros investigadores han verificado la precisión de tal suposición, al menos en condiciones de cimentación rígida. Esta metodología también asume que ya sean los esfuerzos cortantes o las deformaciones angulares son uniformes en los planos horizontales. Esta hipótesis también ha sido verificada (Chopra, 1966; Dakoulas, 1985), ya que los esfuerzos y las deformaciones son casi constantes a través de secciones horizontales en la presa, excepto por pequeñas zonas cerca de las caras de aguas arriba y aguas abajo, donde disminuyen hasta cero (Gazetas, 1987).

Considérese la presa homogénea infinitamente larga mostrada en la figura 5.7. Asumiendo que los desplazamientos horizontales son constantes a una determinada profundidad, el desplazamiento horizontal relativo a la base  $u(z,t)$  es dependiente de  $x$ .

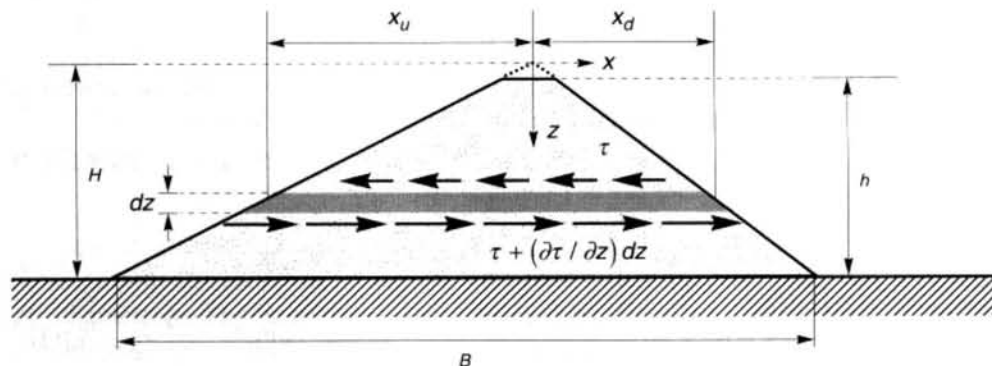


Figura 5.7. Esfuerzos actuantes en una capa de espesor  $dz$  en una presa de tierra.



La fuerza cortante resultante en la superficie superior de una capa de espesor  $dz$  es

$$S_z(t) = \int_{-x_u}^{x_d} \tau(x, z, t) dx \quad (5.29)$$

La fuerza cortante correspondiente en la parte inferior de la capa es

$$S_{z+dz}(t) = \int_{-x_u}^{x_d} \left[ \tau(x, z, t) + \frac{\partial \tau(x, z, t)}{\partial z} dz \right] dx \quad (5.30)$$

La fuerza inercial resultante que actúa sobre la capa depende de la aceleración total, es decir,

$$I_z(t) = \rho [\ddot{u}(z, t) + \ddot{u}_b(t)] \frac{2Bz}{H} dz \quad (5.31)$$

Para el equilibrio en la dirección  $x$

$$S_{z+dz}(t) - S_z(t) = I_z(t) \quad (5.32)$$

o

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_{-x_u}^{x_d} \tau(x, z, t) dx \right] dz = \rho [\ddot{u}(z, t) + \ddot{u}_b(t)] \frac{2Bz}{H} dz \quad (5.33)$$

Sustituyendo  $\tau(x, z, t) = G(x, z)\gamma(z, t)$  y  $\gamma(z, t) = \partial u(z, t) / \partial z$ , la ecuación de la viga de cortante puede escribirse como

$$\rho(\ddot{u} + \ddot{u}_b) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{G}(z) z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (5.34)$$

donde el módulo de corte promedio está dado por

$$\overline{G}(z) = \frac{1}{x_u + x_d} \int_{-x_u}^{x_d} G(x, z) dx \quad (5.35)$$

La ecuación (5.34) es simplemente una ecuación de onda unidimensional, ya que este método permite que la sección bidimensional de la presa sea representada por un sistema unidimensional.

Cuando la presa se proyecta en una boquilla relativamente angosta, donde las condiciones de frontera por el empotramiento influyen en la respuesta de la cortina, se ha utilizado el método tridimensional de viga de cortante. Se obtiene que las frecuencias naturales del caso tridimensional son siempre mayores que las correspondientes a la sección máxima bidimensional de la misma presa, como consecuencia del incremento en la rigidez de la estructura por efecto de los empotramientos. Este efecto decrece conforme aumenta la relación longitud de corona/altura de la presa (Gazetas, 1987).



## 5.5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El análisis de estabilidad de una presa de materiales térreos debe incluir la determinación de los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos que se desarrollan durante la construcción, tanto en la cortina como en su cimentación. El análisis se realiza por medio del método del elemento finito ya que éste permite conocer la distribución interna de los esfuerzos. Los desplazamientos son una cantidad de especial interés, ya que éstos son fácilmente comparables con mediciones en campo, con lo cual es posible calibrar el modelo y/o verificar el diseño.

El procedimiento de análisis debe tomar en cuenta la construcción del terraplén por incrementos, ya que se ha probado que la aplicación directa de las cargas gravitacionales en la estructura completa generalmente arroja resultados incorrectos. El análisis por medio de elementos finitos permite considerar este proceso incremental, para lo cual se divide el terraplén en unas cuantas capas de espesor considerable y se efectúa una sucesión de análisis, uno para cada capa, donde se aplica la carga gravitacional únicamente a la nueva capa y los esfuerzos y desplazamientos se heredan y acumulan para la siguiente etapa. Los elementos que no han sido construidos están presentes en el modelo desde el inicio pero permanecen con rigideces muy bajas hasta que son construidos, de manera que tengan efecto nulo sobre el resto del modelo.

Este procedimiento considera que las deformaciones calculadas no tienen efecto sobre la geometría del sistema y utiliza las dimensiones no distorsionadas de los elementos en cada etapa de análisis. En caso contrario, los desplazamientos de la frontera superior de la última capa construida deben reiniciarse a cero para el siguiente incremento, ya que en la realidad éstos son compensados con la colocación de más material. El efecto del material adicional es poco significativo y se considera que es absorbido por la incertidumbre de la densidad real del material.

El modelo constitutivo que se elija es un factor importante para un análisis satisfactorio. Éste debe modelar de la forma más aproximada posible el comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales. Entre los más utilizados en el caso de enrocamientos se encuentran el elástico lineal y algunos modelos elásticos no lineales como el K-G y el hiperbólico, para tomar en cuenta la variación de las propiedades de los materiales respecto del nivel de esfuerzos. Es sencillo incluir en el procedimiento de elementos finitos descrito los efectos no lineales de las propiedades de los materiales.

Además de la construcción, otra etapa de gran interés en el análisis del comportamiento de una presa es el primer llenado del embalse, es decir, los efectos que la carga del agua produce sobre y dentro de la estructura. En el caso de presas de enrocamiento con cara impermeable únicamente se considera la aplicación incremental de la carga hidrostática en el mismo número de capas que la construcción, y nuevamente se acumulan los esfuerzos y los desplazamientos. Los esfuerzos y las propiedades de los materiales son los heredados del final de la construcción.

La evaluación de la respuesta de la presa ante una acción sísmica es otra de las etapas más importantes en el estudio del comportamiento de la misma. Para ello, se han desarrollado métodos como el de la viga de cortante, el cual considera que la mayor parte de los desplazamientos son horizontales. Actualmente el método más utilizado para tal efecto es el del elemento finito, según se explicó en el capítulo anterior.



## Capítulo 6

### APLICACIÓN: ANÁLISIS DE UNA PRESA DE ENROCAMIENTO CON CARA DE CONCRETO CON EL PROGRAMA LUSAS

#### 6.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo consiste en la aplicación de la teoría expuesta en los capítulos anteriores en el análisis de esfuerzos y desplazamientos de una presa de enrocamiento con cara de concreto, la cual corresponde a la C.H. El Cajón, Nay. Se evalúan principalmente los desplazamientos y esfuerzos producidos durante la construcción (del terraplén y de la cara de concreto), durante el primer llenado, y finalmente bajo la acción del sismo máximo creíble. Interesan particularmente los desplazamientos calculados ya que éstos pueden corroborarse fácilmente al compararlos con las mediciones de campo de los desplazamientos reales, en las distintas etapas analizadas.

Las características de la cortina y las propiedades de los materiales que la constituyen fueron tomadas de los planos BPE del proyecto y de informes emitidos por la Comisión Federal de Electricidad, como más adelante se especifica. Así mismo, las acciones dinámicas a que fue sujeta también fueron consideradas según lo sugerido por CFE.

El procedimiento de análisis fue el propuesto por Clough y Woodward (1967) en el cual se considera el proceso incremental de construcción del terraplén, con una variación no lineal de la rigidez de las capas conforme aumenta la altura de la presa. Las propiedades de los materiales se consideraron en el intervalo elástico, ya que como se menciona en el capítulo anterior una estructura de este tipo es diseñada bajo condiciones lejanas a la falla, de tal forma que las deformaciones que en ella ocurran sean mínimas.

Para la aplicación del Método del Elemento Finito se utilizó el software LUSAS, en su versión 13.8, haciendo uso de elementos sólidos tridimensionales de ocho y seis nodos que representarían el cuerpo de la cortina y su cimentación. La cara de concreto fue modelada por medio de elementos placa con espesor variable colocados sobre el enrocamiento. No se incluyó en el estudio la estructura de apoyo de la losa que constituye el plinto, ni el elemento rígido en la corona que representa el parapeto. Tampoco se consideró la influencia de la forma de la boquilla en el comportamiento de la presa, ya que se le simuló con una forma regular a partir del perfil de la misma.

#### 6.2. CARACTERÍSTICAS DE LA CORTINA

La estructura de retención está constituida por una cortina del tipo enrocamiento con cara de concreto (CFRD). La altura total de la misma es de 186 m, considerando la altura del parapeto. La altura máxima del terraplén es de alrededor de 180 m. Los taludes de aguas arriba y aguas abajo tienen una pendiente de 1.4H:1V. La sección transversal de la presa está dividida en tres zonas principales: el enrocamiento de aguas arriba, formado por el material 3B; una zona de transición, constituida por el material T; y el enrocamiento de aguas abajo, construido con el material 3C. Las características de dichos materiales son las siguientes:



- El material 3B lo constituye un enrocamiento bien graduado con tamaños máximos de 65 cm, producto del banco de roca El Vertedor. Fue colocado en capas de espesor en estado suelto no mayor de 80 cm.
- El material T consiste en un enrocamiento bien graduado con tamaños máximos de 80 cm, producto del banco El Vertedor. Se le colocó en capas de espesor en estado suelto no mayor de 100 cm.
- El material 3C está formado por un enrocamiento bien graduado con tamaños máximos de 110 cm, producto del banco de roca El Vertedor y de las excavaciones para alojar otras estructuras. Fue colocado en capas de 140 cm de espesor en estado suelto.

La zona de transición, ubicada exactamente al centro de la sección transversal de la presa conforma una especie de núcleo cuyos taludes tienen pendientes de 0.5H:1V. En la figura 6.1 se presenta la sección transversal típica con la zonificación mencionada, la cual fue tomada de los planos BPE del proyecto (CFE, 2003). Se observa que los materiales constituyentes de la totalidad del terraplén son mayores en número que los aquí mencionados; no obstante, son los materiales 3B, T y 3C los que determinan de manera más importante el comportamiento de la cortina ya que componen el volumen mayor de la misma. Por tanto, para el presente estudio se omitirá al resto de los materiales y únicamente se modelarán los tres mencionados, así como el concreto de la cara impermeable.

La losa es de concreto armado y tiene un espesor variable, desde 80 cm en su parte inferior hasta 30 cm en su extremo superior, por lo que la pendiente de 1.4H:1V corresponde únicamente al lecho inferior de la cara de concreto. El cuerpo de la losa no es continuo, sino que está constituido por diversos paneles a lo largo del eje de la presa, cada uno de 15 m de ancho. Entre ellos fueron colocadas juntas de cobre (láminas roladas en forma de U) de tal forma que se permiten ciertos desplazamientos o asentamientos diferenciales entre las losas, sin que ellos pongan en riesgo la capacidad de retención o la estabilidad de la estructura. Sin embargo, para objeto de este análisis no se considera la existencia de estas juntas ni los posibles desplazamientos entre los paneles de la losa, y se trata a ésta como un diafragma indiviso; tampoco se incluye en el estudio el contacto losa-plinto. Lo anterior, a pesar de no corresponder con la realidad, resulta en un criterio conservador ya que se sobrestiman los elementos mecánicos actuantes en la losa.

La estructura de retención de la C.H. El Cajón está alojada en ignimbritas de composición riodacítica de la unidad El Cajón (Tic), que por su variación textural se dividió en tres unidades, denominadas TicU1, TicU2 y TicU3, las cuales corresponden a roca compacta. El desplante de los materiales 3B y T sobre el cauce del río y en las laderas se llevó a cabo sobre roca resistente, y el material 3C se desplantó en el aluvión existente o sobre material competente.

### 6.3. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Debido a que las presas de enrocamiento con cara de concreto son diseñadas para que los materiales de los cuales están construidas trabajen en su rango elástico, las propiedades de interés para su análisis son únicamente el módulo de elasticidad  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$  que describan el comportamiento de los materiales en dicho intervalo. Estas propiedades, en el caso de los enrocamientos, varían en función de los espesores de las capas de material

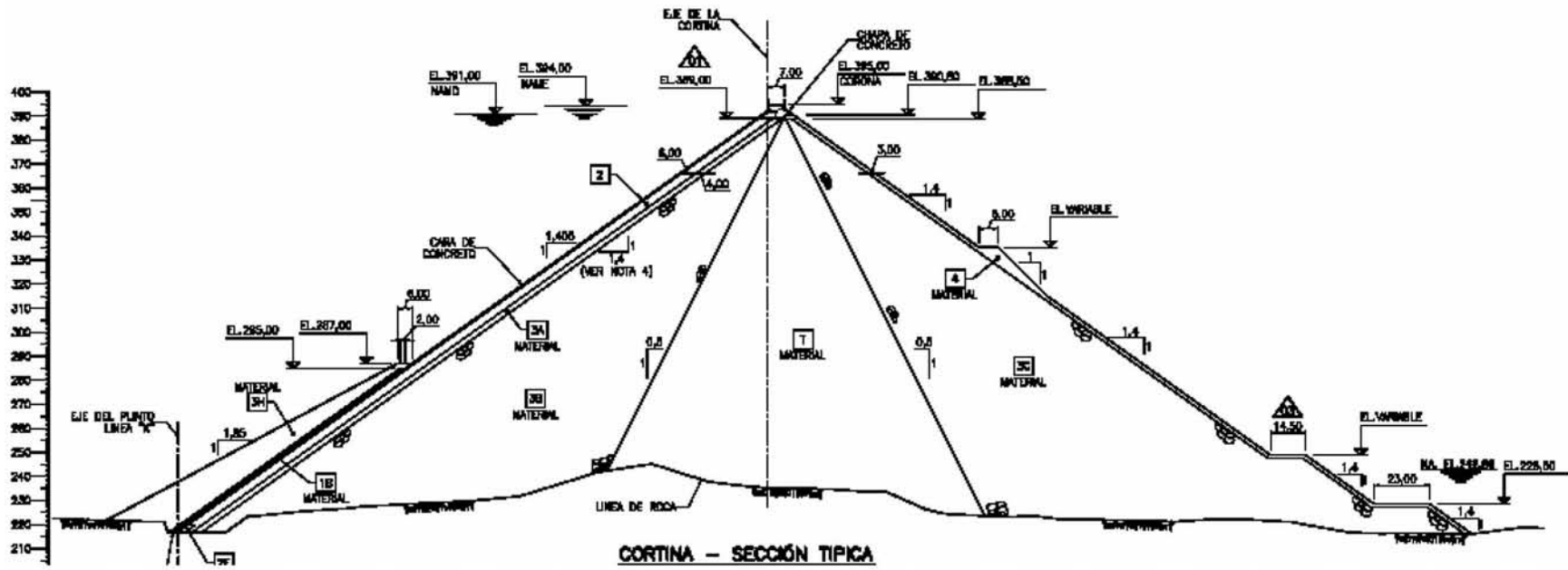


Figura 6.1. Sección típica de la cortina de la C.H. El Cajón, Nay.





compactado para la construcción del terraplén, el tamaño máximo de partícula y el equipo de compactación.

### 6.3.1. Enrocamientos

Las propiedades de los materiales constituyentes de la cortina de la C.H. El Cajón fueron tomadas del informe No. 02-31-SGM/S, marzo 2002, elaborado por la Subgerencia de Geotecnia y Materiales de la CFE. Los estudios realizados por dicha entidad para el diseño de la cortina de El Cajón incluyeron tanto ensayos de laboratorio como investigaciones en un pedraplén de prueba. En este último se colocaron celdas de carga y niveles hidráulicos, y se realizaron pruebas de placa y nivelaciones, a partir de las cuales se obtuvieron los módulos elásticos  $E$  para diferentes espesores de capa, tamaños máximos de partícula y número de pasadas de rodillo.

En el informe mencionado se recomiendan los siguientes intervalos de los módulos de elasticidad  $E$  para los distintos espesores de capa empleados en el pedraplén y las relaciones de vacíos correspondientes, representativos del material extraído del banco El Vertedor. Estos valores son los obtenidos al utilizar un rodillo liso vibratorio de 10.7 t y con volumen de agua agregada de 170 l/m<sup>3</sup>.

Espesor de capa (m)	Relación de vacíos $e$	Módulo de elasticidad $E$ (MPa)
0.6	0.26	70-80
0.8	0.28	40-45
1.0	0.30	30-35
1.2	0.32	20-25
2.0	>0.34	<20

Tabla 6.1. Valores de los módulos de elasticidad en función del espesor de la capa.

En las especificaciones de construcción del proyecto se establece que los materiales 3B, T y 3C sean colocados en capas de espesores de 0.8, 1.0 y 1.4 m, respectivamente, por lo que los módulos que les corresponden se muestran en la tabla 6.2. Así mismo, los valores de relación de Poisson recomendados se indican en la misma tabla.

Material	Espesor de capa (m)	Módulo de elasticidad $E$ (MPa)	Relación de Poisson
3B	0.8	40-45	0.28
T	1.0	30-35	0.30
3C	1.4	20-25	0.32

Tabla 6.2. Valores de los módulos de elasticidad de los materiales de la cortina.

Los módulos presentados fueron estimados a partir de las curvas carga-asentamiento del pedraplén de prueba, utilizando la teoría de la elasticidad, y por tanto corresponden al valor del módulo tangente al origen de las curvas esfuerzo-deformación para los esfuerzos de confinamiento existentes en el pedraplén de prueba. Debido a que la altura de la cortina es

mucho mayor que la del pedraplén (12.55 m), los esfuerzos confinantes que se desarrollen en la presa serán significativamente mayores que los del terraplén, lo que contribuye a una mayor reducción en la relación de vacíos de las capas inferiores y el consecuente aumento en la rigidez del material (módulos de elasticidad). Por ello, se considera que los valores presentados en las tablas anteriores corresponden a esfuerzos de confinamiento bajos en relación con los que ocurren en la cortina, y que son los módulos iniciales del material en las capas recién colocadas.

Con el fin de tomar en cuenta el efecto que tiene el confinamiento en el módulo de elasticidad del material, Romo et al (2002) plantean un procedimiento sencillo para describir este aumento en la rigidez, a partir de los resultados de pruebas triaxiales de gran dimensión (30 cm de diámetro) bajo esfuerzos confinantes altos y pruebas de placa en el pedraplén, ambas efectuadas por la Subgerencia de Geotecnia y Materiales de CFE. Los autores proponen la siguiente relación entre los módulos obtenidos en pruebas de placa correspondientes a las magnitudes de los esfuerzos de confinamiento que ocurren en el pedraplén y los módulos que resultan de confinamientos mayores, como los que se presentan en la cortina, a diferentes elevaciones.

$$E_i = E \left( 1 + \frac{\sigma_{oct}(i)}{\sigma_{oct}} \right)^\alpha \quad (6.1)$$

En esta expresión  $E_i$  es el módulo de elasticidad para cualquier estado de esfuerzos,  $E$  es el módulo elástico para los esfuerzos de confinamiento bajos correspondientes al pedraplén de acuerdo con lo recomendado por CFE.  $\sigma_{oct}(i)$  es el esfuerzo octaédrico para el estado de esfuerzos ( $i$ ) y  $\sigma_{oct}$  es el esfuerzo octaédrico correspondiente al estado de esfuerzos en el pedraplén de prueba.  $\alpha$  es un coeficiente de ajuste que define la tasa de variación del módulo en función del esfuerzo octaédrico. Romo et al (2002) indican que el valor de este coeficiente que minimiza el error medio cuadrático entre los valores experimentales y los teóricos es 0.71. Sin embargo, considerando que los módulos que se reportan de las pruebas triaxiales son mayores que los de las pruebas de placa (CFE, 2002), así como los efectos de escala que pueden afectar las pruebas triaxiales respecto de las propiedades que puedan obtenerse en el terraplén real, en este trabajo se elige utilizar un valor menor de  $\alpha$  de forma conservadora. De acuerdo con lo presentado en el mismo informe de Romo et al, se consideró que un valor apropiado para  $\alpha$  es 0.5, ya que el de 0.4 proporciona valores muy bajos del módulo elástico. En la figura 6.2 se reproducen los valores experimentales de  $E$  a partir de las pruebas triaxiales ( $E_{exp}$ ) y los valores teóricos de  $E_i$  calculados con la expresión (6.1) utilizando el valor de  $\alpha=0.5$ .

Lo anterior concuerda con las premisas indicadas por varios autores (Kondner, 1963; Duncan y Chang, 1970; entre otros) acerca de la relación no lineal entre las deformaciones y los esfuerzos en suelos. Esto se traduce en que mientras más profundo esté un elemento de suelo dentro de la cortina, mayor será su confinamiento y en consecuencia también tendrá mayor rigidez. La ecuación (6.1) además provee una forma sencilla de relacionar los resultados experimentales con los que se espera tener en la obra.

Se ha decidido utilizar para el análisis los valores máximos de los intervalos mostrados en la tabla 6.2, tomando en cuenta que el coeficiente  $\alpha$  reducido es suficientemente moderado.

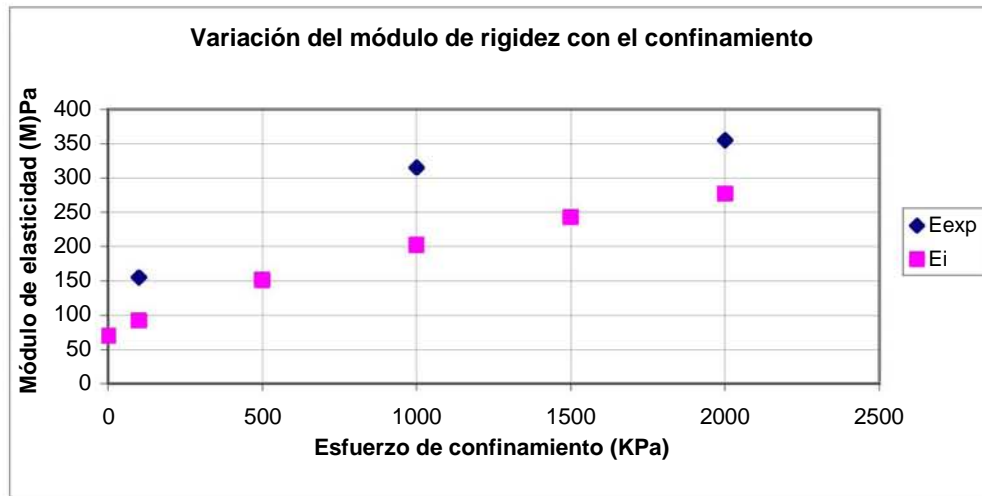


Figura 6.2. Influencia del esfuerzo confinante en el módulo de elasticidad del enrocamiento (reproducido de Romo et al, 2002).

### 6.3.2. Concreto de la cara impermeable

Como ya fue mencionado, la cara de concreto es diseñada para que las deformaciones que en ella ocurran sean pequeñas, ya que la propia naturaleza rígida del concreto no permite que sean mayores. El desarrollo de fuertes deformaciones en la losa conduciría a la aparición de grietas que pondrían en riesgo su impermeabilidad y la estabilidad de la obra en su conjunto. Por ello, el comportamiento esperado de la losa de concreto es igualmente elástico en su intervalo lineal. Así, se asumió una resistencia a la compresión  $f'_c$  de 250 kg/cm<sup>2</sup> para el concreto y un módulo de elasticidad  $E$  de  $11000\sqrt{f'_c}$ .

### 6.4. PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La evaluación de los esfuerzos y los desplazamientos de la cortina de la C.H. El Cajón constó de dos fases: la primera consistió en el análisis estático, es decir el de los procesos de construcción del terraplén con su losa de concreto y primer llenado del embalse; y la segunda trató el análisis dinámico de la presa, es decir su comportamiento ante una excitación sísmica. Estos análisis fueron sucesivos, ya que para evaluar la respuesta sísmica de la presa es necesario determinar primero el estado de esfuerzos a que está sujeta la estructura previa al sismo, ya que de éste dependen las propiedades de los materiales que determinen su comportamiento dinámico.

Así, se procedió inicialmente a simular la construcción de la cortina y su losa de concreto. Este análisis siguió el procedimiento propuesto por Clough y Woodward (1967), expuesto en el capítulo 5, que contempla el proceso constructivo por incrementos y permite tomar en cuenta la variación no lineal de la rigidez de los materiales respecto del nivel de esfuerzos. Los autores utilizaron dicha técnica bajo la premisa de que el sistema tridimensional podía ser representado como un problema bidimensional de deformación plana, sin embargo, los principios que lo rigen pueden extenderse a problemas de deformación general y en tres dimensiones, como el que aquí se estudia.



La construcción de la losa se supuso en tres etapas intercaladas entre las capas constructivas del enrocamiento, ya que durante la realización del proyecto ésta fue colocada casi conjuntamente con la construcción del terraplén, hasta donde el proceso constructivo lo permitió. El primer llenado se modeló como la aplicación de la carga hidrostática en varias etapas sucesivas, de acuerdo con lo que se explicó también en el capítulo anterior.

Partiendo del estado de esfuerzos producido por los procesos anteriores, y con las propiedades materiales que de éste resultan, se aplicó al modelo una excitación dinámica, con lo cual se completó el propósito de este estudio.

Las hipótesis sobre las cuales se llevó a cabo el presente análisis son:

1. La curva esfuerzo-deformación del enrocamiento sigue una forma no lineal para las magnitudes de esfuerzos de confinamiento que se desarrollan dentro de la cortina, de acuerdo con la expresión (6.1).
2. En contraste con lo anterior, durante cada incremento de carga (colocación de una nueva capa de material) el enrocamiento se comporta elástica y linealmente.
3. La relación de Poisson de los materiales se mantiene constante durante los procesos analizados.
4. El concreto de la losa tiene un comportamiento elástico lineal.
5. La cimentación de la cortina es rígida.
6. Las deformaciones unitarias en cada etapa son pequeñas, de acuerdo con la teoría de la elasticidad.

El programa de elementos finitos utilizado para el trabajo fue el software LUSAS, v. 13.8, tanto para la etapa estática como para la dinámica. También se hizo uso del lenguaje de programación MatLab para procesar los resultados parciales de los análisis incrementales, como se explica más adelante.

A continuación se exponen de manera más detallada las etapas del análisis.

#### **6.4.1. Construcción del modelo: malla de elementos finitos**

Como paso inicial para el análisis por el método de elementos finitos de la cortina de El Cajón, se modeló por medio de una malla tridimensional la geometría de la cortina con su losa de concreto y la cimentación. Los elementos utilizados para idealizar el cuerpo de la cortina y la roca de cimentación fueron sólidos tridimensionales (3D solid) de ocho y seis nodos. La losa se modeló con un conjunto de elementos placa gruesa (thick plate) de cuatro nodos que son compatibles con los sólidos tridimensionales y se les asignó un atributo de espesor variable. No se modelaron las interfaces losa-losa y losa-plinto que constituyen las juntas entre dichos elementos. Es importante mencionar que la totalidad de los elementos fueron incluidos en el modelo desde el inicio.

La geometría de la malla de elementos finitos se obtuvo a partir de los planos BPE del proyecto, tomando como patrón la sección típica de la cortina (figura 6.1, plano CD-C021-PL-040-R03) y el eje del plinto (plano CD-C021-PL-001-R03) para determinar el perfil de la boquilla. Los tres materiales principales que conforman la cortina fueron reproducidos en cuanto a sus cantidades dentro de la cortina y las pendientes de sus taludes.

Como se mencionó anteriormente, únicamente se consideraron en el estudio los materiales 3B, T y 3C como los componentes de la cortina, ya que son éstos los que ocupan el volumen más significativo de la misma y determinan de manera más importante su comportamiento.

La inserción de los demás materiales en el modelo implicaría una mayor complejidad tanto en la malla como en las ecuaciones matriciales del método, sin que se eleve significativamente la exactitud de los resultados.

Ya que el método supone que la idealización de la estructura sea configurada en capas horizontales que correspondan con las etapas constructivas, el terraplén fue dividido en nueve capas horizontales de aproximadamente 20 m cada una. Las divisiones verticales se pensaron para que los elementos tuvieran relaciones de aspecto lo más cercanas posible a uno, sin embargo, por la topografía de la boquilla existen algunos elementos con una distorsión mayor. En algunos casos fue necesario modificar ligeramente el perfil de la boquilla para que los elementos finitos cumplieran con las condiciones de forma deseadas para obtener resultados acertados. La figura 6.3 presenta las vistas tridimensionales de (a) la cortina y su cimentación en roca con sus ejes coordenados, y (b) la cortina únicamente. En la figura 6.4 se aprecian las secciones (a) longitudinal y (b) transversal del modelo.

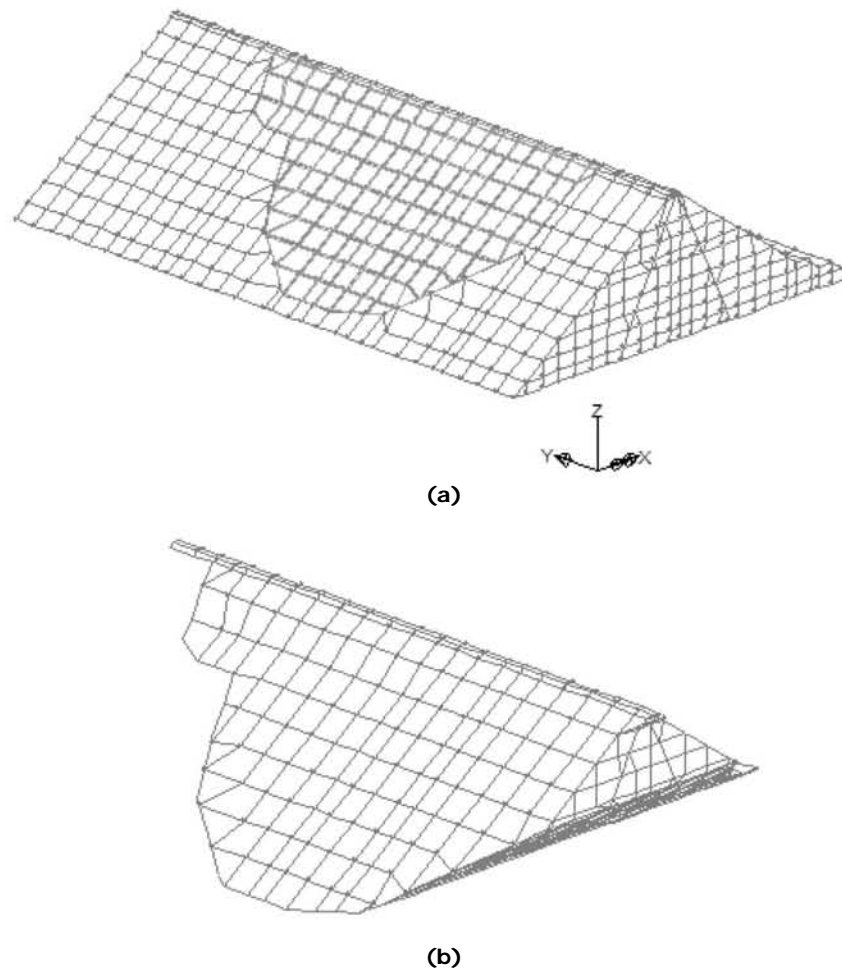


Figura 6.3. Vistas tridimensionales del modelo: (a) la cortina y su cimentación, (b) la cortina.

De la configuración mencionada resultan 27 grupos de materiales en la cortina, uno por cada capa constructiva y por cada tipo de material colocado, es decir que los tres enrocamientos se subdividen en 9 grupos de acuerdo con la capa a la que pertenecen. Cada uno de estos

grupos posee propiedades distintas ya que sus estados de esfuerzo son también distintos de acuerdo con su profundidad en el terraplén y su módulo elástico inicial.

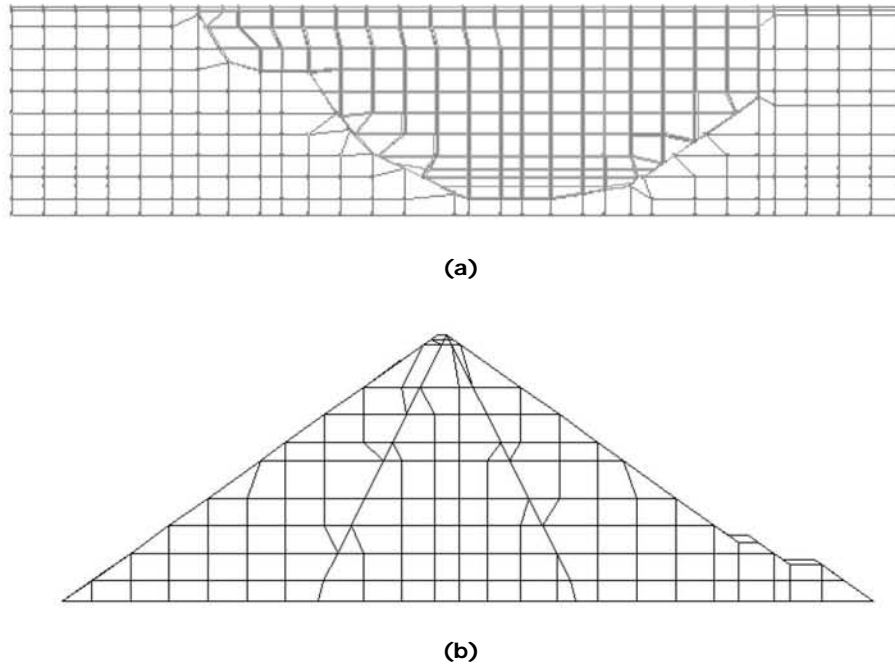


Figura 6.4. Secciones (a) longitudinal y (b) transversal del modelo.

Los ejes coordenados globales se ubicaron según: eje X global en dirección del eje del cauce, eje Y global en dirección del eje de la cortina, y eje Z global en dirección vertical; como se aprecia en la figura 6.3.a.

#### 6.4.2. Análisis estático: Construcción

De acuerdo con el capítulo anterior, el análisis estático debe ser capaz de tomar en cuenta la construcción incremental de la cortina, así como el incremento de la rigidez del enrocamiento conforme la construcción avanza y el confinamiento aumenta.

El procedimiento de Clough y Woodward (1967) logra tal fin, ya que aprovecha que el análisis se realiza por incrementos para ir variando las propiedades de los materiales de acuerdo con el nivel de esfuerzos existente al final de cada incremento. Durante el análisis de elementos finitos de cada etapa el comportamiento del enrocamiento se supone lineal, lo cual simplifica los cálculos y arroja resultados aún satisfactorios. Los mismos autores hacen notar que la variación del módulo elástico ocurre no sólo respecto de la presión de confinamiento, sino también de acuerdo con la deformación alcanzada. A diferencia de la presión confinante, la cual al aumentar produce un incremento en la rigidez, a mayor deformación unitaria el módulo de elasticidad disminuye. Sin embargo, en el presente análisis no se incluye este último efecto.

Para el análisis de todos los incrementos, se considera que la capa que ocupa la posición más alta en ese instante de la construcción está bajo esfuerzos de confinamiento



semejantes a los del pedraplén de prueba, por lo que se le asignan los módulos elásticos iniciales contenidos en la tabla 6.2. Por su parte, las capas inferiores tienen módulos de elasticidad mayores, resultantes del mayor confinamiento que producen sobre ellas las capas superiores. Este  $E$  mayor es el calculado con la ecuación 6.1.

Debido a que el modelo se compuso desde el inicio de todos los elementos que conformarían la obra terminada, fue necesario utilizar la herramienta de activación y desactivación de elementos disponible en LUSAS para simular el proceso constructivo. Los elementos no construidos están desactivados y se les activa conforme el proceso constructivo avanza. En el programa, cuando un elemento está desactivado permanece en la solución del método pero con una matriz de rigidez reducida, de tal manera que tiene un efecto despreciable en los elementos que lo rodean. Cuando un elemento es activado, se le introduce con una geometría actualizada (deformada) en un estado sin esfuerzos ni deformaciones, a menos que se le definan valores iniciales, y las deformaciones se incrementan a partir del momento en que el elemento es activado.

Lo anterior significa que al aplicar un incremento de carga (la construcción de una capa) éste provoca que toda la malla se deforme, incluyendo aquellos elementos que no han sido construidos aún, y cuando se les incluye en el análisis debido a su construcción guardan ya una deformación previa a su colocación, lo cual resulta incoherente. Este procedimiento sería equivalente aplicar directa e instantáneamente las fuerzas de cuerpo gravitacionales en la estructura completa, lo que se ha probado es generalmente equívoco.

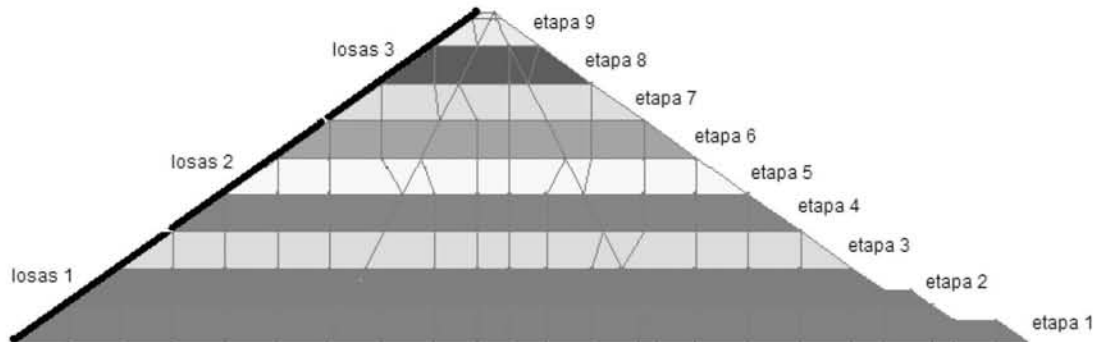
Por esto, fue necesario llevar a cabo el análisis de cada incremento de forma independiente de los demás, ya que el software LUSAS no permite conservar únicamente los desplazamientos de los elementos activados e inicializar a cero (para el siguiente incremento) los de los elementos desactivados. Esta condición es esencial para el método, por lo que fue necesario extraer los resultados de cada incremento (parciales), seleccionar aquellos desplazamientos significativos para ese incremento (los de las capas ya construidas) y asignar un valor de cero a los desplazamientos de los elementos aún no construidos. Este proceso se realizó por medio de sencillos programas de MatLab con base en las coordenadas de los nodos correspondientes a cada capa.

Con el fin de ilustrar el proceso de análisis y facilitar la descripción que sigue, se presenta la figura 6.5 que contiene los incrementos de carga analizados. Nótese que la carga de la losa se aplicó en tres incrementos (1, 2 y 3) los cuales tuvieron lugar después de las etapas constructivas del terraplén 4, 7 y 9, respectivamente. Se tomó tal decisión debido a que en la realidad las losas fueron colocadas en varias etapas que seguían de cerca la construcción de la cortina. Los elementos que constituyen la cimentación permanecieron activos durante toda la secuencia y no se incluyen en dicha figura.

El procedimiento que siguió el análisis estático de desplazamientos y esfuerzos de la cortina de la C.H. El Cajón fue el siguiente:

1. Inicialmente, a todos los elementos del terraplén y de la losa les fueron asignadas sus propiedades materiales, es decir, módulo de elasticidad y relación de Poisson, así como su peso volumétrico (los módulos elásticos iniciales son los valores máximos de los contenidos en la tabla 6.2).
2. Para el análisis del primer incremento de carga (primera capa constructiva) se desactivaron todos los elementos del terraplén y la losa, y únicamente se mantuvieron activos los correspondientes a la etapa 1 (ver figura 6.5). De esta

forma, las rigideces de los elementos desactivados no tienen efecto alguno sobre el comportamiento del resto del modelo.



**Figura 6.5. Proceso de aplicación de los incrementos de carga durante la construcción.**

3. Para simular las cargas que produce el peso propio de la capa construida, a los elementos correspondientes se les asignaron fuerzas de cuerpo gravitacionales. También se les asignaron a los elementos que forman la cimentación, sólo que éstas permanecieron constantes durante todo el análisis.
4. Se ejecutó el programa de elementos finitos y se obtuvo el estado de esfuerzos debido a la construcción de la primera etapa.
5. Se extrajeron los esfuerzos principales de los elementos del material 3B de la capa que corresponde y con ellos se determinó el esfuerzo octaédrico promedio para ese material. A partir de éste se calculó un nuevo módulo de elasticidad congruente con el estado de esfuerzos alcanzado, por medio de la ecuación 6.1. Lo mismo se efectuó para los materiales T y 3C.
6. Los nuevos módulos calculados se compararon con los anteriores y se obtuvo su diferencia en porcentaje.
7. En caso de que dicha diferencia fuera mayor que el 0.1%, como sucedía generalmente en la primera iteración, debían introducirse los nuevos módulos en el modelo y repetirse los pasos 4, 5 y 6, hasta que la diferencia entre módulos fuera menor que el valor mencionado.
8. Una vez que la condición anterior fue satisfecha, el análisis de ese incremento se aceptó como válido y se almacenaron los desplazamientos producidos por la construcción de la etapa correspondiente.
9. El análisis del siguiente incremento requirió activar los elementos de la etapa siguiente y asignarles las fuerzas de cuerpo gravitacionales para incluir su peso propio en el análisis. Los elementos de la capa anterior se mantuvieron activos pero se les retiraron las fuerzas de cuerpo para que no se duplicaran los efectos producidos por su peso. La figura 6.6 ilustra este paso para el caso del análisis de la etapa 2.



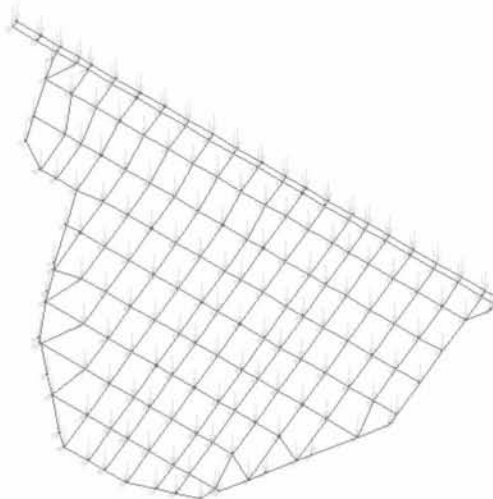


**Figura 6.6. Activación de elementos y aplicación de fuerzas por peso propio para el análisis de la etapa 2.**

10. Se repitieron los pasos 4 a 9 para cada nuevo incremento hasta completar la totalidad de la presa. Durante las etapas 2 a 9 se debieron calcular los esfuerzos octaédricos y módulos elásticos correspondientes para cada material en cada una de las capas ya colocadas.
11. La construcción de las tres etapas de la losa se modeló igual que los demás incrementos, por medio de la activación y asignación de peso propio a los elementos en el momento en que fueron colocados. Una vez que ya estaban construidas se les mantuvo activas pero se les suprimieron las fuerzas gravitacionales. Los módulos elásticos de estos elementos se conservaron constantes durante todo el análisis.

#### **6.4.3. Análisis estático: Primer llenado**

El procedimiento para el análisis del primer llenado fue más sencillo que el de la construcción, ya que consistió únicamente en la colocación de las cargas hidrostáticas sobre la losa, según se explica en el apartado 5.3 de este trabajo.



**Figura 6.7. Vista isométrica de las losas y las cargas hidrostáticas aplicadas.**

Por las dimensiones y la importancia de la obra, este análisis se realizó también por etapas, con las mismas nueve utilizadas para la simulación de la construcción. Las cargas hidrostáticas aplicadas durante cada etapa fueron parciales y correspondientes únicamente al incremento debido a la elevación del nivel del agua en el embalse, según el procedimiento mencionado en la sección 5.3. La forma más sencilla para aplicar las cargas hidrostáticas en su magnitud y dirección correctas, ya que debían ser normales a la losa, fue definiéndolas por medio de sus componentes horizontal y vertical de manera que se refirieran a los ejes globales del modelo y que su magnitud dependiera de la elevación de los elementos de la cortina. La figura 6.7 muestra una vista isométrica de las losas y las cargas hidrostáticas aplicadas sobre ellas al final del llenado.

Los desplazamientos resultantes de cada etapa fueron acumulados para obtener al final los desplazamientos totales debidos al primer llenado de la presa.

#### 6.4.4. Análisis dinámico: Sismo

El análisis sísmico de la presa tuvo como base el estado de esfuerzos alcanzado después del llenado del embalse y las propiedades materiales que de él resultan. Es decir, que se utilizaron los módulos elásticos calculados al final del llenado del embalse. La relación de Poisson se mantuvo constante y con el mismo valor que en los análisis anteriores. El comportamiento de los materiales se asumió dentro del intervalo lineal. No se consideró una variación de la rigidez al corte  $G$  respecto de la deformación angular, ya que las deformaciones esperadas son pequeñas.

La excitación sísmica fue la sugerida por el área de Sismotectónica de CFE como el Sismo Máximo Creíble (SMC) cuya gráfica se presenta en la figura 6.8. La dirección en que el espectro sísmico resulta más desfavorable para la cortina es en dirección perpendicular al eje de la misma, es decir, en la dirección del eje global X, por lo que en esta dirección se utilizó el 100% de la acción dinámica. En las direcciones perpendiculares Y y Z únicamente se consideró un tercio de los efectos de la acción dinámica, es decir  $0.33 \times \text{SMC}$ .

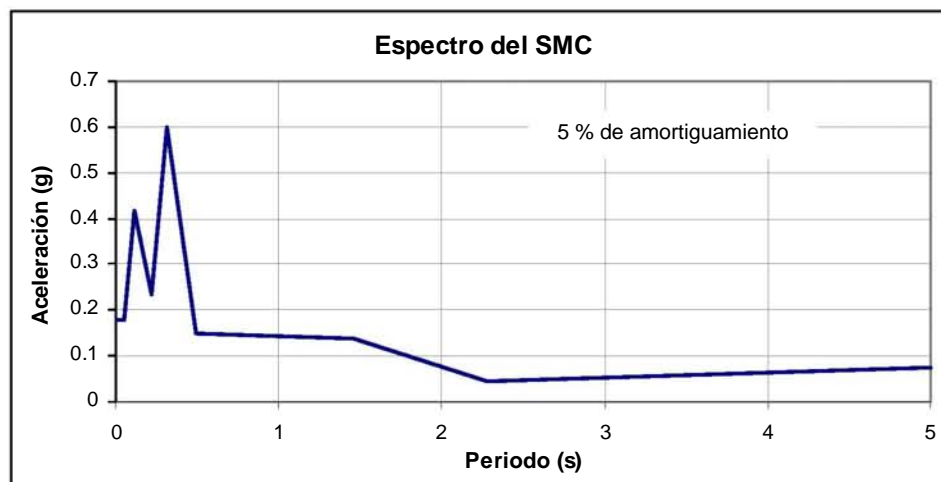


Figura 6.8. Espectro del Sismo Máximo Creíble con el 5% de amortiguamiento, de acuerdo con CFE.



El Manual de Obras Civiles de CFE menciona en su apartado de Diseño por Sismo, que en el caso de presas como las de enrocamiento con cara de concreto las presiones hidrodinámicas no afectan significativamente el comportamiento de la cortina y así mismo lo señala Romo en Romo et al (2002) de acuerdo con su experiencia. Por tanto, en el presente estudio no se incluyeron estas acciones en el análisis sísmico.

Esta etapa del análisis en LUSAS requirió antes que nada de la determinación de los modos naturales de vibrar de la estructura, por lo que fue necesario realizar inicialmente un análisis de eigenvalores. Con estos resultados se procedió a ejecutar el análisis de respuesta sísmica de la estructura.

## 6.5. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados de los análisis de la cortina de la C.H. El Cajón. Se consideran de mayor interés los desplazamientos calculados, ya que son sencillos de corroborar al compararlos con las mediciones que con instrumentación pueden obtenerse en campo. Esto representa la posibilidad de verificar la validez del modelo y del análisis realizado. Así mismo se muestra la evolución de los módulos de elasticidad de los materiales conforme avanza la construcción y los esfuerzos verticales al final de los procesos de construcción y llenado. Los resultados del análisis sísmico se incluyen en el último inciso de esta sección.

### 6.5.1. Etapa de construcción

#### MÓDULOS ELÁSTICOS

Los módulos elásticos de las nueve capas y los tres materiales que componen la cortina aumentan respecto del nivel de esfuerzos según la expresión 6.1. En consecuencia, los módulos calculados en cada etapa y su evolución a lo largo de la simulación de la construcción reflejan el nivel de esfuerzo alcanzado en cada etapa del proceso.

La figura 6.9 muestra la evolución de dichos módulos de acuerdo con el incremento en la altura del terraplén para los tres materiales y cada una de las capas. Los datos que se presentan son los valores promedio por cada capa colocada de cada uno de los tres materiales, ya que el esfuerzo utilizado para el cálculo fue el octaédrico promedio de cada una de esas secciones. En la tabla 6.3 se indican los intervalos de los valores alcanzados por los módulos elásticos en cada material.

Material	Módulo E (MPa)
3B	54 – 107
T	43 – 120
3C	28 – 55

Tabla 6.3. Módulos elásticos representativos en el terraplén al 26 de junio de 2006 (CFE, 2006).

Los módulos iniciales de los materiales revelan que el más rígido después de su colocación es el 3B, seguido por el T y finalmente el 3C. Sin embargo, conforme avanza la construcción

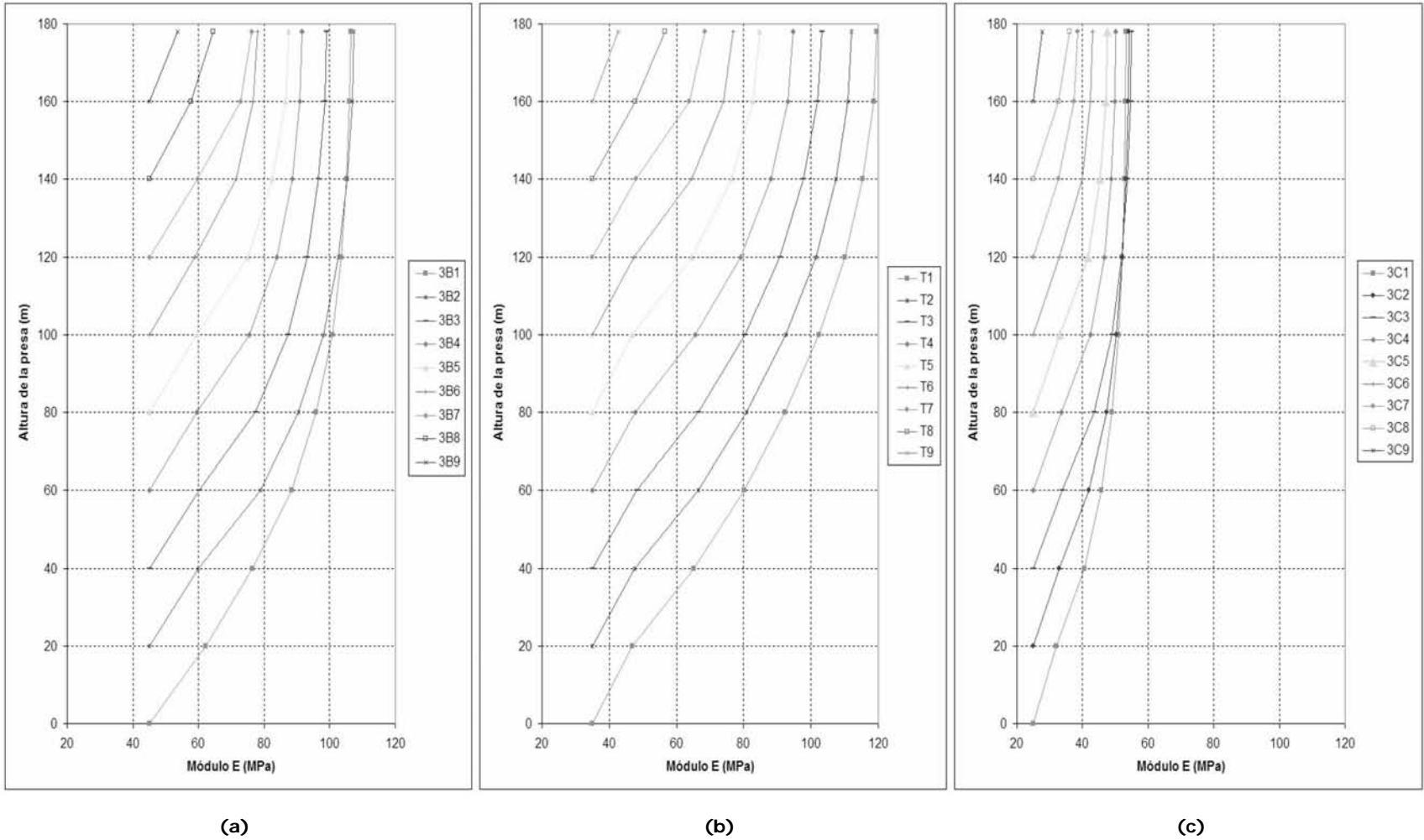


Figura 6.9. Evolución de los módulos elásticos de los materiales (a) 3B, (b) T y (c) 3C respecto de la altura de la presa.



y hasta el final de la misma, el que desarrolla mayores esfuerzos y en consecuencia módulos elásticos más altos es el material T. Únicamente en las tres capas superiores se mantiene la relación entre las rigideces como cuando fueron colocados los materiales. Esto era de esperarse ya que las capas inferiores del material T son las que están sujetas a un mayor confinamiento provisto por los materiales laterales y las capas colocadas sobre ellas.

#### DESPLAZAMIENTOS

A continuación se presentan los resultados de los desplazamientos verticales producidos en la sección máxima del terraplén durante cada una de las doce etapas de construcción consideradas. Como ya se indicó, las primeras cuatro etapas corresponden a la colocación de las capas 1 a 4, la quinta etapa fue la construcción de la primera sección de la losa de concreto. Posteriormente siguieron las etapas constructivas 5 a 7 del terraplén y en seguida la instalación de la segunda sección de la losa. Finalmente, se consideró la construcción de las etapas 8 y 9 de la cortina, seguidas por la colocación del último tramo de la cara de concreto. En este orden se muestran los asentamientos calculados en la figura 6.10 con el fin de observar la evolución de los mismos.

Al inicio de la construcción de la presa, los asentamientos son relativamente homogéneos horizontalmente. Sin embargo, ya para la segunda etapa y conforme avanza la construcción se puede notar una zona de mayores asentamientos en el material 3C. Una vez que el terraplén alcanza la mitad de su altura final, dicha zona en la que se concentran los asentamientos comienza a migrar hacia el centro de la presa (material T). En el final de la construcción la región de mayores asentamientos permanece situada en el material T, pero también puede observarse que en la mayor parte del material 3C los desplazamientos verticales son también significativos.

Los contornos de igual asentamiento siguen líneas más altas, y de valores menores, en el material 3B; en el material T ocurren los asentamientos mayores pero los contornos conservan líneas suaves, casi horizontales y sin cambios de pendiente; al cruzar al material 3C las líneas de los contornos aumentan de pendiente y se observa que, aunque de magnitudes menores, la región de asentamientos se desplaza hacia la base del terraplén. Esto se explica ya que el material 3B es el más rígido al colocarse, por lo cual sufre menores asentamientos. El material T es medianamente rígido pero está sujeto a mayores esfuerzos porque es ahí donde el terraplén alcanza su mayor altura, en consecuencia los asentamientos que en este material ocurren son mayores; esto hace que este enrocamiento se consolide más y que al final de la construcción alcance una mayor rigidez. Por su parte, el material 3B, a pesar de ser el más deformable al ser colocado, tiene menores asentamientos ya que los esfuerzos que tienen efecto sobre él son menores que en el material T.

El asentamiento máximo al final de la construcción es de 98 cm y ocurre en el material T a media altura de la presa, alrededor de la elevación 305 m, ligeramente aguas abajo del eje de la cortina.

En la figura 6.10 (e, i, l) puede observarse que la construcción de la losa, en sus tres etapas, prácticamente no produce un incremento de los desplazamientos, por lo que puede concluirse que no tiene una influencia significativa en el terraplén. Esto, a pesar de haber sido colocada poco después que el enrocamiento del terraplén y que por tanto la consolidación del material no había ocurrido en su totalidad. Por tanto, en este proyecto la opción de construcción de la losa casi conjuntamente con el terraplén resulta satisfactoria ya que los asentamientos que provoca son mínimos. Otros casos, sin embargo, deben estudiarse individualmente.

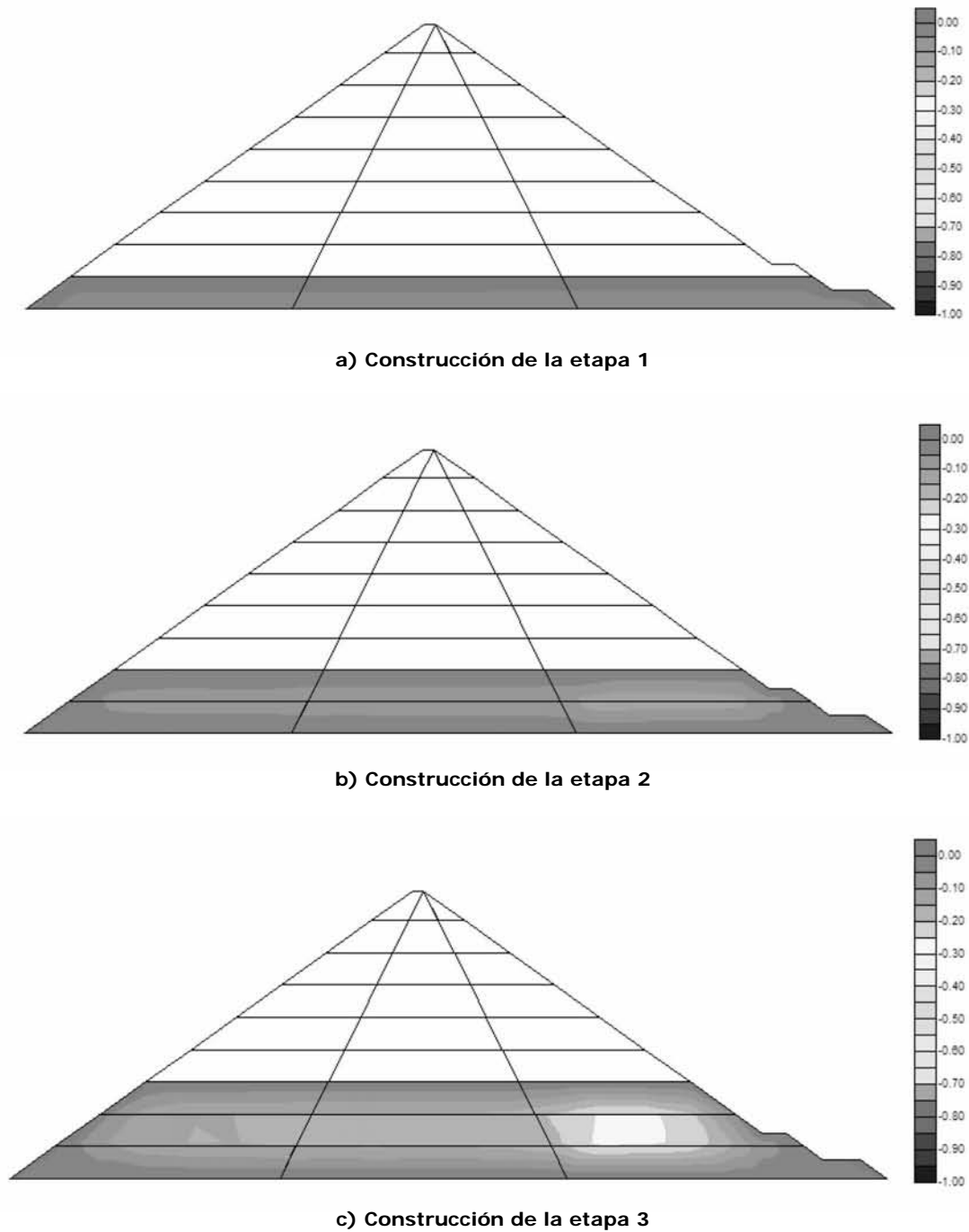
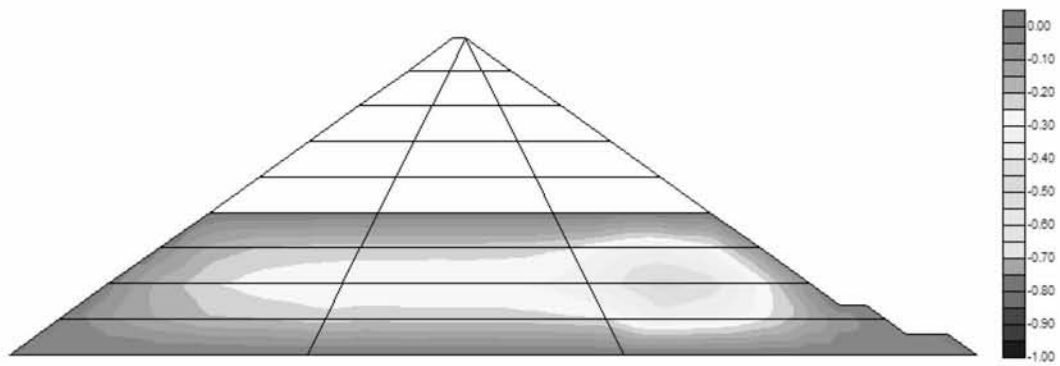
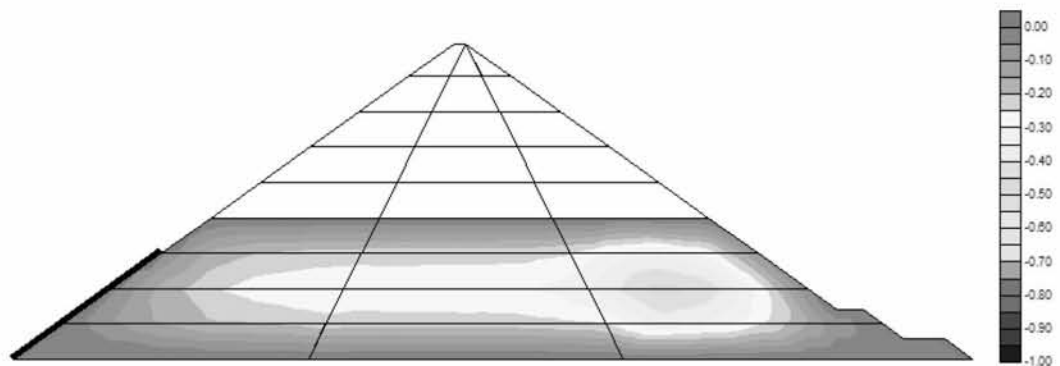


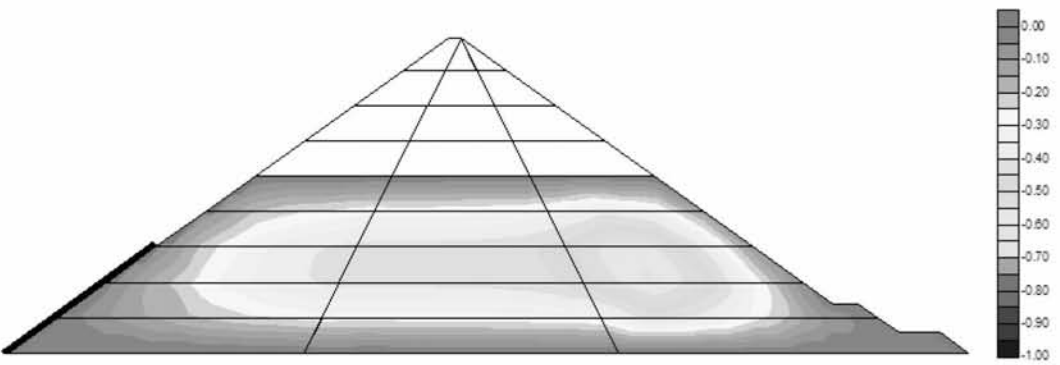
Figura 6.10. Desplazamientos verticales en la sección máxima durante la construcción del terraplén y sus losas. Magnitudes en m.



d) Construcción de la etapa 4

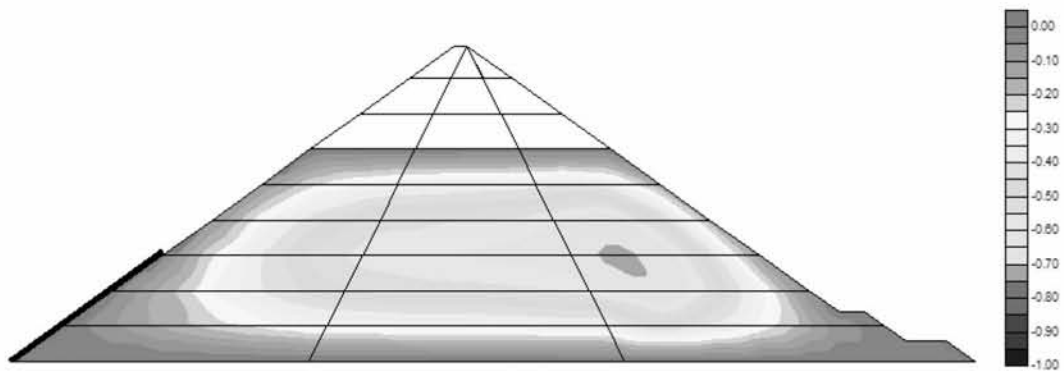


e) Construcción de la sección de Losas 1

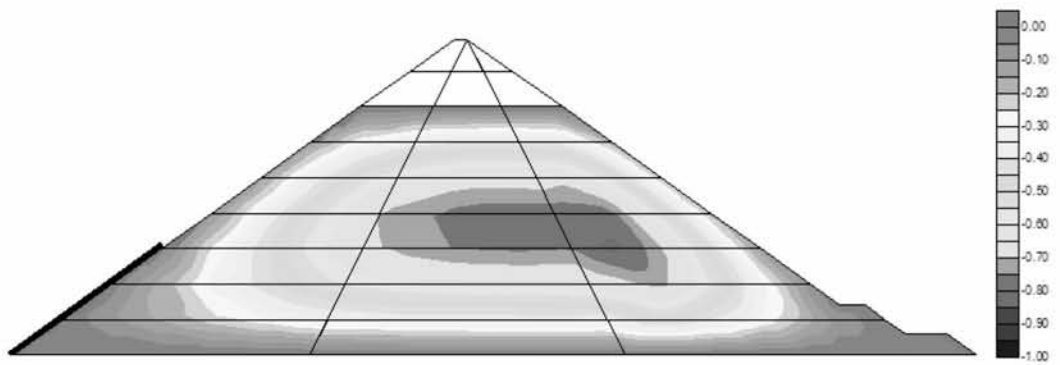


f) Construcción de la etapa 5

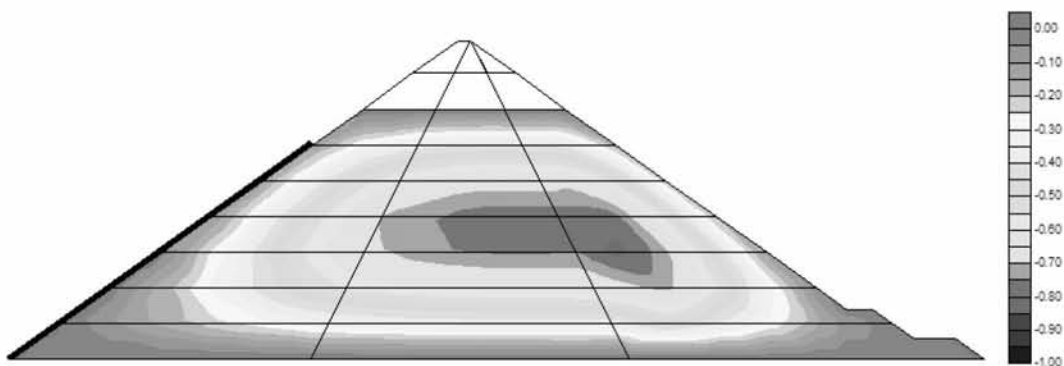
Figura 6.10. Desplazamientos verticales en la sección máxima durante la construcción del terraplén y sus losas. Magnitudes en m.



g) Construcción de la etapa 6



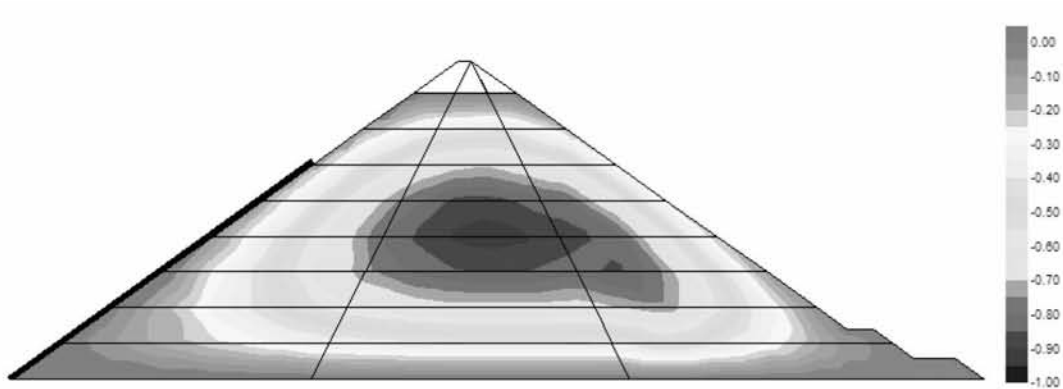
h) Construcción de la etapa 7



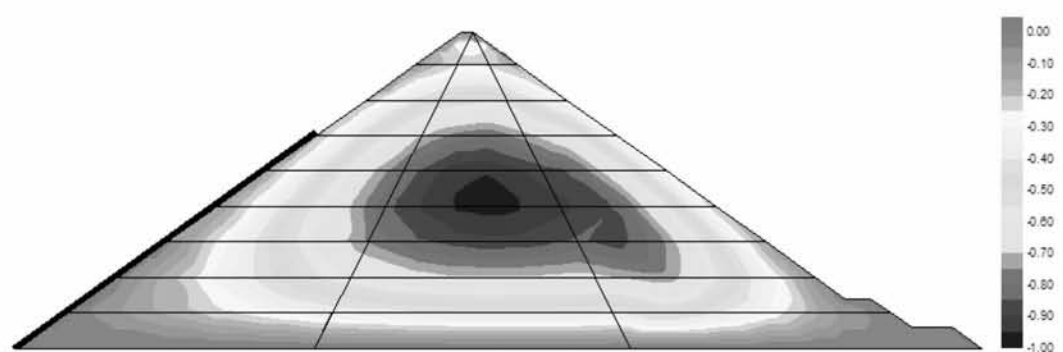
i) Construcción de la sección de Losas 2

Figura 6.10 (continuación). Desplazamientos verticales en la sección máxima durante la construcción del terraplén y sus losas. Magnitudes en m.

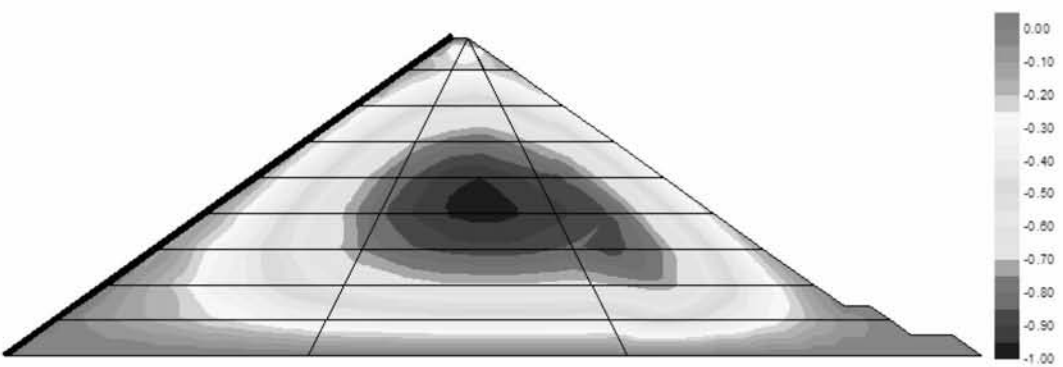




j) Construcción de la etapa 8



k) Construcción de la etapa 9

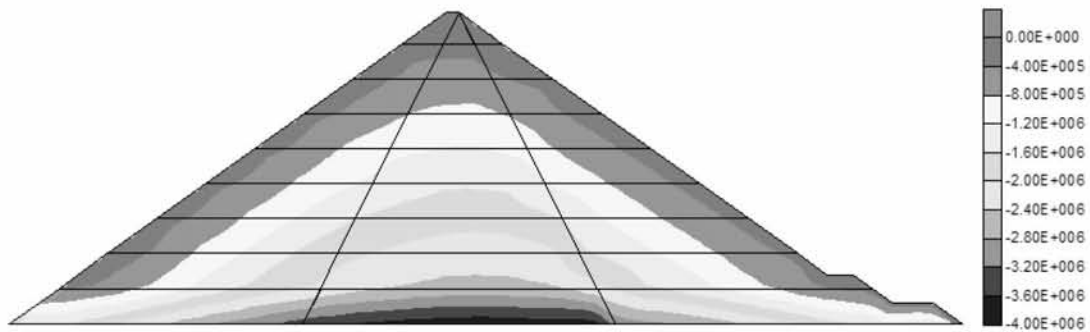


l) Construcción de la sección de Losas 3

Figura 6.10 (continuación). Desplazamientos verticales en la sección máxima durante la construcción del terraplén y sus losas. Magnitudes en m.

## ESFUERZOS

Los esfuerzos verticales en la sección máxima al final de la construcción del terraplén y la losa se muestran en la figura 6.11. Como era de esperarse, los valores máximos se presentan en la base del material T, con lo que se confirma por qué este material se vuelve más rígido conforme avanza la construcción. El valor mínimo del esfuerzo en Z es aproximadamente -4 MPa, el signo negativo denota compresión.



**Figura 6.11. Esfuerzos verticales en la sección máxima al final de la construcción del terraplén y sus losas. Magnitudes en MPa.**

### 6.5.2. Primer llenado

#### DESPLAZAMIENTOS

La etapa del llenado, calculada en 9 fases, produjo desplazamientos verticales que son de consideración. La figura 6.12 presenta los asentamientos producidos únicamente debido al llenado del embalse. La figura 6.13 contiene los contornos de igual asentamiento que resultan de la suma de los producidos por la construcción y los del primer llenado.

El primer llenado produce un empuje hidrostático sobre la losa que tiene como efecto mayores asentamientos en el talud de aguas arriba, zona del material 3B que se extiende hacia el material T y prácticamente no afecta al 3C. El mayor asentamiento debido únicamente al llenado fue de 42 cm, a la mitad de la altura de la losa.

El asentamiento acumulado, de la construcción y el primer llenado, tiene un valor máximo de 103 cm, y se mantiene dentro del material T aproximadamente a la mitad de la altura de la cortina. Sin embargo, en la figura 6.13 se observa un corrimiento de los contornos de asentamiento hacia aguas arriba, como consecuencia de las cargas hidrostáticas por el llenado. Así, el valor máximo ocurre prácticamente en el eje de la presa y los asentamientos del material 3B se incrementan.

#### ESFUERZOS

En los esfuerzos verticales se observa una tendencia similar a la que ocurre en los desplazamientos, ya que los esfuerzos en el material 3B se incrementan, lo que resulta en una traslación de los contornos de igual esfuerzo hacia aguas arriba. Así mismo, los valores de los esfuerzos son mayores, registrando un máximo de 5 MPa en la base del material T.

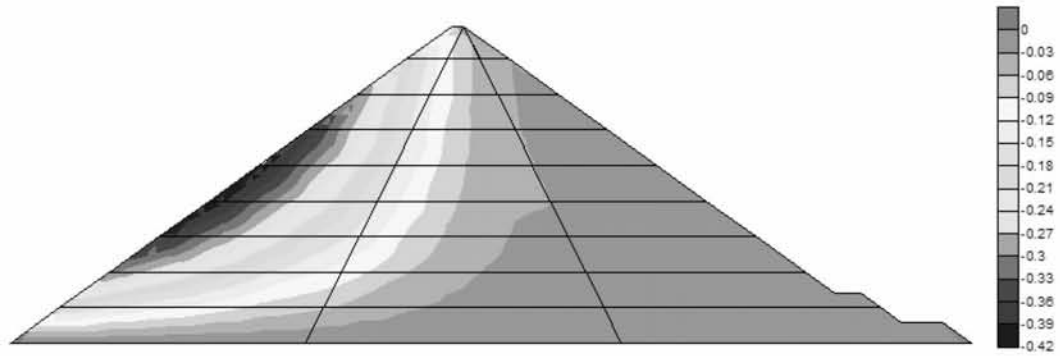


Figura 6.12. Desplazamientos verticales en la sección máxima debidos al primer llenado. Magnitudes en m.

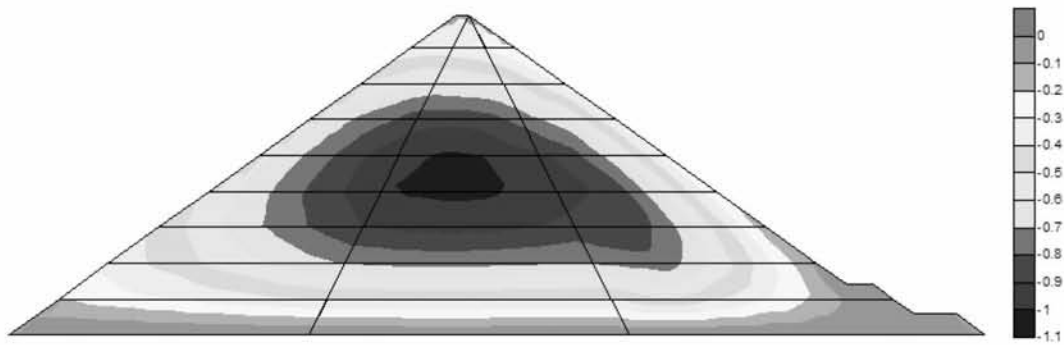


Figura 6.13. Desplazamientos verticales en la sección máxima al final de la construcción y el primer llenado. Magnitudes en m.

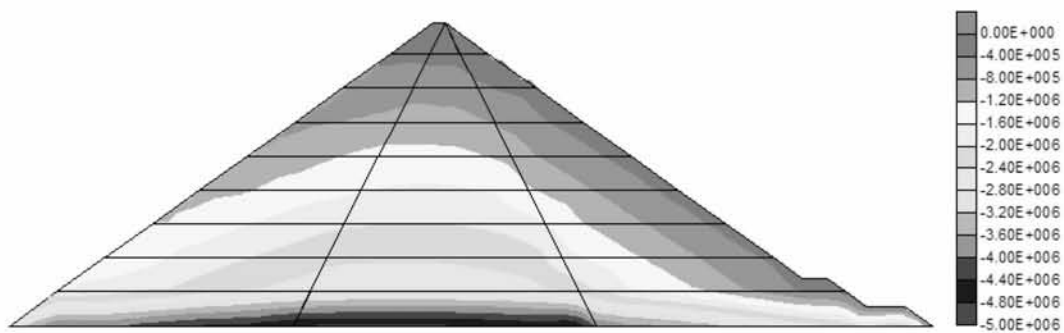


Figura 6.14. Esfuerzos verticales en la sección máxima al final de la construcción y el primer llenado. Magnitudes en MPa.

### 6.5.3. Sismo

Las figuras 6.15 a 6.17 presentan los resultados del análisis sísmico efectuado en la cortina de la C.H. El Cajón, con el Sismo Máximo Creíble como acción dinámica. La figura 6.15 muestra la configuración deformada de la malla de elementos finitos que representa al terraplén.

El SMC produce asentamientos en el terraplén de 12.55 cm según lo reportado en la figura 6.15, éste ocurre cerca de la parte superior de la superficie del talud de aguas abajo en la sección transversal máxima. La distribución de los asentamientos se concentra en esa parte y disminuye con la profundidad. El material que sufre mayores asentamientos es el 3C, seguido por el T y finalmente el 3B.

En la sección longitudinal, figura 6.16, se aprecia que el asentamiento mayor ocurre al centro de la corona y tiene un valor de 12.44 cm, por lo que la pérdida de bordo libre debido al sismo es de tal magnitud. En esta sección se observa que la distribución de los asentamientos es mayor en la parte central de la corona y que de hecho sigue la configuración del cauce, además de que disminuye con la profundidad. Se nota que el cambio de pendiente en la margen izquierda tiene poca influencia en la disposición de los asentamientos den la sección longitudinal.

Los desplazamientos horizontales instantáneos en la dirección del eje del río, la más desfavorable para la estructura y en la cual se aplicó el SMC al 100%, están contenidos en la figura 6.17.a. En ella se observa que los desplazamientos horizontales en la sección transversal son mayores en el talud de aguas abajo y cerca de la corona y disminuyen con la profundidad. El desplazamiento máximo tiene una magnitud de 18.89 cm.

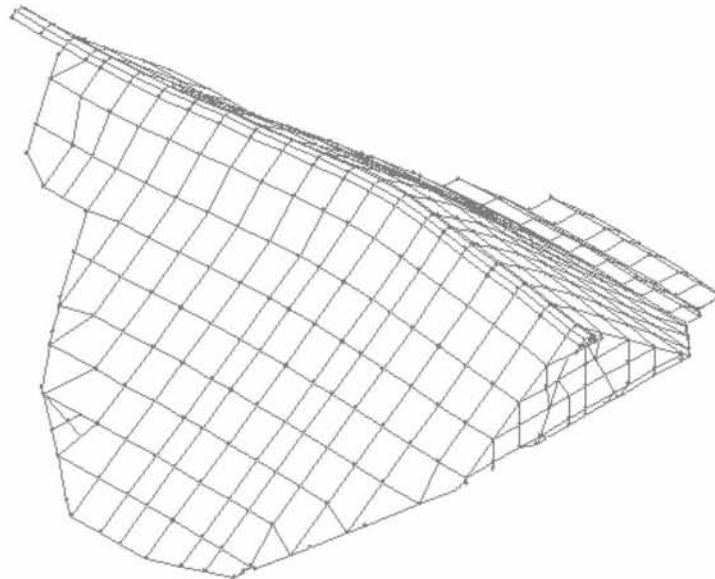
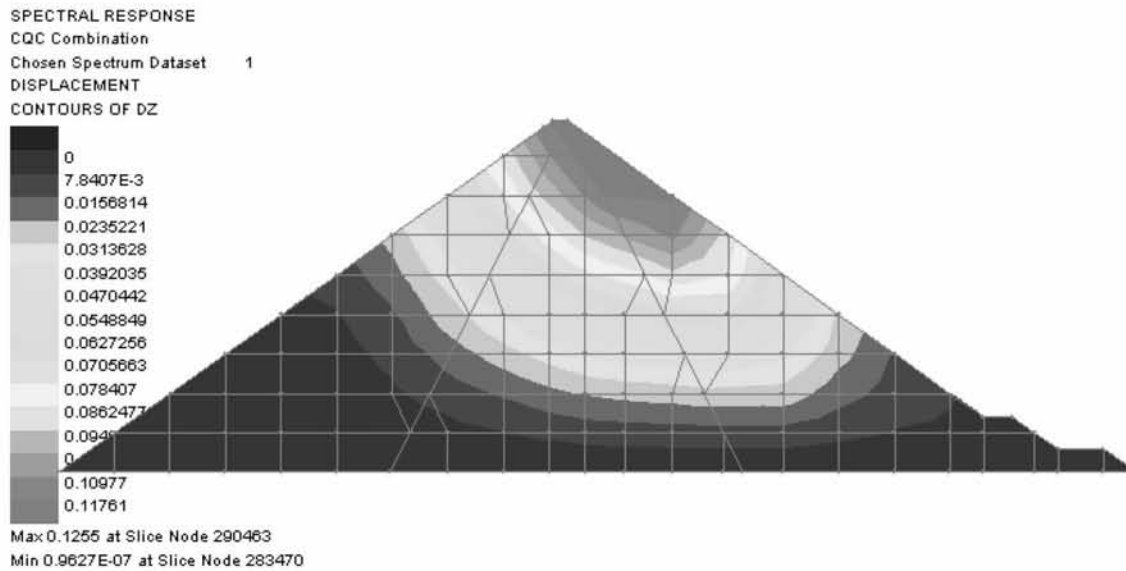


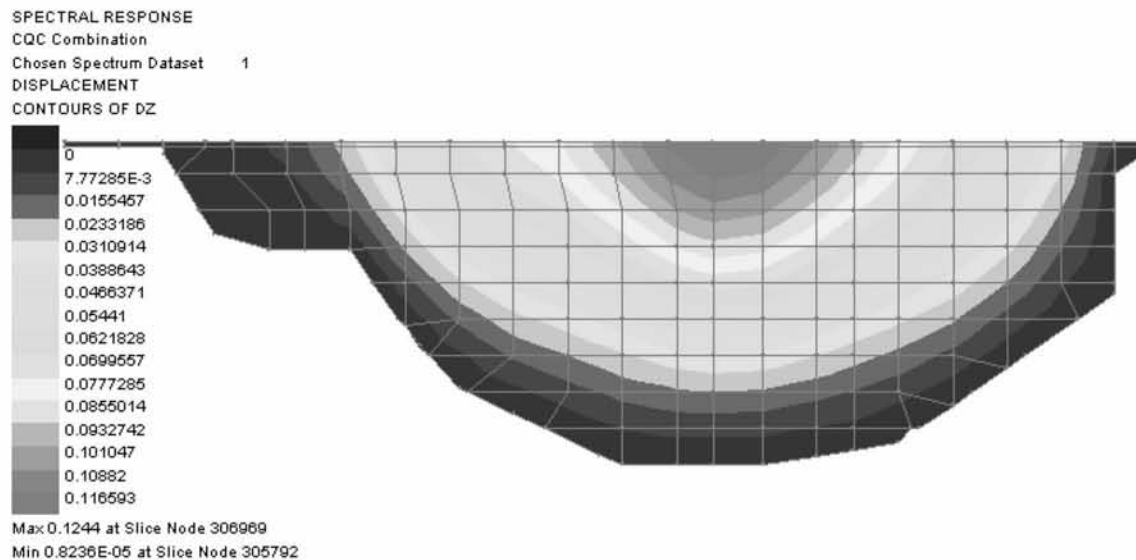
Figura 6.15. Configuración deformada de la cortina debida al SMC.

La figura 6.17.b muestra que en la sección longitudinal los desplazamientos en dirección del eje de la cortina son mayores hacia centro del cauce y en la parte superior de la cortina,

cerca de la corona. El valor más alto es de 19 cm, en concordancia con el de la sección transversal. La distribución de los desplazamientos también sigue el perfil del cauce, aunque en este caso el máximo no se presenta en la corona sino ligeramente abajo.

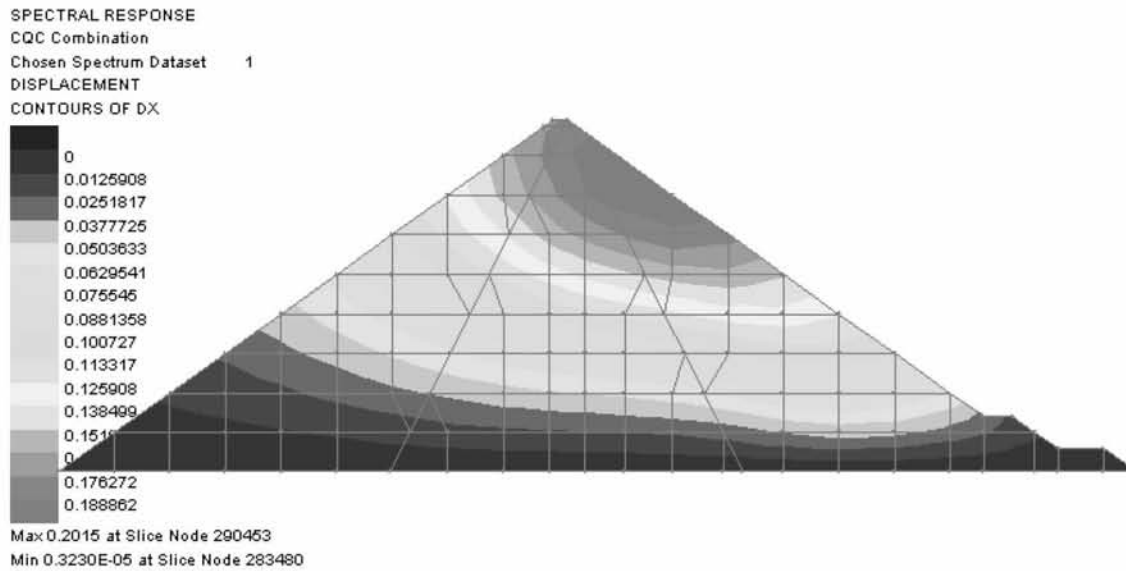


(a) sección transversal

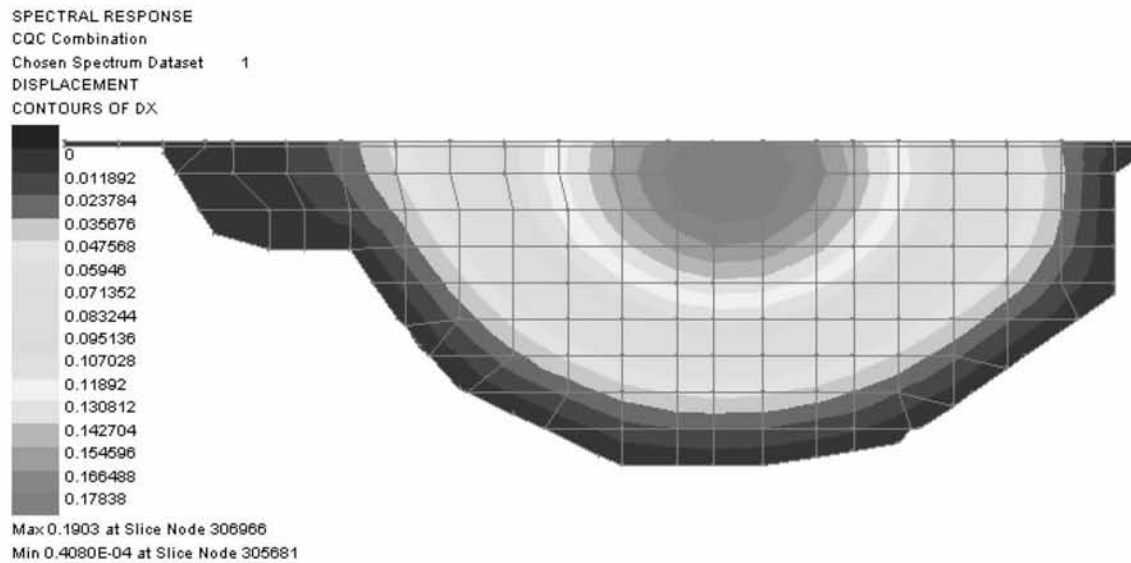


(b) sección longitudinal

Figura 6.16. Asentamientos en las secciones máximas (a) transversal y (b) longitudinal debidos al SMC. Magnitudes en m.



(a) sección transversal



(b) sección longitudinal

Figura 6.17. Desplazamientos horizontales en el eje de la cortina (eje X) en las secciones máximas (a) transversal y (b) longitudinal debidos al SMC. Magnitudes en m.



## 6.6. MEDICIONES DE CAMPO

La información que a continuación se presenta fue obtenida del Informe 841.01- 078/06, P. H. El Cajón, Nay. Séptimo Informe de Comportamiento, de la Subgerencia de Seguridad de Estructuras de CFE. Dicho documento contiene los resultados de las mediciones en el sistema de auscultación del proyecto hasta julio de 2006, previo al primer llenado, cuando la mayor parte del terraplén había alcanzado la cota de desplante del parapeto (392 m) y se había colocado el 99% del material.

### 6.6.1. Módulos elásticos

Los módulos elásticos se obtuvieron a partir de las deformaciones registradas por los niveles hidráulicos de asentamientos y los inclinómetros colocados en el cuerpo del terraplén a lo largo de tres secciones transversales, de las cuales una es la sección máxima (L-21). Los valores obtenidos muestran gran dispersión debido a la diferente ubicación de los puntos de medición, ya que cada uno de ellos está sujeto a un nivel de esfuerzos distinto. En consecuencia, lo que a continuación se presenta son los intervalos representativos de los valores que tomaron los módulos de cada material, sin especificar las posiciones que les corresponden dentro del terraplén. Estos resultados deben considerarse con criterio, ya que existen algunas incertidumbres implícitas al cálculo. El procedimiento de cálculo exacto no se menciona en el informe referido.

Material	Módulo E (MPa)
3B	85 – 100
T	106 – 122
3C	46 – 72

Tabla 6.4. Módulos elásticos representativos en el terraplén al 26 de junio de 2006 (CFE, 2006).

La variación de los módulos tiende a disminuir con el tiempo debido al acomodo y consolidación de los materiales del terraplén, el valor se vuelve asintótico conforme disminuye la relación de vacíos en el material y se alcanza un equilibrio.

### 6.6.2. Asentamientos

Los desplazamientos verticales en el interior del terraplén se miden por medio de niveles hidráulicos de asentamiento e inclinómetros, los cuales se ubicaron en tres secciones transversales, de las cuales una es la máxima. Los niveles de asentamiento se instalaron a tres elevaciones distintas: 245, 290 y 330 m.

Los asentamientos máximos registrados con los niveles hidráulicos de asentamiento en los diferentes materiales de la cortina ocurren en la sección máxima, aproximadamente a la elevación 290 m, casi al centro de la cortina. En la tabla 6.5 se muestra el resumen de los valores máximos representativos para cada tipo de material, obtenidos a las elevaciones instrumentadas.



Material	Asentamiento (cm)
3B	44.4
T	82.8
3C	69.9

**Tabla 6.5. Asentamientos máximos en los niveles hidráulicos de asentamiento al 26 de junio de 2006 (CFE, 2006).**

Los asentamientos medidos con inclinómetros registran un valor máximo de 80.60 cm a la elevación 310.95 m en el material T de la sección transversal máxima.

Los desplazamientos verticales registrados con los inclinómetros y los niveles hidráulicos son congruentes entre sí. Con base en ellos y en los medidos por medio de las referencias topográficas en las superficies del terraplén fue posible elaborar curvas de igual asentamiento en las secciones transversales instrumentadas. La figura 6.18 muestra las curvas correspondientes a la sección máxima. Se observa que la zona que sufrió mayor asentamiento se encuentra hacia la parte media de la altura de la cortina dentro del material T, aproximadamente a la elevación 300, con un valor entre 80 y 85 cm.

## 6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

### MÓDULOS DE ELASTICIDAD

De acuerdo con los resultados del análisis efectuado de la etapa de construcción de la cortina, los módulos de elasticidad alcanzan valores de hasta 107, 120 y 55 MPa para los materiales 3B, T y 3C, respectivamente. Mientras que los estimados como representativos por CFE a partir de las mediciones de campo registran valores máximos de 100, 122 y 72 MPa, para los mismos materiales. Las incertidumbres inherentes tanto a la evaluación de los módulos de diseño de los enrocamientos, como al proceso constructivo, al igual que las que corresponden al procedimiento para estimar los módulos elásticos en campo; además de la heterogeneidad del material y la irregularidad en el perfil de la boquilla evitan que los cálculos de los módulos analíticos y los de campo sean precisos. A partir de ello y de que las diferencias entre las magnitudes máximas de los módulos calculados por medio del análisis de elementos finitos y de los estimados de mediciones instrumentales son pequeñas, se considera que el análisis fue satisfactorio.

Los valores mínimos de los módulos presentan una mayor dispersión, ya que los analíticos resultaron de 54, 43 y 28 MPa en los materiales 3B, T y 3C, respectivamente, en tanto que los estimados instrumentalmente fueron de 85, 106 y 46 MPa. La diferencia en estos resultados puede deberse a que las mediciones en campo son puntuales en ciertas zonas (secciones horizontales y transversales de la cortina) que no abarcan la totalidad del terraplén, mientras que los módulos analíticos corresponden a los esfuerzos promedio evaluados en cada capa del enrocamiento.



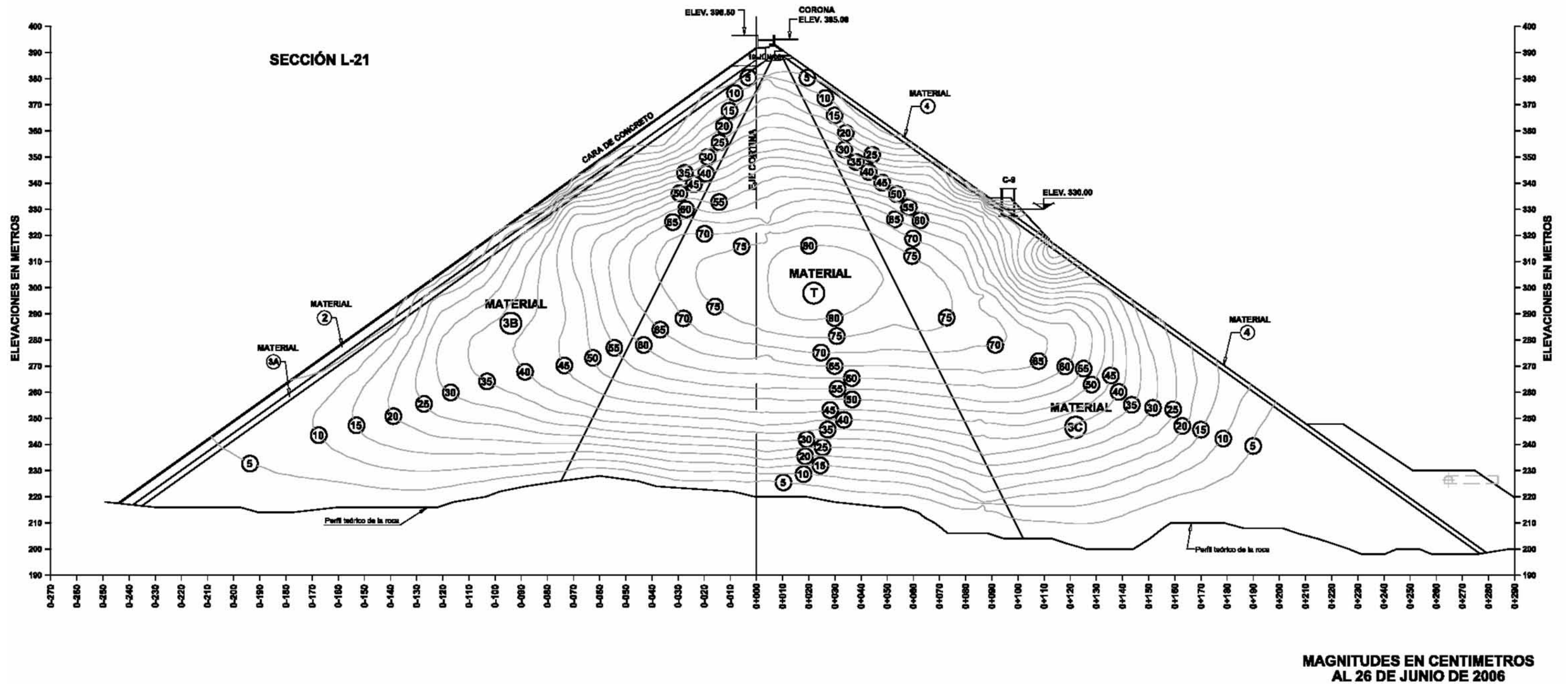


Figura 6.18. Curvas de igual asentamiento en la sección máxima de la cortina, a partir de las mediciones de niveles hidráulicos de asentamiento, inclinómetros y referencias topográficas superficiales (CFE, 2006).



## DESPLAZAMIENTOS

Los asentamientos mostrados en figura 6.10.1 y las curvas de igual asentamiento presentadas por CFE (2006) de la figura 6.18 exhiben gran similitud en cuanto a forma y magnitud. En ambos casos los desplazamientos se concentran en la zona central de la sección máxima (material T), a media altura de la presa y ligeramente hacia aguas abajo del eje de la misma. También se observa que en las dos figuras los asentamientos son medianos en el material 3C y menores hacia el 3B, por lo que los contornos de igual asentamiento siguen curvas con pendientes hacia aguas abajo.

El asentamiento máximo calculado al final de la construcción es de 98 cm y ocurre aproximadamente a la elevación 305 m, ligeramente aguas abajo del eje de la cortina. Por otro lado, el asentamiento máximo medido es de 82.8 cm a la elevación 290 m, además de que de las curvas de la figura 6.18 se infiere que el asentamiento más fuerte se presenta aproximadamente a la elevación 300, con un valor entre 80 y 85 cm. Así, la diferencia entre ambos valores de desplazamiento es tan solo de 15 cm, lo cual se considera un resultado adecuado. La ligera discrepancia en cuanto a magnitud es consecuencia de la diferencia entre las propiedades (rigideces) de los materiales "teóricos" y los reales, además de la forma irregular que sigue el perfil del cauce en la zona de la boquilla, la cual también afecta la forma de los contornos de asentamiento. Cabe mencionar que el perfil dibujado en la figura 6.18 que se señala como teórico encuentra su justificación precisamente en la distribución de las curvas estimadas con las mediciones instrumentales. Se reitera que dicho perfil no fue modelado en el análisis y por tanto es una fuente de 'error' en los resultados del estudio.

Del análisis al final del primer llenado se obtiene un asentamiento máximo de 42 cm aproximadamente a la mitad de la losa, lo cual para un total de alrededor de 300 m de longitud representa una flexión que el concreto armado es capaz de soportar sin que se produzcan grietas significativas que afecten la funcionalidad o seguridad de la cara de concreto.

En el terraplén, el llenado sólo afecta a las zonas de los materiales 3B y T, lo que concuerda con la condición de que la resultante del empuje hidrostático llegue a la cimentación en un punto aguas arriba del eje de la cortina.

La mayor parte del asentamiento ocurre durante la etapa constructiva, lo cual contribuye a la posibilidad de que los desplazamientos posteriores sean menores ya que los vacíos en el enrocamiento son menores y su rigidez es mayor, probablemente cerca de su valor de 'equilibrio'. Los desplazamientos ocasionados por la aplicación de la acción dinámica son mínimos.

## 6.8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se llevó a cabo el análisis por el método de elementos finitos de la cortina de enrocamiento con cara de concreto de la C.H. El Cajón, Nay. con el fin de evaluar los desplazamientos y esfuerzos producidos por los procesos de construcción y primer llenado y como consecuencia de la ocurrencia de un evento sísmico, el Sismo Máximo Creíble.

El modelo de elementos finitos simuló el cuerpo del terraplén con sus tres principales materiales, el 3B, el T y el 3C, ya que se consideró que ellos son los que determinan de manera más importante el comportamiento de la estructura. La cara de concreto se modeló como una losa continua sin las juntas que existen en la realidad entre los paneles que la



componen. La cimentación se modeló como rígida por consistir de roca resistente. Las propiedades de los materiales se supusieron elásticas y se utilizaron los valores propuestos por CFE.

El procedimiento de análisis fue el presentado por Clough y Woodward (1967) de simulación de la construcción incremental de un terraplén. Además se consideró que las propiedades de rigidez de los enrocamientos variaban de manera no lineal respecto de los esfuerzos, de acuerdo con la expresión propuesta por Romo et al (2002) (ec. 6.1). El análisis de la construcción y el primer llenado se efectuó por etapas, dividiendo la altura del terraplén en 9 capas y la losa de concreto en 3 secciones. Posteriormente se aplicó al modelo la excitación dinámica sugerida por CFE, con las propiedades materiales heredadas de las dos fases anteriores.

El software utilizado para el análisis de elementos finitos fue el paquete LUSAS 13.8 con el cual se efectuaron las corridas para el cálculo de los desplazamientos y esfuerzos en el terraplén. Sin embargo, por las limitaciones que para este tipo de análisis tiene dicha aplicación fue necesario auxiliarse del lenguaje Matlab de programación para el cálculo de los módulos elásticos de los materiales de acuerdo con la relación de variación no lineal.

Los resultados de desplazamientos al final de la construcción revelan que los mayores asentamientos ocurren en la parte central de la sección máxima (material T), aproximadamente a la mitad de la altura de la presa y ligeramente aguas abajo del eje de la misma, lo cual concuerda con los desplazamientos medidos por el sistema de auscultación instalado por CFE. Los contornos de igual asentamiento medidos y calculados muestran gran similitud en forma y magnitud. El asentamiento máximo medido es de 82.8 cm a la elevación 290 m, mientras que el calculado fue de 98 cm a la elevación 305 m.

La distribución de los asentamientos después del primer llenado es similar a la de la construcción, con un corrimiento hacia aguas arriba debido a la aplicación de las fuerzas hidrostáticas sobre la losa. El asentamiento máximo de la losa debido al llenado es de 42 cm y ocurre a la mitad de la longitud de la losa, con lo cual no se considera que puedan desarrollarse grietas significativas en la misma. El sismo produce asentamientos de casi 13 cm y desplazamientos horizontales de casi 19 cm, ambos cerca de la corona y a la mitad de la longitud de la cortina. Los mayores asentamientos ocurren durante la fase de construcción, con lo que se espera que los desplazamientos posteriores sean menores.

Los resultados del análisis proporcionaron valores que en general son muy cercanos a los medidos por medio de la instrumentación colocada en la presa. Se considera que una mejor estimación de las propiedades de los materiales previa al diseño permitirá obtener mejores resultados con lo que se podrán realizar diseños más eficientes en el futuro, teniendo siempre cuidado de no sobreestimar dichas propiedades. Así mismo, es conveniente que el análisis se efectúe tomando en cuenta la variación de la rigidez con el nivel de esfuerzos para cada elemento de manera individual, es decir, utilizando no el promedio del esfuerzo octaédrico para cada capa, sino un esfuerzo octaédrico y el módulo elástico correspondiente para cada elemento. Con ello, probablemente se refinarían los resultados en cuanto a la distribución de esfuerzos y desplazamientos.

A pesar de lo anterior, el análisis realizado resultó bastante satisfactorio ya que haciendo uso de un software comercial no especializado, que en consecuencia impuso algunas limitaciones, fue posible calcular las variables de interés y se obtuvieron valores que concuerdan con los que se presentan en la estructura real. Así, se reconoce que con el uso de herramientas adecuadas y accesibles se puede llevar a cabo un análisis que arroje



resultados válidos para el diseño de este tipo de estructuras. Esto mientras se incluya de forma apropiada el comportamiento de los materiales y el proceso de construcción incremental. Con base en los resultados de este procedimiento se concluye que los desplazamientos calculados tienen magnitudes que no representan riesgo para la seguridad y funcionalidad de la estructura.

## Capítulo 7

### CONCLUSIONES

En el diseño de presas, el estudio de los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos juega un papel muy importante, ya que un análisis de estabilidad no está completo si no se cuenta con una evaluación del comportamiento durante la construcción y el primer llenado de la presa. En el estudio del comportamiento de la presa durante su construcción los desplazamientos son una cantidad de especial interés, ya que éstos son fácilmente comparables con mediciones en campo, con lo cual es posible calibrar el modelo y/o verificar el diseño.

La elección del tipo de presa dependerá de que el costo total esperado para la obra sea el mínimo, incluyendo el costo de los daños potenciales. Se toman en cuenta tanto la función y la seguridad de la obra, así como otros factores como son las condiciones de la boquilla, la cimentación y el vaso, la geología, el clima y la sismicidad del lugar. Generalmente es necesario realizar diseños preliminares utilizando varios tipos de presa antes de llegar a la alternativa definitiva. Ésta se obtendrá, entre otros, de la comparación de los tiempos y costos de ejecución y de los recursos que cada opción requiera. Las presas de enrocamiento con cara de concreto han mostrado algunas ventajas sobre las de otro tipo ya que su construcción puede llevarse a cabo en casi cualquier tipo de clima, lo que favorece la reducción del tiempo de ejecución de la obra. Además, las propiedades de resistencia y peso de los enrocamientos permiten que los taludes exteriores tengan mayor pendiente, reduciendo los volúmenes de material colocado. Adicionalmente el comportamiento observado en presas de este tipo ha sido satisfactorio.

Para elaborar un análisis de este tipo de obras es necesario primero determinar las propiedades de resistencia y deformabilidad de los materiales a utilizar para construir el terraplén. En el caso de presas de enrocamiento, el comportamiento del material se ve afectado por su composición mineralógica, graduación, tamaño y forma de sus partículas, la dureza de la roca madre y las condiciones de esfuerzo, entre otros factores. Al estar formados los enrocamientos de partículas angulosas a subangulosas obtenidas por voladura de una masa rocosa o partículas redondeadas a subredondeadas de origen aluvial, las propiedades de las partículas pueden ser muy variables. Además, la rotura de granos en los enrocamientos representa un fenómeno particular que hace más complejo el estudio de sus propiedades, ya que ésta ocurre aún para niveles de esfuerzo bajos. El grado de ruptura depende de la granulometría del material, de la resistencia de las partículas y del nivel de esfuerzos.

Para obtener las propiedades mecánicas de los enrocamientos es necesario ensayarlos como sucede con cualquier otro material. Sin embargo, las dimensiones de sus partículas no permiten que se les pruebe a escala real en equipos de laboratorio convencionales. Por ello, se utilizan diversas técnicas de escalamiento de las granulometrías del material para poder ensayarlos en equipos de tamaño razonable, como la traslación de su curva granulométrica o la utilización de la fracción de la muestra de diámetro menor que uno determinado. Es necesario tomar en cuenta los efectos de escala que esto produce, además de cuidar la representatividad del material de laboratorio respecto del de campo. En los estudios realizados por Marachi et al (1972) de los efectos de escala en enrocamientos, se encontró que la relación de esfuerzos a la falla y el ángulo de fricción son mayores en especímenes pequeños, mientras que la compresibilidad de los mismos disminuye. Así mismo, el ángulo de fricción aumentó y la compresibilidad disminuyó al ensayar materiales con partículas de



menor tamaño máximo. En general, las partículas redondeadas exhiben menor compresibilidad que las angulosas.

Para la determinación de las propiedades de resistencia y compresibilidad de los enrocamientos existen varios equipos disponibles, tanto de campo como de laboratorio. Uno de los aparatos de mayores dimensiones es la cámara triaxial gigante T-113-25, creada por Marsal para ensayar muestras de 113 cm de diámetro y 250 cm de altura a presiones confinantes de hasta  $25 \text{ kg/cm}^2$ , actualmente en desuso. Otro equipo de dimensiones más prácticas es la cámara triaxial TC-30-75 para especímenes de 30 cm de diámetro y 75 cm de altura bajo presiones confinantes que varían de 0 a  $75 \text{ kg/cm}^2$ . Las pruebas de campo consisten más comúnmente en pruebas de placa y en la construcción de terraplenes de prueba donde se estudian el proceso de compactación del material y las propiedades que resultan.

Entre los estudios que se han realizado para evaluar las propiedades de los enrocamientos, los efectuados por Marsal indican que algunos materiales blandos extraídos de cantera tuvieron mayor deformabilidad y menor resistencia que otros de origen aluvial. La resistencia al corte fue menor en los especímenes poco compactos o sueltos y en los enrocamientos con granulometría uniforme sometidos a esfuerzos elevados, y la compresibilidad disminuyó al aumentar el esfuerzo aplicado. El humedecimiento de los materiales de enrocamiento contribuye a su compresibilidad. Con base en estos y otros resultados, Alberro y Gaziev (2000) proponen una herramienta analítica para relacionar la resistencia al corte de enrocamientos con algunas de sus propiedades índice y una relación empírica para evaluar el módulo de deformación a partir de pruebas de compresión unidimensional.

Para la realización del análisis de esfuerzos deformaciones y desplazamientos en presas se utiliza en la actualidad el método del elemento finito, ya que ha probado una gran utilidad. Éste consiste básicamente en la idealización de un continuo por medio de un arreglo de elementos discretos (elementos finitos) interconectados por sus puntos nodales. Los elementos suelen ser triángulos o cuadriláteros, para problemas bidimensionales, y pentaedros o hexaedros, para problemas tridimensionales. El modelo debe definirse de manera precisa, incluyendo las discontinuidades y las condiciones de frontera del problema. La precisión del análisis dependerá del número y tamaño de elementos finitos utilizados para modelar el problema.

En el método del elemento finito basado en desplazamientos, éstos se calculan primero, y los esfuerzos y deformaciones son cantidades secundarias que se obtienen a partir de ellos. La precisión del análisis depende del tamaño y número de elementos y de la naturaleza de la aproximación de los desplazamientos. Primero se construyen las ecuaciones de los elementos con uso de la relación constitutiva y se obtienen sus rigideces, posteriormente se ensamblan las ecuaciones globales del sistema. La matriz global de rigideces se obtiene por la superposición de las rigideces de los elementos. Al resolver el sistema de ecuaciones resultante se obtienen los desplazamientos nodales y se calculan los esfuerzos y las deformaciones. El método permite considerar el comportamiento no lineal de los materiales, aplicando las condiciones de frontera de forma incremental, cambiando la matriz constitutiva de acuerdo con los esfuerzos y deformaciones alcanzados.

En el análisis del comportamiento de una presa durante su construcción, el procedimiento utilizado debe tomar en cuenta que la construcción del terraplén se lleva a cabo por incrementos, ya que se ha probado que la aplicación directa de las cargas gravitacionales en la estructura completa es generalmente equívoca. Para considerar este proceso incremental

en el análisis de elementos finitos es necesario dividir el terraplén en capas horizontales de espesor mayor al real, de manera que el modelo quede formado por unas cuantas capas. El análisis consiste básicamente en una sucesión de análisis, uno para cada capa, donde se aplica la carga gravitacional únicamente a la nueva capa y los esfuerzos y desplazamientos se heredan y acumulan para la siguiente etapa. Los elementos ya construidos van variando sus propiedades de acuerdo con los esfuerzos a los que se ven sometidos por su profundidad dentro del terraplén. Los elementos que no han sido construidos están presentes en el modelo desde el inicio pero permanecen con rigideces muy bajas hasta que son construidos, de manera que tengan efecto nulo sobre el resto del modelo.

El proceso descrito considera que las deformaciones calculadas no tienen efecto sobre la geometría del sistema y utiliza las dimensiones no distorsionadas de los elementos en cada etapa de análisis. Cuando este no sea el caso, los desplazamientos de la frontera superior de la última capa construida deben reiniciarse a cero para el siguiente incremento, ya que en la realidad éstos son compensados con la colocación de más material. El efecto del material adicional es poco significativo y se considera que es absorbido por la incertidumbre de la densidad real del material.

El modelo constitutivo que se elija para describir el comportamiento del material es un factor importante para un análisis satisfactorio. Éste debe modelar de la forma más aproximada posible el comportamiento esfuerzo-deformación de los materiales. Entre los más utilizados en el caso de enrocamientos se encuentran el elástico lineal y algunos modelos elásticos no lineales como el K-G y el hiperbólico, para tomar en cuenta la variación de las propiedades de los materiales respecto del nivel de esfuerzos. Es sencillo incluir en el procedimiento de elementos finitos descrito los efectos no lineales de las propiedades de los materiales.

Además de la construcción, interesa el comportamiento durante el primer llenado del embalse, por los efectos que la carga del agua produce sobre y dentro de la estructura. En presas de enrocamiento con cara de concreto se debe considerar únicamente la aplicación incremental de la carga hidrostática en el mismo número de capas que la construcción, preferentemente. El proceso requiere que nuevamente se acumulen los esfuerzos y los desplazamientos. Los esfuerzos y las propiedades de los materiales al inicio del análisis son los heredados del final de la construcción. También es necesario evaluar la respuesta de la presa ante una acción sísmica por medio de los métodos mencionados, de los cuales el más utilizado es el del elemento finito.

El capítulo final de este trabajo presenta el análisis por el método de elementos finitos efectuado para la cortina de enrocamiento con cara de concreto de la C.H. El Cajón, Nay. Con él se evaluaron los desplazamientos y esfuerzos producidos por la construcción y el primer llenado y como consecuencia de la ocurrencia de un evento sísmico, el Sismo Máximo Creíble. Para ello se modeló el cuerpo del terraplén con los tres principales materiales que lo componen: el 3B, el T y el 3C. Se consideró que estos son los que influyen de manera más importante en el comportamiento de la estructura ya que los restantes ocupan un volumen mínimo de la misma. La cara de concreto se idealizó como una losa continua sin tomar en cuenta las juntas entre los paneles que la componen. La cimentación se consideró rígida ya que está formada por roca resistente. Las propiedades de todos los materiales se supusieron elásticas y se utilizaron los valores propuestos por CFE.

El análisis se efectuó según el procedimiento propuesto por Clough y Woodward (1967) simulando la construcción incremental del terraplén. Las propiedades de rigidez de los enrocamientos se describieron según la expresión propuesta por Romo et al (2002), con una variación no lineal respecto de los esfuerzos. Las fases de construcción y primer llenado se

analizaron por etapas, dividiendo el terraplén en 9 capas y la losa de concreto en 3 secciones. Finalmente se realizó el análisis dinámico con el sismo máximo creíble determinado por CFE, con las propiedades materiales heredadas de las dos fases anteriores. El programa de elementos finitos utilizado fue el software LUSAS 13.8, con el cual se calcularon los desplazamientos y esfuerzos en el terraplén para cada una de las etapas. Para los cálculos de los módulos elásticos correspondientes al estado de esfuerzos obtenido con LUSAS se utilizó el lenguaje Matlab de acuerdo con la variación no lineal propuesta por Romo et al (2002).

Los resultados del análisis indican que al final de la construcción los mayores asentamientos se presentan en la parte media de la sección máxima (material T), ligeramente aguas abajo del eje de la misma debido a la menor rigidez del material en esa zona, en concordancia con las mediciones registradas por el sistema de auscultación de la presa. Existe gran similitud en la forma y magnitud de los contornos de igual asentamiento medidos y los calculados. El asentamiento máximo calculado fue de 98 cm a la elevación 305 m, mientras que el medido fue 82.8 cm a la elevación 290 m. El primer llenado de la presa provoca un corrimiento de los asentamientos totales hacia aguas arriba. Los asentamientos debidos únicamente al llenado muestran una deformada que tiene un valor máximo de 42 cm a la mitad de la altura de la losa, con lo que no se considera que se desarrollen grietas significativas en la misma. El asentamiento máximo debido al SMC es de 13 cm y el desplazamiento horizontal máximo de 19 cm, ambos cerca de la corona y a la mitad de la longitud de la cortina.

El análisis realizado arrojó resultados satisfactorios que concuerdan con las mediciones de campo reportadas por CFE. Tanto los desplazamientos calculados como los medidos indicaron que los mayores asentamientos ocurrieron durante la fase de construcción del terraplén, con lo que se espera que los desplazamientos posteriores sean menores. Los desplazamientos calculados tienen magnitudes que no representan riesgo para la seguridad y la funcionalidad de la estructura.

La correcta estimación de las propiedades de los materiales es crucial en este tipo de análisis y permite obtener resultados más cercanos a lo que sucede en la realidad, con lo que es posible mejorar los diseños futuros. En este proceso es importante no sobreestimar las propiedades de los materiales y trabajar siempre del lado de la seguridad. Lo idóneo en un análisis de este tipo es que éste tome en cuenta la variación no lineal de la rigidez para cada elemento de manera individual, de acuerdo con el estado de esfuerzos en el mismo elemento, a diferencia de como se efectuó en este trabajo al utilizar el promedio del esfuerzo octaédrico para cada capa. Así se obtendrán mejores resultados para la distribución de los esfuerzos y los desplazamientos. Cabe mencionar que lo anterior es posible con algunos programas no comerciales especializados en la materia.

A partir de los resultados del análisis realizado y de su comparación con las mediciones en campo, se puede afirmar que éste reproduce satisfactoriamente el comportamiento de la presa al ser construida. El análisis se llevó a cabo con el uso de un software comercial no especializado, complementado con algunos procesos adicionales debido a que guardaba ciertas limitaciones. Así, se calcularon las variables de interés y se obtuvieron valores que concuerdan con los que se presentan en la estructura real. Se reconoce entonces que con el uso de herramientas adecuadas y accesibles es posible llevar a cabo un análisis que arroje resultados válidos para el diseño de estructuras tan importantes como son las de este tipo. Esto mientras se incluya de forma correcta el comportamiento de los materiales constitutivos y el proceso de construcción incremental.



## REFERENCIAS

- Alberro, J., Gaziev, E. (2000) Resistencia y Compresibilidad de los Enrocamientos, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Benassini, A. (1975), "*Tipos de cortina*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 35-43.
- Bertram, G.E. (1973) "*Field tests on compacted rockfill*", Embankment Dam Engineering, Casagrande Volume, Wiley & Sons, N.Y., pp. 109-200.
- CFE (2002), P. H. El Cajón, Nay. Estudios geotécnicos en el banco El Vertedor y terraplén de prueba, marzo 2002, Informe No. 02-31-SGM/S, Subgerencia de Geotecnia y Materiales.
- CFE (2003), Planos BPE del P.H. El Cajón, Nay., *CD-C021-PL-040-R03, Obras de Contención, Cortina – Zonificación de materiales.*
- CFE (2006), P. H. El Cajón, Nay. Séptimo Informe de Comportamiento, julio 2006, Informe 841.01-078/06, Subgerencia de Seguridad de Estructuras de CFE.
- Chopra, A.K. (1966), "*Earthquake effects of dams*", Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, citado en Kramer (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, EU.
- Clough, R. y Woodward, R. (1967), "*Analysis of Embankment Stresses and Deformations*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 93, No. SM4, pp. 529-549.
- Colonetti, G. (1961), "*Sur l'interpretation des deformations plastiques comme phénomènes héréditaires*", Phénomènes de relaxation et de fluage en rhéologie non-linéaire, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, pp. 147-162, citado por Alberro, J., Gaziev, E. (2000) Resistencia y Compresibilidad de los Enrocamientos, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Cooke, B. (2000), "*The high CFRD dams*", Concrete Face Rockfill Dams, J. Barry Cooke Volume, Beijing, Symposium on Concrete Face Rockfill Dams, China, pp. 1-4.
- Dakoulas (1985), "*Contributions to seismic analysis of earth dams*", Ph.D. Dissertation, Renssalaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y., EU, citado en Kramer (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, EU.
- Dolen, T. (1988), "*Material and mixture proportion concepts for roller compacted concrete dams*", Advanced Dam Engineering, R.B. Jansen ed., Van Nostrand Reinhold, EU.
- Duncan, J. (1992), "*Static stability and deformation analysis*", Memorias de la Conferencia Especial sobre la Estabilidad y Desempeño de Taludes y Terraplenes, Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 1, pp. 222-266.
- Duncan, J. M. y Chang, C. Y. (1970), "*Nonlinear analysis of stress and strain in soils*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 96, No. SM5, pp. 1629-1653.
- Flores Berrones, R. ed. (2001), Geotecnia en Ingeniería de Presas, IMTA, México.
- Fumagalli, E. (1969), "*Tests of cohesionless materials for rockfill dams*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 95, No. SM1, pp 313-330.
- Fumagalli, E. et al (1970), "*Laboratory tests on material and static models for rockfill dams*", Memorias del 10o Congreso Internacional sobre Grandes Presas, Montreal, vol. 1, pp. 531-551.

- Gazetas, G. (1987), "*Seismic response of earth dams; some recent developments*", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 6, No. 1, pp 3-47, citado por Kramer (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, EU.
- Golze(1977), Handbook of Dam Engineering, Van Nostrand Reinhold, EU.
- Goodman, L. E. y Brown, C. B. (1963), "*Dead load stresses and the instability of slopes*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 89, No. SM3.
- Griffith, A. A. (1921) "*The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Philosophical Transactions", Royal Society, Serie A, Vol. 221, Londres, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Hatanaka, M. (1952), "*3-dimensional consideration on the vibration of earth dams*", Journal of the Japanese Society of Civil Engineers, Vol. 37, No. 10, citado por Kramer (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, EU.
- Hill (1960), "*The Mathematical Theory of Plasticity*", Oxford University Press, UK, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Holtz y Gibbs (1956), "*Triaxial tests on pervious gravelly soils*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol.82, No. SM1, citado por Parkin, A.K. (1991) "*Rockfill modelling*", Advances in Rockfill Structures, Maranha Das Neves ed., NATO ASI Series, The Netherlands, pp. 35-51.
- Jaime, A. (1977), Cámara Triaxial TC-30-75, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Joisel, A. (1962), La rupture des corps fragiles au cours de leur fragmentation, Centre d'Etudes et Recherchas de l'Industrie des Liants Hydrauliques, Publicación Técnica No. 127, Paris, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Kerisel, J. (1985), "*The history of geotechnical engineering up until 1700*", Memorias del 11o Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones, San Francisco, E.U., pp. 3-93, citado por Penman, A.D., "*Rockfill for embankment dams*", Volumen Marsal, SMMS, México, pp. 303-327.
- Kondner, R. L. (1963), "*Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 89, No. SM1, pp. 115-143.
- Kramer (1996), Geotechnical Earthquake Engineering, Prentice Hall, EU.
- Kulhawy, F. H. y Duncan, J. (1972), "*Stress and Movements in Oroville Dam*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 98, No. SM7, pp. 653-665.
- Lowe, J. (1964), "*Shear strength of coarse embankment dam materials*", Memorias del 8vo Congreso Internacional sobre Grandes Presas, Edinburgh, pp. 745-761.
- Marachi et al (1969), "*Strength and deformation characteristics of rockfill materials*", Informe No. TE-69-5, Department of Civil Engineering, University of California Berkeley, EU, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Marachi et al (1972), "*Evaluation of Properties of Rockfill Materials*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 98, No. SM1, pp 95-114.

- Marsal (1965), Investigación sobre el comportamiento de los suelos granulares y muestras de enrocamiento, Publicación de la Comisión Federal de Electricidad, México, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Marsal, R. (1969), "*Particle Breakage in Coarse Granular Soils*", VII Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones, Sesión Especial No. 13, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, citado por Marsal (1975) "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Marsal, R. (1971), Suelos granulares: Modelo estadístico, teoría de falla y relaciones esfuerzo-deformación, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Marsal, R. (1973), "*Mechanical properties of rockfill*", Embankment Dam Engineering, Casagrande Volume, Wiley & Sons, N.Y., pp. 109-199.
- Marsal, R. (1975), "*Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 221-267.
- Marsal, R. J. y Ramírez, L. (1967), "*Performance of El Infiernillo Dam 1963-1966*", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, vol. 93, No. SM4, pp. 265-298.
- Mononobe, H. A. et al (1936), "*Seismic stability of the earth dam*", Memorias del 2o Congreso sobre Grandes Presas, Washington D.C., Vol 4, EU.
- Naylor, D. J. (1991a), "*Stress-strain laws and parameter values*", Advances in Rockfill Structures, Maranha Das Neves ed., NATO ASI Series, The Netherlands, pp. 269-290.
- Naylor, D. J. (1991b), "*Finite element methods for fills and embankment dams*", Advances in Rockfill Structures, Maranha Das Neves ed., NATO ASI Series, The Netherlands, pp. 291-340.
- Parkin, A.K. (1991) "*Rockfill modelling*", Advances in Rockfill Structures, Maranha Das Neves ed., NATO ASI Series, The Netherlands, pp. 35-51.
- Penman, A.D.M. (1971), "*Rockfill*", Building Research Station, Current Paper 15/71, Abril, UK.
- Potts, D. M. y Zdravkovic, L. (1999), Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering, Thomas Telford, UK.
- Reséndiz, D. (1975), "*Criterios de diseño*", Presas de Tierra y Enrocamiento, Marsal y Reséndiz ed., Ed. Limusa, México, pp. 77-81.
- Romo, P. et al (2002), Análisis sísmico de la cortina propuesta por CFE para el proyecto hidroeléctrico El Cajón, y diseños geotécnicos alternos, Informe del Instituto de Ingeniería para la Comisión Federal de Electricidad.
- SRH, CFE, II-UNAM (1976), Comportamiento de Presas Construidas en México.
- Varadarajan, A. et al (2003), "*Testing and modeling two rockfill materials*", Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, marzo 2003, pp. 206-218.