UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Del juego a la abstracción en la enseñanza del álgebra para secundaria

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MARTHA ALICIA REYES MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: MAT. SARA ALEJANDRA PANDO FIGUEROA

2008

FACULTAD DE CIENCI
UNAM

Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Reyes
   Martínez
   Martha Alicia
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   86333586

2. Datos del tutor
   Mat.
   Sara Alejandra
   Pando
   Figueroa

3. Datos del sinodal 1
   Mat.
   Concepción
   Ruiz
   Ruiz-Funes

4. Datos del sinodal 2
   Mat.
   Laura
   Pastrana
   Ramírez

5. Datos del sinodal 3
   Mat.
   Claudia
   Hernández
   García

6. Datos del sinodal 4
   Dra.
   Ana Margarita
   Guzmán
   Gómez

7. Datos del trabajo escrito
   Del juego a la abstracción
   en la enseñanza del álgebra
   para secundaria
   87 páginas
   2008

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

Autorización de voto aprobatorio

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Del juego a la abstracción en la enseñanza del álgebra para secundaria

realizado por **Reyes Martínez Martha Alicia**, con número de cuenta **086333586,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Propietario Tutor	Mat.	Sara Alejandra Pando Figueroa	Sara Figueroa.
Propietario	Mat.	Concepción Ruiz Ruiz-Funes	Concepción Ruiz
Propietario	Mat.	Laura Pastrana Ramírez	Laura Pastrana R.
Suplente	Mat.	Claudia Hernández García	
Suplente	Dra.	Ana Margarita Guzmán Gómez	Ana Guzmán

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 8 de febrero de 2008
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Índice

Introducción

El papel de la actualización docente en matemáticas es fundamental así como lo es el dominar el contenido matemático que se enseña, particularmente, los conocimientos del álgebra que nos permite, conocer parte del lenguaje matemático que promueve el desarrollo y manejo de la abstracción. Como cuestión práctica, sabemos que el álgebra es la base matemática que nos servirá para representar problemas, encontrar soluciones, ordenar y estructurar ideas, con el fin de entender ciertas aplicaciones y resultados de física, ingeniería, química, biología, economía, etc.

Por lo tanto, considero conveniente lograr que la enseñanza del álgebra debe ser flexible y amena, sin que deje de ser formal, para quienes por primera vez tienen contacto con este lenguaje, una forma de hacerlo es mediante juegos ya que el estudiante desarrollara sus propias habilidades y estrategias para aplicarlas en los juegos.

En esta tesis con el tema " Del juego a la abstracción en la enseñanza del álgebra para secundaria " el profesor de matemáticas encontrará información necesaria que servirá como herramienta para la enseñanza de su materia. Así como información para tener estrategias y reflexionar sobre lo que puede mejorar en su clase de matemáticas. A los estudiantes les ayudara a reforzar y dominar estos conocimientos.

El objetivo principal de esta tesis es dar una propuesta de trabajo en el aula de secundaria que sirva de apoyo a la enseñanza de las matemáticas, en una de sus principales ramas como lo es el álgebra, proponiendo otra forma de reafirmar lo visto en clase mediante juegos, esto con el fin de que los estudiantes pierdan miedo a enfrentarse a un lenguaje nuevo y puedan dominarlo y obtener un mejor desempeño en su aprendizaje.

Conseguir que los estudiantes conozcan y comprendan algunos temas como son los monomios y polinomios, así como desarrollar las habilidades para transformar una oración de lenguaje común al algebraico y viceversa, además de practicar las operaciones con monomios y polinomios: suma, resta, multiplicación, división, que reconozcan el grado de dichas expresiones el cual lo determinara el exponente. Así como lograr que los estudiantes desarrollen su capacidad de pensamiento abstracto, para poder enfrentarse a cualquier problema, y emplear las técnicas y métodos aprendidos dentro del aula como fuera de ella.

Finalmente, espero que este trabajo sirva de apoyo a los profesores de matemáticas de nivel secundaria para que tengan otras estrategias y logren abordar el tema, sin complicar estas didácticas ayudándole a enseñar algebra de diferente forma a la tradicional así como proporcionar a los estudiantes un curso más práctico y útil. En seguida describiré el contenido de este trabajo.

En el capítulo 1 se abordará el tema de la situación actual de la enseñanza de las matemáticas, así como los problemas que tienen los estudiantes para lograr aprender y comprender un nuevo lenguaje matemático, como es el álgebra. También se mencionarán algunas formas, métodos y estrategias que se tienen para la enseñanza-aprendizaje de dicha materia, por último, veremos como influye la abstracción de este nuevo lenguaje en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas.
En el capítulo 2 se mostrará ampliamente el lenguaje algebraico, describiendo cada una de sus partes, como son símbolos y todas las leyes que intervienen en las operaciones; suma, resta, multiplicación y división, dando algunos ejemplos con expresiones algebraicas. También se explicarán ejemplos con lenguaje común para transformarlos a una expresión algebraica.

En el capitulo 3 se desarrollará la propuesta de trabajo en el aula, mostrando dos juegos para que los estudiantes practiquen el lenguaje algebraico y las operaciones con monomios y polinomios, con el fin de reforzar todo lo aprendido. El primero juego es un memorama en el cual estará contenido el lenguaje común y su expresión algebraica. El segundo juego es una lotería en la cual estará las operaciones de polinomios y monomios.

En el capítulo 4 conoceremos un poco de los inicios del álgebra, a través de la historia, veremos algunas de las civilizaciones que incrementaron métodos, aplicando primero la aritmética para que posteriormente desarrollaran la prealgebra, así como el desarrollo de un lenguaje con el cual pudieran identificar las operaciones que hacían para plantear y resolver problemas muy diversos. Y que con el paso del tiempo lograron construir de manera sólida el lenguaje algebraico como lo conocemos actualmente. Este capítulo es una base fundamental en el conocimiento del algebra porque dentro de los conocimientos que adquirimos va implícita la forma en que se fue desarrollando la misma, así como los antepasados veían las dificultades de representar cantidades sin tener algunas herramientas, nosotros vamos conociendo el álgebra de la misma forma, paso a paso y con las herramientas que nos van dando a lo largo de nuestra formación escolar.

CAPÍTULO I

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN MÉXICO A NIVEL SECUNDARIA

1.1 Antecedentes

Las matemáticas se han empleado desde la antigüedad hasta nuestros días y su enseñanza prevalece en cada nivel educativo desde el preescolar hasta el medio superior y superior. Pero, ¿cuál es realmente la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en México?, y sobre todo ¿cómo se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje en las aulas de secundaria?

Sabemos que para entender mejor las matemáticas que se enseñan en secundaria, los estudiantes requieren de conocimientos previos para así lograr un aprendizaje significativo. La adquisición de nuevos lenguajes simbólicos como es el caso del álgebra representa un gran reto para el estudiante ya que se enfrentará a una etapa de cambios en el aprendizaje, de situaciones concretas y cotidianas a situaciones de carácter abstracto y simbólico, es decir, tendrá que hacer uso de conceptos, reglas y algoritmos para alcanzar una madurez intelectual en cuanto a la educación matemática que representa ese nivel escolar.

1.2 Contexto socio-cultural de las matemáticas en México.

Las matemáticas forman parte fundamental de la vida cotidiana de todo ser humano, ya sea académica o personalmente porque nos ayudan a desarrollar ciertas habilidades y capacidades mentales que vamos perfeccionando en el transcurso de nuestra vida.

En nuestro país existen dos tipos de instituciones que brindan educación escolar en diversos lugares, la pública y la privada. Aunque en teoría, sus técnicas y estrategias de enseñanza tendrían que responder a los mismos objetivos e intereses para lograr calidad en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, sabemos que éstos son argumentos a los que no se le da la importancia que merecen. Sin embargo, ambas tienen sistemas que van de acuerdo a lo que se establece en los planes y programas de estudio.

En lo que se refiere a la forma de impartir las clases de matemáticas a estudiantes de secundaria ya sea en escuela pública o privada, es conveniente mencionar que el contexto social y cultural que vive tanto el estudiante como el profesor repercute o afecta directamente el estilo de aprender y de enseñar esta asignatura. Esto podría ser el origen de muchas ideas y creencias erróneas en torno a la actividad matemática tanto fuera como dentro del aula por parte de quienes acuden y trabajan en ambas instituciones ya que no tienen la misma percepción.

Específicamente, en la educación secundaria la parte más importante del contenido en los programas de matemáticas es el álgebra, no porque esto sea lo más adecuado o no, si no porque ésta materia incorpora parte de la aritmética y la geometría que se aprende en primaria con ese nuevo aprendizaje del lenguaje simbólico y abstracto, el álgebra. Las matemáticas de preparatoria y de universidad requieren de un lenguaje algebraico cada vez más complejo, todo esto forma parte de la cultura matemática que se va acumulando a través del tiempo y se utilizará en un futuro.

Socialmente son importantes porque cualquier conocimiento matemático adquirido en la escuela puede ser utilizado por los estudiantes al tomar decisiones tanto en situaciones habituales como esporádicas, esto en diversos grupos que forman parte de nuestra sociedad, como la familia, los compañeros de escuela o trabajo y los amigos. Además se espera que los estudiantes adquieran seguridad al emplear las técnicas y procedimientos que han aprendido, todo esto con el fin de detectar situaciones análogas de la vida diaria en las que puedan obtener una solución al problema.

Aunque aprender matemáticas es necesario tanto cultural como socialmente ya que estimula la capacidad de razonamiento y el pensamiento del estudiante en cualquier nivel escolar porque lo lleva a tomar un sentido amplio en conocimientos, hábitos y decisiones que el ser humano adquiere por ser parte de una sociedad, debemos reconocer que no es una tarea sencilla, ya que se hace uso de un lenguaje y conocimientos específicos que muy pocas veces se encuentra relacionado con la vida cotidiana y lo que ocurre dentro de un salón de clase.

Los conocimientos matemáticos son todos aquellos que puedan brindarle a la vida del estudiante, ya sea escolar o familiar, un mayor desenvolvimiento mental activando la capacidad de razonar de manera lógica, pues la matemática requiere de un lenguaje especial, que para ella se ha estructurado a partir del álgebra.

Es necesario romper con la idea tradicional de que las matemáticas son sólo cuentas, se puede mostrar que es un lenguaje universal en donde se acepta imaginar y descubrir cosas, donde también se puede pensar y reflexionar para encontrar soluciones a problemas o bien, explicar por qué no tienen solución.

Es inevitable mencionar que al llegar al nivel medio superior, la mayoría de los estudiantes cuentan con una idea buena o mala de lo que son las matemáticas, puesto que en los tres años de secundaria se enfrentan a unas nuevas matemáticas, donde la disposición para aprenderlas se ve influida notablemente por ideas que se conciben mientras estudian la primaria, creencias y experiencias de familiares, amigos, conocidos.

Los hábitos de estudio que un adolescente adquiere para aprender, entender, asimilar y hacer matemáticas son muy diversos, desde aquellos que se ven en casa, en la calle, en el Internet, en la televisión, o escucha en la radio, hasta los que le brinda la enseñanza escolarizada, cuyo objetivo se centra muchas veces en pasar el curso de matemáticas aunque no se hayan entendido los temas. Esto llega afectar con el paso del tiempo, pues en determinado momento lo llegan a olvidar, o peor aún cuando entra al bachillerato se dan cuenta que aplican el lenguaje algebraico con un grado de complejidad mayor al aprendieron en secundaria.

El tomar decisiones en nuestra vida personal, profesional y laboral es muchas veces el resultado de haber aprovechado al máximo nuestra educación académica ya que somos parte importante de nuestra sociedad y debemos contribuir al desarrollo de la misma.

La educación académica o escolarizada es capaz de llevar y trasmitir una cultura muy diferente de acuerdo a las condiciones sociales, económicas y políticas de cada región. No se puede afirmar que ésta sea la mejor ni la peor, pero lo que sí podemos decir es que aprender álgebra es importante para todos los estudiantes y no sólo para aquellos que quieren seguir estudiando para hacer una carrera ya sea técnica o profesional, porque el álgebra es aplicada constantemente en los avances tecnológicos.

El aprendizaje de las matemáticas debería ayudar a los estudiantes a acercarse a las nuevas tecnologías, pues éstas dependen en gran medida de ellas. Actualmente en México la mayor parte de la sociedad esta centrada en la informática, hoy por hoy es necesario familiarizarnos con la calculadora, la computadora, el Internet, la televisión por cable, el teléfono celular, entre muchos otros; no sólo por el hecho de que se necesite saber cómo usarlos, si no además tener acceso a información de cómo se fabrican, como se arman y diseñan para aquellos que les interese este campo. Por otra parte, dado que la mayoría de los empleos actuales requieren de personas con mayor preparación, que sean capaces de analizar información y posteriormente utilizarla para resolver problemas, es que enfatizamos la importancia del aprendizaje de las matemáticas. A estas alturas necesitamos tener claro que la educación es un proceso social, como consecuencia la educación matemática es también un proceso social. Las matemáticas se utilizan en todas las sociedades, modernas, pobres y ricas, pues su aplicación depende del entorno donde se vayan a utilizar, podemos constatar que es la única materia que se enseña en todas las escuelas del mundo y en todos los niveles educativos.

Hay que tomar en cuenta que la enseñanza de las matemáticas está regulada y por lo tanto restringida por diversas instituciones de la sociedad, por ejemplo en nuestro país los temarios de la secundaria están diseñados por la SEP, por lo que los profesores tiene que seguir este plan de estudio, ellos están intrínsecamente sometidos a las fuerzas políticas y religiosas, por lo tanto la enseñanza de las matemáticas es diversa en todas las instituciones educativas, ya que cada una de ellas tiene un programa de enseñanza distinto.

Esto nos lleva a darnos cuenta que las formas educativas de las distintas instituciones ya sean formales e informales se dan en función de sus aspiraciones, intereses y metas sociales. Por ejemplo, hay instituciones educativas que son públicas y particulares, en ellas es distinta la forma para enseñar. En las escuelas privadas se exige el cumplimiento de un programa diseñado específicamente para el curso, basado en los planes de la SEP, aunque modificado de acuerdo a los objetivos perseguidos por cada institución.

En las escuelas públicas no es tan estricta esta formalidad, ya que se basa completamente en los temas propuestos en los planes de estudio de la SEP, en los tiempos especificados, dando como resultado que en varias ocasiones, no sean concluidas al finalizar el curso. Este sistema utilizado es un poco más dócil en el aspecto de la enseñanza. Por ello en estas dos instituciones la forma de enseñar matemáticas es diferente, aunque el temario sea el mismo, ya que solo difiere en la forma de enseñar. Pero el objetivo de ambas instituciones trasmitir los conocimientos básicos para que los estudiantes lleguen a formarse un pensamiento lógico y abstracto.

Por otra parte, las influencias sociales en la enseñanza de las matemáticas se pueden identificar más fácilmente en personas que estén bien preparadas en los temas a tratar, y éstos son los profesores, pues son ellos los que influyen directamente en que este aprendizaje llegue adecuadamente a sus estudiantes, de acuerdo con sus experiencias en la vida profesional, personal y docente.

Los profesores tienen que ser capaces de compartir el conocimiento y los resultados matemáticos mediante actividades que faciliten la adquisición de los conocimientos que se imparten y negociar con los alumnos adolescentes cómo será el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha cultura matemática. Del mismo modo se pueden hacer actividades donde se apliquen situaciones concretas, para que posteriormente aprendan a expresarlas simbólicamente, hasta llegar a la manipulación algebraica de los símbolos. Con todo este conocimiento los estudiantes adquieren muchas maneras de pensar, de comportarse y de valorar lo que han aprendido para un futuro, esto puede ser en todos los aspectos incluyendo el escolar y profesional.

Como podemos ver, los profesores son los que tienen la responsabilidad de que los estudiantes aprendan este nuevo lenguaje, es una tarea difícil pero no imposible. Aunque no hay que perder de vista que ellos tienen limitaciones, les impiden tener una buena relación con sus estudiantes, porque piensan que el profesor los va ha ayudar para exentar la materia, en otros casos él debe de ser enérgico ya que es el que tiene el poder ante los estudiantes y ser el que manda en su clase. Esto esta establecido por la sociedad.

Por todo lo anterior, notamos que la educación es intencional y considerada para trasmitir conocimiento como tal es selectiva, nos damos cuenta que las matemáticas han sido y seguirán siendo una fuerza cultural reconocida, absorbida y evaluada en todas las civilizaciones.

En esta parte de la educación matemática hay problemas que nos interesan, por lo cual queremos encontrar métodos y maneras educativas que sean significativas para relacionar a los estudiantes con la enseñanza matemática. Aunque la situación que se vive actualmente es preocupante, porque los métodos no son tan buenos o mejor dicho no son los ideales, es necesario enseñar álgebra a todos los estudiantes de secundaria, esto será posible tratando de mejorar los métodos que no han dado buen resultado pero hay que seguir trabajando en ellos para poder enfrentar el problema social que hay en la reacción de los estudiantes, pues la mayoría quiere huir de ellas.

Hemos tratado algunas situaciones en la educación matemática en nuestro país, pero no sólo eso, hay que abordar algunos problemas que existen en el aula de secundaria, seguramente existen otros problemas pero al menos discutiremos algunos que considero relevantes.

1.3 Problemas en la enseñanza del álgebra en el aula de secundaria.

Hay varias situaciones que abordar en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, todas tienen importancia pero nos interesan los estudiantes de secundaria, así como los problemas que existen en el aula cuando se enseña matemáticas, tomando en cuenta la perspectiva del profesor como la del estudiante. En la primaria los estudiantes prácticamente trabajan con aritmética, sólo hacen operaciones básicas, memorizar fórmulas, resolver problemas numéricos y geométricos donde se tiene que calcular el área de un polígono o el volumen de un cuerpo. Ahora los estudiantes empiezan a conocer un nuevo lenguaje matemático, el lenguaje algebraico, éste es más lógico y formal. En este nuevo lenguaje las incógnitas se representan con letras, es aquí donde empieza el reto de ellos ya que están acostumbrados a trabajar sólo con números cuando empiezan a combinarlos con letras y símbolos, es aquí cuando empiezan a confundirse y se les complica entender y manipular.

En esta parte es donde interviene el profesor, él necesita desarrollar la habilidad para exponerles y enseñarles estas nuevas matemáticas, “el álgebra”. Ciertamente, en él está el ayudarlos a que se vayan familiarizando con este lenguaje y así lograr que adquieran un pensamiento abstracto, formal y lógico que les ayude a analizar y a deducir casi cualquier problema que se les presente. El aprendizaje se irá mejorando cada vez más conforme al interés de los estudiantes y el profesor, en base a la práctica, métodos, algoritmos que él diseñe o tenga en mente para enseñarles este nuevo lenguaje algebraico.

Esta es una tarea difícil para el profesor, pero no imposible, él tiene que motivarlos para aprender álgebra, ya que les será útil para su preparación, ya que más adelante seguirán aprendiendo más cosas de matemáticas. Además de que seguramente podrán razonar con mayor cuidado cualquier problema que tengan ya sea académico, profesional o de su vida cotidiana.

Algunos estudiantes forcejean con la complejidad del álgebra y muchos de los profesores luchan con la complejidad de inculcar la comprensión algebraica en los estudiantes que tienen a su cargo. Éste es un problema muy frecuente en el salón de clase, que a veces empieza por quien les enseña, ya que en algunas ocasiones los profesores no dominan la materia, dado que su área de conocimiento es otra, por otro lado también existen quienes han estudiado la carrera de matemáticas pero no tienen las técnicas pedagógicas suficientes para enseñar en secundaria. Éste es un grave problema para el aprendizaje de este lenguaje ya que el estudiante no puede tener el acceso a un conocimiento adecuado.

Estos son algunos de los problemas, pero existen otros, en donde algunas veces intervienen los estudiantes, en otras los profesores y por último ambos. Mencionare algunas, como son:

Estudiante:

- Conflictos personales
- Baja autoestima
- Problemas en el hogar
- Trastornos hormonales

- Relaciones con compañeros de la escuela
- Bajo nivel de abstracción
- Bajo nivel de comprensión
- Enfermedades
- Experiencias previas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que lo mantiene renuente ha dicho proceso en la primaria.

Profesor:

- Poco o ningún dominio de los temas a impartir
- Carencia de un lenguaje que favorezca el entendimiento de la materia
- Ausencia de instrumentos pedagógicos que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje
- Desarticulación de lo teórico con lo aplicado, es decir, en muchas ocasiones el estudiante no entiende la utilidad de los conocimientos adquiridos y por ende no obtiene un aprendizaje significativo

Profesor – Alumno:
Alumno – Profesor:

- Relaciones ásperas
- Agresión
- Falta de autoridad
- Poca claridad de los objetivos y reglas

Medio social:

- La introducción de la tecnología en las aulas de estudio, como el uso de la multimedia, lo que merma el diálogo entre el estudiante y el profesor

Por ello, para favorecer el aprendizaje del álgebra es conveniente que desde el primer grado de secundaria, se procure que los estudiantes empiecen a familiarizarse gradualmente con ella, utilizando expresiones con literales mejor conocidas como variables, y enseñarles las primeras reglas sencillas de escritura algebraica, así como otros temas. Ya que los estudiantes traen conocimientos previos de aritmética y geometría, esto les ayudara para encaminarse a el estudió de esta disciplina que es el álgebra.

El profesor tiene que aplicar actividades que enfaticen el uso de situaciones concretas de la vida cotidiana para que los estudiantes aprendan a representarlas gráficamente y en tablas, y con ello posteriormente aprendan a expresarlas simbólicamente. Esto les servirá para que más adelante, el estudiante llegue a hacer manipulaciones algebraicas con símbolos, ésta es una tarea complicada ya que no todos los estudiantes aprenden con la misma facilidad o rapidez.

Pese a todos los problemas que puedan existir en las aulas, el profesor de matemáticas tiene que luchar por mejorar la enseñanza, así como la forma de trabajar en el aula. Esto puede hacerse cambiando de actividades, como aplicar juegos en clase. Con esto, el profesor los motivara a seguir aprendiendo más de este nuevo lenguaje, y los ira encaminando en el lenguaje matemático, para que más adelante lo apliquen, si siguen estudiando.

1.4 Técnicas y estrategias en la enseñanza del álgebra para secundaria

El estado actual de la enseñanza del álgebra en secundaria depende tanto de la relación entre profesores y estudiante como de las políticas de la escuela, así que es preciso mencionar algunas técnicas, y estrategias que usa el profesor de matemáticas para impartir sus cursos. Donde las técnicas son estructura concreta que es aplican, cómo los métodos y algoritmos que se emplean de diferente manera. Las estrategias, son comentarios, anegadotas y dinámicas que lo que hacen es plantear el camino a seguir para llegar a un mejor aprendizaje, veremos algunas:

1. Enseñanza basada en un libro de texto
2. El aprendizaje impersonal
3. La memorización de fórmulas y algoritmos
4. El desarrollo de técnicas de estudio
5. Estrategias de estudio para la enseñanza

1.4.1Enseñanza basada en un libro de texto.

Hoy en día y desde hace mucho tiempo, es muy común utilizar un libro de texto para enseñar matemáticas. Es casi el único apoyo que el profesor tiene para enseñarles el lenguaje, en él hay grandes listas de ejercicios que los estudiantes tienen que resolver y, según algunos profesores con esto ellos desarrollan la habilidad de analizar y encontrar el valor de la incógnita. Ellos consideran que la solución de problemas es la etapa más alta del aprendizaje, esto no siempre es cierto, a veces los estudiantes no comprenden bien el texto y se quedan con dudas. Esto es normal porque ellos apenas están conociendo este lenguaje, en esta etapa es cuando necesitan del apoyo del profesor para comprenderlo mejor y poder dar una solución a cada problema si la tiene y si no existe, decir por que no existe.

Algunas veces, los profesores dejan que los estudiantes investiguen y expongan los temas que tienen que ver durante el curso, en otros casos les explica algunos algoritmos y técnicas para que ellos las apliquen en ciertos ejemplos que posteriormente mostrarán al pasar al pizarrón. Es justo en ese momento, cuando a los estudiante les empiezan a surgir dudas de cómo plantearlo, hacerlo y resolverlo, es entonces cuando el profesor entra en acción para aclarar estas dudas, cómo son plantear el problema, la forma de aplicar el algoritmo para poder llegar a la solución del problema, es importante para los jóvenes que el profesor los apoye y oriente de modo que su aprendizaje sea significativo.

Pero como ya lo habíamos mencionado, para los estudiantes de secundaria el manipular expresiones algebraicas es algo nuevo y en ocasiones difícil de comprender ya que lo único que han visto desde la primaria es aritmética y un poco de álgebra pero a esta la

disfrazan con cuadritos donde tienen que encontrar el valor que falta, de una manera fácil y sencilla, donde únicamente usan números, sin usar un lenguaje abstracto.

Ejemplo:

$3 + \square = 6$ en donde el cuadrito vale 3

$9 - \square = 6$ en donde el cuadrito vale 3

$2 \times \square = 6$ en donde el cuadrito vale 3

En la escuela secundaria, la expresión matemática cambia, ya no se usa un cuadrito para encontrar el número que falta, éste lo cambiamos por una letra a la que se le llama incógnita, que con frecuencia se expresa con una "x".

Ejemplo:

$3 + x = 6$ en donde la incógnita vale 3

$9 - x = 6$ en donde la incógnita vale 3

$2\ (x) = 6$ en donde la incógnita vale 3

Éstos son ejemplos sencillos, sólo para ver la diferencia que hay de un lenguaje menos formal a un lenguaje lógico y formal.

Sabemos que muchas de las clases de matemáticas que se dan en el aula son testigos de la dependencia del profesor que se basa en un texto ya sea en el que da la S.E.P. o cualquier otro libro. Los libros que dan en la escuela, determinan que los estudiantes aprenden rápidamente y por lo cual los lleva a aplicar todo lo que han aprendido. Sin embargo, esto no es así, ya al adquirir los conocimientos no todos los estudiantes absorben el concepto rápidamente. Aunque son pocos los profesores que rechazan esta forma de enseñar pues quieren tener una relación más afectuosa con los estudiantes, para que ellos tengan la confianza de plantear todas sus dudas para que él se las aclare.

En la mayoría de los sistemas educativos de nivel secundaria se tiene la idea de que el profesor debe de utilizar sólo un libro, por lo tanto, lo limitan a impartir su clase exclusivamente con dicho texto, en este caso él no tiene la libertad de enseñar matemáticas usando otros métodos y estrategias que apoyen el uso del libro de texto. Son pocos, los sistemas que son más abiertos en donde el profesor tiene la libertad de escoger el texto que según su criterio es el más conveniente, así como otras alternativas de enseñanza.

Esta forma de enseñar matemáticas hace que algunos estudiantes sean autodidactas y a la larga sean unos expertos en el tema, pero esto también afecta a la relación que puedan llevar con sus compañeros ya que los encamina a ser solitarios, a no tener amigos y ser rechazados por sus mismos compañeros al ser los más destacados en la clase.

Es conveniente que haya un profesor en el aula para enseñar matemáticas a lo más a treinta o cuarenta estudiantes, pues él tiene la responsabilidad de exponerles un tema que requiere de mucha atención y cuidado al explicar. Sin embargo al tener grupos numerosos, dicha tarea resulta ser sumamente complicada, ya que se distraen con gran facilidad, él tiene que prepararse bien y dominar el tema, así, los estudiantes que tiene a su cargo podrán aprender mejor los algoritmos y métodos que les enseñe.

El profesor, sirve como un mediador en la enseñanza entre el estudiante y el texto, lo que verdaderamente necesita un profesor no es un texto, sino actividades y técnicas que contribuyan al desarrollo de los estudiantes. Y por otro lado, el estudiante no necesita de un texto sino un entorno de aprendizaje cálido, comprensivo y estimulante. Por lo que la enseñanza únicamente basada en textos no es completa y no tiene que ser tan dominante.

1.4.2 Aprendizaje impersonal.

El aprendizaje impersonal, es ser autodidacta, se caracteriza porque el estudiante sea independiente, es decir que aprenda de manera libre y autónoma, todos los conceptos matemáticos, él no considere el entender y obtener significados de su aprendizaje, que ha tenido en su vida personal a través de la educación matemática. Esto nos lleva a comprender que la enseñanza basada en texto, hace que el estudiante prefiere el aprendizaje impersonal cuando no le permiten expresar ideas y conocimientos que él adquirió al estudiar por su cuenta, ya que él tiene puntos de vista diferentes a la del profesor.

El estudiante autodidactas piensa que su aprendizaje es mejor así y que los puntos de vista del profesor o lo que el le pueda trasmitir no tienen mucha importancia pues él tiene sus propios criterios de lo que esta entendiendo y aprendiendo, con respecto a lo que encuentra en los libros. Sin embargo las matemáticas no son un objeto impersonal, éstas se deben trasmitir mediante una comunicación directa entre profesor y estudiante, no a distancia, sino en un salón de clase para permitir el diálogo, así cómo la experiencia viva entre el profesor y estudiantes. Es fundamental, el papel del profesor, pues sirve de guía al estudiante para que comprenda mejor todos los algoritmos que se aplican en las matemáticas, esto será de gran ayuda para el estudiante, pues sus ideas que él tiene las puede complementar con las del profesor y así queden más claras y firmes, para aplicarlas posteriormente.

En el aprendizaje del las matemáticas, hay acuerdos llamados significados compartidos, que se obtienen de las verdades matemáticas, pero ¿qué es el significado compartido?. Éste se refiere al vínculo que se establece entre las ideas y las conexiones personales de imágenes y metáforas, las cuales dan ejemplos de sucesos significativos durante el aprendizaje de ésta y otras materias en la escuela, de la vida diaria, o de otras experiencias, todos construimos significados personales que dan importancia a nuestra vida. El aprendizaje impersonal ignora estas conexiones y significados personales, como consecuencia despersonaliza el proceso del aprendizaje ya que no hay relación entre profesores y estudiantes. Pero la ausencia de significados personales, significa que en las aulas, donde se dan las clases de álgebra, no hay ninguna persona, sólo hay un profesor y varios estudiantes. La tarea del profesor es comunicar con la mayor eficiencia posible para que los estudiantes puedan aprender álgebra. Sin duda llegamos a la conclusión que el aprendizaje impersonal es antieducativo.

1.4.3 Memorización de fórmulas y algoritmos.

Éste es un punto importante, se trata que los estudiantes desde niños sean capaces de memorizar cualidades y características de las matemáticas, como son símbolos, fórmulas, palabras del lenguaje algebraico y reglas.

Aunque los estudiantes memoricen las fórmulas y algoritmos, el conocimiento adquirido no garantiza el aprendizaje, ya que solamente se mantiene en la memoria mientras lo aplica para presentar sus exámenes y así acreditar la materia. Ellos sólo memorizan por un corto plazo, al paso del tiempo se dan cuenta que lo aplican cuando llagan al siguiente nivel educativo, pues no pueden o mejor dicho no saben aplicar lo que una vez aprendieron porque no se acuerdan. Los estudiantes no perciben que con todo lo que se les enseña llegan a formarse un pensamiento lógico, abstracto y formal, que les ayudara más adelante.

Simplemente aprendieron a memorizar y por lo tanto el aprendizaje fue breve. Dado que aprender el lenguaje algebraico les será de gran utilidad para enfrentar el reto de entender las matemáticas del bachillerato, pues es aquí donde aplican todo lo que han aprendido y posteriormente cuando lleguen a la universidad. Hay que tener claro que las actividades como la memorización, el aprendizaje de algoritmos y conceptos del álgebra, son desarrolladas desde el nivel preescolar, y no le damos la importancia de que se aprenda bien. Sin embargo no percibimos que también son útiles e importantes en niveles superiores, pero sobre todo, son necesarios para alcanzar los propósitos que tienen los programa oficiales. La memorización de conceptos, datos, fórmulas y algoritmos es necesaria, pero no es suficiente para lograr un aprendizaje con significado.

1.4.4 Desarrollo de técnicas.

El aprendizaje matemático con el álgebra se basa en el desarrollo de técnicas para poder resolver desde ecuaciones sencillas hasta ecuaciones muy complejas, también estas técnicas sirven para reordenar expresiones complicadas, simplificarlas y trabajar con ellas para poder encontrar la solución con mayor facilidad. Dicho desarrollo está formado por procedimientos, métodos, reglas y algoritmos que nos dan una imagen de las matemáticas como una materia basada en hacer que los estudiantes las utilicen para que puedan resolver problemas que los dotan de nociones y procedimientos algebraicos.

Dado que el álgebra es una rama de las matemáticas, no se presenta como un ámbito en el que hay reflexión; pero dentro del álgebra es necesario pensar y analizar, para aplicar el procedimiento adecuado, el método correcto y seguimiento de las reglas, y así llagar a las soluciones de la respuesta correcta.

El estudio de técnicas y la práctica de ellas nos ayudan a fortalecer lo que se aprende, entonces el lenguaje matemático se aplicara con más seguridad. El objetivo es que el estudiante sea capaz de utilizar y emplear estas técnicas tanto dentro de un salón de clase como fuera de el. Por otro lado, el desarrollo significa dominar un conjunto de técnicas, que sirven para apoyar el estudió de esta materia y adquirir el dominio que se va haciendo más sólido.

Lo que se intenta hacer es que los estudiantes obtengan la capacidad para resolver cualquier problema pero esto se lleva a cabo mediante una lista enorme de ejercicios, y tareas exhaustivas aunque no todos los profesores tienen esa idea, hay otras maneras de que los estudiantes aprendan sin tener que hacer tareas extensas. Por eso trataremos de dar una forma práctica y sencilla para que los profesores se puedan apoyar en esta propuesta y logren obtener mejores resultados con los estudiantes. Una técnica puede ser enseñar álgebra mediante juegos para que los estudiantes puedan diseñar su propio juego y apliquen los algoritmos y métodos que han aprendido.

Sin duda el desarrollo de técnicas no es suficiente ayuda para comprender el álgebra, con esto no se pueden desarrollar significados, ni tampoco se puede capacitar al estudiante para que pueda enfrentar cualquier problema. Entonces llegamos a la conclusión de que el desarrollo de técnicas no sirve para enseñar álgebra, simplemente para darle una noción para instruir y encaminarlos. Como podemos ver esto no es suficiente hay que seguir preparándose, sin embargo, si se fracasa el estudiante no comprenderá bien todo lo que se le enseñó y esto lo llevará a un desastre emocional.

Como conclusión de estos estilos de técnicas de enseñanza no son muy buenas, ya que en lugar de ayudar a los estudiantes a comprender mejor este lenguaje, se les describen demasiado complicado, ninguno de los tres es bueno para el aprendizaje de las matemáticas, lo ideal sería mejorar los métodos y técnicas, y ser más creativos para mejorar el aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

1.4.5 Estrategias de estudio para la enseñanza

Las estrategias para la enseñanza de las matemáticas contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico de los educandos, ya que se considera como un proceso mental para el razonamiento, esto es, para obtener información y tomar decisiones, en éste caso la comunicación entre el profesor y los estudiantes se favorece. Las matemáticas tienen como finalidad involucrar valores así como el desarrollo de actitudes en el estudiante, para ello se requiere del uso de estrategias que le permitan desarrollar las capacidades de percibir, analizar e interpretar los conocimientos adquiridos para enfrentar su entorno.

Las estrategias tienen como propósito la contribución a la formación integral del estudiante en el desarrollo de habilidades y destrezas para facilitar la interpretación del medio que lo rodea, siendo una condición para la convivencia social del profesor con los estudiantes, donde el profesor desarrollara la autoestima de los estudiantes en la aplicación de diversas estrategias de enseñanza de las matemáticas. Él debe proporcionar al estudiante los métodos de razonamiento básicos, que se requieren para plantear algunos ejercicios a resolver, dicha práctica le permite reforzar sus conocimientos. El profesor puede diseñar actividades educativas para estimular a los estudiantes respecto al aprendizaje, combinando las actividades con anécdotas, historias y juegos para captar la atención de los estudiantes dentro de la clase.

El reto para los profesores es lograr que nuestros estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento junto con el uso de herramientas que les permitan resolver problemas de su vida cotidiana, y más aun, les motiven la curiosidad natural que cada uno de ellos tiene por descubrir y explicar todas las características de su entorno.

1.5 Problema a los que se enfrentan los alumnos con el álgebra

Como podemos ver, en la enseñanza del álgebra existen muchos problemas tanto en el aula como problemas individuales que los estudiantes tienen al enfrentarse a las matemáticas de secundaria, tenemos que para algunos es fácil y para otros es demasiado compleja. Ahora presento algunos puntos de esta situación.

1. Muchos estudiantes se esfuerzan por entender la complejidad del álgebra pero se desesperan por no comprenderla, esto los lleva a reprobar y a abandonar la materia.

2. Influye mucho la actitud de los estudiantes para aprender álgebra ya sea positiva o negativa, la cual se basa en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la materia y se refleja en su interés por la misma.

3. Las creencias que tienen acerca de las matemáticas, son aquellas que los estudiantes han otorgado a partir de su experiencia, del ambiente escolar y familiar. Para algunos son difíciles, mas no imposibles, y les agrada el desafío de poder entender cualquier problema de álgebra. Por otro lado están los que no les interesa la materia y que le echan la culpa a los profesores ya que dicen que no les enseñan bien.

4. El captar las ideas principales del lenguaje matemático, que para ellos es difícil y complicado por lo que no aceptan tan fácilmente.

5. Algunos estudiantes aprenden a usar los métodos y técnicas matemáticas para aplicarlas de manera adecuada en sus exámenes y aprobarlos, esto sucede con los estudiantes que les interesa aprender, pero sólo de manera temporal y superficial porque no comprenden realmente el tema, pues sólo se aprenden el algoritmo o el método sin entenderlo como debe de ser y al paso del tiempo, se les olvida lo que aprendieron.

6. En estos tiempos hay un gran índice de estudiantes que reprueban matemáticas esto se debe a la poca claridad y entendimiento que tiene el profesor para enseñarles el lenguaje algebraico, esto les causa un conflicto al grado de pensar, que no pueden aplicarlo en la vida diaria o simplemente no quieren aprender este lenguaje que según ellos es demasiado abstracto y no quieren pensar.

7. La actitud del profesor también es importante, dado que él puede tener una actitud positiva o negativa y si es la última es un gran problema, ya que no les dará los conocimientos completos, y con claridad, pues él está convencido de que está enseñando bien, y no le importa si lo aprendieron como debe de ser.

1.6 La abstracción del "álgebra" y su impacto en los adolescentes.

Jean Piaget (1896-1980), fue un famoso investigador suizo. En sus primeras obras escribió que la etapa de pensamiento formal y abstracto del ser humano empieza aproximadamente a los once años y se consolida hacia los quince. El tipo de pensamiento que se caracteriza en esta etapa es el lógico, matemático y científico que los adultos manejan cotidianamente y que nuestros estudiantes deberían de poder aprender y consolidar en la edad mencionada. Piaget no era matemático, el fue un gran psicólogo, que se dedicó al estudio del pensamiento de los niños y su aprendizaje, para él no era tan importantes las relaciones humanas para llegar a formarse un pensamiento abstracto y formal.

Lev Semiónovich Vygotsky (18966-1934), trabajo en Moscú en él instituto de psicología. Para él, era importante el estudio de la gramática en las escuelas, pues el decía que en esta etapa el niño toma conciencia de lo que está haciendo y aprende a utilizar sus habilidades de forma conciente. Aunque sus investigaciones que hizo se centraron en el pensamiento, el lenguaje, la memoria y el juego del niño. Una de sus ideas principales era que el lenguaje es un instrumento imprescindible para el desarrollo del niño, posteriormente la conciencia que va adquiriendo el niño le proporciona un control comunicativo, todo esto es independiente en el desarrollo del pensamiento. Él consideró de gran importancia la influencia del entorno del desarrollo del niño, por esto criticó a Piaget por no darle la importancia al mismo. Para Vygotsky la socialización del individuo es parte fundamental del desarrollo físico, mental y emocional.

Para concluir con las ideas de Piaget y Vygotsky, creo que se complementan una con respecto de la otra. Las dos teorías se relacionan en que la etapa primordial para que un estudiante tenga la maduración de empezar a formar un pensamiento abstracto es durante la secundaria. Con estas ideas se obtendría un proceso de enseñanza directo, autónomo y sobre todo efectivo ya que el proceso de enseñanza, debe ser interactivo entre si, para considerar el aprendizaje como un factor de desarrollo.

El profesor de álgebra en secundaria debe ayudar a los estudiantes a acostumbrarse a pensar formalmente. Para esto los profesores deben de estar muy bien preparados y tener también ese pensamiento formal. Además requieren tener herramientas necesarias para enseñar este nuevo lenguaje algebraico, como utilizar juegos o aplicar ejemplos de la vida cotidiana, le servirá para introducir en los estudiantes una forma motivadora al adquirir los conocimientos algebraicos necesarios.

Es de suma importancia comprender que es necesario adquirir el pensamiento formal y la manera de fomentarlo en la secundaria, otra interrogante es ¿cómo ayudar a los estudiantes a pensar formalmente? Por lo tanto una característica fundamental para este tipo de pensamiento es enseñarles a analizar el problema cuidadosamente con el fin de encontrar una solución. Con esto podemos decir que lo que deseamos es que, el estudiante que piensa en forma abstracta parte de lo concreto y lo real hacía el mundo de las ideas.

1.7 ¿Dónde queda la utilidad de lo que se enseña?

Toda enseñanza del álgebra es fundamental desde nivel secundaria ya que juega un papel muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje porque esta etapa es la ideal para que los estudiantes empiecen a formarse un pensamiento lógico. La utilidad de esta es ilimitada, tanto el álgebra, como las matemáticas en general son utilizadas en varios campos y en varias profesiones, a continuación se mencionan algunos ejemplos:

- La fabricación de una calculadora, el que la diseña y programa es una persona que debe saber matemáticas.

- En la fabricación de juegos de video, cajeros automáticos, computadoras, teléfonos celulares etc.

- La astronomía, la economía, la química, la música, la física, la arquitectura, la ingeniería.

- En el área financiera hay que resolver ecuaciones, polinomios ya sea de interés o ecuaciones de valor presente, anualidades así como otro tipo de planteamientos.

Pero lo más interesante de aprender álgebra, es que todos lleguemos a formarnos un pensamiento abstracto y seamos capaces de enfrentar cualquier reto que la vida nos ponga en frente, esto es un desafió para quienes le tienen miedo al álgebra pues al enfrentarla pueden llegar a superar el miedo y logran conseguir una solución, esto les dará seguridad para comenzar a desenvolverse en cualquier área donde tengan que aplicar matemáticas sin temor a equivocarse.

Podemos observar que el aprendizaje de las matemáticas es útil y variado, además se ocupa hasta en la vida diaria, simplemente no lo notamos pero a cada momento lo estamos aplicando, por ejemplo, cuando deseamos averiguar la edad de una persona, cuando se hacen estadísticas, cuando deseamos hacer un mapa, en fin se aplica en muchas cosas.

Por lo tanto, el álgebra es muy importante en la preparación de todo ser humano como persona, como profesionista y como pasatiempo. El siguiente capitulo nos servirá de repaso y apoyo para fortalecer el aprendizaje del álgebra.

CAPÍTULO II

EL LENGUAJE ALGEBRAICO PARA LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

2.1 Una estrategia alternativa para el aprendizaje del álgebra

Esta propuesta está basada en apoyar la enseñanza del álgebra en secundaria, con algunos juegos, los cuales están basados en saber identificar y resolver operaciones básicas que se realizan con los monomios y polinomios, así como representar una expresión algebraica en un lenguaje común. Sabemos que esta área es muy extensa, por lo que en este trabajo sólo nos enfocaremos en abordar las bases del lenguaje algebraico, esto será de gran apoyo tanto para profesores como estudiantes, todo esto es con la finalidad de que los estudiantes pierdan la inseguridad que tienen al conocer este nuevo lenguaje.

Esto será mediante una didáctica que se basa en juegos. Para que los estudiantes sepan jugar, repasaremos los conocimiento básicos del lenguaje algebraico y las operaciones que se realizan con los monomios y polinomios que intervienen en este juego, también el que sepan identificar una expresiones algebraicas cuando tengan un enunciados en lenguaje común, todo esto es con el fin de que el estudiante reafirme su aprendizaje que obtuvieron en secundaria.

El repaso consiste en mostrarles cómo esta compuesto el lenguaje algebraico, describiendo qué es una expresión algebraica y todos los elementos que la componen como son, la incógnita, los coeficientes, los signos y por último dar una breve explicación de las reglas que intervienen en las operaciones como en la multiplicación y división. Todo esto será como una herramienta de apoyo y se hará a base de preguntas y repuestas.

2.2 Motivación a los estudiantes de secundaria:

A los estudiantes les are una pregunta, ¿alguna vez han escuchado la palabra álgebra?

Algunos contestarán que sí, que se trata de hacer cuentas para encontrar el valor de una incógnita.

¿Saben de qué se trata?

Esto se trata de encontrar el valor de nuestra incógnita.

Los invito a conocer este lenguaje que seguramente ustedes podrán comprender sin problemas. Empezaré describiendo cómo está formado y como forme vayamos avanzando conoceremos más sobre este tema.

El álgebra es una rama de las matemáticas cuyo lenguaje requiere de cierta abstracción. Ahora ustedes se enfrentarán a un nuevo lenguaje, un lenguaje matemático en donde se usarán letras y números para expresar un problema o una situación de su vida, pero no se preocupen, en estas páginas encontrarán otra forma de abordar el tema, que espero aclare sus dudas.

Para algunos, el álgebra puede ser algo excepcional, les gusta y la entienden, por ello pierden el miedo y sobre todo comienzan a interesarse en este lenguaje matemático, ello les da una visión diferente para representar matemáticamente todo lo que nos rodea y una capacidad de analizar cualquier problema de la vida cotidiana. Pero para otros, estos cambios en el lenguaje matemático muchas veces causan incertidumbre, confusión, miedo y frustración, porque sienten que es demasiado complicado, aunque no imposible de entender esto si el profesor les explica con cuidado todo lo que no haya quedado claro.

Empezare mencionando algunos conceptos importantes que el profesor enseña en su clase. Describiré qué es un monomio, un polinomio y las operaciones aritméticas que podemos realizar con ellos. Se darán ejercicios con problemas prácticos en cada sección, esto les dará la oportunidad a los estudiantes de desarrollar sus habilidades, así como aplicar los métodos y algoritmos. Los problemas que vamos a mostrar van del más fácil a los más difíciles.

Comencemos a recordando como esta formado el lenguaje algebraico, este se expresa usando una variedad de símbolos, letras y números que nos permiten construir expresiones algebraicas, aunque no siempre se utilizan todos estos símbolos.

2.3 Lenguaje algebraico:

2.3.1 Cómo se define una expresión algebraica

¿Qué es una expresión algebraica?

Es una combinación de incógnitas y números con los signos de las operaciones aritméticas y otros símbolos.

Comenzaré describiendo cada una de las partes que constituyen a una expresión.

Como era de esperase, en el lenguaje algebraico también intervienen las letras y los números los cuales tienen cada uno un significado diferente como a continuación podemos ver: *las letras* nos describen a las Variables o Incógnitas, una incógnita es un valor que desconocemos y que deseamos determinar o encontrar.

Los números nos describen a los coeficientes, y las constantes. Empiezo por describir cada uno, los coeficientes son los números que acompañan a una incógnita ya sea multiplicándola por ejemplo 3x o dividiéndola como $\frac{x}{3}$. Las constantes también se representan con números, pero no dependen de una variable, éstos sólo van acompañados de un signo, por ejemplo +3 (tres positivo), -7 (siete negativo), y todo esto forma parte de una expresión algebraica. Estos datos sí los conocemos.
En este lenguaje intervienen los símbolos de las operaciones las cuales son: *la suma* (+), *la resta* (-), *la multiplicación* (*) y *la división* (÷) estos símbolos nos indican la operación que se va a realizar en una expresión algebraica.

Pero estos no son todos los símbolos que llegamos a utilizar también existen otros que son los *símbolos de agrupación*, estos símbolos sirven para indicarnos el orden en que se deben de hacer las operaciones que tenga una ecuación o expresión algebraica. Estos símbolos son los siguientes: Los paréntesis ( ), los corchetes [ ], las llaves { }, y el radical √ y por último el igual (=), que nos indica la relación de dos expresiones que tienen el mismo valor. Estos son los símbolos que ocupa el lenguaje algebraico, pero no necesariamente se usan todos estos símbolos en una expresión.

Como podemos ver, que este lenguaje algebraico es amplio y útil ya que podemos representar muchas situaciones de la vida cotidiana, utilizando la simbología que ya mencionamos. Todo esto nos permite convertir cualquier problema que se encuentre en un lenguaje común o geométrico, en una representación algebraica para obtener la solución del problema, lo cual nos facilitará más su estudio, para que posteriormente regresar al problema inicial y darle significado al valor encontrado.

Ejemplo

El triple del producto de los cuadrados de tres números $3[(n^2)(m^2)(d^2)]$

Sabemos que aplicamos las ultimas letras minúsculas del abecedario, para representan a las *incógnitas* o sea a los valores desconocidos y algunas veces se usan las primeras letras del abecedario para representar los coeficientes, así como los números del *0 al 9* y estos números a su vez representan a las *constantes*. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplos:

1) Escribir un número cualquiera que no conocemos.

Representar con una letra la incógnita, w, z
Cuyo valor es desconocido.

2) Sumar tres números diferentes.

Representamos tres números diferentes con: a, b, c
Cada letra representará un número diferente.
La suma de estos números la representamos como $a + b + c$

3) Sumar dos números iguales.

El número x representa a cualquier cantidad.
La suma de dos números iguales $x + x$

4) Mariana ha vendido la sexta parte de libros que el número total de libros vendidos por Luís.

Representamos el número de libros vendidos por Mariana m
El número de libros vendidos por Luís como l
El número de libros vendidos por Mariana es la sexta parte
que vendió Luís, lo representamos con $m = l/6$

5) El precio de una piña es cuatro veces el valor de una manzana.

El precio de la piña lo representamos con p
El valor de una manzana lo representamos con m
Cuatro veces el valor de una manzana lo representamos $4m$
El valor de la piña es igual al valor de 4 manzanas $p = 4m$

6) El peso de las naranjas es tres veces más que el de las guayabas.

El peso de las guayabas lo representamos con g
El peso de las naranjas es 3 veces el de las guayabas $3g$
Las naranjas pesan 3 veces más que las guayabas $n = 3g$

7) La cuarta parte de una cantidad que no conocemos

La cantidad desconocida la representamos con z
La cuarta parte de ese número z es $\frac{z}{4}$

8) El doble de un número más el séxtuplo del cuadrado de otro número cualquiera.

El doble de un número lo representamos como $2a$
El séxtuplo de un número se representa como $6p$
La suma se representa como $2a + 6p$

9) El doble del producto de los cuadrados de tres números.

Tres números cualesquiera se representan n, m, d
El cuadrado de los números se representa n^2, m^2, d^2
El doble producto se representa como $2[(n^2)(m^2)(d^2)]$

10) El producto de un número por la diferencia de dos números.

Los números cualesquiera los representamos	$a, c, d\ldots$
La diferencia la representamos	$a - d$
El producto por la diferencia la representamos	$c(a - d)$

Hasta aquí he mostrado cómo se forma el lenguaje algebraico. Ahora voy a introducirlos al álgebra, pero como está parte es muy amplia solamente trabajaremos con una pequeña parte. En ésta describiré a los monomios y a los polinomios, veremos cómo se construyen y cómo se realizan las operaciones con ellos.

2.3.2 Como se define un término

¿Qué es un término?

Un término esta formado por un signo, el coeficiente, la incógnita y el exponente. Por ejemplo hay varios tipos como:

$-8z^9$; éste es un término el cual está compuesto por un signo que es menos, el coeficiente que es ocho, la incógnita que es z y su exponente es 9.

6; éste es un término el cual es una constante ó término independiente

$+w^4$; éste término está integrado por el signo positivo, su coeficiente que es Uno el cual no lo escribimos, la incógnita que es w y el exponente que es 4.

$5a$; éste término está formado por el signo positivo, el coeficiente que es 5, su incógnita que es a y su exponente que es 1.

Ejemplo:

Tenemos los términos: $7f,\ +9g^2,\ -6$

Se forma una expresión algebraica con estos tres términos que son; $+7f, +9g^2$ *es el* segundo término y -6 es el último término. La expresión que nos queda es la siguiente.

$9g^2 + 7f - 6$ es un polinomio de grado dos ya que el exponente mayor es dos.

Es importante que sepan, cuando tenemos un solo término en una expresión esto nos da un monomio, si se trata de dos términos es un binomio y decimos que un polinomio, es un conjunto de términos ligados por una operación aritmética.

2.3.3 El grado de una expresión algebraica

¿Qué es el grado de una expresión?

Es el exponente mayor de cualquier incógnita de una expresión, éste nos determina el grado de dicha expresión, lo entenderemos mejor con ejemplos.

Ejemplo:

1.) $2h^5$ este término tiene grado 5.

2.) $-20a$ este término tiene grado 1.

3.) $3b^2c^5d^3$ este término tiene grado 5

4.) $15h^9n^4/3$ este término tiene grado 9.

5.) $6 + 9z + 2z^3$ esta expresión es de grado 3.

6.) $25k^4-20k^3+34k^2-12k+6$ esta expresión es de grado 4

7.) $12ts^6u^4+ 5s^4u^2t^3 -10t^2su^7$ esta expresión es de grado 7

Ahora rectificaremos más de todo este lenguaje algebraico que nos permite representar algunas cosas de nuestra vida diaria. Ahora nos preguntamos pero un exponente qué significa y como se aplica.

2.3.4 Exponentes

¿Qué es un exponente?

Éste es el número que nos indica cuántas veces se repite un término, el exponente se coloca en el lado derecho superior de la incógnita, este número que se escribe de menor tamaño, es importante que recordemos que el exponente 1 no se pone. Es importante señalar que cuando usamos los paréntesis estamos indicando una multiplicación, esto hay que tenerlo presente, ya que lo vamos a estar utilizando. Ahora veamos algunos ejemplos.

1.) $\left(\frac{d}{9}\right)^4 = \left(\frac{d}{9}\right)\left(\frac{d}{9}\right)\left(\frac{d}{9}\right)\left(\frac{d}{9}\right)$

2.) $a^2 = (a)\ (a)$

3.) $y^5 = (y)(y)(y)(y)(y)$

4.) $x^{-3} = \left(\frac{1}{x^3}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

2.3.5 Términos semejantes

¿Qué es un término semejante?

Los términos semejantes son dos o más términos que tienen a la misma incógnita, mismo exponente y sólo difieren en sus coeficientes y signo. Por ejemplo tenemos las siguientes expresiones.

$7y^2a + 3y^6 + 3y^2a + 7y^6$ o $-7y^2a - 3y^6 + 3y^2a + 7y^6$

Agrupamos los términos que son semejantes para simplificar

$(7y^2a + 3y^2a) + (3y^6 + 7y^6)$ $(-7y^2a + 3y^2a) + (3y^6 + 7y^6)$

$10y^2a + 10y^6$ $-4y^2a + 4y^6$

$(7+3)$, se suman porque ambos tienen las mismas incógnitas con el mismo exponente y^2a.

Pero también ambas tienen y^6, observamos que si cambiamos el signo de una de las expresiones también se puede por que tienen las mismas incógnitas.

Aunque también, esta el caso en donde no se puede simplificar agrupando términos semejantes, por ejemplo.

$7y^4a + 3y^6 + 3y^2a + 7y$

En esta expresión nos damos cuenta que no hay términos semejantes por lo tanto no podemos simplificarla.

Otro ejemplo: Tenemos los términos $3wz^2, -5u, +12wz^2, +16u$

En esta expresión hay cuatro términos, no todos tienen el mismo exponente así que iremos agrupando términos semejantes, para llegar a simplificar la expresión, realizamos las operaciones, correspondientes.

$3wz^2 + 12wz^2 - 5u + 16u = (3+12)\,wz^2 + (-5+16)u = 15\,wz^2 + 11u$

Por lo tanto nos queda el siguiente resultado $15\,wz^2 + 11u$, aquí el exponente de z es dos, el exponente de w es uno y el de u es uno.

Ejemplos:

1.) Con los términos siguientes $2x, -10x, +12x$. Formamos la siguiente expresión algebraica:

$2x - 10x + 12x$

Está expresión tiene en común la misma incógnita, x, mismo exponente, simplificamos, agrupamos términos semejantes.

$2x - 10x + 12x$
$(2-10+12)x$ hacemos las operaciones correspondiente
$4x$ este es el término que nos queda

Esta expresión también se puede escribir de muchas formas y nos da el mismo resultado, veamos.

$12x + 2x - 10x = 4x$
$-10x + 12x + 2x = 4x$
$2x + 12x - 10x = 4x$

2.) Con los siguientes términos $\frac{y}{12}, +\frac{y}{12}, +\frac{y^2z}{23}, -\frac{z^3}{4}, \frac{z^3}{4}$

Formamos la siguiente expresión:

$$\frac{y}{12}+\frac{y}{12}+\frac{y^2z}{23}-\frac{z^3}{4}+\frac{z^3}{4}$$

Tenemos la misma incógnita y mismo exponente en el primer y segundo término, estos se pueden sumar, el tercer término es diferente, tiene la misma incógnita pero con exponente dos, los dos últimos son términos semejantes entre ellos ya que tiene la misma incógnita y el mismo exponente entonces nos queda de la siguiente forma.

$$\left(\frac{y}{12}+\frac{y}{12}\right)+\frac{y^2z}{23}+\left(-\frac{z^3}{4}+\frac{z^3}{4}\right)$$

Agrupamos términos semejantes, para después hacer las operaciones correspondientes

$$\frac{2y}{12}+\frac{y^2z}{23}+0$$

$$\frac{2y}{12}+\frac{y^2z}{23}$$

Ésta es la expresión resultante, forma un binomio. Esto es una idea de cómo ocupar el lenguaje algebraico.

Ahora les veremos otras propiedades que se aplican en los monomios y los polinomios utilizando algunas leyes que son necesarias para algunas de las operaciones como la multiplicación y la división, que iré mencionando y definiendo:

2.3.6 Ley de los signos

¿Cuál es la ley de los signos?, ¿Cómo se aplica?

Naturalmente esta ley la hemos trabajado en algún momento para resolver problemas, con números positivos y negativos, esta regla de signos se aplica en la multiplicación y en la división aunque sea un cociente se utiliza de la misma manera. Si tenemos un término positivo que multiplica a un signo negativo, el signo del término cambia y se vuelve negativo.

Todo esto lo podemos ver mejor con algunos ejemplos, antes les mostrare una regla para que vean el comportamiento de los signos. Podemos hacer una analogía o comparación con lo que sucede en nuestra vida cotidiana, como pueden ser en el caso de los amigos y nuestros enemigos, y esto también lo podemos representar matemáticamente.

Representar al signo (+) como amigo y al signo (-) como enemigo.

El amigo de mi amigo es mi amigo	+ por + da +
El amigo de mi enemigo es mi enemigo	+ por – da -
El enemigo de mi enemigo es mi amigo	- por – da +
El enemigo de mi amigo es mi enemigo	- por + da -

Ahora les voy a mostrar cómo expresamos eso por medio del álgebra.

Más por más da más	(+) (+) = +
Más por menos da menos	(+) (-) = -
Menos por más da menos	(-) (+) = -
Menos por menos de más	(-) (-) = +

Para la división se aplica de la siguiente manera:

Más entre más da más	$+ \div + = +$
Más entre menos da menos	$+ \div - = -$
Menos entre menos da más	$- \div - = +$
Menos entre más da menos	$- \div + = -$

A esto le podemos llamar que es una regla nemotécnica, que es la que se memoriza, ya que esto se basa en signos iguales se suman, signos distintos se restan.

Ésta es una manera de representar la ley de los signos, hay otras más que se pueden inventar con respecto a las problemas de la vida diaria, como si me porto bien me dan domingo (+), con respecto si me porto mal no me dan domingo ($-$). En fin podemos sacar muchas más expresiones de nuestra vida.

Ejemplos:

$-(-3) = 3$	$(-4c)(+6) = -24c$	$\frac{-15}{-3} = +5$
$-(+3) = -3$	$(-9)(-5) = +45$	$\frac{+9a}{-3} = -3a$
$+(-3) = -3$	$(+6)(-a) = -6^a$	$\frac{-10w}{+5} = -2w$
$+(+3) = 3$	$(+3a)(+9) = +27^a$	$\frac{+20}{+5} = +4$

Ahora recordaremos otra de las leyes que es importante y se aplican.

2.3.7 Ley de los exponentes

¿Cuál es la ley de los exponentes? ¿Cómo se aplica?

Esta ley la conocemos y sabemos que se aplica de la siguiente manera; en la multiplicación lo que hace es sumar los exponentes de los términos que tengan la misma incógnita. Aunque también encontraremos exponentes negativos en este caso en lugar de sumar se restan dichos exponentes, esto se comprende mejor con ejemplos.

$(a^6)(a^3) = a^{6+3} = a^9$,

Ejemplos:

Aplicando la ley de los exponentes para la multiplicación:

1.) Multiplicamos w^3 por w^4

$$(w^3)(w^4) = w^{3+4} = w^7$$

$$\frac{9m}{3m} = \frac{9}{3}\frac{m}{m} = 3m^{1-1} = 3m^0 = 3$$

2.) Multiplicamos (m) por (m^8)

$$(m)(m^8) = m^{1+8} = m^{9.}$$

3.) Multiplicamos $(a^2 b^5)$ *por* $(a^6 b^2)$

$(a^2 b^5)(a^6 b^2)=a^{2+6}b^{5+2}=a^8b^7$

4.) Multiplicamos (x^7) *por* (x^{-4})

$(x^7)(x^{-4}) = x^{7-4} = x^3$

5.) Multiplicamos $-z^3$ por z^3

$$\left(-z^3\right)\left(z^3\right) = -z^{3+3} = -z^6$$

6.) Multiplicamos $(h^{1/3})$ por $(h^{1/2})$

$(h^{1/3})\ (h^{1/2}) = h^{1/3+1/2} = h^{5/6}$

7.) Multiplicamos $(z^{5/6})$ por $(z^{-2/3})$

$(-y^{1/2})(y^{1/2}) = -y^{1/2+1/2} = -y^{2/2} = -y$

8.) Multiplicamos (c) por (c^5) por $(-c^{-3})$

Este lo desarrollaré paso a paso para que se entienda mejor

$(c)(c^5) = +c^{1+5} = c^6$ multiplicamos los dos primeros términos

El término que resulta se multiplica con el último término, entonces

$(c^6)(-c^{-3}) = -c^{6+(-3)} = -\ c^{6-3} = -c^3$

Para que observen como queda la multiplicación

$(c)(c^5)(-c^{-3}) = -\ c^{1+5-3} = -\ c^3$

9.) Tenemos el producto de (k^6j^2) por $(-k^2)$ por $(-k^{-1}j^5)$

Este ejemplo se desarrolla igual que el anterior, aunque tenga más incógnitas

$(k^6j^2)(-k^2) = -\ k^{6+2}j^2 = -\ k^8j^2$

$(-k^8j^2)(-k^{-1}j^5) = +\ k^{8-1}j^{2+5} = +\ k^7j^7$

$(k^6j^2)(-k^2)(-k^{-1}j^5) = +\ k^{6+2-1}j^{2+5} = +\ 2k^7j^7$

Como observamos en estos ejemplos se aplican las leyes de los signos y de los exponentes al hacer operaciones con monomios, nos damos cuenta que al multiplicar dos o más términos con la misma incógnita, los exponentes se suman y en el caso de que haya un exponente negativo los exponentes se restan, espero aclara sus dudas.

Retomando la ley de los exponentes sabemos que también se aplica en la división, en este caso los exponentes de las incógnitas se restan, como podemos observar es lo contrario a la multiplicación. Veamos algunos ejemplos:

Aplicado la ley de los exponentes para la división, es importante que recordemos que cualquier incógnita que tenga exponente negativo se define de la siguiente manera, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

1.) Dividimos b^9 entre b^4.

$$\frac{b^9}{b^4} = b^{9-4} = b^5 .$$

2.) Dividimos g^6h^7 entre g^3h^4.

$$\frac{g^6h^7}{g^3h^4} = g^{6-3}h^{7-4} = g^3h^3 .$$

En estos ejemplos tenemos exponente negativo

3.) Dividimos t^6 entre t^{-2}

Hay que recordar que t^{-2}, se define como $\mathrm{t}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{t}^2}$

$$\frac{t^6}{\frac{1}{t^2}} = \left(t^6\right)\left(t^2\right)$$ Multiplicamos los extremos de la división y nos queda

$$t^{6+2} = t^8$$

4.) Dividimos a^{-7} entre a^{10}

$$\frac{a^{-7}}{a^{10}} = a^{-7-(+10)} = a^{-7-10} = a^{-17}$$

5.) Dividimos b^{-5} entre b^9

$$\frac{b^{-5}}{b^9} = b^{-5-(9)} = b^{-5-9} = b^{-14}$$

Ahora pasaremos a otra de las leyes que es importante

2.3.8 Ley de los coeficientes

¿Cuál es la ley de los coeficientes?

La ley de los coeficientes, es el producto de los coeficientes de los términos. Lo podemos ver mejor en un ejemplo.

Ejemplos:

Multiplicación.

1.) *Multiplicamos 3a por 6b.*

Se escribe *(3a)(6b)* Aplicamos la ley de los coeficientes, éstos son *3 y 6*, ahora los multiplicamos *3 x 6 = 18.*

(3a)(6b) = 18ab Las incógnitas quedan iguales ya que son diferentes, entonces como resultado final de la multiplicación de dos monomios tenemos 18ab.

2.) *Multiplicamos* $6d^5$ *por* $-9d^7$*.*

$(6d^5)(-9d^7) = (6)(-9)d^{5+7} = -54d^{12}$

3.) Multiplicamos $-\frac{3}{2}g por \frac{3}{4}g^2 por -\frac{9}{6}g^{-5}$.

$$\left(-\frac{3}{2}g\right)\left(\frac{3}{4}g^2\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)g^{1+2}=-\frac{9}{8}g^3$$

$$\left(-\frac{9}{8}g^3\right)\left(-\frac{9}{6}g^{-5}\right)=\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{9}{6}\right)g^{3+(-5)}$$

$$\frac{81}{48}g^{3-5}=\frac{81}{48}g^{-2}=\frac{81}{48g^2}$$

4.) Multiplicamos $(-5c)$ por $(-7c^5)$ por $(-c^{-3})$.

Multiplicamos los primeros dos términos posteriormente se multiplica con el último término:

$(-5c)(-7c^5) = +35c^{1+5} = 35c^6$

$(35c^6)(-c^{-3}) = (+35c^6)(-1c^{-3}) = -35c^{6-3} = -35c^3$ quedaría la multiplicación así

$(-5c)(-7c^5)(-c^{-3}) = (-5)(-7)(-1)c^{1+5-3} = -35c^3$

5.) Multiplicamos $(9k^6j^2)$ por $(4k^2)$ por $(-2k^{-1}j^5$

$(9k^6j^2)(4k^2) = 36k^{6+2}j^2 = 36k^8j^2$.

$(36k^8j^2)(-2k^{-1}j^5) = -72k^{8-1}j^{2+5} = -72k^7j^7$ este es el resultado.

$(9k^6j^2)(4k^2)(-2k^{-1}j^5) = (9)(4)(-2)k^{6+2-1}j^{2+5} = -72k^7j^7$

Hay que observar que ocupamos las leyes que ya mencionamos, primero hacemos la multiplicación de los coeficientes, posteriormente aplicamos la ley de los signos y por último la de los exponentes.

Esta ley como las otras también la aplicamos en la división, aunque en este caso los coeficientes se dividen, podemos ver que es lo contrario de lo que acabamos de trabajar, para que les quede más claro veamos unos ejemplos.

División

1.) *Dividimos* $27m^6$ *entre* $9m$.

Escribimos la expresión como:

$$\frac{27m^6}{9m}$$

Los coeficientes son 27 y 9, dividimos y aplicamos ley de los exponentes a las incógnitas.

$$\frac{27m^6}{9m} = 9m^{6-1} = 9m^5$$

2.) *Dividimos* $-20x^6$ *entre* $4x^4$

$$\frac{-20x^6}{4x^4} = \frac{-20}{4}x^{6-4} = -5x^2$$

3.) *Dividimos* $-24a^5b^3$ *entre* $-3a^3b^2$

$$\frac{-24a^5b^3}{-3a^3b^2} = \frac{-24}{-3}a^{5-3}b^{3-2} = 8a^2b$$

4.) *Dividimos* $20t^{-6}$ *entre* $4t^2$

$$\frac{20t^{-6}}{4t^2} = \left(\frac{20}{4}\right)t^{-6-(2)} = 5t^{-6-2} = 5t^{-8}$$

5.) Dividimos $36b^{-5}$ entre $4b^{9}$

$$\frac{36b^{-5}}{4b^{9}} = \left(\frac{36}{4}\right) b^{-5-(9)} = 9b^{-5-9} = 9b^{-14}$$

2.3.9 Inverso aditivo

¿Qué es el inverso aditivo?

Decimos que el inverso aditivo se obtiene cambiando el signo al coeficiente o a la incógnita en caso de que esté sola, el inverso aditivo lo representamos de la siguiente manera.

El inverso aditivo de x es $-x$

De modo que $x + (-x) = x - x = 0$

De 35 su inverso aditivo es -35

De -17 su inverso aditivo es 17

De 59 su inverso aditivo es -59

$(+9wz) - (-4wz) = (+9wz) + (+4wz) = 13wz$

Aplicando el inverso aditivo a la resta.

Hay que observar que el inverso aditivo se ocupa en las operaciones que se hacen con las expresiones algebraicas.

Espero que a los profesores les sirva como apoyo en la enseñanza del álgebra, tal vez no descubra el hilo negro pero sí quiero aportar algo. Los estudiantes podrán preguntarse todo este lenguaje que hemos aprendido para que nos sirve el álgebra, dónde se aplica. Les contestare esta pregunta.

¿Para qué nos sirve el álgebra?

- El álgebra nos sirve para representar problemas.
- El lenguaje algebraico nos ayuda para representar un problema y encontrar su solución.
- Nos ayuda a ordenar y estructurar ideas en nuestra mente, la cual es consecuencia del proceso de abstracción.

¿Cómo se clasifican las expresiones algebraicas?

Todo este lenguaje se clasifica de muchas maneras, porque la combinación que podemos hacer con todo el lenguaje algebraico determinan expresiones que según sus características reciben diferentes nombres, a los cuales les llaman, Monomios estos están formados por un término, los Binomios lo forman dos términos, los Trinomios son los que se forman por tres términos y los Polinomios son lo que se forman por más de tres términos. En este proyecto sólo trabajaremos dos, que son los monomios y polinomios, comenzare por describírselos.

2.4 Monomios

¿Qué es un monomio?

Un monomio está formado por una expresión algebraica, en donde hay solamente un término y éste, está formado por un coeficiente, una incógnita, su exponente y un signo, aunque no siempre aparecen todos.

Por ejemplo:

Los siguientes términos que tenemos aquí son monomios

1.) $6xnm$ — 6 es el coeficiente y x, n, m son incógnitas

2.) $-7h^2$ — -7 es el coeficiente, h es la incógnita y 2 el exponente de h

3.) 2zy — 2 es el coeficiente, z, y son incógnitas

4.) $-8ab^2$ — -8 es el coeficiente, a y b son incógnitas y el exponente b es 2 y el de a es 1

Veamos las operaciones que podemos realizar con ellos.

2.4.1 Suma de monomios.

¿Qué es una suma de monomios?

Esta no es más que una reducción de términos que sean iguales hasta poder llegar a un sólo término ¿cómo es esto?, lo veremos mejor con un ejemplo.

Ejemplo:

a) Tenemos los siguientes términos $6x, - 8x, + 11x, - 2x,$

Estos términos los agrupamos con todo y su signo, vemos que los cuatro términos tienen la misma incógnita x, son términos semejantes que se pueden reducir la expresión para darnos un monomio:

$6x - 8x + 11x - 2x = 7x$

$(6 - 8 + 11 - 2)x = 7x$

b) Tenemos los términos $\frac{5}{8}d^3, +\frac{3}{8}d^3, +\frac{1}{8}d^3$.

Estos tres términos que tienen a la misma incógnita d y el mismo exponente que es tres, se pueden simplificar, nos queda.

$$\frac{5}{8}d^3 + \frac{3}{8}d^3 + \frac{1}{8}d^3 = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)d^3 = \frac{9}{8}d^3$$

En estos ejemplos vemos que es sencillo sumar tres o dos monomios que tengan la misma incógnita, el mismo exponente para que se forme un monomio, pero esto no siempre se cumple ya que podemos tener dos ó más monomios diferentes, que formen un binomio o cualquier polinomio. Mencionaré unos ejemplos en donde al sumar dos o más monomios nos da un binomio, trinomio etc.

c) Tenemos los términos $2p^3, 5p^2, 9p$.

Agrupamos los términos, observamos que tiene la misma incógnita pero el exponente es diferente, por lo tanto no podemos simplificar más, entonces nos queda la siguiente expresión:

$2p^3 + 5p^2 + 9p$ nos queda un trinomio de grado 3

d) Tenemos los términos $7a, -9a, a$.

Agrupamos estos términos, para ver qué expresión nos queda al simplificarla.

$7a - 9a + a = (7 - 9 + 1)a = -a$ éste es el término que resulta.

Pero que pasa si queremos reducir $7a - 9a + a^2$, agrupamos términos semejantes, $7a - 9a$ y a^2 se queda igual.

$$7a - 9a + a^2 = (7-9)a + a^2 = -2a + a^2$$

e) Tenemos los términos, $2h^2g, 2hg, -8$

La expresión algebraica es la siguiente

$2h^2g + 2hg - 8$

Observamos que nos queda un polinomio de grado dos, ya que $2h^2g$ tiene el exponente mayor. Hay que tomar en cuenta que al sumar monomios no siempre nos va quedar un monomio, podemos formar un polinomio y esto depende de los términos que tenga una expresión.

Ahora veremos como podemos formar expresiones algebraicas a partir de un lenguaje común, para que tengan otra visón de cómo las matemáticas influyen en la vida cotidiana.

f) Maria tiene cuatro veces más dinero que Sofía

El dinero de Sofía se representa como	s
Cuatro veces el dinero de María se representa	$m=4s$
La expresión queda así	$m \rangle s$

g) Pepe duplicó las canicas con respecto a las *10* canicas que Luis tiene, ellos juntan sus canicas

Las canicas de Luis se representan	10
Las canicas de Pepe se representan	$2l$
Esta expresión se representa como	$2l+ 10$

h) La suma de dos números más el triple de otro número

Los números cualesquiera se representan	z, m, s
El triple de un número se representa	$3s$
La suma se representa como	$z + m + 3s$

2.4.2 Resta de monomios.

¿Qué es una resta de monomios?

Bueno la sustracción ó resta es simplemente lo contrario a la suma, también se le conoce como una operación inversa a la suma. En esta operación se puede reducir una expresión algebraica hasta llegar a un sólo término.

Ejemplos:

Tenemos los siguientes términos para formar una expresión algebraica:

1.) *Restamos 3z de 7z*

Representamos la expresión de la siguiente manera

$7z– 3z =(7-3)z = 4z$

2.) *Restamos* $5zw^2$ *de* $-11zw^2$.

Son dos formas distintas de representar la expresión, pero esto no significa que sea el mismo resultado, veamos cuales son:

$-11zw^2 – (+5zw^2)$ aplicando la ley de los signos tenemos menos por mas da menos, la expresión nos queda como:

$(-11 - 5)zw^2 = -16\ zw^2$.

Usando los mismos términos pero con signos diferentes el resultado cambia, como lo podemos ver:

$5\ zw^2 - (-11zw^2)$ aplicamos el inverso aditivo a la resta el término que nos queda

$5\ zw^2 + 11zw^2 = (5+11)\ zw^2 = 16\ zw^2$

Nos damos cuenta que el resultado es diferente, pero sólo uno es el correcto.

Ahora qué pasa si combinamos operaciones en una expresión algebraica veamos algunos ejemplos.

1.) Tenemos los términos siguientes $3g, -7f, -11g, -14f, +2g$

La expresión queda así :

$3g-7f-11g-14f+2g$ agrupamos los términos semejantes

$(3g-11g+2g)+(-7f-14f)$

$(3-11+2)g + (-7-14)f = -6g + (-21f) = -6g -21f$

2.) Tenemos los términos: $32x, -6x, +9x, +7x, -10x$

La expresión queda de la siguiente manera:

$32x - 6x + 9x + 7x - 20x = (32x+9x+7x)+(-6x-20x) = 48x-26x = 22x$

En este caso vemos que nos queda un monomio ya que se reduce a un solo término.

3.) Tenemos los términos: $35z, -6yw, +8zk, +14zk$

$35z - 6yw + 8zk + 14zk = 35z - 6yw + (8+14)zk = 35z - 6yw + 22zk$

Simplificamos lo más que se pueda, nos damos cuenta que sólo dos términos tienen las mismas incógnitas y mismo exponente, así que reducimos hasta llegar a un trinomio.

4.) La resta de los cuadrados de dos números cualesquiera menos 20

Los cuadrados de los números se representan b^2, q^2,..
La diferencia de los cuadrados se representa como $b^2 - q^2$
La expresión es: $(b^2 - q^2) - 20$

5.) La resta del doble de paletas y el triple de helados de leche

El doble de paletas los representamos	$2p$
El triple de helados las representamos	$3h$
La diferencia de paletas y helados	$2p - 3h$

Nos damos cuenta que en cualquier expresión que tenga la misma incógnita la podemos reducir tanto como se pueda. Pero también existe que al combinar las operaciones no necesariamente tendremos un monomio, todo depende de las incógnitas y los exponentes de cada término. Ahora pasamos a otra operación que es la multiplicación.

2.4.3 Multiplicación de monomios

¿Qué es una multiplicación de monomios?

La multiplicación de monomios, se lleva a cabo aplicando las leyes de los signos de los exponentes y de los coeficientes. Veamos algunos ejemplos para que sea mas claro.

Ejemplos:

Empecemos con unos fáciles

1.) multiplicar $8x$ por $2x$

$$(8x)(2x)=(8)(2)(x)(x)=(16)(x^2)=16x^2$$

2.) multiplicar $12w$ por y

$$(12w)(y)=(12)(1)(w)(y)=(12)(w)(y)=12wy$$

3.) Multiplicar $9x^3y^5$ *por* $-4x^2y^4$

La expresión se representa de la siguiente manera, aplicando las leyes correspondientes, hay que tomar en cuenta que los términos tienen las mismas incógnitas, queremos reducir lo más que se pueda la expresión:

$$(9x^3y^5)(-4x^2y^4)= (9)(-4)x^{3+2}y^{5+4} = -36\ x^5y^9$$

4.) Multiplicar $-\frac{5}{6}w^5z^6$ por $-\frac{3}{10}w^9z^2$

La expresión se representa de la siguiente manera:

$$\left(-\frac{5}{6}w^5z^6\right)\left(-\frac{3}{10}w^9z^2\right)=\left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)w^{5+9}z^{6+2}=\frac{15}{60}w^{14}z^8=\frac{1}{4}w^{14}z^8$$

Hay que tomar en cuenta que tenemos dos signos negativos, éstos al multiplicarlos queda positivo, el grado del monomio es *14*

5.) Multiplicamos a^3b *por* $6ab^4$

La expresión es la siguiente:

$$(a^3b)(6ab^4) = (1)(6)\, a^{3+1}b^{1+4} = 6a^4b^5$$

6.) Multiplicamos $-\frac{x}{2}$ por $12x^{-5}$

La representación algebraica es la siguiente:

$$\left(-\frac{x}{2}\right)\left(12x^{-5}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(12\right)x^{1+(-5)}=-\frac{12}{2}x^{1-5}=-6x^{-4}$$

7.) El producto de un número por la suma de tres números

Un número se representa	m
La suma de 3 números se representa	$k + g + j$
La expresión algebraica es	$m(k+g+j)$

8.) El doble de un número por el cubo de otro número

El doble de un número se representa	$2b$
El cubo de un número se representa	n^3
La expresión algebraica es	$2b(n^3)$

2.4.4 División de monomios

¿Qué es una división de monomios?

En esta regla, son tres cosas que se deben realizar:

- se dividen los coeficientes
- se restan los exponentes de las incógnitas
- se aplica la regla de los signos

Hay que describirlo mejor con ejemplos, también recordar que una incógnita o un número que tenga exponente cero es uno, $a^0 = 1$ esto es por definición.

1.) El cociente de $9m$ entre $3m$

$$\frac{9m}{3m}=\frac{9}{3}\frac{m}{m}=3m^{1-1}=3m^0=3$$

2.) El cociente $36p^5$ entre *9p*

$$\frac{36m^5}{9m} = \frac{36}{9}\frac{m^5}{m} = 4m^{5-1} = 4m^4$$

3.) El cociente de -5 $n^4 m^5 q$ entre – $n^3 m^2$

$$\frac{-5n^4m^5q}{-n^3m^2} = \left(\frac{-5}{-1}\right)n^{4-3}m^{5-2}q = 5nm^3q$$

Observamos los signos son iguales por lo tanto nos da un signo positivo.

4.) El cociente de $20x^6$ entre $4\,x^4$

$$\frac{20x^6}{4x^4} = \left(\frac{20}{4}\right)x^{6-4} = 5x^2$$

5.) Tenemos el cociente de $36\,w^{3/4}\ z^{1/3}$ entre $9\,w^{1/4}z^{2/3}$

$$\frac{36w^{3/4}z^{1/3}}{9w^{1/4}z^{2/3}} = \left(\frac{36}{9}\right)w^{3/4-1/4}z^{1/3-2/3} = 4w^{2/4}z^{-1/3} = 4w^{1/2}z^{-1/3}$$

6.) Tenemos $18b^{-2}d^3g$ entre $2\,bd$
La expresión es la siguiente:

$$\frac{18b^{-2}d^3g}{2bd} = \left(\frac{18}{2}\right)b^{-2-1}d^{3-1}g = 9b^{-3}d^2g$$

Hemos repasado como se trabaja con los monomios, ahora hay que abordar los polinomios, entonces recordemos estas expresiones algebraicas, cómo se forman, cuántos términos tienen y cómo se realizan sus operaciones.

2.5 Polinomios.

¿Sabes qué es un polinomio?

Esta, es una expresión algebraica que consta de un conjunto de términos ligados por una operación aritmética.

Ejemplos:

a.) $a^3 - 3a^2 - 10a + 24$ tiene cuatro términos

b.) $25w^5 - 30w^4 + 34w^3 - 12w^2 + 43w + 9$ tiene seis términos c.) $-15bd^4 + 34b^3d - 12bd + 25$ tiene cuatro términos

d.) $3y^7 + 12y^5 - 6y^3 - 22y^2 + 4y - 33$ tiene seis términos

Ya les había mencionado que el grado de un polinomio lo determina el exponente mayor de todos los términos; éstos se pueden ordenar de mayor a menor o de menor a mayor. Comencemos a ver las operaciones que vamos emplear en los polinomios, pero vamos a dar la explicación mediante ejemplos.

2.5.1 Suma de polinomios.

La suma de polinomios es parecida a la de los monomios, se trata de simplificar lo más que se pueda.

Ejemplos:

1.) sumar $5d + 9f - 6$ *más* $-3d - 4f + 7$

La suma se indica incluyendo la suma dentro de los paréntesis, entonces:

$(5d+9f-6)+(-3d-4f+7)$; agrupamos término a término y simplificamos

$(5d - 3d) + (9f - 4f) + (-6 + 7) = 2d + 5f + 1$

Como resultado queda un polinomio de grado uno.

2.) Sumar $-\frac{3}{4}z^3 + \frac{1}{8}z^2$ y $\frac{1}{4}z^3 - \frac{5}{8}z^2$.

La expresión es la siguiente:

$\left(-\frac{3}{4}z^3 + \frac{1}{8}z^2\right) + \left(\frac{1}{4}z^3 - \frac{5}{8}z^2\right)$ Agrupamos términos semejantes para simplificar

$$\left(-\frac{3}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^3\right) + \left(\frac{1}{8}z^2 - \frac{5}{8}z^2\right) = -\frac{2}{4}z^3 - \frac{4}{8}z^2$$

Da como resultado un polinomio de grado tres

3.) Sumar $7g^4 + 9g + 18$ más $12g^3 - 6g^2 - 12$

$(7g^4 + 9g^2 + 18) + (12g^4 - 6g^2 - 12)$ Simplificado, los términos tenemos

$(7g^4 + 12g^4) + (9g^2 - 6g^2) + (18 - 12)$

$(7+12)\, g^4 + (9-6)\, g^2 + 6$

$19\, g^4 + 3g^2 + 6$ Nos queda un polinomio de grado cuatro

4.) Se puede hacer la suma de polinomios en columnas, tenemos las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{l} 4w^2 - 10w - 6 \\ +5w^2 - w + 2 \\ \underline{\quad w^2 + w + 16} \\ 10w^2 - 10w + 12 \end{array}$$

5.) Sumar $\left(\frac{6}{4}p^{-2}+\frac{3}{7}p^{3}+\frac{4}{5}\right)$ más $\left(\frac{1}{4}p^{-2}+\frac{6}{7}p^{3}+\frac{3}{5}\right)$

La expresión es la siguiente:

$$\left(\frac{6}{4}p^{-2}+\frac{3}{7}p^{3}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}p^{-2}+\frac{6}{7}p^{3}+\frac{3}{5}\right)$$ Simplificado, los términos tenemos

$$\left(\frac{6}{4}p^{-2}+\frac{1}{4}p^{-2}\right)+\left(\frac{3}{7}p^{3}+\frac{6}{7}p^{3}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{7}{4}p^{-2}+\frac{9}{7}p^{3}+\frac{7}{5}$$

Nos queda un polinomio de grado tres

2.5.2 Resta de polinomios

Ahora trabajaremos la resta con polinomios, trataré de que sea claro el procedimiento iremos describiendo cada uno de los pasos.

Ejemplos:

1.) Restamos $\left(2c^2d-5c-3\right)$ *de* $\left(5c^2d+8c-7\right)$

Primero agrupamos nuestros términos que sean semejantes, para hacer la operación correspondiente

$$\left(5c^2d+8c-7\right)-\left(2c^2d-5c-3\right)$$

En la segunda expresión aplicaremos el inverso aditivo, o sea que le cambiamos el signo a toda la expresión y ésta nos queda de la siguiente forma.

$$\left(5c^2d+8c-7\right)+\left(-2c^2d+5c+3\right)$$
$$\left(5c^2d-2c^2d\right)+\left(8c+5c\right)+\left(-7+3\right)$$
(5-2)c^2d+(8+5)c + (-4)
$$=3c^2d+13c-4$$ El resultado es un polinomio de segundo grado

2.) Restamos $(j^2 + 8jh - 5h^2)$ *de* $(3j^2 + jh - 6h^2)$

La expresión es la que sigue, es importante aclara que restar es equivalente a multiplicar por -1 el término que vamos a sustraer:

$(3j^2 + jh - 6h^2) - (j^2 + 8jh - 5h^2)$ aplicamos el inverso aditivo.

$(3j^2 + jh - 6h^2) + (-j^2 - 8jh + 5h^2)$ agrupamos término a término.

$(3j^2 - j^2) + (jh - 8jh) + (-6h^2 + 5h^2) = 2j^2 - 7jh - h^2$

La expresión reducida es $2j^2 - 7jh - h^2$

3.) Restamos $\left(-\frac{2}{3}k^5 + \frac{3}{4}n^8\right)$ *de* $\left(\frac{1}{6}k^5 - \frac{1}{2}n^8\right)$

La expresión es la siguiente:

$\left(\frac{1}{6}k^5 - \frac{1}{2}n^8\right) - \left(-\frac{2}{3}k^5 + \frac{3}{4}n^8\right)$ aplicamos el inverso aditivo

$\left(\frac{1}{6}k^5 - \frac{1}{2}n^8\right) + \left(+\frac{2}{3}k^5 - \frac{3}{4}n^8\right)$ Agrupamos término a término

$\left(\frac{1}{6}k^5 + \frac{2}{3}k^5\right) + \left(-\frac{1}{2}n^8 - \frac{3}{4}n^8\right)$ Haremos una suma de fracciones

$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$, la otra es $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-2-3}{4} = \frac{-5}{4}$ después de realizar las operaciones

$= \frac{5}{6}k^5 - \frac{5}{4}n^8$

La expresión resultante es un polinomio de grado ocho

4.) Restamos $(a^5 – 7a^6 - 12a^3 + 25a^2)$ *de* $(20a^5 – 8a^6 - 6a^3 + 11a^2 + 35)$

La expresión que formamos es la siguiente:

$(20a^5 – 8a^6 - 6a^3 + 11a^2 + 35) - (a^5 – 7a^6 - 12a^3 + 25a^2)$
Aplicamos el inverso aditivo

$(20a^5 - 8a^6 + 6a^3 + 11a^2 + 35) + (-a^5 + 7a^6 + 12a^3 - 25a^2)$
Agrupamos término a término

$(20 - 1)a^5 + (-8 + 7)a^6 + (6 + 12)a^3 + (11 - 25)a^2 + 35$

$= -a^6 + 19a^5 + 18a^3 - 14a^2 + 35$

El resultado nos queda que es un polinomio de grado seis

Ahora hay que aplicar la resta en un enunciado con lenguaje común, se darán unos ejemplos.

5.) La resta de dos números cualesquiera.

Los números cualesquiera son	a, b
La diferencia se representa como	$a-b$

6.) La resta del triple de un número menos la mitad de la sustracción de otros dos números cualesquiera

Esta expresión algebraica la representamos como:

El triple de un número	$3k$
La mitad de dos números cualesquiera	$\frac{n-m}{2}$
La diferencia se representa como	$3k-\left(\frac{n-m}{2}\right)$

7.) La diferencia de un número al cubo y el cuadrado del producto de dos números cualesquiera

Esta expresión algebraica la representamos como:

El cubo de un número cualquiera	w^3
El cuadrado del producto de dos números	$(zy)^2$
La diferencia se representa como	$w^3 - (zy)^2$

Como podemos observar que hay una infinidad de ejemplos desde el más fácil hasta el más complejo pero no imposibles de representar, sigamos con la multiplicación de polinomios.

2.5.3 Multiplicación de polinomios

En la multiplicación de polinomios tendremos dos casos que son:

1º. La multiplicación de un monomio con a un polinomio.

2º. La multiplicación de polinomios.

Emplearemos algunos ejemplos para que nos quede lo veamos claro.

Empezaremos con la multiplicación de un monomio por un polinomio.

Ejemplos:

1.) *Multiplicamos el monomio* $(-2d)$ *por el polinomio* $(-6d^2 - 8d + 4)$

La expresión algebraica es la siguiente:

$(-2d)(-6d^2 - 8d + 4)$

El monomio va multiplicar a cada uno de los términos que forman al polinomio desarrollemos para que lo puedan entender mejor:

$(-2d)(-6d^2) = (-2)(-6)d^{1+2} = 12d^3$ aplicando la ley de los cocientes, los signos y de los exponentes

$(-2d)(-8d) = (-2)(-8)d^{1+1} = 16d^2$

$(-2d)(4) = (-2)(4)d = - 8d$

Ordenamos los términos resultantes

$(2d)(-6d^2 - 8d + 4) = -12d^3 - 16d^2 + 8d$

Nos queda un polinomio de grado 3, como vemos el grado del polinomio aumento.

2.) *Multiplicar el monomio* $(3k)$ *por* $(4k^4 + 7k - 10)$

Tenemos que la expresión es

$(3k)(4k^4 + 7k - 10) = (3)(4)k^{1+4} + (3)(7)k^{1+1} + (3)(-10)k$

$= 12k^5 + 21k^2 - 30k$

3.) *Multiplicar* $\left(\frac{x}{2}\right)$ *por* $\left(8x^2 - 6x + 14\right)$

Formamos la siguiente expresión.

$\left(\frac{x}{2}\right)\left(8x^2 - 6x + 14\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(8)x^{1+2} + \left(\frac{1}{2}\right)(-6)x^{1+1} + \left(\frac{1}{2}\right)(14)x$$

$$=\frac{8}{2}x^3-\frac{6}{3}x^2+\frac{14}{2}x$$

$$=4x^3-2x^2+7x$$

4.) *Multiplicar* $(6a^2)$ por $(a^4 - 7a + 9)$

Formamos la siguiente expresión.

$(6a^2)(a^4 - 7a + 9) = (6)(1)a^{2+4}+(6)(-7)a^{2+1}+(6)(9)a^2$

$= 6a^6 - 42a^3 + 54a^2$

Ahora pasamos con la multiplicación de polinomios, vamos hacer las operaciones paso a paso.

1.) *Multiplicamos* $(c - 5)$ por $(5c - 9c^4 + 12)$

La expresión algebraica es la siguiente:

$(c - 5)(5c - 9c^4 + 12)$

El polinomio $c-5$, primero c multiplica a cada uno de los términos del polinomio, considerando que su coeficiente es 1

$(c)(5c - 9c^4 + 12) = (1)(5)c^{1+1}+(1)(-9)c^{1+4}+(1)(12)c = 5c^2 - 9c^5 + 12c$

Posteriormente -5 multiplica a cada uno de los términos del polinomio.

$(-5)(5c - 9c^4 + 12) = (-5)(5)c+(-5)(-9)c^4+(-5)(12) = -25c + 45c^4 - 60$

Ahora ordenamos todo para simplificar

$(c - 5)(5c - 9c^4 + 12) = (5c^2 - 9c^5 + 12c)+(- 25c + 45c^4 - 60)$

$=- 60+ (12 - 25)c + 5c^2+45c^4-9c^5$

$= -9c^5 +45c^4+ 5c^2- 13c - 60$ otra vez aumento el grado

2.) *Multiplicamos* $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$ por $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)$

La expresión algebraica es la siguiente:

$\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)$ Hacemos las operaciones correspondientes

$$\left(\frac{1}{3}x^2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)=\frac{2}{9}x^{2+2}-\frac{1}{12}x^2y^2=\frac{2}{9}x^4-\frac{1}{12}x^2y^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)=-\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{1}{8}y^{2+2}=-\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{1}{8}y^4 \text{ Ordenamos términos}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}y^2\right)=\left(\frac{2}{9}x^4-\frac{1}{12}x^2y^2\right)+\left(-\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{1}{8}y^4\right)$$

$$=\frac{2}{9}x^4-\frac{5}{12}x^2y^2+\frac{1}{8}y^4$$

3.) *Multiplicamos* $(-2r^3 + 6r^2 -3r + 1)$ por $(4r^2 - 6r - 1)$

La expresión algebraica es la siguiente:

$(-2r^3 + 6r^2 -3r + 1)(4r^2 - 6r - 1)$: hacemos las operaciones

$(-2r^3)(4r^2 - 6r - 1) = (-2)(4)r^{3+2}+(-2)(-6)r^{3+1}+(-2)(-1)r^3 = - 8r^5 + 12r^4 + 2r^3$

$(6r^2)(4r^2 - 6r - 1) = (6)(4)r^{2+2}(6)(-6)r^{2+1}+(6)(-1)r^2 = 24r^4 - 36r^3 - 6r^2$

$(-3r)(4r^2 - 6r - 1) = (-3)(4)r^{1+2}+(-3)(-6)r^{1+1}+(-3)(-1)r =-12r^3 + 18r^2 + 3r$

$(1) (4r^2 - 6r - 1) = (1)(4)r^2+(1)(-6)r+(1)(-1) = 4r^2 - 6r - 1$

$(-2r^3 + 6r^2 -3r + 1)(4r^2 - 6r - 1)$ agrupamos términos y simplificamos

$= (- 8r^5+12r^4+2r^3)+(24r^4-36r^3-6r^2)+(-12r^3 + 18r^2 + 3r)+(4r^2 -6r-1)$

$= -8r^5+ (12+24)r^4+ (2-36-12)r^3+ (-6+18+4)r^2+(3-6)r - 1$

$= - 8r^5 + 36r^4 - 46r^3 + 16r^2 -3r - 1$

Queda un polinomio de grado cinco

Por ultimo nos queda ver la división de polinomios, esta operación ya la conocemos. Iniciemos

2.5.4 División de polinomios

En la división de polinomios tendremos dos casos que son:

1º. La división de un polinomio con respecto a un monomio

2º. La división de polinomios

Con algunos ejemplos iremos viendo el desarrolló de esta operación, no es tan complicado solamente hay que analizar los pasos a seguir y poner mucha atención en cada uno. Entonces comencemos con la división de polinomios entre monomios.

Ejemplos:

1.) *Dividir* $20f^4 - 5f^3 - 10f^2 + 15f$ entre $-5f$

La expresión algebraica que se forma es la siguiente:

$\dfrac{20f^4 - 5f^3 - 10f^2 + 15f}{-5f}$ el desarrollo va ser por partes para que comprendan

$$\frac{20f^4 - 5f^3 - 10f^2 + 15f}{-5f} = \frac{20}{-5}f^{4-1} - \frac{5}{-5}f^{3-1} - \frac{10}{-5}f^{2-1} + \frac{15}{-5}f^{1-1}$$

Hacemos las operaciones

$$= -4f^3 + f^2 + 2f - 3$$

Como podemos notar, se dividen los coeficientes, los exponentes se restan y por último aplicamos la regala signos donde sabemos que menos entre más da menos, así cómo menos entre menos da más. No es tan complicado, es largo pero no imposible de hacer.

2.) Dividir $18a^3 b - 12a^2 b^2 + 36a^4 b^4$ *entre* $6a^{-2} b$

La expresión algebraica que se forma es la siguiente:

$$\frac{18a^3b - 12a^2b^2 + 36a^4b^4}{6a^{-2}b} = \frac{18}{6}a^{3-(-2)}b^{1-1} - \frac{12}{6}a^{2-(-2)}b^{2-1} + \frac{36}{6}a^{4-(-2)}b^{4-1}$$

$$= 3a^{3+2}b^0 - 2a^{2+2}b^{2-1} + 6a^{4+2}b^{4-1}$$

$$= 3a^5 - 2a^4b^1 + 6a^6b^3$$

3.) Dividir $14w^4z^2 - 6w^2z - 12wz^2$ *entre* $-2wz$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\;\frac{14w^4z^2-6w^2z-12wz^2}{-2wz}=\left(\frac{14}{-2}\right)w^{4-1}z^{2-1}+\left(\frac{-6}{-2}\right)w^{2-1}z^{1-1}+\left(\frac{-12}{-2}\right)w^{1-1}z^{2-1}$$

$$=-7w^3z^1+3w^1z^0+6w^0z^1$$

$$=-7w^3z+3w+6z$$

Esto ha sido un repaso de unos temas que se ven en secundaria, se hizo con el fin de que recordaran todo lo que el profesor de matemáticas les ha enseñado. Ya que la propuesta de este trabajo se basa en unos juegos que requieren de estos conocimientos para que puedan realizar esta actividad. En el siguiente capitulo, los estudiantes reforzaran todo esto que han aprendido, mediante dos juegos que se describirán más adelante, como podemos observar esta es una estrategia para que los estudiantes desarrollen sus habilidades y puedan resolver los problemas.

CAPÍTULO III

JUEGOS MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

3.1 Introducción.

Los juegos se han visto unidos a la historia de las matemáticas desde los tiempos más antiguos, por un lado los juegos contribuyeron al desarrollo de varias áreas de la matemática como la probabilidad que surge a partir de los juegos de azar. Así como en distintos juegos. La aritmética esta integrada en los cuadrados mágicos, el álgebra es la base de los acertijos, como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una replica suya sin arrugar, calcular la edades de alguien. La lógica da lugar a las paradojas que llaman la atención, sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Los juegos están ligados a las matemáticas, ya que es una aplicación de ellas. El estudio de los juegos ha inspirado a los científicos de todos los tiempos al desarrollo de teorías y modelos matemáticos.

Destacamos la importancia del juego en la infancia y en la adolescencia, como el medio para aprender de forma experimental y relacionarse en sociedad para resolver problemas y situaciones difíciles. El juego se considera un ejercicio recreativo sometido a reglas, que adquieren importancia porque es un medio de combatir las ideas que se tiene acerca de lo difícil, cómo son las matemáticas, pero al aplicarlas dentro de un juego se pueden entender de manera más natural.

Es posible relacionar los conocimientos que se han aprendido en la escuela con los problemas que tenemos cotidianamente, esto de manara entretenida y divertida. Se logra mediante dinámicas de juegos, para poder lograr que los estudiantes construyan sus propias estrategias y logren obtener las soluciones deseadas. Estas estrategias dependen de un proceso de pensamiento formal y abstracto, previo al juego y durante el juego.

Como podemos ver los juegos son fundamentales en la enseñanza de las matemáticas, por lo cual en éste trabajo se desarrollaron dos juegos, para que los estudiantes reafirman sus conocimientos del lenguaje algebraico de una manera amena, así como las operaciones que se realizan con los monomios y polinomios, estos juegos son: un memorama y una lotería. Son juegos muy antiguos, los han jugado infinidad de gentes de cualquier nivel social. Procedamos a describir cada uno de estos juegos, así como las reglas para jugarlos.

3.2 Memorama.

Memorama Algebraico

Descripción del juego:

El juego consiste, en establecer las correspondencias necesarias para identificar pares lógicos en las tarjetas de acuerdo a su oración y a su expresión algebraica, este juego seguirá las reglas básicas de los memoramas tradicionales.

Este material reúne ejercicios con monomios y polinomios para que los estudiantes identifiquen y practiquen el manejo del lenguaje algebraico así como del lenguaje común.

Objetivo del juego:

Se pretende que a lo largo del juego los estudiantes puedan aplicar todas las técnicas y conocimientos adquiridos sobre estos temas. Para que sepan identificar una enunciado con su expresión algebraica.

El objetivo es que el alumno relacione el lenguaje común que aparece en la carta con la expresión algebraica que le corresponda, de esa manera se irán formando las parejas.

Material para el juego:

El juego consta de 46 tarjetas, en las cuales 23 habrá lenguaje común y en las otras 23 sus expresiones algebraicas

Dinámica del juego:

a. Los equipos son de tres personas máximo.

b. Los jugadores deberán tener a la mano papel y lápiz.

c. Las cartas deben de estar volteadas boca abajo para que no se vean.

d. Se separaran las cartas que tengan el lenguaje común, con respecto a las que tengan las expresiones algebraicas, asea que se harán dos montones de cartas.

e. Una persona del equipo empezara a levantar la primera carta, si en esta sale un enunciado tiene que levantar otra carta en donde aparezca su expresión algebraica, y si no sale tiene que regresar las cartas de nuevo. Entonces le tocará al siguiente, si éste al levantar su carta encuentra su otra parte el continúa el juego hasta que se equivoque, y así sucesivamente.

f. Gana quien tenga más pares de cartas.

A continuación les daré los enunciados con sus respectivas expresiones algebraicas.

(1) Sumar tres números diferentes.	(1) $a + b + c$
(2) Sumar dos veces el mismo número.	(2) $x + x$
(3) El precio de una piña es cuatro veces el valor de una manzana.	(3) $p = 4m$
(4) La cuarta parte de una cantidad que no conocemos.	(4) $\frac{z}{4}$
(5) El doble de un número más seis veces el cuadrado de otro número.	(5) $2a + 6p^2$
(6) El producto de un número por la resta de dos números distintos.	(6) $c(d - a)$

(7) María tiene cuatro veces más dinero que Sofía, cuánto reúnen entre las dos.	(7) $4s + s$
(8) La suma de dos números más el triple de otro número.	(8) $(z + m) + 3s$
(9) La resta de los cuadrados de dos números distintos menos 20.	(9) $(b^2 - x^2)- 20$
(10) La resta del doble de paletas y el triple de helados de leche.	(10) $2p - 3h$
(11) El producto de un número por la suma de tres números distintos.	(11) $m(k+g+h)$
(12) El doble de un número por el cubo del mismo número.	(12) $2b(b^3)$

(13) La resta de la mitad de un número con la quinta parte del mismo número.	(13) $\frac{h}{2} - \frac{h}{5}$
(14) El doble de la suma de un número cualquiera más tres.	(14) $2(g+3)$
(15) La quinta parte de un número más tres.	(15) $\frac{w}{5}+3$
(16) el cuadrado de la diferencia de dos números.	(16) p^2-q^2
(17) La mitad del producto de dos números al cubo.	(17) $\frac{a^3b^3}{2}$
(18) El producto de dos números consecutivos.	(18) $k(k+1)$

(19) El doble de un número al cuadrado.	(19) $2a^2$
(20) El doble del cubo de un número más cuatro.	(20) $2a^3 +4$
(21) El triple del cuadrado de un número, más el doble del mismo número más veintiséis.	(21) $3y^2 +2y+26$
(22) El doble producto de dos números.	(22) $2(yg)$
(23) El peso de las naranjas es tres veces más que el de las guayabas.	(23) $n=3g$

3.3 Lotería.

Lotería Algebraica

Descripción del juego:

En esta actividad se trata de que los estudiantes trabajen con el material que esta en el programa de las unidades vistas. Se dio un repaso en el capitulo anterior de los contenidos. Con este juego, lo que deseamos es que los estudiantes ejerciten sus habilidades intelectuales, como la concentración y la observación. En este juego el profesor divide al grupo en equipos de 3 o 4 estudiantes por tablero. Los estudiantes realizaran las operaciones correspondientes, de acuerdo a cada expresión.

Objetivo del juego:

Se pretende que a lo largo del juego los estudiantes apliquen todas las técnicas y conocimientos adquiridos sobre estos temas.

El material de esta lotería está diseñado para desarrollar el juego en dos etapas y cada etapa tiene su propio objetivo. Mencionaremos cada uno de éstos.

1.) *Primera etapa: Identificación de monomios y polinomios.*

Objetivo:

Que los estudiantes apliquen todas las técnicas que se enseñaron para poder diferenciar un monomio de un polinomio.

2.) *Segunda etapa: Manipulación de las operaciones básicas de los monomios y polinomios.*

Objetivo:

Que los estudiantes descubran, que un resultado algebraico ya sea monomio o polinomio puede representarse mediante diferentes operaciones.

Material para el juego:

El juego consta de 12 tableros y 53 tarjetas, así como de fichas de color rojo y azul, por equipo.

Cada tablero contiene: Expresiones algebraicas, de monomios y polinomios, con sus respectivas operaciones. Los jugadores deberán tener cuidado para poder distinguir cada una de estas operaciones; también deben de observar si sus incógnitas son iguales o diferentes y que éstas operaciones a su vez forman ya sea un polinomio ó un monomio.

Cada carta contiene: Las respuestas de las expresiones algebraicas, distribuidas de la siguiente manera.

Son 53 cartas de las cuales 10 son de suma y éstas a su vez 5 para monomios, 5 para polinomios, 10 de resta igualmente se reparten 5 monomios y 5 polinomios. También son 10 para la multiplicación y 10 para la división, para estas dos operaciones se repartirán de la misma manera que en las anteriores. Pero en las restantes se encontrarán expresiones combinadas ya sea suma, resta, multiplicación y división.

Regla del juego:

1.) Los jugadores deberán tener a la mano papel y lápiz para hacer cálculos.

2.) Se reparte un tablero por equipo, éstos son de máximo tres personas.

3.) El profesor o un representante del grupo empezará a leer las cartas, dando un tiempo a que los alumnos identifiquen cada una de las respuestas con su expresión algebraica que se encuentra en el tablero.

4.) Si alguno de los jugadores hace trampa, el equipo será descalificado.

5.) El equipo puede hacer lotería por renglones, por columnas y por diagonales, ya que el tiempo que se dará será de 20min.

Dinámica del juego:

1.) Identificación de monomios y polinomios.

b) si identificas un monomio coloca una ficha azul.

c) Si identificas un polinomio coloca una ficha roja.

2.) Segunda etapa: Manipulación de las operaciones básicas de los monomios y polinomios.

Si identificas una expresión en el tablero que tenga como resultado el monomio ó polinomio, que está en la carta, deberás colocar una ficha de cualquier color.

Este juego les ayudará a reforzar todo lo que han aprendido, así como desarrollar las habilidades que cada uno de los estudiantes tenga, para trabajar con cualquier expresión algebraica ya sean sencillas o complicadas, además de que es una manera diferente de aprender, es posible aprender jugando.

Mostraré como se diseñarán los tableros con los ejercicios, así como las cartas con las soluciones de las expresiones que van estar en los tableros:

Este es el diseño de los tableros:

$\frac{5}{6a}-\frac{1}{6}a-3+2$	$\left(2ab^2\right)\left(2a^2b^2\right)$	$\frac{x}{2}\left(4x^2-6x+14\right)$
$3a^3b^3+3a^3b^3$	$\left(-2p^2+1\right)+\left(4-q-3p^2\right)$	$22g^2k^3$ - $4g^2k^3+6g^2k^3$
$\left(2xw-3ts\right)+\left(9xw+9ts\right)$	$10ab-2ab$	$\left(8n-9m\right)\left(8n+9m\right)$

$\left(-\frac{2}{3}c\right)\left(\frac{3}{4}c7\right)$	$\frac{5}{6}a^2-3+\frac{1}{6}a^2+2$	$12a^3b^2-6a^3b^2$
$\frac{60u^4v^5w^6}{12uv^2w^4}$	$\left(k-9\right)\left(k-8\right)$	$\frac{4}{7}z3+\frac{3}{7}z3$
$-4z\left(6z^2+4z-10\right)$	$\frac{2y^3-y^2+3y}{y}$	$\left(\frac{3}{4}p^3-\frac{5}{8}p\right)+\left(\frac{3}{4}p^3+\frac{12}{8p}\right)$

$5hk+2hk$	$a^4-(8a^2b^2-4)$	$\left(\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\right)z^3$
$\left(-\frac{3}{2}n\right)\left(\frac{4}{3}n^2\right)$	$\frac{12d^3+36d^2-30d}{3d}$	$(5a-3b+ab)-(5a)$
$(-2p^2+1)+(4-q-3p^2)$	$6a-4a+3a-2a$	$3m(m)$

$m^2+m^2+m^2$	$(-4f^3g^5)(-7f^2g^3)$	$4xw+6ts+7xw$
$-\frac{3}{10}a^2x^3(3a-5b)$	$\frac{3e^3-6e^2f^2+9ef^2}{3e}$	$7c-12c+c$
$(-8mn)-(9mn)$	$\frac{x}{2}(4x^2-6x+14)$	$\frac{1}{4}w^4z^2+\frac{2}{4}w^4z^2$

$\dfrac{36a^4b^4}{6ab^2}$	$(k-9)(k-8)$	$\dfrac{5x^4-3x^2-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}$
$(5a-3b+ab)-(5ab)$	$\dfrac{60u^4v^5w^6}{12uv^2w^4}$	$\left(\frac{5}{4}p^3+\frac{1}{8}p\right)+\left(\frac{1}{4}p^3\right)$
$\dfrac{12d^3+36d^2-30d}{3d}$	$(-x)\left(-\frac{18}{4}x^3\right)$	$(25jkl)+(-2jkl)$

$2m+m$	$(2ab^2)(2a^2b^2)$	$a^4+(-8a^2b^2+b^4)$
$\dfrac{-57g^8h^5}{3g^5h^2}$	$2.5k+7.5mk+3.7k+2$	$\dfrac{27k^4+57k^3+81k^2}{9k^2}$
$(-21c)-(-8c)$	$(-2n^2)n$	$-4z(6z^2+4z-10)$

$7x+x$	$\left(-4f^{3}g^{5}\right)\left(-7f^{2}g^{3}\right)$	$\frac{1}{3}p^{4}q^{5}+\frac{1}{2}p^{4}q^{5}+8$
$\dfrac{5x^{4}-3x^{2}-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}$	$\left(2a^{3}-3a^{2}+4\right)-\left(a^{2}-2a-2\right)$	$\dfrac{-57g^{8}h^{5}}{3g^{5}h^{2}}$
$\frac{2}{16}yz^{2}+\frac{6}{16}yz^{2}$	$\left(-2p^{2}+1\right)+\left(4-q-3p^{2}\right)$	$(8n-9m)(8n+9m)$

$\left(11pq^{2}\right)-\left(4pq^{2}\right)$	$(3a-4b)-(a+7b)$	$\dfrac{27k^{4}+57k^{3}+81k^{2}}{9k^{2}}$
$\left(\frac{1}{2}c^{3}\right)\left(-c^{-9}\right)$	$\dfrac{-24x^{5}z^{3}}{3x^{3}z}$	$-\frac{3}{10}a^{2}x^{3}(3a-5b)$
$(15jkl)-(-8jkl)$	$6.2p+7.5np+2$	$6a-4a+3a-2a$

$\left(6m^2-3mn\right)\left(m^2-5mn\right)$	$11ab-3ab$	$\dfrac{5.1a^2b^2-3.4ab}{1.7ab}$
$\dfrac{5}{8}x^2-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{8}x^2$	$\dfrac{-47a^5}{7a^2}$	$\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}b\right)\left(\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b\right)$
$5a^2+9b^3+12a+4a^2$	$\dfrac{x^2}{2}\left(9x^2\right)$	$2a^3b^2+4a^3b^2$

$\left(3a+b\right)-\left(-5a-1-b\right)$	$\dfrac{14w^4z^2-6w^2z-12w}{-2wz}$	$5a^2+9b^3+12a+4a^2$
$\dfrac{-18m^3n^2}{-6m^2n}$	$\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}b\right)\left(\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b\right)$	$\dfrac{7}{9}p+\dfrac{1}{3}p+2q$
$2\left(2hk\right)+3kh$	$\left(-2p^2+1\right)+\left(4-q-3p^2\right)$	$8z^3-7z^3$

$2ab+3ab+ab$	$\frac{1}{3}p^4q^5+\frac{1}{2}p^4q^5+8$	$e\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}f-\frac{6}{3}g\right)$
$\left(2a^3-3a^2\right)-\left(a^2-2a\right)$	$a^2b\left(4ab^3\right)$	$\frac{14w^4z-6wz-12w}{-2wz}$
$5hk+2hk$	$\frac{7}{9}p+\frac{1}{3}p+2q$	$22g^2k^3-4g^2k^3+6g^2k^3$

$\left(-\frac{2}{3}c\right)\left(\frac{3}{4}c^7\right)$	$a^4-\left(8a^2b^2-b^4\right)$	$12a^3b^2-6a^3b^2$
$\frac{-47a^5}{7a^2}$	$\left(k-9\right)\left(k-8\right)$	$\frac{5.1a^2b^2-3.4ab}{1.7ab}$
$\left(6m^2-3mn\right)\left(m^2-5mn\right)$	$\frac{x^2}{2}\left(9x^2\right)$	$\left(\frac{3}{4}p^3-\frac{5}{8}p\right)+\left(\frac{3}{4}p^3+\frac{12}{8p}\right)$

Este es el diseño de las cartas

$2a-11b$	$19g^3h^3$	$5u^3v^3w^2$
$4d^2+12d-10$	$-7a^3$	z^3
$-17mn$	$-7w^3z+6z^{-1}+3$	$3k^2+6k+9$

$-8w^2z^2$	$-2n^3$	$6m-33m^3n+15m^2n^2$
$\frac{9}{2}x^4$	$4a^3b^4$	$-24z^3-16z^2+40z$
$28f^5g^8$	$-\frac{6}{2}c^{-6}$	$10x^3-6x-1$

$\frac{2}{16}yz^2 + \frac{6}{16}yz^2$	$8a + 2b + 18x$	$2a^3 - 4a^2 + 2a$
$7hk$	$\frac{3}{4}w^4z^2$	$8x$
$6a^3b^2$	$9a^2 + 9b^3 + 12a$	$\frac{10}{9}p + 2q$

$\frac{1}{6}a^2+\frac{5}{36}ab-\frac{1}{6}b^2$	$-\frac{9}{10}a^3x^3+\frac{15}{10}a^2bx^3$	$\frac{6}{4}p^3+\frac{1}{8}p$
$2y^2-y+3$	$11xw+6ts$	a^2-1
$2x^3-3x^2+7x$	$\frac{5}{6}p^4q^5+8$	$23jkl$

$-15pq^2$	$\frac{3}{8}x^2$	$2a-11b$
$24g^2k^3$	$64n^2-81m^2$	$6.2p+7.5np+2$
$k^2-17k+72$	$\frac{1}{5}e+\frac{3}{5}fe-2ge$	$-5p^2-q+5$

$a^4 - 8a^2b + b^4$	$5a - 3b - 4ab$	$3ab - 2$
$-\frac{2}{8}yz^2$	$e^2 - 2ef + 3f^2$	$-19g^3h^3$

$3mn$	$8ab$	$3a$	$-4c$

3.4 Aplicación de los juegos.

Estos juegos fueron presentados en una secundaria del Estado de México en el municipio de Chalco, el nombre de está escuela " 15 de Mayo ", se aplicaron en dos grupos de tercero, en el turno vespertino.

El material presentado otorga un amplio esquema en el estudio del álgebra siendo los temas monomios, polinomios y lenguaje algebraico. Dando como resultado que en este se presenten ciertos rasgos que marcan una diferencia fundamental entre la enseñanza clásica aplicando didácticas. Otorgando al aplicador y sobre todo al estudiante las herramientas necesarias para facilitar la adquisición de los contenidos presentados de una manera sencilla y amenizada pero sobretodo significativa. Dado que las actividades presentadas generan y conforman a su vez los conceptos que dan origen a nuevos conocimientos reestructurados que forman a su vez un aprendizaje autónomo de manera cognoscitiva.

Los rasgos observados en la aplicación de este material didáctico lo podemos dividir en actitudes físicas, cognoscitivas y de motivación. En seguida comentaré cómo fue el resultado de esta aplicación frente a grupo.

Primero se aplicó la lotería al grupo 3º L con 21 estudiantes durante la realización de los juegos los estudiantes tomaron de diferentes manera el juego, para algunos fue interesente ya que tenían los conocimientos de los tema de esta actividad, pues ellos mostraron la habilidad para poder identificar y hacer las operaciones que se le pedía, esto no fue fácil para ellos pero tampoco imposible, aunque otros estudiantes se les dificultó ya que no tenían claros los temas que se estaban tratando, por lo que les costo identificar y hacer las operaciones. En este grupo aproximadamente el 30% de los estudiantes que no tuvieron interesen el juego, dado que les cuesta hacer operaciones con el lenguaje algebraico.

Posteriormente se aplico el memorama al mismo grupo, en este juego ellos tenían que formar los pares de cartas, la mayoría de los estudiantes comentaron que los enunciados eran claros por lo que no les costo mucho formar los pares, aunque al igual que en el anterior hubo a quienes se les dificultó el juego.

Después se le aplicaron los dos juegos al grupo 3º J, con un total 25 estudiantes, en este grupo el 50% mostró apatía hacia los juegos, el otro 50% participó y jugaron poniendo gran atención y aplicando lo que ellos ya sabían, esta misma reacción fue para el memorama aunque no todo el grupo jugó, los estudiantes que si participaron comentaron que les gusto el juego e hicieron varios comentarios positivos acerca de los juegos.

Debo decir que hubo varios comentarios satisfactorios ya que los estudiantes, dieron sus puntos de vista, uno de ellos fue que les dio gusto saber que se preocupan por enseñar estos temas mediante juegos, pues es una manera práctica de aplicar los conocimientos adquiridos en sus estudios.

Al final de los juegos les pedí que contestaran un cuestionario con las siguientes preguntas:

1. ¿Las reglas fueron claras?

A esta pregunta todos respondieron que si eran claras las reglas.

2. ¿El tiempo fue suficiente?

Los jóvenes respondieron que sí, pero sería mejor si fuera de 30 minutos, sería mucho mejor. Ya que el tiempo que se les dio era de 20 min.

3. ¿El material fue útil para entender?

Le pareció claro y útil.

4. ¿Consideras que este juego sirve para reafirmar algunos conceptos?

Esta pregunta se dividió ya que para la mayoría respondieron que sí, porque tenían los conocimientos, pero para quienes no tenían claro estos temas dijeron que no.

5. ¿Te gusto el juego?

Juntando la respuesta de los dos grupos el 58% contestaron que si les había gustado el juego, 22% dijeron que no y el 20% de los estudiantes dijeron que mas o menos.

Posteriormente platique con el subdirector del plantel, él menciona que los estudiantes que mostraron gran desinterés, es porque tienen muchos problemas ya sea emocionales, económicos, o simplemente no quieren estudiar. Son muchos los factores que influyen en ellos, aunque también es importante la actitud que toma el estudiante, al seguir adelante con sus estudios.

Comentaremos en el siguiente capitulo la historia de la pre-álgebra que utilizaron las civilizaciones para formar sus sistemas de numeración y también como era que resolvían los problemas de la vida diaria que tenían, esta se fue mejorando con el transcurso del tiempo hasta llegar a conocer el álgebra actual. Es importante conocer la historia del álgebra, ya que sirve como complemento para el estudiante en el aprendizaje que adquirió durante sus estudios.

CAPÍTULO IV

UN POCO DE HISTORIA, LOS INICIOS DEL ÁLGEBRA

4.1 Introducción.

La historia comienza en cómo surgió el álgebra, una rama muy importante de las matemáticas, cómo la emplearon en distintas civilizaciones, ya que es importante que la conozcamos, porque es un complemento para el estudiante en su aprendizaje.

Las matemáticas se han utilizado desde los tiempos antiguos y a lo largo de los siglos han sido aplicadas con objetivos diversos. Fueron empleadas para la elaboración de predicciones por los sacerdotes de los pueblos mesopotamios, y han sido la mejor herramienta para la exploración del universo a partir del renacimiento.

En la Edad Media, existía la categoría de hombres sabios, que eran los médicos, quienes tenían muchos privilegios y gozaban de gran respeto en la sociedad, en esta etapa de la historia ellos acapararon la mayor parte del conocimiento de la naturaleza ya que ellos tenían conocimientos generales de matemáticas, astronomía, geometría y física todo esto tuvo una importantísima consecuencia, que fue el establecer el hábito y la exigencia de la observación y la experimentación en la ciencia. Era tal la superioridad de la medicina que el arte matemático más novedoso entonces, el álgebra, tuvo gran impacto en el desarrollo de la ciencia, convirtiéndose así en una herramienta esencial cuyo nombre mismo se deriva de la medicina.

La palabra álgebra proviene del vocablo árabe al-jebr, que significa restaurar o restituir, por ello los médicos daban el sentido algebraico como la restauración de los huesos rotos ó dislocados. En matemáticas tiene un significado, que es el restablecimiento de una cantidad que es negativa y que se vuelve positiva al ser restituida en el otro lado de la igualdad de la ecuación. Por lo que en medicina se le da ese sentido, ya que la emplearon casi todos los cirujanos de esa época por lo que esto nos lleva a que la palabra álgebra significa el arte de reponer, restaurar los miembros dislocados o fracturados.

En la antigüedad, el arte algebraico se enseñaba en las universidades incluyendo la aritmética tradicional, ya que ésta fue una parte esencial del álgebra, aunque tiempo después se separaron. Esto ocurrió porque la aritmética es una ciencia que se ocupa sólo de los números, ésta se basaba en hacer operaciones básicas como la adición, sustracción, multiplicación y división. Por otro lado, el álgebra es una rama de las matemáticas en la que se usan letras y símbolos para representar estas operaciones matemáticas y muchas más. Por lo cual, el álgebra es indispensable, para la aplicación de las operaciones matemáticas analizadas desde el punto de vista abstracto, lógico y generalizado.

Inicialmente se hacía utilizando los medios disponibles como son: dedos, piedras y otros objetos de la naturaleza. Actualmente contamos con calculadoras y computadoras que nos hacen más fácil el conteo de grandes cantidades y operaciones. No es tan claro en qué momento empezó este estudio, debido a que existen pocos documentos. Por lo que explicaré el nacimiento, a partir de la existencia del hombre en la prehistoria, es decir, desde el hombre primitivo, por la necesidad del medio en el que vivía, empieza a adquirir técnicas para contar haciendo comparaciones, dándole a cada objeto un símbolo o signo correspondiente.

En la prehistoria había gran variedad de tribus y cada una tenía diferentes formas para obtener una asociación de números, algunos agrupaban de dos en dos, después de cuatro en cuatro y de seis en seis y así sucesivamente. Aunque ellos tenían un sistema para contar muy propio que correspondía a los dedos de las manos, hacían sus agrupaciones de cinco en cinco, de diez en diez y también hacían agrupaciones de veinte en veinte usando tanto los dedos de las manos como los de los pies. Debido a que el hombre primitivo tenía que satisfacer sus necesidades, forma un sistema de numeración que surge de la vida cotidiana y de sus propias actividades, dándole así el inicio de la aritmética.

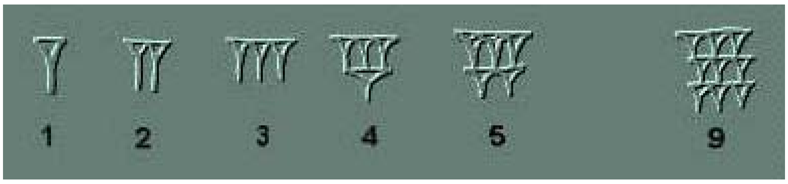
La historia comienza en la antigua Babilonia y Egipto, estas civilizaciones fueron de las primeras en estudiar el álgebra, no usaban símbolos pero su forma de resolver problemas era platicándolos, al paso del tiempo se descubrió que en sus escritos ellos darían solución a ecuaciones lineales y otros problemas, como los primeros sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y las ecuaciones cuadráticas, los Egipcios introdujeron el álgebra en la historia, ya que ellos fueron los que dejaron los conocimientos más avanzados, para que más adelante los griegos la desarrollaran mejor.

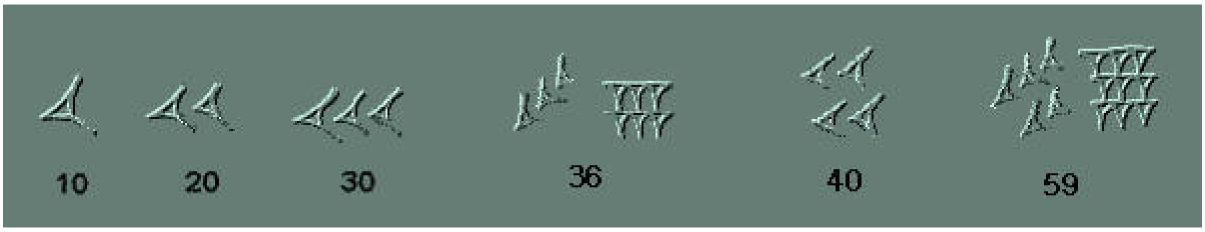
A continuación nos reencontramos con nuestra historia matemática a través del tiempo para conocer un poco de la historia del álgebra ya que son muchas las civilizaciones que participaron en el desarrollo de ésta. Comenzamos con los babilonios, después le siguen los egipcios, posteriormente abordaremos a los griegos y finalmente platicaremos lo que sucedió a través de los siglos.

4.2 Álgebra Babilónica.

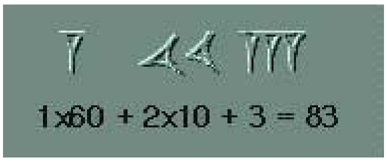
Existía un lugar que se le conocía como Mesopotamia, ésto fue aproximadamente en el año 5000 a.c., aquí vivieron algunos pueblos llamados sumerios, arcadios, caldeos, asirios y babilonios, todos ellos formaron la civilización babilónica, quienes iniciaron el estudio del álgebra. Desarrollaron un sistema de numeración posicional, esto quiere decir que las cifras adquieren un valor según su posición dentro del número y el sistema sexagesimal, que es en base 60, esto quiere decir que cada unidad grande está formada por 60 unidades más pequeñas. Este sistema de numeración esta basado en símbolos en forma de cuña, usaban dos signos básicos, la unidad, que es una cuña en posición vertical y la decena es una cuña posición horizontal, las cuales fueron escritas en tablillas de arcilla muy resistentes. Podemos decir que gracias a eso conocemos, gran parte de las matemáticas babilónicas.

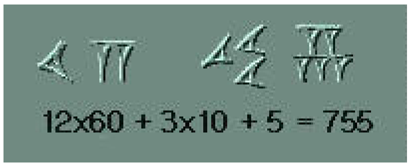
Aquí podemos ver como eran esas cuñas.

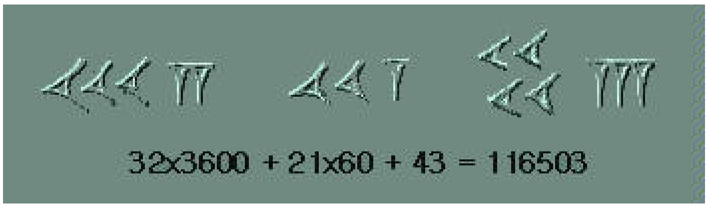




Ejemplos.







Los problemas que ellos se planteaban eran sobre la vida cotidiana como son las cuentas diarias, contratos de préstamos con interés ya que éstos se resolvían mediante el uso de las tablillas que escribieron, fueron varios tipos de tablas las que desarrollaron y utilizaban con frecuencia. Esta era su forma de aplicar parte de las matemáticas.

Los babilonios construyeron una tabla en donde tenían todos los números elevados al cuadrado que ocupaban para multiplicar. Ellos no tenían un lenguaje algebraico, pero esto se representaría de la siguiente manera para hacer la multiplicación más fácil, puesto que no tenían tablas de multiplicar.

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Aún mejor es la fórmula:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Un ejemplo numérico aplicando las dos formas:

Forma 1

$$2 \bullet 4 = \frac{(2+4)^2}{4} - \frac{(2-4)^2}{4}$$

$$8 = \frac{36}{4} - \frac{4}{4}$$
$$8 = 9 - 1$$
$$8 = 8$$

Forma 2

$$2 \bullet 4 = \frac{(2+4)^2 - 2^2 - 4^2}{2}$$
$$8 = \frac{36 - 4 - 16}{2}$$
$$8 = \frac{16}{2}$$
$$8 = 8$$

Aunque la operación más difícil para ellos fue la de la división ya que no tenían un método para realizar la división larga, se basaban en la representación como $\frac{a}{b} = a\ \frac{1}{b}$, eso los llevó a construir una tabla de números recíprocos.

Los babilonios fueron los iniciadores en el sistema de medición del tiempo así como del sistema sexagesimal, el cual crearon dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Aunque, el sistema carecía del cero, esto no fue ningún conflicto para que desarrollaran un sistema fraccionario, el cual les permitió hacer aproximaciones decimales exactas, ya que un mismo símbolo podía representar indistintamente varios números, los cuales se distinguían dependiendo del problema. Es así como ellos podían hacer al igual que nosotros, sumas, restas y multiplicaciones con la misma facilidad que lo hacemos hoy en día con el sistema decimal.

Para visualizar mejor lo que hemos comentado, mostraremos un ejemplo donde se hace el cambio de un número en base 10 a base 60 y les daré el desarrollo completo.

Ejemplo:

Tomemos el número en base 10 que es 7424, este lo cambiamos a la base 60, para ello dividimos 7424 entre 60, si el cociente es mayor que 60 se vuelve a dividir hasta que el cociente sea menor, ya que sólo contamos para esta base con los números del 1 al 59, no podemos usar números mayores a 59 ya que estamos trabajando en base 60.

Este es el procedimiento para el cambio de base. Tenemos 7424 lo dividimos entre 60, esto se va hacer hasta que el cociente sea más chico que 60, veamos el desarrollo.

$$\begin{array}{r} 123 \\ 60\overline{)7424} \\ \hline 142 \\ \hline 224 \\ \hline 44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 60\overline{)123} \\ \hline 3 \end{array}$$

Observamos que al dividir 7424 entre sesenta, el cociente es 123, como es más grande que la base se vuelve a dividir entre sesenta, ahora vemos que el cociente de la ultima división es 2, y como 2 es menor que 60, hasta aquí termina mis operaciones. Por lo tanto el número que formamos en base 60, es tomando el ultimo cociente que es 2 y los residuos de las divisiones y esto lo representaban con su sistema de numeración.

$7424 = (2344)_{60}$

Después de haber conocido sobre su sistema de numeración, continuamos con la evolución que ellos tuvieron con respecto a las matemáticas, hemos llegamos a la parte fundamental, que es el álgebra, para los babilonios era retórica, esto quiere decir que los problemas algebraicos se escriben y solucionan sin utilizar símbolos y expresiones algebraicas como las que usamos actualmente. Por lo que el álgebra retórica se basa solamente en ser platicada.

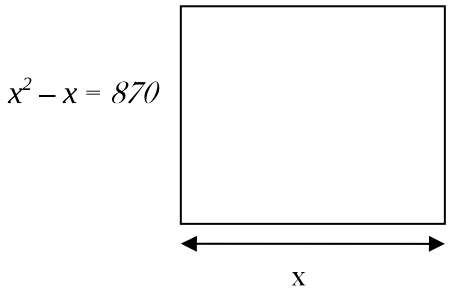
Sus avance en el álgebra eran que podían resolver ecuaciones cuadráticas y lo hacían completando el cuadrado además podían resolver ecuaciones cúbicas. Por lo que podemos ver que el álgebra que hoy en día se enseña en la secundaria esta planteada de una manera más fácil, ya que hoy podemos resolver los problemas usando un lenguaje simbólico universal.

Para ello les mostrare la aplicación del álgebra que manejaban los babilónicos, con un ejemplo que nos servirá para darnos una idea, de la forma en que ellos representaban y expresaban los problemas, y de que manera lo resolvían.

Ejemplo:

El problema consiste en "conocer la longitud del lado de un terreno cuadrado cuya área menos el lado es igual a $870m^2$".

Nosotros tendríamos que resolver la ecuación $x^2 - x = 870$, donde x es la longitud de un lado del terreno y x^2 es el área del terreno. Gráficamente es el dibujo siguiente.



Si le llamamos x a lado del terreno, el área seria x^2, la forma de resolver en la actualidad es la siguiente, se tiene una ecuación de segundo grado y encontramos sus raíces, donde una de ellas es 30. Para comprobarlo se sustituye directamente en la ecuación.

$x^2 - x = 870$
$(30)^2 - 30 = 870$
$900 - 30 = 870.$
$870 = 870$

Conocimos un sistema de numeración y parte del la preálgebra que los babilonios aplicaban, ahora iniciamos con otra civilización que también dejo muchos conocimientos y avances matemáticos sobre todo en álgebra.

4.3 Álgebra Egipcia

En la civilización egipcia empieza en el año 3100 a.c. aproximadamente, esta cultura tenían conocimientos matemáticos sumamente avanzados. Sin llegar a la madurez que tuvieron los griegos, los egipcios supieron solucionar los problemas que se les planteaban y surgían día a día, como eran las inundaciones anuales del Nilo, que borraban los límites de las tierras y ellos volvían a marcarlos, así como las construcciones de templos y pirámides, el comercio y los repartos de bienes, entre otras cosas. Por lo que enfocaban las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana, más que resolver problemas teóricos, se ocupaban de encontrar una aplicación práctica.

Ellos hacían sus anotaciones sobre piedras, ladrillos o barro; los grabados que existen de esta civilización aparecen en escritura jeroglífica. Los símbolos que utilizaban representan grandes cifras, asociadas a las guerras. Después utilizaron un documento más flexible llamado papiro.

Hay dos papiros muy importantes que son "*El papiro de Rhind* " y "*El papiro de Moscú".* En ellos, se conservan soluciones de problemas con sus planteamientos, operaciones y hallazgo de soluciones. Algebraicamente ellos podían resolver determinadas ecuaciones lineales. El álgebra egipcia era retórica al igual que la de los babilónicos, esto se sabe por los papiros en los que dejaron planteados los problemas, uno de estos problemas clásicos esta en el papiro de Rhind. En el cual todo esta escrito pero de manera platicada y no utilizan expresiones algebraicas.

Buscaban un número que fuera la solución y al que llamaban "*aha*" o "*montón*" lo que para nosotros hoy en día es una *incógnita* la que denotamos como x, y, z. etc. Esta debe cumplir con la condición que se pedía. Los problemas que ellos planteaban se pueden traducir a ecuaciones de la forma:

$$x + ax = b \text{ ó } x + ax + bx = c$$

Es decir, ecuaciones lineales o de primer grado pues el "aha" o incógnita esta elevada a la primera potencia.

Veamos cómo aplicaban la preálgebra y cómo desarrollaban todos sus conocimientos matemáticos en este ejemplo, que representare con una expresión como las que hoy en día utilizamos.

<u>Ejemplo:</u>

En el papiro de Rhind esta el problema 24:

En este problema lo que se pide es calcular el valor del aha o montón si el aha o montón y una séptima parte del aha o montón es igual a 24".

Este problema lo podemos plantear y a su vez encontrar la solución, con la notación que hoy en día trabajamos y que veremos más adelante en el capitulo 3, este problema se interpretaría con la siguiente ecuación:

x ----- aha

$\left(\frac{1}{7}\right)x$ --- una séptima parte del aha

$$x + \left(\frac{1}{7}\right)x = 24$$

Para encontrar dicho valor, ellos aplicaban el *"método de la falsa posición"*. Este método consiste en dar un valor para el *aha* o sea el valor de **x** se escoge arbitrariamente al primero que elegimos se sustituye el valor y se hacen las operaciones, pero si no es la respuesta correcta vuelve a darse otro valor, así hasta que se llegue al resultado correcto.

Por ejemplo sea $x = 7$, entonces $7+\frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$, este valor no es correcto, ahora decimos sea $x = 14$, entonces $14 + \frac{14}{7} = 14 + 2 = 16$ este valor tampoco es el correcto, nuevamente damos otro valor sea $x = 21$. Al sustituir el valor de x nos queda $21+\frac{21}{7} = 21 + 3 = 24$.

Como podemos ver este valor es el correcto pues llegamos a que es 24, Así el método de la falsa posición el cual nos permite llegar al resultado correcto.

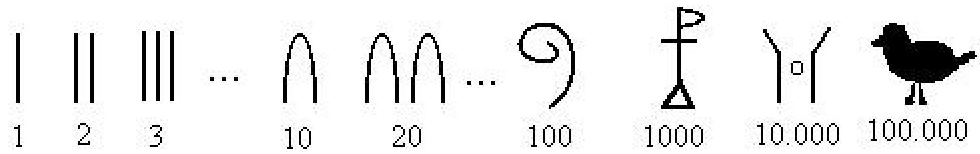
Después de ver un ejemplo de cómo aplicaban álgebra en sus problemas continuaremos conociendo más de los egipcios y de sus sistemas de numeración.

4.3.1 Sistema de Numeración

Ellos ocupaban dos sistemas de escritura el sistema *Jeroglífico* y *el Hierático,* este último era utilizado por los sacerdotes, y se convirtió en el sistema del pueblo llamado demótico en el siglo VIII a.c..

Sistema Jeroglífico:

Consistía en representar a los "números clave" (1, 10, 100, 1000,...) con símbolos como eran palos, lazos, figuras humanas en distintas posiciones, este sistema era en base 10, ellos combinaban estos símbolos para escribir otros números. Aparecen los primeros métodos de operaciones aritméticas para números enteros y fracciones. Escribían de derecha a izquierda al contrario de nosotros, los jeroglíficos numéricos eran utilizados en los grabados de los monumentos de piedra.



Aparecen los primeros métodos de operaciones, con carácter aditivo, para números enteros y fracciones, éstas sólo podían ser divisores de la unidad, es decir, de la forma $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$, esto siempre y cuando el numerador sea 1 y el denominador puede ser cualquier otro número. Para el resto de las fracciones lo que hacían era combinarlas como por ejemplo $\frac{4}{3}$, ellos lo representaban como $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

Posteriormente los escribas fueron simplificando los trazos hasta llegar obtener los llamados signos hieráticos, con estos se realizaban los documentos de tipo administrativo, astronómicos y otros más, es así como surge el segundo sistema de numeración.

Sistema Hierártico:

Este sistema de numeración también es decimal, éste llegó a sustituir al sistema jeroglífico por algunos signos especiales que representaban los números del 1 al 10, así como sus potencias de diez. Los egipcios utilizaban generalmente signos específicos para las fracciones como $\frac{2}{3}$ que se puede escribir $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ y, trabajaban con fracciones unitarias esto como ya lo habíamos mencionado anteriormente que sólo pueden ser divisores de la unidad. Ellos representaron en unas tablas los números con el sistema jeroglífico y el hierático.

Ya conocemos un poco sobre los sistemas de numeración de los egipcios, en dónde plasmaban o escribían los problemas matemáticos y también cómo aplicaban el álgebra. Aunque ellos utilizaron muy poco el simbolismo algebraico, tenían para la suma (+)  es un par de piernas caminando en dirección de la escritura, para la sustracción (-)  tenían un par de piernas invertidas.

Esta parte de la historia termina para ceder el lugar a otra civilización muy importante los Griegos.

4.4 Álgebra Griega

Los Griegos aportaron más conocimientos en el desarrollo matemático, así como su contribución simbólica para las matemáticas actuales. Empezaremos en la época de los griegos en el año 700 a.c., Grecia es una península montañosa, rodeada de islas, se encuentra en el centro del Mediterráneo Oriental. El centro de Grecia, estaba entre el mar Egeo y el mar Jónico, formaban grandes poblaciones que se establecieron en las costas del mar Negro y del mar Mediterráneo. Existían unas colonias jónicas, establecidas cerca de los centros de las culturas Egipcias y Babilónicas, se podían comunicar solamente por barco con dichas culturas, de las que obtuvieron directamente los conocimientos matemáticos y astronómicos.

Ellos se preocupaban por analizar la naturaleza de los números y la naturaleza de los objetos matemáticos, también hicieron de las matemáticas una ciencia con estructura, y propiedades que se demuestran. A ellos no les bastaba con tomar las afirmaciones como verdaderas, tenían que probar que todo lo aplicaban era cierto, ya que lo más importante en el rigor matemático es comprobar con certeza.

Ahora veamos como desarrollaron su ***sistema de numeración***, aunque fueron varios los que ellos utilizaron: sistema ático o herodiano y el sistema jónico o alfabético.

Sistema ático: apareció en el siglo VI a.c. este sistema es en base 10, los signos que se utilizan son símbolos alfabéticos, excepto el uno ya que es el signo vertical (I) que representa la unidad, y a su sirve para vez representa en particular los números del 1 al 4.

Uno I
Dos II
Tres III
Cuatro IIII

Los signos que simbolizan algunos números son las primeras letras del alfabeto Griego como son **Γ, Δ, H, X, M**. Mostrare como se representaban los siguientes números con las letras, en la siguiente tabla, usaban solamente letras mayúsculas ya que no existían las letras minúsculas.

Penta	Γ	5
Déka	Δ	10
Hekatón	Η	100
Chílioi	Χ	1000
Myríoi	Μ	10,000

Para representar otros números los griegos, combinaban los signos con el trazo vertical, por ejemplo el número nueve lo representaban de la siguiente manera, ΓIIII, así ellos iban formando sus números.

Ahora bien vayamos a conocer el otro sistema numérico que tenían los griegos, es tan importante como el que conocimos.

Sistema jónico: se utilizó desde el siglo V a.c. también es en base 10, sustituyó al sistema ático en el siglo III a.c.. Los griegos adoptaron el alfabeto de los fenicios, utilizaban 22 consonantes y añadieron vocales con el propósito de representar tres conjuntos de nueve números: las unidades, las decenas y las centenas, con esto crearon unas tablas.

Pero cuando en Grecia surgieron las letras minúsculas todo cambio, hasta las tablas que ellos habían hecho, y para no confundirse con los símbolos ya que eran puras letras, lo que hacían para distinguir un número de una letra, era ponerle una barra horizontal encima de la letra, por ejemplo el número diez se representaba « ι ».

También emplearon las primeras letras del alfabeto griego con minúsculas para representar los múltiplos de mil las cuales llevaban un acento a la izquierda, por ejemplo el numero 1,000 se representa por «´α», el 2,000 por « 'β », y lo mismo hicieron con los otros 7 números, pues solamente contaban con 9 números.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ	900	ϡ

Los griegos tuvieron problemas para escribir fracciones, así que al igual que los egipcios usaron fracciones unitarias. Para esto distinguieron los números enteros de las fracciones poniéndoles a los números un acento del lado derecho, por ejemplo; 1/25 se representa « χε' » y 1/3 se representa como « γ' ».

En esta época, Grecia fue testigo de muchos avances con respecto a las matemáticas, ya que en ella nacieron grandes hombres que dedicaban parte de su vida a estudiar y desarrollar conceptos matemáticos, por mencionar algunos: Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides y Diofanto.

Recordaremos primero ***Tales de Mileto***, él nació en el año 624 a.c., en el año 600 a.c. a los 24 años fundó la escuela Jónica. Él era estadista, comerciante, ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático, se le conoce como uno de los siete sabios de la antigüedad, ya que tenía muchos estudios. Fue comerciante en su juventud y de esa manera el se hizo rico eso le permitió estudiar y viajar el resto de su vida, tanto que pasó algún tiempo en Egipto esto fue grandioso ya que se familiarizó con las matemáticas y la astronomía. Tales desarrolló muchos conceptos que se relacionaban con la geometría y eso lo llevó a ser el primer hombre famoso en las matemáticas. El aporto la matemática deductiva, así como algunos teoremas que se aplican en geometría y el concepto de semejanza de triángulos.

Tales fué un hombre muy sensible y humano, combinó el sentido del humor con un conocimiento profundo de la naturaleza humana. Él tenía un lema que decía "Conócete a ti mismo", también se expresaba con frases filosóficas. Tales dejó gran huella pues se le conoce como el fundador de la geometría, murió en el año 584 a.c.

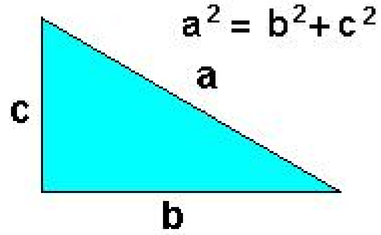
Otro gran matemático que tuvo que ver con el álgebra fue, ***Pitágoras de Samos***, a él se le nombró así porque nació en la isla de Samos situada muy cerca de Mileto esto fue en la primera mitad del siglo VI a.c. él era más joven que Tales y fue uno de sus alumnos.

Pitágoras fue el fundador de "La escuela pitagórica", esta escuela era religiosa dedicada a la práctica del ascetismo, que significa el conjunto de doctrinas nacidas en oriente, que postulan la obediencia de la perfección espiritual a través de las privaciones corporales la renuncia a todo placer terreno y el logro final de la salvación. Una mortificación ascética típica es la castidad absoluta y al estudio de la filosofía, música, matemáticas y ciencias naturales. Quienes estaban en esta escuela se comprometían, haciendo un juramento y mantener en secreto la enseñanza de la escuela. También tenían que hacer examen de conciencia todos los días. Ellos creían en la inmortalidad del alma, por lo que se prohibía sacrificar a los animales, ya que podría ser la nueva morada del alma de un amigo muerto. A sus miembros de esta escuela se les imponía un severo régimen vegetariano, el silencio, la disciplina, etc..

Una de las finalidades de los pitagóricos fue en encontrar en las matemáticas una forma de resolver el enigma del universo y un instrumento para la purificación del alma. Así fueron los primeros en formalizar la demostración en matemáticas. Esto era usando algunas notaciones y lenguaje matemático. Los pitagóricos dividieron al mundo en cuatro ramas que son la aritmética o ciencia de los números, la geometría, la música y la astronomía.

Les mostrare una de tantas demostraciones que hay de este teorema.

El Teorema de Pitágoras es muy conocido por nosotros es el que dice "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.".



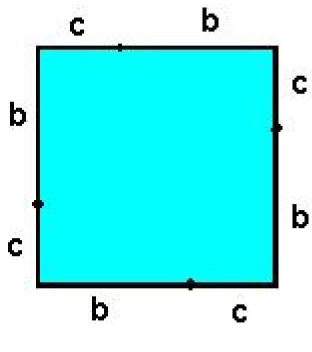
Demostración:

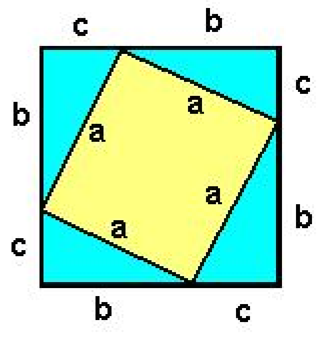
Si tenemos un triángulo rectángulo como el del dibujo de arriba, podemos construir un cuadrado que tenga de lado justo lo que mide el cateto b, más lo que mide el cateto c, es decir $b+c$, como en la $(b+c)^2$.

De los triángulos rectángulos que salen, tendremos la figura de la izquierda. El área del cuadrado, que es la misma de antes, se puede poner ahora como la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos azules base por altura partido por 2

$$\frac{b \bullet c}{2}$$

Más el área del cuadrado interno que es a^2. Es decir, el área del cuadrado grande también es el área del cuadrado pequeño más 4 veces el área del triángulo:





$$a^2 + 4\frac{b \bullet c}{2} = a^2 + 2bc$$

Podemos igualar las dos formas de calcular el área del cuadrado grande y tenemos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc$$

Desarrollamos el binomio, nos queda:

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

Restando de ambos lados $\quad b^2 + 2bc - 2bc + c^2 = a^2 + 2bc - 2bc$

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc - 2bc$$

Después de simplificar resulta lo que estábamos buscando:

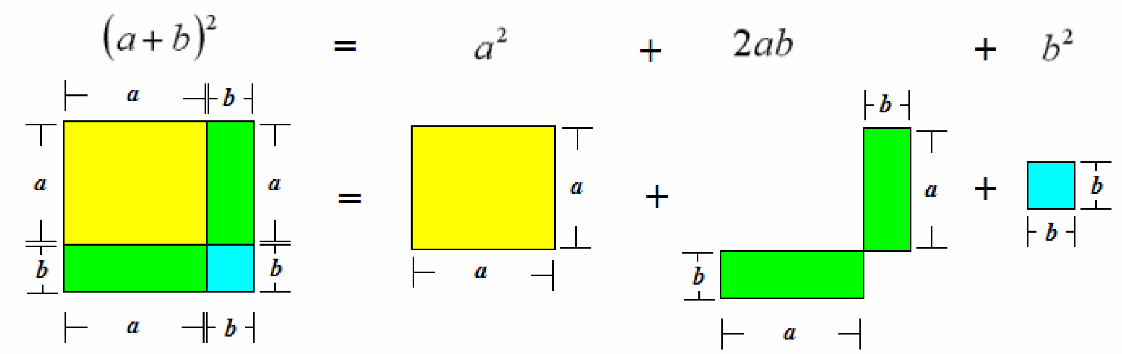
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Al paso del tiempo, tanta era la influencia y tendencias aristocráticas de la escuela pitagórica que hicieron que el poder democrático de Italia decidiera destruirla, asegurándose que la sociedad se dispersara. Según cuentan que Pitágoras se escondió en Metaponto, donde murió ya anciano. Sin embargo Pitágoras desarrollo grandes conceptos de álgebra en su escuela. El se casó ya grande con una de las mejores matemáticas de la escuela, Teano de Trotona. Ella fue una de las pocas mujeres que pudieron entrar a la escuela de pitagórica. Gran parte de los trabajos matemáticos de la escuela pitagórica se extraviaron, se perdieron y otros se quemaron, cuando destruyeron la escuela.

¿Cómo era posible que aplicaran el álgebra los griegos si no tenían una notación adecuada?, pues sucedió que ellos desarrollaron procesos geométricos para resolver problemas algebraicos, establecieron una expresión que es conocida por nosotros el cual es llamado el binomio cuadrado, que se representa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Esta expresión la representaron geométrica, de la siguiente manera.

La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado "$a + b$", es decir:



Hemos visto el desarrollo de los pitagóricos en matemáticas. Pero tenemos otros matemáticos griegos que han influido en el desarrollo de esta ciencia como es el caso de Euclides, enseguida les contaré su historia.

Después de la destrucción de la escuela pitagórica surge otra escuela que fue la primera en Alejandría cuyo representante fue *Euclides* que nació en el año 300 a.C. es uno de los que influyó mucho en el avance matemático, su obra más importante: "LOS ELEMENTOS ", el cual no está dedicado únicamente en geometría sino que también tiene unas ideas sobre el álgebra elemental tratada geométricamente. La escuela de Alejandría se fundó en la ciudad del mismo nombre, se convirtió en un centro mundial de cultura y es aquí donde se hizo una gran biblioteca, esto con el afán de conservar los documentos que se tenía como eran los papiros y las tablillas.

Por último se encuentra, Diofanto de Alejandría quien vivió aproximadamente en el año 150 d.c. si nos damos cuenta, es el primero que entra a nuestra época. De las obras que se conocen de él y la más importante es la "La Aritmética" esta en 13 volúmenes, pero sólo 6 son los que conocemos, en esta obra hay 189 problemas con soluciones, en el libro I se dan a conocer las ecuaciones del tipo $ax = b$ ó $ax^2 = b$.

La aritmética de Diofanto, representa una nueva rama de las matemáticas griegas, aunque esta se parece al álgebra de los babilonios pero son diferentes en el significado de los números, ya que los babilonios usaban aproximaciones a una solución, mientras que Diofanto llegaba a una solución exacta.

Él introdujo un símbolo algebraico muy elemental al mencionar la incógnita que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa números, además preparó el terreno de los siglos siguientes con la teoría de las ecuaciones, se le considera como uno de los precursores del álgebra moderna. A él le debemos las representaciones de las ecuaciones, que aprendemos hoy en día, pues es el primero en utilizar la notación en su obra. El murió a los 84 años.

Finalmente llegamos al nacimiento de la palabra álgebra, podremos ver que su culminación fue con los árabes y conoceremos más a través de los siglos, mencionare algunos personajes que dejaron huella en las matemáticas. Iniciamos el recuento.

4.5 Álgebra a través de los siglos

Hemos hablado de algunas civilizaciones pero no son todas las que han aportado ideas importantes en el álgebra ya que al paso del tiempo se siguieron dando más aplicaciones de ella. Podemos ver que a través de los siglos, otros personajes históricos han brindado sus conocimientos sobre álgebra, gracias a ello hoy en día las futuras generaciones podrán estudiarlas y aplicarlas más fácilmente.

Mencionando un poco de la época de los Árabes, y la gran influencia que tuvieron en el desarrollo matemático, especialmente en el álgebra, pues aquí nace a quien se le conoce como el padre del álgebra, *Al-Khowarizmi*.

Arabia fue una tierra de nómadas, se establecieron los pueblos semíticos, antes del siglo VII d.c.. Ellos vivían en el desierto de Arabia, pueblos herederos de una gran tradición, aunque sólo la Meca y Medina eran ciudades florecientes, todo este territorio lo conocemos, hoy en día como Irak, Bagdad y sus países vecinos. Aquí vivió Mahoma, él fue el fundador del Islam, en el año 570 d.c.

Los árabes obtenían textos griegos y las traducciones de éstos eran realizadas generalmente por sabios Sirios cristianos, que eran invitados a la corte de Bagdad. Estos sabios miembros de la "Casa de la Sabiduría", la cual fue fundada por el Califa al-Mamun, formaba parte de ella el astrónomo y matemático Al-Khowarizmi quien obtuvo su fama por una obra de álgebra y su aritmética.

De Al-Khowarizmi sólo se sabe que nació en el año 780 d.c. en Bagdad, hoy Irak. Él era de religión Musulmán, se desempeñaba como bibliotecario, matemático y astrónomo en la Casa de la Sabiduría, escribió varios libros de matemáticas. El más importante de todas sus creaciones es *Hisab al-yabr wál-muqgabala*, en el escribió cómo plantear y resolver ecuaciones para poder encontrar la solución de problemas de la vida cotidiana.

De este libro surge la palabra *álgebra*, él describió el nombre del libro que dice:

Hisab significa "*ciencia*".

al-yabr significa "*transposición".*

wál-muqgabala significa "simplificación".

Por lo que el título del libro significa " ***ciencia de la transposición y simplificación***".

Pero el término *al-yabr*, corresponde a una operación algebraica, que consiste en pasar un término negativo de un lado la al otro lado de la igualdad de una ecuación, este será positiva, a esto se le llama transposición.

La palabra *wál-muqgabala*, se refiere a la reducción de las ecuaciones, esto es como lo hemos trabajado en el salón de clase, simplificar términos semejantes.

El término al-hatt representa la operación que consiste en dividir ambos miembros de la ecuación por un mismo número.

Ejemplo tenemos la ecuación:

$8x^2 - 8x + 6 = 6x^2 - 4x + 10$: aplicando *al-yabr*.

$8x^2 - 6x^2 = -4x + 8x + 10 - 6$

$2x^2 = 4x + 4$: por *wál-muqgabala*

$\frac{2}{2}x^2 = \frac{4}{2}x + \frac{4}{2}$: dividimos todo entre 2 esto es aplicando *al-hatt*.

$x^2 = 2x + 2$.

El título de libro de *Al-Khowarizmi* se leería como "La ciencia de las ecuaciones". En esta obra clasificó la solución de las ecuaciones cuadráticas, además muestra los métodos geométricos para completar cuadrados. A la incógnita él le llamo "*cosa*", de esta palabra aparece el que se utilice la letra x para nombrar a la incógnita de una ecuación.

La notación de *Al-Khowarizmi* se pronunciaba "algorismi", de ésta se derivan las palabras "guarismo" que es para indicar las cifras de un número, y "algoritmo" es para referirse a un proceso matemático el cual se repite a una regla para calcular, algoritmo es un conjunto de pasos ordenados para realizar una tarea específica.

Hasta aquí les puedo contar de *Al-Khowarizmi,* pero hay otros matemáticos importantes que hicieron grandes aportaciones, continuamos con nuestro viaje, ahora vayamos a otra etapa del tiempo.

Durante el siglo XIII nació el matemático Leonardo de Pisa (1180-1250) mejor conocido como Fibonacci. En 1202 publicó su obra "Liber Abaci" (el libro del ábaco) en dicha obra se muestran el cálculo de números según el sistema de numeración posicional; operaciones con fracciones comunes, aplicaciones y cálculos comerciales como la regla de tres simple y compuesta, problemas de progresiones y ecuaciones, pero sobre todo Fibonacci quedó inmortalizado con la famosa "sucesión de Fibonacci" y el problema de los conejos.

La sucesión de Fibonacci es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025...

Esta sucesión se construye de la siguiente manera:

a) La sucesión empieza con un par de unos.
b) para obtener el siguiente término o cualquier otro término se suman los dos anteriores. Por ejemplo, el tercer término es sumando el primero y el segundo término que son: 1+1=2, el noveno término de la sucesión se construye sumando el séptimo y el octavo término que son 13+21 =34.

Con esta sucesión resolvió un problema que era el nacimiento de parejas de conejos.

En el siglo XV, el matemático francés Nicolas Chuquet introdujo el uso de los números negativos, y también la notación exponencial, la cual es muy parecida a la que hoy en día se utiliza. También en este siglo hubo otra persona que contribuyó, Regiomontano, quien enriqueció el concepto de número y agregó al álgebra los radicales y las operaciones con ellos, teniendo así las posibilidades de resolver las ecuaciones.

El matemático francés François Viète (1540-1563) desarrolló un sistema único de símbolos algebraicos, en el cual resultó posible, la expresión de ecuaciones y sus propiedades mediante fórmulas generales. También estableció una conexión entre los trabajos trigonométricos y algebraicos, a él le debemos la notación algebraica que hoy en día conocemos como es la representación de las incógnitas con consonantes y los coeficientes con las vocales.

En 1637 el matemático francés Rene Descartes entrelazó la geometría y el álgebra dando como resultado la "geometría analítica" dio a conocer la notación algebraica moderna en las cuales las constantes se representan con las letras del alfabeto a, b, c,.....y las variables o incógnitas son las letras x, y, z. pero también introdujo la notación exponencial que se usa hoy en día.

Otra aportación que hizo Descartes fueron los signos "+" y "-", estos son de origen alemán, los cuales los usaban en los almacenes para indicar "existencia" y "faltante". El inició el álgebra simbólica.

Así, en esencia, el álgebra se convirtió en la ciencia sobre las ecuaciones algebraicas. En ella se incluía la elaboración del aparato simbólico literal necesario para la resolución de las ecuaciones.

Por último, hemos llegado al siglo XIX el cual merece ser llamado *la edad de oro de las matemáticas*. Porque el álgebra en este tiempo se definió ya que se tomaran en cuenta las aportaciones de Abel y Galois. Él fue un matemático francés, quien en su adolescencia determino las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio se pueda resolver por medio de radicales, todo esto fue de gran ayuda para darle solución a un problema que había permanecido sin solución durante mucho tiempo. Sus trabajos fueron la base fundamentales para la teoría del álgebra abstracta, pues el fue el primero en usar el concepto de grupo, esto da lugar al nacimiento del Álgebra Moderna.

En 1903 nació en, Budapest János Neumann, mejor conocido por el nombre que adoptó cuando se trasladó a los Estados Unidos, John von Neumann. Su vocación por las matemáticas se reconocen sin dificultad, ya que él tenía un gran interés por la lógica y por la matemática combinatoria, ocupándose de temas teóricos apasionantes como lo fue la fundación axiomática de la teoría de conjuntos, las matemáticas de la mecánica cuántica, el desarrollo de una teoría matemática para las ciencias sociales que es la teoría de juegos, así como la arquitectura lógica de los ordenadores electrónicos.

Es así como recordamos una parte de la historia del algebra, aunque podemos ver que hoy en día sigue habiendo matemáticos que se interesan en su desarrollo. Por eso la historia del álgebra es extensa, pero imprescindible ya que es una manera de complementar el aprendizaje de los estudiantes.

CONCLUSIONES

En nuestro país la enseñanza de los contenidos presentados se fomenta de una manera clásica, es decir, existe un proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual existe poca o nula interacción entre el profesor y el estudiante, por lo que la propuesta presentada en esta tesis tiene como objetivo brindar una gama de oportunidades para la enseñanza de estos temas que contiene este proyecto, tanto al profesor como el estudiante. Dado que en la aplicación de actividades se le ofrece una facilidad al profesor para trasmitir los contenidos de formas diversas en las cuales genera en el estudiante una disposición a adquirir conceptos y contenidos de una manera diferente, por lo que a la par de lo que en su exterior aparenta ser un juego termina siendo de manera diferente una forma de enseñanza innovadora, porque esto genera una interacción entre el estudiante y el profesor.

La importancia de los juegos es esencial, dado que es una manera de comunicación entre profesor-estudiante, también es una forma diferente de que el estudiante reafirme sus conocimientos, así como el profesor puede comprobar y mostrar que tan claros son los conceptos que da, así el se autoevalua. Con todo esto el estudiante mostrara sus inquietudes y su imaginación para desarrollar nuevos juegos los cuales puedan ser aplicados a sus compañeros de otros grados.

Esta tesis la realice con el fin de convertir el aprendizaje del álgebra en una experiencia divertida y alentar así el deseo de desarrollar los temas de esta materia con mayor profundidad y menor temor. Así como impulsar al estudiante a participar en la creación de nuevos juegos, con ello empiezan a mostrar interés, compromiso y responsabilidad. Además que ayuda a establecer un vinculo de comunicación estudiante-profesor.

Además tiene como finalidad aportar algo en la enseñanza así como en el aprendizaje de las matemáticas, de una forma diferente e innovadora. Me queda una gran satisfacción porque yo misma he aprendido varias cosas para poder ayudar en un futuro a los estudiantes. Y como se planteó desde el principio uno de los objetivos principales de este trabajo es presentar el álgebra como algo ameno y sencillo de comprender.

BIBLIOGRAFÍA

Enculturación Matemática
La educación matemática desde una perspectiva cultural
Alan J. Bishop

Matemática Emocional
Los afectos en el aprendizaje matemático

Inés Ma. Gómez Chacon

Historia de las Matemáticas
Andrés Sestier
Editorial Limusa 1997

Libro para el maestro "Matemáticas"
Educación Secundaria, SEP
Edición 2001

Las cifras
Historia de una gran invención
Georges Ifrah
Alianza Editorial, S.A., Madrid,1987

Historia e Historias de Matemáticas
Mariano Perero
Grupo Editorial Iberoamericano, 1994

Tesis: Propuesta de enseñanza de ecuaciones
con una incógnita en bachillerato
José Agustín Uribe
Año 2003

Tesis: Un enfoque distinto de la enseñanza de las
Matemáticas y la Lógica a nivel primaria
Sara Alejandra Pando Figueroa
Año 2002

La enseñanza de las matemáticas modernas
J. Piaget, G Choquet
J. Dieudonné, R. Thom y otros
Alianza Editorial, 1978

Álgebra con Aritmética
Un enfoque moderno
Toribio Cruz Sanchez
EDIMAF, 1999

Matemáticas 2, Para Secundaria
Benitez, Valiente, Aragon
Editorial Patria, 1985

Referencias.

http://www.correo delmaestro.com/anteriores/2001/julio/incert62.htm

Enfoque integral para la enseñanza de las matemáticas en secundaria
Daniel Lira Olivares

www.itcr.ac.cr/revistacomunicacion/volumen%207N%Ba1%201993/pdf.

Aportes a la enseñanza de la matemática en la educación secundaria
José Fabio Hernández

http://docente.vaci.mx

Enseñanza de las matemáticas
Prof. Miguel de Guzmán

http://html.rincondelvago.com/pitagoras-y-la-escuela-pitagorica.html

La escuela Pitagórica

http://www.educarchile.cl/webwizzard/visualiza.asp?idproyecto=3&idpagina=305&posx=posy=2&

http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematico1.htm

Modelo de aprendizaje socio cultural de Vigotsky

Docentes.vacj.mx/flopez/curso/Didactica/Lainovacióny la investigación.htm

Didactica de las matemáticas y la innovación y la investigación
Martín M. Socas Roboyna
Universidad de la laguna Española

http://utenti.quipo.it/base5/introduz/guzmanjuegos.htm
Juegos matemáticos en la enseñanza
Miguel de Guzman

www.revistasuma.es/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=25
Viète, Cremona y von Neumann
Suma. Noviembre 2003, pp 113-115