UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

"ALGORITMO ENTERO-MIXTO DE GOMORY"

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PRESENTA:

JENY ROCÍO GONZÁLEZ GARCÍA

ASESOR: ING. JORGE LUIS SUÁREZ MADARIAGA

Diciembre de 2007

Para mis padres con cariño.

Rocío y Jaime.

Por brindarme su confianza y su apoyo,
por sus oraciones y sus buenos deseos
durante todos estos años,
muchas gracias.

Agradecimientos:

A mi asesor por todo lo aportado, tiempo y conocimientos.

A la Licenciada Olga María Hildesa Flores Álvarez por su paciencia y ayuda.

Al Licenciado Juan Torres Lovera por el interés mostrado en este trabajo.

A Eli, Rafa y Yola por sus consejos, por confiar en mi, pero sobre todo por su amistad.

Y a todas aquellas personas, que sin esperar nada a cambio, contribuyeron de alguna manera en la realización de mi tesina.

ÍNDICE

Introducción

El presente trabajo servirá de consulta para aquellas personas que necesiten profundizar en el conocimiento del Algoritmo Entero-Mixto de Gomory, mismo que consta de cuatro capítulos.

En la mayoría de los problemas que plantean los sucesos de una organización, las soluciones son innumerables, porque las variables son muy numerosas y por lo general toman un gran número de valores. Este aspecto combinatorio de los diversos elementos de una organización, es afrontado particularmente por la investigación de operaciones.

La investigación de operaciones clasifica la relación que existe entre las diferentes alternativas de acción, determina sus posibles resultados, e indica cuál es la más efectiva desde el punto de vista de la meta y objetivos de la compañía.

La investigación de operaciones ha sido aplicada virtualmente en todo tipo de organizaciones tanto industriales como gubernamentales. Se ha usado ampliamente en la planeación de inversiones, industria del petróleo, del papel, química, en el procesamiento de metales, hule y derivados, transporte y distribución de mercancías, minería e industrias fabriles.

En el capítulo 1 se da una breve explicación del surgimiento y desarrollo de la investigación de operaciones. Se define la metodología que sigue la investigación de operaciones. Así como las componentes de un problema de programación lineal y se expone el método simplex, algoritmo más común para resolver problemas de programación lineal.

El capítulo 2 está dedicado a la programación entera, en la cual se describen las aplicaciones de la misma. Además se menciona la clasificación y se da una reseña de los métodos de solución para los problemas de dicho tipo.

Un problema entero mixto de Gomory es aquel en el que algunas de las variables son enteras y otras son continuas. En el tercer capítulo se desarrolla la derivación del corte, los pasos a seguir y ejemplos, en los cuales se muestran los posibles casos del Algoritmo Entero-Mixto de Gomory.

En el capítulo 4 se aplica el Algoritmo Entero-Mixto de Gomory en la coordinación y dirección de actividades de una organización dedicada a la fabricación de puertas de tablero, puertas de persiana, puertas de cocina, molduras para marcos y cortineros.

Capítulo 1. Introducción a la Programación Lineal

1.1. Esbozo de la Investigación de Operaciones

La investigación de operaciones surge durante la Segunda Guerra Mundial en Gran Bretaña, donde fue convocado un grupo de científicos de diferentes áreas para analizar la forma en la que se situaría, movería y utilizaría la fuerza bélica durante el combate.

A la investigación de operaciones también se le conoce con los siguientes nombres: *Investigación operativa* u *operacional* (llamada así en los países europeos) y *Ciencia administrativa o ciencias de la administración* (expresión preferida por la comunidad de negocios).

La inminente necesidad de asignar recursos escasos para los distintos procedimientos militares y encontrar la mejor forma de resolverlos generó un gran interés en aplicaciones fuera del campo militar, ya que los problemas eran, en esencia, los mismos que los desafiados por la milicia pero en un contexto diferente.

A pesar de acreditarle a Gran Bretaña el inicio de la investigación de operaciones como disciplina, Estados Unidos pronto tomó ventaja. La primera técnica matemática aceptada en la investigación de operaciones fue el método simplex desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George Bernard Dantzig.

Diversos factores propiciaron el desarrollo de la investigación de operaciones, entre ellos se pueden mencionar: el mejoramiento que se hizo de las técnicas utilizadas en esta área, la aparición de la computadora electrónica digital y el desarrollo de las computadoras personales junto con paquetes de software para resolver problemas de investigación de operaciones.

Las ventajas de la investigación de operaciones son: permitir la toma de decisión más conveniente conforme a los recursos disponibles y a los objetivos que se tratan de conseguir; lograr la abstracción los componentes de una situación para poder estructurarla como un modelo matemático; y reducir el tiempo de búsqueda de una solución que se ajuste a los objetivos propuestos.

Algunos inconvenientes de la investigación de operaciones son: necesidad de realizar simplificaciones del problema original para poder manejarlo y obtener una solución; los modelos consideran por lo general solamente un objetivo mientras que en las organizaciones tienen múltiples metas; casi siempre no se consideran todas las restricciones y no siempre se realiza un análisis costo-beneficio de la implantación de la solución donde algunas veces el costo originado por el desarrollo supera a los beneficios.

A continuación se muestran diversas definiciones de la investigación de operaciones.

"La investigación de operaciones es una ciencia en virtud de las técnicas matemáticas incorporadas que presenta y es un arte debido a que el éxito de todas las fases que preceden y siguen a la solución del modelo matemático depende en gran parte de la creatividad y la experiencia de las operaciones del equipo de investigación."[1]

"La investigación de operaciones es la aplicación del método científico a la toma de decisiones o a profesiones y abordan la mejor manera de diseñar y operar los sistemas, normalmente en condiciones donde se requiere la asignación de recursos escasos."[2]

"La investigación de operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina) a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización."[3]

1. Taha, H., 1998. "Investigación de Operaciones. Una introducción". Editorial Prentice Hall, México, 944 pp.

2. Maroto, C., 1998. "Investigación operativa. Modelos, técnicas y software". Editorial IPN, México, pág. 14.

3. Prawda, J. 1990. "Métodos y modelos de investigación de operaciones" Volumen I. Editorial Limusa, México, 936 pp.

Esta última definición es la más aceptada y de ella se resaltan los siguientes conceptos:

Un *sistema* está conformado por subsistemas o partes relacionadas entre sí, con una función específica. Cada parte favorecerá el logro de los objetivos del sistema y su efectividad dependerá de la aportación de las otras partes, en consecuencia estas no pueden considerarse independientes. Además el sistema interaccionará con el medio ambiente, el cual determinará las entradas al sistema y recogerá las salidas provenientes del sistema.

Una *organización* o estructura real puede ser representada como un sistema. En esta sección interviene la participación de los recursos humanos, materiales y financieros; interacciones controlables (que determinan con exactitud lo que acontecerá) e interacciones no controlables (que no indican que ocurrirá). El comportamiento de cada componente puede controlarse y modificarse. Este procedimiento afectará directa o indirectamente al resto de sus partes. La investigación de operaciones es un procedimiento que permite identificar las relaciones del sistema que tengan efectos significativos, así como los elementos controlables asociados.

El objetivo de la investigación de operaciones es mejorar la efectividad del sistema como un todo, dada una meta específica, a través de modelos. Se debe entender completamente el funcionamiento del sistema ante posibles cambios bajo condiciones que requieren asignar recursos escasos como lo son: fondos, recursos humanos, tiempo o materias primas. Por ello, es preciso establecer canales de comunicación donde fluirá la información que genere interacciones entre los componentes.

Los problemas a los que se enfrentan en la actualidad las organizaciones son diversos y de gran complejidad, por esta razón es necesario tener diferentes puntos de vista de los especialistas. Debido a la extensión del conocimiento en diversas áreas es preferible concentrarse en sólo una disciplina para obtener mejores resultados. Participantes con diversas formaciones pueden generar más de una solución, en comparación con grupos de una sola disciplina, y así incrementan la probabilidad de éxito, porque el problema es estudiado bajo varios puntos de vista. Cada individuo intentará hacer una analogía entre el problema y situaciones similares de su propio campo para poder aplicar métodos de solución ya examinados. Estos grupos interdisciplinarios requieren de coordinación y comunicación mediante un lenguaje en común.

El proyecto de investigación de operaciones requiere del trabajo en equipo, es decir, en el que las personas involucradas trabajan en colaboración. En el equipo debe existir al menos una persona relacionada con el problema que se analiza para que proporcione conocimientos físicos y técnicos sobre el modo actual de operación. De esta manera los analistas de investigación de operaciones aportarán sus conocimientos sobre el modelado, mientras que el cliente contribuirá con su experiencia en la forma de operación del sistema.

1.2. Metodología

Las etapas que sigue la investigación de operaciones (figura 1.1) para la resolución de problemas, según el autor Luis Gerardo Sánchez, son:

1. Observación
2. Definición del problema
3. Construcción del modelo
4. Solución del modelo
5. Validación del modelo
6. Implantación
7. Establecimiento de los controles adecuados

1.2.1 Observación

El proceso inicia con la identificación de los hechos relacionados con un problema establecido. Durante este periodo de orientación se contempla la realización de visitas a las instalaciones, entrevistas al personal involucrado y la constitución tanto de líneas de comunicación como de reglas de procedimiento y conseguir así la información necesaria para el planteamiento del problema.

Diagrama de la metodología de la investigación de operaciones

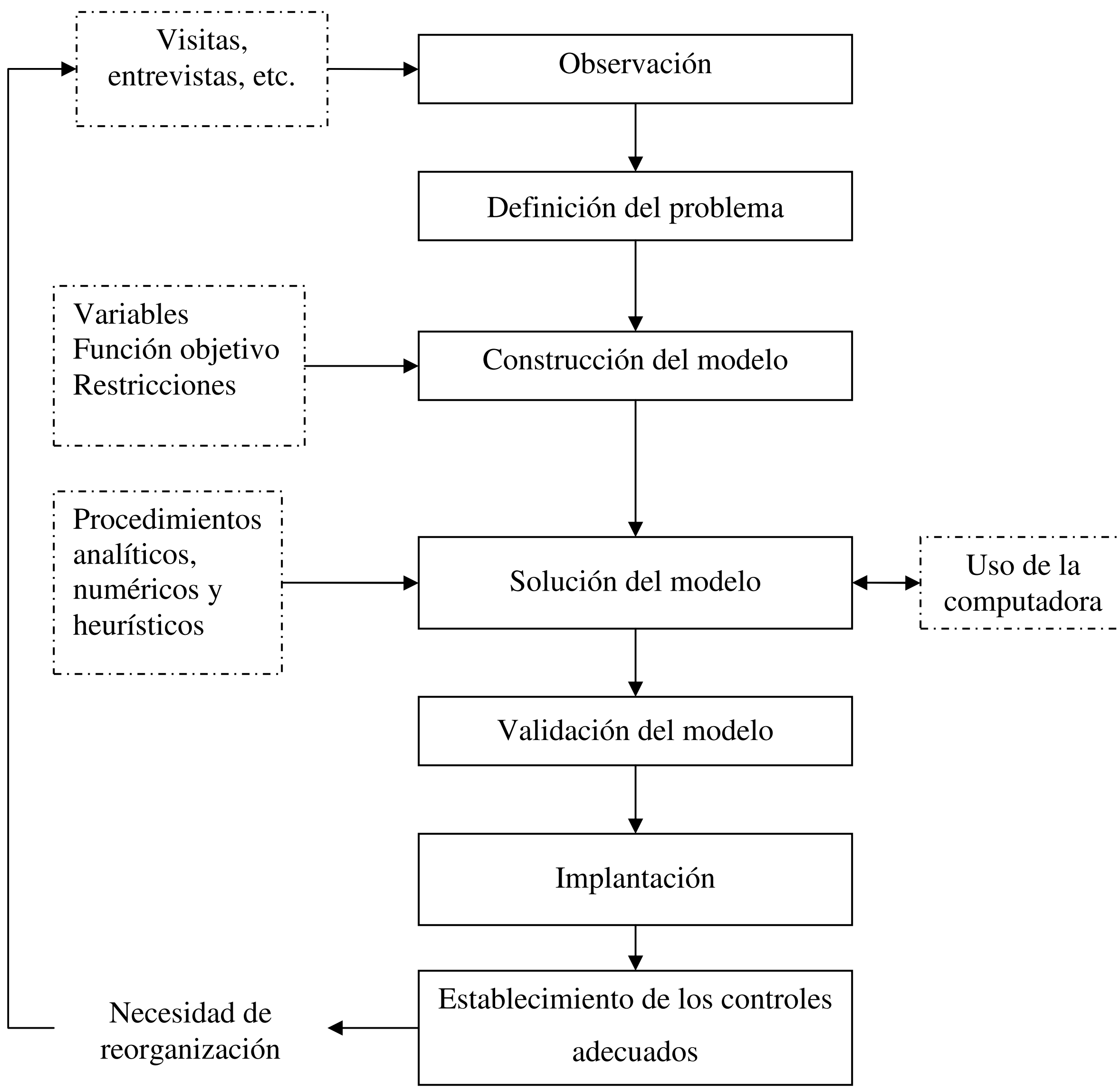

Fig 1.1 Metodología de la investigación de operaciones

En esta etapa se examinan los siguientes aspectos: el origen del problema, la disponibilidad de recursos de la empresa, las relaciones del sistema en estudio, la compatibilidad de los objetivos, las limitaciones tiempo y los logros obtenidos. Durante el transcurso de esta indagación se realizarán varias repeticiones del proceso para evitar contradicciones y respuestas ambiguas.

1.2.2 Definición del problema

Un problema se presenta cuando el responsable de la toma de decisiones tiene por lo menos dos alternativas para alcanzar los objetivos y desconoce cuál de los cursos de acción será mejor para lograrlos debido a las circunstancias que lo rodean.

Para definir el problema se requiere tener una idea firme de lo que se quiere realmente e iniciar con la búsqueda de la información, sin embargo, en ocasiones no se podrá disponer de ella ya sea porque no se guardaron los datos suficientes, o bien, los que se guardaron son obsoletos, incompletos o erróneos.

Esta etapa implica delimitar el alcance de la cuestión que se está investigando. El alcance de un proyecto se refiere a definir aquellos aspectos del problema que se puedan cambiar y los que no se pueden alterar. Esta actividad es ejecutada por todos los miembros del equipo de investigación de operaciones. El informe debe incluir las opciones (recomendaciones) atractivas identificadas bajo diferentes suposiciones y parámetros relevantes.

A su vez, se evaluará la factibilidad económica del proyecto, se estimará el total de empleados o colaboradores y de los fondos necesarios para concluirlo y aplicarlo. El tiempo estimado para terminarlo dependerá del total de recursos humanos pero puede aumentar el periodo a causa de factores no previstos.

La determinación del alcance de un proyecto es parte fundamental del mismo proyecto. Quien financia el proyecto debe tener conocimiento de tal información desde el inicio para que, con base en su mejor juicio, decida si el proyecto debe proseguir o no.

En esta fase se identifica el objetivo de estudio, tan específico como sea posible, y se debe tener en cuenta las metas principales de quien posee el control de la elección de acciones a realizar y que sea consistente con los demás objetivos de la organización.

Para determinar los objetivos adecuados a las condiciones es conveniente mantener una estrecha relación con las personas que tomarán las decisiones para tener una empatía respecto a los objetivos correspondientes.

Es posible que el responsable de la toma de decisiones desee alcanzar varios objetivos mediante el resultado elegido. Sin embargo, maximizar beneficios puede implicar la reducción de las ventas y viceversa. Para evitar tales conflictos es importante establecer el objetivo más importante y acordar objetivos mínimos de desempeño para el resto.

En el caso de las organizaciones lucrativas se puede establecer la maximización de la ganancia a largo plazo como un objetivo único. Las ventajas de este objetivo son: flexibilidad para considerar actividades que no generan ganancias inmediatamente, precisión para usarlo en forma correcta y amplitud para tener presente la meta básica de la empresa.

En ocasiones, se suele adoptar la meta de ganancias satisfactorias junto con los objetivos de adquisición, como aumentar beneficios o producción, y los objetivos de retención, por ejemplo, mantener la estabilidad en las ganancias, conservar la clientela y los precios, diversificar los productos, acrecentar las condiciones de los trabajadores e incrementar el prestigio de la organización.

Además se describen las alternativas de decisión (los cursos de acción posibles) dadas por aspectos del sistema que pueden ser controlados o no controlados como en el caso del medio ambiente.

La descripción del sistema para un proyecto de investigación de operaciones nunca será completa y no se debe intentar que lo sea. Bastará poder predecir todas las consecuencias significativas de las funciones para poder controlarlo porque este proceso afectará las conclusiones del trabajo.

1.2.3 Construcción del modelo

Esta fase consiste en reformular el problema de manera más comprensible para su análisis. La labor primordial es generar alternativas representadas como modelos para posteriormente resolver el problema.

Un modelo (figura 1.2) es la representación simplificada de la realidad que hace más manejable el problema, ya que facilita su comprensión y el estudio de su comportamiento y permite evaluar eficientemente las alternativas de solución.

La ventaja que tiene elaborar un modelo que represente un entorno real, es el poder analizar tal entorno con el fin de optimizar su desempeño, sin interferir en la operación que se realiza, ya que el modelo es un reflejo de lo que ocurre.

La desventaja de los modelos es que, sin importar el cuidado y precisión con que fueron hechos, pueden ser poco prácticos si no tienen el respaldo de datos confiables. Si se distorsionan las estimaciones, la solución obtenida, pese a ser óptima en un sentido matemático, en realidad será de calidad inferior desde la perspectiva del sistema real. Por ende, la disponibilidad de datos repercute directamente en la exactitud del modelo. La recopilación de datos puede ser la parte más difícil para determinar un modelo y desafortunadamente no hay sugerencias para realizar este procedimiento.

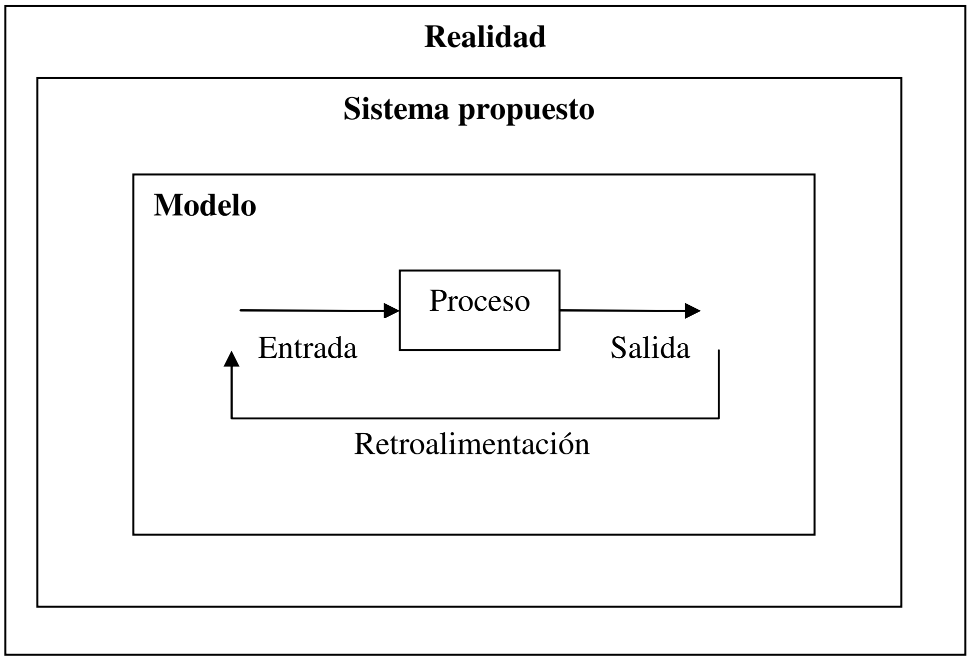

Fig 1.2 *Modelo*

Clasificación de los modelos

Los modelos se pueden clasificar respecto a su grado de abstracción (figura 1.3) de la siguiente manera: los modelos abstractos, que son los que formamos en la mente; los modelos simbólicos, los cuales permiten tener un registro de los modelos abstractos por medio de un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema; y los modelos físicos, utilizados como sustitutos de hechos del mundo real.

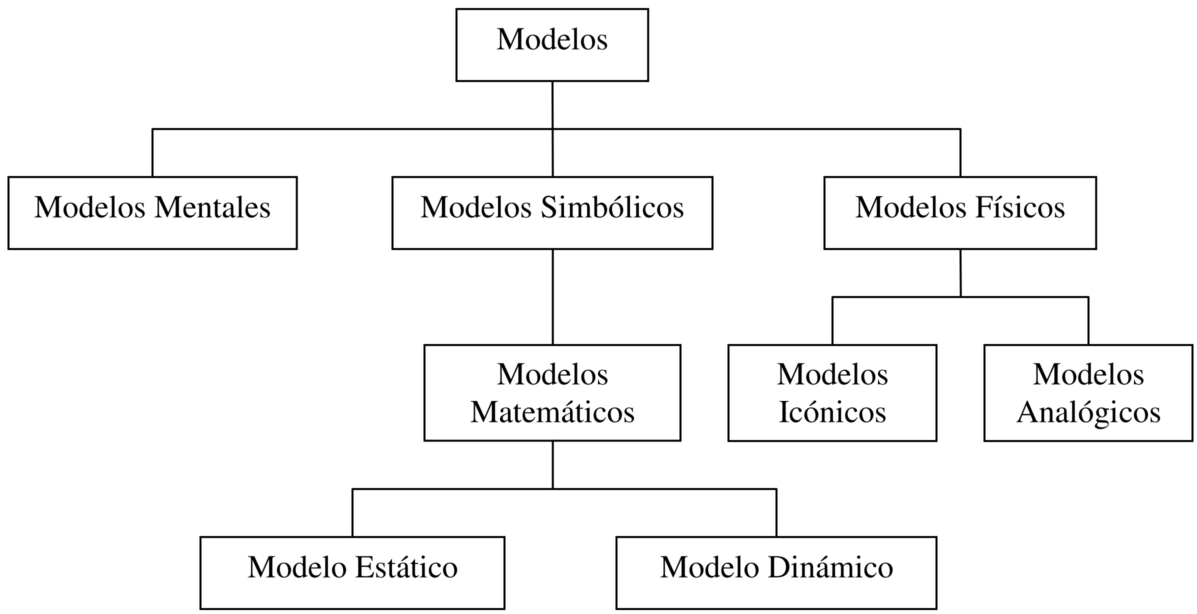

Fig 1.3 Clasificación de los modelos

Los modelos icónicos son la representación física, a escala reducida o aumentada de un sistema real.

Los modelos analógicos básicamente requieren del reemplazo de una propiedad por otra con el fin de permitir el manejo del modelo. Después de resolver el problema, la solución se reinterpreta de acuerdo al sistema original.

Los modelos matemáticos son aquellos donde los elementos del sistema y sus atributos son representados por medio de variables matemáticas. Y las actividades se representan mediante funciones matemáticas que interaccionan con las variables. Estos modelos a su vez se clasifican en modelos estáticos (aquellos que describen al sistema con ecuaciones que representan los cambios, sin tomar en cuenta las variaciones en el tiempo) y modelos dinámicos (aquellos que representan las alteraciones de un sistema ocurridas durante un período de tiempo).

Los modelos que se utilizan en la investigación de operaciones son matemáticos. Estas representaciones se expresan en forma de ecuaciones, a través de símbolos y expresiones matemáticas. Estos modelos forman una conexión entre las técnicas matemáticas y los paquetes de software de modelos matemáticos para analizar el problema. En consecuencia se pueden calcular los valores de los elementos controlables del sistema de acuerdo con criterios establecidos.

Comúnmente los modelos matemáticos son iterativos, es decir, se llega a la respuesta final en una serie de pasos (algoritmo) o iteraciones y cada iteración acerca la solución al nivel óptimo.

La ventaja de los modelos matemáticos es la descripción concisa del problema, mostrar una estructura más comprensible, indicar con claridad que datos son relevantes para el análisis y facilita el manejo del problema en su totalidad. Lo malo es que no todos los modelos matemáticos poseen algoritmos de solución que converjan al nivel óptimo por dos razones: la complejidad del modelo matemático puede hacer imposible idear un algoritmo de solución; o bien, el algoritmo de solución converge al nivel óptimo solo en teoría, lo que significa que hay un límite superior finito, pero sin indicar cuan alto puede ser ese límite.

Tipos de modelos matemáticos

Los *modelos cualitativos* representan cualidades no numéricas, relaciones entre las diferentes partes del sistema. Facilitan el entendimiento de cómo funciona un proceso en específico.

Los *modelos cuantitativos* expresan numéricamente las relaciones de los componentes del sistema.

Los *modelos descriptivos* definen una situación del mundo real en términos matemáticos, descripción que se emplea para mostrar una situación con mayor claridad.

El *modelo optimizador* es aquel que permite seleccionar entre varias alternativas, siguiendo determinados criterios, la más óptima.

Si haber definido el modelo matemático se hizo en condiciones de certidumbre se llamará *modelo determinístico*, si no fue así se denominará *modelo probabilístico o estocástico*. El modelo puede ser de aplicación especial si la estructura está diseñada para un problema específico y de aplicación general si no lo está.

Cualidades de los modelos

Las cualidades que debe tener un modelo (figura 1.4) son: simple y completo, fácil de manipular, adaptable y de fácil respuesta.

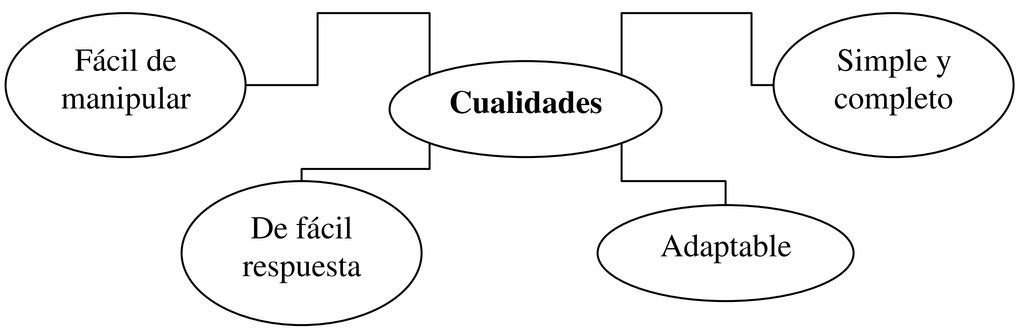

Fig 1.4 Cualidades de los modelos

a) *Simple y completo*: Incluir solamente los elementos que sean relevantes en el desempeño del sistema. El modelo puede ser elaborado siempre y cuando permanezca manejable, vale decir que mantiene un equilibrio entre sencillez y capacidad de representación.
b) *Fácil de manipular*: Que sea manejable.
c) *Adaptable*: Poder cambiar la estructura del modelo con facilidad.
d) *De fácil respuesta*: Introducir diversas entradas y poder obtener respuestas con rapidez.

Elementos básicos de los modelos matemáticos

El modelo matemático incluye 3 elementos básicos:

a) *Variables de decisión* (las decisiones cuantificables, elementos controlables)
b) *Función objetivo* (meta que se tratará de optimizar, obtenida al expresar las variables de decisión en una función matemática)
c) *Restricciones* (limitaciones que se necesitan satisfacer)

Las constantes (coeficientes) en las restricciones y la función objetivo se llaman parámetros, los cuales se determinan por medio de la recolección de datos y sus valores sólo son una estimación. Los parámetros son aspectos no controlables.

Una vez descritos los elementos básicos se podrá definir el modelo que represente el problema de encontrar las diferentes gamas de valores de las variables de decisión, de tal manera que se satisfaga la función objetivo sujeta a las restricciones dadas.

Las interrelaciones del problema que se está estudiando pueden sugerir alguna forma de modelo, pues no existe un enfoque determinado para la construcción del mismo. El rumbo más adecuado dependerá de la naturaleza del problema, del tiempo y recursos disponibles, pero sobre todo, de la preparación (entendimiento del problema y de la técnica de solución) y estilo del investigador de operaciones. Esta parte es lo que distingue a la investigación de operaciones de otras disciplinas.

1.2.4 Solución del modelo

En esta fase se realiza la optimización, proceso que consiste en encontrar una mejor forma de realizar una actividad. Se dice que se buscará una mejor solución, la cual se llamará solución óptima y no la mejor solución porque pueden existir diferentes soluciones que generen los mismos resultados. El fin no solamente es mejorar el curso de acción actual, sino identificar el más adecuado.

Las soluciones que satisfacen todas las restricciones del modelo se llaman soluciones factibles, pero la que produce la máxima utilidad se llama solución factible óptima. Cabe recordar que estas soluciones son óptimas sólo respecto al modelo que se utilizará y no al problema real.

Para determinar la solución óptima se calcula el valor conveniente de cada elemento controlable. A este proceso se le conoce como derivar una solución al problema que se está tratando.

Para obtener la solución no existen reglas. Por lo general es posible lograrlo usando procedimientos analíticos, numéricos y heurísticos, de tal manera que se ajusten al modelo. Cuando se puede ajustar a un modelo matemático estándar seguramente se podrán utilizar algoritmos disponibles que pueden ser resueltos por medio de una computadora.

El procedimiento heurístico es aquel que se basa en la intuición y la experiencia. Se recurre a él cuando el costo o tiempo que se pide para encontrar una solución óptima es elevado. Los analíticos se fundamentan en procedimientos matemáticos. Estos son los que permiten ser más certeros en la búsqueda de la solución óptima.

Por otro lado, los numéricos, se fundamentan en algoritmos con las siguientes características: la solución sucesiva debe ser mejor a la anterior; la solución sucesiva debe acercarse a la óptima; se debe acercar a la solución en un número finito de iteraciones; y deben ser pocas las iteraciones que se realicen para llegar a la solución óptima.

1.2.5 Validación del modelo

Se dice que un modelo será válido si predice con veracidad lo que ocurre en la vida real. Al inicio es común que contenga fallas, por esta razón se debe examinar para perfeccionarlo poco a poco. Es probable que, debido a los impedimentos que surgen durante la prueba del modelo, sea más conveniente replantearlo. No hay que olvidar tampoco que, quien realice la revisión del modelo, debe ser de preferencia alguien que no haya colaborado en su elaboración. Esta persona, al revisar el modelo, debe cambiar los parámetros y comprobar que los resultados arrojados sean los esperados.

Para llevar a cabo dicha revisión se puede usar la prueba retrospectiva. Esta consiste en utilizar valores pasados para determinar el desempeño que hubiera tenido el modelo de haberse aplicado. La desventaja esta prueba es que se emplean los datos con los que se formuló el modelo. Este proceso de prueba es llamado validación del modelo, además es importante documentarlo para que, en un futuro, se puedan diagnosticar los problemas que pueden estar ocurriendo.

1.2.6 Implantación

En esta fase se traducen los resultados obtenidos en las reglas de decisión que han de seguirse, de tal manera que sean comprendidos y ejecutados por cada persona involucrada en el sistema.

Llegar a este paso es el objetivo primordial del equipo de investigación de operaciones. Cualquier fundamento que aumente la posibilidad de poner en práctica la solución se deberá plantear desde el inicio del proyecto.

El equipo de investigación de operaciones es el encargado de informar a la gerencia del nuevo sistema que se va a adquirir y la relación con el actual. Luego, ambos grupos ejecutan las acciones necesarias para poner en operación este sistema. Por último, la gerencia es quien capacita al personal involucrado para dar inicio al nuevo curso de acción.

1.2.7 Establecimiento de los controles adecuados

En el sistema debe existir un control, el cual permitirá evaluar los resultados obtenidos para modificarlos y adaptarlos en caso de ser necesario. Por ello, es favorable validar el proyecto en cada etapa, para conseguir un mayor nivel de confiabilidad de los resultados. Además, la retroalimentación es fundamental para el establecimiento del control.

En el transcurso del proyecto es de gran ayuda tener en cuenta los siguientes detalles: registrar las correcciones y simplificaciones realizadas al modelo; especificar las relaciones de los procedimientos y la frecuencia con que se verificarán; ubicar a los responsables de cada acción y a quién se debe acudir cuando surja un cambio significativo y, tener conocimiento de las labores a realizar en caso de cambios relevantes. Finalmente, cabe mencionar que la documentación del proyecto es de suma importancia para el mantenimiento de la solución.

1.3. Antecedentes de la programación lineal

En los siglos XVII y XVIII Newton, Leibnitz, Bernouilli y Lagrange se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

El matemático francés Fourier fue el primero en descubrir, aunque de forma no precisa, los métodos de lo que actualmente se conocen como programación lineal y las cualidades que de ellos se deriva. En el año 1776 el matemático Monge mostró interés por problemas de este tipo.

En 1939, el matemático ruso Kantarovitch hace corresponder, por primera vez, una amplia gama de problemas a una teoría matemática precisa y bien definida en su publicación “Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción", ahora conocida como programación lineal.

Hacia 1947 Neuman, matemático norteamericano, conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos, y es a él a quien se le deben los fundamentos matemáticos de la programación lineal.

La programación lineal es una técnica matemática que permite asignar recursos para satisfacer las solicitudes mientras se optimiza algún objetivo, ya sea maximizar beneficios o minimizar costos. Es uno de los instrumentos más empleados en la investigación de operaciones.

La programación lineal se basa en la aplicación del álgebra matricial, con reglas que permitan asegurar que la solución satisface todas las condiciones y la obtención del mejor resultado posible.

Para la aplicación de la programación lineal (figura 1.5) la primera acción a realizar es identificar el objetivo. Una vez que se ha determinado el objetivo, se definen las variables de decisión tomando en cuenta tres consideraciones: la primera es el poder asumir cualquier valor real a todas las variables; la segunda es tener cuidado de que todas las variables sean no-negativas y la tercera se apoya en que todas las relaciones entre variables deben ser lineales. Además de las condiciones, existen limitaciones, las cuales pueden ser tanto físicas, económicas o legales.

Cada restricción limitará los posibles valores que pueden tomar las variables de decisión, formando un medio espacio cerrado (cerrado porque incluye la frontera). La intersección de estos medios espacios conformará la región factible. En dicha región se hallará el conjunto de todas las soluciones factibles. Las soluciones que no pertenezcan a este conjunto se llamarán soluciones no factibles. Las fronteras de las restricciones que no intercepten con la región factible en al menos un punto se llamarán redundantes.

Algunas veces pueden presentarse situaciones en que el problema sea no factible, es decir, no hay solución factible. A lo mejor, la solución no está acotada, por ejemplo, que la región factible esté abierta en alguna dirección, de tal manera que la función objetivo se incrementa indefinidamente. Estas situaciones se observan cuando se llega a la solución y en ese momento se decide si se requiere de un replanteamiento o no.

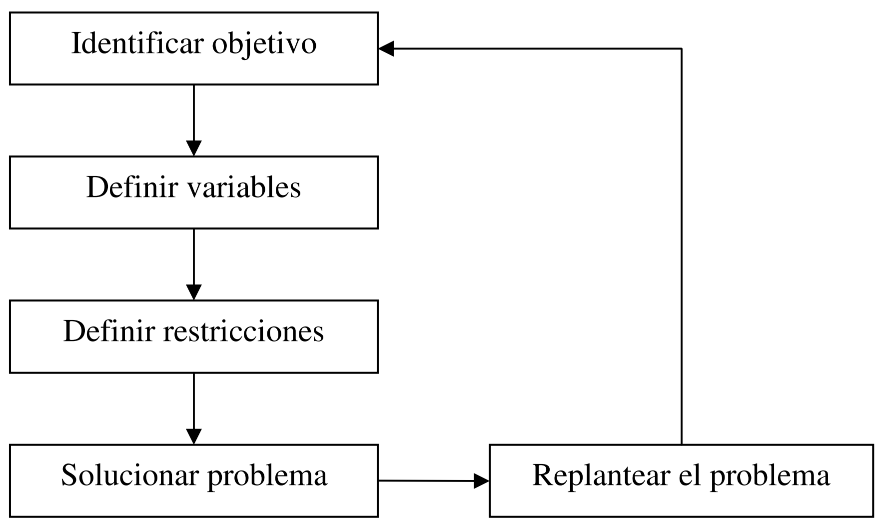

Fig 1.5 Programación lineal

1.4. Método simplex

En el año de 1947 George Dantzing desarrolló el método simplex, un procedimiento algebraico para resolver de manera eficiente problemas lineales.

Cualquier modelo matemático que sea capaz de abarcar disponibilidades y variables que se deseen fijar, donde existan restricciones que se tengan que acatar para satisfacer la función objetivo, puede formularse como un problema de programación lineal y resolverse por medio del método simplex. Por lo tanto, el modelo es de aplicación general.

La estructura básica de este modelo es la siguiente:

$$\text{Optimizar: } f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{s.a.} \quad h_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0$$
$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Donde:

f : función objetivo

$X_1, X_2, \dots, X_n$: variables de decisión

h: restricción

Y además f y h deben ser lineales en cada uno de sus argumentos; esto es:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$$
$$h_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n$$

Donde c_j y a_{ij} (i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n) son constantes conocidas

El método simplex es un procedimiento iterativo que comienza con el establecimiento de una solución inicial. Se considera la posibilidad de mejorar la solución realizando una evaluación de las ecuaciones de restricción por medio de la función objetivo y una prueba de optimalidad. En caso de poder efectuar una mejora, se selecciona la variable de entrada y se examinan las restricciones para conocer el valor máximo que puede tomar la variable de entrada elegida. Una vez halladas las variables de entrada y salida se realiza la operación de pivoteo. De esta manera se genera una nueva solución. El proceso concluye cuando no es posible mejorarlo.

Antes de explicar en qué consiste el algoritmo simplex, se mencionarán a continuación los pasos a seguir para realizar la operación de pivoteo:

1. Dividir cada uno de los coeficientes que se encuentran en el renglón limitante (renglón donde se encuentra la variable de holgura que sale) y su lado derecho entre el coeficiente de la variable de entrada.
2. Para cada uno de los renglones restantes:
   a) Se multiplica cada coeficiente del nuevo renglón limitante (encontrado en el paso anterior) por el coeficiente de entrada en el renglón no limitante en valor negativo.
   b) El resultado se suma al renglón no limitante, y así obtener el nuevo renglón no limitante.

Al concluir la operación de pivoteo se completa una iteración del algoritmo simplex.

Las variables que se encuentran en la solución se denominan variables básicas. En cada renglón habrá solamente una variable básica con coeficiente de 1 y en los otros renglones tendrá coeficientes de 0. Esta variable tendrá el valor del lado derecho del renglón. El valor de Z definirá el valor de la función objetivo. Las variables que no estén en la solución se llamarán no básicas y adquirirán el valor de cero.

Ahora bien, a continuación se mencionarán los pasos del algoritmo simplex.

1. Convertir las desigualdades en igualdades. Si la restricción tiene el signo $\leq$, sólo se agrega la variable de holgura y el signo se sustituye por =. Si la restricción tiene el signo $\geq$, se multiplican todos los coeficientes por -1 y el signo se sustituye por =.
2. Igualar la función objetivo a cero, esto no es más que despejarla para que quede igualada a cero.
3. Formular la tabla inicial simplex.

4. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base, para realizar la operación de pivoteo.

    a) Para seleccionar la variable de decisión que entra en la base se revisa la última fila, la de los coeficientes de la función objetivo, y se elige la variable con el coeficiente negativo mayor en valor absoluto. Si existiesen 2 ó más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior, entonces se escoge a cualquiera de ellos.

    b) Si en la fila no existiese ningún coeficiente negativo, significa que se ha alcanzado la solución óptima. Por tanto, lo que va a determinar el final del proceso es que en la última fila no haya elementos negativos.

    c) Para encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base se divide cada término de la última columna (valores solución), entre el término correspondiente de la columna pivote, siempre que estos últimos sean mayores que cero. Se toma la del coeficiente menor como pivote. Si hubiese algún elemento menor o igual que cero no se tomaría en cuenta. Si todos los elementos fuesen menores o iguales a cero el problema no tiene solución.

5. Se repite el paso 4 hasta alcanzar la solución óptima.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 5X_1 + 8X_2 \\
&\text{s.a } X_1 + 2X_2 \leq 8 \\
&\quad\ 3X_1 + 2X_2 \leq 12 \\
&\quad\ X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Convertir las desigualdades en igualdades.

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 8$$
$$3X_1 + 2X_2 + X_4 = 12$$

2. Igualar la función objetivo a cero.

$$z - 5X_1 - 8X_2 = 0$$

3. Formular la tabla inicial simplex.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	**Valores de solución**
X_3	1	2	1	0	8
X_4	3	2	0	1	12
z	-5	-8	0	0	0

4. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base.

	Variables de decisión		**Variables de holgura**		
Base	X_1	X_2	X_3	X_4	**Valores de solución**
X_3	1	2	1	0	8
X_4	3	2	0	1	12
z	-5	-8	0	0	0

Variable que entra
(Columna pivote)

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Valores de solución
X_3	1	2	1	0	8
X_4	3	2	0	1	12
z	-5	-8	0	0	0

8/2 = 4

12/2 = 6

Variable que sale

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Valores de solución
X_3	1	$\boxed{2}$	1	0	8
X_4	3	2	0	1	12
z	-5	-8	0	0	0

Se realiza la operación de pivoteo.

En este caso el renglón limitante es X_3 y el coeficiente de la variable de entrada es 2.

$$1 \quad \boxed{2} \quad 1 \quad 0 \quad 8$$

Al dividir entre 2 se obtiene el nuevo renglón limitante.

$$1/2 \quad \boxed{1} \quad 1/2 \quad 0 \quad 4$$

Se multiplica el renglón anterior por el coeficiente de entrada en el renglón no limitante (en el renglón X_4 el coeficiente es 2, por lo tanto se multiplica por -2).

$$-1 \quad \boxed{-2} \quad -1 \quad 0 \quad -8$$

Estos valores se suman al renglón no limitante.

$$-1+3 \quad \boxed{-2+2} \quad -1+0 \quad 0+1 \quad -8+12$$

El nuevo valor de ese renglón no limitante será:

$$2 \quad \boxed{0} \quad -1 \quad 1 \quad 4$$

Se multiplica el nuevo renglón limitante por el coeficiente de entrada en el renglón no limitante (en el renglón z el coeficiente es -8, por lo tanto se multiplica por 8).

$$4 \quad \boxed{8} \quad 4 \quad 0 \quad 32$$

Estos valores se suman al renglón no limitante.

$$4+(-5) \quad \boxed{8+(-8)} \quad 4+0 \quad 0+0 \quad 32+0$$

El nuevo valor de ese renglón no limitante será:

$$-1 \quad \boxed{0} \quad 4 \quad 0 \quad 32$$

La tabla queda de la siguiente manera:

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**Valores de solución**
X_2	1/2	1	1/2	0	4
X_4	2	0	-1	1	4
z	-1	0	4	0	32

5. Se repite el paso 4 hasta alcanzar la solución óptima.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	**Valores de solución**
X_2	1/2	1	1/2	0	4
X_4	$\boxed{2}$	0	-1	1	4
z	-1	0	4	0	32

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	**Valores de solución**
X_2	0	1	3/4	-1/4	3
X_1	1	0	-1/2	1/2	2
z	0	0	7/2	1/2	34

Como en la última fila no hay ningún valor negativo, significa que se ha alcanzado la solución óptima. El resultado obtenido es:

$$\textbf{Max } z = 34$$
$$X_1 = 2, \quad X_2 = 3$$

Otras formas para los modelos de programación lineal son los que incluyen restricciones donde alguna combinación de variables debe ser igual a un número exacto, o debe ser mayor que o igual a una cantidad dada, o los lados derechos son negativos. El único problema que ocasionan estas restricciones es obtener una *solución inicial básica factible*. En estos casos se recurre a agregar *variables artificiales*.

Este recurso consiste en construir un *problema artificial* al agregar una *variable artificial* en cada restricción que lo necesite, con el objetivo de hacer que la variable artificial sea la variable básica inicial para esa ecuación. Como no se desea que la variable artificial aparezca en la solución óptima, se le asigna una cantidad negativa arbitrariamente grande en la función objetivo. Esta acción hará que el método simplex, en cada iteración, convierta las variables artificiales en cero y así eliminarlas de la solución, y continuar con la resolución del problema *real*.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 5X_1 + 8X_2 \\ &\text{s.a } X_1 \le 6 \\ &\quad X_2 \le 15 \\ &\quad 3X_1 + 2X_2 = 30 \\ &\quad X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Al introducir las variables de holgura queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z & -5X_1 & -8X_2 & & & = & 0 \\ (1) & & X_1 & & +X_3 & & = & 6 \\ (2) & & & X_2 & & +X_4 & = & 15 \\ (3) & & 3X_1 & +2X_2 & & & = & 30 \end{array}$$

En este sistema no se tiene una solución básica factible inicial porque en la ecuación (3) no hay variable de holgura. Se procede a obtener una solución básica factible inicial para poder utilizar el método simplex.

Para encontrar la solución básica factible inicial se construye un problema artificial que tendrá la misma solución óptima que el problema real. Este procedimiento consta de dos pasos.

1. Introducir la variable artificial no negativa en la ecuación (3), como si fuera una variable de holgura. Las variables artificiales se diferencian porque siempre tendrán una barra sobre ellas. Esta técnica se conoce con el nombre de técnica de la variable artificial.

$$(3) \quad 3\,X_1 + 2X_2 + \overline{X}_5 = 30$$

2. Se asigna una penalización enorme al hecho de tener $\overline{X}_5 > 0$, cambiando la función objetivo $Z = 5X_1 + 8X_2$ a

$$Z = 5X_1 + 8X_2 - M\overline{X}_5,$$

donde M simbólicamente representa un número positivo *muy grande*. (Este método que fuerza a $\overline{X}_5$ hasta llegar a $\overline{X}_5 = 0$ en la solución óptima se llama método de la M.)

El sistema de ecuaciones después de aumentar el problema artificial es:

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -5X_1 & -8X_2 & & & +M\overline{X}_5 & = 0 \\
(1) & & X_1 & & +X_3 & & & = 6 \\
(2) & & & X_2 & & +X_4 & & = 15 \\
(3) & & 3\,X_1 & +2X_2 & & & +\overline{X}_5 & = 30
\end{array}$$

En este sistema ya se tiene la solución básica factible inicial, pero el coeficiente de $\overline{X}_5$ es diferente de cero en la ecuación (0), se debe eliminar con operaciones algebraicas de esta ecuación para continuar con el método simplex.

Para eliminar $\overline{X}_5$ de la ecuación (0), se resta de la ecuación (0) la ecuación (3) multiplicada por M.

$$\begin{array}{rcl}
Z - 5X_1 - 8X_2 + M\overline{X}_5 & = & 0 \\
-\,M(3X_1 + 2X_2 + \overline{X}_5 & = & 18) \\
\hline
Z - (3M + 3)X_1 - (2M + 5)\,X_2 & = & -18M
\end{array}$$

Esta nueva ecuación (0) ya permite la aplicación del método simplex.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	$\overline{X}_5$	**Valores de solución**
Z	$-3M-5$	$-2M-8$	0	0	0	$-30M$
X_3	1	0	1	0	0	6
X_4	0	1	0	1	0	15
$\overline{X}_5$	3	2	0	0	1	30

Tabla 1.1 Iteración 0

Debido a que el valor de *M* únicamente aparece en la ecuación (0) se toma en cuenta para determinar la variable básica entrante.

Para este ejemplo como $3M+5 > 2M+8$, se elige X_1 como la variable básica entrante.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	$\overline{X}_5$	**Valores de solución**
Z	0	$-2M-8$	$3M+5$	0	0	$-12M+30$
X_1	1	0	1	0	0	6
X_4	0	1	0	1	0	15
$\overline{X}_5$	0	2	-3	0	1	30

Tabla 1.2 Iteración 1

En la siguiente iteración se elige X_2 como la variable básica entrante.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	$\overline{X}_5$	**Valores de solución**
Z	0	0	-7	0	$M+4$	78
X_1	1	0	1	0	0	6
X_4	0	0	3/2	1	-1/2	9
X_2	0	1	-3/2	0	1/2	6

Tabla 1.3 Iteración 2

En la siguiente iteración se elige X_3 como la variable básica entrante.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	$\overline{X}_5$	Valores de solución
Z	0	0	0	14/3	M+5/3	120
X_1	1	0	0	-2/3	1/3	0
X_3	0	0	1	2/3	-1/3	6
X_2	0	1	0	1	0	15

Tabla 1.4 Iteración 3

En las tablas 1.1 y 1.2 $\overline{X}_5$ es una variable básica, lo que significa que las dos primeras soluciones básicas factibles para el problema artificial no son factibles para el problema real. En las tablas 1.3 y 1.4 $\overline{X}_5$ es una variable no básica, por consiguiente las soluciones básicas factibles son factibles tanto para el problema artificial así como para el problema real.

1.5. El problema dual

La dualidad es una característica de la programación lineal. Para todo problema de maximización de programación lineal existe un problema de minimización y, a la inversa, para todo problema de minimización de programación lineal existe un problema equivalente de maximización.

Un concepto importante de la relación entre el primario y el dual es que si el problema primario tiene una solución óptima, entonces el problema dual relacionado también debe tener una solución óptima. Así mismo, es cierto que el valor óptimo de la función objetivo del primario es igual al valor óptimo de la función objetivo del dual.

El planteamiento dual del problema primario (original) se obtiene de la siguiente manera:

1. Definir las variables del problema dual reemplazando las variables Xj del primario por las variables Yi en el dual, dicho de otra manera, lo que es restricción en el original será variable en el dual.
2. Colocar los coeficientes de la función objetivo del primario como los valores del segundo término en el dual.
3. Colocar los valores del segundo término del primario como los coeficientes de la función objetivo dual.
4. Transponer los renglones de los coeficientes de restricción del primario para convertirlos en columnas de coeficientes en el dual.
5. Invertir la dirección de las desigualdades, es decir, si las desigualdades del primario son de mayor o igual, las desigualdades en el dual serán de menor o igual.

Ejemplo:

1. Definir las variables del problema dual reemplazando las variables Xj del primario por las variables Yi en el dual.

Modelo primal

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 20X_1 + 30X_2 \\ &\text{s.a } 3X_1 + 2X_2 \leq 1000 \\ &\quad X_1 + 2X_2 \leq 500 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Modelo dual

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = 1000y_1 + 500y_2 \\ &\text{s.a } 3y_1 + y_2 \geq 20 \\ &\quad 2y_1 + 2y_2 \geq 30 \\ &\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } z = \underbrace{\boxed{20}\,X_1 + \boxed{30}\,X_2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.a } 3y_1 + y_2 \geq & \boxed{\begin{array}{c} 20 \\ 30 \end{array}} \\ \quad 2y_1 + 2y_2 \geq & \\ \quad y_i \geq 0 & \end{array}$$

2. Coeficientes de la función objetivo del primario como los valores del segundo término en el dual.

$$\begin{array}{ll} \text{s.a } 3X_1 + 2X_2 \leq & \boxed{\begin{array}{c} 1000 \\ 500 \end{array}} \\ \quad X_1 + 2X_2 \leq & \\ \quad X_i \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{Min } w = \boxed{1000}\,y_1 + \boxed{500}\,y_2$$

3. Valores del segundo término del primario como los coeficientes de la función objetivo dual.

$$\boxed{3X_1 + 2X_2} \leq 1000$$

$$\boxed{X_1 + 2X_2} \leq 500$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 3y_1 \\ 2y_2 \end{array}} \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \boxed{\begin{array}{c} y_1 \\ 2y_2 \end{array}}$$

4. Transponer los renglones de los coeficientes de restricción del primario para convertirlos en columnas de coeficientes en el dual.

$$\begin{array}{lcl} \text{s.a } 3X_1 + 2X_2 & \le & 1000 \\ X_1 + 2X_2 & \le & 500 \\ X_i \ge 0 & & \end{array}$$

5. Invertir la dirección de las desigualdades

$$\begin{array}{lcl} \text{s.a } 3y_1 + y_2 & \ge & 20 \\ 2y_1 + 2y_2 & \ge & 30 \\ y_i \ge 0 & & \end{array}$$

1.6. Método dual simplex

En el algoritmo dual simplex, el problema de programación lineal comienza óptimo y no factible. Las siguientes iteraciones conducen hacia la factibilidad sin dejar de cumplir con la optimalidad. El algoritmo termina cuando se recobra la factibilidad. El método dual simplex se distingue del método simplex porque este último empieza factible y no óptimo y conserva la factibilidad hasta alcanzar la optimalidad.

Los pasos a seguir en el algoritmo simplex son los siguientes:

1. Realizar la tabla inicial simplex para el problema, la cual debe tener un renglón objetivo óptimo con al menos una variable básica no factible.
2. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base, y realizar la operación de pivoteo.

   a) La variable de salida (x_r) será aquella que tenga el valor más negativo. En caso de empates se elige arbitrariamente. Si todas las variables básicas son no negativas, se ha llegado a la solución óptima.

b) La variable de entrada (x_j) se establece entre las variables no básicas como:

$$\min_{\text{No básicas } x_j} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\alpha_{rj}} \right|, \alpha_{rj} < 0 \right\}$$

donde α_{rj} es el coeficiente de restricción de la tabla simplex asociada con el renglón x_r y la columna x_j. En caso de empates se elige arbitrariamente.

3. Repetir el paso 2 hasta alcanzar la solución óptima.

El uso del método dual simplex, en relación con otros métodos, tiene la ventaja de no requerir variables artificiales. Esta superioridad implica que el planteamiento dual de un problema de programación lineal puede dar como resultado una reducción considerable en los cálculos para resolver el problema

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = 5X_1 + 2X_2 \\
&\text{s.a } 3X_1 + X_2 \geq 3 \\
&\quad\; 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\
&\quad\; X_1 + X_2 \geq 3 \\
&\quad\; X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Realizar la tabla inicial simplex para el problema, la cual debe tener un renglón objetivo óptimo con al menos una variable básica no factible.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_3	-3	-1	1	0	0	-3
X_4	-4	-3	0	1	0	-6
X_5	-1	-1	0	0	1	-3
z	-5	-2	0	0	0	0

Esta tabla es óptima y no factible, por lo tanto, cumple con las condiciones requeridas para la tabla inicial del método dual simplex.

Se dice que la tabla anterior es no factible porque hay valores negativos en los valores de solución y es óptima porque z_j-$c_j \leq 0$ para todas las j = 1, 2, …, 5.

2. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base, para realizar la operación de pivoteo.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución	
X_3	-3	-1	1	0	0	-3	
X_4	-4	-3	0	1	0	-6	←
X_5	-1	-1	0	0	1	-3	
z	-5	-2	0	0	0	0	

Variable de salida

Para elegir la variable de entrada se puede utilizar la siguiente tabla

Variable		**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
renglón-z (z_j-c_j)		-5	-2	0	0	0
renglón-X_4, α_{4j}		-4	-3	0	1	0
Proporción	$\frac{z_j - c_j}{\alpha_{4j}}$	5/4	2/3	---	---	---

Cabe aclarar que para elegir la variable que entra solamente se consideran aquellas que tengan un α_{4j} estrictamente negativa. Es por eso que X_3, X_4 y X_5 no se tomaron en cuenta.

Min {5/4, 2/3}

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_3	-3	-1	1	0	0	-3
X_4	-4	-3	0	1	0	-6
X_5	-1	-1	0	0	1	-3
z	-5	-2	0	0	0	0

Variable de entrada

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_3	-3	-1	1	0	0	-3
X_4	-4	$\boxed{-3}$	0	1	0	-6
X_5	-1	-1	0	0	1	-3
z	-5	-2	0	0	0	0

Al realizar la operación de pivoteo se obtiene la siguiente tabla.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
X_5	1/3	0	0	-1/3	1	-1
z	-7/3	0	0	-2/3	0	4

3. Repetir el paso 2 hasta alcanzar la solución óptima.

2. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base, para realizar la operación de pivoteo.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**Valores de solución**
X_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_4	4/3	1	0	-1/3	0	2
X_5	1/3	0	0	-1/3	1	-1
z	-7/3	0	0	-2/3	0	4

Variable de salida

Se elige la variable de entrada utilizando la siguiente tabla.

Variable	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
renglón-z (z_j-c_j)	-7/3	0	0	-2/3	0
renglón-X_3, α_{3j}	-5/3	0	1	-1/3	0
Proporción $\frac{z_j-c_j}{\alpha_{3j}}$	$\frac{7/3}{5/3}$	---	---	$\frac{2/3}{1/3}$	---

Min {7/5, 2}

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
X_5	1/3	0	0	-1/3	1	-1
z	-7/3	0	0	-2/3	0	4

Variable de entrada

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_3	$\boxed{-5/3}$	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
X_5	1/3	0	0	-1/3	1	-1
z	-7/3	0	0	-2/3	0	4

Al realizar la operación de pivoteo se obtiene la siguiente tabla.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	1/5	-2/5	1	-6/5
z	0	0	-7/5	-1/5	0	27/5

3. Repetir el paso 2 hasta alcanzar la solución óptima.

2. Encontrar la variable que entra en la base y la variable que sale de la base, para realizar la operación de pivoteo.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**Valores de solución**
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	1/5	-2/5	1	-6/5
z	0	0	-7/5	-1/5	0	27/5

Variable de salida

Se elige la variable de entrada utilizando la siguiente tabla.

Variable	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
renglón-z (z_j-c_j)	0	0	-7/5	-1/5	0
renglón-X_5, α_{5j}	0	0	1/5	-2/5	1
Proporción $\frac{z_j - c_j}{\alpha_{5j}}$	---	---	---	$\frac{1/5}{2/5}$	---

Min {1/2}

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	1/5	-2/5	1	-6/5
z	0	0	-7/5	-1/5	0	27/5

Variable de entrada

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	1/5	$\boxed{-2/5}$	1	-6/5
z	0	0	-7/5	-1/5	0	27/5

Al realizar la operación de pivoteo se obtiene la siguiente tabla.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_1	1	0	-1/2	0	1/2	0
X_2	0	1	1/2	0	-3/2	3
X_4	0	0	-1/2	1	-5/2	3
z	0	0	-3/2	0	-1/2	6

2. Todas las variables básicas son no negativas, se ha llegado a la solución óptima. El resultado obtenido es:

Min z = 6

$X_1 = 0$, $X_2 = 3$, $X_4 = 3$

Capítulo 2. Programación Entera

2.1. Antecedentes de la programación entera

La programación entera se limita a los problemas de programación donde algunas o todas las variables están restringidas a valores discretos. El modelo matemático de programación entera es similar al modelo matemático de programación lineal con la excepción de que las variables de entrada deben ser números enteros.

Los problemas de programación entera surgen porque en numerosos problemas prácticos, las variables de decisión deben tomar valores enteros para darle sentido real a la solución, ya que representan objetos discretos. Por ejemplo, asignar personas y máquinas a ciertas actividades, o la producción de algún artículo.

2.2. Tipos de Modelos de la Programación Entera

La programación entera se puede encontrar estructurada en tres formas:

2.2.1 Programación Entera (PE). Denominada también *programación entera pura o totalmente en números enteros*. Aquí, todas las variables son enteras.

$$\text{Opt } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

$$\text{s.a. } a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n \leq b_i$$

$$X \geq 0 \qquad X \in Z^+$$

Donde las c_j y las a_{ij} ($i = 1,..m$; $j = 1, .. n$) son constantes conocidas y b_i el valor de solución.

2.2.2 Programación Entera Mixta (PEM). Nombrada también *parcialmente en números enteros*. Sólo algunas de las variables deben tener forzosamente valores enteros. Es decir, las variables de decisión toman valores continuos y discretos.

$$\text{Opt } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n + d_1 y_1 + d_2 y_2 + ... + d_n y_n$$
$$\text{s.a. } a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n + b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + ... + b_{in} y_n \leq b_i$$
$$X, y \geq 0$$
$$X \in \mathbb{R},\ y \in Z^+$$

Donde las c_j, d_j, a_{ij} y b_{ij} (i = 1,..m; j = 1, .. n) son constantes conocidas y b_i el valor de solución.

2.2.3 Programación Binaria (PB). Son problemas donde las variables son binarias, esto es, del tipo cero-uno (variables restringidas a los valores 0 y 1). Al problema de esta forma se le puede llamar problema entero-cero-uno (PECU).

$$\text{Opt } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$$

$$\text{s.a. } a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n \leq b_i$$

$$X = 0 \text{ ó } 1$$

Donde las c_j y las a_{ij} (i = 1,..m; j = 1, .. n) son constantes conocidas y b_i el valor de solución.

2.3. Aplicaciones de la Programación Entera

2.3.1 Problemas con costo fijo. El costo fijo de un producto es el precio a pagar para realizar su producción sin tomar en cuenta la cantidad producida y el costo variable por unidad. Por ejemplo, cuando se inicia la producción de una pequeña parte de un producto específico y deben preparase las instalaciones de producción requeridas.

La formulación del problema entero mixto para esta aplicación es:

$$\text{Minimizar } Z=\sum_{j=1}^{n} (c_j X_j + k_j y_j),$$

sujeta a

las restricciones originales, más

$$X_j - My_j \leq 0$$

y

y_j binaria, para j=1, 2, …, n.

Ejemplo: "Se tiene que elegir entre tres compañías de teléfonos para suscribirse al servicio de larga distancia en Estados Unidos. MaBell cobrará una tarifa fija de 16 dólares al mes, más 0.25 centavos por minutos. PaBell cobrará 25 dólares al mes, pero reducirá el costo por minuto a 0.21 centavos. En cuanto a BabyBell, la tarifa mensual es de 18 dólares y el costo por minuto es de 0.22 centavos. En promedio se realizan 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no se pague la tarifa fija, a menos de que se hagan las llamadas y de poder dividir las llamadas entre las tres compañías. Encontrar cómo se deben utilizar los servicios de las tres compañías para minimizar la cuenta mensual del teléfono.

Sean las variables de decisión:

$\mathbf{X_1}$ = Minutos de larga distancia al mes con MaBell

$\mathbf{X_2}$ = Minutos de larga distancia al mes con PaBell

$\mathbf{X_3}$ = Minutos de larga distancia al mes con BabyBell

$\mathbf{y_1}$ = 1 si $X_1 > 0$ y 0 si $X_1 = 0$

$\mathbf{y_2}$ = 1 si $X_2 > 0$ y 0 si $X_2 = 0$

$\mathbf{y_3}$ = 1 si $X_3 > 0$ y 0 si $X_3 = 0$

$$\text{Min } z = 0.25X_1 + 0.21X_2 + 0.22X_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$$

$$\text{s.a } X_1 + X_2 + X_3 = 200$$

$$X_1 \leq 200y_1$$

$$X_2 \leq 200y_2$$

$$X_3 \leq 200y_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 = (0, 1)$$

La solución óptima es X_3=200, y_3=1 y todas las variables restantes igual a cero, lo que indica que se debe elegir a BabyBell para el servicio de larga distancia." [4]

2.3.2 Problemas de asignación. Un ejemplo es cuando se determinan las actividades a los empleados, y si estos no tienen la capacidad de cumplir con sus actividades, resultará costoso para la empresa. También, cuando la carga y distribución de artículos en camiones de entrega de tal manera que todos los artículos se entreguen con costo mínimo.

Problema de presupuesto de capital. Es decir, en la asignación de recursos limitados a varios proyectos de inversión con el fin de maximizar las ganancias. Se reduce a decisiones de "sí-no".

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{ si se elige el proyecto } j \\ 0, \text{ si no se elige el proyecto } j \end{cases}$$

4. Taha, H., 1998. "Investigación de Operaciones. Una introducción". Editorial Prentice Hall, México, 371-372 pp.

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j X_j + k_j y_j),$$

sujeta a

las restricciones originales, más

X_j binaria, para j=1, 2, …, n.

Ejemplo: **"**Se evaluarán cinco proyectos a lo largo de un horizonte de planificación de tres años, con el fin de maximizar las utilidades. La siguiente tabla proporciona las utilidades esperadas para cada proyecto y los egresos anuales asociados.

	Egresos (millones de dólares)/anuales			
Proyecto	**1**	**2**	**3**	**Utilidades (millones de dólares)**
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles (millones de dólares)	25	25	25	

Determinar los proyectos que se van a ejecutar.

Sea

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{ si se elige el proyecto } j \\ 0, \text{ si no se elige el proyecto } j \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 20X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 15X_4 + 30X_5$$
$$\text{s.a } 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 \leq 25$$
$$X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 4X_4 + 6X_5 \leq 25$$
$$8X_1 + 10X_2 + 2X_3 + X_4 + 10X_5 \leq 25$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = (0, 1)$$

La solución entera óptima es $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$, $X_5 = 0$, con $z = 95$millones de dólares." [5]

Problemas de inversión. Aquí el fin es maximizar los ingresos totales de una empresa.

Asignación cuadrática. Por ejemplo, construir plantas industriales en diferentes lugares, con el requisito de que cada lugar tenga a lo más una planta. El objetivo es minimizar el costo que genera transportarse de una planta a otra.

2.3.3 Problemas de transporte. El objetivo de estos problemas es minimizar los costos de transporte pero satisfaciendo las condiciones de demandas y capacidades.

Problemas de cobertura de un conjunto. Se puede describir en términos generales como uno que involucra a cierto número de actividades viables y sus características. Cada actividad posee alguna pero no todas las característica. El objetivo es establecer la combinación menos costosa de actividades que de manera colectiva cubra todas las características, por lo menos una vez. En este modelo todas las variables son binarias.

$$\text{Minimizar } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

donde $c_j > 0$ para todas las $j = 1, 2, \ldots, n$.

$Xj = 1$ ó 0 para todas las $kj = 1, 2, \ldots, n$.

5. Taha, H., 1998. "Investigación de Operaciones. Una introducción". Editorial Prentice Hall, México, 367-368 pp.

Ejemplo: "El Departamento de Seguridad de la U de A, con el fin de promover la seguridad de los estudiantes, se encuentra en proceso de instalar teléfonos de emergencia en ubicaciones selectas dentro de sus instalaciones. El departamento quiere instalar un número mínimo de teléfonos, siempre y cuando cada una de las principales calles del campus cuente por lo menos con un teléfono. En la figura 2.1 se proporciona el mapa de las calles principales (A-K) en la universidad.

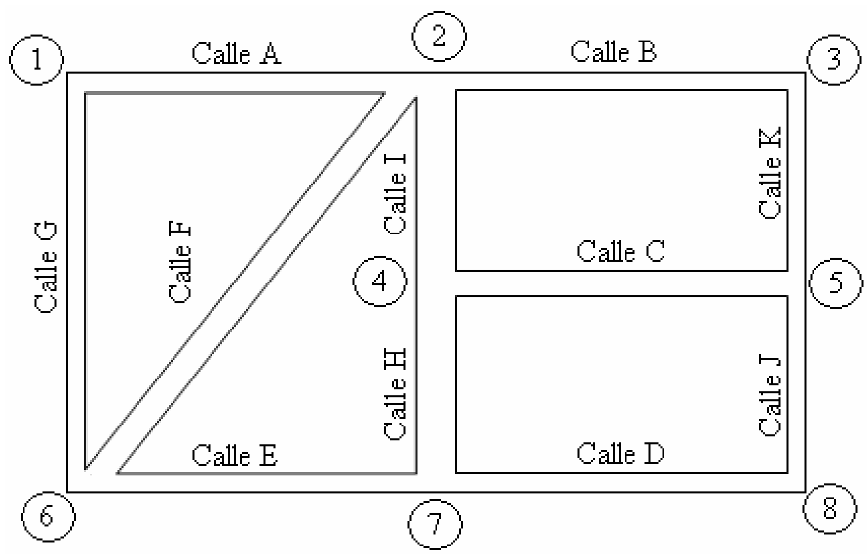

Fig 2.1 Calles principales en la universidad

Sea

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{ si hay un teléfono instalado en la ubicación } j \\ 0, \text{ si no hay un teléfono instalado en la ubicación } j \end{cases}$$

Las restricciones del problema requieren la instalación de, por lo menos, un teléfono en cada una de las 11 calles (A a K). El modelo será el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } z &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \\
\text{s.a } \ & X_1 + X_2 \geq 1 \text{ (Calle A)} \\
& X_2 + X_3 \geq 1 \text{ (Calle B)} \\
& X_4 + X_5 \geq 1 \text{ (Calle C)} \\
& X_7 + X_8 \geq 1 \text{ (Calle D)} \\
& X_6 + X_7 \geq 1 \text{ (Calle E)} \\
& X_2 + X_6 \geq 1 \text{ (Calle F)} \\
& X_1 + X_6 \geq 1 \text{ (Calle G)} \\
& X_4 + X_7 \geq 1 \text{ (Calle H)} \\
& X_2 + X_4 \geq 1 \text{ (Calle I)} \\
& X_5 + X_8 \geq 1 \text{ (Calle J)} \\
& X_3 + X_5 \geq 1 \text{ (Calle K)} \\
& X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 = (0, 1)
\end{aligned}
$$

La solución óptima del problema requiere la instalación de cuatro teléfonos en las intersecciones 1, 2, 5 y 7.” [6]

Problemas de ubicación. La elección entre varios sitios alternativos para situar una fábrica, almacén o tienda para minimizar el costo de transporte, maximizar las ganancias, etc.

Ejemplo: “Powerco tiene tres centrales eléctricas que cubren las necesidades de cuatro ciudades. Cada central suministra los números siguientes de kilowatts-hora (kwh) de electricidad:

6. Taha, H., 1998. “Investigación de Operaciones. Una introducción”. Editorial Prentice Hall, México, 376-378 pp.

De	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministros (millones de kwh)
Planta 1	\$8	\$6	\$10	\$9	35
Planta 2	\$9	\$12	\$13	\$7	50
Planta 3	\$14	\$9	\$16	\$5	40
Demanda (millones de kwh)	45	20	30	30	

Las demandas de potencia pico en estas ciudades, que ocurren al mismo tiempo (2 p.m.), son como sigue (en kwh): ciudad 1, 45 millones; ciudad 2, 20 millones; ciudad 3, 30 millones; ciudad 4, 30 millones. Los costos por enviar un millón de kwh de electricidad de la planta a la ciudad dependen de la distancia que debe viajar la electricidad. Minimizar el costo de satisfacer la demanda de potencia pico de cada ciudad.

Sea

X_{ij} = número de (millones) de kwh producidos en la planta i y enviados a la ciudad j

Para i = 1, 2, 3 y j = 1, 2, 3, 4.

En términos de estas variables, el costo total de suministrar las demandas de potencia pico a las ciudades 1 a 4 podrían escribirse como

$8X_{11} + 6X_{12} + 10X_{13} + 9X_{14}$ (Costo de enviar potencia desde la planta 1)

$+ 9X_{21} + 12X_{22} + 13X_{23} + 7X_{24}$ (Costo de enviar potencia desde la planta 2)

$+ 14X_{31} + 9X_{32} + 16X_{33} + 5X_{34}$ (Costo de enviar potencia desde la planta 3)

La potencia total suministrada por cada planta no puede exceder la capacidad de la planta.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 35$ (Restricción de suministro de la planta 1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 50$ (Restricción de suministro de la planta 2)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 40$ (Restricción de suministro de la planta 3)

Powerco debe satisfacer las siguientes restricciones de demanda:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 45$ (Restricción de demanda de la ciudad 1)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 20$ (Restricción de demanda de la ciudad 2)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 30$ (Restricción de demanda de la ciudad 3)

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 30$ (Restricción de demanda de la ciudad 4)

Debido a que las X_{ij} deben ser no negativas, se agregan las restricciones de signo $X_{ij} \geq 0$ (i= 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4).

Al combinar la función objetivo, las restricciones de suministro, demanda y signo se obtiene:

$\text{Min } z = 8X_{11} + 6X_{12} + 10X_{13} + 9X_{14} + 9X_{21} + 12X_{22} + 13X_{23} + 7X_{24} + 14X_{31} + 9X_{32} + 16X_{33} + 5X_{34}$

s.a $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 35$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 50$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 40$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 45$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 20$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 30$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 30$

$X_{ij} \geq 0$ (i= 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4).

La solución óptima es $z = 1020$, $X_{12} = 10$, $X_{13} = 25$, $X_{21} = 45$, $X_{23} = 5$, $X_{32} = 10$, $X_{34} = 10$."[7]

Problema del agente viajero. Este problema se refiere a designar una ruta óptima (de costo o distancia mínimos). Se llama *problema del agente o vendedor viajero* porque hace una analogía con la situación de una persona que desea determinar el recorrido más corto para pasar por varias ciudades sólo una vez. Es más recomendable resolverlo con métodos heurísticos.

7. Winston, W., 2004. "Investigación de Operaciones. Aplicaciones y algoritmos". Editorial Thomson, USA, 360-362 pp.

Ejemplo: "El programa de producción diaria en la compañía Rainbow incluye lotes de pintura blanca (B), amarilla (A), roja (R) y negra (N). Debido a que Rainbow utiliza las mismas instalaciones para los cuatro tipos de pinturas, es necesaria una limpieza a fondo de los lotes. La siguiente tabla resume el tiempo de limpieza en minutos cuando el color designado en el renglón va seguido del color designado en la columna. Debido a que un color no se puede seguir a sí mismo, se asigna a las entradas correspondientes un tiempo de preparación infinito. Determinar la secuencia óptima para la producción diaria de los cuatro colores, que minimizará el tiempo total de limpieza asociado.

	El tiempo de limpieza dado para la siguiente pintura es			
Pintura actual	**Blanca**	**Amarilla**	**Negra**	**Roja**
Blanca	∞	10	17	15
Amarilla	20	∞	19	18
Negra	50	44	∞	25
Roja	45	40	20	∞

La figura 2.2 resume el problema. Cada pintura está representada por un nodo y los arcos direccionales representan el tiempo de limpieza necesario para llegar de un nodo a otro. Por consiguiente, la situación se reduce a determinar el ciclo más corto que empieza en un nodo (pintura) y pasa a través de cada uno de los tres nodos restantes exactamente una vez, antes de regresar al nodo inicial.

No hay ninguna garantía que la sola solución óptima de la asignación producirá un recorrido. Lo más probable es que consistirá de subrecorridos que unen subconjuntos de los nodos cercanos.

Sea

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si se llega al nodo j desde el nodo } i \\ 0, \text{ si no se llega al nodo j desde el nodo } i \end{cases}$$

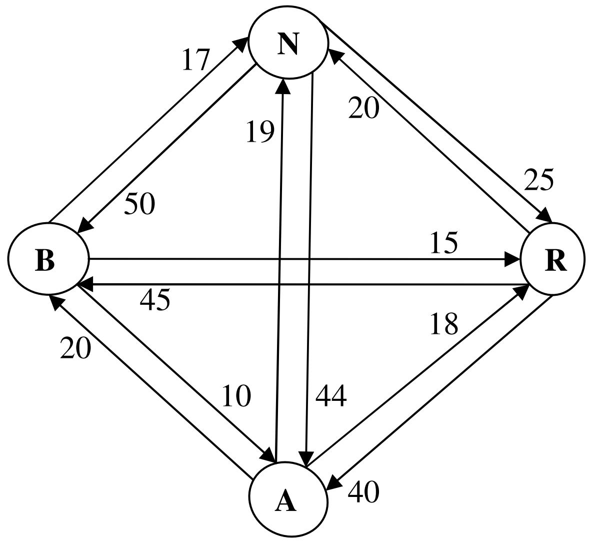

Fig 2.2 Tiempos de limpieza

Una condición necesaria para un recorrido es que la ciudad *i* sólo conecte con una ciudad y que se llegue a la ciudad j exactamente desde una ciudad. Si *M* es un valor positivo suficientemente grande, el modelo será el siguiente:

Min z = $MX_{BB} + 10X_{BA} + 17X_{BN} + 15X_{BR} + 20X_{AB} + MX_{AA} + 19X_{AN} + 18X_{AR} + 50X_{NB}$
$+ 44X_{NA} + MX_{NN} + 25X_{NR} + 45X_{RB} + 40X_{RA} + 20X_{RN} + MX_{RR}$

s.a $X_{BB} + X_{BA} + X_{BN} + X_{BR} = 1$

$X_{AB} + X_{AA} + X_{AN} + X_{AR} = 1$

$X_{NB} + X_{NA} + X_{NN} + X_{NR} = 1$

$X_{RB} + X_{RA} + X_{RN} + X_{RR} = 1$

$X_{BB} + X_{AB} + X_{NB} + X_{RB} = 1$

$X_{BA} + X_{AA} + X_{NA} + X_{RA} = 1$

$X_{BN} + X_{AN} + X_{NN} + X_{RN} = 1$

$X_{BR} + X_{AR} + X_{NR} + X_{RR} = 1$

$X_{ij} = (0, 1)$ para todas las *i* y *j*

La solución óptima del problema son los subrecorridos blanca – amarilla – blanca y negro – rojo – negro" [8].

2.3.4 Problemas de redes de optimización. Abarcan principalmente los campos de asignación y distribución de recursos, reemplazos, secuenciación y confiabilidad.

Problemas de secuenciación. Por ejemplo, el caso de un taller que puede efectuar solamente un tipo de trabajo a la vez y que está sujeto a un límite de tiempo a partir de una fecha base y por cada día de retraso se genera una multa. Dicho de otra manera, dar continuidad a un cierto número de trabajos en una máquina a fin de minimizar el costo de acondicionamiento o el tiempo necesario. Cabe aclarar que se obtiene una mejor solución con la enumeración de todas las posibilidades, enfoques heurísticos o de programación lineal, que con la programación entera.

Sea X_j el tiempo para la operación de inicio *j*. Sea a_j el tiempo de procesamiento requerido para terminar la operación *j*. Si la operación *i* precede a la operación *j*, la *restricción de secuencia* resultante es

$$X_i + a_i \leq X_j$$

Sea d_j el tiempo en que se debe terminar la operación *j*, la *restricción de fecha de entrega* es

$$X_j + a_j \leq d_j$$

La *restricción de no interferencia* dependiendo, respectivamente, de si *j* precede a *i* o *i* precede a *j*, en la solución óptima.

$$X_i - X_j \geq a_j \text{ “o bien” } X_j - X_i \geq a_i$$

8. Taha, H., 1998. "Investigación de Operaciones. Una introducción". Editorial Prentice Hall, México, 373-375 pp.

Como las restricciones “o bien” no están en la forma de la programación lineal se agrega la variable y_{ij}.

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si la operación } j \text{ precede a la operación } i \\ 0, \text{ si la operación } i \text{ precede a la operación } j \end{cases}$$

Para M suficientemente grande, las restricciones “o bien” serán equivalentes a las siguientes restricciones simultáneas.

$$My_{ij} + (X_i - X_j) \geq a_j \text{ “y” } M(1 - y_{ij}) + (X_j - X_i) \geq a_i$$

Si t es el tiempo total requerido para terminar todas las n operaciones, el planteamiento será

$$\text{Minimizar } X_0 = t$$

sujeto a

$$X_j + a_j \leq t,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

y las restricciones de secuencia, fecha de entrega y no interferencia.

Líneas de ensamble o balance de líneas de producción. Una línea de ensamble es un conjunto de estaciones de trabajo que debe realizar una serie de trabajos con la finalidad de ensamblar un producto. En cada estación de trabajo se pueden realizar una o más actividades, siguiendo ciertas restricciones (relaciones de precedencia) en cuanto al orden en que los trabajos deben realizarse. El producto tiene un límite de tiempo para permanecer en cualquier estación específica de trabajo. El objetivo es minimizar el número de actividades, de estaciones de trabajo y trabajadores con relación a la producción.

2.3.5 Problemas de programación lineal, donde las actividades, por su estructura deben ser no divisibles. Por ejemplo, la producción de prendas de vestir y automóviles.

2.3.6 Problema tipo mochila. Éste, consiste en elegir entre diversos artículos que deben empacarse en un espacio limitado, para obtener tanto "valor" en el espacio como sea posible.

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{i=1}^{n} V_i X_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} k_i X_i \leq K$$

$$X_i = 0 \text{ ó } 1$$

donde

K = capacidad de la mochila
X_i = artículos $i = 1, 2, \ldots, n$
V_i = valor del artículo i
k_i = capacidad del artículo i

Ejemplo: Un grupo financiero tiene cinco proyectos de inversión. Cada proyecto $i = 1, 2, 3, 4, 5$ necesita de una inversión de k_i millones de pesos y se pronostica que ese proyecto rendirá V_i millones de pesos anuales de utilidad cuando el proyecto esté funcionando. La capacidad total de inversión K es de 91 millones de pesos. La tabla siguiente resume los datos asociados a cada proyecto de inversión.

Proyecto número *i*	**Inversión en millones k_i**	**Retorno anual de la inversión (V_i)**	**C_i**
1	36	54	1.5
2	24	18	0.75
3	30	60	2
4	32	32	1
5	26	13	0.5

El grupo financiero debe tomar la decisión de aceptar o rechazar cada proyecto. Definir qué proyectos se deben incluir y cuáles se deben rechazar con el objeto de maximizar el retorno anual total.

El modelo será el siguiente:

$$\text{Max } Z = 54X_1 + 18X_2 + 60X_3 + 32X_4 + 13X_5$$
$$\text{s.a } 36X_1 + 24X_2 + 30X_3 + 32X_4 + 26X_5 \leq 91$$

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si se invierte en el proyecto } i \\ 0 \text{ si no se invierte en el proyecto } i \end{cases}$$

La solución óptima es $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, $X_4 = X_5 = 0$, con $z = 132$.

2.3.7 Dicotomías y problemas de aproximación. Sucede cuando las condiciones del problema solo permiten una u otra restricción, no ambas. Estos problemas suelen estar ligados con restricciones de no interferencia, es decir, que dos actividades no se realicen en forma simultánea.

2.3.8 Problemas de programación cronológica. Se determinan programas cronológicos y tablas de tiempos para vehículos, máquinas, clases en escuelas, etc. Cuando el problema es grande se recomienda usar enfoques heurísticos.

En la siguiente tabla se muestran otras aplicaciones que ha tenido la investigación de operaciones, según el autor Taha.

Organización	**Naturaleza de la aplicación**	**Ahorros anuales (en millones de dólares)**
Monsanto Corp.	Optimización de operaciones de producción para cumplir metas con un costo mínimo.	\$2
SANTOS, Ltd., Australia	Optimización de inversiones de capital para producir gas natural durante 25 años.	\$3
United Airlines	Programación de turnos de trabajo en las oficinas de reservaciones y en los aeropuertos para cumplir con las necesidades del cliente a un costo mínimo.	\$6
San Francisco Police Department	Optimización de la programación y asignación de oficiales de patrulla con un sistema computarizado.	\$11
Weyerhauser Co.	Optimización del corte de árboles en productos de madera para maximizar su producción.	\$15
The Netherlands Rijkswaterstatt	Desarrollo de política nacional de administración del agua, incluyendo mezcla de nuevas instalaciones, procedimientos de operación y costeo.	\$15
Yellow Freight System, Inc.	Optimización del diseño de una red nacional de transporte y la programación de rutas de envío.	\$17.3
Texaco, Inc.	Optimización de la mezcla de ingredientes disponibles para que los productos de gasolina cumplieran con los requerimientos de ventas y calidad.	\$30
Electrobras/CEPAL, Brasil	Asignación óptima de recursos hidráulicos y térmicos en el sistema nacional de generación de energía.	\$43

Organización	Naturaleza de la aplicación	Ahorros anuales
Electric Power Research Institute	Administración de inventarios de petróleo y carbón para el servicio eléctrico con el fin de equilibrar los costos de inventario y los riesgos de faltantes.	\$59 millones de dólares
Citgo Petroleum Corp.	Optimización de las operaciones de refinación y de la oferta, distribución y comercialización de productos.	\$70 millones de dólares
IBM	Integración de una red nacional de inventario de refacciones para mejorar el apoyo al servicio.	\$20 millones + \$250 millones ahorrados en inventario
American Airlines	Diseño de un sistema de estructura de precios, sobreventa y coordinación de vuelos para mejorar las utilidades.	\$500 millones más de ingresos
New Haven Health Dept.	Diseño de un programa efectivo de intercambio de agujas para combatir el contagio del SIDA.	33% menos contagios
U.S. Military Airlift Command	Rapidez en la coordinación de aviones, tripulaciones, carga y pasajeros para manejar la evacuación por aire en el proyecto Tormenta del Desierto en el Medio Oriente.	Victoria

2.3 Métodos de solución

La programación entera pura, con la totalidad de soluciones posibles acotada, garantiza la existencia de un número finito de soluciones. No obstante, esta situación no asegura la resolución del problema ya que la cantidad de soluciones puede ser muy grande. Por ejemplo, si se tiene un problema de programación binaria con n variables se considerarán 2^n soluciones y a pesar de que algunas soluciones se pueden excluir por no cubrir los requerimientos, cada vez que n aumenta en uno se duplica la cantidad de soluciones por cada variable. Este patrón se conoce con el nombre de *crecimiento exponencial de la dificultad del problema*. Algunas veces ocasiona que los problemas prácticos grandes de programación entera no se puedan resolver por enumeración exhaustiva ni con el uso de ordenadores.

Cuando las variables tienen que ser enteras, resolver el problema se obstaculiza ampliamente por ser éste uno de programación lineal con menos soluciones a tener en consideración.

Una forma fácil de obtener una solución a un problema de programación entera es ignorando las restricciones enteras, resolverlo como un problema de programación lineal y redondear la solución óptima a los enteros más próximos. Este método suele proporcionar un resultado satisfactorio solamente cuando las posibles soluciones se encuentran cerca de enteros grandes. Si al resolverlo el resultado óptimo obtenido en el problema lineal es entero, entonces también es la solución óptima del problema entero original. Ver ejemplo uno del capítulo cuatro.

Otra forma para manejar los problemas de programación entera grandes es empleando algoritmos heurísticos. Son eficientes para problemas grandes y frecuentemente brindan mejores soluciones de las que se hallan por redondeo, pero no se tiene la certeza de llegar a la solución óptima.

En general, para los algoritmos para programación entera, el tiempo de cálculo es determinado por el número de variables enteras y el hecho de que el problema tenga una estructura especial de la que se pueda sacar utilidad. Esta circunstancia es opuesta a la de programación lineal, en la cual es más importante el número de restricciones que el número de variables.

Hay casos en los que aumentar el número de restricciones reduce el tiempo de cálculo porque se disminuye el número de soluciones factibles. Para el caso de los problemas de PEM el número de variables enteras es más importante que el total de variables, dado que las variables continuas no causan mayor efecto.

Otras aplicaciones implican la toma de decisiones de sí o no.

Las técnicas de programación entera son procedimientos para resolver problemas lineales con restricciones enteras para algunas o todas las variables. Estas mismas se fundamentan a partir de conceptos diferentes pero se pueden resumir en tres principios (figura 2.3): *separación, suavización* y *sondeo*.

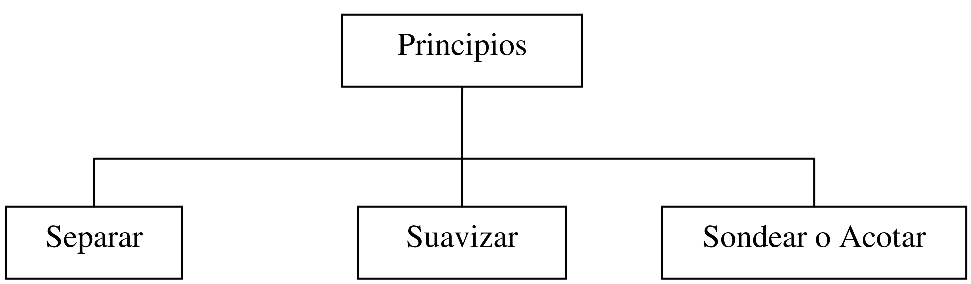

Fig 2.3 Principios de las técnicas de PE

En ocasiones es útil resolver el problema a través de subproblemas. Dicha subdivisión deberá cumplir con dos requisitos:

1) La solución factible del problema es solución factible solamente a una de las divisiones del problema.
2) Las soluciones factibles de los subproblemas también son soluciones factibles al problema.

Ahora bien, la suavización es la eliminación de alguna condición. Usualmente en la programación entera es la eliminación de la restricción de entero. Al problema correspondiente de programación lineal sin las restricciones de valores enteros de un problema de programación entera se denomina *soltura de PL.* Cuando un problema se ha suavizado, toda solución factible al problema es una solución factible al problema suavizado. Lo anterior produce tres resultados:

1) Si el problema suavizado no tiene solución factible, el problema original tampoco.
2) El valor máximo del problema original es menor al valor máximo del problema suavizado.
3) Si la solución óptima del problema suavizado es una solución factible del problema original, entonces esta solución también es óptima para el problema original.

Sondear un problema implica que tal problema ya no requiere un análisis posterior para la búsqueda de la solución de programación entera y se puede efectuar en tres formas diferentes:

1) El problema no tiene solución factible.
2) Algún valor predeterminado es mejor que cualquier otro que pudiera contener la función objetivo del problema.
3) Se ha encontrado la solución óptima.

Una forma más de solucionar el problema entero de programación lineal, consiste en resolverlo como un problema de programación lineal e introducir posteriormente de una en una las restricciones adicionales, para aislar la región cerca del punto de solución hasta alcanzar una solución entera. En teoría el método converge, pero en la práctica el número de iteraciones puede ser enorme. En general se han desarrollado dos métodos para crear las restricciones mencionadas anteriormente, que son: Método del plano cortante y Método de ramificación y acotamiento.

En el año de 1958 Gomory crea el primer algoritmo para la resolución de modelos de programación entera basado en planos de corte. Dos años después, Land y Doig dan a conocer los algoritmos de bifurcación y acotación.

2.3.7 Planos de corte

Los métodos de planos de corte fueron los primeros que se utilizaron en la programación entera. La ventaja de estos métodos es que muestran lo que se quiere hacer en la región de factibilidad del problema entero mientras se busca la solución. Lamentablemente resultan ineficientes al momento de resolver problemas que no son pequeños, porque en cada iteración se genera una restricción y una variable extra.

Un plano de corte (cortante o cortadura) para un problema de programación entera es una restricción adicional que reduce la región factible para la soltura de programación lineal. La restricción no eliminará ningún punto entero factible del problema original y atravesará al menos un punto entero ya sea factible o no factible.

El algoritmo del plano cortante inicia en la solución continua óptima de la programación lineal y añade consecutivamente restricciones llamadas cortes que modificarán el espacio de la solución para dar origen a un punto extremo entero óptimo.

Para realizar el corte se elige un renglón en el que la variable básica es no entera. A este se le conoce como *renglón fuente*. Para construir la restricción cada uno de los coeficientes que sean no enteros se dividirán en factores enteros y fraccionales, siempre y cuando este último sea estrictamente positivo. Por ejemplo,

$$\frac{4}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \qquad \frac{-8}{5} = \left(-2 + \frac{2}{5}\right)$$

Sea [X] = el entero máximo no mayor que el número X.

El corte debe ser de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - [a_{ij}]\right) X_j \geq \left(b_i - [b_i]\right) \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Ejemplo: Se tiene el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 5X_1 + 9X_2 \\ &\text{s.a } -X_1 + 4X_2 \leq 8 \\ &\qquad 5X_1 + X_2 \leq 30 \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

En la figura 2.4 se muestra el espacio de solución para este problema por medio de puntos.

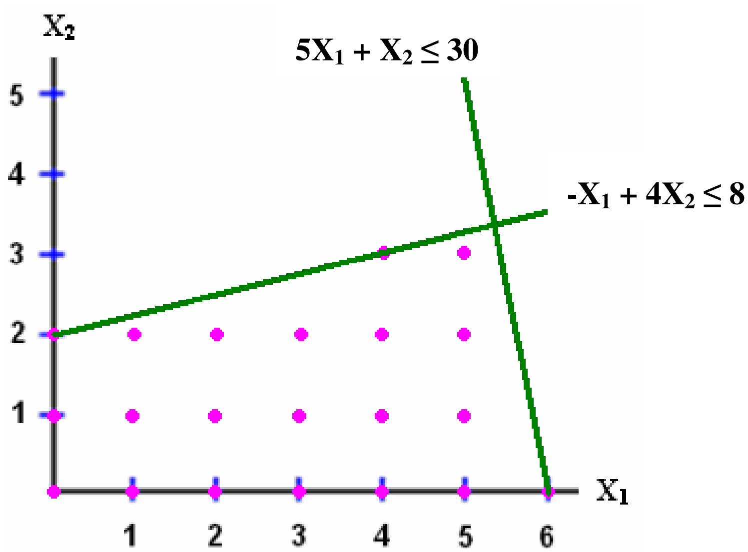

Fig 2.4 Espacio de solución

Se resuelve por el método simplex sin considerar las restricciones enteras. Se obtuvo la siguiente tabla óptima.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Valores de solución
X_2	0	1	5/21	1/21	10/3
X_1	1	0	-1/21	4/21	16/3
z	0	0	40/21	29/21	170/3

Como la solución óptima de X_1=16/3, X_2=10/3 es continua se agregará un corte. Para llevar a cabo esta acción se realiza lo siguiente:

Se elige el renglón fuente para generar el corte. Para este caso puede ser cualquiera de los tres renglones porque z, X_1 y X_2 deben ser enteros.

De la tabla anterior se eligió arbitrariamente a X_2 como renglón fuente.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**Valores de solución**
X_2	0	1	5/21	1/21	10/3

La división en factores del renglón fuente genera

$$\left(0 + \frac{5}{21}\right)X_3 + \left(0 + \frac{1}{21}\right)X_4 = \left(3 + \frac{1}{3}\right)$$

y el corte será (figura 2.5)

$$\frac{5}{21}X_3 + \frac{1}{21}X_4 \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Corte I} \quad \boxed{\frac{-5}{21}X_3 - \frac{1}{21}X_4 + X_5 = \frac{-1}{3}}$$

Se agrega el corte como una restricción secundaria a la tabla simplex óptima.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**Valores de solución**
X_2	0	1	5/21	1/21	0	10/3
X_1	1	0	-1/21	4/21	0	16/3
X_5	0	0	-5/21	-1/21	1	-1/3
z	0	0	40/21	29/21	0	170/3

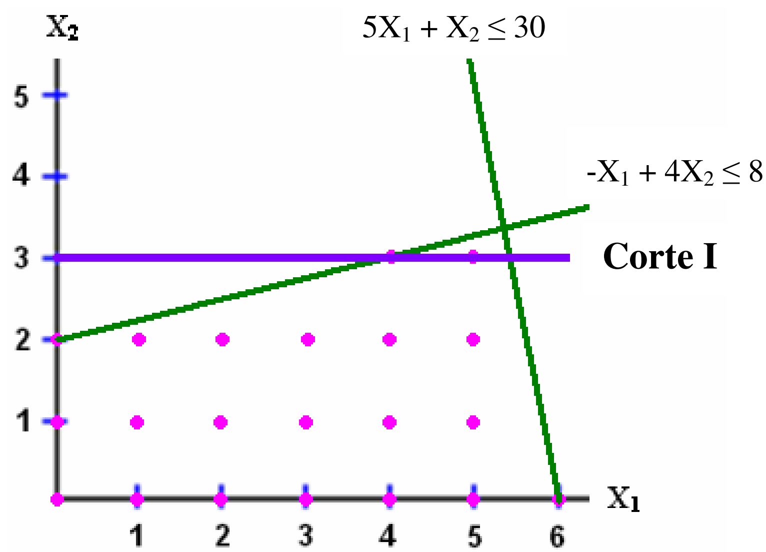

Fig 2.5 Corte I

Esta nueva tabla es óptima pero no factible, así que se procede a aplicar el método dual simplex para volver a adquirir la factibilidad.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_2	0	1	0	0	1	3
X_1	1	0	0	1/5	-1/5	27/5
X_3	0	0	1	1/5	-21/5	7/5
z	0	0	0	1	8	54

La solución es X_1=27/5, X_2=3, X_3=7/5, Max z= 54. Esta solución es óptima y factible, pero como no es entera se realiza otro corte.

Para el segundo corte se selecciona como renglón fuente X_1.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Valores de solución
X_1	1	0	0	1/5	-1/5	27/5

La división en factores del nuevo renglón fuente genera

$$\left(0+\frac{1}{5}\right)X_3+\left(-1\ +\ \frac{4}{5}\right)X_4=\left(5+\ \frac{2}{5}\right)$$

y el corte será (figura 2.6)

$$\frac{1}{5}X_3+\frac{4}{5}X_4\ \geq\ \frac{2}{5}\qquad \Rightarrow \qquad \textbf{Corte II}\quad \boxed{\frac{-1}{5}X_3-\frac{4}{5}X_4+X_6=\frac{-2}{5}}$$

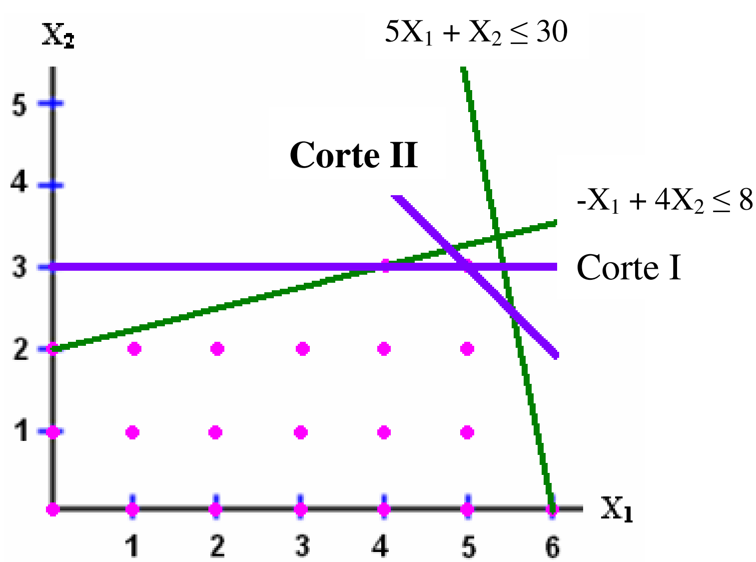

Fig 2.6 Corte II

Se agrega el corte como una restricción secundaria a la tabla simplex óptima.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**Valores de solución**
X_2	0	1	0	0	1	0	3
X_1	1	0	0	1/5	-1/5	0	27/5
X_3	0	0	1	1/5	-21/5	0	7/5
X_6	0	0	0	-1/5	-4/5	1	-2/5
z	0	0	0	1	8	0	54

Esta nueva tabla es óptima pero no factible, así que se procede a aplicar el método dual simplex para volver a adquirir la factibilidad.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**Valores de solución**
X_2	0	1	0	0	1	0	3
X_1	1	0	0	0	-1	1	5
X_3	0	0	1	0	-5	1	1
X_4	0	0	0	1	4	-5	2
z	0	0	0	0	4	5	52

La solución es **X_1 =5, X_2 = 3, X_3 =1, X_4 = 2**, **Max z = 52**. En ésta X_1 y X_2 ya son enteras, por lo tanto se ha llegado a la solución óptima del problema (figura 2.7).

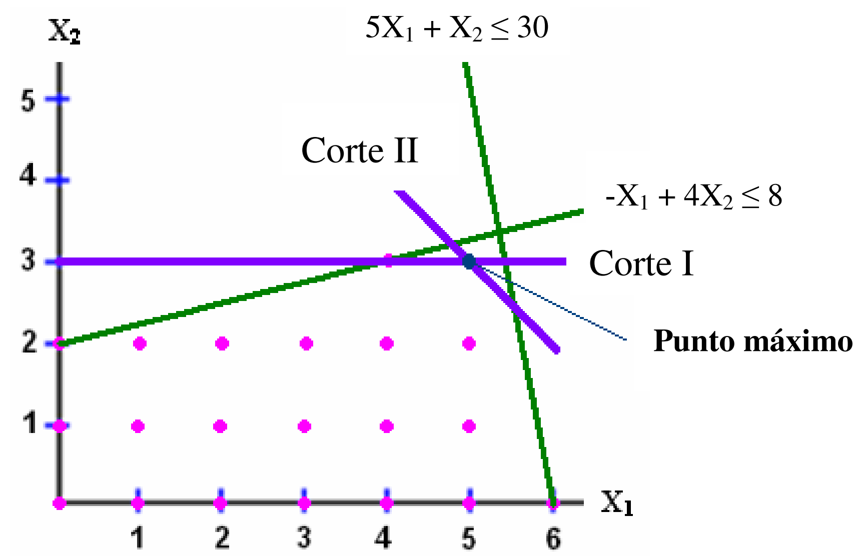

Fig 2.7 Solución óptima

Ejemplo: Una modista debe terminar unos sacos. Dispone para ello de un máximo de 45 botones. Utiliza 5 botones para terminara el modelo de saco A y 3 botones para el B. A la semana vende un máximo de 10 sacos. El beneficio obtenido por la venta del tipo A es de \$500 y de \$400 del tipo B. Determinar el número de sacos que debe terminar para obtener el máximo beneficio en esa semana.

Sean las variables de decisión:

$\mathbf{X_1}$ = Número de sacos del tipo A a terminar.

$\mathbf{X_2}$ = Número de sacos del tipo B a terminar.

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 500X_1 + 400X_2 \\ &\text{s.a } X_1 + X_2 \leq 10 \\ &\quad 5X_1 + 3X_2 \leq 45 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

La solución óptima es $X_1=9$ y $X_2=0$, esto es, terminar 9 sacos del tipo A y ninguno del tipo B con un beneficio máximo de $4500.

2.3.8 Bifurcación y acotamiento

El procedimiento de bifurcación también es conocido como ramificación y se encarga de eliminar partes del espacio continuo que no incluyen puntos enteros factibles, reforzando las condiciones necesarias para que se tengan los enteros.

Una desventaja de este algoritmo es resolver un problema lineal en cada subproblema. En problemas grandes esto puede llegar a consumir mucho tiempo, en especial cuando la única información necesaria es el valor objetivo óptimo. Sin embargo, algunas cotas pueden ayudar a descartar subproblemas. A su vez la principal ventaja es la estimación rápida de dichas cotas con cálculos mínimos, reduciendo con esto el tiempo que tarda el algoritmo en llegar a la solución óptima.

Otra desventaja es que no necesariamente se puede tener una cota exacta ocasionando que no sean efectivas. A pesar de esta desventaja, estos métodos siguen siendo los más efectivos para resolver problemas enteros.

El primer paso de los algoritmos de bifurcación y acotamiento es encontrar la solución óptima sin considerar las restricciones de entero. Esta solución se obtiene aplicando el método simplex. Posteriormente se añaden las restricciones.

Las restricciones dividirán la región factible en dos, sin eliminar alguna solución entera factible. Los nuevos subproblemas que surgen se denominan *reserva o lista de candidatos*. Si al resolver los dos nuevos subproblemas se encuentra una solución entera, se verifica el valor de la función objetivo. Cuando este valor es mejor que el valor de la función objetivo del otro subproblema, se concluye y ésta será la solución óptima entera. En el caso opuesto se vuelve a dividir cada subproblema en dos hasta encontrar la solución óptima entera. A este proceso se le llama *bifurcación*.

Las bifurcaciones se efectúan a partir del programa que se considere más cerca del valor óptimo. Si existen varias opciones para continuar con las bifurcaciones se elige la de mayor valor si se realiza una maximización, o bien, el de menor valor si se trata de una minimización. Cuando el primer resultado (aproximación) contiene más de una variable no entera, la nueva restricción se realiza a la variable cuya parte fraccionaria esté más cerca de 0.5. En caso de empate se elige de forma aleatoria una variable. Si sucede que el problema tenga más de una solución óptima, en este caso se selecciona cualquier solución como óptima y no se toman en cuenta el resto de las soluciones.

Si se está trabajando con variables binarias, para ramificar el problema sin dificultad, se puede fijar el valor de una variable. Para los problemas mixtos nunca se seleccionará una variable continua como variable de ramificación. Para disponer de una nueva cota, los valores de las variables discretas deben ser enteros y el valor objetivo debe ser mejor a la cota actual.

En la *acotación*, para el caso de maximización, el valor de la función objetivo se toma de la primera solución entera que se obtiene (primera solución incumbente o de apoyo) y se convierte en una cota inferior para el problema y todos aquellos valores menores a esta cota se descartan. En el caso de minimización el procedimiento es el mismo salvo que se convierte en una cota superior para el problema y se desechan aquellos valores mayores a la cota superior.

Ejemplo: Se tiene el siguiente problema

$$\text{Max } z = 3X_1 + 2X_2$$
$$\text{s.a } X_1 + X_2 \leq 4$$
$$7X_1 + 3X_2 \leq 21$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras}$$

El espacio de solución de este problema lineal entero (PLE) se muestra en la figura 2.8 por medio de puntos. La solución óptima de la soltura de dicho problema, PL0, es $X_1=2.25$, $X_2=1.75$ y $Z=10.25$.

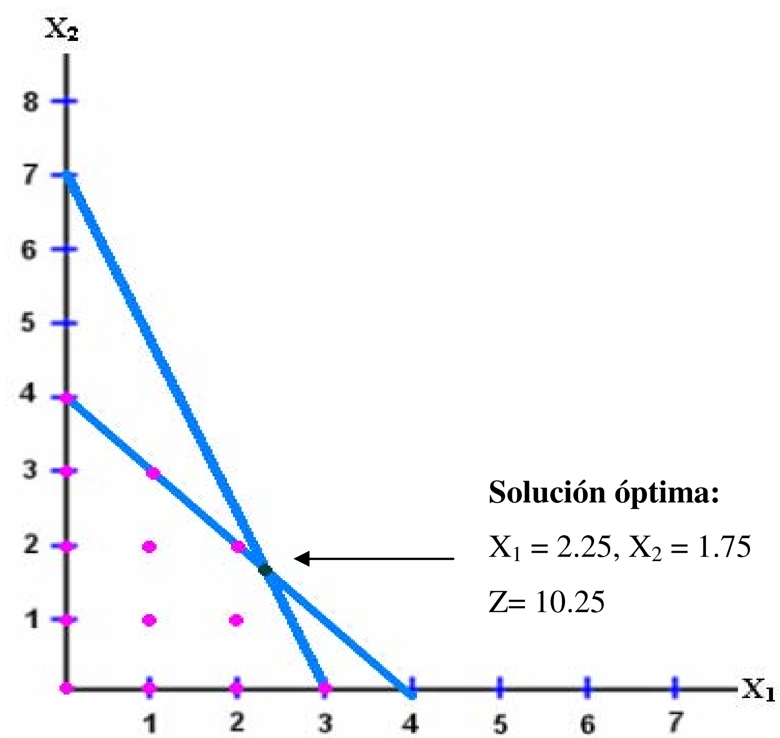

Fig 2.8 PL0

Dado que esta solución óptima no cumple con los requerimientos enteros se procede a aplicar el algoritmo de ramificación y acotamiento.

Se selecciona una de las variables enteras de PL0 cuyo valor no sea entero. Al seleccionar $X_1(=2.25)$ la región $2 < X_1 < 3$ del espacio de solución de PL0 no contiene valores enteros de X_1 y se pueden eliminar. Esto es equivalente a reemplazar PL0 por PL1 y PL2 definidos como:

Espacio PL1 = espacio PL0 + $(X_1 \leq 2)$

Espacio PL2 = espacio PL0 + $(X_1 \geq 3)$

Los espacios PL1 y PL2 (figura 2.9) contienen los mismos puntos enteros factibles del problema original, es decir, son equivalentes a PL0.

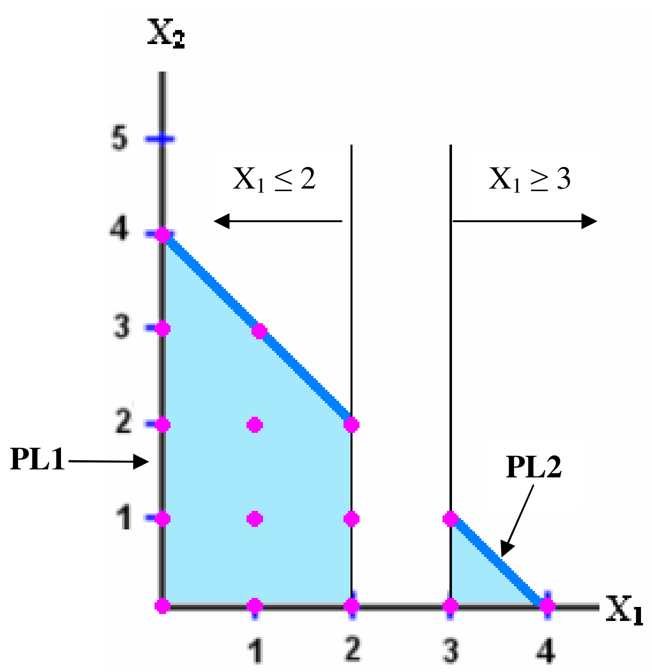

Fig 2.9 Espacios PL1 y PL2

Las restricciones $X_1 \leq 2$ y $X_1 \geq 3$ se excluyen mutuamente por lo que PL1 y PL2 se deben analizar como problemas lineales separados (figura 2.10).

Se analiza PL1 (asociada con $X_1 \leq 2$)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 3X_1 + 2X_2 \\ &\text{s.a } X_1 + X_2 \leq 4 \\ &\quad 7X_1 + 3X_2 \leq 21 \\ &\quad X_1 \leq 2 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

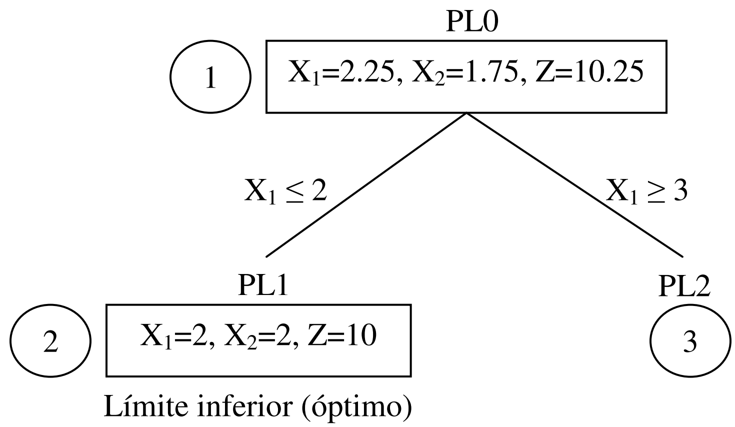

Fig 2.10 Espacios PL1 y PL2

La solución óptima de PL1 es $X_1=2$, $X_2=2$ y $Z=10$. Dicha solución satisface los requerimientos de enteros para X_1 y X_2. Se sondea PL1 porque no incluye ninguna solución mejor de PLE.

Se toma Z =10 como cota inferior y se examina PL2. Debido a que la solución óptima Z=10.25 en PL0 y a que todos los coeficientes de la función objetivo son enteros, es imposible que PL2 producirá una solución entera mejor. Como resultado descartamos PL2 y se concluye que se ha sondeado.

Una vez examinados PL1 y PL2 se concluye que la solución óptima del PLE es $X_1=2$, $X_2=2$ y Z=10.

Ejemplo: Una modista de alta costura desea realizar vestidos para novia. Tiene 487 metros de tela de organza y 322 metros de tela de satín. Para el modelo ilusión requiere 4 metros de organza y 5 metros de satín, para el modelo princesa utiliza 6 metros de organza y 3 de satín. El precio de venta del primer modelo es de $7000 y del segundo de $13000. Calcular el número de vestidos que debe confeccionar de cada modelo para maximizar los beneficios.

Sean las variables de decisión:

X_1 = Número de vestidos del modelo ilusión a confeccionar.

X_2 = Número de vestidos del modelo princesa a confeccionar.

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 7000X_1 + 13000X_2 \\ &\text{s.a } 4X_1 + 6X_2 \leq 487 \\ &\quad 5X_1 + 3X_2 \leq 322 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

La solución óptima es $X_1=1$ y $X_2=80$, esto es, confeccionar un vestido del modelo ilusión y 80 vestidos del modelo princesa con un beneficio máximo de \$1047000.

Capítulo 3. Explicación del Algoritmo Entero-Mixto de Gomory

3.1. Derivación del corte

Sea el problema de programación entera dado por:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n + d_1\, y_1 + d_2\, y_2 + ... + d_n\, y_n \\
&\text{s.a. } a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n + b_{i1}\, y_1 + b_{i2}\, y_2 + ... + b_{in}\, y_n \leq b_i \\
&\quad X, y \geq 0 \\
&\quad X \in \mathbb{R},\ y \in Z^+
\end{aligned}$$

La relajación de este problema es:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n + d_1\, y_1 + d_2\, y_2 + ... + d_n\, y_n \\
&\text{s.a. } a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n + b_{i1}\, y_1 + b_{i2}\, y_2 + ... + b_{in}\, y_n \leq b_i \\
&\quad X, y \geq 0 \\
&\quad X, y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Una restricción característica

$$a_{i1}\, X_1 + a_{i2}\, X_2 + \ldots + X_{n+i} = b_i$$

la cual se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^{n} (a^+_{ij} + a^-_{ij})X_j + X_{n+i} = \underbrace{(b_i - [b_i])}_{h} + [b_i]$$

donde

$[b_i]$ es el entero máximo no mayor que el número b_i.

$$a^+_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \text{ si } a_{ij} \geq 0 \\ 0 \text{ si } a_{ij} < 0 \end{cases} \qquad a^-_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{ij} \geq 0 \\ a_{ij} \text{ si } a_{ij} < 0 \end{cases}$$

Se supone que X_{n+i} es una variable entera, pero b_i no lo es. Al convertir

$$\mathbf{h} = b_i - [b_i]$$

$$\mathbf{z} = [b_i]$$

sustituyendo en la restricción que se reescribió

$$\sum_{j=1}^{n} (a^+_{ij} + a^-_{ij})X_j + X_{n+i} = h + [b_i]$$

Se tiene entonces que si la parte izquierda de esta restricción es *positiva*, sería equivalente a h, h+1, h+2, … y cumpliría con:

$$\sum_{j=1}^{n} (a^+_{ij} + a^-_{ij})X_j \geq h$$

porque se eliminaron tanto cantidades enteras de ambos lados como $X_{n+i} \leq Z = [b_i]$.

Así pues, se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} a^+_{ij} X_j \geq \sum_{j=1}^{n} (a^+_{ij} + a^-_{ij})X_j$$

por lo que

$$\sum_{j=1}^{n} a^+_{ij} X_j \geq h \qquad (1)$$

Por otro lado, si la parte izquierda de la restricción que se reescribió es *negativa*, esta será igual a -1+h, -2+h, …y cumpliría con:

$$\sum_{j=1}^{n} (a^{+}_{ij} + a^{-}_{ij})X_j \leq -1 + h$$

Sin embargo:

$$\sum_{j=1}^{n} (a^{-}_{ij})X_j \leq \sum_{j=1}^{n} (a^{+}_{ij} + a^{-}_{ij})X_j$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} (a^{-}_{ij})X_j \leq -1 + h$$

Después al dividir la última expresión entre (h-1), que es negativo, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(a^{-}_{ij})X_j}{h-1} \geq 1$$

Al multiplicar por h:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{h\,(a^{-}_{ij})X_j}{h-1} \geq h$$

O bien:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{h\,(-a^{-}_{ij})X_j}{1-h} \geq h \qquad (2)$$

Resumiendo (1) y (2) se llega a:

$$\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{(1-h)} (-a^{-}_{ij}) X_j \geq h \qquad (3)$$

Esta última expresión forma un corte. Pero para darle mayor validez se tomará en consideración que algunas variables en la restricción diferentes de X_{n+i}, pueden ser enteras y se quiere que los coeficientes de dichas variables enteras diferentes de X_{n+i}, sean lo más pequeños posibles.

El coeficiente a^{+}_{ij} de menor tamaño en (1) es $(a_{ij} - [a_{ij}])$, mientras que el coeficiente a^{-}_{ij} de mayor tamaño que se puede tener en (2) es $(1 - a_{ij} + [a_{ij}])$.

En consecuencia, el corte (3) será más efectivo si:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} (-a^{-}_{ij}) X_j}_{\text{Para variables no enteras}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}]) X_j}_{\substack{\text{Para variables} \\ \text{enteras con} \\ (a_{ij} - [a_{ij}]) \leq h}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} (1 - a_{ij} + [a_{ij}]) X_j}_{\substack{\text{Para variables enteras} \\ \text{con } (a_{ij} - [a_{ij}]) > h}} \geq h$$

3.2. Procedimiento del Algoritmo Entero-Mixto de Gomory

Este algoritmo se utiliza para resolver problemas enteros-mixtos. El algoritmo comienza en la solución óptima continua de la programación lineal y modifica el área de solución añadiendo cortes. El corte se realiza a partir de los componentes fraccionales de los coeficientes del renglón fuente. La variable básica del renglón fuente es no entera.

El corte mixto sólo acepta que un subconjunto de variables tome valores enteros, mientras que el resto de las variables siguen siendo continuas. En seguida se mencionan los pasos a seguir para la aplicación de este algoritmo.

1. Se resuelve el problema entero mixto como un problema lineal, sin considerar por el momento las condiciones enteras.
2. Si en el resultado óptimo del paso 1 ó 4 las variables que tienen que ser enteras lo son, se detiene el algoritmo. Se ha llegado al resultado óptimo del problema original. De otra forma se continúa con el paso 3.
3. Se selecciona el mayor X_{Bi} para generar un corte de la siguiente forma:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h}(-a^{-}_{ij}) X_j}_{\text{Para variables no enteras}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}]) X_j}_{\substack{\text{Para variables} \\ \text{enteras con} \\ (a_{ij} - [a_{ij}]) \le h}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h}(1 - a_{ij} + [a_{ij}]) X_j}_{\substack{\text{Para variables enteras} \\ \text{con } (a_{ij} - [a_{ij}]) > h}} \ge h$$

4. Se añade este corte como una restricción adicional junto con una variable de exceso. Se resuelve por el método dual simplex y se regresa al paso 2.

3.3. Ejemplos

Ejemplo 1. En el cual el resultado óptimo del problema, sin considerar las restricciones enteras, es entero.

$$\text{Max } z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\text{s.a } X_2 + X_3 = 30$$
$$X_1 + X_2 + X_4 = 50$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras}$$
$$X_3, X_4 \geq 0 \text{ continuas}$$

Paso 1. Resolver sin tomar en cuenta las condiciones enteras.

$$-2X_1 - 3X_2 + z = 0$$

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Solución
X_3	0	$\boxed{1}$	1	0	30
X_4	1	1	0	1	50
z	-2	-3	0	0	0

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Solución
X_2	0	1	1	0	30
X_4	$\boxed{1}$	0	-1	1	20
z	-2	0	3	0	90

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	Solución
X_2	0	1	1	0	30
X_1	1	0	-1	1	20
z	0	0	1	2	130

Paso 2. Como el resultado óptimo es entero se detiene el algoritmo. Se ha llegado al resultado óptimo del problema original.

Variables enteras: $X_1 = 20$ y $X_2 = 30$

Max z = 130

Ejemplo 2. En el cual se usa el corte para variables no enteras.

$$\text{Max } z = X_1 + X_2$$
$$\text{s.a } 7X_1 - 4X_2 + X_3 = 7$$
$$-4X_1 + 7X_2 + X_4 = 7$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras}$$
$$X_3, X_4 \geq 0 \text{ continuas}$$

Paso 1. Resolver sin tomar en cuenta las condiciones enteras.

$$-X_1 - X_2 + z = 0$$

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_3	$\boxed{7}$	-4	1	0	7
X_4	-4	7	0	1	7
z	-1	-1	0	0	0

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_1	1	-4/7	1/7	0	1
X_4	0	$\boxed{33/7}$	4/7	1	11
z	0	-11/7	1/7	0	1

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_1	1	0	7/33	4/33	7/3
X_2	0	1	4/33	7/33	7/3
z	0	0	1/3	1/3	14/3

Paso 2. Como el resultado óptimo de $X_1=7/3$, $X_2=7/3$ no es entero se continúa.

Paso 3. Se selecciona el mayor X_{Bi} de $X_1=7/3$, $X_2=7/3$.

Se elige cualquiera porque tienen el mismo valor. Si elegimos $X_1=7/3$ se tiene:

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_1	1	0	7/33	4/33	7/3

=> $7/33\ X_3 + 4/33\ X_4 = 7/3$

$h = b_i - [b_i]$

$h = 7/3 - 2$

$\mathbf{h = 1/3}$

Como X_3 y X_4 son continuas y sus coeficientes mayores o iguales a cero, el corte se reduce a:

$$\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j \geq h$$

$$7/33\ X_3 + 4/33\ X_4 \geq 1/3$$

Esta es la restricción que se agregará a la tabla.

$$\boxed{-7/33\ X_3 - 4/33\ X_4 + X_5 = -1/33}$$

Paso 4. Se añade la restricción, se resuelve por el método dual simplex y se regresa al paso 2.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{Bi}
X_1	1	0	7/33	4/33	0	7/3
X_2	0	1	4/33	7/33	0	7/3
X_5	0	0	-7/33	-4/33	1	-1/3
z	0	0	1/3	1/3	0	14/3

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{Bi}
X_1	1	0	0	0	1	2
X_2	0	1	0	1/7	4/7	15/7
X_3	0	0	1	4/7	-33/7	11/7
z	0	0	0	1/7	11/7	29/7

Paso 2. El resultado óptimo es: X_1=2, X_2=15/7, X_3=11/7, Max z = 29/7. Como X_2 debe ser entera se continúa.

Paso 3. Se selecciona el mayor X_{Bi}, que en este caso corresponde al renglón de X_2 y aquí se genera el corte.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{Bi}
X_2	0	1	0	1/7	4/7	15/7

=> $1/7\ X_4 + 4/7\ X_5 = 15/7$

$h = b_i - [b_i]$

$h = 15/7 - 2$

$\mathbf{h = 1/7}$

Como X_4 y X_5 son continuas y sus coeficientes mayores o iguales a cero, el corte se reduce a:

$$\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j \geq h$$

$$1/7\, X_4 + 4/7\, X_5 \geq 1/7$$

Esta es la restricción que se agregará a la tabla.

$$\boxed{-1/7\, X_4 - 4/7\, X_5 + X_6 = -1/7}$$

Paso 4. Se añade la restricción, se resuelve por el método dual simplex y se regresa al paso 2.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Bi}
X_1	1	0	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	1/7	4/7	0	15/7
X_3	0	0	1	4/7	-33/7	0	11/7
X_6	0	0	0	-1/7	-4/7	1	-1/7
z	0	0	0	1/7	11/7	0	29/7

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{Bi}
X_1	1	0	0	0	1	0	2
X_2	0	1	0	0	0	1	2
X_3	0	0	1	0	-7	4	1
X_4	0	0	0	1	4	-7	1
z	0	0	0	0	1	1	4

Paso 2: El resultado óptimo del paso anterior es entero, se detiene el algoritmo. Se ha llegado al resultado óptimo del problema original, el cual es:

Variables enteras: $X_1 = 2$ y $X_2 = 2$

Variables continuas: $X_3 = 1$ y $X_4 = 1$

Max z = 4

Ejemplo 3. En el cual se usa el corte para variables no enteras negativas y el corte para variables enteras $\leq$ h.

$$\text{Max } z = 3X_1 + 7X_2$$
$$\text{s.a } 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 15$$
$$X_1 + 4X_2 + X_4 = 10$$
$$X_1, X_3 \geq 0 \text{ enteras}$$
$$X_2, X_4 \geq 0 \text{ continuas}$$

Paso 1. Resolver sin tomar en cuenta las condiciones enteras.

$$-3X_1 - 7X_2 + z = 0$$

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_3	2	2	1	0	15
X_4	1	$\boxed{4}$	0	1	10
z	-3	-7	0	0	0

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_3	$\boxed{3/2}$	0	1	-1/2	10
X_2	1/4	1	0	1/4	5/2
z	-5/4	0	0	7/4	35/2

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_{Bi}**
X_1	1	0	2/3	-1/3	20/3
X_2	0	1	-1/6	1/3	5/6
z	0	0	5/6	4/3	155/6

Paso 2. Como el resultado óptimo de X_1=20/3, X_2=5/6 no es entero se continúa.

Paso 3. Se selecciona el mayor X_{Bi} que en este caso corresponde al renglón de X_1 y aquí se genera el corte.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_{Bi}**
X_1	1	0	2/3	-1/3	20/3

=> $2/3\ X_3 - 1/3\ X_4 = 20/3$

$h = b_i - [b_i]$

$h = 20/3 - 6$

$\mathbf{h = 2/3}$

Como X_3 debe ser entera y X_4 es continua, el corte se reduce a:

$a_{ij} = 2/3$

$(a_{ij} – [a_{ij}])$

$(2/3 – [2/3]) = (2/3 – [0]) = 2/3 \leq h$

$$\underbrace{\frac{2}{3}\,X_3}_{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])\,X_j} + \underbrace{\frac{2/3}{1-2/3}\left(-\left[\frac{-1}{3}\right]\right)X_4}_{\sum_{j=1}^{n} (-\bar{a}_{ij})\,X_j} \geq \frac{2}{3}$$

$$2/3\ X_3 + 2/3\ X_4 \geq 2/3$$

Esta es la restricción que se agregará a la tabla.

$$\boxed{-2/3\ X_3 - 2/3\ X_4 + X_5 = -2/3}$$

Paso 4. Se añade la restricción, se resuelve por el método dual simplex y se regresa al paso 2.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{Bi}
X_1	1	0	2/3	-1/3	0	20/3
X_2	0	1	-1/6	1/3	0	5/6
X_5	0	0	-2/3	-2/3	1	-2/3
z	0	0	5/6	4/3	0	155/6

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_{Bi}
X_1	1	0	0	-1	1	6
X_2	0	1	0	1/2	-1/4	1
X_3	0	0	1	1	-3/2	1
z	0	0	0	1/2	5/4	25

Paso 2: El resultado óptimo del paso anterior es entero, se detiene el algoritmo. Se ha llegado al resultado óptimo del problema original, el cual es:

Variables enteras: $X_1 = 6$ y $X_3 = 1$
Variables continuas: $X_2 = 1$ y $X_4 = 0$
Max z = 25

Ejemplo 4. En el cual se usa el corte para variables enteras > h.

$$\text{Max } z = 3X_1 + 7X_2$$
$$\text{s.a } 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 9$$
$$X_1 + 3X_2 + X_4 = 11$$
$$X_2, X_3 \geq 0 \text{ entera}$$
$$X_1, X_4 \geq 0 \text{ continuas}$$

Paso 1. Resolver sin tomar en cuenta las condiciones enteras.

$$-3X_1 - 7X_2 + z = 0$$

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_3	2	2	1	0	9
X_4	1	3	0	1	11
z	-3	-7	0	0	0

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_3	4/3	0	1	-2/3	5/3
X_2	1/3	1	0	1/3	11/3
z	-2/3	0	0	7/3	77/3

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_1	1	0	3/4	-1/2	5/4
X_2	0	1	-1/4	1/2	39/12
z	0	0	1/2	2	159/6

Paso 2. Como el resultado óptimo de X_1=39/12, X_2=5/4 no es entero se continúa.

Paso 3. Se selecciona el mayor X_{Bi}.

Base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_{Bi}
X_2	0	1	-1/4	1/2	39/12

=> $-1/4X_3 + 1/2\ X_4 = 39/12$

$$h = b_i - [b_i]$$

$$h = 39/12 - 3$$

$$\mathbf{h = 1/4}$$

Como X_3 debe ser entera y X_4 es continua, el corte se reduce a:

$$a_{ij} = -1/4$$

$$(a_{ij} – [a_{ij}])$$

$$(-1/4 – [-1/4]) = (-1/4 – [-1]) = 3/4 > h$$

$$\underbrace{\frac{1/4}{1 – 1/4}\left(1 – (-1/4) + [-1/4]\right) X_3}_{\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h}\left(1 - a_{ij} + [a_{ij}]\right) X_j} + \underbrace{\frac{1}{2}\ X_4}_{\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij}\, X_j} \geq \frac{1}{4}\ \geq h$$

$$1/3\ (1/4)\ X_3 + 1/2\ X_4 \geq 1/4$$

$$1/12\ X_3 + 1/2\ X_4 \geq 1/4$$

Esta es la restricción que se agregará a la tabla.

$$\boxed{-1/12\ X_3 - 1/2\ X_4 + X_5 = -1/4}$$

Paso 4. Se añade la restricción, se resuelve por el método dual simplex y se regresa al paso 2.

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_{Bi}**
X_1	1	0	3/4	-1/2	0	5/4
X_2	0	1	-1/4	1/2	0	39/12
X_5	0	0	-1/12	-1/2	1	-1/4
z	0	0	1/2	2	0	159/6

Base	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_{Bi}**
X_1	1	0	5/6	0	-1	3/2
X_2	0	1	-1/3	0	1	3
X_5	0	0	1/6	1	-2	1/2
z	0	0	1/6	0	4	51/2

Paso 2. El resultado óptimo es: $X_1=3/2$, $X_2=3$, $X_5=1/2$, Max z = 51/2. El valor de X_2 es entero, se detiene el algoritmo. Se ha llegado al resultado óptimo del problema original.

Variables enteras: $X_2 = 3$

Variables continuas: $X_1 = 3/2$, $X_5 = 1/2$

Max z = 51/2

Ejemplo: Los 250 integrantes de una compañía teatral darán una función en el estado de Guerrero. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 15 camionetas con 17 plazas y 5 autobuses con 41 lugares, pero solamente hay 8 conductores disponibles ese día. El alquiler de cada camioneta es de $800 y el de cada autobús es de $1200. Determinar el número de camionetas y autobuses que convendrá alquilar para transportar a la compañía teatral.

Sean las variables de decisión:

X_1 = Número de camionetas a alquilar.

X_2 = Número de autobuses a alquilar.

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = 800X_1 + 1200X_2 \\ &\text{s.a } X_1 \leq 8 \\ &\quad X_2 \leq 8 \\ &\quad 17X_1 + 41X_2 \geq 250 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

La solución óptima es X_1=0 y X_2=7, esto es, alquilar 7 autobuses con un gasto total de $8400.

3.4. Comparación entre el Algoritmo de Gomory y Bifurcación y Acotamiento

En esta sección se hará el análisis de un problema que fue resuelto por ambos métodos.

Se tiene el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 7X_1 + 9X_2 \\ &\text{s.a } -X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ &\quad 7X_1 + X_2 \leq 35 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \text{ enteras} \end{aligned}$$

	Gomory	Bifurcación y acotamiento
Número de iteraciones (Cantidad de trabajo empleado)	3	2
Funcionamiento correcto	☺	☺
Simplicidad	☺	☺
Memoria usada	☺	☺

Donde:

☺ cumple con la característica.

Capítulo 4. Aplicación del algoritmo Entero-Mixto de Gomory

En esta sección se analizan dos problemas siguiendo el algoritmo Entero-Mixto de Gomory.

4.1 Ejemplo de puertas, molduras y cortineros

4.1.1 Observación

Una empresa se dedica a la fabricación de los siguientes artículos: puerta de tablero, puerta de persiana, puerta de cocina, molduras para marcos y cortineros.

4.1.2 Definición del problema

Dicha empresa desea maximizar la utilidad semanal y para conseguirla debe establecer la cantidad de unidades a fabricar de cada producto, bajo las siguientes restricciones:

1) Las unidades a producir son enteros y mayor o igual a cero.

2) El máximo de horas destinadas a la semana para cada proceso son:
   a) Selección de la madera hasta 13 horas.
   b) Cepillado hasta 16 horas.
   c) Cortes hasta 30 horas.
   d) Moldureado o fresado hasta 36 horas.
   e) Ensamblado hasta 33 horas.
   f) Lijado hasta 45 horas.
   g) Supervisión hasta 7 horas.

3) La utilidad de cada artículo es:
   a) Puerta de tablero $200
   b) Puerta de persiana $90
   c) Puerta de cocina $45
   d) Molduras para marcos (100 piezas) $220
   e) Cortineros (50 pares) $350

4) El máximo de unidades a producir de cada artículo a la semana son:
   a) Puerta de tablero hasta 8 unidades.
   b) Puerta de persiana hasta 20 unidades.
   c) Puerta de cocina hasta 25 unidades.
   d) Molduras para marcos hasta 6 paquetes de 100 piezas cada uno.
   e) Cortineros hasta 3 paquetes de 50 pares cada uno.

5) El tiempo de fabricación de cada producto en minutos es:

	Puerta de tablero	Puerta de persiana	Puerta de cocina	Molduras para marcos (100 piezas)	Cortineros (50 pares)
Selección de la madera	15	18	3	60	9
Cepillado	30	30	10	60	9
Cortes	90	30	10	70	110
Moldureado	120	45	20	55	50
Ensamblado	60	15	15	0	200
Lijado	30	10	5	100	250
Supervisión	3	5	3	15	30

4.1.3 Construcción del modelo

Sean las variables de decisión:

X_1 = Número de puertas de tablero a fabricar

X_2 = Número de puertas de persiana a fabricar

X_3 = Número de puertas de cocina a fabricar

X_4 = Número de paquetes de 100 piezas de molduras para marcos a fabricar

X_5 = Número de paquetes de 50 pares de cortijeros a fabricar

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 200X_1 + 90X_2 + 45X_3 + 220X_4 + 350X_5 \\
&\text{s.a } 15X_1 + 18X_2 + 3X_3 + 60X_4 + 9X_5 \leq 780 \\
&\quad 30X_1 + 30X_2 + 10X_3 + 60X_4 + 9X_5 \leq 960 \\
&\quad 90X_1 + 30X_2 + 10X_3 + 70X_4 + 110X_5 \leq 1800 \\
&\quad 120X_1 + 45X_2 + 20X_3 + 55X_4 + 50X_5 \leq 2160 \\
&\quad 60X_1 + 15X_2 + 15X_3 + 200X_5 \leq 1980 \\
&\quad 30X_1 + 10X_2 + 5X_3 + 100X_4 + 250X_5 \leq 2700 \\
&\quad 3X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 15X_4 + 30X_5 \leq 420 \\
&\quad X_1 \leq 8 \\
&\quad X_2 \leq 20 \\
&\quad X_3 \leq 25 \\
&\quad X_4 \leq 6 \\
&\quad X_5 \leq 3 \\
&\quad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \text{ entera}
\end{aligned}
$$

4.1.4 Solución del modelo

Paso 1: Aplicar el Método Simplex

Convertir las desigualdades en igualdades.

$15X_1 + 18X_2 + 3X_3 + 60X_4 + 9X_5 + X_6 = 780$

$30X_1 + 30X_2 + 10X_3 + 60X_4 + 9X_5 + X_7 = 960$

$90X_1 + 30X_2 + 10X_3 + 70X_4 + 110X_5 + X_8 = 1800$

$120X_1 + 45X_2 + 20X_3 + 55X_4 + 50X_5 + X_9 = 2160$

$60X_1 + 15X_2 + 15X_3 + 200X_5 + X_{10} = 1980$

$30X_1 + 10X_2 + 5X_3 + 100X_4 + 250X_5 + X_{11} = 2700$

$3X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 15X_4 + 30X_5 + X_{12} = 420$

$X_1 + X_{13} = 8$

$X_2 + X_{14} = 20$

$X_3 + X_{15} = 25$

$X_4 + X_{16} = 6$

$X_5 + X_{17} = 3$

Donde:

$\mathbf{X_6}$ = Minutos sobrantes del proceso de selección de la madera

$\mathbf{X_7}$ = Minutos sobrantes del proceso de cepillado

$\mathbf{X_8}$ = Minutos sobrantes del proceso de cortes

$\mathbf{X_9}$ = Minutos sobrantes del proceso de moldureado

$\mathbf{X_{10}}$ = Minutos sobrantes del proceso de ensamblado

$\mathbf{X_{11}}$ = Minutos sobrantes del proceso de lijado

$\mathbf{X_{12}}$ = Minutos sobrantes del proceso de supervisión

Igualar la función objetivo a cero.

$$z - 200X_1 - 90X_2 - 45X_3 - 220X_4 - 350X_5 = 0$$

Formular la tabla inicial simplex.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	
X_6	15	18	3	60	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	780
X_7	30	30	10	60	9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	960
X_8	90	30	10	70	110	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1800
X_9	120	45	20	55	50	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2160
X_{10}	60	15	15	0	200	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1980
X_{11}	30	10	5	100	250	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2700
X_{12}	3	5	3	15	30	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	420
X_{13}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8
X_{14}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20
X_{15}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25
X_{16}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6
X_{17}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
z	-200	-90	-45	-220	-350	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Al utilizar el programa TORA se obtiene el siguiente resultado:

X_1 = **7.95**

X_2 = **2.8167**

X_3 = **25**

X_4 = **6**

X_5 = **3**

Con z = **5338.5**

Paso 2: Como el resultado óptimo no es entero se continúa.

Paso 3: Se selecciona el renglón con la parte fraccionaria mayor para generar un corte.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	
X_1	1	0	0	0	0	0	-0.02	0.02	0	0	0	0	0	0	0	-0.17	-1.68	7.95

h = 0.95

El corte que se realiza es de la forma:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} (-a^{-}_{ij}) X_j}_{\text{Para variables no enteras}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}]) X_j}_{\text{Para variables enteras con } (a_{ij} - [a_{ij}]) \leq h} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h} (1 - a_{ij} + [a_{ij}]) X_j}_{\text{Para variables enteras con } (a_{ij} - [a_{ij}]) > h} \geq h$$

Entonces como X_7, X_8, X_{16}, X_{17} son variables no enteras el corte queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{-0.38\ X_7 - 0.02\ X_8 - 3.23\ X_{16} - 31.92\ X_{17} + X_{18} = -0.95}$$

Paso 4. Se añade la restricción y se resuelve por el método dual simplex.

Este algoritmo se continúa hasta conseguir que X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 sean enteras.

Utilizando el programa TORA la solución que se encontró para este problema fue:

$X_1 = \mathbf{8}$

$X_2 = \mathbf{3}$

$X_3 = \mathbf{24}$ $\quad z = \mathbf{5320}$

$X_4 = \mathbf{6}$

$X_5 = \mathbf{3}$

4.1.5 Implantación

En consecuencia la solución factible para el problema es:

Fabricar semanalmente **8** puertas de tablero, **3** puertas de persiana, **24** puertas de cocina, **6** paquetes de 100 piezas de molduras para marcos y **3** paquetes de 50 pares de cortineros. Y de esta manera se obtiene una utilidad máxima semanal de $**5320.**

4.2 Ejemplo de los productos enlatados

4.2.1 Observación

Una empresa está dedicada a la elaboración de los siguientes productos enlatados: duraznos en almíbar, piñas en almíbar, peras en almíbar, trocitos de piña en almíbar, guayabas en almíbar, coctel de frutas en almíbar, rebanadas de mango en almíbar, puré de tomate, frijoles enteros, frijoles refritos, rajas en escabeche, chile chipotle, chícharos y garbanzos.

4.2.2 Definición del problema

Dicha empresa desea maximizar la utilidad semanal y para alcanzarla debe establecer la cantidad de unidades a fabricar de cada producto, bajo las siguientes restricciones:

1) Las unidades a producir son enteros y mayor o igual a cero.

2) El máximo de horas destinadas a la semana para cada proceso son:
   a) Selección de los ingredientes hasta 250 horas.
   b) El proceso de preparación consta de cuatro etapas: limpiar hasta 200 horas, lavar hasta 100 horas, desinfectar hasta 250 horas y cortar hasta 150 horas.
   c) Tiempo de cocción hasta 1220 horas.
   d) Enlatado hasta 180 horas.
   e) Etiquetar y empacar hasta 50 horas.

3) La utilidad de cada artículo es:
   a) Duraznos en almíbar $5
   b) Piñas en almíbar $5.30
   c) Peras en almíbar $5.50
   d) Trocitos de piña en almíbar $5.70

e) Guayabas en almíbar $6

f) Coctel de frutas en almíbar $7.50

g) Rebanadas de mango en almíbar $7.20

h) Puré de tomate $4.80

i) Frijoles enteros $3.50

j) Frijoles refritos $3.50

k) Rajas en escabeche $1.20

l) Chile chipotle $1.20

m) Chícharos $1.50

n) Garbanzos $2

4) El máximo de unidades a producir de cada artículo semanalmente son:

a) Duraznos en almíbar hasta 900 unidades.

b) Piñas en almíbar hasta 850 unidades.

c) Peras en almíbar hasta 120 unidades.

d) Trocitos de piña en almíbar hasta 400 unidades.

e) Guayabas en almíbar hasta 100 unidades.

f) Coctel de frutas en almíbar hasta 100 unidades.

g) Rebanadas de mango en almíbar hasta 150 unidades.

h) Puré de tomate hasta 950 unidades.

i) Frijoles enteros hasta 320 unidades.

j) Frijoles refritos hasta 800 unidades.

k) Rajas en escabeche hasta 700 unidades.

l) Chile chipotle hasta 650 unidades.

m) Chícharos hasta 130 unidades.

n) Garbanzos hasta 50 unidades.

5) El tiempo de producción de cada producto en minutos es:

	Selec.	**Limpiar**	**Lavar**	**Desinfectar**	**Cortar**	**Cocción**	**Enlatado**	**Etiquetado y empacado**
Duraznos	1	3	2	10	2	6	3	2
Piñas	1	4	2	10	8	15	3	2
Peras	1	3	2	10	5	11	3	2
Trocitos	1	4	2	10	11	15	3	2
Guayaba	1	2	2	10	2	6	3	2
Coctel	5	15	2	10	6	9	3	2
Mango	1	3	2	10	3	9	3	2
Puré	1	1	2	10	0	14	3	2
F. enteros	1	7	2	0	0	37	3	2
F. refritos	1	7	2	0	0	40	3	2
Rajas	1	5	2	10	1	18	1	2
Chipotle	1	2	2	10	0	12	1	2
Chícharos	1	2	2	10	0	20	2	2
Garbanzos	1	0	2	0	0	39	3	2

4.2.3 Construcción del modelo

Sean las variables de decisión:

X_1 = Número de unidades a producir de duraznos en almíbar.

X_2 = Número de unidades a producir de piñas en almíbar.

X_3 = Número de unidades a producir de peras en almíbar.

X_4 = Número de unidades a producir de trocitos de piña en almíbar.

X_5 = Número de unidades a producir de guayabas en almíbar.

X_6 = Número de unidades a producir de coctel de frutas en almíbar.

X_7 = Número de unidades a producir de rebanadas de mango en almíbar.

X_8 = Número de unidades a producir de puré de tomate.

X_9 = Número de unidades a producir de frijoles enteros.

X_{10} = Número de unidades a producir de frijoles refritos.

X_{11} = Número de unidades a producir de rajas en escabeche.

X_{12} = Número de unidades a producir de chiles chipotles.

X_{13} = Número de unidades a producir de chícharos.

X_{14} = Número de unidades a producir de garbanzos.

Max $z = 5X_1 + 5.30X_2 + 5.50X_3 + 5.70X_4 + 6X_5 + 7.50X_6 + 7.20X_7 + 4.80X_8 + 3.50X_9 + 3.50X_{10} + 1.20X_{11} + 1.20X_{12} + 1.50X_{13} + 2X_{14}$

s.a $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + 5X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 15000$

$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 2X_5 + 15X_6 + 3X_7 + X_8 + 7X_9 + 7X_{10} + 5X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} \leq 12000$

$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 + 2X_{10} + 2X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + 2X_{14} \leq 6000$

$10X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 10X_4 + 10X_5 + 10X_6 + 10X_7 + 10X_8 + 10X_{11} + 10X_{12} + 10X_{13} \leq 15000$

$2X_1 + 8X_2 + 5X_3 + 11X_4 + 2X_5 + 6X_6 + 3X_7 + X_{11} \leq 9000$

$6X_1 + 15X_2 + 11X_3 + 15X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 9X_7 + 14X_8 + 37X_9 + 40X_{10} + 18X_{11} + 12X_{12}$
$+ 20X_{13} + 39X_{14} \leq 73200$

$3X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 3X_6 + 3X_7 + 3X_8 + 3X_9 + 3X_{10} + X_{11} + X_{12} + 2X_{13}$
$+ 3X_{14} \leq 10800$

$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 + 2X_{10} + 2X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13}$
$+ 2X_{14} \leq 3000$

$X_1 \leq 900$

$X_2 \leq 850$

$X_3 \leq 120$

$X_4 \leq 400$

$X_5 \leq 100$

$X_6 \leq 100$

$X_7 \leq 150$

$X_8 \leq 950$

$X_9 \leq 320$

$X_{10} \leq 800$

$X_{11} \leq 700$

$X_{12} \leq 650$

$X_{13} \leq 130$

$X_{14} \leq 50$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14} \geq 0$ entera

4.2.4 Solución del modelo

Paso 1: Aplicar el Método Simplex

Convertir las desigualdades en igualdades.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + 5X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 15000$

$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 2X_5 + 15X_6 + 3X_7 + X_8 + 7X_9 + 7X_{10} + 5X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + X_{16} = 12000$

$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 + 2X_{10} + 2X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + 2X_{14} + X_{17} = 6000$

$10X_1 + 10X_2 + 10X_3 + 10X_4 + 10X_5 + 10X_6 + 10X_7 + 10X_8 + 10X_{11} + 10X_{12} + 10X_{13} + X_{18} = 15000$

$2X_1 + 8X_2 + 5X_3 + 11X_4 + 2X_5 + 6X_6 + 3X_7 + X_{11} + X_{19} = 9000$

$6X_1 + 15X_2 + 11X_3 + 15X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 9X_7 + 14X_8 + 37X_9 + 40X_{10} + 18X_{11} + 12X_{12} + 20X_{13} + 39X_{14} + X_{20} = 73200$

$3X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 3X_6 + 3X_7 + 3X_8 + 3X_9 + 3X_{10} + X_{11} + X_{12} + 2X_{13} + 3X_{14} + X_{21} = 10800$

$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 + 2X_8 + 2X_9 + 2X_{10} + 2X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + 2X_{14} + X_{22} = 3000$

$X_1 + X_{23} = 900$

$X_2 + X_{24} = 850$

$X_3 + X_{25} = 120$

$X_4 + X_{26} = 400$

$X_5 + X_{27} = 100$

$X_6 + X_{28} = 100$

$X_7 + X_{29} = 150$

$X_8 + X_{30} = 950$

$X_9 + X_{31} = 320$

$X_{10} + X_{32} = 800$

$X_{11} + X_{33} = 700$

$X_{12} + X_{34} = 650$

$X_{13} + X_{35} = 130$

$X_{14} + X_{36} = 50$

Donde:

$\mathbf{X_{15}}$ = Minutos sobrantes del proceso de selección de ingredientes

$\mathbf{X_{16}}$ = Minutos sobrantes del proceso de limpiar

$\mathbf{X_{17}}$ = Minutos sobrantes del proceso de lavar

$\mathbf{X_{18}}$ = Minutos sobrantes del proceso de desinfectar

$\mathbf{X_{19}}$ = Minutos sobrantes del proceso de cortar

$\mathbf{X_{20}}$ = Minutos sobrantes del proceso de tiempo de cocción

$\mathbf{X_{21}}$ = Minutos sobrantes del proceso de enlatado

$\mathbf{X_{22}}$ = Minutos sobrantes del proceso de etiquetar y empacar

Igualar la función objetivo a cero.

$$z - 5X_1 - 5.30X_2 - 5.50X_3 - 5.70X_4 - 6X_5 - 7.50X_6 - 7.20X_7 - 4.80X_8 - 3.50X_9 - 3.50X_{10} - 1.20X_{11} - 1.20X_{12} - 1.50X_{13} - 2X_{14} = 0$$

Formular la tabla inicial simplex.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}
X_{15}	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
X_{16}	3	4	3	4	2	15	3	1	7	7	5	2	2	0	0	1	0	0
X_{17}	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	1	0
X_{18}	10	10	10	10	10	10	10	10	0	0	10	10	10	0	0	0	0	1
X_{19}	2	8	5	11	2	6	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
X_{20}	6	15	11	15	6	9	9	14	37	40	18	12	20	39	0	0	0	0
X_{21}	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	2	3	0	0	0	0

	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}
X_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{19}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{20}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{21}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

X_{15}	15000
X_{16}	12000
X_{17}	6000
X_{18}	15000
X_{19}	9000
X_{20}	73200
X_{21}	10800

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}
X_{22}	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
X_{23}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{24}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{25}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{26}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{27}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{28}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{29}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{30}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	
X_{22}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3000
X_{23}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	900
X_{24}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	850
X_{25}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	120
X_{26}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	400
X_{27}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
X_{28}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	100
X_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	150
X_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	950

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}
X_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
X_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
X_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
X_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
X_{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
X_{36}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z	-5	-5.30	-5.50	-5.70	-6	-7.50	-7.20	-4.80	-3.50	-3.50	-1.20	-1.20	-1.50

	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}
X_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
X_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{33}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{34}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{35}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{36}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	
X_{31}	0	0	0	0	0	320
X_{32}	1	0	0	0	0	800
X_{33}	0	1	0	0	0	700
X_{34}	0	0	1	0	0	650
X_{35}	0	0	0	1	0	130
X_{36}	0	0	0	0	1	50
z	0	0	0	0	0	0

Al utilizar el programa TORA se obtiene el siguiente resultado:

X_1 = **381.67**

X_2 = **248.33**

X_3 = **120**

X_4 = **400**

X_5 = **100**

X_6 = **100**

X_7 = **150**

X_8 = **0**

X_9 = **0**

X_{10} = **0**

X_{11} = **0**

X_{12} = **0**

X_{13} = **0**

X_{14} = **0**

Con z = **8594.50**

Paso 2: Como el resultado óptimo no es entero se continúa.

Paso 3: Se selecciona el renglón con la parte fraccionaria mayor para generar un corte.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
X_4	1	0	0	0	0	0	0	1.33	0	0	1.17	1.33	1.33	0	0	0	0	0.13	-0.17	0

	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	
X_4	0	0	0	0	-0.50	0.50	-1	-0.33	-0.83	0	0	0	0	0	0	0	381.67

h = 0.67

El corte que se realiza es de la forma:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ij} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h}(-a^{-}_{ij}) X_j}_{\text{Para variables no enteras}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}]) X_j}_{\text{Para variables enteras con } (a_{ij} - [a_{ij}]) \leq h} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{h}{1-h}(1 - a_{ij} + [a_{ij}]) X_j}_{\text{Para variables enteras con } (a_{ij} - [a_{ij}]) > h} \geq h$$

Como X_{18}, X_{19}, X_{25}, X_{26}, X_{27}, X_{28} y X_{29} son variables no enteras y como X_8, X_{11}, X_{12} y X_{13} son variables enteras con $(a_{ij} - [a_{ij}]) \leq h$ el corte queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{-0.33X_8 - 0.17X_{11} - 0.33X_{12} - 0.33X_{13} - 0.13X_{18} - 0.3451X_{19} - 1.015X_{25} - 0.5X_{26} - 2.03X_{27} - 0.6699X_{28} + X_{37} = -0.67}$$

Paso 4. Se añade la restricción y se resuelve por el método dual simplex.

Este algoritmo se continúa hasta conseguir que X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, $X_{10}X_{11}$, X_{12}, X_{13} y X_{14} sean enteras.

Utilizando el programa TORA la solución que se encontró para este problema fue:

$X_1 = \mathbf{381}$	$X_6 = \mathbf{100}$	$X_{11} = \mathbf{0}$	
$X_2 = \mathbf{249}$	$X_7 = \mathbf{150}$	$X_{12} = \mathbf{0}$	
$X_3 = \mathbf{120}$	$X_8 = \mathbf{1}$	$X_{13} = \mathbf{0}$	$z = \mathbf{8593.7998}$
$X_4 = \mathbf{399}$	$X_9 = \mathbf{0}$	$X_{14} = \mathbf{0}$	
$X_5 = \mathbf{100}$	$X_{10} = \mathbf{0}$		

4.2.5 Implantación

En consecuencia la solución factible para el problema es:

Producir semanalmente **381** latas de duraznos en almíbar, **249** latas de piñas en almíbar, **120** latas de peras en almíbar, **399** latas de trocitos de piña en almíbar, **100** latas de guayabas en almíbar, **100** latas de coctel de frutas en almíbar, **150** latas de rebanadas de mango y **1** lata de puré de tomate. Y de esta manera se obtiene una utilidad máxima semanal de $**8593.7998**.

Conclusiones

A través del presente trabajo de tesina se cumplieron los siguientes objetivos:

Se coordinaron y dirigieron actividades dentro de dos empresas con el fin de maximizar las ganancias.

Para la elaboración de este trabajo se realizaron investigaciones de campo, para: identificar las etapas por las que pasa cada producto hasta que es terminado, hacer un promedio del tiempo que se requiere para hacer cada producto, las unidades que se elaboraban semanalmente y la cantidad de artículos que se vendían.

Una aportación relevante de este trabajo fue el reunir información acerca de este algoritmo, ya que pocos libros abarcan este tema y son menos los que lo desarrollan. Esto se debe a que el avance que se ha tenido en el área computacional permite recurrir a métodos más efectivos.

Los métodos de planos de corte fueron quienes dieron origen a la programación entera. Dichos métodos permitieron el avance de la investigación de operaciones además de ser a los que más se recurren. Sin embargo en la práctica no resultan tan eficientes porque en cada iteración producen una restricción y una variable extra.

Estos métodos tienen la ventaja de ilustrar lo que ocurre en el espacio de solución. El algoritmo entero-mixto de Gomory además posee la ventaja de trabajar con variables enteras y continuas a la vez. El corte fraccional da por hecho que todas las variables son enteras, es decir, solamente abarca el problema entero puro.

Otros métodos que se utilizan para la resolución de los problemas de programación lineal entera mixta son: el Algoritmo de Balas (algoritmo aditivo), el Algoritmo de Land – Doig, Método de Benders y cortes Fenchel.

El éxito de la investigación de operaciones dependerá únicamente de la habilidad del equipo de trabajo para transformar el problema en un modelo matemático en un modelo que se asemeje a alguna técnica en específico.

Bibliografía

1. Bronson, R., 1989. “Teoría y problemas de investigación de operaciones”. Editorial Mc Graw Hill, México, 324 pp.

2. Buffa, E. y J. S. Dyer, 1983. “Ciencias de la Administración e Investigación de Operaciones. Formulación de Modelos y Métodos de Solución”, Editorial Limusa, México, pp 523-560.

3. Camacho, S., 1998. “Análisis de Algoritmos”. UNAM ENEP Acatlán, México, 510 pp.

4. Carter, M. y C. Price, 2001. “Operations Research. A Practical Introduction”. Editorial CRC press, USA, 394 pp.

5. Daellenbach, H., et al., 1990. “Introducción a las técnicas de Investigación de Operaciones”. Editorial Continental, México, 712 pp.

6. De la Fuente, J., 1998. “Técnicas de cálculo para sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera”. Editorial Reverté, España, 930 pp.

7. Greenberg, H., 1971. “Integer Programming”. Editorial Academia Press, United Kingdom, 200 pp.

8. Greiser, V. y V. Czitróm, 1978. “Introducción al análisis de sistemas”. Editorial Representaciones y Servicios de ingeniería, México, 300 pp.

9. Hillier, F. y G. J. Lieberman., 1997. “Introducción a la Investigación de Operaciones”. Editorial Mc Graw Hill. México, 1199 pp.

10. Jensen, P. y J. Bard, 2003. “Operations Research. Models and Methods”. Editorial John Wiley & Sons, USA, 780 pp.

11. Maroto, C., 1998. “Investigación operativa. Modelos, técnicas y software”. Editorial IPN, México, pág. 14.

12. Mital, K., 1984. “Métodos de optimización. En investigación de operaciones y análisis de sistemas”. Editorial Limusa, México, 320 pp.

13. Prawda, J. 1990. “Métodos y modelos de investigación de operaciones” Volumen I. Editorial Limusa, México, 936 pp.

14. Sánchez, L., 1990. “Apuntes de Investigación de Operaciones. Módulo I. La investigación de operaciones, un enfoque matemático en la administración de los recursos.” UNAM ENEP Acatlán, México, 22 pp.

15. Sánchez, L., 1990. “Apuntes de Investigación de Operaciones. Módulo II. Modelos de investigación de operaciones y formulación de modelos de programación lineal” UNAM ENEP Acatlán, México, 22 pp.

16. Shamblin, J. y G. T. Stevens, 1982. “Investigación de operaciones. Un enfoque fundamental”. Editorial Mc Graw Hill, México, 424 pp.

17. Taha, H., 1998. “Investigación de Operaciones. Una introducción”. Editorial Prentice Hall, México, 944 pp.

18. Taha, H., 1981. “Investigación de Operaciones. Una introducción”. Editorial Representaciones y servicios de ingeniería, México, 646 pp.

19. Taha, H., 1975. “Integer Programming. Theory, Applications and Computations”. Editorial Academic Press, USA, 380 pp.

20. Vegara, J., 1975. “Programación matemática y cálculo económico. Teoría y aplicaciones”. Editorial Vicens Vives, España, 380 pp.

21. Winston, W., 2004. “Investigación de Operaciones. Aplicaciones y algoritmos”. Editorial Thomson, USA, 1418 pp.