



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**Instituto de Geofísica
Posgrado en Ciencias de la Tierra**

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS CON FUNCIONES ÓPTIMAS

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA TIERRA**

PRESENTA

ERNESTO RUBIO ACOSTA

DIRECTOR: DR. ISMAEL HERRERA REVILLA

MÉXICO, D.F.

FEBRERO DE 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A Ismael, mi estimado maestro.

Porque me despertó el gusto por las matemáticas aplicadas, claras, sencillas, y precisas.

A Gerardo, mi entrañable amigo *psico-border*.

Porque hay cosas que solamente te las cuento a ti.

A Benito, mi apreciado guía *psico-nauta*.

Porque creo que esas reflexiones tiene que ver directamente con los budas.

A Nora Isabel, mi amiga Chela. Siempre tan oscura y tan fría.

Porque *"if you never try it, you will[®] never know it ..."*.

A mi familia: ex, papá, mamá -q.e.p.d.-, hermanas y sobrinos.

Especialmente a mis sobrinos nietos Miguel Angel, Emilio Alejandro y Sofía Michelle,

muy ocupados en jugar y en aprender nuevas letras, números y palabras.

Deseo que nunca dejen de jugar ni de aprender

y también deseo que la vida nunca los deje de maravillar.

"Busca por el agrado de buscar, no por el agrado de encontrar".

"Evangelios Apócrifos" de Jorge Luis Borges.

Según Yop[©], metáfora de lo que es un doctorado; incluso, de lo que es la vida misma.

Deseo que este trabajo sirva como un texto para futuros estudiantes, su propósito último.

[®] "Si nunca lo intentas, nunca lo sabrás ..."

Y es que casi al final, ya casi nada importa.

Entonces, ¿qué sí importa?

Sin embargo, el mar es basto y bello;

verde esmeralda,

azul turquesa

y negro impenetrable;

tranquilo y violento;

furioso y apacible.

En fin, así es.

Epílogo.

Es mucha mi obsesión.

Quisiera convencerme a mí mismo de que ésta es la versión final de mi tesis.

Pero no puedo.

Creo que tan sólo es la última impresión de la eterna versión preliminar.

Es que se me agotó el tiempo de mis estudios de doctorado.

Y creo que me quedan muchas cosas por entender, por desarrollar y por proponer.

Así que tendré que continuar este trabajo pero en otras modalidades.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, por su apoyo decidido, generoso y desinteresado durante mis estudios de doctorado -y desde luego en muchas otras ocasiones- a través de sus múltiples instancias.

Al Programa de Apoyos para la Superación del Personal Académico, PASPA, que disfrute de febrero de 2004 a agosto de 2006, el cual es administrado por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, DGAPA.

Al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, IIMAS, lugar donde laboro. Particularmente a su anterior director Dr. Federico O'Really Tognio, así como a su actual director Dr. Fabián García Nocetti y a su secretario académico Dr. Julio Solano González. También al ayudante técnico Edgar y a las secretarías Esperanza, Julia y Clara pertenecientes a la dirección, así como a las secretarías Rosy y Laura pertenecientes al departamento ISCA, por su ayuda en la realización de trámites administrativos.

Al Posgrado en Ciencias de la Tierra, lugar donde estudié el Doctorado en Ciencias de la Tierra. Particularmente a las secretarías Mónica y Araceli por su ayuda en la realización de trámites académicos.

Al Instituto de Geofísica, sede del Posgrado en Ciencias de la Tierra. Particularmente al Dr. Ismael Herrera Revilla, tutor de mi doctorado y director de esta tesis. También a su secretaria Sandra por su ayuda en la realización de trámites académicos.

A mi Comité Tutorial integrado por: Dr. Ismael Herrera Revilla, Dr. Fabián García Nocetti y Dr. Martín Díaz Viera.

Al jurado del examen de grado integrado por: Dr. Fabián García Nocetti, Dr. Francisco Sánchez Sesma, Dr. Arón Jazcilevich, Dr. Pedro González Casanova, Dr. Ismael Herrera Revilla, Dr. Vladimir Tchijov y Dr. Martín Díaz Viera.

Nuevamente, a mis muy estimados maestros Dr. Ismael Herrera Revilla, Dr. Martín Díaz Viera y Dr. Robert Yates. Sin ustedes esta tesis no se habría podido realizar. A los dos últimos los considero co-tutores de mi doctorado y co-directores de esta tesis.

A mi compañero de doctorado Guillermo Hernández García.

Indice General

Portada	1
Dedicatorias	3
Agradecimientos.....	5
Índice.....	7
1.- Introducción	13
2.- Notación y Antecedentes.....	23
3.- Funciones Óptimas	61
4.- Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas: FEM-OF	87
5.- FEM-OF: EDP Elíptica de 2º Orden	99
6.- Resultados Caso Simétrico	123
7.- Resultados Caso No Simétrico	151
8.- Análisis del Error	175
9.- Conclusiones	185
Bibliografía	195
Anexo A.- Implementación de Funciones Óptimas en 2 Dimensiones.....	205
Anexo B.- Otros Ejemplos con FEM-OF Petrov-Galerkin.....	227

Índice Detallado

1.- Introducción	13
1.1.- Generalidades de la Metodología TH	
1.2.- Generalidades de FEM con Funciones Óptimas	
2.- Antecedentes.....	23
2.1.- Notación	
2.2.-Fórmulas de Green-Herrera	
2.2.1.- Operador Diferencial Adjunto Formal	
2.2.2.- Fórmulas de Green	
2.2.3.- Fórmulas de Green-Herrera	
2.2.4.- Operadores Valuados en Funcionales	
2.3.- Problemas de Contorno con Saltos Prescritos	
2.3.1.- Problemas de Contorno con Saltos Prescritos (BVPJ)	
2.3.2.- Método de Residuos Pesados	
2.3.3.- Condiciones de Poincaré-Steklov	
2.4.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera	
2.4.1.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera	
2.4.2.- Interpolación Óptima	
2.5.- Método Directo de Steklov-Poincaré	
3.- Funciones Óptimas	61
3.1.- Funciones Óptimas	
3.1.1.- Descomposición Dual de Operadores K y J	

-
- 3.1.2.- BVPJ Localizado
 - 3.1.3.- Funciones Óptimas de Base
 - 3.1.4.- Funciones Óptimas de Peso
 - 3.1.5.- Espacio de Funciones Óptimas
 - 3.1.6.- Función auxiliar u_p
 - 3.1.7.- Relación entre los Operadores S_K y S_J
 - 3.2.- Formulaciones Débiles
 - 3.2.1.- Problema General
 - 3.2.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré
 - 3.2.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera
 - 3.2.4.- Método de Petrov-Galerkin
 - 3.3.- Formulaciones Débiles Alternativas
 - 3.3.1.- Problema Básico
 - 3.3.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré
 - 3.3.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera
 - 3.3.4.- Método de Petrov-Galerkin
 - 4.- Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas: FEM-OF.....87
 - 4.1.- FEM con Funciones Óptimas (FEM-OF)
 - 4.2.- FEM-OF Steklov-Poincaré
 - 4.2.1.- Objetivo
 - 4.2.2.- Implementación
 - 4.3.- FEM-OF Trefftz-Herrera
 - 4.3.1.- Objetivo
 - 4.3.2.- Implementación
 - 4.4.- FEM-OF Petrov-Galerkin
 - 4.4.1.- Objetivo
 - 4.4.2.- Implementación
 - 4.5.- FEM-OF para el Caso Simétrico

5.- FEM-OF: EDP Elíptica de 2º Orden	99
5.1.- Operador Diferencial Elíptico	
5.1.1.- Operador Diferencial	
5.1.2.- Operador Diferencial Adjunto	
5.1.3.- Funcional Bilineal $\mathcal{P}(u, w)$	
5.1.4.- Funcional Bilineal $\mathcal{Z}^*(u, w)$	
5.1.5.- Funcional Bilineal $\underline{\mathcal{Q}}(u, w)$	
5.1.6.- Funcionales Bilineales $\mathcal{C}^*(u, w)$ y $\mathcal{B}(u, w)$	
5.1.7.- Funcional Bilineal $\mathcal{J}(u, w)$	
5.1.8.- Funcional Bilineal $\mathcal{K}^*(u, w)$	
5.1.9.- Identidad $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$	
5.2.- Problema Básico	
5.3.- Funciones Óptimas	
5.3.1.- Funciones Óptimas de Base	
5.3.2.- Funciones Óptimas de Peso	
5.3.3.- Función auxiliar u_p	
5.3.4.- Identidad $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$ para Funciones Óptimas	
5.4.- FEM-OF Steklov-Poincaré	
5.5.- FEM-OF Trefftz-Herrera	
5.6.- FEM-OF Petrov-Galerkin	
5.7.- FEM-OF para el Caso Simétrico	
6.- Resultados Caso Simétrico	123
6.1.- Caso Simétrico	
6.2.- Convergencia h de Error	
6.3.- Resultados en 1 Dimensión	
6.3.1.- Aproximación Cuadrática con FEM	
6.3.2.- Aproximación Cúbica con FEM	
6.3.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación	

6.3.4.- Aproximación Cúbica con Colocación	
6.3.5.- Análisis de Resultados	
6.4.- Resultados en 2 Dimensiones	
6.4.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM	
6.4.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación	
6.4.3.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k , con FEM	
6.4.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k , con Colocación	
6.4.5.- Análisis de Resultados	
6.5.- Resultados en 3 Dimensiones	
6.5.1.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_l con FEM	
6.5.2.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_l con FEM	
6.5.3.- Análisis de Resultados	
7.- Resultados Caso No Simétrico	151
7.1.- Caso No Simétrico	
7.2.- Resultados en 1 Dimensión	
7.2.1.- Aproximación Cuadrática con FEM	
7.2.2.- Aproximación Cúbica con FEM	
7.2.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación	
7.2.4.- Aproximación Cúbica con Colocación	
7.2.5.- Casos con Advección Dominante	
7.2.6.- Análisis de Resultados	
7.3.- Resultados en 2 Dimensiones	
7.3.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM	
7.3.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación	
7.3.3.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con FEM	
7.3.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con Colocación	
7.3.5.- Casos con Advección Dominante	
7.3.6.- Análisis de Resultados	

8.- Análisis del error	175
9.- Conclusiones	185
9.1.- Conclusiones	
9.2.- Trabajo Futuro	
Bibliografía	195
Anexo A.- Implementación de Funciones Óptimas en 2 Dimensiones.....	205
A.1.- Aproximación de la Función u_p	
A.2.- Aproximación de las Funciones Óptimas de Base	
A.3.- Aproximación de las Funciones Óptimas de Peso	
Anexo B.- Otros Ejemplos con FEM-OF Petrov-Galerkin.....	227
B.1.- Problemas en 1 Dimensión	
B.2.- Problemas en 2 Dimensiones	

Capítulo 1:

Introducción

Indice:

- 1.1.- Generalidades de la Metodología TH
- 1.2.- Generalidades de FEM Funciones Óptimas

1.1- Generalidades de la Metodología TH

Una teoría *general* de Métodos de Elementos Finitos (**FEM**¹) se debería formular utilizando funciones de base y de peso discontinuas definidas por tramos, de modo que éstas puedan ser *totalmente* discontinuas a través de las fronteras interiores que separan los elementos de la partición de un dominio [11].

Cuando se formula un problema de contorno en un espacio de *funciones discontinuas definidas por tramos*, los problemas bien planteados consisten en *problemas de contorno con saltos prescritos* acompañados de *condiciones de frontera* y, además, de *condiciones de saltos prescritos* a través de las fronteras interiores de la partición de un dominio, que sean adecuadas.

Previamente, Herrera ha desarrollado una *teoría algebraica para Métodos de Frontera*² [27] de una gran generalidad, fundamento de una metodología de descomposición de dominio que se ha llamado *metodología-TH*, la cual se utiliza para resolver *ecuaciones* diferenciales parciales lineales en espacios lineales de funciones discontinuas definidas por tramos y que también se puede aplicar a *sistemas* de tales ecuaciones. Uno de sus principales resultados es una generalización de las fórmulas de Green, adecuadas para trabajar en dichos espacios, a las cuales se les ha llamado *fórmulas de Green-Herrera* [1 a 3]. Estas últimas permiten formular un problema de contorno con saltos prescritos de dos maneras: una *formulación débil en*

¹ *Finite Element Methods*

² *Boundary methods*

términos de los datos del problema y otra *formulación débil en términos de la información complementaria*.

De hecho, la *metodología-TH* constituye una forma sistemática de plantear la *descomposición de dominio* pero entendida en un sentido *amplio*. La connotación actual en la literatura es dividir un problema global en varios problemas locales para aplicar computación en paralelo. Sin embargo, la connotación en un *sentido amplio* se refiere a una forma sistemática de introducir una partición, de modo que se pueda definir funciones en cada uno de sus elementos independientemente, generando así un espacio lineal de funciones discontinuas definidas por tramos.

En particular, se desarrollan dos vertientes de la línea de investigación referente a los métodos de descomposición de dominio (DDM¹): DDM orientados a la aplicación del cómputo en paralelo [25, 31 a 37, 58], y *DDM orientados al desarrollo de nuevos métodos de discretización* [7]. Es a esta última vertiente a la que pertenece esta tesis.

Se ha desarrollado dos versiones de la metodología-TH: los *métodos directos* (o métodos de *Steklov-Poincaré*) [8] y los *métodos indirectos* (o métodos de *Trefftz-Herrera*) [9]. Los primeros se plantean a partir de la formulación débil en términos de los datos del problema; mientras que los segundos, a partir de la formulación débil en términos de la información complementaria. Puesto que ambas formulaciones se relacionan por las fórmulas de Green-Herrera, existe una *dualidad* entre estos procedimientos, misma que será aprovechada para desarrollar esta tesis.

La diferencia principal entre unos y otros es que, en los métodos directos, se desarrollan soluciones locales de la ecuación diferencial (original) en cada elemento de la partición con el objetivo de construir funciones de base *especializadas* llamadas *funciones óptimas de base*; mientras que en los métodos indirectos, se desarrollan soluciones de la ecuación diferencial adjunta para construir funciones de peso *especializadas* llamadas *funciones óptimas de peso*.

¹ *Domain Decomposition Methods*

En la práctica, las funciones óptimas se aproximan utilizando *métodos numéricos* [45 a 49]. Aunque se puede utilizar cualquiera de ellos, se ha privilegiado el uso de los métodos de colocación ortogonal. Así, la metodología-TH desarrollada como un método de colocación ortogonal no convencional se le ha llamado *colocación-TH*.

La *colocación-TH* constituye una nueva forma de aplicar colocación ortogonal, la cual ha mostrado tener claras ventajas sobre el método estándar de colocación ortogonal: *colocación ortogonal con polinomios cúbicos de clase C^1 (OSC¹)* [77 a 80]. Estas ventajas son:

- 1) **Matrices mejor estructuradas.** A diferencia de OSC, las matrices que resultan al aplicar colocación-TH, son simétricas y definidas positivas cuando el operador diferencial tiene estas propiedades.
- 2) **Gran flexibilidad en la selección de los espacios polinomiales aproximantes.** En colocación-TH, los grados de los polinomios que se utilizan en la frontera interior y en el interior de los elementos de la partición pueden ser diferentes.
- 3) **El número de puntos de colocación utilizados se puede reducir.** En colocación-TH, el grado de los polinomios que se utilizan en el interior de los elementos de la partición, se puede reducir. Incluso, se han propuesto procedimientos con un solo punto de colocación [14, 81 a 84].
- 4) **Es fácilmente paralelizable.** De hecho, cuando se trata con operadores diferenciales simétricos y definidos positivos, las matrices que se derivan con colocación-TH preservan estas propiedades, lo cual permite la aplicación inmediata del *método de gradiente conjugado* cuando se combina la colocación-TH con métodos de descomposición de dominio [10].
- 5) **Gran generalidad.** La colocación-TH se puede aplicar a prácticamente cualquier ecuación diferencial parcial lineal o sistemas de tales ecuaciones, que aparecen en diversas ciencias e ingeniería. Ya se ha aplicado a ecuaciones elípticas y parabólicas, incluyendo a la ecuación general elíptica de segundo orden y a la ecuación biarmónica [15, 22].

¹ *Orthogonal Spline Collocation*

Ahora bien, en esta tesis, las funciones óptimas se aproximan utilizando métodos de elementos finitos. Así, la metodología-TH desarrollada como un método de elementos finitos se le llamará ***Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF)*** [16, 24]. De esta forma, se establecen las bases generales para una teoría de métodos de elementos finitos en espacios de funciones discontinuas definidas por tramos.

FEM-OF constituye una nueva forma de aplicar elementos finitos, la cual ha mostrado tener ventajas sobre el método estándar de elementos finitos, principalmente, en la ***reducción del número de grados de libertad***. Ciertamente preserva las mismas ventajas que la colocación-TH, pero además presenta otras ventajas; por ejemplo, los problemas de contorno con saltos prescritos tienen la misma dificultad que los problemas de contorno sin saltos cuando se resuelven con FEM-OF.

Además de caracterizar como métodos de elementos finitos con funciones óptimas los ya mencionados métodos directos y métodos indirectos, a los cuales se les llamará ***FEM-OF Steklov-Poincaré*** y ***FEM-OF Trefftz-Herrera*** respectivamente, se introduce una nueva formulación que combina ambos métodos.

En la teoría, cuando las funciones óptimas son *exactas*, usar unas u otras es equivalente. Sin embargo, cuando se emplean métodos numéricos para calcular aproximaciones de las funciones óptimas, esta equivalencia ya no se cumple. Entonces, la utilización simultánea de funciones de base y de peso óptimas *aproximadas* es una opción que tiene características atractivas. En particular, un análisis del error muestra que esta práctica mejora la precisión de los algoritmos. En la literatura, el uso de espacios de funciones diferentes para las funciones de base y de peso se conoce como *métodos de Petrov-Galerkin*. Es por ello que en esta tesis se propone un procedimiento derivado del uso simultáneo de funciones de base y de peso óptimas que se llamará ***FEM-OF Petrov-Galerkin***.

Nótese que para aplicar *efectivamente* FEM-OF Petrov-Galerkin, se requiere que los espacios de funciones de base y de peso óptimas sean *diferentes*. Esto se logra solamente si el operador

diferencial en cuestión no es auto-adjunto. Cuando se aplica a problemas que involucran *operadores diferenciales no auto-adjuntos* se puede reducir el grado de los polinomios aproximantes en el interior de los elementos de la partición, obteniendo el mismo orden de precisión que se lograría sin esta reducción. En estas circunstancias, se puede decir que FEM-OF Petrov-Galerkin exhibe propiedades de *super-convergencia*.

Recapitulando, *FEM-OF* constituye una nueva forma de aplicar FEM, la cual ha mostrado tener claras ventajas sobre el método estándar de FEM. Además de las ya mencionadas en la *colocación TH*, éstas ventajas son:

- 1) Exhibe importante *reducción en el número de grados de libertad*.
- 2) Los *BVPJ con o sin saltos* prescritos tienen la *misma dificultad*. De hecho, se sigue trabajando con formulaciones débiles que aparecen en los planteamientos FEM estándares [38 a 41].
- 3) Presenta *ventajas* significativas *de tipo numérico*. Por ejemplo: a) las cuadraturas locales coinciden con la cuadratura global, lo cual no ocurre en la colocación-TH; b) a pesar de resolver un problema elíptico de segundo orden, c) solamente se requiere calcular derivadas de primer orden; solamente se necesita realizar integrales en el interior de los subdominios de la partición; entre otros.
- 4) Se introduce una nueva formulación llamada *FEM-OF Petrov-Galerkin*, la cual utiliza tanto funciones óptimas de base como funciones óptimas de peso.
- 5) Muestra una *super-convergencia* con operadores diferenciales no auto-adjuntos, específicamente cuando se utiliza FEM-OF Petrov-Galerkin

1.2- Generalidades de FEM con Funciones Óptimas

Considérese un *problema de contorno con saltos prescritos* (BVPJ) formulado en un dominio Ω con una partición $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$.

El primer paso que se realiza para resolverlo con el *Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF)* [16, 24], es *localizar* el problema. Por *localizar* el problema se entiende, al igual que en los métodos de Descomposición de Dominio, un procedimiento que permite construir la *solución global* definida en todo el dominio, resolviendo exclusivamente *problemas de contorno locales* formulados en cada uno de los subdominios de la partición. La estrategia general para alcanzar dicho propósito consiste en recabar *cierta* información de la solución pero únicamente en la frontera interior Σ de la partición, que sea la suficiente para definir problemas de contorno independientes y bien planteados en cada uno de los subdominios, cuyas soluciones individuales sean precisamente las restricciones correspondientes de la solución global. Para esto, se elige de antemano cierta información objetivo de la solución en Σ que posea esta propiedad, la cual se denota como *información buscada*.

Existen dos grandes categorías de métodos para recabar dicha información buscada: los *métodos directos* y los *métodos indirectos*. Los métodos directos utilizan soluciones locales del operador diferencial original para establecer las condiciones de compatibilidad que debe aportar la información buscada; mientras que los métodos indirectos utilizan para tal fin el operador diferencial adjunto. Entonces, a partir de estas condiciones de compatibilidad se deriva una matriz del sistema global asociada con el problema.

Los *métodos directos* se derivan de una forma muy general de las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov* [32]; mientras que los *métodos indirectos* se derivan de una teoría desarrollada por Herrera, la cual se relaciona con la metodología Trefftz, llamada con frecuencia *teoría Trefftz-Herrera*. Existen diversas maneras de implementar cada uno de estos métodos. Una de ellas, se basa en el uso de una clase especial de funciones de base y de peso, llamadas genéricamente *funciones óptimas*.

En los *métodos de localización indirectos* se desarrolla y se aplica un sistema de funciones de peso especializadas que tiene la propiedad de capturar la información buscada de la solución en la frontera interior exclusivamente. La idea de construir tales *funciones óptimas de peso* surge del hecho de que en el *método de residuos pesados*, la información acerca de la solución exacta que contiene la solución aproximada, depende del sistema de funciones de peso que se aplica. Para utilizar esta dependencia en la construcción de las funciones óptimas de peso, se requiere de un procedimiento de análisis. Las herramientas básicas de este análisis son las *fórmulas de Green-Herrera*, las cuales se pueden aplicar aún cuando las funciones de base y de peso son completamente discontinuas, cosa que no se puede hacer en los espacios de Sovolev estándares ni con los operadores definidos en ellos. Entonces, las fórmulas de Green-Herrera se aplican para diseñar las funciones óptimas de peso adecuadamente, las cuales tienen entre otras propiedades las de ser soluciones locales a la ecuación diferencial homogénea asociada con el *operador diferencial adjunto*. Las funciones óptimas de peso se utilizan para derivar las condiciones de compatibilidad de las cuales se obtiene la información buscada.

Por otro lado, en los *métodos de localización directos* se introduce un espacio lineal cuyos elementos, llamados *funciones óptimas de base*, tiene la siguiente propiedad: una función óptima de base satisface las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov* si y solo si contienen la información buscada. Cuando se utiliza la aproximación directa, la obtención de la información buscada se transforma en la construcción de la función óptima de base que cumple con las condiciones de Poincaré-Steklov, de la cual se deriva la matriz del sistema global. Las

funciones óptimas de base son soluciones locales de la ecuación diferencial homogénea asociada con el *operador diferencial* original del problema considerado.

Como se mencionó anteriormente, el término de *funciones óptimas* denota un conjunto de funciones que incluye tanto a las funciones óptimas de base como a las funciones óptimas de peso, de modo que el primero se compone de la suma directa de los dos últimos. Por otro lado, en vista de toda la explicación anterior, queda claro que existe una dualidad entre los métodos de localización directos e indirectos. En este trabajo, dicha relación se establece en términos de expresiones matemáticas precisas, específicamente por medio de una pareja de *descomposiciones duales* de los operadores valuados en funcionales, en términos de los cuales se formula el BVPJ. También, se desarrolla la teoría en *espacios de funciones discontinuas definidas por tramos*. El uso sistemático de tales espacios en el tratamiento de ecuaciones diferenciales parciales requiere el planteamiento de *problemas de contorno con saltos prescritos*.

Además, la teoría básica se desarrolla como una teoría *exacta*. Por otro lado, la metodología FEM-OF es una *metodología de discretización*, que se puede aplicar a cualquier ecuación diferencial parcial lineal, o a sistemas de tales ecuaciones, y que como cualquier metodología de discretización es una teoría de *aproximación*. A partir de la teoría básica exacta se derivan tres aproximaciones: *FEM-OF Steklov-Poincaré*, la cual utiliza funciones óptimas de base; *FEM-OF Trefftz-Herrera*, la cual utiliza funciones óptimas de peso; y *FEM-OF Petrov-Galerkin*, la cual utiliza funciones óptimas de base y funciones óptimas de peso simultáneamente. Estas tres aproximaciones FEM-OF se derivan de una teoría básica exacta introduciendo dos clases de aproximaciones cuando se implementan; éstas son:

- 1) El espacio de funciones óptimas, que generalmente es de dimensión infinita, se aproxima por medio de un *espacio de dimensión finita*.
- 2) Las ecuaciones diferenciales locales que satisfacen las funciones óptimas, no se satisfacen exactamente.

Dependiendo de cuál método de *aproximación numérica* se utilice para resolver esas ecuaciones diferenciales locales, se puede obtener clases especiales de Métodos de Elementos Finitos, de Métodos de Colocación o de otros métodos. En sí mismo, FEM-OF se puede ver como una clase especial de *Método de Galerkin Discontinuo* [85 a 90], puesto que se formula en un espacio de funciones discontinuas. También, FEM-OF se puede ver como una clase especial de *Método FEM con Funciones Enriquecidas* [91 a 96], puesto que las funciones óptimas son funciones con un pre-procesamiento.

Nótese que por la manera en que se formulan los procedimientos FEM-OF, solamente se obtiene información de la solución en la frontera interior Σ . Sin embargo, una vez que esa información buscada se conoce, se puede resolver problemas de contorno locales para obtener la solución en cualquier parte del dominio Ω . Precisamente esto es lo que se hace en la aproximación FEM-OF Trefftz-Herrera. A este último paso se le conoce como *interpolación óptima*. Sin embargo, cuando se utiliza la aproximación FEM-OF Steklov-Poincaré o FEM-OF Petrov-Galerkin, el procedimiento de interpolación óptima realmente no se necesita, puesto que se obtiene directamente la solución en todo el dominio Ω .

Capítulo 2:

Notación

y

Antecedentes

Indice:

- 2.1- Notación
- 2.2- Fórmulas de Green-Herrera
- 2.3.- Problemas de Contorno con Saltos Prescritos
- 2.4.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera
- 2.5.- Método Directo de Steklov-Poincaré

2.1- Notación

Sea la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, llamada **dominio**, un subconjunto abierto, acotado y conexo del espacio Euclidiano de dimensión n .

Sea $\partial\Omega$ la frontera del dominio Ω , llamada **frontera exterior**. $\partial\Omega$ es una frontera Lipschitz.

Sea $\Pi \equiv \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$ una **partición** del dominio Ω en E subregiones abiertas Ω_i , $i=1, \dots, E$, llamadas **subdominios**. Una partición Π del dominio Ω satisface las siguientes condiciones: $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^E \overline{\Omega}_i$ y $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Sea $\partial\Omega_i$ la frontera del subdominio Ω_i , $i=1, \dots, E$. Cada $\partial\Omega_i$ es una frontera Lipschitz.

Sea $\Sigma_{ij} \equiv \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$, $i \neq j$, la frontera común entre los subdominios adyacentes Ω_i y Ω_j .

Sea Σ la unión de todas las fronteras comunes entre subdominios adyacentes, es decir, el complemento cerrado de $\partial\Omega$ relativo a $\bigcup_{i=1}^E \partial\Omega_i$, llamada **frontera interior**. Véase la figura 2.1.

Sea \underline{n} un **vector normal unitario** con sentido hacia el exterior en la frontera exterior $\partial\Omega$; dicho vector está definido en casi todos los puntos de $\partial\Omega$. También, \underline{n} denota a un vector normal unitario con sentido arbitrario en la frontera interior Σ ; dicho vector está definido en casi todos los puntos de Σ . Véase la figura 2.2.

Sean $D_1(\Omega)$ y $D_2(\Omega)$ dos espacios lineales de funciones definidos en el dominio Ω .

Sean $D_\alpha(\Omega_i)$, $i=1, \dots, E$, los subespacios de $D_\alpha(\Omega)$, cuyos elementos son las restricciones en los subdominios Ω_i de las funciones que pertenecen a $D_\alpha(\Omega)$ — se entiende que se tiene definiciones similares para $\alpha=1, 2$ —.

Sea $\widehat{D}_\alpha(\Omega)$ el espacio lineal de funciones definido en el dominio Ω por la suma directa de los subespacios $D_\alpha(\Omega_i)$, $i=1, \dots, E$; esto es:

$$\widehat{D}_\alpha(\Omega) \equiv \bigoplus_{i=1}^E D_\alpha(\Omega_i) \quad (2.1.1)$$

donde el operador \bigoplus representa la suma directa de espacios vectoriales. De aquí que una función $v \in \widehat{D}_\alpha(\Omega)$ tiene una representación vectorial como una sucesión de funciones $\{v_k\}_{k=1}^E$, donde $v_i \in D_\alpha(\Omega_i)$.

Puesto que una función $v \in \widehat{D}_\alpha(\Omega)$ se forma por las restricciones de funciones definidas de manera independiente en cada subdominio Ω_i , ésta es *totalmente* discontinua en la fronteras interior Σ . De esta forma se introducen los **espacios lineales de funciones discontinuas definidas por tramos**. En general, las funciones que pertenecen a estos espacios pueden tener *discontinuidades de salto finitas* tanto en el valor de la función como en el valor de sus derivadas normales en Σ .

Cuando se califica a una **función** como **continua**, se entiende que la función es continua en su valor, sin asumir nada acerca de la continuidad en sus derivadas. Aunque es claro que la función es continua en todo Ω , esto es, en cada subdominio Ω_i y en la frontera interior Σ , se pondrá énfasis en la continuidad a través de Σ . Cuando se califica a una función como **totalmente continua**, se entiende que la función es continua tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ . Cuando se califica a una función como **totalmente discontinua**, se

entiende que la función puede presentar discontinuidades tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ .

De hecho, $\widehat{D}_1(\Omega)$ y $\widehat{D}_2(\Omega)$ corresponden a los espacios de las funciones de base y de las funciones de peso respectivamente. Las **funciones de base** construyen la solución de la ecuación diferencial; mientras que las **funciones de peso** o **funciones de prueba** ponderan la ecuación diferencial.

Sean las dos **trazas** de $v = \{v_k\}_{k=1}^E \in \widehat{D}_\alpha(\Omega)$ en la frontera común Σ_{ij} a los subdominios Ω_i y Ω_j ; una se define para v_i en Ω_i y la otra para v_j en Ω_j . Más aún, el sentido del vector normal \underline{n} en la frontera interior Σ define su lado positivo; mientras que el sentido contrario, su lado negativo. Entonces, $v_+ \equiv Tr^+(v)$ es la traza de v en el lado positivo de Σ , mientras que $v_- \equiv Tr^-(v)$ es la traza de v en el lado negativo de Σ , donde $Tr(\square)$ es el operador traza. En general, $v_+ \neq v_-$ ya que se trabaja con espacios de funciones discontinuas definidas por tramos. Véase la figura 2.3.

Sea el **promedio de la función** $v \in \widehat{D}_\alpha(\Omega)$ a través de la frontera interior Σ , definido por:

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(v_+ + v_-) \quad (2.1.2)$$

donde $\dot{\square}$ es el operador promedio.

Sea el **salto de la función** $v \in \widehat{D}_\alpha(\Omega)$ a través de la frontera interior Σ , definido por:

$$[v] \equiv v_+ - v_- \quad (2.1.3)$$

donde $[\square]$ es el operador salto.

La discontinuidad de una función en la frontera interior Σ se puede expresar ya sea especificando los valores de sus trazas en Σ , o bien, especificando los valores de su promedio y de su salto en Σ . De hecho, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$v_+ = \dot{v} + \frac{1}{2}[v] \quad (2.1.4)$$

$$v_- = \dot{v} - \frac{1}{2}[v] \quad (2.1.5)$$

Entonces, si la función v es continua a través de Σ se tiene que $v = v_+ = v_- = \dot{v}$, y que $[v] = 0$.

Nótese que los valores del promedio \dot{v} y del salto *orientado* $[v] \bullet \underline{n}$, no dependen del sentido del vector normal \underline{n} en la frontera interior Σ .

Demostración: En efecto, si se cambia el sentido de \underline{n} en Σ , entonces éste es $\widehat{\underline{n}} = -\underline{n}$, y el valor original de v_+ ahora es el nuevo valor de v_- y viceversa, esto es $\widehat{v}_+ = v_-$ y $\widehat{v}_- = v_+$. En consecuencia:

$$[v] \bullet \widehat{\underline{n}} = (\widehat{v}_+ - \widehat{v}_-) \bullet \widehat{\underline{n}} = (v_- - v_+) \bullet (-\underline{n}) = (v_+ - v_-) \bullet \underline{n} = [v] \bullet \underline{n}$$

En cuanto a \dot{v} se tiene que:

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(\widehat{v}_+ + \widehat{v}_-) = \frac{1}{2}(v_- + v_+) = \frac{1}{2}(v_+ + v_-) = \dot{v}$$

En particular, se seleccionan los **espacios de Sobolev** [42 a 44] para definir los espacios $\widehat{D}_\alpha(\Omega)$. Los espacios de Sobolev son espacios apropiados para manejar funciones discontinuas definidas por tramos, en donde las trazas de las funciones y de sus derivadas normales en las fronteras de los subdominios $\partial\Omega_i$, siempre están definidas y, en consecuencia, los saltos y los promedios de éstas. De esta forma, se garantiza la existencia y la unicidad de la solución para los problemas de contorno con saltos prescritos y con coeficientes discontinuos, en donde la solución también puede ser discontinua.

La ubicación dentro del dominio Ω tanto de los saltos prescritos como de las discontinuidades de los coeficientes del operador diferencial determinan la partición Π , de forma que solamente haya éstos sobre la frontera interior Σ . De esta forma, la solución solamente puede presentar discontinuidades en Σ .

Los *espacios de Sobolev de orden entero no negativo* ($s = 0, 1, 2, \dots$) con soporte en un dominio Ω se definen como:

$$H^s(\Omega) \equiv \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid D^t v \in L^2(\Omega) \text{ con } |t| \leq s \right\} \quad (2.1.6)$$

donde $t \equiv \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$, $|t| \equiv t_1 + t_2 + \dots + t_n$, $D^t(\square) \equiv \left(\frac{\partial^{t_1}}{\partial x_1^{t_1}} \frac{\partial^{t_2}}{\partial x_2^{t_2}} \dots \frac{\partial^{t_n}}{\partial x_n^{t_n}} \right)(\square)$ y $L^2(\Omega)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable en Ω . Nótese que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. La *norma* asociada a estos espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$ es:

$$\|v\|_{s,\Omega}^2 \equiv \int_{\Omega} \sum_{|t| \leq s} (D^t v)^2 d\underline{x} \quad (2.1.7)$$

Las derivadas de las funciones en los espacios de Sobolev se entienden como *derivadas en el sentido distribucional*, es decir:

$$\int_{\Omega} (D^t v)(\phi) d\underline{x} = (-1)^{|t|} \int_{\Omega} (v)(D^t \phi) d\underline{x}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.1.8)$$

donde $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ pero con soporte compacto.

Entonces, los *espacios de Sobolev por tramos* se definen como:

$$\widehat{H}^s(\Omega) \equiv \bigoplus_{i=1}^E H^s(\Omega_i) \quad (2.1.9)$$

La *norma* asociada a estos espacios de Sobolev $\widehat{H}^s(\Omega)$ es:

$$\|v\|_{s,\Omega,\Pi}^2 \equiv \sum_{i=1}^E \|v_i\|_{s,\Omega_i}^2 \quad (2.1.10)$$

En este trabajo se trabaja con la *ecuación diferencial parcial elíptica general de segundo orden*, en consecuencia, se utilizarán para definir los espacios de funciones de base y de funciones de peso los espacios de Sobolev por tramos $\widehat{H}^s(\Omega)$ de orden $s = 2$, es decir:

$$\widehat{D}_1(\Omega) \subset \widehat{H}^2(\Omega) \quad (2.1.11)$$

$$\widehat{D}_2(\Omega) \subset \widehat{H}^2(\Omega) \quad (2.1.12)$$

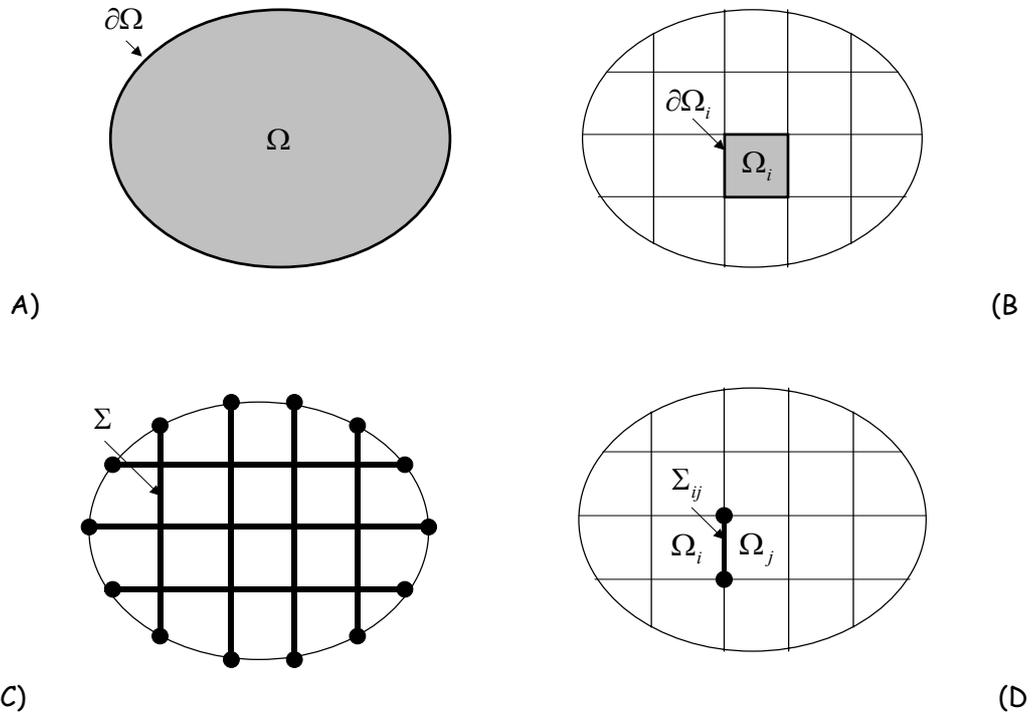


Figura 2.1.- A) Dominio Ω y su frontera exterior $\partial\Omega$. B) Subdominio Ω_i y su frontera $\partial\Omega_i$. C) Frontera interior Σ . D) Frontera común Σ_{ij} a Ω_i y Ω_j .

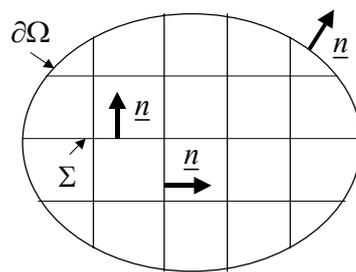


Figura 2.2.- Vector normal \underline{n} a frontera exterior $\partial\Omega$ y a frontera interior Σ .

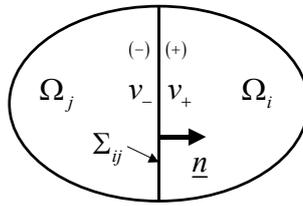


Figura 2.3. - Trazas de la función v , del lado positivo y del lado negativo de la frontera común Σ_{ij} a subdominios adyacentes Ω_i y Ω_j , según el vector normal \underline{n} .

2.2- Fórmulas de Green-Herrera

Sea un dominio Ω y una partición $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$ de éste. Sea una ecuación diferencial:

$$\mathcal{L} u = f_\Omega \quad \text{en cada } \Omega_i \quad (2.2.1)$$

donde \mathcal{L} es un operador diferencial lineal con coeficientes suficientemente suaves, por ejemplo de clase $C^\infty(\Omega)$. Además se proporcionan condiciones de frontera en la frontera exterior $\partial\Omega$ y condiciones de saltos prescritos en la frontera interior Σ , de tal modo que resulta un problema bien planteado, es decir, que tiene solución única la cual depende continuamente de los datos. Las condiciones de saltos prescritos se refieren a discontinuidades de salto finitas tanto de la función u como de sus derivadas normales a través de Σ . El problema enunciado se denomina *Problema de Contorno con Saltos Prescritos* [1 a 5].

2.2.1.- Operador Diferencial Adjunto Formal

El operador diferencial \mathcal{L} y su *operador diferencial adjunto formal* \mathcal{L}^* satisfacen la siguiente identidad de forma puntual:

$$w \mathcal{L} u - u \mathcal{L}^* w = \nabla \cdot \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \quad , \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2.2)$$

donde $\underline{\mathcal{Q}}(u, w)$ es una funcional bilineal vectorial definida en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$, llamada *concomitante*, apropiada para el operador diferencial \mathcal{L} en cuestión.

2.2.2.- Fórmulas de Green

Por lo pronto, y solamente para este inciso 2.2.2, considérese que $u \in D_1(\Omega)$ y $w \in D_2(\Omega)$ son **funciones totalmente continuas**, es decir, que las funciones u y w así como sus derivadas normales son continuas a través de Σ :

En consecuencia, si $u \in D_1(\Omega)$ entonces $\mathcal{L}u$ está definido tanto en el interior de cada subdominio Ω_i como en la frontera interior Σ . De igual forma, si $w \in D_2(\Omega)$ entonces \mathcal{L}^*w está definido tanto en el interior de cada Ω_i como en Σ .

Si se integra (2.2.2) en cada subdominio Ω_i , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} (w \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^*w) d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \underline{\mathcal{Q}}(u, w) d\underline{x} \quad (2.2.3)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el lado derecho:

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L}u d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^*w d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\partial\Omega_i} \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (2.2.4)$$

Puesto que las funciones u y w así como sus derivadas normales son continuas a través de la frontera interior Σ , resulta que:

$$\int_{\Omega} w \mathcal{L}u d\underline{x} - \int_{\Omega} u \mathcal{L}^*w d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (2.2.5)$$

Ahora, se introducen las siguientes funcionales bilineales reales definidas en $D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$:

$$\mathcal{P}(u, w) \equiv w \mathcal{L}u, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2.6)$$

$$\mathcal{Q}^*(u, w) \equiv u \mathcal{L}^*w, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2.7)$$

donde $\mathcal{Q}^*(u, w)$ es la **funcional transpuesta** de la funcional bilineal $\mathcal{Q}(u, w)$ y se define como $\mathcal{Q}^*(u, w) \equiv \mathcal{Q}(w, u)$.

También, sean $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}^*(u, w)$ funcionales bilineales reales definidas en $D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$ tales que producen la siguiente descomposición:

$$\mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \bullet \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2.2.8)$$

donde $\mathcal{C}^*(u, w) \equiv \mathcal{C}(w, u)$. La funcional $\mathcal{B}(u, w)$ involucra los valores prescritos o conocidos de la solución en la frontera exterior $\partial\Omega$ (condiciones de frontera), mientras que la funcional $\mathcal{C}^*(u, w)$ involucra los valores no prescritos o desconocidos de la solución en $\partial\Omega$.

Sustituyendo (2.2.6) a (2.2.8) en (2.2.5) y reordenando términos, se obtiene las **fórmulas de Green**:

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}(u, w) d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\underline{x} = \int_{\Omega} \mathcal{L}^*(u, w) d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\underline{x} \quad (2.2.9)$$

Ahora, sean las funcionales bilineales reales $\langle Pu, w \rangle$, $\langle Bu, w \rangle$, $\langle Q^*u, w \rangle$ y $\langle C^*u, w \rangle$ definidas en $D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$ tales que:

$$\langle Pu, w \rangle \equiv \int_{\Omega} \mathcal{P}(u, w) d\underline{x} = \int_{\Omega} w \mathcal{L} u d\underline{x} \quad \text{en } \Omega \quad (2.2.10)$$

$$\langle Bu, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.2.11)$$

$$\langle Q^*u, w \rangle \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L}^*(u, w) d\underline{x} = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* w d\underline{x} \quad \text{en } \Omega \quad (2.2.12)$$

$$\langle C^*u, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.2.13)$$

Si se sustituye (2.2.10) a (2.2.13) en (2.2.9), se tiene que:

$$\langle Pu, w \rangle - \langle Bu, w \rangle = \langle Q^*u, w \rangle - \langle C^*u, w \rangle \quad (2.2.14)$$

igualdad que se satisface $\forall (u, w) \in D_1(\Omega) \times D_2(\Omega)$, o bien, por la propiedad de linealidad:

$$\langle (P - B)u, w \rangle = \langle (Q^* - C^*)u, w \rangle \quad (2.2.15)$$

o sucintamente:

$$P - B = Q^* - C^* \quad (2.2.16)$$

2.2.3.- Fórmulas de Green-Herrera

Ahora, considérese que $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $w \in \widehat{D}_2(\Omega)$ son **funciones totalmente discontinuas**, es decir, que tanto las funciones u y w como sus derivadas normales son discontinuas a través de Σ .

En consecuencia, si $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ entonces $\mathcal{L}u$ está definido en el interior de cada subdominio Ω_i . De igual forma, si $w \in \widehat{D}_2(\Omega)$ entonces \mathcal{L}^*w está definido en el interior de cada Ω_i . Pero ambos operadores diferenciales no están definidos en la frontera interior Σ debido a que tanto las funciones u y w como sus derivadas normales son discontinuas a través de Σ .

Si se integra (2.2.2) en cada subdominio Ω_i , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} (w \mathcal{L}u - u \mathcal{L}^*w) d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \underline{\mathcal{Q}}(u, w) d\underline{x} \quad (2.2.17)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en el lado derecho:

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L}u d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^*w d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\partial\Omega_i} \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (2.2.18)$$

Puesto que las funciones u y w así como sus derivadas normales son discontinuas a través de la frontera interior Σ , resulta que:

$$\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L}u d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^*w d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \cdot \underline{n} d\underline{x} - \int_{\Sigma} [\underline{\mathcal{Q}}(u, w)] \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (2.2.19)$$

donde al resultado: $\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \underline{\mathcal{Q}}(u, w) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathcal{Q}}(u, w) \cdot \underline{n} d\underline{x} - \int_{\Sigma} [\underline{\mathcal{Q}}(u, w)] \cdot \underline{n} d\underline{x}$, se le ha

llamado **Teorema Generalizado de la Divergencia**.

Ahora, se introducen las siguientes funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$:

$$\mathcal{P}(u, w) \equiv w \mathcal{L} u, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_i \quad (2.2.20)$$

$$\mathcal{Q}^*(u, w) \equiv u \mathcal{L}^* w, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_i \quad (2.2.21)$$

donde $\mathcal{Q}^*(u, w)$ es la **funcional transpuesta** de la funcional bilineal $\mathcal{Q}(u, w)$ y se define como $\mathcal{Q}^*(u, w) \equiv \mathcal{Q}(w, u)$.

También, sean $\mathcal{B}(u, w)$, $\mathcal{C}^*(u, w)$, $\mathcal{J}(u, w)$ y $\mathcal{K}^*(u, w)$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que producen las siguientes descomposiciones:

$$\mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{D}}(u, w) \bullet \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2.2.22)$$

$$\mathcal{J}(u, w) - \mathcal{K}^*(u, w) \equiv -[\underline{\mathcal{D}}(u, w)] \bullet \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (2.2.23)$$

donde $\mathcal{C}^*(u, w) \equiv \mathcal{C}(w, u)$ y $\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \mathcal{K}(w, u)$. Aplicando álgebra de saltos:

$[\underline{\mathcal{D}}(u, w)] = \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [w]) + \underline{\mathcal{D}}([u], \dot{w})$, se obtiene una forma adecuada de definir las

siguientes funcionales:

$$\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [w]) \bullet \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (2.2.24)$$

$$\mathcal{J}(u, w) \equiv -\underline{\mathcal{D}}([u], \dot{w}) \bullet \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (2.2.25)$$

Entonces, la funcional $\mathcal{B}(u, w)$ involucra los valores prescritos o conocidos en la frontera exterior $\partial\Omega$ (condiciones de frontera), mientras que la funcional $\mathcal{C}^*(u, w)$ involucra los valores no prescritos o desconocidos de la solución en $\partial\Omega$. Por otro lado, la funcional $\mathcal{K}^*(u, w)$ involucra los valores relacionados con los promedios \dot{u} en la frontera interior Σ mientras que la funcional $\mathcal{J}(u, w)$ involucra los valores relacionados con los saltos $[u]$ en Σ .

Sustituyendo (2.2.20) a (2.2.23) en (2.2.19) y reordenando términos, se obtiene las **fórmulas de Green-Herrera**:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{P}(u, w) d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\underline{x} - \int_{\Sigma} \mathcal{J}(u, w) d\underline{x} \\ &= \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{Q}^*(u, w) d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\underline{x} - \int_{\Sigma} \mathcal{K}^*(u, w) d\underline{x} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Ahora, sean las funcionales bilineales reales $\langle Pu, w \rangle$, $\langle Bu, w \rangle$, $\langle Ju, w \rangle$, $\langle Q^*u, w \rangle$, $\langle C^*u, w \rangle$ y $\langle K^*u, w \rangle$ definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que:

$$\langle Pu, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{P}(u, w) d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L} u d\underline{x} \quad \text{en cada } \Omega_i \quad (2.2.27)$$

$$\langle Bu, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.2.28)$$

$$\langle Ju, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{J}(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.2.29)$$

$$\langle Q^*u, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \mathcal{Q}^*(u, w) d\underline{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^* w d\underline{x} \quad \text{en cada } \Omega_i \quad (2.2.30)$$

$$\langle C^*u, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.2.31)$$

$$\langle K^*u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{K}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.2.32)$$

Si se sustituye (2.2.27) a (2.2.32) en (2.2.26), se tiene que:

$$\langle Pu, w \rangle - \langle Bu, w \rangle - \langle Ju, w \rangle = \langle Q^*u, w \rangle - \langle C^*u, w \rangle - \langle K^*u, w \rangle \quad (2.2.33)$$

igualdad que se satisface $\forall (u, w) \in \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$, o bien, por la propiedad de linealidad:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle (Q^* - C^* - K^*)u, w \rangle \quad (2.2.34)$$

o sucintamente:

$$P - B - J = Q^* - C^* - K^* \quad (2.2.35)$$

Nótese que las fórmulas de Green son un caso particular de las fórmulas de Green-Herrera cuando se anulan las funcionales bilineales $\langle Ju, w \rangle = 0$ y $\langle K^*u, w \rangle = 0$.

2.2.4.- Operadores Valuados en Funcionales

Las funcionales bilineales $\langle Pu, w \rangle$, $\langle Bu, w \rangle$, $\langle Ju, w \rangle$, $\langle Q^*u, w \rangle$, $\langle C^*u, w \rangle$ y $\langle K^*u, w \rangle$ definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ y valuadas en \mathbb{R} , también se pueden considerar como **operadores valuados en funcionales** definidos en $\widehat{D}_1(\Omega)$ y valuados en $\widehat{D}_2^*(\Omega)$, esto es, valuados en el espacio dual algebraico de $\widehat{D}_2(\Omega)$, el espacio lineal formado por todas las funcionales lineales definidas en $\widehat{D}_2(\Omega)$.

Por ejemplo, tómesese la funcional bilineal $P: \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y selecciónese alguna función $v \in \widehat{D}_1(\Omega)$ que sea de interés, entonces constrúyase la funcional lineal $Pv \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$ definida como $Pv(w) \equiv \langle Pv, w \rangle$. De esta forma se puede decir que $P: \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$ es un operador valuado en funcionales.

2.3.- Problemas de Contorno con Saltos Prescritos

2.3.1.- Problemas de Contorno con Saltos Prescritos

Definición 2.3.1.- Problema de Contorno con Saltos Prescritos -BVPJ-

Sea un dominio Ω y una partición $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$ de éste. El **problema de contorno con saltos prescritos (BVPJ¹)** consiste en buscar una función $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que satisfaga las siguientes condiciones:

- ♦ A la **ecuación diferencial** en cada subdominio Ω_i :

$$Pu = f \quad (2.3.1)$$

- ♦ A las **condiciones de frontera** en la frontera exterior $\partial\Omega$:

$$Bu = g \quad (2.3.2)$$

- ♦ A las **condiciones de saltos prescritos** en la frontera interior Σ :

$$Ju = j \quad (2.3.3)$$

donde la triada de funcionales lineales $(f, g, j) \in \widehat{D}_2^*(\Omega) \times \widehat{D}_2^*(\Omega) \times \widehat{D}_2^*(\Omega)$ se le denomina **datos del problema** [26 a 29].

Otra forma de representar los datos del problema es aprovechando que las funcionales bilineales P , B y J también son operadores valuados en funcionales. Para tal efecto, sea una triada de funciones $(u_\Omega, u_\partial, u_\Sigma) \in \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_1(\Omega)$ y defínase las funcionales lineales:

$$f \equiv Pu_\Omega, \quad g \equiv Bu_\partial, \quad j \equiv Ju_\Sigma \quad (2.3.4)$$

¹ *Boundary Value Problem with Prescribed Jumps*

de esta forma, los datos del problema se pueden escribir como $(Pu_\Omega, Bu_{\partial\Omega}, Ju_\Sigma) \in \widehat{D}_2^*(\Omega) \times \widehat{D}_2^*(\Omega) \times \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Si se supone que el BVPJ es un problema bien planteado, entonces la función $u_\Omega \in \widehat{D}_1(\Omega)$ necesariamente existe y es única, ya que es precisamente la solución. Además, $u_{\partial\Omega} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es una función que satisface las condiciones de frontera, mientras que $u_\Sigma \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es una función que satisface las condiciones de saltos prescritos.

Definición 2.3.2. - Condiciones compatibles

Se dice que las condiciones de frontera $g \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$ y las condiciones de saltos prescritos $j \in \widehat{D}_2^*(\Omega)$ son **condiciones compatibles** cuando existe una función $u_{\partial\Omega} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que:

$$g = Bu_{\partial\Omega} \quad \text{en } \partial\Omega \tag{2.3.5}$$

$$j = Ju_{\partial\Omega} \quad \text{en } \Sigma \tag{2.3.6}$$

Una *condición necesaria* para que el BVPJ tenga solución es que las condiciones de frontera y las condiciones de saltos prescritos sean compatibles. Lo anterior implica que ambas se pueden derivar de una única función, de modo que realmente no imponen condiciones contradictorias.

Definición 2.3.3. - Solución del BVPJ

Se dice que una función $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es la **solución del BVPJ** cuando satisface las ecuaciones:

$$Pu = f, \quad Bu = g, \quad Ju = j \tag{2.3.7}$$

Ahora, con el objetivo de introducir la *formulación débil de un BVPJ*, se dan las siguientes definiciones y teoremas.

Definición 2.3.4.- Conjunto de funciones TH-Completo

Se dice que un conjunto de funciones $\mathcal{E} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ es un *conjunto de funciones TH-Completo*

para $P: \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$ cuando:

$$\langle Pu, w \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{E} \Rightarrow Pu = 0 \quad (2.3.8)$$

Definición 2.3.5.- Operador de frontera

Se dice que un operador $B: \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$ es un *operador de frontera* para

$P: \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$, cuando $N_{B^*} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ es un conjunto de funciones TH-Completo para

P , esto es:

$$\langle Pu, w \rangle = 0, \forall w \in N_{B^*} \Rightarrow Pu = 0 \quad (2.3.9)$$

Teorema 2.3.1.- Sean los operadores B y J operadores de frontera para el operador P y,

además, sean los espacios N_{P^*} , N_{B^*} y N_{J^*} espacios TH-Completos para los operadores P , B

y J , respectivamente. Entonces, las ecuaciones:

$$Pu = f, \quad Bu = g, \quad Ju = j \quad (2.3.10)$$

son equivalentes a la ecuación:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle \quad (2.3.11)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Si se suman las ecuaciones (2.3.10) y se pesan, se obtiene la ecuación (2.3.11).

$$Pu = f, \quad Bu = g, \quad Ju = j \Rightarrow \langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle$$

Condición necesaria:

Supóngase que:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle$$

Expresando los datos del problema como $f \equiv Pu_\Omega$, $g \equiv Bu_\partial$ y $j \equiv Ju_\Sigma$ se tiene que:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle Pu_\Omega - Bu_\partial - Ju_\Sigma, w \rangle$$

Si se aplica la propiedad de linealidad se tiene que:

$$\langle (P(u - u_\Omega) - B(u - u_\partial) - J(u - u_\Sigma)), w \rangle = 0$$

Puesto que B y J son operadores de frontera para P se obtiene:

$$\langle P(u - u_\Omega), w \rangle = 0$$

Puesto que N_{P^*} es TH-Completo para P resulta:

$$\forall w \in N_{P^*}, \langle P(u - u_\Omega), w \rangle = 0 \Rightarrow P(u - u_\Omega) = 0 \Rightarrow Pu = Pu_\Omega \equiv f$$

Consecuentemente se anula el término de P en la ecuación (2.3.11):

$$\langle (B(u - u_\partial) + J(u - u_\Sigma)), w \rangle = 0$$

Nótese que el conjunto $\partial\Omega \cap \Sigma$ tiene medida cero. Entonces, puesto que la funcional B se define en $\partial\Omega$ mientras que J en Σ , se tiene por separado que:

$$\langle B(u - u_\partial), w \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle J(u - u_\Sigma), w \rangle = 0$$

Puesto que N_{B^*} y N_{J^*} son TH-Completo para B y J respectivamente resulta:

$$\forall w \in N_{B^*}, \langle B(u - u_\partial), w \rangle = 0 \Rightarrow B(u - u_\partial) = 0 \Rightarrow Bu = Bu_\partial \equiv g$$

$$\forall w \in N_{J^*}, \langle J(u - u_\Sigma), w \rangle = 0 \Rightarrow J(u - u_\Sigma) = 0 \Rightarrow Ju = Ju_\Sigma \equiv j$$

□

Definición 2.3.6.- Formulación Débil del BVPJ

La **formulación débil del BVPJ**, también llamada **formulación variacional del BVPJ**, es la ecuación:

$$(P - B - J)u = f - g - j \tag{2.3.12}$$

de la cual se ha omitido las funciones de peso con el objeto de simplificar la notación.

En virtud de las fórmulas de Green-Herrera, se tienen dos formulaciones débiles. La primera, la ecuación (2.3.12), referida como **formulación variacional en términos de los datos del problema**: $(P - B - J)u = f - g - j$, y la segunda llamada **formulación variacional en términos de la información complementaria**:

$$(Q - C - K)^* u = f - g - j \tag{2.3.13}$$

De hecho, si la función $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es la solución del BVPJ se dice que los términos Pu , Bu y Ju son los *datos del problema*, mientras que los términos Q^*u , C^*u y K^*u son la *información complementaria*.

Si se tiene un BVPJ homogéneo con condiciones homogéneas, las siguientes observaciones son útiles.

Corolario 2.3.2.- Sean los operadores B y J operadores de frontera para el operador P y, además, sean los espacios N_{P^*} , N_{B^*} y N_{J^*} espacios TH-Completos para los operadores P , B y J , respectivamente. Entonces se tiene que:

$$Pu = 0, \quad Bu = 0, \quad Ju = 0 \Leftrightarrow \langle (P - B - J)u, w \rangle = 0 \quad (2.3.14)$$

Demostración:

Tómese $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ y $j \equiv 0$ en el teorema 2.3.1.

□

Teorema 2.3.3.- Sean los operadores C y K operadores de frontera para el operador Q y, además, sean los espacios N_Q , N_C y N_K espacios TH-Completos para los operadores Q , C y K , respectivamente. Entonces se tiene que:

$$Q^*u = 0, \quad C^*u = 0, \quad K^*u = 0 \Leftrightarrow \langle (Q - C - K)^*u, w \rangle = 0 \quad (2.3.15)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Si se suman las ecuaciones izquierdas y se pesan, se obtiene la ecuación derecha:

$$Q^*u = 0, \quad C^*u = 0, \quad K^*u = 0 \Rightarrow \langle (Q - C - K)^*u, w \rangle = 0$$

Condición necesaria:

Supóngase que:

$$\langle (Q - C - K)^*u, w \rangle = 0$$

Puesto que C y K son operadores de frontera para Q se obtiene:

$$\langle Q^*u, w \rangle = 0$$

Puesto que N_Q es TH-Completo para Q resulta:

$$\forall w \in N_Q, \langle Q^*u, w \rangle = 0 \Rightarrow Q^*u = 0$$

Consecuentemente se anula el término de Q :

$$\langle (C+K)^*u, w \rangle = 0$$

Nótese que el conjunto $\partial\Omega \cap \Sigma$ tiene medida cero. Entonces, puesto que la funcional C se define en $\partial\Omega$ mientras que K en Σ , se tiene por separado que:

$$\langle C^*u, w \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle K^*u, w \rangle = 0$$

Puesto que N_C y N_K son TH-Completo para C y K respectivamente resulta:

$$\forall w \in N_C, \langle C^*u, w \rangle = 0 \Rightarrow C^*u = 0$$

$$\forall w \in N_K, \langle K^*u, w \rangle = 0 \Rightarrow K^*u = 0$$

□

2.3.2.- Método de los Residuos Pesados

Sea el siguiente problema de contorno:

$$\mathcal{L} u = f_\Omega \quad \text{en } \Omega \tag{2.3.16}$$

con condiciones de frontera homogéneas, donde \mathcal{L} es un operador diferencial lineal con coeficientes tipo $C^\infty(\Omega)$ definido en la región Ω .

En el método de residuos pesados se dice que la función \tilde{u} es una solución aproximada cuando:

$$\int_{\Omega} w^\alpha (\mathcal{L} \tilde{u} - f_\Omega) dx = 0 \tag{2.3.17}$$

para una familia de funciones de peso con soporte compacto $\{w^1, \dots, w^N\}$. Para que el sistema de ecuaciones anterior tenga solución única, la solución aproximada se construye como una combinación lineal de una familia de funciones de base $\{\phi^1, \dots, \phi^N\}$, de modo que:

$$\tilde{u} = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \phi^{\alpha} \quad (2.3.18)$$

2.3.3.- Condiciones de Poincaré-Steklov

Sea el siguiente problema de Poisson con solución única $u \in C^1(\Omega)$ [32], sujeto a condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet:

$$-\Delta u = f_{\Omega} \quad \text{en } \Omega \quad (2.3.19)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.3.20)$$

Se introduce la siguiente partición $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2\}$. Entonces, este problema se puede formular de manera equivalente en *múltiples dominios* como:

$$-\Delta u_1 = f_{\Omega} \quad \text{en } \Omega_1 \quad (2.3.21)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \quad (2.3.22)$$

$$-\Delta u_2 = f_{\Omega} \quad \text{en } \Omega_2 \quad (2.3.23)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \quad (2.3.24)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.25)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.26)$$

donde u_i es la restricción de la solución u en Ω_i y \underline{n} es un vector normal a $\partial\Omega_1$. Las ecuaciones (2.3.25) y (2.3.26) representan las *condiciones de transmisión* en Σ .

Cuando se aplica algún método de descomposición de dominio a una ecuación diferencial, en general se tiene que resolver un *problema de condiciones de transmisión* en Σ . En particular, esta ecuación de transmisión se puede representar por medio del *operador de Steklov-Poincaré*. Para tal efecto, considérese los siguientes problemas tipo Dirichlet:

$$-\Delta w_i = f_{\Omega} \quad \text{en } \Omega_i \quad (2.3.27)$$

$$w_i = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \quad (2.3.28)$$

$$w_i = \lambda \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.29)$$

para $i=1,2$, donde λ es el valor *desconocido* de u en Σ . La solución w_i se puede escribir como $w_i = u_i^H + u_i^P$, donde u_i^H y u_i^P son solución de los siguientes problemas:

$$-\Delta u_i^H = 0 \quad \text{en } \Omega_i \quad (2.3.30)$$

$$u_i^H = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \quad (2.3.31)$$

$$u_i^H = \lambda \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.32)$$

y:

$$-\Delta u_i^P = f_\Omega \quad \text{en } \Omega_i \quad (2.3.33)$$

$$u_i^P = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \quad (2.3.34)$$

$$u_i^P = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.35)$$

De aquí que la función u_i^H sea una *extensión armónica* de λ en Ω_i , la cual se denotará como $\mathcal{H}_i \lambda$; además, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Por otro lado, la función u_i^P se denotará como $\mathcal{G}_i f_\Omega$; además $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$.

En consecuencia, comparando el problema (2.3.21)-(2.3.26) con el problema (2.3.27)-(2.3.29) se tiene que:

$$w_i = u_i \quad \text{para } i=1,2 \quad \text{si y solo si} \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial n} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.36)$$

Esta última condición equivale a que λ satisfaga la *ecuación de transmisión de Steklov-Poincaré*:

$$\mathcal{S} \lambda = \chi \quad \text{en } \Sigma \quad (2.3.37)$$

donde \mathcal{S} es el *operador de Steklov-Poincaré* y se define como:

$$\mathcal{S} \lambda \equiv \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{H}_1 \lambda - \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{H}_2 \lambda \equiv \left[\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{H} \lambda \right] \quad (2.3.38)$$

$$\chi \equiv \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G}_2 f_\Omega - \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G}_1 f_\Omega \equiv - \left[\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G} f_\Omega \right] \quad (2.3.39)$$

Finalmente, al operador inverso del operador de Steklov-Poincaré, \mathcal{S}^{-1} , se le llamará *operador de Poincaré-Steklov*.

2.4.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

2.4.1- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

El método indirecto de Trefftz-Herrera [6, 7, 9, 12, 13, 17 a 20, 23, 30, 55] es un *método de descomposición de dominio*, ya que dado un BVPJ planteado en un dominio Ω con una partición Π de éste, es capaz de encontrar suficiente información de la solución *exclusivamente* en las fronteras de los subdominios, de modo que se obtengan problemas de contorno locales, independientes y bien planteados en cada uno de los subdominios.

El método indirecto de Trefftz-Herrera tiene como antecedente los *Métodos de Adjunto Localizado (LAM¹)*. También, de este último se deriva otra familia de métodos, los *Métodos de Adjunto Localizado Lagrangianos-Eulerianos (ELLAM²)* [63 a 69].

Se parte de la formulación variacional en términos de la información complementaria de un BVPJ:

$$\langle (Q - C - K)^* u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (2.4.1)$$

donde la información relacionada con la solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ en el interior de los subdominios Ω_i de la partición Π está dada por el término $Q^* u$, en la frontera exterior $\partial\Omega$ por el término $C^* u$ y en la frontera interior Σ por el término $K^* u$.

¹ Localized Adjoint Methods

² Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Methods

El método indirecto de Trefftz-Herrera se caracteriza por construir un espacio de funciones de peso especializado para capturar cierta información de la solución en las fronteras de los subdominios; dicho espacio se llamará *espacio de funciones óptimas de peso*, $\widehat{O}_T \in \widehat{D}_2(\Omega)$. La información que se busca de la solución en la frontera interior puede ser el promedio de la función, el promedio de sus derivadas o una combinación de éstos. De hecho, esa información buscada determina los espacios nulos relacionados con los operadores Q , C y K cuando se aplica el *método de los residuos pesados*. El análisis para construir las funciones óptimas de peso se detalla a continuación.

Primero, nótese que la información buscada de la solución *solamente* está en $\Sigma \cup \partial\Omega$ y no en el interior de los subdominios Ω_i . Entonces, para obtener esa información se requiere eliminar el término Q^*u de (2.4.1). Aplicando el método de residuos pesados, la condición anterior se logra construyendo funciones de peso tales que satisfagan la condición $Qw = 0$ en el interior de cada subdominio Ω_i por separado y, de este modo, se introduce el espacio nulo de Q el cual es $N_Q \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Qw = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\}$.

Ahora bien, se pretende recabar *suficiente* información de la solución en $\Sigma \cup \partial\Omega$ para proponer problemas de contorno bien planteados locales en cada subdominio Ω_i . Es decir, no es necesario recabar *toda* la información posible de la solución en $\Sigma \cup \partial\Omega$. Esto induce la *descomposición del operador* K en dos partes. Una parte se refiere a la *información buscada* de la solución en Σ y otra parte se refiere a la información redundante o no buscada de la solución en Σ .

Definición 2.4.1.- Descomposición del operador K

Sea la descomposición $\{S_K, R_K\}$ de la funcional bilineal:

$$S_K + R_K \equiv K \tag{2.4.2}$$

donde el operador S_K se toma de tal forma que S_K^*u sea precisamente la *información buscada* de la solución en Σ .

Con el objetivo de formalizar la descomposición del operador K se introduce lo siguiente. Sean $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}^*(u, w)$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}^*(u, w)$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que producen la siguiente descomposición:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}}^*(u, w) + \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^*(u, w) \equiv \mathcal{K}^*(u, w) \quad , \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (2.4.3)$$

Luego, sean $\langle S_K^* u, w \rangle$ y $\langle R_K^* u, w \rangle$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que:

$$\langle S_K^* u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{S}_{\mathcal{R}}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.4.4)$$

$$\langle R_K^* u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{R}_{\mathcal{R}}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.4.5)$$

El operador R_K se asocia con la *información redundante* o no buscada de la solución en Σ . Entonces, una vez considerada la descomposición del operador K , se requiere eliminar el término $R_K^* u$ de (2.4.1). Aplicando el método de residuos pesados, la condición anterior se logra construyendo funciones de peso tales que satisfagan la condición $R_K w = 0$ en Σ y, de este modo, se introduce el espacio nulo de R_K el cual es $N_{R_K} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid R_K w = 0 \text{ en } \Sigma \right\}$.

Definición 2.4.2.- Información buscada

Sea un BVPJ con solución única $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$. Sean las funcionales bilineales S_K y R_K tales que $S_K + R_K = K$. Sea $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que:

$$S_K^* \hat{u} = S_K^* u \quad \text{en } \Sigma \quad (2.4.6)$$

Entonces se dice que $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada de la solución en Σ .

Por otro lado, nótese que para una ecuación diferencial elíptica de segundo orden se necesita condiciones de frontera en todo $\partial\Omega$ para que el problema de contorno esté bien planteado. Lo anterior significa que, en general, no se busca información en $\partial\Omega$. Entonces, se requiere eliminar el término $C^* u$ de (2.4.1). Aplicando el método de residuos pesados, la condición

anterior se logra construyendo funciones de peso tales que satisfagan la condición $Cw = 0$ en $\partial\Omega$ y, de este modo, se introduce el espacio nulo de C el cual es $N_C \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Cw = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$.

Notación.- $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ denota una función que contiene la información buscada de la solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ *exclusivamente* en la frontera interior Σ . Esto significa que la función \hat{u} no es necesariamente la solución en el interior de los subdominios Ω_i ni en la frontera exterior $\partial\Omega$.

A continuación se presenta las definiciones de los tres espacios nulos previamente introducidos, así como del espacio de funciones óptimas de peso.

Definición 2.4.3.- Espacios nulos de Q , C y R_K

Sean los espacios nulos de los operadores Q , C y R_K :

$$N_Q \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Qw = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (2.4.7)$$

$$N_C \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Cw = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (2.4.8)$$

$$N_{R_K} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid R_K w = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (2.4.9)$$

Definición 2.4.4.- Espacio de funciones óptimas de peso

Sea el espacio de funciones óptimas de peso \widehat{O}_T :

$$\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega) \quad (2.4.10)$$

Lo anterior implica que:

$$\left\langle (Q^* - C^* - R_K^*)u, w \right\rangle = 0, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \quad (2.4.11)$$

El espacio de funciones de base $\widehat{D}_1(\Omega)$ se toma igual que el espacio de funciones de peso $\widehat{D}_2(\Omega)$.

Como conclusión, el siguiente teorema establece las condiciones que se debe cumplir para que la función \hat{u} contenga la información buscada de la solución u en Σ .

Teorema 2.4.1.- Método indirecto de Trefftz-Herrera

Sea el BVPJ: $(P-B-J)u = f - g - j$, con los datos: $f \equiv Pu_\Omega$, $g \equiv Bu_\partial$ y $j \equiv Ju_\Sigma$,

donde: $u_\Omega \in \widehat{D}_1(\Omega)$, $u_\partial \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $u_\Sigma \in \widehat{D}_1(\Omega)$.

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ un espacio de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$.

Entonces $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada, esto es que $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (2.4.12)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$.

Puesto que $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$, se tiene que:

$$\langle (P-B-J)\hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando que $Q^* - C^* - K^* = P - B - J$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $K^* = R_K^* + S_K^*$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Finalmente, por construcción se cumple que $\langle (Q^* - C^* - R_K^*)\hat{u}, w \rangle = 0$,

$\forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, esto es:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Condición necesaria:

Sea $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y supóngase que:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

La solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$-\langle S_K^* u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$-\langle S_K^* (\hat{u} - u), w \rangle = 0, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que \widehat{O}_T es TH-Completo para S_K^* se tiene que:

$$S_K^* (\hat{u} - u) = 0 \Rightarrow S_K^* \hat{u} = S_K^* u$$

Finalmente, $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada y se le denota como $\hat{u} \equiv \hat{u}$.

□

2.4.2- Interpolación Óptima

Por último, puesto que el operador Q se relaciona con el operador diferencial adjunto y el espacio de funciones de base se toma igual que el espacio de funciones óptimas de peso $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, el método indirecto de Trefftz-Herrera solamente es capaz de obtener información de la solución en Σ y *no* es capaz de obtener información de la solución en el interior de los subdominios Ω_i . Para encontrar la solución en el interior de los subdominios Ω_i se necesita un procedimiento llamado *interpolación óptima*.

El procedimiento de interpolación óptima consiste en extender la información buscada de la solución en Σ al interior de cada subdominio Ω_i de la siguiente manera. Una vez encontrada la información buscada de la solución en Σ , junto con las condiciones de frontera $Bu = Bu_\circ$ en $\partial\Omega$ y las condiciones de salto $Ju = Ju_\Sigma$ en Σ , se obtienen problemas de contorno locales, bien

planteados e independientes, en cada subdominio Ω_i . La solución de estos problemas de contorno locales extiende la información buscada de la solución en Σ al interior de los subdominios Ω_i .

Por ejemplo, si la información buscada de la solución en Σ es el promedio de la función $\hat{u} \equiv \dot{u}$, entonces las trazas de la solución u en Σ están dadas por:

$$u_+ = \dot{u} + \frac{1}{2}[u] \quad (2.4.13)$$

$$u_- = \dot{u} - \frac{1}{2}[u] \quad (2.4.14)$$

2.5.- Método Directo de Steklov-Poincaré

El método directo de Steklov-Poincaré [8, 21, 54, 57] es un método para obtener la solución de un BVPJ en todo su dominio. Sin embargo, se puede interpretar como un *método de descomposición de dominio* si se utiliza para encontrar suficiente información de la solución exclusivamente en las fronteras de los subdominios, de modo que se obtengan problemas de contorno locales, independientes y bien planteados en cada uno de ellos. Con este último enfoque se le expone.

El método directo de Steklov-Poincaré tiene como antecedente los *métodos Trefftz-Jirousek* [70 a 75].

Se parte de la formulación variacional en términos de los datos de un BVPJ:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (2.5.1)$$

donde la información relacionada con la solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ en el interior de los subdominios Ω_i de la partición Π está dada por el término Pu , en la frontera exterior $\partial\Omega$ por el término Bu y en la frontera interior Σ por el término Ju .

El método directo de Steklov-Poincaré se caracteriza por construir un espacio de funciones de base especializado para contener cierta información de la solución en las fronteras de los subdominios; dicho espacio se llamará *espacio de funciones óptimas de base*, $\widehat{O}_B \in \widehat{D}_1(\Omega)$. La información que se busca de la solución en la frontera interior es el promedio de la función. Una propiedad relevante es que las funciones óptimas de base contienen la información

buscada si y solo si satisfacen las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov* en la frontera interior. De hecho, la condición anterior determina los espacios nulos relacionados con los operadores P , B y J . El análisis para construir las funciones óptimas de base se detalla a continuación.

Primero, se requiere que las funciones óptimas de base satisfagan las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en la frontera interior Σ . Esto induce la *descomposición del operador* J en dos partes. Una parte se refiere precisamente a dichas condiciones de continuidad en Σ , mientras que la otra parte se refiere a condiciones de continuidad redundantes en Σ .

Definición 2.5.1.- Descomposición del operador J

Sea la descomposición $\{S_J, R_J\}$ de la funcional bilineal J :

$$S_J + R_J \equiv J \quad (2.5.2)$$

donde el operador S_J se toma de tal forma que $S_J v$ sean precisamente las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov* en Σ .

Con el objetivo de formalizar la descomposición del operador J se introduce lo siguiente. Sean $\mathcal{S}_\rho(u, w)$ y $\mathcal{R}_\rho(u, w)$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que producen la siguiente descomposición:

$$\mathcal{S}_\rho(u, w) + \mathcal{R}_\rho(u, w) \equiv \mathcal{K}(u, w), \quad \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (2.5.3)$$

Luego, sean $\langle S_J u, w \rangle$ y $\langle R_J u, w \rangle$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que:

$$\langle S_J u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{S}_\rho(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.5.4)$$

$$\langle R_J u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{R}_\rho(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (2.5.5)$$

El operador R_j se asocia con las condiciones de continuidad redundantes en Σ . También, la descomposición del operador J induce una descomposición correspondiente pero en los datos del problema, específicamente en $j \equiv Ju_\Sigma$, de modo que:

$$j_S + j_R \equiv j \equiv Ju_\Sigma \quad (2.5.6)$$

$$j_S \equiv S_j u_\Sigma \quad (2.5.7)$$

$$j_R \equiv R_j u_\Sigma \quad (2.5.8)$$

La estrategia general del método directo de Steklov-Poincaré consiste en lo siguiente. La solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se conforma de la suma de dos funciones. Una función óptima de base $v \in \widehat{O}_B(\Omega)$ la cual cumple con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en Σ y que contiene la información buscada de la solución en Σ ; y una función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ la cual cumple con las condiciones de continuidad redundantes en Σ y que no contiene en absoluto la información buscada. Además, la función auxiliar u_p se construye con las soluciones particulares locales de cada uno de los subdominios de la partición, satisfaciendo las condiciones de frontera y las condiciones de saltos prescritos asociadas con las condiciones redundantes de continuidad en Σ . Ciertamente la función auxiliar u_p no es una función óptima de base.

De este modo, la solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se puede escribir como $u = v + u_p$, donde $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $v \in \widehat{O}_B(\Omega)$, lo cual implica que (2.5.1) se transforma en:

$$\langle (P - B - J)v, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle - \langle (P - B - J)u_p, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (2.5.9)$$

En cierto modo se puede decir que la función auxiliar u_p es una solución particular, construida resolviendo problemas de contorno locales; mientras que la función óptima de base v es una solución homogénea, construida resolviendo un problema de contorno global, y cuya utilidad es la de acoplar las mencionadas soluciones locales al contrarrestar sus discontinuidades que presentan en Σ introducidas por la forma en que se construyen.

Definición 2.5.2.- Función auxiliar u_p

Sea la función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que:

$$\langle (P - B - R_J)u_p, w \rangle = \langle f - g - j_R, w \rangle, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (2.5.10)$$

$$S_K^* u_p = 0 \quad (2.5.11)$$

donde el operador S_K se utiliza para establecer la información buscada y se definió en (2.4.2).

Nótese que si $S_K^* u_p = 0$ entonces $S_K^* u = S_K^*(v + u_p) = S_K^* v$, lo cual significa que efectivamente la función óptima de base contiene *completamente* la información buscada de la solución en Σ .

Para el caso de una ecuación diferencial elíptica de segundo orden, la solución particular $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se construye como una función que satisface por separado los problemas de contorno no homogéneos locales en cada subdominio Ω_i . Esta función también satisface las condiciones de frontera en $\partial\Omega$ y las condiciones de saltos prescritos pero únicamente de la función en Σ , imponiéndose que su promedio sea cero en Σ . Sin embargo, puesto que dicha función se obtiene a partir de problemas locales independientes, aunque sí es posible construirla satisfaciendo condiciones de continuidad de la función en las fronteras de los subdominios, no lo es satisfaciendo simultáneamente condiciones de continuidad en sus derivadas normales. De aquí que la función óptima de base $v \in \widehat{O}_B(\Omega)$, con el objetivo de acoplar las soluciones particulares locales, debe contribuir a satisfacer estas últimas condiciones de continuidad. Lo anterior se logra gracias a que la función óptima de base contrarresta el salto en las derivadas normales en Σ que presenta la función auxiliar u_p . Esto último constituye precisamente las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov.

Además, para el caso elíptico, la información buscada de la solución en Σ es el promedio de la función. Nótese que la función auxiliar u_p satisface las condiciones de salto de la función en

Σ y su promedio es cero en Σ . En consecuencia, la función óptima de base v es continua en Σ

y es precisamente el promedio de la solución en Σ . Esto es: $\dot{u}\Big|_{\Sigma} = \left(\dot{u}_p + \dot{v} \right)\Big|_{\Sigma} = \dot{v}\Big|_{\Sigma} = v\Big|_{\Sigma}$.

A continuación, se plantea el espacio de funciones óptimas de base. Puesto que la función auxiliar u_p ya satisfizo la ecuación diferencial no homogénea, entonces las funciones óptimas de base se construyen de tal modo que satisfagan la condición $Pv = 0$ en el interior de cada subdominio Ω_i por separado y, de este modo, se introduce el espacio nulo de P el cual es

$N_p \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Pv = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\}$. Puesto que la función auxiliar u_p ya satisfizo las

condiciones de frontera, entonces las funciones óptimas de base se construyen de tal modo que satisfagan la condición $Bv = 0$ en $\partial\Omega$ y, de este modo, se introduce el espacio nulo de B

el cual es $N_B \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Bv = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\}$. Por último, la descomposición del operador J

introduce su espacio nulo de R_J , el cual es $N_{R_J} \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid R_J v = 0 \text{ en } \Sigma \right\}$.

Definición 2.5.3.- Espacios nulos de P , B y R_J

Sean los espacios nulos de P , B y R_J como:

$$N_p \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Pv = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (2.5.12)$$

$$N_B \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Bv = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (2.5.13)$$

$$N_{R_J} \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid R_J v = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (2.5.14)$$

Definición 2.5.4.- Espacio de funciones óptimas de base

Sea el espacio de funciones óptimas de base \widehat{O}_B

$$\widehat{O}_B \equiv N_p \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \quad (2.5.15)$$

Lo anterior implica que:

$$\langle (P - B - R_J)v, w \rangle = 0, \quad \forall v \in \widehat{O}_B \equiv N_p \cap N_B \cap N_{R_J} \quad (2.5.16)$$

El espacio de funciones de peso $\widehat{D}_2(\Omega)$ se toma igual que el espacio de funciones de base $\widehat{D}_1(\Omega)$.

Notación.- $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ denota una función óptima de base que contiene la información buscada de la solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$. Esto es: $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$.

Como conclusión, el siguiente teorema establece las condiciones que se debe cumplir para que la función óptima de base \widehat{v} contenga la información buscada de la solución u en Σ .

Teorema 2.5.1. Método directo de Steklov-Poincaré

Sea el BVPJ: $(P - B - J)u = f - g - j$, con los datos: $f \equiv Pu_\Omega$, $g \equiv Bu_\partial$ y $j \equiv Ju_\Sigma$, donde: $u_\Omega \in \widehat{D}_1(\Omega)$, $u_\partial \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $u_\Sigma \in \widehat{D}_1(\Omega)$.

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \cap \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u = \widehat{v} + u_p$, donde $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple con (2.5.9) y (2.5.10).

Entonces $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada, esto es que $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \tag{2.5.17}$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$.

Puesto que $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ donde $u = \widehat{v} + u_p$, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $J = S_J + R_J$, se tiene que:

$$\langle (P - B - S_J - R_J)(\widehat{v} + u_P), w \rangle = \langle f - g - j_S - j_R, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Puesto que los operadores son lineales, reagrupando términos se tiene que:

$$\begin{aligned} & -\langle S_J \widehat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \widehat{v}, w \rangle = \\ & \langle S_J u_P - j_S, w \rangle - \langle (P - B - R_J) u_P, w \rangle + \langle f - g - j_R, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B \end{aligned}$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) u_P = f - g - j_R$, esto es:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_P - j_S, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) v = 0$, $\forall v \in \widehat{O}_B$, esto es:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_P - j_S, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Finalmente, se tiene que:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_P, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Condición necesaria:

Sea $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y supóngase que:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_P, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Completando términos, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_P), w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

La solución $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_P - u), w \rangle = 0, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Puesto que se trata de un BVPJ homogéneo con condiciones tanto de frontera como de saltos prescritos homogéneas y con solución única, ésta es cero. En consecuencia:

$$\widehat{v} + u_P - u = 0 \Rightarrow \widehat{v} + u_P = u$$

Aplicando el operador S_K^* , se tiene que:

$$S_K^*(\widehat{v} + u_P) = S_K^* u$$

Puesto que $S_K^* u_P = 0$, se tiene que:

$$S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$$

Finalmente $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada y se le denota como $\widehat{v} \equiv \widehat{v}$.

□

Finalmente, a diferencia del método indirecto de Trefftz-Herrera, el método directo de Steklov-Poincaré no requiere del procedimiento de interpolación óptima para extender la información buscada de la solución en Σ al interior de los subdominios Ω_i de la partición Π , ya que el operador P se relaciona con el operador diferencial original.

Capítulo 3:

Funciones

Óptimas

Indice:

- 3.1.- Funciones Óptimas
- 3.2.- Formulaciones Débiles
- 3.3.- Formulaciones Débiles Alternativas

3.1.- Funciones Óptimas

Considérese un BVPJ, $(P - B - J)u = f - g - j$, formulado en un dominio Ω con una partición $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_E\}$ y con los siguientes datos: $f \equiv Pu_\Omega$, $g \equiv Bu_\partial$ como condiciones de frontera en $\partial\Omega$ y $j \equiv Ju_\Sigma$ como condiciones de saltos prescritos en Σ , donde $u_\Omega \in \widehat{D}_1(\Omega)$, $u_\partial \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $u_\Sigma \in \widehat{D}_1(\Omega)$. Se supone que el problema está bien planteado y que tiene solución única $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$.

Sin pérdida de generalidad, solamente se considerará el caso cuando las condiciones de frontera son homogéneas, $g \equiv Bu_\partial \equiv 0$. Se hace esto por dos motivos. Primero, porque existen métodos estándares para transformar un BVPJ con condiciones de frontera no homogéneas en otro equivalente pero con condiciones de frontera homogéneas; básicamente consisten en restar a la solución una función que satisfaga las condiciones de frontera no homogéneas. Segundo, porque el supuesto de las **condiciones de frontera homogéneas** simplifica el desarrollo de los planteamientos que se presentan.

3.1.1.- Descomposición Dual de Operadores K y J

La información buscada de la solución en la frontera interior Σ induce directamente la descomposición del operador K en la pareja de operadores $\{S_K, R_K\}$, de modo que S_K^*u contiene la información buscada mientras que R_K^*u contiene la información redundante. Así, la información buscada determina las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de

salto) que deben cumplir las funciones óptimas de peso $w \in \widehat{O}_T$ para que, al aplicar el *método de los residuos pesados*, éstas capturen dicha información.

Por otro lado, para que las funciones óptimas de base $v \in \widehat{O}_B$ contengan la información buscada de la solución en Σ , éstas deben satisfacer las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov*. Lo anterior induce la descomposición del operador J en la pareja de operadores $\{S_J, R_J\}$, de modo que $S_J v$ se relaciona con dichas condiciones de continuidad, mientras que $R_J v$ se relaciona con las condiciones de continuidad redundantes. A su vez, la descomposición del operador J induce una descomposición correspondiente pero ahora de los datos del problema, específicamente de Ju_Σ , que son las condiciones de saltos prescritos en Σ .

A las dos parejas de descomposiciones de operadores $\{S_K, R_K\}$ y $\{S_J, R_J\}$ se les llamará *descomposición dual*.

Definición 3.1.1- Descomposición dual

Sea la *descomposición dual*, formada por las dos parejas de descomposiciones de operadores:

$$S_K + R_K \equiv K \tag{3.1.1}$$

$$S_J + R_J \equiv J \tag{3.1.2}$$

donde los operadores S_K y S_J se toman de tal forma que $S_K^* u$ contiene la información buscada de la solución en Σ y $S_J v$ se relaciona con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en Σ .

Para formalizar la descomposición dual se introduce las siguientes funcionales bilineales. Sean $\mathcal{S}_K^*(u, w)$, $\mathcal{R}_K^*(u, w)$, $\mathcal{S}_J(u, w)$ y $\mathcal{R}_J(u, w)$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que producen las siguientes descomposiciones, las cuales se cumplen de manera puntual en la frontera interior Σ :

$$\mathcal{S}_K^*(u, w) + \mathcal{R}_K^*(u, w) \equiv \mathcal{R}^*(u, w) \quad , \forall \underline{x} \in \Sigma \tag{3.1.3}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(u, w) + \mathcal{R}_{\mathcal{J}}(u, w) \equiv \mathcal{J}(u, w) \quad , \forall \underline{x} \in \Sigma \quad (3.1.4)$$

y sean $\langle S_K^* u, w \rangle$, $\langle R_K^* u, w \rangle$, $\langle S_J u, w \rangle$ y $\langle R_J u, w \rangle$ funcionales bilineales reales definidas en $\widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ tales que:

$$\langle S_K^* u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{S}_{\mathcal{K}}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (3.1.5)$$

$$\langle R_K^* u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{R}_{\mathcal{K}}^*(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (3.1.6)$$

$$\langle S_J u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{S}_{\mathcal{J}}(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (3.1.7)$$

$$\langle R_J u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \mathcal{R}_{\mathcal{J}}(u, w) d\underline{x} \quad \text{en } \Sigma \quad (3.1.8)$$

Además, la descomposición dual induce la siguiente descomposición en los datos del problema:

$$j_S + j_R \equiv j \equiv Ju_{\Sigma} \quad (3.1.9)$$

$$j_S \equiv S_J u_{\Sigma} \quad (3.1.10)$$

$$j_R \equiv R_J u_{\Sigma} \quad (3.1.11)$$

Ahora bien, el operador S_K permite definir las condiciones para que una función de base $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ contenga la información buscada de la solución en Σ . Nótese que esta función no es necesariamente la solución del BVPJ. Tan solo es la información buscada de la solución en Σ y no en el interior de los dominios Ω_i , ni en la frontera exterior $\partial\Omega$.

Definición 3.1.2.- Información buscada

Sea un BVPJ con solución única $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$. Sean las funcionales bilineales S_K y R_K tales que $S_K + R_K = K$. Sea una función de base $\hat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que:

$$S_K^* \hat{u} = S_K^* u \quad \text{en } \Sigma \quad (3.1.12)$$

Entonces se dice que \hat{u} **contiene o posee la información buscada** de la solución en Σ .

3.1.2.- BVPJ Localizado

Considérese el siguiente problema, denominado **BVPJ localizado**, el cual se utilizará para definir las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de salto) que debe satisfacer las funciones óptimas de base y otras funciones auxiliares importantes. Dice así:

"Dada una función $u_S \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$, encuéntrese una función $\widehat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$ y que:

$$(P - B - R_J) \widehat{u} = \widehat{f} - \widehat{j}_R \quad (3.1.13)$$

con los siguientes datos: $\widehat{f} \equiv P u_\Omega$ y $\widehat{j}_R \equiv R_J u_\Sigma$ donde $u_\Omega \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $u_\Sigma \in N_B$."

Una suposición básica de la metodología FEM-OF es que el BVPJ localizado define problemas de contorno locales, independientes y bien planteados, en cada uno de los subdominios de la partición.

Finalmente, el **problema dual del BVPJ localizado** se utilizará para definir las condiciones de continuidad (en general, las condiciones de salto) que debe satisfacer las funciones óptimas de peso. Dice así:

"Dada una función $w_S \in N_C$, encuéntrese una función $\widehat{w} \in \widehat{D}_2(\Omega)$ tal que $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$ y que:

$$(Q - C - R_K) \widehat{w} = 0 \quad (3.1.14)$$

Al igual que el BVPJ localizado, se supone que el problema dual también define problemas de contorno locales, independientes y bien planteados, en cada uno de los subdominios de la partición.

3.1.3.- Funciones Óptimas de Base

Las funciones óptimas de base satisfacen el BVPJ localizado (3.1.13) considerando que $\widehat{f} \equiv 0$ y $\widehat{j}_R \equiv 0$; esto es: "dada una función $u_S \in N_B$, encuéntrese una función $\widehat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$ y que $(P - B - R_J) \widehat{u} = 0$ ". Esta última ecuación significa que las funciones óptimas de base pertenecen a los siguientes espacios nulos: N_P , N_B y N_{R_J} .

En particular, si además se impone la condición $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S = 0$, entonces la única solución a este problema es $\widehat{u} = 0$, ya que lo anterior equivale a plantear problemas de contorno homogéneos locales con condiciones de frontera homogéneas locales en cada uno de los subdominios de la partición. En consecuencia, $S_K^* : \widehat{D}_1 \rightarrow \widehat{D}_2^*$ define un mapeo biyectivo entre las funciones óptimas de base \widehat{O}_B y su imagen bajo $S_K^* (\widehat{O}_B)$.

Entonces, una función óptima de base se puede caracterizar de manera única especificando la condición $S_K^* \widehat{u} = S_K^* u_S$. En la práctica, lo anterior significa que una función óptima de base se puede caracterizar de manera única especificando sus *trazas* en la frontera interior Σ .

Definición 3.1.3.- Espacio de funciones óptimas de base

Sea el **espacio de funciones óptimas de base** \widehat{O}_B , el cual se define como:

$$\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \quad (3.1.15)$$

donde los espacios nulos de los operadores P , B y R_J se definen como:

$$N_P \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Pv = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (3.1.16)$$

$$N_B \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid Bv = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (3.1.17)$$

$$N_{R_J} \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid R_J v = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (3.1.18)$$

Lo anterior implica que:

$$\langle (P - B - R_J)v, w \rangle = 0, \forall v \in \widehat{O}_B \quad (3.1.19)$$

Puesto que las funciones óptimas de base pertenecen al espacio nulo de P , esto es $v \in N_P$, se les puede considerar como ***soluciones homogéneas*** construidas de manera independiente en cada uno de los subdominios de la partición y que satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en las fronteras de los subdominios.

3.1.4.- Funciones Óptimas de Peso

Las funciones óptimas de peso satisfacen el **problema dual del BVPJ localizado (3.1.14)**, el cual dice: "dada una función $w_S \in N_C$, encuéntrese una función $\widehat{w} \in \widehat{D}_2(\Omega)$ tal que $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$ y que $(Q - C - R_K) \widehat{w} = 0$ ". Esta última ecuación significa que las funciones óptimas de peso pertenecen a los siguientes espacios nulos: N_Q , N_C y N_{R_K} .

De igual forma que el BVPJ localizado, el problema dual cumple con la siguiente propiedad. $S_J^* : \widehat{D}_2 \rightarrow \widehat{D}_1^*$ define un *mapeo biyectivo* entre las funciones óptimas de peso \widehat{O}_T y su imagen bajo $S_J^*(\widehat{O}_T)$. Consecuentemente, una función óptima de peso se puede caracterizar de manera única especificando la condición $S_J^* \widehat{w} = S_J^* w_S$. En la práctica, lo anterior significa que una función óptima de peso se puede caracterizar de manera única especificando sus *trazas* en la frontera interior Σ .

Definición 3.1.4.- Espacio de funciones óptimas de peso

Sea el **espacio de funciones óptimas de peso** \widehat{O}_T , el cual se define como:

$$\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega) \quad (3.1.20)$$

donde los espacios nulos de los operadores Q , C y R_K se definen como:

$$N_Q \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Qw = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (3.1.21)$$

$$N_C \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid Cw = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (3.1.22)$$

$$N_{R_K} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid R_K w = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (3.1.23)$$

Lo anterior implica que:

$$\langle (Q^* - C^* - R_K^*)u, w \rangle = 0, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.1.24)$$

3.1.5.- Espacio de Funciones Óptimas

El *espacio de funciones óptimas* se define como la suma directa del espacio de funciones óptimas de base y el espacio de funciones óptimas de peso, esto es, $\widehat{O}_B \oplus \widehat{O}_T$.

3.1.6.- Función auxiliar u_p

La función auxiliar u_p es solución del BVPJ localizado (3.1.13) considerando que $\widehat{f} \equiv f$, $\widehat{j}_R \equiv j_R$ y $S_K^* u_S \equiv 0$; esto es: "encuéntrese una función $\widehat{u} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $S_K^* \widehat{u} = 0$ y que $(P - B - R_J) \widehat{u} = f - j_R$ ". Lo anterior equivale a plantear problemas de contorno no homogéneos locales con condiciones de frontera locales establecidas por $S_K^* \widehat{u} = 0$ y $R_J \widehat{u} = j_R$ (junto con $B \widehat{u} = 0$) en cada uno de los subdominios Ω_i de la partición.

Definición 3.1.5.- Función auxiliar u_p

La *función auxiliar* $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ satisface el siguiente BVPJ localizado:

$$(P - B - R_J)u_p = f - j_R \quad (3.1.25)$$

$$S_K^* u_p = 0 \quad (3.1.26)$$

La función auxiliar u_p *no* es una función óptima de base, pero juega un papel especial en la metodología FEM-OF. Se le puede considerar como una *solución particular* construida de

manera independiente en cada uno de los subdominios de la partición y que satisface ciertas condiciones de continuidad en las fronteras de los subdominios.

Entonces, la solución del BVPJ se puede escribir como $u = v + u_p$, donde $v \in \widehat{O}_B$; esto es:

$$\langle (P - B - J)v, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle - \langle (P - B - J)u_p, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \quad (3.1.27)$$

El hecho que la función auxiliar u_p satisfaga la condición $S_K^* u_p = 0$ significa que ésta no contribuye a recabar la información buscada. La única función que recaba la información buscada de la solución en Σ es $v \in \widehat{O}_B$.

3.1.7.- Relación entre los Operadores S_K y S_J

Si se considera que $v \in \widehat{O}_B$ y que $w \in \widehat{O}_T$ se puede establecer la siguiente relación:

$$\langle (P - B - J)v, w \rangle = \langle (P - B - R_J - S_J)v, w \rangle = -\langle S_J v, w \rangle, \quad \forall v \in \widehat{O}_B \quad (3.1.28)$$

$$\langle (Q - C - K)^* v, w \rangle = \langle (Q - C - R_K - S_K)^* v, w \rangle = -\langle S_K^* v, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.1.29)$$

Puesto que $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$ entonces:

$$-\langle S_J v, w \rangle = -\langle S_K^* v, w \rangle, \quad \forall (v, w) \in \widehat{O}_B \times \widehat{O}_T \quad (3.1.30)$$

Teorema 3.1.1.-

Considérese el espacio de funciones óptimas. Una función óptima de base contiene la información buscada si y solo si satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov.

Demostración:

De (3.1.28) y (3.1.29) se tiene (3.1.30), expresión que demuestra el teorema, ya que se establece una igualdad entre el operador S_J que se asocia con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov con el operador S_K^* que se asocia con la información buscada, cuando se considera el espacio de funciones óptimas.

□

3.2. - Formulaciones Débiles

Se dispone de tres procedimientos para recabar la información buscada de la solución en la frontera interior Σ : el método directo de Steklov-Poincaré, el cual utiliza funciones óptima de base; el método indirecto de Trefftz-Herrera, el cual utiliza funciones óptimas de peso; y el método de Petrov-Galerkin, el cual utiliza tanto funciones óptimas de base como funciones óptimas de peso. La manera en la cual se presentan las tres formulaciones débiles en esta sección 3.2, se le llamará *convencional*. Esto es para poderla distinguir de una manera de presentación alternativa que se desarrollará en la siguiente sección 3.3, que será más adecuada para el planteamiento de la metodología FEM-OF.

3.2.1. - Problema General

Definición 3.2.1. - Problema general o BVPJ general

El *problema general* es un BVPJ con condiciones de frontera homogéneas tal que:

$$(P - B - J)u = f - j \quad (3.2.1)$$

con los siguientes datos:

$$f \equiv Pu_{\Omega}, \quad j \equiv Ju_{\Sigma} \quad (3.2.2)$$

donde $u_{\Omega} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ y $u_{\Sigma} \in N_B$.

El problema general, también referido como *BVPJ general*, será el problema empleado por las formulaciones débiles *convencionales*.

Nótese que las condiciones de frontera homogéneas y las condiciones de saltos prescritos son compatibles, ya que $u_\Sigma \in N_B$.

En consecuencia, el BVPJ localizado para calcular la función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ que se asocia al problema general es:

$$(P - B - R_J)u_p = f - j_R \quad (3.2.3)$$

$$S_K^* u_p = 0 \quad (3.2.4)$$

3.2.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré

En el método directo se construye un espacio de funciones de base especializado, llamado espacio de funciones óptimas de base \widehat{O}_B , de modo que sus funciones contienen la información buscada. De hecho, una función óptima de base contiene la información buscada si y solo si satisface las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov. En este método el espacio de funciones de peso se toma igual que el espacio de funciones de base.

Teorema 3.2.1.- Método directo de Steklov-Poincaré

Sea el BVPJ general (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \cap \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u = \widehat{v} + u_p$, donde $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.2.3)-(3.2.4).

Entonces $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \quad (3.2.5)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \hat{v} = S_K^* u$.

Puesto que $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ donde $u = \hat{v} + u_p$, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\hat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $J = S_J + R_J$, se tiene que:

$$\langle (P - B - S_J - R_J)(\hat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j_S - j_R, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Puesto que los operadores son lineales, reagrupando términos se tiene que:

$$\begin{aligned} & -\langle S_J \hat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \hat{v}, w \rangle = \\ & \langle S_J u_p - j_S, w \rangle - \langle (P - B - R_J) u_p, w \rangle + \langle f - j_R, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \end{aligned}$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) u_p = f - j_R$, esto es:

$$-\langle S_J \hat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \hat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p - j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) \hat{v} = 0$, ya que $\hat{v} \in \widehat{O}_B$, esto es:

$$-\langle S_J \hat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p - j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Finalmente, se tiene que:

$$-\langle S_J \hat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Condición necesaria:

Sea $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ y supóngase que:

$$-\langle S_J \hat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Completando términos, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\hat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_B \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\hat{v} + u_p - u), w \rangle = 0, \quad \forall w \in \widehat{O}_B$$

Puesto que se trata de un BVPJ homogéneo con condiciones tanto de frontera como de saltos prescritos homogéneas y con solución única, ésta debe ser cero. En consecuencia:

$$\widehat{v} + u_p - u = 0 \Rightarrow \widehat{v} + u_p = u$$

Aplicando el operador S_K^* , se tiene que:

$$S_K^*(\widehat{v} + u_p) = S_K^*u$$

Puesto que $S_K^*u_p = 0$, se tiene que:

$$S_K^*\widehat{v} = S_K^*u$$

Finalmente $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada y se le denota como $\widehat{v} \equiv \widehat{v}$.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.5) se tiene que $u = \widehat{v} + u_p$ es la solución en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método directo de Steklov-Poincaré no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

3.2.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

En el método indirecto se construye un espacio de funciones de peso especializado, llamado espacio de funciones óptimas de peso \widehat{O}_T , de modo que al aplicar el método de los residuos pesados, sus funciones capturan la información buscada. En este método el espacio de funciones de base se toma igual que el espacio de funciones de peso.

Teorema 3.2.2.- Método indirecto de Trefftz-Herrera

Sea el BVPJ general (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$.

Entonces $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.2.6)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$.

Puesto que $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando que $Q^* - C^* - K^* = P - B - J$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $K^* = R_K^* + S_K^*$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Finalmente, por construcción se cumple que $\langle (Q^* - C^* - R_K^*)\hat{u}, w \rangle = 0$,

$\forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, esto es:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Condición necesaria:

Sea $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ y supóngase que:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$-\langle S_K^* u, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$-\langle S_K^* (\hat{u} - u), w \rangle = 0, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que \widehat{O}_T es TH-Completo para S_K^* se tiene que:

$$S_K^*(\hat{u} - u) = 0 \Rightarrow S_K^* \hat{u} = S_K^* u$$

Finalmente, $\hat{u} \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ contiene la información buscada y se le denota como

$$\hat{u} \equiv \hat{u}.$$

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.6) se tiene que \hat{u} es la información buscada de la solución pero solamente en Σ . Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

3.2.4.- Método de Petrov-Galerkin

El método de Petrov-Galerkin utiliza espacios de funciones de base y de funciones de peso diferentes. En particular, se utiliza el espacio de funciones óptimas de base \widehat{O}_B desarrollado en el método directo y el espacio de funciones óptimas de peso \widehat{O}_T desarrollado en el método indirecto.

Se tienen dos formulaciones. La primera es como un método directo y la segunda como un método indirecto. A continuación se presenta la primera, la cual se prefiere ya que proporciona la solución en todo el dominio.

Teorema 3.2.3.- Método (directo) de Petrov-Galerkin

Sea el BVPJ *general* (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo

para $S_j : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_k} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo

para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u = \widehat{v} + u_p$, donde $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.2.3)-(3.2.4).

Entonces $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.2.7)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u$.

Puesto que $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ donde $u = \widehat{v} + u_p$, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $J = S_J + R_J$, se tiene que:

$$\langle (P - B - S_J - R_J)(\widehat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j_S - j_R, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que los operadores son lineales, reagrupando términos se tiene que:

$$\begin{aligned} -\langle S_J \widehat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \widehat{v}, w \rangle = \\ \langle S_J u_p - j_S, w \rangle - \langle (P - B - R_J) u_p, w \rangle + \langle f - j_R, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \end{aligned}$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) u_p = f - j_R$, esto es:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle + \langle (P - B - R_J) \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p - j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Por construcción se cumple que $(P - B - R_J) \widehat{v} = 0$, $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$, esto es:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p - j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Finalmente, se tiene que:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Condición necesaria:

Sea $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y supóngase que:

$$-\langle S_J \widehat{v}, w \rangle = \langle S_J u_p, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Completando términos, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_p), w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)(\widehat{v} + u_p - u), w \rangle = 0, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que se trata de un BVPJ homogéneo con condiciones tanto de frontera como de saltos prescritos homogéneas y con solución única, ésta debe ser cero. En consecuencia:

$$\widehat{v} + u_p - u = 0 \Rightarrow \widehat{v} + u_p = u$$

Aplicando el operador S_K^* , se tiene que:

$$S_K^*(\widehat{v} + u_p) = S_K^*u$$

Puesto que $S_K^*u_p = 0$, se tiene que:

$$S_K^*\widehat{v} = S_K^*u$$

Finalmente $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada y se le denota como $\widehat{v} \equiv \widehat{v}$.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.7) se tiene que $u = \widehat{v} + u_p$ es la solución en el interior de cada subdominio Ω_i (en la versión directa del método de Petrov-Galerkin no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

Ahora bien, la segunda formulación es como método indirecto.

Teorema 3.2.4. - Método (indirecto) de Petrov-Galerkin

Sea el BVPJ general (3.2.1)-(3.2.2).

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_J : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$.

Entonces $\hat{u} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$, si y solo si:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.2.8)$$

Demostración:

Condición suficiente:

Supóngase que $\hat{u} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada, esto es: $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$.

Puesto que $\hat{u} \in \widehat{O}_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$, se tiene que:

$$\langle (P - B - J)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando que $Q^* - C^* - K^* = P - B - J$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Considerando la descomposición del operador $K^* = R_K^* + S_K^*$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)\hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega)$$

Finalmente, por construcción se cumple que $\langle (Q^* - C^* - R_K^*)\hat{u}, w \rangle = 0$,

$\forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, esto es:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

Condición necesaria:

Sea $\hat{u} \in \widehat{O}_B(\Omega)$ y supóngase que:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

La solución $u \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ cumple que:

$$-\langle S_K^* u, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$$

Restando las dos últimas expresiones, se tiene que:

$$-\langle S_K^* (\widehat{u} - u), w \rangle = 0, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que \widehat{O}_T es TH-Completo para S_K^* se tiene que:

$$S_K^* (\widehat{u} - u) = 0 \Rightarrow S_K^* \widehat{u} = S_K^* u$$

Finalmente, $\widehat{u} \in \widehat{O}_B(\Omega)$ contiene la información buscada y se le denota como $\widehat{u} \equiv \widehat{u}$.

□

Cuando se satisface la ecuación (3.2.8) se tiene que \widehat{u} es la información buscada de la solución pero solamente en Σ . Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

3.3- Formulaciones Débiles Alternativas

Como ya se mencionó, se dispone de tres procedimientos para recabar la información buscada de la solución en la frontera interior Σ : el método directo de Steklov-Poincaré, el método indirecto de Trefftz-Herrera y el método de Petrov-Galerkin. La manera en la cual se presentan las tres formulaciones débiles en esta sección 3.3, se le llamará *alternativa*. Es importante hacer notar que las formulaciones débiles *alternativas* son más adecuadas para el planteamiento de la metodología FEM-OF que las formulaciones débiles *convencionales* presentadas en la sección anterior 3.2.

El propósito de presentar las *formulaciones débiles alternativas* es para establecer una *familia unificada de métodos* que se distinguen entre sí por el uso diferente de espacios especializados de funciones de base y de funciones de peso. La estructura unificada de estos métodos se debe a las fórmulas de Green-Herrera $P-B-J \equiv Q^* - C^* - K^*$; a la descomposición dual de los operadores $J \equiv S_J + R_J$ y $K \equiv S_K + R_K$; y a la forma de construir los espacios de funciones óptimas de base \widehat{O}_B y de funciones óptimas de peso \widehat{O}_T .

Además, las formulaciones débiles alternativas tienen un aspecto similar a aquellas que aparecen en la literatura de métodos de elementos finitos convencionales.

3.3.1.- Problema Básico

Se transformará el *BVPJ general* (3.2.1)-(3.2.2): $(P-B-J)u = f - j$, sujeto a condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y a condiciones de saltos prescritos no

homogéneos $j \equiv Ju_\Sigma$ en Σ (donde $\widehat{u}_\Sigma \in N_B$), a otro BVPJ equivalente pero ahora con condiciones de saltos prescritos homogéneos en Σ .

Para tal efecto, primero se construye convenientemente *-ad-hoc-* una función $u_\Sigma \in N_B$ de modo que satisfaga la condición $S_K^* u_\Sigma = 0$, junto con las condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y las condiciones de saltos prescritos $Ju_\Sigma = Ju_\Sigma$ en Σ . Al respecto se precisa lo siguiente. Esta función existe porque las condiciones son compatibles; la función $u_\Sigma \in N_B$ no es una solución del BVPJ; y por último, la condición $S_K^* u_\Sigma = 0$ significa que la función $u_\Sigma \in N_B$ no contiene en absoluto la información buscada.

Entonces, la solución del BVPJ general $u \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se puede escribir como $u = u_C + u_\Sigma$, donde $u_C \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es una **función totalmente continua**, tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ . Por otro lado, puesto que la función $u_\Sigma \in N_B$ satisface las condiciones de saltos prescritos $Ju_\Sigma = Ju_\Sigma$ en Σ , en general es una **función totalmente discontinua**, tanto en su valor como en sus derivadas normales a través de Σ .

En consecuencia, el BVPJ general se puede transformar en un BVPJ equivalente pero con **solución totalmente continua** a través Σ , tanto en su valor como en sus derivadas normales, además de tener condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$ y con condiciones de saltos prescritos homogéneos en Σ . A este nuevo problema se le llamará **problema básico**, o bien **BVPJ básico**, y será el problema empleado por las formulaciones débiles alternativas. Se describe a continuación.

Definición 3.3.1. - Problema básico o BVPJ básico

El **problema básico** es un BVPJ con condiciones de frontera homogéneas tal que:

$$(P - B - J)u_C = f - Pu_\Sigma \tag{3.3.1}$$

con los siguientes datos y condiciones:

$$f \equiv Pu_\Omega, \quad S_K^* u_\Sigma = 0, \quad Ju_\Sigma = Ju_\Sigma \tag{3.3.2}$$

donde $u_\Omega \in D_1(\Omega)$, $u_\Sigma \in N_B$ y, además, $j \equiv \widehat{Ju}_\Sigma$ son las condiciones de saltos prescritos en Σ del problema general asociado, siendo la solución de éste último $u = u_C + u_\Sigma$.

Procedimiento:

Sea el BVPJ general:

$$(P - B - J)u = f - j$$

Puesto que $u = u_C + u_\Sigma$, se tiene que:

$$(P - B - J)(u_C + u_\Sigma) = f - j$$

$$(P - B - J)u_C = f - j - (P - B - J)u_\Sigma$$

Puesto que $Bu_\Sigma = 0$ y $Ju_\Sigma = j$, se tiene que:

$$(P - B - J)u_C = f - Pu_\Sigma$$

Junto con las condiciones de frontera homogéneas en $\partial\Omega$:

$$Bu_C = B(u - u_\Sigma) = Bu - Bu_\Sigma = 0 - 0 = 0$$

Y las condiciones de salto prescritos homogéneos en Σ :

$$Ju_C = J(u - u_\Sigma) = Ju - Ju_\Sigma = j - j = 0$$

□

En consecuencia, el BVPJ localizado para calcular la función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ que se asocia al problema básico es:

$$(P - B - R_J)u_p = f - Pu_\Sigma \tag{3.3.3}$$

$$S_K^* u_p = 0 \tag{3.3.4}$$

3.3.2.- Método Directo de Steklov-Poincaré

Teorema 3.3.1.- Método directo de Steklov-Poincaré

Sea el BVPJ básico (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \cap \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_j : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u_C = \widehat{v} + u_P$, donde $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ y $u_P \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \widehat{v} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\langle (P - B - J)\widehat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B \quad (3.3.5)$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.5) es equivalente a la formulación convencional (3.2.5). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.1.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\langle (P - B - J)\widehat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

Puesto que $J = S_j + R_j$, se tiene que:

$$\langle (P - B - R_j)\widehat{v}, w \rangle - \langle S_j \widehat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - R_j)u_P, w \rangle + \langle S_j u_P, w \rangle$$

Finalmente, puesto que $\langle (P - B - R_j)u_P, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle$, y $\langle (P - B - R_j)\widehat{v}, w \rangle = 0$

porque $\widehat{v} \in \widehat{O}_B$, se tiene que:

$$-\langle S_j \widehat{v}, w \rangle = \langle S_j u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_B$$

lo cual es la caracterización convencional del método de Steklov-Poincaré cuando $j = 0$, ya que $u_C = \widehat{v} + u_P$ es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de Σ .

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.5) se tiene que $u = u_C + u_\Sigma = \hat{v} + u_P + u_\Sigma$ es la solución del BVPJ general en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método directo de Steklov-Poincaré no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

3.3.3.- Método Indirecto de Trefftz-Herrera

Teorema 3.3.2.- Método indirecto de Trefftz-Herrera

Sea el BVPJ básico (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \cap \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u_C = \hat{v} + u_P$, donde $\hat{v} \in \widehat{O}_T$ y $u_P \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\hat{v} \in \widehat{O}_T$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \hat{v} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\langle (P - B - J)\hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.3.6)$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.6) es equivalente a la formulación convencional (3.2.6). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.2.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\langle (P - B - J)\hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que $P - B - J = (Q - C - K)^*$, se tiene que:

$$\langle (Q - C - K)^* \hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (Q - C - K)^* u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Reagrupando términos, se tiene que:

$$\langle (Q - C - K)^* (\hat{v} + u_P), w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que $u_C = \hat{v} + u_P$, se tiene que:

$$\langle (Q - C - K)^* u_C, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que $K = S_K + R_K$, se tiene que:

$$\langle (Q - C - R_K)^* u_C, w \rangle - \langle S_K^* u_C, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Finalmente, puesto que $\langle (Q - C - R_K)^* u_C, w \rangle = 0, \forall w \in \widehat{O}_T$, se tiene que:

$$\langle -S_K^* u_C, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle \quad \forall w \in \widehat{O}_T$$

lo cual es la caracterización convencional del método de Trefftz-Herrera cuando $j = 0$, ya que $u_C = \hat{v} + u_P$ es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de Σ .

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.6) se tiene que \hat{v} es la información buscada de la solución del BVPJ general pero solamente en Σ . Para calcular la solución en el interior de cada subdominio Ω_i se requiere del procedimiento de interpolación óptima.

3.3.4.- Método de Petrov-Galerkin

Teorema 3.3.3.- Método de Petrov-Galerkin

Sea el BVPJ básico (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de base TH-Completo para $S_j : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Sea $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ un conjunto de funciones óptimas de peso TH-Completo para $S_K^* : \widehat{D}_1(\Omega) \rightarrow \widehat{D}_2^*(\Omega)$.

Supóngase que el BVPJ tiene solución única $u_C \in N_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que $u_C = \hat{v} + u_P$, donde $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ y $u_P \in \widehat{D}_1(\Omega)$ es solución del BVPJ localizado (3.3.3)-(3.3.4).

Entonces $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ contiene la información buscada de la solución en la frontera interior Σ , esto es que $S_K^* \hat{v} = S_K^* u_C$, si y solo si:

$$\langle (P - B - J)\hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T \quad (3.3.7)$$

Demostración:

Se demostrará que la formulación alternativa (3.3.7) es equivalente a la formulación convencional (3.2.7). Entonces, este teorema quedará demostrado en virtud del teorema 3.2.3.

Partiendo de la formulación débil alternativa:

$$\langle (P - B - J)\hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

Puesto que $J = S_J + R_J$, se tiene que:

$$\langle (P - B - R_J)\hat{v}, w \rangle - \langle S_J \hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - R_J)u_P, w \rangle + \langle S_J u_P, w \rangle$$

Finalmente, puesto que $\langle (P - B - R_J)u_P, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle$, y $\langle (P - B - R_J)\hat{v}, w \rangle = 0$

porque $\hat{v} \in \widehat{O}_B$, se tiene que:

$$-\langle S_J \hat{v}, w \rangle = \langle S_J u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

lo cual es la caracterización convencional del método (directo) de Petrov-Galerkin cuando $j = 0$, ya que $u_C = \hat{v} + u_P$ es una función totalmente continua tanto en el valor de su función como en el valor de sus derivadas normales a través de Σ .

□

Cuando se satisface la ecuación (3.3.7) se tiene que $u = u_C + u_\Sigma = \hat{v} + u_P + u_\Sigma$ es la solución del BVPJ general en el interior de cada subdominio Ω_i (en el método de Petrov-Galerkin no se requiere del procedimiento de interpolación óptima).

Capítulo 4:

FEM

con

Funciones Óptimas:

FEM-OF

Indice:

- 4.1.- FEM con Funciones Óptimas (FEM-OF)
- 4.2.- FEM-OF Steklov-Poincaré
- 4.3.- FEM-OF Trefftz-Herrera
- 4.4.- FEM-OF Petrov-Galerkin
- 4.5.- FEM-OF para el Caso Simétrico

4.1.- FEM con Funciones Óptimas (FEM-OF)

La forma en que se implementan numéricamente las *formulaciones débiles alternativas* planteadas en la sección 3.3, es mediante los *Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF¹)*. Su característica esencial es que los espacios de funciones óptimas \widehat{O}_B y \widehat{O}_T , que en general son de dimensión infinita, se reemplazan por otros *espacios de dimensión finita*. Los detalles se describen a continuación.

En la práctica, los espacios de funciones óptimas de base $\widehat{O}_B \subset \widehat{D}_1(\Omega) \equiv \widehat{H}^2(\Omega)$ y de funciones óptimas de peso $\widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega) \equiv \widehat{H}^2(\Omega)$, que para problemas con más de una variable independiente son de dimensión infinita, se necesita proyectarlos en *espacios de dimensión finita*, $\overline{O}_B \subset \widehat{O}_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ y $\overline{O}_T \subset \widehat{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$. Lo anterior introduce una primera fuente de error: un *error de proyección*. Estos espacios de dimensión finita \overline{O}_B y \overline{O}_T , están formados por las funciones óptimas cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_Σ . Sin embargo, si se desea trabajar en estos espacios se requiere satisfacer las condiciones impuestas por los espacios nulos N_p y N_Q , las cuales involucran la *solución analítica -solución exacta-* de las ecuaciones diferenciales homogéneas $\nabla v = 0$ y $\nabla^* w = 0$ respectivamente. Por este motivo, a las funciones que pertenecen a estos espacios se les llamará *funciones óptimas exactas*. Sin embargo, calcular dichas soluciones exactas en general no es posible.

¹ Finite Element Method with Optimal Functions

Como consecuencia de la dificultad anterior, se introducen otros dos espacios de funciones también de dimensión finita $\widetilde{O}_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ y $\widetilde{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, que aproximan a los espacios de funciones óptimas \overline{O}_B y \overline{O}_T . Lo anterior introduce una segunda fuente de error: un **error de aproximación**. Estos espacios de dimensión finita $\widetilde{O}_B \not\subset \overline{O}_B$ y $\widetilde{O}_T \not\subset \overline{O}_T$, que ya no consisten de funciones óptimas, ahora están formados por funciones polinomiales por tramos de grado G_Ω en cada subdominio Ω_i de la partición y cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_Σ . En estos espacios solamente es posible satisfacer de forma aproximada las condiciones impuestas por los espacios nulos N_P y N_Q , calculando una **solución numérica** de las ecuaciones diferenciales homogéneas $\nabla v = 0$ y $\nabla^* w = 0$ respectivamente, con ayuda de métodos numéricos adecuados. Por este motivo y por analogía, a las funciones que pertenecen a estos espacios se les llamará **funciones óptimas aproximadas**, aunque en realidad no sean *óptimas*.

Hasta el momento se ha privilegiado el uso de métodos numéricos de colocación ortogonal (*colocación-TH*). Sin embargo, las metodologías FEM-OF utilizan precisamente métodos de elementos finitos para resolver los BVPJ localizados que definen las funciones óptimas.

A continuación se describen las tres versiones de la metodología FEM-OF:

- ◆ FEM-OF Steklov-Poincaré,
- ◆ FEM-OF Trefftz-Herrera, y
- ◆ FEM-OF Petrov-Galerkin.

4.2.- FEM-OF Steklov-Poincare

4.2.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Steklov-Poincaré es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\hat{v} \in \hat{O}_B$ la información buscada de la solución en Σ . Se busca una función

$\bar{v} \in \bar{O}_B \equiv \bar{N}_P \cap \bar{N}_B \cap \bar{N}_{R_j} \subset \hat{D}_1(\Omega) \cap \hat{D}_2(\Omega)$ tal que:

$$\langle (P-B-J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle f - Pu_{\Sigma}, \bar{w} \rangle - \langle (P-B-J)u_P, \bar{w} \rangle, \forall \bar{w} \in \bar{O}_B \quad (4.2.1)$$

Entonces $S_K^* \bar{v} \approx S_K^* \hat{v}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i es $u \approx \bar{v} + u_P + u_{\Sigma}$.

4.2.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Steklov-Poincaré se introducen los siguientes elementos. Sea una

base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de base $\bar{O}_B \equiv \bar{N}_P \cap \bar{N}_B \cap \bar{N}_{R_j}$ de

dimensión N , en consecuencia:

$$\bar{O}_B = \text{generado} \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\} \quad (4.2.2)$$

Sea la función $\bar{v} \in \bar{O}_B$ una representación de la información buscada $\hat{v} \in \hat{O}_B$, en términos de

una combinación lineal de la base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ de \bar{O}_B , esto es:

$$\hat{v} \approx \bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \bar{v}^{\beta} \quad (4.2.3)$$

Para obtener sistemas de ecuaciones determinados, se requiere trabajar con un espacio de funciones de peso también de dimensión N . Entonces se elige como espacio de funciones de peso de dimensión N al espacio de funciones óptimas de base:

$$\overline{O}_T \equiv \overline{O}_B = \text{generado} \{ \overline{v}^1, \overline{v}^2, \dots, \overline{v}^N \} \quad (4.2.4)$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de (4.2.3) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \langle (P-B-J) \overline{v}^{\beta}, \overline{v}^{\alpha} \rangle = \langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{v}^{\alpha} \rangle - \langle (P-B-J)u_P, \overline{v}^{\alpha} \rangle$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (4.2.5)

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}} \underline{C} = \underline{B} \quad (4.2.6)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_{\beta} \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_{β} que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \langle (P-B-J) \overline{v}^{\beta}, \overline{v}^{\alpha} \rangle \quad (4.2.7)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_{\alpha} \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_{\alpha} = \langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{v}^{\alpha} \rangle - \langle (P-B-J)u_P, \overline{v}^{\alpha} \rangle \quad (4.2.8)$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas \overline{O}_B por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_J}$.

4.3.- FEM-OF Trefftz-Herrera

4.3.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Trefftz-Herrera es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2).

Sea $\hat{v} \in \widehat{O}_T$ la información buscada de la solución en Σ . Se busca una función $\bar{v} \in \overline{O}_T \equiv \overline{N}_Q \cap \overline{N}_C \cap \overline{N}_{R_k} \subset \widehat{D}_1(\Omega) \cap \widehat{D}_2(\Omega)$ tal que:

$$\langle (P-B-J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle f - Pu_{\Sigma}, \bar{w} \rangle - \langle (P-B-J)u_p, \bar{w} \rangle, \forall \bar{w} \in \overline{O}_T \quad (4.3.1)$$

Entonces $S_K^* \bar{v} \approx S_K^* \hat{v}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

4.3.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Trefftz-Herrera se introducen los siguientes elementos. Sea una base $\{\bar{w}^1, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de prueba $\overline{O}_T \equiv \overline{N}_Q \cap \overline{N}_C \cap \overline{N}_{R_k}$, de dimensión N , en consecuencia:

$$\overline{O}_T = \text{generado} \{ \bar{w}^1, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^N \} \quad (4.3.2)$$

Para obtener sistemas de ecuaciones determinados, se requiere trabajar con un espacio de funciones de base también de dimensión N . Entonces se elige como espacio de funciones de base de dimensión N al espacio de funciones óptimas de peso:

$$\overline{O}_B \equiv \overline{O}_T = \text{generado} \left\{ \overline{w}^1, \overline{w}^2, \dots, \overline{w}^N \right\} \quad (4.3.3)$$

Sea la función $\overline{v} \in \overline{O}_T$ una representación de la información buscada $\widehat{v} \in \widehat{O}_T$, en términos de una combinación lineal de la base $\left\{ \overline{w}^1, \overline{w}^2, \dots, \overline{w}^N \right\}$ de \overline{O}_T , esto es:

$$\widehat{v} \approx \overline{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \overline{w}^{\beta} \quad (4.3.4)$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de (4.3.4) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left\langle (P-B-J) \overline{w}^{\beta}, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle = \left\langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_p, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (4.3.5)

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}} \underline{C} = \underline{B} \quad (4.3.6)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_{\beta} \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_{β} que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \left\langle (P-B-J) \overline{w}^{\beta}, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle \quad (4.3.7)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_{\alpha} \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_{\alpha} = \left\langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_p, \overline{w}^{\alpha} \right\rangle \quad (4.3.8)$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas \overline{O}_T por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$.

4.4.- FEM-OF Petrov-Galerkin

4.4.1.- Objetivo

El objetivo de FEM-OF Petrov-Galerkin es el siguiente. Sea el BVPJ *básico* (3.3.1)-(3.3.2). Sea $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ la información buscada de la solución en Σ . Se busca una función $\bar{v} \in \overline{O}_B \equiv \overline{N}_P \cap \overline{N}_B \cap \overline{N}_{R_j} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ tal que:

$$\langle (P-B-J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle f - Pu_{\Sigma}, \bar{w} \rangle - \langle (P-B-J)u_P, \bar{w} \rangle, \quad \forall \bar{w} \in \overline{O}_T \quad (4.4.1)$$

donde $\overline{O}_T \equiv \overline{N}_Q \cap \overline{N}_C \cap \overline{N}_{R_k} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$. Entonces $S_K^* \bar{v} \approx S_K^* \hat{v}$ y la solución del BVPJ *general* en el interior de cada subdominio Ω_i es $u \approx \bar{v} + u_P + u_{\Sigma}$.

4.4.2.- Implementación

Para implementar FEM-OF Petrov-Galerkin se introducen los siguientes elementos. Sea una base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de base $\overline{O}_B \equiv \overline{N}_P \cap \overline{N}_B \cap \overline{N}_{R_j}$ de dimensión N , en consecuencia:

$$\overline{O}_B = \text{generado} \{ \bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N \} \quad (4.4.2)$$

Sea la función $\bar{v} \in \overline{O}_B$ una representación de la información buscada $\hat{v} \in \widehat{O}_B$, en términos de una combinación lineal de la base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ de \overline{O}_B , esto es:

$$\hat{v} \approx \bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \bar{v}^{\beta} \quad (4.4.3)$$

Sea una base $\{\overline{w^1}, \overline{w^2}, \dots, \overline{w^N}\}$ del espacio de funciones óptimas de prueba

$\overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_k}}$, de dimensión N , en consecuencia:

$$\overline{O_T} = \text{generado} \left\{ \overline{w^1}, \overline{w^2}, \dots, \overline{w^N} \right\} \quad (4.4.4)$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de (4.4.4) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left\langle (P-B-J) \overline{v^{\beta}}, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle = \left\langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_p, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (4.4.5)

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}} \underline{C} = \underline{B} \quad (4.4.6)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_{\beta} \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_{β} que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \left\langle (P-B-J) \overline{v^{\beta}}, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle \quad (4.4.7)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_{\alpha} \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_{\alpha} = \left\langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle - \left\langle (P-B-J)u_p, \overline{w^{\alpha}} \right\rangle \quad (4.4.8)$$

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplazan los espacios de funciones óptimas exactas $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$, por los espacios de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O_B} \equiv \widetilde{N_P} \cap \widetilde{N_B} \cap \widetilde{N_{R_j}}$ y $\widetilde{O_T} \equiv \widetilde{N_Q} \cap \widetilde{N_C} \cap \widetilde{N_{R_k}}$, respectivamente.

4.5.- FEM-OF para el Caso Simétrico

Para el caso simétrico se tiene que el *operador diferencial es autoadjunto*, esto es:

$$\mathcal{L} u = \mathcal{L}^* u \quad (4.5.1)$$

y, en consecuencia, las funcionales bilineales asociadas cumplen con las siguientes igualdades:

$$\langle Pu, w \rangle = \langle Qu, w \rangle \quad (4.5.2)$$

$$\langle Bu, w \rangle = \langle Cu, w \rangle \quad (4.5.3)$$

$$\langle Ju, w \rangle = \langle Ku, w \rangle \quad (4.5.4)$$

inclusive:

$$\langle S_J u, w \rangle = \langle S_K u, w \rangle \quad (4.5.5)$$

$$\langle R_J u, w \rangle = \langle R_K u, w \rangle \quad (4.5.6)$$

Por lo tanto, el espacio de funciones óptimas de base $\overline{O_B}$ es igual al espacio de funciones óptimas de peso $\overline{O_T}$:

$$\overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_J}} = \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}} \equiv \overline{O_T} \quad (4.5.7)$$

y una propiedad importante para el caso simétrico es que las tres versiones de FEM-OF resultan ser las mismas.

Además, se tiene que la siguiente funcional bilineal es *simétrica*:

$$\langle (P - B - J) \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle (P - B - J) \bar{w}, \bar{v} \rangle \quad (4.5.8)$$

Demostración:

Por las igualdades (4.5.2)-(4.5.4) se tiene que:

$$\langle (P - B - J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle (Q - C - K)\bar{v}, \bar{w} \rangle$$

Calculando el transpuesto se tiene que:

$$\langle (Q - C - K)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle (Q - C - K)^* \bar{w}, \bar{v} \rangle$$

Finalmente, por las fórmulas de Green-Herrera se tiene que:

$$\langle (Q - C - K)^* \bar{w}, \bar{v} \rangle = \langle (P - B - J)\bar{w}, \bar{v} \rangle$$

□

De esta forma, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones que se deriva aplicando el método FEM-OF es simétrica. Además, si la funcional bilineal $\langle (P - B - J)\bar{v}, \bar{w} \rangle$ es **positiva-definida**, dicha matriz de coeficientes también lo será. Estas propiedades son de mucha relevancia, ya que se puede aplicar el **Método de Gradiente Conjugado (CGM¹)** [52, 53] para resolver el sistema de ecuaciones.

¹ Conjugate Gradient Method

Capítulo 5:

FEM-OF:

EDP Elíptica de 2° Orden

Indice:

- 5.1.- Operador Diferencial Elíptico
- 5.2.- Problema Básico
- 5.3.- Funciones Óptimas
- 5.4.- FEM-OF Steklov-Poincaré
- 5.5.- FEM-OF Trefftz-Herrera
- 5.6.- FEM-OF Petrov-Galerkin
- 5.7.- FEM-OF para el Caso Simétrico

5.1.- Operador Diferencial Elíptico

5.1.1.- Operador Diferencial

El operador diferencial elíptico general para n variables independientes se define como:

$$\mathcal{L} u(\underline{x}) \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad (5.1.1)$$

donde el operador $\nabla \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]_n$ es un vector columna de tamaño n ; y los coeficientes

$\underline{a} \equiv \left[a_{ij}(\underline{x}) \right]_{n \times n}$, $\underline{b} \equiv \left[b_i(\underline{x}) \right]_n$ y $c(\underline{x})$ son una matriz simétrica positiva-definida de tamaño $n \times n$, un vector columna de tamaño n y $c(\underline{x}) \geq 0$, respectivamente. Nótese que los coeficientes son funciones totalmente continuas excepto posiblemente a través de Σ . También, nótese que:

$$-\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad (5.1.2)$$

$$\nabla \cdot (\underline{b}u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) \quad (5.1.3)$$

5.1.2.- Operador Diferencial Adjunto

El operador diferencial adjunto formal para el caso elíptico es:

$$\mathcal{L}^* w = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (5.1.4)$$

Nótese que:

$$-\underline{b} \bullet \nabla w = -\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (5.1.5)$$

También nótese que si $\underline{b} = \underline{0}$, entonces el operador diferencial es **autoadjunto**, es decir:

$$\underline{\mathcal{L}} u = \underline{\mathcal{L}}^* u = -\nabla \bullet (\underline{a} \bullet \nabla u) + cu \quad (5.1.6)$$

5.1.3.- Funcional Bilineal $\mathcal{P}(u, w)$

La funcional bilineal $\mathcal{P}(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se define de manera puntual en cada subdominio Ω_i , esto es, $\forall \underline{x} \in \Omega_i$ se tiene que:

$$\mathcal{P}(u, w) \equiv w \underline{\mathcal{L}} u \equiv w \left(-\nabla \bullet (\underline{a} \bullet \nabla u) + \nabla \bullet (\underline{b}u) + cu \right) \quad (5.1.7)$$

5.1.4.- Funcional Bilineal $\mathcal{Z}^*(u, w)$

La funcional bilineal $\mathcal{Z}^*(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se define de manera puntual en cada subdominio Ω_i , esto es, $\forall \underline{x} \in \Omega_i$ se tiene que:

$$\mathcal{Z}^*(u, w) \equiv u \underline{\mathcal{L}}^* w = u \left(-\nabla \bullet (\underline{a} \bullet \nabla w) - \underline{b} \bullet \nabla w + cw \right) \quad (5.1.8)$$

5.1.5.- Funcional Bilineal $\underline{\mathcal{Q}}(u, w)$

La funcional bilineal vectorial $\underline{\mathcal{Q}}(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define de manera puntual en Ω , esto es, $\forall \underline{x} \in \Omega$ se tiene que:

$$\underline{\mathcal{Q}}(u, w) \equiv \underline{a} \bullet (u \nabla w - w \nabla u) + u \underline{b} w \quad (5.1.9)$$

Se sigue que la funcional bilineal real $\underline{\mathcal{Q}}(u, w) \bullet \underline{n}: \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$\underline{\mathcal{Q}}(u, w) \bullet \underline{n} = (\underline{a} \bullet (u \nabla w - w \nabla u) + u \underline{b} w) \bullet \underline{n} \quad (5.1.10)$$

donde \underline{n} es un vector normal a la frontera de la región considerada, ya sea $\partial\Omega$ o Σ . De forma equivalente se tiene que:

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) \bullet \underline{n} = \underline{a}_n \bullet (u \nabla w - w \nabla u) + u b_n w \quad (5.1.11)$$

donde:

$$\underline{a}_n = \underline{a} \bullet \underline{n} \quad (5.1.12)$$

$$b_n = \underline{b} \bullet \underline{n} \quad (5.1.13)$$

5.1.6. - Funcionales Bilineales $\mathcal{E}^*(u, w)$ y $\mathcal{B}(u, w)$

Las funcionales bilineales $\mathcal{E}^*(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se definen de manera puntual en $\partial\Omega$, esto es, $\forall \underline{x} \in \partial\Omega$ se tiene que:

$$\mathcal{B}(u, w) - \mathcal{E}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{D}}(u, w) \bullet \underline{n} \equiv u(\underline{a}_n \bullet \nabla w) - (\underline{a}_n \bullet \nabla u)w + u b_n w \quad (5.1.14)$$

donde la funcional bilineal $\mathcal{B}(u, w)$ contiene la información prescrita en $\partial\Omega$ (**condiciones de frontera**), mientras que la funcional bilineal $\mathcal{E}^*(u, w)$ contiene la información no prescrita en $\partial\Omega$.

Particularmente para un BVPJ con **condiciones de frontera tipo Dirichlet**, el valor de la función $u = u_\circ$ en $\partial\Omega$ es conocido, mientras que el valor de la derivada normal $\underline{a}_n \bullet \nabla u$ es desconocido. Entonces:

$$\mathcal{B}(u, w) \equiv u(\underline{a}_n \bullet \nabla w) \quad (5.1.15)$$

$$\mathcal{E}^*(u, w) \equiv (\underline{a}_n \bullet \nabla u - b_n u)w \quad (5.1.16)$$

5.1.7. - Funcional Bilineal $\mathcal{J}(u, w)$

La funcional bilineal $\mathcal{J}(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se define de manera puntual en Σ , esto es, $\forall \underline{x} \in \Sigma$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_\rho(u, w) + \mathcal{R}_\rho(u, w) &\equiv \mathcal{J}(u, w) \equiv -\underline{\mathcal{D}}\left([u], \dot{w}\right) \cdot \underline{n} \equiv \\
 &\equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} - [u] \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla w)} - [u] \overline{(b_n w)}
 \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

donde la funcional bilineal $\mathcal{S}_\rho(u, w)$ contiene las *condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov* en Σ , mientras que la funcional bilineal $\mathcal{R}_\rho(u, w)$ contiene *otras* condiciones de continuidad en Σ . Entonces:

$$\mathcal{S}_\rho(u, w) \equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} \tag{5.1.18}$$

$$\mathcal{R}_\rho(u, w) \equiv -[u] \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w)} \tag{5.1.19}$$

5.1.8.- Funcional Bilineal $\mathcal{K}^*(u, w)$

La funcional bilineal $\mathcal{K}^*(u, w): \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se define de manera puntual en Σ , esto es, $\forall \underline{x} \in \Sigma$ se tiene que:

$$\mathcal{S}_\mathcal{K}^*(u, w) + \mathcal{R}_\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \mathcal{K}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{D}}\left(\dot{u}, [w]\right) \cdot \underline{n} \equiv \tag{5.1.20}$$

$$\equiv \dot{u} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] + \dot{u} [b_n w] - \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla u)} [w] \tag{5.1.21}$$

donde la funcional bilineal $\mathcal{S}_\mathcal{K}^*(u, w)$ contiene la *información buscada* de la solución en Σ , mientras que la funcional bilineal $\mathcal{R}_\mathcal{K}^*(u, w)$ contiene la información redundante de la solución en Σ .

Particularmente para un BVPJ donde la información buscada en Σ es el *promedio de la solución* \dot{u} , y la información redundante en Σ es el promedio de la derivada normal, se tiene que:

$$\mathcal{S}_\mathcal{K}^*(u, w) \equiv \dot{u} [\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w] \tag{5.1.22}$$

$$\mathcal{R}_\mathcal{K}^*(u, w) \equiv -\overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla u)} [w] \tag{5.1.23}$$

5.1.9.- Identidad $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$

Finalmente, se enuncia la siguiente identidad que resultará de utilidad para transformar integrales en Σ a integrales en cada Ω_i :

$$\begin{aligned}
 & \langle (P - B - J)u, w \rangle \equiv \\
 & \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L} u d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} u (\underline{a}_n \bullet \nabla w) d\underline{x} - \left(- \int_{\Sigma} [u] (\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w) d\underline{x} + \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \bullet \nabla u] \dot{w} d\underline{x} \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla u \bullet \underline{a} \bullet \nabla w - u \underline{b} \bullet \nabla w + cuw \} d\underline{x} + \int_{\Sigma} \left\{ [u] \underline{a}_n \bullet \nabla w + [w] \underline{a}_n \bullet \nabla u - \dot{u} [b_n w] \right\} d\underline{x} \\
 & \quad - \int_{\partial\Omega} \{ u \underline{a}_n \bullet \nabla w + w \underline{a}_n \bullet \nabla u \} d\underline{x} = \\
 & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^* w d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} (\underline{a}_n \bullet \nabla u - b_n u) w d\underline{x} - \left(\int_{\Sigma} \dot{u} [\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w] d\underline{x} - \int_{\Sigma} (\underline{a}_n \bullet \nabla u) [w] d\underline{x} \right) \equiv \\
 & \equiv \langle (Q^* - C^* - K^*)u, w \rangle \tag{5.1.24}
 \end{aligned}$$

la cual se cumple $\forall (u, w) \in \widehat{D}_1(\Omega) \times \widehat{D}_2(\Omega)$ y se obtiene a través de integración por partes.

$$\langle Pu, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L} u d\underline{x} \quad (5.1.25)$$

$$\langle Bu, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} u (\underline{a}_n \cdot \nabla w) d\underline{x} \quad (5.1.26)$$

$$\langle S_J u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} d\underline{x} \quad (5.1.27)$$

$$\langle R_J u, w \rangle \equiv - \int_{\Sigma} [u] \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w)} d\underline{x} \quad (5.1.28)$$

$$\langle Q^* u, w \rangle \equiv \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^* w d\underline{x} \quad (5.1.29)$$

$$\langle C^* u, w \rangle \equiv \int_{\partial\Omega} (\underline{a}_n \cdot \nabla u - b_n u) w d\underline{x} \quad (5.1.30)$$

$$\langle S_K^* u, w \rangle \equiv \int_{\Sigma} \dot{u} [\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w] d\underline{x} \quad (5.1.31)$$

$$\langle R_K^* u, w \rangle \equiv - \int_{\Sigma} \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla u)} [w] d\underline{x} \quad (5.1.32)$$

Tabla 5.1. - Funcionales bilineales para un BVPJ elíptico de 2º orden, con condiciones de frontera tipo Dirichlet y donde la información buscada es el promedio de la solución.

5.2. - Problema Básico

El *problema general* se transformará a uno equivalente que se llamará *problema básico*.

El *problema general* elíptico de 2º orden es el siguiente. Sea la ecuación diferencial parcial lineal elíptica de segundo orden:

$$\mathcal{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega} \quad \text{en cada } \Omega_i \quad (5.2.1)$$

sujeta a condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet y a condiciones de saltos prescritos:

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (5.2.2)$$

$$[u] = j_{\Sigma}^0 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.3)$$

$$[\underline{a}_n \cdot \nabla u] = j_{\Sigma}^1 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.4)$$

También se debe especificar que la información buscada en la frontera interior Σ es el promedio de la solución \dot{u} , esto es, $\hat{u} \equiv \dot{u}$.

La solución del problema general se puede escribir como:

$$u = u_C + u_{\Sigma} \quad (5.2.5)$$

donde la función $u_{\Sigma} \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se construye convenientemente *-ad hoc-* de tal modo que se anula en la frontera exterior $\partial\Omega$, satisface las condiciones de salto en la frontera interior Σ ,

y su promedio es cero en la frontera interior Σ (o sea, que no contiene la información buscada), es decir:

$$u_{\Sigma} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (5.2.6)$$

$$[u_{\Sigma}] = j_{\Sigma}^0 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.7)$$

$$[\underline{a}_n \bullet \nabla u_{\Sigma}] = j_{\Sigma}^1 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.8)$$

$$\dot{u}_{\Sigma} = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.9)$$

Nótese que (5.2.7) y (5.2.9) significan:

$$[u_{\Sigma}] = j_{\Sigma}^0 \quad \& \quad \dot{u}_{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\Sigma_{(+)}} = \frac{1}{2} j_{\Sigma}^0 \quad \& \quad u_{\Sigma_{(-)}} = -\frac{1}{2} j_{\Sigma}^0, \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.10)$$

Entonces, el **problema básico** asociado al problema general elíptico de 2º orden es el siguiente.

Sea la ecuación diferencial parcial lineal elíptica de segundo orden:

$$\mathcal{L} u_C \equiv -\nabla \bullet (\underline{a} \bullet \nabla u_C) + \nabla \bullet (\underline{b} u_C) + c u_C = f_{\Omega} - \mathcal{L} u_{\Sigma} \quad \text{en cada } \Omega_i \quad (5.2.11)$$

sujeta a condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet y a condiciones de saltos prescritos nulos:

$$u_C = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (5.2.12)$$

$$[u_C] = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.13)$$

$$[\underline{a}_n \bullet \nabla u_C] = 0 \quad \text{en } \Sigma \quad (5.2.14)$$

Lo anterior implica que la función u_C es totalmente continua, tanto en su valor como en su derivada normal a través de la frontera interior Σ .

El *BVPJ básico* asociado al BVPJ general elíptico de 2º orden es:

$$\mathcal{L} u_C \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u_C) + \nabla \cdot (\underline{b} u_C) + c u_C = f_\Omega - \mathcal{L} u_\Sigma \quad \text{en cada } \Omega_i$$

sujeto a las condiciones de frontera y a las condiciones de saltos prescritos:

$$\begin{aligned} u_C &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\ [u_C] &= 0 & \text{en } \Sigma \\ [\underline{a}_n \cdot \nabla u_C] &= 0 & \text{en } \Sigma \end{aligned}$$

donde la función u_Σ , construida convenientemente *ad hoc*, satisface las condiciones de frontera y las condiciones de saltos prescritos del BVPJ general, además de otras condiciones:

$$\begin{aligned} u_\Sigma &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\ [u_\Sigma] &= j_\Sigma^0 & \text{en } \Sigma \\ [\underline{a}_n \cdot \nabla u_\Sigma] &= j_\Sigma^1 & \text{en } \Sigma \\ \dot{u}_\Sigma &= 0 & \text{en } \Sigma \end{aligned}$$

finalmente, la solución del BVPJ general es:

$$u = u_C + u_\Sigma$$

Tabla 5.2.- BVPJ básico asociado al BVPJ general elíptico de 2º orden.

5.3- Funciones Óptimas

5.3.1.- Funciones Óptimas de Base

El espacio de funciones óptimas de base de dimensión N se define como:

$$\overline{O}_B \equiv \overline{N}_P \cap \overline{N}_B \cap \overline{N}_{R_j} \quad (5.3.1)$$

Para el *BVPJ básico* -aunque también para el *BVPJ general* elíptico de 2º orden- con condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet en $\partial\Omega$ e información buscada el promedio de la solución en Σ , los espacios nulos \overline{N}_P , \overline{N}_B y \overline{N}_{R_j} se conforman de la siguiente manera:

$$Pv = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \nabla v d\underline{x} = 0, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow v = 0, \text{ en cada } \Omega_i \quad (5.3.2)$$

$$Bv = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} v(\underline{a}_n \cdot \nabla w) d\underline{x} = 0, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow v = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.3)$$

$$R_j v = 0 \Leftrightarrow \int_{\Sigma} [v] (\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w) d\underline{x} = 0, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow [v] = 0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.4)$$

En consecuencia, éstos se definen como:

$$\overline{N}_P \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid v = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (5.3.5)$$

$$\overline{N}_B \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (5.3.6)$$

$$\overline{N_{R_j}} \equiv \left\{ v \in \widehat{D}_1(\Omega) \mid [v] = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (5.3.7)$$

De esta forma, las funciones óptimas de base $v \in \overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_j}}$ satisfacen la ecuación diferencial homogénea localmente en cada subdominio Ω_i de la partición Π , se anulan en la frontera exterior $\partial\Omega$ y son continuas a través de la frontera interior Σ .

Las funciones óptimas de base $v \in \overline{O_B}$ satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} v &= 0 && \text{en cada } \Omega_i \\ v &= 0 && \text{en } \partial\Omega \\ [v] &= 0 && \text{en } \Sigma \end{aligned}$$

Tabla 5.3.- Espacio de funciones óptimas de base.

5.3.2- Funciones Óptimas de Peso

El espacio de funciones óptimas de peso de dimensión N se define como:

$$\overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_k}} \quad (5.3.8)$$

Para el *BVPJ básico* -aunque también para el *BVPJ general* elíptico de 2º orden- con condiciones de frontera tipo Dirichlet en $\partial\Omega$ e información buscada el promedio de la solución en Σ , los espacios nulos $\overline{N_Q}$, $\overline{N_C}$ y $\overline{N_{R_k}}$ se conforman de la siguiente manera:

$$Qw = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} u \mathcal{L}^* w d\underline{x} = 0, \forall u \in \widehat{D}_1(\Omega) \Leftrightarrow \mathcal{L}^* w = 0, \text{ en cada } \Omega_i \quad (5.3.9)$$

$$Cw = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} (\underline{a}_n \bullet \nabla u - b_n u) w d\underline{x} = 0, \forall u \in \widehat{D}_1(\Omega) \Leftrightarrow w = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.10)$$

$$R_K w = 0 \Leftrightarrow \int_{\Sigma} \overline{(\underline{a}_n \bullet \nabla u)} [w] d\underline{x} = 0, \forall v \in \widehat{D}_1(\Omega) \Leftrightarrow [w] = 0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.11)$$

En consecuencia, éstos se definen como:

$$\overline{N_Q} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid \mathcal{L}^* w = 0 \text{ en cada } \Omega_i \right\} \quad (5.3.12)$$

$$\overline{N_C} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid w = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (5.3.13)$$

$$\overline{N_{R_K}} \equiv \left\{ w \in \widehat{D}_2(\Omega) \mid [w] = 0 \text{ en } \Sigma \right\} \quad (5.3.14)$$

De esta forma, las funciones óptimas de prueba $w \in \overline{O_T} \equiv \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_K}}$ satisfacen la ecuación diferencial adjunta homogénea localmente en cada subdominio Ω_i de la partición Π , se anula en la frontera exterior $\partial\Omega$ y son continuas a través de la frontera interior Σ .

Las funciones óptimas de peso $w \in \overline{O_T}$ satisfacen las condiciones:

$$\mathcal{L}^* w = 0 \quad \text{en cada } \Omega_i$$

$$w = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

$$[w] = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

Tabla 5.4.- Espacio de funciones óptimas de peso.

5.3.3.- Función auxiliar u_p

La función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se define como:

$$(P - B - R_J)u_p = f - j_R \quad (5.3.15)$$

$$S_K^* u_p = 0 \quad (5.3.16)$$

Para el *BVPJ general* elíptico de 2º orden con condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet en $\partial\Omega$ e información buscada el promedio de la solución en Σ , lo anterior significa que:

$$Pu_p = f \Leftrightarrow \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L} u_p d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w f_{\Omega} d\mathbf{x}, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow \mathcal{L} u_p = f_{\Omega}, \text{ en cada } \Omega_i \quad (5.3.17)$$

$$Bu_p = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} u_p (\underline{a}_n \bullet \nabla w) d\mathbf{x} = 0, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow u_p = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.18)$$

$$R_J u_p = j_R \Leftrightarrow \int_{\Sigma} [u_p] \overline{(\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w)} d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^0 \overline{(\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w)} d\mathbf{x}, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow [u_p] = j_{\Sigma}^0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.19)$$

$$S_K^* u_p = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \dot{u}_p [\underline{a}_n \bullet \nabla w + b_n w] d\mathbf{x} = 0, \forall w \in \widehat{D}_2(\Omega) \Leftrightarrow \dot{u}_p = 0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.20)$$

Nótese que (5.3.19) y (5.3.20) significan:

$$[u_p] = j_{\Sigma}^0 \quad \& \quad \dot{u}_p = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{P(+)} = \frac{1}{2} j_{\Sigma}^0 \quad \& \quad u_{P(-)} = -\frac{1}{2} j_{\Sigma}^0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.21)$$

Particularmente, para el *BVPJ básico* los problemas locales u_p cumplen con:

$$\mathcal{L} u_p = f_{\Omega} - \mathcal{L} u_{\Sigma}, \text{ en cada } \Omega_i \quad (5.3.22)$$

$$u_p = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.23)$$

$$[u_p] = 0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.24)$$

$$\dot{u}_p = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.25)$$

Pero (5.3.24) y (5.3.25) significan:

$$[u_p] = 0 \quad \& \quad \dot{u}_p = 0 \Rightarrow u_p = 0, \text{ en } \Sigma \quad (5.3.26)$$

La función auxiliar $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ para el BVPJ básico satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} \not\leftarrow u_p &= f_\Omega - \not\leftarrow u_\Sigma \quad \text{en cada } \Omega_i \\ u_p &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \\ u_p &= 0 \quad \text{en } \Sigma \end{aligned}$$

Tabla 5.5.- Función auxiliar u_p para el BVPJ básico.

5.3.4.- Identidad $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$ para Funciones Óptimas

Si se considera que las funciones $v \in \overline{O_B}$ y $w \in \overline{O_T}$ son funciones óptimas, esto es que tanto

$\not\leftarrow v = 0$ en cada Ω_i , $v = 0$ en $\partial\Omega$ y $[v] = 0$ en Σ , como $\not\leftarrow^* w = 0$ en cada Ω_i , $w = 0$ en $\partial\Omega$, $[w] = 0$ en Σ , entonces la identidad (5.1.24) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle (P - B - J)v, w \rangle &= -\langle S_J v, w \rangle = -\int_{\Sigma} [a_n \bullet \nabla v] \dot{w} dx = \\ &= \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla v \bullet \underline{a} \bullet \nabla w - v \underline{b} \bullet \nabla w + cvw \} dx = \\ &= -\int_{\Sigma} \dot{v} [a_n \bullet \nabla w + b_n w] dx = -\langle S_K^* v, w \rangle = \langle (Q^* - C^* - K^*)v, w \rangle \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

la cual se cumple $\forall (v, w) \in \overline{O_B} \times \overline{O_T}$. Nótese que la expresión anterior relaciona integrales en Σ con integrales en cada Ω_i .

5.4.- FEM-OF Steklov-Poincaré

Sea el **BVPJ** básico elíptico descrito en la tabla 5.2. Sea el espacio de funciones óptimas de base descrito en la tabla 5.3. Sea la función auxiliar u_p descrita en la tabla 5.5.

Sea una base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de base \bar{O}_B de dimensión N . Y sea la función $\bar{v} \in \bar{O}_B$ una representación de la información buscada $\hat{v} \in \hat{O}_B$ en Σ , en términos de una combinación lineal de la base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ de \bar{O}_B , esto es:

$$\hat{v} \approx \bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \bar{v}^{\beta} \quad (5.4.1)$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de la combinación lineal satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^{\beta} \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^{\alpha} - \bar{v}^{\beta} \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^{\alpha} + c \bar{v}^{\beta} \bar{v}^{\alpha} \right\} d\underline{x} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \underline{c} u_{\Sigma} \right) \bar{v}^{\alpha} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^{\alpha} - u_p \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^{\alpha} + c u_p \bar{v}^{\alpha} \right\} d\underline{x} \\ & \text{para } \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (5.4.2) \end{aligned}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{A} \underline{C} = \underline{B} \quad (5.4.3)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_\beta \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{A} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^\beta \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha - \bar{v}^\beta \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha + c \bar{v}^\beta \bar{v}^\alpha \right\} d\mathbf{x} \quad (5.4.4)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_\alpha \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \llcorner u_\Sigma \right) \bar{v}^\alpha d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_P \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha - u_P \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha + c u_P \bar{v}^\alpha \right\} d\mathbf{x} \quad (5.4.5)$$

Recuérdese que la solución del BVPJ general es $u \approx \bar{v} + u_P + u_\Sigma$ en cada subdominio Ω_i .

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas \bar{O}_B por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_j}$.

El sistema de N ecuaciones con N incógnitas es $\underline{A} \underline{C} = \underline{B}$, donde:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^\beta \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha - \bar{v}^\beta \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha + c \bar{v}^\beta \bar{v}^\alpha \right\} d\mathbf{x}$$

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \llcorner u_\Sigma \right) \bar{v}^\alpha d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_P \cdot \underline{a} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha - u_P \underline{b} \cdot \nabla \bar{v}^\alpha + c u_P \bar{v}^\alpha \right\} d\mathbf{x}$$

finalmente la información buscada es $\bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_\beta \bar{v}^\beta$, y la solución del BVPJ general

en cada Ω_i es $u \approx \bar{v} + u_P + u_\Sigma$.

Tabla 5.6.- Sistema de ecuaciones para el método FEM-OF Steklov-Poincaré.

5.5.- FEM-OF Trefftz-Herrera

Sea el **BVPJ básico** elíptico descrito en la tabla 5.2. Sea el espacio de funciones óptimas de peso descrito en la tabla 5.4. Sea la función auxiliar u_p descrita en la tabla 5.5.

Sea una base $\{\overline{w^1}, \overline{w^2}, \dots, \overline{w^N}\}$ del espacio de funciones óptimas de peso $\overline{O_T}$ de dimensión N .

Y sea la función $\overline{v} \in \overline{O_T}$ una representación de la información buscada $\hat{v} \in \widehat{O_T}$, en términos de una combinación lineal de la base $\{\overline{w^1}, \overline{w^2}, \dots, \overline{w^N}\}$ de $\overline{O_T}$, esto es:

$$\hat{v} \approx \overline{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \overline{w^{\beta}} \quad (5.5.1)$$

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de la combinación lineal satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \overline{w^{\beta}} \bullet \underline{a} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - \overline{w^{\beta}} \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c \overline{w^{\beta}} \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \underline{\mathcal{L}} u_{\Sigma} \right) \overline{w^{\alpha}} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \bullet \underline{a} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} - u_p \underline{b} \bullet \nabla \overline{w^{\alpha}} + c u_p \overline{w^{\alpha}} \right\} d\underline{x} \\ & \text{para } \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (5.5.2) \end{aligned}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{A} \underline{C} = \underline{B} \quad (5.5.3)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_\beta \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{A} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \overline{w^\beta} \cdot \underline{a} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} - \overline{w^\beta} \underline{b} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} + c \overline{w^\beta} \overline{w^\alpha} \right\} d\underline{x} \quad (5.5.4)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_\alpha \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \underline{L} u_\Sigma \right) \overline{w^\alpha} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{a} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} - u_p \underline{b} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} + c u_p \overline{w^\alpha} \right\} d\underline{x} \quad (5.5.5)$$

Recuérdese que la solución del BVPJ general en cada subdominio Ω_i requiere del procedimiento de interpolación óptima.

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza el espacio de funciones óptimas exactas \overline{O}_T por el espacio de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_K}$.

El sistema de N ecuaciones con N incógnitas es $\underline{A} \underline{C} = \underline{B}$, donde:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \overline{w^\beta} \cdot \underline{a} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} - \overline{w^\beta} \underline{b} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} + c \overline{w^\beta} \overline{w^\alpha} \right\} d\underline{x}$$

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \underline{L} u_\Sigma \right) \overline{w^\alpha} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{a} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} - u_p \underline{b} \cdot \nabla \overline{w^\alpha} + c u_p \overline{w^\alpha} \right\} d\underline{x}$$

finalmente la información buscada es $\overline{v} = \sum_{\beta=1}^N C_\beta \overline{w^\beta}$, y la solución del BVPJ general

en cada Ω_i requiere del procedimiento de *interpolación óptima*.

Tabla 5.7.- Sistema de ecuaciones para el método FEM-OF Trefftz-Herrera.

5.6.- FEM-OF Petrov-Galerkin

Sea el **BVPJ** básico elíptico descrito en la tabla 5.2. Sea el espacio de funciones óptimas de base descrito en la tabla 5.3. Sea el espacio de funciones óptimas de peso descrito en la tabla 5.4. Sea la función auxiliar u_p descrita en la tabla 5.5.

Sea una base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de base \bar{O}_B de dimensión N .

Sea la función $\bar{v} \in \bar{O}_B$ una representación de la información buscada $\hat{v} \in \hat{O}_B$, en términos de una combinación lineal de la base $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^N\}$ de \bar{O}_B , esto es:

$$\hat{v} \approx \bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \bar{v}^{\beta} \quad (5.6.1)$$

Y sea una base $\{\bar{w}^1, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^N\}$ del espacio de funciones óptimas de peso \bar{O}_T de dimensión N .

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ de la combinación lineal satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^{\beta} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^{\alpha} - \bar{v}^{\beta} \underline{\underline{b}} \cdot \nabla \bar{w}^{\alpha} + c \bar{v}^{\beta} \bar{w}^{\alpha} \right\} d\underline{\underline{x}} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \mathcal{L} u_{\Sigma} \right) \bar{w}^{\alpha} d\underline{\underline{x}} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^{\alpha} - u_p \underline{\underline{b}} \cdot \nabla \bar{w}^{\alpha} + c u_p \bar{w}^{\alpha} \right\} d\underline{\underline{x}} \\ & \text{para } \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (5.6.2) \end{aligned}$$

El cual en su forma matricial es:

$$\underline{\underline{A}} \underline{C} = \underline{B} \quad (5.6.3)$$

donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{C} = \llbracket C_\beta \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_β que ponderan la combinación lineal, los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^\beta \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha - \bar{v}^\beta \underline{b} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha + c \bar{v}^\beta \bar{w}^\alpha \right\} d\underline{x} \quad (5.6.4)$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{B} = \llbracket B_\alpha \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \mathcal{L} u_\Sigma \right) \bar{w}^\alpha d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha - u_p \underline{b} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha + c u_p \bar{w}^\alpha \right\} d\underline{x} \quad (5.6.5)$$

Recuérdese que la solución del BVPJ general es $u \approx \bar{v} + u_p + u_\Sigma$ en cada subdominio Ω_i .

Finalmente, para las aplicaciones numéricas se reemplaza los espacios de funciones óptimas exactas \bar{O}_B y \bar{O}_T por los espacios de funciones óptimas aproximadas $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_j}$ y $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$.

El sistema de N ecuaciones con N incógnitas es $\underline{\underline{A}} \underline{C} = \underline{B}$, donde:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \bar{v}^\beta \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha - \bar{v}^\beta \underline{b} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha + c \bar{v}^\beta \bar{w}^\alpha \right\} d\underline{x}$$

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_\Omega - \mathcal{L} u_\Sigma \right) \bar{w}^\alpha d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha - u_p \underline{b} \cdot \nabla \bar{w}^\alpha + c u_p \bar{w}^\alpha \right\} d\underline{x}$$

finalmente la información buscada es $\bar{v} = \sum_{\beta=1}^N C_\beta \bar{v}^\beta$, y la solución del BVPJ general

en cada Ω_i es $u \approx \bar{v} + u_p + u_\Sigma$.

Tabla 5.8.- Sistema de ecuaciones para el método FEM-OF Petrov-Galerkin.

5.7.- FEM-OF para el Caso Simétrico

Para el caso simétrico se tiene el operador diferencial es autoadjunto, esto es:

$$\mathcal{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + cu \equiv \mathcal{L}^* u \quad (5.7.1)$$

y, en consecuencia, las funcionales bilineales asociadas cumplen con las siguientes igualdades:

$$\langle Pu, w \rangle = \langle Qu, w \rangle = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} w \mathcal{L} u d\underline{x} \quad (5.7.2)$$

$$\langle Bu, w \rangle = \langle Cu, w \rangle = \int_{\partial\Omega} u (\underline{a}_n \cdot \nabla w) d\underline{x} \quad (5.7.3)$$

$$\langle R_j u, w \rangle = \langle R_k u, w \rangle = - \int_{\Sigma} [u] \overline{(\underline{a}_n \cdot \nabla w)} d\underline{x} \quad (5.7.4)$$

$$\langle S_j u, w \rangle = \langle S_k u, w \rangle = \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} d\underline{x} \quad (5.7.5)$$

Por lo tanto, el espacio de funciones óptimas de base $\overline{O_B}$ es igual al espacio de funciones óptimas de peso $\overline{O_T}$:

$$\overline{O_B} \equiv \overline{N_P} \cap \overline{N_B} \cap \overline{N_{R_j}} = \overline{N_Q} \cap \overline{N_C} \cap \overline{N_{R_k}} \equiv \overline{O_T} \quad (5.7.6)$$

y una propiedad importante para el caso simétrico es que las tres versiones de FEM-OF resultan ser las mismas.

Además se tiene que la siguiente funcional es simétrica:

$$\langle (P - B - J)v, w \rangle = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla w + cvw \} d\underline{x} = \langle (P - B - J)w, v \rangle \quad (5.7.7)$$

y también es positiva definida:

$$\langle (P - B - J)w, w \rangle = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla w \bullet \underline{a} \bullet \nabla w + cww \} d\underline{x} \geq 0 \quad (5.7.8)$$

ya que \underline{a} es una matriz simétrica, positiva definida y $c(\underline{x}) \geq 0$.

De esta forma, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones que se deriva aplicando el método FEM-OF es simétrica y positiva definida. Estas propiedades son de mucha relevancia, ya que se puede aplicar el **Método de Gradiente Conjugado (CGM¹)** para resolver el sistema de ecuaciones.

¹ Conjugate Gradient Method

Capítulo 6:

Resultados

Caso

Simétrico

Indice:

- 6.1.- Caso Simétrico
- 6.2.- Convergencia h de Error
- 6.3.- Resultados en 1 Dimensión
- 6.4.- Resultados en 2 Dimensiones
- 6.5.- Resultados en 3 Dimensiones

6.1.- Caso Simétrico

El *caso simétrico* corresponde a la ecuación diferencial elíptica general cuando su término $\nabla \cdot (\underline{b}u)$ se anula, es decir, cuando $\underline{b} = \underline{0}$. Esto es:

$$\mathcal{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + cu = f_{\Omega} \quad \text{en cada } \Omega_k \quad (6.1.1)$$

Nótese que el operador diferencial es *autoadjunto*. En consecuencia, los métodos de FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin resultan ser los mismos. Esto se debe a que los espacios de funciones de base $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_j}$ y de funciones de peso $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$ son iguales. Entonces se usará el nombre de método FEM-OF Petrov-Galerkin (**FEM-OF PG**) para referirse a cualquiera de los tres métodos mencionados.

En las *implementaciones numéricas*, se utilizan tanto funciones óptimas de base *aproximadas* $\widetilde{v} \in \widetilde{O}_B$ como funciones óptimas de peso *aproximadas* $\widetilde{w} \in \widetilde{O}_T$ (recuérdese que aunque ya no son funciones óptimas, se les llamará *funciones óptimas aproximadas*). El **espacio de funciones óptimas aproximadas** está formado por funciones polinomiales por tramos de grado G_{Ω} en cada subdominio Ω_k de la partición y cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_{Σ} . En consecuencia, las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P y \widetilde{N}_Q solamente se pueden satisfacer de manera aproximada utilizando métodos numéricos

para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas $\tilde{v} = 0$ y $\tilde{w} = 0$ respectivamente.

La metodología FEM-OF utiliza métodos de elementos finitos (FEM) para resolver los problemas locales que definen a las funciones óptimas aproximadas en cada subdominio Ω_k de la partición. Sin embargo, también se resolverán esos problemas mediante colocación ortogonal.

6.2.- Convergencia h del Error

El error se mide con *norma infinita*, esto es:

$$\|error\|_{\infty} \equiv \max_{\forall k} |\tilde{u}_k - u_k| \quad (6.2.1)$$

donde \tilde{u}_k es la solución aproximada y u_k es la solución exacta en ciertos puntos de control \underline{x}_i .

El *orden de convergencia* h del error $O(h^m)$ es el exponente m , el cual dada una tabla de datos de error contra h (el tamaño de la partición Π), se calcula ajustando la siguiente recta:

$$\log(error) = -m \log(h) + b \quad (6.2.2)$$

En una dimensión, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de E_x elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior $\Sigma: \{x_i | i=1, \dots, E_x - 1\}$, y el tamaño de la partición es:

$$h = h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}.$$

En dos dimensiones, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior $\Sigma: \{(x_i, y_j) | i=1, \dots, E_x - 1, j=1, \dots, E_y - 1\}$, y el

tamaño de la partición es: $h = \max \left\{ h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}, h_y = \frac{y_E - y_0}{E_y} \right\}$.

En tres dimensiones, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E] \times [y_0, y_E] \times [z_0, z_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y E_z$ elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior Σ :

$$\left\{ (x_i, y_j, z_k) \mid i = 1, \dots, E_x - 1, j = 1, \dots, E_y - 1, k = 1, \dots, E_z - 1 \right\},$$

y el tamaño de la partición es:

$$h = \max \left\{ h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}, h_y = \frac{y_E - y_0}{E_y}, h_z = \frac{z_E - z_0}{E_z} \right\}.$$

6.3- Resultados en Una Dimensión

Sea la ecuación diferencial elíptica ordinaria:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_\Omega \quad (6.3.1)$$

en $\Omega = [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de E_x subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \mid i = 1, \dots, E_x\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i = 0, \dots, E_x$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son: $\{x_i \mid i = 1, \dots, E_x - 1\}$.

Se trabajarán cuatro *algoritmos*. Primero se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, polinomios cúbicos con FEM. Tercero, polinomios cuadráticos con colocación. Y cuarto, polinomios cúbicos con colocación.

La *aproximación cuadrática* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado un grado de libertad: el

valor del promedio de la solución. Entonces, a cada uno de estos nodos x_i se le asocia una función óptima aproximada prescribiendo sus trazas en Σ : 1 en el nodo x_i y 0 en los demás nodos. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_i \\ \widetilde{w}_i \end{pmatrix} = \begin{cases} L_i(x) + C_i^2 L_{i-1}(x) L_i(x) & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ L_i(x) + C_i^1 L_i(x) L_{i+1}(x) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.3.2)$$

donde $L_i(x)$ y $L_{i+1}(x)$ definidos en $[x_i, x_{i+1}]$ son un mapeo afín de los **polinomios de Lagrange** de 1º grado $L_0(\xi) \equiv 1 - \xi$ y $L_1(\xi) \equiv \xi$ definidos en el intervalo $[0, 1]$, respectivamente. Las constantes C_i^1 y C_i^2 se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La **aproximación cúbica** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado un grado de libertad: el valor del promedio de la solución. Entonces, a cada uno de estos nodos x_i se le asocia una función óptima aproximada prescribiendo sus trazas en Σ : 1 en el nodo x_i y 0 en los demás nodos. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_i \\ \widetilde{w}_i \end{pmatrix} = \begin{cases} H_i^0(x) + C_i^{21} H_{i-1}^1(x) + C_i^{22} H_i^1(x) & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ H_i^0(x) + C_i^{11} H_i^1(x) + C_i^{12} H_{i+1}^1(x) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.3.3)$$

donde $H_i^0(x)$, $H_{i+1}^0(x)$, $H_i^1(x)$ y $H_{i+1}^1(x)$ definidos en $[x_i, x_{i+1}]$ son un mapeo afín de los **polinomios de Hermite** de 3º grado $H_0^0(\xi)$, $H_1^0(\xi)$, $H_0^1(\xi)$ y $H_1^1(\xi)$ definidos en el intervalo $[0,1]$, respectivamente. Las constantes C_i^{11} , C_i^{12} , C_i^{21} y C_i^{22} se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

6.3.1.- Aproximación Cuadrática con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y FEM es $O(h^4)$. En la figura 6.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.3.2.- Aproximación Cúbica con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 2 funciones locales de ponderación para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con tres puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y FEM es $O(h^6)$. En la figura 6.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

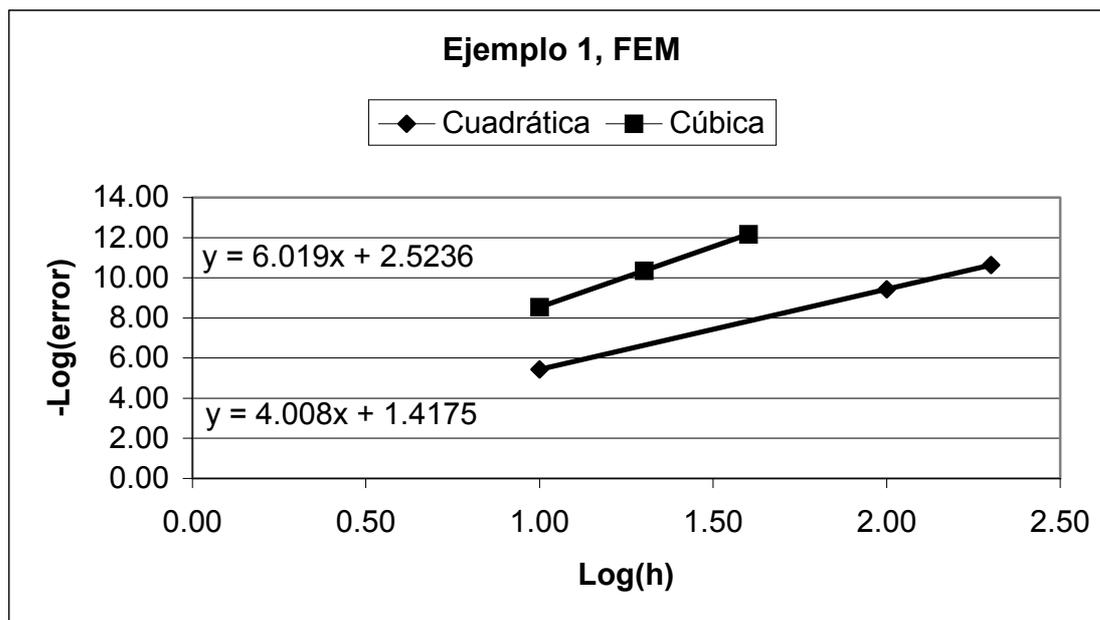


Figura 6.1.- Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM es $O(h^4)$.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM es $O(h^6)$.

6.3.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1 punto gaussiano para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y colocación es $O(h^4)$. En la figura 6.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.3.4.- Aproximación Cúbica con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2 puntos gaussianos para construirlos. Se

emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y colocación es $O(h^6)$. En la figura 6.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

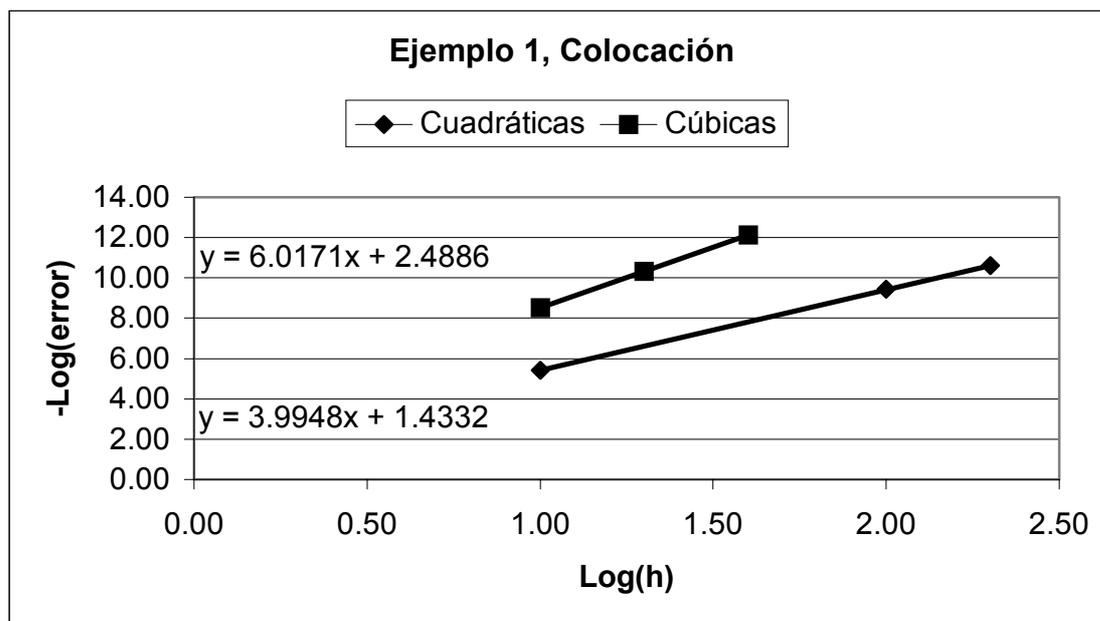


Figura 6.2.- Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y colocación es $O(h^4)$.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y colocación es $O(h^6)$.

6.3.5.- Análisis de Resultados

- ◆ En la tabla 6.1 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ FEM-OF Petrov-Galerkin para el caso simétrico en una dimensión exhibe propiedades de *superconvergencia*. Esta propiedad se presenta cuando se construye las funciones óptimas aproximadas tanto con FEM como con colocación.

- ♦ El orden de (super) convergencia h del error es $O(h^{2G_\Omega})$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k , en lugar del orden $O(h^{2(G_\Omega-1)})$ que se obtiene al aplicar el método directo de Steklov-Poincaré *convencional* con colocación o el método indirecto de Trefftz-Herrera *convencional* con colocación.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cuadrática en Ω_k	$O(h^2)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbica en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^6)$

Tabla 6.1. - Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

6.4.- Resultados en Dos Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = f_{\Omega} \quad (6.4.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x,y) = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \mid i=1, \dots, E_x; j=1, \dots, E_y\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i=0, \dots, E_x$ e $y_j = j/E_y$ para $j=0, \dots, E_y$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\{(x_i, y_j) \mid i=1, \dots, E_x - 1; j=1, \dots, E_y - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, igual que el primer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas. Tercero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la

frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Cuarto, igual que el tercer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas.

La **aproximación** con polinomios **cúbicos** por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios **bi-cuadráticos** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado tres grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x y su derivada parcial con respecto a y . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j) se le asocia tres funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^0 \\ \widetilde{w}_{ij}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^1 \\ \widetilde{w}_{ij}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.3)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^2 \\ \widetilde{w}_{ij}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.4)$$

donde:

$$N_{ij}(x, y) = \begin{cases} C_{ij}^1 L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^2 L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^3 L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ C_{ij}^4 L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Las constantes C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , C_{ij}^3 y C_{ij}^4 se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La **aproximación** con polinomios **cúbicos** por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios **bi-cúbicos** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado tres grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x y su derivada parcial con respecto a y . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j) se le asocia tres funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^0 \\ \widetilde{w}_{ij}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.6)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^1 \\ \widetilde{w}_{ij}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^2 \\ \widetilde{w}_{ij}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.8)$$

donde:

$$N_{ij}(x, y) = \begin{cases} C_{ij}^{11}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{12}H_i^1(x)H_{j+1}^1(y) + C_{ij}^{13}H_{i+1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{14}H_{i+1}^1(x)H_{j+1}^1(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^{21}H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{22}H_{i-1}^1(x)H_{j+1}^1(y) + C_{ij}^{23}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{24}H_i^1(x)H_{j+1}^1(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^{31}H_{i-1}^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{32}H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{33}H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{34}H_i^1(x)H_j^1(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ C_{ij}^{41}H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{42}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{43}H_{i+1}^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{44}H_{i+1}^1(x)H_j^1(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.4.9)$$

Las constantes $\{C_{ij}^{11}, C_{ij}^{12}, C_{ij}^{13}, C_{ij}^{14}\}$, $\{C_{ij}^{21}, C_{ij}^{22}, C_{ij}^{23}, C_{ij}^{24}\}$, $\{C_{ij}^{31}, C_{ij}^{32}, C_{ij}^{33}, C_{ij}^{34}\}$ y $\{C_{ij}^{41}, C_{ij}^{42}, C_{ij}^{43}, C_{ij}^{44}\}$ se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

Particularmente para los *dominios rectangulares*, los nodos que están en las aristas de la frontera exterior y que no son esquinas, tienen asociado un solo grado de libertad: su derivada normal. Así, a los nodos ubicados en las fronteras $x = c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a x ; mientras que a los nodos ubicadas en las fronteras $y = c$, la derivada parcial con respecto a y .

Los nodos que son esquinas no tienen asociado ningún grado de libertad.

6.4.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construirlas. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.3})$. En la figura 6.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.4.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza

colocación con 1×1 punto gaussiano para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. En la figura 6.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

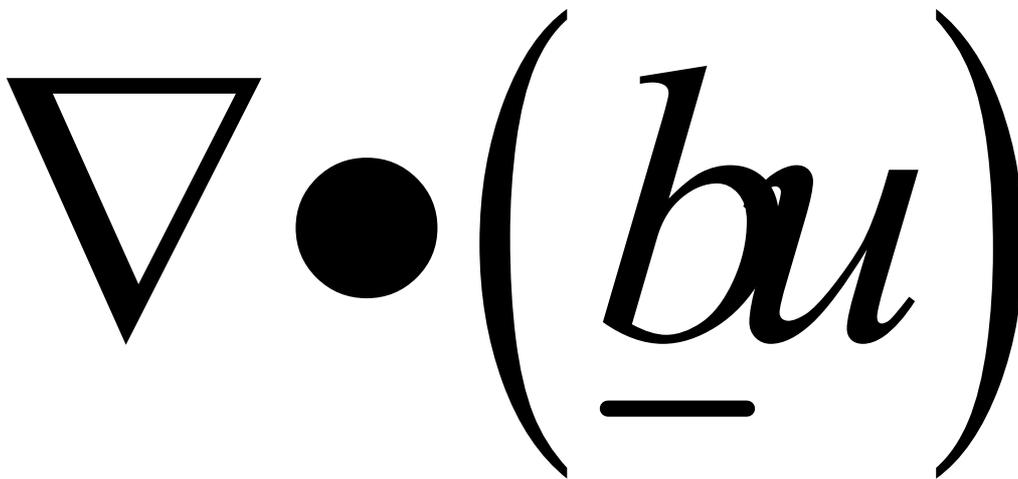


Figura 6.3. - Convergencia h del error para el caso simétrico en dos dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM es $O(h^{3.3})$.

6.4.3.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con

4 funciones de ponderación locales para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 6.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.4.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2×2 puntos gaussianos para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y colocación es $O(h^{3.9})$. En la figura 6.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

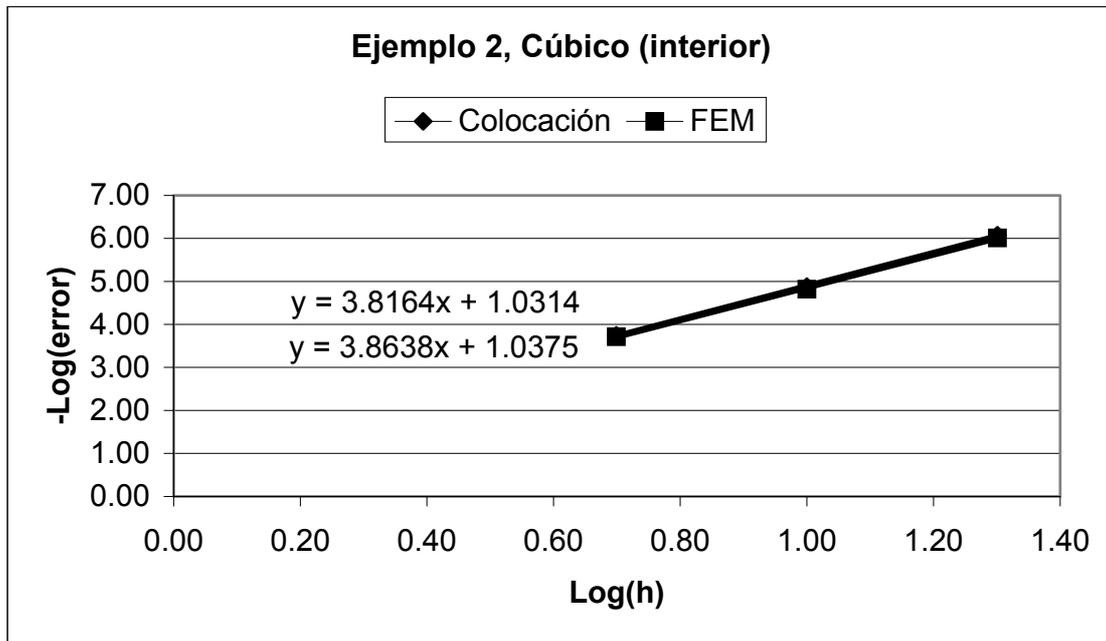


Figura 6.4. - Convergencia h del error para el caso simétrico en dos dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y colocación es $O(h^{3.9})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

6.4.5.- Análisis de Resultados

- ◆ En las tablas 6.2 y 6.3 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ **FEM-OF Petrov-Galerkin** para el caso simétrico en dos dimensiones **NO** exhibe propiedades de **superconvergencia**.
- ◆ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con **FEM**, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, G_\Omega + 1\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

- ♦ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con *colocación*, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

Aproximación	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k	$O(h^{2.4})$	$O(h^{3.3})$

Tabla 6.2. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso simétrico.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cúbica en Ω_k	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.9})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 6.3. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso simétrico.

6.5.- Resultados en Tres Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f_\Omega \quad (6.5.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0, y, z) = 0$, $u(1, y, z) = 0$, $u(x, 0, z) = 0$, $u(x, 1, z) = 0$, $u(x, y, 0) = 0$, $u(x, y, 1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y E_z$ subdominios $\Pi = \left\{ (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k) \mid i = 1, \dots, E_x; j = 1, \dots, E_y; k = 1, \dots, E_z \right\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i = 0, \dots, E_x$, $y_j = j/E_y$ para $j = 0, \dots, E_y$ y $z_k = k/E_z$ para $k = 0, \dots, E_z$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\left\{ (x_i, y_j, z_k) \mid i = 1, \dots, E_x - 1; j = 1, \dots, E_y - 1; k = 1, \dots, E_z - 1 \right\}$.

Se trabajarán solamente dos **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l , utilizando FEM para su construcción. Segundo, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera

interior Σ y con polinomios tri-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l , utilizando FEM para su construcción.

La *aproximación* con polinomios *bi-cúbicos* por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios *tri-cuadráticos* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado siete grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x , su derivada parcial con respecto a y , su derivada parcial con respecto a z , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z , y finalmente, su segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j, z_k) se le asocia siete funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^0(z)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^0(z)$, $H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^0(z)$, $H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^1(z)$, $H_i^1(x)H_j^1(y)H_k^0(z)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^1(z)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^1(z)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \times [z_{k-1}, z_{k+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ijk}^0 \\ \widetilde{w}_{ijk}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.2)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ijk}^1 \\ \widetilde{w}_{ijk}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ijk}^2 \\ \widetilde{w}_{ijk}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ijk}^3 \\ \widetilde{w}_{ijk}^3 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.5)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ijk}^4 \\ \widetilde{w}_{ijk}^4 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^1(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.6)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^5 \\ \widetilde{W}_{ijk}^5 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.7)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^6 \\ \widetilde{W}_{ijk}^6 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.8)$$

donde:

$$N_{ijk}(x, y, z) = \begin{cases} C_{ijk}^1 L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^2 L_{i-1}(x) L_i(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^3 L_{i-1}(x) L_i(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^4 L_i(x) L_{i+1}(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^5 L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^6 L_{i-1}(x) L_i(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^7 L_{i-1}(x) L_i(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^8 L_i(x) L_{i+1}(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.5.9)$$

Las constantes $C_{ijk}^1, C_{ijk}^2, C_{ijk}^3, C_{ijk}^4, C_{ijk}^5, C_{ijk}^6, C_{ijk}^7$ y C_{ijk}^8 , se calculan mediante FEM en cada subdominio Ω_i de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La **aproximación** con polinomios **bi-cúbicos** por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios **tri-cúbicos** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_i consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado siete grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x , su derivada parcial con respecto a y , su derivada parcial con respecto a z , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z , y finalmente, su segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j, z_k) se le asocia siete funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^0(z)$, $H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^0(z)$, $H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^0(z)$, $H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^1(z)$, $H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^0(z)$, $H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z)$ y $H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z)$, respectivamente. De

esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región

$$[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \times [z_{k-1}, z_{k+1}]:$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^0 \\ \widetilde{W}_{ijk}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.10)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^1 \\ \widetilde{W}_{ijk}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.11)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^2 \\ \widetilde{W}_{ijk}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.12)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^3 \\ \widetilde{W}_{ijk}^3 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.13)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^4 \\ \widetilde{W}_{ijk}^4 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.14)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^5 \\ \widetilde{W}_{ijk}^5 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.15)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^6 \\ \widetilde{W}_{ijk}^6 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 & N_{ijk}(x, y, z) = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & C_{ijk}^{11} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{12} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{13} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{14} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{15} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{16} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{17} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{18} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{21} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{22} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{23} H_{i-1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{24} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{25} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{26} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{27} H_{i-1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{28} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{31} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{32} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{33} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{34} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{35} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{36} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{37} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{38} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{41} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{42} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{43} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{44} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{45} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{46} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{47} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{48} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{51} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{52} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{53} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{54} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{55} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{56} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{57} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{58} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{61} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{62} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{63} H_{i-1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{64} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{65} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{66} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{67} H_{i-1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{68} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{71} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{72} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{73} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{74} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{75} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{76} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{77} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{78} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{81} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{82} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{83} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{84} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{85} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{86} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{87} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{88} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\
 & \quad \left\{ \begin{aligned}
 & 0, \\
 & \text{, otro}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right. \\
 & \tag{6.5.17}
 \end{aligned}$$

Las constantes:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ C_{ijk}^{11}, C_{ijk}^{12}, C_{ijk}^{13}, C_{ijk}^{14}, C_{ijk}^{15}, C_{ijk}^{16}, C_{ijk}^{17}, C_{ijk}^{18} \right\}, \left\{ C_{ijk}^{21}, C_{ijk}^{22}, C_{ijk}^{23}, C_{ijk}^{24}, C_{ijk}^{25}, C_{ijk}^{26}, C_{ijk}^{27}, C_{ijk}^{28} \right\}, \\
 & \left\{ C_{ijk}^{31}, C_{ijk}^{32}, C_{ijk}^{33}, C_{ijk}^{34}, C_{ijk}^{35}, C_{ijk}^{36}, C_{ijk}^{37}, C_{ijk}^{38} \right\}, \left\{ C_{ijk}^{41}, C_{ijk}^{42}, C_{ijk}^{43}, C_{ijk}^{44}, C_{ijk}^{45}, C_{ijk}^{46}, C_{ijk}^{47}, C_{ijk}^{48} \right\}, \\
 & \left\{ C_{ijk}^{51}, C_{ijk}^{52}, C_{ijk}^{53}, C_{ijk}^{54}, C_{ijk}^{55}, C_{ijk}^{56}, C_{ijk}^{57}, C_{ijk}^{58} \right\}, \left\{ C_{ijk}^{61}, C_{ijk}^{62}, C_{ijk}^{63}, C_{ijk}^{64}, C_{ijk}^{65}, C_{ijk}^{66}, C_{ijk}^{67}, C_{ijk}^{68} \right\}, \\
 & \left\{ C_{ijk}^{71}, C_{ijk}^{72}, C_{ijk}^{73}, C_{ijk}^{74}, C_{ijk}^{75}, C_{ijk}^{76}, C_{ijk}^{77}, C_{ijk}^{78} \right\} \text{ y } \left\{ C_{ijk}^{81}, C_{ijk}^{82}, C_{ijk}^{83}, C_{ijk}^{84}, C_{ijk}^{85}, C_{ijk}^{86}, C_{ijk}^{87}, C_{ijk}^{88} \right\}
 \end{aligned}$$

se calculan mediante FEM en cada subdominio Ω_l de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_q , según sea el caso.

Particularmente para los *dominios prismáticos rectangulares rectos*, los nodos que están en las caras de la frontera exterior y que no están en las aristas ni son esquinas, tienen asociado tres grados de libertad: su derivada normal y sus dos segundas derivadas parciales cruzadas que involucren la dirección de la normal. Así, a los nodos ubicados en las fronteras $x=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a x , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z ; los nodos ubicados en las fronteras $y=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a y , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z ; y finalmente, los nodos ubicados en las fronteras $z=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a z , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z .

Los nodos que están en las aristas de la frontera exterior y que no son esquinas, tienen asociado un solo grado de libertad: su segunda derivada parcial cruzada que involucre las direcciones normales. Así, a los nodos ubicados en las aristas $x=c_1, y=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y ; los nodos ubicados en las aristas $x=c_1, z=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z ; y finalmente, los nodos ubicados en las aristas $y=c_1, z=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z .

Los nodos que son esquinas no tienen asociado ningún grado de libertad.

6.5.1.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Tri-cuadrática en Ω_I con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_I y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I . Se utiliza integración

por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , tri-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_I y FEM es $O(h^3)$. En la figura 6.5 se muestra la gráfica del error vs. h .

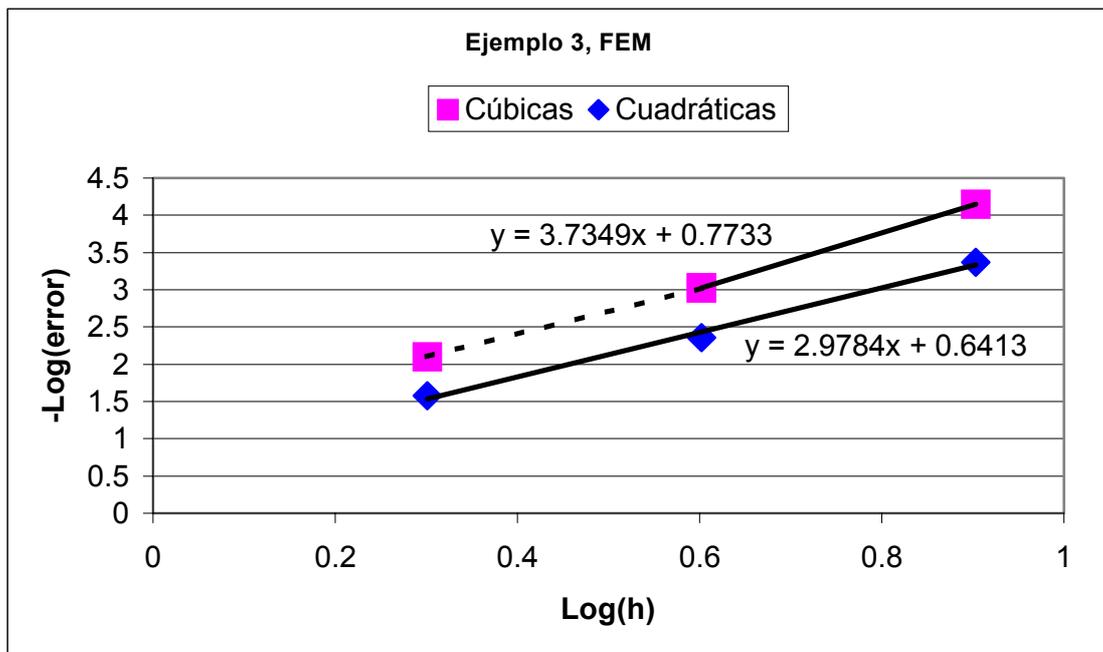


Figura 6.5. - Convergencia h del error para el caso simétrico en tres dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica en Σ , tri-cuadrática en Ω_I y FEM es $O(h^3)$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica en Σ , tri-cúbica en Ω_I y FEM es $O(h^{3.7})$.

6.5.2.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Tri-cúbica en Ω_I con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I y se utiliza FEM con 8 funciones de ponderación locales para construirlas. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I . Se utiliza

integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , tri-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_i y FEM es $O(h^{3.7})$. En la figura 6.5 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.5.3. - Análisis de Resultados

- ◆ En la tabla 6.4 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ **FEM-OF Petrov-Galerkin** para el caso simétrico en tres dimensiones **NO** exhibe propiedades de **superconvergencia**.
- ◆ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con **FEM**, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, G_\Omega + 1\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

Aproximación	FEM-OF PG (FEM)
Bi-cúbica en Σ y tri-cuadrática en Ω_i	$O(h^3)$
Bi-cúbica en Σ y tri-cúbica en Ω_i	$O(h^{3.7})$

Tabla 6.4. - Convergencia h del error en tres dimensiones para el caso simétrico.

Capítulo 7:

Resultados

Caso

No Simétrico

Indice:

- 7.1.- Caso No Simétrico
- 7.2.- Resultados en 1 Dimensión
- 7.3.- Resultados en 2 Dimensiones

7.1- Caso No Simétrico

El *caso no simétrico* corresponde a la ecuación diferencial elíptica general cuando su término $\nabla \cdot (\underline{b}u)$ no se anula, es decir, cuando $\underline{b} \neq \underline{0}$. Esto es:

$$\mathcal{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega} \quad \text{en cada } \Omega_k \quad (7.1.1)$$

Nótese que el operador diferencial adjunto es diferente que el operador diferencial original. En consecuencia, los métodos FEM-OF Trefftz-Herrera (**FEM-OF TH**), FEM-OF Steklov-Poincaré (**FEM-OF SP**) y FEM-OF Petrov-Galerkin (**FEM-OF PG**) resultan ser distintos. Esto se debe a que los espacios de funciones de base $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_j}$ y de funciones de peso $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$ no son iguales.

7.2.- Resultados en Una Dimensión

Sea la ecuación diferencial elíptica ordinaria:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + V \frac{du}{dx} = 0 \quad (7.2.1)$$

en $\Omega = [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera $u(0)=1$, $u(1)=0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x) = \frac{e^{Vx} - e^V}{1 - e^V}$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de E_x subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) | i=1, \dots, E_x\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i=0, \dots, E_x$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son: $\{x_i | i=1, \dots, E_x - 1\}$.

Se trabajarán cuatro *algoritmos*. Primero se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, polinomios cúbicos con FEM. Tercero, polinomios cuadráticos con colocación. Y cuarto, polinomios cúbicos con colocación.

La aproximación cuadrática y la aproximación cúbica fueron planteadas en (6.3.2) y (6.3.3), respectivamente.

7.2.1.- Aproximación Cuadrática con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y FEM es $O(h^4)$. En la figura 7.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

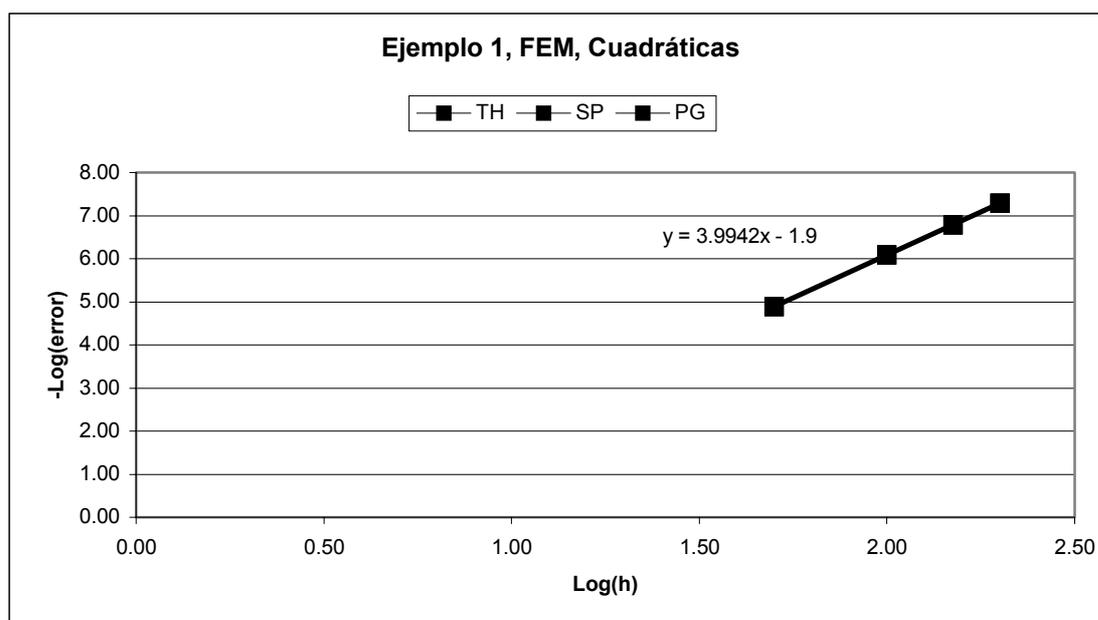


Figura 7.1. - Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM es $O(h^4)$.

7.2.2. - Aproximación Cúbica con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 2 funciones de ponderación locales para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y FEM es $O(h^6)$. En la figura 7.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

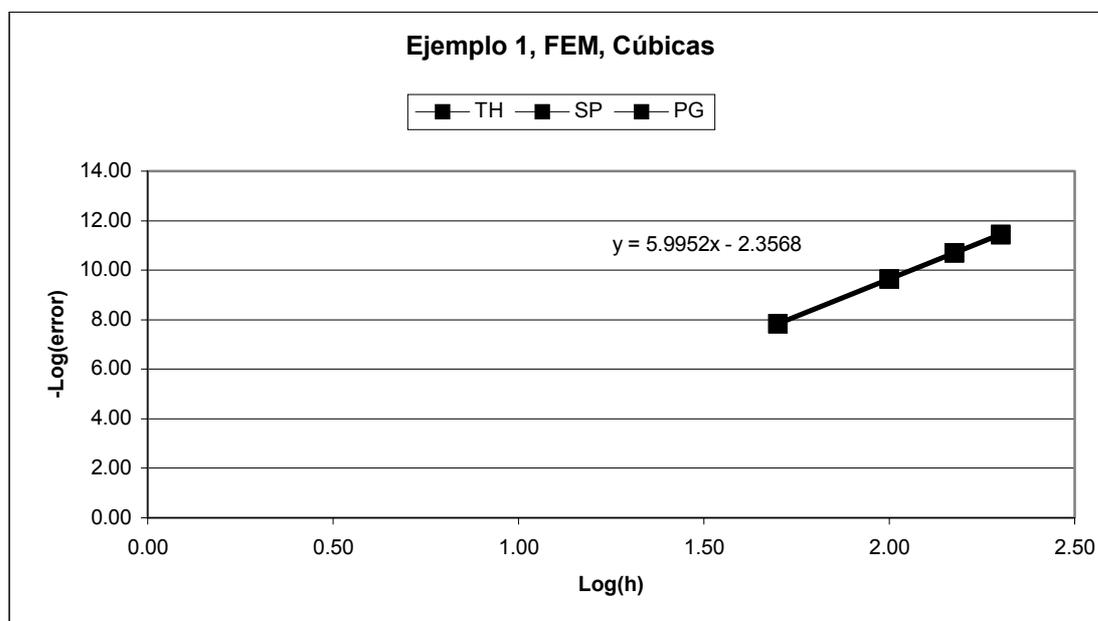


Figura 7.2. - Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM es $O(h^6)$.

7.2.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1 punto gaussiano para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y colocación es $O(h^4)$. En la figura 7.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

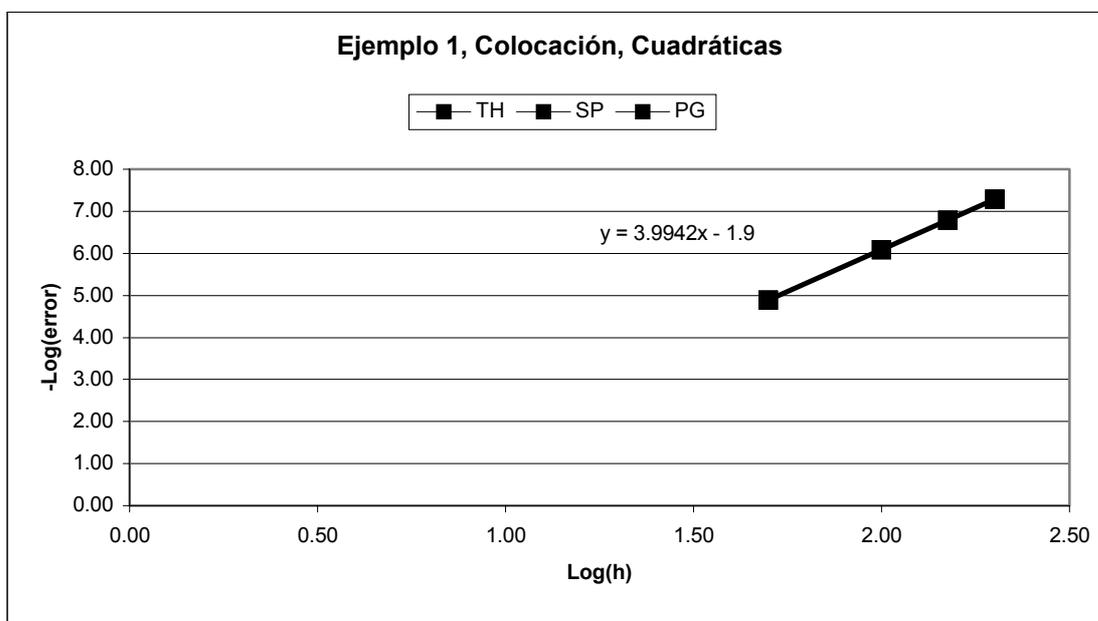


Figura 7.3. - Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y colocación es $O(h^4)$.

7.2.4.- Aproximación Cúbica con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2 puntos gaussianos para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los métodos FEM-OF Trefftz-Herrera y FEM-OF Steklov-Poincaré con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ colocación es $O(h^4)$. Pero el orden de convergencia h del error para el método FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y colocación es $O(h^6)$. En la figura 7.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

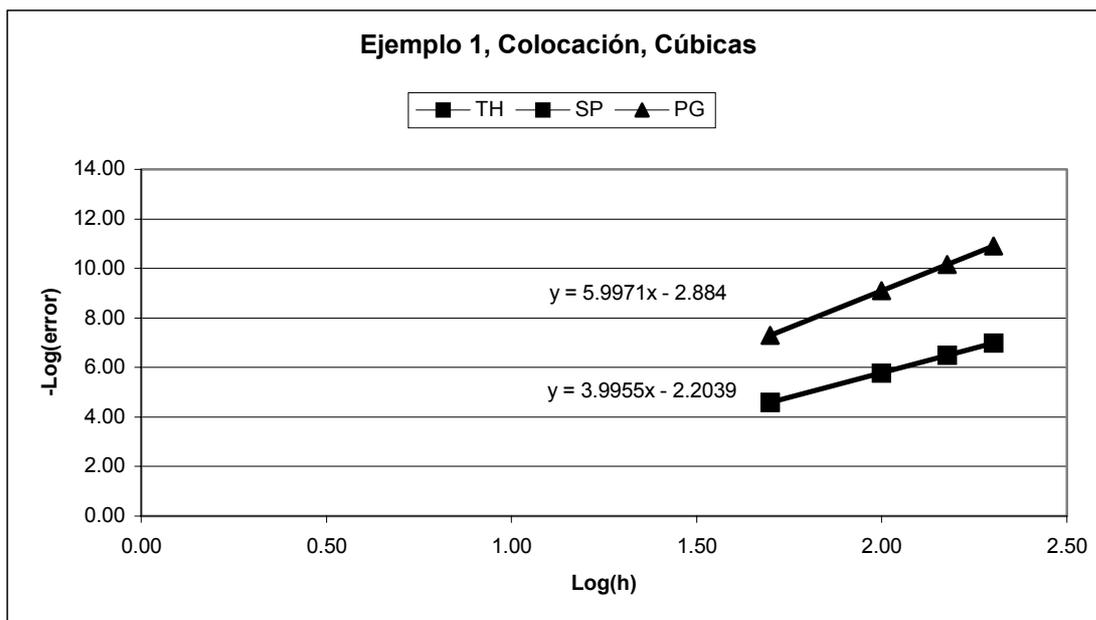


Figura 7.4.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y colocación es $O(h^6)$.

Para FEM-OF Trefftz-Herrera y FEM-OF Steklov-Poincaré con aproximación cúbica y colocación es $O(h^4)$.

7.2.5.- Casos con Advección Dominante

Se analiza el comportamiento de la convergencia h del error del método FEM-OF Petrov-Galerkin contra la velocidad de advección V (casos con advección dominante), con aproximación tanto cuadrática $G_{\Omega} = 2$ como cúbica $G_{\Omega} = 3$ y FEM. Se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h para el error y mayor la magnitud del error. En las figuras 7.5 y 7.6 se muestra la gráfica de la convergencia h del error vs. el *Número de Peclet (Global)* [56]:

$$Pe_G = \frac{VL}{D} \quad (7.2.2)$$

En las figuras 7.7 y 7.8 se muestra la gráfica del error vs. h . En las figuras 7.9 y 7.10 se muestra las funciones de base y las funciones de peso para algunos casos. Al respecto obsérvese la asimetría de las funciones: mientras mayor es V , mayor es la asimetría.

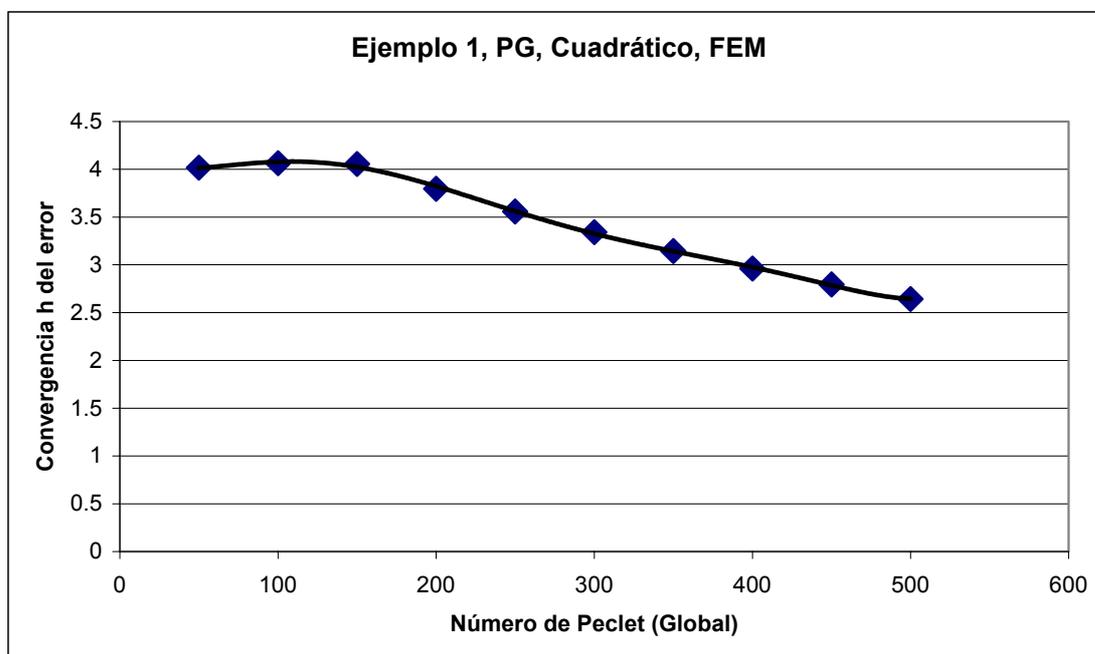


Figura 7.5. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM.

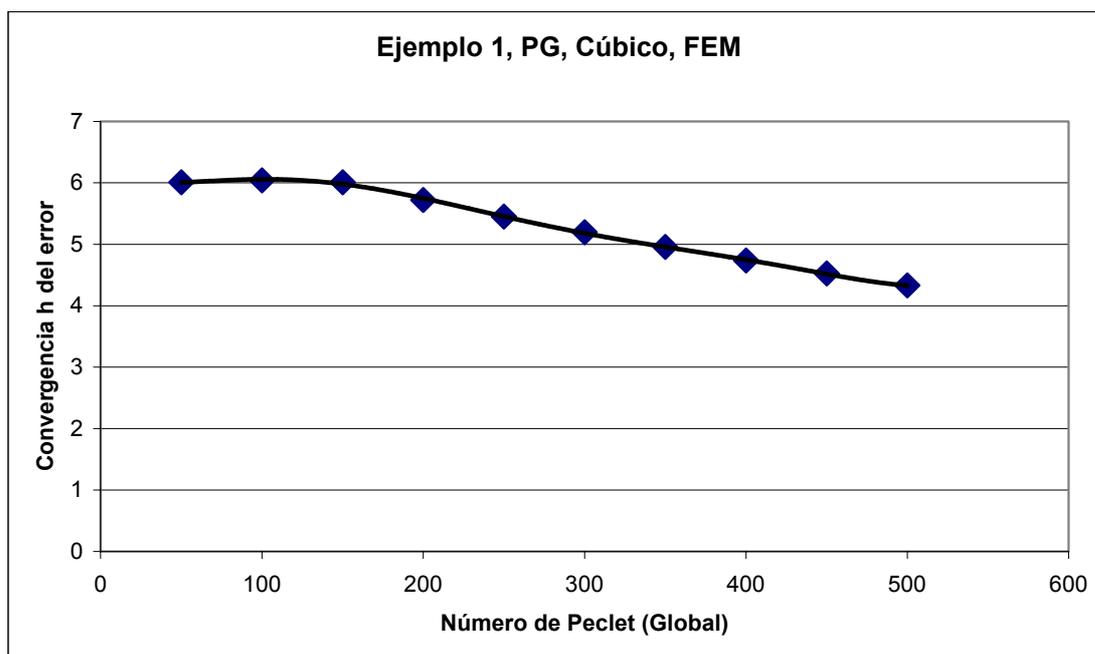


Figura 7.6. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM.

7.2.6.- Análisis de Resultados

- ◆ En las tablas 7.1, 7.2 y 7.3 se comparan los ordenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ **FEM-OF Petrov-Galerkin** para el caso no simétrico en una dimensión exhibe propiedades de **superconvergencia**. Esta propiedad se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con FEM como con colocación.
- ◆ El orden de (super) convergencia h del error es $O(h^{2G_\Omega})$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k , en lugar del orden $O(h^{2(G_\Omega-1)})$ que se obtiene al aplicar el método directo de Steklov-Poincaré *convencional* con colocación o el método indirecto de Trefftz-Herrera *convencional* con colocación.

- ◆ Los tres métodos, **FEM-OF Trefftz-Herrera**, **FEM-OF Steklov-Poincaré** y **FEM-OF Petrov-Galerkin**, para el caso no simétrico en una dimensión exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con **FEM**.
- ◆ Los tres métodos, **FEM-OF Trefftz-Herrera**, **FEM-OF Steklov-Poincaré** y **FEM-OF Petrov-Galerkin**, para el caso no simétrico en una dimensión exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con **polinomios cuadráticos** $G_{\Omega} = 2$.
- ◆ Lo anterior se debe a que la aproximación cuadrática con FEM y la aproximación cuadrática con colocación resultan ser numéricamente iguales cuando se utiliza un punto gaussiano para determinar el único parámetro de las funciones de base o de peso.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \llcorner u dx = 0 \Leftrightarrow (x_{i+1} - x_i) w|_{x_G} \llcorner u|_{x_G} = 0 \Leftrightarrow \llcorner u|_{x_G} = 0 \quad (7.2.3)$$

- ◆ Los métodos **FEM-OF Trefftz-Herrera** y **FEM-OF Steklov-Poincaré** para el caso no simétrico en una dimensión no exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con polinomios cúbicos $G_{\Omega} = 3$ (ó de mayor grado) con colocación.
- ◆ Utilizando **FEM-OF Petrov-Galerkin**, se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^2)$	$O(h^2)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$

Tabla 7.1. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.
Caracterizaciones convencionales con colocación.

Aproximación	FEM-OF TH (Colocación)	FEM-OF SP (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$

Tabla 7.2. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.
Caracterizaciones FEM-OF con colocación.

Aproximación	FEM-OF TH (FEM)	FEM-OF SP (FEM)	FEM-OF PG (FEM)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^6)$	$O(h^6)$	$O(h^6)$

Tabla 7.3. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.
Caracterizaciones FEM-OF con FEM.

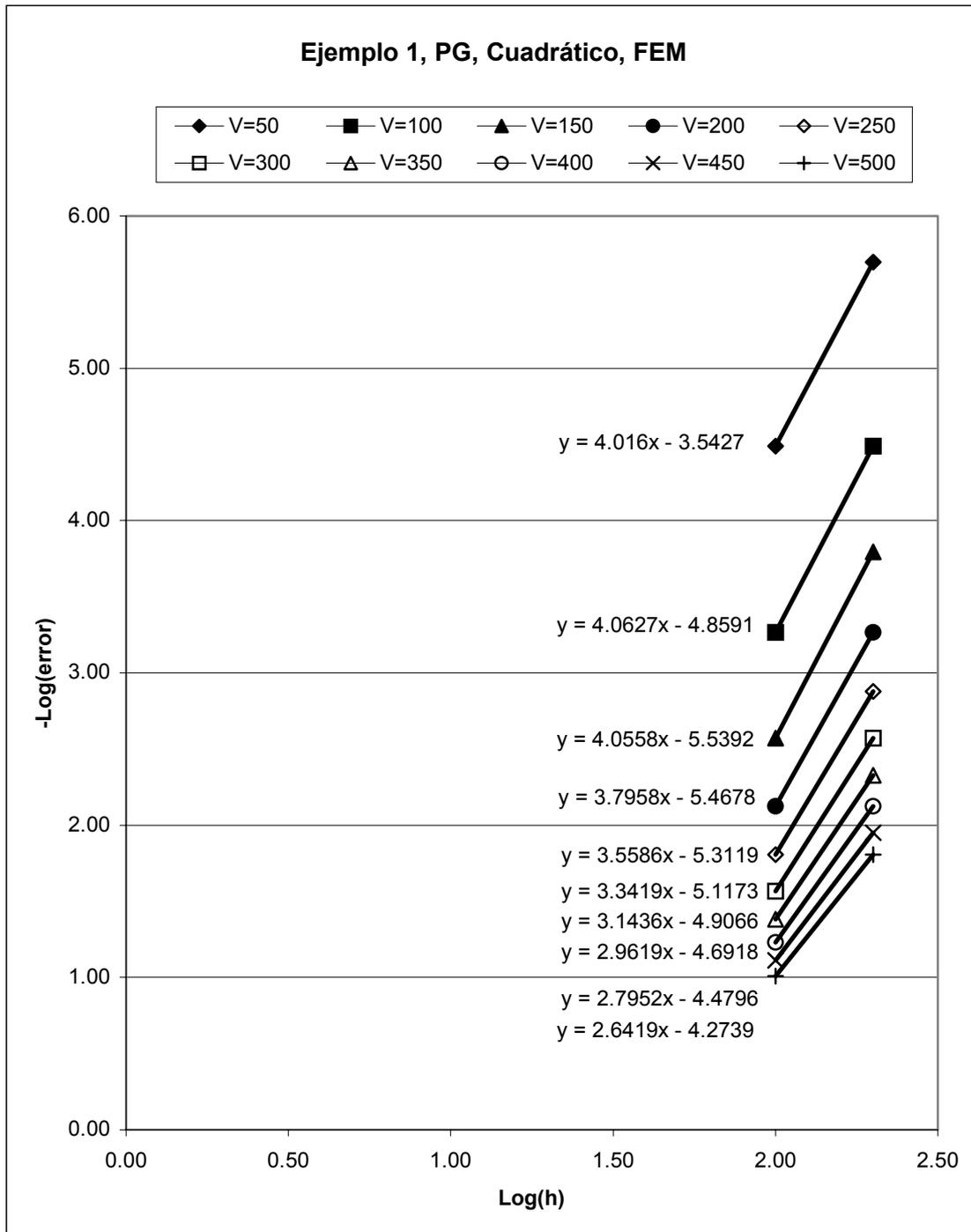


Figura 7.7. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM.

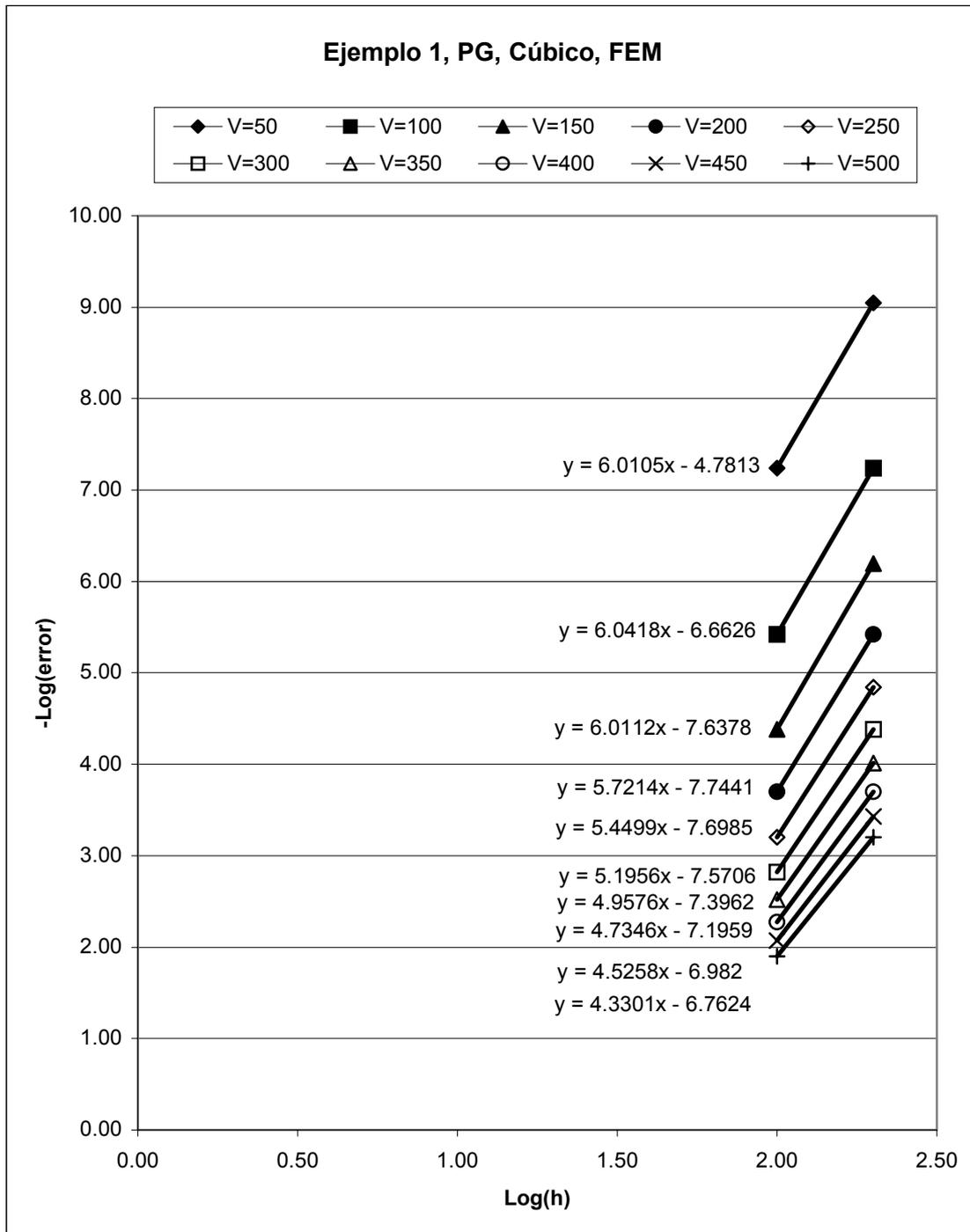


Figura 7.8. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM.

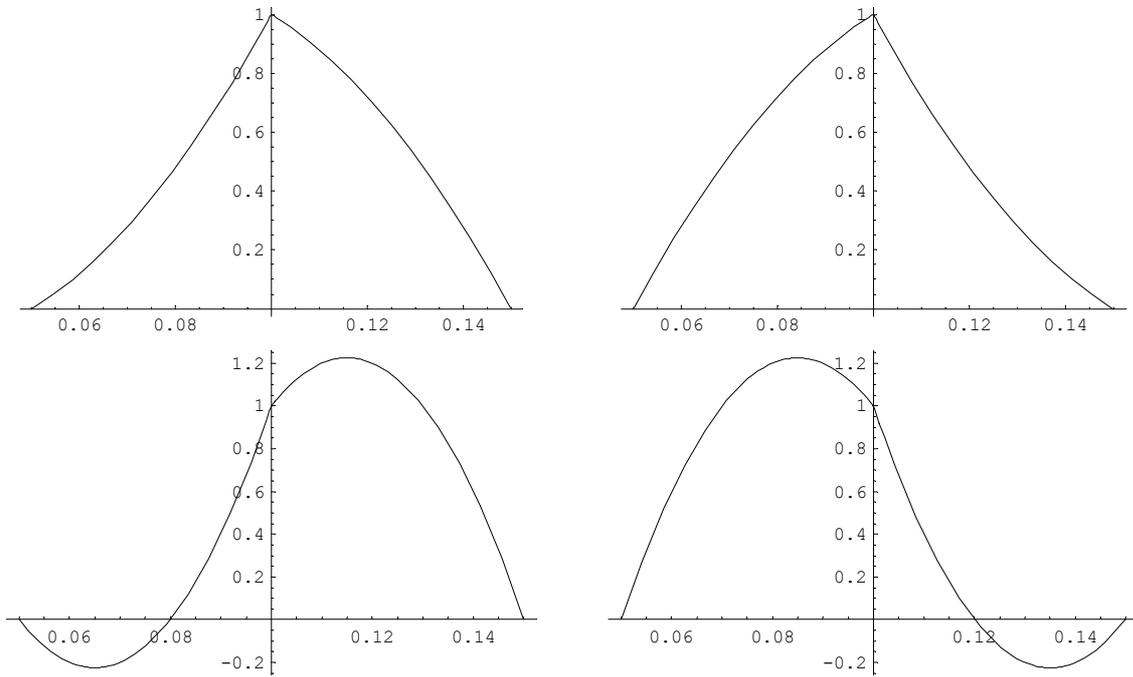


Figura 7.9. - Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cuadrática para $V = 20$ -arriba- y $V = 100$ -abajo-.

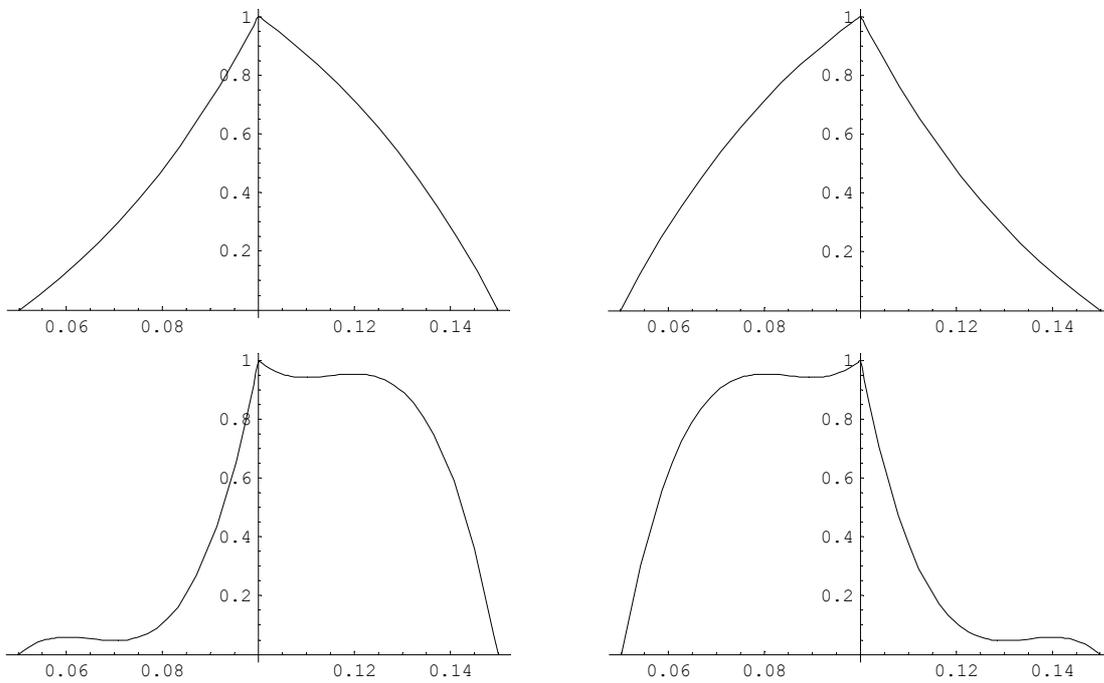


Figura 7.10. - Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cúbica para $V = 20$ -arriba- y $V = 100$ -abajo-.

7.3.- Resultados en Dos Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_x \frac{\partial u}{\partial x} + V_y \frac{\partial u}{\partial y} + u = f_\Omega \quad (7.3.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x, y) = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \mid i = 1, \dots, E_x; j = 1, \dots, E_y\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i = 0, \dots, E_x$ e $y_j = j/E_y$ para $j = 0, \dots, E_y$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\{(x_i, y_j) \mid i = 1, \dots, E_x - 1; j = 1, \dots, E_y - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, igual que el primer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas. Tercero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la

frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Cuarto, igual que el tercer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas.

La aproximación con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k fue planteada en (6.4.2)-(6.4.5). La aproximación con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k fue planteada en (6.4.6)-(6.4.9).

7.3.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$ con $\angle(\underline{V}) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.11 se muestra la gráfica del error vs. h .

7.3.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1×1 punto gaussiano para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$

con $\angle(V) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_{\Omega_k} = 2$ en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. En la figura 7.11 se muestra la gráfica del error vs. h .

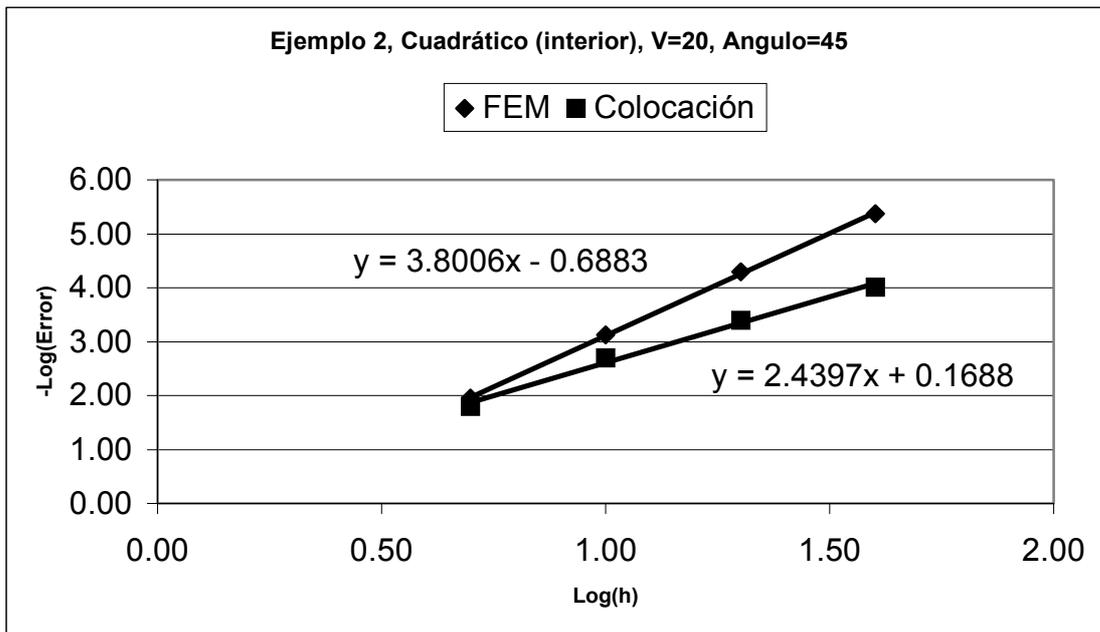


Figura 7.11. - Convergencia h del error para el caso no simétrico en dos dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

7.3.3.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con

4 funciones de ponderación locales para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$ con $\angle(\underline{V}) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.12 se muestra la gráfica del error vs. h .

7.3.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2×2 puntos gaussianos para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$ con $\angle(\underline{V}) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y colocación es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.12 se muestra la gráfica del error vs. h .

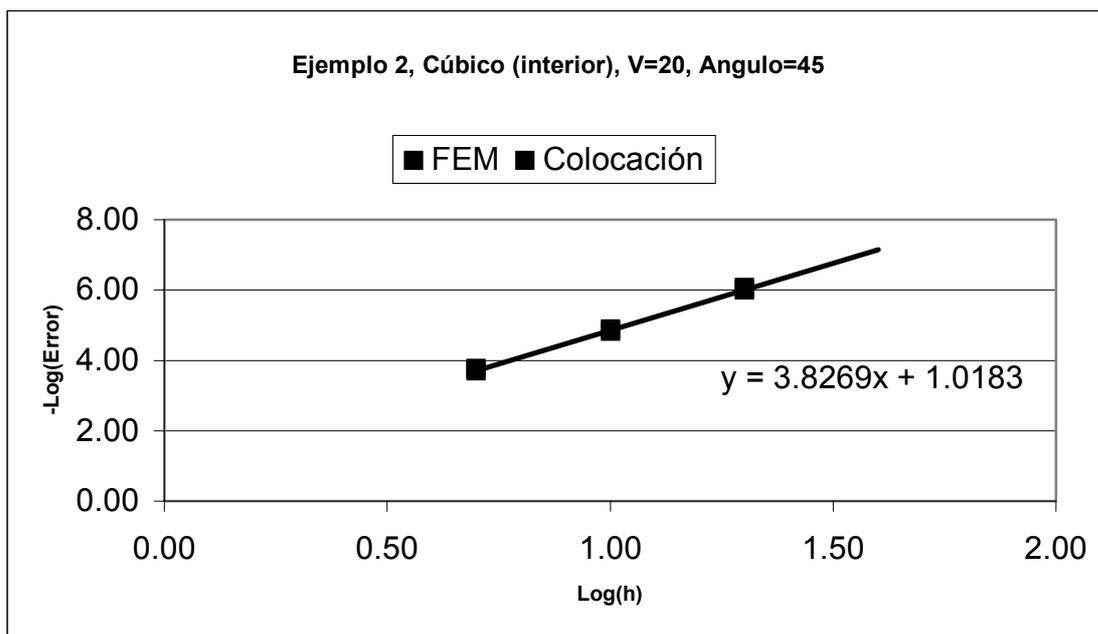


Figura 7.12.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en dos dimensiones.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y colocación es $O(h^{3.8})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

7.3.5.- Casos con Advección Dominante

Se analiza el comportamiento de la convergencia h del error del método FEM-OF Petrov-Galerkin contra la velocidad de advección \underline{V} (casos con advección dominante), con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM. Se observa que mientras mayor es la velocidad de advección \underline{V} , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error. En la figura 7.13 se muestra la gráfica de la convergencia h del error vs. el Número de Peclet (Global).

En la figura 7.14 se muestra la gráfica del error vs. h . En la figura 7.15 se muestra las funciones de base y de peso para algunos casos. Al respecto, obsérvese que la asimetría de las funciones se orienta en la dirección de la velocidad de advección \underline{V} .

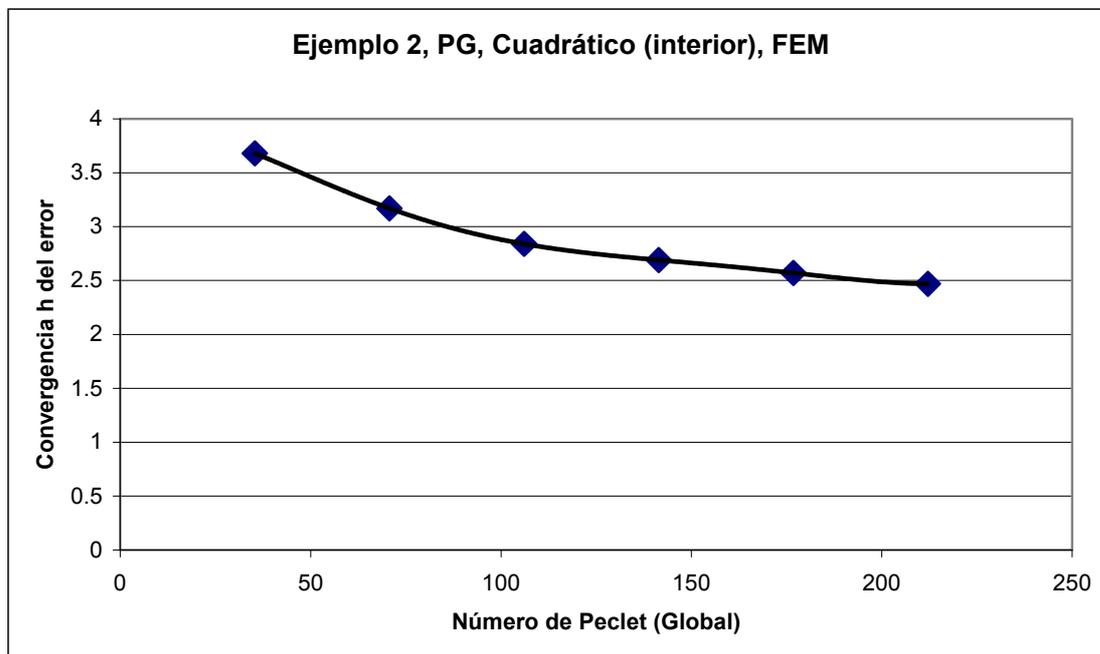


Figura 7.13. - Caso no simétrico en dos dimensiones. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM.

7.3.6.- Análisis de Resultados

- ◆ En las tablas 7.4 y 7.5 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ *FEM-OF Petrov-Galerkin* para el caso no simétrico en dos dimensiones exhibe propiedades de *superconvergencia*. Esta propiedad se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con *FEM*. Pero no se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con colocación.

- ◆ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con FEM, el orden de (super) convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2G_\Omega\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

- ◆ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con colocación, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$.

- ◆ Utilizando FEM-OF Petrov-Galerkin, se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error.

Aproximación	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k	$O(h^{2.4})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 7.4. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso no simétrico.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cúbica en Ω_k	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 7.5. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso no simétrico.

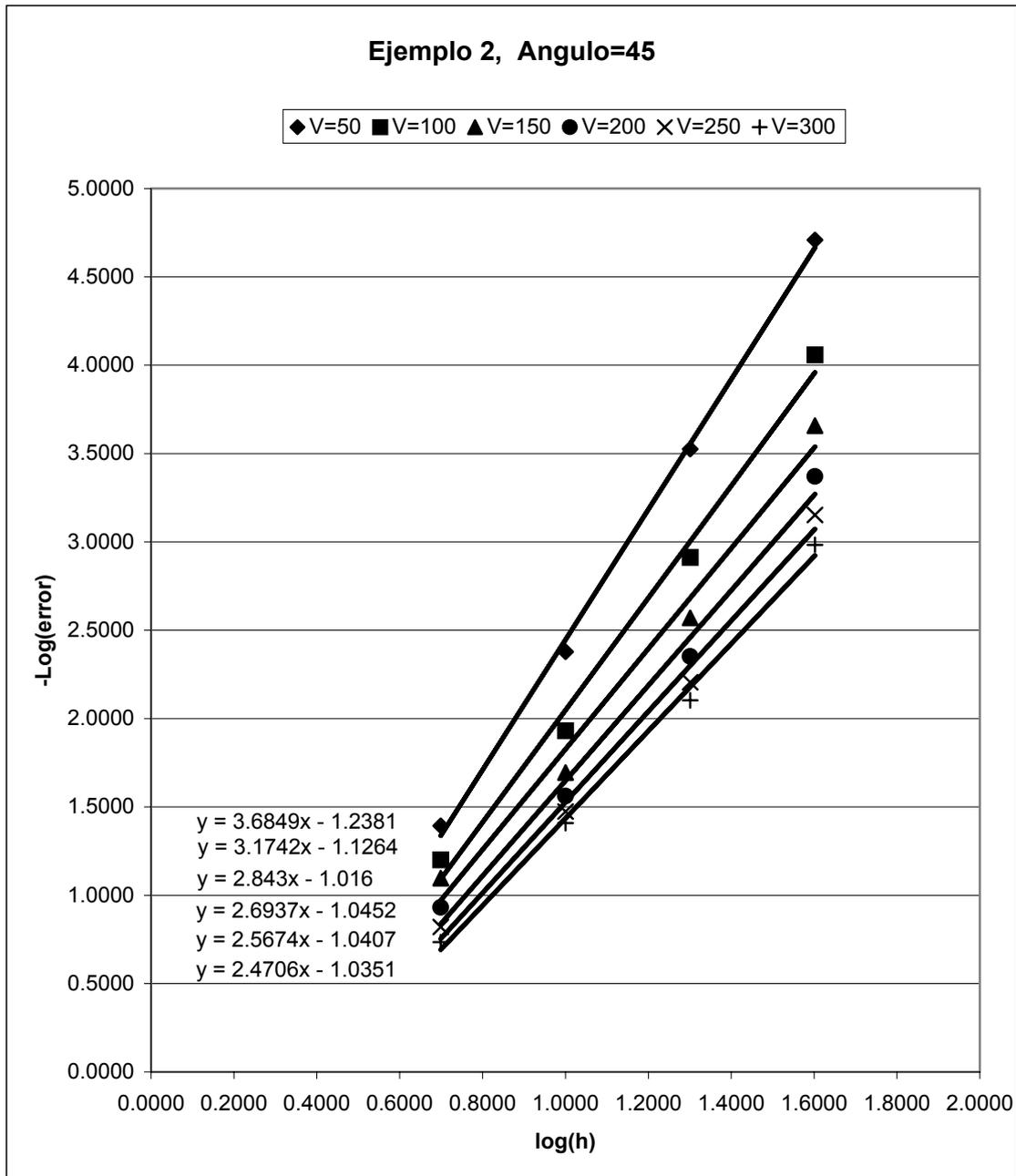


Figura 7.14. - Caso no simétrico en dos dimensiones. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM.

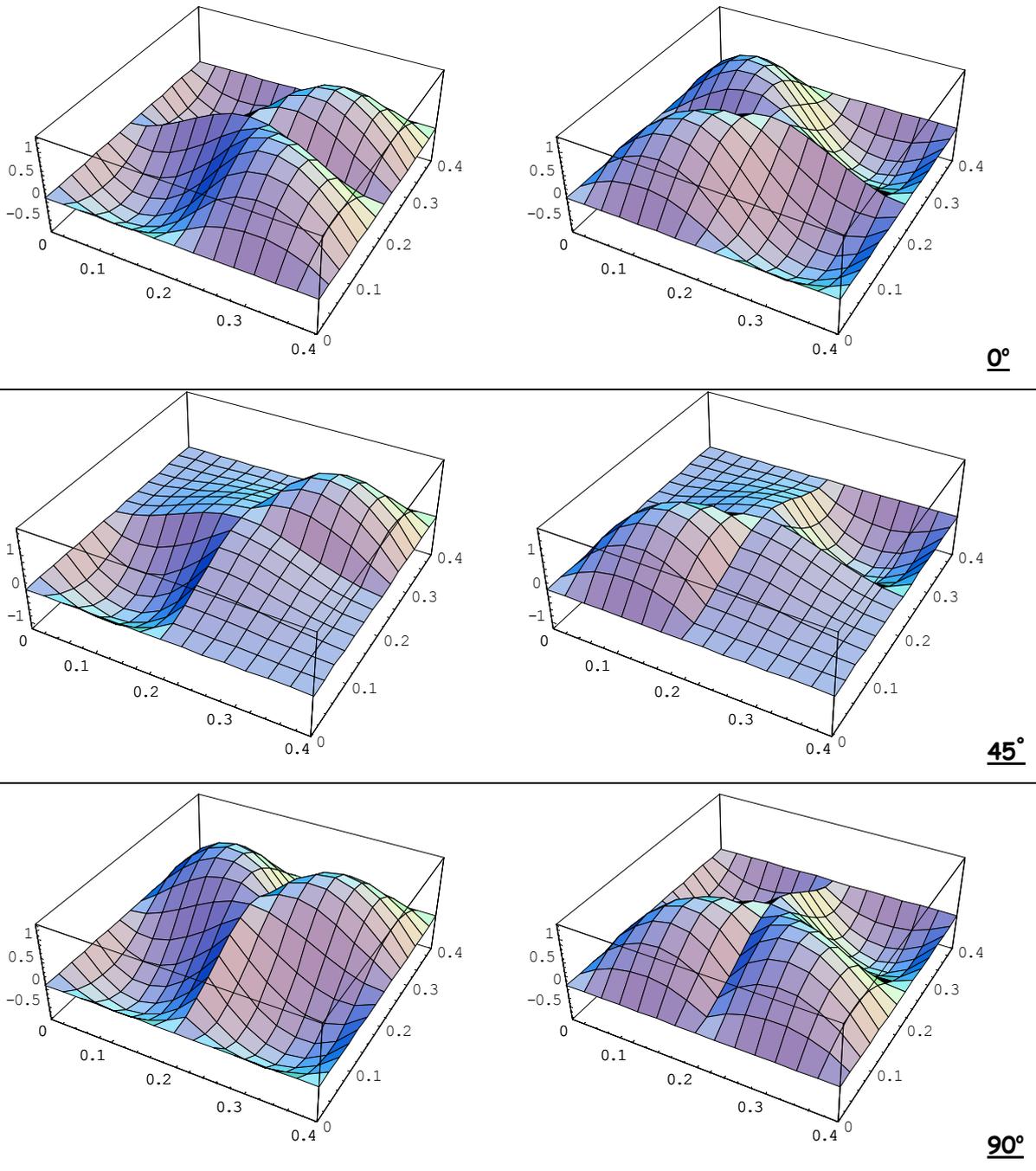


Figura 7.15. - Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k para $|\mathcal{V}| = 100$ con ángulos de $\angle(\mathcal{V}) = 0^\circ$ -primer renglón-, $\angle(\mathcal{V}) = 45^\circ$ -segundo renglón- y $\angle(\mathcal{V}) = 90^\circ$ -tercer renglón-.

Capítulo 8:

Análisis

del

Error

Indice:

8.- Análisis del Error

8.- Análisis del Error

Sea $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_f} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ el espacio de funciones óptimas de base (exactas) de dimensión infinita; en este espacio se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_P . Sea $\hat{u} \in \widehat{O}_B$ la información buscada (exacta).

Dentro del espacio de funciones óptimas de base de dimensión infinita \widehat{O}_B , se elige un espacio de funciones óptimas de base pero de dimensión finita $\overline{O}_B \subset \widehat{O}_B$; en este espacio también se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_P , pero las trazas de sus funciones en la frontera interior Σ son polinomios por tramos. Sea $\bar{u} \in \overline{O}_B$ la proyección de la información buscada en \overline{O}_B . Entonces se ha introducido una primera fuente de error: un error de proyección.

Ahora bien, el espacio de funciones óptimas de base de dimensión finita \overline{O}_B , se aproxima con un espacio de funciones de base también de dimensión finita $\widetilde{O}_B \subset \widehat{D}_1(\Omega)$, pero cuyas funciones ya no son óptimas. En este espacio se satisface aproximadamente la condición impuesta por el espacio nulo N_P , ya que sus funciones están formadas en el interior de los subdominios Ω_i por polinomios por tramos (sus trazas en Σ también son polinomios por tramos). De aquí que $\widetilde{O}_B \not\subset \widehat{O}_B$. Sea $\tilde{u} \in \widetilde{O}_B$ la aproximación de la información buscada en \widetilde{O}_B . Entonces, se ha introducido una segunda fuente de error: un error de aproximación.

Sea $\overline{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_k} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$ el espacio de funciones óptimas de peso (exactas) de dimensión finita; en este espacio se satisface (exactamente) la condición impuesta por el espacio nulo N_Q y las trazas de sus funciones en la frontera interior Σ son polinomios por tramos. Sea $\overline{w} \in \overline{O}_T$ una función óptima de peso (exacta).

Ahora bien, el espacio de funciones óptimas de peso de dimensión finita \overline{O}_T , se aproxima con un espacio de funciones de peso también de dimensión finita $\widetilde{O}_T \subset \widehat{D}_2(\Omega)$, pero cuyas funciones ya no son óptimas. En este espacio se satisface aproximadamente la condición impuesta por el espacio nulo N_Q , ya que sus funciones están formadas en el interior de los subdominios Ω_i por polinomios por tramos (sus trazas en Σ también son polinomios por tramos). De aquí que $\widetilde{O}_T \not\subset \overline{O}_T$. Sea $\widetilde{w} \in \widetilde{O}_T$ la aproximación de una función de peso óptima en \widetilde{O}_T .

Es importante hacer notar que las funciones de peso aproximadas $\widetilde{w} \in \widetilde{O}_T$ tienen las mismas trazas en Σ que las funciones óptimas de peso $\overline{w} \in \overline{O}_T$. De esta forma, al construir ambas se resuelve los mismos problemas locales bien planteados (con solución única), solo que en el caso de las funciones óptimas se obtiene una solución analítica y, en el otro caso, una solución aproximada con ayuda de algún método numérico (por ejemplo: FEM o colocación). Entonces se puede establecer una biyección entre las funciones de peso aproximadas y las funciones óptimas de peso.

Notación. - Se introduce la siguiente notación:

Sea $\overline{e} = \widehat{u} - \overline{u}$ el error de proyección para la información buscada.

Sea $\widetilde{e} = \overline{u} - \widetilde{u}$ el error de aproximación para la información buscada.

Sea $e = \overline{e} + \widetilde{e} = \widehat{u} - \widetilde{u}$ el error total para la información buscada.

Sea $\eta = \widetilde{w} - \overline{w}$ el error de aproximación para las funciones óptimas de peso.

Primero se harán los siguientes planteamientos básicos de los cuales parte este análisis del error. La información buscada $\hat{u} \in \widehat{O}_B$ cumple que:

$$-\langle S_K^* \hat{u}, \bar{w} \rangle = \langle f, \bar{w} \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O}_T \quad (8.1)$$

Puesto que $\forall \bar{w} \in \overline{O}_T$ se tiene que $Q\bar{w} = 0$, consecuentemente $\langle Q^* \hat{u}, \bar{w} \rangle = 0$. Entonces de (8.1)

se tiene que:

$$\langle (Q^* - S_K^*) \hat{u}, \bar{w} \rangle = \langle f, \bar{w} \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O}_T \quad (8.2)$$

La proyección de la información buscada $\bar{u} \in \overline{O}_B$ también cumple que:

$$-\langle S_K^* \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle f, \bar{w} \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O}_T \quad (8.3)$$

La aproximación de información buscada $\tilde{u} \in \widetilde{O}_B$ cumple que:

$$\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \tilde{w} \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \widetilde{O}_T \quad (8.4)$$

Debido a la biyección entre los elementos de \overline{O}_T y \widetilde{O}_T , las afirmaciones $\forall \bar{w} \in \overline{O}_T$ y $\forall \tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ son equivalentes. Entonces de (8.4) se tiene que:

$$\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \tilde{w} \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \widetilde{O}_T \quad (8.5)$$

El objetivo de este análisis del error es que a partir de las expresiones (8.2), (8.3) y (8.5), las cuales involucran las funcionales $\langle S_K^* \hat{u}, \bar{w} \rangle$, $\langle S_K^* \bar{u}, \bar{w} \rangle$ y $\langle S_K^* \tilde{u}, \tilde{w} \rangle$ (la información buscada exacta, la proyección de la información buscada y la aproximación de la información buscada respectivamente), se deduzca la funcional $\langle S_K^* e, \bar{w} \rangle$ que representa el error total de la información buscada en la frontera interior Σ . Este objetivo se logra en el teorema 8.5, previamente desarrollando los lemas 8.1 al 8.4.

Lema 8.1. - Una expresión equivalente a (8.5):

$$\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \tilde{w} \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \overline{O_T}$$

es:

$$-\langle S_K^* \tilde{u}, \tilde{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \tilde{w} \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \overline{O_T} \quad (8.6)$$

Demostración.

En efecto, partiendo de (8.5):

$$\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \tilde{w} \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle$$

Sustituyendo $\eta = \tilde{w} - \bar{w}$, se tiene que:

$$\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \bar{w} + \eta \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle$$

$$\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \bar{w} \rangle + \langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle = \langle f, \tilde{w} \rangle$$

$$\langle Q^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle - \langle S_K^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \tilde{w} \rangle$$

Finalmente, considerando que $\forall \tilde{w} \in \overline{O_T}$ se tiene que $Q\bar{w} = 0$, entonces:

$$-\langle S_K^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \tilde{w} \rangle$$

□

Lema 8.2. - Si se resta (8.3):

$$-\langle S_K^* \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle f, \bar{w} \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T}$$

de (8.6):

$$-\langle S_K^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \tilde{w} \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \overline{O_T}$$

se tiene que:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \eta \rangle \quad \forall \tilde{w} \in \overline{O_T} \quad (8.7)$$

Demostración:

En efecto, partiendo de (8.6):

$$-\langle S_K^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*)\tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \tilde{w} \rangle$$

Restando (8.3) se tiene que:

$$-\langle S_K^* \tilde{u}, \bar{w} \rangle + \langle S_K^* \bar{u}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \bar{w} \rangle - \langle f, \bar{w} \rangle$$

$$\langle S_K^* (\bar{u} - \tilde{u}), \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, (\bar{w} - \bar{w}) \rangle$$

Finalmente, sustituyendo $\tilde{e} = \bar{u} - \tilde{u}$ y $\eta = \tilde{w} - \bar{w}$, se tiene que:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \eta \rangle$$

□

Lema 8.3. - Si se sustituye (8.2):

$$\langle (Q^* - S_K^*) \hat{u}, \bar{w} \rangle = \langle f, \bar{w} \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T}$$

en (8.7):

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \eta \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T}$$

se tiene que:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*) e, \eta \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T} \quad (8.8)$$

Demostración:

En efecto, partiendo de (8.7):

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle f, \eta \rangle$$

Sustituyendo (8.2) se tiene que:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = -\langle (Q^* - S_K^*) \tilde{u}, \eta \rangle + \langle (Q^* - S_K^*) \hat{u}, \eta \rangle$$

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*) (\hat{u} - \tilde{u}), \eta \rangle$$

Finalmente, sustituyendo $e = \hat{u} - \tilde{u}$, se tiene que

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*) e, \eta \rangle$$

□

Lema 8.4. - Una expresión equivalente a (8.8):

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*) e, \eta \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T}$$

es:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle Pe, \eta \rangle \quad \forall \bar{w} \in \overline{O_T} \quad (8.9)$$

Demostración:

Recuérdese que $e = \hat{u} - \tilde{u}$ y $\eta = \tilde{w} - \bar{w}$.

En efecto, partiendo de la fórmula de Green-Herrera:

$$\langle (P - B - R_J - S_J)e, \eta \rangle = \langle (Q^* - C^* - R_K^* - S_K^*)e, \eta \rangle$$

se tiene lo siguiente:

$$\langle Be, \eta \rangle = \langle B(\hat{u} - \tilde{u}), \eta \rangle = 0 \quad \text{ya que } \hat{u} \in N_B \subset \widehat{O_B} \text{ y por construcción } \tilde{u} \in \widetilde{O_B}$$

satisface (exactamente) la condición $B\tilde{u} = 0$, ya que $\tilde{u} = 0$ en $\partial\Omega$.

$$\langle R_J e, \eta \rangle = \langle R_J(\hat{u} - \tilde{u}), \eta \rangle = 0 \quad \text{ya que } \hat{u} \in N_{R_J} \subset \widehat{O_B} \text{ y por construcción } \tilde{u} \in \widetilde{O_B}$$

satisface (exactamente) la condición $R_J \tilde{u} = 0$, ya que $[\tilde{u}] = 0$ en Σ .

$$\langle C^* e, \eta \rangle = \langle C\eta, e \rangle = \langle C(\tilde{w} - \bar{w}), e \rangle = 0 \quad \text{ya que } \bar{w} \in N_C \subset \overline{O_T} \text{ y por}$$

construcción $\tilde{w} \in \widetilde{O_T}$ satisface (exactamente) la condición $C\tilde{w} = 0$, ya que $\tilde{w} = 0$ en $\partial\Omega$.

$$\langle R_K^* e, \eta \rangle = \langle R_K \eta, e \rangle = \langle R_K(\tilde{w} - \bar{w}), e \rangle = 0 \quad \text{ya que } \bar{w} \in N_{R_K} \subset \overline{O_T} \text{ y por}$$

construcción $\tilde{w} \in \widetilde{O_T}$ satisface (exactamente) la condición $R_K \tilde{w} = 0$, ya que $[\tilde{w}] = 0$ en Σ .

Entonces, considerando las funcionales bilineales anteriores que se anulan en la fórmula de Green-Herrera se tiene que:

$$\langle (P - S_J)e, \eta \rangle = \langle (Q^* - S_K^*)e, \eta \rangle.$$

Ahora bien, el siguiente punto será de importancia fundamental para el análisis del error. Para el BVPJ elíptico de segundo orden se tiene que:

$$\langle S_J e, \eta \rangle = \langle S_J e, \tilde{w} - \bar{w} \rangle = \int_{\Sigma} [a_n \bullet \nabla e] (\tilde{w} - \bar{w}) d\underline{x} = 0$$

puesto que existe una biyección entre los elementos de $\overline{O_T}$ y $\widetilde{O_T}$, ya que $\overline{w} \in \overline{O_T}$ tiene las mismas trazas en Σ que $\widetilde{w} \in \widetilde{O_T}$. En consecuencia $\widetilde{w} = \overline{w}$ en Σ y $\widetilde{w} - \overline{w} = 0$. Considerando lo anterior:

$$\langle Pe, \eta \rangle = \langle (Q^* - S_K^*)e, \eta \rangle$$

Finalmente, sustituyendo el resultado previo en (8.8) se tiene que:

$$\langle S_K^* \widetilde{e}, \overline{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*)e, \eta \rangle = \langle Pe, \eta \rangle$$

□

Teorema 8.5. - Sea un BVPJ elíptico de segundo orden con solución única $u \in \widehat{O_B}$. Sea $\hat{u} \in \widehat{O_B}$ la información buscada de la solución en Σ . Sea $\overline{O_B}$ y $\overline{O_T}$ un espacio de funciones de base y de peso óptimas cuyas trazas en Σ son polinomios de grado 3 por tramos $G_\Sigma = 3$. Sea $\overline{u} \in \overline{O_B}$ la proyección de la información buscada. Sea $\widetilde{O_B}$ y $\widetilde{O_T}$ un espacio de funciones de base y de peso aproximadas cuyas trazas en Σ son polinomios de grado 3 por tramos $G_\Sigma = 3$, y cuyo interior en cada subdominio Ω_i son polinomios de grado 2 por tramos $G_\Omega = 2$. Sea $\widetilde{u} \in \widetilde{O_B}$ la aproximación de la información buscada. Se utiliza FEM para resolver los problemas locales que definen a las funciones de base y de peso. Entonces el error total de la información buscada $e = \hat{u} - \widetilde{u} = \overline{e} + \widetilde{e}$ en Σ :

$$\langle S_K^* e, \overline{w} \rangle = \langle S_K^* \overline{e}, \overline{w} \rangle + \langle S_K^* \widetilde{e}, \overline{w} \rangle \quad (8.10)$$

tiene un orden de convergencia h del error $O(h^4)$.

Demostración:

Con respecto al primer sumando de (8.10), $\langle S_K^* \overline{e}, \overline{w} \rangle = \langle S_K^* (\hat{u} - \overline{u}), \overline{w} \rangle$, éste es $O(h^4)$ porque $\overline{u} \in \overline{O_B}$ tiene trazas en Σ que son polinomios de grado 3 por tramos $G_\Sigma = 3$.

Con respecto al segundo sumando de (8.10), $\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle$, se tiene lo siguiente. En el lema 8.3 se estableció que: $\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*)e, \eta \rangle$. Luego, en el lema 8.4 se estableció que: $\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle (Q^* - S_K^*)e, \eta \rangle = \langle Pe, \eta \rangle$, utilizando el hecho de que $\langle S_j e, \eta \rangle = 0$ ya que existe una biyección entre $\bar{w} \in \bar{O}_T$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$. Entonces resulta que:

$$\langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle Pe, \eta \rangle = \sum_i \int_{\Omega_i} (\tilde{w} - \bar{w}) \mathcal{L} (\hat{u} - \tilde{u}) d\bar{x}$$

es $O(h^4)$ porque la aproximación de la información buscada $\tilde{u} \in \tilde{O}_B$ y las funciones de peso aproximadas $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ son polinomios de grado 2 por tramos $G_\Omega = 2$ en el interior en cada subdominio Ω_i y fueron construidas resolviendo problemas locales con FEM. Esto es: $(\tilde{w} - \bar{w})$ y $(\hat{u} - \tilde{u})$ son $O(h^3)$; $\mathcal{L} (\hat{u} - \tilde{u})$ es $O(h^1)$ porque el operador diferencial es de 2° orden; el producto $(\tilde{w} - \bar{w}) \mathcal{L} (\hat{u} - \tilde{u})$ es $O(h^4)$; finalmente, la integración aumenta de orden pero la sumatoria lo disminuye de igual manera, por lo que éste no se altera.

En conclusión, la suma: $\langle S_K^* e, \bar{w} \rangle = \langle S_K^* \bar{e} + \tilde{e}, \bar{w} \rangle = \langle S_K^* \bar{e}, \bar{w} \rangle + \langle S_K^* \tilde{e}, \bar{w} \rangle$, tiene un orden de convergencia h del error $O(h^4)$.

□

Capítulo 9:

Conclusiones

Indice:

9.1- Conclusiones

9.2.- Trabajo Futuro

9.1- Conclusiones

1.- El Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF) presentado en este trabajo es una forma de implementar una teoría general de Métodos de Elementos Finitos formulada con funciones de base y de peso discontinuas definidas por tramos, de modo que éstas puedan ser totalmente discontinuas a través de las fronteras interiores que separan los elementos de la partición de un dominio. En este tipo de espacios se formulan problemas de contorno con saltos prescritos (BVPJ).

2.- Se presenta un marco teórico unificado para el desarrollo de los métodos directos y de los métodos indirectos: el marco teórico de las Funciones Óptimas. Aunque estos métodos se relacionan a través de las formulas de Green-Herrera $P - B - J = Q^* - C^* - K^*$, se habían desarrollado por separado. Específicamente, el marco teórico unificado se desarrolla a partir de la introducción de una pareja de descomposiciones duales de los operadores: $S_J + R_J \equiv J$ y $S_K + R_K \equiv K$. Con base en estas descomposiciones duales se definen los espacios de funciones óptimas de base $\widehat{O}_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset \widehat{D}_1(\Omega)$ y de funciones óptimas de peso $\widehat{O}_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \subset \widehat{D}_2(\Omega)$. En el espacio de funciones óptimas se cumple la siguiente propiedad: $\langle S_J v, w \rangle = \langle S_K^* v, w \rangle$, $\forall (v, w) \in \widehat{O}_B(\Omega) \times \widehat{O}_T(\Omega)$, la cual significa que una función óptima de base contiene la información buscada de la solución si y solo si cumple con las condiciones de continuidad de Poincaré-Steklov en la frontera interior Σ .

3.- Con base en el marco teórico de las Funciones Óptimas, se presenta una familia de métodos, cuyos miembros se diferencian entre sí por el uso diferente de los espacios especializados de

funciones de base y de funciones de peso. Los métodos presentados son: el método indirecto de Trefftz-Herrera, el método directo de Steklov-Poincaré y el método de Petrov-Galerkin. La diferencia entre ellos es la siguiente. El método indirecto Trefftz-Herrera utiliza solamente funciones óptimas de peso; el método directo de Steklov-Poincaré utiliza solamente funciones óptimas de base; el método de Petrov-Galerkin utiliza tanto funciones óptimas de base como funciones óptimas de peso.

4.- Sea el BVPJ con condiciones de frontera homogéneas ($g = 0$):

$$(P - B - J)u = f - j$$

con condiciones de saltos prescritos $j \equiv Ju_\Sigma$. Entonces su formulación débil (alternativa) que se propone para el marco teórico de las Funciones Óptimas es:

$$\langle (P - B - J)\hat{v}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle - \langle (P - B - J)u_P, w \rangle, \forall w \in \widehat{O}_T$$

donde la información buscada en la frontera interior Σ es $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ y la solución del BVPJ en todo el dominio Ω es $u = \hat{v} + u_P + u_\Sigma$. A esta misma formulación débil alternativa se le puede aplicar cualquiera de los tres métodos mencionados anteriormente; la diferencia radica en la forma de utilizar los espacios de funciones óptimas.

5.- La forma de implementar numéricamente las formulaciones débiles alternativas es mediante los Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas. La manera de hacerlo es sustituyendo los espacios de funciones óptimas \widehat{O}_B y \widehat{O}_T de dimensión infinita, por otros espacios de funciones óptimas \overline{O}_B y \overline{O}_T pero de dimensión finita. Éstos últimos son espacios cuyas funciones poseen trazas que son polinomios por tramos en la frontera interior Σ . De esta forma se introduce un error de proyección. Así, para cada una de las metodología mencionadas anteriormente, se introduce un Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas particular: FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin.

6.- Si se aplica la metodología de discretización FEM-OF en las formulaciones débiles alternativas se obtiene lo siguiente. Sea una base del espacio de funciones óptimas de base de

dimensión N tal que $\overline{O}_B = \text{generado}\{\overline{v}^1, \overline{v}^2, \dots, \overline{v}^N\}$. Sea una base del espacio de funciones óptimas de peso de dimensión N tal que $\overline{O}_T = \text{generado}\{\overline{w}^1, \overline{w}^2, \dots, \overline{w}^N\}$. Sea \overline{v} la representación de la información buscada $\hat{v} \in \widehat{O}_B$ en el espacio \overline{O}_B : $\hat{v} \approx \overline{v} = \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \overline{v}^{\beta}$.

Entonces, los coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \langle (P-B-J) \overline{v}^{\beta}, \overline{w}^{\alpha} \rangle = \langle f - Pu_{\Sigma}, \overline{w}^{\alpha} \rangle - \langle (P-B-J)u_P, \overline{w}^{\alpha} \rangle$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, N$

Como ya se mencionó, la diferencia entre los tres métodos FEM-OF mencionados anteriormente radica en la forma de utilizar los espacios de funciones óptimas.

7.- Para el caso simétrico, esto es, cuando el operador diferencial es autoadjunto, los espacios de funciones óptimas \overline{O}_B y \overline{O}_T son iguales. Esto provoca que los tres métodos FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Petrov-Galerkin y FEM-OF Steklov-Poincaré sean esencialmente el mismo método. Adicionalmente se tiene que la funcional $\langle (P-B-J) \overline{v}, \overline{w} \rangle = \langle (P-B-J) \overline{w}, \overline{v} \rangle$ es simétrica. Si además el operador diferencial es positivo definido, la funcional $\langle (P-B-J) \overline{v}, \overline{w} \rangle$ genera una matriz de coeficientes simétrica y positiva definida para el sistema de ecuaciones.

8.- Para el caso no simétrico, esto es, cuando el operador diferencial no es autoadjunto, los espacios de funciones óptimas \overline{O}_B y \overline{O}_T son diferentes. Esto provoca que los tres métodos FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Petrov-Galerkin y FEM-OF Steklov-Poincaré sean diferentes métodos. Particularmente, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cobra relevancia ya que se trabaja efectivamente con espacios de funciones óptimas de base y óptimas de peso distintos. En la práctica, cuando se trabaja con una aproximación de las funciones óptimas (y no con las funciones óptimas "exactas"), el hecho de utilizar espacios de funciones de base y de peso diferentes mejora la precisión de los algoritmos.

9.- Al aplicar la metodología FEM-OF a un BVPJ elíptico general de 2° orden:

$$\mathcal{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega} \quad \text{en cada } \Omega_i$$

con condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, con condiciones de saltos prescritos $[u] = j_{\Sigma}^0$ y $[\underline{a}_n \cdot \nabla u] = j_{\Sigma}^1$ en Σ , e información buscada el promedio de la solución en Σ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^N C_{\beta} \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \underline{v}^{\beta} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} - \underline{v}^{\beta} \underline{b} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} + c \overline{v}^{\beta} \overline{w}^{\alpha} \right\} d\underline{x} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \mathcal{L} u_{\Sigma} \right) \overline{w}^{\alpha} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} - u_p \underline{b} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} + c u_p \overline{w}^{\alpha} \right\} d\underline{x} \end{aligned}$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, N$

el cual en su forma matricial es $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}$, donde los elementos del vector de incógnitas $\underline{\underline{C}} = \llbracket C_{\beta} \rrbracket$ de tamaño N son los coeficientes C_{β} , los elementos de la matriz de coeficientes $\underline{\underline{A}} = \llbracket A_{\alpha\beta} \rrbracket$ de tamaño $N \times N$ son:

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla \underline{v}^{\beta} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} - \underline{v}^{\beta} \underline{b} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} + c \overline{v}^{\beta} \overline{w}^{\alpha} \right\} d\underline{x}$$

y los elementos del vector de términos independientes $\underline{\underline{B}} = \llbracket B_{\alpha} \rrbracket$ de tamaño N son:

$$B_{\alpha} = \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left(f_{\Omega} - \mathcal{L} u_{\Sigma} \right) \overline{w}^{\alpha} d\underline{x} - \sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \left\{ \nabla u_p \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} - u_p \underline{b} \cdot \nabla \overline{w}^{\alpha} + c u_p \overline{w}^{\alpha} \right\} d\underline{x}$$

10.- Nótese que para calcular la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes del sistema de ecuaciones, solamente se requiere hacer integraciones en el interior de los subdominios y no en sus fronteras.

11.- En el espacio de funciones óptimas se tiene que $\nabla(\overline{v}, \overline{w}) \in \overline{O}_B \times \overline{O}_T$:

$$\langle (P - B - J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla \bar{v} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w} - \bar{v} \underline{\underline{b}} \cdot \nabla \bar{w} + c \bar{v} \bar{w} \} d\bar{x} \right)$$

lo cual, aunque aparece en el contexto de un BVPJ, es una expresión típica de los métodos FEM convencionales.

12.- Para el caso simétrico, esto es, cuando el operador diferencial es autoadjunto, se tiene que $\forall (\bar{v}, \bar{w}) \in \overline{O}_B \times \overline{O}_T$:

$$\langle (P - B - J)\bar{v}, \bar{w} \rangle = \left(\sum_{i=1}^E \int_{\Omega_i} \{ \nabla \bar{v} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla \bar{w} + c \bar{v} \bar{w} \} d\bar{x} \right)$$

expresión que tiene las propiedades de ser simétrica y positiva definida. Lo anterior genera una matriz de coeficientes simétrica y positiva definida para el sistema de ecuaciones.

13.- El BVPJ con saltos (condiciones de saltos prescritos no nulas) o sin saltos (condiciones de saltos prescritos nulas) posee la misma dificultad. Esto se debe a que en ambas situaciones la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones es la misma. De hecho, la información relacionada con las condiciones de saltos prescritos se encuentra en el vector de términos independientes del sistema de ecuaciones.

14.- La metodología FEM-OF presenta una importante reducción en los grados de libertad con respecto a la metodología FEM convencional (con funciones de peso clase $C^0(\overline{\Omega})$). Para hacer la comparación considérese el caso de funciones aproximantes hechas con polinomios cúbicos y un dominio cuadrado para dos dimensiones o un cubo para tres dimensiones, con una partición rectangular uniforme de E elementos por dimensión.

Grados de libertad	FEM con funciones discontinuas	FEM con funciones $C^0(\Omega)$	FEM con funciones $C^1(\Omega)$	FEM-OF
1 dimensión	$4E$	$3E$	$2E$	E
2 dimensiones	$16E^2$	$9E^2$	$4E^2$	$3E^2$
3 dimensiones	$64E^3$	$27E^3$	$8E^3$	$7E^3$

15.- En la práctica, los espacios de funciones óptimas \overline{O}_B y \overline{O}_T se aproximan con espacios de funciones \widetilde{O}_B y \widetilde{O}_T , también de dimensión finita N , cuyos miembros aproximan a las funciones óptimas. Son espacios cuyas funciones son polinomios por tramos en el interior de los subdominios Ω_i y que poseen trazas que también son polinomios por tramos en la frontera interior Σ . En estos espacios que aproximan a las funciones óptimas, esto es que las condiciones que imponen los espacios nulos N_p para las funciones de base ($\mathcal{L} v = 0$), y N_Q para las funciones de peso ($\mathcal{L}^* w = 0$), solamente se pueden satisfacer aproximadamente con ayuda de algún método numérico; por ejemplo: FEM o colocación.

16.- En este trabajo se presentan BVPJ simétricos y no simétricos, para una, dos y tres dimensiones, construyendo las funciones de base y de peso con FEM y con colocación. Para una dimensión se presentan aproximaciones con polinomios cuadráticos en Ω_i y con polinomios cúbicos en Ω_i . Para dos dimensiones se presentan aproximaciones con polinomios cúbicos en Σ y bi-cuadráticos en Ω_i , además de polinomios cúbicos en Σ y bi-cúbicos en Ω_i . Para tres dimensiones se presentan aproximaciones con polinomios bi-cúbicos en Σ y tri-cuadráticos en Ω_i , además de polinomios bi-cúbicos en Σ y tri-cúbicos en Ω_i .

17.- En una dimensión, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM o con colocación, exhibe propiedades de superconvergencia. Se tiene que el orden de convergencia h del error es $O(h^{2G_\Omega})$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en

Ω_i , en lugar del orden $O(h^{2(G_\Omega-1)})$ que se obtiene al aplicar los métodos directo de Steklov-Poincaré o indirecto de Trefftz-Herrera *convencionales* con colocación.

18.- Para el caso simétrico en dos y en tres dimensiones, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM o con colocación, no exhibe propiedades de superconvergencia. Si se utiliza FEM, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, G_\Omega + 1\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_i ; mientras que con colocación, $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$.

19.- Para el caso no simétrico en dos dimensiones, el método FEM-OF Petrov-Galerkin cuando se aproximan las funciones óptimas con FEM, exhibe propiedades de superconvergencia. Se tiene que el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2G_\Omega\})$. Pero cuando se aproximan las funciones óptimas con colocación, no exhibe propiedades de superconvergencia. En este último caso, se tiene que el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$.

20.- Por superconvergencia se entiende lo siguiente. En dos dimensiones, se alcanza el mismo orden de convergencia h del error $O(h^4)$ utilizando para aproximar la solución polinomios cúbicos en Σ y polinomios bi-cuadráticos en Ω_i , que utilizando polinomios cúbicos en Σ y polinomios bi-cúbicos en Ω_i . La diferencia radica en que para calcular los polinomios bi-cuadráticos se requiere determinar un solo parámetro, mientras que para calcular los polinomios bi-cúbicos se requiere determinar cuatro parámetros. En este sentido, se puede reducir el grado de los polinomios aproximantes en el interior de los subdominios Ω_i obteniendo la misma precisión en los algoritmos. De esta forma se introducen algoritmos de un solo parámetro.

21.- Cuando se aproximan las funciones de base y de peso mediante colocación, durante el procedimiento se tiene que calcular hasta derivadas de segundo orden:

$$\left. \left(-\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla v) + \nabla \cdot (\underline{b}v) + cv \right) \right|_{x_G} = 0$$

En cambio, cuando se aproximan las funciones mediante FEM, solamente se tiene que calcular hasta derivadas de primer orden:

$$\int_{\Omega_i} \left(\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla W - v \underline{b} \cdot \nabla W + cvW \right) d\underline{x} = 0$$

Además, en el primer caso las cuadraturas locales y globales no coinciden; mientras que en el segundo caso, sí coinciden.

22.- Adicionalmente, se presentan diversos BVPJ: problemas no homogéneos, problemas con condiciones de frontera no homogéneas, problemas con condiciones de salto no homogéneas tanto en la función (solución discontinua) como en su derivada (solución continua con derivada discontinua), problemas con coeficientes variables, problemas con coeficientes discontinuos y problemas con advección dominante. En todos ellos aplica la metodología FEM-OF con el mismo grado de dificultad (o de facilidad) y se obtienen los ordenes de convergencia h del error esperados.

9.2.- Trabajo Futuro

Se propone el desarrollo de la metodología FEM-OF para los siguientes casos, ya que se han hecho algunos desarrollos con colocación-TH:

- ◆ FEM-OF aplicado a problemas de Elasticidad (Sistemas de Ecuaciones Diferenciales).
- ◆ FEM-OF para la EDP Bi-armónica.
 - ◆ Enfoque con *splitting*.
 - ◆ Enfoque sin *splitting*.
- ◆ FEM-OF para el caso Parabólico [59].
 - ◆ Enfoque con Semidiscretización en el Tiempo.
 - ◆ Enfoque con Espacio-Tiempo.

Se propone introducir técnicas de descomposición de dominio -aplicar cómputo en paralelo- en la metodología FEM-OF. Los problemas en tres dimensiones lo requieren debido a los tamaños de las matrices que resultan como consecuencia de la discretización y de los grados de libertad asociados a cada nodo que son de orden E^3 .

También se propone investigar acerca de la introducción de una difusión artificial numérica en la metodología-TH [59,60 a 62].

Bibliografía

- [1] Herrera I. "Unified formulation of numerical methods. Part I: Green's formulas for operators in discontinuous fields". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 1. pp. 25-44. 1985.
- [2] Herrera I. "Unified approach to numerical methods. Part II: Finite elements, boundary methods, and their coupling". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 3. pp. 159-186. 1985.
- [3] Herrera I., Chargoy L., Alducin G. "Unified approach to numerical methods. Part III: Finite differences and ordinary differential equations". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 1. pp. 241-258. 1985.
- [4] Celia M., Herrera I. "Solution of general ordinary differential equations using the algebraic theory approach". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 3. pp. 117-129. 1987.
- [5] Herrera I. "The algebraic theory approach for ordinary differential equations: Highly accurate finite differences". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 3. pp. 199-218. 1987.
- [6] Herrera I., Díaz M. "Indirect methods of collocation: Trefftz-Herrera collocation". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 15. pp. 709-738. 1999.
- [7] Herrera I. "Trefftz method: A general theory". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 16. pp. 561-580. 2000.
- [8] Herrera I., Yates R. "General theory of domain decomposition: Beyond Schwarz methods". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 17. pp. 495-517. 2001.

- [9] Herrera I., Yates R., Díaz M. "**General theory of domain decomposition: Indirect methods**". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 18. pp. 296-322. 2002.
- [10] Herrea I., Yates R. "**A general effective method for combining collocation and DDM: An application of discontinuous Galerkin methods**". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. Vol. 21. pp. 672-700. 2005.
- [11] Herrera I. "**Theory of differential equations in discontinuous piecewise-defined functions**". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Wiley Periodicals. 2006. Online: www.interscience.wiley.com
- [12] Herrera I. "**Trefftz-Herrera domain decomposition**". *Advances in Engineering Software*. Elsevier. Vol. 24. pp. 43-56. 1995.
- [13] Herrera I., Solano J. "**A non-overlapping TH-domain decomposition**". *Advances in Engineering Software*. Elsevier. Vol. 28. pp. 223-229. 1997.
- [14] Herrera I., Díaz M., Yates R. "**Single collocation point methods for the advection-diffusion equation**". *Advances in Water Resources*. Elsevier. Vol. 27. pp. 311-322. 2004.
- [15] Díaz M., Herrera I. "**TH-collocation for the biharmonic equation**". *Advances in Engineering Software*. Elsevier. Vol. 36. pp. 243-251. 2005.
- [16] Herrera I., Yates R., Rubio E. "**Collocation methods: More efficient procedures for applying collocation**". *Advances in Engineering Software*. Elsevier. 38(2007)657-667. Online: www.sciencedirect.com
- [17] Herrera I., Yates R., Díaz M. "**The Indirect Approach to Domain Decomposition**". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 51-62. 2002.
- [18] Herrera I. "**A Unified Theory of Domain Decomposition Methods**". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 243-248. 2002.
- [19] Díaz M., Herrera I., Yates R. "**Indirect Method of Collocation: Second Order Elliptic Equations**". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 249-256. 2002.

- [20] Yates R., Herrera I. "Parallel Implementation of Indirect Collocation Methods". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 273-278. 2002.
- [21] Herrera I., Rubio E., et. al. "The Direct Approach to Domain Decomposition Method". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 265-272. 2002.
- [22] Díaz. M., Herrera I. "Indirect Method of Collocation for the Biharmonic Equation". *Proceedings of the 14th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Cocoyoc, México. pp. 389-394. 2002.
- [23] Herrera I., Díaz M., Yates R. "A More General Version of the Hybrid-Trefftz Finite Element Model by Application of TH-Domain Decomposition". *Proceedings of the 15th International Conference on Domain Decomposition Methods*. Berlín, Alemania. pp. 301-308. 2003.
- [24] Herrera I., Rubio E. "Métodos de elementos finitos con funciones óptimas". *Memorias del 4^o Congreso Intencional, 2^o Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y ciencias Aplicadas*. Morelia, México. 2007.
- [25] Bibliografía complementaria de *International Conference on Domain Decomposition Methods* en: www.ddm.org
- [26] Berlanga R., Herrera I. "The Gauss Theorem for Domain Decomposition in Sobolev Spaces". *Applicable Analysis: An International Journal*. 76. pp. 67-81. 200.
- [27] Herrera I. "Boundary Methods. An Algebraic Theory". Pitman Advanced Publishing Program. Boston. 1984. (136 páginas)
- [28] Herrea I. "An algebraic theory of boundary value problems". *KINAM*, Vol. 3. Pp. 161-229. 1981.
- [29] Herrera I. "Boundary methods: A criterion for completeness". *Proc. National Academy of Sciences USA*. Vol. 77. No. 8. pp. 4395-4398. 1980.
- [30] Herrera I. "Trefftz Method". *Topics in: Boundary Element Research*. Vol. 1: Basic Principles and Applications. C.A. Brebbia Ed. Springer Verlag. Chapter 10. pp. 225-253. 1984.
- [31] Toselli A., Widlund O. "Domain Decomposition Methods- Algorithms and Theory". *Springer-Verlag*. Alemania. 2005.

- [32] Quarteroni A., Valli A. **"Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations"**. *Oxford Science Publications*. New York. 1999.
- [33] Smith B. Bjørstad P. Gropp W. **"Domain Decomposition. Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations"**. *Cambridge University Press*. EE. UU. 1996.
- [34] Xu J. **"Iterative methods by space decomposition and subspace correction"**. *SIAM Review*. Vol. 34, No. 4, pp. 581-613, December 1992.
- [35] Xu J. **"Some nonoverlapping domain decomposition methods"**. *SIAM Review*. Vol. 40, No. 4, pp. 857-914. December 1998.
- [36] Lions P.L. "On the Schwarz Alternating Method. I. ". En ...
- [37] Lions P.L. "On the Schwarz Alternating Method. II. ". En ...
- [38] Ciarlet P. G. **"Mathematical Elasticity. Volume 1: Three-dimensional Elasticity"**. *North-Holland*. Holanda. 1988.
- [39] Ciarlet P. G. **"Mathematical Elasticity. Volume 2: Lower-dimensional Theories of Plates and Rods"**. *North-Holland*. Holanda. 1988.
- [40] Ciarlet P. G., Lions J. L. **"Handbook of Numerical Analysis. Volume II: Finite Element Methods (Part 1)"**. *North Holland*. Holanda. 1991.
- [41] Zienkiewicz O., Taylor R. **"The Finite Element Method. Volume 1: The Basis"**. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. (712 pages).
- [42] Braess D. **"Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics"**. Cambridge University Press. Reino Unido. 2001
- [43] Lions J. L., Magenes E. **"Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications"**. Vol 1. *Springer-Verlag*. Alemania. 1972.
- [44] Reddy B. **"Introductory Functional Analysis. With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements"**. Springer-Verlag. EE.UU. 1998
- [45] Allen M., Herrera I., Pinder G. **"Numerical Modeling in Science and Engineering"**. *John Wiley & Sons*. New York. 1988. (418 pages).
- [46] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. **"Numerical Mathematics"**. *Texts in Applied Mathematics*. Springer. 2000. (657 pages)
- [47] Quarteroni A., Valli A. **"Numerical Approximation of Partial Differential Equations"**. *Series in Computational Mathematics*. Springer. 1994. (543 pages).

- [48] Lapidus L., Pinder G. **"Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering"**. John Wiley & Sons. New York. 1999. (677 pages).
- [49] Pinder G., Gray W. **"Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology"**. Academic Press. New York. 1977.
- [50] Herrera I. Díaz. M. **Notas del curso "Modelación Matemática y Computacional I"**. Posgrado en Ciencias de la Tierra. Instituto de Geofísica. En preparación.
- [51] Yates R. **Notas del curso "Modelación Matemática y Computacional II"**. Posgrado en Ciencias de la Tierra. Instituto de Geofísica. En preparación.
- [52] Herrera I. **"Un Análisis del Método de Gradiente Conjugado"**. Comunicaciones Técnicas, Serie Investigación No. 70. Instituto de Geofísica. 1988.
- [53] Herrera G. **"Análisis de alternativas al método G-C para matrices no simétricas"**. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 1989.
- [54] Ochoa L. **"Un Método Directo de Colocación con Dominios Yuxtapuestos"**. Tesis de Maestría en Ciencias e Ingeniería de la Computación. IIMAS. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2001.
- [55] Díaz M. **"Desarrollo del Método de Colocación Trefftz-Herrera: Aplicación a Problemas de Transporte en las Geociencias"**. *Tesis de Doctorado en Ciencias de la Tierra*. Instituto de Geofísica. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2001.
- [56] Rosas A. **"El número de Peclet y su significación en la modelación de transporte difusivo de contaminantes"**. *Tesis de Licenciatura en Matemáticas*. Facultad de Ciencias. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2005.
- [57] Contreras I. **"Métodos de Colocación TH"**. Tesis de Maestría en Ciencias e Ingeniería de la Computación. IIMAS. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2006.
- [58] Carrillo A. **"Aplicaciones del Cómputo en Paralelo a la Modelación de Sistemas Terrestres"**. *Tesis de Maestría en Ciencias de la Tierra*. Instituto de Geofísica. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2006.
- [59] Rubio E. **"Unidades Teóricas y Trabajos de Investigación Predoctorales"**. Doctorado en Ciencias de la Tierra. Instituto de Geofísica. UNAM. Director Dr. Ismael Herrera Revilla. 2006.

- [60] Ewing R., Wang H., "A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 128 (2001) 423-445.
- [61] Brooks A., Hughes T., "Streamline upwind/Petriv-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 32 (1982) 199-259.
- [62] Hughes T., Brooks A., "A Multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion". En Hughes T. *Finite element methods for convection dominated flows*. *ASME*. 34 (1979) 19-35.
- [63] Russell T., Celia M. "An overview of research on Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods (ELLAM)". *Advances in Water Resources*. Elsevier. 25 (2002) 1215-1231.
- [64] Herrera I., et. al. "Eulerian-Lagrangian localized adjoint method: The theoretical framework". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Willey & Sons. Vol. 9. pp. 431-457. 1993.
- [65] Celia M. et. al. "An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation". *Advanced in Water Resources*. Elsevier. 13 (1990) 187-206.
- [66] Herrera G., Herrera I. "Eulerian-Lagrangian Method of Cells Based on Localized Adjoint Method". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. 10. pp. 205-223. 1994.
- [67] Herrera I. "Localized Adjoint Methods: A New Discretization Methodology". *Capítulo 6 del libro "Computational Methods in Geosciences"*. W.E. Fitzgibbon & M.F. Wheeler Editores. *SIAM*. pp. 66-77. 1992.
- [68] Bentley L.R., Pinder G.F., Herrera I. "Solution of the Advective-Dispersive Transport Equation Using a Last Squares Collocation, Eulerian-Lagrangian Method". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. 5. pp. 227-240. 1989.
- [69] Celia M., Herrea I., Bouloutas E., Kindred S. "A New Numerical Approach for the Advective-Diffusive Transport Equation". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons. 5. pp. 203-226. 1989.
- [70] Trefftz E. "Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren" ("A counterpart to Ritz's method"). *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*. Zurich. pp. 131-137. 1926.

- [71] Jirousek J., Leon N. "A powerful finite element for plate bending". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. North-Holland Publishing Company. Vol. 12. pp. 77-96. 1977.
- [72] Jirousek J. "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. North-Holland Publishing Company. Vol. 14. pp. 65-92. 1978.
- [73] Jirousek J., Teodorescu P. "Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity". *Computers & Structures*. Pergamon Press. Vol. 15. pp. 575-587. 1982.
- [74] Jirousek J., Zielinski A. "Survey of Trefftz-type element formulations". *Computers & Structures*. Elsevier Science. Vol. 63. pp. 225-242. 1997.
- [75] Qin Q. "The Trefftz Finite and Boundary Element Method". *WIT Press*. Southampton. 2000.
- [76] Abramowitz M., Stegun I. "Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs, and mathematical tables". *Dover Publications*. EE.UU. 1968.
- [77] Boor C., Swartz B. "Collocation at Gaussian points". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 10. No. 4. September 1973.
- [78] Carey G., Finlayson B. "Orthogonal collocation on finite elements". *Chemical Engineering Science*. Pergamon Press. Vol. 30. pp. 587-596. 1975.
- [79] Prenter P., Russell R. "Orthogonal collocation for elliptic partial differential equations". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 13. No. 6. December 1976.
- [80] Bialecki B., Fairweather G. "Orthogonal spline collocation methods for partial differential equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Elsevier. 128. pp. 55-82. 2001.
- [81] Wu L., Wang H. "An Eulerian-Lagrangian single-node collocation method for transient advection-diffusion equations in multiple space dimensions". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Wiley Periodicals. Vol. 20. pp. 284-301. 2004.
- [82] Wu L., Wang H., Pinder G. "A nonconventional Eulerian-Lagrangian single-node collocation method with Hermite polynomials for unsteady-state advection-diffusion equations". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Wiley Periodicals. Vol. 19. pp. 271-283. 2003.

- [83] Bialecki B. "Convergence analysis of orthogonal spline collocation for elliptic boundary value problems". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 35. pp. 617-631. 1998.
- [84] Bialecki B., Cai X. " H^1 -norm error bounds for piecewise Hermite bicubic orthogonal spline collocation schemes for elliptic boundary value problems". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 31. pp. 1128-1146. 1994.
- [85] Delfour M., Hager W., Trochu F. "Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equations". *Mathematics of Computation*. AMS. Vol. 36. No. 154. Pp. 455-473. April 1981.
- [86] Arnold D. "An interior penalty finite element method with discontinuous elements". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 19. No. 4. pp. 742-760. August 1982.
- [87] Cockburn B., Shu C. "The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 35. No. 6. pp. 2440-2463. December 1998.
- [88] Brezzi F., et al. "Discontinuous Galerkin Approximation for Elliptic Problems". *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Jhon Wiley & Sons. 16. pp. 365-378. 2000.
- [89] Arnold D., Brezzi F., Cockburn B. "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 39. No. 5. pp. 1749-1779. 2002.
- [90] Cockburn B. "Discontinuous Galerkin methods". *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 83, No. 11, 731-754 (2003)
- [91] Farhat C., Harari I., Franca L. "The discontinuous enrichment method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier Science. Vol. 190. pp. 6455-6479. 2001.
- [92] Farhat C., Harari I. Hetmaniuk U. "The discontinuous enrichment method for multiscale analysis". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier Science. 192. pp. 3195-3209. 2003.
- [93] Farhat C., Harari I. Hetmaniuk U. "A discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier Science. 192. pp. 1389-1419. 2003.

- [94] Farhat C., Tezaur R., Weidemann P. "**High-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems**". *International Journal for Numerical Methods in engineering*. John Wiley&Sons. 61. p.p. 1938-1956. 2004.
- [95] Farhat C., Wiedemann P., Tezaur R. "**A discontinuous Galerkin method with plane waves and a range multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes**". *Wave Motion*. Elsevier. 39. p.p. 307-317. 2004.
- [96] Strouboulis T., Cops K., Babuska I. "**The generalized finite element method**". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Elsevier Science. 190. pp. 4081-4193. 2001.

A.- Implementación de Funciones Óptimas en 2 Dimensiones

Sea la ecuación diferencial parcial elíptica [50, 51, 76]:

$$\mathcal{L}u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega} \quad (\text{A.1})$$

en un dominio Ω con una partición Π , sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas $u = 0$ en $\partial\Omega$, y con condiciones de salto nulos $[u] = [\underline{a}_n \cdot \nabla u] = 0$ en Σ , es decir, se trata de un problema con solución continua y primeras derivadas continuas a través de Σ . Se analizará el caso bidimensional.

La ecuación diferencial parcial elíptica en dos dimensiones en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv & -a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + \left(b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial x} - \frac{\partial a_{21}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b_2 - \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c + \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} \right) u = f_{\Omega} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, el operador diferencial adjunto general es:

$$\mathcal{L}^*w \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (\text{A.3})$$

y para dos dimensiones en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*w \equiv & -a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + \left(-b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial x} - \frac{\partial a_{21}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(-b_2 - \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + cw \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

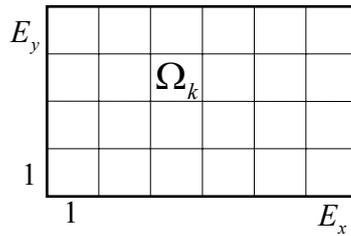


Figura A.1.- Dominio rectangular Ω y partici3n rectangular uniforme Π .

Sea un dominio rectangular $\Omega = [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$, con una partici3n rectangular uniforme $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_M\}$ con $M = E_x E_y$ subdominios. De esta forma $\Delta x = (x_E - x_0)/E_x$ e $\Delta y = (y_E - y_0)/E_y$, y los nodos (x_i, y_j) tiene coordenadas $x_i = x_0 + i\Delta x$ para $i = 0, \dots, E_x$ e $y_j = y_0 + j\Delta y$ para $j = 0, \dots, E_y$. La partici3n es inducida por la colecci3n de rectas $x = x_i$ e $y = y_j$, la cual conforma la frontera interior Σ . V3ase la figura A.1.

A.1.- Aproximaci3n de la funci3n u_p

Primeramente, n3tese que la funci3n $u_p(x, y)$ no pertenece al espacio vectorial de funciones 3ptimas de base. La funci3n $u_p(x, y)$ se construye con polinomios bi-c3bicos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x$, $j = 1, \dots, E_y$. Esto es:

$$u_p(x, y) = C_{ij}^1 H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^2 H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) + C_{ij}^3 H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^4 H_i^1(x) H_j^1(y) \quad (\text{A.5})$$

donde $H_i^0(\bullet)$ y $H_i^1(\bullet)$ son polinomios c3bicos de Hermite apropiadamente escalados en $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y C_{ij}^k son par3metros que se calculan apropiadamente de modo que $u_p(x, y)$ satisfaga la ecuaci3n diferencial no homog3nea por separado en cada subdominio Ω_k . V3ase las figuras A.2 y A.3.

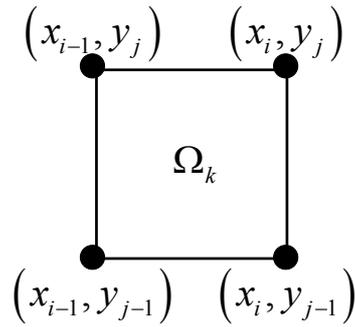


Figura A.2.- Subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

A.1.1. - Construcción de u_p con Colocación

Cuando se construye la función $u_p(x, y)$ con colocación, ésta debe satisfacer la ecuación diferencial no homogénea **solamente** en los puntos gaussianos en cada uno de los subdominios $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x$, $j = 1, \dots, E_y$. Puesto que $u_p(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos, se requiere de 2×2 puntos gaussianos en cada subdominio Ω_k . Entonces se tiene que:

$$\mathcal{L}u_p|_{(x^g, y^g)} = f_\Omega|_{(x^g, y^g)} \quad (\text{A.6})$$

donde (x^g, y^g) significa cada uno de los puntos (x^*, y^*) , (x^*, y^{**}) , (x^{**}, y^*) , (x^{**}, y^{**}) , donde a su vez $x^* = x_i - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x_i - x_{i-1})$ e $x^{**} = x_i - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x_i - x_{i-1})$ son los puntos gaussianos del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(y_j - y_{j-1})$ e $y^{**} = y_j - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(y_j - y_{j-1})$ son los puntos gaussianos del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas $C_{ij}^1, C_{ij}^2, C_{ij}^3, C_{ij}^4$ en cada subdominio Ω_k .

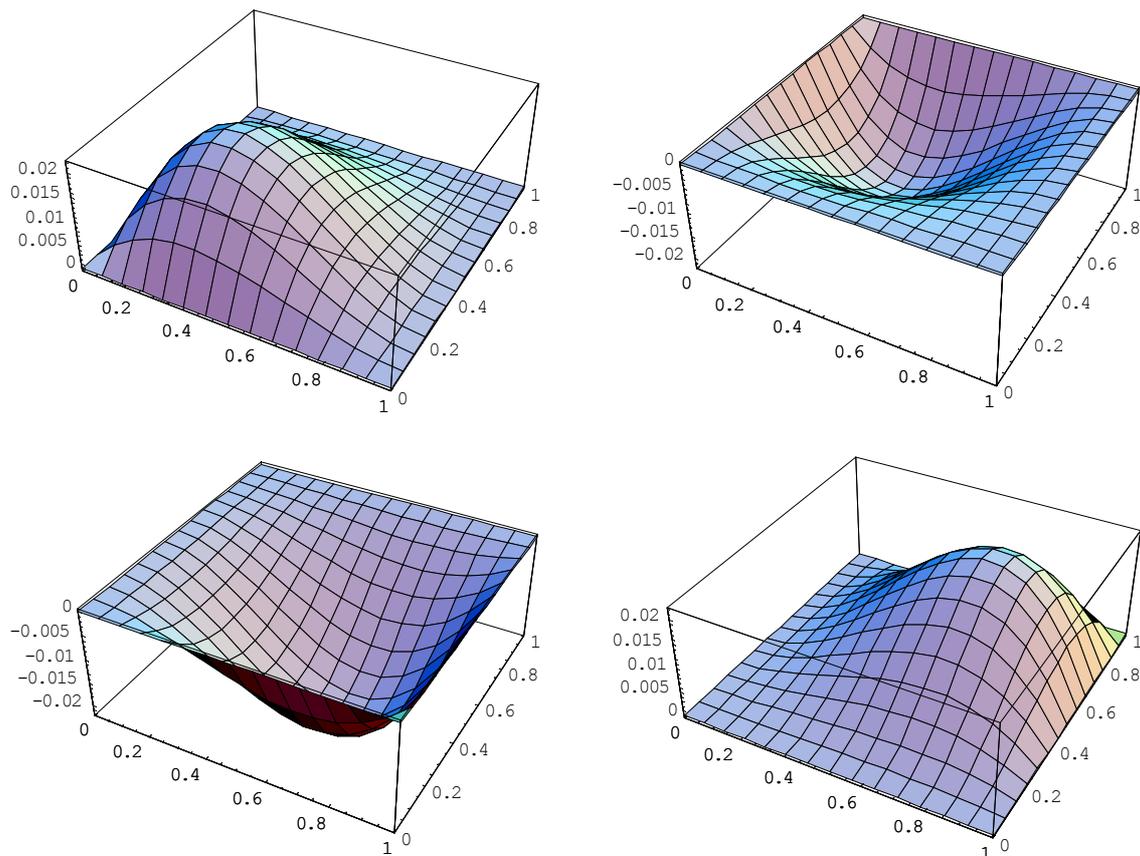


Figura A.3.- Polinomios bi-cúbicos de Hermite $H_0^1(x)H_0^1(y)$ -arriba, izquierda-,

$H_1^1(x)H_0^1(y)$ -arriba, derecha-, $H_0^1(x)H_1^1(y)$ -abajo, izquierda-,

$H_1^1(x)H_1^1(y)$ -abajo, derecha- en el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

A.1.2. - Construcción de u_p con FEM

Cuando se construye la función $u_p(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial no homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Puesto que $u_p(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos, se requiere de 4 funciones de peso locales en cada subdominio Ω_k .

Primero, sean las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para $i = 1, \dots, E_x, j = 1, \dots, E_y$:

$$W_{ij}^1 = H_{i-1}^1(x)H_{j-1}^1(y) \quad (\text{A.7})$$

$$W_{ij}^2 = H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) \quad (\text{A.8})$$

$$W_{ij}^3 = H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) \quad (\text{A.9})$$

$$W_{ij}^4 = H_i^1(x)H_j^1(y) \quad (\text{A.10})$$

Véase la figura A.3.

Segundo, la función $u_p(x, y)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$A\langle u_p, W_{ij}^q \rangle = \langle f_\Omega, W_{ij}^q \rangle \quad (\text{A.11})$$

con $q=1,2,3,4$, donde el operador $A\langle u, W \rangle$ se define como $\langle Pu, W \rangle = \int \mathcal{L}uW d\underline{x}$ pero integrado por partes, es decir:

$$A\langle u_p, W_{ij}^q \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (\nabla u_p \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^q - u_p \underline{b} \bullet \nabla W_{ij}^q + cu_p W_{ij}^q) dydx \quad (\text{A.12})$$

junto con:

$$\langle f_\Omega, W_{ij}^q \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f_\Omega W_{ij}^q dydx \quad (\text{A.13})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas $C_{ij}^1, C_{ij}^2, C_{ij}^3, C_{ij}^4$ en cada subdominio Ω_k .

A.2.- Aproximación de las funciones óptimas de base

Las funciones de base $v_{ij}(x, y)$ se construyen con polinomios bi-cúbicos por tramos en Σ y polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, para $i=1, \dots, E_x - 1, j=1, \dots, E_y - 1$. En consecuencia, existen tres tipos de funciones óptimas de base: las que aproximan el valor de función en Σ , $v_{ij}^0(x, y)$; las que aproximan el valor de la primera derivada parcial de la función

con respecto a x en Σ , $v_{ij}^1(x, y)$; y las que aproximan la primera derivada parcial de la función con respecto a y en Σ , $v_{ij}^2(x, y)$. Esto es:

$$v_{ij}^0(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{01}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{01}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{02}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{02}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{03}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{03}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{04}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{04}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$v_{ij}^1(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{11}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{11}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{12}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{12}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{13}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{13}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{14}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{14}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$v_{ij}^2(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{21}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{21}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{22}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{22}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{23}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{23}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{24}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{24}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

donde $H_i^0(\bullet)$ y $H_i^1(\bullet)$ son polinomios cúbicos de Hermite y $L_i(\bullet)$ son polinomios lineales de Lagrange, ambos apropiadamente escalados en $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, y C_{ij}^{mn} son parámetros que se calculan apropiadamente de modo que $v_{ij}^m(x, y)$ satisfaga la ecuación diferencial homogénea por separado en cada subdominio Ω_k . Véase las figuras A.4, A.5 y A.6.

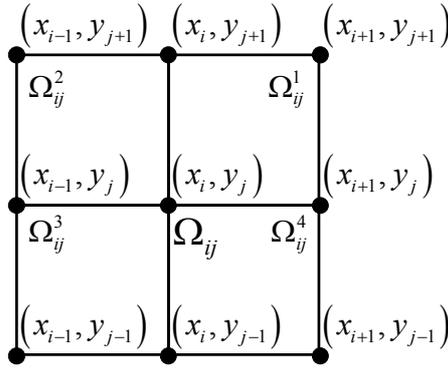


Figura A.4.- Subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$

A.2.1. - Construcción de $v_{ij}(x, y)$ con colocación

Cuando se construye la función $v_{ij}^m(x, y)$ con colocación, ésta debe satisfacer a la ecuación diferencial homogénea **solamente** en los puntos gaussianos en cada uno de los subdominios $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $v_{ij}(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de 1×1 punto gaussiano en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces, para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

$$\nabla v_{ij}^{m1} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \tag{A.17}$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

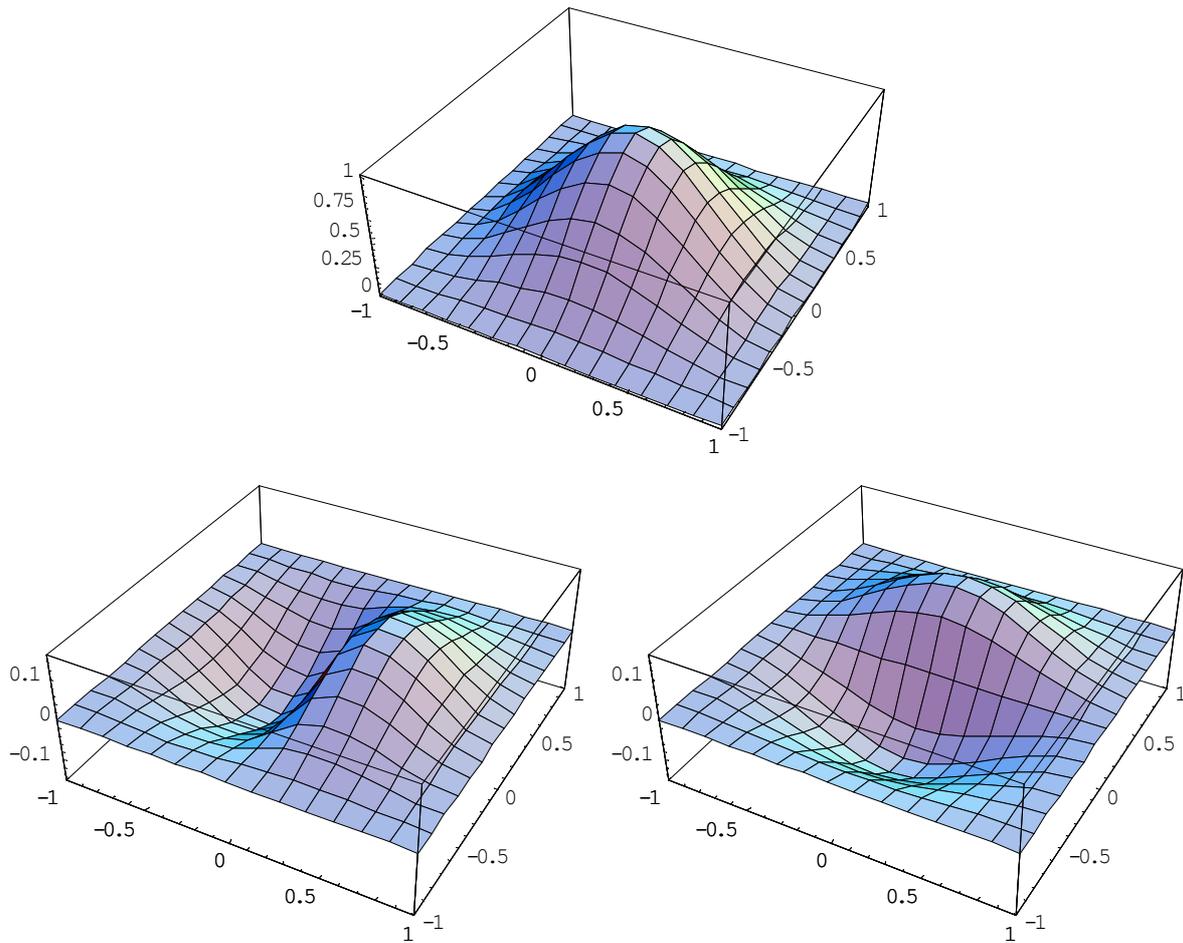


Figura A.5.- Polinomio bi-cúbicos de Hermite $H_0^0(x)H_0^0(y)$ asociado con $v_{ij}^0(x, y)$ -arriba-, $H_0^1(x)H_0^0(y)$ asociado con $v_{ij}^1(x, y)$ -abajo, izquierda-, $H_0^0(x)H_0^1(y)$ asociado con $v_{ij}^2(x, y)$ -abajo, izquierda- en el dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

$$\left. \nabla v_{ij}^{m2} \right|_{(x^*, y^*)} = 0 \tag{A.18}$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

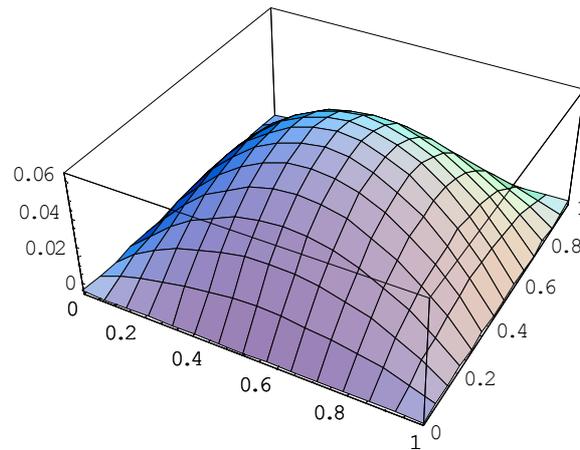


Figura A.6.- Polinomio bi-cuadrático $L_0(x)L_1(x)L_0(y)L_1(y)$ en el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

$$\mathcal{L}v_{ij}^{m3} \Big|_{(x^*,y^*)} = 0 \tag{A.19}$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$\mathcal{L}v_{ij}^{m4} \Big|_{(x^*,y^*)} = 0 \tag{A.20}$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.2.2. - Construcción de $v_{ij}(x, y)$ con FEM

Cuando se construye la función $v_{ij}^m(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada

subdominio $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $v_{ij}^m(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de una función de peso local en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^1 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.21})$$

Véase la figura A.6. Ahora, la función $v_{ij}^{m1}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = 0 \quad (\text{A.22})$$

donde $A \langle v, W \rangle$ se define como $\langle Pu, W \rangle = \int \mathcal{L}u W d\underline{x}$ integrado por partes, es decir:

$$A \langle v_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\nabla v_{ij}^{m1} \cdot \underline{a} \cdot \nabla W_{ij}^1 - v_{ij}^{m1} \underline{b} \cdot \nabla W_{ij}^1 + c v_{ij}^{m1} W_{ij}^1 \right) dy dx \quad (\text{A.23})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^2 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.24})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m2}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.25})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\nabla v_{ij}^{m2} \cdot \underline{a} \cdot \nabla W_{ij}^2 - v_{ij}^{m2} \underline{b} \cdot \nabla W_{ij}^2 + c v_{ij}^{m2} W_{ij}^2 \right) dy dx \quad (\text{A.26})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^3 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j-1}(y) \quad (\text{A.27})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m3}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (\text{A.28})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla v_{ij}^{m3} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla W_{ij}^3 - v_{ij}^{m3} \underline{\underline{b}} \bullet \nabla W_{ij}^3 + c v_{ij}^{m3} W_{ij}^3 \right) dy dx \quad (\text{A.29})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^4 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j-1}(y) \quad (\text{A.30})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m4}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (\text{A.31})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla v_{ij}^{m4} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla W_{ij}^4 - v_{ij}^{m4} \underline{\underline{b}} \bullet \nabla W_{ij}^4 + c v_{ij}^{m4} W_{ij}^4 \right) dy dx \quad (\text{A.32})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.2.3. - Casos espaciales: nodos en la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos que se encuentran sobre $\Sigma \cap \partial\Omega$ tienen asociada solamente una función de base, en lugar de las tres funciones de base que tienen asociadas los nodos que se encuentran en el interior de Ω . Esto se debe a que, como se trata de un BVPJ elíptico con condiciones de frontera tipo Dirichlet, el valor de la función es conocido en la frontera exterior $\partial\Omega$. También se puede conocer directamente alguna de las primeras derivadas parciales de la función (con respecto a x o con respecto a y). Solamente se desconoce la otra primera derivada parcial de la función. Esto se detalla a continuación.

A.2.3.1. - Nodos en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_0, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{0j}^1(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a x , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a y . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{0j}^1(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{0j}^1 y Ω_{0j}^4 , es decir, $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.7.

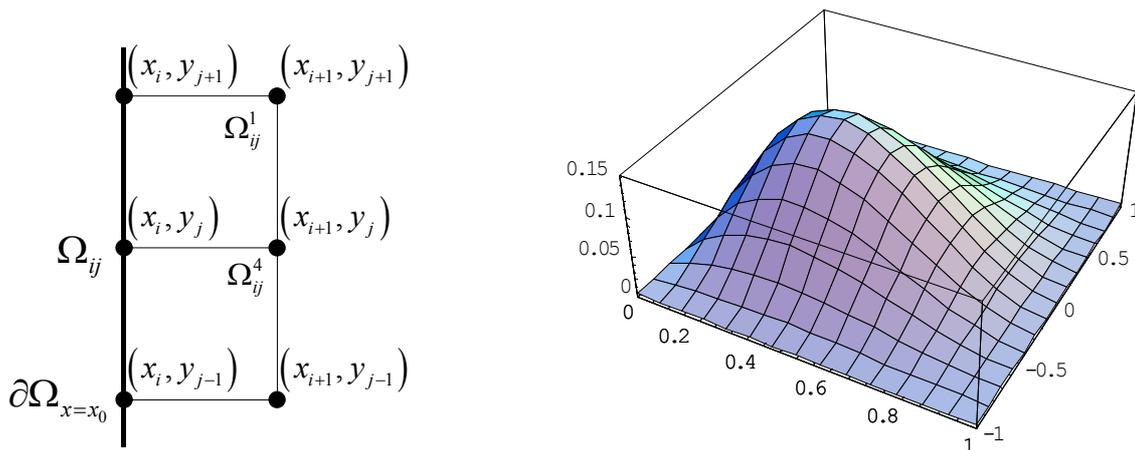


Figura A.7.- Subdominio $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$ -izquierda- y la función de base $v_{0j}^1(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{x=x_0}$ -derecha-.

A.2.3.2. - Nodos en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_E, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{E_x, j}^1(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a x , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a y . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{E_x, j}^1(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{E_x, j}^2$ y $\Omega_{E_x, j}^3$, es decir, $\Omega_{E_x, j} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.8.

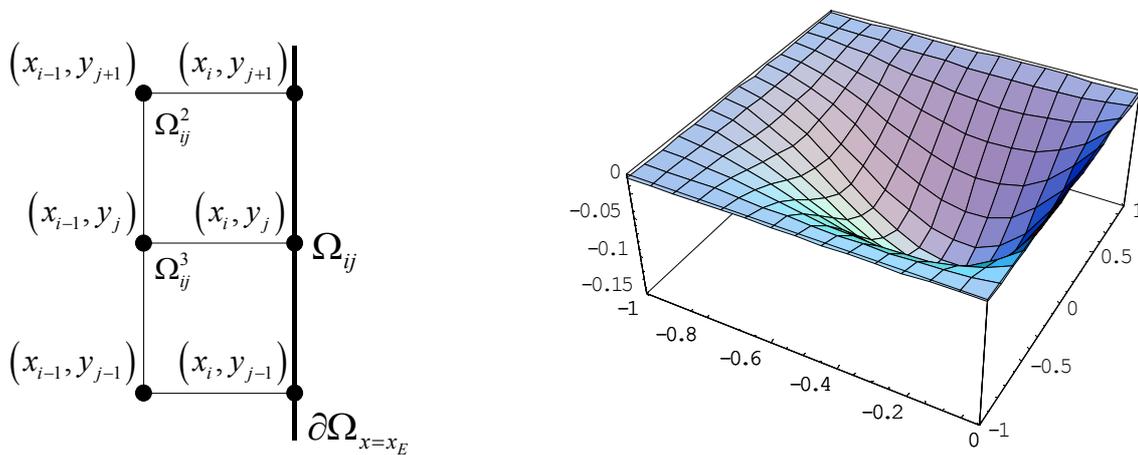


Figura A.8.- Subdominio $\Omega_{E_x, j} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$ -izquierda- y la función de base $v_{E_x, j}^1(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{x=x_E}$ -derecha-.

A.2.3.3. - Nodos en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_0) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{i, 0}^2(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a y , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a x . Pero solamente se trabaja

con una parte de $v_{i0}^2(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{ij}^1 y Ω_{ij}^2 , es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$. Véase la figura A.9.

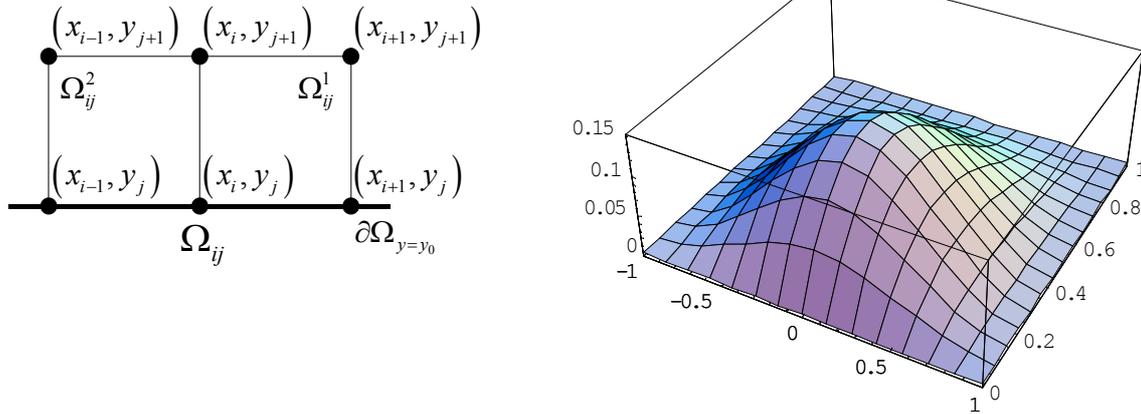


Figura A.9.- Subdominio $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$ -izquierda- y la función de base $v_{i0}^2(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{y=y_0}$ -derecha-.

A.2.3.4. - Nodos en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_E) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{iE_y}^2(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a y , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a x . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{iE_y}^2(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{iE_y}^3$ y $\Omega_{iE_y}^4$, es decir, $\Omega_{iE_y} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$. Véase la figura A.10.

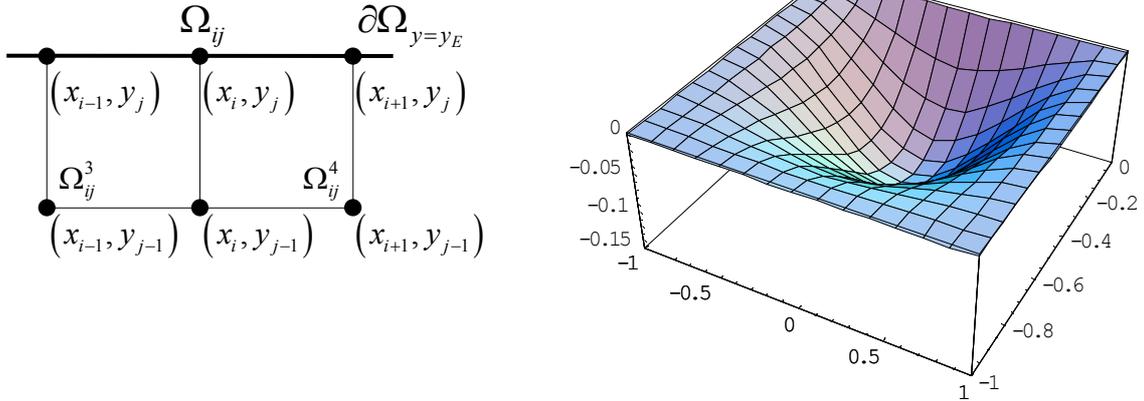


Figura A.10.- Subdominio $\Omega_{iE_y} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$ -izquierda- y la función de base $v_{iE_y}^2(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{y=y_0}$ -derecha-.

A.3.- Aproximación de las funciones óptimas de peso

Las funciones de peso $w_{ij}(x, y)$ se construyen con polinomios bi-cúbicos por tramos en Σ y polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Existen tres tipos de funciones de peso como en el caso de las funciones de base. Esto es:

$$w_{ij}^0(x, y) = \begin{cases} w_{ij}^{01}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{01}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{02}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{02}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{03}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{03}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ w_{ij}^{04}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{04}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

$$\left. \leftarrow^* W_{ij}^{m2} \right|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.37})$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$\left. \leftarrow^* W_{ij}^{m3} \right|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.38})$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$\left. \leftarrow^* W_{ij}^{m4} \right|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.39})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.3.2. - Construcción de $w_{ij}(x, y)$ con FEM

Cuando se construye la función $w_{ij}^m(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $w_{ij}^m(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de una función de peso local en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^1 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.40})$$

Véase la figura A.6. Ahora, la función $w_{ij}^{m1}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = 0 \quad (\text{A.41})$$

donde $A^* \langle w, W \rangle$ se define como $\langle Q^* w, W \rangle = \int \mathcal{L}^* w W d\underline{x}$ integrado por partes, es decir:

$$A^* \langle w_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\nabla w_{ij}^{m1} \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^1 - W_{ij}^1 \underline{b} \bullet \nabla w_{ij}^{m1} + c w_{ij}^{m1} W_{ij}^1) dy dx \quad (\text{A.42})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^2 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.43})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m2}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.44})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\nabla w_{ij}^{m2} \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^2 - W_{ij}^2 \underline{b} \bullet \nabla w_{ij}^{m2} + c w_{ij}^{m2} W_{ij}^2 \right) dy dx \quad (\text{A.45})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^3 = L_i(x) L_{i-1}(x) L_j(y) L_{j-1}(y) \quad (\text{A.46})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m3}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (\text{A.47})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla w_{ij}^{m3} \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^3 - W_{ij}^3 \underline{b} \bullet \nabla w_{ij}^{m3} + c w_{ij}^{m3} W_{ij}^3 \right) dy dx \quad (\text{A.48})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^4 = L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j-1}(y) \quad (\text{A.49})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m4}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (\text{A.50})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla w_{ij}^{m4} \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^4 - W_{ij}^4 \underline{b} \bullet \nabla w_{ij}^{m4} + c w_{ij}^{m4} W_{ij}^4 \right) dy dx \quad (\text{A.51})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.3.3. - Casos espaciales: nodos en la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos que se encuentran sobre $\Sigma \cap \partial\Omega$ tienen asociada solamente una función de peso, en lugar de las tres funciones de peso que tienen asociadas los nodos que se encuentran en el interior de Ω . Situación similar a las funciones de base. Esto se detalla a continuación.

A.3.3.1. - Nodos en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_0, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de peso $w_{0j}^1(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{0j}^1 y Ω_{0j}^4 , es decir, $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.7.

A.3.3.2. - Nodos en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_E, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{Ej}^1(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{Ej}^2 y Ω_{Ej}^3 , es decir, $\Omega_{Ej} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.8.

A.3.3.3. - Nodos en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_0) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{i0}^2(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{i0}^1 y Ω_{i0}^2 , es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$. Véase la figura A.9.

A.3.3.4. - Nodos en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_E) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{iE_y}^2(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{iE_y}^3$ y $\Omega_{iE_y}^4$, es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$. Véase la figura A.10.

B.- Otros Ejemplos con FEM-OF Petrov-Galerkin

En esta sección se presentan problemas con diversas condiciones de frontera y de saltos prescritos, así como con diferentes características en los coeficientes de la ecuación diferencial, tanto en 1 como en 2 dimensiones.

B.1.- Ejemplos en Una Dimensión

Se implementarán problemas con condiciones de frontera no homogéneas, con condiciones de salto no homogéneas en la función (solución discontinua), con condiciones de salto no homogéneas en la derivada (solución continua con derivada discontinua), con coeficientes variables en la ecuación diferencial y con coeficientes discontinuos en la ecuación diferencial.

Se trabajarán dos **algoritmos**. Primero, las funciones óptimas se aproximarán con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, con polinomios cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , también utilizando FEM para su construcción.

La aproximación cuadrática y la aproximación cúbica fueron planteadas en (6.3.2) y (6.3.3), respectivamente.

B.1.1- Problema 1D-1

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = (1 - 25\pi^2)\text{Sen}(5\pi x) \quad (\text{B.1})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \text{Sen}(5\pi x)$.

En la figura B.1 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.2 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.1})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{5.8})$ para la aproximación cúbica.

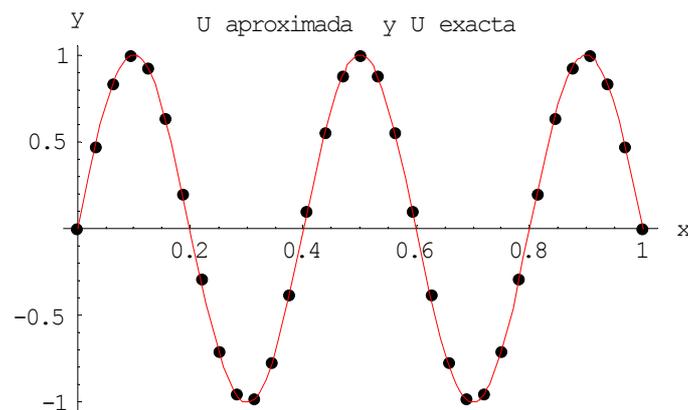


Figura B.1. - Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

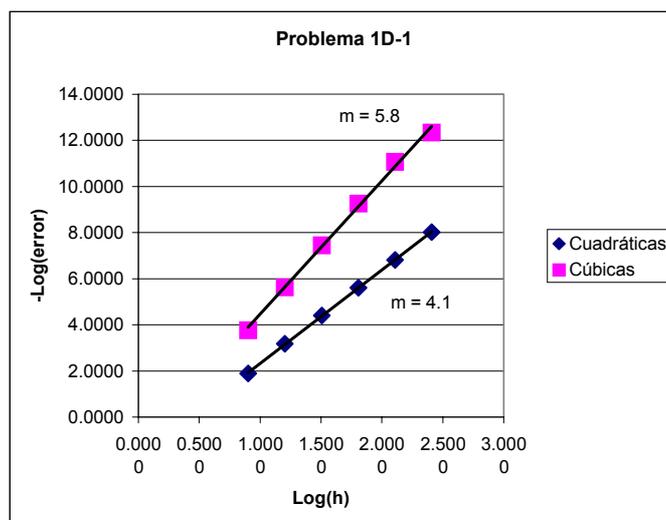


Figura B.2.- Convergencia h .

B.1.2. - Problema 1D-2: Solución Discontinua

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad f_{\Omega} = \begin{cases} (1 - 81\pi^2)\text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ (81\pi^2 - 1)\text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de

salto en la función: $[u]_{0.5} = -2$. Su solución analítica es: $u(x) = \begin{cases} \text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases}$

En la figura B.3 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.4 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

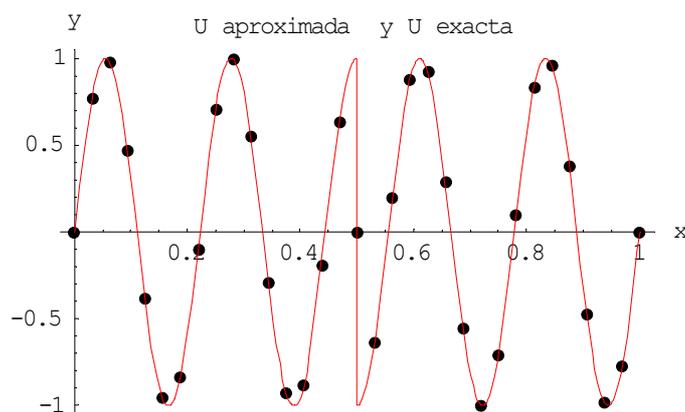


Figura B.3.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

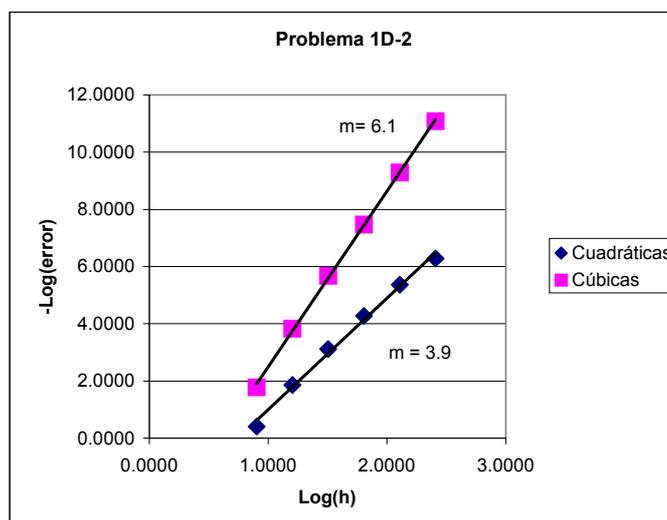


Figura B.4.- Convergencia h .

B.1.3.- Problema 1D-3: Solución con Derivada Discontinua

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad f_{\Omega} = \begin{cases} (1 - 64\pi^2) \text{Sen}(8\pi x) & , x < 0.5 \\ (64\pi^2 - 1) \text{Sen}(8\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de

salto en la derivada: $\left[\frac{du}{dx} \right]_{0.5} = -16\pi \text{Cos}(8\pi x)$. Su solución analítica es:

$$u(x) = \begin{cases} \text{Sen}(8\pi x) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(8\pi x) & , x > 0.5 \end{cases}$$

En la figura B.5 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.6 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.1})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

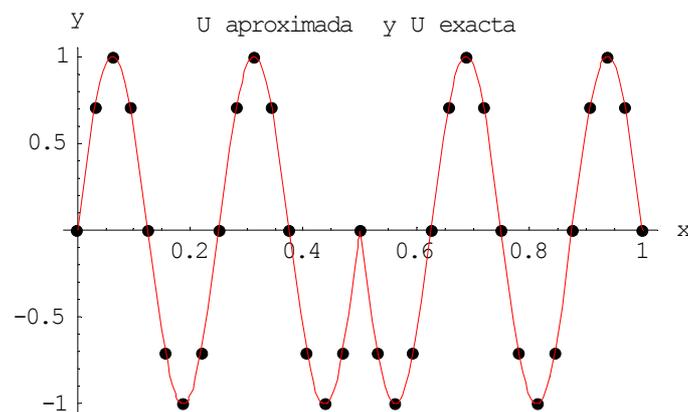
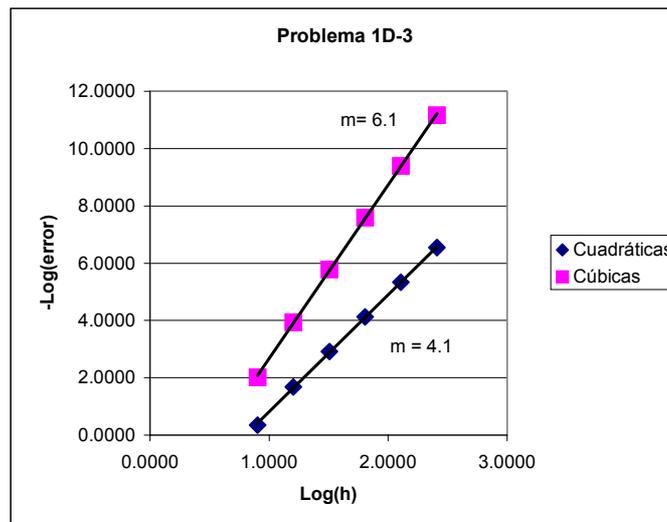


Figura B.5. - Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

Figura B.6.- Convergencia h .

B.1.4. - Problema 1D-4: Coeficientes Discontinuos

Sea la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes discontinuos:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + u = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad a = \begin{cases} -3 & , x < 0.5 \\ 3 & , x > 0.5 \end{cases}, \quad f_{\Omega} = \begin{cases} (1 + 243\pi^2) \text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ (1 - 243\pi^2) \text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas. Su solución analítica es: $u(x) = \text{Sen}(9\pi x)$.

En la figura B.7 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.8 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.2})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^6)$ para la aproximación cúbica.

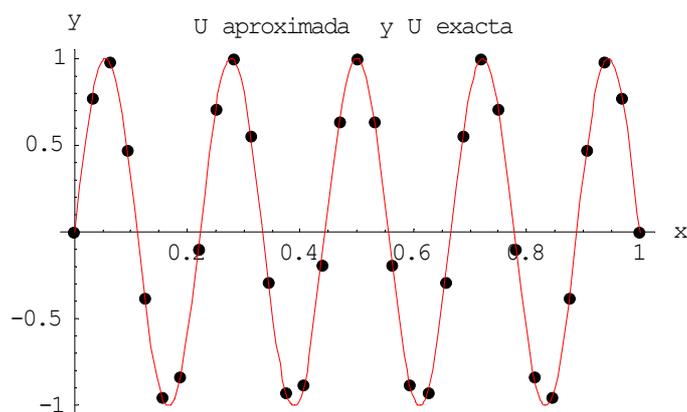


Figura B.7.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

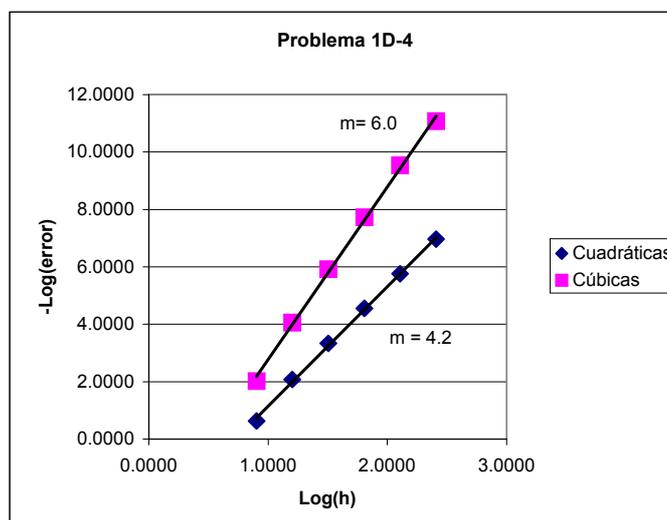


Figura B.8.- Convergencia h .

B.1.5.- Problema 1D-5: Condiciones de Frontera No Homogéneas

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = (1 - 81\pi^2)\text{Cos}(9\pi x) \tag{B.5}$$

En el dominio: $\Omega = [0, 1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \text{Cos}(9\pi x)$.

En la figura B.9 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.10 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

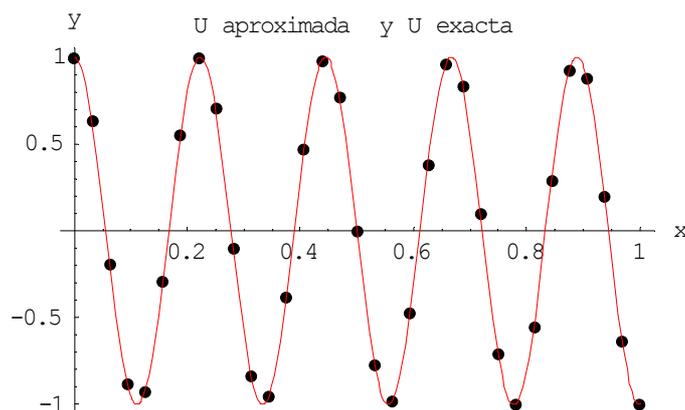


Figura B.9.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

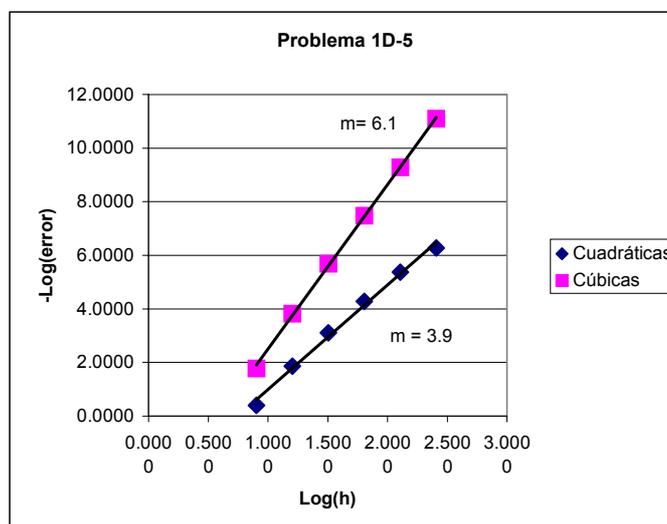


Figura B.10.- Convergencia h .

B.1.6. - Problema 1D-6: Coeficientes Variables

Sea la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + u = -2 \operatorname{Cos}(\operatorname{Ln}(x)) \quad (\text{B.6})$$

En el dominio: $\Omega = [e^{-\pi}, 1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \operatorname{Sen}(\operatorname{Ln}(x))$.

En la figura B.11 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.12 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{5.9})$ para la aproximación cúbica.

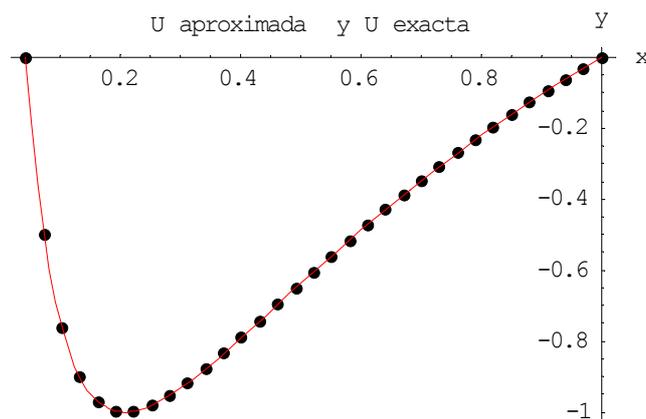


Figura B.11. - Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

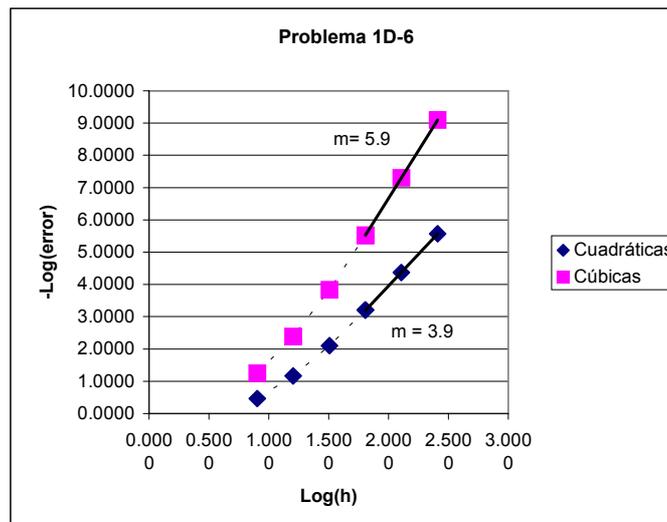


Figura B.12.- Convergencia h .

B.2.- Ejemplos en 2 dimensiones

Se implementarán problemas con condiciones de frontera no homogéneas, con condiciones de salto no homogéneas en la función (solución discontinua), con coeficientes variables en la ecuación diferencial, con coeficientes discontinuos en la ecuación diferencial y problemas con advección dominante.

Se trabajarán un solo **algoritmo**: las funciones óptimas se aproximarán con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción.

Esta aproximación fue planteada en (6.4.6) a (6.4.9).

B.2.1.- Problema 2D-1: Solución Discontinua

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_\Omega \quad \text{donde} \quad f_\Omega = \begin{cases} -2\pi^2 \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ 2\pi^2 \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto en la función: $[u]_{x=0.5} = -2\text{Sen}(\pi y)$. Su solución analítica es:

$$u(x,y) = \begin{cases} \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases}$$

En la figura B.13 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.14 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^{3.6})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

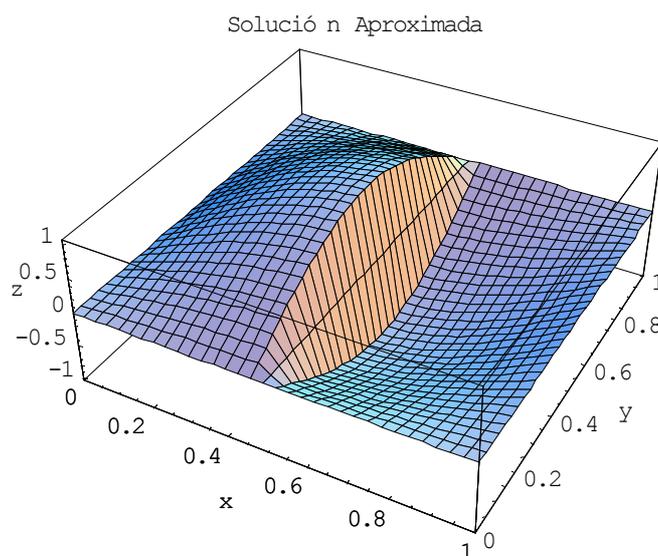
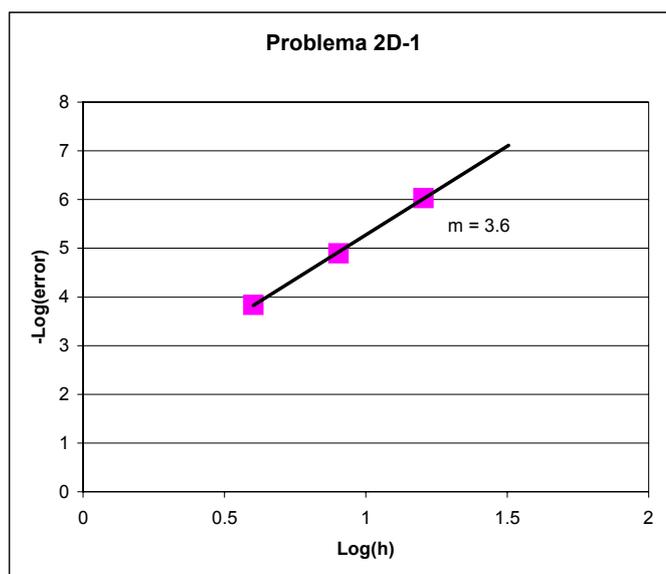


Figura B.13. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

Figura B.14.- Convergencia h .

B.2.2.- Problema 2D-2: Coeficientes Discontinuos

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad a = \begin{cases} -3 & , x < 0.5 \\ 3 & , x > 0.5 \end{cases}, \quad f_{\Omega} = \begin{cases} 2\pi^2 \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ -4\pi^2 \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x, y) = \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y)$.

En la figura B.15 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.16 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^{3.4})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

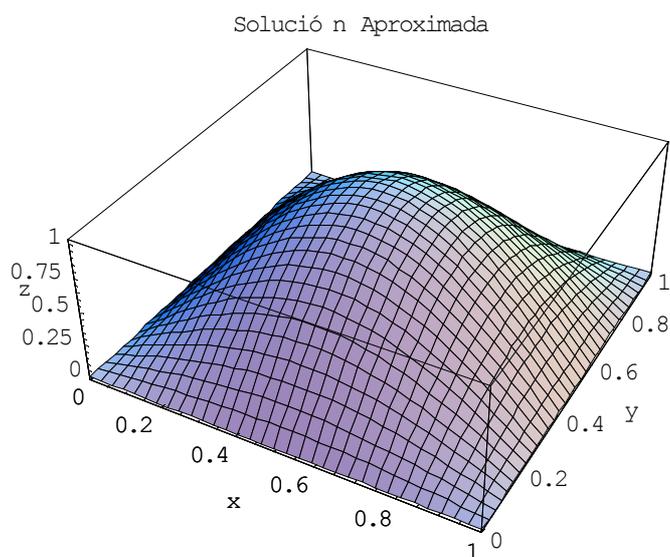


Figura B.15. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

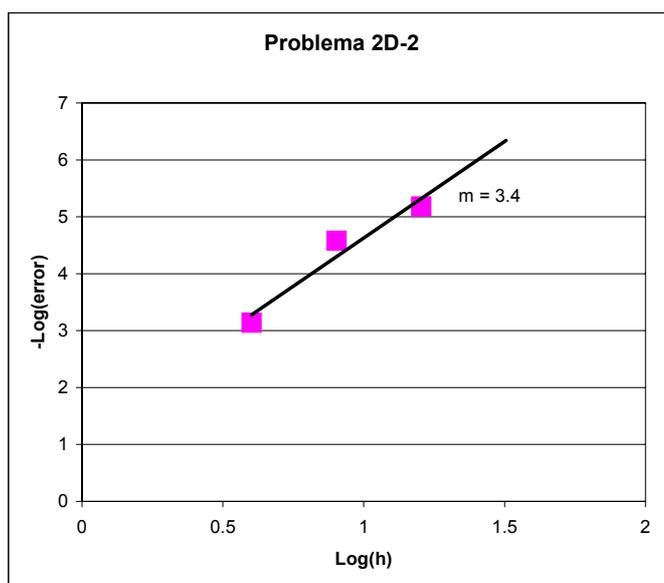


Figura B.16. - Convergencia h .

B.2.3. - Problema 2D-3: Condiciones de Frontera No Homogéneas

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = (1 - x^2 - y^2)e^{xy} \quad (\text{B.9})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u(0,y) = u(x,0) = 1$, $u(1,y) = e^y$, $u(x,1) = e^x$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica: $u(x,y) = e^{xy}$.

En la figura B.17 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.18 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^4)$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

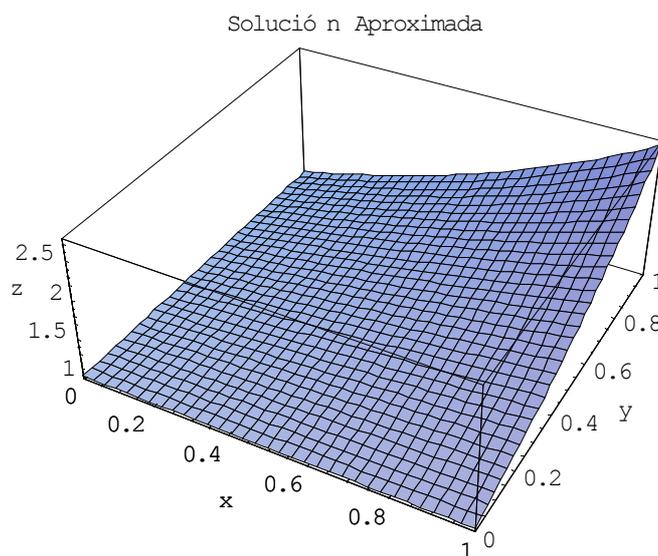


Figura B.17. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

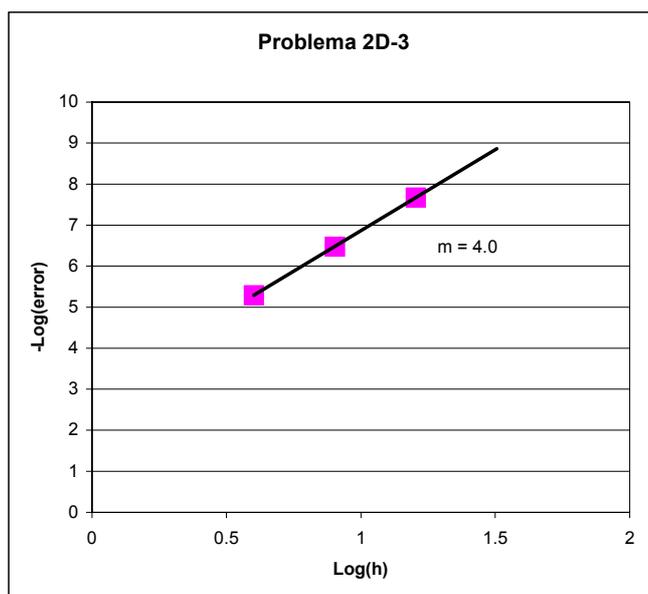


Figura B.18.- Convergencia h .

B.2.4. - Problema 2D-4: Coeficientes Variables

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$-e^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = -e^{-x} - e^{-y} \quad (\text{B.10})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u(0,y) = e^{-y}$, $u(x,0) = e^{-x}$, $u(1,y) = e^{-1-y}$, $u(x,1) = e^{-x-1}$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos).

Su solución analítica es: $u(x,y) = e^{-x-y}$.

En la figura B.19 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.20 se muestran los órdenes de convergencia h : $O(h^{3.6})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

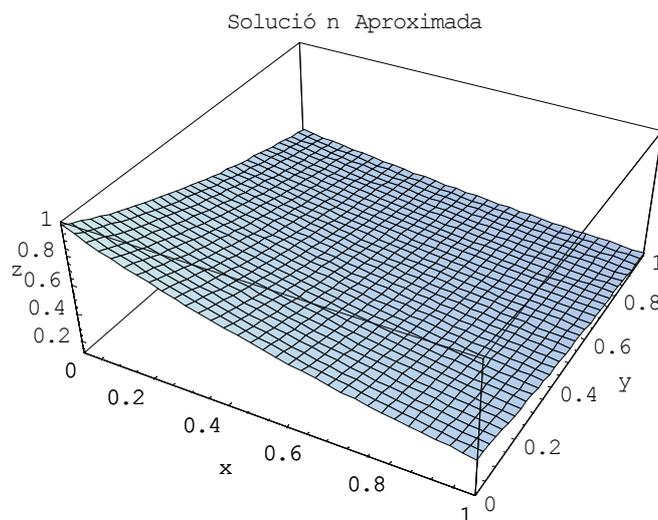


Figura B.19.- Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

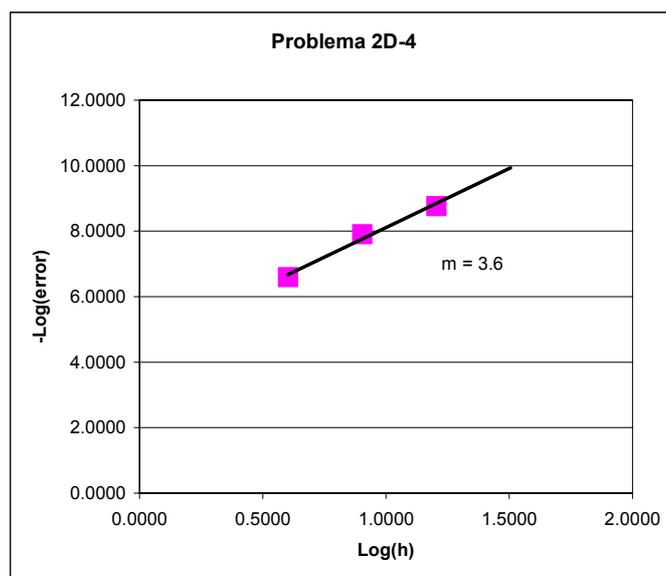


Figura B.20.- Convergencia h .

B.2.5.- Problema 2D-5: Término Advectivo

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial u}{\partial x} - V_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{B.11}$$

donde $V_x = |V| \cos(\angle(V))$, $V_y = |V| \sin(\angle(V))$, siendo $|V|$ la magnitud de la velocidad de advección y $\angle(V)$ su dirección. En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de

frontera: $u(0,y) = \frac{e^{V_y y} - e^{V_y}}{1 - e^{V_y}}$, $u(x,0) = \frac{e^{V_x x} - e^{V_x}}{1 - e^{V_x}}$, $u(1,y) = u(x,1) = 0$, y a condiciones de

salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x,y) = \left(\frac{e^{V_x x} - e^{V_x}}{1 - e^{V_x}} \right) \left(\frac{e^{V_y y} - e^{V_y}}{1 - e^{V_y}} \right)$.

En la figura B.21 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.22 se muestran los órdenes de convergencia h para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , los cuales varían según los parámetros elegidos: $|V| = 10, 20, 40, 80$; $\angle(V) = 45^\circ$.

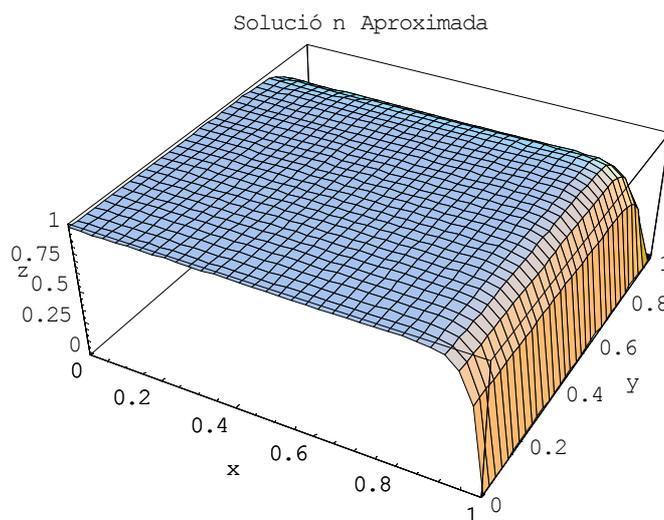


Figura B.21. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

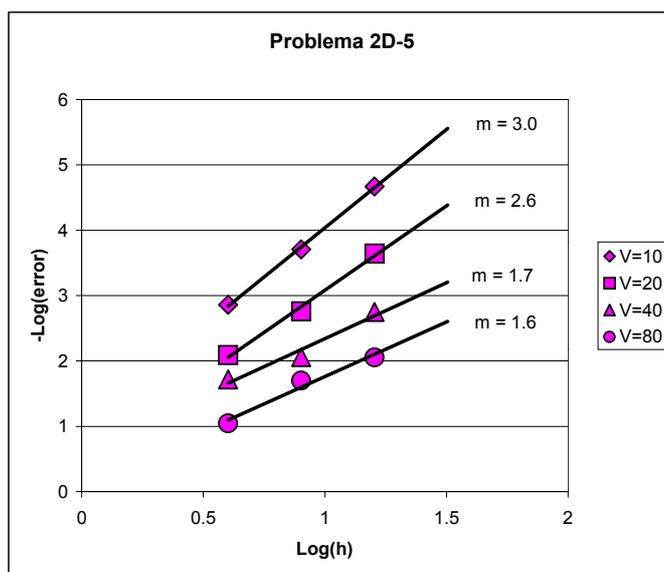


Figura B.22.- Convergencia h .

