

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**"CORRECCIONES
MICROSCÓPICAS AL MODELO
DE LA GOTA DE LÍQUIDO DE
LAS MASAS NUCLEARES"**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOEL DE JESÚS MENDOZA TEMIS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:

DR. OCTAVIO HECTOR CASTAÑOS GARZA

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



entado en la casa del rancho de mi familia, recuerdo era una tarde lluviosa en la que meditando sobre mi futuro decidí seguir mi corazón y lanzarme a una aventura, aquel día el cielo se despejó en la noche permitiéndome admirar la grandeza del universo y me confirmó tal decisión... aunque suene poético, en efecto así fue como decidí estudiar física.

Dedicatorias



*mi abuelita (Sra. Rosa Temis),
mi verdadera fuerza motriz y fuente de inspiración.*

" He sido un niño pequeño que, jugando en la playa, encontraba de tarde en tarde un guijarro más fino o una concha más bonita de lo normal. El océano de la verdad se extendía, inexplorado, delante de mi... lo que sabemos no es más que una gota de agua; lo que ignoramos es el océano" .

Isaac Newton

" El hombre encuentra a Dios detrás de cada puerta que la ciencia logra abrir" .

Albert Einstein

*a la memoria del Dr. Juan Manuel Lozano
(gran maestro en la formación de recursos humanos)*



Agradecimientos

A mi tía Inés, le agradezco el valor de sus consejos porque no hay que confundir nunca el conocimiento con la sabiduría. El primero nos sirve para ganarnos la vida; la sabiduría nos ayuda a vivir. Contigo he discutido, llorado y hasta he aprendido importantes lecciones de vida. Gracias a ti he salido adelante, tu apoyo económico y moral me han sustentado a lo largo de mis días, en pocas palabras; haz sabido ser una verdadera madre conmigo.

A mis padres Agustín y Gozos, les agradezco el regalo de la vida y el apoyo moral que me han brindado en mis decisiones, gracias por permitirme continuar con este sueño del cual no pienso despertar; a no ser en el momento en que me vea convertido en un hombre integro que siga con su ejemplo.

A mis hermanos Andrés y Germán, siempre tengo en mi mente aquellos momentos de alegría en nuestra niñez, en los que lo único importante era divertirnos, son esos recuerdos los que me han impulsado en esta vida tan llena de problemas y sin sa-

bores. Hemos crecido y seguido caminos muy diferentes, sigan adelante, manténganse siempre firmes y recuerden que tenemos una meta en común; ser felices y hacer felices a nuestros seres queridos.

A mis amigos de la infancia y licenciatura por su amistad y cariño...la amistad no se añeja como el vino cuando pasan los años, se pierde, hay siempre que cultivarla, por eso una amistad reciente que se cultive y se cuide puede ser mucho más fructífera (sobre todo si es un cultivo mutuo) que una amistad añeja y olvidada.

A la gente del Instituto de física, la facultad de ciencias y del Instituto de ciencias nucleares, no solamente compañeros de clase, también incluyo a algunos profesores, personal de vigilancia y biblioteca, por el apoyo que me brindaron cuando comencé con esta aventura, por todos sus consejos y sobre todo por su valioso tiempo. Sería injusto intentar nombrarlos a todos debido a mi escasa memoria, de tal forma que les dedico el siguiente pensamiento: " Mientras el río corra, los montes hagan sombra y en el cielo haya estrellas, debe durar la memoria del beneficio recibido en la mente del hombre agradecido" (Virgilio).

A mis amigos Adiv, Hermes, Irving, Osvaldo, Emmanuel, David, Horacio, Julio Cesar y Marcelino; juntos hicimos tareas, discutimos problemas físicos e inclusive nos dimos tiempo para divertirnos y escuchar nuestros problemas personales, gracias por haberme soportado durante todo este tiempo. Siempre les guardare un grato recuerdo, ustedes me hacen pensar que la amistad es el ingrediente más importante en la receta de la vida.

A el grupo de masas de nucleares del icn-unam: Jorge Hirsch, Alejandro Frank, Juan Carlos López Vieyra, José Barea, Víctor Velázquez e Irving Morales Agiss. Agradezco su infinita paciencia y camaradería. Gracias por haberme hecho sentir un miembro útil del grupo y por la atmosfera de trabajo tan agradable que se respiraba durante nuestras reuniones. Me mostraron que la investigación es una actividad muy estimulante y que la mayoría de las ideas fundamentales en la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.

A los miembros del comité tutorial y a mis sinodales por sus consejos, sugerencias y observaciones. El producto final, es decir la presente tesis ha sido enriquecida gracias a su profesionalismo.

*F*inalmente un especial agradecimiento a mi asesor y amigo el Dr. Jorge Hirsch por haberme apoyado desde el principio, sin duda alguna tú fuiste la pieza más importante sobre mi tablero de ajedrez para conseguir culminar con broche de oro mi investigación de maestría, gracias por haberme sabido orientar y ayudarme a crecer como individuo. Haz contribuido para que este humilde jovencito pueda aspirar en algún día no muy lejano a convertirse en un investigador, dedicado a generar conocimientos y a contribuir en el desarrollo científico y tecnológico de su país, para con ello sembrar la inquietud en generaciones futuras y con ello garantizar que en nuestro México nunca se extinga el deseo por explorar el amplio mundo de la ciencia.



Índice general

1. MARCO TEÓRICO	1
1.1. Modelo de la gota de líquido	1
1.1.1. Fórmula semi-empírica de masas de Von Weiszäcker	1
1.1.2. Analogía con una gota de líquido	2
1.1.3. Términos del modelo de la gota de líquido	2
1.2. Otras aproximaciones macroscópicas	10
1.2.1. Modelo de la gota líquida de rango finita	10
1.2.2. Modelo mejorado de la gota de líquido (ILDm)	15
1.2.3. Energía de curvatura y otros términos	15
1.3. Modelo de Duflo-Zuker, Funcional de las ocupaciones	16
2. EVALUACIÓN DE MASAS ATÓMICAS	19
2.1. Técnicas de medición de las masas atómicas	21
2.1.1. Medición directa	24
2.1.2. Medición indirecta	25
2.2. Evaluación de los datos en AME	25
2.3. La superficie de las masas nucleares	26
2.4. Visualizando diferentes sistemáticas: derivadas de las masas atómicas	28
2.5. Restando funciones simples	31
2.5.1. Restando un modelo microscópico	31
2.5.2. Restando una fórmula de gota de líquido	31
2.6. Extrapolaciones lejanas	32

3. MODIFICACIÓN A LA FÓRMULA ORIGINAL	33
3.1. Inconsistencia	33
3.1.1. Contribución superficial al término de asimetría . . .	33
3.1.2. Analogía entre capacitores en paralelo y coeficientes de asimetría	35
3.1.3. Expresión de la gota de líquido modificada	36
3.2. Incorporación del término de Wigner	37
3.2.1. Recurriendo a la teoría de grupos	37
3.2.2. Nueva expresión de la gota de líquido modificada . .	39
4. CORRECCIONES DE CAPAS	41
4.1. Explorando los patrones remanentes	41
4.2. Parametrizaciones locales	42
4.3. Parametrizaciones globales, correcciones de capas: $(n_\nu + n_\pi)$	44
4.3.1. Versión final: Fórmula macroscópica + efectos de ca- pas cerradas	44
4.3.2. Orden de magnitud de las correcciones de capas . .	45
5. REEVALUANDO LOS COEFICIENTES	47
5.1. MINUIT - FCN - análisis de errores	47
5.1.1. Masas nucleares a ajustar	48
5.1.2. Procedimiento para el ajuste de los coeficientes . . .	49
5.2. Reevaluación de los coeficientes del modelo original LDM . .	50
5.2.1. Susceptibilidad entre los coeficientes obtenidos . . .	50
5.3. Ajuste de los coeficientes para los modelos macroscópicos .	52
5.3.1. Consideración de los términos de asimetría en el mo- delo de la gota de líquido	52
5.3.2. Incluir de forma adecuada los términos de asimetría es un problema difícil	53
5.3.3. Incorporación del término r de Wigner	55
5.4. Ajuste de las fórmulas tipo ILDM	61
5.5. Ajuste de los coeficientes correspondientes a las parametriza- ciones locales	64
5.6. Ajuste de los coeficientes de la versión Microscópica de la gota	66

5.6.1. Resultados preliminares: necesidad de la introducción del centroide	66
5.6.2. Comparación de las formulas microscópicas	69
5.6.3. Todos los términos libres	71
5.7. Exploremos una última parametrización	73
5.8. Resumen de resultados	75
6. PRUEBAS DE CONFIABILIDAD	77
6.1. Prueba AME95 - AME03	77
6.2. Prueba del borde	84
6.3. Prediciendo la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$	91
6.4. Estudio de los coeficientes más susceptibles	97
6.5. Resumen de pruebas de confiabilidad	101
7. PREDICCIONES HASTA LAS LINEAS DE INESTABILIDAD	105
7.1. Comparando el poder de predictibilidad	105
7.2. Valores de los coeficientes de asimetría y el término de Wigner hasta las líneas de inestabilidad	109
8. CONCLUSIONES	111

Índice de figuras

1.1. (a)Energías de amarre (MeV) y (b) energías de amarre por nucleón (MeV) en función del número de nucleones A, para todos los núcleos medidos en la compilación AME03 [4].	3
1.2. Determinación del término de Coulomb a través del ajuste de las diferencias en las energías de amarre de pares de núcleos espejo.	6
2.1. Diagrama de las conexiones entre los datos experimentales [4].	21
2.2. Cronología de la medición de las masas nucleares.	23
2.3. (a) Regiones de la carta de núcleos exploradas actualmente por diversos grupos experimentales. [11].; (b) Localización geográfica de las instalaciones dedicadas a la medición de masas nucleares [11].	23
2.4. Diagrama de la superficie de las masas nucleares.	27
2.5. Interfase de la herramienta interactiva DESINT [34].	29
4.1. Diferencias remanentes en el plano N - Z, para la formula macroscópica de Danielewicz.	41
4.2. Regiones locales de estudio.	42
4.3. Contribución de: (a) F_{max} ; (b) F_{max}^2	46
4.4. Correcciones de capa para el modelo de la gota líquida debidas a los términos $-a_f F_{max} + a_{ff} F_{max}^2$	46

5.1.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula original de la gota de líquido (RMS=2.9406 MeV).	51
5.2.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica LDM2a (RMS=2.4007 MeV.)	60
5.3.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica LDM2b (RMS= 2.3919 MeV.)	60
5.4.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM1 (RMS=2.4776 MeV).	62
5.5.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM2 (RMS=2.4595 MeV).	62
5.6.	Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM3 (RMS=2.3774 MeV).	63
5.7.	Comparación de las nuevas superficies de masas nucleares (región III): (a) original; (b) parametrización tipo Duflo-Zuker (RMS=0.45 MeV).	65
5.8.	Comparación de las nuevas superficies de masas nucleares (región III): (a) original; (b) parametrización tipo Rick Casten (RMS=0.45 MeV).	65
5.9.	Diferencias remanentes (región III): (a) Duflo-Zuker; (b) Casten.	65
5.10.	Diferencias remanentes, en el plano N - Z, para el modelo LDM2a + correcciones debido al efecto de las capas cerradas.	70
5.11.	Diferencias remanentes, en el plano N - Z, para el modelo LDM2b + correcciones debido al efecto de las capas cerradas.	70
5.12.	Diferencias residuales, en el plano N - Z, entre las energías de amarre medidas y aquéllas calculadas usando la fórmula MIC.	74
6.1.	Fórmula LDM2a, prueba AME95-AME03: (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.50 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=2.07 MeV.	78
6.2.	Fórmula LDM2b, prueba AME95-AME03: (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.50 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.83 MeV.	79
6.3.	Fórmula MAC, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.44 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.98 MeV.	80

6.4.	Fórmula LDM3a, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=1.37 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.32 MeV.	81
6.5.	Fórmula LDM3b, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=1.28 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.16 MeV.	82
6.6.	Fórmula MIC, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=1.24 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.08 MeV.	83
6.7.	Fórmula LDM2a, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.31 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.88 MeV.	85
6.8.	Fórmula LDM2b, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.33 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.76 MeV.	86
6.9.	Fórmula MAC, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.29 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.70 MeV.	87
6.10.	Fórmula LDM3a, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=1.27 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.16 MeV.	88
6.11.	Fórmula LDM3b, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=1.22 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=1.97 MeV.	89
6.12.	Fórmula MIC, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=1.18 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=1.88 MeV.	90
6.13.	Predicción de la región alrededor del ${}_{82}^{208}Pb$ para un corte en $A \leq 160$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica propuesta MIC, RMS=2.15 MeV para la predicción.	92
6.14.	Predicción de la región alrededor del ${}_{82}^{208}Pb$ para un corte en $A \leq 170$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica propuesta MIC, RMS=1.42 MeV para la predicción.	93
6.15.	Predicción de la región alrededor del ${}_{82}^{208}Pb$ para un corte en $A \leq 180$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3a, RMS=1.64 MeV para la predicción.	94

6.16. Predicción de la región alrededor del ${}^{208}_{82}Pb$ para un corte en $A \leq 190$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3b, RMS=1.65 MeV para la predicción.	95
6.17. Predicción de la región alrededor del ${}^{208}_{82}Pb$ para un corte en $A \leq 200$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3b, RMS=2.31 MeV para la predicción.	96
7.1. Predicciones hasta las líneas de inestabilidad usando: (a) Modelo LDM3a, comparado con (b) el FRLDM de Moller-Nix.	106
7.2. Predicciones hasta las líneas de inestabilidad usando: (a) Modelo LDM3a, comparado con (b) la fórmula de Duflo-Zuker.	106
7.3. Predicciones hasta las líneas de inestabilidad, utilizando una fórmula que incluye términos cúbicos en F_{max}	108



Índice de tablas

5.1. Coeficientes reevaluados para el modelo original de la gota de líquido. Los valores están en MeV.	50
5.2. Valores iniciales de los coeficientes de la gota de líquido. . .	51
5.3. Coeficientes de correlación para la consideración adecuada del término de asimetría en el modelo LDM1a ($r=0$).	53
5.4. Coeficientes de correlación para el modelo LDM1b ($r=0$). . .	54
5.5. Comparación entre dos modelos macroscópicos que incluyen una modificación al término de asimetría del modelo de la gota de líquido.	54
5.6. Coeficientes de correlación, para la incorporación del término r de Wigner en el modelo LDM2a.	55
5.7. Estudio en la fórmula LDM2a para los términos más susceptibles ante la introducción del término de Wigner.	56
5.8. Coeficientes de correlación para la incorporación del término r de Wigner en el modelo LDM2b.	57
5.9. Estudio en la fórmula LDM2b para los términos más susceptibles ante la introducción del término r de Wigner.	58
5.10. Comparación entre dos modelos macroscópicos que incluyen una modificación al término de asimetría y un término r de Wigner.	59
5.11. Coeficientes para los modelos macroscópicos tipo ILDM . . .	61
5.12. Comparación entre parametrizaciones locales	64

5.13. Comparación entre modelos "microscópicos", es decir, aquellos que incluyen efectos de capas.	69
5.14. Comparación de los coeficientes ajustados para la versión microscópica LDM3a, obtenidos empleando una estrategia y dejando libres todos los coeficientes.	72
5.15. Comparación de los coeficientes ajustados para la versión microscópica LDM3b, obtenidos empleando una estrategia y dejando libres todos los coeficientes.	72
5.16. Coeficientes para las fórmulas de masas propuestas.	74
5.17. Comparación de la evolución de las fórmulas de gotas a medida que se van introduciendo correcciones para los modelos LDM1a, LDM2a y LDM3a.	75
5.18. Comparación de la evolución de las fórmulas de gotas a medida que se van introduciendo correcciones para los modelos LDM1b, LDM2b y LDM3b.	76
6.1. Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica LDM2a.	78
6.2. Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica LDM2b.	79
6.3. Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica propuesta MAC.	80
6.4. Prueba AME95-AME03 para el modelo LDM3a.	81
6.5. Prueba AME95-AME03 para el modelo LDM3b.	82
6.6. Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica propuesta MIC.	83
6.7. Prueba del borde para la gota macroscópica de LDM2a.	85
6.8. Prueba del borde para la gota macroscópica LDM2b.	86
6.9. Prueba del borde para la gota macroscópica propuesta MAC.	87
6.10. Prueba del borde para el modelo LDM3a.	88
6.11. Prueba del borde para el modelo LDM3b.	89
6.12. Prueba del borde para la gota microscópica propuesta MIC.	90
6.13. Corte en $A \leq 160$ para las gotas microscópicas.	92
6.14. Corte en $A \leq 170$ para las gotas microscópicas.	93
6.15. Corte en $A \leq 180$ para las gotas microscópicas.	94
6.16. Corte en $A \leq 190$ para las gotas microscópicas.	95
6.17. Corte en $A \leq 200$ para las gotas microscópicas.	96
6.18. Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico LDM3a.	99

6.19. Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico LDM3b.	99
6.20. Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico MIC.	100
6.21. Resultados de las pruebas de confiabilidad.	101
6.22. Resultados de los estudios por regiones.	102
6.23. Resultados de los estudios por regiones.	102
6.24. Resultados de los estudios por regiones.	103
7.1. Energías de asimetría y término r de Wigner hasta las líneas de inestabilidad para los modelos: LDM2a, Duflo-Zuker y Moller-Nix.	109



RESUMEN

En estos días, el conocimiento preciso de las masas nucleares desempeña un papel relevante no sólo para la investigación relacionada con estructura nuclear sino con áreas tan diversas como la astrofísica y las interacciones débiles. Desde hace por lo menos 70 años, se han llevado a cabo considerables esfuerzos por desarrollar métodos que logren ajustar con precisión la totalidad de las masas de los núcleos medidos; la mayor ambición es extrapolar el valor de la masa de aquellos núcleos que aún no han sido medidos, por encontrarse muy lejos de la zona de estabilidad. El modelo de la gota constituye el primer intento exitoso por conseguir una parametrización de las masas nucleares. Pese a que tan sólo considera características de tipo macroscópico, reproduce de una manera sorprendente las masas de la totalidad de los núcleos medidos con una desviación estándar promedio (RMS) de alrededor de 3 MeV, de tal forma que representa el punto de partida para la introducción de términos más sofisticados. En la presente investigación, se muestran algunas modificaciones al modelo original de la gota de líquido debido a ciertas inconsistencias presentes. Así mismo, la observación del patrón de las diferencias residuales en el plano N-Z entre los datos experimentales de la compilación de masas atómicas AME03 y la versión modificada del modelo de la gota de líquido, nos lleva a pensar en la introducción de un par de términos de carácter microscópico en función de los nucleones de valencia partículas o agujeros (del tipo $F_{max} = \frac{(n\nu + n\pi)}{2}$, donde F_{max} es el valor máximo de F_{spin} en el modelo de bosones interactuantes 2 (IBA-2)) a manera de correcciones de capas. La introducción de este par de términos mejora de manera significativa el ajuste de las masas nucleares, obteniéndose un RMS de 1.3 MeV. Se llevan a cabo

pruebas de consistencia a los modelos de estudio para probar su poder predictivo; resultando que la prueba que predice la masa de aquellos núcleos que no estaban en la compilación de masas atómicas AME03 usando los núcleos de la compilación AME95, presenta un RMS de 1 MeV. Se discuten las limitaciones de nuestro modelo introduciendo un par de pruebas; la primera consiste en dividir la carta de núcleos medidos a manera de cáscaras y tratar de predecir la capa más externa con los parámetros obtenidos en el ajuste del resto de las cáscaras más internas; en la segunda prueba se trata de predecir la región alrededor del ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ usando distintos subconjuntos de núcleos ajustados hasta un corte en un número de masa A fijo. Finalmente se comparan las predicciones de nuestro modelo hasta las líneas de inestabilidad con respecto a los modelos más exitosos en la predicción de las masas nucleares (el modelo de la gota líquida de rango finito de Moller-Nix y la fórmula de masas de Duflo-Zuker).

INTRODUCCIÓN

Lo primero que despierta interés acerca de las masas nucleares, es sin duda alguna el hecho de que, si calculamos la masa nuclear en función del número de nucleones que constituyen al núcleo en cuestión, nos damos cuenta que existe un déficit de masa, consecuencia de la energía de amarre de los nucleones. Sabemos que lo que mantiene al núcleo ligado es la llamada interacción residual de la fuerza "fuerte", que es descrita a través de modelos efectivos, que no pueden ser deducidos directamente de la cromodinámica cuántica (QCD). El conocimiento de las masas nucleares a través de las energías de amarre nos revela una situación interesante, dado que estas últimas albergan la mayoría de los efectos de estructura nuclear por ejemplo: cerraduras de capa en los llamados números mágicos, efectos de deformación, apareamiento, etc. Por otra parte las energías de amarre determinan qué tanta energía está disponible para una reacción nuclear dada. Existen numerosos enfoques para tratar el problema de las masas nucleares, el primero lo constituyen los modelos macroscópicos, los cuales básicamente visualizan al núcleo como una gota de líquido nuclear incompresible, de tal forma que la fuerza nuclear de atracción satura. El resultado de esta forma de visualizar el núcleo fue relativamente exitoso por allá de los 30's, pero se topó con la imposibilidad de determinar por qué en ciertos núcleos (los números mágicos) existe una estabilidad excepcional ante decaimientos. Con el objetivo de subsanar esa situación se ideó el modelo de capas. Posteriormente se han desarrollado intentos por incorporar cada vez más términos en la fórmula de masas, a manera de correcciones de carácter microscópico, para tomar en consideración el resultado neto de todas las interacciones presentes en el núcleo.

La estructura de la presente investigación es la siguiente:

- En el Capítulo 1, se discute el modelo de la gota de líquido; así como otras aproximaciones macroscópicas y microscópicas de interés en la presente investigación.
- El Capítulo 2 da una breve descripción de la evaluación de masas atómicas (AME); así como de la regularidad de la superficie de las masas nucleares.
- En el Capítulo 3, se muestran las modificaciones a la fórmula original de la gota de líquido.
- En el Capítulo 4, se establece un método para incorporar las correcciones de capas recurriendo a la observación del patrón de las diferencias remanentes en el plano N-Z entre las masas experimentales tomadas de la compilación más reciente AME03 y la fórmula de la gota de líquido modificada.
- En el Capítulo 5, se reevalúan los coeficientes de los modelos estudiados usando el programa MINUIT.
- En el Capítulo 6, se llevan a cabo estudios de confiabilidad propuestos para los modelos estudiados.
- En el Capítulo 7, se comparan las predicciones de los modelos más usados por los astrofísicos con respecto a nuestros modelos hasta las líneas de inestabilidad.
- Finalmente se establecen las conclusiones pertinentes y se sugieren algunos tópicos de interés como futuras investigaciones.

Adicionalmente como producto de la presente investigación, se incluye un apéndice con el artículo publicado en la revista "Nuclear Physics A".

MARCO TEÓRICO

1.1. Modelo de la gota de líquido

1.1.1. Fórmula semi-empírica de masas de Von Weizsäcker

La medición experimental de la masa de cualquier núcleo resulta ser menor que la masa de sus nucleones constituyentes; este defecto de masa es consecuencia de la energía de amarre. La energía de amarre es la cantidad de energía que deberíamos proporcionarle a un núcleo para separarlo en sus nucleones constituyentes.

$$M(N, Z)c^2 = ZM_p c^2 + NM_n c^2 - BE(N, Z) \quad (1.1)$$

En la fórmula anterior $BE(N, Z)$ representa la energía de amarre atómica. En el Capítulo 5 se presentará una parametrización para tomar en consideración la energía de amarre total de los electrones; obteniéndose una expresión que nos permita relacionar las energías de amarre atómicas con las energías de amarre nucleares.

La expresión más conocida para la gran mayoría de físicos nucleares, en particular para aquellos que trabajan en estructura nuclear, es la fórmula de la gota de líquido:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} \quad (1.2)$$

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

Introducida, por Von Weizsäcker [1] y Bethe-Barcher [2], para modelar un sistema formado por N neutrones y Z protones, que ya por sí mismo es extremadamente complejo debido a que sus constituyentes interactúan por medio de las fuerzas nucleares y Coulombianas. Su idea principal se centra en las analogías existentes entre el núcleo y un sistema clásico constituido por una gota muy densa y cargada, incorporando posteriormente algunas correcciones de carácter cuántico. Aún en estos días, resulta sorprendente lo bien que ajusta la totalidad de las masas medidas; así mismo nos permite explicar un sistema nuclear de forma por demás intuitiva.

1.1.2. Analogía con una gota de líquido

Las siguientes suposiciones, constituyen la base del modelo de Bethe-Von Weizsäcker:

- La densidad nuclear es constante, por lo tanto la materia nuclear es incompresible. Mediciones de dispersión de electrones proporcionan una evidencia de este hecho.
- Supondremos como primera aproximación que el núcleo es esférico, con un radio $R = r_0 A^{1/3}$; donde $r_0 \approx 1.2 - 1.3$ fm . Lo cual es válido, salvo ciertas regiones donde existen deformaciones significativas.
- Para todo propósito práctico, la fuerza nuclear se puede despreciar cuando se consideran fenómenos a escalas atómicas y moleculares; de tal forma que la fuerza nuclear es de corto alcance y atractiva, puesto que debe superar a la fuerza de repulsión Coulombiana entre los protones positivamente cargados para mantener al sistema de nucleones ligado en el interior del núcleo. Por otra parte se dice que la fuerza nuclear se satura, por que los nucleones sólo interactúan con sus vecinos más cercanos.

1.1.3. Términos del modelo de la gota de líquido

Término volumétrico

Puesto que la densidad nuclear es constante, cada uno de los nucleones tendrá el mismo número de vecinos, es decir, cada uno de los nucleones contribuirá con la misma energía de amarre.

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

Ésto nos lleva a pensar que a primera aproximación la energía de amarre es proporcional al número de nucleones

$$BE(N, Z) \propto \text{volumen} \propto R^3 \propto a_v A. \quad (1.3)$$

Este comportamiento lineal de las energías de amarre como función del número de nucleones es una manifestación de la saturación de las fuerzas nucleares (Ver figura 1.1.a.). Una situación más interesante se puede observar ilustrativamente en la figura 1.1.b, donde se grafican las energías de amarre por nucleón en función del número de nucleones A ($A=N+Z$); al principio se incrementan rápidamente en función de A hasta alcanzar un máximo en el núcleo más estable ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ seguido de los isotopos del Hierro ${}^{58}_{26}\text{Fe}$ y ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ (Ésta es la razón fundamental por la que el hierro y el níquel son metales muy comunes en los núcleos planetarios, ya que se producen profusamente como productos finales en las supernovas). A partir de este pico, se estabiliza la curva en aproximadamente 8.0 MeV para los núcleos pesados con una pendiente ligeramnte negativa conforme aumenta la masa [3]. Este comportamiento de la energía de amarre nos explica por qué se gana energía en el lado ligero formando núcleos más pesados (fusión) y en el lado pesado partiendo núcleos en dos fragmentos (fisión) y por qué la diferencia de energía de amarre se convierte en energía de radiación y energía cinética de los fragmentos.

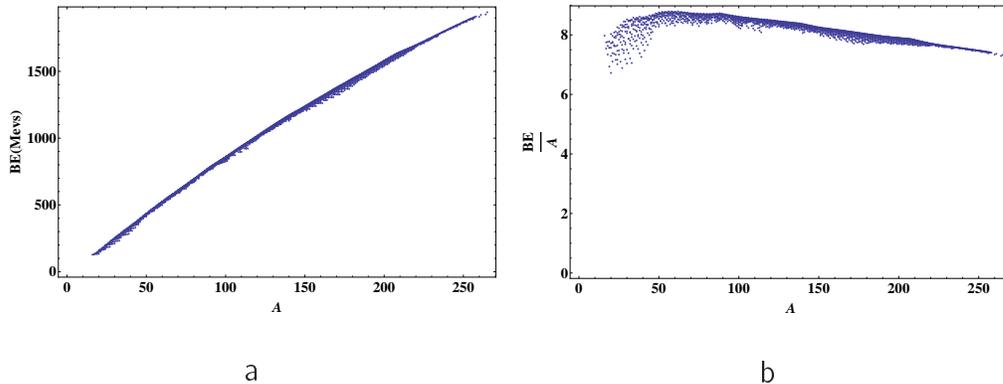


Figura 1.1: (a)Energías de amarre (MeV) y (b) energías de amarre por nucleón (MeV) en función del número de nucleones A , para todos los núcleos medidos en la compilación AME03 [4].

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

Término superficial

Si la energía de amarre sólo fuera función del término volumétrico, entonces el núcleo sería infinito, es decir, no existirían de ninguna manera efectos de bordes. Pero sabemos que ésto no es así; por lo tanto, los nucleones que se encuentran más al interior del núcleo interactúan más que aquellos "nucleones superficiales". Consecuentemente estos últimos están menos ligados y contribuyen menos a la energía de amarre total: Este efecto es análogo al de la tensión superficial de una gota de líquido. La corrección correspondiente a los nucleones superficiales debe ser proporcional al área del núcleo. Anteriormente mencionamos que el radio de un núcleo es un múltiplo de $A^{1/3}$ de tal forma que la corrección debida a los nucleones superficiales será proporcional al cuadrado del radio nuclear, es decir $\propto a_s A^{2/3}$.

$$BE(N, Z) \propto a_v A - a_s A^{2/3}. \quad (1.4)$$

Término de Coulomb

Puesto que el núcleo tiene Z protones con carga $+e$, cada uno tenderá a repeler al resto de los $Z-1$ protones. Usando nuestros conocimientos básicos de electrostática, obtenemos que la energía repulsiva al promediar sobre una distribución esférica uniforme de carga es proporcional a $\frac{1}{r}$, en donde r representa la distancia promedio entre 2 protones. La contribución de este término a la energía de amarre total es $\propto \frac{-Z(Z-1)}{r}$. Vale la pena mencionar que a menudo este término aparece en la literatura $\propto \frac{-Z^2}{r}$.

A continuación se muestra un sencillo procedimiento para determinar el valor teórico de la contribución del término Coulombiano.

Consideremos la energía electrostática en una esfera de carga Ze , con una distribución uniforme y continua; lo cual se traduce en deshacernos de la repulsión individual de las partículas y sustituirla por una repulsión probabilística. Visto de esta forma cada partícula no se siente repelida por el resto de las $Z-1$ partículas, sino más bien cada carga infinitesimal se siente repelida por una carga de magnitud Ze .

Ahora supongamos un núcleo de Z protones, cada uno con carga e , y con un radio nuclear R . Consecuentemente la densidad de carga será $\rho = \frac{Ze}{\text{Volumen}} = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$.

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

La energía de una distribución de carga continua está dada por

$$E = \frac{1}{2} \int \rho \phi(r) d\tau = \frac{1}{2} \int \phi(r) dq,$$

en donde $\phi(r)$ es la función potencial para un nucleón en el interior de la esfera uniformemente cargada de radio R , para $r \leq R$, i.e.,

$$\phi(r) = \frac{Ze}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right),$$

y $dq = 3Ze \frac{r^2}{R^3} dr$ es la carga contenida en la capa esférica comprendida entre r y $r + dr$. El volumen de dicha capa esférica es $d\tau = r^2 d\Omega dr$.

La energía de repulsión entre una carga puntual situada a un radio r con un potencial $\phi(r)$ y una capa de espesor dr , es la siguiente:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{3Ze}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^{4\pi} \frac{Ze}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 d\Omega dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{3Ze}{R^3} \int_0^R \frac{Ze}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 dr \\ &= \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Conociendo el radio nuclear, es posible determinar la componente de energía de repulsión Coulombiana. Usemos $R = r_0 A^{1/3}$ y tomemos para r_0 el siguiente rango valores $r_0 = 1.2 - 1.3$ fm; obteniéndose la siguiente estimación del valor para la energía de Coulomb:

$$E(Z) = \frac{3}{5} \frac{(1.445 \text{ MeV fm})}{(1.2 - 1.3) \text{ fm}} \frac{Z^2}{A^{1/3}} = [0.67 - 0.72] \text{ MeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (1.6)$$

Finalmente, podemos argumentar que esta expresión también contiene las auto-energías de los protones. Debido a que hemos supuesto que la auto-energía de un protón debe estar esparcida por todo el núcleo, se sigue que la contribución debida a esta auto-energía es $E(Z = 1) = \frac{[0.67 - 0.72] \text{ MeV}}{A^{1/3}}$, resultando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E(Z) &= [0.67 - 0.72] \text{ MeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}} - Z [0.67 - 0.72] \text{ MeV} \frac{1}{A^{1/3}} \\ &= [0.67 - 0.72] \text{ MeV} \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

Por lo tanto, la contribución Coulombiana a la energía de amarre es la siguiente:

$$BE(N, Z) \propto a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}. \quad (1.8)$$

También es posible extraer un valor experimental para el término de Coulomb empleando pares de núcleos espejo. Debido a la independencia de carga de la fuerza nuclear, las energías de amarre entre los núcleos espejo únicamente dependen de sus energías de Coulomb. Usando la ecuación 1.8 sin tomar en consideración el término lineal en Z ; se obtiene que, la diferencia en las energías de amarre entre los núcleos espejos es:

$$\Delta B = \frac{a_c(N^2 - Z^2)}{A^{1/3}} = a_c \Delta Z A^{2/3}, \quad (1.9)$$

donde ΔZ es la diferencia en el número de protones entre los dos núcleos espejo, de tal forma que la cantidad $\frac{\Delta B}{\Delta Z}$ será lineal en $A^{2/3}$, con coeficiente de proporcionalidad igual a $a_c = 0.717$ MeVs.

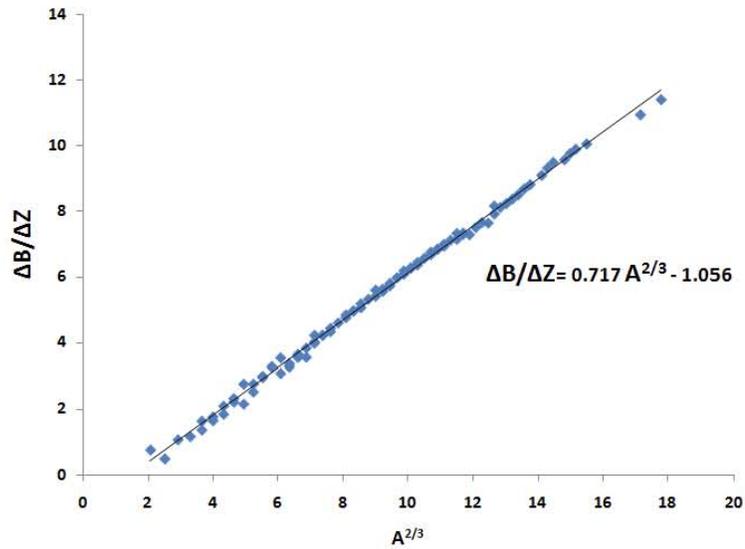


Figura 1.2: Determinación del término de Coulomb a través del ajuste de las diferencias en las energías de amarre de pares de núcleos espejo.

El significado físico de la ordenada en el origen distinta de cero representa cierta física omitida en el ajuste anterior, en particular el llamado término

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

de intercambio en la expresión $E_c = \langle \Psi | V_c | \Psi \rangle = \sum_{a,b} \left\langle ab \left| \frac{e^2}{r_{12}} \right| (ab - ba) \right\rangle$, donde la doble suma está dada sobre todos los estados de protón de partícula independiente en el mar de Fermi [5]. Incluyendo este término al ajuste de las diferencias en las energías de amarre entre los núcleos espejo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta B}{\Delta Z} = a_c A^{2/3} + \frac{2^{5/3}}{3} a_{xc}, \quad (1.10)$$

donde $a_c = 0.714$ MeVs y $a_{xc} = -0.942$ MeVs

Término de asimetría

Salvo por el hecho de que los protones tienen carga y los neutrones no, los nucleones son esencialmente iguales; esta asimetría puede ser expresada por medio de un término $\propto \frac{-(N-Z)^2}{A}$, donde el denominador se debe a que cuando A es más grande dicho término tiene menos importancia (i.e., valores pequeños de A tienden a favorecer un sistema simétrico, con núcleos del tipo $N = Z$); en ausencia de este término la fórmula semi-empírica de masas sugiere una energía de amarre máxima para un sistema formado únicamente por neutrones.

Existen dos factores que contribuyen a la energía de asimetría, un término cinético y un término potencial [3]. El cálculo de la energía cinética de un núcleo puede ser estimado usando un gas de Fermi. Consideremos un gas de fermiones confinados a caja cúbica de volumen nuclear $\Omega = \frac{4\pi r_0^2 A}{3}$, con paredes infinitamente repulsivas; puesto que los neutrones y protones son distinguibles, consideraremos dos gases independientes; las partículas no interactúan y no vamos a considerar la interacción de Coulomb para el caso de los protones.

El número de nucleones que puede estar contenido en un cierto volumen Ω del espacio fase es obtenido al dividir este volumen por el volumen de un estado en el espacio fase, $h^3 = (2\pi\hbar)^3$

$$dn = g \frac{\Omega d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = g \frac{\Omega 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.11)$$

donde g es la degeneración de un nivel de partícula independiente, es decir, $g=2$ para el caso de fermiones con espín $1/2$ y $g=4$ para los nucleones con espín $1/2$ e isoespín $1/2$.

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

Los estados fermiónicos de partícula independiente se van llenando con Z protones y N neutrones hasta el momento de Fermi $p_F = \hbar K_f$, el cual es determinado por la expresión anterior, i.e.,

$$A = g \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{g\pi\Omega p_F^3}{6(\pi\hbar)^3}.$$

Por lo tanto el número de onda de Fermi está determinado por

$$K_F = \left(\frac{6\pi^2}{g} \frac{A}{\Omega}\right)^{1/3} = \left(\frac{6\pi^2}{g} \rho\right)^{1/3}. \quad (1.12)$$

Partiendo del valor de la densidad nuclear $\rho = 1.72 \times 10^{38}$ partículas/ cm^3 , se encuentra el número de onda $K_F = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ y la energía de Fermi $E_F = \frac{p_F^2}{2M_A} \propto 38 \text{ MeV}$, donde M_A es la masa de un nucleón [6]. De tal manera que la energía cinética en la superficie de Fermi es de alrededor de 38 MeV. Tal nucleón se encuentra aún ligado por alrededor de 8 MeV, consecuentemente el potencial de confinamiento para este modelo de capas debe ser de alrededor de 46 MeV de profundidad.

La energía cinética promedio de un nucleón es

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E d^3 p}{\int_0^{p_F} d^3 p} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M_A} = \frac{3}{5} E_F = \frac{3\hbar^2}{10M_A} \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} \left(\frac{A}{\Omega}\right)^{2/3}. \quad (1.13)$$

Considerando $g=2$ y sustituyendo A por N ó Z , según sea el caso, se obtiene que la energía de los nucleones en el núcleo es

$$\begin{aligned} E_K(N, Z) &= Z \langle T_Z \rangle + N \langle T_N \rangle = \frac{3\hbar^2}{10M_A} \left(\frac{6\pi^2}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{3}{4\pi r_0^2}\right)^{2/3} \left(\frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}}\right) \\ &= \frac{3\hbar^2}{10M_A r_0^3} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}}\right) \\ &\propto \left(\frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}}\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ahora desarrollamos la función $E_K(N, Z)$ alrededor de la posición simétrica $N_0 = Z_0 = \frac{A}{2}$. Definiendo $\Delta = (N - Z)$, con el desarrollo mencionado obtenemos

$$E_K \approx A \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2 + \dots \right]. \quad (1.15)$$

1.1. MODELO DE LA GOTA DE LÍQUIDO

En resumen, este cálculo nos indica que conforme los nucleones (fermiones, sujetos al principio de exclusión de Pauli) van llenando los pozos de potencial, se va agregando una mayor cantidad de energía cinética $E_K \approx A[1 + \frac{5}{9}(\frac{N-Z}{A})^2]$, de tal forma que el pozo potencial disminuye; cada nuevo nucleón tendrá menor energía de amarre que los previos; consecuentemente un exceso de un tipo de nucleones sobre el otro tipo disminuye la energía de amarre total.

Un estimado cualitativo de la contribución de la energía potencial al término de asimetría es obtenido al considerar la parte isovectorial de la interacción nucleón-nucleón, es decir, $\frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{i,j} \vec{\tau}^{(i)} \cdot \vec{\tau}^{(j)}$, donde $\vec{\tau} = 2\vec{t}$ es el operador de isoespín de un nucleón (la parte isoescalar de la interacción no distingue entre protones y neutrones). En un estado con un número fijo de neutrones y protones, el valor de expectación de esta interacción es $\propto \langle v \rangle \sum_{i,j} \tau_z^{(i)} \tau_z^{(j)}$. Donde $v_{i,j}$ es inversamente proporcional al volumen ocupado por el estado de interés, es decir, es proporcional a A , en tanto que $\sum_i \tau_z^{(i)} = (N - Z)$. Finalmente la contribución de la energía potencial al término de asimetría es $\propto \frac{(N-Z)^2}{A}$ teniendo esencialmente la misma forma que la contribución obtenida considerando la energía cinética [5].

Más adelante, en el Capítulo 3 estableceremos que el término correspondiente a la energía de asimetría presenta ciertas inconsistencias desde el punto de vista termodinámico, así que debe ser modificado.

Por lo tanto la energía de amarre considerando la contribución de la energía de asimetría, tiene el siguiente aspecto:

$$BE(N, Z) \propto a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A}. \quad (1.16)$$

Término de apareamiento

Es bien conocida la tendencia de los nucleones a aparearse. Si A es impar existe un nucleón no apareado, con menor energía de amarre que si A , N y Z son pares, de tal forma que la corrección debida a este término es $\delta(N, Z)$:

- 0 para un sistema con A impar
- -1 para A par, pero N impar y Z impar
- 1 para A par y N par y Z par

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

Este término se hace menos importante conforme aumenta A ; la manera correcta de considerar esta dependencia en A , fue sugerida por Bohr y Mottelson [3]. La contribución del término de apareamiento a la energía de amarre será $a_p \frac{\delta(N,Z)}{\sqrt{A}}$, obteniéndose finalmente la expresión completa de la fórmula de la gota de líquido para la energía de amarre:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}}. \quad (1.17)$$

1.2. Otras aproximaciones macroscópicas

Debido a la relevancia que tienen para la presente investigación, a continuación se discuten brevemente algunos modelos y fórmulas de masas inspirados en la incorporación de ciertas correcciones al modelo original de la gota de líquido.

1.2.1. Modelo de la gota líquida de rango finita

Comencemos mencionando la principal aportación de los trabajos de Myers y Swiatecki en la investigación de las masas nucleares. En 1966 propusieron una fórmula para tomar en consideración las correcciones debido a presencia de las capas y los efectos de deformación [7]. Posteriormente en 1988, estos mismos autores en colaboración con Moller, Nix y Treiner propusieron, la primera fórmula global macro-microscópica de masas [8]. Este trabajo finalizó con la introducción del conocido modelo de la gota líquida de rango finito [9] (FRDM; por sus siglas en inglés).

El nombre FRDM se refiere estrictamente a la parte macroscópica de este modelo. Sin embargo, se acostumbra designársele de esta forma al modelo completo que incluye correcciones de capas vía Strutinsky [10], correcciones de apareamiento por medio de BCS, un término de Wigner y un término de asimetría de carga de la forma $C_a(N-Z)$. En total la última versión del FRDM contiene un total de 31 parámetros.

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

Parte macroscópica del FRDM

Dentro de la presente investigación emplearemos únicamente ciertos términos de la parte macroscópica del FRDM, cuya contribución más importante, al menos para nuestros propósitos, fue la separación del término de asimetría (cuarto término de la ecuación 1.2) en una contribución volumétrica y una contribución superficial. Debido a la importancia de la parte macroscópica del FRDM para el entendimiento de las masas nucleares, estudiaremos con detalle su evolución partiendo del modelo de la gota original.

La evolución del FRDM se puede describir en tres etapas [11]:

1. En la primera etapa se reemplazó el modelo de la gota por el llamado "droplet model" [12, 13]. Esta versión considera efectos de deformación, permitiéndole a un núcleo finito ser comprimido por la tensión superficial y dilatado bajo la influencia de la fuerza de Coulomb, de tal forma que proporciona un marco de referencia útil para la descripción de fenómenos dinámicos, i. e., las resonancias dipolares gigantes [14]. El modelo expresa la densidad central $\rho^c = \rho_N^c + \rho_Z^c$ en términos de la variable de dilatación $\epsilon = (\rho^0 - \rho^c)$, donde ρ^0 es la densidad de equilibrio para la materia nuclear infinita simétrica. Así mismo se introduce una variable de asimetría central $\delta = \frac{\rho_N^c + \rho_Z^c}{\rho^c}$, un coeficiente de rigidez superficial Q y los factores B_i para tomar en consideración los efectos de deformación [12].
2. La segunda etapa se manifestó al introducir efectos superficiales de rango finito de la interacción N-N [15], es decir, se multiplica el sector superficial del "droplet model" por un factor dependiente de la forma; pero puesto que debe tomar en consideración efectos de rango finito dicho factor no tendrá el valor de la unidad en el caso de los núcleos de forma esférica. También se introdujo un tratamiento más refinado al término de Coulomb al multiplicarlo por un factor que toma en consideración tanto la deformación como la difusividad en la distribución de la carga.
3. La última etapa consistió en la adición del término de compresibilidad exponencial de naturaleza puramente fenomenológica [16]. Debido a que el "droplet model" estándar presentaba la tendencia a sobreestimar

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

la densidad central. Se introducen un término de curvatura a_k y una constante a_0 ; la variable de asimetría central δ permanece igual y la variable de dilatación ϵ se modifica ligeramente para permitir la presencia de efectos de deformación.

Finalmente la expresión para la parte macroscópica del FRDM, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 BE_{mac}(N, Z, B_i) = & BE_{vol} + BE_{sup} + BE_{Coul} \\
 & + BE_{wigner} + BE_{pair} + a_k A^{1/3} + a_0 A^0 \\
 & - CA \exp(-\gamma A^{1/3}) \epsilon,
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

si escribimos explícitamente cada una de las contribuciones a la energía de amarre

$$\begin{aligned}
 BE_{mac}(N, Z, B_i) = & \\
 & a_v(1 - k_v) I^2 A && \text{contribución volumétrica} \\
 - & a_s(1 - k_s) I^2 B_1 A^{2/3} && \text{contribución superficial} \\
 - & a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} B_3 && \text{contribución Coulombiana} \\
 + & a_{exc} \frac{Z^{4/3}}{A^{1/3}} && \text{término de intercambio de Coulomb} \\
 - & f(k_F r_p) \frac{Z^2}{A} && \text{factor de forma del protón} \\
 + & c_a(N - Z) && \text{contribución de la asimetría de carga} \\
 - & W \left(|I| + \frac{\delta(N, Z) \pi_{impar, impar}}{A} \right) && \text{término de Wigner} \\
 - & (*) && \text{energía de apareamiento promedio} \\
 - & a_k A^{1/3} && \text{energía de curvatura} \\
 - & a_0 A^0 && \text{constante} \\
 - & CA \exp(-\gamma A^{1/3}) \epsilon. && \text{variable de dilatación}
 \end{aligned}$$

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

En la expresión de anterior, " $I = \frac{N-Z}{A}$ " representa el exceso relativo de neutrones o asimetría; de tal forma que k_v es el coeficiente de las contribuciones volumétricas y k_s es el coeficiente de las contribuciones superficiales para el término de asimetría.

Las cantidades a_c y a_{exc} están definidas en términos de la carga electrónica e y la constante r_0 del radio nuclear por medio de

$$a_c = \frac{3 e^2}{5 r_0},$$
$$a_{exc} = \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{2/3} a_c.$$

La cantidad f que aparece en la corrección a la contribución de Coulomb por medio del factor de forma del protón está dada por

$$f(k_F r_p) = -\frac{1}{8} \frac{r_p^2 e^2}{r_0^3} \left[\frac{145}{48} - \frac{327}{2880} (k_F r_p)^2 + \frac{1527}{1209600} (k_F r_p)^4 \right],$$

donde el número de onda de Fermi está dado por $k_F = \left(\frac{9\pi Z}{4A} \right)^{1/3} \frac{1}{r_0}$ y $r_p = 0.8$ fm representa el radio promedio del protón.

Si consideramos la energía de apareamiento promedio, el símbolo (*) en la expresión de la página anterior denota

- $\bar{\Delta}_p + \bar{\Delta}_n - \delta_{np}$; para N y Z impar,
- $\bar{\Delta}_p$; para N par y Z impar,
- $\bar{\Delta}_p$; para N impar y Z par,
- 0; en el caso de que N y Z sean pares,

donde las brechas de apareamiento promedio para neutrones $\bar{\Delta}_n$, protones $\bar{\Delta}_p$ y la energía promedio de la interacción neutrón-protón δ_{np} están dadas por

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_n &= \frac{r_{mac} B_s}{N^{1/3}}, \\ \bar{\Delta}_p &= \frac{r_{mac} B_s}{Z^{1/3}}, \\ \delta_{np} &= \frac{h}{B_s A^{2/3}},\end{aligned}$$

el punto de referencia para la energía de apareamiento igual a cero, ahora corresponde a núcleos par-par en lugar del convencional A impar.

Las B_i denotan los factores de deformación, a continuación se describen cada uno:

- B_s representa la energía superficial relativa, esta cantidad es el cociente entre el area superficial de un núcleo con una forma dada y el area superficial de un núcleo con forma esferica, está dado por

$$B_s = \frac{A^{-2/3}}{4\pi r_0^2} \int_S dS.$$

- La cantidad B_1 es la energía nuclear en un modelo que toma en consideración el efecto de rango finito de la fuerza nuclear; dicha cantidad está dada por

$$B_1 = \frac{A^{-2/3}}{8\pi^2 r_0^2 a^4} \int \int_V \left(2 - \frac{|r - r'|}{a} \right) \frac{e^{-\frac{|r-r'|}{a}}}{-|r - r'|/a} d^3r d^3r',$$

donde a es el alcance del potencial Yukawa + el potencial exponencial.

- La energía relativa de Coulomb B_3 es la siguiente

$$B_3 = \frac{15}{32\pi_2} \frac{A^{-5/3}}{r_0^5} \int \int_V \frac{d^3r d^3r'}{|r - r'|} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|r - r'|}{a_{den}} \right) e^{-\frac{|r-r'|}{a_{den}}} \right],$$

donde a_{den} es el alcance de la función tipo Yukawa usada para generar las distribución de carga nuclear.

Finalmente γ y C especifican el alcance e intensidad (fuerza) de la contribución de la variable de dilatación ϵ a la energía de amarre.

1.2. OTRAS APROXIMACIONES MACROSCÓPICAS

1.2.2. Modelo mejorado de la gota de líquido (ILDM)

En 2003, Souza et al. [17] notaron que la contribución superficial de los términos de asimetría y de Coulomb son requeridos para la materia nuclear rica en neutrones, debido a que la superficie de los núcleos puede acumular una fracción significativa de asimetría. Para incorporar las contribuciones de estos términos superficiales a la energía de amarre, Souza et al. adoptaron una parametrización a la cual denominaron el modelo mejorado de la gota de líquido (ILDM, por sus siglas en inglés).

$$BE(N, Z) = a_v(1 - kl^2)A - a_s(1 - kl^2)A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} + c_d \frac{Z^2}{A}. \quad (1.19)$$

Aquí, el término Coulumbiano extra $c_d \frac{Z^2}{A}$, toma en consideración correcciones a la energía de Coulomb, asociadas con la difusividad de la superficie nuclear (corrección debida al factor de forma del protón en la energía de Coulomb) y K representa el coeficiente de asimetría generalizado. Resulta interesante explorar qué ocurre si consideramos un coeficiente diferente para las contribuciones volumétricas k_v y superficiales k_s para el término de asimetría en la fórmula 1.19 tal y como lo sugiere la Ec.1.18,

$$BE(N, Z) = a_v(1 - k_v l^2)A - a_s(1 - k_s l^2)A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} + c_d \frac{Z^2}{A} \quad (1.20)$$

1.2.3. Energía de curvatura y otros términos

En la parte macroscópica de la fórmula de Royer y Gautier [18] se considera a la energía superficial como función de las propiedades locales de la superficie; consecuentemente, ésta depende de la curvatura local promedio $a_k A^{1/3}$. Así mismo se incluye un término constante $a_0 A^0$, el cual aparece cuando se incorporan correcciones de orden más grande en función de $A^{-1/3}$ e l , al término superficial del modelo de la gota de líquido. Finalmente, se incluye una corrección a la energía de amarre debida al término de Wigner ($W |I|$). Más adelante se discutirá su importancia de una forma más amplia. La siguiente expresión corresponde a la parte macroscópica de la fórmula de masas de Royer y Gautier:

1.3. MODELO DE DUFLO-ZUKER, FUNCIONAL DE LAS OCUPACIONES

$$BE(N, Z) = a_v(1 - k_v I^2)A - a_s(1 - k_s I^2)A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - a_k A^{1/3} - a_0 A^0 + c_d \frac{Z^2}{A} - W |I|. \quad (1.21)$$

En el Capítulo 3, se introducen otras dos fórmulas macroscópicas, basadas en los trabajos de P. Danielewicz [19] y P. Van Isacker [20], para incorporar una contribución superficial al término de asimetría de la fórmula original de la gota debido a una inconsistencia desde el punto de vista termodinámico.

1.3. Modelo de Duflo-Zuker, Funcional de las ocupaciones

Los trabajos publicados en 1994 por J. Duflo [21] y A.P. Zuker [22] culminaron con una fórmula de masas con 28 parámetros [23]. Dicha fórmula de masas resulta ser el modelo más exitoso para el ajuste de la totalidad de las masas de los núcleos medidos, de tal forma que vale la pena indicar sus principales características.

Lunney et al [11] señalan que el modelo de Duflo-Zuker (D-Z) es aún más fundamental que los métodos macro-microscópicos cuyo principal representante es el FRDM de Moller et al [9] y que los métodos semi-clásicos, i.e., el modelo extendido de Thomas-Fermi más la integral de Strutinsky(ETFSI) [24] y el TF-FRDM [25] introducido Myers-Swiatecki en 1996 para combinar las virtudes de FRDM con la aproximación semi-clásica de Thomas-Fermi.

De acuerdo a A. P. Zuker [26], su modelo funcional de las ocupaciones es más fundamental, porque por primera vez se ha conseguido la separación de los efectos de las capas partiendo de una interacción realista. Algo notable es que los términos responsables de las propiedades de saturación y partícula independiente; los denominados "Master terms" tienden asintóticamente a los términos del modelo original de la gota de líquido [23].

1.3. MODELO DE DUFLO-ZUKER, FUNCIONAL DE LAS OCUPACIONES

El punto de partida para este modelo es la existencia una interacción efectiva entre los nucleones, lo suficientemente suave para que sea posible hacer cálculos de tipo Hartree-Fock. Posteriormente muestran que el Hamiltoniano efectivo \hat{H} puede separarse en una parte monopolar \hat{H}_m y otra parte multipolar \hat{H}_M , es decir, $\hat{H} = \hat{H}_m + \hat{H}_M$ [27, 28].

La parte monopolar es enteramente responsable de las propiedades globales de saturación y el comportamiento de partícula independiente " $cs \pm 1$ " (capas cerradas \pm un nucleón). Uno de los principales problemas en la física nuclear es que las fuerzas realistas tienen malas propiedades de saturación, de tal forma que para poder reproducirlas adecuadamente el término monopolar debe ser tratado fenomenológicamente. La parte multipolar, por otra parte, actúa como una interacción residual que le permite al modelo de capas ir más allá de Hartree-Fock, puesto que admite una mezcla de configuraciones muy general que incluye apareamiento y correlaciones del tipo Wigner pero no se limita únicamente a estos aspectos.

Los términos monopolar y multipolar son parametrizados en lugar de ser extraídos de una interacción efectiva de tal forma que la forma que la fórmula de Duflo-Zuker no es de naturaleza meramente microscópica. La parametrización está formulada a través de argumentos de simetría y escalamiento, de tal forma que se toman en consideración las principales propiedades de saturación y mezcla de configuraciones correspondientes a las diagonalizaciones en el modelo de capas basadas en la interacción de Kuo-Brown [29]. Los números mágicos y las zonas de fuerte deformación se presentan naturalmente bajo este esquema.

EVALUACIÓN DE MASAS ATÓMICAS

La necesidad de establecer una lista confiable de las masas atómicas, llevó al surgimiento de la evaluación de masas atómicas conocida como AME (por su siglas en inglés). Debido a la relevancia que tiene para la presente investigación, en este Capítulo se da una breve descripción de la AME, enfocándonos principalmente en las tendencias sistemáticas, caracterizadas por la regularidad de las superficies de las masas atómicas (energías de amarre), debido a su importancia al momento de hacer extrapolaciones.

Si uno tiende a pensar que por la AME [4], nos referimos a una "simple compilación de resultados experimentales", donde quizás se requiera un promedio en donde exista más de un dato, estamos completamente equivocados. La razón es que todas las determinaciones de las masas son relativas, es decir, cada dato experimental establece una relación en energía o masa entre 2 o más nucleidos, la cual podemos representar con una conexión; de tal forma que el conjunto de estas conexiones genera una red por demás complicada.

Un ejemplo se muestra en la Figura 2.1, cada símbolo representa un nucleido y cada línea representa la propiedad física que los conecta; en el caso de que un nucleido esté conectado al ^{12}C (a menudo es el caso de la espectrometría de masas), éste es representado por un cuadro. Lo primero que uno advierte es que existen dos tipos de símbolos. Los pequeños representan los nucleidos secundarios, en el caso de que la masa de estos nucleidos haya sido determinada experimentalmente aparecen como círculos pequeños llenos y en

el caso de que sus masas hayan sido obtenidas por tendencias sistemáticas aparecen como círculos pequeños vacíos, así mismo los nucleidos secundarios están conectados por líneas punteadas, una cadena de nucleidos secundarios está conectado en un extremo a un nucleido primario representado por un símbolo grande. Los nucleidos primarios están interconectados a su vez a los datos primarios por medio de líneas continuas, tal y como vemos en la Figura 2.1, la masa de un núcleo primario no puede ser determinada sencillamente.

Uno tendería a pensar en hacer un promedio de los valores obtenidos en todos los enlaces, pero tal receta es errónea porque los otros nucleidos a los cuales está enlazado un núcleo primario están a su vez interconectados entre sí, de tal forma que no son independientes. Es decir, las propiedades físicas que conectan a los núcleos primarios están correlacionadas, de tal forma que sus coeficientes de correlación deben ser tomados en cuenta.

Audi [30] se dio a la tarea de tomar en consideración estas correlaciones por medio de un ajuste usando mínimos cuadrados, estableciendo que un programa de cómputo diseñado para la AME debe realizar las siguientes tareas:

1. Descifrar y verificar el valor de los datos de entrada.
2. Construir una representación de las conexiones entre las masas, permitiendo de este modo separar las masas primarias y las masas secundarias de los datos para reducir drásticamente el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver, sin pérdida de información.
3. Realizar el cálculo de las matrices por mínimos cuadrados (ver la Referencia [30] para mayor información).
4. Deducir las masas atómicas, las energías de una reacción nuclear, las energías de separación, los valores ajustados para los datos de entrada, las influencias de los datos de entrada sobre las principales masas y mostrar la información sobre la inversión de la matriz de errores, los coeficientes de correlación, etc.

2.1. TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE LAS MASAS ATÓMICAS

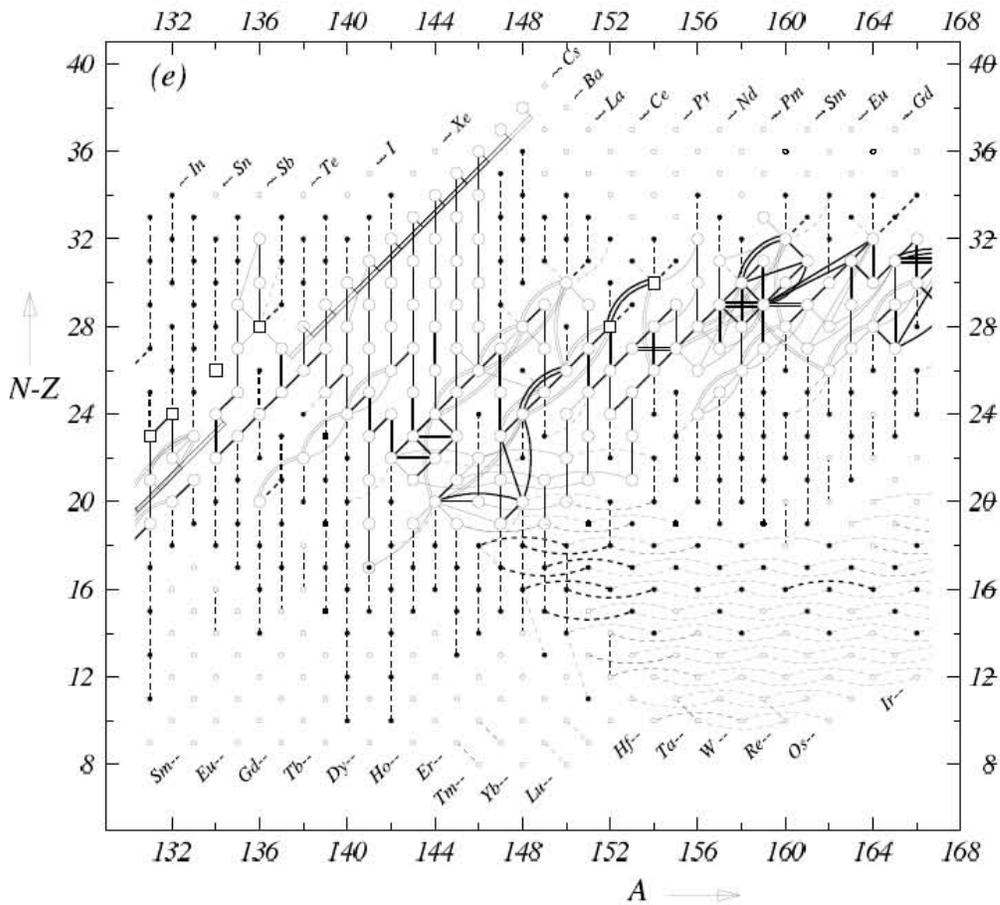


Figura 2.1: Diagrama de las conexiones entre los datos experimentales [4].

2.1. Técnicas de medición de las masas atómicas

Desde la primera vez que se ajustaron los núcleos medidos usando el modelo de la gota de líquido en 1936, cuando había alrededor de 280 núcleos, la cantidad de núcleos medidos ha sido significativa (ver Figura 2.2) dado que en la compilación más reciente de masas atómicas AME03 aparecieron a partir de $N \geq 8$ y $Z \geq 8$ un total de 3085 masas reportadas, de las cuales solo 2149 corresponden a núcleos medidos; el resto se obtuvieron empleando tendencias sistemáticas, tal y como se explicará en la siguiente Sección. De estos 2149 núcleos medidos, sólo 270 son estables, es decir, casi 9 de cada 10 núcleos

2.1. TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE LAS MASAS ATÓMICAS

medidos son núcleos radiactivos producidos en los aceleradores o presentes en la naturaleza por periodos muy cortos; de tal forma que la determinación de sus propiedades es una tarea muy difícil, por no decir casi imposible.

La cantidad $\frac{\delta m}{m}$, establece una relación entre la incertidumbre relativa sobre una masa medida; de tal forma que la precisión requerida para la medición de las masas, depende en gran medida de la física a ser investigada [11], i.e.

- Los primeros indicios de las capas son algo brutos, aparecen en el orden de unos pocos MeV y corresponden a una precisión de 10^{-5} .
- Si lo que se buscan son las aperturas y cerraduras de capas para los núcleos exóticos, así como efectos fuertes de apareamiento se requiere una precisión más elevada de alrededor de 10^{-6} .
- La investigación relacionada con núcleos halo (en la región de los núcleos ligeros), así como los efectos más sutiles de apareamiento relacionados con el denominado término de Wigner requieren una precisión de 10^{-7} .
- Finalmente los estrictos estudios de interacción débil requieren una precisión mayor que 10^{-8} .

La Figura 2.3a nos indica las regiones de interés que están siendo medidas actualmente, ya sea por técnicas directas o mediciones indirectas en diferentes laboratorios alrededor del mundo, por ejemplo en GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung) Alemania, GANIL (Grand Accélérateur National d'Ions Lourds) en Francia, ISOLDE en CERN, CPT (Canadian Penning Trap) en Argonne National Laboratory en Chicago, LEBIT en Michigan State University, JYFLTRAP (Jyväskylä) en Finlandia.

Complementariamente la Figura 2.3b, nos muestra la localización geográfica de algunas de las instalaciones dedicadas a la medición de masas nucleares como son: TITAN (Triumf's Ion Trap For Atomic and Nuclear Science) en Canadá, RIKEN en Japón, así como algunos proyectos en construcción como: HIRFL-CSR (Heavy Ion Research Facility in Lanzhou) que se encuentra en China, la utilización de MAFT TRAP en SPIRAL2 en Francia, etc.

2.1. TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE LAS MASAS ATÓMICAS

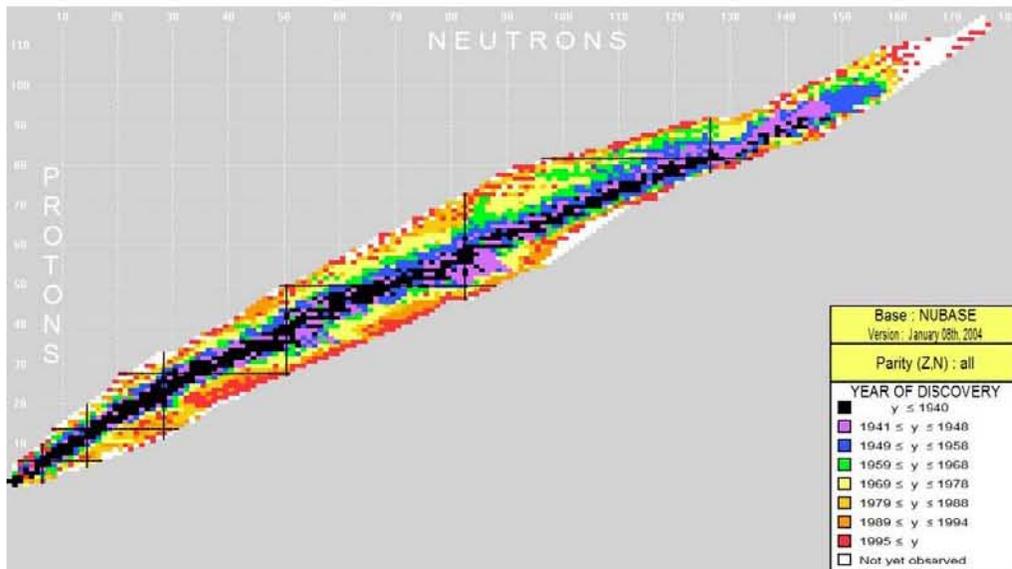


Figura 2.2: Cronología de la medición de las masas nucleares.

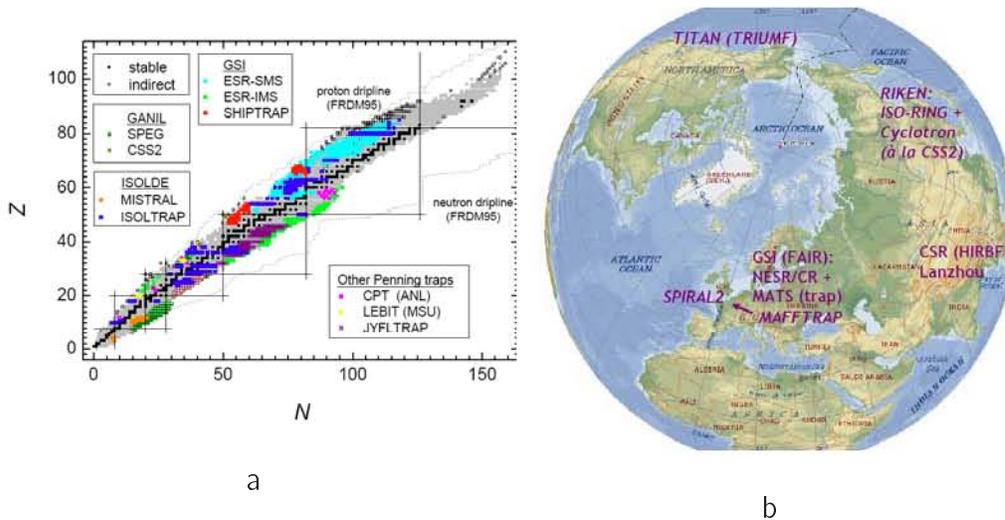


Figura 2.3: (a) Regiones de la carta de núcleos exploradas actualmente por diversos grupos experimentales. [11].; (b) Localización geográfica de las instalaciones dedicadas a la medición de masas nucleares [11].

2.1. TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE LAS MASAS ATÓMICAS

2.1.1. Medición directa

Las mediciones directas absolutas resultan poco prácticas, porque tienen una exactitud limitada por el nivel de exactitud del campo magnético del espectrómetro en el cual se mueven los iones. De tal manera que en todas las mediciones de precisión de las masas, la masa del nucleido desconocido es siempre comparada con un nucleido de referencia sujeto al mismo campo magnético, posteriormente se determina la relación entre estas masas en donde el campo magnético se cancele. Existen tres tipos de mediciones de masas por medio de espectrometría [30] :

1. Espectrometría de masas clásica.- los dos haces correspondientes al ión del nucleido a investigar y el de referencia están forzados a seguir la misma trayectoria en el campo magnético. La comparación de los voltajes del dispositivo electrónico que se encarga de forzar a los haces determina la razón de las masas.
2. Espectrometría por tiempo de vuelo.- se mide simultáneamente el momento de un ión (caracterizada por su rigidez magnética) y su velocidad, es decir, el tiempo de vuelo a lo largo de una trayectoria de una longitud bien determinada. Los espectrómetros de tiempo de vuelo pueden ser colocados en ciclotrones o en anillos de almacenamiento.
3. Frecuencia ciclotrón.- nos da el valor de la masa con la mayor precisión, debido a que la frecuencia es la cantidad física que puede ser medida con la mayor precisión. Existen tres tipos de espectrómetros:
 - Espectrómetro de masas de radiofrecuencia. La medición se obtiene en vuelo, como una señal transmitida en únicamente una vuelta.
 - Espectrómetro de la trampa de Penning. Ha conseguido precisiones ligeramente mejores que 10^{-10} . Los iones son almacenados de 0.1 a 2 segundos para que interactúen con una señal de excitación de radiofrecuencia.
 - Espectrómetro del anillo de almacenamiento. Los iones son almacenados y el haz de iones enfriado, la señal es recogida por una sonda metálica cerca del haz que detecta ruido tipo Schottky (señal inducida por una carga en movimiento) [31].

2.2. EVALUACIÓN DE LOS DATOS EN AME

2.1.2. Medición indirecta

Las técnicas de medición indirectas, dan diferencias entre las masas desconocidas con respecto a una masa de referencia:

1. Reacciones.- Son tradicionalmente una de las técnicas de medición más exactas, la energía absorbida en una reacción nuclear está relacionada con $E = mc^2$. La cinemática de las masas desconocidas o el valor Q de la reacción deben ser determinados por un espectrómetro de masas relativamente preciso y bien calibrado [11]. Se utilizan dos técnicas:
 - El método de la masa faltante. Se utiliza el siguiente esquema $A(a, b)B$ y se obtiene el valor de la masa faltante al medir el valor de Q .
 - El método de la masa invariante. Es adecuado para los nucleones no ligados; la masa del nucleón padre B es determinada al detectar la cinemática del retroceso del producto del decaimiento b y de la partícula x que decae. El pico de masa invariante es reconstruido partiendo de la cinemática de los eventos de x y b registrados en coincidencia.
2. Decaimientos.- Los valores de Q_β , Q_α y Q_p (siempre positivos) pueden proporcionar diferencias de masas relativamente exactas entre los nucleidos padre e hija. Sin embargo, para obtener el valor de las masas, estas diferencias deben relacionarse con una masa bien conocida, la cual podría encontrarse algo distante, originando un error acumulativo. Estas mediciones son importantes puesto que nos permiten derivar las masas de muchos núcleos inestables.

2.2. Evaluación de los datos en AME

La evaluación de datos para las relaciones de energía entre nucleidos es compleja debido a las numerosas conexiones que sobre determinan el sistema y exhiben inconsistencias entre los datos. En aquellos casos donde se presentan conflictos, la evaluación requiere una revisión crítica y juicio objetivo para identificar todas las fuentes de error y tomarlas en consideración de forma adecuada [4].

2.3. LA SUPERFICIE DE LAS MASAS NUCLEARES

El primer paso en la evaluación de las masas atómicas, es hacer una compilación de todos los datos disponibles provenientes de todos los experimentos, obtenidos ya sea por técnicas de medición directas o indirectas.

El segundo paso, es la lectura crítica:

1. Evaluación o reevaluación de los procedimientos de calibración.
2. Análisis de los espectros: posición de los picos e intensidades relativas, picos simétricos, calidad del ajuste.
3. Búsqueda de información primaria, con el objetivo de reconstruir el resultado original y confirmarlo con los autores.

El tercer paso, será la comparación de los resultados del trabajo examinado con resultados anteriores; de no contar con resultados previos, la comparación se hará con estimados de extrapolaciones, explotando la regularidad de la superficie de masas o en su defecto estimaciones partiendo de modelos teóricos de masas.

En pocas palabras la AME sirve como una red coordinada, la cual es capaz de checar qué tanto o qué tan poco puede cambiar la sistemática al introducir el valor de una nueva masa medida.

2.3. La superficie de las masas nucleares

La superficie de las masas nucleares (energías de amarre) se obtiene al representar las masas como función del número de neutrones N y el número de protones Z . Esta superficie presenta irregularidades debido a cambios bruscos de las masas en N y Z ; una manera de remediarlo es dividir nuestra superficie original en cuatro sabanitas dependiendo de la paridad, obteniéndose 4 superficies suaves (ver Figura 2.4), excepto en algunos sitios asociados con un cambio violento en algún parámetro físico, i.e., cerraduras de capa, deformación, transiciones de fase, etc.

Tanto teóricamente [32] como experimentalmente [30] se ha observado que las cuatro superficies son paralelas, es decir, las cantidades Δ_{nn} , Δ_{pp} y Δ_{np}

2.3. LA SUPERFICIE DE LAS MASAS NUCLEARES

varían suave y lentamente como función de N y Z. La regularidad de las 4 superficies de masas para aquellos sitios donde se sabe que la física del núcleo no presenta cambios drásticos, es la propiedad básica que nos permite hacer estimaciones con confiabilidad de aquellas masas pobremente conocidas o cuestionables, y hacer extrapolaciones de las masas desconocidas partiendo de aquellas masas bien conocidas dentro de la misma superficie.

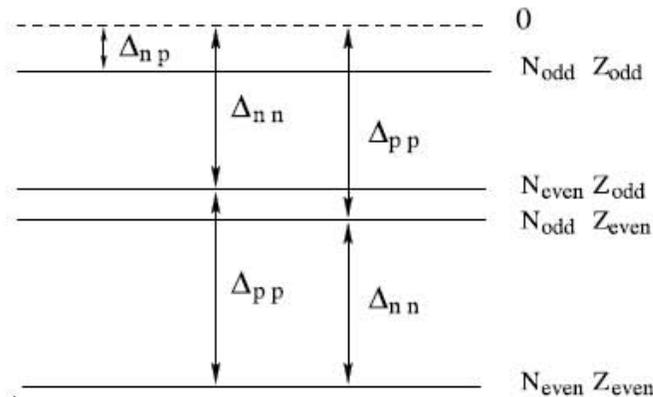


Figura 2.4: Diagrama de la superficie de las masas nucleares.

La superficie par-par es la más profunda y la impar-impar la más elevada; las dos restantes son intermedias. La distancia vertical entre las superficies representa las energías de apareamiento entre nucleones:

- La energía de apareamiento para neutrones Δ_{nn} , es la distancia entre la superficie par-par y la superficie impar-par; análogamente también es la distancia entre la superficie de referencia (aquella sin energía de apareamiento entre nucleones) y la superficie par-impar.
- La energía de apareamiento para protones Δ_{pp} , es la distancia entre la superficie par-par y la superficie par-impar; análogamente también es la distancia entre la superficie de referencia y la superficie impar-par.
- Finalmente la distancia entre la superficie impar-impar y la superficie de referencia es igual a Δ_{np} , análogamente $\Delta_{np} = \Delta_{pp} - \Delta_{nn}$, donde Δ_{np} , es la energía de apareamiento protón-neutrón debida a la interacción entre los dos nucleones impares, que por lo general no se encuentran en la misma capa.

2.4. VISUALIZANDO DIFERENTES SISTEMÁTICAS: DERIVADAS DE LAS MASAS ATÓMICAS

En la evaluación de las masas atómicas, la propiedad de regularidad y la posibilidad de hacer estimados y/o extrapolaciones son de utilidad, por citar algunos ejemplos:

1. NUEVA FÍSICA.- Cualquier desviación coherente en el plano $N - Z$, puede considerarse como una indicación de que se ha descubierto nueva física.
2. ERRORES SISTEMÁTICOS NO DETECTADOS.- En caso de que una sola masa viole la tendencia sistemática, uno puede cuestionar la calidad de tal dato e incluso rechazarlo.
3. CONFLICTOS ENTRE DATOS.- La tendencia sistemática se puede usar como criterio para incluir un dato dentro de la evaluación y rechazar aquéllos que presentan desviaciones notables.
4. ESTIMADOS.- La tendencia sistemática nos permite derivar estimados de las masas desconocidas por medio de una interpolación o a partir de extrapolaciones cercanas.

2.4. Visualizando diferentes sistemáticas: derivadas de las masas atómicas

Resulta sorprendente la continuidad de la superficie de las masas nucleares con respecto a sus derivadas: energías de separación de dos neutrones $S_{2n}(N)$, energías de separación de dos protones $S_{2p}(Z)$, energías de decaimiento alfa $S_{\alpha}(N)$ y energías de decaimiento doble beta $S_{2\beta}(A)$. De hecho el trabajo original de Wapstra [33] se basa en usar esta tendencia sistemática para hacer interpolaciones, pudiendo de esta manera corregir las irregularidades introducidas en la superficie por una medición experimental errónea. Esta propiedad de continuidad es una característica física de fundamental importancia, debido a que la meta de toda fórmula de masas teórica es reproducir dicha superficie junto con sus "defectos localizados en el lugar adecuado", permitiéndonos tanto la interpolación como la extrapolación de las masas nucleares desconocidas [34].

2.4. VISUALIZANDO DIFERENTES SISTEMÁTICAS: DERIVADAS DE LAS MASAS ATÓMICAS

El error en las masas estimadas aumentará con la distancia de extrapolación. No es fácil obtener extrapolaciones confiables partiendo de las superficies de masas, de tal forma que para mejorar su confiabilidad Borcea [34] elaboró una herramienta gráfica interactiva llamada DESINT (dessin interactif, en francés) con el objetivo de poder visualizar simultáneamente diferentes sistemáticas.

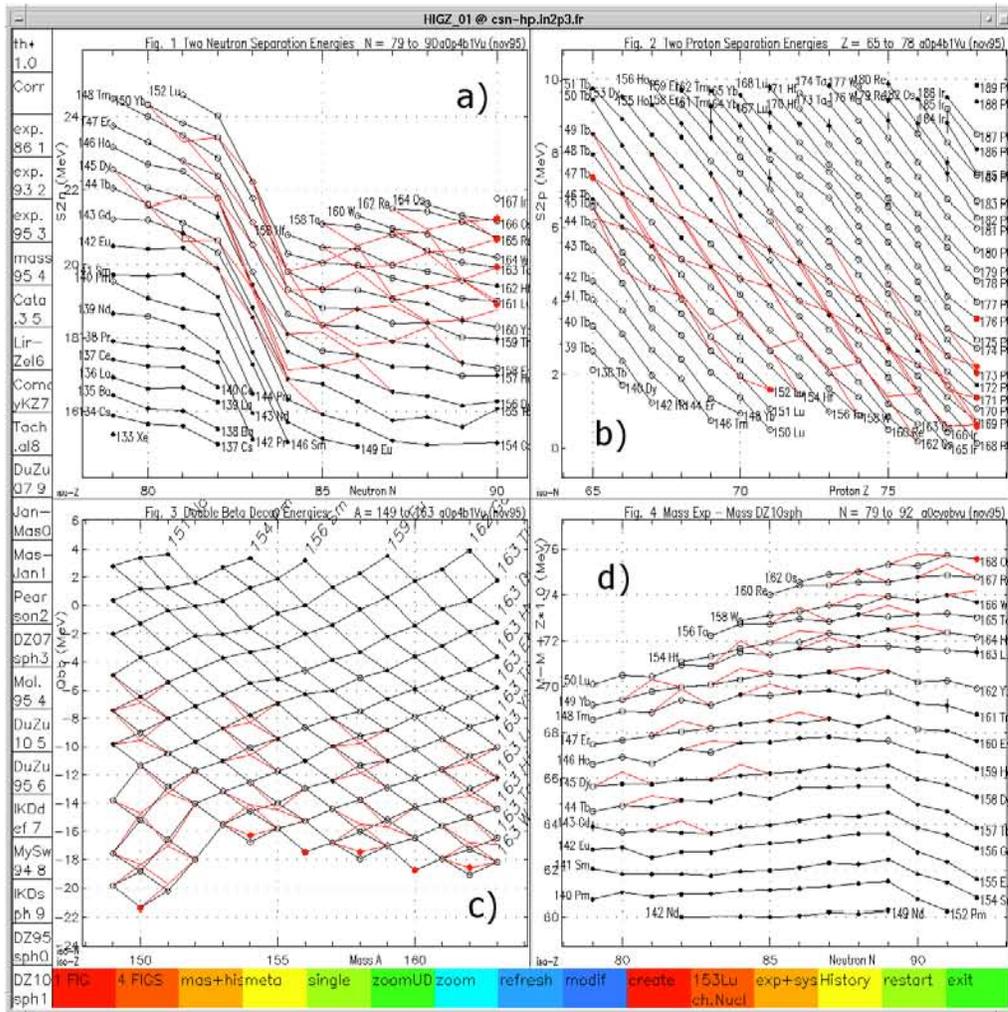


Figura 2.5: Interfase de la herramienta interactiva DESINT [34].

La Figura 2.5 nos muestra la interface de la herramienta interactiva DESINT. Se despliegan cuatro cortes de la superficie de masas alrededor del $^{146}_{64}Gd$. El cuadrante 2.5a despliega las S_{2n} vs N , el cuadrante 2.5b muestra las S_{2z} vs Z ,

2.4. VISUALIZANDO DIFERENTES SISTEMÁTICAS: DERIVADAS DE LAS MASAS ATÓMICAS

el cuadrante 2.5c exhibe las $Q_{2\beta}$ vs A y finalmente el cuadrante 2.5d muestra $M_{exp} - M_{Duflo-Zuker}$ respectivamente. Las líneas negras conectan nucleídos con la misma N , Z , (N y Z) y Z , respectivamente. La capa en $N = 82$ es rápidamente identificada en el primer cuadrante y en la parte baja del tercero. De tal forma que los errores se obtiene manipulando los comandos mostrados en la Figura 2.5 en las cajas que aparecen a la izquierda y en la parte de abajo, es decir, observando qué tanto pueden cambiar las masas estimadas sin que la superficie extrapolada se vea demasiado distorsionada, i.e., la Figura 2.5, nos muestra en líneas rojas las consecuencias de suponer un incremento en la masa de ${}_{64}^{146}Gd$ de 500 keVs. Aún cuando esta receta es inevitablemente subjetiva, ha mostrado ser efectiva con respecto a las nuevas masas medidas [4]. Lunney et al [11] señalan en su artículo de revisión que las sistemáticas de las superficies de las masas atómicas resultan ser el método de extrapolación cercana más exitoso.

Los autores de AME encuentran una utilidad más para su herramienta interactiva, dado que en su caso les permite evaluar los datos de las masas medidas y observar si algún dato reportado es responsable de las irregularidades observadas en el paisaje nuclear. Éste es un criterio que comúnmente emplean para rechazar un dato. Vale la pena observar que en la compilación más reciente AME03 [4] no aparecen 8 núcleos: ${}_{40}^{42}Zr$, ${}_{43}^{46}Tc$, ${}_{44}^{47}Ru$, ${}_{55}^{61}Cs$, ${}_{73}^{88}Ta$, ${}_{56}^{91}Ba$, ${}_{60}^{95}Nd$, ${}_{95}^{142}Am$ que si lo hacen en AME95 [35]; la razón es que el dato reportado se considera inconsistente o fuera de sus márgenes de aceptabilidad, de tal forma que es rechazado. Sería interesante determinar las masas de todos los núclidos desconocidos que se encuentran en el rango de las tecnologías actuales, pero existe la imposibilidad de que AME únicamente puede determinar valores para aquellos núcleos para los que existe al menos una pieza de información experimental disponible; recordemos que la AME es una red coordinada.

Es pertinente agregar que la REGULARIDAD no es la única propiedad utilizada para hacer estimaciones; por el contrario, toda la información experimental es tomada en consideración. Los límites de los métodos basados en la regularidad se manifiestan rápidamente, yendo a números de masa bajos, donde la estructura nuclear aparece y desaparece en rangos muy cortos. Pero eso no es todo; esta herramienta presenta una utilidad más al proporcionar la visualización de varias sistemáticas (particularmente las derivadas de las ma-

2.5. RESTANDO FUNCIONES SIMPLES

sas), permitiéndonos probar diferentes fórmulas de masas e inclusive detectar posibles desviaciones, de tal forma que proporciona sugerencias para mejorar la exactitud de los modelos teóricos en cuestión.

2.5. Restando funciones simples

Otro método para poder visualizar las sistemáticas nucleares, es proponer una función simple de N y Z , no muy diferente de la superficie de masas original, y posteriormente restar dicha función a la superficie de masas atómicas experimentales. La superficie resultante conservará la estructura regular de la primera, pero variará mucho menos rápido, lo cual facilita su observación y escrutinio.

2.5.1. Restando un modelo microscópico

Uno se inclinaría a emplear los resultados de cualquier fórmula microscópica con el mejor ajuste con respecto a los datos experimentales; sin embargo Audi [30] aconseja usar únicamente aquellos modelos que proporcionan la masa de núcleos esféricos. La razón es que los modelos tienen muchos problemas para describir con precisión la localización de las zonas de deformación, de tal forma que si ingenuamente, recurrimos a estos modelos, nuestra nueva superficie mostrará dos dislocaciones para cada transición de fase, dificultándonos la interpretación de la superficie remanente. En el caso de AME03, ellos recurren a los siguientes modelos:

- La nueva corrección semi-empírica de capas al "droplet model" [36].
- La fórmula Microscópica de Duflo-Zuker [23].

2.5.2. Restando una fórmula de gota de líquido

La nueva superficie obtenida varía con más suavidad, sobre todo en las regiones limitadas por los números mágicos, tal y como el estudio detallado de J. Duflo [21] lo sugiere. Los números mágicos son aquellos sitios donde el modelo de la gota líquida subestima la masa atómica del núcleo en cuestión.

Inspirados en el éxito obtenido por Rick Casten para ajustar sistemáticas nucleares en términos de los nucleones de valencia [37], y por Duflo-Zuker [23] al momento de ajustar las masas atómicas usando una fórmula microscópica basada en el modelo de capas [22]; en capítulos posteriores haremos uso de la nueva superficie de masas atómicas obtenida, proponiendo parametrizaciones locales de dicha superficie en términos del número de nucleones de valencia en regiones limitadas por los números mágicos; posteriormente se extenderá dicho estudio de manera global a toda la carta de núcleos medidos, a fin de tomar en consideración las correcciones de capas.

2.6. Extrapolaciones lejanas

Audi y Borcea [34] proponen una función a la que denominan "GEOIDE DE MASAS". Construyen una función de la superficie de masas idealizada, la cual es la mejor función posible que puede restarse a la superficie de masas; el geoide de masas local se construye como una función cuadrática de N y Z en una región limitada por números mágicos tanto para N como para Z , y se le suma la superficie predicha por un modelo teórico. Posteriormente se minimiza la distancia entre la nueva superficie teórica de masas (GEOIDE) y aquella generada con los datos experimentales, para lo cual únicamente se toman en cuenta los núcleos esféricos.

$$\begin{aligned} \text{GEOIDE} &= BE_{exp}(N, Z) - BE_{th}(N, Z) \\ &- \{aN^2 + bZ^2 + cNZ + dN + eZ + f\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

A manera de observación, los aproximadamente 1030 datos que aparecen con el símbolo "#" dentro de las tablas AME03 [4], corresponden a predicciones obtenidas por el análisis de las tendencias sistemáticas, usando la herramienta interactiva "DESINT", de tal forma que el estudio de la superficie de las masas atómicas es una herramienta muy útil.

MODIFICACIÓN A LA FÓRMULA ORIGINAL

3.1. Inconsistencia

La versión original del modelo de la gota de líquido de Von Weizsäcker [1] y Bethe-Bacher [2], presenta una inconsistencia, debido a la ausencia del término correspondiente a la energía de asimetría superficial. Dicho término resulta de utilidad para describir las energías de amarre de aquellos núcleos ligeramente asimétricos (en la región de los núcleos ligeros) con la misma calidad que el resto de los núcleos. Este término aparece en las fórmulas de masas más sofisticadas, i. e. Myers-Swiatecki [38]. Su inclusión permite describir adecuadamente las contribuciones de la energía de asimetría a la energía de amarre total, partiendo de la estructura nuclear.

3.1.1. Contribución superficial al término de asimetría

Tratemos la energía de un núcleo como la de un sistema termodinámico binario formado por N neutrones y Z protones con una superficie, i.e., una interfase entre fases en equilibrio [39]; de tal forma que cuando la energía superficial de un núcleo es afectada por la asimetría de las partículas que forman el sistema, por consistencia termodinámica se requiere que parte de esta asimetría se mueva a la superficie, formándose una especie de corteza asimétrica [19].

3.1. INCONSISTENCIA

El cambio en la energía neta asociado con el número de partículas que forman el sistema esta dado por:

$$dE = \mu_n dN + \mu_z dZ = \mu dA + \mu_a (N - Z), \quad (3.1)$$

donde $\mu = \frac{(\mu_n + \mu_z)}{2}$ representa el potencial químico promedio de los nucleones y $\mu_a = \frac{(\mu_n - \mu_z)}{2}$ es la diferencia entre los potenciales químicos asociados a cada tipo de nucleones. Posteriormente se construye un potencial termodinámico Φ que depende explícitamente de la asimetría ($N - Z$) de las partículas en el sistema así como de su energía neta, es decir,

$$\Phi = \mu_a (N - Z) - E; \quad (3.2)$$

un estudio termodinámico riguroso efectuado por P. Danielewicz (ver Referencia [19]), nos conduce a establecer que el exceso de asimetría en la superficie del sistema binario está directamente relacionado con el potencial termodinámico construido.

Ahora bien, si se toman en consideración cambios en la energía para el interior del núcleo en función de la asimetría, conservando términos de orden más bajo en la asimetría, la energía volumétrica tendrá la siguiente forma:

$$E_v = E_v^0 + a_{vsym} \frac{(N_v - Z_v)^2}{A}, \quad (3.3)$$

donde E_v^0 representa la energía volumétrica para el sistema simétrico ($a_v A$).

Del mismo modo, se puede escribir una expresión para la energía superficial:

$$E_s = E_s^0 + a_{ssym} \frac{(N_s - Z_s)^2}{A^{2/3}}, \quad (3.4)$$

donde E_s^0 representa la energía superficial para el sistema simétrico ($a_s A^{2/3}$).

La minimización de la energía del sistema $E = E_v + E_s$, bajo la restricción de asimetría neta,

$$N - Z = N_v - Z_v + N_s - Z_s, \quad (3.5)$$

nos lleva a la condición de iguales potenciales químicos asimétricos para el interior y la superficie del sistema,

$$0 = \frac{\partial E}{\partial (N_v - Z_v)} - \frac{\partial E}{\partial (N_s - Z_s)} = 2a_{vsym} \frac{N_v - Z_v}{A} - 2a_{ssym} \frac{N_s - Z_s}{A^{2/3}}, \quad (3.6)$$

3.1. INCONSISTENCIA

reescribiendo esto último encontramos:

$$\frac{N_s - Z_s}{N_v - Z_v} = \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}, \quad (3.7)$$

$$\frac{N_s - Z_s}{N - Z} = \frac{\frac{N_s - Z_s}{N_v - Z_v}}{1 + \frac{N_s - Z_s}{N_v - Z_v}} = \frac{1}{1 + \frac{a_{ssym}}{a_{vsym}} A^{1/3}} \quad \text{y} \quad \frac{N_v - Z_v}{N - Z} = \frac{1}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \quad (3.8)$$

La energía neta del sistema se hace igual a:

$$E = E_v + E_s = E_0 + \frac{a_{vsym}}{A} \frac{(N - Z)^2}{\left(1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}\right)^2} + \frac{a_{ssym}}{A^{2/3}} \frac{(N - Z)^2}{\left(1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{1/3}\right)^2} \quad (3.9)$$

Factorizando y definiendo $\gamma = \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}$, el resultado anterior se reduce a:

$$E = E_0 + a_{vsym} \frac{(N - Z)^2}{A} \frac{1}{1 + \gamma} \left\{ \frac{1}{1 + \gamma} + \frac{1}{\frac{1 + \gamma}{\gamma}} \right\} \quad (3.10)$$

Finalmente obtenemos una expresión más sencilla para la energía neta:

$$E = E_0 + \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (3.11)$$

3.1.2. Analogía entre capacitores en paralelo y coeficientes de asimetría

Las dos energías cuadráticas (3.3) y (3.4), tanto la volumétrica como la superficial sujetas a su correspondiente restricción (3.5), nos hacen recordar las clases de mecánica clásica y electrostática, ya que se puede establecer una relación directa a, por ejemplo, un sistema formado por dos resortes conectados en paralelo (cada resorte con su correspondiente constante igual a $K_v = \frac{a_{vsym}}{2A}$ y $K_s = \frac{a_{ssym}}{2a^{2/3}}$ respectivamente), o, mejor aún, a dos capacitores conectados en paralelo con cargas $q_i = N_i - Z_i$ donde $i = v, s$, y capacitancias $C_v = \frac{A}{2a_{vsym}}$ y $C_s = \frac{A^{2/3}}{2a_{ssym}}$, respectivamente, obteniéndose las energías de los capacitores $E_i = E_i^0 + q_i^2 / (2C_i)$.

3.1. INCONSISTENCIA

Es decir, conforme la asimetría se mueve entre los capacitores, la situación de equilibrio es la de una carga en proporción a la capacitancia, obteniéndose

$$\frac{N_s - Z_s}{N_v - Z_v} = \frac{C_s}{C_v} = \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}, \quad (3.12)$$

$$\frac{N_s - Z_s}{N - Z} = \frac{C_s}{C_v + C_s} = \frac{1}{1 + \frac{a_{ssym}}{a_{vsym}} A^{1/3}} \quad \text{y} \quad \frac{N_v - Z_v}{N - Z} = \frac{1}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \quad (3.13)$$

La energía neta del capacitor, en términos de los valores netos de carga y capacitancia es:

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \frac{q^2}{2(C_v + C_s)} = E_0 + \frac{(N - Z)^2}{\frac{A}{a_{vsym}} + \frac{A^{2/3}}{a_{ssym}}} \\ &= E_0 + \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{(N - Z)^2}{A}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente, se puede observar una analogía entre los problemas del capacitor conectado en paralelo y la energía nuclear de asimetría. Para aquel caso en que $a_{ssym} \rightarrow \infty$, se recupera la fórmula original del modelo de la gota de líquido [19].

3.1.3. Expresión de la gota de líquido modificada

La versión final de la fórmula de la gota de líquido modificada por Pawel Danielewicz [19], para tomar en consideración el término de asimetría de manera adecuada, es la siguiente:

$$\begin{aligned} BE(N, Z) &= a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} \\ &\quad - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{(N - Z)^2}{A}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2. Incorporación del término de Wigner

3.2.1. Recurriendo a la teoría de grupos

Es conocida la existencia de un término que representa la tendencia de aquellos núcleos en los cuales $N=Z$ a tener una energía de amarre extra; en la literatura comúnmente se le conoce como la cúspide de Wigner. Existe un buen número de artículos al respecto, de los cuales destacamos los de W. Satula et al [40, 41], Janecke et al [42, 43], y los de P. Van Isacker et al [20, 44, 45, 46]. En las fórmulas semi-empíricas de masas la energía de Wigner, usualmente es descompuesta en dos partes:

$$BE_w(N, Z) = -W(A)|N - Z| - d(A)\delta(N, Z)\pi_{imp-imp}, \quad (3.16)$$

donde $W(A)$ y $d(A)$ son funciones suaves de A . El primer término contribuye para todos los núcleos $N \neq Z$, en tanto que el segundo es relevante en los núcleos impar-impar con $N = Z$ únicamente. El origen de la energía de Wigner (con $W(A)$ positiva) puede ser entendido microscópicamente como un efecto del traslape de las funciones de onda de neutrones y protones, el cual es máximo en núcleos con $N = Z$.

A fin de tomar en consideración el primer término en la ecuación 3.16, recientemente se ha optado por reemplazar el término clásico en el modelo de la gota de líquido, que va como $(N-Z)^2$ por $4T(T+r)$, donde $T = |T_z| = \left|\frac{N-Z}{2}\right|$ es el isospín del estado base nuclear y r es un parámetro. Estamos suponiendo, que las fuerzas entre nucleones son independientes tanto del espín como del isospín, y como resultado de la interacción residual, el estado base tiene una simetría espacial máxima, lo cual es consistente con el principio de exclusión de Pauli. Warner et al [45], concluyen que la energía de correlación en el estado base está relacionada con el valor de expectación del operador cuadrático de Casimir de $SU(4)$, de la siguiente manera:

$$g(\lambda, \mu, \nu) = (N - Z)^2 + 8|N - Z| + 8\delta(N, Z)\pi_{imp-imp} + 6\Delta(N, Z), \quad (3.17)$$

donde las etiquetas λ, μ, ν son funciones de N y Z y $\Delta(N, Z)$ es el término de apareamiento con una convención inusual: 0 en núcleos par-par, 1 en aquellos con masa impar, y 2 en aquellos núcleos impar-impar.

3.2. INCORPORACIÓN DEL TÉRMINO DE WIGNER

Rápidamente podemos identificar el segundo y tercer términos de la ecuación 3.17 con la ecuación 3.16, y nos damos cuenta que son exactamente iguales si $W(A) = d(A) = 8$.

Pero lo que realmente, nos interesa es que los 2 primeros términos de la ecuación 3.17 tienen precisamente el aspecto de la energía de asimetría $4T(T+r)$, con $r=4$; es decir:

$$4T(T+4) = 4(T^2 + 4T) = (N-Z)^2 + 8|N-Z|. \quad (3.18)$$

Si la simetría $SU(4)$ está completamente rota (como resultado de la interacción espín-órbita), pero si se conserva la simetría $SU(2)$, un argumento similar al dado en la ecuación 3.17 nos da una energía de asimetría de la forma $4T(T+1)$.

Resumiendo, la dependencia del término de asimetría que va como $(N-Z)^2$ aparece en una aproximación macroscópica. La teoría de grupos, nos conduce a una dependencia del término de asimetría, asumiendo $T = T_z = \left| \frac{N-Z}{2} \right|$, para el estado base [46]:

- $4T(T+1)$: límite de simetría de isoespín $SU(2)$.
- $4T(T+4)$: límite de supermultiplete $SU(4)$.

Para tomar en consideración el término de Wigner, basta con reemplazar el término común que va como $(N-Z)^2$ con el siguiente término $4T(T+r)$, en donde vamos a identificar r como el término de Wigner (un parámetro libre a ser ajustado). P. Van Isacker y A. E. L. Dieperink, sugieren que el ajuste del parámetro r debe estar en algún lugar entre $r = 1$ y $r = 4$ [46].

Una forma alternativa de obtener este último resultado consiste en proponer una superposición lineal de los operadores cuadráticos de Casimir de $SU(2)$ y $SU(4)$, es decir,

$$\begin{aligned} (N-Z)^2 &\propto \alpha[4T(T+1)] + \beta[4T(T+4)] \\ &\propto 4T[T(\alpha+\beta) + \alpha + 4\beta] \\ &\propto 4T(\alpha+\beta) \left[T + \frac{\alpha+4\beta}{(\alpha+\beta)} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde $\alpha + \beta = 1$ y $r = \frac{\alpha+4\beta}{(\alpha+\beta)}$.

3.2. INCORPORACIÓN DEL TÉRMINO DE WIGNER

3.2.2. Nueva expresión de la gota de líquido modificada

La versión final de la fórmula de la gota de líquido modificada en para tomar en consideración la contribución del término de asimetría superficial de manera adecuada y el término r de Wigner es la siguiente:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A}. \quad (3.20)$$

La inclusión del término de asimetría (discutido en la Sección anterior), se puede hacer por medio de una aproximación para A grandes de la siguiente manera [20]:

$$-\frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{(N-Z)^2}{A} \approx -a_{vsym} \frac{(N-Z)^2}{4A} + a_{ssym} \frac{(N-Z)^2}{4A^{4/3}}. \quad (3.21)$$

Finalmente, incorporando esta última aproximación, al modelo original de la gota de líquido, se obtiene la siguiente expresión:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - a_{vsym} \frac{4T(T+r)}{A} + a_{ssym} \frac{4T(T+r)}{A^{4/3}}. \quad (3.22)$$

4

CORRECCIONES DE CAPAS

4.1. Explorando los patrones remanentes

Ahora es tiempo de explorar las diferencias residuales que se presentan en la Figura 4.1, entre los datos de las masas experimentales tomados de la compilación más reciente de masas nucleares [4] y alguno de los modelos de la gota de líquido modificados en la Sección anterior (véase, por ejemplo la fórmula 3.20).

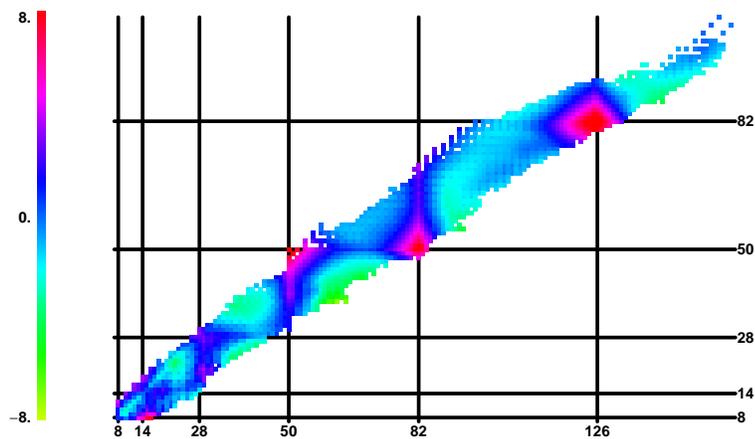


Figura 4.1: Diferencias remanentes en el plano N - Z, para la formula macroscópica de Danielewicz.

La Figura 4.1 nos muestra un patrón regular, en el cual a primera vista reconocemos las dobles cerraduras (de color rojo) que, como anteriormente se indicó, son aquellos núcleos que presentan una estabilidad excepcional, superior a su predicción en el modelo de la gota de líquido. Un análisis más detallado nos indica que estas dobles cerraduras se presentan para aquellos nucleones con $N_c = 14, 28, 50, 82$ y 126 y $Z_c = 14, 28, 50$ y 82 ; podemos ver que estos números están en concordancia con los números mágicos que se presentan en la mayoría de los textos. Así mismo del patrón extraemos un dato valioso, que nos sugiere emplear 14 en lugar de 20 como capa cerrada.

4.2. Parametrizaciones locales

Esta manera novedosa de explorar la carta de los núcleos medidos, nos presenta aún más sorpresas, puesto que las diferencias remanentes mostradas en el patrón, nos llevan a pensar en la posibilidad de implementar una parametrización suave en términos tanto de N y Z (similar al "Geoide de masas", propuesto por Borcea [34]), como de n_ν y n_π ; donde n_ν (n_π) es el número de neutrones (protones) de valencia, partículas o agujeros según el caso. Para comenzar, será conveniente dividir la tabla de núcleos en 8 regiones limitadas por los números mágicos en cuestión (Véase la Figura 4.2).

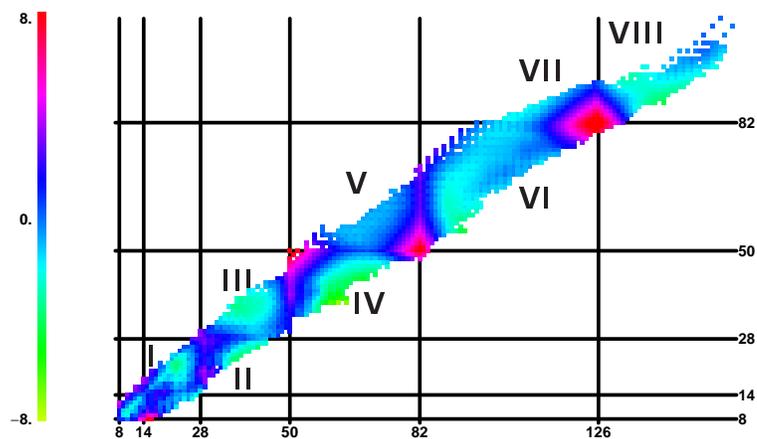


Figura 4.2: Regiones locales de estudio.

4.2. PARAMETRIZACIONES LOCALES

A continuación se procede a implementar y comparar dos parametrizaciones.

1. **FÓRMULA CON 13 PARÁMETROS (TIPO DUFLO-ZUKER).**- Se definen los números de nucleones de valencia tanto para neutrones como para protones; el denominador representa un tipo de re-escalamiento de tal manera que estos parámetros quedan comprendidos entre 0 y 1.

$$n_1 = \frac{N-N_c}{N_{c+1}-N_c} \text{ y } n_2 = \frac{N_{c+1}-N}{N_{c+1}-N_c},$$

$$z_1 = \frac{Z-Z_c}{Z_{c+1}-Z_c} \text{ y } z_2 = \frac{Z_{c+1}-Z}{Z_{c+1}-Z_c}.$$

Fórmula empleada con 13 parámetros:

$$\begin{aligned} BE_{Shell}(n_\nu, n_\pi) = & a_1 + a_2 N + a_3 Z + a_4 n_1 + a_5 n_2 + a_6 z_1 + a_7 z_2 \\ & + a_8 n_1 n_2 + a_9 z_1 z_2 + a_{10} n_1 z_1 + a_{11} n_2 z_2 \\ & + a_{12} n_1 z_2 + a_{13} n_2 z_1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

sin términos cuadráticos en n_i^2 y z_i^2 .

2. **FÓRMULA CON 8 PARÁMETROS (TIPO CASTEN).**- Se definen las medias cerraduras de capa:

$$N_{media} = N_c + \frac{(N_{c+1}-N_c)}{2} \text{ y } Z_{media} = Z_c + \frac{(Z_{c+1}-Z_c)}{2}.$$

Los términos de esta parametrización están expresados en función de:

Número de partículas:

$$N \leq N_{media} \quad n_\nu = (N - N_c) \text{ ó } Z \leq Z_{media} \quad n_\pi = (Z - Z_c).$$

Numero de agujeros:

$$N > N_{media} \quad n_\nu = (N_{c+1} - N) \text{ ó } Z > Z_{media} \quad n_\pi = (Z_{c+1} - Z).$$

Fórmula empleada con 8 parámetros:

$$\begin{aligned} BE_{Shell}(n_\nu, n_\pi) = & b_1 + b_2 N + b_3 Z + c_{1\nu} n_\nu + c_{1\pi} n_\pi \\ & + c_{2\nu} n_\nu^2 + c_{2\pi} n_\pi^2 + c_{\nu\pi} n_\nu n_\pi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se puede observar que los parámetros c_{ij} , dependerán de la región en la que se encuentren los nucleones debido al hecho de que hemos definido una media cerradura.

4.3. Parametrizaciones globales, correcciones de capas: ($n_\nu + n_\pi$)

Recurriendo de nueva cuenta a nuestro patrón (Figura 4.1), observamos que en torno a aquellos sitios donde los núcleos están especialmente ligados aparecen una especie de rombos los cuales se pueden corregir por términos que van como la suma ($n_\nu + n_\pi$). Tal y como P. Van Isacker [20] notó, ésto es idéntico a la forma de contar bosones (nucleones de valencia) adoptada en el IBA-2 [47], con lo cual desde ahora nos referiremos a $\frac{(n_\nu+n_\pi)}{2}$ como F_{max} (en donde F_{max} es el valor máximo $F_{spin} = \frac{(n_\nu-n_\pi)}{2}$).

Vale la pena mencionar que, gracias al estudio de las parametrizaciones locales tipo Casten (ver ec. 4.2), hemos obtenido resultados numericos que nos sugieren que los mejores parametros ajustados satisfacen $c_{1\nu} \approx c_{1\pi}$ y $c_{2\nu} \approx c_{2\pi} \approx \frac{c_{\nu\pi}}{2}$. Lo cuál nos proporciona un fuerte sustento fenomenológico para usar " $F_{max} = \frac{(n_\nu+n_\pi)}{2}$ como variable microscópica". Estos resultados, pueden ser interpretados como las correcciones globales, correspondientes a la contribución isoescalar del monopolos a las energias de amarre, las cuales pueden ser extraídas de un Hamiltoniano microscópico [48].

La idea es hacer correcciones, para tomar en consideración la presencia de las cerraduras de capas, es decir considerar los efectos "microscópicos" sin alterar los coeficientes obtenidos para las versiones modificadas del modelo de la gota de líquido original. De tal manera podemos garantizar la robustez del modelo propuesto y podremos regresar al patrón original siempre que así lo requiramos.

4.3.1. Versión final: Fórmula macroscópica + efectos de capas cerradas

Una simple parametrización de las correcciones de capas puede ser propuesta como una expansión en términos de F_{max} [20]:

$$BE_{Shell}(n_\nu, n_\pi) = -a_f F_{max} + a_{ff} F_{max}^2. \quad (4.3)$$

4.3. PARAMETRIZACIONES GLOBALES, CORRECCIONES DE CAPAS:

$(N_\nu + N_\pi)$

Finalmente, incorporando estas correcciones de capas a las ecuaciones modificadas en el capítulo anterior (ver ecuaciones 3.20 y 3.22), se obtienen 2 nuevas expresiones:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} - a_f F_{max} + a_{ff} F_{max}^2, \quad (4.4)$$

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - a_{vsym} \frac{4T(T+r)}{A} + a_{ssym} \frac{4T(T+r)}{A^{4/3}} - a_f F_{max} + a_{ff} F_{max}^2. \quad (4.5)$$

4.3.2. Orden de magnitud de las correcciones de capas

Antes de proceder a reevaluar los coeficientes, vale la pena tener una idea del comportamiento de los términos propuestos a manera de corrección de capas en la ec. 4.3 de manera individual y de forma combinada. Para tal fin, simplemente debemos tomar la diferencia entre un modelo que incluya el (los) término(s) en cuestión (i.e, ec. 4.4) y un modelo macroscópico (i.e, ec. 3.20); de esta forma el patrón residual, nos permitirá observar el efecto del (los) término(s) en cuestión.

Las Figuras 4.3.a, 4.3.b y 4.4, nos muestran la contribución del término lineal F_{max} , el término cuadrático F_{max}^2 y el efecto de ambos en el plano N - Z para la región de los núcleos medidos.

Como podemos observar, las escalas en que los efectos de cada uno de los términos se hacen visibles (es decir, significativos) son diferentes. El término lineal domina claramente al cuadrático. Para la construcción de estas gráficas debemos contar con modelos lo suficientemente robustos, para pasar de una escala de precisión a otra.

4.3. PARAMETRIZACIONES GLOBALES, CORRECCIONES DE CAPAS:
($N_\nu + N_\pi$)

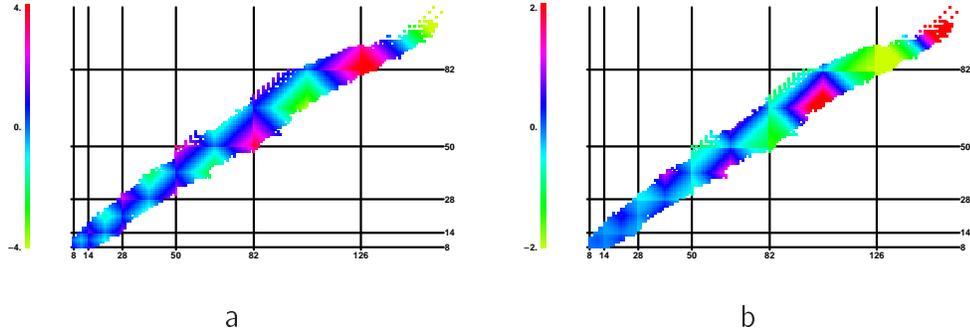


Figura 4.3: Contribución de: (a) F_{max} ; (b) F_{max}^2 .

La Figura 4.4, es un buena carta de presentación, dado que de alguna forma reproduce, buena parte del patrón de los modelos macroscópicos discutidos en la Sección anterior (ver Figura 4.1).

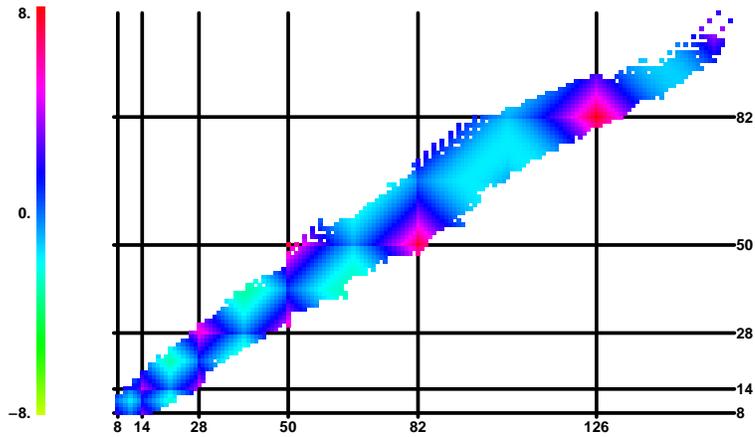


Figura 4.4: Correcciones de capa para el modelo de la gota líquida debidas a los términos $-a_f F_{max} + a_{ff} F_{max}^2$

REEVALUANDO LOS COEFICIENTES

5.1. MINUIT - FCN - análisis de errores

Para conseguir el ajuste óptimo de los coeficientes de la presente investigación recurrimos al programa MINUIT, cuya función es encontrar el valor mínimo de una función multiparamétrica y analizar la forma de la función alrededor del mínimo. Su aplicación principal es para el análisis estadístico, trabajando con funciones chi-cuadrada o del tipo logarítmico, para calcular el valor de los parámetros en su mejor ajuste, así como sus correspondientes incertidumbres, incluyendo las correlaciones entre los parámetros.

En pocas palabras MINUIT está diseñado para aquellos problemas difíciles de resolver, así como aquéllos que requieren un estudio detallado a fin de encontrar la solución correcta; generalmente se utiliza para encontrar los "mejores valores" de un sistema de parámetros, donde dichos parámetros se definen "lo mejor posible" en tanto reduzcan al mínimo una función dada, que llamaremos FCN. La anchura del mínimo de la función, o, más generalmente, la forma de la función en alguna vecindad del mínimo da la información sobre la incertidumbre en los mejores valores del parámetro, llamados a menudo "los errores del parámetro". Una característica importante de MINUIT es que ofrece varias herramientas para analizar los errores de los parámetros [49].

5.1.1. Masas nucleares a ajustar

El conjunto de datos a ajustar es el contenido en la compilación más reciente de la evaluación de masas atómicas AME03 de Audi-Wapstra [4]; dicho conjunto incluye 2149 núcleos medidos. Las masas tabuladas en dicha evaluación son atómicas y no nucleares; la relación entre las dos cantidades está dada por

$$\begin{aligned} M^{AME}(N, Z) &\equiv M_{atom}(N, Z) \\ &= M(N, Z) + Zm_e - B_{el}(Z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $M_{atom}(N, Z)$ es la masa atómica, m_e es la masa del electrón y $B_{el}(Z)$ es la energía de amarre total de los electrones.

Tal y como Lunney et al [11] nos hacen notar, no sólo las masas sino también todas las diferencias de energías tabuladas en la compilación AME03 [4] están expresadas en términos de masas atómicas, de tal forma que tendremos que establecer una relación para obtener sus análogos nucleares.

La relación entre las energías de amarre atómicas $BE_{AME}^{EXP}(N, Z)$ y las nucleares $BE_{EXP}(N, Z)$, está dada por

$$\begin{aligned} BE_{AME}^{EXP}(N, Z) &= [NM_n + ZM_H - M_{atom}(N, Z)]c^2 \\ &= BE_{EXP}(N, Z) - Z[B_{el}(Z = 1)]m_e \\ &\quad + B_{el}(Z), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde M_H es la masa del átomo de hidrógeno. La mejor parametrización para tomar en consideración la energía de amarre total de los electrones es

$$B_{el}(Z) = 1.44381 \times 10^{-5} Z^{2.39} + 1.55468 \times 10^{-12} Z^{5.35} \text{ MeV}. \quad (5.3)$$

Dicha parametrización tiene un RMS de alrededor de 150 eV[11].

Finalmente la energía de amarre nuclear es

$$\begin{aligned} BE_{EXP}(N, Z) &= BE_{AME}^{EXP}(N, Z) \\ &\quad + Z[B_{el}(Z = 1)]m_e - 1.44381 \times 10^{-5} Z^{2.39} \\ &\quad - 1.55468 \times 10^{-12} Z^{5.35}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.1. MINUIT - FCN - ANÁLISIS DE ERRORES

El promedio es un término que define el valor característico de un conjunto de datos. En nuestro caso, tal conjunto de datos está representado por las diferencias entre los valores experimentales y la fórmula de la gota de líquido ajustada. Una condición necesaria para que un ajuste sea aceptable es que el promedio de la diferencias sea muy cercano a cero. Esta cantidad está dada por

$$PROMEDIO = \frac{\sum \{BE_{EXP}(N, Z) - BE_{TEO}(N, Z)\}}{N^{AME}}. \quad (5.5)$$

Por otro lado, a lo largo de la presente investigación, se empleó el RMS como criterio para juzgar la calidad de nuestros ajustes:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum \{BE_{EXP}(N, Z) - BE_{TEO}(N, Z)\}^2}{N^{AME}}}, \quad (5.6)$$

en donde $BE_{TEO}(N, Z)$ denota las energías de amarre nucleares calculadas con el modelo teórico en consideración, y N^{AME} es el número total de núcleos que aparecen en la compilación.

5.1.2. Procedimiento para el ajuste de los coeficientes

La estrategia a seguir es la siguiente:

1. Reevaluación de los coeficientes del modelo original de la gota de líquido.
2. Estudio de estabilidad de los coeficientes obtenidos.
3. Ajuste de los coeficientes para los modelos macroscópicos.
 - Consideración adecuada del término de asimetría.
 - Introducción del término r de Wigner.
4. Ajuste de los coeficientes para los modelos macroscópicos tipo ILDM.
5. Comparación de los modelos macroscópicos.
6. Ajuste de los coeficientes para los modelos microscópicos.
7. Comparación de los modelos microscópicos.

5.2. Reevaluación de los coeficientes del modelo original LDM

Antes que nada, se procedió a reevaluar los coeficientes de la versión original de la gota de líquido (ver fórmula 1.2), para el conjunto de datos utilizado [4]. A partir de este momento nos referiremos a este modelo simplemente como LDM. La Tabla 5.1 nos muestra los valores obtenidos

GOTA ORIGINAL	
COEFICIENTE	AJUSTE
ac	15.6709775
as	17.7011366
ac	0.712036752
aa	23.0771019
ap	12.7352571
RMS	2.94063318
PROMEDIO	-0.0401181866

Tabla 5.1: Coeficientes reevaluados para el modelo original de la gota de líquido. Los valores están en MeV.

5.2.1. Susceptibilidad entre los coeficientes obtenidos

Analizar la susceptibilidad de cada uno de los coeficientes ante ligeras desviaciones es de suma importancia, ya que al final de dicho estudio tendremos una idea de qué tanto pueden variar sin modificar el ajuste. Para tal fin, antes de proceder a la introducción de términos más sofisticados se realizó un estudio, el cual consistió en establecer hasta qué cifra significativa se pueden truncar cada uno de los coeficientes anteriormente obtenidos sin afectar el ajuste, y por otro lado checar cómo afectan ligeras variaciones de los mismos al ajuste global.

Se estableció que los coeficientes se pueden truncar en 5 cifras significativas sin afectar el ajuste. Tal y como era de esperarse los términos más susceptibles y que además poseen un mayor peso específico dentro del ajuste global son el coeficiente correspondiente a los términos volumétrico (a_v) y superficial (a_s);

5.2. REEVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DEL MODELO ORIGINAL LDM

los términos Coulombiano (a_c) y de apareamiento no son tan susceptibles, pero por convención se han truncado con el mismo número de cifras significativas.

La Tabla 5.2, nos muestra los coeficientes reevaluados para el modelo de la gota a utilizarse como valores iniciales en los subsecuentes ajustes. Obsérvese que se han truncado en 5 cifras significativas.

COEFICIENTE	AJUSTE
av	15.671
as	17.701
ac	0.7120
aa	23.077
ap	12.735

Tabla 5.2: Valores iniciales de los coeficientes de la gota de líquido.

La Figura 5.1, nos muestra el gráfico en 2-D de las diferencias remanentes entre las energías de amarre experimentales, tomadas de la compilación más reciente, y las energías de amarre calculadas usando el modelo original de la gota de líquido; el código de colores es usado para facilitar la interpretación de los gráficos..

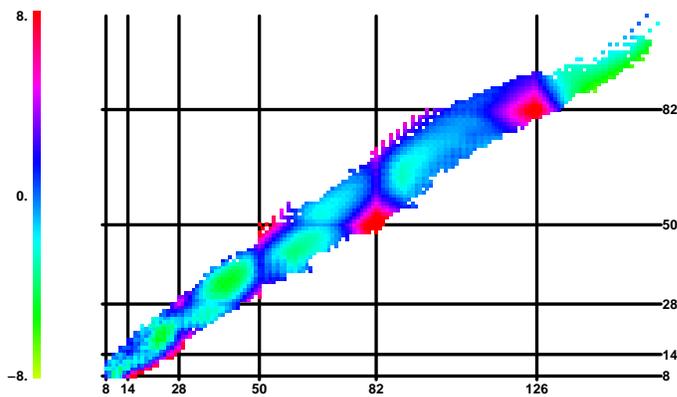


Figura 5.1: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula original de la gota de líquido (RMS=2.9406 MeV).

5.3. Ajuste de los coeficientes para los modelos macroscópicos

A fin de comparar los modelos macroscópicos propuestos, vamos a considerar por el momento sólo el ajuste al término de asimetría de la fórmula original; posteriormente se introducirá el término de Wigner, y finalmente se analizarán fórmulas tipo ILDM.

5.3.1. Consideración de los términos de asimetría en el modelo de la gota de líquido

Para este propósito vamos a hacer $r=0$ en las versiones modificadas de la fórmula de gota en el Capítulo 3 (ver fórmulas 3.20 y 3.22). Recordemos que se partió de los valores iniciales para los coeficientes indicados en la Tabla 5.2. Para el caso del valor inicial de los coeficientes de asimetría, se recurrió a los valores tabulados en los correspondientes artículos, en donde se introducen las modificaciones al modelo de la gota original.

Recurrimos a la Referencia [19], para el modelo que toma en consideración el término de asimetría de manera adecuada (ver fórmula 3.20). No se tomó en cuenta la difusividad de la superficie incluida en el modelo original, con lo cual se usaron como valores iniciales $a_{vsym} = 32.666$ y $a_{ssym} = 13.611$, para proceder a reevaluar dichos coeficientes. A partir de este momento nos referiremos a este modelo simplemente como LDM1a; el número se irá modificando conforme se vayan agregando términos más sofisticados.

Por otra parte, recurrimos a la Referencia [20], para el modelo que toma en consideración el término de asimetría de manera aproximada, y además incluye el término de Wigner (ver fórmula 3.22). Procedimos a reevaluar estos coeficientes, usando $a_{vsym} = 26.500$ y $a_{ssym} = 19.000$ como valores iniciales para las correcciones a los términos de asimetría. A partir de este momento nos referiremos a este modelo simplemente como LDM1b.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

5.3.2. Incluir de forma adecuada los términos de asimetría es un problema difícil

El manual de MINUIT [49], nos indica que el efecto de correlaciones en los errores individuales de cada uno de los coeficientes se puede considerar como sigue: cuando se fija el valor del coeficiente X, MINUIT invierte la matriz del error, quita la fila y la columna que corresponden al coeficiente X, y reinvierte el resultado.

El efecto sobre los errores de los otros parámetros en general será hacerlos más pequeños, puesto que el componente debido a la incertidumbre en el parámetro X ahora se ha removido. En el límite en que un coeficiente dado éste sin correlación con el coeficiente X, su error no cambiará cuando el coeficiente X este fijo. Sin embargo, el procedimiento no es reversible, puesto que MINUIT se olvida de la matriz original de error; así que si el coeficiente X se libera, la matriz del error se considera como desconocida y tiene que ser recalculada.

Los coeficientes de correlación entre cada uno de los coeficientes se obtuvieron usando la función CORREL de MINUIT.

Las Tablas 5.3 y 5.4 nos muestran las coeficientes de correlación con respecto a los ajustes correspondientes.

COEFICIENTES DE CORRELACIÓN		
PARÁMETRO	avsym	assym
av	0.190	0.061
as	0.352	0.113
ac	0.033	0.287
avsym	1	0.955
assym	0.961	1
ap	0.011	0.002

Tabla 5.3: Coeficientes de correlación para la consideración adecuada del término de asimetría en el modelo LDM1a ($r=0$).

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

COEFICIENTES DE CORRELACIÓN		
PARÁMETRO	avsym	assym
av	0.414	0.149
as	0.539	0.295
ac	0.179	0.088
avsym	1	0.951
assym	0.951	1
ap	0.018	0.004

Tabla 5.4: Coeficientes de correlación para el modelo LDM1b ($r=0$).

Los términos de asimetría a_{vsym} y a_{ssym} están altamente correlacionados entre sí, pero no lo están con el resto de los coeficientes, tal y como lo muestran las Tablas 5.3 y 5.4; de tal forma que en efecto el problema es sumamente complicado, ya que una pequeña variación sobre alguno de los términos de asimetría se ve manifestada inmediatamente en el otro término de asimetría [20, 46]. Por lo tanto, existe la posibilidad de tener diferentes familias de coeficientes que ajusten el mismo conjunto de datos. Afortunadamente MINUIT nos permite visualizar los mínimos y asegurarnos de que los coeficientes obtenidos se encuentran efectivamente dentro de un mínimo global.

La Tabla 5.5 nos ilustra los resultados obtenidos al implementar la estrategia adecuada en MINUIT.

GOTAS MACROSCÓPICAS		
COEFICIENTE	LDM1a	LDM1b
av	15.714	15.740
as	18.078	18.143
ac	0.7070	0.7093
avsym	27.609	26.579
assym	25.145	19.129
ap	12.797	12.805
RMS	2.6921	2.7037
PROMEDIO	-0.0359	-0.0161

Tabla 5.5: Comparación entre dos modelos macroscópicos que incluyen una modificación al término de asimetría del modelo de la gota de líquido.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

Observaciones

El ajuste de las energías de amarre para ambos modelos es alrededor de un $RMS = 2.7$ MeV y resulta ligeramente mejor el modelo de LDM1a. La introducción de la contribución superficial al término de asimetría de la energía de amarre mejora los ajustes alrededor de unos 250 keV para ambos modelos con respecto al modelo original de la gota de líquido. Por otra parte, existe una diferencia de alrededor de 6 MeV entre los coeficientes a_{ssym} correspondientes a la contribución superficial a la energía de asimetría para cada uno de los casos estudiados (ver Tabla 5.5).

5.3.3. Incorporación del término r de Wigner

El siguiente paso es comparar los modelos macroscópicos propuestos (ver fórmulas 3.20 y 3.22) con respecto a la incorporación del término de Wigner, para ver cómo se comportan. De tal forma que liberamos r en ambas fórmulas.

Resultados para la fórmula LDM2a

La Tabla 5.6, nos muestra los coeficientes de correlación correspondientes a la introducción del término r de Wigner en la formula LDM2a. A primera vista notamos que el coeficiente correspondiente al término r de Wigner se encuentra altamente correlacionado con los coeficientes de la energía de asimetría tanto el volumétrico como el superficial.

COEFICIENTES DE CORRELACIÓN	
PARÁMETRO	r
av	0.410
as	0.502
ac	0.393
avsym	0.850
assym	0.902
ap	0.023
r	1

Tabla 5.6: Coeficientes de correlación, para la incorporación del término r de Wigner en el modelo LDM2a.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

La Tabla 5.7 nos muestra los resultados correspondientes a estudios efectuados sobre la fórmula LDM2a; se listan únicamente aquellos términos que presentan cierta susceptibilidad ante la introducción del término r de Wigner, así como el RMS y promedio de sus ajustes. En la segunda columna aparecen los resultados del ajuste al liberar el término r de Wigner; en la tercer columna nos restringimos a $r=1$ (límite de isoespín); en la cuarta columna fijamos $r=4$ (límite de supermultiplete); posteriormente en las columnas 5 y 6 fijamos los coeficientes correspondientes para las contribuciones a la energía de asimetría propuestas por Danielewicz [19] y por Dieperink [46], y determinamos a qué valor del coeficiente r de Wigner corresponden.

GOTA LDM2a					
COEFICIENTE	LIBRE	ISOESPÍN	SUPERMULT	DANI	DIEP
avsym	45.507	33.138	87.825	32.666	34.300
assym	6.9071	11.594	4.3814	13.611	11.433
r	2.2437	1.0000	4.0000	0.6600	0.9784
RMS	2.4007	2.4763	2.4889	2.6052	2.5155
PROMEDIO	0.0223	-0.0026	0.0198	0.0491	0.0336

Tabla 5.7: Estudio en la fórmula LDM2a para los términos más susceptibles ante la introducción del término de Wigner.

El coeficiente obtenido para el término de Wigner es $r = 2.2437$ y se encuentra entre los límites establecidos en la Sección 3.2.1. Existe una gran diferencia entre los valores de los coeficientes correspondientes a las energías de asimetría para el límite de supermultiplete en comparación con los propuestos por Danielewicz y Dieperink.

Los valores reportados por Danielewicz y Dieperink sugieren un valor de $r \approx 1$, correspondiente al límite de simetría de isoespín. En cuanto a los coeficientes de asimetría obtenidos en la presente investigación, la contribución volumétrica (avsym) es mayor a la reportada y la parte superficial (assym) resulta menor que la reportada.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

Resultados para la fórmula LDM2b

La Tabla 5.8 nos muestra los coeficientes de correlación correspondientes a la introducción del término r de Wigner en la formula LDM2b.

COEFICIENTES DE CORRELACIÓN	
PARÁMETRO	r
av	0.578
as	0.429
ac	0.600
avsym	0.782
assym	0.900
ap	0.032
r	1

Tabla 5.8: Coeficientes de correlación para la incorporación del término r de Wigner en el modelo LDM2b.

Al igual que en La Tabla 5.6 notamos que el coeficiente correspondiente al término r de Wigner se encuentra altamente correlacionado con los coeficientes de la energía de asimetría; en este caso también se presentan correlaciones elevadas con los términos de Coulomb y de volumen.

La Tabla 5.9 nos muestra los resultados correspondientes a estudios realizados sobre la fórmula LDM2b; se listan únicamente aquellos términos que presentan cierta susceptibilidad ante la introducción del término r de Wigner, así como el RMS y promedio de sus ajustes. En la segunda columna aparecen los resultados del ajuste al liberar el término " r " de Wigner, en la tercer columna nos restringimos a $r=1$ (límite de isoespín); en la cuarta columna fijamos $r=4$ (límite de supermultiplete); finalmente en la quinta columna fijamos $r=2.5$ como es propuesto por Van Isacker [20], y con esta información determinamos los coeficientes correspondientes a las contribuciones volumétricas y superficiales a los términos de asimetría.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

GOTA LDM2b				
COEFICIENTE	LIBRE	ISOESPÍN	SUPERMILT	PIET
avsym	31.780	28.798	33.179	31.355
assym	59.197	36.591	69.626	56.355
r	2.8056	1.0000	4.0000	2.5000
RMS	2.3919	2.4988	2.4298	2.3944
PROMEDIO	-0.0163	-0.0057	0.0051	0.0044

Tabla 5.9: Estudio en la fórmula LDM2b para los términos más susceptibles ante la introducción del término r de Wigner.

El coeficiente obtenido para el término de Wigner es $r = 2.8056$, obteniéndose un RMS ligeramente mejor que al usar $r = 2.5$ (como se sugiere en [20]). Los coeficientes de asimetría para esta parametrización LDM2b toman sus valores más pequeños en el límite de isoespín para $r = 1$. El coeficiente correspondiente a la contribución volumétrica a la energía de asimetría no varía tan marcadamente como lo hace su contraparte correspondiente a la contribución superficial, concluyéndose que este término es el más susceptible de todos ante la introducción del término r de Wigner en la formula LDM2b.

Comparación de resultados para los modelos LDM2a y LDM2b, en cuanto a la incorporación del término "r" de Wigner

Una rápida inspección la Tabla 5.10 nos revela que las diferencias entre algunos de los coeficientes son pequeñas, pero no imperceptibles. En particular, si consideramos los coeficientes para los términos correspondientes a las contribuciones volumétrica y superficial a la energía de asimetría y el término " r " de Wigner, cabe destacar que a_{ssym} difiere en un orden de magnitud entre un modelo y otro; por otra parte r varía de forma considerable entre ambos modelos (alrededor de una cuarta parte); sin embargo debemos ser precavidos al argumentar que debido a sus diferencias dichos términos contribuyen de una manera más significativa al ajuste. Anteriormente, indicamos un método para establecer los pesos específicos de cada uno de los coeficientes al ajuste global.

La incorporación del término r de Wigner ha sido ampliamente estudiada, llegándose a la conclusión de que hay una incertidumbre considerable en el valor que deba ser adoptado para la energía de la simetría en la materia nu-

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

GOTAS MACROSCÓPICAS		
COEFICIENTE	LDM2a	LDM2b
av	15.454	15.812
as	17.053	18.047
ac	0.6891	0.7152
avsym	44.507	37.78
assym	6.9071	59.197
ap	12.444	12.412
r	2.2437	2.8056
RMS	2.4007	2.3919
PROMEDIO	0.0223	-0.0163

Tabla 5.10: Comparación entre dos modelos macroscópicos que incluyen una modificación al término de asimetría y un término r de Wigner.

clear, debido a la combinación perversa de un parámetro " r " de Wigner poco conocido y la existencia de una fuerte correlación entre los coeficientes de asimetría de volumen y de superficie [20, 44, 45, 46].

Las Figuras 5.2 y 5.3, nos muestran el gráfico en 2-D de las diferencias remanentes entre las energías de amarre experimentales, tomadas de la compilación más reciente, y las energías de amarre calculadas usando un modelo macroscópico con correcciones a los términos de asimetría y que además incluye un término r de Wigner; el código de colores es usado para facilitar la interpretación de los gráficos.

A primera vista, podemos observar en ambas Figuras un patrón claramente reconocible en código de colores, el cual nos ilustra las desviaciones de los datos experimentales con respecto a cada uno de los dos modelos discutidos con anterioridad; tal y como era de esperarse estas desviaciones se acentúan más en los números mágicos, que son los sitios donde los modelos macroscópicos como el de la gota fallan al calcular las energías de amarre. En pocas palabras, la introducción del término " r " de Wigner y la corrección debida a la contribución superficial del coeficiente de asimetría, ayudan de manera significativa al ajuste en ambos modelos macroscópicos, reduciendo el RMS de la gota original LDM en al menos 550 keV.

5.3. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES PARA LOS MODELOS MACROSCÓPICOS

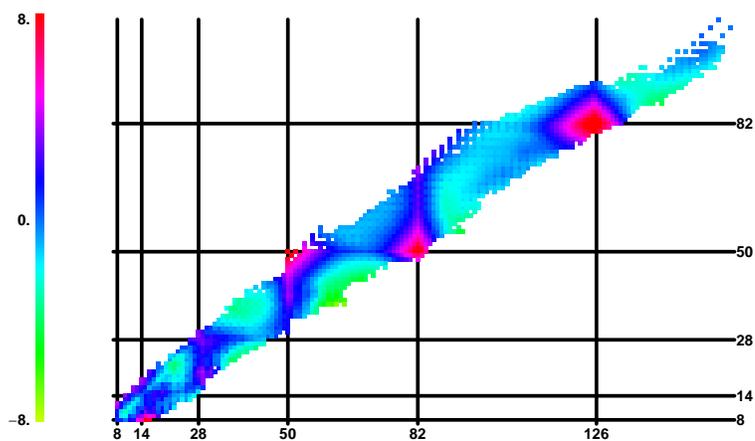


Figura 5.2: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica LDM2a (RMS=2.4007 MeV.)

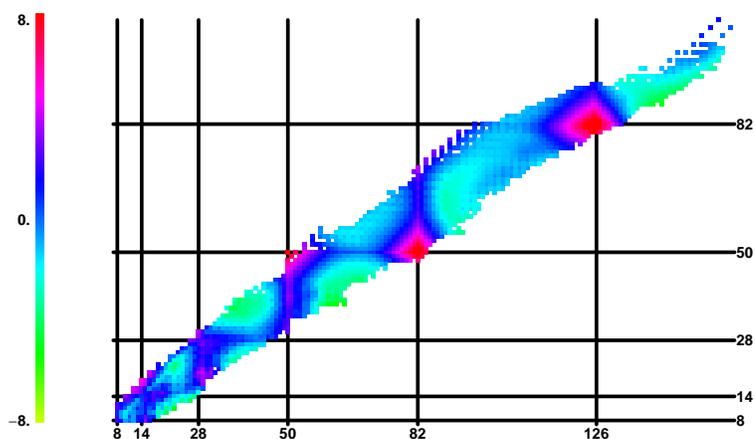


Figura 5.3: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica LDM2b (RMS= 2.3919 MeV.)

5.4. AJUSTE DE LAS FÓRMULAS TIPO ILDM

5.4. Ajuste de las fórmulas tipo ILDM

Finalmente, a manera de comparación, vamos a proceder a ajustar los siguientes modelos, mencionados con anterioridad en el Capítulo 1:

- Modelo mejorado de la gota de líquido (ver fórmula 1.19). A partir de este momento, nos referiremos a este modelo como ILDM1.
- Modificación al modelo mejorado de la gota de líquido (ver fórmula 1.20). A partir de este momento, nos referiremos a este modelo como ILDM2.
- Formula macroscópica de Royer y Gautier (ver fórmula 1.21). A partir de este momento, nos referiremos a este modelo como ILDM3.

La Tabla 5.11 y las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6, nos muestran los resultados del ajuste de modelos macroscópicos tipo ILDM.

FÓRMULAS DE MASAS, DEL TIPO ILDM			
COEFICIENTE	ILDM1	ILDM2	ILDM3
av	15.598	15.612	15.708
kav	27.477	26.166	26.327
as	19.244	19.054	18.734
kas	33.115	31.935	31.398
ac	0.7269	0.7265	0.7176
ap	11.477	11.68	12.059
const	0	0	6.8738
ak	0	0	0.9695
cd	2.431	2.1865	1.2625
W	0	0	55.635
RMS	2.4776	2.4595	2.3774
PROMEDIO	0.0931	0.0313	-0.0062

Tabla 5.11: Coeficientes para los modelos macroscópicos tipo ILDM

Antes que nada, observamos una cierta tendencia de los coeficientes a_s y a_c a incrementar su valor en todos los modelos macroscópicos tipo ILDM, comparados con sus valores originales en el LDM. No se observa ninguna disminución significativa en el RMS conforme se van introduciendo más términos.

5.4. AJUSTE DE LAS FÓRMULAS TIPO ILDM

Las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6, nos despliegan de una forma clara la presencia de las dobles cerraduras de capas. Estas dobles cerraduras se presentan para aquellos nucleones con N o Z iguales a 14, 28, 50, 82 y 126. El patrón exhibido por estas Figuras es muy similar a los patrones anteriormente obtenidos por las fórmulas etiquetadas con LDM2a y LDM2b.

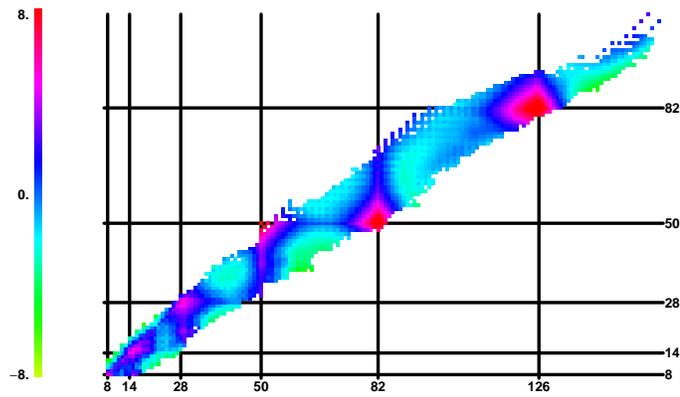


Figura 5.4: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM1 (RMS=2.4776 MeV).

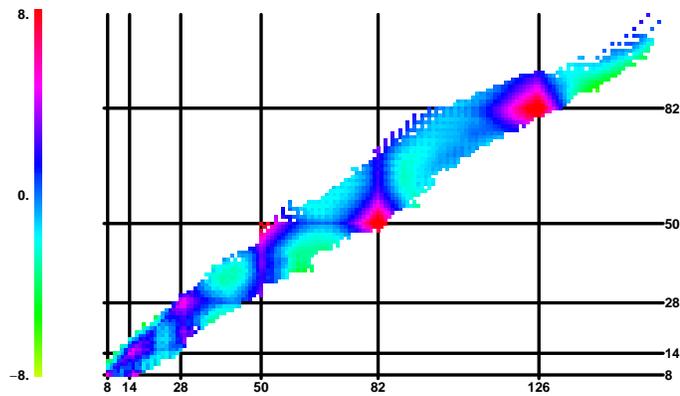


Figura 5.5: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM2 (RMS=2.4595 MeV).

5.4. AJUSTE DE LAS FÓRMULAS TIPO ILDM

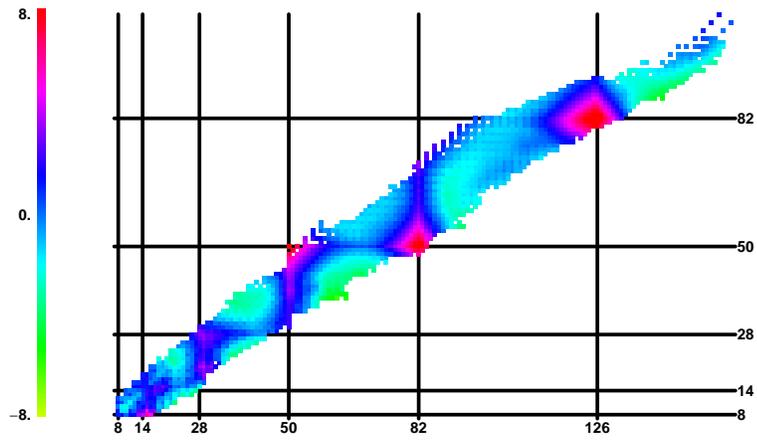


Figura 5.6: Diferencias remanentes en el plano N - Z para la fórmula macroscópica ILDM3 (RMS=2.3774 MeV).

**5.5. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES CORRESPONDIENTES A LAS
PARAMETRIZACIONES LOCALES**

5.5. Ajuste de los coeficientes correspondientes a las parametrizaciones locales

La estrategia consistió en fijar los coeficientes del modelo macroscópico LDM2a obtenido en la Sección 5.3. Posteriormente se minimiza cada una de las 8 superficies con las parametrizaciones propuestas en la Sección 4.2 (ver fórmulas 4.1 y 4.2). Los resultados obtenidos para el modelo LDM2b no se muestran debido a que exhiben el mismo comportamiento. A continuación se presentan los resultados correspondientes al estudio local de las superficies de masas nucleares (el valor de cada parámetro depende de la región en cuestión):

PARAMETRIZACIONES LOCALES		
RMS (MeV)		
REGIÓN	FÓRMULA	
	8 PARÁMETROS	13 PARÁMETROS
I	1.07	1.09
II	0.71	0.94
III	0.45	0.45
IV	0.48	0.50
V	0.25	0.41
VI	0.57	1.06
VII	0.26	0.33
VIII	1.08	1.22

Tabla 5.12: Comparación entre parametrizaciones locales

Las Figuras 5.7 y 5.8 nos muestran una comparación entre la superficie original y aquellas obtenidas con cada una de las parametrizaciones propuestas para una región de estudio específica, en este caso la región III. Se puede observar que se ha reproducido de una manera aceptable la superficie de las masas nucleares; sin embargo, al observar en una escala más amplia el patrón de las diferencias residuales (ver Figura 5.9) es notable que a fin de continuar mejorando el ajuste, debemos introducir términos de orden cúbico, aumentándose considerablemente el número de términos en cada una de las parametrizaciones. Por otra parte, las fórmulas con 8 parámetros del tipo Casten resultan una mejor herramienta para el ajuste de las masas nucleares en todas las regiones de estudio a lo largo de la carta de núcleos medidos.

5.5. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES CORRESPONDIENTES A LAS PARAMETRIZACIONES LOCALES

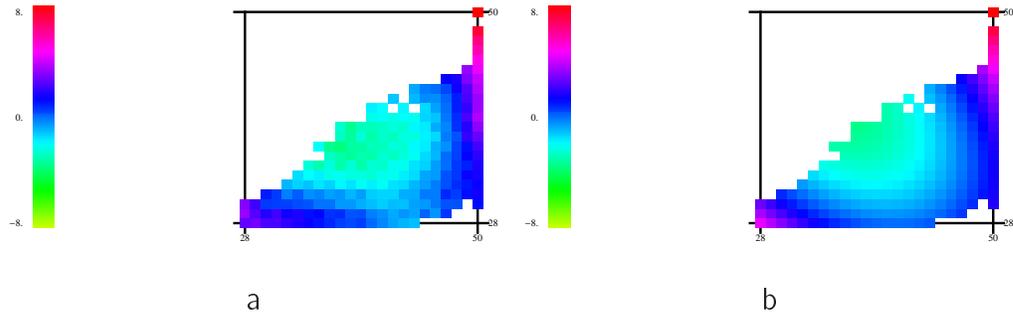


Figura 5.7: Comparación de las nuevas superficies de masas nucleares (región III): (a) original; (b) parametrización tipo Duflo-Zuker (RMS=0.45 MeV).

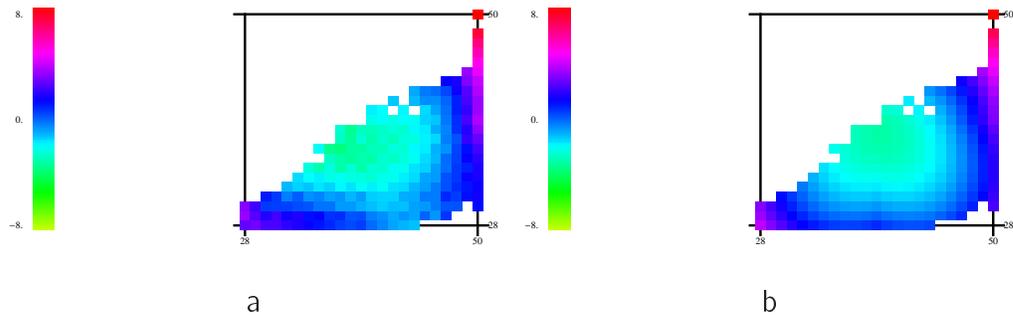


Figura 5.8: Comparación de las nuevas superficies de masas nucleares (región III): (a) original; (b) parametrización tipo Rick Casten (RMS=0.45 MeV).

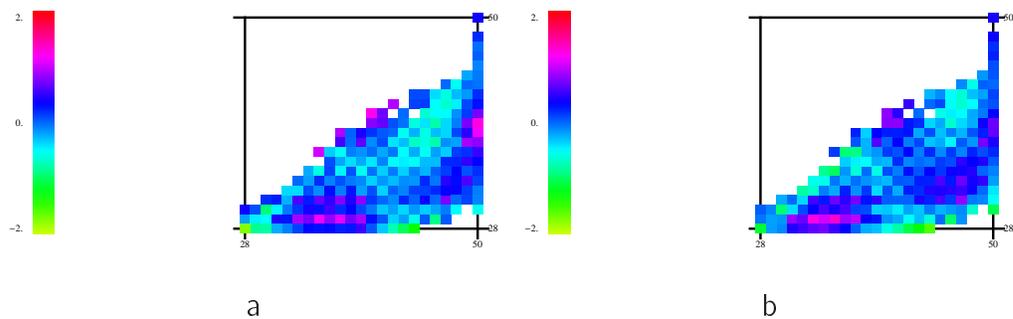


Figura 5.9: Diferencias remanentes (región III): (a) Duflo-Zuker; (b) Casten.

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

Aún cuando se han conseguido ajustes significativos, abandonaremos esta aproximación debido a que no hemos podido reproducir adecuadamente cada una de las 8 regiones usando el menor número de términos; sin embargo, vale la pena mencionar que gracias a este estudio, se pudieron definir las combinaciones de términos adecuados del tipo Casten (fórmula con 8 parámetros) capaces de reproducir el comportamiento promedio del patrón original, e implementar parametrizaciones identificadas anteriormente como lineales y cuadráticas en F_{max} . La propuesta es sustituir el estudio local por un estudio global de la superficie de masas nucleares a fin de introducir correcciones de capas.

5.6. Ajuste de los coeficientes de la versión Microscópica de la gota

Estrategia

La estrategia consistió en fijar los coeficientes de los modelos macroscópicos obtenidos en la Sección anterior (Modelos LDM2a y LDM2b), e introducir los dos coeficientes que incluyen las correcciones por efectos de capas (ver fórmula 4.3).

5.6.1. Resultados preliminares: necesidad de la introducción del centroide

Aún cuando resulta simple el modo de proceder, al momento de la minimización nos topamos con ciertos inconvenientes, i.e., el hecho de que los ajustes promedian en 7 MeV, es ya por sí mismo preocupante, puesto a que aunque los ajustes lucen bastante bien, sus centroides están de alguna forma desplazados hacia arriba.

La idea es restar los centroides de $\frac{(n_\nu + n_\pi)}{2}$ y $\left[\frac{(n_\nu + n_\pi)}{2}\right]^2$; en lo que sigue se indica el modo, en el que se procedió [50]:

Para comenzar, conviene definir los números mágicos correspondientes a N (número de neutrones) como

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

$$N_c = 8, 14, 28, 50, 82, 126, 184, 258;$$

también resultará necesario definir la media cerradura de capa:

$$N_{med} = 11, 21, 39, 66, 104, 155, 221,$$

y con números equivalentes para Z (protones).

Definamos los nucleones de valencia n_ν y n_π de la siguiente manera: para $N < N_{med}$ tenemos partículas, de tal forma que:

$$n_\nu = N - N_c, \quad (5.7)$$

y para $N > N_{med}$ se tienen agujeros:

$$n_\nu = N_{c+1} - N; \quad (5.8)$$

y análogamente para el caso de protones.

El centroide de F_{max} no es otra cosa que su promedio, de tal forma que tendremos que introducir un $FMAX$:

$$FMAX = \frac{n_\nu - \langle n_\nu \rangle + n_\pi - \langle n_\pi \rangle}{2}. \quad (5.9)$$

Introduzcamos la semidegeneración entre cada capa dada que nos será de utilidad más adelante:

$$\zeta_{\nu,\pi} = \frac{N_{c+1} - N_c}{2}. \quad (5.10)$$

Teniendo en mente esto, podemos contar los nucleones de valencia (partículas o agujeros) en una determinada capa y dividirlos entre su correspondiente degeneración (tamaño de la correspondiente capa), obteniéndose los promedios de los nucleones de valencia y consecuentemente los centroides:

$$\langle n_\nu \rangle = \frac{\sum_0^{\zeta_\nu} n_\nu + \sum_{\zeta_\nu-1}^0 n_\nu}{2\zeta_\nu} = \frac{\zeta_\nu^2}{2\zeta_\nu} = \frac{\zeta_\nu}{2}, \quad (5.11)$$

$$\langle n_\pi \rangle = \frac{\sum_0^{\zeta_\pi} n_\pi + \sum_{\zeta_\pi-1}^0 n_\pi}{2\zeta_\pi} = \frac{\zeta_\pi^2}{2\zeta_\pi} = \frac{\zeta_\pi}{2}. \quad (5.12)$$

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

Pero debemos ser más cuidadosos con el término cuadrático:

$$FFMAX = \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2}\right)^2 - \left\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2}\right)^2 \right\rangle, \quad (5.13)$$

$$\left\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2}\right)^2 \right\rangle = \frac{\langle n_\nu^2 \rangle + \langle n_\pi^2 \rangle + 2 \langle n_\nu \rangle \langle n_\pi \rangle}{4}, \quad (5.14)$$

en donde

$$\langle n_\nu n_\pi \rangle = \langle n_\nu \rangle \langle n_\pi \rangle, \quad (5.15)$$

$$\langle n_\nu^2 \rangle = \frac{\sum_0^{\zeta_\nu} n_\nu^2 + \sum_{\zeta_\nu-1}^0 n_\nu^2}{2\zeta_\nu} = \frac{2\zeta_\nu^2 + 1}{6}, \quad (5.16)$$

$$\langle n_\pi^2 \rangle = \frac{\sum_0^{\zeta_\pi} n_\pi^2 + \sum_{\zeta_\pi-1}^0 n_\pi^2}{2\zeta_\pi} = \frac{2\zeta_\pi^2 + 1}{6}. \quad (5.17)$$

Un análisis más detallados nos indica que los mismos centroides promedian algo así como 300 keV, puesto que no conocemos todos los núcleos en cada una de las cajas que consideramos (en el caso de contar con la totalidad de núcleos para una caja en particular, los centroides promedian cero); la forma más simple de resolver tal problema es agregar una constante a mano, de tal forma que al liberarla en los ajustes nos permita que estos últimos promedien a cero.

Finalmente, las fórmulas que incorporan las correcciones de capas al modelo macroscópico son las siguientes

- LDM3a:

$$\begin{aligned} BE(N, Z) = & a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} \\ & - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} \\ & - a_f FMAX + a_{ff} FFMAX + a_{const}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

- LDM3b:

$$\begin{aligned} BE(N, Z) = & a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} \\ & - a_{vsym} \frac{4T(T+r)}{A} + a_{ssym} \frac{4T(T+r)}{A^{4/3}} \\ & - a_f FMAX + a_{ff} FFMAX + a_{const}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

5.6.2. Comparación de las formulas microscópicas

La Tabla 5.13 nos ilustra los resultados obtenidos para las fórmulas microscópicas al implementar la estrategia adecuada en MINUIT; estos resultados son sorprendentes, dado que hemos reducido el RMS con respecto a las gotas macroscópicas de que partimos, con el simple hecho de incorporar los nuevos términos $FMAX$ y $FFMAX$ (es decir, restándole sus respectivos centroides a los coeficientes originales f_{max} y f_{max}^2), para tomar en consideración los efectos de capas cerradas de manera natural, sin afectar los parámetros macroscópicos de las gotas correspondientes.

GOTAS MICROSCÓPICAS		
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b
av	15.454	15.812
as	17.053	18.047
ac	0.6891	0.7152
avsym	44.507	31.780
assym	6.9071	59.197
ap	12.444	12.412
af	1.3349	1.3400
aff	0.0469	0.0465
r	2.2437	2.8056
const	-0.2759	-0.3228
RMS	1.3317	1.2615
PROMEDIO	-0.0016	-0.0005

Tabla 5.13: Comparación entre modelos "microscópicos", es decir, aquéllos que incluyen efectos de capas.

Para el caso de LDM3b, nuestro RMS de ajuste está en 1.26 MeV, es decir, lo hemos mejorado alrededor de 1.15 MeV. Por otra parte para el caso de LDM3a tenemos un RMS alrededor de 1.33 MeV, es decir, se ha mejorado más de 1 MeV. Los nuevos coeficientes introducidos a_f y a_{ff} tienen valores muy parecidos para ambos modelos, lo que nos indica que las correcciones por efectos de capas son de la misma magnitud en ambos modelos microscópicos. Las sistemáticas residuales se pueden observar en las Figuras 5.10 y 5.11.

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

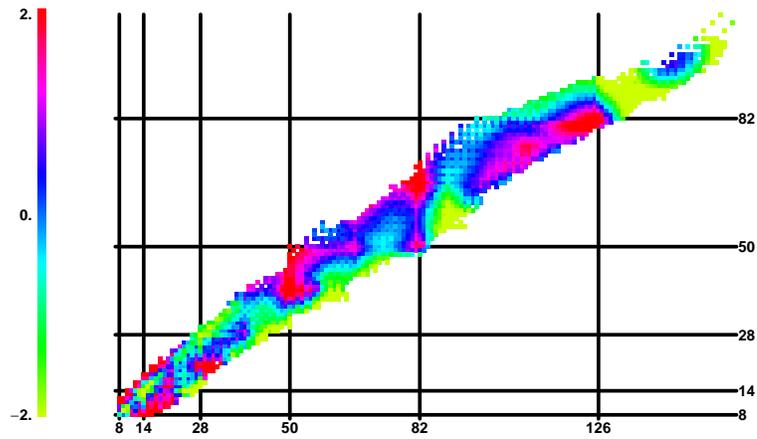


Figura 5.10: Diferencias remanentes, en el plano N - Z, para el modelo LDM2a + correcciones debido al efecto de las capas cerradas.

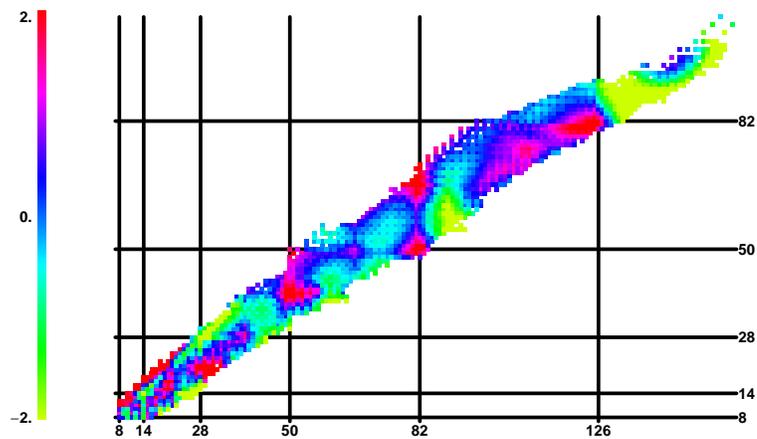


Figura 5.11: Diferencias remanentes, en el plano N - Z, para el modelo LDM2b + correcciones debido al efecto de las capas cerradas.

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

Observaciones

La característica más importante de las Figuras 5.10 y 5.11 (también notada en [46]), es que nos revelan efectos adicionales de subcapas, i.e. se observan claramente regiones con una estabilidad adicional (consideradas de manera poco adecuada por nuestro modelo) a lo largo del ${}^{90}_{40}\text{Zr}$ y del ${}^{146}_{64}\text{Gd}$; es bien sabido que dichos núcleos presentan un comportamiento doblemente mágico asociado con las cerraduras de capa:

- $Z=40$ y $N=50$ para el caso del ${}^{90}_{40}\text{Zr}$.
- $Z=64$ y $N=82$ para el caso del ${}^{146}_{64}\text{Gd}$.

5.6.3. Todos los términos libres

Prosigamos a analizar el caso en que dejamos todos los términos libres, es decir en el que MINUIT lleva a cabo el ajuste sin recurrir a alguna estrategia preestablecida por el usuario. Para tal fin, partimos de los términos ya conocidos para poder comparar los resultados correspondientes al mejor ajuste con respecto a los resultados obtenidos con anterioridad para los modelos microscópicos.

Vale la pena señalar que, a fin de encontrar el mejor ajuste, dejamos libres todos los coeficientes; no incluimos el término constante, dado que, como se indica en la Sección anterior tan sólo nos sirve para asegurarnos de que el ajuste está centrado en cero, en nuestro caso partimos un modelo macroscópico y posteriormente introducimos correcciones de capa.

Las Tablas 5.14 y 5.15 nos muestran los resultados de los mejores ajustes para los modelos microscópicos LDM3a y LDM3b.

Aún cuando los ajustes son mejores, puesto que el RMS disminuye alrededor de 150 keV, es preferible contar con un modelo más robusto, es decir, que nos permita pasar de una versión de la gota a otra (i.e., de la versión macroscópica a la microscópica), sin alterar los coeficientes obtenidos de los ajustes.

5.6. AJUSTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VERSIÓN MICROSCÓPICA DE LA GOTA

GOTA MICROSCÓPICA LDM3a		
COEFICIENTE	ESTRATEGIA	MINUIT
av	15.454	15.597
as	17.053	17.541
ac	0.6891	0.6989
avsym	44.507	37.461
assym	6.9071	9.2633
ap	12.444	11.232
af	1.3349	1.5083
aff	0.0469	0.0548
r	2.2437	1.5034
const	-0.2759	
RMS	1.3317	1.1846
PROMEDIO	-0.0016	0.0086

Tabla 5.14: Comparación de los coeficientes ajustados para la versión microscópica LDM3a, obtenidos empleando una estrategia y dejando libres todos los coeficientes.

GOTA MICROSCÓPICA LDM3b		
COEFICIENTE	ESTRATEGIA	MINUIT
av	15.812	15.825
as	18.047	18.153
ac	0.7152	0.7155
avsym	31.780	31.399
assym	59.197	53.306
ap	12.412	11.165
af	1.3400	1.5037
aff	0.0465	0.0544
r	2.8056	2.1281
const	-0.3228	
RMS	1.2615	1.1292
PROMEDIO	-0.0005	0.0079

Tabla 5.15: Comparación de los coeficientes ajustados para la versión microscópica LDM3b, obtenidos empleando una estrategia y dejando libres todos los coeficientes.

5.7. EXPLOREMOS UNA ÚLTIMA PARAMETRIZACIÓN

5.7. Exploremos una última parametrización

Consideremos la siguiente idea. Vamos a emplear las ventajas de los dos tipos de modelos macroscópicos, aquellos del tipo ILDM y aquéllos modelos que consideran de forma adecuada los efectos superficiales de asimetría (en esta última Sección no se tomará en cuenta la aproximación de P. Van Isacker), y las correcciones de capa, por medio de n_ν y n_π . La idea consiste en sumarle a las fórmula 5.18 los términos de curvatura y las correcciones debidas al factor de forma del protón que aparecen en las fórmulas del tipo ILDM, obteniéndose las siguientes expresiones:

- Versión macroscópica, de la forma propuesta:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} + a_k A^{1/3} + c_d \frac{Z^2}{A}. \quad (5.20)$$

- Versión microscópica, de la forma propuesta:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} + a_k A^{1/3} + c_d \frac{Z^2}{A} - a_f FMAX + a_{ff} FFMAX + a_{const}. \quad (5.21)$$

La Tabla 5.16 y la Figura 5.12 nos muestran los resultados para el ajuste de los coeficientes de las fórmulas de masas propuestas, para el conjunto de los 2149 núcleos que aparecen en la compilación AME03. A partir de este momento, nos vamos a referir a la fórmula 5.20 como MAC, y a la fórmula 5.21, como MIC.

De nueva cuenta, observamos la misma tendencia que presentan las fórmulas de masas del tipo ILDM, a incrementar el valor del coeficiente a_s con respecto al valor que presentaba en el modelo original LDM; por otra parte, el parámetro de Wigner, denotado por r , tiende a disminuir con respecto a los resultados previamente citados y desplegados en la Tabla 5.13. Pese a que

5.7. EXPLOREMOS UNA ÚLTIMA PARAMETRIZACIÓN

tan sólo se consiguió una mejoría pequeña de alrededor de 120 keV en el RMS, será importante conservar este resultado a fin de proceder con nuestra investigación.

FÓRMULAS DE MASAS PROPUESTAS		
COEFICIENTE	MAC	MIC
av	15.987	15.987
as	21.413	21.413
ac	0.7210	0.7210
avsym	45.739	45.739
assym	6.7822	6.7822
ap	11.974	11.974
const		-0.3097
ak	-6.1335	-6.1335
cd	-1.1811	-1.1811
af		1.3491
aff		0.0480
r	1.7496	1.7496
RMS	2.3454	1.2319
PROMEDIO	-0.0134	-0.0004

Tabla 5.16: Coeficientes para las fórmulas de masas propuestas.

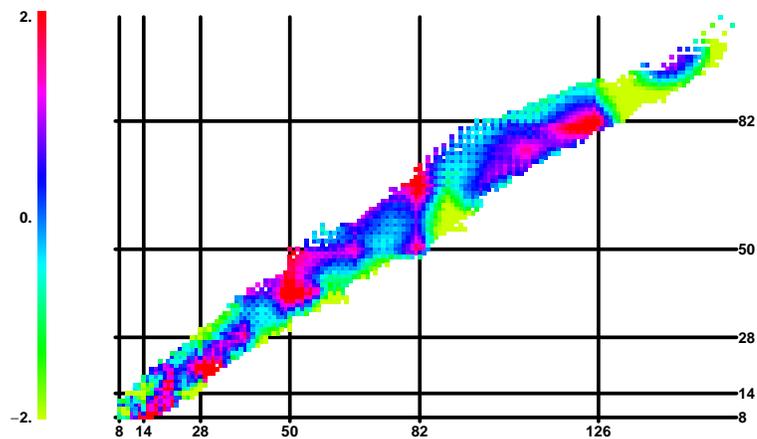


Figura 5.12: Diferencias residuales, en el plano N - Z, entre las energías de amarre medidas y aquéllas calculadas usando la fórmula MIC.

5.8. RESUMEN DE RESULTADOS

5.8. Resumen de resultados

Finalmente, es tiempo de indicar los resultados para las diferentes versiones de la gota utilizadas; las Tablas 5.17 y 5.18, nos muestran tales resultados.

Se puede observar que a medida que se van introduciendo nuevos coeficientes partiendo del ajuste del modelo original de la gota, el ajuste se va mejorando; sobre todo cuando se introducen los términos que toman en cuenta las correcciones de capa [50].

P. DANIELEWICZ				
COEFICIENTE	GOTA	LDM1a	LDM2a	LDM3a
av	15.671	15.714	15.454	15.454
as	17.701	18.078	17.053	17.053
ac	0.7120	0.7070	0.6891	0.6891
avsym	23.077	27.609	44.507	44.507
assym		25.145	6.9071	6.9071
ap	12.735	12.797	12.444	12.444
af				1.3349
aff				0.0469
r			2.2437	2.2437
const				-0.2759
RMS	2.9408	2.6921	2.4007	1.3317
PROMEDIO	-0.0722	-0.0359	-0.0223	-0.0016

Tabla 5.17: Comparación de la evolución de las fórmulas de gotas a medida que se van introduciendo correcciones para los modelos LDM1a, LDM2a y LDM3a.

5.8. RESUMEN DE RESULTADOS

P. VAN ISACKER				
COEFICIENTE	GOTA	LDM1b	LDM2b	LDM3b
av	15.671	15.740	15.812	15.812
as	17.701	18.143	18.047	18.047
ac	0.7120	0.7093	0.7152	0.7152
avsym	23.077	26.579	31.780	31.780
assym		19.129	59.197	59.197
ap	12.735	12.805	12.412	12.412
af				1.3400
aff				0.0465
r			2.8056	2.8056
const				-0.3228
RMS	2.9408	2.7037	2.3919	1.2615
PROMEDIO	-0.0722	-0.0161	-0.0163	-0.0005

Tabla 5.18: Comparación de la evolución de las fórmulas de gotas a medida que se van introduciendo correcciones para los modelos LDM1b, LDM2b y LDM3b.

PRUEBAS DE CONFIABILIDAD

6.1. Prueba AME95 - AME03

A fin de probar el poder de predicción y la confiabilidad de las fórmulas usadas durante la presente investigación, se tomó el conjunto de los 1760 núcleos que fueron reportados en la pasada compilación AME95 [35] (corregidos con la información más reciente de AME03 [4]), para usarlos como datos de entrada, a fin de que al ajustarlos haciendo uso de nuestras fórmulas modificadas, obtengamos un conjunto de parámetros que nos permita extrapolar, a manera de predicción, el resto de los 389 núcleos de la compilación de AME03 [4]. Esta prueba fue introducida por Lunney et al [11] como un criterio para juzgar el poder de predicción de los modelos teóricos con respecto a la evolución de las técnicas experimentales de medición de las masas nucleares.

A continuación se muestran los resultados para cada una de las fórmulas usadas en sus versiones macroscópicas y microscópicas.

- Las Tablas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6, muestran los RMS de ajuste para los 1760 núcleos que aparecen en la compilación de AME95 y el predicción para los 389 núcleos restantes.
- Las Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6, nos muestran las diferencias remanentes en códigos de colores, para los ajustes y predicciones de los diferentes modelos en cuestión, con respecto a la prueba AME95-AME03.

6.1. PRUEBA AME95 - AME03

GOTA MACROSCÓPICA LDM2a	
COEFICIENTE	
av	15.425
as	16.995
ac	0.685
avsym	49.956
assym	6.2391
ap	11.598
r	2.3893
AJUSTE	
RMS	2.498
PROMEDIO	0.0233
PREDICCIÓN	
RMS	2.06968
PROMEDIO	-1.19408

Tabla 6.1: Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica LDM2a.

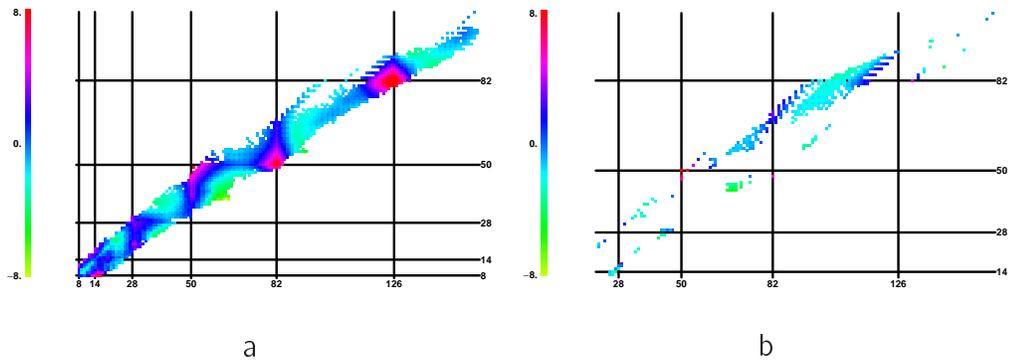


Figura 6.1: Fórmula LDM2a, prueba AME95-AME03: (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.50 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=2.07 MeV.

6.1. PRUEBA AME95 - AME03

GOTA MACROSCÓPICA LDM2b	
COEFICIENTE	
av	15.834
as	18.12
ac	0.7164
avsym	32.018
assym	60.305
ap	11.672
r	2.8114
AJUSTE	
RMS	2.5051
PROMEDIO	-0.0117
PREDICCIÓN	
RMS	1.8327
PROMEDIO	-0.6209

Tabla 6.2: Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica LDM2b.

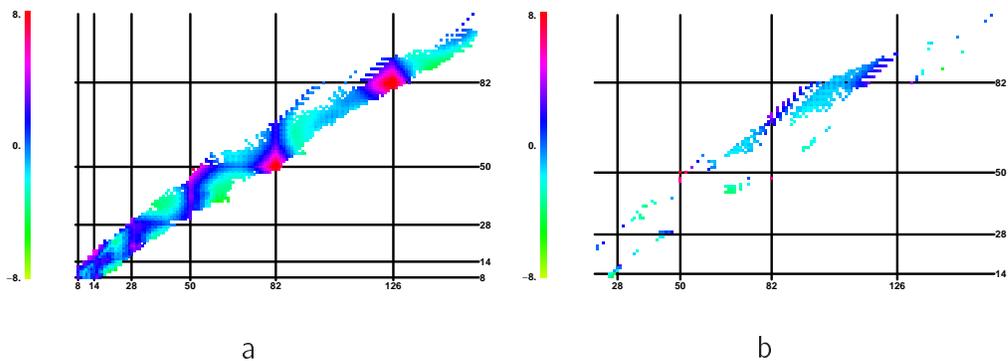


Figura 6.2: Fórmula LDM2b, prueba AME95-AME03: (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.50 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.83 MeV.

FÓRMULA PROPUESTA MACRO	
COEFICIENTE	
av	15.988
as	21.418
ac	0.7203
avsym	46.152
assym	6.801
ap	11.133
ak	-6.0425
cd	-1.184
r	1.6479
AJUSTE	
RMS	2.4398
PROMEDIO	-0.0179
PREDICCIÓN	
RMS	1.9787
PROMEDIO	-1.0654

Tabla 6.3: Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica propuesta MAC.

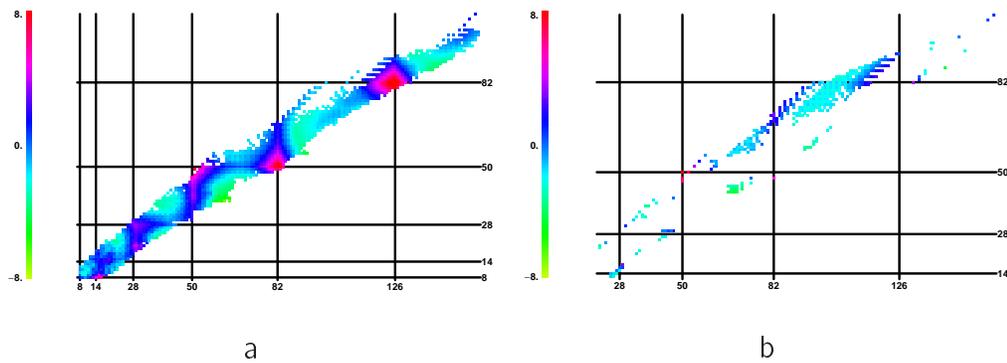


Figura 6.3: Fórmula MAC, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=2.44 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.98 MeV.

6.1. PRUEBA AME95 - AME03

GOTA MICROSCÓPICA LDM3a	
COEFICIENTE	
av	15.425
as	16.995
ac	0.685
avsym	49.956
assym	6.2391
ap	11.598
af	1.3637
aff	0.0484
r	2.3893
const	-0.4006
AJUSTE	
RMS	1.3681
PROMEDIO	-0.0031
PREDICCIÓN	
RMS	1.3185
PROMEDIO	-0.525

Tabla 6.4: Prueba AME95-AME03 para el modelo LDM3a.

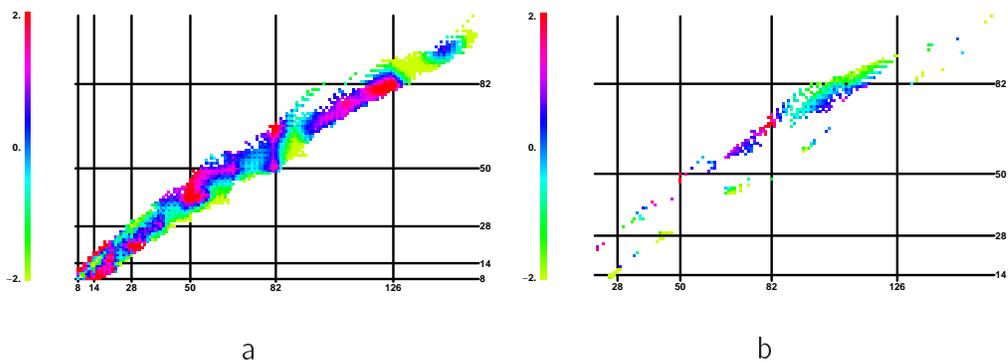


Figura 6.4: Fórmula LDM3a, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=1.37 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.32 MeV.

GOTA MICROSCÓPICA LDM3b	
COEFICIENTE	
av	15.834
as	18.12
ac	0.7164
avsym	32.018
assym	60.305
ap	11.672
af	1.3918
aff	0.0489
r	2.8114
const	-0.4517
AJUSTE	
RMS	1.27769
PROMEDIO	-0.00068
PREDICCIÓN	
RMS	1.1564
PROMEDIO	0.0975

Tabla 6.5: Prueba AME95-AME03 para el modelo LDM3b.

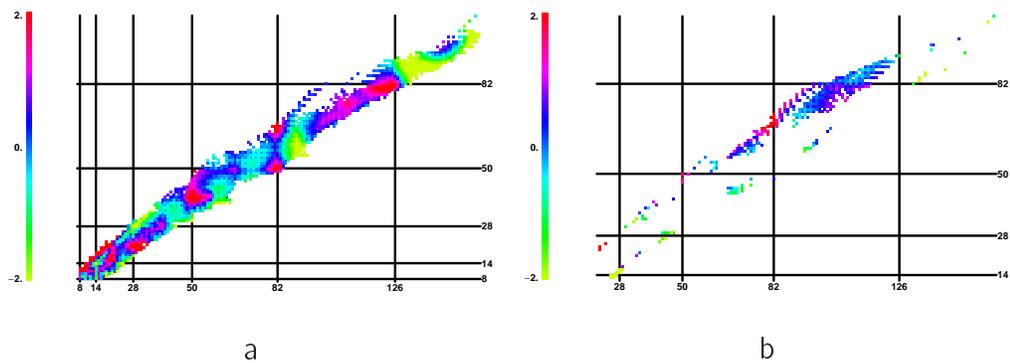


Figura 6.5: Fórmula LDM3b, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un $RMS=1.28$ MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un $RMS=1.16$ MeV.

6.1. PRUEBA AME95 - AME03

FÓRMULA PROPUESTA MICRO	
COEFICIENTE	
av	15.988
as	21.418
ac	0.7203
avsym	46.152
assym	6.801
ap	11.133
ak	-6.0425
cd	-1.184
af	1.3845
aff	0.0497
r	1.6479
const	-0.4463
AJUSTE	
RMS	1.239
PROMEDIO	0.0002
PREDICCIÓN	
RMS	1.0751
PROMEDIO	-0.3384

Tabla 6.6: Prueba AME95-AME03 para la gota macroscópica propuesta MIC.

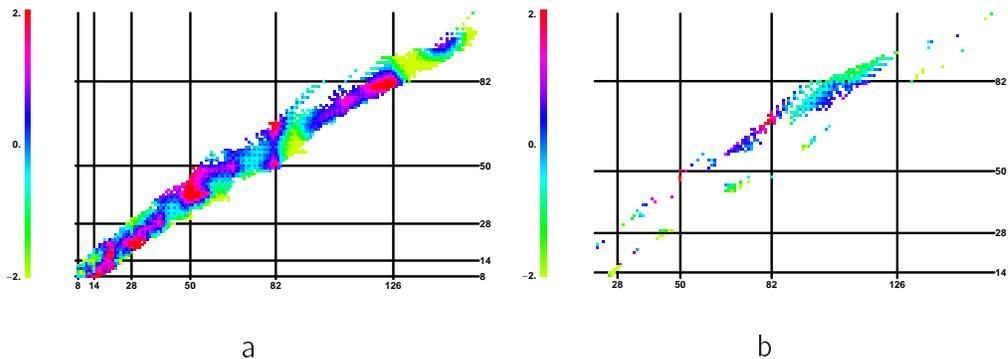


Figura 6.6: Fórmula MIC, prueba AME95-AME03. (a) Ajuste de los 1760 núcleos con un RMS=1.24 MeV; (b) predicción de 389 núcleos con un RMS=1.08 MeV.

6.2. Prueba del borde

A fin de probar el poder de extrapolación de las fórmulas de masas utilizadas, separamos, a manera de cáscaras de cebolla, aquellos núcleos que se encuentran en el borde de la carta de núcleos reportados en la compilación más reciente de masas atómicas AME03 [4]. Posteriormente proseguimos a removerlos, quitándose un total de 359 núcleos.

Se ajustó el conjunto de los 1790 núcleos restantes y con los parámetros obtenidos procedimos a extrapolar, a manera de predicción, el resto de los 359 núcleos.

A continuación se muestran los resultados para cada una de las fórmulas usadas en sus versiones macroscópicas y microscópicas:

- Las Tablas 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12 muestran los RMS de ajuste para los 1790 núcleos, después de haber retirado los núcleos del borde, así como la predicción para los 359 núcleos del borde.
- Las Figuras 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11 y 6.12, nos muestran las diferencias remanentes en códigos de colores para los ajustes y predicciones de los diferentes modelos en cuestión con respecto a la prueba del borde.

Lamentablemente, los resultados arrojados por esta prueba no son del todo alentadores:

- Los RMS de predicción de los 359 núcleos más externos para los modelos macroscópicos LDM2a, LDM2b y MAC son aproximadamente iguales a 3 MeV, mostrándose un deterioro con respecto al ajuste de 2.3 MeV para el subconjunto de los 1790 núcleos.
- La situación no es muy diferente para el caso de los modelos microscópicos LDM3a, LDM3b y MIC, cuya característica principal es la incorporación de correcciones de capas. Se obtiene en promedio para estos modelos un RMS=1.2 MeV para el ajuste y un RMS=2 MeV para la predicción de los 359 núcleos más externos.

6.2. PRUEBA DEL BORDE

GOTA MACROSCÓPICA LDM2a	
COEFICIENTE	
av	15.437
as	17.005
ac	0.6874
avsym	48.993
assym	6.2394
ap	11.539
r	2.4858
AJUSTE	
RMS	2.3127
PROMEDIO	-0.0192
PREDICCIÓN	
RMS	2.8821
PROMEDIO	-0.6015

Tabla 6.7: Prueba del borde para la gota macroscópica de LDM2a.

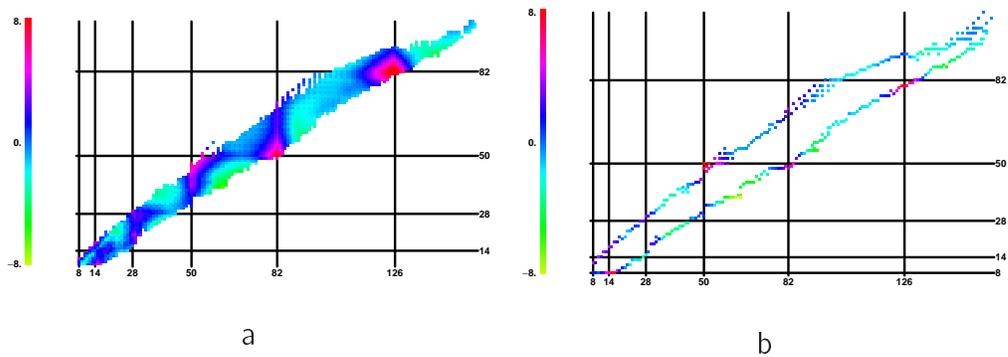


Figura 6.7: Fórmula LDM2a, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.31 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.88 MeV.

GOTA MACROSCÓPICA LDM2b	
COEFICIENTE	
av	15.823
as	18.092
ac	0.7156
avsym	32.068
assym	61.738
ap	11.557
r	2.9574
AJUSTE	
RMS	2.3314
PROMEDIO	-0.0066
PREDICCIÓN	
RMS	2.7577
PROMEDIO	-0.4747

Tabla 6.8: Prueba del borde para la gota macroscópica LDM2b.

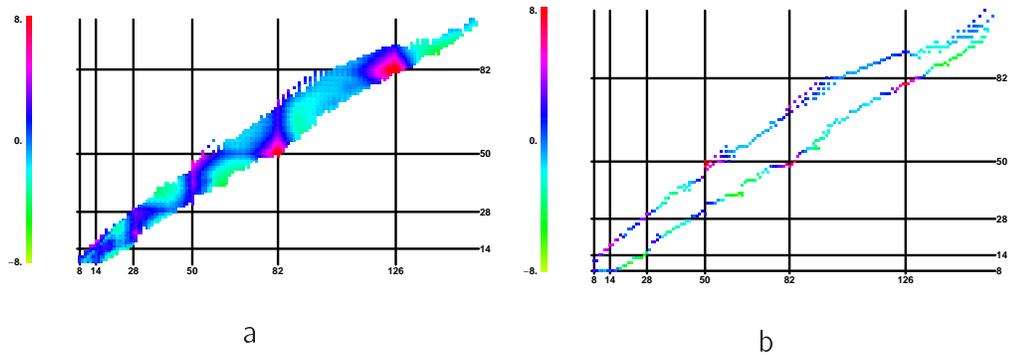


Figura 6.8: Fórmula LDM2b, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.33 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.76 MeV.

6.2. PRUEBA DEL BORDE

FÓRMULA PROPUESTA MAC	
COEFICIENTE	
av	15.987
as	21.414
ac	0.7212
avsym	45.625
assym	6.7624
ap	11.548
ak	-6.1352
cd	-1.1763
r	1.7209
AJUSTE	
RMS	2.2854
PROMEDIO	-0.0703
PREDICCIÓN	
RMS	2.704
PROMEDIO	-0.6458

Tabla 6.9: Prueba del borde para la gota macroscópica propuesta MAC.

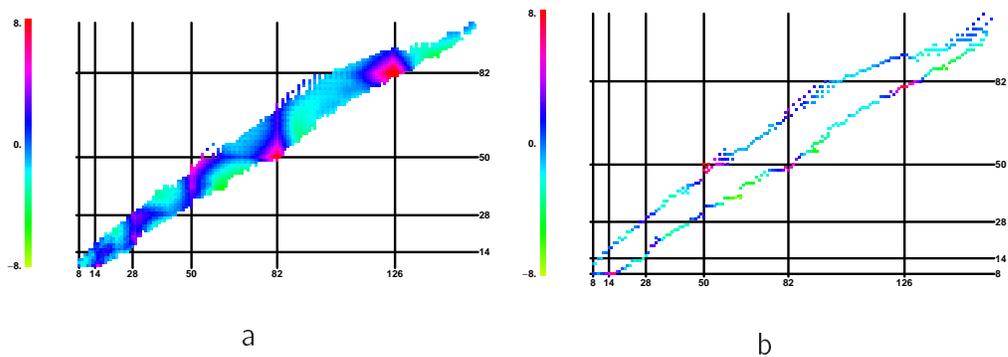


Figura 6.9: Fórmula MAC, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=2.29 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=2.70 MeV.

GOTA MICROSCÓPICA LDM3a	
COEFICIENTE	
av	15.437
as	17.005
ac	0.6874
avsym	48.993
assym	6.2394
ap	11.539
af	1.3679
aff	0.0502
r	2.4858
const	-0.277
AJUSTE	
RMS	1.2688
PROMEDIO	-0.0005
PREDICCIÓN	
RMS	2.1571
PROMEDIO	-0.7418

Tabla 6.10: Prueba del borde para el modelo LDM3a.

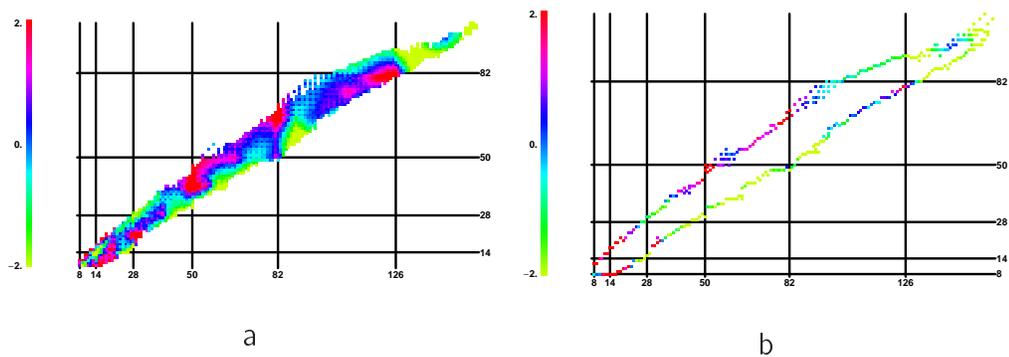


Figura 6.10: Fórmula LDM3a, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un $\text{RMS}=1.27$ MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un $\text{RMS}=2.16$ MeV.

6.2. PRUEBA DEL BORDE

GOTA MICROSCÓPICA LDM3b	
COEFICIENTE	
av	15.823
as	18.092
ac	0.7156
avsym	32.068
assym	61.738
ap	11.557
af	1.3775
aff	0.0496
r	2.9574
const	-0.2793
AJUSTE	
RMS	1.2197
PROMEDIO	-0.0011
PREDICCIÓN	
RMS	1.9725
PROMEDIO	-0.6068

Tabla 6.11: Prueba del borde para el modelo LDM3b.

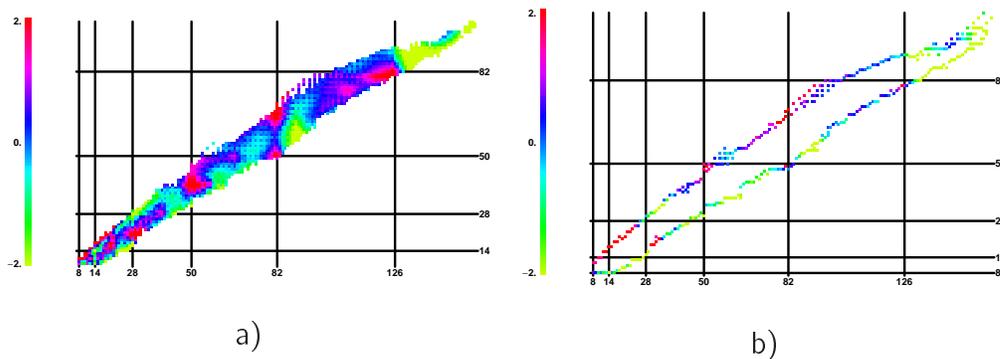


Figura 6.11: Fórmula LDM3b, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un RMS=1.22 MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un RMS=1.97 MeV.

6.2. PRUEBA DEL BORDE

FÓRMULA PROPUESTA MICRO	
COEFICIENTE	
av	15.987
as	21.414
ac	0.7212
avsym	45.625
assym	6.7624
ap	11.548
ak	-6.1352
cd	-1.1763
af	1.3791
aff	0.0505
r	1.7209
const	-0.3315
AJUSTE	
RMS	1.1825
PROMEDIO	-0.0008
PREDICCIÓN	
RMS	1.8779
PROMEDIO	-0.734

Tabla 6.12: Prueba del borde para la gota microscópica propuesta MIC.

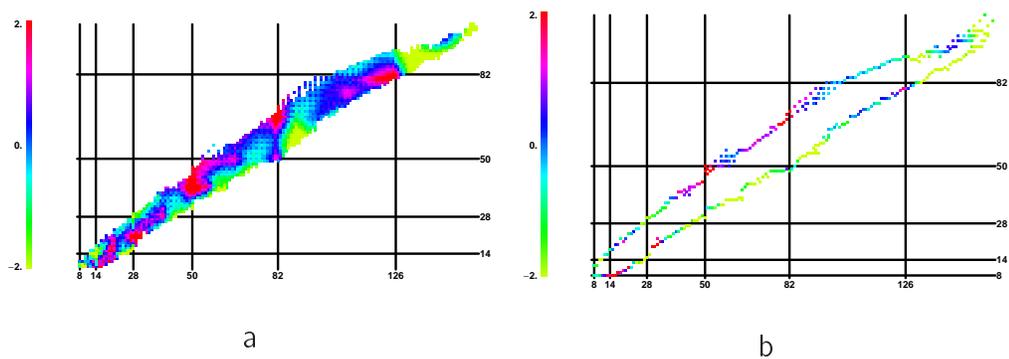


Figura 6.12: Fórmula MIC, prueba del borde. (a) Ajuste de los 1790 núcleos con un $RMS=1.18$ MeV; (b) predicción de 359 núcleos con un $RMS=1.88$ MeV.

6.3. Prediciendo la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$

Como una prueba de consistencia adicional, hemos realizado cortes para un número de nucleones A fijo. Utilizando el subconjunto de núcleos con un número másico menor al corte, reajustamos los coeficientes para las fórmulas microscópicas que incluyen términos lineales y cuadráticos en F_{max} con sus respectivos centroides; la idea es que una vez obtenidos los coeficientes sea posible predecir la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$. Durante esta prueba de nueva cuenta utilizamos la compilación más reciente de masas atómicas AME03 [4].

A continuación se muestran los resultados para cada una de las fórmulas que incluyen correcciones de capas (LDM3a, LDM3b, MIC):

- Las Tablas 6.13, 6.14, 6.15, 6.16 y 6.17, muestran los RMS de ajuste para el subconjunto de núcleos con masa menor al corte y la predicción para el subconjunto de núcleos restante.
- Las Figuras 6.13, 6.14, 6.15, 6.16 y 6.17, nos muestran la comparación entre el patrón original y las predicciones de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para diferentes cortes, usando la fórmula microscópica que presenta mayor predictabilidad.

La prueba de predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$, logra reproducir de manera relativamente satisfactoria, debido a que las fórmulas discutidas en el presente estudio incluyen correcciones de capas en función de los nucleones de valencia, logrando capturar las cerraduras de capas presentes en el patrón original. Los RMS de predicción no son del todo buenos (ver Tablas 6.13 a la 6.17).

Las zonas de deformación para la región entre los números mágicos $N = 82, 126$ y $Z = 50, 82$ se reproducen muy pobremente en todos los casos discutidos en el presente Capítulo, siendo esta la mayor fuente para la discrepancia en los RMS de predicción obtenidos. Así mismo en las regiones correspondiente a los núcleos más pesados, se observa claramente un deterioro gradual del poder predictivo, ya que claramente nuestros modelos las subestiman (se saturan de rojo).

6.3. PREDICIENDO LA REGIÓN ALREDEDOR DEL $^{208}_{82}\text{Pb}$

CORTE $A \leq 160$			
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b	MIC
av	15.29	15.506	15.459
as	16.63	17.181	18.358
ac	0.6747	0.6928	0.7006
avsym	38.609	29.219	34.044
assym	7.852	47.773	9.1255
ap	12.3	12.247	11.759
ak			-0.9194
cd			-1.2116
af	1.3283	1.3016	1.293
aff	0.0439	0.0421	0.0418
r	1.9186	2.3247	-0.2519
const	-0.2851	-0.2621	-0.2519
AJUSTE (1339 NÚCLEOS)			
RMS	1.1741	1.1536	1.1214
PROMEDIO	0.0004	-0.0348	0.0211
PREDICCIÓN (810 NÚCLEOS)			
RMS	3.2708	3.7311	2.1461
PROMEDIO	-2.3694	-2.6355	-1.0776

Tabla 6.13: Corte en $A \leq 160$ para las gotas microscópicas.

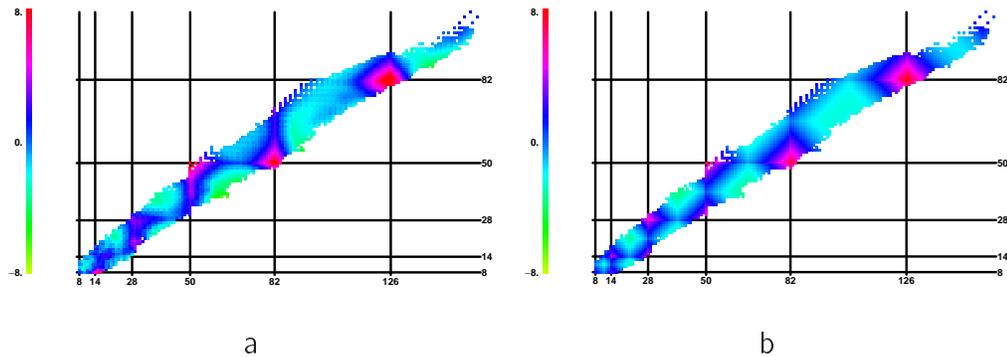


Figura 6.13: Predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para un corte en $A \leq 160$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica propuesta MIC, RMS=2.15 MeV para la predicción.

6.3. PREDICIENDO LA REGIÓN ALREDEDOR DEL $^{208}_{82}\text{Pb}$

CORTE $A \leq 170$			
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b	MIC
av	15.361	15.596	15.596
as	16.794	17.401	19.149
ac	0.6816	0.7009	0.7115
avsym	42.879	30.03	36.708
assym	7.1227	51.515	8.3349
ap	12.417	12.37	11.791
ak			-1.7636
cd			-1.4245
af	1.4001	1.3413	1.3827
aff	0.0507	0.0458	0.0504
r	2.1232	2.5304	-0.1098
const	-0.0727	-0.1376	-0.1098
AJUSTE (1449 NÚCLEOS)			
RMS	1.1831	1.1284	1.1161
PROMEDIO	0.0000	0.0342	-0.0242
PREDICCIÓN (700 NÚCLEOS)			
RMS	1.7194	2.4598	1.4234
PROMEDIO	-0.5659	-1.2923	0.3000

Tabla 6.14: Corte en $A \leq 170$ para las gotas microscópicas.

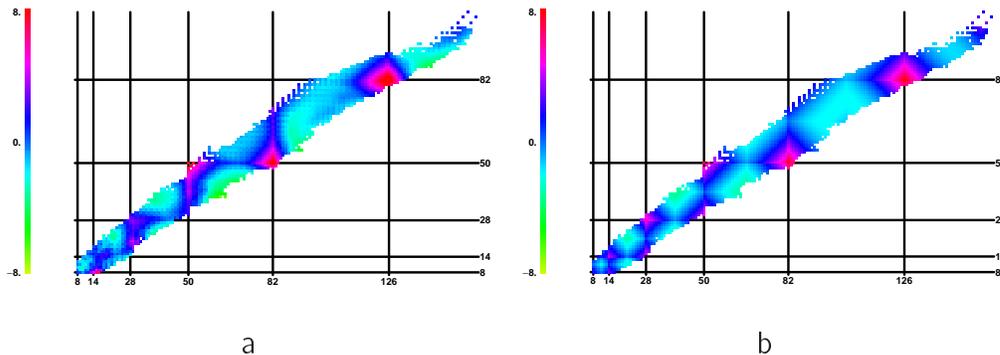


Figura 6.14: Predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para un corte en $A \leq 170$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica propuesta MIC, $\text{RMS}=1.42$ MeV para la predicción.

6.3. PREDICIENDO LA REGIÓN ALREDEDOR DEL $^{208}_{82}\text{Pb}$

CORTE $A \leq 180$			
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b	MIC
av	15.404	15.649	15.997
as	16.894	17.535	21.358
ac	0.6857	0.7053	0.7272
avsym	44.474	30.503	48.022
assym	6.9326	53.663	6.6446
ap	12.478	12.453	11.985
ak			-5.4417
cd			-1.3637
af	1.4612	1.3868	1.4585
aff	0.0571	0.0508	0.058
r	2.2001	2.6424	-0.0124
const	-0.0181	-0.0269	-0.0124
AJUSTE (1564 NÚCLEOS)			
RMS	1.1980	1.1240	1.1294
PROMEDIO	-0.0111	0.0125	-0.0143
PREDICCIÓN (585 NÚCLEOS)			
RMS	1.6420	2.1304	2.3136
PROMEDIO	0.1988	-0.8336	1.9837

Tabla 6.15: Corte en $A \leq 180$ para las gotas microscópicas.

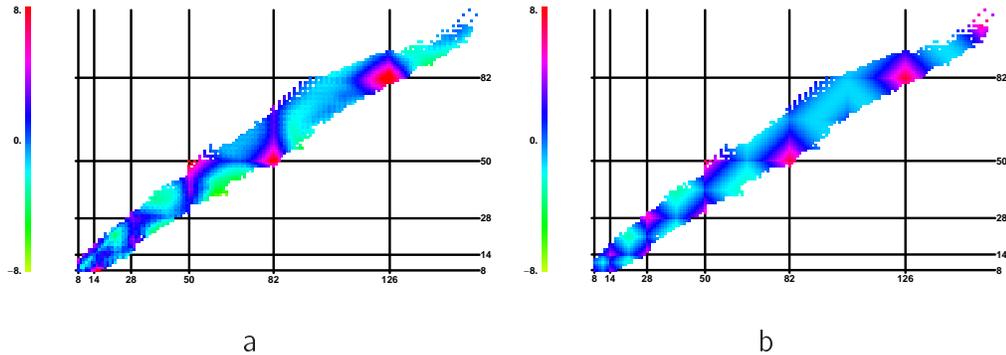


Figura 6.15: Predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para un corte en $A \leq 180$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3a, RMS=1.64 MeV para la predicción.

6.3. PREDICIENDO LA REGIÓN ALREDEDOR DEL $^{208}_{82}\text{Pb}$

CORTE $A \leq 190$			
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b	MIC
av	15.418	15.812	15.63
as	16.924	18	19.364
ac	0.6873	0.7168	0.7155
avsym	43.718	31.705	36.09
assym	7.0545	59.114	8.5448
ap	12.55	12.588	11.858
ak			-1.9027
cd			-1.5312
af	1.4129	1.3627	1.3739
aff	0.055	0.0507	0.0531
r	2.1858	2.9197	0.0583
const	0.059	0.0697	0.0583
AJUSTE (1672 NÚCLEOS)			
RMS	1.2095	1.1545	1.1284
PROMEDIO	-0.0443	-0.0622	-0.0520
PREDICCIÓN (477 NÚCLEOS)			
RMS	1.7098	1.6542	1.7494
PROMEDIO	0.0769	-0.1379	0.3659

Tabla 6.16: Corte en $A \leq 190$ para las gotas microscópicas.

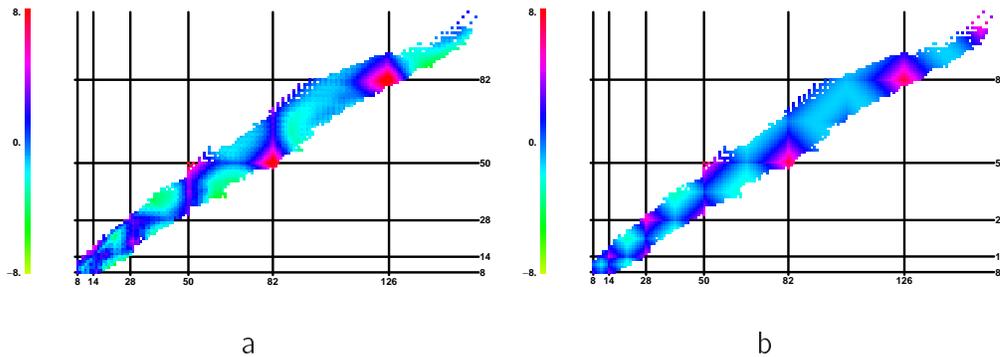


Figura 6.16: Predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para un corte en $A \leq 190$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3b, RMS=1.65 MeV para la predicción.

6.3. PREDICIENDO LA REGIÓN ALREDEDOR DEL $^{208}_{82}\text{Pb}$

CORTE $A \leq 200$			
COEFICIENTE	LDM3a	LDM3b	MIC
av	15.358	15.811	15.283
as	16.75	18.002	17.311
ac	0.684	0.7163	0.6984
avsym	36.958	31.547	29.865
assym	8.3597	59.2	11.134
ap	12.582	12.617	11.901
ak			1.0641
cd			-1.3334
af	1.3885	1.3261	1.3438
aff	0.051	0.0465	0.0488
r	1.9343	3.0468	0.0067
const	0.0051	0.029	0.0067
AJUSTE (1773 NÚCLEOS)			
RMS	1.1704	1.1347	1.0883
PROMEDIO	0.0403	-0.0533	-0.0423
PREDICCIÓN (376 NÚCLEOS)			
RMS	2.9924	2.3116	3.4660
PROMEDIO	-2.2136	-1.5109	-2.5246

Tabla 6.17: Corte en $A \leq 200$ para las gotas microscópicas.

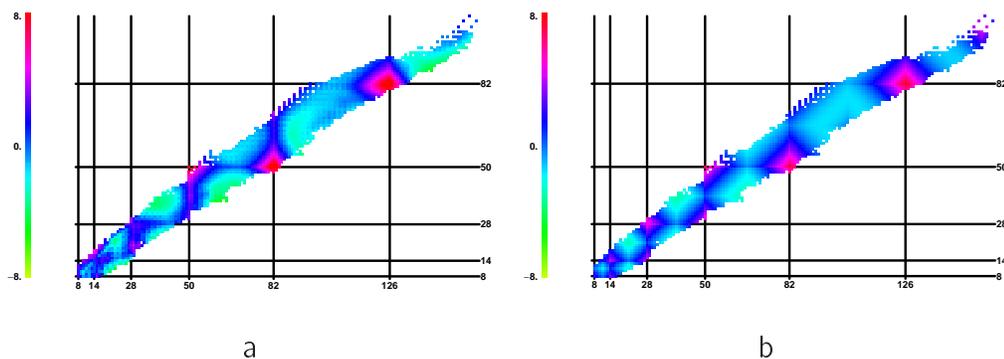


Figura 6.17: Predicción de la región alrededor del $^{208}_{82}\text{Pb}$ para un corte en $A \leq 200$. (a) Patrón original; (b) gota microscópica LDM3b, $\text{RMS}=2.31$ MeV para la predicción.

6.4. ESTUDIO DE LOS COEFICIENTES MÁS SUSCEPTIBLES

6.4. Estudio de los coeficientes más susceptibles

En la Sección anterior hemos estudiado la Tabla de núcleos por Secciones (cortes para un número de nucleones A fijo), de tal forma que resulta conveniente llevar a cabo otro estudio adicional a los coeficientes que presentan cierta susceptibilidad ante ligeros cambios del resto de los términos en las fórmulas microscópicas conforme se va avanzando en la carta de núcleos para cortes en $A \leq 160$, $A \leq 170$, $A \leq 180$, $A \leq 190$ y $A \leq 200$. Asimismo se comparan también los coeficientes obtenidos al ajustar el conjunto de núcleos tabulados en AME03, aquellos obtenidos en las Secciones 5.6 y 5.7.

Las Tablas 6.18, 6.19 y 6.20, nos presentan los resultados de los coeficientes más susceptibles para las 6 diferentes regiones de ajuste, empleando las tres distintas fórmulas microscópicas discutidas (LDM3a, LDM3b y MIC).

Una inspección detallada a las Tablas 6.18, 6.19 y 6.20, nos muestra que, en efecto, las contribuciones de las correcciones de capas introducidas por medio del término lineal en $F_{\max}(a_f)$ son muy robustas en todos los modelos microscópicos estudiados, presentándose muy ligeras desviaciones para las seis diferentes regiones analizadas; por otra parte las contribuciones debidas al término cuadrático en $F_{\max}(a_{ff})$ presentan mayores desviaciones en todas las regiones de estudio analizadas.

Ahora bien, debido a que los coeficientes de asimetría están altamente correlacionados entre sí mismos y con el coeficiente r de Wigner, obtenemos los siguientes resultados:

- La Tabla 6.18, nos muestra que en promedio la contribución volumétrica de la energía de asimetría $a_{v_{sym}} = 41.9$ MeV, 2.5 MeV menor que el resultado obtenido para el ajuste obtenido sobre AME03; la contribución superficial a la energía de asimetría en promedio tiene un valor de $a_{s_{sym}} = 7.4$ MeV, tan sólo 0.5 MeV mayor que el resultado obtenido para el ajuste sobre los núcleos medidos; ahora bien, con respecto al coeficiente " r " de Wigner, éste se mantiene estable alrededor de $r = 2.1$, resultando que los tres términos presentan desviaciones de un 7 % alrededor de sus valores promedio en el estudio usando la fórmula microscópica LDM3a.

6.4. ESTUDIO DE LOS COEFICIENTES MÁS SUSCEPTIBLES

- La Tabla 6.19, nos muestra que en promedio $a_{vsym} = 30.8$ MeV, tan sólo 1 MeV menor que el resultado obtenido para el ajuste obtenido sobre AME03; en promedio $a_{ssym} = 55.1$ MeV, unos 4 MeV menor que el resultado obtenido para el ajuste sobre todos los núcleos medidos; el coeficiente r de Wigner fluctúa entre $r = 2.3$ y $r = 3$, aumentando conforme se va avanzando a lo largo de la Tabla de núcleos. En este caso, el coeficiente a_{vsym} resulta ser el más estable de estos tres coeficientes para el estudio usando la fórmula microscópica LDM3b.
- La Tabla 6.20 nos presenta los resultados de introducir 2 nuevos términos para obtener el modelo MIC, observándose que el coeficiente correspondiente a la energía de curvatura a_k resulta aquél que presenta una mayor incertidumbre, puesto que inclusive ni su signo está bien determinado; el coeficiente correspondiente a una corrección debida al factor de forma del protón c_d se mantiene estable con ligeras variaciones alrededor de $c_d = -1.3$ MeV.
- La introducción de este par de términos (a_k y c_d), también se traduce en una variación de aquellos términos que, como se mencionó con anterioridad, están altamente correlacionados, observándose una disminución drástica para el término r de Wigner de casi la mitad; por otra parte, a_{vsym} y a_{ssym} presentan una mayor dispersión que en los resultados correspondientes al modelo LDM3a (alrededor del 20 % con respecto a sus valores promedio).
- La fórmula microscópica propuesta MIC, mejora ligeramente el ajuste en comparación con LDM3a y LDM3b; sin embargo, el hecho de que uno de los nuevos términos introducidos presente una incertidumbre muy alta, la hace poco recomendable para hacer predicciones.

6.4. ESTUDIO DE LOS COEFICIENTES MÁS SUSCEPTIBLES

FÓRMULA LDM3a					
REGIÓN	avsym	assym	r	af	aff
160	38.609	7.852	1.9186	1.3283	0.0439
170	42.879	7.1227	2.1232	1.4001	0.0507
180	44.474	6.9326	2.2001	1.4612	0.0571
190	43.718	7.0545	2.1858	1.4129	0.055
200	36.958	8.3597	1.9343	1.3885	0.051
AME03	44.507	6.9071	2.2437	1.3349	0.0469
PROMEDIO	41.858	7.3714	2.1010	1.3877	0.0508
RMS	3.2536	0.5963	0.1407	0.0500	0.0049
RMS/PROM	0.0777	0.0809	0.0670	0.0360	0.0966

Tabla 6.18: Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico LDM3a.

FÓRMULA LDM3b					
REGIÓN	avsym	assym	r	af	aff
160	29.219	47.773	2.3247	1.3016	0.0421
170	30.03	51.515	2.5304	1.3413	0.0458
180	30.503	53.663	2.6424	1.3868	0.0508
190	31.705	59.114	2.9197	1.3627	0.0507
200	31.547	59.2	3.0468	1.3261	0.0465
AME03	31.78	59.197	2.8056	1.34	0.0465
PROMEDIO	30.797	55.077	2.7116	1.3431	0.0471
RMS	1.0505	4.8643	0.2653	0.0294	0.0033
RMS/PROM	0.0341	0.0883	0.0978	0.0219	0.0699

Tabla 6.19: Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico LDM3b.

6.4. ESTUDIO DE LOS COEFICIENTES MÁS SUSCEPTIBLES

FÓRMULA MIC							
REGIÓN	avsym	assym	r	ak	cd	af	aff
160	34.044	9.1255	1.1331	-0.9194	-1.2116	1.293	0.0418
170	36.708	8.3349	1.179	-1.7636	-1.4245	1.3827	0.0504
180	48.022	6.6446	1.6343	-5.4417	-1.3637	1.4585	0.058
190	36.09	8.5448	1.1065	-1.9027	-1.5312	1.3739	0.0531
200	29.865	11.134	0.8878	1.0641	-1.3334	1.3438	0.0488
AME03	45.139	6.7822	1.7496	-6.1335	-1.1881	1.3491	0.048
PROMEDIO	38.311	8.4277	1.2817	-2.5161	-1.3421	1.3668	0.0500
RMS	6.8988	1.6565	0.3352	2.7552	0.1295	0.0548	0.0054
RMS/PROM	0.1801	0.1966	0.2615	-1.0950	-0.0965	0.0401	0.1082

Tabla 6.20: Coeficientes más susceptibles para el modelo microscópico MIC.

6.5. RESUMEN DE PRUEBAS DE CONFIABILIDAD

6.5. Resumen de pruebas de confiabilidad

A continuación mostramos los resultados de dos de las pruebas confiabilidad practicadas a todos los modelos que aparecen en la presente investigación. La siguiente Tabla presenta los ajustes al conjunto de datos, así como su predicción dependiendo de la prueba de confiabilidad implementada.

PRUEBAS DE CONFIABILIDAD (RMS en MeV)				
FÓRMULA	PRUEBA AME 95-03		PRUEBA DEL BORDE	
	AJUSTE	PREDICCIÓN	AJUSTE	PREDICCIÓN
ILD1M1	2.5881	1.9399	2.4171	2.8012
ILD1M2	2.5799	1.8786	2.4049	2.8139
ILD1M3	2.4643	1.8873	2.3145	2.6634
LDM1a	2.7932	2.2148	2.5783	3.2972
LDM1b	2.7842	2.1488	2.5803	3.0972
LDM2a	2.4980	2.0697	2.3127	2.8821
LDM2b	2.5051	1.8327	2.3314	2.7577
MAC	2.4398	1.9787	2.2854	2.7040
LDM3a*	1.3781	1.3185	1.2688	2.1571
LDM3b*	1.2769	1.1564	1.2197	1.9725
MIC*	1.2390	1.0751	1.1825	1.8779

Tabla 6.21: Resultados de las pruebas de confiabilidad.

Observaciones:

Todas las fórmulas macroscópicas (aquellas que carecen de asterisco en la Tabla 6.21), predicen las masas con un error promedio de alrededor de 2 MeV para la prueba AME95-AME03. En todos los casos, el error en la predicción es menor que el ajuste. Para la prueba del borde, sus RMS son cercanos a 3 MeV, siendo ligeramente mayores al error promedio del ajuste.

Ahora bien, la parte interesante de esta investigación está centrada en aquellas fórmulas que aparecen con un asterisco. Dichas fórmulas presentan correcciones de capas introducidas vía una simple parametrización en términos de F_{max} con sus respectivos centroides (ver Sección 5.6). Es notable lo bien que funcionan nuestras correcciones de capas, sobre todo en cuanto a la prueba AME95-AME03, con un RMS de predicción cercanos a 1 MeV [50].

6.5. RESUMEN DE PRUEBAS DE CONFIABILIDAD

La Tabla 6.21 muestra que la fórmula microscópica propuesta MIC (fórmula que incorpora características de modelos tipo ILDM, así como correcciones de capas, términos de asimetría y Wigner), mejora las predicciones con respecto a LDM3a alrededor de unos 250 keV en lo que se refiere a la prueba AME95-AME03, y aproximadamente 300 keV para la prueba del borde, respectivamente. Así mismo la fórmula MIC mejora las predicciones de la fórmula LDM3b alrededor de 100 keV con respecto a la prueba AME95-AME03 y la prueba del borde.

Las Tablas 6.22, 6.23 y 6.24, nos presentan los resultados obtenidos para los RMS tanto de ajustes como predicciones para las cinco regiones de estudio planteadas en la Sección 6.3, usadas para predecir la región alrededor del $^{208}_{82}Pb$; también se incluyen los resultados para el conjunto empleado en la prueba AME95-AME03.

RMS DE AJUSTE (MeV)				
REGIÓN	LDM3A	MIC	LDM3B	DZ33
$A \leq 160$	1.1741	1.1214	1.1536	0.3725
$A \leq 170$	1.1831	1.1161	1.1284	0.3659
$A \leq 180$	1.1980	1.1294	1.1240	0.3664
$A \leq 190$	1.2095	1.1284	1.1545	0.3610
$A \leq 200$	1.1704	1.0883	1.1347	0.3591
AME95-AME03	1.3781	1.2390	1.2769	0.3450

Tabla 6.22: Resultados de los estudios por regiones.

RMS DE PREDICCIÓN (MeV)				
REGIÓN	LDM3A	MIC	LDM3B	DZ33
$A \leq 160$	3.2708	2.1461	3.7311	0.7564
$A \leq 170$	1.7194	1.4234	2.4598	0.7702
$A \leq 180$	1.6420	2.3136	2.1304	0.4889
$A \leq 190$	1.7098	1.7494	1.6542	0.9123
$A \leq 200$	2.9924	3.4660	2.3116	1.3571
AME95-AME03	1.3185	1.0751	1.1564	0.4140

Tabla 6.23: Resultados de los estudios por regiones.

6.5. RESUMEN DE PRUEBAS DE CONFIABILIDAD

CRITERIO DE CONFIABILIDAD PREDICCIÓN / AJUSTE (p/a)				
REGIÓN	LDM3A	MIC	LDM3B	DZ33
$A \leq 160$	2.7858	1.9137	3.2343	2.0304
$A \leq 170$	1.4532	1.2754	2.1799	2.1049
$A \leq 180$	1.3706	2.0485	1.8955	1.3344
$A \leq 190$	1.4136	1.5503	1.4328	2.5273
$A \leq 200$	2.5567	3.1850	2.0372	3.7794
AME95-03	0.9568	0.8677	0.9056	1.2000

Tabla 6.24: Resultados de los estudios por regiones.

La Tabla 6.22 nos presenta los resultados para los ajustes de las seis distintas regiones indicadas anteriormente; la fórmula microscópica propuesta MIC consigue los mejores resultados para la fórmulas discutidas en la presente investigación. Adicionalmente se presentan resultados con respecto a la fórmula de 33 parámetros de Andrés Zuker [51], mostrándose que se disminuyen alrededor de 750 keV los RMS de ajuste para las regiones estudiadas con respecto a las fórmulas LDM3a, LDM3b y MIC. En particular, cuando se considera la prueba AME95-AME03, la fórmula de 33 parámetros de Duflo-Zuker mejora nuestros resultados casi por 900 keV.

La Tabla 6.23 nos presenta los resultados para las predicciones de las distintas regiones estudiadas, y la Tabla 6.24, nos presenta un criterio (el cociente $\frac{p}{a}$) para decidir qué modelo presenta mayor confiabilidad al momento de hacer predicciones. A continuación, se hacen las observaciones más relevantes del estudio a las seis diferentes regiones:

- REGIÓN $A \leq 160$.- El modelo MIC con un $RMS = 2.15$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} = 1.9$, resulta ser aquél con el mayor poder de predicción para esta zona, cuya característica principal es que está limitada por la semicerradura de capa para $Z=66$ y antes de la semicerradura de capa para $N=104$.
- REGIÓN $A \leq 170$.- El modelo MIC con un $RMS = 1.42$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} = 1.3$, resulta ser aquél con el mayor poder de predicción para esta zona, caracterizada por estar limitada por las semicerraduras de capa para $Z=66$ y $N=104$.

6.5. RESUMEN DE PRUEBAS DE CONFIABILIDAD

- REGIÓN $A \leq 180$.- La fórmula de 33 parámetros de Duflo-Zuker con un $RMS = 0.49$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} = 1.33$, resulta la fórmula con el mayor poder de predicción para esta zona; el modelo LDM3a discutido en la presente investigación está muy cerca con un $a/p = 1.37$. La región con $A \leq 160$ se encuentra dentro de las semicerraduras de capas para $Z=66$ y $N=104$.
- REGIÓN $A \leq 190$.- El modelo LDM3a con un $RMS = 1.71$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} = 1.41$ resulta ser aquel con el mayor poder de predicción para esta zona; le sigue el modelo LDM3b con un $a/p = 1.43$. Esta región está limitada justo en la capa para $N=82$ y justo después de la semicerradura para $N=104$.
- REGIÓN $A \leq 200$.- El modelo LDM3b con un $RMS = 2.31$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} \approx 2$, resulta ser aquél con el mayor poder de predicción para esta zona, limitada justo en la capa para $N=82$, y justo antes de la capa para $N=126$.
- PRUEBA AME95-AME03.- El modelo MIC con un $RMS = 1.08$ MeV y un cociente entre predicción y ajuste $\frac{p}{a} = 0.87$, es el más confiable para esta prueba; le siguen LDM3b ($\frac{p}{a} = 0.91$), LDM3a ($\frac{p}{a} = 0.96$) y la fórmula de Duflo-Zuker con 33 parámetros ($\frac{p}{a} = 1.2$). Esta prueba nos permite analizar cómo han evolucionado las técnicas experimentales.

Para el estudio de la predictabilidad en diferentes regiones de la carta de núcleos, la fórmula de 33 parámetros de J. Duflo y A.P. Zuker [51] consigue su mejor resultado en cuanto a la predictabilidad para la región limitada en $A \leq 180$ (aproximadamente igual que nuestro resultado para la fórmula LDM3a), sugiriéndonos que la presencia de las semicerraduras en N y Z , favorece el poder de predictabilidad de la fórmula de Duflo-Zuker.

Finalmente, aún cuando todas las predicciones del modelo de Duflo-Zuker son siempre superiores a nuestros resultados, si consideramos el cociente entre la predicción y el ajuste ($\frac{p}{a}$) como criterio para decidir qué modelo presenta una mayor confiabilidad al momento de extrapolar una determinada zona de la carta de núcleos, nos llevamos la sorpresa dado que en la mayoría de los estudios, alguna de nuestras fórmulas propuestas supera al modelo D-Z, sobre todo en las regiones con $A \geq 190$, incluyendo la prueba AME95-AME03.

PREDICCIONES HASTA LAS LINEAS DE INESTABILIDAD

Las líneas de inestabilidad o drip-lines son la frontera más allá de la cual los núcleos ricos en neutrones (protones) son inestables ante la emisión de neutrones (protones). En otras palabras, las drip-lines son aquellas líneas sobre el plano $N - Z$ donde la energía de separación de un neutrón (protón) es cero, consecuentemente un núcleo atómico más allá emitirá nucleones libres. En astrofísica, la línea de inestabilidad de neutrones es de suma importancia en discusiones acerca de la nucleosíntesis de estrellas de neutrones.

7.1. Comparando el poder de predictibilidad

En el Capítulo anterior, hemos mostrado cómo nuestras fórmulas (LDM3a, LDM3b y MIC), caracterizadas por incluir correcciones microscópicas sencillas debido a las cerraduras de capas, han satisfecho con éxito la prueba AME95-AME03, y han logrado reproducir la zona alrededor del ${}^{208}_{82}Pb$ de una forma aproximada. Por todo lo anterior, sería interesante checar las zonas de estabilidad predichas por nuestras fórmulas microscópicas hasta las drip-lines.

Las Figuras de la página siguiente muestran las zonas de estabilidad predichas por uno de nuestros modelos en comparación con los modelos más utilizados por los astrofísicos para extrapolar (predecir) núcleos más allá de la estabilidad. Me refiero a los modelos FRDM de Moller-Nix [9] (ver Figura 7.1) y la fórmula de masas de 33 parámetros de Duflo-Zuker [51] (ver Figura 7.2).

7.1. COMPARANDO EL PODER DE PREDICTIBILIDAD

No se llevó a cabo el análisis usando la fórmula LDM2b, puesto que presenta problemas cuando se toma el límite asintótico de interés para la astrofísica, para cuando $A \rightarrow \infty$ [52]. Tampoco se efectuó el estudio del modelo MIC, debido a que el término correspondiente a la contribución de la energía de curvatura presenta una incertidumbre muy alta, como se estableció con anterioridad en la Sección 6.4.

Para poder obtener las predicciones de capas, se le restó una gota macroscópica del tipo LDM2a a cada uno de los modelos anteriormente señalados, es decir, se reajustaron los coeficientes de esta gota tomando como datos los conjuntos tabulados por Moller-Nix [9], y aquéllos calculados con las fórmulas de Duflo-Zuker [51] y con nuestra fórmula LDM3a.

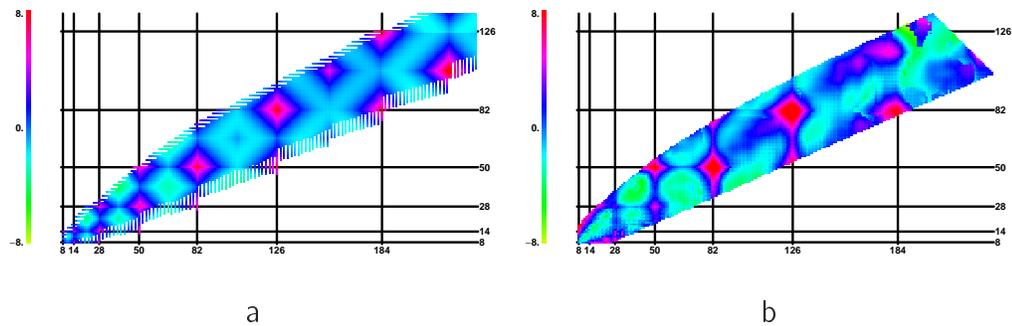


Figura 7.1: Predicciones hasta las líneas de inestabilidad usando: (a) Modelo LDM3a, comparado con (b) el FRLDM de Moller-Nix.

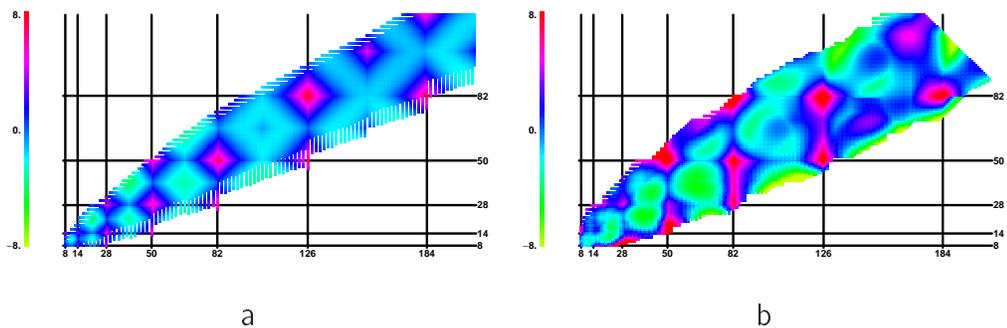


Figura 7.2: Predicciones hasta las líneas de inestabilidad usando: (a) Modelo LDM3a, comparado con (b) la fórmula de Duflo-Zuker.

7.1. COMPARANDO EL PODER DE PREDICTIBILIDAD

Lo primero que notamos, es que cada modelo tiene una cantidad de núcleos diferentes entre las líneas de inestabilidad, dado que sus ingredientes (la física de cada modelo) son muy diferentes, de tal forma que tenemos:

- 8979 núcleos para el FRDLM de Moller y Nix; Tabulados en [9].
- 9311 núcleos para la formula de masas de Duflo y Zuker; se hizo uso de la fórmula con 33 parámetros proporcionada por Andrés Zuker [51]. Los parámetros del modelo se obtuvieron de un ajuste sobre conjunto de datos AME03.
- 9042 núcleos para la fórmula LDM3a, incluyendo correcciones de capas. Los parámetros se obtuvieron en la Sección 5.6.
- 8894 núcleos para la fórmula LDM3b, incluyendo correcciones de capas. Los parámetros se obtuvieron en la Sección 5.6.
- 8622 núcleos para la fórmula MIC, incluyendo correcciones de capas. Los parámetros se obtuvieron en la Sección 5.7.

En nuestra fórmula, obviamente se subestiman las zonas en las medias cerraduras (semi-capas), ésto es lógico debido a la construcción de nuestras correcciones de capa en términos de n_ν y n_π ; las capas en la zona de los núcleos ligeros se deterioran considerablemente, sugiriéndonos empezar nuestros cálculos para una región con $N \geq 28$ y $Z \geq 28$. Sin embargo, como resultado de haber incluido los centroides de n_ν y n_π , se presentan algunos efectos interesantes en la zona más allá de la estabilidad.

Comparando nuestras predicciones, obtenemos la siguiente información útil:

- El FRLDM predice dos zonas de estabilidad en las semicapas, comparables a las que obtenemos alrededor de $Z \approx 104$ y $N \approx 155, 220$. También se presentan otras en la regiones $Z = 66$ y $N \approx 104, 155$, cuyos efectos son apenas notorios en nuestro modelo LDM3a.
- La fórmula de masas de Duflo y Zuker predice una región de estabilidad alrededor de la media cerradura para $Z \approx 104$ y $N \approx 155$, así como las dos regiones de estabilidad en las semicapas, alrededor de $Z \approx 66$ y $N \approx 104, 155$, que como se mencionó en el caso del FRDM, apenas son notorias en el patrón exhibido por LDM3a.

7.1. COMPARANDO EL PODER DE PREDICTIBILIDAD

En ambos modelos parece como si la media cerradura de capa alrededor de $Z \approx 104$ y $N \approx 155$ (región de los núcleos superpesados) estuviese de alguna manera desplazada; más aún, la fórmula de Duflo-Zuker divide esta región en particular en dos pedazos. Finalmente la misma fórmula de Duflo-Zuker exhibe un ligero desplazamiento en 10 nucleones para $Z = 66$ y $N \approx 155$ (debido a algún traslape de las capas intrusas). Aún queda trabajo por hacer para mejorar los resultados obtenidos.

Como una prueba de confiabilidad adicional para las predicciones obtenidas por el modelo LDM3a, se incluyeron términos cúbicos en $\frac{(n_\nu + n_\pi)}{2}$ en el ajuste global, observándose que el RMS no se ve mejorado. Sin embargo, el hecho de que el coeficiente que acompaña al término cúbico tenga un valor negativo, se traduce en suavizar la contribución del término cuadrático, tal y como lo exhibe la Figura 7.3.

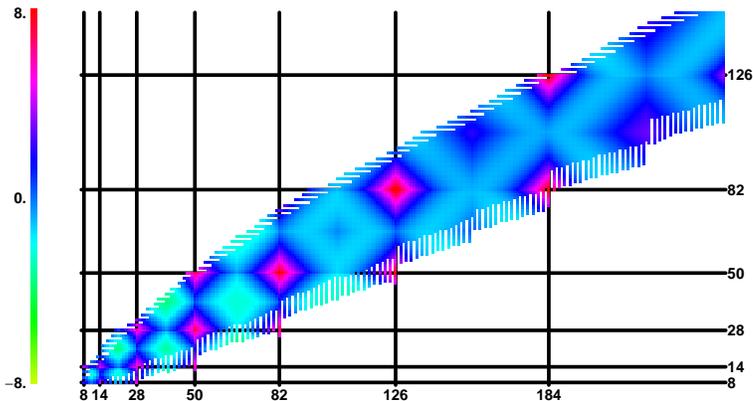


Figura 7.3: Predicciones hasta las líneas de inestabilidad, utilizando una fórmula que incluye términos cúbicos en F_{max} .

La estabilidad adicional tanto en las dobles cerraduras de números mágicos, como en aquellas regiones cercanas a las medias cerraduras de capas, parecen ser robustas. Es de esperarse que versiones más sofisticadas del presente modelo puedan conseguir RMS de ajuste cercano a los obtenidos con los modelo de Duflo-Zuker y Moller-Nix. Sin embargo las islas de estabilidad estarán en donde actualmente nuestro modelo microscópico las predice [50].

7.2. VALORES DE LOS COEFICIENTES DE ASIMETRÍA Y EL TÉRMINO DE WIGNER HASTA LAS LÍNEAS DE INESTABILIDAD

7.2. Valores de los coeficientes de asimetría y el término de Wigner hasta las líneas de inestabilidad

Al haber ajustado las masas predichas entre las líneas de inestabilidad a una gota macroscópica tipo LDM2a, hemos obtenido los valores para las contribuciones volumétricas y superficiales a la energía de asimetría, así como el valor para el término r de Wigner. A continuación se tabulan los resultados obtenidos, tanto para los modelos del tipo LDM2a, como para la fórmula de Duflo-Zuker y el modelo de Moller-Nix. En los últimos dos modelos también se presentan los RMS para el ajuste con una fórmula microscópica tipo LDM3a.

MODELO	a_{vsym}	a_{ssym}	r	RMS	NÚCLEOS
LDM2a	44.51	6.91	2.24	2.40	2149
LDM2a	45.35	6.72	2.44	1.92	9042
DZ(LDM2a)	32.98	12.50	0.60	3.16	9175
DZ(LDM3a)	32.98	12.50	0.60	2.42	9175
MN(LDM2a)	34.18	10.32	1.44	2.56	8979
MN(LDM3a)	34.18	10.32	1.44	1.99	8979

Tabla 7.1: Energías de asimetría y término r de Wigner hasta las líneas de inestabilidad para los modelos: LDM2a, Duflo-Zuker y Moller-Nix.

Comparando los coeficientes de asimetría para los ajustes de los conjuntos de datos de la fórmula de 33 parámetros de Duflo-Zuker (DZ) [51] y el FRDM de Moller-Nix (MN) [9], se obtienen valores muy similares a los reportados por el grupo de A. E. L. Dieperink y P. Van Isacker [46] (durante sus investigaciones, fijan el término de Wigner en $r=1$). Los modelos de DZ ajustan $r=0.6$ y los de MN ajustan $r=1.44$, favoreciendo una $r \approx 1$, e inclinándose ambos modelos por el límite de isospín SU(2) discutido en la Sección 3.2.

El hecho de la discrepancia entre los coeficientes obtenidos para las energías de asimetría obtenidos usando el modelo LDM2a (con $r=2.44$), en comparación a los obtenidos por Duflo-Zuker y Moller-Nix, se debe esencialmente al parámetro r de Wigner, que, como anteriormente establecimos, es pobremente conocido, de tal forma que existe una incertidumbre con respecto al valor que deba ser adoptado para la energía de asimetría en materia nuclear.

CONCLUSIONES

A lo largo de esta investigación, se analizó detalladamente la introducción de términos adicionales al modelo de la gota de líquido, propuestos por distintos grupos de investigación.

A continuación se presentan algunos comentarios:

- La separación de la energía de asimetría propuesta originalmente por Myers-Swiatecki e implementada en la presente investigación, usando fórmulas tipo ILDM, no resulta del todo satisfactoria.
- Un estudio llevado a cabo por Danielewicz con base en la inconsistencia termodinámica del modelo original de la gota, nos permitió estudiar las contribuciones volumétricas y superficiales a la energía de asimetría de una manera adecuada (fórmula LDM2a), mostrándose que su inclusión en el modelo original mejora el RMS alrededor de 250 keV ($RMS = 2.7$ MeV). Sin embargo estas dos contribuciones se encuentran altamente correlacionadas entre sí, de tal forma que la introducción adecuada de la energía de asimetría en el modelo original es un problema difícil.
- Sin lugar a duda, el término r de Wigner, que aparece en las aproximaciones del modelo de capas mediante $4T(T + 1)$ y en el supermultiplete de Wigner por medio de $4T(T + 4)$, resulta ser el de mayor influencia para los modelos macroscópicos discutidos durante la presente investigación, consiguiéndose disminuir el RMS hasta en 600 keV ($RMS = 2.4$

MeV) en presencia de las contribuciones a la energía de asimetría. Así mismo se concluye que este término está también altamente correlacionado con las contribuciones a la energía de asimetría. El término r de Wigner no es del todo conocido, sólo sabemos que se encuentra en algún sitio entre $r=1$ y $r=4$; por lo tanto resulta imposible establecer un valor para las contribuciones volumétricas o superficiales a la energía de asimetría que deban ser adoptadas en materia nuclear. En nuestro caso hemos obtenido: $a_{vsym} = 44.5$ MeV, $a_{ssym} = 6.9$ MeV y $r = 2.2$.

- Al incluir correcciones de capas, resulta "sorprendente", el que el simple hecho de observar los patrones remanentes en el plano N-Z de las diferencias entre los datos experimentales y los modelos macroscópicos discutidos, nos haya llevado a introducir una parametrización sencilla, con un par de términos para considerar la parte microscópica. Al incluir los efectos de capas cerradas con términos lineales y cuadráticos que van como $F_{max} = \frac{n\nu+n\pi}{2}$, se obtiene un ajuste de alrededor de 1.1 MeV en el caso de dejar todos los coeficientes libres. Sin embargo, aquí se presenta el problema de que los ajustes promedian 7 MeV; para remediar este detalle se introdujo el centroide para cada una de las regiones entre dobles capas cerradas.
- La incorporación del centroide (fórmulas LDM3a y LDM3b) es una idea muy útil, puesto que al restar su efecto en cada una de las regiones, nos permite acceder de una manera natural a correcciones de escalas menores, partiendo de un modelo macroscópico robusto. Tan sólo basta con incorporar el par de términos microscópicos (F_{max} y F_{max}^2), y un término constante de 300 KeV sin modificar el valor de los coeficientes del modelo macroscópico de los que se partió (fórmulas LDM2a y LDM2b). Se obtienen ajustes de alrededor de 1.3 MeV con la ventaja de que podemos regresar al modelo del cual partimos. Ahora bien, encontramos otra situación interesante si proseguimos a observar de nueva cuenta los patrones remanentes en el plano N-Z, entre las diferencias entre los datos experimentales y los modelos microscópicos discutidos. Se observa que nuestros modelos, detectan dos regiones de medias cerraduras alrededor del ${}_{40}^{90}Zr$ y el ${}_{64}^{146}Gd$; es bien sabido que ambos núcleos presentan propiedades de núcleos doblemente mágicos.

-
- Finalmente, se probó incorporar un par de términos adicionales, el factor de forma del protón y el término de energía de curvatura (fórmula MIC), obteniéndose una disminución del RMS de alrededor de 120 KeV. Sin embargo, este hecho no justifica su introducción, dado que el coeficiente de la energía de curvatura presenta una incertidumbre considerable ya que ni su signo está bien definido.

También se llevaron a cabo pruebas para asegurarnos de la confiabilidad de los resultados obtenidos con todos los modelos estudiados en la presente investigación. Para tal fin se efectuaron tres pruebas:

1. La "prueba AME95-AME03", se superó satisfactoriamente, obteniéndose ajustes de alrededor de 1.3 MeV y predicciones aún mejores alrededor de 1 MeV. Nuestros modelos microscópicos son una buena herramienta de interpolación.
2. La "prueba del borde", consistió en remover los núcleos del borde de la carta nuclear más reciente. Las predicciones son de alrededor de 2 MeV, concluyéndose que, nuestros modelos presentan limitaciones al momento de hacer extrapolaciones.
3. La "predicción de la región alrededor del ${}^{208}_{82}Pb$ " consigue reproducir esta zona de la carta de núcleos de una forma bastante regular, pero al no considerar las zonas de deformación se obtienen RMS de predicción muy elevados, así mismo se subestima considerablemente la energía de amarre de aquellos núcleos más pesados.

Posteriormente se ajustaron los modelos de Duflo-Zuker (DZ) con 33 parámetros y el FRDM de Moller-Nix (MN) a una gota macroscópica a fin de estudiar las posibles regiones de estabilidad entre las drip-lines, encontrándose que estos modelos también presentan zonas de estabilidad en las semicapas, similares a las predichas por nuestro modelo LDM3a para la región de los núcleos superpesados. Adicionalmente hemos obtenido también los valores para la energía de asimetría y el término r de Wigner entre las líneas de inestabilidad; en ambos modelos el término $r \approx 1$ favorece el límite de simetría SU(2).

En conclusión, la fórmula de masas ideal debería ser aquella que combine la parte macroscópica por medio de un modelo que incorpore de manera adecuada las contribuciones a la energía de asimetría, no incluidas en la versión clásica del modelo de gota líquida, con las correcciones de capas. Aquí precisamente reside la parte microscópica del asunto. Los modelos de la gota modificada son herramientas muy útiles para interpolar, como lo demuestra la prueba AME95-AME03. Sin embargo, al momento de extrapolar no son tan útiles, dado que el RMS de la predicción se empeoró notablemente cuando uno considera la predicción de aquellos núcleos más externos, ya sea por medio del ajuste con los coeficientes obtenidos sobre el conjunto de aquellos núcleos que se encuentran una cáscara de cebolla más al interior, o bien para los coeficientes obtenidos para un determinado corte en un número de nucleones A . De ninguna manera se pretende decir que las correcciones de capas en términos lineales y cuadráticos de los nucleones de valencia n_ν y n_π sean superiores a otros modelos como la funcional de las ocupaciones de Duflo-Zuker (DZ) o el FRDM de Moller-Nix (MN); simplemente hemos demostrado cómo la simple observación del patrón de las diferencias residuales entre los datos experimentales y una gota nos sugiere explotar esta simetría, para la introducción de términos microscópicos a manera de correcciones de capas; siempre y cuando contemos con una gota macroscópica robusta.

FUTURAS INVESTIGACIONES

La introducción del factor "P" de Casten para la región de los núcleos más pesados, i.e., para $A \geq 160$. Representa una alternativa en el mismo espíritu de la introducción de los efectos de capas discutidos durante esta investigación, para tratar de darle mayor relevancia a los efectos de deformación que no hemos tomado en consideración de forma adecuada en los modelos discutidos. Esto es debido a que el factor "P" de Casten es una medida del número de interacciones isoescalares protón-neutrón de cada nucleón de valencia con los del otro tipo (se cree que las interacciones p-n son las principales fuentes de los efectos de deformación observados).

Todavía queda trabajo por hacer, porque aunque se ha disminuido el RMS considerablemente, aún no hemos conseguido que nuestras parametrizaciones se acerquen a modelos como la funcional de las ocupaciones de Andrés Zuker con 33 parámetros que tiene cierta física en común, i.e., parametrizaciones en términos de los nucleones de valencia, ya sean partículas o agujeros contados desde la capa más próxima.

Falta por discutir con mayor detalle las correcciones de capas hasta las líneas de inestabilidad en comparación con los modelos FRDM de Moller-Nix y la fórmula de masas nucleares de J. Duflo y A.P. Zuker, así como las implicaciones de los coeficientes de asimetría y el término "r" de Wigner obtenidos entre las líneas de inestabilidad para estos dos últimos modelos en el estudio de materia nuclear.

FUTURAS INVESTIGACIONES

La introducción del factor "P" de Casten para la región de los núcleos más pesados, i.e., para $A \geq 160$. Representa una alternativa en el mismo espíritu de la introducción de los efectos de capas discutidos durante esta investigación, para tratar de darle mayor relevancia a los efectos de deformación que no hemos tomado en consideración de forma adecuada en los modelos discutidos. Esto es debido a que el factor "P" de Casten es una medida del número de interacciones isoescalares protón-neutrón de cada nucleón de valencia con los del otro tipo (se cree que las interacciones p-n son las principales fuentes de los efectos de deformación observados).

Todavía queda trabajo por hacer, porque aunque se ha disminuido el RMS considerablemente, aún no hemos conseguido que nuestras parametrizaciones se acerquen a modelos como la funcional de las ocupaciones de Andrés Zuker con 33 parámetros que tiene cierta física en común, i.e., parametrizaciones en términos de los nucleones de valencia, ya sean partículas o agujeros contados desde la capa más próxima.

Falta por discutir con mayor detalle las correcciones de capas hasta las líneas de inestabilidad en comparación con los modelos FRDM de Moller-Nix y la fórmula de masas nucleares de J. Duflo y A.P. Zuker, así como las implicaciones de los coeficientes de asimetría y el término "r" de Wigner obtenidos entre las líneas de inestabilidad para estos dos últimos modelos en el estudio de materia nuclear.



APÉNDICE A



Nuclear masses and the number of valence nucleons

J. Mendoza-Temis ^a, A. Frank ^a, J.G. Hirsch ^{a,*}, J.C. López Vieyra ^a,
I. Morales ^a, J. Barea ^b, P. Van Isacker ^c, V. Velázquez ^d

^a *Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-543,
México 04510 D.F., Mexico*

^b *Center for Theoretical Physics, Sloane Physics Laboratory Yale University, PO Box 208120, New Haven,
CT 06520-8120, USA*

^c *GANIL, BP 55027, F-14076 Caen Cedex 5, France*

^d *Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543,
México 04510 D.F., Mexico*

Received 6 September 2007; received in revised form 12 November 2007; accepted 14 November 2007

Available online 24 November 2007

Abstract

An improved version of the liquid drop model is presented. The addition of two terms, linear and quadratic in the total number of valence nucleons (particles or holes), improves the description of atomic masses, which can be fitted with an r.m.s. error of 1.2 MeV. Predictions are analysed and compared with those of established models.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 21.10.Dr

Keywords: Mass formula; Binding energy; Valence nucleons

1. Introduction

An accurate knowledge of nuclear masses is required to understand fundamental processes in nuclear physics. The nuclear mass embodies the net results of all interactions present in the nucleus. The binding energy BE is the difference between the sum of the masses of its constituent free nucleons and the nuclear mass [1].

* Corresponding author.

E-mail address: hirsch@nucleares.unam.mx (J.G. Hirsch).

The study of nuclear mass formulae has a long history since Weizsäcker [2], and Bethe and Bacher [3] proposed a formula based on the liquid-drop model, by analogy to a primarily classical system. They considered the nucleus as a very dense, charged liquid drop, where the binding energy is proportional to the volume, i.e., to the mass number A , and is reduced by surface and Coulomb effects. Adding the asymmetry term, and the pairing term leads to the familiar form:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{vsym} \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}}. \quad (1)$$

In Eq. (1) the conventional $A^{-1/2}$ dependence of the pairing term is adopted [4–7], instead of $A^{-1/3}$ form suggested in [8–11]. Numerical fits does not allow to distinguish between them. In 1966 Myers and Swiatecki proposed a liquid drop formula including shell and deformation effects [8], which evolved into a macroscopic-microscopic global nuclear mass formula in a collaboration with Moller et al. [9], and later on to the finite range drople model (FRDM) [10]. In their macroscopic sector, one contribution was the separation of the asymmetry term in a volumetric and surface part. In 2003, Souza et al. [5] incorporated these surface energy terms in their improved LDM (ILDm). An extra Coulomb term, neglected in most models, was included to take into account corrections to the Coulomb energy associated with the diffuseness of the nuclear surface (proton form-factor correction to the Coulomb energy). The Royer and Gautier mass formula [7] includes a curvature energy and the Wigner cusp, which refers to the extra binding energy present in nuclei with the same number of protons and neutrons.

Danielewicz [6] has shown that, when the surface energy is affected by the particle asymmetry within the system, thermodynamic consistency requires that some of the asymmetry moves to the surface, i.e., an asymmetry skin develops. Minimization of the net nuclear energy with respect to the partition of asymmetry produces an expression for the symmetry energy such as in the droplet model [11]. Finally, he shows that the potentially confusing expression for the asymmetry energy is easily comprehended using a capacitor analogy.

Including both surface and Wigner effects, the following extended formula [12] can be written:

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}}, \quad (2)$$

where $T \equiv |N - Z|/2$. The Wigner term has a coefficient modulated by the parameter r . It can take values between 0 and 4, which includes the absence of the Wigner term, $r = 0$, and two symmetry limits: $r = 1$, the exact isospin symmetry associated with the SU(2) Casimir $T(T + 1)$ and $r = 4$, the exact spin-isospin symmetry associated with SU(4) Casimir $T(T + 4)$ [12].

Nuclear masses and charge radii have been calculated as algebraic functions of the number of valence protons and neutrons [13–15], in a successful approach able to fit more the 2000 known masses with an r.m.s. error smaller than 400 keV, employing 28 parameters [15]. In these mass formulas the numbers of valence particles and holes are employed simultaneously, and even in the simplest versions the maximum between two different quantities, associated with spherical and deformed nuclei, is taken [14]. Both facts make it hard to get an intuitive interpretation of the different terms involved. In what follows it will be shown that, by adding only two microscopic terms to the liquid drop model, which are linear and quadratic in the number of valence particles (or holes), it is possible to adjust all known nuclear masses with an r.m.s. of 1.2 MeV, a combination of simplicity and predictability which has been found useful in global

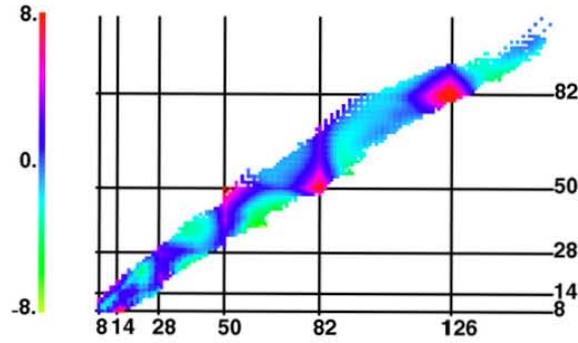


Fig. 1. Residual differences between measured binding energies and those calculated using Eq. (2), with a r.m.s. deviation of 2.40 MeV s.

analysis [12]. Although it is still not competitive with the best mass formulas, it represents a very simple approach, and can serve as a starting point for more sophisticated models [16]. It is worth to mention that Ref. [14] contains a mass formula that is very close to the one employed here, which allows a fit of nuclear masses with similar r.m.s. error.

2. Macroscopic mass formula plus shell corrections

The main motivation for the present work arose from the striking color-coded pattern observed on the nuclear landscape when plotting the difference between the experimental binding energies [17] and those calculated from Eq. (2) [12,16,18].

The regular pattern displayed in Fig. 1 exhibit the double magic closures as red marks, appearing in those places where the macroscopic mass formula underestimates the binding energies. The binding energy is maximal for those nuclei with N or Z equal to 14, 28, 50, 82 and 126. The pattern suggest to use 14 instead of 20 as a magic number. Around the double closures “diamond like structures” can be observed. They can be parametrized employing $F_{\max} = (n_{\nu} + n_{\pi})/2$ [12], where n_{ν} (n_{π}) is the number of valence neutron (proton) particles or holes counted from the nearest closed shell. The notation comes from the counting of bosons adopted in the neutron-proton interacting boson model [19]. At mid shells, circular green areas are seen in Fig. 1, where experimental binding energies are smaller than those predicted by Eq. (2).

The number of valence neutrons n_{ν} is defined by:

$$n_{\nu} = N - N_c \quad \text{if } N \leq N_{\text{med}}, \quad (3)$$

$$n_{\nu} = N_{c+1} - N \quad \text{if } N > N_{\text{med}}, \quad (4)$$

where we have introduced the closure magic numbers N_c :

$$N_c = 8, 14, 28, 50, 82, 126, 184, 258, \quad \text{with } c = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (5)$$

and their midclosures:

$$N_{\text{med}} = 11, 21, 39, 66, 104, 155, 221. \quad (6)$$

Similar expressions hold for the number of valence protons n_{π} . The use of 14 and the exclusion of 20 as a magic number is strongly suggested by the pattern in Fig. 1, and the quality of the fits obtained.

We want to improve the predictive power of Eq. (2) with the inclusion of two extra terms. To keep their parameters as close as possible to its original values, the new terms should have a null average contribution. To this goal their mean is removed by defining

$$F = \frac{n_\nu + n_\pi}{2} - \left\langle \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right\rangle \quad (7)$$

and

$$FF = \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 - \left\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \right\rangle. \quad (8)$$

Introducing the semi-degeneracy η_c of the shell number c as:

$$\eta_c = \frac{N_{c+1} - N_c}{2}, \quad (9)$$

the mean of the valence nucleons can be expressed as:

$$\langle n_\nu \rangle = \langle n_\pi \rangle = \frac{\eta_c}{2}, \quad (10)$$

$$\left\langle \left(\frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \right\rangle = \frac{\langle n_\nu^2 \rangle + \langle n_\pi^2 \rangle + 2\langle n_\nu \rangle \langle n_\pi \rangle}{4}, \quad (11)$$

where

$$\langle n_\nu^2 \rangle = \frac{2\eta_c^2 + 1}{6}, \quad (12)$$

$$\langle n_\pi^2 \rangle = \frac{2\eta_c^2 + 1}{6}. \quad (13)$$

While the removal of their mean values guarantees that the microscopic terms will have no average contribution when all nuclei between closed shells are included, when the analysis is restricted to nuclei with measured masses the average value of these two terms is not zero. To compensate for this effect a constant term is added to the complete mass formula, which reads

$$\begin{aligned} \text{BE}(N, Z) = & a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_{vsym}}{1 + \frac{a_{vsym}}{a_{ssym}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A} \\ & + a_p \frac{\delta(N, Z)}{\sqrt{A}} - a_f F + a_{ff} FF + a_{\text{const}}. \end{aligned} \quad (14)$$

The behavior of the linear term F and the quadratic one $-FF$, after the removal of their average values, are exhibited in Figs. 2(a) and 2(b).

For $Z < 50$, $N < 82$ the linear term dominates over the quadratic, while for heavier nuclei their contributions are comparable. The combined effect $F - FF$ is shown in Fig. 3.

3. Results

In order to get an optimum fit of the coefficients of each formula, we use MINUIT [20], which is conceived as a tool to find the minimum value of a multi-parameter function and analyze the shape of the function around the minimum. The set of data to fit are the masses given in the last

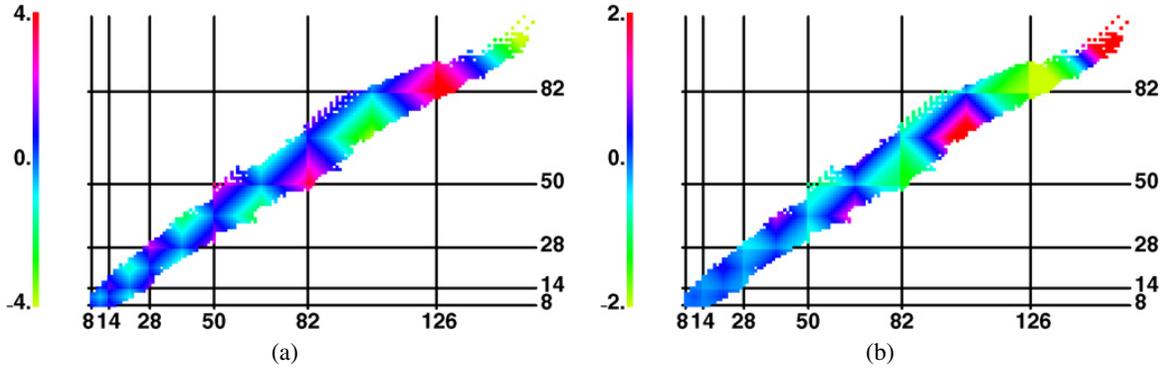


Fig. 2. Behavior of the: (a) linear term F ; (b) quadratic term $-FF$ over the entire nuclear landscape along the plane $N-Z$.

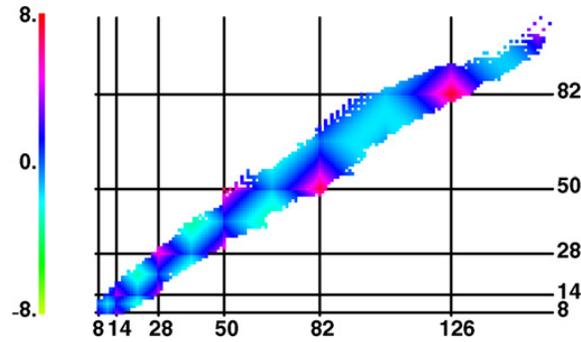


Fig. 3. Shell corrections for a modified macroscopic version of the LDM, due to both terms $F - FF$.

Atomic Mass Evaluation [17], which lists atomic and not nuclear masses, the relation between the two being given by

$$\text{BE}_{\text{EXP}}(N, Z) = \text{BE}_{\text{EXP}}^{\text{AME}}(N, Z) + Z[B_{\text{el}}(Z=1)]m_e - B_{\text{el}}(Z), \quad (15)$$

where $B_{\text{el}}(Z)$ is the total binding energy of the electrons, and its better approximation may be obtained by using [1]

$$B_{\text{el}}(Z) = 1.44381 \times 10^{-5} Z^{2.39} + 1.55468 \times 10^{-12} Z^{5.35} \text{ MeV}. \quad (16)$$

The parameters in the different mass formulas are adjusted to minimize the r.m.s. deviation σ defined by

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{N,Z} (\text{BE}_{\text{EXP}}(N, Z) - \text{BE}(N, Z))^2}{N_{\text{nucl}}}, \quad (17)$$

which measures the quadratic error between the theoretical binding energies $\text{BE}(N, Z)$ and their experimental counterpart $\text{BE}_{\text{EXP}}(N, Z)$. N_{nucl} is the total number of nuclei included in the reference set. The parameters obtained after fitting the 2149 nuclei whose masses are reported in the AME03 data set [17] and their respective r.m.s. deviation σ are listed in Table 1.

The simplest liquid drop mass formula, Eq. (1), allows to fit all known nuclear masses with an average error slightly smaller than 3.0 MeV. Adding surface asymmetry effects improves the fit in 0.25 MeV, and the Wigner term in another 0.30 MeV.

Finally, its very striking that the inclusion of the two terms proportional to $n_{\pi} + n_{\nu}$ improve the global fit by 1.1 MeV, to a final r.m.s. error of 1.3 MeV.

Table 1
Coefficients [in MeV] for the different mass formulas

Coefficient	Eq. (1)	Eq. (2)	Eq. (2)	Eq. (14)
a_v	15.671	15.714	15.454	15.454
a_s	17.701	18.078	17.053	17.053
a_c	0.7120	0.7070	0.6891	0.6891
a_{vsym}	23.077	27.206	44.507	44.507
a_{ssym}	–	25.145	6.9071	6.9071
a_p	12.735	12.797	12.444	12.444
a_{const}	–	–	–	–0.2759
a_f	–	–	–	1.3349
a_{ff}	–	–	–	0.0469
r	–	0	2.2437	2.2437
σ	2.9408	2.6921	2.4007	1.3317
mean	–0.0722	–0.0359	–0.0223	–0.0016

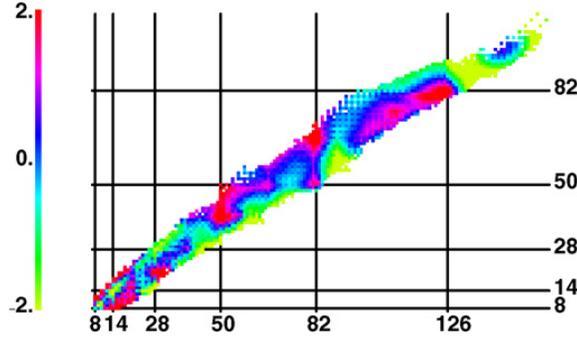


Fig. 4. Residual differences on the $N-Z$ plane, between measured binding energies and those calculated using Eq. (14).

While the coefficients of the volume, surface, Coulomb and pairing terms are fairly constant, the asymmetry term is strongly affected by the presence of the surface and the Wigner corrections, which means that these terms are strongly correlated. The constant $a_{cont} = -0.2759$ MeV simply corrects for the average contribution of the microscopic terms for all nuclei with known masses.

If the curvature term $a_k A^{1/3}$ and the Coulomb diffuseness correction $c_d \frac{Z^2}{A}$ are included, the global fit can be improved to 1.2 MeV [18].

Fig. 4 displays the color-coded pattern of the residual differences between experimental binding energies [17] and those calculated by using Eq. (14), which includes shell closure effects. Notice that the scale runs between -2.0 and 2.0 MeV, amplifying small differences.

It is worth to mention that we have studied a generalized version of Eq. (14), including microscopic contributions of the form $a_{1\pi} n_\pi + a_{1\nu} n_\nu + a_{2\pi} n_\pi^2 + a_{\pi\nu} n_\pi n_\nu + a_{2\nu} n_\nu^2$. The numerical results show that the best parameters satisfy $a_{1\pi} \approx a_{1\nu}$ and $a_{2\pi} \approx a_{2\nu} \approx a_{\pi\nu}/2$. It provides a strong empirical support for the use of $n_\pi + n_\nu$ as the microscopic variable. They can be interpreted as the isoscalar global monopole corrections to the binding energies which can be extracted from a microscopic Hamiltonian [21].

Table 2
Results for the Reliability tests

Formula	AME95–AME03 TEST (r.m.s. in MeV s)	
	Fitted	Predicted
Eq. (1)	2.7932	2.2148
Eq. (2)	2.4980	2.0697
Eq. (14)	1.3681	1.3185
Eq. (14) extended	1.2390	1.0751

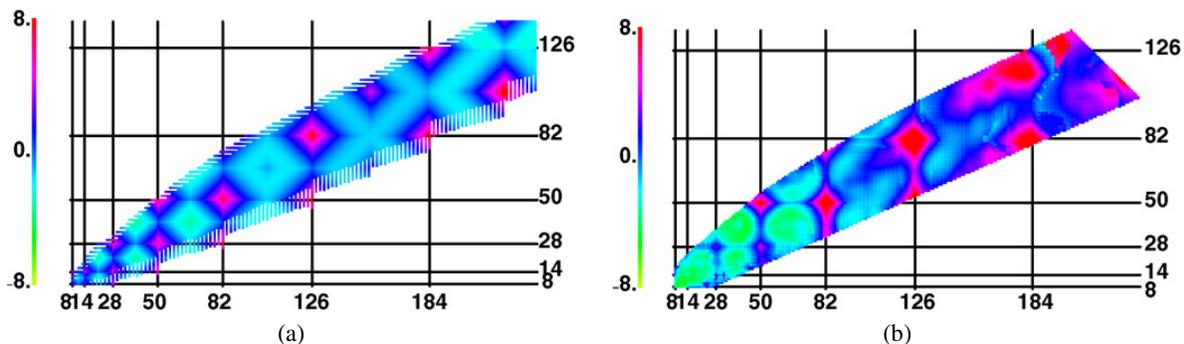


Fig. 5. Predictions up to the drip lines using our formula which includes shell corrections compared with the FRDM of Moller and Nix.

4. Tests and predictions

4.1. AME95-03 test

In order to check the reliability of the nuclear mass formulas, we use the AME95–AME03 test employed in Ref. [1]. It consists in selecting only the 1760 nuclei whose masses are already included in the AME95 compilation [22], and predict the 389 nuclear masses which are present in AME03 [17] but not in AME95 [22]. It should be stressed that, for the sake of consistency, we always employ the AME03 data set, and use AME95 only to select the restricted set of nuclei to be fitted.

The results of the reliability test applied to the different mass models are displayed in Table 2.

As seen in Table 2, all mass formulas are quite stable in their predictions, having an r.m.s. deviation for the predicted nuclei smaller than the fitting error. The microscopic formulas, Eq. (14) and its extension, have a deviation close to 1 MeV in the prediction.

4.2. Predictions up to the drip lines

Drip lines are the boundary beyond which neutron (proton)-rich nuclei are unstable against neutron (proton) emission. In other words, the drip lines are the lines on the N – Z plane where the neutron (proton) separation energy is zero. Thus, an unstable atomic nucleus beyond the drip lines will leak free nucleons. In astrophysics, the neutron drip line is important in discussions of nucleosynthesis and neutron stars.

Having showed that Eq. (14) successfully satisfies the AME95-03 test, it is relevant to investigate its predictions up to the drip lines. Although binding energies are predicted with a precision better than 1% by the simplest liquid drop mass formula, Eq. (1), its error is still an order of

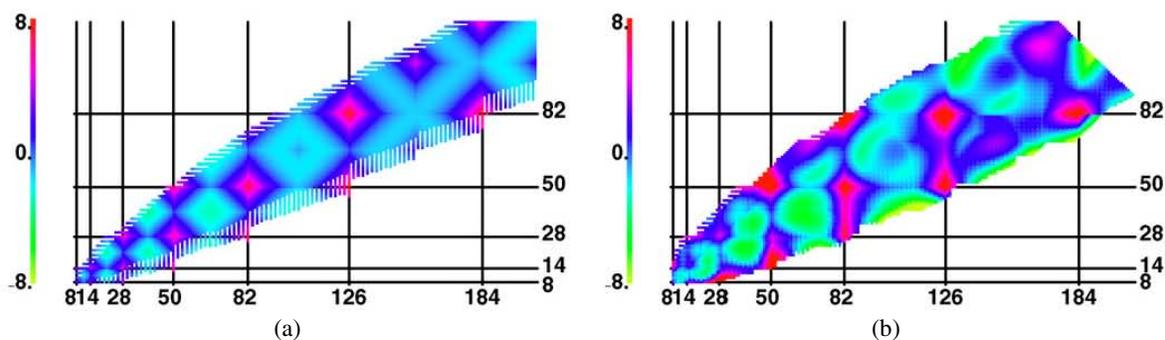


Fig. 6. Predictions up to the drip lines using our formula which includes shell corrections compared with the Duflo and Zuker mass formula.

magnitude too large for precise nucleosynthesis studies. One useful way to find regions of stability is to subtract to the mass predictions its own macroscopic part. The microscopic differences will exhibit in an enhanced way the regions where binding energies in a certain model are larger than its macroscopic estimation. It should be stressed that, due to the strong differences in the asymmetry coefficients in the different mass formulas, there is not such a thing as a “universal liquid drop model” to be subtracted from all mass predictions. The proper macroscopic prediction must be subtracted in each model, which can be obtained by the best fit of the LDM, Eq. (1), of the theoretical binding energies associated with each model.

In the case of Eq. (14), the microscopic prediction is simply included in the two terms dependent on valence occupation numbers. They are shown in the left-hand side of Figs. 5 and 6. As expected from the discussion in the previous sections, the new stability regions for super-heavy nuclei predicted by the model are associated with the shell closures and midclosures. In particular, the “diamond like” stability pattern is predicted to exist around $^{184}\text{Pb}^{266}$, $^{155}104^{259}$, $^{184}126^{310}$ and $^{221}104^{335}$. Some of them are heavy double-magic nuclei, while some others are mid-shell nuclei predicted as stable due to the presence of quadratic term.

For comparison we have selected two of the most successful macroscopic-microscopic models: the Finite Range Droplet Model (FRDM) [10] and Duflo–Zuker (DZ) model [15]. For the FRDM the separation of macroscopic and microscopic contributions is performed by the authors. The microscopic contribution is plotted in the right-hand side of Fig. 5. It is remarkable that $^{184}\text{Pb}^{266}$ is already predicted to be particularly stable, and the midshell nuclei $^{155}104^{259}$ and $^{221}104^{335}$ are also exhibited as relatively stable. However, the region of stable nuclei around $^{184}126^{310}$ is fairly spread.

In the DZ model with 28 parameters there is a macroscopic sector, but it is referred as a *baseline*, not a proper liquid drop, in Refs. [13,14]. The microscopic corrections shown in Fig. 6 were obtained removing a liquid drop calculation fitted to the DZ predictions. The stability around $^{184}\text{Pb}^{266}$ is already there, but instead of $^{155}104^{259}$ the stability region is displaced to a heavier region by about ten nucleons, both for protons and neutrons.

As a further test of the present model, cubic terms in $n_\pi + n_\nu$ were included in a global fit. The r.m.s. error did not exhibit any improvement. However, this cubic term has a negative coefficient, which makes the quadratic contribution smoother, as shown in Fig. 7.

The double closure at magic numbers and mid-shell closures seems to be robust predictions of the present model. It would be expected that refined versions of this model, with r.m.s. fitting capabilities closer to the FRDM and the DZ models, would have slight modifications, but the islands of stability would remain where there are predicted now.

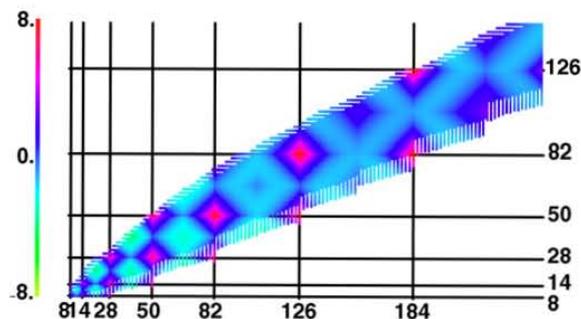


Fig. 7. Predictions up to the drip lines using our formula which includes shell corrections up to cubic terms.

5. Final remarks

The study of the differences between experimental binding energies and those calculated with macroscopic mass formulas, plotted on the plane N – Z over the entire nuclear landscape, motivated the introduction of a simple parametrization which includes shell corrections by using terms like $(n_\nu + n_\pi)/2$ to fit the nuclear landscape with a r.m.s. deviation of 1.3 MeV.

In order to retain the validity of the parameters fitted using the macroscopic expression, Eq. (2), the average contributions of the microscopic terms were removed. Proceeding in this way, we have obtained a r.m.s. deviation of 1.3 MeV starting from a formula that takes into account the surface asymmetry and the Wigner term. When the curvature and the correction to the Coulomb energy were added the fits improved by 100 keV [18].

The AME95–AME03 test presented in the report of Lunney et al. [1] was applied successfully to the model predictions. Islands of stability were predicted for superheavy nuclei with magic or mid-shell proton and neutron numbers. They were not far from the predictions of more sophisticated models like the FRDM and DZ models. Having included the most relevant shell corrections, the present model could serve as a basis for more elaborated techniques in the quest for precise nuclear mass predictions.

Note added in proof

An excellent study on the mutual influence of terms in the semiempirical mass formula has just been published (M.W. Kirson, Nucl. Phys. A 798 (2008) 29). It complements the results presented here.

Acknowledgement

This work was supported in part by Conacyt, México and DGAPA, UNAM.

References

- [1] D. Lunney, J.M. Pearson, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 1021.
- [2] C.F. von Weizsäcker, Z. Phys. C 96 (1935) 431.
- [3] H.A. Bethe, R.F. Bacher, Rev. Mod. Phys. 8 (1936) 82.
- [4] A. Bohr, B.R. Mottelson, Nuclear Structure, vol. I, World Scientific, 1988.
- [5] S.R. Souza, P. Danielewicz, S. Das Gupta, R. Donangelo, W.A. Friedman, W.G. Lynch, W.P. Tan, Phys. Rev. C 67 (2003) 051602.

- [6] P. Danielewicz, Nucl. Phys. A 727 (2003) 233.
- [7] G. Royer, C. Gautier, Phys. Rev. C 73 (2006) 067302.
- [8] W.D. Myers, W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81 (1966) 1.
- [9] P. Moller, W.D. Myers, W.J. Swiatecki, J. Treiner, At. Data Nucl. Data Tables 39 (1988) 225.
- [10] P. Moller, J.R. Nix, W.D. Myers, W.J. Swiatecki, At. Data Nucl. Data Tables 59 (1995) 185.
- [11] W.D. Myers, Droplet Model of Atomic Nuclei, IFI/Plenum, New York, 1977.
- [12] P. Van Isacker, in: 12th International Symposium, On Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics, AIP Conf. Proc. 819 (2006) 57;
A.E.L. Dieperink, P. Van Isacker, Eur. Phys. J. A 32 (2007) 11.
- [13] J. Duflo, Nucl. Phys. A 576 (1994) 29.
- [14] A.P. Zuker, Nucl. Phys. A 576 (1994) 65.
- [15] J. Duflo, A.P. Zuker, Phys. Rev. C 52 (1995) R23.
- [16] A. Frank, J.C. López Vieyra, J. Barea, J.G. Hirsch, V. Velázquez, P. Van Isacker, AIP Conf. Proc. 819 (2006) 151;
I. Morales, A. Frank, J.C. López-Vieyra, J. Barea, J.G. Hirsch, V. Velázquez, P. Van Isacker, Int. J. Mod. Phys. E 15 (2006) 1855;
A. Frank, J.C. López-Vieyra, I. Morales, J. Barea, J.G. Hirsch, V. Velázquez, P. Van Isacker, Rev. Mex. Fis. S 52 (2006) 17;
A. Frank, J.C. López Vieyra, J. Barea, J.G. Hirsch, V. Velázquez, P. Van Isacker, AIP Conf. Proc. 884 (2007) 61.
- [17] G. Audi, A.H. Wapstra, C. Thibault, Nucl. Phys. A 729 (2003) 337.
- [18] J. Mendoza-Temis, Master Thesis in Physics, ICN-UNAM, 2008.
- [19] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, I. Talmi, Phys. Lett. B 66 (1977) 205.
- [20] F. James, Minuit: Function Minimization and Error Analysis Reference Manual, Version 94.1, CERN, 1994.
- [21] E. Caurier, et al., Phys. Rev. C 359 (1999) 2033.
- [22] G. Audi, A.H. Wapstra, C. Thibault, Nucl. Phys. A 595 (1995) 409.



Bibliografía

- [1] C.F. von Weizsäcker, Z Phys. C 96, 431 (1935).
- [2] H.A. Bethe, R.F. Bacher, Rev. Mod. Phys., 8, 82. (1936).
- [3] A. Bohr y B.R. Mottelson, "Nuclear Structure - Vol. I", World Scientific (1988).
- [4] G. Audi, A.H. Wapstra y C. Thibault, Nucl. Phys. A 729, 337 (2003).
- [5] M.W. Kirson, Nucl. Phys. A 798, 29-60 (2008).
- [6] A. de Shalit y H. Feshbach, "Theoretical Nuclear Physics: Nuclear Structure - Vol. I", Wiley (1974).
- [7] W.D. Myers y W.J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81, 1 (1966).
- [8] P. Moller, W.D. Myers, W.J. Swiatecki y J. Treiner, Atomic Data Nucl. Data Tables 39, 225 (1988).
- [9] P. Moller, J.R. Nix, W.D. Myers, y W.J. Swiatecki, At. Data Nucl. Data Tables 59, 185 (1995).
- [10] Strutinsky, V. M., Nucl. Phys. A 95, 420. (1967).
Strutinsky, V. M., Nucl. Phys. A 122, 1. (1968).
- [11] D. Lunney, J.M. Pearson y C. Thibault, Rev. Mod. Phys. 75, 1021 (2003).

-
- [12] W.D. Myers y W.J. Swiatecki, *Ann. Phys.* 55, 395 (1969).
- [13] W.D. Myers y W.J. Swiatecki, *Ann. Phys.* 84, 186 (1974).
- [14] W.D. Myers, W.J. Swiatecki, T. Kodama, L.J. El-Jaick y E.R. Hilf, *Phys. Rev. C* 15, 2032 (1977).
- [15] P. Moller y J.R. Nix, *Nucl. Phys A* 361, 117 (1981).
- [16] J. Treiner, W.D. Myers, W.J. Swiatecki y M. S. Weiss, *Nucl. Phys A* 452, 93 (1986).
- [17] S.R. Souza, P. Danielewicz, S. Das Gupta, R. Donangelo, W.A. Friedman, W.G. Lynch y W.P. Tan, *Phys. Rev. C* 67 (2003).
- [18] G. Royer y C. Gautier, *Phys. Rev. C* 73 (2006).
- [19] P. Danielewicz, *Nucl. Phys. A* 727, 233 (2003).
- [20] P. Van Isacker, *12th Int. Symp. On Capt. Gamma-Ray Spectr. and Related Topics*. Vol. 819. AIP, 57 (2006).
- [21] J. Duflo, *Nucl. Phys. A* 576, 29 (1994).
- [22] A.P. Zuker, *Nucl. Phys. A* 576, 65 (1994).
- [23] J. Duflo y A.P. Zuker; *Phys. Rev. C* 52, 23 (1995).
- [24] Y. Aboussir, J.M. Pearson, A. K. Dutta, and F. Tondeur, *Nucl. Phys. A* 549, 155 (1992).
Y. Aboussir, J.M. Pearson, A. K. Dutta, and F. Tondeur, *At. Data Nucl. Data Tables* 61, 127 (1995).
J.M. Pearson, Y. Aboussir, A. K. Dutta, R. C. Nayak, M. Farine, and F. Tondeur, *Nucl. Phys. A* 528, 1 (1991).
- [25] W.D. Myers y W.J. Swiatecki, *Nucl. Phys. A* 601, 141 (1996).
- [26] A. P. Zuker, Comunicación privada (2008).
- [27] M. Dufour y A.P. Zuker, *Phys. Rev. C* 54, 1641 (1996).
- [28] M. Duflo y A.P. Zuker, *Phys. Rev. C* 59, R2347.(1999).
-

-
- [29] T.T.S. Kuo y G.E. Brown, Nucl. Phys. A 85, 40 (1966).
T.T.S. Kuo y G.E. Brown, Nucl. Phys. A 114, 241 (1968).
G.E. Brown y T.T.S. Kuo, 1967, Nucl. Phys. A 92, 481 (1967).
T.T.S. Kuo, Nucl. Phys. A 90, 199 (1967).
- [30] Georges Audi, Lecture given at the Tutorial session of the Euroconference on Atomic Physics at Accelerators - Mass Spectrometry (Apac-2000), Cargèse.
http://arxiv.org/PS_cache/nucl-ex/pdf/0302/0302020v3.pdf
- [31] W.R. Leo, "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments", Springer-Verlag (1994).
- [32] V. Canuto y M. Bauer, Phys. Lett. 7, 261 (1963).
- [33] K. Bos, G. Audi y A. H. Wapstra, Nucl. Phys. A 432, 140 (1985).
- [34] C. Borcea y G. Audi, AIP Conf. Proc. 455, 98 (1998).
C. Borcea y G. Audi, Proc. Int. Conf. on Exotic Nuclei and Atomic Masses, Arles, June 1995, 127 (Enam 1995).
C. Borcea, G. Audi, A.H. Wapstra y P. Favaron, Nucl. Phys. A 565, 158 (1993).
C. Borcea y G. Audi, Rev. Roum. Phys. 38 (1993) 455; Report CSNSM 92, (October 1992);
<http://www.nndc.bnl.gov/amdc/extrapolations/bernex.pdf>.
C. Borcea, G. Audi y J. Duflo; 6th International Conference on Nuclei far from Stability (Nufast-6) + 9th International Conference on Atomic Masses and Fundamental Constants (AMCO-9), Bernkastel-Kues (Allemagne), 59, (19-24 July 1992).
- [35] G. Audi, A. H. Wapstra y C. Thibault, Nucl. Phys. A 595, 409 (1995).
- [36] H.v. Groote, E.R. Hilf y K. Takahashi, At. Nucl. Data Tables 17, 418 (1976).
- [37] R. B. Cakirli y R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. 96, 132501 (2006).
Y. Oktem, R. B. Cakirli, R. F. Casten, R. J. Casperson y D. S. Brenner, Phys. Rev. C 74, 027304 (2006).
R. B. Cakirli, D. S. Brenner, R. F. Casten y E. A. Millman, Phys. Rev.
-

-
- Lett. 94, 092501 (2005).
- Y. M. Zhao, R. F. Casten y A. Arima, Phys. Rev. Lett. 85, 720 (2000).
- G. Streletz, A. Zilges, N. V. Zamfir, R. F. Casten, D. S. Brenner y B. Liu, Phys. Rev. C 54, R2815 (1996).
- R. F. Casten y N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. 70, 402 (1993).
- R. Casten, "Nuclear Structure from a Simple Perspective", Oxford University Press (1990).
- A. S. Mowbray, I. Ahmad, Ph. Benet, R. F. Casten, M. P. Carpenter, J. L. Durell, J. B. Fitzgerald, M. A. C. Hotchkis, R. V. F. Janssens, T. L. Khoo, E. F. Moore, L. R. Morss, W. R. Phillips, W. Walters y D. Ye Phys. Rev. C 42, 1126 (1990).
- P. E. Haustein, D. S. Brenner y R. F. Casten, Phys. Rev. C 38, 467 (1988).
- R. F. Casten, D. S. Brenner y P. E. Haustein, Phys. Rev. Lett. 58, 658 (1987).
- R. F. Casten, Phys. Rev. C 33, 1819 (1986).
- R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. 54, 1991 (1985).
- R. F. Casten, Nucl. Phys. A 443, 1 (1985).
- [38] W.D. Myers, "Droplet Model of Atomic Nuclei", IFI/Plenum, New York (1977).
- [39] J.W. Gibbs "The Collected Works", Yale Univ. Press, New Haven, (1948).
- [40] W. Satula, D.J. Dean, J. Gary, S. Mizutori y W. Nazarewicz, Phys. Lett. B 407, 103 (1997).
- [41] N. Zeldes, Phys. Lett. B 429, 20 (1998).
- [42] J. Janecke, T.W. O'Donnell y V.I. Goldanskii, Nucl. Phys. A 728, 23 (2003).
- [43] J. Janecke y T.W. O'Donnell, Phys. Lett. B 605, 87 (2005).
- [44] P. Van Isacker, D. D. Warner y D. S. Brenner Phys. Rev. Lett. 74, 4607 (1995).
- [45] D.D. Warner, M. Bentley y P. Van Isacker, Phys. Nature 2, 311 (2006).
-

-
- [46] A.E.L. Dieperink y P. Van Isacker, Eur. Phys. J. A 32, 11 (2007).
- [47] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello e I. Talmi, Phys. Lett. B 66, 205 (1977).
- [48] E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, J. Retamosa y A. P. Zuker, Phys. Rev. C 59, 2033 (1999).
- [49] F. James, Minuit: Function Minimization and Error Analysis Reference Manual, Version 94.1, CERN (1994).
- [50] J. Mendoza-Temis, A. Frank, J.G. Hirsch, J.C. Lopez Vieyra, I. Morales, J. Barea, P. Van Isacker y V. Velazquez, "Nuclear masses and the number of valence nucleons", Nucl. Phys. A 799, 84 (2008).
- [51] A. P. Zuker, Comunicación privada (2007).
- [52] P. Van Isacker, Comunicación privada (2007).

