



Universidad Nacional Autónoma de México

---

---

Facultad de Ciencias

**Prueba Experimental de la Desigualdad de Bell.**

**TESIS**

que para obtener el título de:

**FÍSICO.**

presenta:

**Erick Barrios Barocio**

Director de tesis: Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar



Febrero 2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno.                  Apellido paterno:                  Apellido materno:                  Nombre (s):                  Teléfono:                  Universidad:                  Facultad:                  Carrera:                  Número de cuenta:</p>	<p>Barrios                  Barocio                  Erick                  57-50-22-15                  Universidad Nacional Autónoma de México                  Facultad de Ciencias                  Física                  099038500</p>
<p>2. Datos del tutor.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dr.                  Víctor Manuel                  Velázquez                  Aguilar</p>
<p>3. Datos del sinodal 1.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dr.                  Héctor Octavio                  Castaños                  Garza</p>
<p>4. Datos del sinodal 2.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dra.                  Rocío                  Jáuregui                  Renaud</p>
<p>5. Datos del sinodal 3.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dr.                  Víctor Manuel                  Velázquez                  Aguilar</p>
<p>6. Datos del sinodal 4.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dr.                  Enrique                  López                  Moreno</p>
<p>7. Datos del sinodal 5.                  Grado:                  Nombre(s):                  Apellido paterno:                  Apellido materno:</p>	<p>Dr.                  Jorge Gustavo                  Hirsch                  Ganievich</p>
<p>8. Datos del trabajo escrito.                  Título:                  Número de páginas:                  Año:</p>	<p>Prueba experimental de la desigualdad de Bell.                  144 p                  2008</p>

FACULTAD DE CIENCIAS



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

División de Estudios Profesionales

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente.**

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**"Prueba experimental de la desigualdad de Bell"**

realizado por **Barrios Barocio Erick**, con número de cuenta **099038500**, quien opta por titularse en la opción de **Tesis** en la licenciatura en **Física**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Héctor Octavio Castaños Garza

Propietario Dra. Rocío Jáuregui Renaud

Tutor(a)  
Propietario Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar

Suplente Dr. Enrique López Moreno

Suplente Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Ciudad Universitaria, D.F., a 26 de noviembre del 2007.  
**LA COORDINADORA DEL COMITÉ DE TITULACIÓN  
DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA**

**M. EN C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

## Reconocimientos.

Aprovecho la conclusión de este esfuerzo para manifestar mi principal aprecio y agradecimiento al profesor Víctor Manuel Velázquez Aguilar, quien fue mi tutor y asesor principal, por confiar en mí e invitarme a participar en el proyecto de investigación realizado en el Laboratorio de Óptica Cuántica de la Facultad de Ciencias de la UNAM, bajo su responsabilidad y dirección. Además le reconozco haber creado en mí un profundo interés por la Óptica Cuántica, su apoyo, su amistad y su consideración siempre fueron un aliciente para mí. Así mismo, agradezco a los profesores Enrique López Moreno y Marcela Dolores Grether González, por su ayuda y apoyo a este trabajo.

Agradezco a los profesores que integran el jurado: Rocío Jáuregui Renaud, Jorge Gustavo Hirsch Ganievich y Héctor Octavio Castaños Garza, por sus observaciones para mejorar el trabajo escrito.

Agradezco también de forma especial a Gustavo Armendáriz Peña por haberme ayudado y acompañado en las largas esperas de toma de datos, así como también en el montaje del experimento.

Finalmente, doy mi principal y mayor agradecimiento a mi familia, y sobre todo a mi padre, por haberme apoyado y ayudado en todo momento, durante la realización de este trabajo y durante toda mi carrera, a ellos dedico esta tesis.

*El objeto, sin embargo, es la auténtica verdad, es la realidad esencial; es independientemente de si es conocido o no; sigue siendo incluso si no es conocido, mientras que el conocimiento no existe si el objeto no está allí.*

*HEGEL*

*A pesar de su enorme éxito práctico, la teoría cuántica es tan contraria a la intuición que, aun después de 45 años, los propios expertos no se ponen de acuerdo en qué hacer con ella.*

*PAUL DIRAC*

*Creo poder decir con seguridad que nadie entiende la Mecánica Cuántica.*

*RICHARD FEYNMANN*

*Cuanto mas éxito tenga la teoría cuántica, más disparatada parecerá.*

*ALBERT EINSTEIN*

# Índice

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>Capítulo 1. El debate EPR – Bohr y el Teorema de Bell</b>	<b>1</b>
1.1. La interpretación estadística.....	1
1.2. Realismo en la Mecánica Cuántica.....	2
1.3. El debate de Bohr y Einstein.....	3
1.4. El argumento Einstein –Podolsky – Rosen (EPR).....	4
1.5. El Teorema de Bell.....	6
1.6. La interpretación de Bohm.....	7
1.7. ¿La No – Localidad Cuántica viola el Principio de la Relatividad?.....	7
<b>Capítulo 2. Teoría básica de la desigualdad de Bell</b>	<b>9</b>
2.1. Ejemplos ilustrativos de no localidad y teorías de variable oculta.....	9
2.1.1. Ejemplo de D. Mermin.....	9
2.1.2. Ejemplo con espines (versión de David Bohm).....	12
2.2. Formalismo en el Teorema de Bell.....	16
2.2.1. Ejemplo con fotones polarizados.....	18
2.2.2. Un poco mas sobre el esquema experimental del Teorema de Bell.....	25
<b>Capítulo 3. Óptica no lineal y fenómenos relacionados</b>	<b>31</b>
3.1. Materiales birrefringentes.....	31
3.2. Medios anisotrópicos.....	31
3.2.1. El tensor dieléctrico.....	32
3.2.2. Propagación de la luz a lo largo de los ejes principales de un medio anisotrópico.....	33
3.2.3. Ondas electromagnéticas en un material anisotrópico.....	33
3.3. Susceptibilidad no lineal.....	36

3.4.	Fenómenos no lineales de segundo orden.....	38
3.4.1.	Proceso paramétrico óptico y generación del segundo armónico.....	39
3.4.2.	Suma y diferencia de frecuencias.....	31
3.5.	SPDC tipo I.....	43
3.6.	Cristales de Beta Bario Borato (BBO).....	45
<b>Capítulo 4. Fotones enredados, formalismo Cuántico</b>		<b>49</b>
4.1.	Cuantización de un campo uní-dimensional.....	49
4.2.	Estados de número de los fotones .....	53
4.3.	Fluctuaciones cuánticas de un campo uní-dimensional.. ..	53
4.4.	Generación de luz (representada con estados de número).....	54
4.5.	Estados con polarización enredada.....	57
4.6.	Generación de estados con polarización enredada.....	58
<b>Capítulo 5. Realización experimental</b>		<b>63</b>
5.1.	Simulación computarizada de datos.....	63
5.2.	Primer montaje experimental.....	65
5.2.1.	Láser y montura de cristales.....	65
5.2.2.	Sistema acoplamiento a fibra óptica.....	66
5.2.3.	Detector de avalancha.....	68
5.2.4.	Montaje de los cristales y definición de la base del sistema.....	69
5.2.5.	Prueba de ruido del SPCM y Cuentas de cristales delgados (contador).....	70
5.2.6.	Circuito de coincidencias.....	72
5.2.7.	Coincidencias en el cono de fotones infrarrojos.....	76
5.2.8.	Colocación de sistemas polarizadores y definición del sistema de medición....	79
5.2.9.	Colocación del compensador Babinet.....	81
5.3.	Resultados del primer montaje experimental.....	84
5.3.1.	Primer conjunto de datos.....	85



5.3.2.	Segundo conjunto de datos.....	88
5.3.3.	Conclusiones para el primer montaje experimental.....	92
5.4.	Segundo montaje experimental.....	92
5.4.1.	Montaje de los cristales.....	92
5.5.	Resultados del segundo montaje experimental.....	94
5.5.1.	Primer conjunto de datos.....	94
5.5.2.	Segundo conjunto de datos.....	97
5.5.3.	Conclusiones para el segundo montaje experimental.....	98
<b>Capítulo 6. Conclusiones</b>		<b>101</b>
<b>Apéndice A Integrales útiles para el Capítulo 2.</b>		<b>103</b>
<b>Apéndice B Ondas electromagnéticas en materiales y birrefringencia</b>		<b>106</b>
<b>Apéndice C Ondas electromagnéticas en materiales y birrefringencia (método alterno), la ecuación de Fresnel</b>		<b>112</b>
C.1.	Anisotropía.....	112
C.2.	La indicatris óptica.....	112
C.3.	La ecuación de Fresnel.....	113
C.4.	Superficies normales.....	116
<b>Apéndice D Propiedades de la susceptibilidad no-lineal</b>		<b>117</b>
D.1.	Realidad de los campos.....	117
D.2.	Simetría de permutación intrínseca.....	118
D.3.	Simetrías para un medio no absorbente.....	118
D.4.	Simetría de Kleinman.....	118
D.5.	Notación contraída.....	118
D.6.	Valor efectivo de $d$ ( $d_{ef}$ ).....	120
D.7.	Influencia de la simetría espacial en la susceptibilidad de segundo orden.....	120

<b>Apéndice E</b>	<b>121</b>
E.1. La ecuación de onda para un medio óptico no lineal.....	121
E.2. Ecuación de onda acoplada para generación por suma de frecuencias.....	124
E.2.1. Consideraciones de acoplamiento de fase.....	126
E.3. Generación por suma de frecuencias.....	127
<b>Apéndice F Generación del segundo armónico</b>	<b>130</b>
F.1. Consideraciones del acoplamiento de fase.....	134
<b>Apéndice G Generación por Diferencia de Frecuencias</b>	<b>135</b>
<b>Apéndice H Láminas de media onda y compensadores</b>	<b>137</b>
H.1. La lámina de media onda.....	137
H.2. Compensadores.....	138
<b>Apéndice I Programa para calcular la incertidumbre estadística de S</b>	<b>140</b>
<b>Apéndice J Material esencial utilizado</b>	<b>141</b>
<b>Referencias y Bibliografía.</b>	<b>143</b>

# PREFACIO

Cuando la Mecánica Cuántica se encontraba en su estado germinal de desarrollo y aceptación por la comunidad científica, surgieron algunas opiniones encontradas acerca de las ramificaciones teóricas de esta nueva disciplina. La preocupación teórica mas grande residía en el hecho de que la Mecánica Cuántica permitía que los objetos tuvieran una falta de definición en su estado de existencia, es decir, el estado de un objeto podía ser descrito como una probabilidad compuesta de múltiples estados diferentes. Algunos no creían que los objetos pudieran existir de esta manera, sino que los objetos debían tener estados definitivos; para estas personas la Mecánica Cuántica era una teoría incompleta, ya que no era capaz de identificar en qué estado se encontraba una partícula. Esta posición de pensamiento fue comúnmente referida como punto de vista realista.

En un esfuerzo para convencer al mundo de que el punto de vista realista era el único con validez, los físicos Albert Einstein, Boris Podolsky, y Nathan Rosen formularon un experimento teórico imaginario que cuestionaba el comportamiento de los objetos “*enredados*”, es decir, aquellos cuyo modo de existencia supone algún grado de correlación. Este ejercicio mental, desde entonces, es comúnmente referido como la paradoja EPR. En estos objetos enredados, el estado de cada objeto individual del sistema es dependiente del estado de todos los otros objetos del sistema. Es posible que los objetos tengan ciertas propiedades enredadas, mientras que otras permanecen independientes. El punto de vista realista aseguraba que los objetos (partículas) ya debían haber existido en un cierto estado particular, con independencia de la influencia de los demás objetos en el sistema, pero que la mecánica cuántica no proporcionaba esta información. La paradoja EPR asumía el principio de *localidad*, en el cual las partículas sólo son afectadas por cosas que están en su entorno próximo. Así, la existencia de una *variable oculta local*, no identificada por la mecánica cuántica, fue propuesta en una publicación de EPR para intentar explicar tal comportamiento.

Muchos científicos intentaron crear nuevas teorías de variables ocultas para explicar o resolver el problema planteado en la publicación de EPR; sin embargo, estas investigaciones se detuvieron en 1964, cuando John S. Bell probó teóricamente que cualquier teoría de variable oculta local no podía ajustarse o estar en congruencia con la mecánica cuántica. Por lo tanto, solo se podía concluir que la mecánica cuántica era incompleta ó que efectivamente existe un comportamiento no local. La no localidad sugería que podía darse una interdependencia entre dos sistemas aislados en espacio y tiempo. Desde luego, la publicación de la teoría de Bell impulsó muchas pruebas experimentales que han confirmado la no localidad de la mecánica cuántica, aunque aún quedan dudas sobre la forma en que se implementaron dichas pruebas experimentales.

La demostración de la no-localidad de la naturaleza por medio de la violación de la desigualdad de Bell es, actualmente, un experimento sencillo, pero a la vez atrayente, ya que inspira una sensación de asombro acerca de cómo es que se comporta nuestro universo. Este experimento no sólo es interesante por lo anteriormente dicho, sino que, además, nos insta a estudiar un gran número de tópicos de física, como lo son la mecánica cuántica, óptica, electrónica y aspectos relacionados con la teoría de la información.

El presente trabajo aborda, reproduce, reflexiona y estudia de manera simple y exhaustiva uno de dichos experimentos, el cual utiliza fotones con polarización enredada, con el objetivo de que el mismo experimento se pueda utilizar durante la impartición de cursos y en la enseñanza de temas afines, relacionados con la mecánica cuántica, ya sea que se tenga considerada la realización de prácticas de laboratorio o no. Nuestro trabajo de tesis documenta el esfuerzo realizado durante varios meses en el Laboratorio de Óptica Avanzada de la Facultad de Ciencias

de la UNAM, lapso durante el cual desarrollamos la práctica experimental sobre la Desigualdad de Bell, práctica que hemos dejado a punto para ser utilizada, siempre que se requiera o considere conveniente, en los cursos de óptica cuántica.

Desde luego, nuestro trabajo también puede ser utilizado como referencia introductoria y material de estudio para el posterior desarrollo de aplicaciones interesantes del comportamiento no-local de partículas enredadas e investigación sobre este tema. Por ejemplo, la criptografía cuántica utiliza las correlaciones de partículas enredadas para distribuir llaves criptográficas (de seguridad); otra aplicación que reviste interés, y con mucho potencial de investigación, se encuentra en la producción de bits cuánticos para computación cuántica.

En el primer capítulo dejamos asentados algunos de los elementos históricos que dieron lugar al debate entre los pioneros de la mecánica cuántica; particularmente hacemos mención de las posiciones realista y ortodoxa, respecto de las interpretaciones de la mecánica cuántica, cuyos postulantes más notables fueron Einstein y Bohr, respectivamente. Anotamos las consecuencias del argumento de Einstein, Podolsky y Rosen sobre la no localidad de la mecánica cuántica, cuestión que no observó avances notables sino hasta 1964, cuando John Bell presentó su famoso teorema.

En el segundo capítulo establecemos, mediante ejemplos, los argumentos explicativos del fenómeno de la no localidad y enredamiento. Dichos ejemplos nos permiten presentar distintas formas de entender el fenómeno, haciendo uso de un formalismo sencillo y esclarecedor, a la vez que nos aproximan al reconocimiento de algunas versiones de la desigualdad de Bell y al enunciado del teorema.

En el capítulo 3 se presenta la teoría básica en la que se sustentan algunos de los fenómenos de óptica no lineal y birrefringencia que pueden ser usados para la producción de fotones con propiedades de polarización enredada. De tal suerte, en este mismo capítulo se revisan conceptos como los de susceptibilidad no lineal, anisotropía de materiales cristalinos, birrefringencia, procesos paramétrico ópticos, generación de segundo armónico y generación por suma y diferencia de frecuencias, todo lo cual da cuenta de la importancia del proceso de conversión espontánea paramétrica descendente, que constituye una piedra fundamental en el desarrollo experimental de nuestro trabajo.

En el capítulo 4 presentamos la teoría relacionada a la cuantización del campo electromagnético y algunas de sus propiedades, con el objetivo de interpretar al fotón como elemento de excitación de un modo normal del campo electromagnético. Lo cual se hace para tener la confianza de representar y manejar los fotones de la forma en que se presentaron en el capítulo 2, con sólo una diferencia de notación. De tal suerte, esto nos permitió reinterpretar desde el punto de vista cuántico el fenómeno de conversión espontánea paramétrica descendente, poder crear estados enredados con fotones polarizados, y estar en condiciones de avanzar hacia el desarrollo experimental que es la parte conclusiva de nuestro trabajo.

En el capítulo 5, abordamos el desarrollo experimental para comprobar la teoría propuesta por John Bell, se describen con detalle los pasos realizados para lograr el montaje requerido a nuestras necesidades experimentales. En este mismo capítulo se da cuenta de la serie de experimentos que permitieron analizar, calcular y recabar los datos y valores necesarios en la determinación del parámetro de Bell, con lo cual se pudieron satisfacer los objetivos iniciales que se plantearon para investigar la desigualdad de Bell. Exponemos dos montajes realizados a lo largo del trabajo, en el primero explicamos y analizamos el funcionamiento del montaje cuando se trabaja con cristales delgados, mientras que en el segundo, lo hacemos trabajando con cristales gruesos; esto con el propósito de observar cómo es que afecta el grosor de los cristales de conversión al valor del parámetro de Bell. Esto se realizó de esta manera ya que se aprovechó la oportunidad de que en el laboratorio de trabajo se contaba con dos pares de cristales de distinto grosor.

# Capítulo 1

## El debate EPR – Bohr y el Teorema de Bell

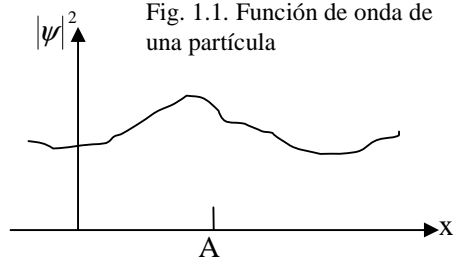
En este primer capítulo dejamos asentados algunos de los elementos históricos que dieron lugar al debate entre los pioneros de la mecánica cuántica; particularmente hacemos mención de las posiciones realista y ortodoxa, respecto de las interpretaciones de la mecánica cuántica, cuyos postulantes más notables fueron Einstein y Bohr, respectivamente. Mencionaremos el argumento presentado por Einstein, Podolsky y Rosen sobre la no localidad de la mecánica cuántica, anotamos sus consecuencias, así como sus implicaciones. La discusión del argumento no observó avances notables sino hasta 1964, cuando John Bell presentó su famoso teorema, que es el fundamento de este trabajo; también, mencionamos datos acerca de pruebas experimentales que se han realizado para responder al problema planteado por el argumento de Einstein y el teorema de Bell.

### 1.1 La interpretación estadística

La interpretación estadística de Born de la función de onda establece que  $|\psi(x,t)|^2$  da la probabilidad de encontrar una partícula en el punto  $x$  al tiempo  $t$ , o de manera más precisa:

$$|\psi(x,t)|^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{probabilidad de encontrar la partícula} \\ \text{entre } x \text{ y } (x + dx), \text{ al tiempo } t. \end{array} \right\}$$

La interpretación estadística introduce una indeterminación en la mecánica cuántica; incluso si conocemos todo lo que la teoría tiene que decirnos acerca de la partícula (mediante su función de onda) no podemos predecir con total exactitud el resultado de un experimento para medir su posición. En muchas situaciones, la mecánica cuántica sólo nos puede ofrecer la información estadística de los posibles resultados de dicho experimento.



Esta indeterminación ha perturbado profundamente tanto a físicos como a filósofos, que se preguntan si se trata de una peculiaridad de la naturaleza, una deficiencia en la teoría, una falla en los aparatos de medición, o algo más que habrá que dilucidar.

Como ejemplo [1], supóngase que hacemos una medición de la posición de una partícula (Figura 1.1), y se encuentra que está en la posición  $A$ . Ahora hacemos la siguiente pregunta: ¿Dónde se encontraba la partícula inmediatamente justo antes de la medición? Existen tres respuestas plausibles, y ellas sirven para caracterizar a las principales escuelas de pensamiento respecto a la indeterminación cuántica:

1. La posición **realista**. *La partícula estaba en  $A$* . Esta parece una respuesta bastante coherente, y es la que Einstein defendía. Notemos, sin embargo, que si esta respuesta es correcta, entonces la mecánica cuántica es una teoría incompleta, ya que la partícula ya se encontraba en  $A$  y la mecánica cuántica fue incapaz de decírnoslo (ya que la función de onda solo nos dice donde es probable que encontremos la partícula, pero no nos asegura el lugar). Para los realistas, la indeterminación no es una característica de la naturaleza, sino el reflejo de nuestra ignorancia, “la posición de la partícula nunca estuvo indeterminada, sino solamente era desconocida para el experimentador”. Así, para los realistas, la función de onda  $\Psi$  no está completa, ya que solo proporciona una cierta información del sistema, por lo tanto, alguna información adicional

(conocida como **variables ocultas**) es necesaria para proveernos de una descripción completa de l

2. La posición **ortodoxa**. *La partícula realmente no tenía una posición, estaba en todos lados*. Fue el acto de medición lo que forzó a la partícula a tomar un lugar fijo (pensar en cómo y por qué escogió el punto A es otro asunto), “las observaciones no solo perturban lo que se va a medir, lo producen; de este modo obligamos a la partícula a asumir una posición definida”. Este punto de vista (llamado **interpretación de Copenhagen**) está asociada con Bohr y sus seguidores. Y es, ciertamente, la posición con más simpatizantes. Sin embargo, notamos que, si esta respuesta es correcta, hay algo muy peculiar acerca del acto de medición, algo que después de más de medio siglo no se ha aclarado.
3. La posición **agnóstica**. *Se rehusa a contestar*. Esto no es tan simple como parece, ya que, qué sentido puede tener hacer reflexiones acerca del estado de la partícula antes de la medición, cuando la única forma de conocer si uno u otro tiene la razón es precisamente realizando una medición, en cuyo caso lo que uno obtiene no es algo “antes de la medición”. Es un tanto metafísico preocuparse acerca de algo que no puede, por su naturaleza, ser probado. Pauli decía: “Uno no se debe seguir rompiendo la cabeza en el problema de que si algo, de lo que uno no puede conocer nada, existe, pues es lo mismo que hacerse la antigua pregunta de ¿Cuántos ángeles se pueden sentar en la punta de un alfiler?”. Por décadas esta fue una posición comodín para muchos físicos, que intentaban convencer a sus interlocutores que la respuesta 2 era la correcta, pero que si encontraban resistencia cambiaban a la 3 y terminaban el debate.

Desde luego, las tres posiciones tenían sus partidarios. Pero en 1964 John Bell mostró que se hace presente una diferencia observable si la partícula tiene una posición precisa (pero que desconocemos) antes de la medición. Este descubrimiento eliminó de manera tajante la posición agnóstica, y estableció una pregunta de carácter experimental para dilucidar si 1 o 2 eran las respuestas correctas.

Ahora los experimentos realizados parecen confirmar la posición ortodoxa: Una partícula simplemente no tiene una posición definida antes de la medición, es el proceso de medición el que hace hincapié en un número particular y por tanto, en cierto sentido, crea el resultado específico, limitado solamente por el peso estadístico impuesto por la función de onda.

Pero ¿Qué ocurre si una segunda medición es hecha inmediatamente después de la primera?, ¿Obtendríamos A de nuevo, o el acto de medir generará un número completamente nuevo cada vez? En esta cuestión todos están de acuerdo: medir repetidamente (en la misma partícula) debe regresar el mismo valor. De hecho, sería difícil probar que la partícula realmente se encontró en A en primera instancia si esto no pudiera ser confirmado por una repetición inmediata de la medición. Pero, ¿Cómo la interpretación ortodoxa explica el hecho de que una segunda medición está obligada a dar el valor A? Evidentemente la primera medición altera radicalmente la función de onda, de forma que ahora está definida como un pico en A (como una delta), figura 1.2. En tal situación decimos que la función de onda se colapsó, debido a la medición, en un pico en A (después, con el tiempo,  $\Psi$  se dispersa de nuevo, de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, de forma que la segunda medición se debe hacer muy rápido). De tal suerte, se presentan dos distintos tipos de procesos físicos: los “ordinarios” en los cuales la función de onda se comporta de forma lenta y siguiendo la ecuación de Schrödinger, y las “mediciones” en las cuales  $\Psi$  se colapsa abrupta y discontinuamente.

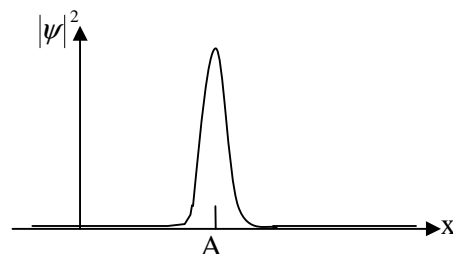


Fig. 1.2. Función de onda de una partícula después de una medición en A.

## 1.2 Realismo en la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica se toma en cuenta para un amplio intervalo de correlaciones en mediciones clásicas (la relación entre los resultados de mediciones y entidades cuánticas) pero, de acuerdo con la interpretación de Copenhagen, esto no da evidencia para la “realidad” (existencia) de algunas entidades cuánticas que son usadas para explicar dichas correlaciones. Por ejemplo, una señal medible

suministrada a una televisión mediante una antena se puede correlacionar con la imagen vista en la pantalla por medio de cálculos cuánticos que involucren electrones (ya que la imagen es creada por electrones que están “relacionados” de varias maneras con la frecuencia y amplitud de la onda recibida por la antena). Sin embargo, la interpretación de Copenhagen, al menos en su forma más extrema, se rehúsa a aceptar esto como evidencia de que los electrones existen. El punto de vista de la interpretación de Copenhagen rechaza en las entidades cuánticas el tipo de realismo que los sistemas clásicos adquieren de las propiedades que ellos poseen, independientemente de cualquier medición. En mecánica cuántica los valores de los observables (las propiedades medibles de un sistema físico como posición, energía y momentum) puede ser medido, pero los resultados generalmente no son valores que fueran poseídos por el sistema (partícula) antes de la medición y esos resultados están, en cualquier caso, limitados por un tipo de indeterminación cuántica representada por el principio de incertidumbre de Heisenberg [2]. Einstein creía en la existencia de una **realidad** tal que *los valores de los observables fueran poseídos por el sistema desde antes de su medición*, él escribía: “Sí, sin afectar de ninguna forma al sistema, podemos predecir con precisión (i.e. con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad” [3, 4].

### 1.3 El debate de Bohr y Einstein

Desde su principio, la interpretación de Copenhagen encontró una gran oposición en Albert Einstein (1879-1955). En las conferencias Solvay de 1927 y en los años siguientes, Einstein presentó una serie de experimentos mentales diseñados para mostrar que variables como la posición y el momento, podían ser medidas simultáneamente a pesar de que el principio de incertidumbre decía lo contrario. Neils Bohr (1885-1962), el principal arquitecto y defensor de la interpretación de Copenhagen, siempre encontraba fallas en cada uno de estos experimentos. Aquí solo consideraremos, para efectos de ilustración, una de las propuestas de Einstein [2, 3].

Una de las manifestaciones más simples de la incertidumbre es el comportamiento de onda de una partícula después de que pasa un pequeñísimo agujero en un diafragma. Sabiendo que ha pasado por un agujero, tenemos información de la posición de la partícula. Sin embargo, al pasar por un agujero extremadamente pequeño (pinhole), la función de onda de la partícula se dispersa hacia todas direcciones. La interpretación de esto en términos de la partícula es que la dirección del momento de la partícula se indetermina. Si la partícula es detectada observando el destello que provoca en una pantalla fluorescente colocada después del diafragma, no seremos capaces de predecir exactamente dónde será observado el destello.

Pero “no tenemos porque aceptar esta incertidumbre”, decía Einstein. Si conocemos el momento de la partícula antes de atravesar el agujero, y medimos el cambio en el momento del diafragma como resultado del paso de la partícula por el agujero, entonces, usando el principio de conservación de momento, podemos determinar el momento de la partícula después de que cruzó el agujero sin haber perturbado a la partícula. Conociendo la posición en la cual la partícula pasa a través del diafragma, y el momento de la partícula cuando emerge de él, podemos, decía Einstein, predecir con precisión donde aparecerá en la pantalla.

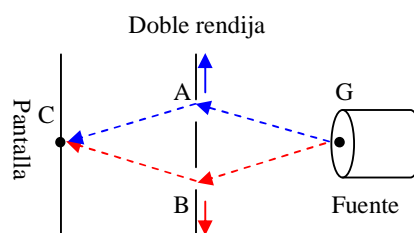


Fig. 1.3. Experimento de la doble rendija.

Aplicando esta idea, a un experimento de difracción de doble rendija, Einstein argüía que se podía determinar por qué rendija había cruzado la partícula, contradiciendo el punto de vista cuántico de que la existencia del patrón de interferencia en la pantalla hacia esto imposible. Bien, supongamos que la partícula llega a la pantalla en el punto C opuesto a la fuente G (figura 1.3). Si ha llegado a este punto pasando por la ranura superior A, la partícula se debió haber movido hacia arriba de G a A, y después por debajo de A hacia C. Por lo tanto debió haber adquirido momento hacía abajo del diafragma, debiendo haber dado al diafragma un empujón hacia arriba. Pero si pasó a través de la ranura inferior

B, debió haber dado un empujón hacia abajo al diafragma. Así, midiendo el cambio en el momento del diafragma cuando la partícula pasa por él, podemos distinguir entre las dos posibles trayectorias.

Bohr respondió que uno puede aplicar el principio de incertidumbre al diafragma que contiene las ranuras. La proposición de Einstein requiere del conocimiento preciso del momento del diafragma antes de que la partícula pase; por lo que su posición se torna incierta. Pero para obtener el patrón de interferencia en la pantalla, es necesario que el par de rendijas tenga una posición precisa relativa a la pantalla (es su coordenada paralela a la pantalla la que es importante, y ésta es justo la dirección de la componente de momento que Einstein necesita saber). Si la posición de las ranuras es incierta, entonces la posición de las bandas iluminadas y oscuras en el patrón también estará indefinida, de forma que se cancelarán unas a otras y no habrá interferencia.

El debate Einstein – Bohr continuó por muchos años e incluyó una ocasión en que Bohr refutó una de las propuestas de Einstein haciendo uso de la teoría general de la relatividad. Pero en 1935 Einstein presentó un nuevo reto a la mecánica cuántica, uno que aún genera discusión actualmente, más de 70 años después.

## 1.4 El argumento Einstein – Podolsky – Rosen (EPR) [3]

En 1935, Einstein (1879-1955) junto con Boris Podolsky (1896-1966) y Natan Rosen (1909–1995), produjeron un argumento que mostraba que el momento y la posición de la partícula, ambos, deben existir simultáneamente como “elementos de la realidad de la partícula” y que la mecánica cuántica, como convencionalmente se formulaba e interpretaba, debía proveer, por tanto, una descripción incompleta del mundo físico, ya que no permitía que la posición y el momento fueran medidos simultáneamente con precisión. En el argumento se centraba en dos suposiciones importantes, una es la realidad de los objetos, y la otra es conocida como localidad.

A continuación se presenta una versión simplificada del argumento, si se desea mayor claridad sobre este, es recomendable leer el artículo original, dado en la referencia [4].

El espín de una partícula se puede medir con un aparato llamado analizador de Stern- Gerlach, el cual solo mide la componente del espín que está a lo largo del eje vertical del analizador (figura 1.4), e indica la dirección de dicha componente como paralela o anti-paralela (espín arriba o espín abajo).

De acuerdo a la mecánica cuántica, mediciones de las componentes de los espines en direcciones ortogonales,  $x$  y  $z$  ( $S_x$  y  $S_z$ ), obedecen la relación de incertidumbre:

$$\Delta S_x \Delta S_z \neq 0 \tag{1.1}$$

Según esta expresión, ningún aparato puede medir con precisión y simultáneamente ambas componentes. EPR argüían que estas componentes se podían medir con gran precisión utilizando un aparato experimental como el de la figura 1.5. La primer parte del dispositivo genera dos partículas (A y B) en direcciones opuestas y **siempre con sus espines apuntando en direcciones opuestas**. Las otras dos piezas del aparato experimental son analizadores Stern- Gerlach, que están en lugares muy separados del espacio y que llamaremos locación A y locación B. Para hacer las cosas más específicas, imaginemos a dos experimentadores, Alicia y Beto, los cuales operan los dos analizadores. Ellos son libres de orientar sus analizadores en cualquier dirección. Cuando el experimento comienza, un par de partículas son enviadas hacia los dos experimentadores.

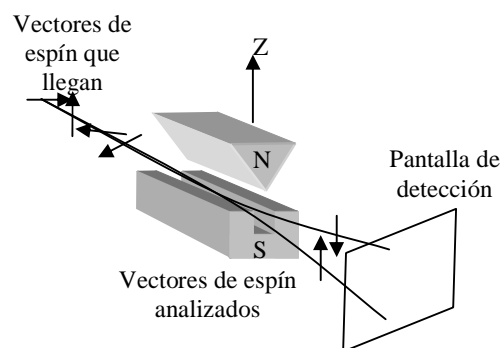


Figura 1.4. Los analizadores Stern – Gerlach miden la componente del espín a lo largo del eje del analizador, en este caso Z. Los magnetos producen un campo magnético no uniforme que deflexa las partículas, de forma que aquellas que difieran en la componente del espín lleguen a distintos puntos en la pantalla detectora.



Supongamos que Alicia orienta su analizador apuntando hacia arriba a lo largo del eje Z. Cuando la partícula entre a su analizador, el dispositivo dará una de dos respuestas para  $S_z$ : “espín hacia arriba” ó “espín hacia abajo”, supongamos que obtiene espín hacia arriba. Debido a que mediciones en los dos miembros del par de partículas siempre dan resultados opuestos, Alicia concluye que la partícula de Beto tiene espín hacia abajo a lo largo del eje Z. *De esta forma, Alicia ha medido la componente z del espín de la partícula que se dirige hacia Beto.* Si ellos quisieran, podrían probar esta conclusión haciendo que Beto oriente su analizador a lo largo del eje Z y hacia arriba, y midiendo el espín de su partícula. Encontrarían que siempre que Alicia midiera “espín hacia arriba”, Beto mediría “espín hacia abajo”, y viceversa.

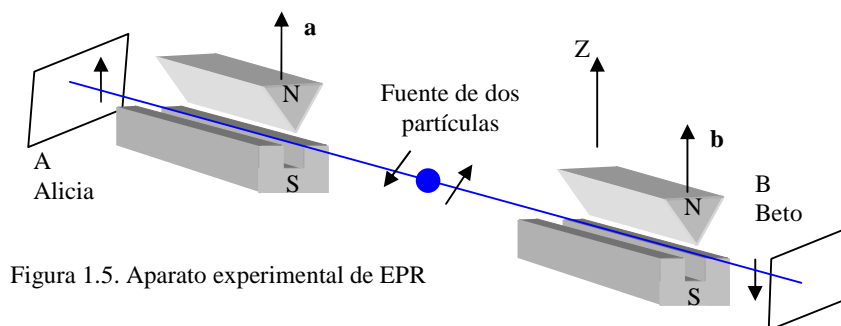


Figura 1.5. Aparato experimental de EPR

Ahora, EPR introducen el punto esencial. Ellos enfatizan que las locaciones A y B están muy separadas en el espacio, y lo que ocurra en una locación de ninguna manera puede afectar lo que ocurre en otra. Mientras el analizador de Alicia pudo haber influenciado su partícula y provocar que midiera espín hacia arriba, éste no puede tener algún posible efecto en la partícula que va hacia Beto. Es decir, el resultado que obtuvo Alicia no puede hacer, de ninguna forma, que el resultado del espín de la partícula de Beto sea espín hacia abajo. A partir de esto, EPR concluyeron que, *La partícula de Beto debía haber tenido espín hacia abajo a lo largo del eje Z incluso antes de que Alicia hiciera su medición.* La observación de ella era *requerida* para saber el espín de la partícula de Beto, pero la observación no pudo haber afectado su espín, la única función de su observación era la de encontrar una realidad pre-existente, una propiedad que la partícula ya poseía.

Supongamos que Alicia orienta de manera diferente su analizador, supongamos que escoge el eje X en lugar del eje Z. Ahora, Alicia puede medir la componente x del espín de la partícula de Beto ( $S_x$ ), y, de acuerdo a lo concluido antes, estamos seguros de que esta componente debió de haber existido antes de que ella realizara su medición, e incluso antes de que ella escogiera la orientación de su analizador. En base a esto, EPR concluyeron que ambas variables complementarias de la partícula de Beto,  $S_x$  y  $S_z$ , existían desde el momento en que se crearon las partículas (antes de las mediciones y de la selección de la orientación de medición) y tenían valores bien definidos.

Hay una variación del argumento anterior. Si Alicia orienta su analizador a lo largo del eje Z y Beto orienta su analizador a lo largo del eje X, Alicia puede inferir el espín de la partícula de Beto a lo largo del eje Z. Pero, en este caso, Beto puede medir directamente el espín de su partícula a lo largo del eje X. Si los dos comparten sus resultados, pueden conocer los valores  $S_x$  y de  $S_z$  de la partícula de Beto, en contradicción a los principios de la mecánica cuántica. Sin embargo, esta variante es menos fuerte que la primera, debido a que es posible que la medición de Beto perturbara a su partícula.

El argumento EPR hace uso de una suposición llamada **localidad**: la suposición de que todo lo que ocurra en un lugar dado tiene únicamente efectos locales. La localidad es una componente esencial del argumento EPR, sin esta hipótesis sería posible imaginar que la medición de Alicia podría forzar o hacer que la partícula de Beto tomara un nuevo estado. Así, sin la suposición de localidad, no se podría concluir que el espín de la partícula de Beto existe independientemente de la medición de Alicia. Para aclarar esto, imaginemos que Alicia vive en la Tierra, pero Beto vive en un planeta localizado en una galaxia a un millón de años luz. De acuerdo con la teoría de la relatividad, ningún efecto físico del aparato de Alicia se puede propagar más rápido que la luz. Así, durante un millón de años, el estado de la partícula de Beto estará perfectamente aislado del experimento de Alicia, justificando la suposición de localidad.

Podemos imaginar que la teoría de la relatividad podría ser errónea, pero incluso esto no invalidaría la suposición de localidad. Supongamos que Beto realiza su medición un año después de que Alicia hizo la suya. Para que la medición de Alicia pudiera tener algún efecto en la partícula de Beto, se tendría que postular algún efecto físico que viajara un millón de veces más rápido que la luz. Podemos ver que *la suposición de localidad esta justificada a menos que algún efecto físico sea capaz de viajar más rápido que la luz*. Este fenómeno implica una revisión radical de nuestras ideas acerca de la realidad física, algo que Einstein no estaba dispuesto a aceptar.

EPR formularon dos condiciones para la existencia de atributos reales de los objetos (elementos de realidad): el primero, debe ser posible predecir dichos atributos con perfecta precisión; segundo, la predicción debe estar basada en una medición que no perturbe o influya los atributos. En el ejemplo de Alicia y Beto, por medio de una medición hecha en  $S_z$  de su partícula, Alicia pudo inferir  $S_z$  de la partícula de Beto. Si Beto lo quisiera, podría medir  $S_z$  de su partícula y confirmar que la conclusión de Alicia era invariablemente correcta. Con esto, la primera de las dos condiciones es satisfecha. Además, el principio de localidad asegura que la medición de Alicia no pueda tener efecto alguno en la  $S_z$  de Beto, lo cual cumple con la segunda condición. Einstein, Podolsky y Rosen tomaron esto como evidencia de que  $S_z$  debía ser un atributo real de la partícula de Beto. Concluyeron que ciertas propiedades eran poseídas por las partículas desde su creación y que las mediciones simplemente revelaban los valores de esas propiedades, y no había necesidad de comunicar los resultados de una a otra.

*La característica de la mecánica cuántica que trajo a la luz el argumento EPR fue la habilidad de realizar mediciones en un punto, para instantáneamente determinar resultados de mediciones realizadas en otro lado, lo cual es usualmente referido como **no localidad** (aunque esta no es del todo igual a la rechazada por EPR).*

Bohr rápidamente reconoció la importancia del argumento. Después de un cuidadoso análisis dio una respuesta que hacía uso del principio de complementariedad (basado en la dualidad onda ó partícula de los objetos) para refutar el argumento EPR. El punto principal de la refutación de Bohr fue que el tipo de localidad que Einstein, Podolsky y Rosen estaban asumiendo era simplemente inconsistente con la mecánica cuántica. Mientras las dos partículas permanecieran en un estado enredado no podían ser consideradas como verdaderamente separadas, sin importar que tan lejanas estuvieran entre ellas.

Esta respuesta no satisfizo a Einstein, quien continuó argumentando que la física debería combinar localidad (conexiones no más rápidas que la luz) con realismo (las entidades microscópicas poseen todas sus propiedades en todo momento, independientemente de las mediciones de sus valores). El tema permaneció como punto de discusión entre Bohr y Einstein, hasta que éste murió en 1955. Pero ese no fue el final de la discusión.

## 1.5 El Teorema de Bell

No hubo ningún avance esencial en la discusión hasta 1964, cuando John Bell, un físico en el Centro Europeo de Física de Partículas (CERN), señaló una característica inesperada en el argumento EPR. Probó que en una forma elaborada del experimento, el tipo de realismo local que proponían EPR llevaba a predicciones experimentales que entraban en conflicto con las predicciones de la mecánica cuántica convencional [5]. Claramente, si tales experimentos se pudieran llevar a cabo serían una nueva forma de probar lo adecuado de la mecánica cuántica.

Bell fue capaz de mostrar que en cualquier teoría que combinara localidad y realismo, en la que las propiedades fueran poseídas por las partículas, incluso en ausencia de mediciones (realismo), se generaban unas desigualdades que siempre se satisfacían (esto se explicará someramente más adelante), conocidas como desigualdades de Bell, las cuales llevan a una conclusión conocida como teorema de Bell. Así, la aseveración de EPR de que las teorías físicas debían ser caracterizadas por localidad y realismo, podía ser probada gracias a las desigualdades de Bell.

Llevar a la práctica dicho experimento no es algo sencillo. Sin embargo, tales experimentos se hicieron viables a partir de 1980. Algunos de los primeros en realizarlo fueron los físicos franceses Alain Aspect, Philippe Grangier y sus colaboradores (en realidad fueron variantes del experimento idealizado por EPR, pero ellos trabajaron de la misma manera y establecieron el mismo punto general). Actualmente muchos de esos experimentos han sido realizados, y todos soportan a la mecánica cuántica en lugar de al realismo. Aspect y sus colaboradores diseñaron tres experimentos para probar violaciones a la desigualdad de Bell entre 1981 y 1982 [6, 7, 8]. Estos tres experimentos usaban pares de fotones correlacionados generados por el fenómeno atómico de cascada del calcio. El primer experimento comprobó violaciones en una versión generalizada de la desigualdad de Bell; en tanto que el segundo experimento midió la desigualdad CHSH (Clauser, Horne, Shimony y Holt, otra versión de la desigualdad de Bell propuesta por estos en 1969) [1, 9, 10].

Después del trabajo de Aspect, muchos experimentos nuevos se han realizado para probar la desigualdad de Bell con mucho más refinamiento; éstos usan pares de fotones enredados en polarización, generados por el fenómeno de conversión paramétrica descendente, lo que ha incrementado la sensibilidad de los experimentos y producido demostraciones más convincentes. De tal suerte, la violación de la desigualdad de Bell ha sido confirmada en muchos grados de precisión y con considerable distancia entre los detectores [2, 11, 12, 13, 14, 15]. Por lo pronto, sutiles objeciones (loopholes) que han surgido contra los métodos experimentales para probar las desigualdades de Bell, están siendo descartadas por pruebas más sofisticadas. Por ejemplo, se puede crear un escenario de realismo local si la distribución (de probabilidad) de la variable oculta fuera afectada por la forma en que se escogen hacer las mediciones a las partículas antes de que estas sean creadas. Este problema se puede resolver haciendo que la forma en que se van a hacer las mediciones sea escogida después de que las partículas hallan sido emitidas. Para más información acerca de “loopholes” ver las referencias: [12, 16, 17].

## 1.6 La interpretación de Bohm

El teorema de Bell impone serias limitaciones en la naturaleza de cualquier teoría de variable oculta que intente ser al menos tan buena como la mecánica cuántica, pero no deja fuera la posibilidad de que se formule una teoría de este tipo. Existe una teoría de variable oculta, en particular, que provee un punto de vista realista de la microfísica (que poseen propiedades independientes de las mediciones) y que reproduce las predicciones de la mecánica cuántica. Es capaz de esto ya que sigue de forma contundente la no localidad (como el teorema de Bell implica que debe ser). Dado que esta teoría usa el formalismo de la mecánica cuántica, puede ser vista como una interpretación de ésta, y como tal es referida como **interpretación ontológica**. Sin embargo, es más conocida como **teoría de Bohm**, en honor a su proponente David Bohm (1917–1992) [2, 18, 19]. Sin embargo, esta interpretación queda fuera del alcance de discusión del presente trabajo.

## 1.7 ¿La No – Localidad Cuántica viola el Principio de la Relatividad? [3]

En la sección 1.4, se mencionó que sin la suposición de la localidad, “aparentemente” podría haber algún tipo de señal o efecto físico que podría viajar más rápido que la luz; sin embargo, esto solo lo es en apariencia.

Es importante distinguir la no localidad que presenta la cuántica de la no localidad que EPR rechazaron al formular su paradoja. Su supuesto de localidad era la suposición de que nada que se hiciera en alguna localidad (nada de lo hecho por Alicia) podía tener efectos causales instantáneos en otra localidad (en el detector de Beto). Si este supuesto fuera desechado, ciertamente estaríamos violando el principio de relatividad de que ninguna causa física puede viajar más rápido que la luz. Pero la no-localidad cuántica da lugar a “*correlaciones*” (relación entre las propiedades de las dos partículas) EPR, que no pueden pensarse como la transmisión de alguna causa física de Alicia hacia Beto.

Esto es debido a que, cuando Alicia se prepara para medir el espín de su partícula, ella no puede controlar el resultado que obtendrá. Encontrará que el resultado puede ser tanto “espín arriba” como “espín abajo”, y no hay nada que pueda hacer que afecte el resultado. Por otro lado, supongamos que pudiera hacer algo para controlar su resultado; entonces, también sería capaz de controlar el resultado de la medición de Beto, habría una “acción a distancia”. Este tipo de control es exactamente lo que entendemos por causa física y, como lo hemos visto, la no-localidad que EPR rechazaban permitiría que se propagara con velocidad infinita; pero dado que Alicia es incapaz de ejercer este control, ninguna causa física queda involucrada en las correlaciones EPR y, precisamente debido a esto, se evita la comunicación a velocidades mayores que la luz entre Alicia y Beto.

El físico y filósofo Abner Shimony a denominado al tipo de no-localidad de la mecánica cuántica como “pasión a distancia”. La causalidad física operando a grandes distancias, necesariamente, involucra algún tipo de acción (aunque Alicia y Beto, cuando hacen sus mediciones se encuentran totalmente pasivos, sin controlar sus resultados). Es mas, aunque son pasivos, sin que ellos se den cuenta, una sutil conexión cuántica liga sus resultados.

Aunque involucra alguna clase de conexión instantánea, la “pasión a distancia”, no se puede utilizar para enviar un mensaje a mayor velocidad que la luz. A primera vista, parecería que se puede. Podríamos imaginar un esquema en el que las dos partículas que se dirigen hacia Alicia y Beto podrían ser usadas para transportar mensajes entre ellos. Por ejemplo, Alicia y Beto podrían quedar de acuerdo en reconocer que la recepción de una partícula con espín hacia arriba significa “me siento bien”, en tanto que el espín opuesto significaría “me siento mal”. De este modo, cuando Beto recibe una partícula con espín hacia arriba, conocería instantáneamente que su compañera esta en buen estado. Sin embargo, este esquema no funcionará, la razón es la misma que la dada anteriormente: Alicia no puede controlar el resultado de la medición de su espín y, en consecuencia, no puede producir que la medición de Beto tome un valor en particular. Por tanto, Alicia no puede hacer nada para controlar el mensaje que Beto obtiene. De hecho, si Alicia y Beto realizan sus mediciones individualmente una y otra vez, encontrarán que los resultados son perfectamente aleatorios; es decir, Alicia simplemente recibirá una cadena aleatoria de “espines arriba” y “espines abajo”, lo mismo que Beto, y como sabemos, una cadena aleatoria no puede contener ningún mensaje.

Esto apunta a uno de los elementos más curiosos de la no-localidad cuántica responsable de las correlaciones EPR. Si Alicia pone atención únicamente a los resultados de sus mediciones, no estará segura del hecho de que su partícula se encuentre íntimamente conectada con la de Beto; ella esta recibiendo una cadena aleatoria de “espines arriba” y “espines abajo”, queo es precisamente lo que ella estaría recibiendo si la fuente estuviera emitiendo pares sin correlación alguna, si no meramente fotones individuales. Solamente si ella compara sus resultados con los de Beto, podrán ambos descubrir el hecho extraordinario de que, aunque los resultados de sus mediciones individuales fueron aleatorios, una regularidad escondida se encontraba presente.

Finalmente, ¿Cómo es que Alicia y Beto comparan sus datos y descubren la correlación perfecta? Por un lado, Alicia y Beto podrían viajar para reunirse y, si lo hicieran, deberían hacerlo a velocidades menores que la de la luz. Alternativamente, Alicia podría transmitir un mensaje a Beto conteniendo los resultados de sus mediciones; cuando Beto los recibiera podría entonces hacer las comparaciones. Sin embargo, esta transmisión en si misma involucra un mensaje que viaja a lo mucho a la velocidad de la luz. En ambos casos *no ocurre violación alguna del principio de relatividad*.

# Capítulo 2

## Teoría básica de la desigualdad de Bell

En este capítulo establecemos, los argumentos explicativos del fenómeno de la no localidad y enredamiento. Presentamos distintas formas de entender estos fenómenos, haciendo uso de un formalismo sencillo y sin el uso de conceptos teóricos muy complejos, a la vez que nos aproximan al reconocimiento de algunas versiones de la desigualdad de Bell y a su teorema. Todo esto nos ayudará a entender como implementar y manejar nuestro sistema experimental.

### 2.1 Ejemplos ilustrativos de no localidad y teorías de variable oculta

En los siguientes ejemplos presentamos algunos de los argumentos detrás del fenómeno de la no localidad y enredamiento; cada ejemplo brinda formas distintas de entender y presentar el fenómeno, desde un razonamiento simple hasta uno más complejo (sin dejar de ser un ejemplo) con el objetivo de que se pueda entender mejor el formalismo que se presentará más adelante en el capítulo 4. Consideramos conveniente la presentación y revisión de los ejemplos que anotamos ya que, en conjunto, ofrecen una mejor idea de cómo es que se origina el fenómeno de enredamiento, y como es que lo estudiaremos experimentalmente en el presente trabajo.

#### 2.1.1 Ejemplo de D. Mermin [20]

Considérese que existen partículas con una cierta propiedad, “su forma”, la cual no es constante sino que es cambiante, pudiendo ser cuadrada o redonda dependiendo de la dirección en que se le vea. La partícula no puede ser observada (por un detector, como una persona) desde dos direcciones a la vez (una persona no puede hacer eso); y observarla desde una posición cambia la forma en que podría haber sido observada desde otras direcciones.

Una fuente crea pares “enredados” (o correlacionados) de estas partículas (al mismo tiempo y con la misma propiedad de forma) enviándolas en direcciones simétricamente opuestas, de manera que si se miran las dos desde un mismo ángulo, se verá la misma forma (figura 2.1).

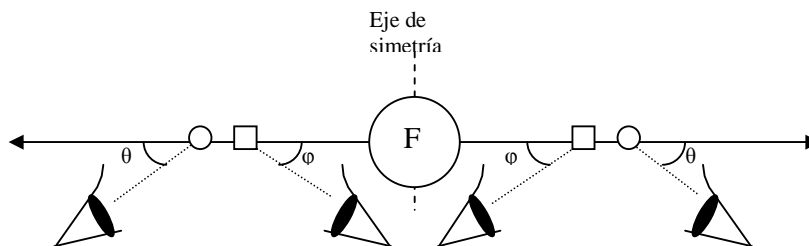


Fig.2.1. Esquema experimental de D Mermin.

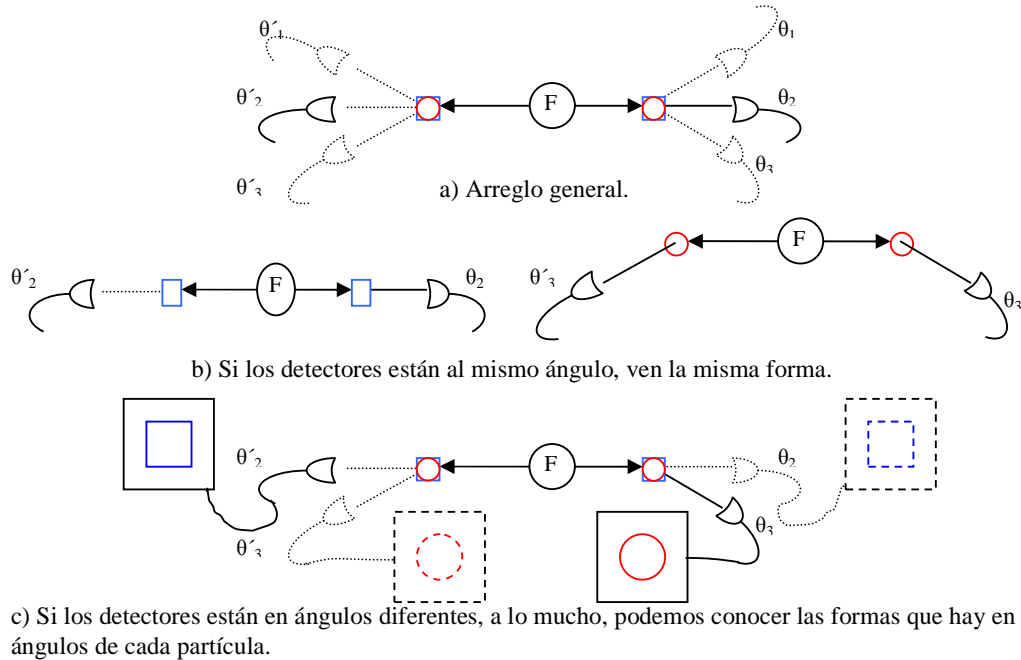
Dos detectores de forma, independientes entre ellos e independientes de la fuente, se colocan uno en la trayectoria de cada partícula, con la característica de que cambian de ángulo de observación de forma aleatoria después de que una partícula fue emitida; además, los detectores solo se pueden posicionar en

tres ángulos (figura 2.2a). Como las partículas están correlacionadas, los detectores registrarán (“medirán”) la misma forma cada vez que miden un par desde el mismo ángulo de observación (figura 2.2b).

Adicionalmente se encuentra que los detectores miden la misma forma la mitad de todas las corridas (esto es lo que argumenta la mecánica cuántica) cuando son colocados arbitraria e independientemente en uno de los tres ángulos en los que cada uno se puede colocar. En un esfuerzo por construir un modelo para esta situación, considerada de realismo local por naturaleza (ya que podemos argumentar que la forma de la partícula está definida desde su producción en la fuente, es decir, su forma está definida desde antes de la medición), debemos asumir que la información de la forma que toma la partícula en cada ángulo está contenida en ella. Esta es la única forma local para asegurar que la misma forma es medida cada vez que los ángulos de los detectores son los mismos. Esta información se puede representar por una S (para formas cuadradas) y una R (para formas redondas), escritas en tres columnas correspondientes a los tres ángulos de detección.

Hay que recordar que la forma es cambiante, si los detectores se colocan en una posición fija y las formas se presentaran de manera aleatoria; solo se puede observar una forma desde un ángulo a la vez y las medidas subsiguientes no reflejarán cual será la forma en otro ángulo; las partículas están correlacionadas en forma; los ángulos de medición en cada partícula son aleatorios; también solo cuando da la casualidad de que los ángulos son los mismos para cada partícula (por ejemplo  $\theta_1'$  y  $\theta_1$ ) se encuentra que la forma medida es la misma, lo cual implica que, en el caso en que los ángulos de medición no sean los mismos, a partir del ángulo de medición de una partícula podemos conocer la forma en el ángulo correspondiente de la otra partícula (figura 2.2c), pero la forma en el tercer ángulo de cada partícula no es posible definirla o conocerla.

Fig.2.2. Forma en que funciona el arreglo experimental.



Así, solo podemos conocer dos de las tres piezas de la información (la información es la forma en un ángulo dado) de cada partícula mediante mediciones; específicamente, de cada partícula sacamos una pieza de información de ella misma y una de la otra. Por lo que el tercer número de cada montaje es una incógnita, la llamada **variable oculta**.

Supongamos que el sistema es local y que se puede conocer la variable oculta (como proponen EPR); así, un par de partículas correlacionadas que se ven cuadradas desde los ángulos 1 y 2 y redondas desde el 3, tendrán tablas de información como las siguientes:

Partícula derecha			Partícula izquierda		
$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta'_1$	$\theta'_2$	$\theta'_3$
S	S	R	S	S	R

Para esta información en particular (SSR), hay 5 posibles posiciones de detección que hacen que los detectores midan la misma forma:

Angulo derecho	Angulo izquierdo	Forma derecha	Forma izquierda	Relación de forma
1	1'	S	S	Igual
2	2'	S	S	Igual
3	3'	R	R	Igual
1	2'	S	S	Igual
1	3'	S	R	Diferente
2	1'	S	S	Igual
2	3'	S	R	Diferente
3	1'	R	S	Diferente
3	2'	R	S	Diferente

Los casos en los que se tienen dos figuras iguales son: (1,1'); (2,2'); (3,3'); (1,2'); (2,1'); además hay cuatro casos que no dan la misma figura: (1,3'); (2,3'); (3,1'); (3,2'). Por lo que la probabilidad de detectar la misma forma en ambos detectores, dada esta información particular, es de 5/9. Existen otros posibles arreglos de información que dan la misma probabilidad de detectar la misma figura en ambos detectores, a saber: SRS, RSS, RRS, RSR, SRR, además del SSR. Es de notar que estos casos tienen dos figuras iguales en dos ángulos de detección y una diferente en el tercer ángulo, y por tanto también dan una probabilidad de 5/9 para detectar la misma figura. Los otros únicos casos de información son RRR y SSS, para los cuales la probabilidad de detectar la misma figura en ambos detectores es de 1.

Sin importar la distribución de estos casos particulares de información en las “formas enredadas”, es decir, cómo vayan apareciendo y con qué probabilidad, los detectores medirán la misma forma **por lo menos** 5/9 de todas las corridas, ya que todas las posibles formas en que se presenta la información tienen la misma probabilidad de ocurrir al ser generadas por la fuente de forma aleatoria. Para entender mejor esto veamos los dos casos más extremos.

- a) **La fuente siempre emite un único arreglo de información**, por ejemplo RSS. Que siempre se emita este arreglo quiere decir que tiene una probabilidad de aparecer de 1, este arreglo da una probabilidad de 5/9 de medir la misma figura en ambos detectores, por lo que la probabilidad total de medir la misma figura en ambos detectores es de  $(1)(5/9) = 5/9$ . Sin embargo, si se presentaran siempre RRR o SSS, la probabilidad total sería de  $(1)(1) = 1 > 5/9$ .
- b) **La fuente emite los arreglos aleatoriamente (como es en general)**. Cada arreglo tiene la siguiente probabilidad ( $P_{xxx}$ ) de ser emitido: SRR – 1/8; RSR – 1/8; RRS – 1/8; SSR – 1/8; SRS – 1/8; RSS – 1/8; RRR – 1/8; SSS – 1/8 (ya que son 8 casos emitidos de manera aleatoria). Pero sabemos que dentro de cada arreglo la probabilidad de medir dos formas iguales (p) es de 5/9 o 1 (dependiendo del arreglo), por lo que la probabilidad total en el experimento de medir dos formas iguales es de:

$$\begin{aligned}
 P &= P_{SRS} \cdot p + P_{RSS} \cdot p + P_{RRS} \cdot p + P_{RSR} \cdot p + P_{SRR} \cdot p + P_{SSR} \cdot p + P_{RRR} \cdot p + P_{SSS} \cdot p \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} > \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

Por lo que, sean como sean producidos los arreglos de información de las formas correlacionadas,  $P \geq 5/9$ . Esta desigualdad, donde P es la proporción sobre todas las corridas en que los detectores miden la misma forma es una especie de desigualdad de Bell, para este experimento donde se supuso que había variables ocultas que se conocían de antemano.

Sin embargo, una característica requerida en este modelo es que permita al comportamiento observado, al realizar las mediciones experimentales, tener la misma forma solo la mitad de las corridas, que es lo que ocurre en la práctica. En dicho caso, la desigualdad anterior se viola ya que:  $P = 1/2 < 5/9 !!!$  Así, en este caso el modelo de variables ocultas no describe adecuadamente el sistema. [12]

Para entender como se presenta este último caso donde  $P = 1/2$  tenemos que, como todo es aleatorio y no nos importa como está el arreglo de detección, solo nos concentramos en saber si coinciden las formas medidas o no (este argumento lo podemos relacionar con el que da la mecánica cuántica). El sistema tiene las siguientes características:

- Se producen dos formas.
- Se producen aleatoriamente.
- Solo nos interesan dos casos, las mediciones son iguales o son diferentes.

Los casos de medición que se pueden presentar son: SS, SR, RS, RR; con probabilidades de que se presenten de  $1/4$ , todas. Por lo que la probabilidad de medir dos formas iguales es  $P = P_{SS} + P_{RR} = 1/4 + 1/4 = 1/2 !$ .

Otra forma de entender esto es tomando tres monedas y hacer volados con las tres al mismo tiempo. Se asigna un número a cada moneda (1,2,3), se echan a volado y, cuando caigan, se toma (mide) de forma aleatoria el resultado de dos de ellas [(1,1); (1,2); ...; (3,3)] y se checa si el resultado de la combinación escogida tiene la misma cara o distinta. Si se realiza este experimento (lo cual se puede hacer en cualquier momento y lugar) muchas veces (para obtener un resultado confiable, idealmente, se tendrían que hacer infinidad de volados) y se hace una estadística de los resultados, habrá una tendencia a  $P = 1/2$ . De igual manera ocurre en el ejemplo de Mermin.

El punto central del ejemplo de Mermin es que si suponemos que hay variables ocultas y que las podemos conocer (como planteaban EPR), al hacer la estadística teórica, se llega a una desigualdad que se contradice al realizar el experimento y hacer la estadística de este, o al comparar con lo que predice la mecánica cuántica (la cual predice de mejor manera los resultados experimentales). Por lo que, en este caso, es equivocado suponer que las variables ocultas existen, que se pueden conocer y que la mecánica cuántica es incompleta.

### 2.1.2 Ejemplo con espines (versión de David Bohm) [2]

Este argumento se concentra en mediciones del espín de electrones, y es muy parecido al argumento EPR. Los hechos básicos acerca de tales mediciones se presentan a continuación:

En mecánica cuántica existe un operador llamado operador de espín ( $\hat{S}$ ), este operador tiene otros cuatro operadores relacionados con el, a saber:  $\hat{S}^2$  (relacionado con la magnitud al cuadrado del operador  $\hat{S}$ ),  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  y  $\hat{S}_z$  (estos tres están relacionados con las componentes de  $\hat{S}$  a lo largo de tres ejes cartesianos). A partir de esto, las relaciones de conmutación entre estos operadores estarán dadas como:

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z \quad (2.1)$$

Existen otros dos conmutadores que son una permutación cíclica del último. El hecho de que  $\hat{S}^2$  y  $\hat{S}_z$  conmuten, significa que pueden existir funciones propias (eigen-funciones) simultaneas para ambos operadores. Escribiendo estas funciones como  $\Psi$ , tendremos que:



$$\hat{S}^2 \Psi = s(s+1)\hbar^2 \Psi \quad \text{y} \quad \hat{S}_z \Psi = S_z \Psi \quad (2.2)$$

Donde  $s$  y  $S_z$  son los números cuánticos para la magnitud del espín y su componente  $z$  respectivamente, además,  $S_z$  solo puede tomar valores desde  $-s$  hasta  $+s$  en pasos enteros de 1. Los electrones tienen un espín de  $s = 1/2$ , por lo que una medición de valor propio de la componente en  $z$  arrojará cualquiera de los dos resultados  $S_z = \pm \hbar/2$ , denominados espín “arriba” y “abajo” respecto del signo, lo cual hace alusión al signo de la proyección del vector de espín a lo largo del eje  $z$  [21]. De acuerdo con lo anterior, cualquier medición de una componente particular del espín de un electrón, a lo largo de alguna dirección escogida, solo puede tener dos posibles resultados:  $+\hbar/2$  o  $-\hbar/2$  (estos son los únicos valores propios para esta clase de mediciones). Consecuentemente, si de forma arbitraria escogemos una dirección particular como la dirección  $z$ , y medimos la componente del espín del electrón en esa dirección, encontraremos inevitablemente que  $S_z = +\hbar/2$  ó  $S_z = -\hbar/2$ . Afirmaciones similares se pueden hacer acerca de las mediciones de la componente del espín de un electrón a lo largo de cualquier otra dirección. Así,  $+\hbar/2$  y  $-\hbar/2$  son los únicos posibles resultados de una medición de  $S_x$  y  $S_y$ , o, de hecho, para cualquier medición  $S_\alpha$  hecha en una dirección completamente arbitraria definida por el vector  $\alpha$ .

Por otro lado, las mediciones de las componentes del espín, como  $S_x$  y  $S_y$ , están sujetas a una relación de indeterminación similar al principio de incertidumbre para la posición y el momento. En el caso de la posición y el momento, el principio de incertidumbre implica que la medición precisa de cualquiera de las coordenadas de posición ( $x$ ,  $y$  ó  $z$ ) de una partícula es incompatible con una medición simultánea y precisa de la componente de momento correspondiente ( $p_x$ ,  $p_y$  o  $p_z$ ). En el caso de las componentes de espín se puede demostrar que la indeterminación cuántica implica que la medición de cualquiera de las componentes de espín, digamos  $S_z$ , es incompatible con una medición simultánea de las componentes perpendiculares  $S_x$  y  $S_y$ .

El argumento EPR está basado en la producción simultánea de un par de electrones, de tal forma que el espín total del par sea cero. Los dos electrones, denominados A y B, viajan en direcciones opuestas hacia aparatos de medición separados que son capaces de determinar alguna componente escogida del espín del electrón,  $S_z$  (figura 2.3).

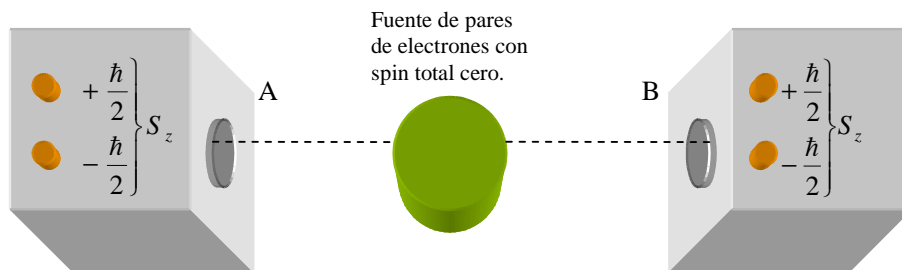


Fig. 2.3. Esquema experimental de Bohm.

El único resultado que tales dispositivos de medición pueden dar, para  $S_z$ , es  $+\hbar/2$  o  $-\hbar/2$ . Sin embargo, debido a que cada par de electrones (el sistema) tiene espín cero, se debe dar el caso de que cualquiera que sea el valor medido de  $S_z$  en A, el resultado opuesto debe ser medido en B.

Este par de electrones producidos de acuerdo al argumento EPR, han sido producidos en un estado que tiene la siguiente función de onda:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_+(A)\Psi_-(B) \pm \Psi_-(A)\Psi_+(B)] \quad (2.3)$$

Lo que quiere decir esta función es que en el sistema existe la mitad de probabilidad de detectar  $+\hbar/2$  en A y  $-\hbar/2$  en B (primer termino de la ecuación), y la otra mitad de detectar  $-\hbar/2$  en A y  $+\hbar/2$  en B (segundo termino), y siempre en esta forma. Donde  $\Psi_+(A)$  es la función propia o estado propio (eigenestado) del observable  $\hat{S}_z$ , que le corresponde el valor propio de  $+\hbar/2$ , y describe la situación en la cual una medición de  $S_z$  realizada en el electrón A da como resultado  $+\hbar/2$ , mientras que  $\Psi_-(A)$  describe el estado en el cual una medición realizada en A arroja el resultado  $-\hbar/2$  (de forma similar  $\Psi_+(B)$  y  $\Psi_-(B)$ ). Es claro que la función de onda  $\Psi$  definida en la ecuación 2.3 describe el estado de dos electrones ya que cada uno de sus términos es un producto de funciones de onda que separadamente describen a los electrones A y B sin importar que esos electrones estén muy aparte; además, cualquier función de onda que describa un estado como éste tiene la propiedad de que no puede ser escrito como un simple producto de funciones que describan diferentes partes del sistema. Lo que es menos claro, pero cierto, es que esta función de onda en particular implica que cualquier medición de la componente del espín  $S_z$  para uno de los electrones siempre estará *correlacionada* con el resultado de una medición similar realizada en el otro electrón sin importar donde esté. Esto es consecuencia de que la medición causa que la función de onda de un sistema cuántico se colapse abruptamente y solo tome una de las dos posibles formas en que se presentan los espines. El estado descrito por la ecuación de onda (2.3) es un ejemplo particular de lo que es, generalmente, conocido como **estado enredado**.

De acuerdo a la mecánica cuántica, la ecuación 2.3 implica que una medición inicial de  $S_z$ , realizada con uno de los dispositivos de medición, tiene la misma probabilidad de dar los resultados  $S_z=+\hbar/2$  o  $S_z=-\hbar/2$ . Sin embargo, una vez que la medición inicial se ha hecho, la función de onda del par inmediatamente colapsará a cualquiera de  $[\Psi_+(A)\Psi_-(B)]$  o  $[\Psi_-(A)\Psi_+(B)]$ , de acuerdo al resultado medido. Por ejemplo, medir  $S_z=-\hbar/2$  para A causará que la función de onda del par se colapse a  $[\Psi_-(A)\Psi_+(B)]$ . Entonces, la subsiguiente medición de  $S_z$  en el otro detector nos llevará inevitablemente al resultado opuesto al obtenido en la primera medición. Así que, aunque las componentes de los espines de los dos electrones están indeterminadas antes de cualquier medición, tan pronto como alguna de las componentes de un electrón es medida, el resultado de una medición similar realizada en el otro electrón puede ser predicha a dar el resultado opuesto con total exactitud.

De otra forma, de acuerdo siempre con la mecánica cuántica, los estados EPR descritos por la ecuación 2.3 no asocian ningún valor particular de  $S_z$  con el electrón A o con el B antes de la primera medición. Debido a que dicha ecuación describe un estado enredado que implica correlaciones entre los resultados de mediciones realizadas separadamente en diferentes partes del sistema (los electrones A y B), tan pronto como una medición de  $S_z$  es realizada en un electrón, el resultado de esa medición determinará instantáneamente el resultado de una medición similar realizada subsecuentemente en el otro electrón, sin importar que pueda estar muy lejos. Como vimos en el capítulo 1, esto genera algunas consecuencias interesantes; por ejemplo, si A y B están muy separados y las mediciones son realizadas en una forma rápida y sucesiva (de forma mas rápida que el tiempo en que tarda la luz de ir de A a B), entonces, “parecería” que algún tipo de señal o efecto físico con información acerca del colapso de la función de onda  $\Psi$  (resultado de la primer medición) tendría que viajar más rápido que la luz de manera que pudiera llegar al lugar de la segunda medición a tiempo para influenciar ese resultado (antes de la medición en B). En base a esto y a otros argumentos, EPR concluyeron que algunas propiedades tales como las componentes de espín son poseídas por las partículas desde que fueron creadas y las mediciones simplemente revelan los valores de esas propiedades intrínsecas, ya que la sugerencia de que la mecánica cuántica requería conexiones más rápidas que la luz era bastante inaceptable. En dicho caso, no habría necesidad, de acuerdo con EPR, de comunicar el resultado de la

medición de espín desde un dispositivo de medición a otro, ya que ambos electrones poseen espines definitivos que “solo esperan a ser revelados por la medición”.

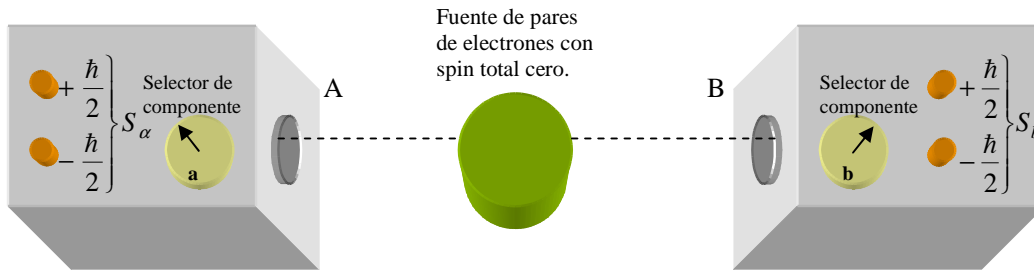
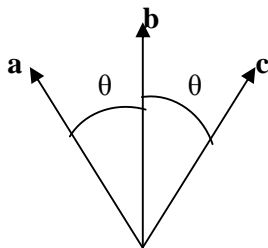


Fig. 2.4. Esquema experimental de Bhom, pero con selectores de componente.

Una versión modificada de este experimento (tipo EPR) puede aplicarse para obtener una desigualdad de Bell. En esta versión particular del experimento, los dispositivos de medición no están restringidos a medir la componente z del espín. En lugar de eso, cada medidor tiene un selector de componente que puede ser usado para seleccionar cualquier dirección (figura 2.4). Una vez que el selector de un dispositivo de medición ha sido fijado, el resultado de cualquier medición individual sigue siendo solo de  $+\hbar/2$  o  $-\hbar/2$ , ya que estos son los únicos resultados posibles para cualquier medición de la componente del espín de un electrón, independientemente de la dirección a lo largo de la cual la componente del espín sea medida.

Si se colocan los selectores de los dos detectores en direcciones representadas por los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y se miden las componentes de espín para un par de electrones A y B de un estado enredado EPR, los detectores darán valores medidos de  $S_a(A)$  y  $S_b(B)$ . Dado que cada uno de estos resultados debe ser  $+\hbar/2$  o  $-\hbar/2$ , el producto de los dos resultados  $S_a(A) \times S_b(B)$ , debe ser  $+\hbar^2/4$  o  $-\hbar^2/4$ . Si mediciones similares se hacen para un gran número de pares enredados  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), \dots, (A_n, B_n)$ , entonces para el  $i$ -ésimo par, la cantidad  $S_a(A) \times S_b(B)$ , será  $+\hbar^2/4$  o  $-\hbar^2/4$  (Diferentes pares darán en general diferentes resultados para este producto, pero cada uno de estos resultados debe ser  $+\hbar^2/4$  o  $-\hbar^2/4$ ). Consecuentemente, si se toma el promedio de todos estos resultados y se multiplica por  $4/\hbar^2$ , se tendrá un solo número que estará entre +1 y -1. Este número, el cual depende de las direcciones escogidas  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , será denotado por el símbolo  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , que nos dice el grado al cual las componentes de espín medidas están correlacionadas. Por ejemplo, si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son paralelas, entonces el requerimiento de que el espín total del par de electrones sea cero nos dice que  $S_a(A_i) = -S_b(B_i)$  para todo par, de forma que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1$ . Mientras que si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son antiparalelas entonces siempre se tendrá que  $S_a(A_i) = S_b(B_i)$ , en cuyo caso  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ . Otras elecciones de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  resultaran en diferentes valores de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Dado que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es una medida de la correlación de las componentes de espín, y dado que también es una función de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , es llamada generalmente **función de correlación**.

Fig.2.5. Representación angular de las diferentes posiciones de los selectores.



Al combinar las funciones de correlación de espín de una forma apropiada que nosotros elijamos, es posible construir cantidades para las cuales las predicciones de la mecánica cuántica entran en conflicto con las consecuencias de la suposición de localidad y realismo de EPR. Tal cantidad puede ser:

$$|C(b,b) + C(b,c) + C(a,b) - C(a,c)| \quad (2.4)$$

Donde los tres vectores coplanarios  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , y  $\mathbf{c}$  representan diferentes posiciones de los selectores, y están relacionados como se muestra en la figura 2.5. El punto importante a notar es que el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es igual al ángulo entre  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ , y que el valor

$$|C(b,b) + C(b,c) + C(a,b) - C(a,c)|$$

dependerá del valor de  $\theta$ ; en éste caso se puede ver de entrada que  $C(b,b)=1$ , dado que esta cantidad da la correlación de  $b$  consigo misma, que siempre es igual, es decir tienen correlación total.

En cualquier teoría que combina localidad y realismo de forma que no haya conexiones “supralumínicas” aparentes, y en la que las propiedades sean poseídas incluso en ausencia de mediciones, la siguiente desigualdad siempre será satisfecha:

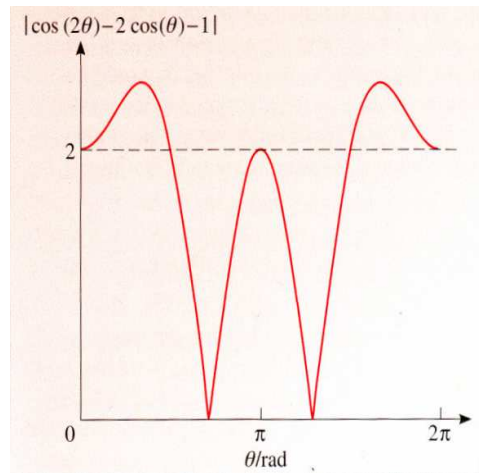
$$|C(b,b) + C(b,c) + C(a,b) - C(a,c)| \leq 2 \quad (2.5)$$

Tal relación es una versión de la **desigualdad de Bell**.

Por otro lado, se puede demostrar que la mecánica cuántica (la cual no es realista) predice que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos \theta$ , lo cual implica que:

$$|C(b,b) + C(b,c) + C(a,b) - C(a,c)| = |\cos(2\theta) - 2\cos(\theta) - 1| \quad (2.6)$$

La gráfica de la derecha muestra cómo el valor de esta cantidad varía con  $\theta$ . Como se puede ver, existen valores de  $\theta$  para los cuales las predicciones de la mecánica cuántica exceden el límite superior permitido por el realismo local.



La conclusión, a la cual conduce el argumento anterior, se conoce como Teorema de Bell, y se puede enunciar como sigue:

***Cualquier teoría que tenga las propiedades de localidad y realismo no puede reproducir todas las predicciones de la mecánica cuántica.***

## 2.2 Formalismo en el Teorema de Bell

Einstein, Podolsky y Rosen no dudaban que la mecánica cuántica fuera correcta, solo argumentaban que era una descripción incompleta de la realidad física. Se necesita una cantidad  $\lambda$  además de la función de onda  $\Psi$  para caracterizar a un sistema completamente.  $\lambda$  es la variable oculta, y no se tiene idea de cómo calcularla o medirla. A partir del segundo ejemplo que mostramos, Bell sugirió que en el experimento EPR-Bohm, en lugar de orientar los detectores en la misma dirección, permitiéramos que se rotaran independientemente.

Consideremos el decaimiento de un mesón pi neutro en un par electrón ( $e^-$ ) – positrón ( $e^+$ ) (figura 2.6),

los espines de estos estarán correlacionados por la ecuación:  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_- \downarrow_+ - \downarrow_- \uparrow_+)$ , debido a la conservación del momento angular. La medición de la componente del espín del electrón se hace en la dirección del vector unitario  $\mathbf{a}$ , y la componente del espín del positrón en la dirección  $\mathbf{b}$ .

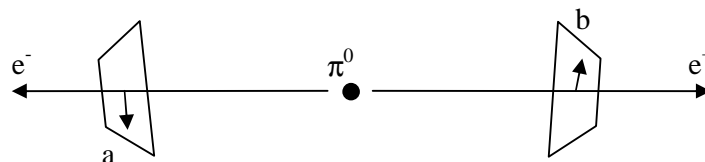


Fig. 2.6. Decaimiento de un mesón pi en un par electrón positrón.

Si tomamos los espines en unidades de  $\hbar/2$ ; entonces cada detector registra +1 para espines paralelos a la dirección de medición o -1 para espines anti-paralelos a la dirección de medición del detector en cuestión. Una tabla de resultados para varios decaimientos, medidos en varias direcciones, podría verse como la siguiente:

Electrón	Positrón	Producto de espines
+1	-1	-1
+1	+1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
-1	-1	+1
⋮	⋮	⋮

Bell propuso calcular el valor promedio del producto de las mediciones de las componentes de los espines para un conjunto dado de orientaciones de detección. Llamaremos a este promedio  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Si los detectores son paralelos  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , se recupera la configuración EPR-Bohm original. En este caso, si un espín esta hacia arriba, el otro estará hacia abajo, y el producto siempre dará -1, y entonces el promedio será:  $P(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$ .

De la misma manera, si los detectores están anti-paralelos ( $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ , como en la figura 2.6), entonces todos los productos son +1, por lo que:  $P(\mathbf{a}, -\mathbf{a}) = +1$ .

Para orientaciones arbitrarias, la mecánica cuántica predice que:

$$P(\bar{a}, \bar{b}) = -\bar{a} \cdot \bar{b} \quad (2.7)$$

Lo que Bell encontró fue que este resultado es imposible para cualquier teoría de variable oculta. Supongamos que el estado completo del sistema electrón/positrón está caracterizado por variables ocultas  $\lambda$ ;  $\lambda$  varía de un modo que no entendemos ni controlamos de un decaimiento al siguiente. Supongamos además que el resultado de la medición del electrón es independiente de la orientación ( $\mathbf{b}$ ) del detector del positrón, que puede ser escogida justo antes de que se realice la medición en el electrón. A partir de esto podemos decir que existe una función  $A(\mathbf{a}, \lambda)$  que nos da el resultado de la medición en el electrón, y otra función  $B(\mathbf{b}, \lambda)$  para la medición del positrón. Estas funciones sólo pueden tomar valores de  $\pm 1$ :

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1; B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (2.8)$$

Cuando los detectores estén alineados ( $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ), los resultados estarán perfectamente anticorrelacionados para toda  $\lambda$ :

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (2.9)$$

Ahora, el promedio del producto de las mediciones, el cual es similar a una probabilidad, es:

$$P(\bar{a}, \bar{b}) = \int \rho(\lambda) A(\bar{a}, \lambda) B(\bar{b}, \lambda) d\lambda \quad (2.10)$$

donde  $\rho(\lambda)$  es la densidad de probabilidad de la variable oculta, que como cualquier otra densidad de probabilidad es no negativa y satisface la condición de normalización; sin embargo, otras teorías de variable oculta podrían tener expresiones diferentes de  $\rho$ . Pero, si hay anticorrelación, podemos sustituir B por A:

$$P(\bar{a}, \bar{b}) = -\int \rho(\lambda) A(\bar{a}, \lambda) A(\bar{b}, \lambda) d\lambda \quad (2.11)$$

Si  $\mathbf{c}$  es otro vector unitario:

$$P(\bar{a}, \bar{b}) - P(\bar{a}, \bar{c}) = -\int \rho(\lambda) [A(\bar{a}, \lambda)A(\bar{b}, \lambda) - A(\bar{a}, \lambda)A(\bar{c}, \lambda)] d\lambda \quad (2.12)$$

O dado que  $[A(\bar{b}, \lambda)]^2 = 1$ :

$$P(\bar{a}, \bar{b}) - P(\bar{a}, \bar{c}) = -\int \rho(\lambda) [1 - A(\bar{b}, \lambda)A(\bar{c}, \lambda)] A(\bar{a}, \lambda) A(\bar{b}, \lambda) d\lambda \quad (2.13)$$

Pero de las definiciones de A y B podemos ver que:  $-1 \leq [A(\bar{a}, \lambda)A(\bar{b}, \lambda)] \leq +1$ , y que  $\rho(\lambda)[1 - A(\bar{b}, \lambda)A(\bar{c}, \lambda)] \geq 0$ , por lo que:

$$|P(\bar{a}, \bar{b}) - P(\bar{a}, \bar{c})| \leq \int \rho(\lambda) [1 - A(\bar{b}, \lambda)A(\bar{c}, \lambda)] d\lambda \quad (2.14)$$

Lo que se puede escribir de una manera más simple como:

$$|P(\bar{a}, \bar{b}) - P(\bar{a}, \bar{c})| \leq 1 + P(\bar{b}, \bar{c}) \quad (2.15)$$

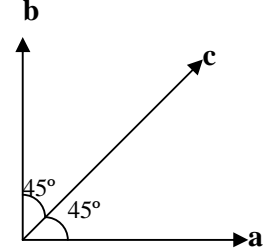
Esta es la famosa desigualdad de Bell. Es de notar que no se han hecho suposiciones sobre la naturaleza o el número de las variables ocultas o su distribución. [1]

A partir de esto se puede mostrar que las predicciones de la mecánica cuántica son incompatibles con esta desigualdad de Bell. Por ejemplo, suponga que los tres vectores caen en un plano, y que  $\mathbf{c}$  hace un ángulo de  $45^\circ$  con  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (figura 2.7). En este caso la mecánica cuántica nos dice que:

$$P(\bar{a}, \bar{b}) = 0, \quad P(\bar{a}, \bar{c}) = P(\bar{b}, \bar{c}) = -0.707$$

Lo cual es inconsistente con la desigualdad:  $0.707 < 1 - 0.707 = 0.293$  !!!.

Fig. 2.7. Arreglo de tres vectores a  $45^\circ$ .

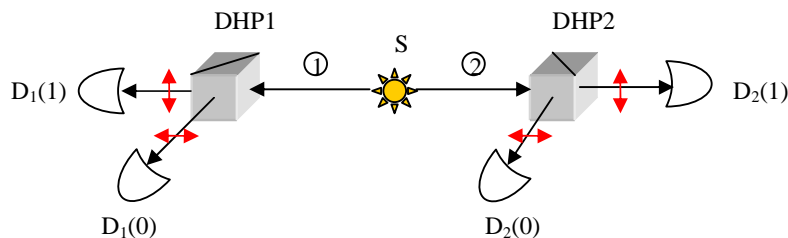


## 2.2.1 Ejemplo con fotones polarizados [21]

### a) Argumento para el estado EPR.

Una fuente S emite un par de fotones correlacionados arbitrariamente etiquetados 1 y 2, el fotón 1 viaja en una dirección y el fotón 2 en la opuesta. La polarización de cada fotón es medida con un arreglo divisor de haz polarizante (DHP)/detector. Designamos los dos estados de polarización  $|\uparrow\rangle$  y  $|\leftrightarrow\rangle$  como  $|1\rangle$  y  $|0\rangle$  respectivamente.

Fig. 2.8. Arreglo experimental de fotones correlacionados.



En la figura 2.8, se muestra un aparato para el experimento EPR. A los detectores se les colocó un subíndice 1 o 2 para identificar el fotón que llega a ellos, y los resultados de su medición se designan 1 o 0 de acuerdo al esquema presentado en la tabla.

Base	No. binario <b>1</b>	No. binario <b>0</b>
$\oplus$	$ \downarrow\rangle$	$ \leftrightarrow\rangle$

La sutileza en el experimento ocurre cuando se utiliza una fuente que emite pares de fotones correlacionados, que poseen las siguientes propiedades:

1. La polarización de cualquiera de los fotones, el 1 o el 2, medida independientemente la una de la otra, es completamente aleatoria.
2. La polarización del par de fotones está perfectamente correlacionada; esto es, si  $D_1(0)$  se activa (se detectó que el fotón 1 fue horizontal), entonces  $D_2(0)$  también se activará, y si  $D_1(1)$  se activa (se detectó que el fotón 1 fue vertical), entonces  $D_2(1)$  se activará, todo esto si la correlación es positiva (los dos fotones fueron emitidos con la misma polarización). Alternativamente si  $D_1(0)$  se activa, entonces  $D_2(1)$  se activará y viceversa, siempre que la correlación entre los fotones sea negativa (polarizaciones opuestas).

Desde luego, la segunda propiedad es consecuencia de las leyes de conservación del momento angular de la fuente.

Un sistema de varias partículas es descrito como un estado enredado si su función de onda no puede ser factorizada en un producto de funciones de onda de partículas individuales (una función para cada partícula que compone el sistema). La dependencia mutua de los resultados de la medición de polarización en el par de fotones correlacionados quiere decir que, en notación de la mecánica cuántica, el vector de estado del sistema tiene que ser escrito de la forma:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle \pm |1_1, 1_2\rangle) \quad (2.16)$$

para el caso de correlación positiva perfecta, y:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle \pm |1_1, 0_2\rangle) \quad (2.17)$$

para correlación negativa, donde los subíndices se refieren a los fotones individuales. Estos vectores de estado son ejemplos de estados enredados, también llamados **Estados de Bell**.

La forma de enredamiento de los vectores de estado en las ecuaciones anteriores, implica que una medición de la polarización de un fotón determina el resultado de la medición de polarización del otro. Así, para el estado  $|\Phi^\pm\rangle$  obtendremos cualquiera de los resultados, (0, 0) o (1,1), con la misma probabilidad. De forma similar,  $|\Psi^\pm\rangle$  implica que los resultados (0, 1) o (1, 0) aparecen cada uno con una probabilidad de 50%. En ambos casos la medición en un fotón nos permite predecir el resultado de una medición en el otro fotón con 100% de exactitud.

## b) Argumento de Bell.

Comencemos por considerar la medición de la polarización de un solo fotón emitido por la fuente, digamos, por ejemplo, el fotón 1. En la interpretación de Copenhagen (la mecánica cuántica) podríamos decir que la polarización del fotón antes de que se haga la medición esta indefinida. El proceso de medición es el que “colapsa” la función de onda para producir un resultado particular del experimento: esto es, 0 o 1, cada uno con una probabilidad del 50%.

En la aproximación de variables ocultas, por el contrario, podríamos argumentar que el marco cuántico está “incompleto”, y podríamos decir que el fotón posee una propiedad desconocida gobernada por las variables ocultas (que son las que nos dicen la polarización con que se emitió el fotón). La fuente emite fotones con una distribución de estas variables ocultas que determina que la mitad de ellas vayan al detector con 0 y la otra mitad con 1. Esto es como cuando se echa a volado una moneda, el cual parecería ser un proceso puramente probabilístico (al azar) pero, de hecho, está gobernado por variables clásicas desconocidas bien definidas como la orientación inicial de la moneda, las fuerzas aplicadas a ella, etc.

En el caso de una sola partícula, los dos puntos de vista llevan a la misma conclusión y no pueden ser distinguidos el uno del otro. Desde luego, la situación con dos partículas es más interesante, pues la medición del estado de un fotón determina instantáneamente el resultado del otro. Así, concluiríamos que la materia es *no local* a escala microscópica. De hecho, esto está implícito en las ecuaciones de estado enredadas, que son no locales en el sentido de que dependen de las propiedades de partículas que pueden estar bastante separadas.

El resultado principal de Bell fue la derivación de la llamada **desigualdad de Bell**. El teorema de Bell postula que la desigualdad siempre es obedecida si la teoría de variable oculta para el mundo microscópico es correcta. La mecánica cuántica, por el contrario, predice violaciones de la desigualdad de Bell, con lo que, entonces, tendremos una forma para distinguir entre las dos aproximaciones en un laboratorio. La figura 2.9 muestra el diagrama esquemático del aparato requerido para llevar a cabo una medición de la desigualdad de Bell en un par de fotones correlacionados emitidos por una fuente. El arreglo tiene una característica nueva, esta vez se deja que los ejes de los dos cubos divisores de haz polarizantes sean diferentes.

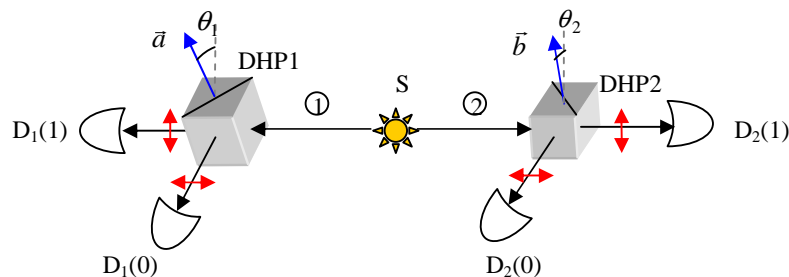


Fig.2.9. Diagrama esquemático del aparato para trabajar con la desigualdad de Bell.

Designemos los ejes de DHP1 y DHP2 por vectores unitarios  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , respectivamente. Definimos el ángulo  $\theta_1$  como el ángulo entre  $\vec{a}$  y la vertical, de forma similar  $\theta_2$  para  $\vec{b}$ . El experimento de EPR corresponde al caso en que  $\theta_1 = \theta_2$ . En el experimento de Bell permitiremos que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  difieran.

Para cada arreglo de ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  el experimento de Bell tiene cuatro posibles resultados, que están caracterizados por sus respectivas probabilidades (*aquí las probabilidades están definidas como el resultado del promedio de una gran cantidad de experimentos*):

$P_{11}(\theta_1, \theta_2)$  es la probabilidad de que  $D_1(1)$  y  $D_2(1)$  se activen (midan algo).

$P_{10}(\theta_1, \theta_2)$  es la probabilidad de que  $D_1(1)$  y  $D_2(0)$  se activen.

$P_{01}(\theta_1, \theta_2)$  es la probabilidad de que  $D_1(0)$  y  $D_2(1)$  se activen.

$P_{00}(\theta_1, \theta_2)$  es la probabilidad de que  $D_1(0)$  y  $D_2(0)$  se activen.

Estas probabilidades deben satisfacer dos reglas simples. Primero, **la probabilidad total de obtener un 1 o un 0 para cada fotón es exactamente de 50%**, esto es, la probabilidad de que un fotón tenga polarización medida horizontal o vertical; por lo que, en base a este argumento, la probabilidad de que cada combinación de detectores se active es de  $1/4$ :

$$P_{11}(\theta_1, \theta_2) = P_{10}(\theta_1, \theta_2) = P_{01}(\theta_1, \theta_2) = P_{00}(\theta_1, \theta_2) = 1/4.$$



Para explicar esto, tomemos  $P_{11}$ . La probabilidad de que se active el detector  $D_1(1)$  (que el fotón 1 tenga una polarización vertical) es de 50% sin tomar en cuenta si se activan  $D_2(1)$  o  $D_2(0)$ ; por otro lado, la probabilidad de que se active  $D_2(1)$  (que el fotón 2 tenga una polarización vertical) es del 50% sin tomar en cuenta lo que se mide en el fotón 1. Por lo que, cuando se toman en cuenta los dos casos al mismo tiempo, la probabilidad de que se activen  $D_1(1)$  y  $D_2(1)$  es de:  $(1/2)(1/2) = 1/4$ .

El anterior argumento implica que:

$$P_{11}(\theta_1, \theta_2) + P_{10}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \text{ (la probabilidad de que el fotón 1 sea vertical)}$$

$$P_{01}(\theta_1, \theta_2) + P_{00}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \text{ (la probabilidad de que el fotón 1 sea horizontal)}$$

$$P_{11}(\theta_1, \theta_2) + P_{01}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \text{ (la probabilidad de que el fotón 2 sea vertical)}$$

$$P_{10}(\theta_1, \theta_2) + P_{00}(\theta_1, \theta_2) = 0.5 \text{ (la probabilidad de que el fotón 2 sea horizontal)}$$

La correlación perfecta para el experimento EPR se debe producir cuando  $\theta_1 = \theta_2$ , implicando que para el caso de correlación positiva (que ambos fotones tienen siempre la misma polarización):

$$P_{11}(\theta, \theta) = 0.5 \text{ (ambos fotones se detectan con polarización vertical)}$$

$$P_{10}(\theta, \theta) = 0 \text{ (los fotones tienen polarizaciones opuestas, no se da el caso)}$$

$$P_{01}(\theta, \theta) = 0 \text{ (los fotones tienen polarizaciones opuestas, no se da el caso)}$$

$$P_{00}(\theta, \theta) = 0.5 \text{ (ambos fotones se detectan con polarización horizontal)}$$

En este caso de correlación positiva,  $P_{10}$  y  $P_{01}$  no se presentan (debido a que la fuente no emite este tipo de arreglos). Como los únicos casos que se encuentran son  $P_{11}$  y  $P_{00}$ , se debe seguir cumpliendo que la probabilidad de obtener una medición de 1 o 0 para cada fotón sea de 50%, si tomamos  $P_{11}$ , la probabilidad de que se active  $D_1(1)$  es de 50%, pero por la correlación  $D_2(1)$  se activará con una probabilidad de 100%; así, la probabilidad de tener  $P_{11}$  es de  $(1/2)1 = 1/2$ . Para correlaciones negativas el argumento es similar.

- *Marco de la Mecánica Cuántica.*

Ahora, trabajemos las probabilidades de acuerdo a la mecánica cuántica. Comencemos analizando el caso donde  $\theta_2 = 0$  y la fuente emite pares de fotones en estados de Bell positivamente correlacionados (ambos con la misma polarización) del tipo:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1, 0_2\rangle \pm |1_1, 1_2\rangle).$$

Escogemos la base de medición horizontal/vertical que coincide con los ejes del DHP2 (figura 2.9). No sabemos la dirección de polarización con que fueron emitidos los fotones por la fuente; sin embargo, supongamos que obtenemos después de una medición el resultado  $D_2(0)$  (fotón 2 horizontal). Esto significa que estamos enviando un fotón con polarización horizontal al DHP1, por lo que obtendremos  $D_1(0)$  con una probabilidad de  $\cos^2(\theta_1)$  y  $D_1(1)$  con una probabilidad de  $\sin^2(\theta_1)$ .

¿Por qué?, la base horizontal/vertical del DHP1 está rotada un ángulo  $\theta_1$  respecto de nuestra base de medición (DHP2), por lo que un fotón con polarización horizontal en DHP2, se puede descomponer en la base de DHP1 como en la figura 2.10. Por otro lado, si tomamos a la magnitud de la polarización del fotón como 1, tendremos que  $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = 1$ . La probabilidad de detectar el fotón es 1 (se detecta ya sea en  $D_1(1)$  o en  $D_1(0)$ ), esta probabilidad la podemos relacionar con la magnitud de la polarización del fotón, 1, por lo que la probabilidad de que cada detector se active será igual a la magnitud al cuadrado de la proyección correspondiente del

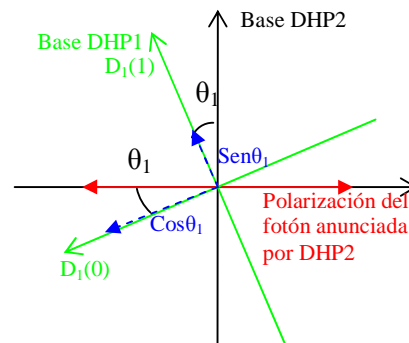


Fig.2.10. Descomposición horizontal en la base DHP1.

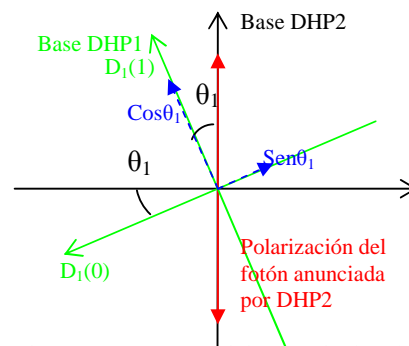


Fig.2.11. Descomposición vertical en la base DHP1.

vector de polarización del fotón.

De forma similar, si obtenemos el resultado  $D_2(1)$ , habrá un fotón con polarización vertical viajando hacia DHP1, lo que significa que obtendremos los resultados  $D_1(0)$  y  $D_1(1)$  con probabilidades de  $\cos^2\theta_1$  y  $\sin^2\theta_1$ , respectivamente (figura 2.11).

Por otra parte, para el fotón 2 los resultados  $D_2(0)$  y  $D_2(1)$  ocurren con una probabilidad de 50% cada uno (solo se pueden dar mediciones de los fotones con polarización horizontal o vertical medida con respecto a nuestra base convenida, además estas son aleatorias). Por lo que se tendrá que:

$$P_{11}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_1 \quad (2.18)$$

$$P_{10}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_1 \quad (2.19)$$

$$P_{01}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta_1 \quad (2.20)$$

$$P_{00}(\theta_1, 0) = \frac{1}{2} \cos^2 \theta_1 \quad (2.21)$$

¿Por qué? Tomemos por ejemplo  $P_{11}$ , la probabilidad de que se active el detector  $D_2(1)$  es de  $\frac{1}{2}$ , lo que implica que el fotón 2 tiene polarización vertical, como hay correlación positiva el fotón 1 tendrá polarización vertical, por lo que la probabilidad de que active  $D_1(1)$  es de  $\cos^2\theta_1$ . Así, la probabilidad de que se tenga el caso en que se activan los detectores  $D_2(1)$  y  $D_1(1)$ , ( $P_{11}$ ) es de:  $\left(\frac{1}{2}\right) \cos^2 \theta_1$ , de forma similar ocurre para los otros casos de detección.

Ahora, supongamos que  $\theta_2$  también es arbitraria. Somos libres de escoger cualquier par de ejes ortogonales como nuestra base de medición, lo más fácil es escogerlos de forma que coincidan con los del DHP2, es decir,  $\theta_2$  y  $\theta_2-90^\circ$ . El argumento es idéntico, solo que ahora las probabilidades dependen de  $(\theta_1 - \theta_2)$ , dando:

$$P_{11}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.22)$$

$$P_{10}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.23)$$

$$P_{01}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.24)$$

$$P_{00}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.25)$$

¿Por qué? Trabajemos con  $P_{11}$ , de la figura 2.12 podemos argumentar que visto desde nuestra base de medición escogida (que en este caso es la de DHP2, rotada a  $\theta_2$ ), la probabilidad de que se active  $D_2(1)$  o  $D_2(0)$  es de 50% cada uno, ya que es aleatorio y no podemos indagar si el fotón emitido por la fuente fue emitido totalmente en la base DHP2 (puramente horizontal o puramente vertical en DHP2). Si se activa  $D_2(1)$ , tenemos que, en esta base, el fotón es vertical, por lo que el fotón 1 también debe ser vertical con respecto a la base DHP2 pero, en la base DHP1, el fotón 1 vertical tiene la probabilidad  $\cos^2(\theta_1 - \theta_2)$  (la proyección de la polarización medida en la base DHP2 en los ejes de la base DHP1, la diferencia de ángulo entre las bases) de que se active  $D_1(1)$ . Por lo que la probabilidad total de tener el

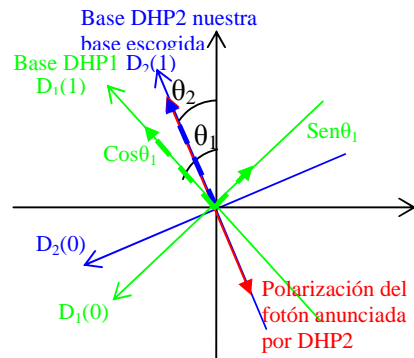


Fig.2.12. Descomposición en DHP1 de un fotón en la base de medición DHP2 rotada.

caso  $P_{11}$  es  $\frac{1}{2}\cos^2(\theta_1 - \theta_2)$ . En el caso de correlación negativa, las funciones seno y coseno están invertidas.

En este ejemplo, basado en la mecánica cuántica, la variable que no se conoce es la verdadera polarización con que se emitió el fotón, es decir, si está completamente en la base DHP2 (solamente horizontal o vertical) o está rotada de ella y en realidad tiene proyecciones en la base DHP2.

- *Marco de Variables Ocultas.*

Ahora consideremos el punto de vista de las teorías de variable oculta. Existen muchos de estos modelos, pero escojamos el más simple, y supongamos que sabemos cómo es la polarización de los fotones emitidos por la fuente y que ambos tienen polarización vertical o ambos tienen polarización horizontal; de hecho ambos casos tienen la misma probabilidad de presentarse (50%). Para un experimento de Bell, con  $\theta_1$  y  $\theta_2$  arbitrarios, las probabilidades equivalentes son:

$$P_{11}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2\theta_1\text{sen}^2\theta_2 + \text{cos}^2\theta_1\text{cos}^2\theta_2) \quad (2.26)$$

$$P_{10}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2\theta_1\text{cos}^2\theta_2 + \text{cos}^2\theta_1\text{sen}^2\theta_2) \quad (2.27)$$

$$P_{01}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\text{cos}^2\theta_1\text{sen}^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_1\text{cos}^2\theta_2) \quad (2.28)$$

$$P_{00}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(\text{cos}^2\theta_1\text{cos}^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_1\text{sen}^2\theta_2) \quad (2.29)$$

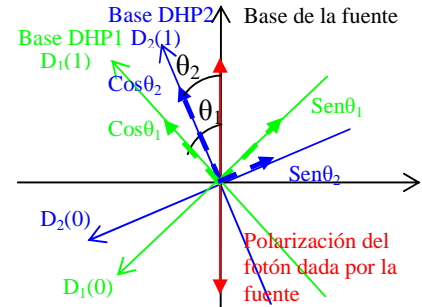


Fig.2.13. Descomposición de un fotón vertical emitido por la fuente.

¿Por qué? Trabajemos  $P_{11}$ , en este caso sabemos la polarización con que se emite el fotón, es decir, hay una base (de la fuente) de medición en la cual los fotones son solamente verticales u horizontales; supongamos que es vertical (figura 2.13), cuya probabilidad de aparecer es de 1/2. Entonces, la probabilidad de que se active el detector  $D_2(1)$  es de  $\text{cos}^2\theta_2$ ; por otra parte, la probabilidad de que se active el detector  $D_1(1)$  es de  $\text{cos}^2\theta_1$ , por lo que la probabilidad de que se activen los detectores  $D_2(1)$  y  $D_1(1)$  y que la polarización del fotón emitido haya sido vertical es de  $\frac{1}{2}\text{cos}^2\theta_1\text{cos}^2\theta_2$ . Pero esta

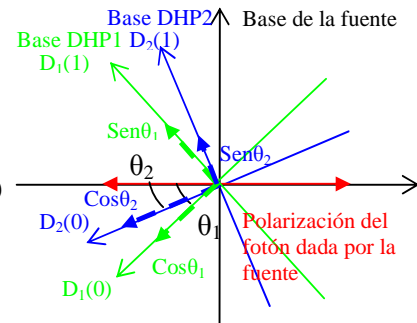


Fig.2.14. Descomposición de un fotón horizontal emitido por la fuente.

no es la única forma de que se activen  $D_2(1)$  y  $D_1(1)$ , si la polarización del fotón emitido es horizontal (figura 2.14) cuya probabilidad es de 1/2, entonces se tendrá que: la probabilidad de que se active el detector  $D_2(1)$  es de  $\text{sen}^2\theta_2$ , y la probabilidad de que se active el detector  $D_1(1)$  es de  $\text{sen}^2\theta_1$ , por lo que la probabilidad de que se activen los detectores  $D_2(1)$  y  $D_1(1)$ , tomando que la polarización del fotón emitido haya sido horizontal, es de  $\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta_1\text{sen}^2\theta_2$ . Así, finalmente, la probabilidad total de obtener el caso  $P_{11}$  es la suma de las dos probabilidades anteriores. Esta forma de proceder, a partir de las proyecciones, se puede aplicar para verificar las otras probabilidades.

Para el caso en que  $\theta_2 = 0$ , se obtiene el resultado cuántico; sin embargo, para otros casos se obtienen resultados diferentes. Uno de los caminos mas claros para observar la diferencia es hacer un experimento EPR con  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , y después realizar otro con  $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ .

Para  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ :

Marco de la mecánica cuántica

$$P_{11}(0,0) = \frac{1}{2} \cos^2(0-0) = \frac{1}{2}$$

$$P_{10}(0,0) = \frac{1}{2} \sin^2(0-0) = 0$$

$$P_{01}(0,0) = \frac{1}{2} \sin^2(0-0) = 0$$

$$P_{00}(0,0) = \frac{1}{2} \cos^2(0-0) = \frac{1}{2}$$

Marco de variable oculta (EPR)

$$P_{11}(0,0) = \frac{1}{2} (\sin^2 0 \sin^2 0 + \cos^2 0 \cos^2 0) = \frac{1}{2}$$

$$P_{10}(0,0) = \frac{1}{2} (\sin^2 0 \cos^2 0 + \cos^2 0 \sin^2 0) = 0$$

$$P_{01}(0,0) = \frac{1}{2} (\cos^2 0 \sin^2 0 + \sin^2 0 \cos^2 0) = 0$$

$$P_{00}(0,0) = \frac{1}{2} (\cos^2 0 \cos^2 0 + \sin^2 0 \sin^2 0) = \frac{1}{2}$$

Para  $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ :

Marco de la mecánica cuántica

$$P_{11}(45,45) = \frac{1}{2} \cos^2(45-45) = \frac{1}{2}$$

$$P_{10}(45,45) = \frac{1}{2} \sin^2(45-45) = 0$$

$$P_{01}(45,45) = \frac{1}{2} \sin^2(45-45) = 0$$

$$P_{00}(45,45) = \frac{1}{2} \cos^2(45-45) = \frac{1}{2}$$

Marco de variable oculta (EPR)

$$P_{11}(45,45) = \frac{1}{2} (\sin^2 45 \sin^2 45 + \cos^2 45 \cos^2 45) = \frac{1}{4}$$

$$P_{10}(45,45) = \frac{1}{2} (\sin^2 45 \cos^2 45 + \cos^2 45 \sin^2 45) = \frac{1}{4}$$

$$P_{01}(45,45) = \frac{1}{2} (\cos^2 45 \sin^2 45 + \sin^2 45 \cos^2 45) = \frac{1}{4}$$

$$P_{00}(45,45) = \frac{1}{2} (\cos^2 45 \cos^2 45 + \sin^2 45 \sin^2 45) = \frac{1}{4}$$

Podríamos pensar que no debería tener ningún efecto físico el que tengamos una fuente que es invariante ante rotaciones y, por lo tanto, deberíamos obtener resultados perfectamente correlacionados en ambos casos. En base a esto, el modelo cuántico predice la respuesta correcta ya que toma en cuenta que la selección de la base de medición es arbitraria hasta que se realiza la primera medida. En contraste, el marco de variable oculta predice las mismas probabilidades de 25% para las cuatro posibilidades en el segundo experimento. La razón de la discrepancia es que estamos asignando una polarización “local” a cada fotón en el momento que deja la fuente, en dicho caso se obtienen resultados aleatorios en el segundo experimento cuando estos fotones polarizados verticalmente u horizontalmente inciden en los polarizadores a un ángulo de  $45^\circ$ .

Por supuesto, el argumento presentado aquí es bastante simplista y sólo se aplica a modelos de variable oculta muy rudimentarios. Por otro lado, la belleza del teorema de Bell radica en que es completamente general y es aplicable a cualquier modelo posible de variable oculta. Existen muchas formas distintas del teorema de Bell y la versión presentada en este ejemplo fue construida por Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH) en 1969. Ellos introdujeron un parámetro experimental determinable  $S$  definido por:

$$S = E(\theta_1, \theta_2) - E(\theta_1, \theta'_2) + E(\theta'_1, \theta_2) + E(\theta'_1, \theta'_2) \quad (2.30)$$

Donde: 
$$E(\theta_1, \theta_2) = P_{11}(\theta_1, \theta_2) + P_{00}(\theta_1, \theta_2) - P_{10}(\theta_1, \theta_2) - P_{01}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.31)$$

Y probaron la siguiente desigualdad de Bell:

$$-2 \leq S \leq 2 \quad (2.32)$$

que se sostiene para todas las teorías de variable oculta posibles. Por otro lado, no es difícil encontrar ejemplos donde las predicciones cuánticas violan dicha desigualdad. Por ejemplo, si  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 22.5^\circ$ ,  $\theta'_1 = 45^\circ$  y  $\theta'_2 = 67.5^\circ$ , se encuentra que  $S = 2\sqrt{2}$ , esto se explicara con mas detalle en la siguiente sección. Así, la búsqueda de violaciones a la desigualdad de Bell nos proporciona una forma fácil para probar la “no localidad” en el laboratorio.

## 2.2.2 Un poco mas sobre el esquema experimental del Teorema de Bell [22]

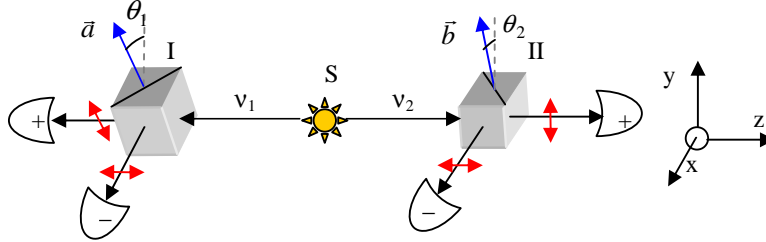
En base a la figura 2.15 y cambiando un poco la notación, la ecuación de estado de polarización que describe al par de fotones se puede escribir como:

$$|\Psi(v_1, v_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x, x\rangle + |y, y\rangle\} \quad (2.33)$$

Donde  $|x\rangle$  y  $|y\rangle$  son los estados de polarización de cada fotón con respecto al sistema de referencia indicado.

Efectuemos una medición de la polarización lineal en cada uno de los fotones con los analizadores I y II. El analizador I tiene una orientación caracterizada por el ángulo  $\theta_1$  (o por el vector unitario  $\mathbf{a}$ ), a continuación de este se encuentran dos detectores que obtienen los resultados + (polarización vertical, que anteriormente denominamos  $|1\rangle$ ) o - (polarización horizontal,  $|0\rangle$ ), correspondientes a una polarización lineal paralela o perpendicular a  $\theta_1$  del fotón  $v_1$ . De forma análoga para el fotón  $v_2$  con el analizador II, que tiene una orientación  $\theta_2$  (o  $\mathbf{b}$ ).

Fig.2.15. Arreglo experimental para medición de polarización de fotones correlacionados



Un cálculo simple de la mecánica cuántica da los resultados esperados para tales mediciones de polarización, de manera individual o en “coincidencia” (la relación de resultados de los dos analizadores). Denotaremos como  $P_{\pm}(\theta_1)$  la probabilidad (individual) de obtener el resultado + o - para el fotón  $v_1$ ; de la misma forma  $P_{\pm}(\theta_2)$  da la probabilidad del resultado de la medición de polarización de  $v_2$ . Como se vio en uno de los ejemplos la predicción cuántica es:

$$\begin{aligned} P_+(\theta_1) &= P_-(\theta_1) = 1/2 \\ P_+(\theta_2) &= P_-(\theta_2) = 1/2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Estos resultados están de acuerdo con lo observado, ya que uno no puede atribuir una polarización particular a cada fotón, de tal suerte que una medición individual de polarización dará un resultado aleatorio. Sin embargo, estamos interesados en la probabilidad de detección conjunta (en coincidencia)  $P_{\pm\pm}(\theta_1, \theta_2)$  de  $v_1$  y  $v_2$  en los canales + o - de los polarizadores I y II. Para esta probabilidad, la predicción cuántica es:

$$\begin{aligned} P_{++}(\theta_1, \theta_2) &= P_{--}(\theta_1, \theta_2) = 1/2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \\ P_{+-}(\theta_1, \theta_2) &= P_{-+}(\theta_1, \theta_2) = 1/2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde el argumento del seno y el coseno es el ángulo entre las dos direcciones de los analizadores.

Consideremos la situación particular  $(\theta_1 - \theta_2) = 0$ , donde los dos analizadores son paralelos. La predicción cuántica nos da:

$$\begin{aligned} P_{++}(\theta_1, \theta_1) &= P_{--}(\theta_1, \theta_1) = 1/2 \\ P_{+-}(\theta_1, \theta_1) &= P_{-+}(\theta_1, \theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dado este resultado, cuando el fotón  $v_1$  se encuentra en el canal + del analizador I, entonces estaremos seguros de tener al fotón  $v_2$  por el canal + de II. Así, cuando los analizadores están paralelos, los resultados de la medición de  $v_1$  y  $v_2$  están totalmente correlacionados sin importar la dirección  $\theta_1$ .

Para caracterizar cuantitativamente el grado de correlación entre cantidades aleatorias se utiliza el coeficiente de correlación [3]. Para las mediciones de polarización consideradas aquí, éste se escribe:

$$E(\theta_1, \theta_2) = P_{++}(\theta_1, \theta_2) + P_{--}(\theta_1, \theta_2) - P_{+-}(\theta_1, \theta_2) - P_{-+}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.37)$$

Tomando en cuenta las definiciones de las probabilidades cuánticas, obtenemos que el coeficiente de correlación de polarización es:

$$\begin{aligned} E(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2} \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \\ &= (2\cos^2(\theta_1 - \theta_2) - 1) = \cos(2(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para el caso particular de polarizaciones paralelas ( $(\theta_1 - \theta_2) = 0$ ), uno encuentra que  $E = 1$ , correlación total. En conclusión, las predicciones cuánticas sugieren que, a pesar del carácter aparentemente aleatorio de los resultados individuales, existe una correlación entre dichos resultados aleatorios.

Para construir la desigualdad de Bell, suponemos que existen variables ocultas que, como mencionamos antes, tienen una cierta distribución en el ensamble de pares emitidos especificada por una densidad de probabilidad:

$$\rho(\lambda) \geq 0 \quad (2.39)$$

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1 \quad (2.40)$$

Para un par dado de fotones, caracterizados por una cierta variable oculta  $\lambda$ , los resultados de las mediciones pueden ser dados por un par de funciones que toman solo 2 valores:

$$A(\lambda, \theta_1) = \pm 1 \text{ para el analizador I} \quad (2.41)$$

$$B(\lambda, \theta_2) = \pm 1 \text{ para el analizador II} \quad (2.42)$$

Un ejemplo de cómo pueden ser estas funciones es construido suponiendo que cada fotón es emitido con un ángulo de polarización  $\lambda$  (la variable oculta). Cuando un fotón llega a un medidor de polarización (analizador) colocado a un ángulo  $\theta_1$ , siempre registrará una polarización vertical ( $V_{\theta_1}$ ) si  $\lambda$  está a una distancia angular menor que  $\pm \pi/4$  de  $\theta_1$  (figura 2.16), es decir, las funciones serán:

$$\begin{aligned} A(\lambda, \theta_1) &= \text{sign}\{\cos(2(\theta_1 - \lambda))\} = \begin{cases} +1 & \text{sí } |\theta_1 - \lambda| \leq \frac{\pi}{4} \text{ ó } |\theta_1 - \lambda| \geq \frac{3\pi}{4} \\ -1 & \text{sí } \frac{3\pi}{4} > |\theta_1 - \lambda| > \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ \text{y} \quad B(\lambda, \theta_2) &= \text{sign}\{\cos(2(\theta_2 - \lambda))\} = \begin{cases} +1 & \text{sí } |\theta_2 - \lambda| \leq \frac{\pi}{4} \text{ ó } |\theta_2 - \lambda| \geq \frac{3\pi}{4} \\ -1 & \text{sí } \frac{3\pi}{4} > |\theta_2 - \lambda| > \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Cada par de fotones emitidos tendrán la misma polarización sí se trabaja con correlación positiva,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Conforme pares sucesivos son producidos,  $\lambda$  puede cambiar de una manera impredecible que cubre todo el rango de posibles polarizaciones (desde  $-\pi$  a  $\pi$ ). La cantidad  $\lambda$  que es la variable oculta, es una pieza de información que está ausente en la mecánica cuántica. Esta teoría de variable oculta es *local* ya que los resultados de las mediciones están determinados por características de objetos presentes en el lugar donde se hace la medición; y, es *realista* ya que todas las cantidades medibles tienen valores definidos, independientemente de nuestro conocimiento sobre ellas.

Para construir las expresiones de las probabilidades de obtener los resultados + o - en los analizadores (vertical u horizontal), es conveniente hacer que las definiciones de las funciones A y B solo den valores positivos y, de forma simultanea, nos indiquen las situaciones (los valores de la diferencia angular entre  $\theta_1$  y  $\lambda$ ) en que solo se presenta una cierta polarización; así, dichas funciones serán las siguientes:

- Para las situaciones en que interesa estudiar la polarización vertical en el analizador que está a un ángulo  $\theta_1$ :

$$A_+ = \frac{[1 + A(\lambda, \theta_1)]}{2} \quad (2.44)$$

Esta expresión nos dice que, solo se mide polarización vertical + (que arroja el valor 1) cuando  $\lambda$  esta mas cerca de  $\theta_1$  que  $\theta_1 \pm \pi/4$ . Y no se mide esta polarización (valor 0) en los otros casos.

- De manera similar, si lo que interesa es la polarización horizontal en  $\theta_1$ :

$$A_- = \frac{[1 - A(\lambda, \theta_1)]}{2} \quad (2.45)$$

En esta ocasión, solo se mide polarización horizontal - (valor 1) cuando  $\lambda$  esta mas lejos que  $\pi/4$  de  $\theta_1$ . Y no se mide esta polarización (valor 0) en los otros casos.

- Lo mismo se puede hacer con B:  $B_+ = \frac{[1 + B(\lambda, \theta_2)]}{2}$ ,  $B_- = \frac{[1 - B(\lambda, \theta_2)]}{2}$  (2.46)

En base a estas nuevas definiciones de las funciones A y B, las probabilidades de medir alguna polarización en un analizador de manera independiente o individual (sin tomar en cuenta lo que se pueda medir en el otro detector), estarán dadas por las siguientes integrales:

$$P_+(\theta_1) = \int A_+ \rho(\lambda) d\lambda; \quad P_-(\theta_1) = \int A_- \rho(\lambda) d\lambda; \quad P_+(\theta_2) = \int B_+ \rho(\lambda) d\lambda; \quad P_-(\theta_2) = \int B_- \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.47)$$

Antes de calcular estas integrales, debemos encontrar la forma explicita de la densidad de probabilidad de la variable  $\lambda$ , para esto, utilizamos la expresión de normalización y el hecho de que el ángulo de polarización del par de fotones ( $\lambda$ ) puede aparecer en cualquier dirección desde  $-\pi$  a  $\pi$ , es decir que su densidad de probabilidad es una constante, así:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\lambda) d\lambda = 1 = \rho(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = \rho(\lambda)(2\pi) \Rightarrow \rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad (2.48)$$

Una vez conocido el valor de  $\rho(\lambda)$  podemos conocer las probabilidades dadas en 2.47, por ejemplo, para  $P_+(\theta_1)$ :

$$P_+(\theta_1) = \int A_+ \rho(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[1 + A(\lambda, \theta_1)]}{2} d\lambda = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos(2(\lambda - \theta_1))] d\lambda \right\}$$

En este último paso se hizo uso de la característica de que el coseno es una función par. Haciendo el cambio de variable:  $(\lambda - \theta_1) = x$ , se tendrá que  $d\lambda = dx$ , por lo que:

$$P_+(\theta_1) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi - \theta_1}^{\pi - \theta_1} dx + \int_{-\pi - \theta_1}^{\pi - \theta_1} \text{sign}[\cos(2(x))] dx \right\}$$

Haciendo uso de la definición de la función  $\text{sign}[\cos(2(x))]$  y de su periodicidad:

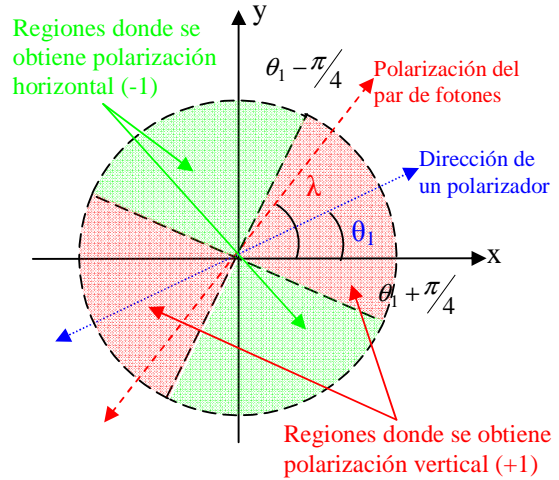


Fig.2.16. Configuración entre la polarización emitida y la dirección del polarizador.

$$\begin{aligned}
P_+(\theta_1) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos(2(x))] dx \right\} = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2\pi + 2 \left[ \int_0^{\pi/4} dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} dx \right] \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left\{ 2\pi + 2 \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Para  $P_-(\theta_1)$ :

$$P_-(\theta_1) = \int A_- \rho(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[1 - A(\lambda, \theta_1)]}{2} d\lambda = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos(2(x))] dx \right\} = \frac{1}{2} \tag{2.50}$$

De forma similar, se encuentra que:  $P_+(\theta_2) = \frac{1}{2}$  y  $P_-(\theta_2) = \frac{1}{2}$  (2.51)

De estos resultados de probabilidades de detección individual, podemos ver, que en dichos tipos de mediciones, las predicciones cuánticas (ecuaciones 2.34) y las predicciones de variable oculta (2.49, 2.50 y 2.51) son iguales.

Ahora, analicemos las probabilidades de detección conjunta o en coincidencia en ambos analizadores. De acuerdo con lo visto al inicio de la sección 2.2, en este caso, dichas probabilidades estarán dadas por las integrales:

$$\begin{aligned}
P_{++}(\theta_1, \theta_2) &= \int A_+ B_+ \rho(\lambda) d\lambda; & P_{+-}(\theta_1, \theta_2) &= \int A_+ B_- \rho(\lambda) d\lambda; \\
P_{-+}(\theta_1, \theta_2) &= \int A_- B_+ \rho(\lambda) d\lambda; & P_{--}(\theta_1, \theta_2) &= \int A_- B_- \rho(\lambda) d\lambda;
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Así, la probabilidad de obtener un resultado particular de polarizaciones en coincidencia, a partir de las mediciones en los dos detectores, promediado sobre un ensamble de pares de fotones, está determinado por una integral. En nuestro caso:

$$P_{++}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1 + A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1 + B(\lambda, \theta_2)}{2} \right) d\lambda \tag{2.53}$$

$$P_{+-}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1 + A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1 - B(\lambda, \theta_2)}{2} \right) d\lambda \tag{2.54}$$

$$P_{-+}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1 - A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1 + B(\lambda, \theta_2)}{2} \right) d\lambda \tag{2.55}$$

$$P_{--}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1 - A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1 - B(\lambda, \theta_2)}{2} \right) d\lambda \tag{2.56}$$

Que son las probabilidades de encontrar  $+_{\theta_1}+_{\theta_2}$ ,  $+_{\theta_1}-_{\theta_2}$ ,  $-_{\theta_1}+_{\theta_2}$ ,  $-_{\theta_1}-_{\theta_2}$ , respectivamente, es decir:  $V_{\theta_1}V_{\theta_2}$ ,  $V_{\theta_1}H_{\theta_2}$ ,  $H_{\theta_1}V_{\theta_2}$ ,  $H_{\theta_1}H_{\theta_2}$ . Para observar como es que, en el caso de fotones con polarización correlacionada, el marco cuántico y el marco de variable oculta dan predicciones de probabilidades diferentes, desarrollaremos  $P_{++}(\theta_1, \theta_2)$  de la ecuación 2.53.

$$\begin{aligned}
P_{++}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1)))] [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2)))] d\lambda \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2)))] d\lambda \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[ 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) d\lambda \right]
\end{aligned} \tag{2.57}$$



Aunque la integral en esta expresión es definida e indica el área bajo la curva producto de las funciones signum, en realidad toma valores a lo largo de un continuo de las posibles diferencias de fase  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que resultan de la forma en que se intersectan ambas funciones signum, con dos valores extremos, el de  $2\pi$  cuando  $\theta_1 = \theta_2$  y el de  $-2\pi$  cuando la diferencia entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es de  $+\pi/2$  ó de  $-\pi/2$ . Reconociendo este comportamiento no es necesario hacer el cálculo riguroso de la integral, es suficiente reconocer que la ecuación de la función lineal del área tiene una pendiente de  $\pm 8$  (ya que cuando la diferencia de fase es cero, el valor de la integral es  $2\pi$ , y cuando la diferencia de fase es de  $\pm\pi/2$  la integral vale  $-2\pi$ , y las líneas que unen estos dos puntos con el de fase cero, tienen pendiente de  $\mp 8$  respectivamente) y una ordenada al origen de  $2\pi$  (para mas claridad sobre esto ver el Apéndice A); en consecuencia la expresión resultante para la integral es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) d\lambda = -8|\theta_2 - \theta_1| + 2\pi \quad (2.58)$$

Sustituyendo este resultado en 2.57, obtenemos que [18]:

$$P_{++}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{8\pi} [4\pi - 8|\theta_2 - \theta_1|] = \frac{1}{2} - \frac{|\theta_2 - \theta_1|}{\pi} \quad (2.59)$$

Al comparar esta probabilidad (dada por la teoría de variables ocultas) con la predicha por la cuántica (2.35), encontramos que las predicciones concuerdan en algunos puntos, pero, en general, no son iguales (figura 2.17).

Una vez que ya sabemos como son las probabilidades de detección en coincidencia, necesitamos conocer la forma que tiene la función de correlación  $E(\theta_1, \theta_2)$  para poder construir la desigualdad de Bell. A partir de la definición de E dada en la ecuación 2.37, si sustituimos en ésta las probabilidades predichas por la teoría de variable oculta dadas por las ecuaciones 2.53 - 2.56, obtendremos que:

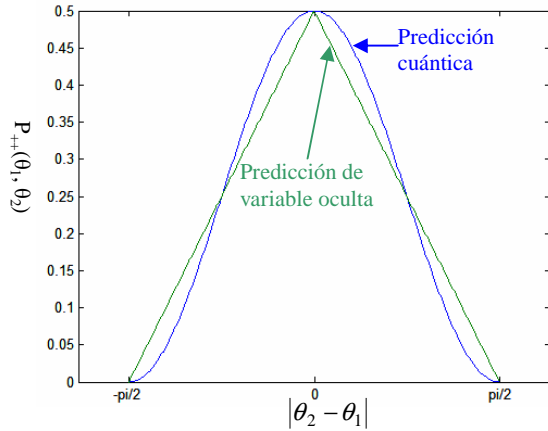


Fig.2.17. Gráficas de las predicciones de correlación de polarización para la mecánica cuántica y para una teoría de variable oculta.

$$\begin{aligned} E(\theta_1, \theta_2) &= \int \frac{1+A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1+B(\lambda, \theta_2)}{2} \rho(\lambda) d\lambda + \int \frac{1-A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1-B(\lambda, \theta_2)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \int \frac{1+A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1-B(\lambda, \theta_2)}{2} \rho(\lambda) d\lambda - \int \frac{1-A(\lambda, \theta_1)}{2} \frac{1+B(\lambda, \theta_2)}{2} \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int A(\lambda, \theta_1) B(\lambda, \theta_2) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ahora definimos la cantidad  $s$ , que describe la correlación de polarización en un par de partículas en cuatro direcciones de medición distintas, como:

$$\begin{aligned} s &= A(\lambda, \theta_1) B(\lambda, \theta_2) - A(\lambda, \theta_1) B(\lambda, \theta_2') + A(\lambda, \theta_1') B(\lambda, \theta_2) + A(\lambda, \theta_1') B(\lambda, \theta_2') \\ &= A(\lambda, \theta_1) [B(\lambda, \theta_2) - B(\lambda, \theta_2')] + A(\lambda, \theta_1') [B(\lambda, \theta_2) + B(\lambda, \theta_2')] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nótese que por la definición de A y B,  $s$  solo puede tomar los valores  $\pm 2$ . El promedio de  $s$  sobre un ensamble de pares será:

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle &= \int s(\lambda, \theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2') \rho(\lambda) d\lambda \\
&= E(\theta_1, \theta_2) - E(\theta_1, \theta_2') + E(\theta_1', \theta_2) + E(\theta_1', \theta_2') \\
&= S(\theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2')
\end{aligned} \tag{2.62}$$

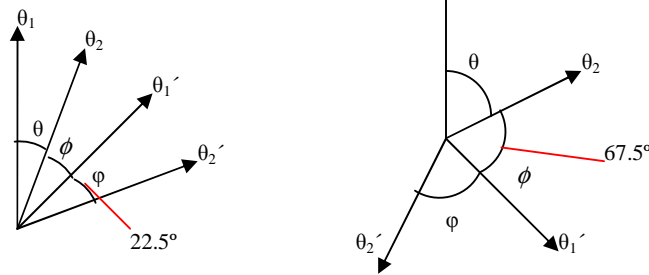
Debido a que  $s$  solo puede tomar los valores  $\pm 2$ , su promedio  $S$  debe satisfacer  $-2 \leq S \leq +2$ , esta es una desigualdad de Bell para fotones con correlación de polarización.

Podemos utilizar la predicción de  $E$  de la mecánica cuántica (ecuación 2.38) para los pares de fotones EPR, y evaluar la cantidad  $S$ , también es interesante buscar la violación máxima de la desigualdad de Bell para las predicciones cuánticas. El valor de  $S$  predicho por la mecánica cuántica es:

$$S_{MQ}(\theta_1, \theta_2, \theta_1', \theta_2') = \cos[2(\theta_1 - \theta_2)] - \cos[2(\theta_1 - \theta_2')] + \cos[2(\theta_1' - \theta_2)] + \cos[2(\theta_1' - \theta_2')] \tag{2.63}$$

Si tomamos las direcciones de medición como en la figura 2.18, esta cantidad estará en función de 3 variables independientes  $(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $(\theta_1' - \theta_2)$ , y  $(\theta_1' - \theta_2')$ , ya que  $(\theta_1, \theta_2') = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_1' - \theta_2) + (\theta_1' - \theta_2')$ .

Fig.2.18. Orientaciones particulares para realizar la predicción cuántica.



A fin de encontrar los valores extremos de  $S_{MQ}$ , hacemos que las tres derivadas parciales de  $S$  sean 0, y renombramos las variables:  $(\theta_1 - \theta_2) = \theta$ ;  $(\theta_1' - \theta_2) = \phi$ ;  $(\theta_1' - \theta_2') = \varphi$ ; así, por ejemplo:

$$\frac{dS_{MQ}}{d\theta} = -2\text{sen}(2\theta) + 2\text{sen}(2(\theta + \phi + \varphi)) = 0 \tag{2.64}$$

Si, por facilidad, hacemos que  $\phi = \varphi = \theta$ , entonces:  $\text{sen}(2\theta) = \text{sen}(6\theta)$  (2.65)

De este modo, los ángulos que cumplan con esta ecuación serán los que generan que  $S$  sea máximo y, a partir de la gráfica de  $S_{MQ} = 3\cos(2\theta) - \cos(6\theta)$  (figura 2.19), tenemos que dichos ángulos son:

$$\begin{aligned}
\theta &= \pm \frac{\pi}{8}, \quad \text{que da } S_{MQ} = 2\sqrt{2} \\
\theta &= \pm \frac{3\pi}{8}, \quad \text{que da } S_{MQ} = -2\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Así, para las orientaciones particulares indicadas en la figura 2.18, el resultado cuántico es:

$$S_{MQ} = 2\sqrt{2} \tag{2.67}$$

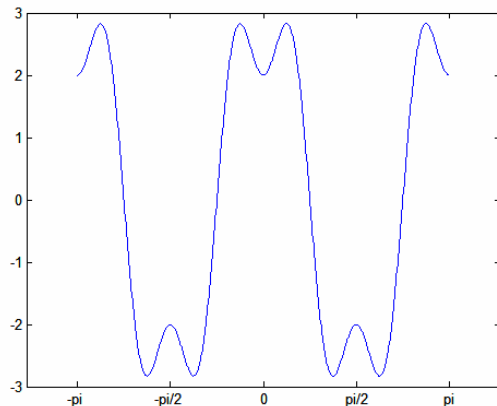


Fig.2.19. Gráfica de la función  $S_{MC} = 3\cos(2\theta) - \cos(6\theta)$

Dicha predicción de la mecánica cuántica está claramente en conflicto con la desigualdad de Bell que es válida sin importar la teoría de variable oculta utilizada.

# Capítulo 3

## Birrefringencia, Óptica no lineal y fenómenos relacionados

En este capítulo presentamos la teoría básica en la que se sustentan los fenómenos de óptica no lineal y birrefringencia que son fundamentalmente útiles para la producción de fotones con propiedades de polarización enredada; es muy importante estudiarlos para que podamos manejar de forma correcta los cristales (que tienen estas propiedades) que vamos a usar en nuestro experimento. De tal suerte, en este mismo capítulo se revisan conceptos como los de susceptibilidad no lineal, anisotropía de materiales cristalinos, birrefringencia, procesos paramétrico ópticos, generación de segundo armónico y generación por suma y diferencia de frecuencias, todo lo cual da cuenta de la importancia del proceso de conversión espontánea paramétrica descendente, que constituye una piedra fundamental en el desarrollo experimental de nuestro trabajo.

### 3.1 Materiales birrefringentes.

En muchos materiales ópticos, el índice de refracción depende de la dirección del vector de propagación del campo eléctrico aplicado, es decir, son ópticamente anisótropos (sus propiedades ópticas no son las mismas en todas las direcciones dentro del cristal). Los materiales *birrefringentes* son de este tipo y pueden ser caracterizados por dos índices de refracción, uno para **rayos ordinarios** y otro para **rayos extraordinarios**, rayos que se definen con respecto al *eje óptico del material birrefringente* que es la dirección a lo largo de la cual los rayos con una polarización cualquiera viajarán a la misma velocidad a lo largo del eje. Así, un *rayo ordinario* tiene una polarización ortogonal al eje óptico, mientras que un *rayo extraordinario* tiene una polarización paralela al eje óptico (esto se muestra en la figura 3.1). Los rayos ordinarios están sujetos a un *índice de refracción ordinario*  $n_o$ , mientras que los rayos extraordinarios al *índice de refracción extraordinario*  $n_e$ . [23]

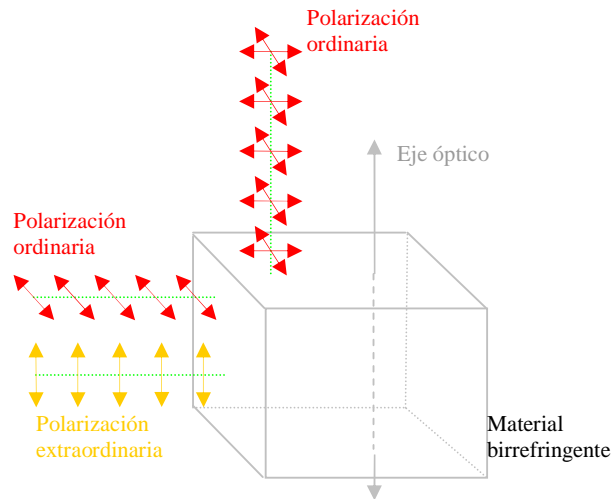


Fig.3.1. Material birrefringente mostrando su geometría relativa de rayos ordinarios y extraordinarios con el eje óptico.

### 3.2 Medios anisotrópicos

La luz que se propaga por un medio anisotrópico puede ser descrita, matemáticamente, en términos del vector eléctrico de la onda en propagación. Como vimos, la propagación de ondas planas en una dirección particular a través de un medio anisotrópico tiene dos posibles direcciones de polarización, y ondas que tengan estas direcciones de polarización se propagan a diferentes velocidades.

### 3.2.1 El tensor dieléctrico

En un medio isotrópico, las características de propagación de las ondas electromagnéticas son independientes de su dirección de propagación y su polarización. En dicho medio, el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  y su campo eléctrico asociado  $\vec{E}$  son paralelos de acuerdo a la ecuación:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica escalar o relativa ( $\epsilon_r = 1 + \chi = \epsilon/\epsilon_0$ ),  $\epsilon$  es la permitividad del material, que en el caso general es una función de la frecuencia, y  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio [24]. Esto es equivalente a decir que la polarización inducida por el campo y la del campo mismo son paralelas:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (3.2)$$

Si los materiales no son absorbentes ni amplificadores,  $\epsilon_0$  y  $\chi$  son reales. En un medio anisotrópico  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  no son necesariamente paralelos, sino que están relacionados por un tensor:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon}_r \epsilon_0 \vec{E} = \vec{\epsilon} \vec{E} \quad (3.3)$$

Donde  $\vec{\epsilon}_r$  es el tensor dieléctrico relativo y  $\vec{\epsilon}$  el tensor dieléctrico, que en forma matricial, y referido a tres ejes arbitrarios ortogonales, es de la forma:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sustituyendo 3.18 en 3.17 obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} D_x &= (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z) \\ D_y &= (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z) \\ D_z &= (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para un material no absorbente (que es el caso que supondremos en nuestro experimento), el tensor dieléctrico es representado por una matriz real y simétrica, que, por lo tanto, tiene seis elementos independientes, a saber:  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$  y  $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$ . Existe un resultado matemático general que señala que, cualquier matriz simétrica y real puede ser expresada en forma diagonal realizando una transformación ortogonal. Físicamente, este resultado implica que existe un sistema coordenado (X, Y, Z), relacionado al sistema coordenado x, y, z de la ecuación 3.5 por una rotación de los ejes coordenados, en la cual la ecuación 3.5 tiene la siguiente forma mas simple:

$$\begin{pmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_X & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_Y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Este nuevo sistema de coordenadas es conocido como sistema de ejes principales, debido a que el tensor dieléctrico es diagonal. Aquí,  $\epsilon_X, \epsilon_Y$  y  $\epsilon_Z$  son llamadas constantes dieléctricas principales a lo largo de las direcciones de los ejes principales [25].

Una característica muy importante es que el tensor dieléctrico relativo puede ser especificado en términos de índices de refracción a lo largo de los índices principales, en dicho caso:

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

ya que:

$$n_x = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\epsilon_0}}, n_y = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_0}}, n_z = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_0}} \quad (3.8)$$

En el caso en que la permeabilidad del material ( $\mu$ ) sea muy cercana a la del vacío ( $\mu_0$ ), éste tensor de permitividad contiene dentro de él información acerca de cómo la velocidad de fase de las ondas de luz en nuestro material no lineal varía con la dirección de propagación y la polarización de la onda [26].

### 3.2.2 Propagación de la luz a lo largo de los ejes principales de un medio anisotrópico

Cuando se resuelven las ecuaciones de Maxwell usando el tensor dieléctrico se encuentra que, para cualquier dirección de propagación en un medio anisotrópico, existen dos ondas linealmente polarizadas que se pueden propagar por el material y retener su polarización lineal original [23]. Estas dos ondas son referidas como “polarizaciones propias” (eigenpolarizaciones) ya que ellas pueden expresarse como soluciones de un problema de vectores propios. Estas dos ondas viajan a diferentes velocidades; esto es, están caracterizadas por diferentes índices de refracción, y son mutuamente ortogonales. Los índices de refracción en el material dependen de la dirección de propagación. En el caso en que una onda se propague por un eje del cristal, la ecuación para el desplazamiento eléctrico es:

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Y las componentes de campo viajan con diferentes velocidades de fase:

$$v_x = \frac{c}{n_x} \quad y \quad v_y = \frac{c}{n_y} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, para ondas que viajan en los ejes  $x$  y  $y$ , que suponemos como los ejes principales, la diferencia entre los índices de refracción es denominada *birrefringencia del material*:

$$\Delta n = |n_x - n_y| \quad (3.11)$$

Aquí hay que considerar que una determinación completa de la birrefringencia del material supone el cálculo de las orientaciones de las polarizaciones propias y sus índices de refracción como función de la dirección de propagación [26].

### 3.2.3 Ondas electromagnéticas en un material anisotrópico [26, 27]

En general, la birrefringencia puede ser definida considerando la permitividad dieléctrica y el índice de refracción en su forma tensorial. Consideremos una onda plana propagándose en un medio

anisotrópico, con un tensor de permitividad relativa  $\bar{\epsilon}_r$ . Si la onda tiene un vector eléctrico de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (3.12)$$

el vector de onda  $\vec{k}$  y la frecuencia angular  $\omega$  deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell en el medio, lo cual nos lleva a las ecuaciones:

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \bar{\epsilon}_r \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.13a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.13b)$$

Sustituyendo la ecuación 3.12 en 3.13a y 3.13b obtenemos:

$$|\vec{k}| \vec{E}_0 - (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0 \quad (3.14a)$$

$$\vec{k} \cdot \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (3.14b)$$

Para entender de forma clara la derivación de estas ecuaciones y el desarrollo siguiente, se pueden consultar el apéndice B ó el apéndice C. Para encontrar los valores permitidos de  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_0$  debe ser eliminado de la ecuación 3.14a. Una forma de hacer esto es escribir la ecuación en coordenadas cartesianas, donde los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son escogidos en las direcciones de los vectores propios de  $\bar{\epsilon}_r$  (teniendo el tensor dieléctrico relativo diagonalizado), de forma que:

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$$

Así, la ecuación 3.14a se transforma en:

$$(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2}) E_{0x} + k_x k_y E_{0y} + k_x k_z E_{0z} = 0 \quad (3.15a)$$

$$k_x k_y E_{0x} + (-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2}) E_{0y} + k_y k_z E_{0z} = 0 \quad (3.15b)$$

$$k_x k_z E_{0x} + k_y k_z E_{0y} + (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2}) E_{0z} = 0 \quad , \quad (3.15c)$$

donde  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$ ,  $E_{0z}$ ,  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son las componentes de  $\vec{E}_0$  y  $\vec{k}$ . Éste es un conjunto de ecuaciones lineales en  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$ ,  $E_{0z}$  y tienen una solución no trivial si su determinante es cero, es decir cuando

$$\det \begin{bmatrix} (-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2}) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & (-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2}) & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2}) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

Realizando el cálculo del determinante y re-arreglando términos se llega a:

$$\frac{\omega^4}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} + \frac{k_x^2 + k_z^2}{n_y^2} + \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} \right) + \left( \frac{k_x^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{k_y^2}{n_x^2 n_z^2} + \frac{k_z^2}{n_x^2 n_y^2} \right) (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = 0 \quad (3.17)$$

En el caso de materiales uni-axiales, que están definidos por un eje óptico, los ejes principales del cristal se pueden colocar de forma que:  $n_x = n_y = n_o$  y  $n_z = n_e$ , por lo que la ecuación 3.17 se puede factorizar en:

$$\left( \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Cada factor en la ecuación 3.18 define una superficie en el espacio de vectores  $\vec{k}$  (superficies definidas por las normales de las ondas, que son vectores que tienen la misma dirección que los vectores  $\vec{k}$ ). El primer factor define una esfera y el segundo define un elipsoide. Por lo tanto, para cada normal de una onda que se propaga en el material anisotrópico, hay un vector  $\vec{k}$  que está en la esfera y uno que está en el elipsoide, los valores de  $\vec{k}$  en la esfera corresponden a los rayos ordinarios mientras que los valores en el elipsoide corresponden a los rayos extraordinarios (ver apéndices B y C).

Como se dejó anotado anteriormente, los materiales birrefringentes pueden ser caracterizados por dos índices de refracción, uno para rayos ordinarios y otro para rayos extraordinarios, que se definen con respecto al *eje óptico del material*. Los rayos ordinarios están sujetos a un *índice de refracción ordinario*  $n_o$ , mientras que los rayos extraordinarios al *índice de refracción extraordinario*  $n_e$ . Debido a que el eje óptico lo podemos colocar en cualquiera de los ejes del cristal, por conveniencia lo colocamos en el eje z; así, los rayos cuya polarización esté en el plano definido por el eje óptico del material ( $\mathbf{c}$ ) y el vector de onda  $\vec{k}$ , se propagarán con un índice de refracción  $\bar{n}(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{c}$  y  $\vec{k}$ . Para encontrar una expresión para  $\bar{n}(\theta)$  descomponemos el vector  $\vec{k}$  con respecto a los ejes x, y y z del material (acordando que deben estar dispuestos de forma que  $n_z = n_e$ ; para esto es suficiente que el eje óptico se coloque sobre el eje z, lo cual es conveniente para nosotros, pero no deja de ser arbitrario, ver figura 3.2).

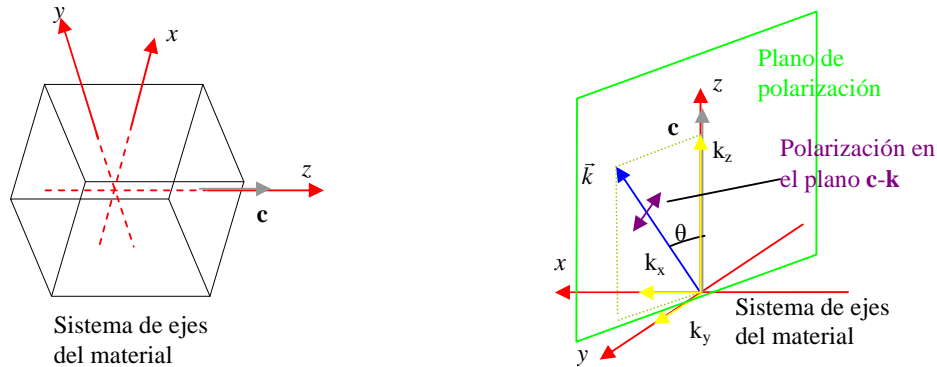


Fig. 3.2. Sistema de ejes escogidos para el material, de forma que el eje x sea el eje óptico, y que a lo largo de los ejes x y y el índice de refracción sea  $n_o$  y a lo largo del eje z sea  $n_e$ .

De la figura 3.2 vemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \Rightarrow \text{sen}^2 \theta = \frac{k_x^2 + k_y^2}{|\vec{k}|^2} \\ \text{cos } \theta &= \frac{\sqrt{k_z^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \Rightarrow \text{cos}^2 \theta = \frac{k_z^2}{|\vec{k}|^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 3.18, obtenemos que:

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\left( \frac{|\vec{k}|^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

El factor que genera la esfera no interesa debido a que  $|\vec{k}|^2$  solo esta dividido por  $n_o$ , es decir solo tiene relación con  $n_o$ ; lo que necesitamos es una relación entre  $n_o$  y  $n_e$ , por lo que el primer factor puede ser eliminado (pasándolo dividiendo al lado derecho):

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{|\vec{k}|^2 \text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{|\vec{k}|^2 \text{cos}^2 \theta}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\text{cos}^2 \theta}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2 |\vec{k}|^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\text{cos}^2 \theta}{n_o^2} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{n^2(\theta)} \quad (3.19)$$

Para comprobar que esta relación es correcta tomamos el caso en que  $\theta = 0$ , en que el rayo se propaga a lo largo del eje óptico (figura 3.2):  $\frac{1}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\theta)} \Rightarrow n(\theta) = n_o$ , lo que concuerda con la definición del

eje óptico, ya que, cuando  $\vec{k}$  y  $\mathbf{c}$  son paralelos no definen un plano de polarización, es decir, la polarización de la onda puede ser cualquiera, y estas ondas experimentan un índice de refracción  $n_o$  (ordinario) como se dijo al comienzo de esta sección. Si  $\theta = 90^\circ$  el rayo se propaga perpendicular al eje óptico, entonces:  $\frac{1}{n_e^2} = \frac{1}{n^2(\theta)} \Rightarrow n(\theta) = n_e$ , lo cual sigue siendo congruente, ya que en este caso el

plano de polarización obliga a que la polarización de la onda sea paralela al eje óptico, por lo que experimenta un índice de refracción  $n_e$ . En general  $n(\theta)$  en la ecuación 3.19 puede ser escrito como  $n_e(\theta)$  ya que si  $\theta \neq 0$  se puede considerar a la polarización del rayo como extraordinaria. [21]

### 3.3 Susceptibilidad no lineal

La relación lineal entre la polarización eléctrica de un medio dieléctrico y el campo eléctrico de una onda de luz esta dada por la ecuación:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(t) \quad (3.20)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del espacio y  $\chi$  es la susceptibilidad lineal eléctrica del medio, además, las cantidades que varían rápido en el tiempo son denotadas con una tilde. Esta ecuación es una aproximación que es válida solo cuando la amplitud del campo eléctrico es pequeña. Con el uso de ondas de luz de gran amplitud de láseres potentes, es necesario considerar una forma más general de la



ecuación 3.20, en la cual la relación entre la polarización y el campo eléctrico es *no lineal*, es decir, la polarización  $\tilde{P}(t)$  es una serie de potencias de la intensidad del campo  $\tilde{E}(t)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= \varepsilon_0 \chi^{(1)} \tilde{E}(t) + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \tilde{E}^3(t) + \dots \\ &= \tilde{P}^{(1)}(t) + \tilde{P}^{(2)}(t) + \tilde{P}^{(3)}(t) + \dots\end{aligned}\quad (3.21)$$

El primer término de esta ecuación es el mismo que la ecuación 3.20, y describe la respuesta lineal del medio. La constante de proporcionalidad  $\chi^{(1)}$  es conocida como susceptibilidad eléctrica lineal. Las cantidades  $\chi^{(2)}$  y  $\chi^{(3)}$  son conocidas como susceptibilidades ópticas no lineales de segundo y tercer orden respectivamente. Por simplicidad, se han tomado los campos  $\tilde{P}(t)$  y  $\tilde{E}(t)$  como cantidades escalares al momento de escribir las ecuaciones 3.20 y 3.21, que representan las magnitudes de dichos campos. Para poder escribir de esta manera las ecuaciones 3.20 y 3.21, se ha asumido que la polarización al tiempo  $t$  depende solo del valor instantáneo de la intensidad del campo eléctrico. La suposición de que el medio responde instantáneamente implica que el medio debe ser no absorbente y no dispersivo. En general, las susceptibilidades no lineales dependen de las frecuencias de los campos aplicados pero bajo las suposiciones anteriores, las tomaremos como constantes. Así, podemos escribir:

$$\tilde{P}^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \tilde{E}(t) \quad (3.22)$$

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) \quad (3.23)$$

$$\tilde{P}^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \tilde{E}^3(t) \quad (3.24)$$

⋮

$$\tilde{P}^{(n)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(n)} \tilde{E}^n(t) \quad (3.25)$$

donde, para  $n \geq 2$ ,  $\tilde{P}^{(n)}(t)$  es la polarización lineal de n-ésimo orden y  $\chi^{(n)}$  es la susceptibilidad no lineal de orden n. [25]

Muchos materiales ópticos no lineales son materiales birrefringentes caracterizados por dos índices de refracción, además la definición de los ejes principales de un material cristalino no lineal hace necesario tomar en cuenta las direcciones en las cuales el campo eléctrico es aplicado. En dicha situación, en la que no se hace ninguna suposición sobre las capacidades de absorción y dispersión del material, se tiene que tomar en cuenta la naturaleza vectorial de estos campos para las polarizaciones no lineales  $\tilde{P}^{(n)}(t)$ ; en tal caso,  $\chi^{(1)}$  se interpreta como un tensor de segundo rango (vector),  $\chi^{(2)}$  como un tensor de tercer rango (matriz), etc. también se encontrará que la susceptibilidad no lineal de segundo ( $\chi^{(2)}$ ) dependerá de la dirección de los campos, por lo que trabajarla en su forma de tensor de tercer orden se hace necesario. Así, la expresión generalizada para las componentes de la polarización no lineal de segundo orden (ecuación 3.23) en su forma vectorial es:

$$P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (3.26)$$

La cantidad  $\chi_{ijk}^{(2)}$  es el **tensor de susceptibilidad no lineal de segundo orden**, y los subíndices  $i, j$ , y  $k$  corresponden a los ejes de coordenadas cartesianas  $x, y$  y  $z$  (ó  $1, 2$  y  $3$ ). Usualmente es conveniente definir estos ejes de forma que coincidan con los ejes principales del cristal.

La respuesta no lineal de segundo orden, definida por la ecuación 3.26, se puede escribir en una forma contraída incorporando el uso del **tensor de coeficientes ópticos no lineal**  $d_{ij}$ , el cual tiene la relación  $d_{ij} = \varepsilon_0 \chi_{ijk}$ , donde:

$$j' = \begin{bmatrix} 1 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } xx \\ 2 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } yy \\ 3 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } zz \\ 4 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } yz \text{ \u00f3 } zy \\ 5 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } zx \text{ \u00f3 } xz \\ 6 & \text{si los \u00edndices } jk \text{ de } \chi \text{ son } xy \text{ \u00f3 } yx \end{bmatrix}; \quad i = \begin{bmatrix} 1 & \text{si el \u00edndice } i \text{ de } \chi \text{ es } x \\ 2 & \text{si el \u00edndice } i \text{ de } \chi \text{ es } y \\ 3 & \text{si el \u00edndice } i \text{ de } \chi \text{ es } z \end{bmatrix}$$

Escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} P_x^{(2)} \\ P_y^{(2)} \\ P_z^{(2)} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x E_x \\ E_y E_y \\ E_z E_z \\ 2E_y E_z \\ 2E_z E_x \\ 2E_x E_y \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Las tablas de propiedades \u00f3pticas de los cristales usualmente presentan los valores de  $d_{ij}$  en lugar de  $\chi_{ijk}$ . Para tener conocimiento de otras propiedades del tensor de susceptibilidad no lineal, y otras relaciones \u00fasiles, es conveniente referirse al Ap\u00e9ndice D.

### 3.4 Fen\u00f3menos no lineales de segundo orden

Por simplicidad, como el objetivo de este cap\u00edtulo solo es ilustrar de forma sencilla como se generan algunos de los fen\u00f3menos no lineales que nos son m\u00e1s \u00fasiles, seguiremos trabajando con las suposiciones de que el material \u00f3ptico estudiado es no absorbente, no dispersivo, que responde instant\u00e1neamente al campo el\u00e9ctrico y que podemos representar los campos  $\vec{P}(t)$  y  $\vec{E}(t)$  como cantidades escalares, sin que esto afecte la implementaci\u00f3n o los resultados de nuestro trabajo [25].

La polarizaci\u00f3n no lineal de segundo orden est\u00e1 dada por la ecuaci\u00f3n 3.23; as\u00ed, si el medio es excitado por dos ondas cosenoidales a frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  con amplitudes  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente, y adem\u00e1s estas dos ondas oscilan en la misma direcci\u00f3n (las dos tienen la misma polarizaci\u00f3n), entonces la polarizaci\u00f3n no lineal ser\u00e1 igual a:

$$P^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}_1(t) \vec{E}_2(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \times E_1 \cos(\omega_1 t) \times E_2 \cos(\omega_2 t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2 \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (3.28)$$

Esto muestra que la respuesta no lineal de segundo orden contiene un t\u00e9rmino oscilante en la suma de frecuencias y otro en la resta de frecuencias de los campos entrantes de acuerdo a las relaciones:

$$\omega_{suma} = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.29)$$

$$\omega_{resta} = |\omega_1 - \omega_2| \quad (3.30)$$

Por lo que se puede afirmar que el medio presenta polarizaciones no lineales de segundo orden a frecuencias  $\omega_{suma}$  y  $\omega_{resta}$ . La generaci\u00f3n de estas nuevas frecuencias por procesos no lineales es denominada **suma de frecuencias** y **resta de frecuencias**, respectivamente. Si  $\omega_1 = \omega_2$ , la suma de las frecuencias ser\u00e1 del doble de la frecuencia de entrada, este efecto es llamado **doblamiento de frecuencia** o **generaci\u00f3n de segundo arm\u00f3nico**. *Los procesos no lineales tambi\u00e9n tienen la propiedad de que se pueden presentar en sentido inverso*, dividiendo un haz de frecuencia  $\omega$  en dos rayos con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . La tabla 3.1 lista algunos de los fen\u00f3menos no lineales de segundo orden m\u00e1s importantes.

Los procesos no lineales de segundo orden pueden ser representados en diagramas de Feynman que envuelven tres fotones como en la figura 3.3. La conservación de energía se aplica en cada vértice. En la suma de frecuencias, dos fotones entrantes son aniquilados y un tercero es creado a partir de esta aniquilación, como se muestra en la figura 3.3(a). La figura 3.3(c) muestra el diagrama de la conversión descendente en el cual el fotón de entrada con frecuencia  $\omega_b$  (b de bombeo) es aniquilado en dos nuevos fotones, señal y testigo, con frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_t$  respectivamente [21]. La conservación de energía requiere que:

$$\omega_b = \omega_s + \omega_t \quad (3.31)$$

En razón de esto, es conveniente tener en cuenta que el proceso de conversión descendente es muy importante en óptica cuántica, y constituye un elemento fundamental para la explicación de la creación de fotones correlacionados.

Tabla 3.1. Efectos no lineales de segundo orden. La segunda columna lista las frecuencias de los rayos incidentes en el cristal no lineal, mientras la tercera da las frecuencias del rayo de salida. Para la conversión descendente las frecuencias de salida deben satisfacer la ec. 3.37.		
Efecto	Frecuencia de entrada	Frecuencia de salida
Doblamiento de frecuencia	$\omega$	$2\omega$
Mezcla de suma de frecuencias	$\omega_1, \omega_2$	$(\omega_1 + \omega_2)$
Mezcla de diferencia de frecuencias	$\omega_1, \omega_2$	$ \omega_1 - \omega_2 $
Conversión descendente	$\omega_b$	$\omega_s, \omega_t$
Amplificación paramétrica degenerada	$2\omega, \omega$	$\Omega$

### 3.4.1 Proceso paramétrico óptico y generación del segundo armónico [25]

En óptica los procesos paramétricos son aquellos en los que la energía y el momento se conservan cuando interactúan fotones en un medio no lineal. Es decir, la palabra paramétrico se usa para denotar un proceso en el cual los estados cuánticos, inicial y final del medio, son los mismos. Consecuentemente, en un proceso paramétrico la población de electrones puede ser removida del estado base hacia un “nivel virtual”, solo por pequeños intervalos de tiempo. De acuerdo con el principio de incertidumbre, la población puede estar en un nivel virtual por un intervalo de tiempo del orden de  $\hbar/\Delta E$ , donde  $\Delta E$  es la diferencia de energía entre el nivel virtual y el nivel real más cercano. Inversamente, un proceso que involucre la transferencia de población de un nivel real a otro es conocido como proceso no-paramétrico. Una diferencia entre procesos paramétricos y no-paramétricos es que los primeros siempre pueden ser descritos por susceptibilidades reales, mientras que los no-paramétricos requieren susceptibilidades complejas. Otra diferencia es que mientras en los paramétricos la energía de los fotones siempre se conserva, en los no-paramétricos no se conserva ya que la energía puede ser transferida hacia o desde el material.

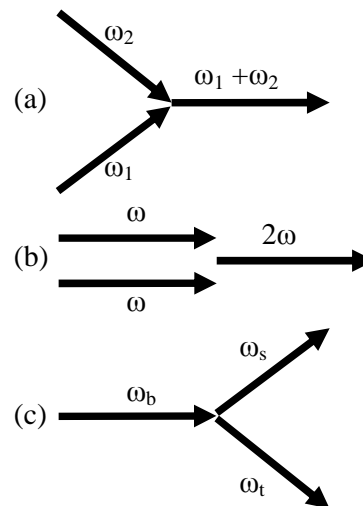


Fig. 3.3. Diagramas de Feynman para procesos no lineales de segundo orden. (a) Mezcla de suma de frecuencias. (b) Doblamiento de frecuencia. (c) Conversión descendente.

Los procesos paramétricos incluyen la generación de segundo armónico (GSA,  $\omega_{GSA} = \omega_p + \omega_p$ ), suma de frecuencias y diferencia de frecuencias. Las ecuaciones acopladas que describen estos procesos paramétricos ópticos, generalmente pueden ser escritas como tres ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (consultar Apéndices E2, E3, F y G).

El GSA es el ejemplo más fácil de entender. Un modelo simplificado de campo eléctrico con polarización lineal es:

$$\tilde{E}(t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \quad (3.32)$$

El término de segundo orden de la polarización para un punto particular en el medio no lineal ( $x = 0$ ) será, de acuerdo a la ecuación 3.23:

$$\tilde{P}^{(2)}(t) \propto \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \quad (3.33)$$

El término cuadrático de la polarización puede ser interpretado como una polarización constante (el  $\frac{1}{2}$ ) y una que depende del tiempo con una radiación transmitida con el doble de la frecuencia inicial (bombeo).

En un modelo un poco más completo, con un rayo láser cuyo campo eléctrico está representado como:

$$\tilde{E}(t) = E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}, \quad (3.34)$$

si el rayo incide en un cristal para el cual la susceptibilidad de segundo orden no es cero, la polarización no lineal que es creada en el cristal será:

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) = 2\chi^{(2)} E E^* + (\chi^{(2)} E^2 e^{-2i\omega t} + \chi^{(2)} E^{*2} e^{2i\omega t}) \quad (3.35)$$

De nuevo, se observa que la polarización de segundo orden consiste de una contribución de frecuencia cero (primer término) y una contribución a frecuencia  $2\omega$  (segundo término).

La ecuación de onda en un medio no lineal tiene la forma (Apéndice E.1.):

$$\nabla^2 \tilde{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}^{NL}}{\partial t^2}, \quad (3.36)$$

donde  $\tilde{P}^{NL}$  es la polarización asociada con la respuesta no lineal (esta ecuación está en unidades CGS). Así, de acuerdo a esta ecuación, la segunda contribución de la ecuación 3.35, nos indica que se genera radiación a la frecuencia del segundo armónico ( $2\omega$ ). Nótese que la primera contribución no lleva a la generación de radiación electromagnética (ya que su segunda derivada es nula); lleva a un proceso conocido como rectificación óptica en la cual un campo eléctrico estático es creado dentro del cristal no lineal.

La generación del segundo armónico se puede visualizar considerando la interacción en términos del intercambio de fotones entre las varias frecuencias que componen el campo (figura 3.4). De acuerdo a esta visualización, que se muestra en la parte (b) de la figura 3.4, dos fotones de frecuencia  $\omega$  son destruidos y un fotón de frecuencia  $2\omega$  es creado simultáneamente en un solo proceso cuántico. La línea sólida en la figura representa el estado base, y las líneas punteadas representan lo que es conocido como niveles virtuales. Estos niveles no son niveles propios de energía del átomo libre, son la combinación de energía de uno de los estados propios (eigen-estados) del átomo y uno o más fotones del campo de radiación (Apéndice F).

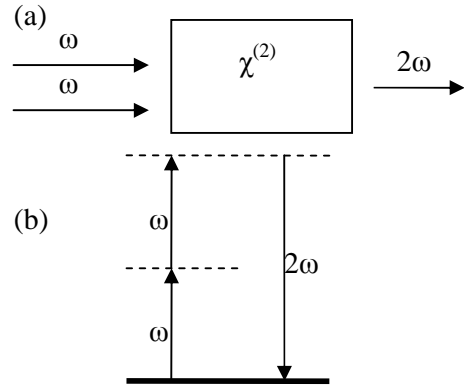


Fig. 3.4. (a) Geometría del segundo armónico. (b) diagrama de niveles de energía que describe la generación del segundo armónico.

Sin embargo, el segundo armónico no se puede propagar en cualquier dirección a través del medio. En el caso de doblamiento de frecuencia (o segundo armónico, figura 3.3(b)), la conservación de momento requiere que  $\vec{k}^{(2\omega)} = 2\vec{k}^{(\omega)}$ , dado que  $|\vec{k}| = \omega/c$ ; la expresión anterior se puede escribir como  $n_{2\omega} = n_{\omega}$  (Apéndice F). En otras palabras, el GSA requiere que la luz con la frecuencia del segundo

armónico se propague a la misma velocidad que la luz con la frecuencia de bombeo. Algunos materiales pueden satisfacer esta relación para condiciones específicas.

En general, la conservación de momento es equivalente a requerir que la componente del campo de luz generada, paralela al campo de bombeo, se propague en fase con este. Esto debe ser así, ya que de otra manera, los fotones generados en diferentes puntos a lo largo de la trayectoria del campo de bombeo interferirán destructivamente. Cabe mencionar que encontrar las condiciones apropiadas para un proceso paramétrico en particular, en el cual el campo generado se propague en fase con el de bombeo, es lo que se denomina **acoplamiento de fase**.

### 3.4.2 Suma y diferencia de frecuencias [25]

Considerando que la circunstancia en la cual un campo incidente en un medio no-lineal, caracterizado por la susceptibilidad no lineal  $\chi^{(2)}$ , consiste de dos componentes de frecuencia distintas y que éste se puede representar como:

$$\tilde{E}(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (3.37)$$

donde c.c. significa el complejo conjugado de las cantidades involucradas, y asumiendo que la contribución de segundo orden a la polarización no-lineal es de la forma:

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \chi^{(2)} \tilde{E}(t)^2 = \chi^{(2)} \tilde{E}(t) \tilde{E}(t) \quad (3.38)$$

Se encuentra que la polarización no-lineal de segundo orden creada, está dada por:

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \chi^{(2)} \left[ E_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c. \right] + 2\chi^{(2)} \left[ E_1 E_1^* + E_2 E_2^* \right] \quad (3.39)$$

Es conveniente expresar este resultado usando la notación:

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \sum_n P(\omega_n) e^{-i\omega_n t}, \quad (3.40)$$

donde la sumatoria se extiende sobre frecuencias positivas y negativas  $\omega_n$ . Entonces las amplitudes complejas de las componentes de frecuencia de la polarización no-lineal estarán dadas por:

$$\begin{aligned} P(2\omega_1) &= \chi^{(2)} E_1^2 & (GSH), \\ P(2\omega_2) &= \chi^{(2)} E_2^2 & (GSH), \\ P(\omega_1 + \omega_2) &= 2\chi^{(2)} E_1 E_2 & (GSF), \\ P(\omega_1 - \omega_2) &= 2\chi^{(2)} E_1 E_2^* & (GDF), \\ P(0) &= 2\chi^{(2)} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*) & (RO) \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde cada expresión tiene el nombre del proceso que describe: Generación del Segundo armónico (GSA), Generación por Suma de Frecuencias (GSF), Generación por Diferencia de Frecuencias (GDF), y Rectificación Óptica (RO). Nótese que, de acuerdo a la notación compleja, hay una respuesta al negativo de cada frecuencia distinta de cero:

$$\begin{aligned} P(-2\omega_1) &= \chi^{(2)} E_1^{*2}; & P(-2\omega_2) &= \chi^{(2)} E_2^{*2} \\ P(-\omega_1 - \omega_2) &= 2\chi^{(2)} E_1^* E_2^*; & P(\omega_2 - \omega_1) &= 2\chi^{(2)} E_2 E_1^* \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sin embargo, no es necesario tomar en cuenta las componentes positivas y negativas de frecuencia al mismo tiempo.

Vemos, de las ecuaciones 3.41, que cuatro componentes de frecuencia diferentes de cero están presentes en la polarización no-lineal. Sin embargo, típicamente, no más de una de estas frecuencias se presenta con intensidad apreciable en la radiación generada por la interacción óptica no-lineal. La razón de este comportamiento es que la polarización no-lineal puede producir eficientemente una señal de salida solo si una cierta condición de acoplamiento de fase se satisface (consultar para mayor detalle Apéndices E.3, F y G) y, usualmente, dicha condición no puede ser satisfecha para más de una componente de frecuencia de la polarización no-lineal. Experimentalmente, ó al momento de diseñar y construir el cristal, se escoge cual componente de frecuencia será radiada seleccionando la polarización de la radiación de bombeo y la orientación del cristal no lineal, lo cual implica escoger ciertas condiciones de conservación de energía y momento.

El proceso de **Generación por suma de frecuencias** se ilustra en la figura 3.5. De acuerdo a las ecuaciones 3.41, la amplitud compleja de la polarización no-lineal que describe este proceso está dada por:

$$P(\omega_1 + \omega_2) = 2\chi^{(2)} E_1 E_2 \quad (3.43)$$

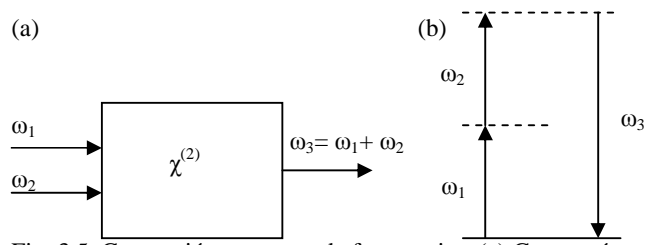


Fig. 3.5. Generación por suma de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Descripción en niveles de energía.

En varias formas el proceso de generación por suma de frecuencias es análogo al de generación de segundo armónico, excepto que en la generación por suma de frecuencia las dos ondas de entrada tienen frecuencias distintas (Apéndice E.3 y [25]). En el proceso de suma de frecuencias, un átomo absorbe un fotón de frecuencia  $\omega_1$  y otro de frecuencia  $\omega_2$ , de forma que pasa a un nivel virtual de energía más alto. Después de un cierto tiempo (dado por el principio de incertidumbre), el átomo decae mediante la emisión de un fotón de frecuencia  $\omega_3$ , que es la suma de las dos frecuencias que llevaron al átomo al nivel virtual.

En la **Generación por Diferencia de Frecuencias**, el proceso es descrito por la polarización no-lineal de la forma:

$$P(\omega_1 - \omega_2) = 2\chi^{(2)} E_1 E_2^* \quad (3.44)$$

Este proceso se ilustra en la figura 3.6, donde la frecuencia de la onda generada es la diferencia de la de los campos aplicados. La generación por diferencia de frecuencia puede ser usada para producir radiación infrarroja ajustable al mezclar la radiación de un láser visible ajustable con la radiación a frecuencia fija de otro láser visible. La generación por suma de frecuencias y la generación por diferencia de frecuencias parecen ser muy similares; sin embargo, una diferencia importante entre los dos procesos se puede apreciar a partir de la descripción de la generación por diferencia de frecuencias en términos del diagrama de niveles de energía de un fotón (figura 3.6(b)), donde se ve que la conservación de energía requiere que para cada fotón que es creado a la frecuencia  $\omega_3$ , un fotón a la frecuencia de entrada mayor ( $\omega_1$ ) debe ser destruido, y un fotón a la frecuencia de entrada menor ( $\omega_2$ ) debe ser creado (ó, también puede ocurrir que, un fotón del campo a frecuencia  $\omega_2$  debe provocar el decaimiento). Así, el campo de entrada de menor frecuencia es amplificado por el proceso. Por esta razón, la generación por diferencia de frecuencias también es conocida como Amplificación Paramétrica Óptica. De acuerdo a la descripción en niveles de energía, el átomo absorbe un fotón a frecuencia  $\omega_1$  y salta al nivel virtual más alto. Este nivel decae por el proceso de emisión de dos fotones que es estimulado por la presencia del campo de frecuencia  $\omega_2$ . *La emisión de dos fotones puede ocurrir incluso si el campo de frecuencia  $\omega_2$  no es aplicado.* En tal caso, los campos generados son mucho más débiles, dado que son

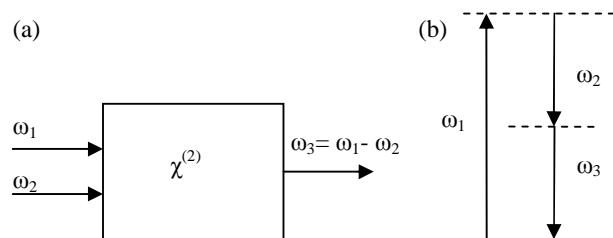


Fig. 3.6. Generación por diferencia de frecuencias. (a) Geometría de la interacción. (b) Descripción en niveles de

creados por *emisión espontánea de dos fotones* de un nivel virtual. Este proceso es conocido como fluorescencia espontánea o conversión espontánea paramétrica descendente (Apéndice G).

En muchas situaciones el campo a frecuencia  $\omega_1$  es un campo de bombeo intenso, mientras que el campo a frecuencia  $\omega_2$  es un campo señal muy débil. Así, la generación por diferencia de frecuencias provoca la amplificación del campo débil. Además, cuando  $\omega_2 = \omega_3$ , el dispositivo es llamado Amplificador Paramétrico Degenerado.

Como vimos en el proceso de generación por diferencia de frecuencias, la presencia de radiación a las frecuencias  $\omega_2$  o  $\omega_3$  puede estimular la emisión de fotones adicionales a estas frecuencias. Si el cristal no-lineal usado en este proceso es colocado dentro de un resonador óptico como el mostrado en la figura 3.7, los campos a las frecuencias  $\omega_2$  y/o  $\omega_3$  pueden reforzarse a valores altos de intensidad. Tal dispositivo es conocido como Oscilador Paramétrico Óptico. Este dispositivo es ajustable debido a que cualquier frecuencia  $\omega_2$  que sea menor a  $\omega_1$  puede satisfacer la condición  $\omega_2 + \omega_3 = \omega_1$ . En la práctica, uno controla la frecuencia de salida ajustando la condición de acoplamiento de fase. El campo aplicado con frecuencia  $\omega_1$  corresponde a la comúnmente llamada *frecuencia de bombeo* ( $b$ ), la frecuencia de salida deseada o creada ( $\omega_3$ ) es llamada *frecuencia señal* ( $s$ ), y la otra frecuencia de salida (la que sirvió para provocar el decaimiento,  $\omega_2$ ) se denomina *frecuencia testigo* ( $t$ ). Finalmente, si el proceso de Amplificación Paramétrica Degenerada ocurre en un oscilador Paramétrico Óptico, el dispositivo se denomina Oscilador Paramétrico Óptico Degenerado.

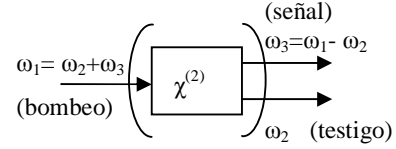


Fig. 3.7. Oscilador paramétrico óptico. Los espejos de la cavidad tienen alta reflectividad para las frecuencias  $\omega_2$  y/o  $\omega_3$

Como señalamos, para tener conversión espontánea paramétrica descendente son necesarias ciertas condiciones, principalmente la conservación de energía  $\omega_b = \omega_s + \omega_t$  y la conservación de momento  $\vec{k}_b = \vec{k}_s + \vec{k}_t$ . La conversión espontánea paramétrica descendente (SPDC por sus siglas en inglés) puede ser estudiada de manera muy sencilla y visual como la combinación del proceso inverso de generación por suma de frecuencias combinado con la generación de segundo armónico (para visualizar y entender dichos procesos con detalle se pueden consultar los apéndices E.3 y F); sin embargo, al intentar describir el fenómeno de conversión con ayuda de las ecuaciones de estos dos procesos, se corre el riesgo de confundirse y complicar el estudio. Para efecto de estudiar a fondo (con ecuaciones), el fenómeno de conversión paramétrica es mejor considerarlo desde el punto de vista de la generación por diferencia de frecuencias (Apéndice G) en el caso en que es degenerado y espontáneo.

### 3.5 SPDC tipo I [12]

La conversión espontánea paramétrica descendente ocurre cuando un fotón de bombeo que interactúa con un medio no-lineal se divide en dos fotones (uno de señal y otro testigo) sujetos a las condiciones de conservación de momento y energía, a saber:

$$\omega_s + \omega_t = \omega_b \quad \text{y} \quad \vec{k}_s + \vec{k}_t = \vec{k}_b \quad , \quad (3.45)$$

donde los sub-índices  $s$ ,  $t$  y  $b$  corresponden a los fotones señal, testigo y de bombeo respectivamente. Las condiciones de acoplamiento de fase tipo I producen fotones señal y testigo con la misma polarización, que es ortogonal a la polarización del fotón de bombeo (figura 3.8). Para ciertos cristales solo una polarización del rayo de fotones de bombeo provocará conversión descendente tipo I, lo cual depende de la estructura del cristal, sus índices de refracción y su eje óptico (comúnmente la polarización que provoca la conversión es la paralela al eje óptico del cristal). El par de fotones señal y testigo producidos pueden caer en cualquier plano común con el rayo de fotones de bombeo. El conjunto de pares de fotones señal y testigo, *todos con polarización opuesta al rayo de bombeo*, forman conos concéntricos al rayo de bombeo con ángulos definidos de acuerdo a la división de

energía del fotón de bombeo (la conservación de energía y momento definen los ángulos de cada par convertido).

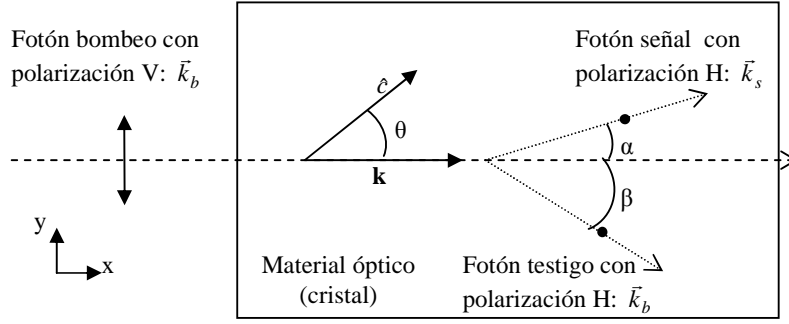


Fig. 3.8. División de un fotón de bombeo en dos, un señal y un testigo en acoplamiento tipo I.

Para encontrar los ángulos de acoplamiento de fase  $\alpha$  y  $\beta$  para un par señal-testigo (es decir, los ángulos de los conos de fotones señales y testigos), se hace uso de  $|\vec{k}_j| = \omega_j n(\omega_j)/c$  y de la aproximación  $n_o(\omega_s) \approx n_o(1/2 \omega_b) \approx n_o(\omega_t)$ , esta aproximación toma en cuenta el caso degenerado de la generación por diferencia de frecuencias, donde, en la ecuación del fenómeno  $\omega_s = \omega_b - \omega_t$ , se tiene que  $\omega_t = \omega_s$ , con lo que se obtendrá que los fotones convertidos tendrán una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de bombeo:  $\omega_s = \omega_t = 1/2 \omega_b$ ; además, en base a las suposiciones hechas al inicio del capítulo, de que no hay dispersión ni absorción, la aproximación nos dice que el índice de refracción ordinario es independiente de la frecuencia.

Al separar la ecuación de momento de 3.45 en sus componentes, las componentes en y arrojan la ecuación:

$$k_{sy} + k_{ty} = k_{by} \quad (3.46)$$

y las componentes en x:

$$k_{sx} + k_{tx} = k_{bx} \quad (3.47)$$

Sin embargo, de la figura 3.8 vemos que:

$$k_{sx} = |\vec{k}_s| \cos \alpha; \quad k_{tx} = |\vec{k}_t| \cos \beta; \quad k_{sy} = |\vec{k}_s| \sin \alpha; \quad k_{ty} = |\vec{k}_t| \sin \beta$$

Si sustituimos estas expresiones en 3.46 y 3.47, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\vec{k}_s| \sin \alpha + |\vec{k}_t| \sin \beta &= k_{by} \\ |\vec{k}_s| \cos \alpha + |\vec{k}_t| \cos \beta &= k_{bx} \end{aligned}$$

Pero,  $k_{by} = 0$  por conservación del momento en la dirección y del fotón de bombeo, así:

$$\frac{\omega_s n_o(\omega_s)}{c} \sin \alpha + \frac{\omega_t n_o(\omega_t)}{c} \sin \beta = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\omega_s n_o(\omega_s)}{c} \cos \alpha + \frac{\omega_t n_o(\omega_t)}{c} \cos \beta = k_{bx} = \frac{\omega_b n_e(\omega_b, \theta)}{c} \quad (3.49)$$

Algo que hay que volver a mencionar, es el hecho de que la polarización de bombeo que provoca la conversión es paralela al eje óptico del material óptico, por lo que sufre un índice de refracción extraordinario, esto también implica que los fotones convertidos (o creados) salen con una polarización ortogonal a la de bombeo y ortogonal al eje óptico, por lo que, dentro del material, sufren



un índice de refracción ordinario. Hay que resaltar que el índice de refracción  $n_e(\omega_b, \theta)$ , que sufre el rayo de fotones de bombeo, depende del ángulo que este haga con el eje óptico del cristal, y es calculado con ayuda de la ecuación 3.19, deducida a partir de la birrefringencia del material. La suposición de la degeneración y la de la igualdad de los índices de refracción ordinarios, para todas las frecuencias involucradas, hace que la ecuación 3.48 se transforma en:

$$\frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \text{sen} \alpha + \frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \text{sen} \beta = 0,$$

que puede ser simplificada a:

$$\text{sen} \alpha = -\text{sen} \beta \Rightarrow \alpha = -\beta \quad (3.50)$$

Sustituyendo esta relación en 3.49, se obtiene:

$$\frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \cos \alpha + \frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \cos \alpha = \frac{\omega_b n_e(\omega_b, \theta)}{c}$$

O de manera simplificada:

$$\cos \alpha = \frac{n_e(\omega_b, \theta)}{n_o(1/2 \omega_b)} \quad \text{o} \quad \frac{\sec \alpha}{n_o(1/2 \omega_b)} = \frac{1}{n_e(\omega_b, \theta)} \quad (3.51)$$

Al sustituir éste resultado en la ecuación 3.19, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2(\omega_b)} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega_b)} = \frac{1}{n_e^2(\omega_b, \theta)} = \frac{\sec^2 \alpha}{n_o^2(1/2 \omega_b)} \quad (3.52)$$

Ecuación que puede ser resuelta explícitamente, dados los índices de refracción y el ángulo de corte del cristal.

### 3.6 Cristales de Beta Bario Borato (BBO) [28,12]

También referido como  $\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$ , se trata de un material óptico no-lineal y birrefringente común, bastante fácil de usar para investigación. Sus características útiles incluyen transparencia sobre un gran ancho de banda, desde UV hasta infrarrojo, amplia capacidad de acoplamiento de fase, un alto umbral de daño y baja susceptibilidad higroscópica. Este cristal tiene la capacidad de poder generar GSA, GSF y GDF, por lo que puede llevar a cabo los procesos mencionados anteriormente tal y como fueron explicados; además, por ser birrefringente la ecuación 3.19 es aplicable al cristal. El corte del cristal, con respecto al eje óptico (variable de la que se tiene control al momento de construir el cristal), determina el ángulo  $\theta$  que éste hace con la trayectoria del rayo de bombeo (ecuación 3.19). Comúnmente, los cristales BBO usados para los experimentos de producción de fotones correlacionados tienen un corte de  $\theta = 30^\circ$ .

Como se menciono a lo largo de la sección 3.3, y en los apéndices E, F, y G, en general, los índices de refracción (y por tanto las susceptibilidades) dependen de la longitud de onda (frecuencia) con que se trabaja. Existen unas ecuaciones llamadas *Ecuaciones de Sellmeier* que proporcionan estas relaciones, dichas ecuaciones son obtenidas generalmente con ayuda de pruebas experimentales de los cristales. Para el cristal de BBO, las ecuaciones son:

$$n_e(\lambda)^2 = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \quad (3.53)$$

$$n_o(\lambda)^2 = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01515\lambda^2 \quad (3.54)$$

La figura 3.9 muestra las gráficas de las ecuaciones de Sellmeier para los índices de refracción del BBO como función de la longitud de onda. Como podemos apreciar, para una longitud de onda de 405nm (que es la que se usará en el experimento como frecuencias de bombeo) se tiene  $n_o(405\text{nm}) = 1.6919$  y  $n_e(405\text{nm}) = 1.5671$ ; y para una de 810nm (frecuencia generada por la conversión de fotones a 405nm) se encuentra que  $n_o(810\text{nm}) = 1.6603$  y  $n_e(810\text{nm}) = 1.5442$ .

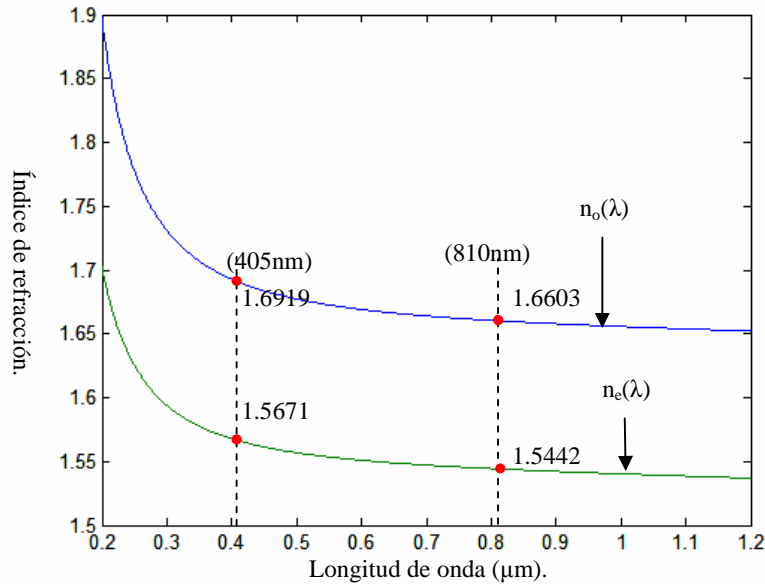


Fig. 3.9. Índices de refracción para el BBO dados por las ecuaciones de Sellmeier.

Otras propiedades importantes de los cristales BBO se muestran en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Propiedades del BBO			
<b>Simetría y clase del cristal</b>	Romboédrica, 3m	<b>Umbral de daño (GW/cm<sup>2</sup>)</b>	
<b>Grupo espacial</b>	R3c	A 1.064μm, pulsos de 10ns	4.6
<b>Índices de refracción a (μm):</b>	$n_o, n_e$	A 1.064μm, pulsos de 0.1ns	15
0.2537	----, ----	<b>Susceptibilidades NL, pm/V co GSH a 1.06μm, [d<sub>31</sub> = d<sub>15</sub>, d<sub>32</sub> = d<sub>24</sub>] Simetría de Kleinman.</b>	
0.2660	1.7571, 1.6146	d <sub>22</sub>	2.3
0.4358	1.6868, 1.5564	d <sub>15</sub>	0.15
0.5461	1.6738, 1.5547	d <sub>24</sub>	= d <sub>15</sub> por simetría
0.6328	1.6673, 1.5500	d <sub>33</sub>	Irrelevante
1.0642	1.6551, 1.5425	d <sub>ef</sub>	d <sub>15</sub> senθ, si φ=0
<b>Coefficiente de absorción a λ:</b>	(cm <sup>-1</sup> )	<b>Angulo de acoplamiento de fase a d<sub>ef</sub> máximo y 25°C</b>	
0.266μm	0.04 a 0.15	A 0.532μm Tipo I	47.6°
1.0μm	0.001 a 0.002	A 1.064μm Tipo I	22.8°

Las ecuaciones de Sellmeier 3.53 y 3.54 combinadas con la ecuación 3.52, para un fotón de bombeo de 405nm y con un ángulo de corte de  $\theta = 30^\circ$ , dan la siguiente relación:

$$\frac{\sin^2 30^\circ}{(1.5671)^2} + \frac{\cos^2 30^\circ}{(1.6919)^2} = \frac{1}{n_e^2(\omega_b, \theta)} = \frac{\sec^2 \alpha}{(1.6603)^2} \quad (3.55)$$

Despejando  $\alpha$  obtenemos:  $\alpha = 3.065^\circ$ . En la figura 3.10 se muestra la gráfica de  $\alpha$  contra  $\theta$ .

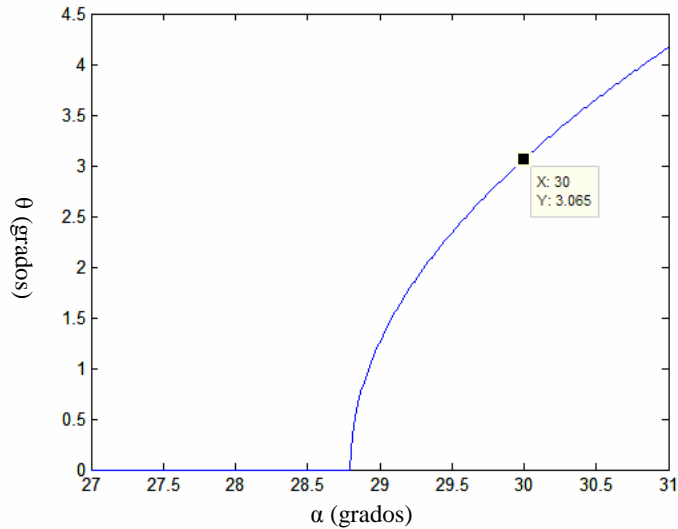


Fig.3.10. Ángulo de acoplamiento de fase ( $\alpha$ ) como función del ángulo de corte del cristal ( $\theta$ ) para una longitud de onda de 405nm. La eficiencia de conversión descendente se relaciona con  $\cos^2\theta$ , por lo que un corte de  $30^\circ$  es apropiado.

Sin embargo, este ángulo es interno al cristal; es decir, el ángulo  $\alpha$  obtenido, es el ángulo que tienen los conos de fotones convertidos dentro de los cristales de BBO (figura 3.8), si queremos conocer cual sería el ángulo de los conos cuando salen del cristal al aire, tenemos que aplicar la ecuación de Snell para considerar la refracción de los rayos de fotones y, así, poder conocer dicho ángulo (figura 3.11).

En este caso, la ecuación de Snell es:

$$n_o \text{ sen} \alpha = n \text{ sen} \alpha' \quad (3.56)$$

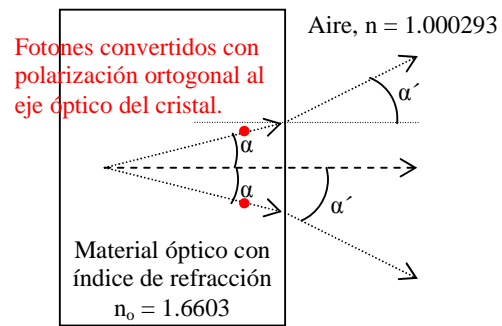


Fig. 3.11. Refracción de los rayos de fotones convertidos al pasar del cristal al aire.

Donde  $n_o$  es el índice de refracción que sufren los fotones convertidos dentro del cristal ( $n_o = 1.6603$ ),  $\alpha$  es el ángulo del cono dentro del cristal,  $n$  es el índice de refracción del aire ( $n = 1.000293$ ). Al sustituir los datos en la ecuación:

$$(1.6603) \text{ sen}(3.065^\circ) = (1.000293) \text{ sen} \alpha' \quad (3.57)$$

De donde se obtiene que  $\alpha' \cong 5.091^\circ$ , este el ángulo al cual se encuentra el cono en el aire, y es el ángulo al cual experimentalmente se deben buscar los fotones convertidos.

# Capítulo 4

## Fotones enredados, formalismo Cuántico

En este capítulo presentamos la teoría relacionada a la cuantización del campo electromagnético y algunas de sus propiedades, con el objetivo de interpretar al fotón como elemento de excitación de un modo normal del campo electromagnético. Lo cual se hace para tener la confianza de representar y manejar los fotones de la forma en que se presentaron en el capítulo 2, con sólo una diferencia de notación. De tal suerte, esto nos permitió reinterpretar y tratar, desde un punto de vista cuántico mas formal, el fenómeno de conversión espontánea paramétrica descendente, poder crear estados enredados con fotones polarizados, y estar en condiciones de avanzar hacia el desarrollo experimental desde el marco de la mecánica cuántica, lo cual que es la parte conclusiva de nuestro trabajo.

El desarrollo de la cuantización del campo electromagnético que vamos a presentar, y de la representación y creación de fotones en dichos campos, generalmente es realizado de una manera completa al tomar en cuenta tres dimensiones y varios modos (frecuencias); pero, como veremos mas adelante en la implementación experimental, en nuestro caso el tratamiento uni-dimensional y con un solo modo de oscilación (una sola frecuencia) es suficiente ya que, como se hizo en el capítulo 3, la conversión descendente solo aplicó a luz a frecuencias “definidas” y con polarización conocida, a saber, la de bombeo  $\omega_b$  y las de señal y testigo  $\omega_s = \omega_t = (1/2)\omega_p$ , ambas con polarización opuesta a la de bombeo; además, cada una de estas frecuencias corresponde a un campo electromagnético en una cierta región del sistema experimental, es decir, podemos suponer que no hay campos con varias componentes de frecuencia. Así, los resultados teóricos de este capítulo, como el de estados de número correspondientes a una sola frecuencia angular, cumplen con nuestro requerimiento de describir los fotones convertidos de una forma más sencilla (la del formalismo cuántico) con la cual podamos manejarlos. Sin embargo, si se desea saber más sobre campos multi-modo (compuestos de varias frecuencias) y en tres dimensiones es recomendable ver la referencia [29].

### 4.1 Cuantización de un campo uní-dimensional [29]

Supongamos que se tiene el caso de un campo de radiación confinado en una cavidad uní-dimensional a lo largo del eje  $z$  con paredes perfectamente conductoras en  $z = 0$  y  $z = L$ , como se muestra en la figura 4.1.

En tal configuración el campo eléctrico debe desaparecer en las fronteras y tomar la forma de una onda estacionaria. Asumiremos que no hay fuentes de radiación y que el campo estará polarizado en la dirección  $x$ ,  $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_x E_x(z,t)$ . También sabemos que las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.4)$$

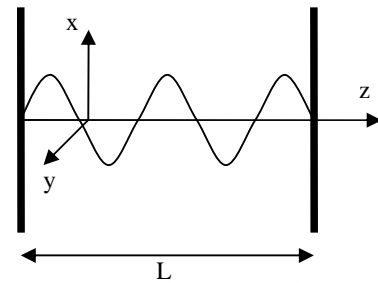


Fig. 4.1. Cavidad con paredes perfectamente conductoras en  $z = 0$  y  $z = L$ .

Un campo uní-modal que satisfaga estas ecuaciones, y las condiciones de frontera establecidas, tiene la forma:

$$E_x(z,t) = \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \text{sen}(kz) , \quad (4.5)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del modo y  $k$  es el número de onda. Las condiciones de frontera en  $z = L$  nos proporcionan las frecuencias permitidas:

$$E_x(L,t) = 0 = \text{sen}(kL) = \text{sen}\left(\frac{\omega}{c}L\right) \Rightarrow \omega_m = c \frac{m\pi}{L}, m = 0,1,2,\dots \quad (4.6)$$

$V$  es el volumen efectivo de la cavidad (para este caso unidimensional  $V = L$ ) y  $q(t)$  es un factor dependiente del tiempo que tiene dimensiones de longitud; aquí  $q(t)$  actuará como posición canónica. El campo magnético en la cavidad será  $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{e}_y B_y(z,t)$ , con:

$$B_y(z,t) = \left( \frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \cos(kz) \quad (4.7)$$

donde  $q(t)$  es el momento canónico para una partícula de masa unitaria, es decir,  $p(t) = q(t)$ .

La energía clásica del campo (o Hamiltoniano) es:

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left[ \epsilon_0 E_x^2(z,t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z,t) \right] \quad (4.8)$$

Sustituyendo 4.5 y 4.7 en 4.8 se obtiene:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (4.9)$$

De donde se aprecia que un campo uní-dimensional y con una sola frecuencia es equivalente a un oscilador armónico de masa unitaria. Podemos reemplazar  $q$  y  $p$  por sus operadores equivalentes  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ . Estos operadores deben satisfacer la relación de conmutación canónica:  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ . Por lo que los campos eléctrico y magnético se tornan operadores, como lo establecen las siguientes relaciones:

$$\hat{E}_x(z,t) = \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{q}(t) \text{sen}(kz) \quad (4.10)$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \left( \frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left( \frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos(kz) \quad (4.11)$$

Y el Hamiltoniano se vuelve: 
$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (4.12)$$

Los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  son Hermitianos y, por tanto, corresponden a cantidades observables. Sin embargo, es conveniente introducir los operadores no Hermitianos de aniquilación ( $\hat{a}$ ) y creación ( $\hat{a}^+$ ) a través de las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{a}^+ &= (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{p} &= -i \left( \frac{\hbar\omega}{2} \right)^{1/2} (\hat{a} - \hat{a}^+) \\ \hat{q} &= \left( \frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^+) \end{aligned} \right. \quad (4.13)$$

Con lo que los operadores de campo eléctrico y magnético son:

$$\hat{E}_x(z, t) = E_0(\hat{a} + \hat{a}^+) \text{sen}(kz) \quad (4.14)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = B_0 \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) \quad , \quad (4.15)$$

donde  $E_0 = (\hbar\omega / \epsilon_0 V)^{1/2}$  y  $B_0 = (\mu_0 / k)(\epsilon_0 \hbar \omega^3 / V)^{1/2}$  representan respectivamente el campo eléctrico y magnético “por fotón”, aunque decir por fotón no es del todo correcto, ya que el promedio de estos campos para un número definido de fotones es cero. Los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^+$  satisfacen la relación de conmutación:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \quad (4.16)$$

Y como resultado el Hamiltoniano toma la forma:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.17)$$

En cuanto a la dependencia temporal, la ecuación de Heisenberg es:  $\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]$ ,  $\hat{O}$  es un operador arbitrario sin dependencia temporal explícita. Para el operador de aniquilación  $\hat{a}$ :

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] = \frac{i}{\hbar} \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] = i\omega(\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}) = i\omega[\hat{a}, \hat{a}^+] \hat{a} = -i\omega \hat{a} \quad (4.18)$$

Cuya solución es:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t} \quad (4.19)$$

De manera similar:

$$\hat{a}^+(t) = \hat{a}^+(0)e^{i\omega t} \quad (4.20)$$

El producto de operadores  $\hat{a}^+ \hat{a}$  tiene un significado especial y es llamado operador de número, el cual se denota  $\hat{n}$ . Haremos que  $|n\rangle$  denote el estado propio (eigen-estado) de energía del campo uní-modal con valor propio de energía  $E_n$  de forma que:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (4.21)$$

Si multiplicamos la ecuación 4.21 por  $\hat{a}^+$  podemos generar un nuevo valor propio de la ecuación

$$\hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{a}^+ \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^+ |n\rangle \quad (4.22)$$

Usando las relaciones de conmutación de la ecuación 4.16 podemos escribir esto como:

$$\begin{aligned} \hbar\omega \left( \hat{a}^+ (\hat{a}\hat{a}^+ - 1) + \frac{1}{2} \hat{a}^+ \right) |n\rangle &= \hbar\omega \left[ (\hat{a}^+ \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+) + \frac{1}{2} \hat{a}^+ \right] |n\rangle = \hbar\omega \left[ (\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\hat{a}^+ + \frac{1}{2} \hat{a}^+ \right] |n\rangle \\ &= \hbar\omega \left[ \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right] \hat{a}^+ |n\rangle - \hbar\omega \hat{a}^+ |n\rangle = E_n \hat{a}^+ |n\rangle \\ \Rightarrow \hbar\omega \left[ \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right] (\hat{a}^+ |n\rangle) &= E_n \hat{a}^+ |n\rangle + \hbar\omega \hat{a}^+ |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^+ |n\rangle) \quad , \quad (4.23) \end{aligned}$$

que es el problema de valores propios para el estado propio  $\hat{a}^+|n\rangle$  con valor propio de energía  $E_n + \hbar\omega$ . Vemos que  $\hat{a}^+$  crea un cuanto de energía  $\hbar\omega$ , por lo que podemos decir que un fotón de energía  $\hbar\omega$  fue creado por  $\hat{a}^+$ . De forma similar:

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle), \quad (4.24)$$

donde  $\hat{a}$  destruye o aniquila un cuanto de energía o un fotón. Sin embargo, debe haber un valor propio de energía mínimo, y que cumpla que  $E_0 > 0$ , con el correspondiente estado propio  $|0\rangle$  de forma que:

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) = 0 \quad (4.25)$$

Entonces: 
$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (4.26)$$

El problema de valores propios para el estado base es:

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle \quad (4.27)$$

De forma que el valor propio de menor energía es  $\hbar\omega/2$ . Como  $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ , los valores propios de la energía son:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Para el operador de número  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$  tenemos que:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (4.29)$$

Estos números de estado deben ser normalizados de acuerdo a la regla  $\langle n|n\rangle = 1$ . Para el estado  $\hat{a}|n\rangle$  tenemos que:

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle, \quad (4.30)$$

donde  $c_n$  es una constante. Si hacemos:

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}^+(\hat{a}|n\rangle) &= \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n \\ &= \langle n-1|c_n^*c_n|n-1\rangle = |c_n|^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

De donde:  $c_n = \sqrt{n}$ . Obtenido esto concluimos que:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (4.32)$$

De forma similar: 
$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (4.33)$$

Los estados de número  $|n\rangle$  pueden ser generados a partir del estado base  $|0\rangle$  por la acción repetida del operador de creación  $\hat{a}^+$ ,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (4.34)$$

Una característica final de los estados de número es que estados de número diferentes son ortogonales entre ellos:  $\langle n' | n \rangle = \delta_{n'n}$

Así, estos resultados nos permitirán poder expresar a los fotones en campos electromagnéticos como estados de número, sin tenemos que preocupar por su frecuencia y amplitud, solo por las posibles interacciones que creen o destruyan fotones y hagan que cambie el número de fotones en el campo.

## 4.2 Estados de número de los fotones

Al aplicar la representación de estados de número a campos de luz, podemos evitar la complicación de tratar de escribir una función de onda para los estados de fotones en términos de la coordenada de posición  $x$ , como usualmente se hace para osciladores de masa finita. Ahora podemos concentrarnos solamente en las propiedades del sistema descritas por el número de energía. Describimos la excitación del campo electromagnético cuantizado en términos del número de fotones excitados a una frecuencia angular  $\omega$ . El estado de número del fotón  $|n\rangle$  representa un campo cuantizado monocromático de frecuencia  $\omega$  que contiene  $n$  fotones. Los estados de número de fotones unimodales también son denominados *estados de Fock*.

En la representación de número de fotones, los operadores de creación y aniquilación corresponden a la creación y aniquilación de un fotón de frecuencia angular  $\omega$ , respectivamente. El estado base  $|0\rangle$  corresponde al vacío electromagnético y es denominado *estado del vacío*. El estado  $|n\rangle$  puede ser pensado como  $n$  fotones que han sido excitados desde el vacío. [21]

## 4.3 Fluctuaciones cuánticas de un campo unidimensional

El estado de número  $|n\rangle$  es un estado de energía bien definida (como se puede ver del desarrollo anterior), pero no es un estado de campo eléctrico bien definido ya que:

$$\langle n | \hat{E}_x(z, t) | n \rangle = E_0 \text{sen}(kz) [\langle n | \hat{a} | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle] = 0 \quad (4.35)$$

Es decir, el campo promedio es cero. Pero el promedio del cuadrado de este campo, que contribuye a la densidad de energía no es cero:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{E}_x^2(z, t) | n \rangle &= E_0^2 \text{sen}^2(kz) [\langle n | \hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle] \\ &= E_0^2 \text{sen}^2(kz) [\langle n | \hat{a}^{+2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle] = 2E_0^2 \text{sen}^2(kz) \left( n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Así, las fluctuaciones del campo eléctrico caracterizadas por la variancia:

$$\langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle = \langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2, \quad (4.37)$$

o por la desviación estándar  $\Delta E_x = \langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle^{1/2}$ , en ocasiones se refieren como la incertidumbre del campo. Para el estado de número  $|n\rangle$  tenemos:

$$\Delta E_x = \sqrt{2} E_0 \text{sen}(kz) \left( n + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \quad (4.38)$$

Notemos que para  $n = 0$ , el campo tiene fluctuaciones, llamadas fluctuaciones del vacío.



Por otra parte, los estados de número  $|n\rangle$  representan un estado del campo que contiene  $n$  fotones, además  $\hat{n}$  no conmuta con el campo eléctrico:

$$[\hat{n}, \hat{E}_x] = E_0 \text{sen}(kz)(\hat{a}^+ - \hat{a}) \quad (4.39)$$

En base a esto, se concluye que  $\hat{n}$  y  $\hat{E}_x$  son complementarios y obedecen la desigualdad:

$$\Delta n \Delta E_x \geq \frac{1}{2} E_0 |\text{sen}(kz)| \left| \langle \hat{a}^+ - \hat{a} \rangle \right| \quad (4.40)$$

Para un número de estado  $|n\rangle$ , el lado derecho se hace cero, pero también lo hace  $\Delta n$ . Así, si el campo fuera conocido con precisión, el número de fotones estaría indeterminado.

#### 4.4 Generación de luz (representada con estados de número) [29]

Ahora que ya hemos encontrado una forma más sencilla de representar los campos electromagnéticos, podemos dar una interpretación o explicación cuántica simple de cómo es que se lleva a cabo el proceso de conversión paramétrica descendente. Como hemos visto, cuando un cierto tipo de medio no lineal es bombeado por un cierto campo de frecuencia  $\omega_b$ , algunos fotones de ese campo son convertidos en pares de fotones idénticos a frecuencia  $\omega = \omega_b/2$  que se encuentran en el campo “señal” (saliente). Con esta información podemos construir un Hamiltoniano para este sistema:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+ \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^+ \hat{b} + i\hbar\chi^{(2)} (\hat{a}^2 \hat{b}^+ - \hat{a}^{+2} \hat{b}) \quad (4.41)$$

Donde el sub-índice  $b$  es el modo de bombeo y el  $a$  es el modo señal (convertido),  $\chi^{(2)}$  es la susceptibilidad no-lineal de segundo orden. La parte mas importante (en nuestro caso) de este Hamiltoniano es la que contiene el factor de  $\chi^{(2)}$  ya que nos dice que “existe la posibilidad de que un fotón de frecuencia  $\omega_b$  se cree a partir de la aniquilación de dos fotones de frecuencia  $\omega = \omega_b/2$  (la parte  $\hat{a}^2 \hat{b}^+$ ), o que la aniquilación de un fotón de frecuencia  $\omega_b$  de lugar a la creación de dos fotones de frecuencia  $\omega = \omega_b/2$  (la parte  $\hat{a}^{+2} \hat{b}$ )”; los otros términos de la expresión solo proporcionan información acerca del número de fotones que hay en cada modo. Introduciendo la “aproximación paramétrica”, donde se asume que el campo de bombeo es un campo clásico fuertemente coherente, podemos asumir que el campo de bombeo en un estado coherente tiene la forma  $|\beta e^{-i\omega_b t}\rangle$  y aproximar los operadores  $\hat{b}$  y  $\hat{b}^+$  por  $\beta e^{-i\omega_b t}$  y  $\beta^* e^{i\omega_b t}$ , respectivamente [21, 29]. Despreciando los términos constantes e irrelevantes, la aproximación paramétrica del Hamiltoniano (4.41) es:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^+ \hat{a} + i\hbar(\eta^* \hat{a}^2 e^{i\omega_b t} - \eta \hat{a}^{+2} e^{-i\omega_b t}) \quad (4.42)$$

Donde  $\eta = \chi^{(2)}\beta$ . Finalmente, transformando a la representación de interacción:

$$\hat{H}_I(t) = i\hbar(\eta^* \hat{a}^2 e^{i(\omega_b - 2\omega)t} - \eta \hat{a}^{+2} e^{-i(\omega_b - 2\omega)t}) \quad (4.43)$$

Que en general es dependiente del tiempo. Pero, en nuestro caso,  $\omega_b = 2\omega$ , por lo que:

$$\hat{H}_I = i\hbar(\eta^* \hat{a}^2 - \eta \hat{a}^{+2}) \quad (4.44)$$

Lo anterior nos permite generar luz “no-clásica” por procesos paramétricos de medios no-lineales caracterizados por una susceptibilidad no-lineal de segundo orden  $\chi^{(2)}$ . Asumiendo que el campo de bombeo puede ser cuantizado, podemos escribir el Hamiltoniano de interacción de una forma más sencilla:

$$\hat{H}_I \propto \chi^{(2)} a_b a_s^+ a_t^+ + \chi^{(2)} a_b^+ a_s a_t \quad (4.45)$$

El término que nos importa es el primero, ya que contiene a  $a_b$  que es el operador de aniquilación para fotones de bombeo y  $a_s^+$  y  $a_t^+$  son los operadores de creación de fotones señal y testigo, respectivamente. En el caso más simple, cuando los rayos de fotones señal y testigo están en el estado vacío, un solo fotón de bombeo, típicamente en el rango espectral ultravioleta, es convertido en dos fotones ópticos, uno en el rayo señal y otro en el testigo:

$$|1\rangle_b |0\rangle_s |0\rangle_t \Rightarrow a_b a_s^+ a_t^+ |1\rangle_b |0\rangle_s |0\rangle_t = |0\rangle_b |1\rangle_s |1\rangle_t \quad (4.46)$$

Como los modos señal y testigo estaban inicialmente en el vacío, el proceso es espontáneo. Notemos que los fotones producidos en los modos señal y testigo son asumidos como generados simultáneamente. Esta producción simultánea es la clave para las aplicaciones de estas fuentes paramétricas; sin embargo, se deben satisfacer algunas otras condiciones. La conservación de energía requiere que:

$$\hbar\omega_b = \hbar\omega_s + \hbar\omega_t \quad (4.47)$$

Si  $k_b$ ,  $k_s$  y  $k_t$  representan los números de onda respectivos, dentro del cristal se debe tener que:

$$\hbar k_b \approx \hbar k_s + \hbar k_t \quad (4.48)$$

El signo  $\approx$  aparece como resultado de la incertidumbre dada por el recíproco de la longitud del medio no lineal (Apéndice E, ecuación E33), esta condición es la *condición de acoplamiento de fase*.

Existen dos tipos de procesos SPDC. En el tipo I (el caso presentado en este trabajo experimental), los fotones señal y testigo tienen la misma polarización, la cual es ortogonal a la de bombeo. El Hamiltoniano de interacción para este proceso se puede escribir como:

$$\hat{H}_I = \hbar\eta(a_s^+ a_t^+ + a_s a_t) \quad (4.49)$$

donde la aproximación paramétrica se ha hecho, de forma que  $\eta \propto \chi^{(2)} E_b$ , y  $E_b$  es la amplitud del campo clásico coherente. La condición de acoplamiento de fase impone la restricción de que los fotones señal y testigo deben emerger del cristal en lados opuestos de conos concéntricos a la dirección del rayo de bombeo como se muestra en la figura 4.2. En el caso degenerado el cono señal se encima con el testigo, lo cual puede ser aprovechado para crear estados enredados en polarización.

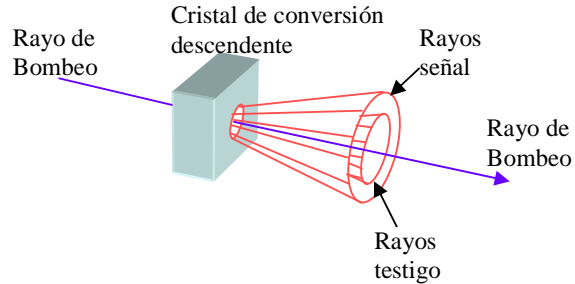


Fig.4.2. Conversión descendente tipo I. Los fotones del rayo de bombeo son convertidos en fotones señal y testigo que emergen del cristal a lo largo de diferentes direcciones. Los fotones emergentes tienen polarización idéntica opuesta a la de bombeo. Las posibles direcciones en que pueden emerger forman conos concéntricos.

Por otro lado, en la conversión descendente tipo II, los fotones señal y testigo tienen polarizaciones ortogonales. Debido a los efectos de birrefringencia, los fotones generados son emitidos a lo largo de dos conos, uno para la onda ordinaria (o) y otro para la onda extraordinaria (e) como se ve en la figura 4.3. La intersección de los conos provee los medios para generar estados de polarización enredada. El Hamiltoniano que describe esto es:

$$\hat{H}_I = \hbar\eta(a_{Vs}^+ a_{Ht}^+ + a_{Hs}^+ a_{Vt}^+) + C.h. \quad (4.50)$$

donde C.h. denota conjugado hermítico y donde los operadores  $a_{Vs}^+$ ,  $a_{Hs}^+$ ,  $a_{Vt}^+$  y  $a_{Ht}^+$  son los operadores de creación para fotones con polarización horizontal y vertical para los rayos señal y testigo.

Ahora, supongamos que el estado inicial de los modos señal y testigo se representan por  $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$ , este vector de estado evoluciona de acuerdo a la ecuación:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{it\hat{H}_I}{\hbar}} |\Psi_0\rangle \quad (4.51)$$

Esto es posible expandirlo, ya que  $\hat{H}_I$  no tiene dependencia explícita del tiempo, de modo que:

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left[ 1 - \frac{it\hat{H}_I}{\hbar} + \frac{1}{2} \left( \frac{-it\hat{H}_I}{\hbar} \right)^2 \right] |\Psi_0\rangle \quad (4.52)$$

que es una expansión de segundo orden en el tiempo. Considerando la conversión tipo I con  $|\Psi_0\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_t$  tendremos que:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\approx \left[ 1 - \frac{it\hat{H}_I}{\hbar} + \frac{1}{2} \left( \frac{-it\hat{H}_I}{\hbar} \right)^2 \right] |0\rangle_s |0\rangle_t = \left[ 1 - \frac{it}{\hbar} \hbar \eta |1\rangle_s |1\rangle_t - \frac{t^2}{\hbar^2} (\hbar \eta \hat{H}_I |1\rangle_s |1\rangle_t) \right] \\ &= \left[ 1 - i\mu |1\rangle_s |1\rangle_t - \frac{t^2 \eta}{\hbar} (\hbar \eta (a_s^+ a_t^+ + a_s a_t) |1\rangle_s |1\rangle_t) \right] = \left[ 1 - i\mu |1\rangle_s |1\rangle_t - \frac{\mu^2}{2} (|2\rangle_s |2\rangle_t + |0\rangle_s |0\rangle_t) \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Donde  $\mu = \eta t$ . Este vector de estado se puede normalizar a primer orden en  $\mu$  y se puede despreciar el término de orden  $\mu^2$  del estado  $|2\rangle_s |2\rangle_t$ . Quedando:

$$|\Psi(t)\rangle = \left( 1 - \frac{\mu^2}{2} \right) |0\rangle_s |0\rangle_t - i\mu |1\rangle_s |1\rangle_t \quad (4.53)$$

Finalmente, definimos los estados de polarización vertical y horizontal del vacío y de un solo fotón como:  $|0\rangle = |0\rangle_V |0\rangle_H$ ,  $|V\rangle = |1\rangle_V |0\rangle_H$ , y  $|H\rangle = |0\rangle_V |1\rangle_H$ , de forma que podemos escribir la ecuación 4.53 como:

$$|\Psi(t)\rangle = \left( 1 - \frac{\mu^2}{2} \right) |0\rangle_s |0\rangle_t - i\mu (|V\rangle_s |H\rangle_t + |H\rangle_s |V\rangle_t) \quad (4.54)$$

Cuando se normaliza el estado en el segundo término de la ecuación se obtiene:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle_s |H\rangle_t + |H\rangle_s |V\rangle_t) \quad (4.55)$$

que es uno de los miembros de un conjunto de cuatro estados, conocidos como estados de Bell, que pueden ser deducidos de la forma anterior, pero considerando todas las combinaciones de polarizaciones que se pueden obtener de la conversión. El conjunto completo de estados de Bell es:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2) \quad (4.56)$$

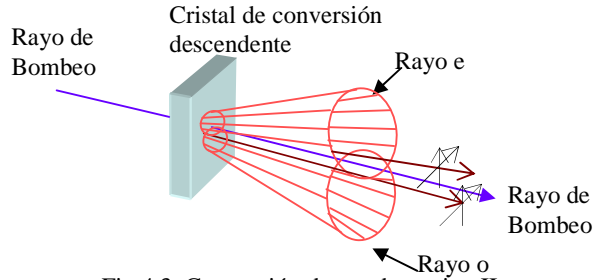


Fig.4.3. Conversión descendente tipo II.

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |H\rangle_1 |H\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |V\rangle_2 \right) \quad (4.57)$$

Estas representaciones son las que vamos a utilizar para dar fundamento teórico a nuestro experimento.

## 4.5 Estados con polarización enredada [30]

Con lo hasta aquí expuesto, se dispone de la teoría fundamental necesaria para poder construir un sistema experimental que cree fotones de polarización enredada y nos permita llevar a cabo una prueba de desigualdad de Bell.

Consideremos construir un sistema mecánico cuántico que consista de dos fotones (señal y testigo). Por las características de la conversión en un cristal birrefringente BBO, los fotones viajan en diferentes direcciones, por lo que pueden ser tratados como partículas distinguibles. Como vimos, para alcanzar nuestro objetivo, estos fotones deben tener el estado de polarización:

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |V\rangle_s |V\rangle_t + |H\rangle_s |H\rangle_t \right) \quad (4.58)$$

En nuestro caso, tomaremos nuestro sistema de referencia como la mesa de trabajo del laboratorio. El estado no puede ser factorizado en un simple producto de estados señal y testigo, es decir:  $|\Psi_{EPR}\rangle \neq |A\rangle_s |B\rangle_t$  para cualquier selección de  $|A\rangle_s$  y  $|B\rangle_t$ . Esta no factoribilidad significa que el estado de una partícula no puede ser especificado sin hacer referencia a la otra. Por lo que se dice que dichas partículas están “enredadas”.

Si se miden las polarizaciones de los fotones señal y testigo en la base  $H, V$  del laboratorio hay dos posibles resultados: ambos fotones verticales o ambos horizontales. Cada caso ocurre la mitad del tiempo. Para tener más generalidad, podemos medir las polarizaciones con polarizadores rotados un ángulo  $\theta_1$  respecto al laboratorio. Por lo que se usara la base rotada:

$$\left. \begin{aligned} |V_{\theta_1}\rangle &= \cos \theta_1 |V\rangle - \sin \theta_1 |H\rangle \\ |H_{\theta_1}\rangle &= \sin \theta_1 |V\rangle + \cos \theta_1 |H\rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

donde  $|V_{\theta_1}\rangle$  describe un estado con polarización rotada un ángulo  $\theta_1$  de la vertical, mientras que  $|H_{\theta_1}\rangle$  lo es de la horizontal. En esta base el estado enredado es:

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |V_{\theta_1}\rangle_s |V_{\theta_1}\rangle_t + |H_{\theta_1}\rangle_s |H_{\theta_1}\rangle_t \right) \quad (4.60)$$

Si se hace una medición en esta base rotada, se obtiene el mismo resultado, la mitad de las veces ambos fotones son  $|V_{\theta_1}\rangle$  y la mitad ambos son  $|H_{\theta_1}\rangle$ . Conociendo esto, podemos medir la polarización señal e inferir con certeza la polarización testigo. Esta es la situación descrita por EPR. Debe notarse que hay una relación de incertidumbre entre polarizaciones en diferentes bases, conociendo la polarización del fotón en la base  $V_{0^\circ}, H_{0^\circ}$  implica una completa incertidumbre de su polarización en la base  $V_{45^\circ}, H_{45^\circ}$ .

## 4.6 Generación de estados con polarización enredada

Con un cristal BBO diseñado para acoplamiento de fase tipo I, lo cual significa que los fotones señal y testigo emerjan con la misma polarización, que es ortogonal a la del fotón de bombeo y en lados opuestos de un cono, se puede construir un sistema que produzca fotones enredados. Cada cristal BBO solo puede soportar conversión descendente de un fotón de bombeo con cierta polarización, las otras polarizaciones pasan a través del cristal sin ser afectadas. Usando dos cristales, uno con su eje óptico rotado  $90^\circ$  respecto del eje óptico del otro, podemos hacer que cualquiera de dos polarizaciones de bombeo ( $V$  o  $H$ ) se puedan convertir de acuerdo a las reglas:

$$|V\rangle_b = |H\rangle_s |H\rangle_t \quad (4.61)$$

$$|H\rangle_b = e^{i\Delta} |V\rangle_s |V\rangle_t \quad (4.62)$$

donde  $\Delta$  es una fase debido a la dispersión y birrefringencia en los cristales; otra forma de interpretarlo es el desfase espacial o separación entre los dos conos, ya que uno es producido por un cristal que esta una cierta distancia antes del otro cristal que produce el otro cono. La geometría del arreglo es mostrada en la figura 4.4.

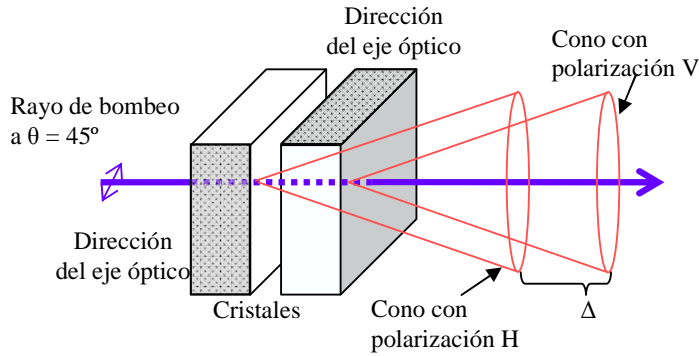


Fig.4.4. Arreglo geométrico de una fuente de fotones enredados por conversión descendente con dos cristales.

La figura 4.4 nos muestra que la luz de bombeo polarizada verticalmente que pasa a través del arreglo se puede convertir en el primer cristal, mientras que la luz polarizada horizontalmente se convierte en el segundo. Entonces, un fotón de bombeo polarizado a  $45^\circ$  tiene las mismas posibilidades de convertirse en cualquiera de los dos cristales. Si consideramos a los cristales como idealmente delgados (láminas superpuestas espacialmente), los fotones producidos en el primer cristal no serán distinguibles ni espacialmente ni temporalmente de los producidos en el segundo, en este caso  $\Delta = 0$  y los conos estarán empalmados, por lo que se tendrá directamente el estado 4.60. Sin embargo, cuando los cristales tienen un ancho y uno está inmediatamente delante del otro, los conos de polarización horizontal y vertical no estarán empalmados y los dos estados podrán ser etiquetados espacialmente.

Para crear un estado enredado, el rayo (láser) de bombeo debe estar linealmente polarizado a un ángulo  $\theta_l$  de la vertical (teóricamente  $45^\circ$ ) y con un desfase en una de las componentes de polarización de  $\phi_l$  (lo cual se puede hacer con un compensador de fases Babinet). Los fotones de bombeo (del láser) antes de alcanzar los cristales estarán en el estado:

$$|\Psi_{bombeo}\rangle = \cos \theta_l |V\rangle_b + e^{i\phi_l} \sin \theta_l |H\rangle_b \quad (4.63)$$

Así, cuando estos fotones llegan al cristal, se convierten de acuerdo a las reglas 4.61 y 4.62, por lo que los fotones convertidos emergen en el estado:

$$|\Psi_{Conv}\rangle = \cos \theta_l |H\rangle_s |H\rangle_t + e^{i\phi} \sin \theta_l |V\rangle_s |V\rangle_t \quad (4.64)$$

donde  $\phi = \phi_l + \Delta$  es la diferencia de fase total entre las dos componentes de polarización, es decir, la fase provocada por los cristales más la provocada por el compensador Babinet; vemos que en teoría, si el desfase del Babinet es opuesto al de los cristales, podemos hacer que  $\phi = 0$  y tener algo que potencialmente se puede llevar a ser como 4.60.

Colocando polarizadores rotados a ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en las trayectorias señal y testigo, respectivamente, podemos medir la polarización de los fotones convertidos. Para un par producido en el estado  $|\Psi_{Conv}\rangle$ , la probabilidad de detectar una coincidencia (que en ambas trayectorias se detecten fotones al mismo tiempo) es:

$$P_{VV}(\theta_1, \theta_2) = \left| \langle V_{\theta_1} |_s \langle V_{\theta_2} |_t | \Psi_{Conv} \rangle \right|^2 \quad (4.65)$$

Los subíndices  $VV$  en  $P$  indican el resultado de la medición en  $V_{\theta_1}V_{\theta_2}$ , ambos fotones verticales en las bases de sus respectivos polarizadores. En general, para cualquier par de ángulos de polarización  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , hay cuatro posibles resultados (de acuerdo a como se convierte y miden los fotones)  $V_{\theta_1}V_{\theta_2}$ ,  $V_{\theta_1}H_{\theta_2}$ ,  $H_{\theta_1}V_{\theta_2}$ , y  $H_{\theta_1}H_{\theta_2}$ , indicados por  $VV$ ,  $VH$ ,  $HV$  y  $HH$ , respectivamente:

$$P_{VH}(\theta_1, \theta_2) = \left| \langle V_{\theta_1} |_s \langle H_{\theta_2} |_t | \Psi_{Conv} \rangle \right|^2 \quad (4.66)$$

$$P_{HV}(\theta_1, \theta_2) = \left| \langle H_{\theta_1} |_s \langle V_{\theta_2} |_t | \Psi_{Conv} \rangle \right|^2 \quad (4.67)$$

$$P_{HH}(\theta_1, \theta_2) = \left| \langle H_{\theta_1} |_s \langle H_{\theta_2} |_t | \Psi_{Conv} \rangle \right|^2 \quad (4.68)$$

Usando la base 4.59, encontramos que:

$$\begin{aligned} P_{VV}(\theta_1, \theta_2) &= \left| \langle V_{\theta_1} |_s \left[ \cos \theta_2 \langle V |_t - \sin \theta_2 \langle H |_t \right] \left[ \cos \theta_1 | H \rangle_s | H \rangle_t + e^{i\phi} \sin \theta_1 | V \rangle_s | V \rangle_t \right] \right|^2 \\ &= \left| \langle V_{\theta_1} |_s \left[ \cos \theta_2 \sin \theta_1 e^{i\phi} | V \rangle_s - \sin \theta_2 \cos \theta_1 | H \rangle_s \right] \right|^2 \\ &= \left| \left[ \cos \theta_1 \langle V |_s - \sin \theta_1 \langle H |_s \right] \left[ \cos \theta_2 \sin \theta_1 e^{i\phi} | V \rangle_s - \sin \theta_2 \cos \theta_1 | H \rangle_s \right] \right|^2 \\ &= \left| \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_1 e^{i\phi} + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \right|^2 \\ &= (\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad + (\cos \theta_1)(\sin \theta_1)(\cos \theta_2)(\sin \theta_2)(\cos \theta_1)(\sin \theta_1)(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \end{aligned}$$

Como:  $(\cos \theta_1)(\sin \theta_1) = \frac{\sin(2\theta_1)}{2}$  y  $(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = 2 \cos \phi$ , entonces

$$\begin{aligned} P_{VV}(\theta_1, \theta_2) &= (\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \sin(2\theta_1) (\cos \phi) \end{aligned} \quad (4.69)$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} P_{VH}(\theta_1, \theta_2) &= (\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \sin(2\theta_1) (\cos \phi) \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} P_{HV}(\theta_1, \theta_2) &= (\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \sin(2\theta_1) (\cos \phi) \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} P_{HH}(\theta_1, \theta_2) &= (\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin(2\theta_1) \sin(2\theta_2) \sin(2\theta_1) (\cos \phi) \end{aligned} \quad (4.72)$$

De estas ecuaciones (4.69-4.72) podemos deducir algo que nos simplificara mucho el trabajo. Si tomamos  $P_{VV}(\theta_1, \theta_2)$  y hacemos que la rotación del polarizador en la trayectoria testigo sea  $\theta_2 + \pi/2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} P_{VV}\left(\theta_1, \theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) &= (\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2)\text{sen}(2\theta_1)(\cos \phi) = P_{VH}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.73)$$

De forma similar, si cambiamos  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi/2$ :

$$\begin{aligned} P_{VV}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}, \theta_2\right) &= (\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2)\text{sen}(2\theta_1)(\cos \phi) = P_{HV}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Si cambiamos  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 + \pi/2$  y  $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + \pi/2$ :

$$\begin{aligned} P_{VV}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}, \theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) &= (\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2)(\sin^2 \theta_1) + (\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2)(\cos^2 \theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2)\text{sen}(2\theta_1)(\cos \phi) = P_{HH}(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Esto nos ayudará más adelante, ya que nos permite trabajar cualquier tipo de las cuatro posibles mediciones ( $V_{\theta_1}V_{\theta_2}$ ,  $V_{\theta_1}H_{\theta_2}$ ,  $H_{\theta_1}V_{\theta_2}$ , y  $H_{\theta_1}H_{\theta_2}$ ) solamente con la expresión de  $P_{VV}$ , siempre y cuando hagamos la transformación (o rotación) de los ángulos de polarización necesaria, es decir:

$V_{\theta_1}V_{\theta_2}$  se midiran en la base de medición  $(\theta_1, \theta_2)$

$V_{\theta_1}H_{\theta_2}$  se midiran en la base de medición  $(\theta_1, \theta_2 + \pi/2)$  que denotaremos  $(\theta_1, \theta_{2\perp})$

$H_{\theta_1}V_{\theta_2}$  se midiran en la base de medición  $(\theta_1 + \pi/2, \theta_2)$  que denotaremos  $(\theta_{1\perp}, \theta_2)$

$H_{\theta_1}H_{\theta_2}$  se midiran en la base de medición  $(\theta_1 + \pi/2, \theta_2 + \pi/2)$  que denotaremos  $(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp})$

Dispuesto esto, a partir del siguiente capítulo solo se utilizará  $P_{VV}$ , y esta notación acordada podrá referirse a cualquier probabilidad de detectar una coincidencia.

Antes de continuar, otra característica que podemos ver en las ecuaciones 4.69 a 4.72 es cuando tenemos el caso especial  $|\Psi_{Conv}\rangle = |\Psi_{EPR}\rangle$ , es decir, cuando se tiene que  $\theta_1 = \pi/4$  y  $\phi = 0$ , en dicho caso se tiene que:

$$\begin{aligned} P_{VV}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}(\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2) + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2) + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2) \\ &= \frac{1}{2} \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} P_{VH}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}(\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2) + (\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2) - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} P_{HV}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2) + \frac{1}{2}(\cos^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2) - \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta_1)\text{sen}(2\theta_2) \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
P_{HH}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_1)(\sin^2 \theta_2) + \frac{1}{2}(\cos^2 \theta_1)(\cos^2 \theta_2) + \frac{1}{4}\sin(2\theta_1)\sin(2\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Este conjunto de cuatro ecuaciones es el mismo que el de las ecuaciones deducidas intuitivamente, de acuerdo al marco teórico de la mecánica cuántica, para la probabilidad de coincidencia 2.22-2.25, por lo que hasta ahora todo es congruente.

El último término en las ecuaciones 4.69–4.72 es un término que toma en cuenta la interferencia entre las partes  $H,H$  y  $V,V$  del estado. La  $\phi$  es, a través de su dependencia con  $\Delta$ , una función de la longitud de onda del fotón de bombeo, la longitud de onda del fotón señal y el ángulo de bombeo, así como de las características del cristal. Como el láser tiene un ancho de banda finito y los fotones son colectados sobre un ángulo sólido finito y rango de longitud de onda finito, se colectaran fotones sobre un rango de  $\phi$ ; para tomar en cuenta esto se reemplaza el  $\cos \phi$  por su promedio  $\langle \cos \phi \rangle = \cos \phi_m$

En nuestro experimento, se escogerá un intervalo de tiempo  $T$  para la adquisición de datos (100s) y con un dispositivo se medirán el número de coincidencias  $N(\theta_1, \theta_2)$  durante dicho intervalo. Asumiendo que se tiene un flujo constante de pares de fotones, las coincidencias colectadas serán:

$$N(\theta_1, \theta_2) = A[P_{VV}(\theta_1, \theta_2)] + C \tag{4.80}$$

$$N(\theta_1, \theta_{2\perp}) = A[P_{VV}(\theta_1, \theta_{2\perp})] + C \tag{4.81}$$

$$N(\theta_{1\perp}, \theta_2) = A[P_{VV}(\theta_{1\perp}, \theta_2)] + C \tag{4.82}$$

$$N(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp}) = A[P_{VV}(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp})] + C \tag{4.83}$$

En todas estas ecuaciones  $A$  y  $C$  tiene el mismo valor,  $A$  es el número total de fotones enredados y  $C$  es una compensación debida a imperfecciones de los polarizadores y a la alineación de los cristales. Esto es necesario ya que se observarán algunas coincidencias cuando los polarizadores estén colocados a  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$  (a lo que denominaremos “ruido”).

Para crear un estado  $|\Psi_{EPR}\rangle$  o algo parecido a él, ajustamos los parámetros que determinan la polarización y desfase con que llega el láser de bombeo a los cristales. Primero, se debe ajustar  $\theta_l$  para igualar el número de coincidencias de los casos  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ , es decir, para que haya igual número de pares en el estado  $V_{\theta_l}V_{\theta_2}$  y en el  $H_{\theta_l}H_{\theta_2}$  de nuestro sistema. Después se ajusta  $\phi_l$  para maximizar el estado  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , es decir, obtener el máximo número de coincidencias y que sea equiparable a  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ .

Una idea de lo “puro” del estado enredado la podemos encontrar midiendo  $N(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 90^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 90^\circ)$  y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ . Usando el modelo dado por la ecuación 4.80, encontramos que:

$$C = N(0^\circ, 90^\circ) \tag{4.84}$$

$$A = N(0^\circ, 0^\circ) + N(90^\circ, 90^\circ) - 2C \tag{4.85}$$

$$\tan^2 \theta_l = \frac{N(0^\circ, 0^\circ) - C}{N(90^\circ, 90^\circ) - C} \tag{4.86}$$

$$\cos \phi_m = \frac{1}{\sin 2\theta_l} \left( 4 \frac{N(45^\circ, 45^\circ) - C}{A} - 1 \right) \tag{4.87}$$

El caso ideal, es decir un estado  $|\Psi_{EPR}\rangle$ , se da cuando  $\theta_l = 45^\circ$  (lo que implica que, de la ecuación 4.86,  $N(0^\circ, 0^\circ) = N(90^\circ, 90^\circ)$ ), cuando  $N(0^\circ, 90^\circ) = 0$  y cuando  $\cos \phi_m = 1$  (lo que implica que  $N(45^\circ, 45^\circ) = N(0^\circ, 0^\circ) = N(90^\circ, 90^\circ)$ ).



Para encontrar las probabilidades  $P$  que sirven para calcular  $E$  (ver ecuación 2.21 o 2.35), son necesarios cuatro valores de  $N$ , específicamente  $P_{VV}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_1, \theta_2) / N_{Tot}$ ,  $P_{VH}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_1, \theta_{2\perp}) / N_{Tot}$ ,  $P_{HV}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_{1\perp}, \theta_2) / N_{Tot}$  y  $P_{HH}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp}) / N_{Tot}$ , donde  $N_{Tot} = N(\theta_1, \theta_2) + N(\theta_{1\perp}, \theta_2) + N(\theta_1, \theta_{2\perp}) + N(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp})$  es el número de pares detectados. Así, la medición de  $E$  requiere contar coincidencias por intervalos de tiempo iguales con los polarizadores colocados de cuatro diferentes formas. Al medir las probabilidades de esta manera hemos hecho la suposición de que el flujo de pares de fotones es el mismo en cada intervalo de tiempo y no depende de la colocación de los polarizadores. Esta suposición es razonable, pero crea algunas dudas sobre su veracidad en nuestra prueba experimental; sin embargo, para los propósitos de nuestro trabajo, esta suposición es plausible según [30].

La cantidad  $E(\theta_1, \theta_2)$  que requiere de mediciones de varias  $N$ 's estará dada por:

$$E(\theta_1, \theta_2) = \frac{N(\theta_1, \theta_2) + N(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp}) - N(\theta_1, \theta_{2\perp}) - N(\theta_{1\perp}, \theta_2)}{N(\theta_1, \theta_2) + N(\theta_{1\perp}, \theta_2) + N(\theta_1, \theta_{2\perp}) + N(\theta_{1\perp}, \theta_{2\perp})} \quad (4.88)$$

Por lo que  $S$  estará dada por:

$$S \equiv E(\theta_1, \theta_2) - E(\theta_1, \theta_2') + E(\theta_1', \theta_2) + E(\theta_1', \theta_2') \quad (4.89)$$

Que requiere de 16 mediciones. Para estar seguros del resultado que arroje esta ecuación, debemos calcular la incertidumbre estadística. La incertidumbre de la  $i$ -ésima medición  $N_i$  es  $\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i}$ , y la incertidumbre de la cantidad  $S$  será:

$$\sigma_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} \left( \sigma_{N_i} \frac{\partial S}{\partial N_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} N_i \left( \frac{\partial S}{\partial N_i} \right)^2} \quad (4.90)$$

La sumatoria contiene un gran número de términos, ya que cada  $E$  está compuesta por cuatro  $N$ 's e implica la derivación de una división, por lo que es recomendable evaluar esta cantidad con la ayuda de una computadora (Apéndice H).

Por otra parte, en la parte final de la sección 2.2, vimos que los ángulos  $\theta = \pm 22.5^\circ$  y  $\theta = \pm 67.5^\circ$  (que es similar a tener  $\theta = 67.5^\circ$  y  $\theta = (67.5^\circ + 45^\circ) = 112.5^\circ$ , ver figura 2.17) son los óptimos para construir un conjunto de funciones de correlación ( $E(\theta_1, \theta_2)$ ) que violen la desigualdad de Bell. Si escogemos el conjunto de ángulos de medición:  $E(-45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $E(0^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $E(-45^\circ, 22.5^\circ)$  y  $E(0^\circ, 22.5^\circ)$ , según la ecuación 4.88, tendremos que realizar las mediciones de coincidencias en el conjunto de ángulos:  $N(-45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 67.5^\circ)$ , y  $N(90^\circ, 112.5^\circ)$ . Según la teoría vista en los últimos 3 capítulos, estos datos deben generarnos, por efecto de la ecuación 4.89, un valor de  $S$  que viole la desigualdad de Bell.

A partir de las ecuaciones 4.84 a 4.89, y con las ecuaciones 4.69 a 4.72, se puede crear una simulación computarizada que nos genere los resultados  $S$ ,  $\theta_l$ ,  $\phi_m$  y gráficas descriptivas del fenómeno que debemos esperar dependiendo del número de coincidencias que se obtengan al medir  $N(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 90^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 90^\circ)$  y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ .

Ahora, con lo visto en los capítulos 2, 3 y 4, ya contamos con la herramienta teórica fundamental necesaria para diseñar, trabajar, manejar y dar interpretación al experimento que realizamos, así como a los resultados que obtuvimos, lo cual describimos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Realización experimental

### 5.1 Simulación computarizada de datos

Al final del capítulo 4 mencionamos que, a partir de las ecuaciones obtenidas 4.69 a 4.72 y 4.84 a 4.89, era posible construir una simulación computarizada que nos permitiera conocer o tener idea del valor del parámetro de Bell (S) con datos obtenidos de nuestro experimento. Esto lo hicimos con el fin de no tener que realizar las 16 mediciones necesarias para calcular el parámetro y, así, disminuir el tiempo de trabajo.

El objetivo del programa es, a partir de los datos  $N(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 90^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 90^\circ)$  y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , obtener la predicción teórica del número de coincidencias para cualquier combinación de ángulos de los polarizadores, esta información está contenida en la ecuación 4.69 ( $P_{VV}(\alpha, \beta)$ ) para cualquier combinación de ángulos. En nuestro caso, la utilizaremos para generar las predicciones teóricas de las coincidencias para los casos:  $P_{VV}(0^\circ, \beta)$ ,  $P_{VV}(45^\circ, \beta)$ ,  $P_{VV}(90^\circ, \beta)$ , y  $P_{VV}(135^\circ, \beta)$  (que es lo mismo que  $P_{VV}(45^\circ, \beta)$ ), donde  $\beta$  varía de  $-22.5^\circ$  a  $180^\circ$ . La simulación de estas ecuaciones la hicimos en MATLAB r2006a, el código del programa se muestra a continuación:

```
N00= ###; -----* Número de coincidencias registrado para  $N(0^\circ, 0^\circ)$ *
N9090= ###; -----* Número de coincidencias registrado para  $N(90^\circ, 90^\circ)$ *
N090= ###; -----* Número de coincidencias registrado para  $N(0^\circ, 90^\circ)$ *
N4545= ###; -----* Número de coincidencias registrado para  $N(45^\circ, 45^\circ)$ *
C=N090; -----* Cálculo de C, ec. 4.84*
A=N00+N9090-2*C; -----* Cálculo de A, ec. 4.85*
o=atan(sqrt((N00-C)/(N9090-C)))*(180/pi); -----* Cálculo de  $\theta$ , ec. 4.86*
f=acos(1/(sin(2*o*(pi/180))*((4*(N4545-C)/A)-1)))*(180/pi); -----* Cálculo de  $\phi_m$ , ec. 4.87*
a0=0; -----* Definición de la variable que representará  $\alpha = 0^\circ$ *
a1=45; -----* Definición de la variable que representará  $\alpha = 45^\circ$ *
a2=90; -----* Definición de la variable que representará  $\alpha = 90^\circ$ *
a3=135; -----* Definición de la variable que representará  $\alpha = 135^\circ$ *
a4=-45; -----* Definición de la variable que representará  $\alpha = -45^\circ$ *
b=-22.5:0.5:180; -----* Rango en que variará  $\beta$ , de  $-22.5^\circ$  a  $180^\circ$ *

y=A*((sin(a0*(pi/180)).^2)*(sin(b*(pi/180)).^2)*(cos(o*(pi/180)).^2)+(cos(a0*(pi/180)).^2)*(cos(b*(pi/180)).^2)*
(sin(o*(pi/180)).^2)+(1/4)*sin(2*a0*(pi/180))*sin(2*b*(pi/180))*sin(2*o*(pi/180))*cos(f*(pi/180))+C;
-----* Ecuación que nos da el número de coincidencias  $N(0^\circ, \beta)$ *

y1=A*((sin(a1*(pi/180)).^2)*(sin(b*(pi/180)).^2)*(cos(o*(pi/180)).^2)+(cos(a1*(pi/180)).^2)*(cos(b*(pi/180)).^2)*
(sin(o*(pi/180)).^2)+(1/4)*sin(2*a1*(pi/180))*sin(2*b*(pi/180))*sin(2*o*(pi/180))*cos(f*(pi/180))+C;
-----* Ecuación que nos da el número de coincidencias  $N(45^\circ, \beta)$ *

y2=A*((sin(a2*(pi/180)).^2)*(sin(b*(pi/180)).^2)*(cos(o*(pi/180)).^2)+(cos(a2*(pi/180)).^2)*(cos(b*(pi/180)).^2)*
(sin(o*(pi/180)).^2)+(1/4)*sin(2*a2*(pi/180))*sin(2*b*(pi/180))*sin(2*o*(pi/180))*cos(f*(pi/180))+C;
-----* Ecuación que nos da el número de coincidencias  $N(90^\circ, \beta)$ *

y3=A*((sin(a3*(pi/180)).^2)*(sin(b*(pi/180)).^2)*(cos(o*(pi/180)).^2)+(cos(a3*(pi/180)).^2)*(cos(b*(pi/180)).^2)*
(sin(o*(pi/180)).^2)+(1/4)*sin(2*a3*(pi/180))*sin(2*b*(pi/180))*sin(2*o*(pi/180))*cos(f*(pi/180))+C;
-----* Ecuación que nos da el número de coincidencias  $N(135^\circ, \beta)$ *

y4=A*((sin(a4*(pi/180)).^2)*(sin(b*(pi/180)).^2)*(cos(o*(pi/180)).^2)+(cos(a4*(pi/180)).^2)*(cos(b*(pi/180)).^2)*
(sin(o*(pi/180)).^2)+(1/4)*sin(2*a4*(pi/180))*sin(2*b*(pi/180))*sin(2*o*(pi/180))*cos(f*(pi/180))+C;
-----* Ecuación que nos da el número de coincidencias  $N(-45^\circ, \beta)$ *
```

plot(b,y,b,y1,b,y2,b,y3) -----\*Comando que gráfica las cuatro ecuaciones anteriores contra  $\beta$ \*

\*Calculo de  $E(-45,-22.5)$ , según la ec. 4.88\*

$$E1=(y4(1,1)+y1(1,181)-y4(1,181)-y1(1,1))/(y4(1,1)+y1(1,181)+y4(1,181)+y1(1,1));$$

\*Calculo de  $E(-45,22.5)$ \*

$$E2=(y4(1,91)+y1(1,271)-y4(1,271)-y1(1,91))/(y4(1,91)+y1(1,271)+y4(1,271)+y1(1,91));$$

\*Calculo de  $E(0,-22.5)$ \*

$$E3=(y(1,1)+y2(1,181)-y(1,181)-y2(1,1))/(y(1,1)+y2(1,181)+y(1,181)+y2(1,1));$$

\*Calculo de  $E(0,22.5)$ \*

$$E4=(y(1,91)+y2(1,271)-y(1,271)-y2(1,91))/(y(1,91)+y2(1,271)+y(1,271)+y2(1,91));$$

\*Calculo de  $S$ , ec. 4.89\*

$$S=E1-E2+E3+E4;$$

Como podemos ver, este programa nos genera información acerca de  $C$ ,  $A$ ,  $\theta_1$ ,  $\phi_m$ ,  $E$  y  $S$ , parámetros que son muy útiles para saber si nuestro sistema experimental esta bien colocado y viola la desigualdad de Bell. Como prueba del programa, veamos el caso ideal en el que  $N(0^\circ,0^\circ) = N(90^\circ,90^\circ) = N(45^\circ,45^\circ) = 300$  coincidencias (por ejemplo), y  $N(0^\circ,90^\circ) = 0$  coincidencias. Las gráficas generadas por el programa son las siguientes (figura 5.1).

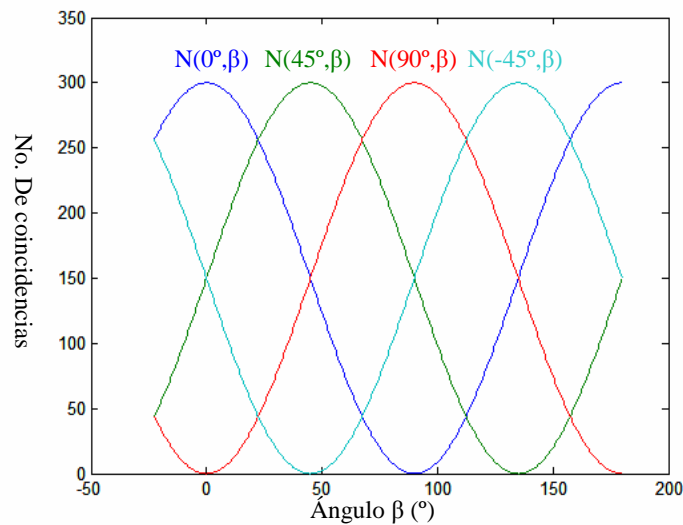


Fig. 5.1. Gráficas generadas por la simulación para el caso ideal de enredamiento EPR.

En dicho caso el programa nos informa que:  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\phi_m = 0^\circ$ , y  $S = 2.8284 = 2\sqrt{2}$ , que son valores que están de acuerdo con lo visto en los capítulos 2 y 4.

Pero si el número de pares de fotones verticales ( $N(0^\circ,0^\circ) = 400$ ) es distinto al número de pares de fotones horizontales ( $N(90^\circ,90^\circ) = 200$ ), se tiene un “ruido” alto ( $N(0^\circ,90^\circ) = 50$ ) y el caso  $N(45^\circ,45^\circ)$  tiene un número de coincidencias muy pobre ( $N(45^\circ,45^\circ) = 100$ ) el programa nos genera las gráficas mostradas en la figura 5.2, y nos proporciona los resultados:  $\theta_1 = 56.78^\circ$ ,  $\phi_m = 130.9^\circ$ , y  $S = 0.4041$ . En este caso, la simulación nos dice que la polarización de bombeo no es la adecuada, y la eliminación del defasamiento de los conos de fotones infrarrojos es prácticamente incorrecta, por lo que violar la desigualdad de Bell es imposible con este arreglo.

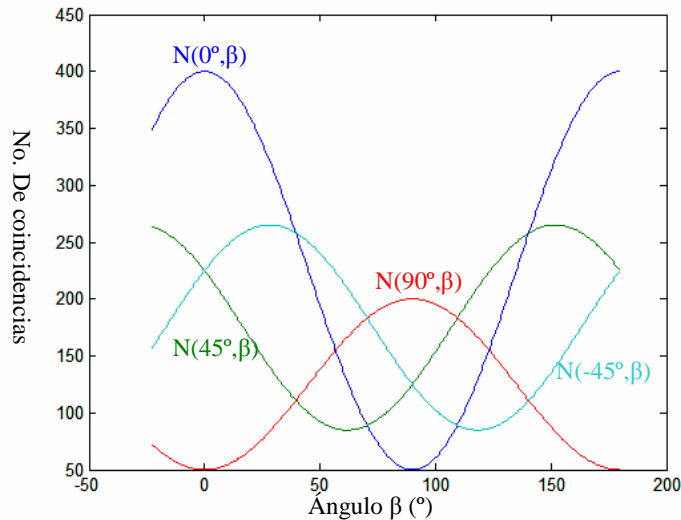


Fig. 5.2. Gráficas generadas por la simulación para un caso no ajustado.

En base a estos dos ejemplos, podemos decir que esta simulación nos será de utilidad para determinar si un cierto arreglo o ajuste de parámetros en el montaje experimental nos lleva a violar la desigualdad de Bell.

## 5.2 Primer montaje experimental

En esta sección presentamos y describimos la forma en que se monto el arreglo experimental con base en el desarrollo teórico realizado en la sección 4.6. Además, explicamos paso a paso la forma en que procedimos y la razón por la cual decidimos colocar los elementos del sistema en la forma elegida. El material utilizado para el sistema lo iremos señalando a lo largo del capítulo, conforme se vaya requiriendo, y lo dejaremos marcado en rojo.

### 5.2.1 Láser y montura de cristales

El primer elemento que escogimos y colocamos fue el láser de bombeo, teniendo en cuenta que es conveniente escoger uno que esté en la región cercana al violeta debido a que, como el ancho de banda óptimo de los cristales BBO va desde el

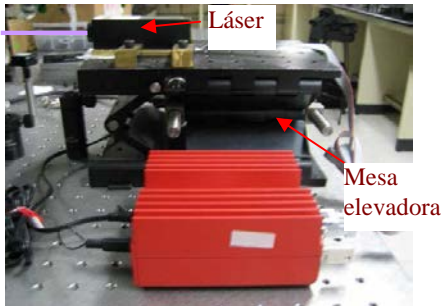


Fig. 5.2. Colocación del láser

Ecuación de ajuste:  $NC = y_0 + \frac{A}{w\sqrt{\pi/2}} e^{-2\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{w}\right)^2}$   
 $y_0 = 88.73 \pm 69.4$ ;  $\lambda_0 = 404.77 \pm 0.007$ ;  $w = 0.8 \pm 0.01$ ;  
 $A = 17233.76 \pm 320.3$

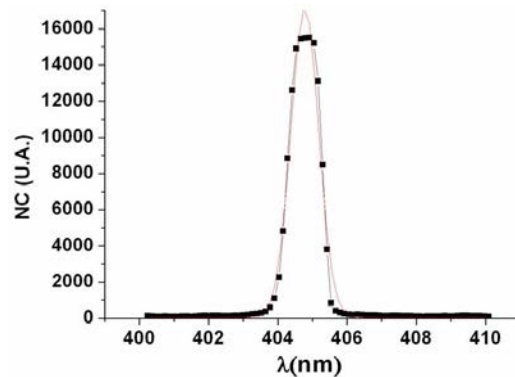


Fig. 5.1. Caracterización del láser violeta.

violeta hasta el infrarrojo, si escogemos un láser en el violeta la conversión provocará que los fotones señal y testigo caigan en la región del infrarrojo y todavía estén dentro del ancho de banda óptimo del cristal, de forma que éste no los absorba. También es conveniente seleccionar un láser que ya esté polarizado, para evitar tener que polarizarlo con otros elementos que pudieran disminuir su intensidad. En nuestro caso, escogimos un **láser de diodo** [B&W Tek inc. Modelo BWB-405-20E/55872] violeta de 405nm con polarización horizontal y un ancho de banda pequeño (Figura 5.1), cuyo haz es de 2mm de ancho por 1mm de alto (algo grande) y su potencia es de 25 mW. El

láser se montó en una **mesa elevadora estable** [NRS, mod. 280] y se hicieron los ajustes necesarios para que el haz láser tuviera una misma altura de 14 cm a lo largo de 1.5 m respecto a la mesa de trabajo, figura. 5.2.

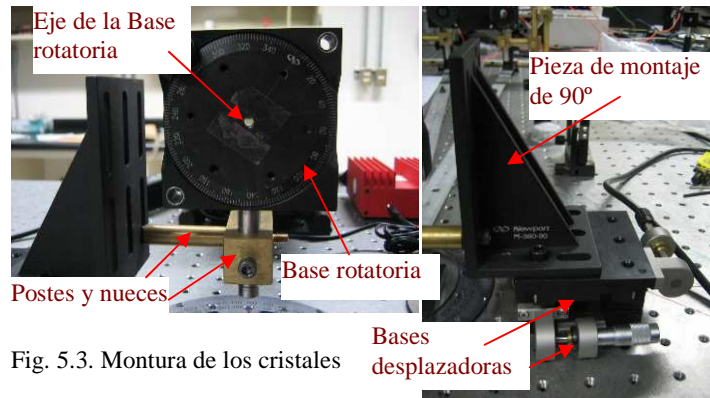


Fig. 5.3. Montura de los cristales

Después del láser, a aproximadamente 12cm adelante, marcamos en la mesa de trabajo lo que será el punto sobre el que se colocarán los cristales de conversión BBO. La montura que sostiene a los cristales esta compuesta de varias partes como se muestra en la Figura 5.3. Vemos que se trata inicialmente de dos **bases desplazadoras** [Newport mod. M-423 Series] montadas una sobre otra ortogonalmente de forma que podamos tener movimiento en el

plano horizontal. Sobre estos desplazadores se coloca una “**pieza de montaje de 90°**” [Newport mod. M-360-90]. Seguidamente, por medio de **postes y nueces** (que nos permiten tener movilidad vertical), se coloca una **base rotatoria** [Newport mod. M-RSP-2] de forma vertical, y haciendo que el haz láser atraviese su apertura central (eje del sistema). Este sistema tiene como ventajas que posee tres grados de movimiento, se tiene la posibilidad de cabecear los cristales de forma vertical y/o horizontal gracias al montaje de postes (lo cual permite que se puedan mover los cristales de forma que el láser se retro-refleje, y ilumine a los cristales de forma perpendicular) y, si se colocan los cristales sobre el eje de la base rotatoria (que está sobre el eje del sistema) estos podrán ser rotados, teniendo un fácil manejo de la variable  $\theta_l$ , que es el ángulo de la polarización de bombeo. Algo importante que hay que remarcar es el hecho de que la base rotatoria de los cristales no está amarrada directamente al punto marcado en la mesa (sino que esta sobre él), dejando la posibilidad de que se coloquen otras cosas por debajo de la montura.

## 5.2.2 Sistema acoplamiento a fibra óptica

Una vez que se tiene la disposición descrita anteriormente, procedemos a montar el sistema de detección de fotones señal y testigo. Para esto, se colocan **dos barras de aluminio** [de 80cm de largo, 2.5cm de ancho y espesor de 2mm] formando una especie de pinzas cuyo eje de movimiento este directamente debajo de la posición donde se colocarán los cristales, lo cual nos

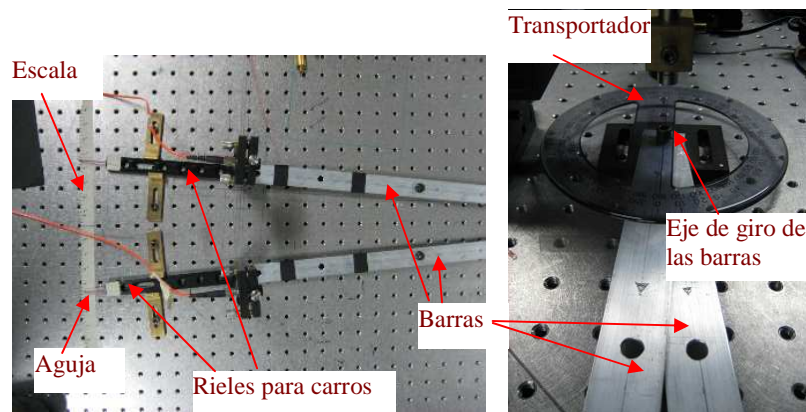


Fig. 5.4. Arreglo de las barras

dará la oportunidad de mover en forma angular los sistemas de detección y poder colocarlos en forma precisa y óptima en las regiones donde se encuentran los conos de fotones infrarrojos; sobre ellos se coloca un transportador para tener una idea aproximada del ángulo de apertura. Al final de las barras de aluminio se amarran de forma estable **dos rieles para carros de desplazamiento** [Newport mod. MRL-12M], y al final de estos rieles se coloca en la parte media una aguja que servirá para marcar, sobre una escala puesta en la mesa de trabajo, el ángulo de apertura de la pinza, figura 5.4. En los rieles se colocan unos **carros de desplazamiento** [Newport mod. M-MFC], y sobre estos unas **bases para postes** [Newport mod. M-VPH-2] con **postes pequeños**, a su vez estos cargan una **montura para**

lentes con cabeceo ajustable [Newport, se desconoce el modelo], sin embargo, en lugar de poner una lente, colocamos una **pieza especialmente diseñada** y construida **para** colocar en esta montura una **lente acopladora** [ThorLabs mod. F220FC-B,  $f=11\text{mm}$ , 600-1050nm] a fibra óptica para luz infrarroja, además en la parte delantera de la pieza, pegamos (con ayuda de cinta de doble cara) un **filtro para luz infrarroja** [ThinFilmImaging Technologies 810-10 7213] que nos ayudará a eliminar la luz ambiental y la luz violeta del láser no convertida, y solo permitirá que pasen los fotones de luz infrarroja producto de la conversión de fotones violetas (fotones de 810nm), figura 5.5. Una vez montado esto en cada riel, procedemos a colocar la **fibra óptica** que nos permitirá canalizar los fotones infrarrojos de los conos al detector de avalancha, el cual los detectará. La fibra óptica esta diseñada para luz infrarroja [Fibra Multimodo con conectores FC-FC;  $62.5/125\mu\text{m}$ ].

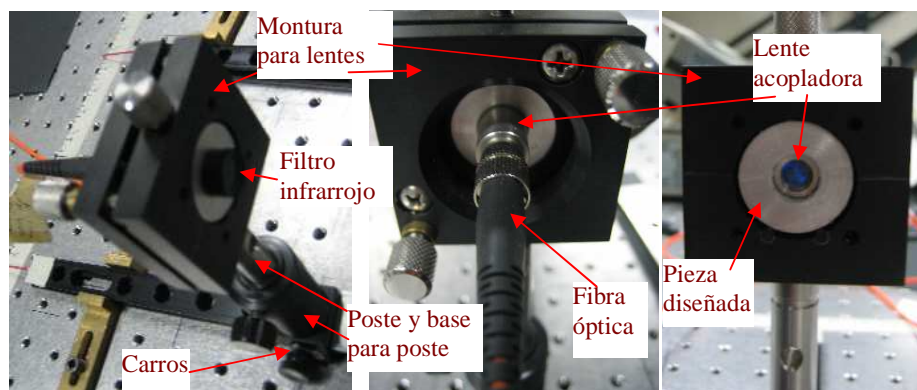


Fig. 5.5. Montaje de Lentes y filtros para acoplar la luz a la fibra óptica.

Antes de continuar, y conectar las fibras al detector, debemos alinear el acoplamiento lentes – fibra de forma que entre en ésta última la mayor cantidad de luz, para esto lo que se hace es:

1. Se quita el filtro infrarrojo y, con el láser violeta encendido y pasando a través de la montura del cristal (en este punto todavía no colocamos el cristal), un riel se coloca sobre el eje (haz láser) del sistema experimental, de forma que el haz entre por la lente de acoplamiento y se enfoque en la fibra óptica; hay que estar seguros de que la altura sobre la mesa a la que esta el sistema de acoplamiento a la fibra está a la altura del láser (14cm).

2. El riel se debe colocar y fijar en la posición sobre el eje del sistema, si la luz violeta no viaja a través de la fibra y sale por el otro extremo de ésta, hay que cabecear o girar un poco la montura para la lente de forma que la luz salga por el otro extremo, figura 5.6.

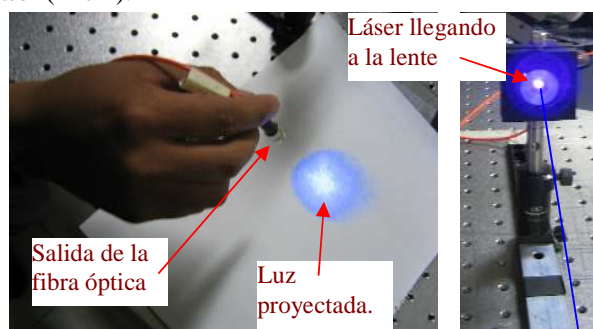


Fig. 5.6. Alineación lente - fibra.

3. Una vez que sale luz, hay que hacer que la intensidad de esta luz sea máxima, lo cual se puede hacer a simple vista viendo la intensidad de la luz que sale de la fibra al ser proyectada en una hoja blanca; pero si se quiere algo mas preciso, el sistema estará perfectamente alineado cuando el haz láser se retro-refleje desde la lente (algo difícil ya que se trata de una lente convexa) y se puedan apreciar anillos de interferencia reflejados por la lente alrededor de la apertura de la montura de los cristales, es decir con el centro de estos anillos en la apertura. Esto es difícil de entender pero, cuando se observa con cuidado, es fácil e intuitivo saber qué hacer y como mover la lente acopladora.

4. Una vez alineado el sistema de acoplamiento, se vuelve a colocar el filtro de infrarrojo enfrente de la lente, de forma que el láser también sea retro-reflejado por el filtro. Hecho esto, se quita el riel con el sistema acoplador del eje del sistema y se procede a alinear el otro de la misma forma.

Hecho esto, podemos asegurar con bastante certeza que la mayoría los fotones infrarrojos convertidos (ya sean señal o testigo) entrarán a la fibra óptica, viajarán por ella y serán detectados. También, asegurándonos de que los rieles estén colocados al mismo ángulo respecto del eje del sistema, y con sus sistemas de acoplamiento a la misma altura, tendremos la certeza de que se estarán detectando regiones de los conos de infrarrojo diametralmente opuestas en donde los fotones infrarrojos que llegan (pares convertidos) estarán correlacionados, figura 5.7.

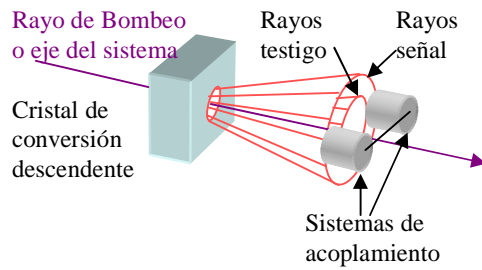


Fig.5.7. Lugares donde se colocan los sistemas de acoplamiento a fibra óptica.

### 5.2.3 Detector de avalancha

Una vez que se ha alineado el sistema de acoplamiento y se alejaron los rieles del eje del sistema, se conectan las fibras ópticas al detector de avalancha; éste nos permitirá detectar los fotones que entran por la fibra óptica, sean infrarrojos o no. La detección de dichos fotones se hará con un arreglo de **fotodiodos de avalancha** [Perkin – Elmer mod. SPCM-AQ4C, arreglo de 4 fotodiodos de avalancha de Si], operados en modo Geiger; cada canal detecta fotones individuales (por eso su nombre **Single Photon Counting Modules**) y genera pulsos TTL de 25ns como salida cada vez que detecta un fotón. Cada canal tiene un máximo de 2 Mega-cuentas por segundo y una cuenta oscura (pulsos accidentales) menor a 400 cuentas por segundo. El detector requiere de tres fuentes de voltaje (de 2,5 y 30V DC) para operar (ver manual para mejor referencia). Es conveniente usar una tarjeta de conexiones de energía para mayor seguridad (especificada en el manual). Según las especificaciones del aparato, para luz de 800nm se tiene una eficiencia de 50% en la detección de fotones. Los fotodiodos son aparatos extremadamente sensibles y caros por lo que se deben usar con extremo cuidado. Cada detector tiene una conexión de entrada de fibra óptica tipo FC y una conexión para la señal de salida tipo BNC, cada una de estas conexiones de salida debe ser acoplada con una carga de 50Ω. En este experimento solo se utilizarán dos canales (detectores), figura 5.8. Hay que señalar que para mayor seguridad es conveniente colocar el módulo de detección en una caja que impida que entre la luz al circuito.

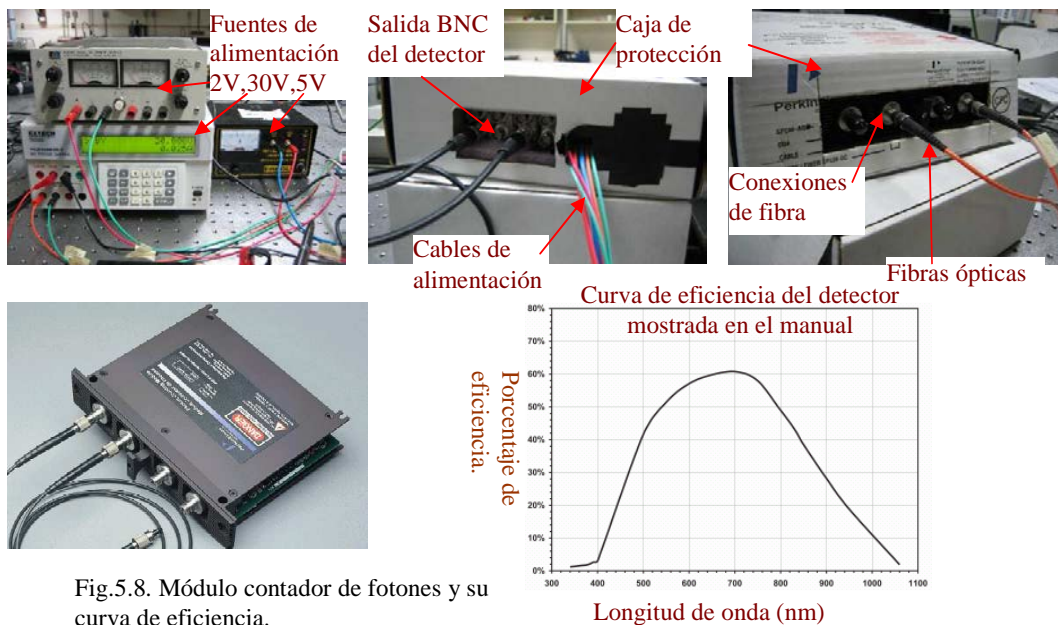


Fig.5.8. Módulo contador de fotones y su curva de eficiencia.

La forma en que trabajan los fotodiodos de avalancha es manteniendo una diferencia de voltaje grande a través de una pieza de silicio, cerca del límite de rompimiento dieléctrico. Los fotones con una longitud de onda que esté entre el visible y el infrarrojo pueden causar que se forme un par electrón – hueco en el silicio, de manera similar al funcionamiento de una celda solar. El alto voltaje a través del silicio del fotodiodo causa que el par electrón - hueco se separe y acelere. Las colisiones de este par con otros electrones provocan que se formen más pares y este proceso en cascada resulta en un rompimiento dieléctrico detectable. Un circuito en cada modulo de detección detiene el proceso antes de que dañe el silicio, y permite que el voltaje sea reestablecido rápidamente. Así, las fibras ópticas del sistema de acoplamiento se conectan a los detectores de avalancha, y las salidas de éstos a algún aparato que cuente pulsos o los manipule.

## 5.2.4 Montaje de los cristales y definición de la base del sistema

La colocación de los cristales se debe hacer de la forma recomendada en la sección 4.6. Sabemos que los cristales BBO solo convierten una polarización de bombeo específica; así, para generar un estado enredado o algo parecido a él, es necesario usar dos cristales que estén rotados  $90^\circ$  uno respecto del otro. Una vez conseguido esto, los cristales deben ser colocados de forma que la polarización del láser de bombeo (violeta) esté a  $45^\circ$  respecto de los ejes de los dos cristales; en nuestro caso, sabemos que la polarización del láser violeta es horizontal, por lo que tendremos que colocar nuestros cristales con sus ejes ópticos a  $45^\circ$  de la horizontal. Con la montura para los cristales que diseñamos, esto es fácil de hacer.

Primero, los **cristales BBO** [PHOTOP. Prisma BBO montado para conversión de 405nm a 810nm, 2 piezas de  $5 \times 5 \times 0.1$ mm cada una tipo I, ángulo de corte de  $30^\circ$  con recubrimiento P] que utilizamos ya están montados a  $90^\circ$  un respecto del otro de fábrica, y montados sobre una pieza circular en la cual han sido marcados los ejes ópticos de cada cristal, lo cual nos permite colocar los cristales (con ayuda de cinta de doble cara) sobre la base rotatoria, figura 5.9. Los cristales se colocan de forma que el eje óptico de un cristal quede apuntando hacia el  $0^\circ$  de la escala de la montura, con lo que el otro eje deberá apuntar a  $90^\circ$  (o  $270^\circ$ ). También, se debe tener el cuidado de colocar los cristales de forma que el láser violeta pase exactamente por el centro de éstos y se retrorefleje de nuevo a la salida del láser, es decir que el rayo láser sea perpendicular a los cristales.

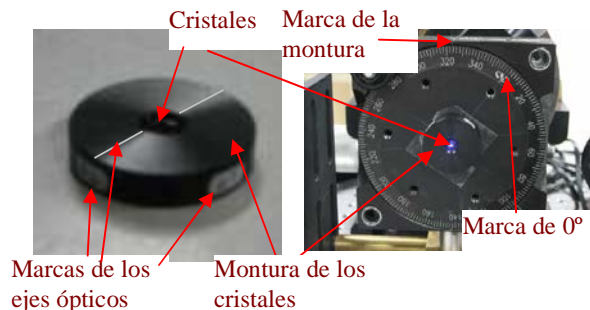


Fig.5.9. Cristal BBO y su montaje.

Sin embargo, ahora que los cristales ya están montados, vemos que, según lo especificado en la sección 4.6, los fotones convertidos horizontales (H) y verticales (V) estarán rotados  $45^\circ$  respecto de la mesa de trabajo. Esto implica que o introducimos esta rotación en las ecuaciones teóricas, o simplemente rotamos nuestro sistema de medición; desde luego, lo más conveniente es lo último, ya que nos evita hacer correcciones a las ecuaciones. Así, refiriéndonos a la figura 5.10, vemos que al rotar los cristales, los fotones infrarrojos convertidos saldrán con polarización diagonal (este es el mismo sistema que el de la figura 4.4, solo que rotado  $45^\circ$ ), por lo que nuestra base de medición de polarizaciones también será rotada. Definiremos la polarización V como la polarización que apunta hacia la derecha a  $45^\circ$  de la mesa de trabajo (visto desde el sistema de acoplamiento a la fibra óptica) y la polarización H la que apunta a la izquierda a  $45^\circ$ .



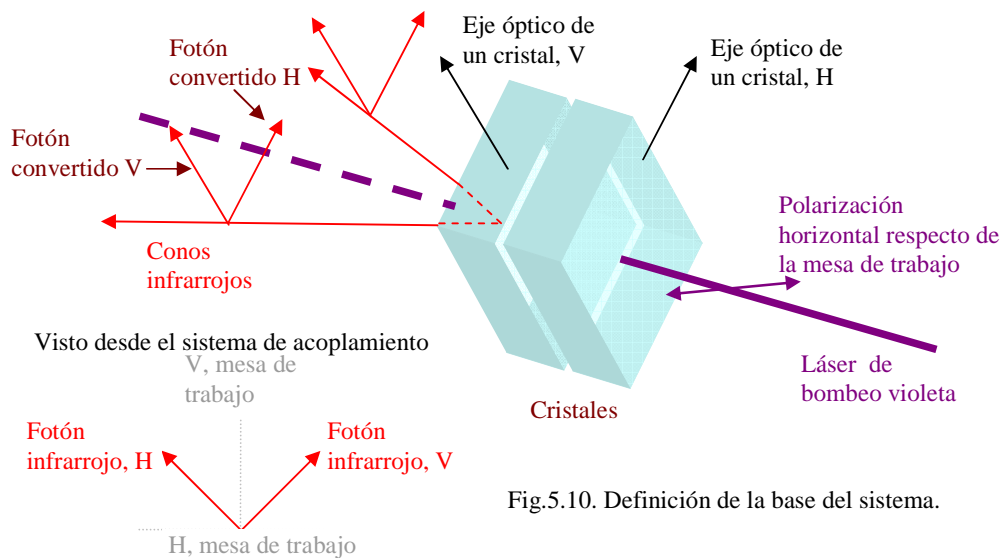


Fig.5.10. Definición de la base del sistema.

Algo que hay que señalar es que, según los datos de fábrica, el ángulo de corte de los cristales es de  $\theta = 30^\circ$ , por lo que los conos tendrán un ángulo de apertura en el aire de  $5^\circ$ .

### 5.2.5 Prueba de ruido del SPCM y Cuentas de cristales delgados (contador)

Una vez montado todo el equipo, procederemos a hacer las primeras pruebas. Primero mediremos las cuentas oscuras del detector de coincidencias y veremos que tan estables son; luego mediremos el número de cuentas que se tienen cuando se conectan las fibras al detector y generando fotones infrarrojos por conversión.

Para esto, conectamos las dos salidas del detector que vamos a usar a un aparato **contador de pulsos** [Stanford Research SR400, dos canales con impedancia de  $50\Omega$ ], calibrado para que detecte cualquier pulso de mas de 300mV y con una **ventana de conteo** (tiempo de conteo) de **500ms**, además el contador necesita un **generador de funciones** [Sony Tektronix AFG320] a frecuencia de 0.5Hz para poder controlar las ventanas de conteo de 500ms, figura 5.11. Una vez conectadas las dos salidas del detector al contador, procedemos a medir el ruido.

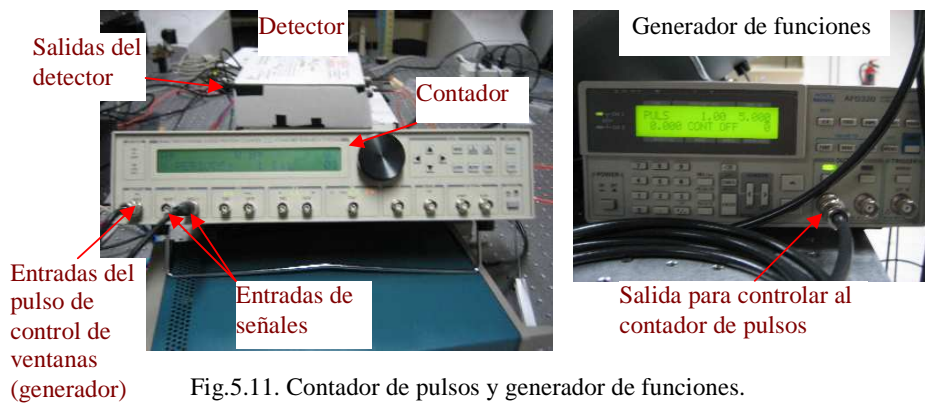
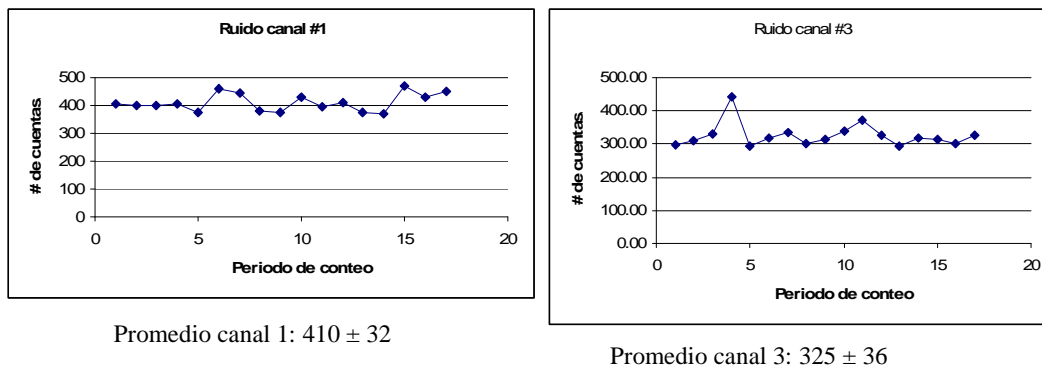


Fig.5.11. Contador de pulsos y generador de funciones.

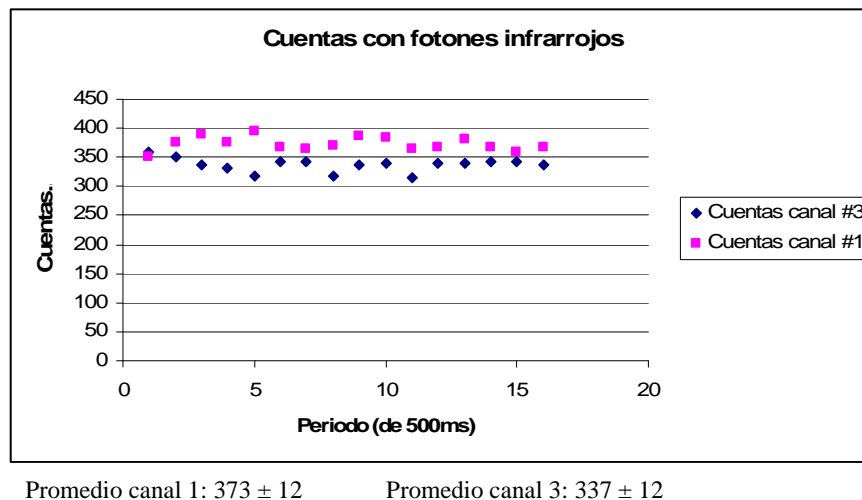
Para medir el ruido del detector es necesario desconectar las fibras ópticas y tapar las entradas usadas de forma que no llegue nada de luz a los diodos de Si. Una vez hecho esto, se apagan las luces del laboratorio y se encienden las fuentes (primero la de 2V, luego la de 30V y finalmente la de 5V). Las cuentas obtenidas en cada periodo de 500ms (se tomaron 17 periodos de conteo) para cada canal utilizado se muestran en la Gráfica 5.1.



Gráfica 5.1. Ruido del detector.

De estas gráficas podemos ver que el ruido es considerable pero, desde nuestro punto de vista, estable, lo cual nos permitirá poder discriminarlo (descontarlo) cuando sea necesario.

Ahora, conectamos las fibras ópticas a los dos canales del detector y medimos el número de cuentas promedio que se tienen cuando los rieles están a 3° del eje. Hay que asegurarse de que los filtros de infrarrojo estén colocados y firmes, en este caso hay que asegurarse de tener la menor cantidad de luz ambiental, pero si es muy difícil trabajar en estas condiciones se puede usar luz azul de baja intensidad (un led) para iluminación, ya que ésta es rechazada totalmente por el filtro. Los resultados de las cuentas se muestran en la Gráfica 5.2.



Gráfica 5.2. Cuentas en 500ms detectadas cuando el cristal convierte..

Como podemos ver de la gráfica, las cuentas son estables, de hecho, la desviación estándar disminuyó (probablemente porque después de cierto tiempo el detector se estabiliza); sin embargo, no podemos distinguir entre ruido y cuentas infrarrojas, ya que el número de cuentas que se tienen son del mismo orden que el ruido. Por lo tanto, no podremos distinguir el cono de fotones convertidos simplemente con cuentas directas del detector, es necesario otro método que no sea afectado directamente por el ruido del detector o que disminuya este ruido en una gran proporción.

## 5.2.6 Circuito de coincidencias

Lo que interesa en el experimento es detectar las coincidencias que se dan cuando el fotón señal y el testigo de una conversión son detectados; para esto, se implementó un circuito diseñado a base de circuitos integrados (Flip – Flops) que nos permitiera observar el número de pulsos de la detección de fotones infrarrojos que se generan al mismo tiempo en los dos canales utilizados, y trabajar con ellos. Teóricamente, el circuito está diseñado para recibir señales TTL de 25ns como mínimo y detectar coincidencias en una ventana de 25ns (las señales que arroja el circuito son pulsos TTL de 250ns), ésta ventana de coincidencia no es ajustable pero se pueden diseñar circuitos con ventanas de coincidencia diferentes, todo depende de los elementos resistivo – capacitivos utilizados.

La implementación de este circuito se hizo a partir de un artículo publicado en 2002 y otras referencias [32, 12]; sin embargo, si se está interesado en un análisis más detallado de cómo funciona el circuito es recomendable ver la referencia [33]. En nuestro caso, por cuestiones que mencionaremos en unos momentos, tuvimos que hacer algunos cambios al circuito para lograr que su desempeño fuera mejor.

En la figura 5.12 se muestra el diagrama esquemático del circuito, incluyendo la sección agregada. El circuito consiste de **dos chips 74ACT74** que contienen dos flip-flops tipo D de activación por disparo de flanco positivo (subida positiva) cada uno. Los pulsos de entrada deben tener una resistencia de carga de 50Ω, que es lo requerido por el detector.

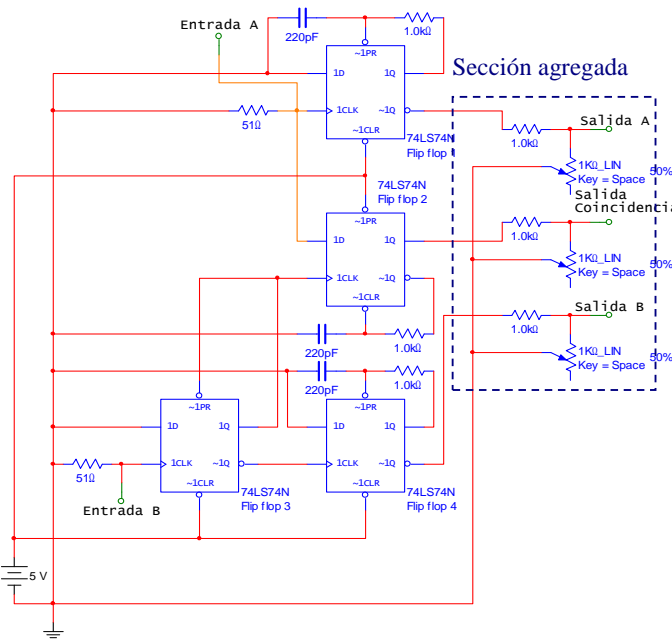


Fig. 5.12. Diagrama esquemático del nuestro circuito de coincidencias y tabla de verdad del chip, H, L,  $\square$ , y x corresponden a pulsos TTL de voltaje alto, bajo, subida e irrelevante respectivamente.

Tabla de verdad 74ACT74

Entradas				Salidas	
PR	CLR	CLK	D	$Q$	$\bar{Q}$
L	H	x	x	H	L
H	L	x	x	L	H
L	L	x	x	H	H
H	$\square$	$\square$	H	H	L
H	$\square$	$\square$	L	L	H
H	H	L	x	$Q_0$	$\bar{Q}_0$

Los flip-flops 1 y 4 simplemente retransmiten un pulso recibido en CLK a  $\bar{Q}$ . La duración del pulso desde  $\bar{Q}$  depende de la constante de tiempo determinada por la combinación RC entre  $Q$  y PR (control preset), que para el capacitor y resistor escogidos es de  $(1k\Omega)(220pF) = 220ns$ .

El flip-flop 3 retrasa la señal de la entrada B por un tiempo que va de 6.5ns a 19.5ns (según las especificaciones de fábrica), el tiempo para que el flip-flop se reajuste (reset). En el caso en que se presente una señal coincidente, la señal de la entrada A coloca a D (información de entrada) en el Flip-flop 2 en H (nivel alto) antes de que la subida del pulso retrasado en B active el circuito. De la tabla de verdad mostrada en la figura 5.12, se ve que esta combinación generará H en  $Q$ , la salida de coincidencia. La combinación RC del Flip-flop 2 determina la longitud de la señal de coincidencia. La detección de una coincidencia solo puede ocurrir mientras la entrada A está en H, de forma que la ventana de coincidencia para los pulsos de 25ns es de 25ns.

La sección agregada tiene la finalidad de poder controlar el tamaño de los pulsos de salida, sobre todo el de la coincidencia, esto se hace por medio de un sistema divisor de voltaje variable, el por qué de esto se aclarará en unos momentos.

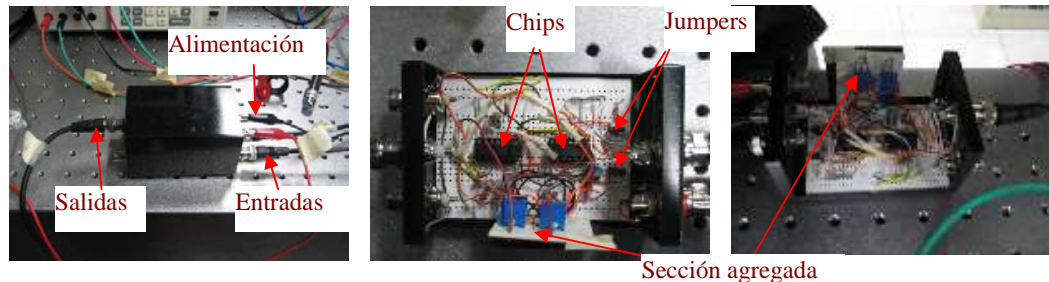


Fig.5.13. Circuito de coincidencias.

La construcción del circuito de coincidencias se hace sobre una placa de circuito impreso; hay que tener cuidado de montar los Flip-flops sobre bases para chips en lugar de soldarlos directamente a la placa, ya que el calor de la soldadura al momento de soldar puede dañarlos. Es recomendable utilizar conectores BNC para las entradas y salidas a fin de utilizar cables de dicho tipo y no caimanes o bananas que son menos fiables y producen inestabilidades en las lecturas. Otro aspecto que hay que marcar es que las terminales de  $51\Omega$  en las entradas son las cargas requeridas por los fotodetectores, las cuales deben ser removibles, ya que en ciertos arreglos solo se necesita una, por lo que se deben unir a las entradas por medio de jumpers. En la figura 5.13 se muestra la imagen final de nuestro circuito. La alimentación de 5V si se puede conectar mediante conectores tipo banana.

Ahora hay que probar el circuito, para lo cual conectamos las dos salidas del detector a las dos entradas del circuito de coincidencias y llevamos a cabo el experimento. Apagamos las luces y encendemos el detector junto con el circuito de coincidencias. Antes de conectar cualquiera de las salidas del circuito al contador, analizamos dichas salidas en un **osciloscopio de alta resolución** [Tektronix TDS7054].

Cuando una señal del detector se conecta a la entrada A, y no se conecta nada en la entrada B, la salida A muestra pulsos de 250ns de ancho (aproximadamente), mientras que las otras dos salidas, B y la coincidencia no muestran nada. Inversamente, cuando se conecta la señal a la entrada B, la salida B muestra pulsos de alrededor de 250ns de ancho, mientras que las salidas A y la coincidencia no muestran nada. Por otra parte, cuando las señales se conectan a las entradas A y B al mismo tiempo, cada señal sale en su respectiva salida como pulsos de 250ns y, solo cuando los pulsos de la entrada coinciden temporalmente, la salida de coincidencia muestra un pulso. Algo que hay que señalar es que, cuando se conectan las dos entradas, es necesario desconectar una de las cargas de  $51\Omega$  removiendo un jumper, de forma que el circuito en su totalidad represente una carga de  $50\Omega$  y no de  $100\Omega$ . En la figura 5.14 se muestran los tipos de pulsos que genera el detector y los que genera el circuito.

Como podemos ver, las señales de entrada son (en cierto modo) cuadradas, pero cuando salen del circuito se deforman un poco, lo cual es debido a que la carga de acoplamiento del circuito no es exactamente de  $50\Omega$ , por lo que la señal que llega tiene ciertas oscilaciones, lo que provoca distorsiones del pulso entrante, esto es algo que no podemos ajustar ya que las entradas del circuito están acopladas con resistencias de valor fijo de  $57\Omega$  (que es el valor mas cercano a  $50\Omega$  que se logró conseguir). Este problema tiene repercusiones serias en la forma en que se van a contar los pulsos de salida, ya que, cuando nos fijamos en las base de los pulsos de salida, vemos que sufre de oscilaciones de amplitudes mayores a 300mV. Como vimos anteriormente, el contador de pulsos cuenta cualquier pulso de mas de 300mV, por lo que será capaz de detectar cualquier oscilación (que denominamos ruido) antes de la subida del pulso, es decir, en los casos mostrados en la figura 5.14, el pulso de la salida B será contabilizado doble, ya que la oscilación previa al pulso verdadero es de más de 300mV, por lo que el contador la tomará como otro pulso.

Como la oscilación generada por el mal acoplamiento entre el circuito y el detector depende de la resistencia de acoplamiento, si ésta tiene una variación o los cables BNC de conexión no tienen la misma impedancia, pueden aparecer más oscilaciones considerables antes o después del pulso de salida.

La forma en que se resolvió el problema fue, simplemente, agregando una sección de ajuste de amplitud de los pulsos de salida que sea variable (o ajustable), es decir, por medio de divisores de voltaje contruidos a base de una resistencia de valor fijo ( $1k\Omega$ ) conectada en serie con una resistencia variable ( $0-1k\Omega$ ) colocadas a las salidas A, B y coincidencia (figura 5.12), podemos variar el tamaño de la señal de salida y por tanto del “ruido”, esto nos permite hacer que las oscilaciones sean menores a  $300mV$  y que el contador no las tome en cuenta, figura 5.15. Un inconveniente es que el ancho de los pulsos de salida creció un poco ( $\sim 50ns$ ) pero esto no afecta nuestros propósitos.

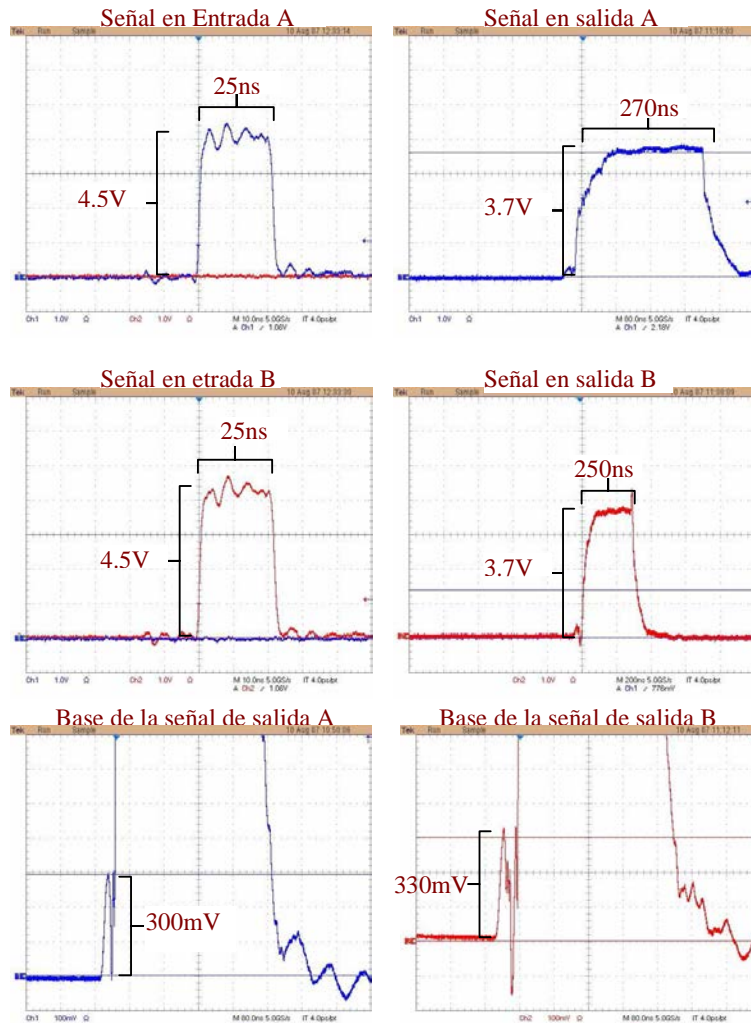


Fig. 5.14. Forma de los pulsos de entrada y salida.

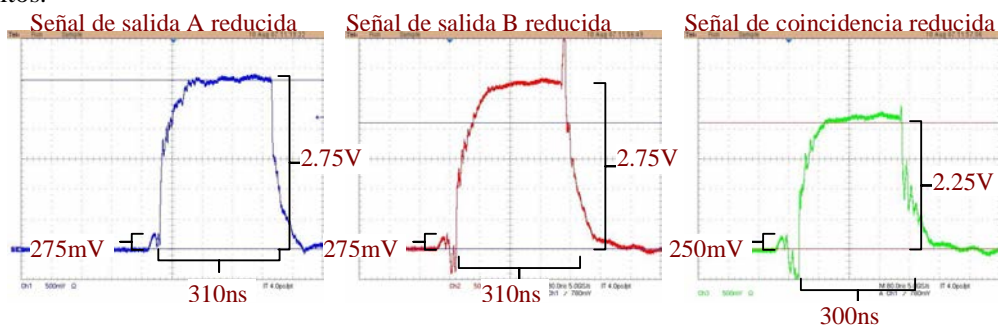


Fig. 5.15. Pulsos de salida reducidos

Una vez ajustados los pulsos, podemos probar como se observan las coincidencias en el osciloscopio, para lo cual se puede utilizar la función matemática de multiplicación de señales del propio osciloscopio, ya que ésta solo será distinta de cero cuando dos pulsos coincidan (figura 5.16). Observamos que sólo unos cuantos pulsos de entrada coinciden, no todos. Una prueba que nos indica que dichas coincidencias provienen de conversión a infrarrojo es simplemente tapando con algún objeto una de las trayectorias de los fotones convertidos (la de los fotones señal, por ejemplo) y dejando que los fotones de la otra trayectoria sean detectados; al hacer esto las coincidencias desaparecen, por lo que las coincidencias que se tienen cuando los dos canales (señal y testigo) no se tapan provienen de fotones infrarrojos.

Finalmente, solo nos queda checar que la ventana de coincidencia sea parecida a la que teóricamente se mencionó (25ns); para esto lo que se hace es conectar la salida de coincidencia al contador de pulsos y contar el número de pulsos que se generan cuando los cables que van de las salidas A y B del detector a las entradas A y B del circuito de coincidencias son del mismo tamaño; acto seguido, en uno de los canales (de preferencia el B) se agregan cables coaxiales de distintas longitudes para crear distintos retrasos temporales (es necesario medir el retraso temporal aproximado que agrega cada cable para tener idea del tamaño de la ventana de coincidencia). Por supuesto, cada vez que se agregue un cable, hay que contar el número de coincidencias que ocurren. Estos datos se muestran en la gráfica 5.3.

De la gráfica se aprecia que la ventana de coincidencia es menor a lo esperado, lo cual supone una precisión notable; sin embargo, hasta el momento en que se escribió este reporte no se cuenta con una explicación adecuada para este comportamiento. La explicación a que nos lleva todo esto es que, cuando no hay retraso entre las señales, se tiene un máximo de coincidencias, en tanto que cuando se agregan retrasos es lógico que cada vez haya menos coincidencias, ya que los pulsos generados por fotones señal y testigo empiezan a llegar a distintos tiempos al circuito y es más probable que no hagan coincidencia. Conforme se van agregando más retrasos, las coincidencias disminuyen hasta que la diferencia temporal entre los dos pulsos es tal que el circuito puede diferenciarlos como separados y no catalogarlos como coincidencia. Debido a que el dato del retraso temporal de los cables no es preciso, concluimos que la **ventana de coincidencia es de  $8 \pm 2$  ns**, aproximadamente. Esta ventana de coincidencia es más que suficiente para los propósitos de nuestro experimento. Con los resultados así obtenidos, ahora ya podemos estar seguros de que el circuito cubre nuestras necesidades para detectar las coincidencias de los fotones infrarrojos generados por la conversión.

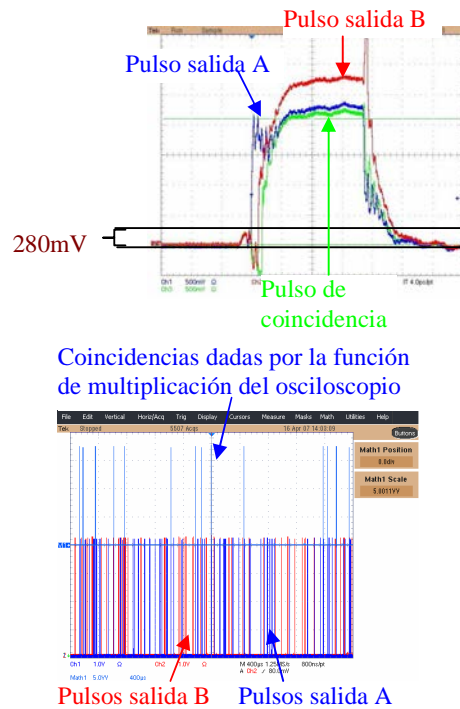
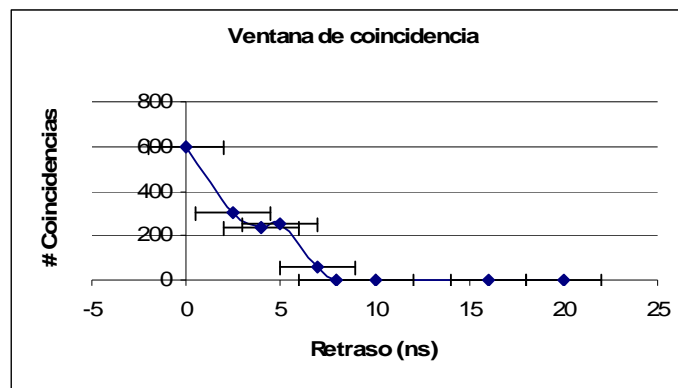


Fig. 5.16. Coincidencias de pulsos



Grafica. 5.3. Tamaño de la ventana de coincidencias

En este punto cabe señalar que, en razón de que el número de fotones infrarrojos era menor al ruido del detector y por tanto no eran distinguibles, en la ventana de conteo de pulsos de 500ms el número de coincidencias detectado era demasiado pequeño (alrededor de 4 coincidencias), por lo que hubo que **expandir la ventana de conteo de coincidencias de 500ms a 100s**, para lo cual el generador de funciones que controla al contador debe enviar pulsos de control a una frecuencia de 1Hz en tanto que el contador debe esperar 100 de dichos pulsos de control para cerrar la ventana de conteo.

## 5.2.7 Coincidencias en el cono de fotones infrarrojos

Ahora que ya tenemos un dispositivo para contar las coincidencias de fotones infrarrojos generados por la conversión paramétrica, usaremos este circuito junto con el contador para llevar a cabo nuestro experimento. Como lo único que nos interesa, por el momento, son las coincidencias solo conectaremos dicha salida al contador.

Para ver dónde es que se encuentran los fotones infrarrojos y qué cantidad de estos se tiene, lo que se hace es mover simétricamente los rieles con los sistemas de acoplamiento a fibras, figura 5.17, es decir, respecto a la escala graduada haremos un barrido con los dos rieles desde un ángulo de  $1.75^\circ$  hasta  $7.5^\circ$  (con una incertidumbre en la medición de los ángulos de  $\pm 0.2^\circ$ ); es importante que para medir el ancho de los conos de fotones infrarrojos convertidos, cada que se haga una toma de coincidencias, los dos rieles deben estar al mismo ángulo. Los resultados del número de coincidencias obtenidas, en un lapso de tiempo de 100s (ventana de conteo de coincidencia) contra varios ángulos de los rieles se muestran en la gráfica 5.4. Es importante hacer esta medición, ya que el resultado nos dirá cual es la posición óptima (donde haya la mayor cantidad de fotones convertidos) para colocar los sistemas de acoplamiento a fibra.

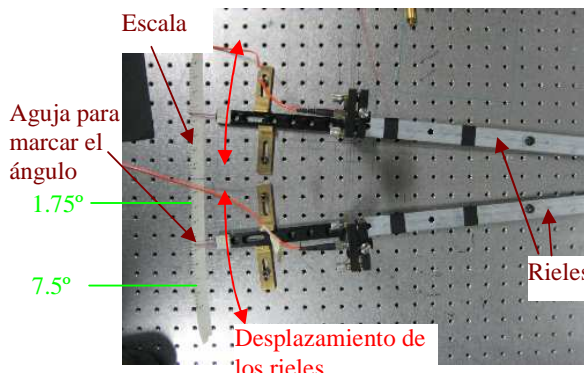
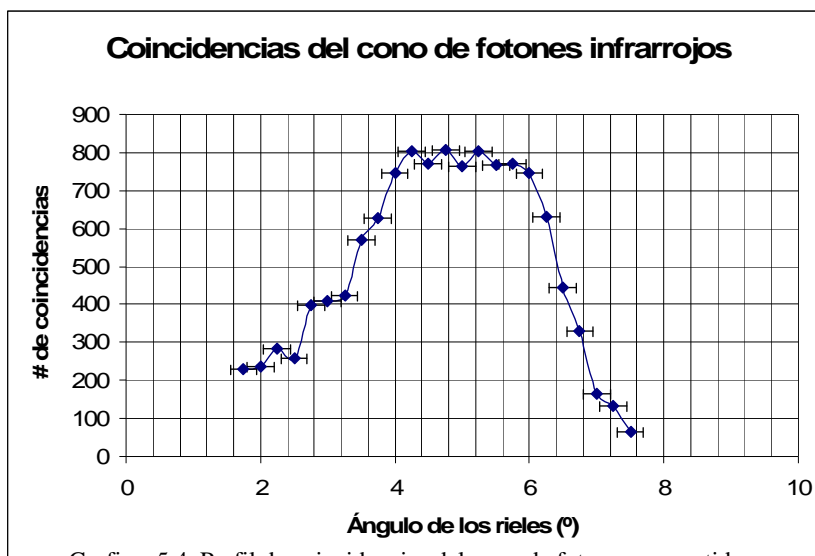


Fig. 5.17. Como se desplazan los rieles



Gráfica. 5.4. Perfil de coincidencias del cono de fotones convertidos

De la gráfica podemos extraer inmediatamente la siguiente información:

Primero, el máximo de coincidencias (o centro de los conos) está a  $5^\circ$ , como lo indica la teoría, esto nos indica que: A) el corte de los cristales es bastante preciso; B) La colocación de los cristales es perpendicular al láser de bombeo (violeta). La Explicación B no dice que nuestro montaje y alineación del cristal fue bastante precisa.

Segundo, el ancho del cono es considerable, de  $3.25^\circ$  a  $6.5^\circ$  ( $3.25^\circ$ ), lo cual nos da un rango de posicionamiento angular de los rieles bastante grande y suficiente para facilitarnos la realización del experimento.

Tercero, el comportamiento de las coincidencias es como se esperaba. Sabíamos que las coincidencias sólo se daban en una cierta región, y que conforme nos alejamos de esa región las coincidencias disminuirían debido a que los fotones infrarrojos convertidos ya no se generaban en dichas direcciones. Por el diseño de nuestro montaje experimental no fue posible analizar más ángulos, pero es notable como después de los  $6.5^\circ$  las coincidencias decrecen rápidamente conforme aumenta el ángulo de apertura del riel, hasta llegar casi a 50 coincidencias. Esto también nos confirma de nuevo que nuestro circuito de coincidencias trabaja de forma correcta. Otro aspecto interesante es lo que ocurre de  $3.5^\circ$  a  $1.75^\circ$ , donde el número de coincidencias no desciende tan rápido como después de  $6.5^\circ$ , lo cual es debido a que cuando nos acercamos al eje del sistema, los fotones del láser violeta (que son muchos debido a que su intensidad es considerable) comienzan a pasar por el filtro para infrarrojo, lo que provoca que las coincidencias fortuitas (o de ruido) crezcan y se cuenten. Sin embargo, gracias a la forma en que se diseñaron los rieles, nuestro montaje no permite analizar ángulos menores ya que se correría el riesgo de que el láser violeta iluminara el filtro, lo hiciera fluorecer y dañara el detector.

Cuarto, el número de coincidencias que se tiene es bastante menor al reportado por otros experimentos, en la referencia [30] se reportan alrededor de 300 coincidencias por segundo, lo cual está muy por arriba de nuestro caso, que es de 800 coincidencias en 100 segundos. Pensamos que esto es debido a pérdidas considerables de fotones infrarrojos en las fibras ópticas y en el acoplamiento de la luz infrarroja a éstas por medio de las lentes acopladoras, así como a un posible error en el acoplamiento de fase. Pero, de nuevo, esto no perjudica nuestro objetivo.

Para tener una estimación experimental del número de fotones de bombeo que se están convirtiendo en los cristales, hacemos los siguientes cálculos. De la gráfica 5.4, vemos que el máximo de coincidencias detectadas en una ventana de conteo de 100s es de 800. Sin embargo, este valor es de “coincidencias”, es decir, de fotones que entraron por ambos canales del detector de avalancha al mismo tiempo y activaron el circuito de coincidencias, esto nos indica que, suponiendo que las coincidencias fortuitas son nulas (algo que, como veremos unos párrafos adelante, en nuestro experimento es una suposición adecuada), por cada coincidencia contada se tienen dos fotones infrarrojos producto de la conversión paramétrica. Así, en un canal del detector, en 100s entran 800 fotones infrarrojos.

Por otra parte, sabemos que para luz de 810nm el detector tiene una eficiencia de 50% en la detección de fotones, esto nos lleva a que en realidad, en un canal, entran 1600 fotones infrarrojos. Si consideramos que las fibras ópticas absorben una cierta cantidad de fotones, y suponemos que esta cantidad es del 10% (probablemente sea mas, pero no se tiene información sobre ello), entonces, a la fibra óptica entran 1778 fotones. Luego, si suponemos que el sistema de acoplamiento a fibra óptica (conexión de la lente acopladora a la fibra óptica) no es perfecto (lo cual es muy probable) y que este provoca una pérdida de 20% en el número de fotones, se tendrá que a la lente acopladora entran 2223 fotones. Finalmente, para 810nm los filtros de interferencia para infrarrojo tienen una máxima transmisión del 50%, es decir, pierden 50%, esto nos lleva a concluir que al filtro de infrarrojo llegan 4445 fotones.

Como nuestras lentes acopladoras tienen un radio de 3.5mm, entonces su área será de  $A_L = 0.385cm^2$ . A esta área llegan ~4445 fotones infrarrojos.

Ahora, también de la gráfica 5.4, podemos hacer la suposición de que el ancho angular del cono de fotones convertidos es de  $\sim 3^\circ$ . En base a esto y a la figura 5.18, vemos que:

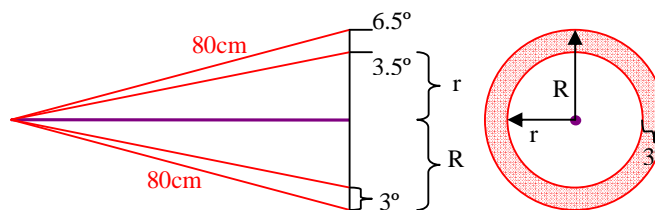


Figura 5.18. Perspectivas del cono de fotones infrarrojos

$$\left. \begin{aligned} r &= (80cm)\text{sen}(4^\circ) = 5.58cm \\ R &= (80cm)\text{sen}(6^\circ) = 8.36cm \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \pi(5.58cm)^2 = 97.83cm^2 \\ A = \pi(8.36cm)^2 = 219.68cm^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{cono} = A - a = 121.85cm^2$$



Donde  $A_{cono}$  es el área total donde hay fotones infrarrojos. A partir de esto, el número aproximado de fotones infrarrojos convertidos por el cristal BBO será de:

$$\left(\frac{A_{cono}}{A_L}\right)4445 = 1.4 \times 10^6 \text{ fotones en } 100s$$

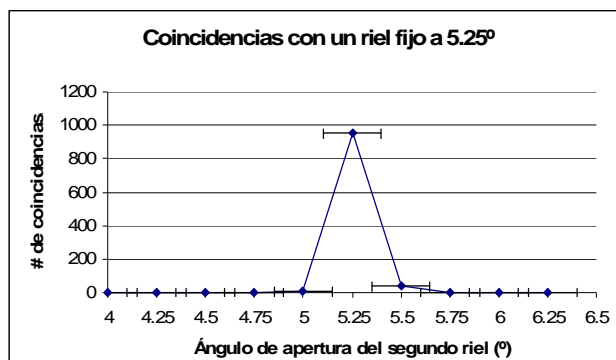
Es decir, a partir de nuestro láser de bombeo de 25mW, se crean 14000 fotones por segundo, esto nos confirma que nuestro número de fotones infrarrojos convertidos esta muy por debajo de lo que se reporta en otros trabajos (en la referencia [12] se habla de  $10^6$  fotones y en la [15] de  $10000 \text{ s}^{-1}(\text{mW})^{-1}$  fotones).

La energía de un fotón con longitud de onda de 405nm es de:  $E_{405nm} = \frac{hc}{(405nm)} = 4.9 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Si

suponemos que, de alguna forma, se pudiera generar un fotón violeta por segundo, la potencia de dicha fuente sería de  $4.9 \times 10^{-19} \text{ W}$ . A partir de esto, podemos suponer aproximadamente que, con una simple regla de tres, nuestro láser violeta de 25mW produce  $5.1 \times 10^{16}$  fotones por segundo. Así, concluimos que, en nuestro sistema experimental, de cada  $3.6 \times 10^{12}$  fotones violetas, solo uno se convierte en infrarrojo. Esta cantidad es extremadamente pequeña comparada con las que se mencionan en las referencias, por lo que, además de las pérdidas de fotones consideradas anteriormente, es posible que estemos perdiendo cuentas de fotones en otro lugar, como por ejemplo, el circuito de coincidencias, pero por cuestiones de tiempo, esto no pudo ser investigado, esperamos que mas adelante se resuelva este problema.

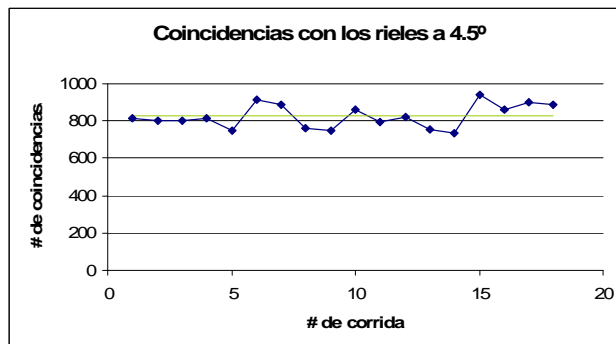
Vemos que nuestro montaje experimental no es muy eficiente al convertir los fotones ó que los fotones convertidos se pierden en alguna parte. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, la baja eficiencia en el número de pares de fotones convertidos no afectará nuestros resultados, que solo dependen del número de coincidencias detectadas mas no de el número de fotones producidos, lo que se verá afectado es el tiempo de toma de datos, el cual deberá ser alargado para poder detectar mas coincidencias.

Otra prueba definitiva para comprobar que nuestro circuito de coincidencias funciona de manera correcta y que las coincidencias son de fotones infrarrojos, se hizo fijando un riel en uno de los ángulos donde supuestamente hay más fotones infrarrojos (escogimos  $5.25^\circ$ ) y haciendo un barrido con el otro riel desde  $4^\circ$  hasta  $6.25^\circ$  para contar coincidencias. El resultado de esta prueba se muestra en la gráfica 5.5.



Gráfica. 5.5. Perfil de coincidencias cuando solo un riel se desplaza y el otro se fija

Lo que muestra esta gráfica es una conclusión contundente en el sentido de que nuestro circuito trabaja correctamente, ya que sólo hay coincidencias cuando los dos rieles están al mismo ángulo, y cuando están a distintos ángulos no se tienen coincidencias (ni siquiera fortuitas).



Gráfica. 5.6. Coincidencias detectada a  $4.5^\circ$ .

Estos resultados son suficientes para colocar los rieles a un ángulo que vaya desde  $4.25^\circ$  hasta  $5.5^\circ$ , que es donde se encuentran los máximos de coincidencias. En nuestro caso escogeremos colocar los rieles a  $4.5^\circ$ , donde el número de coincidencias es de 800 aproximadamente. En posteriores tomas de

coincidencias con los rieles ya fijos en  $4.5^\circ$ , y haciendo varias corridas experimentales, se obtuvieron los datos mostrados en la gráfica 5.6. De estos datos concluimos que, en esa posición, el **promedio de coincidencias es de  $825 \pm 64$** .

**OBSERVACIÓN:** este valor de coincidencias puede variar de un experimento a otro, es decir, cuando se apaga el detector y se deja de usar un tiempo considerable (mayor a 6 horas), para luego ser utilizado de nuevo, no es seguro que se vuelva a tener un promedio de 825 con una desviación de 64, sino algo aproximado a esto. Las fuentes tienen variaciones de voltaje (no muy grandes) que llegan a afectar el desempeño del detector.

## 5.2.8 Colocación de sistemas polarizadores y definición del sistema de medición

Ahora que sabemos dónde se encuentran los fotones infrarrojos necesarios para crear estados enredados, debemos colocar los dispositivos que nos ayudarán a escoger la polarización o proyecciones de polarización necesarias para llevar a cabo la estadística que nos permita saber si hemos violado la desigualdad de Bell. Para hacer esto, seguimos los siguientes pasos:

- Con ayuda de postes y nueces, se colocan frente a cada sistema de acoplamiento de luz, inmediatamente delante del filtro de infrarrojo, unas **bases para cristales cúbicos** que tengan movimientos de cabeceo [Newport M-P100-P]; sobre estas bases se colocan unos  **cubos divisores de haz polarizantes para infrarrojo** [Edmund Optics] de forma que solo dejen pasar una de las dos polarizaciones que salen de la conversión (para hacer esto de la mejor manera, es conveniente probar cuáles son las polarizaciones que pasan por el cubo y referirse a las indicaciones de funcionamiento de los cristales). En base a pruebas hechas en los cubos con los que contamos, con láseres rojos polarizados y a las señales con que cuentan los cubos (figura 5.19) aprendimos cómo es el funcionamiento de los cubos polarizantes; las polarizaciones horizontales atraviesan el cubo, pero las verticales son reflejadas por la interface. Aquí conviene anotar que es necesario procurar que las caras de los cubos queden lo más paralelas que se pueda a las caras de los filtros infrarrojos, y tener cuidado de no golpear el sistema de acoplamiento de luz.

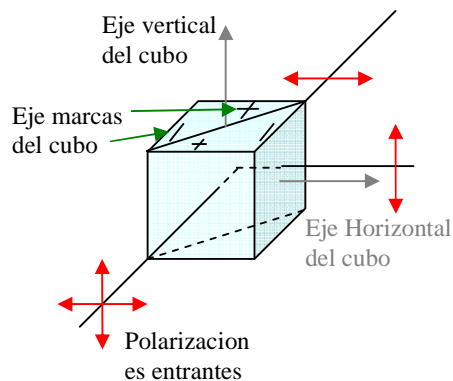


Fig. 5.19. Funcionamiento de los cubos divisores de haz polarizantes

- A continuación de los cubos se coloca, también con ayuda de postes y nueces, una **montura rotatoria graduada** [Newport M-RSP-1T] con capacidad de poder montar una lente, filtro o lámina circular en su centro y fijarlo, lo cual nos permitirá girar el objeto sobre su eje. En la figura 5.20 se muestra un diagrama de los dos montajes (uno en cada riel). Las láminas que se van a usar para rotar las polarizaciones deseadas y hacer que pasen por los cubos son **láminas de media onda** [Tower Optical Corporation, lámina de media onda de orden cero circular AO15Z  $\frac{1}{2}$  0800 de diámetro óptico 25.4mm de 800nm con recubrimiento tipo AR] y se colocan sobre las monturas rotatorias, el eje óptico de estas láminas debe estar orientado con la marca de cero grados de la base rotatoria de forma que siempre giren juntas. Lo que las láminas hacen es girar la polarización de la onda entrante un ángulo  $2\theta$  (medido a partir de la polarización entrante y donde  $\theta$  es el ángulo que hace el eje óptico de la lámina con la polarización entrante); es decir, reflejan el ángulo de polarización entrante alrededor de su eje óptico. Para mayor información de cómo trabajan las láminas se puede consultar el Apéndice H de este trabajo.

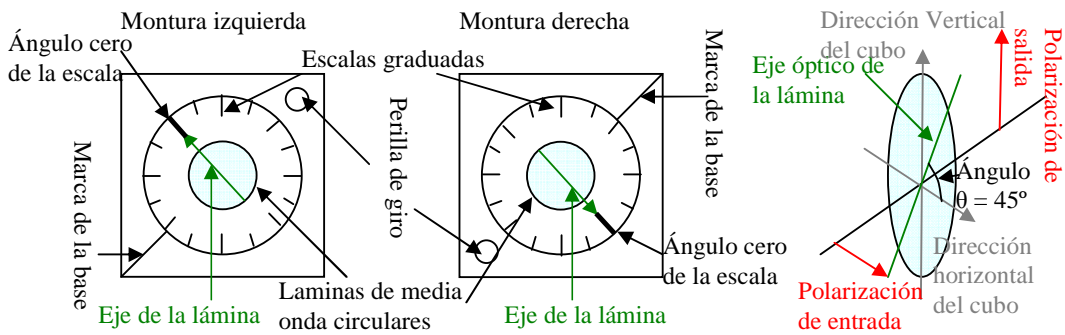


Fig. 5.20. Montaje de ambas láminas vistas desde el cristal y su funcionamiento

c) Ya que están puestas las láminas y los cubos, definimos la forma en que se van a hacer las rotaciones de polarización de manera que solo los fotones con las polarizaciones que escojamos pasen por los cubos polarizantes y entren a la fibra óptica. La figura 5.21 nos muestra cómo haremos esto. En la sección del montaje de los cristales vimos que la forma en que los colocamos provocaba que las polarizaciones horizontales y verticales producidas en el cristal estuvieran rotadas  $45^\circ$  aproximadamente, por lo que todo nuestro sistema de medición también estará rotado  $45^\circ$  (figura 5.21a). En el sistema producido por los cristales definimos como  $0^\circ$  a la polarización vertical infrarroja.

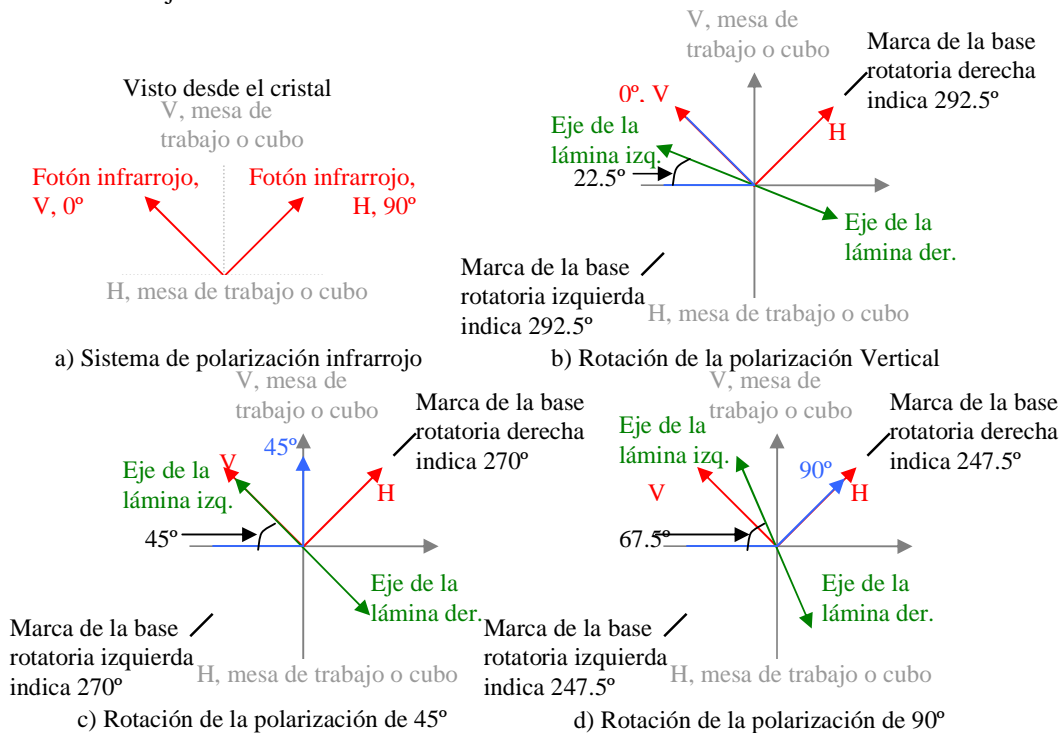


Fig. 5.21. Forma en que se rotan las láminas de media onda para rotar ciertas polarizaciones infrarrojas escogidas y hacer que crucen los cubos polarizantes.

Por ejemplo, si queremos que los fotones infrarrojos con polarización vertical sean detectados, hay que rotarlos de forma que queden en la horizontal del cubo y puedan atravesarlo; para esto hay que colocar el eje óptico de la lámina a  $22.5^\circ$  de la horizontal del cubo, lo cual provocará que el fotón infrarrojo vertical, que está a  $45^\circ$  de la horizontal del sistema del cubo, se refleje sobre el eje de la lámina y quede horizontal (figura 5.21b). Debido a que la escala de la montura se mueve con el eje de la lámina, cuando éste quede a  $22.5^\circ$  de la horizontal del cubo, la marca de la montura izquierda indicará  $292.5^\circ$ . De manera similar, por la simetría en que se colocaron las monturas izquierda y derecha y sus láminas, cuando se quiera que los fotones verticales sean detectados en el lado derecho, hay que hacer que la marca de la montura derecha indique  $292.5^\circ$ . Haciendo ajustes

similares, se encuentra que cuando se quieren detectar polarizaciones infrarrojas de  $45^\circ$  en el sistema de los cristales (figura 5.21c), hay que colocar las láminas a  $45^\circ$  de las horizontales de los cubos o que las marcas indiquen  $270^\circ$ ; por otro lado, cuando queremos polarizaciones infrarrojas horizontales o de  $90^\circ$  (figura 5.21d), colocamos los ejes de las láminas a  $67.5^\circ$  de las horizontales de los cubos o que las marcas indiquen  $247.5^\circ$ . Esto nos lleva a deducir una relación que nos indique que ángulo deben indicar las marcas de las monturas dependiendo de la polarización infrarroja que queramos detectar. Esta relación es:

$$360^\circ - \left( \frac{(\alpha + 45^\circ)}{2} + 45^\circ \right) = M$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de la polarización de los fotones infrarrojos que queremos detectar y  $M$  es el ángulo que deben indicar las marcas de las monturas. Finalmente, el arreglo de las monturas con los polarizadores se muestra en la figura 5.22.

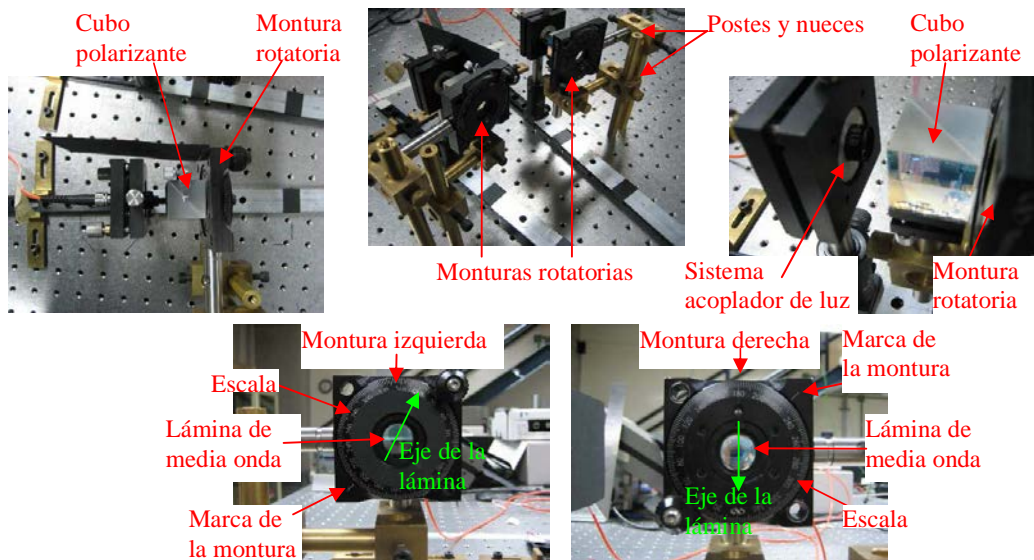


Fig. 5.22. Aspecto del sistema de selección de polarización, láminas de media onda y cubos polarizantes

### 5.2.9 Colocación del compensador Babinet

Finalmente, solo nos falta colocar el compensador que nos permitirá, en cierto grado, eliminar el desfase entre los conos infrarrojos  $\phi$  en la ecuación 4.64. El tipo de compensador que utilizamos es un **Babinet Soleil con montura giratoria** [Melles Griot, Soleil-Babinet Compensator mod.04-SBC-001; Divided Circle Rotating Mount mod.04-SBM-001], el funcionamiento de éste se explica en el apéndice H; aquí solo nos limitamos a explicar cómo se monta en el experimento.

De la teoría del capítulo 4, sabemos que lo más conveniente es crear el desfase en las componentes de la polarización del rayo de bombeo de forma que, cuando lleguen a los cristales, el desfase provocado por estos últimos elimine el generado por el Babinet y las componentes de polarización regresen a estar en fase. Por lo que hay que colocar el Babinet entre los cristales y el láser.

De la explicación del funcionamiento del Babinet que se hace en el apéndice H, sabemos que está constituido por dos cristales (uno de éstos está compuesto de dos cuñas) cuyos ejes ópticos están paralelos, y que la polarización del láser de bombeo es Horizontal respecto de la mesa de trabajo. Como cada cristal del Babinet debe retrasar una de las componentes de las polarizaciones, debemos

colocarlo de forma que la polarización del láser de bombeo tenga las mismas componentes (proyecciones) en cada cristal, y para hacer esto vemos que lo que hay que hacer es colocar el Babinet de forma que la polarización del láser de bombeo entre a  $45^\circ$  de ambos ejes ópticos de los cristales del Babinet (Figura 5.23).

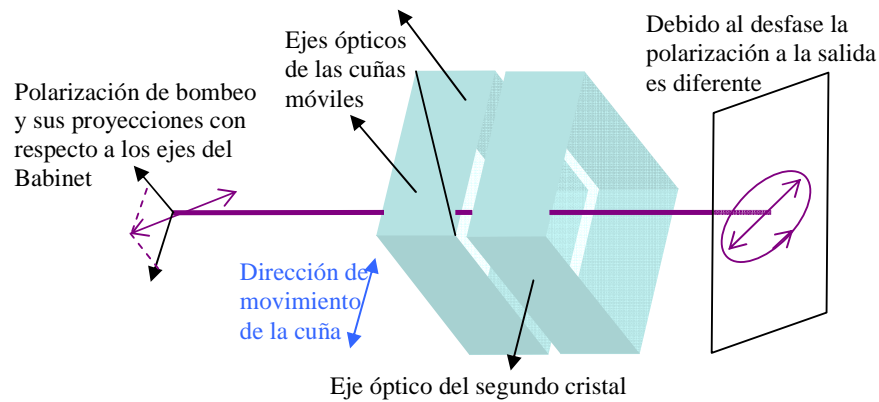


Fig. 5.23. Colocación del Babinet.

El grosor que suman las dos cuñas puede ser variado conforme se gira un tornillo micrométrico, provocando que se tengan distintas longitudes de camino óptico para cada componente del rayo de bombeo y por tanto un desfase entre estas componentes.

Debido a que cada cristal del Babinet genera un retraso diferente para cada componente de la polarización de bombeo, a la salida se tendrá una polarización distinta a la de entrada, que puede ser lineal o elíptica dependiendo de la magnitud del desfase que se tenga. Esto puede generar problemas debido a que si es elíptica, la polarización de bombeo puede alcanzar los cristales a un ángulo que no sea  $45^\circ$  respecto de la mesa de trabajo, lo cual impediría crear un estado enredado de buena calidad; para evitar esto hay que hacer la calibración de coincidencias con detección de fotones infrarrojos, algo que se hará en la siguiente sección.

Así, inicialmente colocamos el Babinet con su eje principal a  $45^\circ$  respecto de la horizontal de la mesa y con su desfase inicial en cero. La forma en que se colocó se muestra en la figura 5.24.

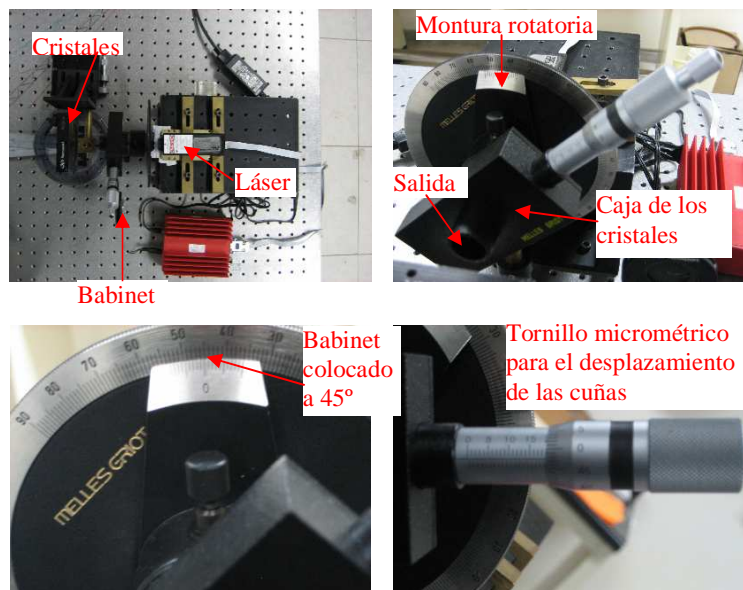


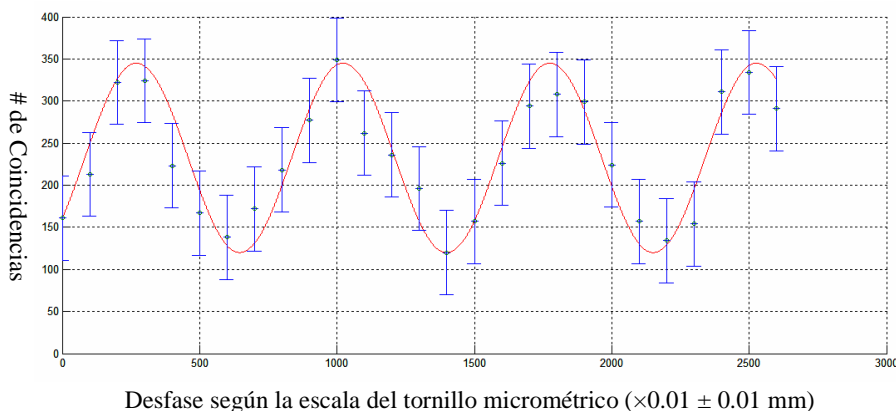
Fig. 5.24. Colocación del Babinet en el experimento.

Como prueba de que el compensador Babinet Soleil funciona de manera correcta, lo que vamos a hacer es intentar medir el número de coincidencias que se tienen para un cierto caso de polarizaciones escogidas y ver como cambia este número cuando variamos el desfase que genera el Babinet. Según el desarrollo teórico visto en la sección 4.6, cualquiera de las combinaciones de ángulos escogidos  $N(\alpha, \beta)$  sufre la influencia del término del desfase generado por los cristales  $\phi$  (ecuación 4.69), la influencia máxima ocurre cuando se escoge analizar el caso  $N(45^\circ, 45^\circ)$  y suponiendo que el ángulo con que la polarización de bombeo llega a los cristales siempre es de  $\theta_l = 45^\circ$  (algo difícil de tener debido a lo explicado dos párrafos antes), la ecuación que se tiene en dicho caso es:

$$N(45^\circ, 45^\circ) \propto P_{VV}(45^\circ, 45^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\cos \phi)$$

Primero colocamos el tornillo micrométrico del Babinet en su cero (donde supuestamente no genera retraso) y las láminas de media onda son colocadas de forma que analicen la polarización infrarroja de  $45^\circ$  (es decir, colocamos las láminas con las marcas de las monturas indicando  $270^\circ$ ), luego se procede a hacer varias corridas experimentales para ver el número de coincidencias que se tienen con una cierta configuración de desfase y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , en cada corrida se cambiará el desfase generado con el Babinet, girando su tornillo micrométrico. Los datos obtenidos se muestran en la gráfica 5.7.

Gráfica 5.7. Desfase provocado por el Babinet para el caso  $N(45^\circ, 45^\circ)$



En la gráfica anterior, los puntos azules son los datos experimentales y la línea roja es la curva teórica ajustada:

$$N(45^\circ, 45^\circ) = 450 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (\cos(0.00835x - 2.26)) \right) + 120$$

De todo lo anterior, podemos concluir varias cosas:

- Como vimos en la sección de “Coincidencias en el cono de fotones infrarrojos”, la incertidumbre en cada valor de coincidencias es considerable ( $\pm 50$ ); sin embargo, el valor de los datos obtenidos sigue de manera aceptable a la ecuación teórica.
- El Babinet está mal calibrado, debido a que en el cero del tornillo micrométrico se tiene un desfase que no es cero, lo cual nos previene de confiar mucho en la calibración del aparato.
- Se tiene un período de aproximadamente de:  $752.4 \times 10^{-2}$  mm, es decir, cuando el tornillo micrométrico recorre una distancia de 7.524 mm, se genera un desfase de  $2\pi$  radianes ( $360^\circ$ ) en la polarización del láser de bombeo. Con este dato y con ayuda de la ecuación para el funcionamiento del Babinet (H.4) se pueden obtener características de los cristales que componen

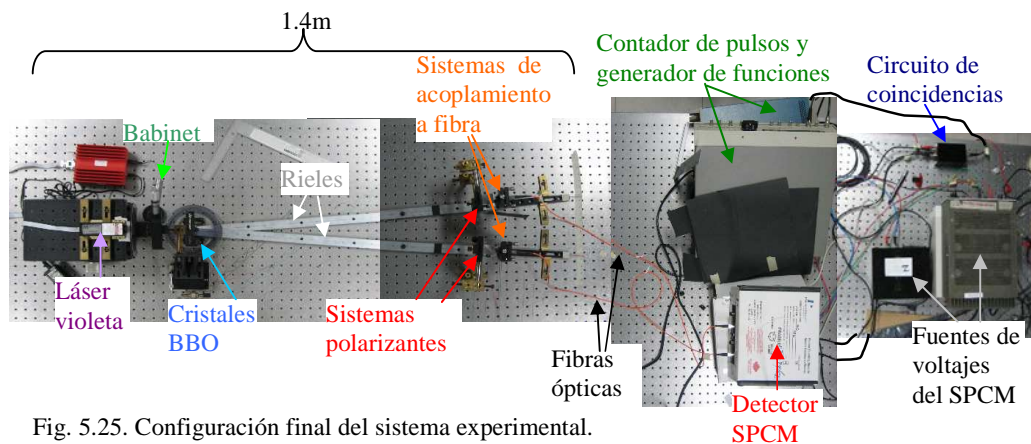
el Babinet (que sabemos que es de cuarzo), pero por cuestiones de tiempo dicho análisis queda fuera de los objetivos del presente trabajo.

- d) Tanto los datos como el ajuste nos advierten que nuestro sistema experimental no está calibrado, ya que existe un “ruido” (o si se quiere ver, una especie de componente de DC) en el número de coincidencias de aproximadamente 120, cuando teóricamente debería ser menor.

Con esto podemos asumir que el compensador Babinet cumple con las características necesarias de compensación para nuestro experimento, aunque se sufre de fluctuaciones considerables en el número de coincidencias, por lo que debemos considerar que este elemento puede genera ciertos problemas en el experimento.

Por lo pronto, colocamos el desfase en una posición donde el número de coincidencias sea máximo, en nuestro caso escogemos 17.79mm que es donde la ecuación de ajuste nos indica un máximo de coincidencias y que podemos interpretar como un desfase de  $0^\circ$  o  $2\pi$  radianes.

Finalmente, el montaje de nuestro experimento ya cuenta con todo lo necesario para intentar violar la desigualdad de Bell; además, hemos aprendido de forma básica cómo manejar cada uno de los elementos incorporados al experimento y los posibles errores que podrían provocar, así como dar interpretación a los resultados en base a ellos. En la figura 5.25 se muestra la configuración final del sistema experimental para tener una idea del tamaño y distribución del montaje.



### 5.3 Resultados del primer montaje experimental

Un vez que tenemos montado todo el sistema experimental, podemos proceder a hacer la calibración de la forma en que se sugirió en la sección 4.6 y después haremos la toma de los datos necesarios para calcular el parámetro de Bell y, de este modo, probar que se viola la desigualdad.

A lo largo de todo el tiempo en que se estuvo trabajando se realizaron varias corridas para calibrar las coincidencias y se obtuvieron varios valores del parámetro de Bell; sin embargo, por cuestiones de tiempo, aquí sólo presentamos de forma amplia el proceso que se siguió para calcular dos valores del parámetro de Bell, en cuanto a los otros parámetros calculados solo mencionaremos los resultados obtenidos.

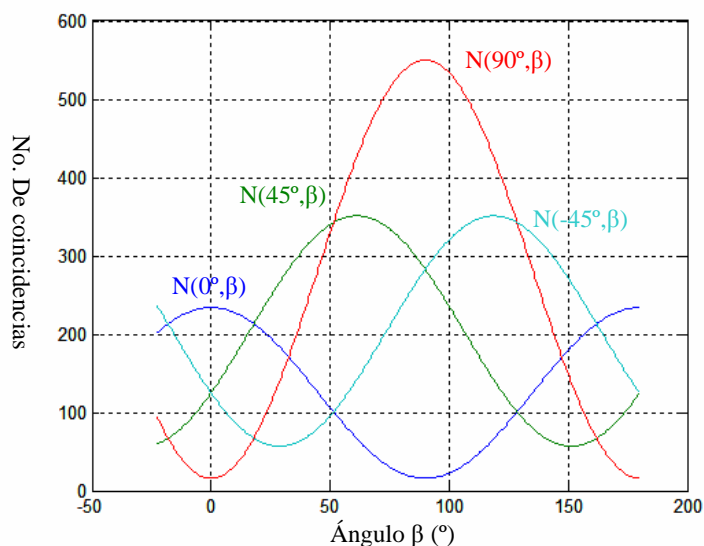
### 5.3.1 Primer conjunto de datos

El primer conjunto de datos representativo lo escogemos de forma que el desfase  $\phi$  y el ángulo de la polarización de bombeo  $\theta_l$  no sean los óptimos, pero que tampoco estén muy alejados de lo que los dispositivos (Babinet y ángulo de los cristales) marcarían como caso ideal.

Para esto colocamos los cristales a un ángulo  $\theta_l = 37.5^\circ$ , que en la montura rotatoria de los cristales es equivalente a que la marca indique  $322.5^\circ$  y que el Babinet genere el desfase equivalente a 19mm, que es equivalente a un desfase de  $\phi = 59.5^\circ$  (suponiendo que nuestro cero en desfase esta en 17.79mm). Con estos parámetros, se procede a hacer la toma de datos de las coincidencias de los casos  $N(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 90^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 90^\circ)$  y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , que llamamos “datos de calibración”, los valores obtenidos son:

$$N(0^\circ, 0^\circ) = 234; \quad N(90^\circ, 90^\circ) = 550; \quad N(0^\circ, 90^\circ) = 16; \quad N(45^\circ, 45^\circ) = 328$$

Al introducir estos datos en nuestra simulación computarizada, las gráficas obtenidas son:

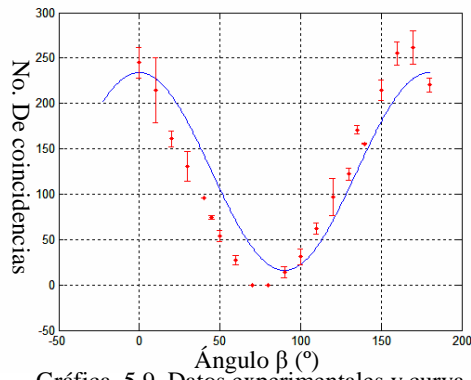


Gráfica. 5.8. Gráficas teóricas obtenidas en base a los datos de calibración.

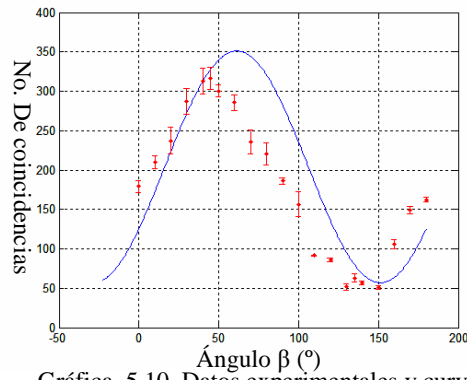
La simulación nos dice que según los datos de calibración y las gráficas mostradas,  $\theta_l = 32.57^\circ$ ,  $\phi = 43.37^\circ$ , y el parámetro de Bell obtenido para estos datos es de  $S = 2.16$ . En cuanto al valor de  $\theta_l$ , la simulación se aproxima bastante, pero para  $\phi$  se aleja considerablemente del valor marcado por el Babinet, esto es de esperarse ya que como vimos en la sección que habla de la colocación del compensador Babinet, la forma en que trabaja éste puede generar errores cuando se cambia el desfase considerablemente (como es el caso). Sin embargo, lo que a nosotros nos interesa es el valor de S, que en este caso fue mayor a 2, por lo que es conveniente intentar construir con datos experimentales las gráficas mostradas en la gráfica 5.8 y después calcular el parámetro de Bell experimental.

Como primer paso tomamos la serie de datos pertenecientes al conjunto de la forma  $N(0^\circ, \beta)$ , lo cual se muestra en la gráfica 5.9. Luego para el  $N(45^\circ, \beta)$  que se muestra en la gráfica 5.10, para el  $N(90^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.11 y para  $N(-45^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.12.

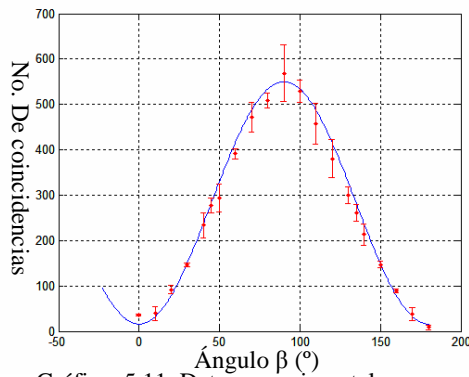




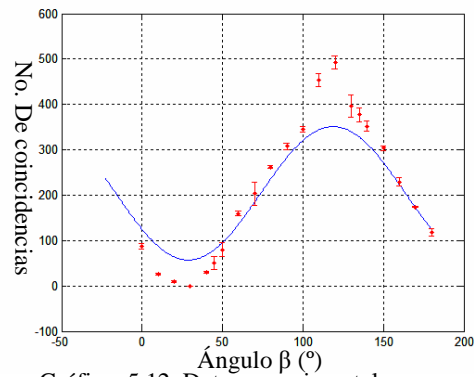
Gráfica. 5.9. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(0^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.10. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(45^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.11. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(90^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.12. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(-45^\circ, \beta)$

De las gráficas observamos varias cosas no esperadas:

- En cuanto a las amplitudes, es notable que solo los datos correspondientes a  $N(90^\circ, \beta)$  se ajustan de manera perfecta a la curva teórica. Para los datos  $N(0^\circ, \beta)$  la amplitud es un poco más grande pero, en cierta medida, sigue siendo parecida a la amplitud teórica. Los más interesantes son los casos  $N(45^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$  en los que la amplitud de los primeros datos es notoriamente menor que la amplitud teórica y la amplitud de los segundos es considerablemente mayor.
- En cuanto al desfase de los datos experimentales respecto de las curvas teóricas, es curioso ver que solo los casos  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(45^\circ, \beta)$  presentan un desplazamiento hacia la izquierda de aproximadamente  $15^\circ$  en ambas gráficas. Sin embargo, los casos  $N(90^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$  no presentan ningún desplazamiento. Si los datos de los casos  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(45^\circ, \beta)$  fueran desplazados hacia la derecha  $15^\circ$  se colocarían sobre las curvas teóricas de forma parecida a los otros dos.
- Un punto importante a notar es que la predicción teórica de los casos  $N(45^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$  no genera curvas con máximos en  $45^\circ$  y  $-45^\circ$  sino que están desplazados  $-15^\circ$  y  $15^\circ$ , respectivamente. Es de notar que los datos  $N(-45^\circ, \beta)$  si siguen este comportamiento, y si hacemos que los de  $N(45^\circ, \beta)$  se desplacen  $15^\circ$  a la derecha como se menciona antes, también se ajustarían al comportamiento teórico.

La explicación que nosotros damos de estos fenómenos es que, dado lo mencionado en la sección anterior, los cristales no están exactamente a  $45^\circ$  sino a  $32.57^\circ$ , cuya diferencia es de  $12.5^\circ$  lo que podría explicar el desplazamiento tanto experimental como teórico comentado en los casos  $N(0^\circ, \beta)$ ,  $N(45^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$ . Pero surge la pregunta de por qué el caso  $N(90^\circ, \beta)$  no presenta dicho desplazamiento; probablemente sea debido a que, como se tienen muchas más coincidencias en este caso (lo cual indica que hay más fotones de polarización horizontal en la base de los cristales), el número alto de coincidencias compensa u oculta este desplazamiento. En cuanto a las amplitudes, los errores son debidos, de nuevo, al ángulo de los cristales que generan distintos números de coincidencias verticales y horizontales. A esta explicación hay que agregar la del error que genera el funcionamiento del Babinet, el cual provoca que, cuando el desfase no es múltiplo de  $2\pi$  radianes, la

polarización con que el rayo de bombeo llega a los cristales sea elíptica y por tanto se tenga una mayor incertidumbre en el ángulo  $\theta_i$ . Algo a notar es que cambios en el desfase provocados por el Babinet influyen de manera considerable en el número de coincidencias de los casos graficados, pues al parecer genera problemas en el acoplamiento de fase del rayo de bombeo en los cristales, lo cual explicaría la diferencia de las amplitudes teóricas con la de los datos.

Sobre las incertidumbres usadas en las gráficas 5.9-5.12, es de notar que ya no se usó la incertidumbre de  $\pm 50$  utilizada cuando se maneja el Babinet, ahora las incertidumbres son distintas y se obtuvieron en base a los siguientes argumentos.

- Los datos experimentales de las gráficas mencionadas son el promedio obtenido de la repetición consecutiva de la medición del dato, es decir, cada dato en las gráficas es el promedio de tres datos experimentales.
- La incertidumbre usada en cada dato será la desviación estándar de los datos respecto de su promedio. Algo curioso es que, según los datos de las mediciones, en general (hay excepciones), cuando el número de coincidencias decrece, la desviación estándar respecto del promedio de dichos datos también disminuye, por ejemplo: para el dato  $N(0^\circ, 0^\circ)$  se obtuvieron los datos [262,228,245] cuyo promedio es 245 y la desviación estándar es 17, para el  $N(0^\circ, 80^\circ)$  los datos fueron [0,0,0] cuyo promedio es cero y la desviación estándar es 0.

Una vez entendidas las gráficas de las coincidencias tenemos que comprobar que el valor de  $S$ , predicho por la simulación computarizada, es aproximado a lo que se obtiene en realidad. Para esto tomamos las mediciones de coincidencias en el conjunto de ángulos:  $N(-45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(-45^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 67.5^\circ)$ ,  $N(45^\circ, 112.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 22.5^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 67.5^\circ)$ , y  $N(90^\circ, 112.5^\circ)$ . En la tabla 5.1 se muestran los resultados de dichos casos.

Mediante el uso de las ecuaciones 4.88, 4.89 y 4.90, se calculan las funciones de correlación de estos datos ( $E(-45^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $E(0^\circ, -22.5^\circ)$ ,  $E(-45^\circ, 22.5^\circ)$  y  $E(0^\circ, 22.5^\circ)$ ), el parámetro de Bell y su incertidumbre estadística, respectivamente. Estos resultados son mostrados en la tabla 5.2.

$\alpha$ ( $^\circ$ )	$\beta$ ( $^\circ$ )	No. de cuentas	Incertidumbre ( $\pm$ )
-45	-22.5	214	26.16
-45	22.5	4	2.83
-45	67.5	148	8.49
-45	112.5	432	12.73
0	-22.5	202	4.24
0	22.5	127	9.90
0	67.5	12	0.71
0	112.5	93	12.02
45	-22.5	60	27.58
45	22.5	248	5.66
45	67.5	218	1.41
45	112.5	100	7.78
90	-22.5	83	0.71
90	22.5	92	10.61
90	67.5	360	0.71
90	112.5	451	22.63

Vemos que para el conjunto de datos de la tabla 5.1 se viola la desigualdad de Bell ( $S = 2.3106 \pm 0.0606$ ) por cinco desviaciones estándar lo cual es un buen resultado. Sin embargo, este resultado difiere bastante del predicho por la simulación computarizada. Esto es aceptable debido a que la simulación está construida en base a las ecuaciones teóricas, por lo que es, en cierta forma, ideal y no toma en cuenta errores experimentales.

$E(-45^\circ, -22.5^\circ)$	0.3500
$E(-45^\circ, 22.5^\circ)$	-0.7347
$E(0^\circ, -22.5^\circ)$	0.7108
$E(0^\circ, 22.5^\circ)$	0.5151
$S$	2.3106
$\sigma_s$	$\pm 0.0606$

Para tener idea de qué tanto varía el parámetro de Bell de un conjunto de datos a otro, repetimos la toma de datos con las mismas condiciones  $\theta_i = 37.5^\circ$  y  $\phi = 30.07^\circ$ ; los resultados se muestran en la tabla 5.3.

Vemos que en la repetición de la toma de datos, el parámetro cambio ( $S = 2.1976 \pm 0.0608$ ); sin embargo, se ajustó mejor a la predicción de la simulación, por lo que podemos concluir que la simulación computarizada es bastante confiable. En este nuevo caso se sigue violando la desigualdad de Bell con la misma desviación estándar.

Creemos que el cambio en el valor de S entre los primeros datos y su repetición es debido a fluctuaciones en los voltajes que alimentan al detector, así como a posibles fluctuaciones en la potencia del láser; también, a las posibles imperfecciones del montaje de los cristales y del Babinet mencionadas antes. Sin embargo, podemos ver que a pesar de esta variación el parámetro de Bell se mantuvo arriba de 2, por lo que las variaciones no son lo suficientemente grandes como para afectar de manera considerable nuestro objetivo, que era violar la desigualdad de Bell

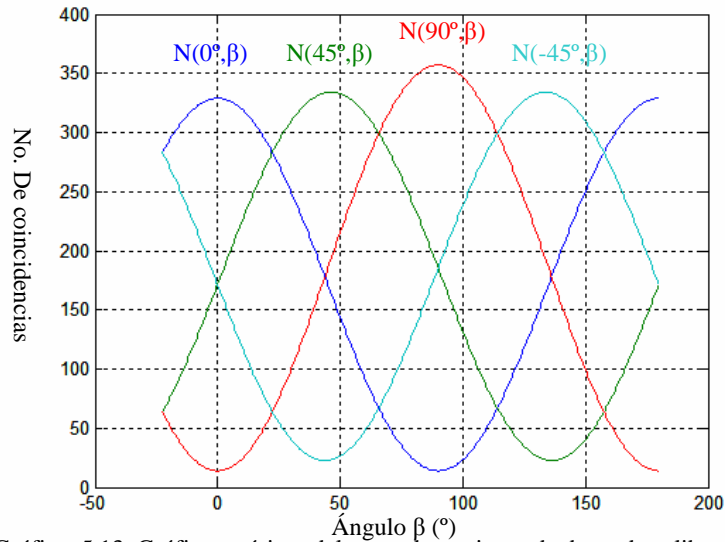
$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	No. de cuentas	Incertidumbre ( $\pm$ )
-45	-22.5	251	26.16
-45	22.5	8	2.83
-45	67.5	160	8.49
-45	112.5	414	12.73
0	-22.5	196	4.24
0	22.5	141	9.90
0	67.5	11	0.71
0	112.5	76	12.02
45	-22.5	99	27.58
45	22.5	240	5.66
45	67.5	220	1.41
45	112.5	111	7.78
90	-22.5	84	0.71
90	22.5	107	10.61
90	67.5	359	0.71
90	112.5	419	22.63
E(-45,-22.5)		0.2904	
E(-45,22.5)		-0.6921	
E(0,-22.5)		0.7077	
E(0,22.5)		0.5074	
S		2.1976	
$\sigma_s$		$\pm 0.0608$	

### 5.3.2 Segundo conjunto de datos

Hay que recordar que, para el primer conjunto de datos, las variables  $\theta_i$  y  $\phi$  no eran óptimas, ahora tenemos que intentar llevarlas lo más próximo que se pueda a sus valores ideales. Primero, se debe ajustar  $\theta_i$  igualando  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ . Después se ajusta  $\phi$  para maximizar  $N(45^\circ, 45^\circ)$  y se buscará que  $N(0^\circ, 90^\circ)$  sea cero. Rotando los cristales y moviendo el desfase generado por el Babinet se obtienen los siguientes valores:

$$N(0^\circ, 0^\circ) = 329; \quad N(90^\circ, 90^\circ) = 357; \quad N(0^\circ, 90^\circ) = 14; \quad N(45^\circ, 45^\circ) = 334$$

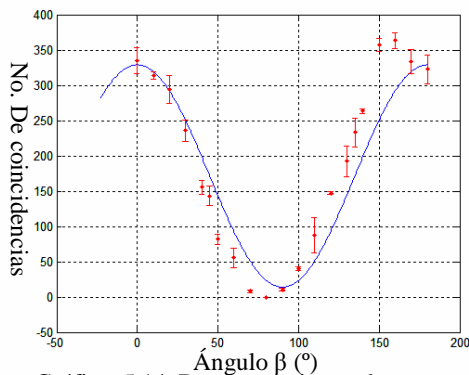
Al introducir estos datos en nuestra simulación computarizada, las gráficas obtenidas son:



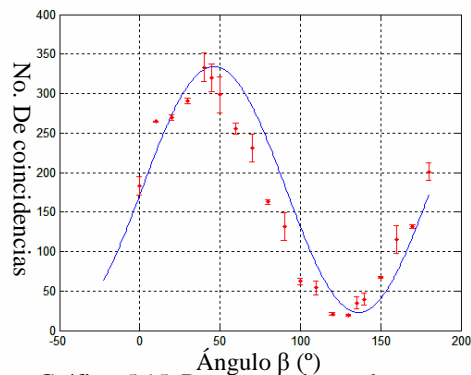
Gráfica. 5.13. Gráficas teóricas del segundo conjunto de datos de calibración.

La simulación indica que según los datos de calibración y las gráficas mostradas,  $\theta_i = 43.7^\circ$ ,  $\phi = 19^\circ$ , y el parámetro de Bell obtenido para estos datos sería de  $S = 2.5353$ . Al comparar estos resultados con los valores experimentales (el desfase del Babinet y el ángulo al que están girados los cristales) vemos que experimentalmente:  $\theta_i = 45^\circ$  (lo que es equivalente a que la marca de la montura de los cristales indique  $315^\circ$ ) y  $\phi = 1^\circ$  ya que, según la escala del Babinet, éste tiene un desfase de  $1775\text{mm}$ . La simulación aproxima bien  $\theta_i$ , pero para  $\phi$  se vuelve a alejar del valor marcado por el Babinet.

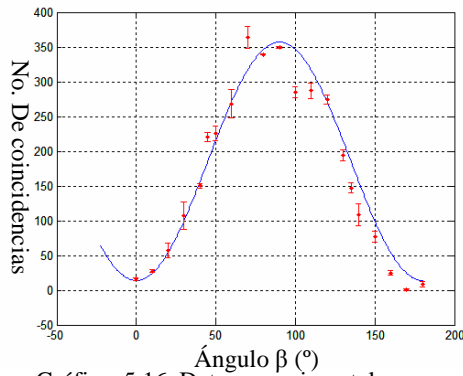
Como primer conjunto de datos, tomamos la serie de datos pertenecientes al conjunto de la forma  $N(0^\circ, \beta)$ , lo cual se muestra en la gráfica 5.14. Luego para el  $N(45^\circ, \beta)$  que se muestra en la gráfica 5.15, para el  $N(90^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.16 y para  $N(-45^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.17.



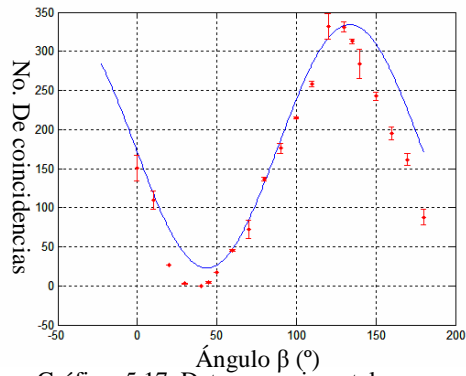
Gráfica. 5.14. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(0^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.15. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(45^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.16. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(90^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.17. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(-45^\circ, \beta)$

De las gráficas observamos varias cosas:

- Las amplitudes de las gráficas teóricas ya se igualaron (dentro del rango de error) con las amplitudes que tienen los datos experimentales. Esto nos hace concluir que la amplitud de las gráficas depende mucho del ángulo  $\theta_i$ .
- En cuanto al desfase de los datos experimentales con las curvas teóricas, es curioso ver que ahora todos los casos ( $N(0^\circ, \beta)$ ,  $N(45^\circ, \beta)$ ,  $N(90^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$ ) presentan un desplazamiento hacia la izquierda de aproximadamente  $10^\circ$ . Si los datos de todos los casos fueran desplazados hacia la derecha  $10^\circ$  se colocarían sobre las curvas teóricas de forma precisa.

La razón que damos para explicar el desfase de  $10^\circ$  sigue siendo en base a la incertidumbre en la colocación del ángulo de los cristales y al desfase provocado por el Babinet. Sin embargo, debemos tomar en cuenta otro factor que no habíamos considerado hasta ahora, en la sección de “coincidencias en el cono de fotones infrarrojos”, vimos que la superposición de los conos tiene un ancho de  $3.25^\circ$  aproximadamente, nosotros escogimos colocar los rieles a  $4.5^\circ$ , pero no sabemos si en esta posición se tienen el mismo número de fotones infrarrojos verticales que de horizontales, si no estuvieran igualados, se tendría una ligera diferencia entre los casos  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$  (como parece ser nuestro caso  $N(0^\circ, 0^\circ)=329$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)=357$ ), lo cual influiría directamente en el valor del ángulo  $\theta_i$  y podría presentarse en las gráficas como un corrimiento, lo conveniente sería posicionar los rieles a un ángulo distinto en el cono y checar si se compensa el corrimiento, pero por cuestiones de tiempo, no fue posible llevar a cabo esa prueba y presentarla en este trabajo, ya que hacer la calibración para igualar dichos casos reposicionando los rieles es demasiado complicado y tardado, debido a que esto implica quitar los sistemas de polarización para poder mover los rieles con libertad.

Ahora, la  $S$  predicha por la simulación computarizada debe ser comprobada experimentalmente. Al igual que en el primer conjunto de datos, repetimos dos veces la medición de  $S$  para ver la variación del parámetro de una corrida a otra manteniendo los mismos parámetros  $\theta_i$  y  $\phi$ . En la tabla 5.4 se muestran los resultados para la primera corrida, y el resultado del cálculo del parámetro de Bell, y en la tabla 5.5 los resultados de la repetición.

Vemos que para el conjunto de datos de la tabla 5.4 se viola la desigualdad de Bell ( $S = 2.6040 \pm 0.05$ ) por doce desviaciones estándar lo cual es un resultado de muy buena calidad. Este resultado no difiere considerablemente del predicho por la simulación computarizada, esta dentro de un error aceptable (2.7%).

La repetición del segundo conjunto de datos (con las mismas condiciones de  $\theta_i$  y  $\phi$ ) también tuvo un cambio pequeño en el valor del parámetro ( $S = 2.6628 \pm 0.0527$ ), la violación a la desigualdad de Bell es por 12.5 desviaciones estándar, que es el mejor valor conseguido en todo el trabajo. En este caso, el resultado de  $S$  tampoco esta muy lejos de lo predicho por la simulación, el error es de 4.8%.

Tabla 5.4. Primera corrida del segundo conjunto de datos.			
$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	No. de cuentas	Incertidumbre ( $\pm$ )
-45	-22.5	360	32
-45	22.5	57	18.5
-45	67.5	125	12
-45	112.5	379	42.5
0	-22.5	411	31.5
0	22.5	283	4.5
0	67.5	32	6
0	112.5	105	1
45	-22.5	122	13
45	22.5	420	23.5
45	67.5	321	19.5
45	112.5	39	1.5
90	-22.5	56	2
90	22.5	86	0.5
90	67.5	345	15.5
90	112.5	393	34
E(-45,-22.5)		0.4677	
E(-45,22.5)		-0.7855	
E(0,-22.5)		0.7915	
E(0,22.5)		0.5594	
S		2.6040	
$\sigma_s$		$\pm 0.05$	

Tabla 5.5. Repetición del segundo conjunto de datos.			
$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	No. de cuentas	Incertidumbre ( $\pm$ )
-45	-22.5	296	32
-45	22.5	20	18.5
-45	67.5	101	12
-45	112.5	294	42.5
0	-22.5	348	31.5
0	22.5	274	4.5
0	67.5	20	6
0	112.5	103	1
45	-22.5	96	13
45	22.5	373	23.5
45	67.5	282	19.5
45	112.5	36	1.5
90	-22.5	52	2
90	22.5	85	0.5
90	67.5	314	15.5
90	112.5	325	34
E(-45,-22.5)		0.4916	
E(-45,22.5)		-0.8451	
E(0,-22.5)		0.8038	
E(0,22.5)		0.5222	
S		2.6628	
$\sigma_s$		$\pm 0.0527$	

Posteriormente se realizaron otras corridas experimentales variando ligeramente el desfase provocado por el Babinet (a 18mm) y dejando  $\theta_i = 45^\circ$ , los resultados obtenidos se muestran en las tablas 5.6 y 5.7.

Tabla 5.6. Primera corrida posterior.			
$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	Cuentas	Incert. ( $\pm$ )
-45	-22.5	302	38.5
-45	22.5	33	2
-45	67.5	97	17.5
-45	112.5	281	12.5
0	-22.5	151	41
0	22.5	127	24.5
0	67.5	15	3.5
0	112.5	52	6.5
45	-22.5	24	7.5
45	22.5	208	24.5
45	67.5	180	15
45	112.5	58	1
90	-22.5	104	20
90	22.5	64	0.5
90	67.5	318	24.5
90	112.5	327	24.5
S		2.4731	
$\sigma_s$		$\pm 0.0649$	

Tabla 5.7. Segunda corrida posterior.			
$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	Cuentas	Incert. ( $\pm$ )
-45	-22.5	225	38.5
-45	22.5	37	2
-45	67.5	132	17.5
-45	112.5	306	12.5
0	-22.5	233	41
0	22.5	176	24.5
0	67.5	22	3.5
0	112.5	65	6.5
45	-22.5	39	7.5
45	22.5	159	24.5
45	67.5	210	15
45	112.5	60	1
90	-22.5	64	20
90	22.5	63	0.5
90	67.5	367	24.5
90	112.5	376	24.5
S		2.4632	
$\sigma_s$		$\pm 0.0624$	

### 5.3.3 Conclusiones para el primer montaje experimental

Como se puede ver, este primer montaje permitió que alcanzáramos el objetivo planteado para este trabajo. Hemos podido violar la desigualdad de Bell, lo cual nos confirma que tenemos un sistema experimental que produce fotones en estados EPR y que nuestro sistema soporta la idea de que la mecánica cuántica es de carácter no local.

Algo que puede preocupar es que, para condiciones donde las variables están fijas, el valor de  $S$  varía de una corrida experimental a otra; sin embargo, como podemos ver de los datos, aunque haya tales variaciones, estas siempre son de una magnitud que, salvo que se este muy cerca de  $S = 2$ , podemos estar seguros de que el estado enredado (EPR) de los fotones producidos podrá violar la desigualdad. Por otro lado, esto también nos muestra que nuestro sistema experimental es muy sensible, ya que cualquier movimiento que se haga a los cristales, el compensador o a la posición de los rieles, influye de manera considerable en el valor de  $S$ , por lo cual se debe trabajar con sumo cuidado.

A partir del primer conjunto de datos, la configuración de  $\theta_l = 37.5^\circ$  y  $\phi = 19mm$  usada en dicha corrida es el límite que se encontró para el cual tenemos  $S > 2$ , para  $\theta_l$  menores y  $\phi$  mayores, la simulación nos indica que  $S$  ya estará por debajo de 2 (cabe señalar que se llevó a cabo un caso con esas condiciones y se obtuvo  $S = 1.93$ ), pero este tipo de valores ya no nos asegura que tengamos fotones en estados EPR.

Finalmente, hay que señalar que todavía tenemos dudas sobre “¿Qué tanto afectan las variaciones que genera el funcionamiento del Babinet?”, ya que el más mínimo movimiento de éste modifica drásticamente el número de coincidencias. También sería conveniente hacer más pruebas sobre la estabilidad en el número de coincidencias, ya que, como se puede apreciar en los datos, entre más grande es el número de coincidencias detectado, mayor es la desviación estándar de estos. Pero, de nuevo, por cuestiones de tiempo estas pruebas no han podido ser llevadas a cabo, esperamos realizarlas en un futuro cercano.

## 5.4 Segundo montaje experimental

Con el primer montaje experimental encontramos que, en base a la teoría vista, es cierto que cuando se trabaja con cristales delgados, es relativamente sencillo poder encontrar  $S > 2$ , ya que las condiciones de acoplamiento de fase son más simples de obtener o, como se menciona en las hojas de datos, los cristales delgados tienen un amplio rango de acoplamiento de fase. La teoría también nos menciona (apéndice E2) que el acoplamiento de fase, el cual influye en la intensidad, es afectado por la longitud del cristal (ancho) que recorre la luz que se va a convertir, por lo que si se usan cristales más gruesos será más complicado poder generar un estado EPR.

Afortunadamente, en el laboratorio se cuenta con **dos cristales BBO de  $5 \times 5 \times 2mm$** , de los cuales solo sabemos que según el fabricante tienen un ángulo de corte de  $30^\circ$ . Con esto esperamos poder probar lo anteriormente dicho.

### 5.4.1 Montaje de los cristales

El dispositivo experimental es exactamente el mismo que el que se utilizó en el primer montaje, la diferencia reside en el montaje de los cristales, ya que este nuevo par de cristales no están colocados en una montura y se encuentran separados. Esto nos llevó a implementarles una montura que nos permitiera colocarlos juntos sobre la montura rotatoria utilizada para los primeros cristales, de forma que también tengamos la posibilidad de rotarlos.

En la figura 5.26 se muestra la forma en que se montaron el par de cristales.

El principal problema con este montaje es que, para fijar los cristales, fue necesario utilizar cinta de doble cara que tiene un adhesivo bastante fuerte, por lo que, una vez montados los cristales, se torna difícil moverlos (cabeceo) para corregir su posición y también se vuelve complicado ponerlos de forma paralela (cara con cara). Es importante recordar que los cristales deben ser puestos a  $45^\circ$  respecto de la horizontal de la mesa de trabajo, de forma que la polarización de bombeo sea convertida por ambos cristales con la misma probabilidad y se tenga igual número de fotones infrarrojos verticales y horizontales. Además de que los cristales se deben colocar a  $90^\circ$  uno respecto del otro.

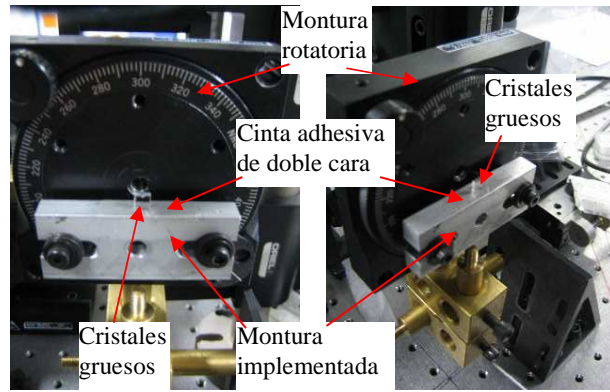
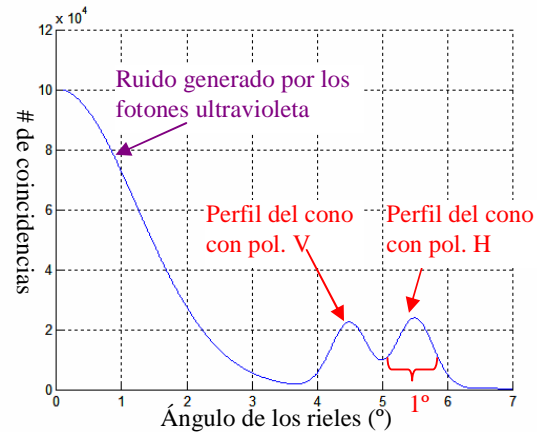


Fig. 5.26. Montura construida para los cristales de 2mm que tenga igual número de fotones infrarrojos verticales y horizontales. Además de que los cristales se deben colocar a  $90^\circ$  uno respecto del otro.

Una vez que están colocados los cristales, haremos la prueba de ver donde se encuentran los conos de infrarrojo para así saber dónde posicionar los rieles y proceder a hacer el montaje de los polarizadores y tomar datos de coincidencias. Como en esta ocasión los cristales son más gruesos y producen más fotones, podemos intentar ver directamente las cuentas de fotones infrarrojos detectados y no las coincidencias, para así checar más fácilmente la posición de los conos infrarrojos.

Al realizar la medición de las cuentas moviendo los rieles (sin los polarizadores, sin Babinet y conectando las salidas del detector directamente al contador de pulsos) se encontraron cosas inesperadas: cuando se analizó el perfil de los conos, se encontraron dos picos separados, uno a  $4.5 \pm 0.25^\circ$  y otro a  $5.5 \pm 0.25^\circ$ , con un ancho de  $1 \pm 0.25^\circ$  ambos y forma marcadamente gaussiana, cada pico es el perfil del cono producido por un cristal, lo cual nos indica que el ángulo de corte de los cristales no es de  $30^\circ$  exactamente, y además que los cortes de los cristales son diferentes entre ellos, lo cual será un problema; además de esto, ahora son muy apreciables las cuentas de fotones infrarrojos (lo cual no se pudo hacer con los cristales delgados), a tal grado que *en una ventana de conteo de 0.5s* se tienen  $22000 \pm 1000$  cuentas en un canal y  $23500 \pm 1000$  en el otro. Un ejemplo (ajustado teóricamente en base a estos datos mencionados, ya que no se cuenta con la suficiente cantidad de datos para construir la gráfica experimental) de cómo se observó el perfil de las cuentas de fotones infrarrojos al variar el ángulo de la posición de los rieles se muestra en la gráfica 5.18.



Graf. 5.18. Perfil de cuentas de los cristales gruesos.

Esto nos obliga a tener que traslapar manualmente lo mejor que se puedan los conos, para lo cual hay que cambiar el ángulo de incidencia del rayo de bombeo con el cristal que tiene el cono mas grande de forma que el ángulo entre el rayo de bombeo y el eje óptico del cristal disminuya y por tanto el ángulo de apertura del cono infrarrojo también disminuya. Esto lo hacemos despegando el cristal con el cono mas grande y girándolo sobre su eje vertical un poco (ver figura 5.27), cada vez que se gire el cristal hay que hacer un análisis del perfil de los conos para checar si el giro que se realizó al cristal fue suficiente para traslapar los

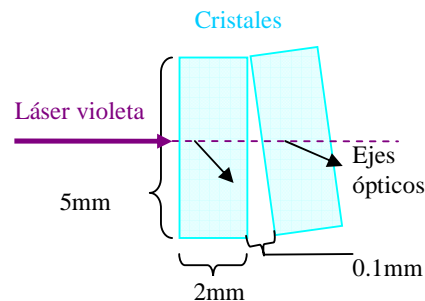
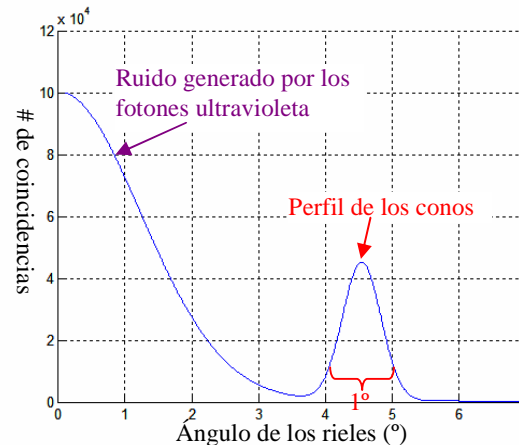


Fig. 5.27. Diagrama esquemático de cómo se gira el cristal visto desde arriba. No esta a escala y los ejes ópticos son solo representaciones para entender como están, ya que hay que recordar que deben estar cruzados.



conos (esto es bastante complicado y tardado, así que hay que tener mucho cuidado y paciencia). Este proceso de giros se hace hasta que se traslapen los conos. Una vez que se tienen traslapados los conos, en la gráfica del perfil de los mismos solo se apreciará un solo pico de  $45500 \pm 2000$  cuentas con un ancho de  $1^\circ \pm 0.25^\circ$ , esto se muestra en la gráfica 5.19.



Graf.. 5.19. Perfil de cuentas con los dos picos superpuestos.

Ahora ya tenemos los dos conos empalmados, pero la posición en que quedaron los cristales nos asegura que *la condición de acoplamiento de fase será mínima si nos es que se ha eliminado*, lo cual nos impedirá crear estados EPR, ya que el caso  $N(45^\circ, 45^\circ)$  depende altamente de esta condición y la compensación que haga el Babinet. Sin embargo, a pesar de esto procedemos a realizar el experimento.

Después de haber encontrado dónde se encuentra el máximo del cono de fotones infrarrojos, fijamos los rieles (a  $4.5^\circ$ ) y colocamos los sistemas de polarización y el Babinet. Una prueba del número de cuentas que se tienen después de colocar estas partes nos dice que el número de cuentas disminuyó hasta  $16000 \pm 900$  cuentas en 0.5s lo que nos indica que se pierden muchos fotones en la fibra óptica, el acoplamiento a la fibra óptica, los filtros de infrarrojo y el Babinet.

Nota importante: debido a la cantidad de fotones infrarrojos con que se cuenta, en los siguientes casos se cambia la **ventana de conteo de pulsos** de 100s a solo **0.5s**, con el propósito de agilizar los experimentos y no tener que manejar grandes cantidades de coincidencias.

## 5.5 Resultados del segundo montaje experimental

Del proceso seguido para el primer montaje experimental, podemos ver que un factor importante es maximizar el número de coincidencias del caso  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , y una vez hecho esto tratar de igualar  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ , así que en esta ocasión comenzaremos por maximizar solamente el caso  $N(45^\circ, 45^\circ)$  y veremos que ocurre al realizar el experimento.

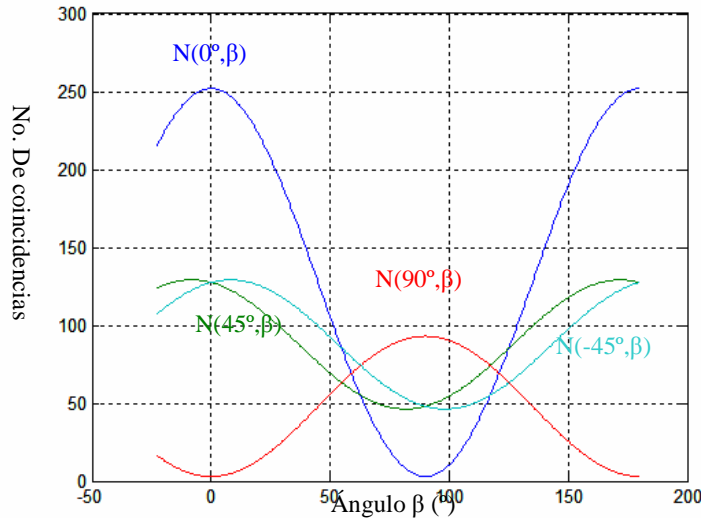
### 5.5.1 Primer conjunto de datos

Para el primer conjunto de datos vamos a escoger  $\theta_i = 45^\circ$  y a  $\phi$  de forma que sea máximo (ya no es de tanto interés el desfase que se tiene). Con estos parámetros, procedemos a la toma de datos de las coincidencias de los casos  $N(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $N(90^\circ, 90^\circ)$ ,  $N(0^\circ, 90^\circ)$  y  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , los valores obtenidos son:

$$N(0^\circ, 0^\circ) = 252; \quad N(90^\circ, 90^\circ) = 93; \quad N(0^\circ, 90^\circ) = 3; \quad N(45^\circ, 45^\circ) = 76$$

Algo a destacar es que, en este caso, el valor de  $N(45^\circ, 45^\circ)$  no pudo llegar a sobrepasar las 80 coincidencias por más que se cambió el desfase generado por el Babinet, por lo que decidimos dejarlo en una de las posiciones en que se tenía un máximo de coincidencias.

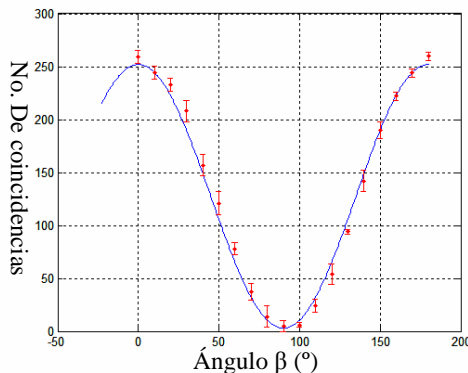
Al introducir estos datos en nuestra simulación computarizada, las gráficas obtenidas son:



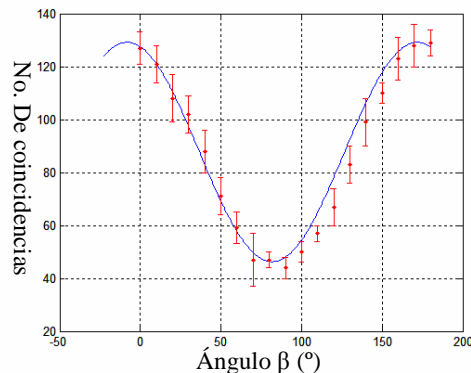
Gráfica. 5.20. Gráficas teóricas obtenidas en base a los datos de calibración.

La simulación nos dice que  $\theta_l = 58.98^\circ$ ,  $\phi = 99.03^\circ$ , y el parámetro de Bell obtenido para estos datos sera de  $S = 1.17$ . Todos estos valores están extremadamente lejos de lo que realmente se tiene experimentalmente; no obstante, es interesante ver que  $\theta_l = 58.98^\circ$  a pesar de que estamos seguros de que los cristales fueron colocados a  $45 \pm 1^\circ$ , de la misma forma,  $\phi = 99.03^\circ$  cuando colocamos el desfase de forma que  $N(45^\circ, 45^\circ)$  fuera máximo. Aunque en este experimento no intentamos igualar  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ , las condiciones de que experimentalmente  $\theta_l = 45^\circ$  nos debería dar esta igualdad, además algo que soporta fuertemente esta suposición es que en la sección de montaje de los cristales se vio que en los conos hay, aproximadamente, igual número de fotones infrarrojos verticales que horizontales en ambos rieles (22000 y 23500 respectivamente), por lo que lógicamente debería haber igual número de coincidencias para  $N(0^\circ, 0^\circ)$  que para  $N(90^\circ, 90^\circ)$ . Esto nos lleva a concluir que el Babinet no está compensando como es debido y está provocando que la polarización lineal del láser de bombeo se transforme a elíptica y haga que el ángulo al que llega la polarización de bombeo a los cristales no sea el indicado (y por tanto  $\theta_l$  no sea la que marca la montura de los cristales,  $45^\circ$ ). Nuestra suposición, en base a todo lo visto hasta este punto, es que la condición de acoplamiento no se esta cumpliendo y el Babinet no puede compensar una fase que no esta bien definida, de esto hablaremos mas adelante.

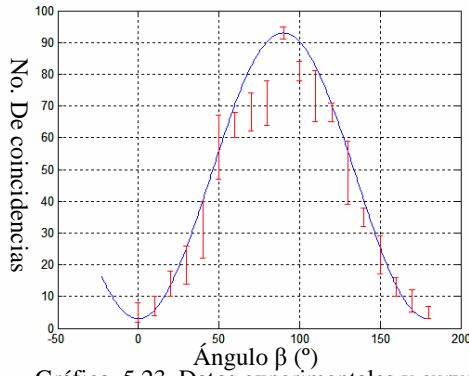
Ahora realizamos una toma de datos para ver que tan exacta fue la simulación para generar las gráficas de este caso. Primero tomamos los datos pertenecientes al conjunto  $N(0^\circ, \beta)$ , lo cual se muestra en la gráfica 5.21. Luego para  $N(45^\circ, \beta)$ , que se muestra en la gráfica 5.22, para  $N(90^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.23 y para  $N(-45^\circ, \beta)$  en la gráfica 5.24.



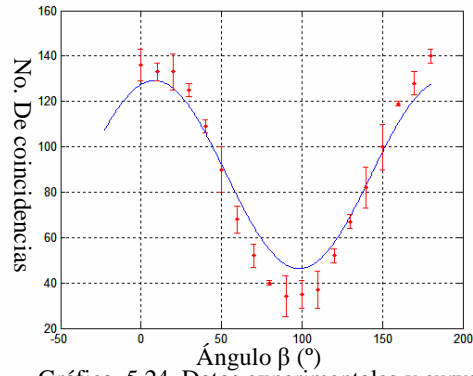
Gráfica. 5.21. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(0^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.22. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(45^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.23. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(90^\circ, \beta)$



Gráfica. 5.24. Datos experimentales y curva teórica para el caso  $N(-45^\circ, \beta)$

De las gráficas observamos varias cosas importantes. Tanto las amplitudes como la posición angular de los datos son bastante precisas, salvo un poco de error en el caso  $N(90^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$ ; en el  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(45^\circ, \beta)$  la predicción dada por la simulación fue extremadamente buena. Que no haya desfase o desplazamiento de los datos, con respecto de las gráficas, nos indica que los rieles están bien colocados y que la posición angular de los cristales predicha y experimental deben ser iguales, por lo que de nuevo todo apunta a que el problema es la falla en el acoplamiento de fase y en consecuencia que el ángulo al que llega la polarización de bombeo a los cristales no es el indicado.

Algo muy particular que podemos ver es que para los casos  $N(45^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$ , los máximos no se encuentran donde los esperábamos ( $45^\circ$  y  $135^\circ$ , respectivamente), sino que se desplazaron a  $-8^\circ$  y a  $8^\circ$ , respectivamente; parece que estos casos tienen una gran influencia del  $N(0^\circ, \beta)$ , pues a excepción de las amplitudes casi tiene el máximo en la misma posición.

$\alpha$ ( $^\circ$ )	$\beta$ ( $^\circ$ )	No. de cuentas	Incertidumbre ( $\pm$ )
-45	-22.5	125	7.07
-45	22.5	141	15.08
-45	67.5	70	6.60
-45	112.5	40	2.00
0	-22.5	220	7.07
0	22.5	214	13.67
0	67.5	48	1.41
0	112.5	25	0.47
45	-22.5	112	0.47
45	22.5	113	0.47
45	67.5	46	1.41
45	112.5	51	2.10
90	-22.5	13	2.36
90	22.5	14	3.77
90	67.5	49	5.66
90	112.5	57	3.30

Ahora solo nos queda confirmar la predicción hecha por la simulación. En la tabla 5.8 se muestran los resultados de las combinaciones de ángulos necesarias para calcular S.

Finalmente se calculan las funciones de correlación de estos datos y el parámetro de Bell con su incertidumbre estadística respectiva. Estos resultados son mostrados en la tabla 5.9.

E(-45,-22.5)	-0.0312
E(-45,22.5)	0.1130
E(0,-22.5)	0.6303
E(0,22.5)	0.7484
S	1.2345
$\sigma_s$	$\pm 0.0945$

Vemos que para el conjunto de datos de la tabla 5.8 no se viola la desigualdad de Bell ( $S = 1.2345 \pm 0.0945$ ). Sin embargo, el resultado predicho por la simulación computarizada es bastante aproximado, hasta queda dentro del rango de incertidumbre experimental. Esto es muy alentador y vuelve a confirmar la utilidad de la simulación para ahorrar tiempo de trabajo y su precisión. En esta ocasión no se pudo violar la desigualdad de Bell debido a los problemas que se tuvieron con el desfase del Babinet y del acoplamiento de fase del cristal, pero aun se puede argumentar que no conseguimos  $S > 2$  ya que no se igualaron los casos  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$ . Debido a este argumento tendremos que llevar a cabo esa calibración, igualar  $N(0^\circ, 0^\circ)$  y  $N(90^\circ, 90^\circ)$  y mantener a  $N(45^\circ, 45^\circ)$  maximizado.

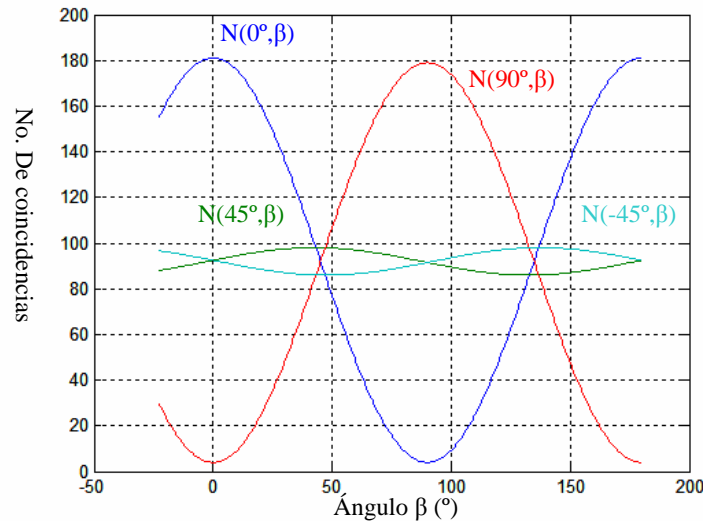
## 5.5.2 Segundo conjunto de datos

Por cuestiones de falta de tiempo, y habiendo probado que la simulación computarizada da una muy buena idea de cómo son las gráficas experimentales y del valor de  $S$ , a partir de este momento solo nos limitamos a calibrar los casos  $N(0^\circ,0^\circ)$ ,  $N(90^\circ,90^\circ)$ ,  $N(45^\circ,45^\circ)$  y  $N(0^\circ,90^\circ)$ , checar si violan la desigualdad de Bell y medir experimentalmente los datos de las combinaciones de ángulos necesarias para calcular  $S$ , ya no realizamos la toma de datos para construir las gráficas experimentales y compararlas con las teóricas.

Para el segundo conjunto de datos la calibración (igualamos  $N(0^\circ,0^\circ)$  y  $N(90^\circ,90^\circ)$ ) dio como resultado:

$$N(0^\circ,0^\circ) = 181; \quad N(90^\circ,90^\circ) = 179; \quad N(0^\circ,90^\circ) = 4; \quad N(45^\circ,45^\circ) = 98$$

Con estos datos de calibración, la simulación computarizada genera las siguientes gráficas:



Gráfica. 5.25. Gráficas teóricas obtenidas en base a los datos de calibración.

La simulación nos dice que  $\theta_l = 45.16^\circ$ ,  $\phi = 86.09^\circ$ , y el parámetro de Bell obtenido para estos datos sería de  $S = 1.44$ . En este caso, los valores difieren de los experimentales de nuevo, porque ahora experimentalmente  $\theta_l = 55 \pm 1^\circ$  (ya que para igualar las cuentas tuvimos que rotar los cristales) y para  $\phi$  lo único que se hizo fue mover el desfase de forma que se siguiera manteniendo en el máximo de cuentas, de hecho, como se puede ver pudimos hacer que aumentara un poco (22 cuentas mas). También podemos observar que las gráficas  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(90^\circ, \beta)$  se lograron igualar, pero esto afectó considerablemente la amplitud de las gráficas  $N(45^\circ, \beta)$  y  $N(-45^\circ, \beta)$  a pesar de que sus desplazamiento se corrigieron, tenemos la idea de que la pobre amplitud de estos dos casos es la que impide que se sobrepase el valor de  $S = 2$ , en cuanto a las razones de esta pobre amplitud siguen siendo las mencionadas para el primer conjunto de datos (el mal acoplamiento de fase).

En la tabla 5.10 mostramos los datos de las coincidencias para las combinaciones de ángulos necesarias para calcular el valor de  $S$  con los nuevos parámetros de  $\theta_l$  y  $\phi$ . De nuevo, a pesar de que ajustamos los casos  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(90^\circ, \beta)$ , no se pudo pasar de  $S = 2$ , sin embargo, el valor obtenido de  $S = 1.4887 \pm 0.0913$  es muy parecido al predicho por la simulación.

Después de algunos ajustes tanto a los cristales (su ángulo y la separación entre ellos), como al desfase provocado por el Babinet, volvimos a repetir los datos de las coincidencias para las combinaciones necesarias para calcular  $S$ , los datos encontrados generaron el valor de  $S$  más alto obtenido para los cristales de 2mm después de haber realizado varias pruebas para medir  $S$ . Los resultados se muestran

en la tabla 5.11. De nuevo el Valor de S quedo por debajo de 2, y además en esta ocasión el resultado obtenido se desvió mucho más de lo predicho por la simulación.

$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	No. de cuentas
-45	-22.5	96
-45	22.5	88
-45	67.5	82
-45	112.5	89
0	-22.5	146
0	22.5	159
0	67.5	38
0	112.5	18
45	-22.5	76
45	22.5	89
45	67.5	94
45	112.5	89
90	-22.5	36
90	22.5	17
90	67.5	140
90	112.5	165
E(-45,-22.5)		0.0920
E(-45,22.5)		-0.0028
E(0,-22.5)		0.5889
E(0,22.5)		0.8050
S		1.4887
$\sigma_S$		$\pm 0.0913$

$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	No. de cuentas
-45	-22.5	102
-45	22.5	82
-45	67.5	80
-45	112.5	92
0	-22.5	146
0	22.5	158
0	67.5	39
0	112.5	17
45	-22.5	81
45	22.5	101
45	67.5	104
45	112.5	83
90	-22.5	34
90	22.5	19
90	67.5	140
90	112.5	165
E(-45,-22.5)		0.1226
E(-45,22.5)		-0.0782
E(0,-22.5)		0.5933
E(0,22.5)		0.7994
S		1.5936
$\sigma_S$		$\pm 0.0909$

### 5.5.3 Conclusiones para el segundo montaje experimental

Como es evidente, para los cristales gruesos, los datos experimentales se comportan muy bien y se ajustan de manera bastante agradable a las gráficas teóricas. El único problema es que ninguno de nuestros intentos por violar la desigualdad de Bell fue exitoso. Después de haber estudiado todos los casos (incluyendo los del primer montaje experimental) realizados para este trabajo, todo apunta a tres razones principales para responder la pregunta de ¿Por qué los cristales gruesos no permiten violar la desigualdad de Bell?:

- a) La posición angular en que se colocan los rieles es importante, ya que si estos no son colocados en una posición en la que los números de fotones verticales y horizontales sean aproximadamente iguales, desde el inicio del experimento se tendrá una diferencia de cuentas entre  $N(0^\circ, \beta)$  y  $N(90^\circ, \beta)$ , lo cual obviamente influye de manera negativa en el ajuste de las gráficas y en el valor de S. Sin embargo, esto no es tan grave ya que se puede solucionar rotando los cristales de forma que compensen esta diferencia convirtiendo más fotones de bombeo a infrarrojos con la polarización que esté en desventaja.

b) La posición angular de los cristales también influye de manera considerable en la calibración del sistema, lo fundamental es posicionarlos de forma que un cristal produzca la misma cantidad de fotones infrarrojos que el otro, esto nos llevará a que  $N(0^\circ, \beta) = N(90^\circ, \beta)$ , pero si no están bien colocados también impedirán que  $S$  sea mayor que 2. Ajustar la posición angular de los cristales nos haría pensar que ya solo sería cuestión de ajustar el desfase  $\phi$  para tener un estado EPR óptimo, pero lamentablemente como vimos con los cristales gruesos, esto no es tan sencillo.

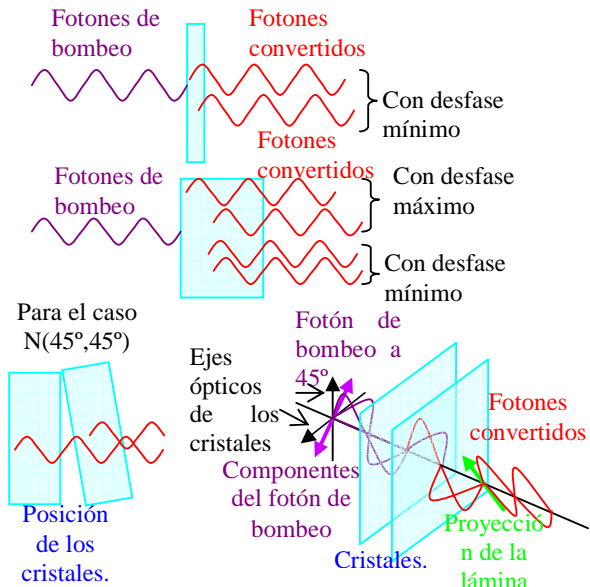


Fig.5.28. Explicación gráfica de cómo se presenta el desacoplamiento de fase.

c) El problema fundamental cuando se trabaja con cristales gruesos es el acoplamiento de fase, el cual es afectado por la longitud de los cristales. Revisando la teoría, vemos que la ecuación 4.69 nos señala que el caso de medición  $N(45^\circ, 45^\circ)$  es el que presenta la mayor influencia del desfase  $\phi$ , y éste a su vez es fundamental para llevar a cabo la calibración. Por otra parte, de la teoría desarrollada en el apéndice E2 sabemos que para un mismo cristal, el acoplamiento de fase es afectado por la longitud de cristal (ancho) que recorre la luz que se va a convertir. El acoplamiento de fase se puede ver como una medida de qué tanto pueden llegar a interferir los fotones de la misma polarización que se produzcan en distintas regiones del cristal en el cristal, en la figura 5.28 se muestra un diagrama que intenta explicar esto, vemos que cuando se trata de cristales delgados, es más probable que los fotones convertidos estén en fase uno con respecto a otro, es decir la fase relativa entre ellos es mínima debido a que el mismo tamaño del cristal restringe la producción de fotones a una región con ancho menor a una longitud de onda; pero cuando se tienen cristales gruesos, la región donde se pueden convertir los fotones puede ser mucho más grande que una longitud de onda, lo cual permitiría que la fase relativa de dos fotones fuera tal que se presentara interferencia destructiva, aunque también puede darse el caso de que queden en fase, lo importante es que la probabilidad de que los fotones presenten interferencia destructiva crece. En el caso de un fotón de bombeo con polarización de  $45^\circ$  llegue a los cristales, éste tiene componentes de polarización respecto de los dos ejes ópticos de los cristales, por lo que existe la probabilidad de que una de estas polarizaciones se transformará en el primer cristal (creando un fotón infrarrojo con polarización horizontal) y la otra en el segundo (creando un fotón infrarrojo con polarización vertical), sin embargo, puede ocurrir que por la separación de los cristales (la separación donde son convertidas cada componente de polarización) estos dos fotones producidos a partir del mismo fotón de bombeo se interfieran el uno al otro destructivamente al momento de ser proyectados a  $45^\circ$  por las láminas de media onda. Este argumento nos permitiría dar una explicación a por qué el número de coincidencias en  $N(45^\circ, 45^\circ)$  es menor que los de  $N(0^\circ, 0^\circ)$  o  $N(90^\circ, 90^\circ)$ : debido a que la probabilidad de que los fotones que son convertidos mediante los dos cristales (los fotones de

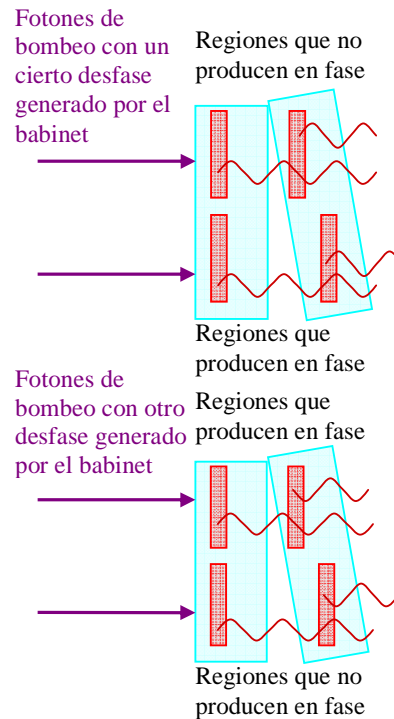


Fig.5.29. Explicación gráfica de por qué el Babinet no puede compensar la fase.

bombeo con polarización de  $45^\circ$ ) interfieran es mayor a la probabilidad de que lo hagan fotones que solo son convertidos por un cristal (los de polarización a  $0^\circ$  ó a  $90^\circ$ ); y por qué, a pesar de que con el Babinet se intento compensar el desfase, no se logró: cuando uno varia el desfase provocado por el Babinet, puede hacer que un par de regiones en los cristales convierta los fotones en fase (figura 5.29), pero debido al grueso y separación, será muy probable que otro par de regiones convierta en desfase, al cambiar el desfase generado con el Babinet podemos provocar el segundo par de regiones convierta en fase, pero obviamente perjudicará al primer par de regiones que ahora no podrá producir en fase, esto provocaría que el número de coincidencias en  $N(45^\circ, 45^\circ)$  no variara considerablemente a pesar de que se cambia el desfase generado por el Babinet, y por tanto no pudiera ser maximizado (en un caso extremo sería constante) ni igualado a  $N(0^\circ, 0^\circ)$  o  $N(90^\circ, 90^\circ)$ .

Sin embargo, estos últimos argumentos que intentan explicar los problemas experimentales señalados, constituyen una hipótesis deducida a partir de los datos experimentales obtenidos, y aunque en mi opinión parece muy plausible ya que con ella se pueden explicar de manera sencilla los problemas en el experimento, los datos no son suficientes para poder afirmar que la hipótesis sea correcta. Por cuestiones de tiempo, ya no fue posible realizar pruebas mas afondo para resolver este problema, lo cual requeriría de tiempo y dedicación, pero se espera que se retome esto en un futuro cercano, para poder resolver las posibles dudas que se tengan sobre el experimento que hemos realizado respecto de la violación de la desigualdad de Bell.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Entre los objetivos de este trabajo estuvo siempre presente la importancia de comprender uno de los problemas fundamentales que se plantearon desde los mismos orígenes de la Mecánica Cuántica, a saber, el de la no – localidad. Este propósito nos guió durante todo el trayecto, al final del cual logramos implementar con éxito el sistema experimental mediante el cual pudimos producir fotones enredados o en un estado EPR de forma clara y simple, es decir, con los elementos esenciales habidos en un laboratorio de enseñanza bien equipado como el de la Facultad de Ciencias de nuestra Universidad. En efecto se pudo construir un sistema de “fácil manejo” que nos permitió, mediante una serie de experimentos reportados y a los cuales adaptamos algunas modificaciones, verificar violaciones a la desigualdad de Bell. Una vez que nuestro sistema experimental cuenta con las pruebas suficientes de funcionalidad y de caracterización en sus elementos, así como de los posibles errores que pueden llegar a ocurrir, resta que se prosiga con el esfuerzo de su reproducibilidad en los cursos relacionados con el tema y de este modo se pueda lograr la estimulación en los estudiantes para que se involucren en el estudio y reflexión, con mayor profundidad, de los tópicos relacionados de la óptica cuántica y, eventualmente, ganando experiencia, desarrollar la actividad de investigación que permita la introducción de mejoras a lo alcanzado en este trabajo, además de poder proponer otros proyecto de investigación o enseñanza a partir de este.

Cabe destacar, desde nuestro punto de vista, que el éxito obtenido en la violación de la desigualdad de Bell, con la obtención del parámetro  $S$  en los rangos de  $2.6628 \pm 0.0527$ , es bastante remarcable, ya que en la mayoría de los reportes experimentales que se consultaron aparecen valores de  $S$  que son del mismo orden o menor, por ejemplo, la referencia [18] reporta un valor  $S = 2.307 \pm 0.032$ , lo cual es indicador de que nuestro sistema experimental se encuentra dentro de los rangos de precisión y calidad que se han logrado en otras universidades y centros de investigación. En este punto queremos resaltar, una vez mas, que nuestro trabajo es una confirmación que contribuye a reafirmar la idea de que la mecánica cuántica es de naturaleza no local y que las predicciones de John Bell, sobre que las predicciones de la mecánica cuántica no se ajustan a sus desigualdades, son pertinentes.

De nuestro desarrollo experimental surgió un resultado que nos parece de interés y relevancia; este resultado tiene que ver con el comportamiento de  $S$  y de los números de coincidencias en los montajes de cristales delgados y cristales gruesos. A partir de las diferencias entre los resultados de uno y otro experimento pudimos apreciar que es trascendental tener una buena alineación de los rieles, cristales, acopladores de luz y del Babinet; la experiencia que logramos con el sistema experimental nos demostró que no es sencillo violar la desigualdad de Bell si dichos dispositivos no están bien colocados o si no son los adecuados, lo cual consideramos que es algo positivo, ya que si algo no es fácil de llevar a cabo, desde un principio, se tendrá mas cuidado y empeño en realizar el experimento que si se asume que es fácil obtener  $S$  mayor que 2, corriendo el riesgo de no hacer el experimento con precisión; esto nos da confianza en decir que nuestro experimento fue realizado de forma que se minimizaron adecuadamente los errores introducidos por el factor humano.

Consideramos que una aportación útil de nuestro trabajo tiene que ver con el haber reportado que un parámetro extremadamente importante es el referente al espesor de los cristales BBO. De los resultados experimentales obtenidos se puede apreciar que, cuando se trabaja con cristales de conversión mas gruesos, efectivamente se obtienen muchas mas cuentas de fotones infrarrojos y muchas mas coincidencias, pero obtener un valor de  $S > 2$  es extremadamente difícil, si no es que imposible, a pesar de que todos los demás parámetros sean los óptimos. También encontramos que la razón de esto apunta a que la fase  $\phi$  entre fotones infrarrojos verticales y horizontales creada por los cristales ya no puede ser compensada por el Babinet y por tanto ya no se pueden calibrar los números de coincidencias  $N(45^\circ, 45^\circ)$  de forma que sean máximos y permitan obtener  $S > 2$ . La hipótesis que dimos para explicar el problema, parece plausible y congruente con lo observado, además está basada



y fundamentada en el hecho teórico de que el acoplamiento de fase decrece o es afectado cuando el ancho de los cristales es considerable (Ap. E2), provocando que cada vez hay mas pares de fotones convertidos con distintas fases relativas y que el Babinet, que solo puede compensar de forma correcta un cierto rango de fases, no pueda compensar a todas, lo cual provoca que muchos fotones infrarrojos puedan interferir entre ellos, produciendo que ya no se pueda maximizar el estado  $N(45^\circ, 45^\circ)$ , y que la amplitud del número de cuentas cada vez sea menor. Sin embargo, se deben hacer más pruebas y estudiar el problema más a fondo para confirmar nuestra hipótesis o desecharla, y encontrar otra, si es el caso, sostenida con argumentos más sólidos, lo cual por falta de tiempo ya no pudo ser llevado a cabo en este trabajo.

Otro elemento de utilidad que diseñamos y probamos consistió en la implementación de una simulación computarizada. Las pruebas que tuvimos oportunidad de llevar a cabo con la simulación nos indican que fue útil para evitar realizar todas las mediciones de coincidencias necesarias para construir las gráficas de los casos  $N(0^\circ, \beta)$ ,  $N(90^\circ, \beta)$ , etc, las cuales nos indican si nuestro sistema esta bien calibrado, además nos proporciona cierta información que podemos comparar con los parámetros del sistema y, sobre todo, nos indica si los parámetros sobre los cuales está trabajando el experimento son los necesarios para obtener  $S > 2$ . Hay que señalar que el programa es solo una ayuda para reducir el tiempo total de trabajo e identificar si existe la posibilidad de violar la desigualdad de Bell. Por las razones naturales de que el programa esta hecho con base en las ecuaciones teóricas, se trata de una simulación ideal que no puede reproducir todas las características y problemas del sistema, y solo puede darnos valores que se aproximen a los experimentales; por ejemplo, la simulación no puede reproducir el fenómeno del corrimiento angular de los datos. En cualquier caso nuestra conclusión importante, respecto del recurso de la simulación, es que es de gran ayuda y contribuye a avanzar con relativa seguridad en la realización experimental.

Como ocurre con frecuencias, los reportes utilizados como referencia no siempre son precisos y no facilitan las pruebas. Por esta razón consideramos importante el haber realizado una modificación al circuito de coincidencias implementado a partir de las referencias consultadas, lo que permitió resolver los problemas de conteo inicialmente presentes en el experimento. Lo importante de la modificación es que nos permitió, en cierto grado, controlar la amplitud de los pulsos, así como parte del ruido presente en estos debido a un mal acoplamiento de impedancias, con lo cual se logró tener un número de coincidencias más preciso y menos coincidencias fortuitas provenientes del ruido.

Finalmente, solo nos queda repetir que nuestro experimento da la posibilidad de hacer más investigación en el fenómeno de estados EPR y la no localidad de la mecánica cuántica, crea la inquietud por seguir trabajando en estudiar el problema del acoplamiento de fases, la relación entre la posibilidad de obtener  $S > 2$  y las características de los cristales, así como intentar nuevos y mas ambiciosos proyectos, como son los estudios sobre teleportación de información o la encriptación de información y creación de llaves de seguridad. Como quiera que sea, esperamos que todo esto se pueda llevar a cabo en un futuro y que el presente trabajo sirva como ayuda y referencia a quienes se aventuren en dichas investigaciones.

# Apéndice A

## Integrales útiles en para el Capítulo 2.

En el Capítulo 2.2.2, se propusieron las funciones que dan los resultados de las mediciones como:

$$A(\lambda, \theta_1) = \text{sign}\{\cos(2(\theta_1 - \lambda))\} = \begin{cases} +1 & \text{sí } |\theta_1 - \lambda| \leq \frac{\pi}{4} \text{ ó } |\theta_1 - \lambda| \geq \frac{3\pi}{4} \\ -1 & \text{sí } \frac{3\pi}{4} > |\theta_1 - \lambda| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

y

$$B(\lambda, \theta_2) = \text{sign}\{\cos(2(\theta_2 - \lambda))\} = \begin{cases} +1 & \text{sí } |\theta_2 - \lambda| \leq \frac{\pi}{4} \text{ ó } |\theta_2 - \lambda| \geq \frac{3\pi}{4} \\ -1 & \text{sí } \frac{3\pi}{4} > |\theta_2 - \lambda| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

También es útil saber que:  $\text{sign}\{\cos(2(\lambda))\} = \begin{cases} +1 & \text{sí } |\lambda| \leq \frac{\pi}{4} \text{ ó } |\lambda| \geq \frac{3\pi}{4} \\ -1 & \text{sí } \frac{3\pi}{4} > |\lambda| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Estas, no llevaron a la necesidad de calcular varias integrales. La primera es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos(2(\lambda - \theta_1))] d\lambda \quad (\text{A.1})$$

Cuya gráfica se muestra en la Figura A.1. Vemos que es una función periódica, y con un periodo de  $\pi$ , es decir, se repite cada que  $\lambda$  recorre una distancia de  $\pi$ . En nuestro caso, solo no interesará estudiar la gráfica desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ .

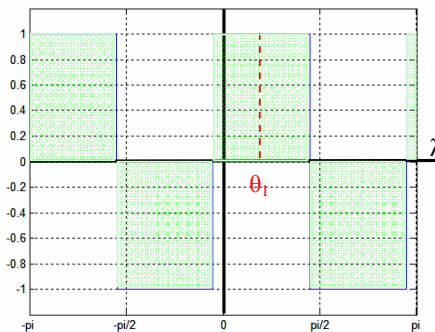


Figura A.1. Gráfica de la función A.1. En este caso particular,  $\theta_1 = \pi/5$ . El área bajo la curva está sombreada.

En este caso, la integral se puede resolver fácilmente a partir de calcular el área sombreada en la gráfica. De la gráfica y de las propiedades de simetría de la función, podemos ver que el área positiva es de  $\pi$ , y el área negativa también, por lo que el área total será Cero.

La integral A.1 también se puede resolver haciendo uso de la definición de  $A(\lambda, \theta_1)$ . Haciendo el cambio de variable:  $(\lambda - \theta_1) = x$ , se tendrá que  $d\lambda = dx$ , por lo que:

$$\int_{-\pi - \theta_1}^{\pi - \theta_1} \text{sign}[\cos(2(x))] dx \quad (\text{A.2})$$

Haciendo uso de la definición de la función  $\text{sign}[\cos(2(x))]$ , de su periodicidad y simetría:

$$\int_{-\pi - \theta_1}^{\pi - \theta_1} \text{sign}[\cos(2(x))] dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}[\cos(2(x))] dx = 2 \left[ \int_0^{\pi/4} dx - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} dx \right] = 2 \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

La segunda integral que es necesaria para nosotros es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1)))] [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2)))] d\lambda \quad (\text{A.4})$$

Al desarrollarla se transforma en la integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2)))] d\lambda$$

$$= \left[ 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) d\lambda \right] \quad (\text{A.5})$$

Aquí el problema a resolver es la integral con el producto de las funciones signum, para hacerlo de una manera fácil, nos ayudaremos de las gráficas de cuatro ejemplos: cuando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ; cuando  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi/2$ ; cuando  $\theta_1 = 2\pi/6$  y  $\theta_2 = \pi/5$ ; y cuando  $\theta_1 = 4\pi/5$  y  $\theta_2 = \pi/5$  (figura A.2).

Sabemos que la integral definida nos representa el área bajo la curva de la multiplicación de las funciones signum desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ ; así, para distintos valores de los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , se tendrán distintos valores de áreas bajo la curva, ya que las dos funciones se cruzarán de manera diferente. Sin embargo, hay que notar que, como se trata de funciones periódicas, la expresión del área bajo la curva también será periódica.

A primera vista vemos algo particular de la multiplicación de las gráficas, el área de la multiplicación solo tiene dos valores extremos: el de  $2\pi$  cuando  $\theta_1 = \theta_2$  o cuando ambos ángulos difieren por  $\pm\pi$  (figura A.2.a), y el de  $-2\pi$  cuando la diferencia entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es de  $\pm\pi/2$ . También vemos que cuando la diferencia entre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  está entre  $0$  y  $\pm\pi/4$  el área total es positiva y que cuando está entre  $\pi/4$  y  $\pi/2$  (o  $-\pi/4$  y  $-\pi/2$ ) el área total es negativa.

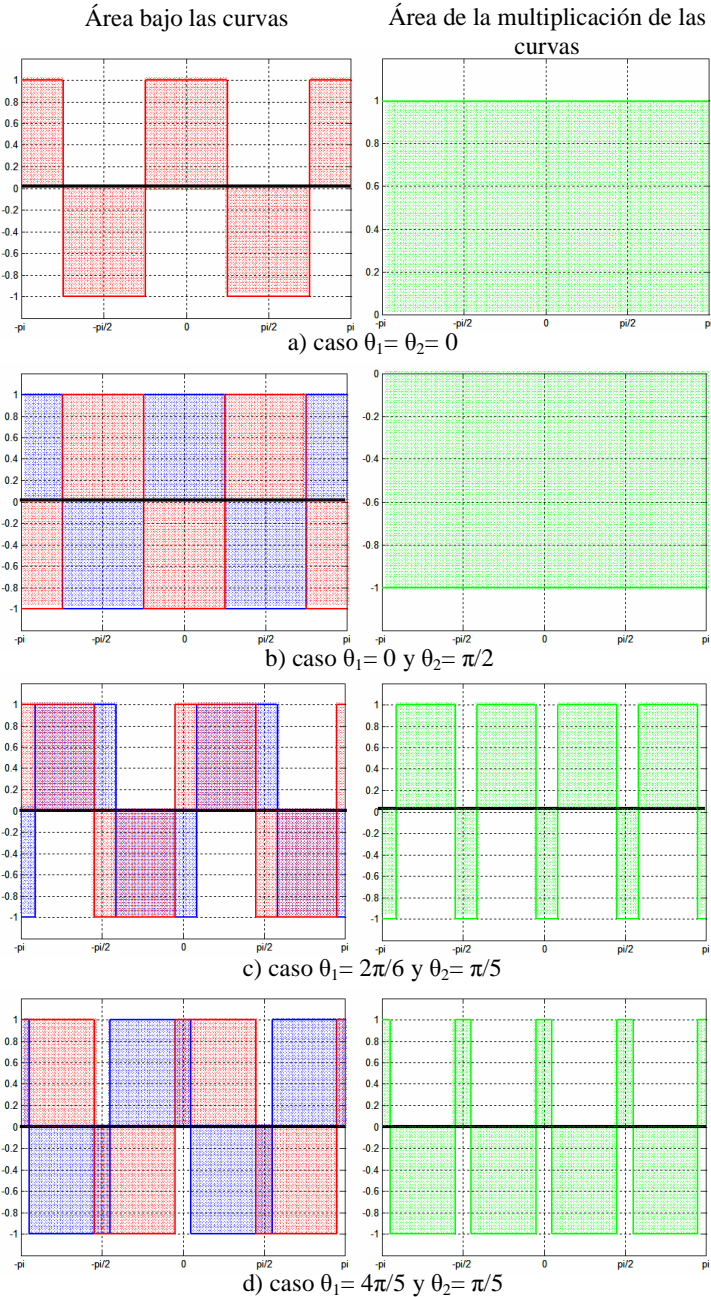


Figura A.2. Gráficas de distintos casos de la multiplicación de las funciones signum.

Ahora hacemos nuestra primera observación importante, cuando fijamos una de las gráficas y la otra la colocamos en una posición donde se tenga que la diferencia entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es  $-\pi/2$  (donde se tiene un área de  $-2\pi$ ), podemos imaginar que, cuando desplazamos la gráfica que está en  $-\pi/2$  hacia la derecha, vamos disminuyendo la diferencia entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y por tanto, el área total bajo la multiplicación de las curvas crece hacia un valor positivo, cuando la diferencia llega a  $\pi/4$  el área total se hace cero; si se

sigue desplazando la gráfica hacia la derecha, el área se hará positiva y seguirá creciendo hasta llegar a  $2\pi$  (cuando  $\theta_1 = \theta_2$ ), si se sigue desplazando la gráfica, el área total comenzará a disminuir hasta llegar de nuevo a  $-2\pi$ .

La segunda observación importante es que las gráficas siempre son pulsos cuadrados, y en la región que estamos estudiando ( $-\pi$  a  $\pi$ ), siempre hay (en total) cuatro de dicho pulsos para cada gráfica (sin importar si son positivos o negativos).

Así, de nuestra interpretación de cómo varía el área bajo la curva de la multiplicación de las funciones al desplazar una de las funciones, vemos que esto es lo mismo a hacer la operación de convolución entre dos pulsos cuadrados para cada par de pulsos de las funciones signum, uno de la función que se desplaza con otro de la que fijamos (figura A.3).

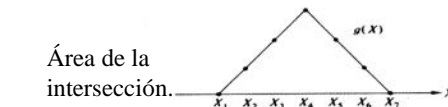
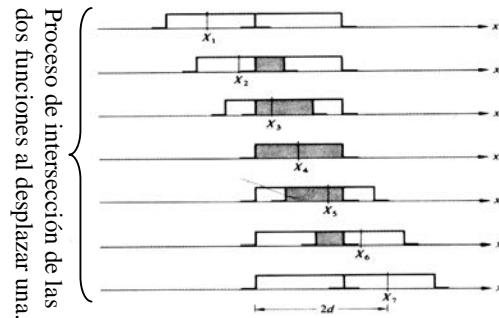


Figura A.3. Convolución de dos pulsos cuadrados, en este caso  $x = \lambda$ , y  $X = \theta_1 - \theta_2$

Entonces vemos que el área total bajo la curva de intersección crece (o decrece) linealmente, de hecho, lo hace como la ecuación  $-|X|$ , salvo unas constantes y cierto rango de valores de  $X$ . Para encontrar las constantes y el rango de valores de nuestro caso, notamos que: como la gráfica de la multiplicación también es periódica, basta revisar la región de  $|\theta_1 - \theta_2| \leq \pi/2$ , ya que fuera de esta el valor del área se repite. Así, de un análisis de todo lo anterior, podemos construir la gráfica que da el área bajo la curva de la multiplicación de las funciones (figura A.4). De esa gráfica podemos ver que la pendiente de las líneas es de  $+8$  (de  $-\pi/2$  a  $0$ ) ó  $-8$  (de  $0$  a  $\pi/2$ ), y ambas tienen una ordenada al origen de  $2\pi$ . En consecuencia la expresión resultante para la integral es:

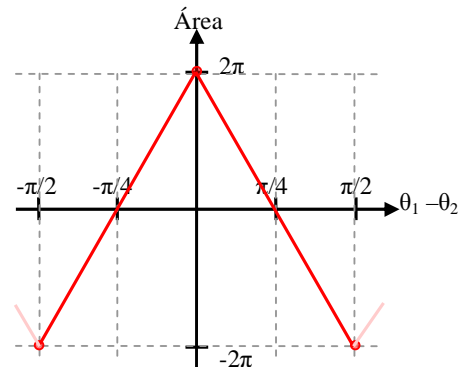


Figura A.4. Área de la intersección de las funciones signum.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1))) \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2))) d\lambda = -8|\theta_2 - \theta_1| + 2\pi \quad (\text{A.6})$$

Es muy importante notar, que los límites de la integral dependen solamente de  $\lambda$ , mientras que el resultado de  $\theta_1 - \theta_2$ , de ahí que este valor tenga un rango de valores diferente.

Finalmente, sustituyendo A.6 en A.5:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_1)))] [1 + \text{sign}(\cos(2(\lambda - \theta_2)))] d\lambda = -8|\theta_2 - \theta_1| + 4\pi \quad (\text{A.7})$$

# Apéndice B

## Ondas electromagnéticas en materiales y birrefringencia [26]

Supongamos que tenemos una onda electromagnética y que ésta se puede escribir de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = E_{0x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{x} + E_{0y} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{y} + E_{0z} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \hat{z} \quad (B1)$$

Pensemos que esta onda viaja a través de un medio material (como un cristal por ejemplo). En dicho material las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (B2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (B3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (B4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (B5)$$

Si el material es no lineal,  $\vec{D}$  es un tensor, recordemos que en dicho caso  $\vec{D} = \overline{\overline{\epsilon}} \vec{E} = \overline{\overline{\epsilon}}_r \epsilon_0 \vec{E}$ , donde  $\overline{\overline{\epsilon}}_r$  es el tensor dieléctrico relativo; si también suponemos que el material no tiene cargas libres  $\rho_f$ , no tiene corrientes libres  $\vec{J}_f$  y que la permeabilidad del material es igual a la del espacio ( $\mu = \mu_0$ ) de

forma que  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ , las ecuaciones se transforman en:

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_r \cdot \epsilon_0 \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_r \cdot \vec{E} = 0 \quad (B6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (B7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (B8)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\overline{\epsilon}}_r \cdot \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\overline{\overline{\epsilon}}_r}{c^2} \vec{E} \right) \quad (B9)$$

Suponiendo que las componentes del tensor  $\overline{\overline{\epsilon}}_r$  no dependen del tiempo y son constantes, la derivada temporal en la última ecuación solo se aplica a  $\vec{E}$ . Sacando el rotacional a las ecuaciones B3 y B4:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (B10)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \frac{\overline{\overline{\epsilon}}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad (B11)$$

Sustituyendo B7 y B9 en estas ecuaciones y agregando la suposición de que no hay un campo magnético en el material ( $\vec{B} = 0$ ):

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\overline{\overline{\epsilon}}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (B12)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\frac{\overline{\overline{\epsilon}}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (B13)$$

Sustituyendo  $\vec{E}$  (B1) en B6:

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}_r (\nabla \cdot \vec{E}) = 0 &\Rightarrow \vec{\epsilon}_r \left\{ \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right\} = 0 \\ \vec{\epsilon}_r \{k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= 0 \\ \vec{\epsilon}_r \{\vec{k} \cdot \vec{E}_0\} = 0 &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_r \cdot \vec{E}_0 = 0\end{aligned}\quad (B14)$$

Por otro lado utilizando la relación  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  en la ecuación B12:

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (B15)$$

Desarrollando esta ecuación por secciones tenemos:

$$\frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-i\omega \vec{E}) = -\frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \omega^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) &= (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) i \nabla \left( e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) = (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) i (ik_x \hat{x} + ik_y \hat{y} + ik_z \hat{z}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= -(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla^2 E_x \hat{x} + \nabla^2 E_y \hat{y} + \nabla^2 E_z \hat{z}$$

$$\mapsto \nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = E_{0x} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_x^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_y^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_z^2))$$

$$\mapsto \nabla^2 E_y = E_{0y} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_x^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_y^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_z^2))$$

$$\mapsto \nabla^2 E_z = E_{0z} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_x^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_y^2) + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (-k_z^2))$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = -e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\} (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) = -e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \{|\vec{k}|^2 \vec{E}_0\}$$

Con esto, la ecuación B15 resulta en:

$$|\vec{k}|^2 \vec{E}_0 - (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \vec{k} = \frac{\vec{\epsilon}_r}{c^2} \omega^2 \vec{E}_0 \quad (B16)$$

Escribiendo B16 en componentes, y tomando en cuenta a  $\vec{\epsilon}_r$  en términos de los índices de refracción del material se tiene que:

$$\begin{aligned}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)(E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) - (k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z})(k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} (n_x^2 E_{0x} \hat{x} + n_y^2 E_{0y} \hat{y} + n_z^2 E_{0z} \hat{z})\end{aligned}$$

Separando esta ecuación por componentes obtendremos tres ecuaciones:

$$\Rightarrow \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} \right) E_{0x} + k_x k_y E_{0y} + k_x k_z E_{0z} = 0 \quad (B17)$$

$$\Rightarrow k_x k_y E_{0x} + \left( -k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} \right) E_{0y} + k_y k_z E_{0z} = 0 \quad (B18)$$

$$\Rightarrow k_x k_z E_{0x} + k_y k_z E_{0y} + \left( -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} \right) E_{0z} = 0 \quad (B19)$$

Este es un conjunto de ecuaciones lineales en  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  y  $E_{0z}$  y tienen una solución no trivial si su determinante es cero.

$$\det \begin{bmatrix} \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} \right) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \left( -k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} \right) & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \left( -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} \right) \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} & \left( -k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} \right) \left[ \left( -k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} \right) \left( -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} \right) - k_y^2 k_z^2 \right] \\ & - k_x k_y \left[ k_x k_y \left( -k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} \right) - k_x k_y k_z^2 \right] + k_x k_z \left[ k_x k_y k_z - k_x k_z \left( -k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} \right) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\omega^4}{c^4} n_x^2 n_y^2 n_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (k_y^2 n_y^2 n_z^2 + k_z^2 n_y^2 n_z^2 + k_x^2 n_x^2 n_z^2 + k_z^2 n_x^2 n_z^2 + k_x^2 n_x^2 n_y^2 + k_y^2 n_x^2 n_y^2) \\ & + k_x^2 k_y^2 (n_x^2 + n_y^2) + k_y^2 k_z^2 (n_y^2 + n_z^2) + k_x^2 k_z^2 (n_x^2 + n_z^2) + k_x^4 n_x^2 + k_y^4 n_y^2 + k_z^4 n_z^2 = 0 \end{aligned}$$

Dividiendo ahora entre  $n_x^2 n_y^2 n_z^2$  y reorganizando términos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{\omega^4}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_x^2 + k_z^2}{n_y^2} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} \right) + \frac{k_x^2}{n_y^2 n_z^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{k_y^2}{n_x^2 n_z^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ & + \frac{k_z^2}{n_x^2 n_y^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = 0 \end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{\omega^4}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_x^2} + \frac{k_x^2 + k_z^2}{n_y^2} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} \right) + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \left( \frac{k_x^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{k_y^2}{n_x^2 n_z^2} + \frac{k_z^2}{n_x^2 n_y^2} \right) = 0 \quad (B20)$$

Las clases de cristales conocidos como uni-axiales se definen por un eje óptico, y se puede hacer que los índices de refracción principales cumplan que  $n_x = n_y = n_o$  y  $n_z = n_e$ , siempre y cuando se escojan de forma correcta los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , con lo que B20 adopta la forma:

$$\frac{\omega^4}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{k_y^2 + k_z^2}{n_o^2} + \frac{k_x^2 + k_z^2}{n_o^2} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} \right) + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \left( \frac{k_x^2}{n_o^2 n_e^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2 n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2 n_e^2} \right) = 0$$

Que se puede factorizar como:

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2}{c^2} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) + \frac{k_z^2}{n_o^2} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) + \frac{k_x^2}{n_e^2} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) \\ & + \frac{k_y^2}{n_e^2} \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \left( \frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k_x^2}{n_o^2} + \frac{k_y^2}{n_o^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (B21)$$

Cada factor de esta ecuación define una superficie en el espacio de vectores  $\vec{k}$  (superficies definidas por las normales de las ondas, que son vectores que tienen la misma dirección que los vectores  $\vec{k}$ ). El primer factor define una esfera y el segundo define un elipsoide (figura B1).

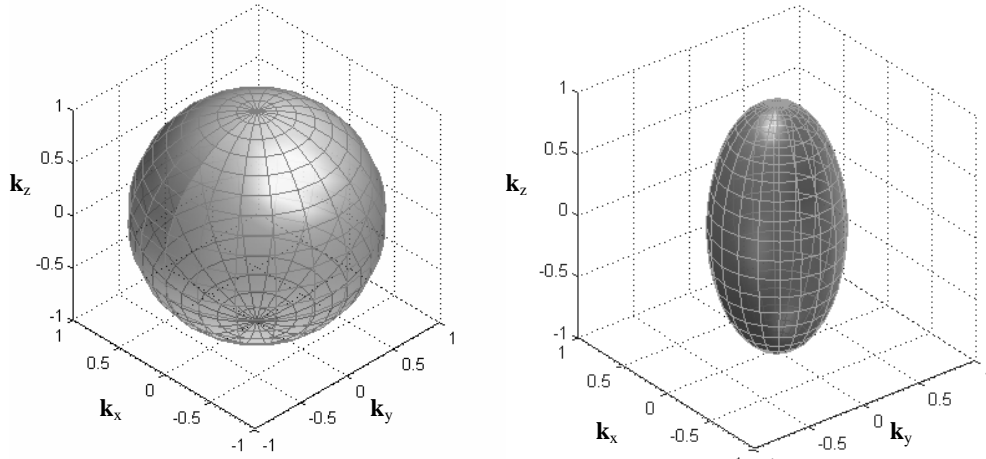


Fig. B1. Superficies generadas en el espacio de vectores por los dos factores de la ec. B21. La esfera corresponde al primer factor y el elipsoide al segundo; para graficar se tomaron como ejemplo de valores :  $n_o^2 = 1, n_e^2 = 0.5$  y normalizando de forma que:  $\omega^2/c^2 = 1$

Por lo tanto, para cada dirección de la normal ( $\vec{n}$ ) de una onda con vector  $\vec{k}$  (que puede ser el vector  $\vec{k}$  normalizado) éste vector puede estar tanto en la superficie de la esfera como en la superficie del elipsoide (figura B2); los valores asociados a  $\vec{k}$  en la esfera corresponden a los rayos ordinarios mientras que los asociados al elipsoide corresponden a los rayos extraordinarios.

Así, cada superficie da información de cómo viajan los rayos ordinarios y extraordinarios dentro del material dependiendo de la dirección del vector de onda  $\vec{k}$ .



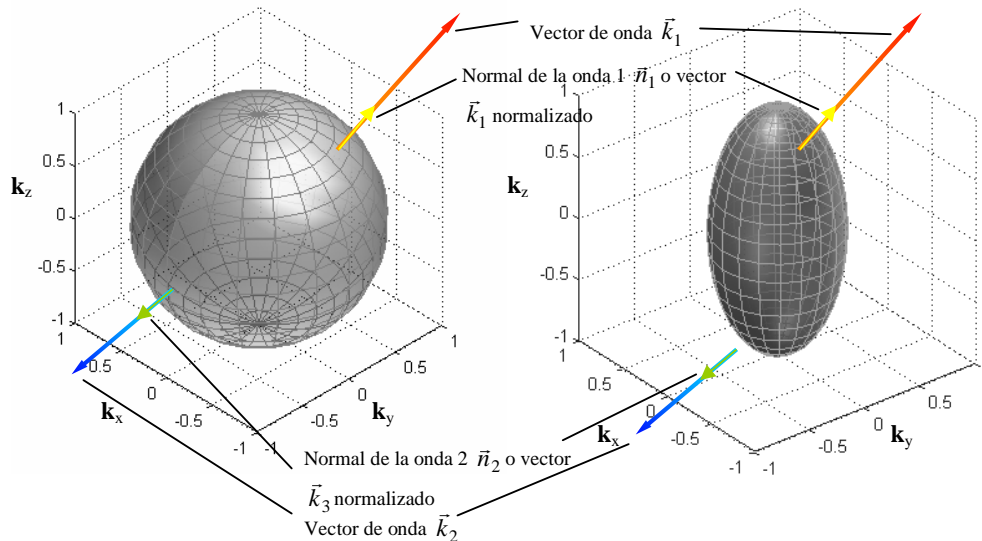


Fig. B2. Supongamos que tomamos dos ondas diferentes (1 y 2), cuyos vectores de onda son  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  respectivamente, las normales de las ondas serán  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  respectivamente. Las dos superficies están definidas por normales de ondas, por lo que las dos ondas tomadas como ejemplo tendrán sus normales en las dos superficies (aunque en distinta posición).

Para comprender mejor cómo es que  $n_x = n_y = n_o$  y  $n_z = n_e$ , observamos que según estas relaciones se debe tener que una onda que viaje en el eje  $z$ , y tenga una cierta polarización, deberá experimentar un índice de refracción  $n_e$  (Figura B3), lo cual nos indica instantáneamente que, por la definición del eje óptico, el eje  $z$  no puede ser el eje óptico, ya que a lo largo de éste el índice de refracción es ordinario (cualquier polarización de una onda que se propague a lo largo del eje óptico será ortogonal a éste, por lo que experimentará un índice de refracción  $n_o$ ). Si escogemos al eje  $x$  como eje óptico, las relaciones de los índices de refracción serán cumplidas como se muestra en la figura B3. Este arreglo de ejes satisface las condiciones de índices de refracción.

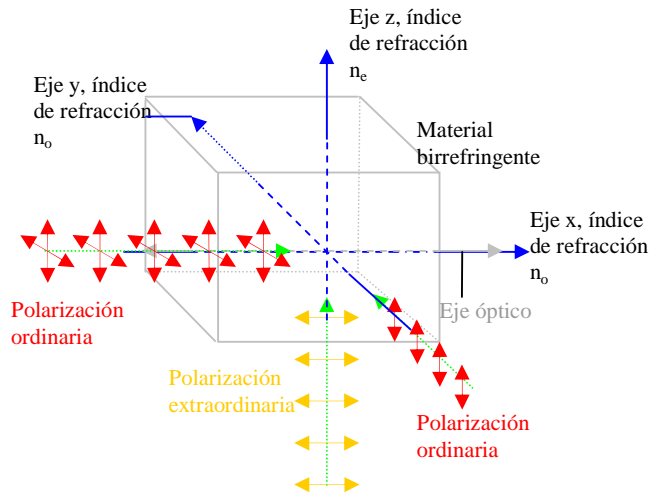


Fig.B3. Índices de refracción experimentados por ondas con ciertas polarizaciones que se propagan a lo largo de los ejes.

Algo importante que hay que señalar es que a lo largo del eje óptico, independientemente de la polarización de la onda, el índice de refracción es  $n_x = n_o$ ; sin embargo, a pesar de que se señaló que  $n_y = n_o$ , esto solo lo cumplen ondas con polarización ortogonal al eje  $x$  (eje óptico), pero si a lo largo del eje  $y$  se propaga una onda con polarización paralela al eje óptico el índice de refracción que experimentará será  $n_e$ , lo mismo ocurre en el eje  $z$ , si la polarización de la onda es paralela al eje  $x$

experimentará un índice de refracción  $n_e$  (como se requiere), pero si la polarización es ortogonal a  $x$  el índice de refracción será  $n_o$  (figura B4).

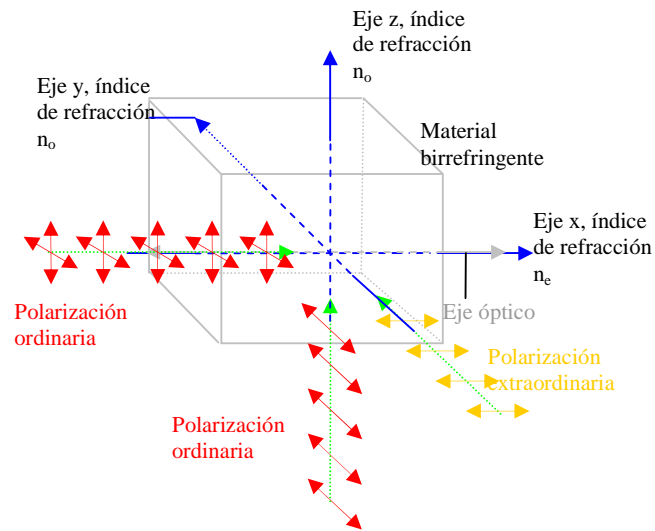


Fig.B4. Si las polarizaciones de las ondas que se propagan por los eje y z son Ortogonales a las indicadas en la fig.B3, los índices de refracción experimentados por cada una cambian

# Apéndice C

## Ondas electromagnéticas en materiales y birrefringencia (método alterno), la ecuación de Fresnel [27]

Si el método del apéndice B para deducir la ecuación 3.19 parece un poco confuso y genera dudas (en especial en el problema de la asignación del índice de refracción al eje óptico del cristal y su relación con dicha ecuación) es conveniente estudiar el presente método distinto para entender mejor el surgimiento de dicha ecuación.

### C.1 Anisotropía

Cuando una propiedad de un material varía con la dirección, se dice que el material es anisotrópico. Por ejemplo, los materiales anisotrópicos ópticos tienen un índice de refracción que varía con la dirección de propagación en el material. Las propiedades de absorción anisotrópica pueden ser usadas para detectar la polarización de una onda o para producir una onda con una polarización deseada.

Las matemáticas necesarias para describir la birrefringencia se basan en el uso de tensores, las componentes diferentes de cero de estos tensores están determinadas por la simetría de los cristales. El primer encuentro con un tensor se da al momento de relacionar los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  en un medio anisotrópico. Si el material anisotrópico no tiene mecanismos de pérdida (absorción o dispersión), entonces un tensor simétrico de segundo orden, representado por una construcción gráfica en forma de elipsoide, describe la relación entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ .

La necesidad de una relación tensorial entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  se debe a que, en un material anisotrópico, los dos vectores ya no son paralelos, el campo eléctrico ya no es perpendicular al vector de propagación  $\vec{k}$ , y el vector de Poynting ya no es paralelo al vector de propagación. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell requieren que  $\vec{D}$  y  $\vec{k}$  sean perpendiculares entre sí, así como también se requiere que  $\vec{E}$  y  $\vec{S}$  lo sean entre sí.

Las ecuaciones de Maxwell son usadas para discutir la propagación de ondas planas en materiales anisotrópicos. El producto escalar distinto de cero  $\vec{E} \cdot \vec{k} \neq 0$ , lleva a una ecuación llamada ecuación de Fresnel.

Es necesario advertir que existen múltiples descripciones de la anisotropía, y las construcciones geométricas asociadas con las descripciones generan confusión con gran facilidad.

### C.2 La indicatris óptica

Asumamos que las propiedades dieléctricas pueden cambiar con la dirección. El impacto de descartar las propiedades eléctricas isotrópicas implica la necesidad de usar relaciones tensoriales entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ . La relación más simple entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  que se ha usado es:

$$\begin{aligned} D_x &= (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z) \\ D_y &= (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z) \\ D_z &= (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z) \end{aligned} \tag{C1}$$

Por otro lado, conocemos que esta relación se puede presentar de forma matricial. Si el medio es no dispersivo, entonces no hay un cambio en el flujo de energía a través del medio. Esto implica que:

$\epsilon_{jk}^* = \epsilon_{kj}$ . Si el tensor dieléctrico se trata como real, se necesita que el tensor  $\bar{\epsilon}$  sea simétrico. Una posterior reducción en el número de componentes a tres se puede hacer escogiendo un sistema de coordenadas adecuado. En este sistema de coordenadas apropiado (con los ejes coordenados paralelos a los principales ejes dieléctricos) las componentes no cero del tensor se denominan constantes dieléctricas principales.

Comenzando con la ecuación para la densidad de energía eléctrica:  $2U_E = \bar{D} \cdot \bar{E}$ , seleccionamos como sistema coordinado los ejes dieléctricos principales, lo cual nos permite escribir:

$$D_x = \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_z E_z \quad (C2)$$

En este sistema coordinado, podemos reescribir la ecuación de densidad de energía como:

$$\frac{D_x^2}{2U_E \epsilon_x} + \frac{D_y^2}{2U_E \epsilon_y} + \frac{D_z^2}{2U_E \epsilon_z} = 1 \quad (C3)$$

Esta es la ecuación de un elipsoide, cuyos semi-ejes son iguales a las raíces cuadradas de las constantes dieléctricas principales o, equivalentemente, a los índices de refracción principales. Este elipsoide es llamado indicatris óptica, y puede ser usado para determinar  $\bar{E}$ ,  $\bar{k}$  y  $\bar{S}$  dado  $\bar{D}$ .

Si el vector de propagación  $\bar{k}$  de una onda es conocido, se pueden determinar  $\bar{D}$  y  $\bar{E}$ . Esto se hace construyendo un plano a través del origen cuya normal sea  $\bar{k}$ . La curva formada por la intersección del elipsoide y el plano perpendicular a  $\bar{k}$  es una elipse (figura C1). Los semi-ejes principales de la elipse son proporcionales a los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ :

$$n_1 = \frac{c}{v_{p1}} \quad n_2 = \frac{c}{v_{p2}} \quad (C4)$$

Donde  $v_p$  es la velocidad de fase. Las direcciones de los semiejes principales coinciden con  $\bar{D}_1$  y  $\bar{D}_2$  que son las dos polarizaciones ortogonales (ordinaria y extraordinaria) para la onda con vector de onda  $\bar{k}$ .

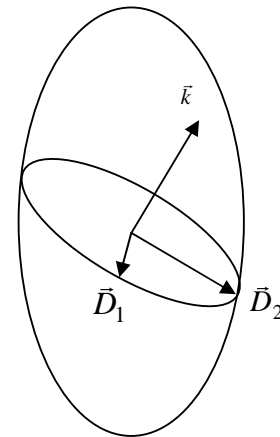


Fig. C1. Determinación de  $\bar{D}$  dado el vector de propagación  $\bar{k}$ .

Para ciertas direcciones de  $\bar{k}$ , el plano normal a  $\bar{k}$  cortara al elipsoide de forma que la intersección sea un círculo. Estas direcciones especiales son llamadas *ejes ópticos* del cristal. Si solo hay una de esas direcciones, el cristal es uní-axial.

### C.3 La ecuación de Fresnel

Ahora examinemos la propagación de una onda plana en un medio eléctricamente anisotrópico, para lo cual asumimos que el medio en consideración es magnéticamente isotrópico. Se encontrará que  $\bar{E}$  ya no es perpendicular a  $\bar{k}$ . El producto escalar diferente de cero entre  $\bar{E}$  y  $\bar{k}$  produce una ecuación llamada ecuación de Fresnel, que predice que el medio tendrá dos índices de refracción asociados con dos vectores de desplazamiento eléctrico.

De nuevo, las ecuaciones de Maxwell del material son:

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (C5)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (C6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (C7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (C8)$$

Igual que en el desarrollo del apéndice B. Usando una onda plana con ecuaciones:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t + \phi)}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t + \phi)}; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t + \phi)}; \quad \vec{H} = \mu \vec{B} \quad (C9)$$

y sustituyendo las ecuaciones de onda plana en las ecuaciones C5 y C7 se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{D} = -i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0,$$

donde  $\vec{D}$  permanece perpendicular a  $\vec{k}$ , pero este hecho no implica que  $\vec{E}$  sea perpendicular a  $\vec{k}$ .

Para el campo magnético se encuentra:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu \nabla \cdot \vec{H} = -i\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

Dado que se asumió que el material es magnéticamente isotrópico, encontramos que tanto  $\vec{B}$  como  $\vec{H}$  son perpendiculares a  $\vec{k}$ .

Sustituyendo las ecuaciones de onda plana en C6 y C8, encontramos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ i\vec{k} \times \vec{H} &= -i\omega \vec{D}; & i\vec{k} \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} = i\omega \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (C10)$$

Las ecuaciones de onda plana en las ecuaciones de Maxwell requieren que  $\vec{H}$  sea perpendicular tanto a  $\vec{k}$  como a  $\vec{D}$ , y también perpendicular a  $\vec{k}$  y  $\vec{E}$ .

El hecho de que  $\vec{E}$  pueda no ser perpendicular a  $\vec{k}$  requiere que analicemos la influencia del producto escalar distinto de cero:  $\vec{k} \cdot \vec{E} \neq 0$ . Para encontrar a qué es igual este producto punto, usamos las ecuaciones de Maxwell C10 para escribir:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}$$

Realizando el producto cruz de esta ecuación con  $\vec{k}$  se obtiene:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega \mu_0 \vec{k} \times \vec{H} = \omega \mu_0 (-\omega \vec{D})$$

Aquí podemos reescribir esta ecuación usando la identidad vectorial:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ , con lo cual obtenemos:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D} \quad (C11)$$

La constante de propagación estará dada por:

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = \left( \frac{n\omega}{c} \right)^2,$$

donde  $n$  es el “índice de refracción real (*neto*)” que experimenta la onda. Esta constante nos permite reescribir C11 como:

$$\frac{\vec{k}}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \vec{E} - \frac{c^2 \mu_0}{n^2} \vec{D}, \quad (C12)$$

donde  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  deben satisfacer esta ecuación si satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

Para dar un significado físico a la ecuación C12, evaluamos las componentes de esta ecuación vectorial a lo largo de las tres direcciones principales. Así, la  $j$ -ésima componente de la ecuación vectorial es:

$$\frac{k_j}{k^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = \left( 1 - \frac{c^2 \mu_0 \epsilon_j}{n^2} \right) E_j \quad ,$$

donde se usó el hecho de que  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$  y donde  $\epsilon_j$  es la constante dieléctrica principal. Multiplicando ambos lados de la componente  $j$ -ésima por  $k_j$ , obtenemos una ecuación de valores propios, la cual se puede simplificar haciendo uso de:  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ ,

$$\frac{k_j^2}{k^2 \left( 1 - \frac{\epsilon_j}{n^2 \epsilon_0} \right)} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = k_j E_j \quad (C13)$$

Sumando las tres ecuaciones componentes de la forma C13, obtenemos una nueva expresión de la ecuación vectorial para C12:

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) \sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 \left( 1 - \frac{\epsilon_j}{n^2 \epsilon_0} \right)} = \vec{k} \cdot \vec{E} \quad (C14)$$

Si  $\vec{E} \cdot \vec{k} \neq 0$ , como suponemos que es el caso, entonces podemos dividir ambos lados de la ecuación por el producto escalar. También dividimos entre  $n^2$ :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 \left( n^2 - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0} \right)} = \frac{1}{n^2} \quad (C15)$$

Un nuevo parámetro que será llamado *índice de refracción principal*, es definido como:

$$n_j^2 = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$$

Usando la nueva definición, reescribimos la ecuación C15 en la forma llamada *ecuación de Fresnel*:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{k_j^2}{k^2 (n^2 - n_j^2)} = \frac{1}{n^2} \quad (C16)$$

Esta ecuación permite calcular el índice de refracción para una dirección de propagación arbitraria; y como se puede apreciar es cuadrática con dos posibles raíces:  $n_1^2$  y  $n_2^2$ . Así, la ecuación de Fresnel dice que para cualquier dirección de propagación  $\vec{k}$ , hay en general, dos valores del índice de refracción ( $n_1$  y  $n_2$ ). Si las soluciones a la ecuación C16 se sustituyen en C13, dos valores del campo eléctrico ( $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ ) se obtienen para la dirección de propagación seleccionada. Finalmente dos soluciones para el campo eléctrico correspondientes a  $n_1$  y  $n_2$  pueden ser sustituidas en C12 para obtener los dos valores para el desplazamiento eléctrico ( $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$ ). Los dos vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  asociados al vector de propagación seleccionada son perpendiculares el uno al otro. Estos vectores especifican la polarización de dos ondas de luz propagándose a dos velocidades diferentes, dado  $n_1$  y  $n_2$ , en el material anisotrópico.

## C.4 Superficies normales

Una construcción geométrica, llamada *superficies normales*, es útil para entender como es la propagación de una onda en un medio anisotrópico. Estas superficies son construidas al colocar dos vectores de longitud  $n_1$  y  $n_2$  en la dirección de  $\vec{k}$ . Para determinar la forma de las superficies normales, en la ecuación de Fresnel se introduce la relación  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 = 1$ , donde  $\kappa_i^2 = \frac{k_i^2}{k^2}$ , con esto la ecuación C16 se transforma en:

$$\frac{\kappa_1^2}{(n^2 - n_1^2)} + \frac{\kappa_2^2}{(n^2 - n_2^2)} + \frac{\kappa_3^2}{(n^2 - n_3^2)} = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}{n^2}$$

O escrito de otra forma:

$$\frac{\kappa_1^2 n^2}{(n^2 - n_1^2)} + \frac{\kappa_2^2 n^2}{(n^2 - n_2^2)} + \frac{\kappa_3^2 n^2}{(n^2 - n_3^2)} - \kappa_1^2 - \kappa_2^2 - \kappa_3^2 = 0$$

$$\kappa_1^2 \left( \frac{n^2}{(n^2 - n_1^2)} - 1 \right) + \kappa_2^2 \left( \frac{n^2}{(n^2 - n_2^2)} - 1 \right) + \kappa_3^2 \left( \frac{n^2}{(n^2 - n_3^2)} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{\kappa_1^2 n_1^2}{(n^2 - n_1^2)} + \frac{\kappa_2^2 n_2^2}{(n^2 - n_2^2)} + \frac{\kappa_3^2 n_3^2}{(n^2 - n_3^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \kappa_1^2 n_1^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + \kappa_2^2 n_2^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2) + \kappa_3^2 n_3^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0 \quad (C17)$$

Para un cristal uní-axial, se hace que  $n_1 = n_2 = n_o$  y  $n_3 = n_e$  en la ecuación C17, lo cual da:

$$\kappa_1^2 n_o^2 (n^2 - n_o^2)(n^2 - n_e^2) + \kappa_2^2 n_o^2 (n^2 - n_o^2)(n^2 - n_e^2) + \kappa_3^2 n_e^2 (n^2 - n_o^2)^2 = 0 \quad (C18)$$

Debido a que la propagación en el plano  $x$ - $y$  es independiente de la dirección ( $n_1 = n_x = n_2 = n_y = n_o$ ), solo se necesitan determinar las superficies normales bidimensionales en el plano  $x$ - $z$ . Asumiendo que la onda se propaga en el plano  $x$ - $z$  a un ángulo  $\theta$  con respecto del eje  $z$ :

$$\vec{\kappa} = (\text{sen}\theta, 0, \text{cos}\theta)$$

se puede reescribir la ecuación C18 como:

$$(n^2 - n_o^2) \left[ n_o^2 (n^2 - n_e^2) \text{sen}^2 \theta + n_e^2 (n^2 - n_o^2) \text{cos}^2 \theta \right] = 0 \quad (C19)$$

Las soluciones a esta ecuación son:

$$n^2 = n_o^2 \Rightarrow n = n_o \quad (C20)$$

$$\frac{(n^2 - n_e^2) \text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{(n^2 - n_o^2) \text{cos}^2 \theta}{n_o^2} = 0 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\text{cos}^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n^2} \quad (C21)$$

Las superficies descritas por C20 y C21 son un círculo y una elipse, respectivamente. De esta manera, los puntos de intersección del círculo y la elipse definen un eje óptico simple para el cristal uní-axial.

# Apéndice D

## Propiedades de la susceptibilidad no-lineal [25]

En este apéndice mostramos algunas de las propiedades de simetría de la susceptibilidad no-lineal. Consideramos la interacción mutua de tres ondas de frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Una descripción completa de la interacción de estas ondas requiere que conozcamos la polarización no-lineal  $\vec{P}(\omega_i)$  que tiene influencia en cada una de ellas. Dado que estas cantidades están dadas en general por la expresión:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{jk} \sum_{(nm)} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) \quad (D1)$$

necesitamos determinar los seis tensores:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2); \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_3); \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, -\omega_1); \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3); \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2); \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1); \end{aligned}$$

junto con los seis tensores adicionales en los cuales cada frecuencia es reemplazada por su negativo. En estas expresiones, los índices  $i$ ,  $j$ , y  $k$  pueden tomar independientemente uno de los valores  $x$ ,  $y$ , y  $z$ . Dado que cada uno de estos 12 tensores consiste de 27 componentes cartesianas, es necesario especificar 324 números diferentes (complejos) para describir la interacción. Afortunadamente existen ciertas restricciones que resultan de las simetrías que relacionan las distintas componentes de  $\chi^{(2)}$ , reduciendo los 324 números necesarios.

### D.1 Realidad de los campos

Recordemos que la polarización no-lineal que describe la respuesta de la suma de frecuencias de campos entrantes  $\omega_n$  y  $\omega_m$  fue representada como:

$$\vec{P}_i(\mathbf{r}, t) = P_i(\omega_n + \omega_m) e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} + P_i(-\omega_n - \omega_m) e^{i(\omega_n + \omega_m)t} \quad (D2)$$

Dado que  $\vec{P}_i(\mathbf{r}, t)$  es una cantidad física medible, debe ser totalmente real y, por tanto, sus componentes de frecuencias positivas y negativas deben estar relacionadas por:

$$P_i(-\omega_n, -\omega_m) = P_i(\omega_n + \omega_m)^* \quad (D3)$$

El campo eléctrico también debe ser una cantidad real, y su componente de frecuencia compleja debe obedecer una condición análoga:

$$E_j(-\omega_n) = E_j(\omega_n)^* \quad (D4a)$$

$$E_k(-\omega_m) = E_k(\omega_m)^* \quad (D4b)$$

Dado que los campos y la polarización están relacionados a través de la susceptibilidad de segundo orden, concluimos que las componentes de frecuencia positivas y negativas de la susceptibilidad deben estar relacionadas por:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_n - \omega_m, -\omega_n, -\omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m)^* \quad (D5)$$



## D.2 Simetría de permutación intrínseca

De acuerdo a D1, dado que  $j$ ,  $k$ ,  $n$ , y  $m$  son índices mudos, se podía también haber escrito dicha relación con  $n$  intercambiada por  $m$  y  $j$  intercambiada con  $k$ . Esta nueva expresión es numéricamente igual si requerimos que la susceptibilidad no-lineal permanezca sin cambios ante el intercambio simultáneo de los dos últimos argumentos de frecuencia y sus dos últimos índices cartesianos:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_m, \omega_n) \quad (D6)$$

## D.3 Simetrías para un medio no absorbente

Para un medio no absorbente todas las componentes de  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m)$  son reales. Como consecuencia de esto se tiene la simetría por permutación total. Esta condición nos dice que los argumentos de frecuencia de la susceptibilidad no-lineal pueden ser intercambiados libremente, siempre y cuando los índices cartesianos correspondientes se intercambien simultáneamente. Al permutar los argumentos de frecuencia se debe tener en cuenta que el primer argumento siempre es la suma de los siguientes dos, por lo que los signos de las frecuencias deben ser invertidos cuando la primera frecuencia es intercambiada con cualquiera de la otras dos. La simetría de permutación total implica que:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \quad (D7)$$

Sin embargo, de acuerdo a D5 el lado derecho de esta ecuación es igual a  $\chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)^*$ , que, debido a la realidad de  $\chi^{(2)}$  para un medio no absorbente, es igual a  $\chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)$ . Entonces:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) \quad (D8)$$

Análogamente: 
$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \quad (D9)$$

## D.4 Simetría de Kleinman

Comúnmente, las interacciones ópticas no-lineales envuelven ondas cuyas frecuencias  $\omega_i$  son mucho menores que la frecuencia de resonancia mas baja del sistema material. Bajo estas condiciones la susceptibilidad no-lineal es esencialmente independiente de la frecuencia y podemos permutar los índices sin tener que permutar las frecuencias, lo cual nos lleva al resultado:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (D9)$$

## D.5 Notación contraída

Cuando la condición de simetría de Kleinman es válida, se puede usar una notación especial, el tensor:

$$d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} \quad (D10)$$

Por simplicidad se han suprimido los argumentos de frecuencia. Así, la polarización no-lineal puede ser escrita como:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{jk} \sum_{(nm)} 2d_{ijk} E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) \quad (D11)$$

Asumamos que  $d_{ijk}$  es simétrico en sus dos últimos índices (válido para la generación de segundo armónico, GSA,  $\omega_n = \omega_m$ ). Podemos simplificar la notación introduciendo una matriz contraída  $d_{il}$  de acuerdo a la receta:

$$\begin{aligned} jk : & 11 \quad 22 \quad 33 \quad 32,23 \quad 31,13 \quad 12,21 \\ l : & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{aligned} \quad (D12)$$

Entonces el tensor de susceptibilidad no-lineal puede ser representado por una matriz de 3×6:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \quad (D13)$$

Si ahora introducimos la condición de simetría de Kleinman, encontramos que no todos los 18 elementos de  $d_{il}$  son independientes, por ejemplo:

$$d_{12} \equiv d_{122} = d_{212} \equiv d_{26} \quad (D14a)$$

$$d_{14} \equiv d_{123} = d_{213} \equiv d_{25} \quad (D14b)$$

Aplicando sistemáticamente esto, se encuentra que  $d_{il}$  solo tiene 10 elementos independientes bajo la simetría de Kleinman:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \quad (D15)$$

Así, se puede describir la polarización no-lineal del segundo armónico en términos de  $d_{il}$  como la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix} \quad (D16)$$

Para la generación por suma de frecuencias ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ):

$$\begin{bmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_z(\omega_3) \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_y(\omega_2) + E_y(\omega_1)E_x(\omega_2) \end{bmatrix} \quad (D17)$$

El factor de 2 extra tiene su origen en que la sumatoria se hace sobre  $n$  y  $m$ , en cambio en GSA, como  $n = m$  la sumatoria solo se recorre una vez.

## D.6 Valor efectivo de $d_{il}$ ( $d_{ef}$ )

Para una geometría fija (es decir, para direcciones de propagación y polarización fijas) es posible expresar la polarización no-lineal que da lugar a la generación por suma de frecuencias por medio de una relación escalar:

$$P(\omega_3) = 4d_{ef}E(\omega_1)E(\omega_2) \quad (D18)$$

De manera análoga para la GSA:  $P(2\omega) = 2d_{ef}E(\omega)^2 \quad (D19)$

Donde:  $E(\omega) = |\vec{E}(\omega)| = \left[ \sum_j E_j^2(\omega) \right]^{1/2} \quad (D20)$

Para un cristal uni-axial negativo de clase 3m, bajo condiciones conocidas como tipo I en las que las dos ondas de menor frecuencia tienen la misma polarización:

$$d_{ef} = d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\phi \quad (D21)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector de propagación de la onda entrante y el eje óptico del cristal, y  $\phi$  es el ángulo azimutal entre el vector de propagación y el plano cristalino  $xz$ , que generalmente se hace cero (como fue el caso de este trabajo).

## D.7 Influencia de la simetría espacial en la susceptibilidad de segundo orden

Al considerar explícitamente de las simetrías de las diferentes clases de cristales, uno puede determinar la forma del tensor de susceptibilidad para un cristal cierto arreglo cristalino (Tabla D1). Así, la susceptibilidad de segundo orden puede ser descrita usando notación contraída, y las relaciones de la tabla D1 pueden ser representados gráficamente. Como ejemplo, los datos de la tabla junto con el diagrama de la figura D1, para un cristal de clase 3m, implican que la forma de la matriz  $d_{il}$  es:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trigonal	$3 = C_3$	$xxx = -xyy = -yyz = -yxy, xyz = -yxz, xzy = -yzx, xzx = yzy, xxz = yyz,$ $yyy = -yxx = -xxy = -xyx, zxx = zyy, zzz, zxy = -zyx$
	$32 = D_3$	$xxx = -xyy = -yyx = -yxy, xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx,$
	$3m = C_{3v}$	$xzx = yzy, xxz = yz, zxx = zyy, zzz, yyy = -yxx = -xxy = -xyx$

Por ejemplo, la susceptibilidad óptica no-lineal de segundo orden para el  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> (beta bario borato), que es un cristal trigonal clase  $3m = C_{3v}$ , presenta la característica de que  $d_{22} = 2.3$  ( $10^9$  cm/volt).

Para mayor referencia sobre todos los temas de este apéndice es recomendable ver la referencia [25].

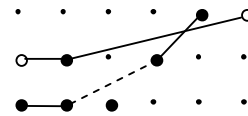


Fig. D1. Representación gráfica de la matriz  $d_{il}$  para la clase de cristal 3m. Punto pequeño: coeficiente cero; punto grande: coeficiente distinto de cero; conexión entre símbolos: coeficientes numéricamente iguales; los círculos huecos tienen signo opuesto al coeficiente de los círculos cerrados. Las conexiones punteadas solo son válidas para la condición de simetría de Kleinman.

# Apéndice E

Para la notación de este apéndice, por cuestiones de agilizar la redacción, se denotarán todas las cantidades vectoriales con letras resaltadas en negro (por ejemplo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ , etc.) en lugar de colocar la flecha que denota vector sobre la letra ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ , etc.). Además, el símbolo  $\sim$  sobre cualquier letra denota una cantidad que varía rápido en el tiempo.

## E.1 La ecuación de onda para un medio óptico no lineal [25]

Se ha mencionado que la respuesta no lineal de un sistema material a un campo láser intenso puede causar la polarización del medio y desarrollar nuevas componentes de frecuencia que no estaban presentes en el campo de radiación incidente.

Antes de desarrollar la teoría matemática, veamos un ejemplo de cómo se generan estas componentes de frecuencia. Consideremos el caso de generación de suma de frecuencias (Figura E1), donde los campos de entrada tienen frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Debido a las no linealidades en la respuesta atómica, cada átomo desarrolla un momento dipolar oscilante que contiene una componente de frecuencia  $\omega_1 + \omega_2$ . Un átomo aislado radiará a esta frecuencia en forma de radiación dipolar como se muestra en la parte (b) de la figura E1. Sin embargo, cualquier muestra de material contiene un enorme número  $N$  de dipolos atómicos, cada uno oscilando con una fase que está determinada por las fases de los campos incidentes. Si las fases relativas de estos campos es la correcta, el campo radiado por cada dipolo se sumará de forma constructiva en la dirección frontal creando radiación en forma de un rayo bien definido, como se ilustra en la parte (c) de la figura E1. El sistema actuará como un arreglo de dipolos en fase cuando se satisfaga una cierta condición conocida como acoplamiento de fase (phase-matching).

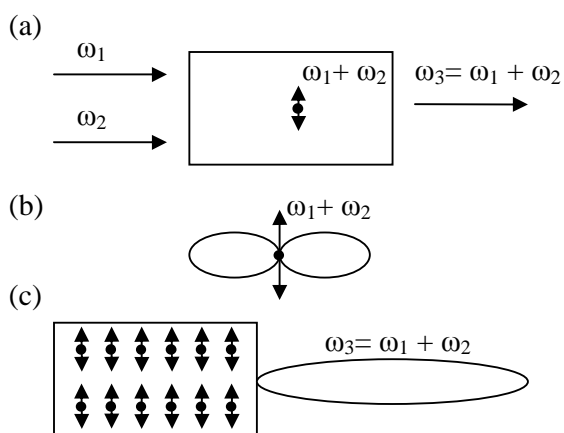


Fig. C1. Generación de la suma de frecuencia.

Ahora consideremos la forma de la ecuación de onda para la propagación de la luz a través de un medio óptico no lineal. Tomando las ecuaciones de Maxwell dadas en el apéndice B (ecuaciones B2, B3, B4, B5) y haciendo las mismas suposiciones de que no hay cargas libres ni corrientes libres, y que el material no es magnético, pero permitiendo que el material sea no lineal en el sentido de que el campo  $\tilde{\mathbf{D}}$  y  $\tilde{\mathbf{E}}$  estén relacionados, entonces se tendrá que:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{E}} + 4\pi\tilde{\mathbf{P}} \quad (\text{E1})$$

donde, en general, el vector de polarización  $\tilde{\mathbf{P}}$  depende de manera no lineal del valor local de la magnitud del campo eléctrico  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

Ahora procedemos a derivar la ecuación de onda óptica. La derivación es similar a la seguida en el apéndice B, solo que cuidamos la nueva expresión de  $\tilde{\mathbf{D}}$ . Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (E2)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (E3)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (E4)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (E5)$$

Sacando el rotacional a la ecuación E3, e intercambiando el orden de las derivadas espaciales y temporales en el lado derecho de la ecuación se obtiene que:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \quad (E6)$$

Usando la ecuación E5 tenemos: 
$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t^2} = 0 \quad (E7)$$

Si ahora hacemos uso de E1 para eliminar  $\tilde{\mathbf{D}}$  de esta ecuación, obtenemos la expresión:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} \quad (E8)$$

Esta es la expresión más general de la ecuación de onda en óptica no lineal. Bajo ciertas condiciones puede ser simplificada. Por ejemplo usando la identidad  $\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}$ . En la óptica lineal de un medio isotrópico, el primer término del lado derecho de la ecuación se elimina ya que  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0$ , lo que implica que  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ . Sin embargo, en óptica no lineal este término generalmente no se elimina, como consecuencia de la relación más general E1. Afortunadamente, en óptica no lineal, el primer término del lado derecho de la identidad, usualmente puede ser desechado para los casos de interés. Por ejemplo, si  $\tilde{\mathbf{E}}$  tiene forma de una onda plana infinita transversal,  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}$  se puede eliminar. Generalmente, se puede probar que el primer término es pequeño, especialmente cuando es válida la *aproximación de amplitud de variación lenta*. En este apéndice y los siguientes se asumirá que la contribución de  $\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}})$  es despreciable de forma que la ecuación de onda tendrá la forma:

$$-\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2} \quad (E9)$$

Es conveniente dividir  $\tilde{\mathbf{P}}$  en sus partes lineal y no lineal:  $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{P}}^{NL}$ . Donde  $\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}$  es la parte de  $\tilde{\mathbf{P}}$  que depende linealmente del campo eléctrico  $\tilde{\mathbf{E}}$ . De forma similar se puede descomponer el campo de desplazamiento  $\tilde{\mathbf{D}}$  en sus partes lineal y no lineal:  $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^{(1)} + 4\pi\tilde{\mathbf{P}}^{NL}$ , donde la parte lineal esta dada por:  $\tilde{\mathbf{D}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{E}} + 4\pi\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}$ . En términos de esta cantidad, la ecuación de onda se transforma en:

$$-\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{D}}^{(1)}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}^{NL}}{\partial t^2} \quad (E10)$$

Para ver por qué esta forma de ecuación de onda es útil, consideremos el caso de un medio sin pérdidas y no dispersivo. En dicho caso, se puede expresar la relación entre  $\tilde{\mathbf{D}}^{(1)}$  y  $\tilde{\mathbf{E}}$  en términos de un tensor dieléctrico independiente de la frecuencia  $\epsilon^{(1)}$ , como:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(1)} = \epsilon^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (E11)$$

Para el caso de un material isotrópico, esta relación se reduce a:  $\tilde{\mathbf{D}}^{(1)} = \epsilon^{(1)} \tilde{\mathbf{E}}$ , donde  $\epsilon^{(1)}$  es una cantidad escalar. Para este caso con las condiciones marcadas anteriormente, la ecuación de onda es:

$$-\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}^{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{E12})$$

Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de onda inhomogénea. La respuesta no lineal del medio actúa como un término fuente que aparece en el lado derecho de esta ecuación. En la ausencia de este término, esta ecuación admite soluciones en la forma de ondas libres que se propagan con una velocidad  $c/n$ , donde  $n = [\varepsilon^{(1)}]^{1/2}$  es el índice lineal de refracción.

Para el caso de un medio dispersivo, se deben considerar por separado cada componente de frecuencia del campo. Representamos los campos eléctricos, de desplazamiento y de polarización como la suma de sus varias componentes de frecuencia:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \tilde{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}, t) \quad (\text{E13})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{E14})$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{NL}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{E15})$$

Donde la sumatoria debe ser realizada sobre frecuencias del campo positivas, y representamos cada componente de frecuencia en términos de su amplitud compleja como:

$$\tilde{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t} + \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r})e^{i\omega_n t} \quad (\text{E16})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_n^{(1)}(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t} + \mathbf{D}_n^{*(1)}(\mathbf{r})e^{i\omega_n t} \quad (\text{E17})$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t} + \mathbf{P}_n^{*NL}(\mathbf{r})e^{i\omega_n t} \quad (\text{E18})$$

Si la disipación puede ser despreciada, la relación entre  $\tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)}$  y  $\tilde{\mathbf{E}}_n$  puede ser expresada en términos de un tensor dieléctrico real dependiente de la frecuencia, de acuerdo a la relación:

$$\tilde{\mathbf{D}}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon^{(1)}(\omega_n) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_n(\mathbf{r}, t) \quad (\text{E19})$$

Cuando las ecuaciones E13 a E19 se introducen en la ecuación E10, obtenemos una ecuación de onda análoga a la E12 que es válida para cada componente de frecuencia del campo:

$$-\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}_n + \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_n)}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_n}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}_n^{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{E20})$$

El caso general de un medio disipativo es tratado permitiendo que el tensor dieléctrico sea una cantidad compleja, que relacione los campos de amplitud compleja de acuerdo a la relación:

$$\mathbf{D}_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \varepsilon^{(1)}(\omega_n) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \quad (\text{E21})$$

Esta expresión que ya no depende del tiempo, junto con E13-E18 se pueden introducir en E10 para obtener (nótese que se pueden quitar los complejos conjugados de ambos lados de la ecuación y la igualdad se sigue manteniendo, también por simplicidad se puede quitar la sumatoria y trabajar con las frecuencias individualmente):

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon^{(1)} \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\omega_n^2}{c^2} \mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) \quad (\text{E22})$$

## E.2 Ecuación de onda acoplada para generación por suma de frecuencias

[25]

Consideremos la generación por suma de frecuencias en un medio óptico no-lineal sin pérdida, que tenga rayos de entrada de onda continua, monocromática y colimada. Asumimos que se tiene la configuración mostrada en la figura E2, donde las ondas que entran al medio tienen incidencia normal. Por simplicidad se ignoran los efectos de doble refracción.

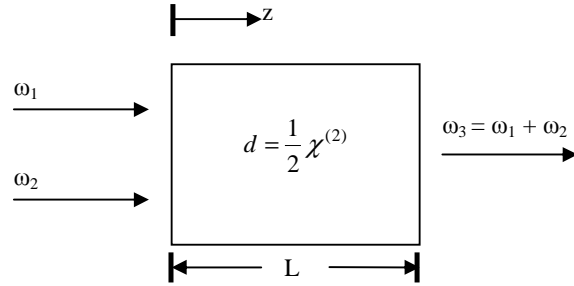


Fig. E2. Generación por suma de frecuencias

La ecuación de onda en la forma E20 debe ser válida para cada componente de frecuencia en el campo y en particular para la componente de la suma de frecuencias a frecuencia \$\omega\_3\$. En la ausencia de términos de fuentes no lineales, la solución a esta ecuación para una onda plana a frecuencia \$\omega\_3\$ propagándose en la dirección \$+z\$ es:

$$\tilde{E}_3(z, t) = A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} + A_3^* e^{-i(k_3 z - \omega_3 t)} \quad (\text{E23})$$

donde:

$$k_3 = \frac{n_3 \omega_3}{c}; \quad n_3 = [\epsilon^{(1)}(\omega_3)]^{1/2} \quad (\text{E24})$$

y donde la amplitud de la onda \$A\_3\$ es constante. Por conveniencia, estamos trabajando en la aproximación de campo escalar; \$n\_3\$ representa el índice de refracción apropiado para el estado de polarización de la onda con frecuencia \$\omega\_3\$. Se espera que, en base consideraciones físicas, cuando el término de fuente no-lineal no es muy grande, la solución a la ecuación E20 seguirá siendo de la forma E23, esperando que \$A\_3\$ se convierta en una función de \$z\$ que varía lentamente. En dicho caso se adopta la ecuación E23, con \$A\_3\$ siendo una función de \$z\$, como solución de prueba a la ecuación de onda E20 en presencia del término de fuente no-lineal.

Representamos el término de fuente no-lineal que aparece en la ecuación E20 como:

$$\tilde{P}_3(z, t) = P_3 e^{-i\omega_3 t} + P_3^* e^{i\omega_3 t} \quad (\text{E25})$$

donde:

$$P_3 = 4d_{ef} E_1 E_2 \quad (\text{E26})$$

(Para mayor información sobre esta expresión ver referencia [25] capítulo 1.5). Si representamos los campos aplicados al medio como:

$$\tilde{E}_j(z, t) = E_j e^{-i\omega_j t} + E_j^* e^{i\omega_j t} \quad \text{con } j = 1, 2. \quad (\text{E27})$$

con:

$$E_j = A_j e^{ik_j z} \quad \text{con } j = 1, 2 \quad (\text{E28})$$

La amplitud de la polarización no-lineal puede ser escrita como (ver apéndice D o referencia [25]):

$$P_3 = 4d_{ef} A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2)z} \equiv p_3 e^{i(k_1 + k_2)z} \quad (\text{E29})$$

Sustituyendo las ecuaciones E23, E25, y E29 en la ecuación de onda E20, y tomando en cuenta que, como los campos dependen solo de la coordenada longitudinal \$z\$, reemplazando \$\nabla^2\$ por \$d^2/dz^2\$, obtenemos:

$$\left[ \frac{d^2 A_3}{dz^2} + 2ik_3 \frac{dA_3}{dz} - k_3^2 A_3 + \frac{\epsilon^{(1)}(\omega_3) \omega_3^2 A_3}{c^2} \right] e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} + c.c. = \frac{-16\pi d_{ef} \omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i[(k_1 + k_2)z - \omega_3 t]} + c.c. \quad (\text{E30})$$

(c.c. significa complejo conjugado). Dado que  $k_3^2 = \varepsilon^{(1)}(\omega_3)\omega_3^2/c^2$ , el tercer y cuarto términos en el lado izquierdo de esta expresión se cancelan. De nuevo se pueden quitar los términos complejos conjugados de cada lado y aun así mantener la igualdad. Entonces podemos cancelar el factor  $e^{-i\omega_3 t}$  en cada lado y escribir la ecuación resultante como:

$$\frac{d^2 A_3}{dz^2} + 2ik_3 \frac{dA_3}{dz} = \frac{-16\pi d_{ef} \omega_3^2}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2-k_3)z} \quad (E31)$$

Usualmente se permite despreciar el primer término en el lado izquierdo de esta ecuación en base a que es mucho más pequeño que el segundo. Esta aproximación es conocida como “aproximación de variación de amplitud pequeña” y es válida siempre que:

$$\left| \frac{d^2 A_3}{dz^2} \right| \ll \left| k_3 \frac{dA_3}{dz} \right| \quad (E32)$$

Esta condición requiere que el cambio fraccional en  $A_3$  en una distancia del orden de una longitud de onda sea mucho menor que la unidad. Cuando se aplica esta aproximación, la ecuación E31 se transforma en:

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{8\pi d_{ef} \omega_3^2}{k_3 c^2} A_1 A_2 e^{i\Delta k z} = \frac{2\pi i \omega_3}{n_3 c} p_3 e^{i\Delta k z} \quad (E33)$$

Donde se ha introducido la cantidad:  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$  (E34)

que es llamada “desacoplamiento de vector de onda (o momento)”. La ecuación E33 es conocida como ecuación de amplitud acoplada, debido a que muestra como la amplitud de la onda de frecuencia  $\omega_3$  varía como consecuencia de su acoplamiento a las ondas con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . En general, la variación espacial de las ondas con frecuencia  $\omega_1$  y  $\omega_2$  también debe ser tomada en consideración, y se pueden derivar ecuaciones análogas para los campos con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  repitiendo la derivación hecha anteriormente para cada una de estas frecuencias, pero tomando en cuenta las siguientes relaciones para la ecuación E26:

Recordando que para la suma de frecuencias:		
$\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$	$\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$	$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$
$P_1 = P(\omega_1) = P(\omega_3 - \omega_2)$ $= 4d_{ef} E_3 E_2^*$	$P_2 = P(\omega_2) = P(\omega_3 - \omega_1)$ $= 4d_{ef} E_3 E_1^*$	$P_3 = P(\omega_3) = P(\omega_1 + \omega_2)$ $= 4d_{ef} E_1 E_2$

Entonces se encuentran dos ecuaciones adicionales de acoplamiento de amplitud:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi d_{ef} \omega_1^2}{k_1 c^2} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z} \quad (E35)$$

y 
$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{8\pi d_{ef} \omega_2^2}{k_2 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (E36)$$

Nótese que, al escribir estas ecuaciones en la forma mostrada, hemos asumido que el medio no es absorbente (no provoca pérdidas de energía). Para un medio absorbente, no se necesitan incluir términos explícitos de absorción en esta ecuación, además se puede hacer uso de la condición de simetría de permutación total para concluir que el coeficiente de acoplamiento tiene el mismo valor  $d_{ef}$  en cada ecuación.



## E.2.1 Consideraciones de acoplamiento de fase

Por simplicidad, asumamos que las amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  de los campos de entrada pueden ser tomadas como constantes en el lado derecho de la ecuación E33. Esta suposición es válida siempre que la conversión de los campos de entrada en el campo con la suma de frecuencias no sea muy grande. Notamos que para el caso especial:

$$\Delta k = 0 \quad (\text{E37})$$

la amplitud  $A_3$  de la onda con suma de frecuencias se incrementa linealmente con  $z$  y, consecuentemente, su intensidad se incrementa cuadráticamente con  $z$ . La condición E37 es conocida como condición de acoplamiento perfecto. Cuando se cumple, la onda generada mantiene una relación de fase fija con respecto a la polarización no-lineal. Físicamente, los dipolos atómicos individuales que constituyen el sistema material están en fase de forma que el campo emitido por cada dipolo se suma coherentemente en la dirección frontal.

Cuando la condición E37 no se satisface, la intensidad de la radiación emitida es menor que para el caso  $\Delta k = 0$ . La amplitud del campo con frecuencia  $\omega_3$  en el plano de salida del medio no-lineal se encuentra al integrar la ecuación E33 de  $z = 0$  a  $z = L$ , lo cual da:

$$A_3(L) = \frac{8\pi d_{ef} \omega_3^2 A_1 A_2}{k_3 c^2} \int_0^L e^{i\Delta k z} dz = \frac{8\pi d_{ef} \omega_3^2 A_1 A_2}{k_3 c^2} \left( \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} \right) \quad (\text{E38})$$

La intensidad de la onda con frecuencia  $\omega_3$  está dada por la magnitud del vector de Poynting promediado en el tiempo, que de acuerdo a la definición de amplitud de campo usada en la referencia [25] está dada por:

$$I_i = \frac{n_i c}{2\pi} |A_i|^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{E39})$$

Con lo cual se obtiene:

$$I_3 = \frac{32\pi d_{ef}^2 \omega_3^4 |A_1|^2 |A_2|^2 n_3}{k_3^2 c^3} \left| \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{\Delta k} \right|^2 \quad (\text{E40})$$

El módulo cuadrado que aparece en esta ecuación puede ser expresado como:

$$\left| \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{\Delta k} \right|^2 = L^2 \left( \frac{e^{i\Delta k L} - 1}{\Delta k L} \right) \left( \frac{e^{-i\Delta k L} - 1}{\Delta k L} \right) = 2L^2 \frac{(1 - \cos \Delta k L)}{(\Delta k L)^2} = L^2 \frac{\text{sen}^2(\Delta k L / 2)}{(\Delta k L / 2)^2} \equiv L^2 \text{sinc}^2(\Delta k L / 2) \quad (\text{E41})$$

Finalmente, nuestra expresión para  $I_3$  puede ser escrita en términos de las intensidades de los campos incidentes usando la ecuación E39 para expresar  $|A_i|^2$  en términos de las intensidades, lo cual de cómo resultado:

$$I_3 = \frac{512\pi^5 d_{ef}^2 I_1 I_2}{n_1 n_2 n_3 \lambda_3^2 c} L^2 \text{sinc}^2(\Delta k L / 2) \quad (\text{E42})$$

donde  $\lambda_3 = 2\pi c / \omega_3$  es la longitud de onda en el vacío de la onda con frecuencia  $\omega_3$ . El factor  $\text{sinc}^2(\Delta k L / 2)$  es conocido como factor de desacoplamiento de fase. Debe ser notado que la eficiencia en el proceso de mezcla de tres ondas decrece conforme  $|\Delta k|L$  se incrementa, ocurriendo algunas oscilaciones. La razón para este comportamiento es que si  $L$  es mayor que aproximadamente  $1/\Delta k$ , la onda de salida puede salirse de fase con la polarización no-lineal que la crea, y la potencia puede fluir de la onda con frecuencia  $\omega_3$  de regreso a las ondas con frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Por esta razón algunas veces se define:  $L_c = 2 / \Delta k$  (C43)

como la longitud de conversión en coherencia de la interacción, de forma que el factor de desacoplamiento de fase de la ecuación C32 sea:  $\text{sinc}^2(L / L_c)$ .

### E.3 Generación por suma de frecuencias [25]

La generación por suma de frecuencias se puede tratar de forma más general asumiendo la configuración de la figura E3. Las ecuaciones de amplitud acoplada que describen esta interacción son E33, E35 y E36. Trataremos el caso en que uno de los campos aplicados (el de frecuencia  $\omega_2$ ) es intenso, mientras el otro campo (a frecuencia  $\omega_1$ ) es débil. Esta situación se aplica en la conversión de una señal infrarroja débil de frecuencia  $\omega_1$  a una frecuencia visible  $\omega_3$  debido a que se mezcla con un rayo láser intenso de frecuencia  $\omega_2$ . Este proceso es conocido como conversión ascendente. Podemos asumir que la amplitud  $A_2$  del campo a frecuencia  $\omega_2$  no es afectado por la interacción, por lo que  $A_2$  es una constante en las ecuaciones E33-E36, lo cual genera el siguiente conjunto de ecuaciones:

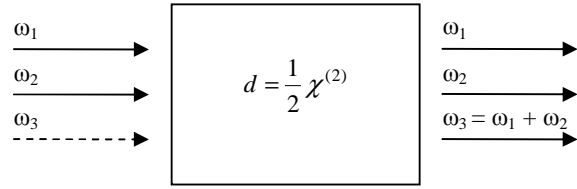


Fig. E3. Generación por suma de frecuencias. Típicamente no se aplica un campo  $\omega_3$ .

donde se han introducido las cantidades:

$$\frac{dA_1}{dz} = K_1 A_3 e^{-i\Delta kz} \quad (\text{E44a})$$

$$\frac{dA_3}{dz} = K_3 A_1 e^{-i\Delta kz} \quad (\text{E44b})$$

donde se han introducido las cantidades:

$$K_1 = \frac{8\pi\omega_1^2 d}{k_1 c^2} A_2^*; \quad K_3 = \frac{8\pi\omega_3^2 d}{k_3 c^2} A_2 \quad (\text{E45a})$$

recordando que:

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 \quad (\text{E45b})$$

La solución a las ecuaciones E44 son particularmente simples si  $\Delta k = 0$ . En dicho caso, tomando la derivada de la ecuación E44a, se obtiene que:

$$\frac{d^2 A_1}{dz^2} = K_1 \frac{dA_3}{dz} \quad (\text{E46})$$

Ahora se usa la ecuación E44b para eliminar  $dA_3/dz$  y obtener una ecuación que solo involucre a  $A_1(z)$ :

$$\frac{d^2 A_1}{dz^2} = -\kappa^2 A_1 \quad (\text{E47})$$

donde se ha introducido el coeficiente de acoplamiento positivo  $\kappa^2$ , definido como:

$$\kappa^2 \equiv -K_1 K_3 \quad (\text{E48})$$

La solución general a la ecuación E47 es:

$$A_1(z) = B \cos \kappa z + C \text{sen } \kappa z \quad (\text{E49})$$

Ahora obtenemos la forma de  $A_3(z)$  a través del uso de la ecuación E44a, que muestra que  $A_3(z) = (dA_1/dz)/K_1$ , o:

$$A_3(z) = \frac{-B\kappa}{K_1} \text{sen } \kappa z + \frac{C\kappa}{K_1} \cos \kappa z \quad (\text{E50})$$

Luego buscamos las soluciones que satisfagan las condiciones de frontera apropiadas. Asumimos que el campo  $\omega_3$  no está presente a la entrada, de forma que  $A_3(0) = 0$ , y con  $A_1(0)$  con algún valor especificado. Aplicando estas condiciones a las ecuaciones E49 y E50 encontramos que:  $C = 0$ , y que  $B = A_1(0)$ .

La solución para el campo  $\omega_1$  estará dada por:

$$A_1(z) = A_1(0) \cos \kappa z \quad (\text{E51})$$

Y para el campo  $\omega_3$  por:

$$A_3(z) = -A_1(0) \frac{\kappa}{K_1} \text{sen } \kappa z \quad (\text{E52})$$

Para simplificar la forma de esta ecuación, se expresa el cociente  $\kappa/K_1$  como:  $\frac{\kappa}{K_1} = -i \left( \frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1} \right)^{1/2} \frac{|A_2|}{A_2^*}$ .

Y, a su vez, el cociente  $|A_2|/A_2^*$  puede ser expresado como:  $\frac{|A_2|}{A_2^*} = \frac{A_2 |A_2|}{|A_2|^2} = \frac{A_2}{|A_2|} = e^{i\phi_2}$ , donde  $\phi_2$  denota la fase de  $A_2$ . Con esto se llega a que:

$$A_3(z) = i \left( \frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1} \right)^{1/2} A_1(0) (\text{sen } \kappa z) e^{i\phi_2} \quad (\text{E53})$$

El comportamiento de las soluciones E51 y E53 se muestra en la figura E4.

Si ahora se trata el caso en que  $\Delta k \neq 0$ , se buscaran soluciones de prueba a las ecuaciones E44 de la forma:

$$A_1(z) = (F e^{igz} + G e^{-igz}) e^{-i\Delta k z / 2} \quad (\text{E54})$$

$$A_3(z) = (C e^{igz} + D e^{-igz}) e^{i\Delta k z / 2} \quad (\text{E55})$$

donde  $g$  da la tasa de variación espacial de los campos y donde  $C, D, F$  y  $G$  son constantes cuyos valores dependen de las condiciones de frontera. Tomamos esta forma de soluciones de prueba debido a que se espera que las ondas  $\omega_1$  y  $\omega_3$  muestren la misma variación espacial, ya que están acopladas. Cuando las ecuaciones E54 y E55 se sustituyen en las ecuaciones E44a y E44b, se realiza un algebra laboriosa y larga (que por lo mismo no mostramos aquí, pero se puede ver el desarrollo en la referencia [14] capítulo 2.4), se define la cantidad:

$$g = \sqrt{\kappa^2 + \frac{1}{4} \Delta k^2} \quad (\text{E56})$$

Si se asume que los campos  $A_1$  y  $A_3$  son conocidos en el plano de entrada ( $z = 0$ ) del medio no lineal, se encuentra que las soluciones están dadas por:

$$A_1(z) = \left[ A_1(0) \cos gz + \left( \frac{K_1}{g} A_3(0) + \frac{i\Delta k}{2g} A_1(0) \right) \text{sen } gz \right] e^{-1/2 i\Delta k z} \quad (\text{E57})$$

$$A_3(z) = \left[ A_3(0) \cos gz + \left( \frac{-i\Delta k}{2g} A_3(0) + \frac{K_3}{g} A_1(0) \right) \text{sen } gz \right] e^{1/2 i\Delta k z} \quad (\text{E58})$$

Para interpretar este resultado, consideremos el caso especial en que el campo de suma de frecuencias no incide en el medio, de forma que  $A_3(0) = 0$ . Esto provoca que la ecuación E58 se reduzca a:

$$A_3(z) = \frac{K_3}{g} A_1(0) \text{sen } gz e^{1/2 i\Delta k z} \quad (\text{E59})$$

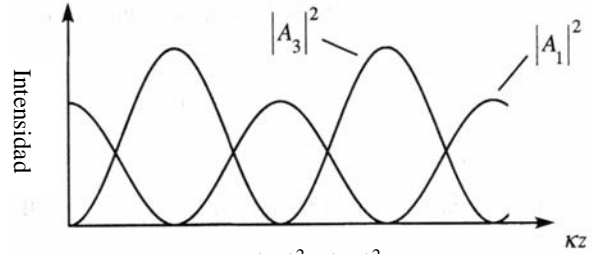


Fig. E4. Variación de  $|A_1|^2$  y  $|A_3|^2$  para el caso de acoplamiento de fase perfecto.

Por lo que la intensidad de la onda generada es proporcional a:

$$|A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \frac{|K_3|^2}{g^2} \text{sen}^2 gz \quad (\text{E60})$$

Se puede notar que la longitud de escala característica  $g^{-1}$  de la interacción se hace mas pequeña conforme  $\Delta k$  se incrementa. Sin embargo, conforme  $\Delta k$  se incrementa la intensidad máxima de la onda generada decrece. Dado que, de acuerdo a E60, la intensidad de la onda generada es inversamente proporcional a  $g^2$ , vemos que cuando  $\Delta k$  crece, la intensidad máxima de la onda generada decrece en un factor  $\kappa^2 / \left( \kappa^2 + \frac{1}{4} \Delta k^2 \right)$ .

Este comportamiento se ilustra en la figura E5.

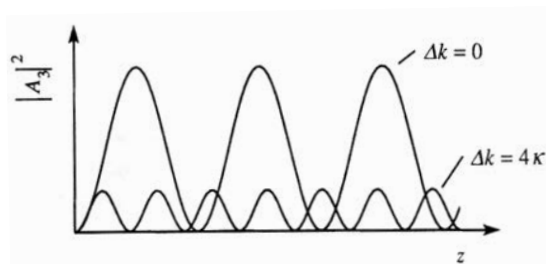
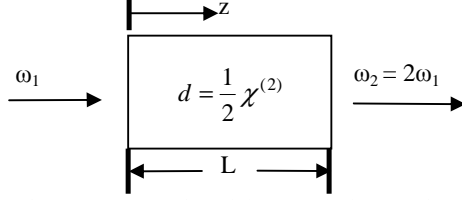


Fig. E5. Variación espacial de la onda de suma de frecuencias.

# Apéndice F

## Generación del segundo armónico [25]

Aquí se presenta la descripción matemática del proceso de generación del segundo armónico que se muestra simbólicamente en la figura F1. Asumimos que el medio es no absorbente tanto a la frecuencia fundamental  $\omega_1$  como a la del segundo armónico  $\omega_2 = 2\omega_1$ , de forma que la susceptibilidad no lineal obedezca las condiciones de simetría de permutaciones. Tomamos el campo eléctrico total dentro del medio no-lineal como:



$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t) \quad (F1)$$

donde cada componente está expresada en términos de una amplitud compleja  $E_j(z)$  y de la amplitud de variación lenta  $A_j(z)$  de acuerdo a:

$$\vec{E}_j(z, t) = E_j(z)e^{-i\omega_j t} + E_j^*(z)e^{i\omega_j t} \quad j=1,2 \quad (F2)$$

con:

$$E_j(z) = A_j(z)e^{ik_j z} \quad (F3)$$

Y donde el número de onda y los índices de refracción están dados por:

$$k_j = \frac{n_j \omega_j}{c}; \quad n_j = [\epsilon^{(1)}(\omega_j)]^{1/2} \quad (F4)$$

Asumimos que cada componente de frecuencia del campo eléctrico obedece la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_j}{\partial z^2} - \frac{\epsilon^{(1)}(\omega_j)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_j}{\partial t^2} \quad (F5)$$

La polarización no lineal se representa como:

$$\vec{P}^{NL}(z, t) = \vec{P}_1(z, t) + \vec{P}_2(z, t) \quad (F6)$$

con:

$$\vec{P}_j(z, t) = P_j(z)e^{-i\omega_j t} + P_j^*(z)e^{i\omega_j t}, \quad j=1,2 \quad (F7)$$

La expresión para  $P_j$  esta dada por (Apéndice. D o referencia [25]):

$$P_1(z) = 4d_{ef} E_2 E_1^* = 4d_{ef} A_2 A_1^* e^{i(k_2 - k_1)z} \quad (F8)$$

y

$$P_2(z) = 2d_{ef} E_1^* = 2d_{ef} A_1^* e^{2ik_1 z} \quad (F9)$$

Obtenemos las ecuaciones de amplitud acoplada para las dos frecuencias por métodos parecidos a los del apéndice E2, estas son:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi\omega_1^2 d_{ef}}{k_1 c^2} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (F10)$$

$$y \quad \frac{dA_2}{dz} = \frac{4\pi\omega_2^2 d_{ef}}{k_2 c^2} A_1^2 e^{i\Delta kz} \quad (\text{F11})$$

$$\text{donde:} \quad \Delta k = 2k_1 - k_2 \quad (\text{F12})$$

En la aproximación donde  $A_j$  es constante, la ecuación F11 puede ser integrada inmediatamente para obtener una expresión para la dependencia espacial de la amplitud del campo del segundo armónico. Más generalmente, el par de ecuaciones acopladas deben ser resueltas simultáneamente. Para hacer eso es conveniente trabajar con el modulo y fase de cada amplitud del campo en lugar de hacerlos con las cantidades complejas. También es conveniente expresar estas amplitudes en forma a-dimensional. De este modo, escribimos las amplitudes complejas de variación lenta como:

$$A_1 = \left( \frac{2\pi l}{n_1 c} \right)^{1/2} u_1 e^{i\phi_1} \quad (\text{F13})$$

$$A_2 = \left( \frac{2\pi l}{n_2 c} \right)^{1/2} u_2 e^{i\phi_2} \quad (\text{F14})$$

donde se ha introducido la intensidad total de las dos ondas:

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{F15})$$

y donde la intensidad de cada onda esta dada por:

$$I_j = \frac{n_j c}{2\pi} |A_j|^2 \quad (\text{F16})$$

Como consecuencia de las relaciones de Manley-Rowe [25, capítulo 2.3.], la intensidad total  $I$  es una constante. Las nuevas amplitudes  $u_1$  y  $u_2$  están definidas de forma tal que:

$$u_1(z)^2 + u_2(z)^2 = 1 \quad (\text{F17})$$

Luego se introduce un parámetro de distancia normalizado:  $\zeta = z/l$  (F18)

$$\text{donde:} \quad l = \left( \frac{n_1^2 n_2 c^3}{2\pi l} \right)^{1/2} \frac{1}{8\pi\omega_1 d_{ef}} \quad (\text{F19})$$

es la distancia característica sobre la cual los campos intercambian energía. También se introduce la fase relativa de los campos inter-actuantes:

$$\theta = 2\phi_1 - \phi_2 + \Delta kz \quad (\text{F20})$$

y el parámetro de des-acoplamiento de fase normalizado:  $\Delta s = \Delta kl$  (F21)

Las cantidades  $u_j$ ,  $\phi_j$ ,  $\zeta$ , y  $\Delta s$ , definidas en las ecuaciones F13 a F21, son introducidas en las ecuaciones de amplitud acoplada F10 y F11 que, después de cierta algebra, se reducen a un conjunto de ecuaciones acopladas para las tres cantidades reales  $u_1$ ,  $u_2$  y  $\theta$ :

$$\frac{du_1}{d\zeta} = u_1 u_2 \text{sen} \theta \quad (\text{F22})$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = -u_1^2 \text{sen} \theta \quad (\text{F23})$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \Delta s + \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \frac{d}{d\zeta} (\ln u_1^2 u_2) \quad (\text{F24})$$

Este conjunto de ecuaciones ha sido resuelto bajo condiciones generales. Por lo pronto asumamos el caso de acoplamiento de fase perfecto de forma que  $\Delta k$  y por tanto  $\Delta s$  desaparecen. Para  $\Delta s = 0$ , la ecuación F24 puede ser escrita como:

$$\frac{d}{d\zeta} \ln(\cos \theta u_1^2 u_2) = 0 \quad (\text{F25})$$

Por lo que la cantidad  $\ln(\cos \theta u_1^2 u_2)$  es una constante que llamaremos  $\Gamma$ , de forma que la solución a F25 se exprese como:

$$u_1^2 u_2 \cos \theta = \Gamma \quad (\text{F26})$$

donde  $\Gamma$  es independiente de la distancia de propagación normalizada  $\zeta$ . El valor de  $\Gamma$  puede ser determinado de los valores conocidos de  $u_1$ ,  $u_2$  y  $\theta$  a la entrada del medio no-lineal  $\zeta = 0$ .

Así, hemos encontrado dos cantidades que conservan F17 y F26. Estas pueden ser usadas para desacoplar el conjunto de ecuaciones F22-F24. Por ejemplo, la ecuación F23 puede ser escrita usando F17 y la identidad  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  como:

$$\frac{du_2}{d\zeta} = \pm(1-u_2^2)(1-\cos \theta)^{1/2} \quad (\text{F27})$$

Luego, la ecuación F26 se usa para expresar al  $\cos^2 \theta$  en términos de  $\Gamma$  y  $u_2$ :

$$\frac{du_2}{d\zeta} = \pm(1-u_2^2) \left(1 - \frac{\Gamma^2}{u_1^4 u_2^2}\right)^{1/2} = \pm(1-u_2^2) \left(1 - \frac{\Gamma^2}{(1-u_2^2)^2 u_2^2}\right)^{1/2} \quad (\text{F28})$$

Este resultado puede ser simplificado algebraicamente para obtener:

$$u_2 \frac{du_2}{d\zeta} = \pm[(1-u_2^2)^2 u_2^2 - \Gamma^2]^{1/2} \quad \text{ó} \quad \frac{du_2^2}{d\zeta} = \pm 2[(1-u_2^2)^2 u_2^2 - \Gamma^2]^{1/2} \quad (\text{F29})$$

Por supuesto, la solución a esta ecuación puede ser expresada en términos de las funciones elípticas de Jacobi.

Así mismo, en general, estas soluciones nos dicen que los campos: fundamental y de segundo armónico, intercambian energía periódicamente. La solución a F29 se torna particularmente simple para el caso especial en que la constante  $\Gamma$  es cero. Dicha condición ocurre siempre y cuando la amplitud de cualquiera de los dos campos de entrada sea cero o cuando los campos están inicialmente en fase de forma que  $\cos \theta = 0$ . Notamos que dado que  $\Gamma$  es una cantidad conservada, será igual a cero para todos los valores de  $\zeta$ . Por definición asumiremos que:

$$\sin \theta = -1 \quad (\text{F30})$$

Entonces veremos que la fase relativa de los campos inter-actuantes es espacialmente invariante para  $\Gamma = 0$ . Además, cuando  $\Gamma = 0$  las ecuaciones de amplitud acoplada toman formas relativamente simples:

$$\frac{du_1}{d\zeta} = -u_1 u_2 \quad (\text{F31})$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = u_1^2 = 1 - u_2^2 \quad (\text{F32})$$

La solución a la segunda ecuación es:  $u_2 = \tanh(\zeta + \zeta_0)$  (F33)

donde  $\zeta_0$  es una constante de integración. Asumiendo que las condiciones iniciales son:

$$u_1(0) = 1 \quad u_2(0) = 0 \quad (\text{F34})$$

Tales condiciones implican que no hay luz a frecuencia  $\omega_2$  (segundo armónico) incidiendo en el cristal. En dicho caso, como  $\tanh(0) = 0$ , encontramos que la constante de integración  $\zeta_0$  es igual a 0, y por lo tanto:

$$u_2(\zeta) = \tanh \zeta \quad (\text{F35})$$

La amplitud  $u_1$  de la onda fundamental es encontrada usando F32 o F17:

$$u_1(\zeta) = \text{sech} \zeta \quad (\text{F36})$$

Para el caso en el que solo el campo fundamental está presente en  $z = 0$ , el parámetro de longitud F19 está dado por:

$$l = \frac{(n_1 n_2)^{1/2} c}{8\pi\omega_1 d_{ef} |A_1(0)|} \quad (\text{F37})$$

Las soluciones dadas por las ecuaciones F35 y F36 se muestran gráficamente en la figura F2, donde se aprecia que toda la radiación incidente es convertida en segundo armónico en el límite  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Amstrong (*et al.*) ha resuelto las ecuaciones de amplitud acoplada que describen la generación del segundo armónico para una  $\Delta k$  arbitraria, encontrando que la solución puede ser expresada en términos de integrales elípticas. Estos resultados se resumen gráficamente en la figura D3, para el caso en que no hay radiación incidente a la frecuencia del segundo armónico. Vemos que el efecto de un desacoplamiento distinto de cero del vector de propagación disminuye la eficiencia de conversión.

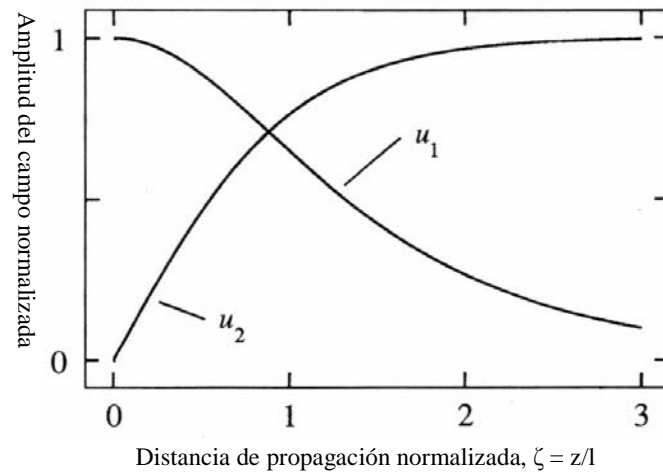


Fig. F2. Variación espacial de las amplitudes de campo para el caso de acoplamiento de fase perfecto,

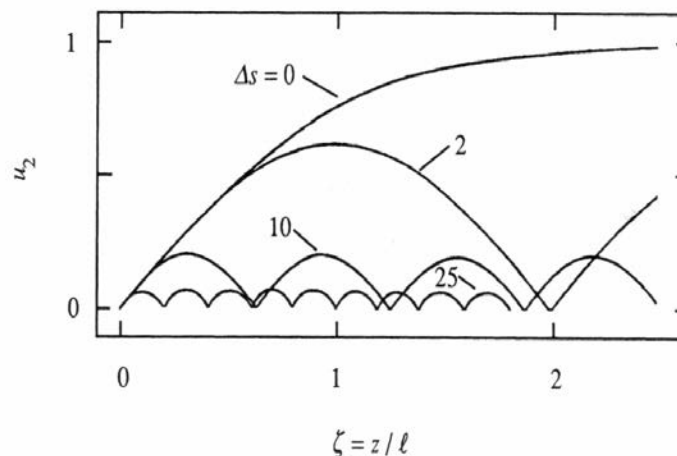


Fig. D3. Efecto del desacoplamiento del vector de onda en la eficiencia del segundo armónico.



## F.1 Consideraciones del acoplamiento de fase

Como se puede ver en el apéndice E3, la intensidad de la suma de frecuencias es:

$$I_3 = I_3(\max) \frac{\text{sen}^2(\Delta kL/2)}{(\Delta kL/2)} \quad (\text{F38})$$

Esta expresión predice un decremento en la eficiencia de la generación por suma de frecuencias cuando la condición de acoplamiento de fase perfecta,  $\Delta k = 0$ , no se satisface.

La condición de acoplamiento de fase  $\Delta k = 0$  es, generalmente, difícil de alcanzar debido a que los índices de refracción de los materiales que son no absorbentes en el rango  $\omega_1$  a  $\omega_3$  (asumiendo que  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ ) muestran un efecto conocido como dispersión normal: el índice de refracción es una función creciente de la frecuencia. Como resultado, la condición de acoplamiento de fase perfecta con rayos co-lineales:

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3 \quad (\text{F39})$$

donde:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (\text{F40})$$

no puede ser alcanzada. Para el caso de generación de segundo armónico, con  $\omega_1 = \omega_2$ , y  $\omega_3 = 2\omega_1$ , estas condiciones requieren que:

$$n(\omega_1) = n(2\omega_1) \quad (\text{F41})$$

Que claramente es imposible cuando  $n(\omega)$  incrementa monótonamente con  $\omega$ .

Sin embargo, el procedimiento más común para obtener el acoplamiento de fase es haciendo uso de la birrefringencia mostrada por muchos cristales. Para esto, la frecuencia más alta debe estar polarizada en la dirección que tenga el menor de los dos índices de refracción. Para el caso de un cristal uní-axial negativo esta opción corresponde a la polarización extraordinaria. Se define como *acoplamiento de fase tipo I* al caso en el que las dos ondas de baja frecuencia tienen la misma polarización, y como *tipo II* al caso en el que las polarizaciones son ortogonales. El acoplamiento tipo I es más fácil de obtener que el tipo II.

Un control cuidadoso de los índices de refracción en cada una de las tres frecuencias es necesario para establecer la condición  $\Delta k = 0$ . Típicamente, el acoplamiento de fase se obtiene por dos métodos: ajuste de ángulo o ajuste de temperatura.

El método de ajuste de ángulo involucra la orientación angular precisa del cristal con respecto a la dirección de propagación de la luz incidente. Este proceso es el que se menciona en el capítulo 3.2 o en el apéndice C. La luz polarizada en el plano que contiene a  $\mathbf{k}$  y al eje óptico experimenta un índice de refracción  $n_e(\theta)$  que depende del ángulo  $\theta$  entre el eje óptico y  $\mathbf{k}$  de acuerdo a la relación:

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\bar{n}_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (\text{F42})$$

El acoplamiento de fase es obtenido ajustando el ángulo  $\theta$  para alcanzar el valor de  $n_e(\theta)$  para el cual la condición  $\Delta k = 0$  se satisface.

# Apéndice G

## Generación por Diferencia de Frecuencias [25]

Consideremos la situación mostrada en la figura G1, en la cual ondas ópticas a frecuencias  $\omega_3$  y  $\omega_1$  interactúan con un medio óptico no-lineal no absorbente para producir una onda de salida a la diferencia de las frecuencias  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ . Por simplicidad, asumiremos que la onda con  $\omega_3$  es una onda intensa y que no hay campo incidente en el medio a frecuencia  $\omega_2$ . Las ecuaciones de amplitud acoplada que describen esta interacción son:

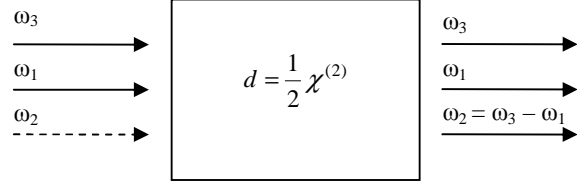


Fig. G1. Generación por diferencia de frecuencias. Típicamente no se aplica un campo  $\omega_2$ .

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi d_{ef} \omega_1^2}{k_1 c^2} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z} \quad (G1a)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{8\pi d_{ef} \omega_2^2}{k_2 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (G1b)$$

donde: 
$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 \quad (G2)$$

Primero resolvemos estas ecuaciones para el caso de acoplamiento de fase perfecto,  $\Delta k = 0$ . Diferenciando G1b con respecto a  $z$  e introduciendo el complejo conjugado de la ecuación E1a para eliminar  $dA_1^*/dz$ , se obtiene:

$$\frac{d^2 A_2}{dz^2} = \frac{64\pi^2 \omega_1^2 \omega_2^2 d^2}{k_1 k_2 c^4} A_3 A_3^* A_2 \equiv \kappa^2 A_2 \quad (G3)$$

La solución general a esta ecuación es: 
$$A_2(z) = C \sinh \kappa z + D \cosh \kappa z \quad (G4)$$

donde  $C$  y  $D$  son constantes de integración cuyos valores dependen de las condiciones de frontera. Si se asumen las condiciones de frontera:

$$A_2(0) = 0; \quad A_1(0) \text{ puede ser arbitraria} \quad (G5)$$

las soluciones a las ecuaciones G1 que cumplen con estas condiciones son parecidas a las presentadas en el apéndice E,

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh \kappa z \quad (G6)$$

$$A_2(z) = i \left( \frac{n_1 \omega_2}{n_2 \omega_1} \right)^{1/2} \frac{A_3}{|A_3|} A_1^*(0) \sinh \kappa z \quad (G7)$$

El comportamiento de esta solución se muestra en la figura G2. Nótese que tanto el campo  $\omega_1$  y  $\omega_2$  experimentan un crecimiento monótono y asintótico. De la forma de la solución vemos que el campo  $\omega_1$  retiene su fase inicial y solo es amplificado por la interacción, mientras que la onda generada a frecuencia  $\omega_2$  tiene una fase que depende de la fase de la onda de bombeo y de la fase de la onda  $\omega_1$ .

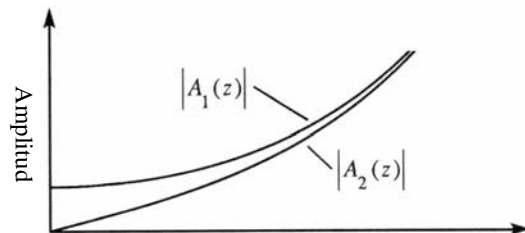


Fig. G2. Evolución espacial de  $A_1$  y  $A_2$  para la generación por diferencia de frecuencia para el caso  $\Delta k = 0$ .

La razón para este comportamiento diferente, en este caso, puede ser entendida intuitivamente en términos de los diagramas de niveles de energía mostrados en la figura G3. En el diagrama (a) se explica cómo la presencia de un campo a frecuencia  $\omega_1$  estimula la transición descendente que lleva a la generación del campo  $\omega_2$ . De forma similar, el diagrama (b) muestra que el campo  $\omega_2$  estimula la generación del campo  $\omega_1$ . Entonces, la generación del campo  $\omega_1$  refuerza la generación del campo  $\omega_2$  y viceversa, llevando a un crecimiento exponencial de cada onda.

Dado que el campo  $\omega_1$  es amplificado por el proceso, el cual es paramétrico, el fenómeno también es conocido como amplificación paramétrica. Podemos decir que la onda señal ( $\omega_1$ ) es amplificada por un proceso de mezcla no-lineal, y una onda “testigo” ( $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ ) es generada en el mismo proceso. Si se colocan espejos altamente reflejantes a las frecuencias  $\omega_1$  y/o  $\omega_2$  a los lados del medio no-lineal para formar un resonador óptico, puede generarse una oscilación como consecuencia de la ganancia del proceso de amplificación paramétrica. Tal dispositivo es conocido como Oscilador Paramétrico Óptico (OPO). El funcionamiento de este aparato se muestra en la figura G4. La parte (a) de la figura muestra que al generar la diferencia de frecuencias  $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ , la frecuencia de entrada menor  $\omega_s$  es amplificada. Convencionalmente,  $\omega_p$  es conocida como frecuencia de bombeo,  $\omega_s$  frecuencia señal, y  $\omega_i$  como frecuencia testigo. La oscilación que se puede producir en la amplificación paramétrica óptica se da en la presencia de retroalimentación, como se muestra en la parte (b) de la figura. Cuando el OPO es operado cerca o en el punto de degeneración ( $\omega_s = \omega_i$ ) tiende a operar como un oscilador resonante doble. El oscilador paramétrico óptico es una fuente versátil de radiación de frecuencia ajustable en el infrarrojo, el visible, y el ultravioleta.

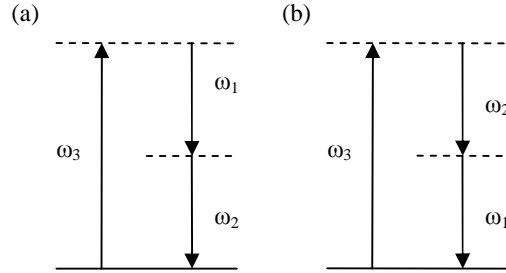


Fig. G3. Generación por diferencia de frecuencias.

Finalmente, la solución a las ecuaciones de amplitud acopladas G1 para el caso general en que  $\Delta k \neq 0$ , se deducen de forma similar a como se hace en el caso de generación por suma de frecuencias; sin embargo, resolver el sistema es un tanto tedioso, por lo que aquí solo presentamos el resultado. Si se desea obtener más información acerca de cómo resolver las ecuaciones se recomienda ver la referencia [25] capítulo 2.5. Así, la solución para el caso en que también las condiciones de frontera son arbitrarias (es decir,  $A_1(0)$  y  $A_2(0)$  están especificadas) será:

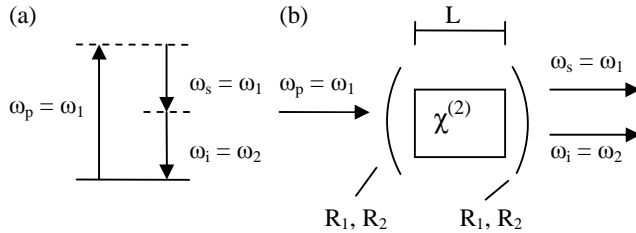


Fig. G4. (a) Relación entre generación por diferencia de frecuencias y la amplificación paramétrica óptica. (b) La ganancia asociada con la amplificación paramétrica óptica puede ser usada para construir el dispositivo mostrado.

$$A_1(z) = \left[ A_1(0) \left( \cosh gz - \frac{i\Delta k}{2g} \sinh gz \right) + \frac{\kappa_1}{g} A_2^*(0) \sinh gz \right] e^{i\Delta kz/2} \quad (G8)$$

$$A_2(z) = \left[ A_2(0) \left( \cosh gz - \frac{i\Delta k}{2g} \sinh gz \right) + \frac{\kappa_2}{g} A_1^*(0) \sinh gz \right] e^{i\Delta kz/2} \quad (G9)$$

donde:

$$g = \left[ \kappa_1 \kappa_2 - \left( \frac{\Delta k}{2} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad \kappa_j = \frac{8\pi i \omega_j^2 d_{ef} A_3}{k_j c^2} \quad (G10)$$

# Apéndice H

## Laminas de media onda y compensadores [23]

Existe una clase de elementos ópticos denominados retardadores que sirven para cambiar la polarización de una onda incidente. En principio, la función de un retardador es muy simple. De alguna forma, se retrasa en fase uno de los dos estados coherentes constitutivos, respecto al otro, en una cantidad predeterminada. Al salir del retardador, la fase relativa de los dos componentes es diferente a lo que era inicialmente y entonces es diferente también el estado de polarización.

Una onda plana monocromática incidente en un cristal uni-axial tal como la calcita, generalmente se divide en dos haces salientes (apéndices B o C) uno ordinario y otro extraordinario. Si el campo  $\vec{E}$  de dicha onda tiene componentes paralelas y perpendiculares al eje óptico, dos ondas planas separadas se propagarán a través del cristal. Ya que  $v_{\parallel} > v_{\perp}$ ,  $n_o > n_e$  (o puede ser al revés), la onda  $e$  se desplazará dentro del espécimen más rápidamente que la onda  $o$ . Después de atravesar una lámina de espesor  $d$  la onda electromagnética resultante será la superposición de las ondas  $e$  y  $o$ , que ahora tienen una diferencia de fase relativa  $\Delta\varphi$ . Recordemos que se trata de ondas armónicas de la misma frecuencia cuyos campos  $\vec{E}$  son ortogonales. Entonces, la diferencia relativa de la longitud de camino óptico estará dada por:

$$\Lambda = d(|n_o - n_e|) \quad (\text{H.1})$$

y ya que  $\Delta\varphi = k_o\Lambda$ :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(|n_o - n_e|) \quad (\text{H.2})$$

Donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío. El estado de polarización de la luz emergente dependerá evidentemente de las amplitudes de las componentes ortogonales del campo incidente y por supuesto de  $\Delta\varphi$ .

### H.1 La lámina de media onda

Una lámina retardadora que introduce una diferencia de fase relativa de  $\pi$  radianes o  $180^\circ$  entre las ondas  $o$  y  $e$  se denomina **lámina de media onda**. Supongamos que el plano de vibración de un haz incidente de luz lineal forme un ángulo arbitrario  $\theta$  con el eje rápido, como se muestra en la figura H.1. En un material negativo la onda  $e$  tendrá una velocidad mayor y una longitud de onda más grande que la onda  $o$ . Al salir las ondas de la lámina, se producirá un desfase relativo de  $\lambda_0/2$  con el efecto de que  $\vec{E}$  habrá girado un ángulo  $2\theta$ .

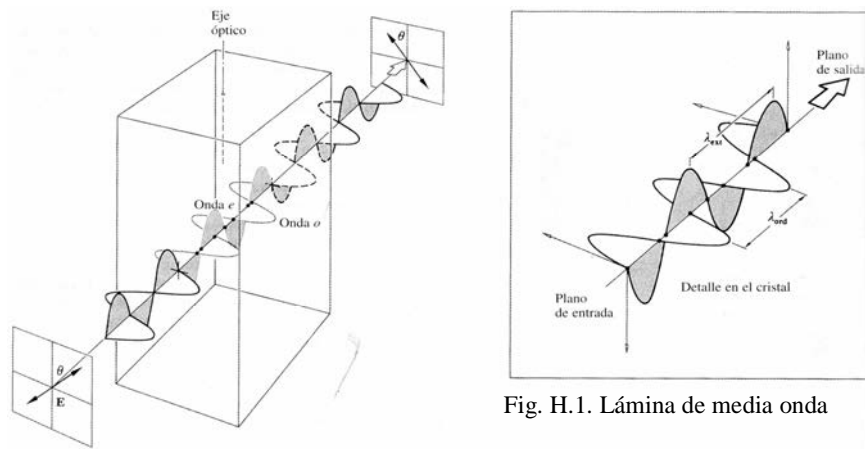


Fig. H.1. Lámina de media onda

Conforme las ondas  $e$  y  $o$  progresan a través de la lámina retardadora, su diferencia de fase relativa  $\Delta\phi$  aumenta y, por consiguiente, el estado de polarización de la onda cambia gradualmente de un punto de la lámina al siguiente. Evidentemente, si el espesor del material es tal que:

$$d(n_o - n_e) = (2m+1)\lambda_0 / 2 \quad (\text{H.3})$$

donde  $m = 0, 1, 2, \dots$ , funcionará como una lámina de media onda ( $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ ). Para construir este tipo de elementos ópticos, comúnmente se utiliza el cristal biáxico mica.

## H.2 Compensadores

Un compensador es un dispositivo óptico que puede imprimir un retardo controlable en una onda. A diferencia de una lámina donde  $\Delta\phi$  es fija, la diferencia relativa de fase que aparece en un compensador puede variar continuamente. Entre los numerosos tipos de compensadores diferentes, solamente consideraremos dos de los que se utilizan más frecuentemente. El compensador Babinet que se muestra en la figura H.2 consta de dos cuñas independientes de calcita o, más comúnmente, de cuarzo, cuyos ejes ópticos están indicados por las líneas y puntos en la figura. Un rayo que atraviesa verticalmente el dispositivo en un punto arbitrario, atravesará un espesor  $d_1$  de la cuña superior y  $d_2$  en la inferior. La diferencia

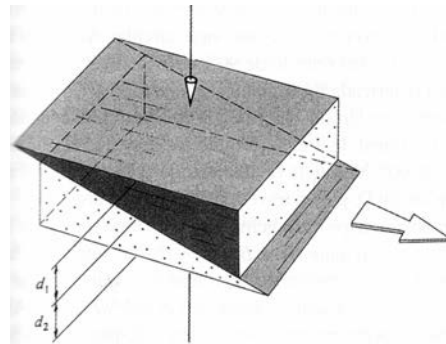


Fig. H.2. Compensador Babinet.

relativa de fase impartida a la onda en el primer cristal es  $2\pi d_1(n_o - n_e) / \lambda_0$  mientras que la del segundo cristal es  $-2\pi d_2(n_o - n_e) / \lambda_0$ . Los rayos  $o$  y  $e$  en la cuña superior (suponiendo que el material es negativo) sufren un desfase en el que la onda  $e$  se adelanta a la onda  $o$ , sin embargo, en la cuña inferior (cuyos ejes están rotados  $90^\circ$  respecto a los de la cuña superior) estos rayos ( $o$  y  $e$  en la cuña superior) se transforman en  $e$  y  $o$  respectivamente, por lo que ahora, la onda que había quedado retrasada viaja más rápido e intenta al cansar a la otra, es decir, el desfase es inverso.

Generalmente los compensadores son delgados (los ángulos de las cuñas son típicamente  $2.5^\circ$ ), siendo por consiguiente la separación de los rayos despreciable. La diferencia total de fase es entonces:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d_1 - d_2)(n_o - n_e) \quad (\text{H.4})$$

Si el compensador se hace de calcita, la onda  $e$  se adelanta a la onda  $o$  en la cuña superior, y por consiguiente, si  $d_1 > d_2$ ,  $\Delta\phi$  corresponde al ángulo total por el que la componente  $e$  se adelanta a la componente  $o$ . Lo contrario es cierto para un compensador de cuarzo, si  $d_1 > d_2$ ,  $\Delta\phi$  es el ángulo en el que la onda  $o$  se adelanta a la  $e$ . Cuando  $d_1 = d_2$ , el efecto de una cuña queda anulado por la otra y  $\Delta\phi = 0$  para todas las longitudes de onda. El retraso varía de punto a punto en la superficie, siendo constante en regiones estrechas en el ancho del compensador a lo largo del cual los espesores de las cuñas son constantes. Si la luz entra a través de una rendija paralela a una de estas regiones y si entonces movemos cualquier cuña horizontalmente con un tornillo micrométrico, podemos hacer que emerja cualquier  $\Delta\phi$  deseada.

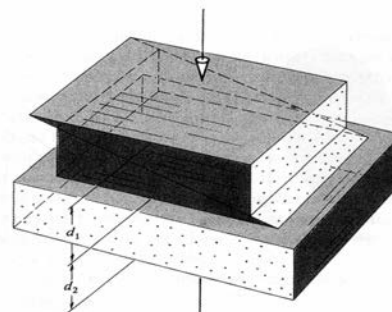


Fig. H.3. Compensador de Soleil.

Cuando el Babinet se coloca a  $45^\circ$  entre polarizadores cruzados, aparecerá una serie de franjas de extinción oscuras, paralelas e igualmente espaciadas en todo el ancho del compensador. Estas marcan las posiciones donde el dispositivo actúa como si fuera una lámina de onda completa.

Una variación del Babinet, que tiene la ventaja de producir un retardo uniforme sobre su superficie sin desviar el haz de luz, es el *compensador de Soleil* que se muestra en la figura H.3. Generalmente hecho de cuarzo, constas de dos cuñas y una lámina plano - paralela cuyos ejes ópticos están orientados como se indica. La cantidad  $d_1$  corresponde al espesor total de ambas cuñas.

Cuando se trabaja con un compensador de cuarzo, se puede determinar la cantidad  $|n_o - n_e|$ . Las formulas encontradas más congruentes [31] para los índices de refracción ordinario y extraordinario son las llamadas ecuaciones de Laurent:

$$\begin{aligned} n_e^2 &= 2.3849 - (1.259 \times 10^{-2})\lambda^2 + \frac{1.079 \times 10^{-2}}{\lambda^2} + \frac{1.6518 \times 10^{-4}}{\lambda^4} - \frac{1.9474 \times 10^{-6}}{\lambda^6} + \frac{9.3647 \times 10^{-8}}{\lambda^8} \\ n_o^2 &= 2.3573 - (1.17 \times 10^{-2})\lambda^2 + \frac{1.054 \times 10^{-2}}{\lambda^2} + \frac{1.3414 \times 10^{-4}}{\lambda^4} - \frac{4.4537 \times 10^{-6}}{\lambda^6} + \frac{5.9236 \times 10^{-8}}{\lambda^8} \end{aligned} \quad (H.5)$$

donde  $\lambda$  está dada en  $\mu\text{m}$ .

Estas ecuaciones, para  $\lambda = 405\text{nm}$ , dan:  $n_e(405\text{nm}) = 1.56667$  y  $n_o(405\text{nm}) = 1.557$ . Por lo que, para nuestro láser violeta la ecuación del Babinet es:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d_1 - d_2) |n_o - n_e| = \left( 150020.7454 \frac{1}{m} \right) * (d_1 - d_2) \quad (H.6)$$

En la sección de la “colocación del compensador Babinet” se obtuvo que el periodo de desfase de Babinet corresponde a 7.524 mm en el tornillo micrométrico, por lo que la distancia que esto representa en la diferencia de grosores de las cuñas se puede deducir con la ecuación G.6:  $(d_1 - d_2) = 0.042\text{mm}$ ; podemos ver que (suponiendo que la equivalencia entre la escala de tornillo micrométrico del Babinet es lineal con la ecuación G.6) una diferencia de espesor de 0.042mm en los cristales de cuarzo equivale a mover el tornillo micrométrico una distancia de 7.524mm.

# Apéndice I

## Programa para calcular la incertidumbre estadística de S

Al final de la sección 4.6 se mencionó que la incertidumbre estadística del parámetro S está dada por la ecuación 4.90; sin embargo, dado que la sumatoria de esta ecuación contiene un gran número de términos y al momento de calcular la incertidumbre de muchos datos experimentales, hacer el cálculo a lápiz consume gran cantidad de tiempo y se corre el riesgo de cometer errores. Por estas razones decidimos elaborar un programa que requiriera los datos necesarios y calculara la incertidumbre automáticamente; el código de dicho programa, implementado en MATLAB r2006a, se muestra a continuación:

```
N1=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(-45,-22.5)*
N2=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(-45,22.5)*
N3=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(-45,67.5)*
N4=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(-45,112.5)*
N5=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(0,-22.5)*
N6=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(0,22.5)*
N7=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(0,67.5)*
N8=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(0,112.5)*
N9=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(45,-22.5)*
N10=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(45,22.5)*
N11=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(45,67.5)*
N12=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(45,112.5)*
N13=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(90,-22.5)*
N14=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(90,22.5)*
N15=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(90,67.5)*
N16=###;-----* Número de coincidencias registrado para N(90,112.5)*
dS1=4*((N1+N11)*(N3+N9).^2+(N3+N9)*(N1+N11).^2)/(N1+N11+N3+N9).^4;
dS2=4*((N2+N12)*(N4+N10).^2+(N4+N10)*(N2+N12).^2)/(N2+N12+N4+N10).^4;
dS3=4*((N5+N15)*(N7+N13).^2+(N7+N13)*(N5+N15).^2)/(N5+N15+N7+N13).^4;
dS4=4*((N6+N16)*(N8+N14).^2+(N8+N14)*(N6+N16).^2)/(N6+N16+N8+N14).^4;
dS=sqrt(dS1+dS2+dS3+dS4);-----*Calculo para la incertidumbre de S*
```

# Apéndice J

## Material esencial utilizado

A continuación se presenta una recopilación de todo el material utilizado en el experimento.

Elemento	Modelo	Comentarios
Láser de diodo violeta de 405nm polarizado	B&W Tek inc. Modelo BWB-405-20E/55872	Polarización horizontal, ancho de banda pequeño, potencia de 25 mW.
Mesa elevadora estable	NRS, mod. 280	
Bases desplazadoras	Newport mod. M-423 Series	
Pieza de montaje de 90°	Newport mod. M-360-90	
Postes y nueces		De varios tamaños y de montaje firme
Base rotatoria	Newport mod. M-RSP-2	
Barras de aluminio		[de 80cm de largo, 2.5cm de ancho y espesor de 2mm]
Rieles para carros de desplazamiento	Newport mod. MRL-12M	
Carros de desplazamiento	Newport mod. M-MFC	
Bases para postes	Newport mod. M-VPH-2	
Montura para lentes con cabeceo ajustable	Newport	Se desconoce el modelo
Pieza construida para lente acopladora		Su diseño depende del tamaño de la lente acopladora
Lente acopladora	ThorLabs mod. F220FC-B, f=11mm, 600-1050nm	
Filtro para luz infrarroja	ThinFilmImaging Technologies 810-10 7213	Pico de transmisión 812nm, incertidumbre $\pm 10$ nm
Fibra óptica		Fibra Multimodo con conectores FC-FC; 62.5/125 $\mu$ m.
Fotodiodos de avalancha	Perkin – Elmer mod. SPCM-AQ4C	Arreglo de 4 fotodiodos de avalancha de Si
Cristales BBO	PHOTOP, Prisma BBO montado, 2 piezas de 5×5×0.1mm cada una tipo I ángulo de corte de 30°	Para conversión de 405nm a 810nm, con recubrimiento P
Contador de pulsos	Stanford Research SR400	Dos canales con impedancia de 50 $\Omega$
Generador de funciones	Sony Tektronix AFG320	
Dos chips 74ACT74	Texas Instruments	
Resistencias		57 $\Omega$ y 1k $\Omega$ fijas y variables
Capacitores		~220pF
Bases para chips		De 14 patas
Palca de montaje de circuito		10×6cm
Conectores BNC Hembra		5
Conectores Banana Hembra		2
Cable para conexiones		
Cautín		



<b>Soldadura</b>		
<b>Osciloscopio de alta resolución</b>	Tektronix TDS7054	
<b>Bases para cristales</b>	Newport M-P100-P	
<b>Cubos divisores de haz polarizantes para infrarrojo</b>	Edmund Optics	
<b>Montura rotatoria graduada</b>	Newport M-RSP-1T	
<b>Láminas de media onda</b>	Tower Optical Corporation lámina de media onda de orden cero circular AO15Z ½ 0800	Diámetro óptico 25.4mm de 800nm con recubrimiento tipo AR
<b>Babinet Soleil con montura giratoria</b>	Melles Griot, Soleil-Babinet Compensator mod.04-SBC-001; Divided Circle Rotating Mount mod.04-SBM-001	
<b>Dos cristales BBO de 5×5×2mm</b>		
<b>Montura implementada para cristales gruesos y separados</b>		
<b>Cable BNC-BNC</b>		
<b>Cable Banana-Banana</b>		

# Referencias y Bibliografía

- [1] Griffiths, David J. *“Introduction to Quantum Mechanics”*. Prentice Hall. 1995. Caps.: 1.2, A.1, A.2
- [2] Menner, Joy. *“Quantum Physics: An Introduction”*. The Open University. 2000. Cap. 4. Sec. 4.
- [3] George Greenstein, Arthur G. Zajonc. *“The Quantum Challenge, Modern research on the foundations of Quantum Mechanics”*. Jones and Bertlett Publishers, Second Edition, 2006. Cap’s. 3, 4, 5, 6.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. *“Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”*. Phys. Rev., vol.47, pp. 777-780 (1935).
- [5] J.S. Bell, *“On the paradox Einstein-Podolsky-Rosen”*, Physics (Long Island City, N.Y.) **1** 159-200 (1964); *“Speakable and Unspeakable in quantum Mechanics: Collected Papers in Quantum Philosophy”* Cambridge University Press, 1993.
- [6] A. Aspect and P. Grangier, *“Experiments on Einstein-Podolsky-Rosen type correlations with pairs of visible photons”*, editado por R. Penrose y C. J. Isham, *Quantum Concepts in Space and Time*, Oxford University Press, 1986, pp.1-44.
- [7] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger. *“Experimental test of realistic local theories via bell’s theorem”*. Phys. Rev. Lett., **47**:460-463,1981.
- [8] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger. *“Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell’s Inequalities”*. Phys. Rev. Lett., **49**:91-94, 1982.
- [9] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *“Proposed experiment to test local hidden-variable theories”*. Phys. Rev. Lett. **23** :880-884, 1969.
- [10] J.F. Clauser, A. Shimony. *“Bell’s theorem – experimental test and implications”*. Rep. Prog. Phys. **41**, 1881-1927 (1978).
- [11] Jacobowicz, Lionel. *“Inégalités de Bell. De l’expérience de laboratoire de recherche à l’expérience de TP”*. Artículo 1. *“Bell au TP, Une coincidence fortuite”*.
- [12] Betchart, Burton A. *“A Test of Bell Inequality for the Undergraduate Laboratory”* Oberlin College, Department of Physics and Astronomy. Mayo 2004.
- [13] P.G. Kwiat, A.M. Shamberg, R.Y. Chiao. *“High-efficiency single-photon detectors”* Phys. Rev. A, **48**:R867, 1993.
- [14] P.G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeillinger. *“New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs”*. Phys. Rev. Lett., **75** (24):4337-4342, 1995.
- [15] P.G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, Philippe H. Eberhard. *“Ultrabright source of polarization-entangled photons”*. Phys. Rev. A, **60** (2):R773-R776, 1999.
- [16] Paul G. Kwiat, Philippe H. Eberhard, Aephraim M. Steinberg, and Raymond Y. Chiao. *“Proposal for a loophole-free bell inequality experiment”*. Phys. Rev. A, **49**(5): 3209-3221, Mayo 1994.
- [17] P. H. Eberhard. Phys. Rev. A, 1993
- [18] David Bohm. *“Quantum Theory”*. Prentice Hall Inc. 1951.
- [19] David Bohm. *“A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables”*. Phys. Rev, **85**:166-179, 1952.
- [20] N. David Mermin. *“Is the Moon there when nobody Looks?, Reality and the Quantum theory”*. Physics Today. Abril 1985.

- [21] Fox, Mark. “*Quantum Optics. An introduction*”. Oxford University Press. 2006. Caps. 2, 3, 7, 14.
- [22] Aspect, Alain. “*Présentation naïve des inégalités de Bell*” Institut d’Optique Théorique et Appliquée – France. 23 Abril 2004.
- [23] Hecht, Eugene. “*Óptica*” Addison Weley. 3a ed. 2000. Cap. 8 sec.4.
- [24] Griffiths, David J. “*Introduction to Electrodynamics*” Prentice Hall. 3a ed. 1999 Cap. 4. Sec. 4.
- [25] Boyd, Robert W. “*Nonlinear optics*” Academic Press. Second edition. 2003 Cap`s. 1, 2, 11.
- [26] Wikipedia. “*Birefringence*”. <http://en.wikipedia.org/wiki/Birefringence>
- [27] Guenther. Robert. “*Modern Optics*” Cap.13.
- [28] Cleveland Crystals, Inc. “*BBO Crystals- Beta Barium Borate and Lithium Borate*”  
<http://www.clevelandcrystals.com/BBOLBO.htm>
- [29] Knight, Peter. Gerry, Christopher. “*Introductory Quantum Optics*”.  
Cambridge University Press. 2005. Cap`s. 2, 7, 9.
- [30] Dehlinger, Dietrich. Mitchell, M.W. “*Entangled photons, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory*”. Am. J. Phys. 70(9), Septiembre 2002. P.903.
- [31] Comercial Optical Manufacturing, Inc. <http://www.commercialoptics.com>
- [32] Dehlinger, Dietrich. Mitchell, M.W. “*Entangled photon apparatus for the undergraduate laboratory*”. Am. J. Phys. 70, Septiembre 2002. P.898.
- [33] De Icaza Astiz, Yannick A. “*Análisis de coincidencias de fotones correlacionados*”  
Universidad Nacional Autónoma de México, Fac. de Ciencias. Agosto 2007.