



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

**MODELOS DE OPCIONES REALES PARA TOMA DE
DECISIONES: APLICACIÓN A PROBLEMAS DE
MANTENIMIENTO Y ABANDONO EN PLATAFORMAS
MARINAS DE PRODUCCIÓN DE HIDROCARBUROS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE :

DOCTOR EN INGENIERIA

Ingeniería Civil-Estructuras

P R E S E N T A :

SANDRA CECILIA SANTA CRUZ HIDALGO

Tutor:

DR. ERNESTO HEREDIA ZAVONI

2008





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Esteva Maraboto Luis

Secretario: Dra. Fernandez Fernandez M.A. Begoña

1^{er.} Vocal: Dr. Heredia Zavoni Ernesto

2^{do.} Vocal: Dr. Meli Piralla Roberto

3^{er.} Vocal: Dr. Auvinet Guichard Gabriel

1^{er.} Suplente: Dra. Ruiz Gómez Sonia Elda

2^{do.} Suplente: Dr. Ordaz Schroeder Mario Gustavo

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

DR. ERNESTO HEREDIA ZAVONI

A Antonio y Carolina,
más de lo que pensé que sería

Agradecimientos

Al doctor Ernesto Heredia Zavoni, por la impecable dirección de esta tesis y sobre todo, por su incondicional apoyo e invaluable amistad.

Al doctor Mario Ordaz Schroeder, por la certeza de sus comentarios y observaciones al trabajo y por el lujo de contar con su amistad.

Al doctor Luis Esteva Maraboto por su atención en las revisiones parciales del trabajo y sus atinadas observaciones.

A la doctora Sonia Ruiz, por su esmerada revisión del trabajo, sus observaciones en la defensa del tema de tesis y sus palabras de ánimo.

Al doctor Roberto Melli Piralla por sus consejos y su apoyo en la culminación del trabajo.

A la doctora María Begoña Fernández, por su interesante punto de vista durante la revisión de este trabajo.

Al doctor Gabriel Auvinet, por su paciente revisión del trabajo y sus acertadas observaciones al documento de defensa y tesis.

A la DGEP por la beca para la realización de este estudio de posgrado en los dos primeros años del doctorado.

Agradecimientos

A Antonio Zeballos Cabrera, mi querido esposo, por tomar para sí algunos compromisos mutuos con el fin de hacer posible la realización de este trabajo y por darme el ánimo para seguir adelante.

A Rosa Hidalgo de Santa Cruz y Frida Cabrera de Zeballos, por el sacrificio de dejar temporalmente sus lugares de residencia y apoyarme con el cuidado de mi hija Carolina durante el tercer semestre del doctorado.

A Zuny Celestino, por su amistad y apoyo durante mi estancia como becaria en el Instituto de Ingeniería de la UNAM en donde se desarrolló gran parte de este trabajo.

A Carolina Zeballos Santa Cruz, por aceptar de buena gana y a tan corta edad algunas inatenciones cuando los plazos de entrega apremiaban.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	ANTECEDENTES.....	1
1.2	OBJETIVO Y ALCANCES DEL TRABAJO.....	4
1.3	CONTENIDO DEL DOCUMENTO	4
2	BASE TEÓRICA Y METODOLÓGICA.....	6
2.1	OPCIONES FINANCIERAS.....	6
2.2	MÉTODO DE OPCIONES REALES.....	10
2.2.1	Opción de aplazamiento.....	11
2.2.2	Opción de abandono	12
2.2.3	Opción de ampliación o crecimiento	13
2.2.4	Opción de reducción	13
2.2.5	Opción de intercambio.....	13
2.3	CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL EN PLATAFORMAS MARINAS... 14	
2.3.1	Definición.....	14
2.3.2	Tipos de fallas.....	14
2.3.3	Probabilidad de la ocurrencia de la falla de una conexión por fatiga....	16
2.3.4	Probabilidad de falla por sobreesfuerzo considerando estados de daño 17	
2.3.5	Función de peligro.....	19
2.3.6	Función de reposición.....	20
2.3.7	Función de disponibilidad	20
2.4	PROCESOS.....	22
2.4.1	Inspección	22
2.4.2	Mantenimiento.....	24
2.4.3	Reposición.....	26
2.5	RESUMEN DE CAPÍTULO	27
3	MODELO MATEMÁTICO.....	28
3.1	PLANTEAMIENTO	28

3.2	MODELO PARA LA PROBABILIDAD ANUAL DE FALLA.....	29
3.2.1	Probabilidad anual de falla de plataformas con mantenimiento ideal..	30
3.3	MODELO PARA LA FUNCIÓN DE PELIGRO	32
3.3.1	Función de peligro de plataformas con mantenimiento ideal	33
3.4	MODELO PARA LA FUNCIÓN DE REPOSICIÓN	34
3.4.1	Función de reposición de plataformas con mantenimiento ideal	34
3.5	MODELO PARA LA DISPONIBILIDAD	34
3.5.1	Función de disponibilidad de plataformas con mantenimiento ideal...	35
3.6	MODELO PARA EL PRECIO DEL HIDROCARBURO.....	38
3.7	MODELO PARA EL FLUJO DE EFECTIVO.....	39
3.7.1	Flujos de efectivo sin considerar desfases por tiempo de reposición	40
3.7.2	Flujos de efectivo considerando desfases por reposición con distribución exponencial	40
3.7.3	Flujos de efectivo concentrados.....	43
3.7.4	Flujo del proyecto por unidad de tiempo	45
4	CASOS DE ANÁLISIS.....	46
4.1	INTRODUCCIÓN	46
4.2	OPCIÓN DE MANTENIMIENTO.....	47
4.2.1	Planteamiento.....	47
4.2.2	Identificación de la opción de mantenimiento	47
4.2.3	Cálculo de flujos esperados.....	50
4.2.4	Valor de la opción y del proyecto	52
4.2.5	Ejemplos numéricos	59
4.3	OPCIÓN DE ABANDONO.....	78
4.3.1	Planteamiento.....	78
4.3.2	Identificación de la opción de abandono	79
4.3.3	Cálculo de flujos esperados.....	81
4.3.4	Valor de la opción y del proyecto	82
4.3.5	Ejemplo numérico.....	84
4.4	OPCIÓN DE MANTENIMIENTO Y ABANDONO.....	87
4.4.1	Planteamiento.....	87
4.4.2	Identificación de la opción de mantenimiento y abandono	87
4.4.3	Cálculo de flujos.....	90
4.4.4	Valor de las opciones y del proyecto	90
4.4.5	Ejemplo numérico.....	91

4.5	OPCIÓN DE ABANDONO EN DOS PUNTOS.....	92
4.5.1	Planteamiento.....	92
4.5.2	Identificación de las opciones de abandono	93
4.5.3	Valor de las opciones	94
5	CONCLUSIONES	97
6	REFERENCIAS	100
	APÉNDICE A: DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE BLACK Y SCHOLES PARA LA EVALUACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA DE TIPO EUROPEO	104
	APÉNDICE B: PROCESO DE MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO	107
	APÉNDICE C: ENUNCIADO DEL LEMA DE ITO.....	109
	APÉNDICE D: DEDUCCIÓN DE VALOR ESPERADO DE OPCION DE COMPRA.....	110
	APÉNDICE E: DEDUCCIÓN DE VALOR ESPERADO DE OPCIÓN DE COMPRA COMPUESTA	113
	APÉNDICE F: FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DEL TIEMPO DE OCURRENCIA DE LA K-ÉSIMA FALLA	117
	APÉNDICE G: PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE K FALLAS	120

NOMENCLATURA

A	Profundidad de grieta
α	Parámetros de fdp actualizada
a_{crit}	Profundidad crítica de grieta
a_d	Profundidad mínima de grieta detectable
a_m	Profundidad de grieta medida
\hat{a}	Profundidad teórica de grieta
β	Parámetros de fdp actualizada
\mathcal{E}	Valor de una opción de compra (<i>call option</i>)
CA	Costo de colocación de abrazadera en conexión soldada de plataforma
CI	Costo de inspección
CL	Costo de trabajos de esmerilado en conexión soldada de plataforma
CR	Costo de reposición
δ	Tasa de descuento o costo de oportunidad
d	Daño
D	Función de disponibilidad
D, Ω	Desviación estándar
d_{adm}	Umbral de daño permitido
d_i	Estado de daño
D^M	Función de disponibilidad de estructura con mantenimiento
Δt	Intervalo de tiempo
E	Precio de ejercicio de una opción financiera
ε	Error
$E[]$	Valor esperado
f	Función de densidad de probabilidad
F	Función de distribución de probabilidad
\mathcal{F}	Flujo de efectivo de un proyecto
$\Phi()$	Función de distribución normal estándar acumulada
\mathcal{F}_{nop}	Flujo de la estructura con interrupción de actividades
\mathcal{F}_{op}	Flujo de la estructura en operación
G	Gastos de operación por unidad de tiempo
g	Integral de costos de operación
\bar{g}	Costos de operación por unidad de tiempo
γ	Función de reposición
Γ	Función gamma
I	Resultado de una inspección
K_1	Variable de la fórmula de Black y Scholes
K_2	Variable de la fórmula de Black y Scholes

L	Horizonte del proyecto, vida útil de la estructura
λ	Función o tasa de peligro
λ^M	Función de peligro de estructura con mantenimiento
μ	Tasa de crecimiento
m	Integral de costos de falla
\bar{m}	Costos de falla por unidad de tiempo
M	Media
μ^M	Función de reposición de estructura con mantenimiento
N	Producción por unidad de tiempo
n	Integral de volumen de producción
\bar{n}	Volumen de producción por unidad de tiempo
ν	Tasa de cruces o tasa de excedencia
P	Probabilidad
p	Precio de hidrocarburo
\mathcal{P}	Valor de opción de venta (<i>put option</i>)
Pa	Probabilidad de falla anual ante eventos máximos
Pf	Probabilidad de falla
PoD	Probabilidad de detección
θ	Factor de forma de distribución Weibull
Q	Variable de la función de disponibilidad
r	Tasa de interés libre de riesgo
R	Confiabilidad
ρ	Correlación
R^M	Confiabilidad de estructura con mantenimiento
S	Precio de un activo, flujo de efectivo concentrado
s	Flujo de efectivo concentrado
σ^2	Varianza del valor de un activo por unidad de tiempo
T	Tiempo de vencimiento de una opción financiera
t, τ	Tiempo
T_1	Tiempo de realización de mantenimiento o de abandono
VPN	Valor presente neto
VTP	Valor total del proyecto
w	Factor de escala de distribución Weibull
X, x	Tiempo a la primera falla
X_0	Desembolso o inversión inicial de un proyecto
X_1	Costo de mantenimiento
ψ	Función de distribución normal bivariada
Y	Duración de trabajos de reposición de la estructura
Ψ	Indicador del daño acumulado por el crecimiento de grieta por fatiga

INTRODUCCIÓN

Es frecuente que un ingeniero, en el ejercicio de su profesión, enfrente problemas de toma de decisiones. De estas decisiones dependerá la forma de llevar a cabo proyectos de diseño, construcción, reparación, mantenimiento o inspección de infraestructura civil que, en mayor o menor medida, repercutirán en beneficio de la sociedad en general. El proceso de análisis de decisiones consiste en identificar la mejor política o estrategia desde el punto de vista de las partes interesadas, utilizando para ello toda la información disponible. La decisión puede realizarse de manera intuitiva o con base en resultados analíticos de la evaluación del proyecto; la manera de evaluar el proyecto y la elección de los parámetros serán determinantes en el resultado final.

La factibilidad de proyectos de ingeniería ha sido analizada por diversos autores con la teoría clásica de decisiones. Técnicas racionales de decisiones han sido desarrolladas para la identificación de estrategias óptimas en recursos hidráulicos (Bouchart et al 1988), en ingeniería geotécnica (Whitman, 2000), en ingeniería estructural (Rosenblueth, 1971) y en ingeniería ambiental (Stansbury, 1999).

De manera general, el método utilizado en la mayoría de los trabajos para la evaluación de proyectos consiste en determinar y comparar los valores esperados de ingresos (positivos) y egresos (negativos) considerando capitalización del dinero. Este método es conocido en finanzas como método de Valor Presente Neto (VPN) para la evaluación de proyectos.

Existen otros modelos para la evaluación de proyectos que se basan en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento catastrófico como podría ser una bancarrota o el colapso de una estructura. El analista preferirá los proyectos con menor probabilidad de quiebra o colapso.

Uno de los métodos más aceptados en los últimos 10 años en el área de las matemáticas financieras para la evaluación de proyectos de inversión es el de "opciones reales" (Luehrman, 1998, Stonier y Triantis, 1998). Basado en la formulación realizada por los economistas Black y Scholes (1973) para evaluar opciones financieras, el método supera las dos limitaciones del VPN antes mencionadas pues considera la varianza de las ganancias y permite modelar las opciones de abandono, ampliación, reducción, intercambio o aplazamiento del proyecto.

La evaluación de proyectos de infraestructura de producción de hidrocarburos, IPH, se realiza principalmente con el método de VPN, aunque existen algunos autores que han incorporado el efecto de la flexibilidad operativa en la evaluación de la factibilidad económica de explotación de hidrocarburos costa-afuera. Uno de

ellos es el de Paddock (1988); no obstante, estos estudios se basan en análisis de las variables económicas y de producción sin considerar las variables técnicas que influyen en la confiabilidad de la estructura y por ende en el valor económico del proyecto.

La posibilidad de incorporar o adaptar los avances recientes en los modelos para la toma de decisiones en proyectos IPH resulta atractiva. Esto permitiría superar algunas de las limitaciones de los modelos actualmente utilizados en la evaluación de dichos proyectos, principalmente el de la desestimación de la flexibilidad operativa. Por otro lado, representaría una innovación en un campo de gran importancia económica y estratégica, lo cual según nuestro punto de vista, justifica la investigación que se plantea en este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se propone un método para la evaluación de proyectos de infraestructura de producción de hidrocarburos. Este método se basa en los modelos de opciones reales utilizados en el área de finanzas e inversiones para proyectos con posibilidad de cambios en el transcurso de su vida. El método ha sido aplicado al caso particular de plataformas marinas de acero de producción de hidrocarburos. Se considera que dichas estructuras van a estar sometidas a los efectos de huracanes que pueden llevar a la estructura a una paralización de actividades. Por otro lado, el oleaje operacional ocasiona deterioro por fatiga en sus conexiones soldadas, lo cual puede disminuir la capacidad de desempeño de la estructura frente a los eventos extremos.

Se presentan las situaciones de mantenimiento y abandono como opciones o alternativas que en algún momento dependerán del tomador de decisiones. El flujo de dinero esperado es determinado por el precio del hidrocarburo, modelado como un proceso aleatorio de movimiento browniano geométrico. El flujo depende además de las características de producción, los costos de reparación, el comportamiento de la estructura frente a eventos extremos, las consecuencias del deterioro por fatiga, la duración de los trabajos de reposición en caso de falla de la estructura y, dado el caso, la información de inspecciones y los efectos de los trabajos de mantenimiento en la estructura.

El análisis de los flujos anuales permite cuantificar el beneficio de realizar los trabajos de mantenimiento. Así mismo el análisis de los costos anuales de falla puede ser útil para establecer periodos de mantenimiento, determinar la calidad de dichos trabajos, fijar políticas de aseguramiento, límites de cobertura o primas de seguros.

Los ejemplos muestran la capacidad del método para cuantificar el valor agregado que tienen los proyectos con posibilidad de abandono o mantenimiento. Las implicaciones prácticas son tanto técnicas como financieras. Un ejemplo del primer caso podría ser la elección entre una nueva alternativa estructural con posibilidad de montaje más eficiente que las soluciones actuales. Esta ventaja puede significar un mayor costo de infraestructura y en un análisis convencional el uso de la alternativa estructural puede resultar menos rentable que los sistemas usados actualmente. Sin embargo, en el caso de que exista la opción de abandono, la posibilidad de un montaje más eficiente, puede significar un mayor valor de liquidación, lo que puede hacer que la estructura alternativa sea la más rentable. En el segundo caso, la posibilidad de efectuar la valoración de proyectos de infraestructura con flexibilidad operativa permite una mejor colocación de proyectos de inversión en infraestructura frente a otros tipos de inversiones.

ABSTRACT

A method for project evaluation of hydrocarbon production infrastructure is proposed. It is based in real options model used in investment and finance areas for projects with change possibility within its life. The method has been applied in hydrocarbon production offshore platforms. It is considered that hurricanes in the zone can bring these steel structures to an inoperative state. On the other side, operational wave generates deterioration in its welded connections, which can diminish the performance capacity of the structure to faces eventual extreme events.

Maintenance and decommissioning situations are treated as options that are going to depend on decision maker. Expected cash flow is determined by the hydrocarbon price, which is modeled as a Brownian geometric process. Production characteristics, reposition cost, structure performance in extreme events, fatigue deterioration consequences, reposition interval in case of failure, and when apply, inspection information and maintenance effects in the structure are also included in the determination of the cash flow.

Annual cash flows analysis allows us to quantify the effect of maintenance works. Annual cost of failure can be useful for establish maintenance intervals and quality and determine some values for insurance purposes.

Examples show that the method is capable to quantify the aggregate value of the projects with decommissioning and maintenance options. Practical implications can be both technical and financial. An example of the technical ones can be presented in the structural alternative selection phase when we have a new structure with a more efficient assembling system than the conventional alternatives. This advantage can mean a higher initial cost but when decommissioning options exists the liquidation value can be greater than the one of the conventional structure. We can value this advantage and the new structure can be more rentable than the conventional one. On the other side the possibility of valuate structural projects with options bring them the chance of a better position when competing with other kind of investments.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

Es frecuente que un ingeniero, en el ejercicio de su profesión, enfrente problemas de toma de decisiones. De estas decisiones dependerá la forma de llevar a cabo proyectos de diseño, construcción, reparación, mantenimiento o inspección de infraestructura civil que, en mayor o menor medida, repercutirán en beneficio de la sociedad en general. El proceso de análisis de decisiones consiste en identificar la mejor política o estrategia desde el punto de vista de las partes interesadas, utilizando para ello toda la información disponible. La decisión puede realizarse de manera intuitiva o con base en resultados analíticos de la evaluación del proyecto; la manera de evaluar el proyecto y la elección de los parámetros serán determinantes en el resultado final.

La factibilidad de proyectos de ingeniería ha sido analizada por diversos autores con la teoría clásica de decisiones. Técnicas racionales de decisiones han sido desarrolladas para la identificación de estrategias óptimas en recursos hidráulicos (Bouchart et al 1988), en ingeniería geotécnica (Whitman, 2000), en ingeniería estructural (Rosenblueth, 1971) y en ingeniería ambiental (Stansbury, 1999).

De manera general, el método utilizado en la mayoría de los trabajos para la evaluación de proyectos consiste en determinar y comparar los valores esperados de ingresos (positivos) y egresos (negativos) considerando capitalización del dinero. Este método es conocido en finanzas como método de Valor Presente Neto (VPN) para la evaluación de proyectos.

El método consiste en averiguar si la rentabilidad del proyecto de inversión analizado es mayor que el costo de llevarlo a cabo. La fórmula para evaluar el valor presente neto de un proyecto es la siguiente:

$$VPN = -X_0 + \sum_{j=1}^L \frac{F_j}{(1 + \delta)^j} \quad (1)$$

donde X_0 es el desembolso inicial del proyecto, F_j es el valor esperado del flujo de caja del tiempo j , L es el horizonte temporal del proyecto y δ es la tasa de descuento o costo de oportunidad, entendiéndose a ésta como la rentabilidad más valiosa a la que se renuncia si se lleva a cabo el proyecto (Ross, 1996). La estimación de la tasa de descuento es de por sí un reto para los analistas por la variabilidad del mercado.

El VPN (que puede ser un valor o una función de las variables de decisión) es utilizado por el ingeniero para evaluar, comparar u optimizar proyectos. Los criterios son los siguientes: (1) si el VPN es positivo, el proyecto es factible; en caso contrario, debe rechazarse; (2) en caso de varios proyectos factibles se deberá elegir el que tenga mayor VPN (3) cuando se tiene la opción de escoger los parámetros que determinan el VPN se elegirá los que lo maximicen. Este método es muy popular por su sencillez conceptual y relativa fácil aplicación. Sin embargo, la utilización exclusiva de los valores esperados para determinar la calidad de un proyecto es poco adecuada cuando existe gran variabilidad en los valores de ingresos o egresos o en la tasa de costo de oportunidad. Otra limitación del método consiste en que considera tiempos fijos en el flujo de costos y pérdidas, lo cual no resulta apropiado cuando existe flexibilidad operativa en los proyectos, es decir, opciones de abandono, de ampliación, de reducción, de intercambio o de aplazamiento. Estas situaciones pueden ser frecuentes en proyectos de ingeniería relacionados con explotación de recursos naturales, producción, y en general en proyectos de gran importancia estratégica o de gran envergadura, en donde las pérdidas por la falta de operación sean predominantes en el costo total del proyecto.

Existen otros modelos para la evaluación de proyectos que se basan en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento catastrófico como podría ser una bancarrota o el colapso de una estructura. El analista preferirá los proyectos con menor probabilidad de quiebra o colapso.

Uno de los métodos más aceptados en los últimos 10 años en el área de las matemáticas financieras para la evaluación de proyectos de inversión es el de "opciones reales" (Luehrman, 1998, Stonier y Triantis, 1998). Basado en la formulación realizada por los economistas Black y Scholes (1973) para evaluar opciones financieras, el método supera las dos limitaciones del VPN antes mencionadas pues considera la varianza de las ganancias y permite modelar las opciones de abandono, ampliación, reducción, intercambio o aplazamiento del proyecto.

La evaluación de proyectos de infraestructura de producción de hidrocarburos, IPH, se realiza principalmente con el método de VPN, aunque existen algunos autores que han incorporado el efecto de la flexibilidad operativa en la evaluación de la factibilidad económica de explotación de hidrocarburos costa-afuera. Uno de ellos es el de Paddock (1988); no obstante, estos estudios se basan en análisis de las variables económicas y de producción sin considerar las variables técnicas que influyen en la confiabilidad de la estructura y por ende en el valor económico del proyecto.

La posibilidad de incorporar o adaptar los avances recientes en los modelos para la toma de decisiones en proyectos IPH resulta atractiva. Esto permitiría superar algunas de las limitaciones de los modelos actualmente utilizados en la evaluación de dichos proyectos, principalmente el de la desestimación de la flexibilidad operativa. Por otro lado, representaría una innovación en un campo de gran importancia económica y estratégica, lo cual según nuestro punto de vista, justifica la investigación que se plantea a continuación.

1.2 OBJETIVO Y ALCANCES DEL TRABAJO

En este trabajo se plantea formular una solución a problemas de decisión relacionados con mantenimiento y abandono de IPH a la luz de los avances en el método de opciones reales, que viene siendo aplicado con éxito en otras áreas del conocimiento. Se planea adecuar los modelos de opciones reales a los problemas específicos de la IPH e incluir las variables técnicas que han venido siendo objeto de numerosos estudios por parte de investigadores en el área de la confiabilidad estructural y riesgo de plataformas marinas.

El objetivo de este trabajo de tesis doctoral es, por lo tanto, encontrar un modelo matemático que sirva como una herramienta en la toma de decisiones en proyectos relacionados con inspección, mantenimiento y abandono de IPH, en los cuales el análisis con métodos habituales de costo-beneficio y *VPN* sean inadecuados o limitados. El trabajo se circunscribe al caso de plataformas marinas de acero.

El modelo tomará en cuenta aspectos financieros como la incertidumbre en la variación en los precios de los hidrocarburos, y técnicos tales como la intensidad de los peligros naturales, la capacidad del sistema estructural para soportar las demandas de carga y su deterioro en el tiempo.

1.3 CONTENIDO DEL DOCUMENTO

El capítulo 2 presenta un resumen con las bases teóricas y metodológicas consideradas en el trabajo. En primer lugar se presenta una descripción de las opciones financieras a manera de preámbulo para la explicación del método de las opciones reales. Se muestran las aplicaciones actuales del método en el área de las inversiones y finanzas corporativas y se muestran algunas de las ventajas con respecto a los métodos convencionales de evaluación de proyectos. A continuación se presenta una visión muy sucinta del estado del arte en cuestiones de confiabilidad aplicada principalmente al campo de la ingeniería de plataformas marinas de producción de hidrocarburos. Se explica de manera escueta los procesos de deterioro y falla estructural que llevan a la estructura a una condición de inoperancia. Así mismo, se presenta la formulación básica, que luego será utilizada o adecuada para la evaluación de los proyectos de IPH.

El capítulo 3 presenta la modelación matemática de las variables técnicas y económicas que intervienen en la valoración de los proyectos con opciones reales. Las variables técnicas se relacionan con la probabilidad de que la estructura se

encuentre en un estado no operativo debido a los sobreesfuerzos a los que podría estar sometida en el transcurso de su vida útil y a su deterioro. Entre las variables económicas se incluyen el precio del hidrocarburo y los flujos de efectivo producto de la operación de la estructura. Algunos modelos han sido tomados de la literatura especializada y aplicados a las variables utilizadas en el trabajo. Otros modelos han tenido que ser deducidos y adaptados a partir de modelos existentes para considerar las peculiaridades del presente trabajo.

A continuación, en el capítulo 4, se presenta el estudio de los casos de análisis relacionados con inspección, mantenimiento y abandono de plataformas marinas. Para dicho estudio fue necesario identificar las posibles opciones o alternativas que podrían tener los tomadores de decisiones en cuestiones de mantenimiento y abandono del proyecto. Se presenta el desarrollo algebraico para la deducción de las expresiones para la valoración de los proyectos y de las opciones. Al final de cada caso se presenta un ejemplo numérico realizado con el propósito de ilustrar el método de opciones reales. Se presentan resultados y gráficas que muestran el comportamiento de las variables y las características del método. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

2 BASE TEÓRICA Y METODOLÓGICA

2.1 OPCIONES FINANCIERAS

Una **opción de compra** (*call option*) brinda a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de adquirir un activo pagando una cierta suma de dinero predefinida (denominada precio del ejercicio) en un momento establecido. Si se decide comprar el activo se dice que se ejerce la opción. En algunos casos, la opción sólo puede ejercerse en una fecha (fecha de vencimiento) y, convencionalmente, se le conoce como una opción de compra europea; en otros casos, se puede ejercer antes de o en el vencimiento y, entonces, es conocida como una opción de compra americana. Una **opción de venta** (*put option*) otorga a su propietario el derecho a vender una acción a un precio de ejercicio definido de antemano.

Considérese una opción de compra con un precio de ejercicio de \$100 justo antes de su vencimiento. Si el precio de la acción en ese momento resulta ser inferior al precio del ejercicio, nadie pagará \$100 para obtener la acción vía la opción de compra. Por lo tanto, la opción de compra carecerá de valor y lo mejor será desprenderse de ella. Por el contrario, si el precio de la acción resulta superior a \$100, el propietario de la opción ejercerá la opción de compra. En este caso la opción tendrá un valor igual al valor del mercado de la acción menos los \$100 que tenemos que pagar para adquirirla. Es decir:

$$\text{Valor de la opción de compra} = \text{máx.}\{(\text{precio de la acción}-\text{precio del ejercicio}), 0\} \quad (2)$$

Una opción de compra antes de su fecha de vencimiento tiene un precio que oscila entre dos límites. El límite superior se obtiene analizando la definición de la opción de compra; dado que ésta otorga el derecho a comprar una acción, no puede valer más que la propia acción. El límite inferior viene dado por el valor a la fecha de vencimiento dada por la ecuación (2). Para entender por qué supóngase que la opción de compra del ejemplo (con precio de ejercicio de \$100) se está vendiendo en \$50. Si el precio de la acción es \$200, sería rentable para todo inversionista comprar la opción, ejercerla por 100, lo cual significaría un desembolso de $-\$50 - \$100 = -\$150$, y luego vender la acción a su precio del mercado $+\$200$. Esto nos proporcionaría una máquina de hacer dinero con un beneficio de $+\$50 = +\$200 - \$150$. La demanda de opciones por los inversores forzaría al alza rápidamente el precio de la opción, al menos hasta el valor a la fecha de vencimiento. Los límites del precio de la opción antes de la fecha de vencimiento, se muestran en la Figura 1.

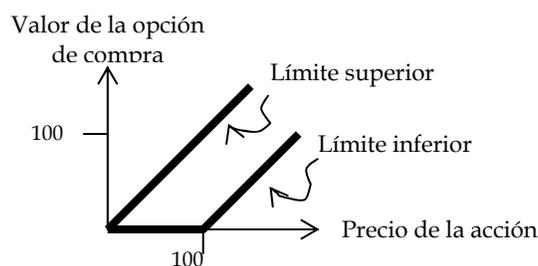


Figura 1: Intervalo de posibles valores de una opción de compra antes de su vencimiento

Se analizará el caso en el que el precio de la acción es igual al precio del ejercicio, es decir \$100. Si la opción fuese ejercida el día de hoy, el valor se calcularía con la ecuación (2) y daría como resultado un valor nulo. Sin embargo, supóngase que la opción no expira sino hasta dentro de tres meses. Por supuesto, no se sabe cuál será el precio de la acción en dicha fecha de expiración. Pero si existe una

probabilidad mayor que cero de que el precio en la fecha de expiración aumente, la opción debe tener algún valor. Esto significa que, en general, el precio de la opción debe ser mayor que su límite inferior mientras tenga que transcurrir un cierto plazo hasta su expiración.

Supóngase que la densidad de probabilidad del precio de la acción puede ser cualquiera de las que se muestra en la Figura 2. El valor de la opción será más difícil de predecir en caso 1 que en el caso 2. En ambos casos hay una probabilidad de 50% de que el precio de la acción descienda y el valor de la opción sea nulo. Por otro lado, la probabilidad de que las acciones aumenten es de 50% para ambos casos, pero la probabilidad de que aumente considerablemente es mayor en el caso 1 que en el caso 2. Por lo tanto, el valor de la opción será mayor en el caso 1 que en el caso 2; esto significa que el valor de la opción de compra será mayor cuando exista mayor volatilidad o variabilidad en el precio de la acción.

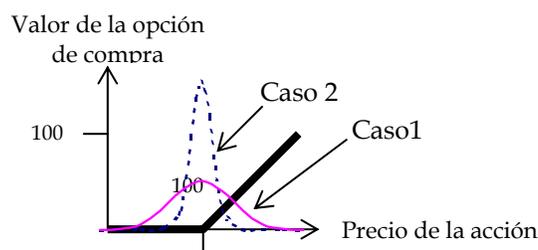


Figura 2: Densidad de probabilidad del precio de la acción

Para valorar una opción de compra europea, \mathcal{E} , se puede utilizar la fórmula derivada por Black y Scholes (1973):

$$\mathcal{E} = \Phi(k_1)S - \Phi(k_2)Ee^{-rT} \quad (3)$$

donde

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad k_2 = k_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (4)$$

$\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar acumulada, E es el precio del ejercicio, S es el precio de la acción, T es el plazo hasta el vencimiento, σ^2 es la varianza de los rendimientos de la acción por unidad de tiempo y r es la tasa de interés libre de riesgo. (Ver deducción en Apéndice A)

El valor de σ^2 mide la volatilidad en el precio de la acción por unidad de tiempo. En el caso extremo cuando σ es cero la expresión de Black y Scholes presenta una discontinuidad y

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} k_1 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Si $\ln(S/E) + rT > 0$ (o $S > Ee^{-rt}$), k_1 tiende a $+\infty$ y $k_2 \rightarrow +\infty$. Reemplazando estos valores en (3), el valor de la opción tiende a

$$\Phi(+\infty)S - \Phi(+\infty)Ee^{-rT} = S - Ee^{-rT} \quad (5)$$

En caso contrario, k_1 y k_2 tienden a $-\infty$. Por lo tanto el valor de la opción tiende a:

$$\Phi(-\infty)S - \Phi(-\infty)Ee^{-rT} = 0 \quad (6)$$

En resumen el valor de la opción cuando σ tiende a cero será:

$$\mathcal{E} = \max(S - Ee^{-rT}, 0) \quad (7)$$

El análisis anterior indica que en ausencia de volatilidad el valor de la opción se determina como la diferencia entre el precio de la acción y el precio del ejercicio en tiempo presente. En caso que el precio de la acción sea menor, entonces el valor de la opción es nulo. En el caso que el plazo para el vencimiento haya vencido, la expresión (7) se transforma en (2) que es la fórmula para el cálculo de la opción un instante antes de su vencimiento.

Es posible estimar la volatilidad del precio de una acción de manera empírica utilizando datos históricos observados en intervalos de tiempo, por ejemplo cada día, cada semana, cada mes, etc.

La siguiente tabla resume la influencia de las variables en el precio de una opción de compra.

Tabla 1: Variación del precio de una opción de compra

Variable		Relación con el precio de la opción
Precio de la acción	S	positiva
Precio del ejercicio	E	negativa
Tasa de interés	r	positiva
Plazo de vencimiento	T	positiva
Volatilidad del precio de la acción	σ	positiva

La fórmula para evaluar una opción de venta se obtiene de manera similar que la opción de compra y es:

$$\mathcal{P} = \Phi(-k_2)Ee^{-rT} - \Phi(-k_1)S \quad (8)$$

donde k_1 y k_2 están definidos en (4).

2.2 MÉTODO DE OPCIONES REALES

El método de opciones reales es utilizado actualmente en el campo de las finanzas corporativas para evaluar proyectos de inversión de capital. El método ha sido exitosamente aplicado a las inversiones en petróleo y en gas natural (Paddock et. al., 1988), en carbón, en oro, en cobre, en plata y en aeronaves (Stonier y Triantis, 1998). De manera general, el método de opciones reales permite encontrar el valor de un proyecto de inversión considerando los valores esperados de los costos futuros (igual que el método del VPN), la volatilidad de los mismos y la flexibilidad operativa propia del proyecto. Se entiende como flexibilidad operativa a las opciones que tiene el tomador de decisiones de modificar aspectos del proyecto original. El método consiste en determinar la opción en el proyecto y encontrar una opción financiera análoga. Las opciones financieras son instrumentos cuya evaluación ha sido estudiada por diversos autores. En la sección 2.1 se hace una breve presentación de dichos instrumentos financieros. El valor total del proyecto con opciones reales será igual al VPN del proyecto más el valor de la flexibilidad operativa u opción que pueda tener:

$$\text{Valor total del proyecto} = \text{VPN} + \text{valor de la opción.} \quad (9)$$

donde el VPN se calcula con la expresión (1). El valor de la opción se calcula como si se tratara de una opción financiera. Lo que nos indica la ecuación (9) es que el VPN tiende a subestimar el valor de un proyecto porque no considera de manera adecuada los beneficios de la flexibilidad operativa y otros factores estratégicos tales como el seguimiento de inversiones. Para identificar la flexibilidad operativa potencial y los factores estratégicos, las opciones se pueden clasificar dentro de cinco categorías (Weston y Copeland, 1994): de aplazamiento, de abandono, de ampliación, de reducción y de intercambio.

2.2.1 Opción de aplazamiento

La mayoría de los proyectos implican una erogación para su ejecución. La posibilidad de posponer este pago hasta cierta fecha límite proporciona un tiempo adicional para examinar la tendencia de los acontecimientos futuros, reduciendo al mismo tiempo la probabilidad de incurrir en costosos errores debido a un desarrollo de acontecimientos en contra de lo previsto. Durante este tiempo el dinero genera una ganancia producto de la tasa de interés libre de riesgo. Cuanto mayor sea el intervalo de tiempo que se tiene de margen para demorar la decisión final (dentro de los plazos establecidos) mayor será la posibilidad de observar que los acontecimientos se desarrollen en forma favorable. Es evidente que si dichos acontecimientos fuesen contrarios a los intereses del analista que toma la decisión, éste renunciaría a realizar el proyecto evitando así una pérdida innecesaria. La opción de diferir o aplazar un proyecto es análoga a una opción de compra de una acción con el precio de ejercicio igual a los costos de ejecución del proyecto.

Para valorar un proyecto de ingeniería con posibilidad de aplazamiento con el método de opciones reales, es necesario conocer cinco variables del proyecto:

- Costos de ejecución: es el costo requerido para llevar a cabo el proyecto. Depende de la solución estructural, los parámetros de diseño y la confiabilidad.
- Beneficio del proyecto: son las ganancias que se tendrán debido al funcionamiento del proyecto llevadas a tiempo presente. Depende del precio del bien producido y de los costos de mantenimiento y reparación durante la vida útil de la estructura. A su vez los costos de mantenimiento y reparación dependerán de los parámetros del diseño original.
- Tiempo de demora: Tiempo que el analista puede demorar la acción de ejecutar un proyecto sin perder la oportunidad de hacerlo.
- Volatilidad: Se mide con la varianza de la tasa de cambio en el precio de los rendimientos por unidad de tiempo.
- Valor temporal del dinero: es la ganancia que podría generar el capital libre de riesgo.

En la tabla siguiente se muestra una analogía entre las variables de un proyecto de ingeniería con opción de aplazamiento y una opción de compra.

Tabla 2: Analogía entre opción de compra y proyecto de ingeniería con opción de aplazamiento

Proyecto de ingeniería	Opción de compra	Variable
Costos de ejecución o de inversión	Precio del ejercicio	E
Beneficio del proyecto	Precio de la acción	S
Tiempo de demora	Plazo hasta el vencimiento	T
Volatilidad del beneficio del proyecto	Varianza de los rendimientos de la acción	σ^2
Valor temporal del dinero	Tasa de interés libre de riesgo	r

2.2.2 Opción de abandono

La opción de abandonar un proyecto (por ejemplo, el derecho de abandonar una mina de carbón al aire libre) es formalmente equivalente a una opción de venta sobre una acción. Si el resultado al final del primer periodo es malo, el tomador de decisiones puede abandonar el proyecto y obtener el valor de liquidación esperado. Por lo tanto, el valor esperado de la liquidación del proyecto puede concebirse como el precio de ejercicio de la opción de venta. Cuando el valor presente del activo disminuye por debajo del valor de la liquidación, el acto de abandonar el proyecto es equivalente al ejercicio de la opción de venta. Toda vez que el valor de liquidación del proyecto fija un límite inferior al valor del proyecto, la opción es valiosa. Por consiguiente, un proyecto que puede ser liquidado vale más que el mismo proyecto sin la posibilidad de abandono.

Tabla 3: Analogía entre una opción de venta y un proyecto de ingeniería con opción de abandono

Proyecto de ingeniería	Opción de venta	Variable
Valor esperado de la liquidación	Precio del ejercicio	E
Beneficio del proyecto a partir de la fecha de liquidación	Precio de la acción	S
Tiempo que hay que esperar para poder abandonar el proyecto	Plazo hasta el vencimiento	T
Volatilidad del beneficio del proyecto luego de la liquidación	Varianza de los rendimientos de la acción	σ^2
Valor temporal del dinero	Tasa de interés libre de riesgo	r

2.2.3 Opción de ampliación o crecimiento

La opción de ampliar la escala operativa de un proyecto es formalmente equivalente a una opción de compra sobre la parte adicional del proyecto con un precio de ejercicio igual al costo de la ampliación. Por ejemplo, la administración puede optar por construir una planta de producción con un nivel productivo superior al nivel original para que pueda producir a una tasa más alta si el producto tiene más éxito del que se esperaba inicialmente. Un proyecto con opción de ampliación tendrá más valor que el mismo proyecto sin la opción de ampliación. En la Tabla 4 se muestra la analogía entre una opción financiera y una opción de ampliación.

Tabla 4 : Analogía entre opción de compra y proyecto con opción de ampliación

Proyecto de ingeniería	Opción de compra	Variable
Inversión necesaria para la ampliación	Precio del ejercicio	E
Beneficio del proyecto	Precio de la acción	S
Tiempo que hay que esperar para poder hacer la ampliación	Plazo hasta el vencimiento	T
Volatilidad del beneficio de la ampliación del proyecto	Varianza de los rendimientos de la acción	σ^2
Valor temporal del dinero	Tasa de interés libre de riesgo	r

2.2.4 Opción de reducción

La opción para reducir la escala operativa de un proyecto es formalmente equivalente a una opción de venta sobre una opción. Muchos proyectos pueden contar con un diseño de ingeniería que les permita reducir la producción en el futuro. El ahorro en la reducción de la producción corresponde al precio de ejercicio de la opción de venta equivalente.

2.2.5 Opción de intercambio

La opción para intercambiar operaciones de un proyecto es similar a una cartera o conjunto de opciones de compra y venta. Por ejemplo, reiniciar las operaciones cuando un proyecto ya se ha cerrado es equivalente a una opción de compra. De manera similar, cancelar las operaciones cuando se presentan condiciones desfavorables equivale a una opción de venta. El costo de reiniciar (o detener) las operaciones es análogo al precio del ejercicio de la opción de compra (o venta).

2.3 CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL EN PLATAFORMAS MARINAS

2.3.1 Definición

La confiabilidad de una estructura, en este caso de una plataforma marina de producción de hidrocarburos, es una medida de su capacidad de realizar las funciones definidas en el diseño en un periodo de tiempo especificado (Thoft-Christensen, 1982). En un marco probabilístico, la confiabilidad se define como:

$$R(t) = 1 - Pf(t) \quad (10)$$

donde Pf es la probabilidad de falla en el periodo $[0, t]$. En consecuencia, $R(t)$ es la probabilidad de que un sistema no falle en el intervalo en cuestión.

2.3.2 Tipos de fallas

Para los fines de este trabajo, se denominará falla a aquella situación que ocasiona que un sistema estructural pase de un estado “operativo” a un estado “no operativo”. En este contexto, cuando se haga referencia a alguna situación de deterioro en algunos de los elementos del sistema sin que esto afecte necesariamente su operación, se hablará de falla local o estados de daño. Los criterios para definir si una estructura puede o no seguir en operación pueden estar basados en índices de confiabilidad, factores de seguridad de resistencia o deformación o funcionalidad de la estructura. Según la causa de origen, las fallas pueden clasificarse en dos grupos:

a) Por deterioro:

En este caso, la integridad del sistema disminuye con el tiempo debido a agentes externos. La falla por deterioro se produce cuando se alcanza un nivel que hace que el sistema ingrese a un estado de colapso o de inoperancia. Dentro de este grupo se encuentran las fallas por fatiga y corrosión. Un enfoque que se utiliza frecuentemente para encontrar la probabilidad de falla por efectos de deterioro consiste en suponer que el sistema ha fallado en el intervalo $[0, t]$ si al final del intervalo se excede algún límite de daño:

$$Pf(t) = P(d(t) \geq d_{adm}) \quad (11)$$

donde d es una medida del daño y d_{adm} es el umbral permitido. Esta formulación es posible debido a que normalmente la probabilidad de falla por deterioro es creciente con el tiempo.

En lo que se refiere a las plataformas marinas, una de las causas importantes de deterioro de su capacidad estructural son los daños debido a fatiga. La fatiga es producida por cargas hidrodinámicas de oleaje operacional que afectan a la estructura. Normalmente la zona más expuesta a los efectos de fatiga se encuentra adyacente a la soldadura de las conexiones de elementos tubulares. La concentración de esfuerzos generada por el proceso de la soldadura unida a la variación cíclica de esfuerzos perpendiculares al eje de soldadura transforman las pequeñas imperfecciones propias de la soldadura en grietas por fatiga. El daño se inicia con la aparición de grietas en las juntas de la estructura; el proceso continúa en el tiempo con la formación de nuevas grietas y la propagación de las existentes. Se considera que la conexión falla cuando la profundidad de la grieta alcanza un tamaño crítico, normalmente igual al espesor del elemento donde se encuentra la grieta.

En el caso de plataformas marinas, como las ubicadas en la bahía de Campeche, los efectos de fatiga sólo llegan a ocasionar daño en algunos de sus elementos resistentes. La ocurrencia de estos daños locales en uno o más de los elementos resistentes de la estructura da lugar a **estados o escenarios de daño**. El número de estados de daño está determinado por el número de combinaciones posibles de conexiones dañadas las cuales pueden estar ubicadas en cualquiera de sus crujías o *bays*. La probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los estados de daño depende de las características y función o servicio de la estructura y de la naturaleza del oleaje que provoca los daños por fatiga.

La probabilidad de ocurrencia de un estado de daño por fatiga que genere un mecanismo de colapso es muy baja debido a que se trata de estructuras con un alto grado de hiperestaticidad. Cabe remarcar que en este trabajo se desprecia la posibilidad de que la estructura falle de manera global debido únicamente a efectos de deterioro por fatiga. Sin embargo, la evaluación de la probabilidad de daños locales por deterioro de elementos es de importancia, debido a que éstas aumentan la vulnerabilidad de la estructura y, por lo tanto, la probabilidad de falla por sobreesfuerzo ante la ocurrencia de un evento extremo.

b) Por sobreesfuerzo:

Dentro de este grupo se encuentran las fallas por fractura, degradación de resistencia y rigidez, pandeo y deformación excesiva debido a eventos críticos como terremotos, huracanes o explosiones. La probabilidad de falla por sobreesfuerzo en los sistemas estructurales depende de la ocurrencia de los eventos críticos y de la resistencia de las estructuras. Se dice que se produce una falla cuando la sollicitación resulta mayor que la resistencia del sistema. Por lo tanto:

$$P_f(t) = P(\text{solicitud} > \text{resistencia}) \text{ al menos una vez en } [0, t] \quad (12)$$

Generalmente, la desigualdad expresada en (12) se refiere a la peor condición posible en el intervalo $[0,t]$, considerando todos los modos de falla para todos los elementos de la estructura. Para el caso de las plataformas marinas, los sobreesfuerzos en los elementos estructurales se deberán principalmente a fuerzas debidas a huracanes o tormentas, las cuales pueden estar caracterizadas en términos globales mediante la fuerza cortante basal o localmente mediante las fuerzas en alguno de los elementos. De la misma manera la resistencia deberá estar expresada de manera congruente con la sollicitación.

El desempeño de la estructura ante la fuerza de los huracanes dependerá de la condición en la que se encuentre en el momento del evento extremo. Por lo tanto, mientras que la sollicitación es independiente del estado de daño, la resistencia se ve disminuida por este efecto.

2.3.3 Probabilidad de la ocurrencia de la falla de una conexión por fatiga

Existen dos enfoques para estudiar el fenómeno de generación y propagación de grietas en las conexiones soldadas. Uno de ellos consiste en la recolección de datos experimentales y la obtención de curvas de rango de esfuerzo S versus número de ciclos N , (curvas $S-N$). El otro enfoque se basa en la teoría de la mecánica de fractura elástica la cual considera que las concentraciones de esfuerzo y pequeñas imperfecciones, propias del proceso de soldadura, pueden llegar a convertirse en grietas debido a los esfuerzos de fatiga. La ley de Paris-Erdogan (1963) es una de las formulaciones más utilizadas en los estudios de propagación de grietas en el tiempo. Esta fórmula nos brinda una descripción de la relación entre el incremento promedio en el tamaño de la grieta durante un ciclo de carga y el intervalo de la intensidad de esfuerzos en el ciclo de la siguiente manera:

$$\Psi(a_N) = \int_{a_0}^{a_N} \frac{d\alpha}{Y^m (\sqrt{\pi\alpha})^m} = C \sum_{i=1}^{N(t)} (\Delta S_i)^m \quad (13)$$

donde a es la profundidad de la grieta, ΔS es el intervalo de esfuerzos, m y C son parámetros del modelo de fatiga que dependen del material y Y es el llamado factor de corrección geométrico finito. Este factor depende de la geometría de la grieta y de la distribución de esfuerzos producto de la sollicitación. La variable $\Psi(a_N)$ es un indicador del daño acumulado por el crecimiento de la grieta desde un valor inicial, a_0 , hasta el valor de a_N después de N ciclos de carga y descarga en un intervalo de tiempo t .

Considerando el hecho de que la variable Ψ es creciente, es posible establecer la probabilidad de falla por fatiga en el elemento en términos de dicha variable. De esta manera, la probabilidad de falla, expresada en la ecuación (11), es la

probabilidad de que $\Psi(a_N)$ sea mayor o igual que $\Psi(a_c)$, donde a_c es la profundidad crítica de la grieta, es decir:

$$Pf(t) = P(\Psi(a_N) \geq \Psi(a_c)) = P\left[C \sum_{i=1}^{N(t)} (\Delta S)^m \geq \int_{a_0}^{a_c} \frac{d\alpha}{Y^m(\sqrt{\pi\alpha})^m} \right] \quad (14)$$

En la ecuación (14) el límite superior de la integral es ahora la profundidad crítica de la grieta. Este planteamiento es el que se utiliza en el módulo Profast del sistema SESAM 2.2 para la estimación de la confiabilidad de las conexiones soldadas ante cargas de fatiga. Para valores de N muy grandes, como es el caso de las estructuras marinas, el valor de la sumatoria en la ecuación (14) se puede aproximar a $N(t) \cdot E[(\Delta S)^m]$. La modelación de los esfuerzos ΔS , es un tanto complicada debido principalmente a la no linealidad de las cargas de oleaje introducida por las fuerzas de arrastre. Sin embargo, es posible realizar dicha modelación mediante el uso de distribuciones utilizadas en la estadística de extremos como la distribución de Weibull, cuya función de densidad es la siguiente:

$$f_s(s) = \frac{\theta}{\omega^\theta} s^{\theta-1} \exp\left[-\left(\frac{s}{\omega}\right)^\theta\right] \quad (15)$$

Es necesario entonces, estimar los parámetros de forma, θ , y de escala w , propios de esta distribución. En SESAM (2001) se muestra las distintas modalidades utilizadas en la obtención de estos parámetros. En esta referencia se indica que el valor de θ varía normalmente entre 0.8 y 1.2. Si la fuerza del oleaje es dominada por el arrastre, θ tenderá a los valores menores, por el contrario si las fuerzas de inercia son las predominantes, θ se acercará a los valores mayores del intervalo.

2.3.4 Probabilidad de falla por sobreesfuerzo considerando estados de daño

Se ha mencionado que la ocurrencia de daños locales en los elementos de la estructura afecta la vulnerabilidad de la misma ante eventos extremos. El cálculo de la probabilidad de falla de plataformas marinas ante eventos extremos como los huracanes o sismos, dependerá de la condición de daño en la que se encuentre la estructura.

Ayala (2001) analiza el caso particular de una plataforma típica de la Bahía de Campeche, con el fin de obtener la probabilidad de falla de la estructura ante un evento crítico considerando que la estructura se encuentra en distintos estados de daño, esto es, $P(\text{falla} | d=d_i)$. En dicho estudio se consideraron 12 estados de daño que incluyen la estructura intacta, la ocurrencia de fracturas de elementos y la deflexión de los mismos. Se consideran dos criterios de falla o estados límite: el

cortante basal y la fuerza cortante en las piernas de la cubierta. En ambos casos la probabilidad anual de falla del sistema se calcula como la probabilidad anual que la carga exceda la capacidad del sistema. El cálculo de esta probabilidad se realizó mediante simulaciones de Montecarlo y métodos de FORM/SORM (First/second order methods) para los 12 estados de daño. La capacidad de la estructura (en términos del cortante basal) se modeló como una variable normal con media igual a la capacidad última y coeficiente de variación 0.8. La capacidad última se evalúa con un análisis *pushover* determinista. Este análisis consiste en suponer un perfil de carga igual al asociado a una altura máxima de ola de 100 años y escalar dicho perfil hasta llevar a la estructura al colapso. El valor máximo de la carga (en este caso el cortante basal) antes de que la estructura presente un mecanismo de colapso se denomina capacidad última. La carga o sollicitación se expresa en términos de la altura máxima de ola anual, la cual tiene una distribución Gumbel con una media de 5.14 m y coeficiente de variación 0.307, valores obtenidos a partir de los estudios de Cardone y Ramos, (1998) y Bea et al (1998).

En Heredia y Silva (2006) se utiliza un enfoque similar al de Ayala y se estudia el efecto que tiene la falla por fatiga en la confiabilidad global de las plataformas marinas con el fin de establecer programas de inspección en plataformas. Este enfoque se usa también para evaluar la posibilidad de continuar con la operación de plataformas que han llegado a su vida útil. En particular, se analizan plataformas compuestas de perfiles tubulares de acero y que componen una estructura de tipo *jacket*. Se realiza el análisis de resistencia última de las plataformas para múltiples estados de daño. Un estado corresponde a la estructura intacta, los demás estados consisten en la ruptura por fatiga de una de sus conexiones. En este caso, el modelado de la falla local para el análisis de la resistencia última consiste en transformar el elemento que contiene la conexión dañada en un elemento no estructural, el cual es capaz de transmitir la carga que ejerce el oleaje sobre ella. La elección de las conexiones críticas que definen los estados de daño se realizó con base en los resultados de un análisis espectral de fatiga de todas las juntas de la estructura. Las conexiones críticas fueron las conexiones con vida media menor que la requerida para una extensión de la vida de servicio de la estructura.

La estimación de la probabilidad condicional asociada a cada uno de los estados de daño, se realizó mediante simulaciones de Montecarlo. La función de estado límite sólo tomó en cuenta la posibilidad de falla en el *jacket* de la plataforma y no en las piernas de la cubierta. La altura de ola máxima se definió como una variable con distribución Gumbel, mientras que la resistencia se modeló como una variable con distribución log-normal.

Bea et al (1988) propone que la probabilidad anual de falla ante un evento crítico dado que la estructura está intacta puede encontrarse de manera relativamente

sencilla a partir de la relación reserva-resistencia RSR (*Reserve Strength Ratio*) que se define como el cociente entre la capacidad última de la estructura y la carga asociada al perfil de una altura de ola con periodo de retorno de 100 años. Para el caso de plataformas ubicadas en la bahía de Campeche dicha expresión se reduce a:

$$Pa(\text{falla} | d(t) = d_{\text{intacta}}) = \phi\left(-\frac{\ln(1.3RSR)+1.89}{0.84}\right) \quad (16)$$

Estudios similares como el de Moan (1999) obtienen expresiones similares a (16) para el cálculo de la probabilidad de falla calibradas para plataformas ubicadas en el Mar del Norte. Para encontrar la probabilidad anual de falla condicionada a un estado de daño, $P(\text{falla} | d(t)=d_i)$, la variable RSR se calcula con la capacidad última del sistema dañado.

2.3.5 Función de peligro

La densidad de probabilidad condicional de que un elemento falle en el tiempo t dado que no ha fallado en $[0,t]$ es la función de peligro, $\lambda(t)$ (Ang y Tang, 1984). También se conoce como tasa de peligro y se define como:

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{P(X \geq t)} \quad (17)$$

donde X es el tiempo a la primera falla y f_X es la función de densidad de X . En sistemas con deterioro esta tasa de peligro será una función creciente con el tiempo. La confiabilidad, R , es la probabilidad de que el sistema no falle, y se puede expresar en función de f_X de la siguiente manera:

$$R(t) = P(X \geq t) = 1 - \int_0^t f_X(x) dx \quad (18)$$

De (17) y (18) se obtiene

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{R(t)} \quad (19)$$

La relación que existe entre la función de peligro y la confiabilidad se puede obtener al derivar ambos lados de la expresión (18)

$$f_X(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \quad (20)$$

Reemplazando (20) en (19) e integrando se obtiene que la confiabilidad en el tiempo es:

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x) dx\right\} \quad (21)$$

Un sistema con tasa de peligro constante en el tiempo no sufre los efectos de degradación con la edad. En este caso la ecuación (21) se transforma en:

$$R(t) = \exp\{-\lambda t\} \quad (22)$$

Reemplazando en (20) se obtiene:

$$f_x(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} \quad (23)$$

Este resultado indica que el tiempo de la falla para un sistema con tasa de peligro constante tiene una distribución exponencial con media $1/\lambda$.

2.3.6 Función de reposición

Sea $\gamma(t)$ la función de densidad de probabilidad de que el sistema sea reparado en el tiempo t dado que no ha sido reparado en el intervalo $[0, t]$ (Ang y Tang, 1984) a la que se denominará de ahora en adelante función de reposición:

$$\gamma(t) = \frac{f_Y(t)}{P(Y \geq t)} \quad (24)$$

donde Y es el tiempo de reparación de la estructura. Cuando $\gamma(t)$ es constante el tiempo de reposición tiene distribución exponencial.

2.3.7 Función de disponibilidad

La disponibilidad de un sistema se define como la probabilidad de que el sistema esté funcionando correctamente en un instante dado. Esta definición contempla la posibilidad de que el sistema haya fallado y que haya sido reparado antes del instante en cuestión. La disponibilidad en un sistema con falla con reposición sistemática después de la falla; es (Ang y Tang, 1984):

$$D(t) = 1 - \exp\{-Q(t)\} \int_0^t \lambda(\tau) \exp\{Q(\tau)\} d\tau \quad (25)$$

donde:

$$Q(t) = \int_0^t [\lambda(\tau) + \gamma(\tau)] d\tau \quad (26)$$

λ y γ están definidas en (17) y (24).

Si un sistema no puede ser reparado el valor del Y puede suponerse infinito, en consecuencia, la función de reposición resulta nula. Reemplazando $\gamma(t)=0$ en (25) y derivando con respecto al tiempo se obtiene que:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda(t) \quad (27)$$

Reemplazando (27) en (25) se obtiene la función de disponibilidad para el sistema

$$D(t) = 1 - \exp\{-Q(t)\} \int_0^t \frac{dQ(\tau)}{d\tau} \exp\{Q(\tau)\} d\tau = 1 - \exp\{-Q(t)\} (\exp\{Q(t)\} - 1) \quad (28)$$

$$D(t) = \exp\{-Q(t)\} = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) \quad (29)$$

Comparando las ecuaciones (21) y (29) se concluye que, para el caso de estructuras que no pueden ser reparadas, la disponibilidad es igual que la confiabilidad.

La disponibilidad promedio en un intervalo de tiempo se define como el valor esperado de la proporción de tiempo en el que el sistema estará en estado operativo dentro del intervalo en cuestión:

$$\bar{D}(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} D(t) dt}{\tau} \quad (30)$$

Generalmente el valor de la disponibilidad se vuelve independiente del tiempo a medida que τ tiende hacia infinito. Se puede demostrar (Ang y Tang, 1984) que la disponibilidad promedio para intervalos muy grandes tiende a:

$$\bar{D}(\infty) = \frac{E[X]}{E[X] + E[Y]} \quad (31)$$

donde X es el tiempo de ocurrencia de falla y Y es el tiempo de reparación. Rackwitz (2000) sugiere que el beneficio de tener la estructura en funcionamiento

debe multiplicarse por la disponibilidad promedio para tomar en cuenta tiempos finitos de reparación. Esto es válido sólo cuando el valor del beneficio es constante en el tiempo.

2.4 PROCESOS

Durante su vida útil, los sistemas están sometidos a procesos con el fin de mantener la operación, de contrarrestar los efectos de fenómenos naturales o artificiales que los afectan, o de extender su vida útil. Entre estos procesos se encuentran los trabajos de inspección y mantenimiento. En la elección de la mejor estrategia para la realización de estos procesos se deberán tomar en cuenta los costos de la ejecución y el beneficio que conlleva la realización de los mismos.

2.4.1 Inspección

La inspección es el proceso de monitorio del sistema con el fin de detectar daños y fallas y tomar decisiones que permitan mantener los niveles de confiabilidad por encima de los mínimos permisibles. En consecuencia, la inspección implica la revisión del avance del deterioro de la estructura. Dependiendo de los métodos, puede realizarse con el sistema en servicio. Como resultado de la inspección puede encontrarse que el sistema está intacto o que presenta deterioro, en cuyo caso se procede a la medición del mismo. Los resultados de la inspección son de naturaleza aleatoria y dependen de varios aspectos, entre ellos: la calidad de la inspección, la experiencia del operario y el tamaño de lo que se quiere medir. Una forma de incluir esta aleatoriedad en el análisis es utilizando el concepto de probabilidad de detección (*PoD*).

Las estrategias de inspección se definen en función de la localización, la frecuencia y la calidad de las revisiones. En una inspección continua las fallas son detectadas en el instante en el que ocurren y por lo tanto pueden tomarse las medidas necesarias inmediatamente después de la ocurrencia de la falla. En el caso de plataformas marinas las inspecciones se realizan a intervalos de tiempo. Por lo tanto, existe la posibilidad de que la confiabilidad del sistema se encuentre por debajo de los límites permitidos durante los lapsos entre inspecciones. La programación de las inspecciones debe garantizar que esto no suceda. El análisis de los costos involucrados en los trabajos de inspección es necesario para la obtención de estrategias óptimas que maximicen los beneficios del proyecto durante su vida útil.

La inspección de plataformas marinas se concentra en la búsqueda y medición de grietas en las conexiones que indiquen daño por fatiga. Existen varios estudios enfocados en la obtención de las funciones *PoD* que para este caso se definen como la probabilidad de detectar una grieta por fatiga (Dharmavasan y Peers, 1996;

Moang y Song, 1998). La PoD es comúnmente modelada como una distribución exponencial:

$$PoD(a) = 1 - \exp\left(\frac{-a}{a_d}\right) \quad (32)$$

donde a_d es el valor esperado del tamaño de grieta detectable. Los resultados de la inspección en el instante j , $I(j)$ son dos: (1) i_1 =no-detección de grieta y (2) i_2 =detección y medición de grieta. Estos resultados pueden ser utilizados para aumentar el conocimiento del proceso de deterioro, en este caso, del modelo de la formación de grietas en un elemento por fatiga. Una enumeración de los trabajos enfocados en este tema se puede encontrar en Zhang y Mahadevan (2000). Heredia-Zavoni y Montes (2002, 2004) mediante el uso de la teoría bayesiana y el resultado de la inspección $I(j)$, desarrollaron un método para actualizar la distribución de probabilidad conjunta f_{j-1} de los parámetros del modelo de fatiga y tamaño de grieta en uniones de elementos tubulares de acero en plataformas marinas. En caso de que no se hayan detectado grietas, la fdp actualizada, $f_{j-1|I(j)}$, resulta:

$$f_{j-1|I(j)} \propto [1 - PoD(\hat{a})] f_{j-1} \quad (33)$$

donde \hat{a} es el tamaño de grieta en el tiempo j estimada con un modelo de fatiga cuando se conoce la grieta en el tiempo $j-1$. Si el resultado de la inspección es la detección y medición de grieta, se cumple que la fdp actualizada es

$$f_{j-1|I(j)} \propto \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha')}{\beta'^{\alpha'} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} PoD(\hat{a}) f_{j-1} \quad (34)$$

donde Γ es la función gamma, α y β son función del tamaño de la grieta en $j-1$ y del vector de parámetros del modelo de fatiga,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \frac{1}{2} \\ \beta' &= \beta + \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

y ε es la realización del error logarítmico, definido como:

$$\varepsilon = \ln \left[\frac{A}{a_m} \right] \quad (36)$$

donde A es el tamaño de grieta y a_m es el resultado de la medición de la grieta en la inspección realizada en el tiempo j .

La función de densidad de probabilidad del tamaño de grieta en un instante posterior al de la inspección se puede obtener utilizando el modelo de fatiga y simulaciones de Montecarlo.

2.4.2 Mantenimiento

El mantenimiento se define como cualquier acción que se realiza al sistema para conservar su condición de operatividad. Es una práctica habitual en todos los sistemas excepto en sistemas en los que sea más rentable el reemplazo o abandono del sistema. Existen dos tipos de mantenimiento: el preventivo y el correctivo.

Mantenimiento preventivo: El mantenimiento preventivo consiste en acciones programadas en la estructura sin falla (o sin falla detectable) con el fin de alargar el tiempo de vida útil o aumentar la confiabilidad del sistema. El objetivo del mantenimiento preventivo consiste en eliminar o disminuir los efectos del deterioro en las estructuras. El mantenimiento preventivo se clasifica según la programación de estas acciones en:

- a) Por tiempo: Los trabajos se realizan en intervalos fijos de tiempo.
- b) Por edad: El mantenimiento se realiza cuando el sistema o partes del mismo cumplen cierto tiempo en funcionamiento.
- c) Por uso. Se considera que hay partes que se desgastan con más facilidad y por lo tanto deben revisarse con mayor frecuencia.
- d) Por oportunidad: Se aprovecha que se va a mantener el sistema para realizar el mantenimiento en otro sistema adjunto.
- e) Por rediseño: Es el caso en el que es necesario aumentar la confiabilidad del sistema debido a cambios en las normas o reglamentos (rehabilitación) o porque se desea aumentar la vida útil del sistema (ampliación de vida útil).

El mantenimiento preventivo puede consistir en el resane o el reemplazo de partes. El reemplazo de partes puede realizarse por tiempo de uso o por número de operaciones. El mantenimiento preventivo por reemplazo de partes puede ser aplicado en el caso de elementos muy costosos o diseñados especialmente para concentrar las demandas ante eventos extremos. Por ejemplo, las especificaciones de los fabricantes de los dispositivos disipadores de energía indican que éstos deben reemplazarse cada vez que el número de ciclos inelásticos al que han estado sujetos exceda un cierto límite.

Mantenimiento correctivo: El mantenimiento correctivo son aquellas actividades que se realizan en un sistema con el fin de reparar o resanar partes del sistema aún cuando éste continúe en operación. El mantenimiento se realiza cuando el sistema

o un elemento del mismo no cumplen con algún requisito preestablecido. Para la detección de una falla que requiera de mantenimiento correctivo es necesario llevar a cabo un proceso de inspección o monitoreo, que puede realizarse de manera programada o luego de algún evento máximo (como un huracán o un sismo).

De acuerdo con la calidad de los trabajos, el mantenimiento puede clasificarse en ideal e imperfecto.

Mantenimiento ideal: Si la probabilidad de que los trabajos de mantenimiento retornen al sistema a su condición inicial es 1. Esto significa que el sistema no tiene memoria de los efectos del deterioro o desgaste después de las acciones de mantenimiento. En este caso, la confiabilidad del sistema con mantenimiento preventivo ideal en T_1 para $t > T_1$, es (Lewis, 1987):

$$R^M(t) = R(T_1)R(t - T_1) \quad , \quad t > T_1 \quad (37)$$

donde, R es la confiabilidad del sistema sin mantenimiento. En general, la confiabilidad en el tiempo t de un sistema que ha tenido K trabajos de mantenimiento en intervalos iguales de duración T , resulta:

$$R^M(t) = (R(T))^K R(t - KT) \quad , \quad KT < t < (K+1)T \quad (38)$$

Se puede demostrar que si la tasa de peligro λ es constante en el tiempo, entonces la confiabilidad del sistema con mantenimiento es igual a la del sistema sin mantenimiento. En otras palabras, cuando el sistema no tiene deterioro por edad, el mantenimiento preventivo no aumenta la confiabilidad de la estructura.

Mantenimiento imperfecto: En este caso, la probabilidad de que el mantenimiento sea defectuoso es P , $P > 0$. La confiabilidad en el sistema que ha tenido K mantenimientos preventivos resulta:

$$R^M(t) = (R(T))^K (1 - P)^K R(t - KT) \quad , \quad KT < t < (K+1)T \quad (39)$$

De la comparación de (38) y (39) se puede mostrar que la confiabilidad de un sistema con mantenimiento imperfecto es menor que la del sistema con mantenimiento ideal.

El mantenimiento preventivo modifica también la confiabilidad ante fallas por sobreesfuerzo. Tal como se había mencionado anteriormente, la degradación de la estructura disminuye su capacidad para resistir eventos críticos. En consecuencia,

la probabilidad de falla dado que ocurre un evento crítico de intensidad dada depende del tiempo en el que ocurre el evento.

En el caso de infraestructura costa-fuera el mantenimiento correctivo tiene por objeto aumentar la confiabilidad de la estructura mermada por el deterioro con el tiempo debido a la fatiga que sufren las conexiones. Estos trabajos consisten en la reparación de las grietas en los nudos que se hayan detectado en los trabajos de inspección. Dado que las inspecciones se realizan en intervalos de tiempo, existe la posibilidad de que alguna grieta en un nudo alcance el tamaño crítico sin que sea detectada. En este caso, la estructura queda debilitada pero sigue en operación.

2.4.3 Reposición

Son las acciones que se realizan para reestablecer un sistema que ha fallado a su condición de servicio (o de daño acumulado). En este caso, el mantenimiento correctivo es llevado a cabo cuando el sistema se encuentra en un estado no operativo. La detección de la condición de inoperatividad dependerá de las características del sistema y del proceso de inspección al que esté sujeto. Si el sistema esta expuesto o el monitoreo es constante, entonces la falla es detectada inmediatamente. En cambio, si el sistema está oculto y el monitoreo no es continuo, puede ser posible que el sistema se encuentre en un estado de inoperatividad hasta la siguiente inspección. En el caso de sistemas estructurales, la inoperatividad es detectada inmediatamente después que ocurre la falla, ya sea ésta por deterioro o por sobreesfuerzo.

La reposición en estructuras puede clasificarse en:

- a) Reposición ideal: Se vuelve a la condición original. La probabilidad de falla luego de la reparación es igual a la que se tenía al inicio de la operación, sin importar el número de veces que ha fallado anteriormente.
- b) Reposición mejorada: La probabilidad de falla es menor que para un sistema nuevo.
- c) Reposición mínima: Se retorna a la operación con la condición antes de la falla.

2.5 RESUMEN DE CAPÍTULO

El valor de un proyecto de infraestructura no sólo depende de los flujos de dinero que se generen durante su vida útil. Se ha visto que la flexibilidad operativa, entendida como la posibilidad futura de crecimiento, disminución, abandono, aplazamiento, o intercambio; puede aumentar el valor del proyecto con respecto al valor encontrado con métodos tradicionales como el del Valor Presente Neto, *VPN*. Cuando la volatilidad del proyecto de ingeniería es baja, el método de opciones reales y el *VPN* coinciden. En caso que exista gran varianza, ésta influye en la valoración del proyecto.

En general, los sistemas estructurales están sometidos a agentes externos o cargas repetidas que provocan el deterioro de sus elementos. El deterioro aumentará con el tiempo lo que significa que la tasa de peligro aumentará a medida que la estructura se acerque al final de su vida útil. En el caso de estructuras costa-afuera, el deterioro más común es el producido por efectos de cargas repetidas debido al oleaje. Este efecto conocido como fatiga consiste en la generación y propagación de grietas en las conexiones. La falla de la conexión se produce cuando la profundidad de la grieta alcanza un límite crítico que generalmente es igual al ancho del elemento en el que se aloja la grieta. La falla del sistema debido a la falla por fatiga de sus conexiones es poco frecuente debido a la hiperestaticidad de las plataformas. Sin embargo, la ocurrencia de fallas locales en conexiones aumenta la vulnerabilidad de la estructura ante las cargas de eventos excepcionales.

Debido a las recomendaciones de las normas y estándares actuales de diseño, una estructura sometida a las acciones de eventos excepcionales o infrecuentes puede llegar a un estado de inoperancia o falla. Las plataformas costa-afuera se ven sometidas a cargas extremas provocadas por fenómenos meteorológicos, oceanográficos, y geológicos, como huracanes, oleaje y sismos, respectivamente. La probabilidad de que la estructura falle en eventos excepcionales se incrementará con el tiempo debido al deterioro de sus conexiones por fatiga. Este incremento deberá ser controlado con un programa de inspección y mantenimiento. A partir de los resultados de la inspección el tomador de decisiones tendrá la información que le servirá para elegir la mejor manera de llevar a cabo el proceso del mantenimiento. De manera general, el mantenimiento consistirá en la eliminación de grietas por fatiga en conexiones. Si el sistema falla será necesario realizar la reposición de la estructura para regresar a la condición de operatividad.

3 MODELO MATEMÁTICO

3.1 PLANTEAMIENTO

Se desea evaluar un proyecto de infraestructura de producción petrolera costafuera con costo inicial X_0 y vida útil L . El costo inicial considera el diseño, la fabricación e instalación de una plataforma de acero y la adquisición y colocación del equipo. La vida útil se determina a partir de las características del yacimiento y del pronóstico de producción de los pozos.

La estructura en cuestión estará sometida a cargas de oleaje operacional que producirán deterioro por fatiga en sus conexiones soldadas. El deterioro consiste en la formación de grietas que generarán en la estructura estados de daño. Se prevé la ocurrencia estacional de huracanes y tormentas que demandarán sobreesfuerzos importantes a la estructura, lo que pueden llevar a la estructura a un estado no operativo dependiendo de su estado de daño en el momento de ocurrencia del evento extremo. La falla por evento extremo es la única situación contemplada en este análisis, en la que la estructura deja de operar.

3.2 MODELO PARA LA PROBABILIDAD ANUAL DE FALLA

En la literatura referente a las estructuras costa-afuera de producción de hidrocarburos sometidas a huracanes y tormentas se acostumbra utilizar el concepto de probabilidad anual de falla. La probabilidad anual de que el sistema falle durante un huracán dependerá del estado de daño en el que se encuentre la estructura en el momento del evento. Normalmente es una función creciente con el tiempo debido al efecto del deterioro de la estructura.

Considerando que los estados de daño son independientes entre sí, la probabilidad anual de falla en el año t se puede obtener:

$$Pa(t) = \sum_{i=0}^{Ne} P(\text{falla} | d(t) = d_i) P(d(t) = d_i) \quad (40)$$

donde $P(d(t)=d_i)$ es la probabilidad de que la estructura se encuentre en el estado i en el año t , $P(\text{falla} | d(t)=d_i)$ es la probabilidad anual de que la estructura falle en un evento crítico dado que se encuentra en el estado de daño i , d_0 es la condición de la estructura intacta y Ne es el número de estados de daño considerados en el análisis. Cabe aclarar que en este contexto el estado de daño d_0 no se refiere necesariamente a la condición inicial de la estructura, sino a la situación en la que ninguna de sus conexiones ha llegado al nivel de daño requerido para la falla por fatiga.

Como lo apunta Moan et al (1999) en la ecuación (40) se ha supuesto que la correlación entre los distintos estados de daño es despreciable, lo cual es conservador. Una breve descripción de algunos estudios enfocados a la obtención de los valores de $P(\text{falla} | d(t)=d_i)$ para plataformas marinas sujetas a deterioro por fatiga y a huracanes extremos se encuentra en la sección 2.3.4.

Tal como se menciona en la sección 2.3.2, un estado de daño puede consistir en el daño por fatiga de una o más conexiones. Sea $P_i(t)$ la probabilidad de falla por fatiga de la conexión i en el tiempo t (en la sección 2.3.3 se hace una presentación de algunos estudios que se dan a la tarea de encontrar el valor de P_i en el caso de conexiones de plataformas marinas). Supóngase además que el deterioro de una conexión es independiente del de las otras. Por lo tanto, la probabilidad de que la estructura esté intacta, es decir, que no presente ningún daño por fatiga es:

$$P_{\text{intacta}}(t) = P(d(t) = d_0) = \prod_{i=1}^N (1 - P_i(t)) \quad (41)$$

donde N es el número de conexiones de la estructura. Dado que en una plataforma el número de conexiones es muy grande, el cálculo en (41) podría realizarse de

manera aproximada considerando sólo aquellas conexiones con mayor probabilidad anual de falla por fatiga.

Sea d_k el estado de daño consistente en la falla por fatiga de la conexión j . La probabilidad de ocurrencia de d_k es igual a la probabilidad conjunta de que la conexión j falle por fatiga y que las demás no fallen, es decir.

$$P(d(t)=d_k) = P_j(t) \prod_{i=1}^N (1 - P_i(t)) \quad \text{para } i \neq j \quad (42)$$

$$P(d(t)=d_k) = \frac{P_j(t)}{1 - P_j(t)} P(d(t)=d_0) \quad (43)$$

De la misma manera se puede encontrar las expresiones para la probabilidad de ocurrencia de estados de daño consistentes en la falla de dos conexiones. Sea d_l el estado de daño en el cual se produce la falla por fatiga de las conexiones i y j , la probabilidad de que ocurra es:

$$P(d(t)=d_l) = \left[\frac{P_i(t)P_j(t)}{[1 - P_j(t)][1 - P_i(t)]} \right] P(d(t)=d_0) \quad (44)$$

Con el mismo razonamiento, se puede encontrar $P(d(t)=d_x)$ para todos los demás estados de daño, d_x .

Reemplazando los valores de $P(d(t)=d_x)$ y $P(falla | d(t)=d_i)$ en (40) se obtienen los valores de la probabilidad anual de falla de la estructura.

Tal como se indica en la sección 2.4.1 los resultados de los trabajos de inspección, (1) no detección o (2) detección y medición de grietas generan un mejor conocimiento del proceso de deterioro de las juntas. De esta manera, la función de probabilidad de falla por fatiga de una conexión, supuesta a priori, puede actualizarse mediante técnicas bayesianas con base en los resultados de la inspección. Generalmente, los trabajos de inspección son seguidos de trabajos de mantenimiento en las conexiones en las que se detectaron grietas.

3.2.1 Probabilidad anual de falla de plataformas con mantenimiento ideal

Bajo la hipótesis de mantenimiento ideal (los elementos sometidos a trabajos de mantenimiento retornan a su condición original) la probabilidad de falla por fatiga de una conexión i después del mantenimiento es tal que :

$$P_i^M(t) = P_i * (t - T_1). \quad \text{para } t > T_1. \quad (45)$$

donde P_i^* es la función de probabilidad de falla por fatiga de la conexión i generada a partir de una función a priori mediante un procedimiento de actualización bayesiana. Si en la inspección de una conexión no se detectan grietas, y por lo tanto no se realiza ningún trabajo de mantenimiento, la probabilidad de falla de la conexión después de la inspección resulta:

$$P_i^M(t) = P_i^*(t) \quad (46)$$

La función de probabilidad anual de falla de una plataforma en la que se ha realizado mantenimiento en algunas de sus conexiones, se obtiene con la ecuación (40) salvo que la probabilidad de ocurrencia de un estado de daño, ecuaciones (43) y (44), se calculan con $P_i^M(t)$ en vez de $P_i(t)$. De esta manera, la probabilidad anual de falla se calcula con:

$$Pa^M(t) = \sum_{i=0}^{Ne} P(\text{falla} | d(t) = d_i) P^M(d(t) = d_i) \quad (47)$$

donde Ne es el número de estados de daño y $P^M(d(t)=d_i)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado de daño d_i de la estructura con mantenimiento. En la práctica se puede utilizar un criterio para seleccionar los estados de daño más importantes desde el punto de vista de confiabilidad estructural. Este criterio puede ser el de seleccionar los estados de daño que corresponden a la falla de las conexiones con menor vida media, o aquellos estados de daño que deriven en una gran merma en la calidad de toda la estructura.

Considérese el caso particular en el que se realice mantenimiento ideal en todas las conexiones, y que no se conozca los resultados de la inspección de tal manera que no se actualice ninguna de las funciones P_i . En este caso, la probabilidad de ocurrencia de un estado de daño, d_k de la plataforma es:

$$P^M(d(t) = d_k) = P(d(t - T_1) = d_k) \text{ para } t > T_1. \quad (48)$$

Reemplazando (48) en (40) se obtiene que la probabilidad anual de falla de la plataforma considerando que se realiza mantenimiento ideal en todas sus conexiones y no se lleva a cabo ningún análisis bayesiano para actualizar los valores de P_i es:

$$Pa^M(t) = Pa(t - T_1) \text{ para } t > T_1. \quad (49)$$

3.3 MODELO PARA LA FUNCIÓN DE PELIGRO

Si se supone que los eventos máximos anuales son estadísticamente independientes, la probabilidad de que el sistema no falle en el periodo $[0,t]$ puede estimarse de la siguiente manera:

$$R(t) = \prod_{j=1}^t [1 - Pa(j)] \quad (50)$$

De la ecuación (21) se sabe que:

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(x) dx\right\} \quad (51)$$

Considerando a $\lambda(t)$ como una función discreta en intervalos $\Delta t=1$ año la expresión anterior se puede escribir:

$$R(t) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^t \lambda(i)\right\} \quad (52)$$

Igualando las ecuaciones (50) y (52) se obtiene:

$$\prod_{i=1}^t [1 - Pa(i)] = \exp\left\{-\sum_{i=1}^t \lambda(i)\right\} = \prod_{i=1}^t \exp(-\lambda(i)) \quad (53)$$

Dado que la igualdad anterior se debe cumplir para todo $i= 1,2,\dots,t$; resulta que:

$$1 - Pa(i) = \exp(-\lambda(i)) \quad (54)$$

Desarrollando en series de Taylor el término exponencial de la ecuación (54), se tiene:

$$1 - Pa(i) = 1 - \lambda(i) + \frac{\lambda(i)^2}{2} - \frac{\lambda(i)^3}{6} + \dots \quad (55)$$

Considerando que los valores de λ son muy pequeños, se pueden despreciar los términos superiores y la igualdad queda:

$$Pa(t) \approx \lambda(t) \quad (56)$$

Lo que indica la ecuación (56) es que a partir de la probabilidad anual de falla es posible estimar una función de peligro discreta a intervalos de 1 año. Se considera que este intervalo es adecuado para el análisis de las plataformas a lo largo de toda su vida útil.

3.3.1 Función de peligro de plataformas con mantenimiento ideal

Los trabajos de mantenimiento sólo se realizan en las conexiones en las que se detectaron grietas. Adicionalmente existe la posibilidad de actualizar los valores de las funciones de probabilidad de falla por fatiga de las conexiones. Esta actualización puede realizarse ya sea que se haya detectado una grieta o no. En este caso, el valor de $\lambda^M(t)$ se obtiene a partir de la función de probabilidad anual de falla calculada tal como se indica al principio de la sección 3.2.1.

Supóngase que en un tiempo T_1 todas las conexiones de la estructura sufren trabajos de mantenimiento ideal y adicionalmente no se cuenta con el resultado de la inspección. En este caso, la confiabilidad de la plataforma con mantenimiento $R^M(t)$ es igual a la ecuación (37). Reemplazando (20) en (19) se obtiene la relación entre función de peligro y confiabilidad:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (57)$$

Se define la función de peligro con mantenimiento ideal, $\lambda^M(t)$, de la siguiente manera:

$$\lambda^M(t) = -\frac{1}{R^M(t)} \frac{dR^M(t)}{dt} \quad (58)$$

Reemplazando (37) en (58) se obtiene:

$$\lambda^M(t) = -\frac{1}{R(T_1)R(t-T_1)} R(T_1) \frac{dR(t-T_1)}{dt} \quad , \quad t > T_1 \quad (59)$$

En consecuencia,

$$\lambda^M(t) = -\frac{1}{R(t-T_1)} \frac{dR(t-T_1)}{dt} \quad , \quad t > T_1 \quad (60)$$

$$\lambda^M(t) = \lambda(t-T_1) \quad , \quad t > T_1 \quad (61)$$

Por lo tanto, la función de peligro del sistema con mantenimiento ideal en todas sus conexiones, λ^M , es

$$\lambda^M(t) = \begin{cases} \lambda(t) \dots t < T_1 \\ \lambda(t - T_1) \dots t \geq T_1 \end{cases} \quad (62)$$

que es el mismo resultado que se obtiene a partir del análisis de la función de probabilidad anual de falla de plataformas con mantenimiento ideal bajo las mismas hipótesis y que se presenta en la ecuación (49).

3.4 *MODELO PARA LA FUNCIÓN DE REPOSICIÓN*

En el caso de plataformas marinas, el tiempo de reposición Y puede considerarse como una constante que no depende del tiempo en el que ocurra la falla, lo que implica que la distribución del tiempo de reposición se puede modelar como una Delta de Dirac. Sin embargo, para las deducciones que involucren el cálculo de la disponibilidad de la estructura (25) se considerará que el tiempo de reposición tiene una distribución exponencial, debido a su mejor manejo algebraico. En consecuencia la función de reposición γ es una constante igual a la inversa del valor esperado del tiempo de reposición.

$$\gamma(t) = \gamma_0 = \frac{1}{E[Y]} \quad (63)$$

Lewis (1987) muestra que la diferencia en los resultados obtenidos al suponer ambos modelos —distribución exponencial y delta de Dirac— puede llegar a ser despreciable en la mayoría de los casos prácticos.

3.4.1 Función de reposición de plataformas con mantenimiento ideal

Se supone que la función de reposición del sistema con mantenimiento, γ^M , no depende de la realización de los trabajos de mantenimiento y es constante en el tiempo, por lo tanto:

$$\gamma^M(t) = \gamma_0 \quad (64)$$

3.5 *MODELO PARA LA DISPONIBILIDAD*

La disponibilidad de la estructura, se calcula con las expresiones (25) y (26), para lo cual se debe conocer las funciones de peligro y reposición de la estructura. Dichas

funciones contienen la información sobre el comportamiento de la estructura frente a eventos extremos, los efectos de deterioro por fatiga, la duración de los trabajos de reposición en caso de falla de la estructura y, dado el caso, la información de inspecciones y los efectos de trabajos de mantenimiento.

3.5.1 Función de disponibilidad de plataformas con mantenimiento ideal

En el caso particular de una plataforma con mantenimiento ideal en todas sus conexiones, el valor de la disponibilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$D^M(t) = 1 - \exp\{-Q^M(t)\} \int_0^t \lambda^M(\tau) \exp\{Q^M(\tau)\} d\tau \quad (65)$$

donde Q^M se define como:

$$Q^M(t) = \int_0^t [\lambda^M(\tau) + \gamma^M(\tau)] d\tau \quad (66)$$

Reemplazando (62) y (64) en (66) se obtiene:

$$Q^M(t) = \int_0^t [\lambda(\tau) + \gamma_0] d\tau = Q(t) \quad \text{para } t < T_1 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} Q^M(t) &= \int_0^{T_1} [\lambda(\tau) + \gamma_0] d\tau + \int_{T_1}^t [\lambda(\tau - T_1) + \gamma_0] d\tau \\ &= Q(T_1) + \int_{T_1}^t [\lambda(\tau - T_1) + \gamma_0] d\tau \quad \text{para } t \geq T_1 \end{aligned} \quad (68)$$

Utilizando el siguiente cambio de variable en (68)

$$\begin{aligned} x &= \tau - T_1 \\ dx &= d\tau \end{aligned} \quad (69)$$

Se obtiene que:

$$Q^M(t) = Q(T_1) + \int_0^{t-T_1} [\lambda(x) + \gamma_0] dx = Q(T_1) + Q(t - T_1) \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (70)$$

Reemplazando (62) y (67) en (65) se obtiene:

$$D^M(t) = 1 - \exp\{-Q(t)\} \int_0^t \lambda(\tau) \exp\{Q(\tau)\} d\tau = D(t) \quad \text{para } t < T_1 \quad (71)$$

Reemplazando (62) y (70) en (65) se obtiene:

$$D^M(t) = 1 - \exp\{-Q(T_1) - Q(t - T_1)\} \left[\int_0^{T_1} \lambda(\tau) \exp\{Q(\tau)\} d\tau + \int_{T_1}^t \lambda(\tau - T_1) \exp\{Q(T_1) + Q(\tau - T_1)\} d\tau \right] \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (72)$$

Utilizando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= \tau - T_1 \\ dx &= d\tau \end{aligned} \quad (73)$$

en la segunda integral de la ecuación (72) se obtiene:

$$D^M(t) = 1 - \exp\{-Q(T_1)\} \exp\{-Q(t - T_1)\} \left[\int_0^{T_1} \lambda(\tau) \exp\{Q(\tau)\} d\tau + \exp\{Q(T_1)\} \int_0^{t-T_1} \lambda(x) \exp\{Q(x)\} dx \right] \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (74)$$

entonces,

$$D^M(t) = 1 - \exp\{-Q(T_1)\} \exp\{-Q(t - T_1)\} \int_0^{T_1} \lambda(\tau) \exp\{Q(\tau)\} d\tau - \exp\{Q(t - T_1)\} \int_0^{t-T_1} \lambda(x) \exp\{Q(x)\} dx \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (75)$$

Reordenando los términos de la expresión (75) se obtiene:

$$D^M(t) = D(t - T_1) - \exp\{-Q(t - T_1)\} [1 - D(T_1)] \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (76)$$

El término exponencial de la ecuación anterior se puede desglosar de la siguiente manera:

$$\exp\{-Q(t - T_1)\} = \exp\left\{-\int_0^{t-T_1} [\lambda(\tau) + \gamma_0] d\tau\right\} \quad (77)$$

$$\exp\{-Q(t - T_1)\} = \exp\left\{-\int_0^{t-T_1} \lambda(\tau) d\tau\right\} \cdot \exp\left\{-\int_0^{t-T_1} \gamma_0 d\tau\right\} \quad (78)$$

Considerando el resultado de la ecuación (21) se puede escribir que:

$$\exp\{-Q(t-T_1)\}=R(t-T_1)R^*(t-T_1) \quad (79)$$

donde $R(t)$ es la confiabilidad de la estructura, es decir la probabilidad de que la estructura no falle en el intervalo $[0,t]$ y $R^*(t)$ una función análoga a la confiabilidad con la diferencia de que R se puede relacionar con la función de peligro y por ende con el tiempo a la falla, mientras que R^* se relaciona con la función de reposición y la duración de los trabajos de reposición. Por lo tanto, R^* es la probabilidad de que los trabajos de reposición no hayan terminado en el intervalo $[0,t]$. Así,

$$D^M(t)=D(t-T_1)-R(t-T_1)R^*(t-T_1)[1-D(T_1)] \quad \text{para } t \geq T_1 \quad (80)$$

La ecuación (80) indica que la disponibilidad del sistema en un tiempo posterior al del mantenimiento es igual a la disponibilidad del sistema original con el origen desfasado a T_1 menos la confiabilidad de la estructura en $[0,t-T_1]$ multiplicado por la probabilidad de que los trabajos de reposición no hayan terminado en el intervalo $[0,t-T_1]$ y por la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado no operativo en T_1 .

Reemplazando $t=T_1$ en la ecuación (76) se cumple que:

$$D^M(T_1)=D(0)-\exp\{-Q(0)\}[1-D(T_1)] \quad (81)$$

Sabemos que la disponibilidad en el instante cero es uno dado que se supone que la estructura parte de un estado operativo además $Q(0)$ es igual a cero dado que es una integral con límites de integración iguales, por lo tanto

$$D^M(T_1)=1-[1-D(T_1)]=D(T_1) \quad (82)$$

El valor de la disponibilidad antes del mantenimiento calculado con (71) cuando t tiende a T_1 ($t < T_1$) es:

$$\lim_{t \rightarrow T_1} D^M(t)=D(T_1) \quad (83)$$

Comparando (82) y (83) se deduce que la disponibilidad es una función continua en T_1 .

3.6 MODELO PARA EL PRECIO DEL HIDROCARBURO

Los ingresos en las industrias extractivas o de producción dependen directamente del precio en el mercado del bien producido. Para modelar dichos precios, la mayoría de los investigadores en riesgo financiero utilizan el modelo de Ito (ampliamente utilizado para el precio de acciones) con base en las semejanzas en el comportamiento de los precios de materias primas y acciones. Dixit y Pindyck (1994) indican que un proceso “mean-reverting” o autorregresivo de primer orden es más adecuado para el precio de materias primas. Sin embargo, para efectos de este trabajo supondremos que el precio del bien producido p , sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, que es un caso particular del proceso de Ito (ver Apéndice B).

$$dp = \mu p dt + \sigma p dz \quad (84)$$

donde μ y σ son constantes y z es un proceso de Wiener. El proceso de Wiener es un caso particular de un proceso de Markov y ha sido utilizado en física para describir el movimiento browniano de partículas. En ausencia de volatilidad, $\sigma=0$ la ecuación (84) se transforma en :

$$dp = \mu p dt, \quad \frac{dp}{p} = \mu dt, \quad (85)$$

Integrando (85) se obtiene que el valor de p después de un tiempo t es $p = p_0 e^{\mu t}$, donde p_0 es el valor actual de p . De acuerdo a este resultado, μ es la tasa de interés compuesta, continua y constante en el tiempo con la que crece el valor de p cuando no existe volatilidad.

Por propiedad del modelo de Ito, la función de distribución de $p(t_j) \equiv p_j$ dado que se conoce el valor del precio en un instante anterior, $p(t_i) \equiv p_i$ es lognormal :

$$\ln(p_j) \sim \phi \left(\ln p_i + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T_j - T_i), \sigma \sqrt{T_j - T_i} \right) \quad (86)$$

Según esto, la variable σ^2 es la varianza del logaritmo de p por unidad de tiempo. El valor esperado y la varianza de p_j son:

$$E[p_j] = p_i e^{\mu(T_j - T_i)} \quad (87)$$

$$Var[p_j] = (p_i)^2 e^{2\mu(T_j - T_i)} (e^{\sigma^2(T_j - T_i)} - 1) \quad (88)$$

3.7 MODELO PARA EL FLUJO DE EFECTIVO

En este trabajo se define flujo de dinero (*cash flow*) o simplemente flujo como la diferencia entre los ingresos y egresos del proyecto generados durante el horizonte del mismo. En una industria de producción o extractiva, cuando la infraestructura opera en condiciones normales, los ingresos provienen de la venta del bien mientras que los egresos se deben a los costos ordinarios de operación. En este caso el flujo de la estructura en operación, F_{op} , se puede modelar de la siguiente manera:

$$F_{op}(t) = N(t)p(t) - G(t) \quad (89)$$

donde N es la producción por unidad de tiempo, p es el precio del bien producido y G son los gastos de operación por unidad de tiempo. Se supone que las variables N y G son deterministas y continuas en el tiempo y p sigue un proceso de movimiento browniano geométrico tal como se plantea en la sección 3.6.

En caso de que la estructura se encuentre en estado no operativo los ingresos y los costos de operación se hacen nulos. Supóngase que la reposición de la estructura se hace de manera sistemática, es decir, que los trabajos para regresar a la estructura a su condición de operación comienzan inmediatamente después de que la estructura falla. En este caso, el flujo cuando la estructura se encuentra en estado no operativo es:

$$F_{nop}(t) = -CR(t) \quad (90)$$

donde $CR(t)$ es el costo de reposición por unidad de tiempo. Podemos suponer de manera aproximada que $CR(t)$ es un flujo constante en el tiempo e igual a CR_{total}/Y , donde Y es la duración de los trabajos de reposición. El valor de CR_{total} incluye los costos de reparación y reposición de estructura o equipos dañados y los posibles costos que tengan que ser erogados por daños a terceros. Para la estimación del costo de reposición por unidad de tiempo se supondrá que Y es una constante determinista.¹ Por lo tanto $CR(t)$ será una constante en el tiempo y determinista

¹ Excepto para el caso del cálculo de la disponibilidad, en donde resulta más conveniente suponer que el tiempo de reposición tiene una distribución exponencial, con lo que la función de reposición resulta una constante.

3.7.1 Flujos de efectivo sin considerar desfases por tiempo de reposición

Supóngase que al final de los trabajos de reparación el volumen y los costos operativos normales continúan tal como estaba previsto al inicio del proyecto, es decir sin desfase. Este modelo puede ser válido para el caso de volúmenes y costos de producción poco variables en el tiempo. El flujo de efectivo del proyecto generado en el año t se puede expresar entonces de la siguiente manera:

$$F(t) = \begin{cases} N(t)p(t) - G(t) & \text{si la estructura se encuentra en operación} \\ -CR & \text{si la estructura se encuentra en estado no operativo} \end{cases} \quad (91)$$

El valor esperado de $F(t)$ será:

$$E[F(t)] = [N(t)E[p(t)] - G(t)]D(t) - CR(1 - D(t)) \quad (92)$$

donde $D(t)$ es la disponibilidad del sistema, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado operativo en un instante t como se explicó en la sección 3.5. El valor de la disponibilidad dependerá del mantenimiento que se haga a la estructura.

3.7.2 Flujos de efectivo considerando desfases por reposición con distribución exponencial

a) ENFOQUE SIMPLIFICADO

Luego que una estructura falla la estructura es sometida a un proceso de reposición cuya duración es una variable aleatoria. Adicionalmente el tiempo de falla también es una variable aleatoria por lo que no es posible de antemano saber si una estructura va a estar en operación o no en un tiempo t cualquiera. En este caso, el flujo F^d , puede tomar los siguientes valores

$$F^d(t) = \begin{cases} F(t) & \text{en operación y no ha fallado antes} \\ F(t - TR) & \text{en operación y ha fallado una vez antes} \\ F(t - 2TR) & \text{en operación y ha fallado dos veces antes} \\ F(t) - kTR & \text{en operación y ha fallado } k \text{ veces antes} \\ -CR & \text{no operativo} \end{cases} \quad (93)$$

donde $F(t)$ es el flujo de efectivo con dominio $[0,t]$ y CR es el costo total de reposición más costos por pérdidas en contenidos y vidas humanas en caso de falla de la estructura, dividido entre el tiempo que tomarán los trabajos. Sea $P_{operativa,k}$ la probabilidad de que la estructura esté operativa y haya fallado k veces antes. Dado que la probabilidad de que el sistema esté operativo en el instante t , es la disponibilidad de la estructura, $D(t)$, se debe cumplir que:

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{operativa,k}(t) \quad (94)$$

El primer término de la sumatoria en (94) (para $k=0$) resulta ser:

$$P_{operativa,0} = P_{operativa|0}(t) \times Pr[0] \quad (95)$$

donde $P_{operativa|0}$ es la probabilidad condicional de que la estructura esté operativa dado que el número de veces que ha fallado antes es nulo y $Pr[0]$ es la probabilidad de que no haya fallado antes. El primer término es igual a la unidad y, el segundo es igual a la confiabilidad, $R(t)$. De esta manera:

$$P_{operativa,0} = 1 \times R(t) = 1 - F_1(t) \quad (96)$$

donde $F_1(t)$ es la función de distribución del tiempo de la primera falla.

Una aproximación podría realizarse al considerar que la probabilidad de que la estructura falle dos veces es despreciable para cualquier valor de t dentro del rango de interés. En este caso, la sumatoria en (94) resulta :

$$D(t) \approx \sum_{k=0}^1 P_{operativa,k}(t) \quad (97)$$

Reemplazando (96) en (97) se obtiene:

$$D(t) \approx 1 - F_1(t) + P_{operativa,1}(t) \quad (98)$$

Despejando se obtiene:

$$P_{operativa,1}(t) \approx D(t) - 1 + F_1(t) \quad (99)$$

El valor esperado del flujo se puede calcular como.

$$E[\mathcal{F}^d(t)] = \mathcal{F}(t).P_{operativa,0}(t) + \mathcal{F}(t-TR).P_{operativa,1}(t) - CR.(1-D(t)) \quad (100)$$

Reemplazando (95) y (99) en (100) se obtiene:

$$E[\mathcal{F}^d(t)] = \mathcal{F}(t).(1-F_1(t)) + \mathcal{F}(t-TR).(D(t)-1+F_1(t)) - CR.(1-D(t)) \quad (101)$$

Dado que el valor de TR es aleatorio con fdp exponencial, se debe integrar con respecto a dicha variable para encontrar el valor esperado total. Sólo si $N(t)$ y $G(t)$ son lineales de t entonces se podría reemplazar el valor esperado de TR en (101).

ENFOQUE NO SIMPLIFICADO

En este planteamiento se consideran todos los casos en los que la estructura puede estar en operación, es decir, no se desprecia ningún término de la sumatoria en (94):

$$P_{operativa,k} = P_{operativa|k}(t) \times \mathcal{P}r[k] \quad (102)$$

La probabilidad de que la estructura esté operativa en t dado que ha fallado k veces antes es la probabilidad de que la estructura haya sido repuesta en algún momento entre el instante en el que falló por k -ésima vez y el instante de interés y que además no haya fallado desde la última vez que se arregló hasta el instante de análisis.

Supóngase que el tiempo de la k -ésima falla, t_k , y el tiempo de reposición, TR , son conocidos, entonces la probabilidad de que la estructura esté operativa es:

$$P(t) = R(t - t_k - TR) \quad (103)$$

donde R es la confiabilidad de la estructura. Por simplicidad en el modelo, se supone la probabilidad de que la estructura colapse durante el tiempo de reposición es nula. Integrando con respecto a TR y a t_k para obtener la probabilidad total:

$$P_{operativa|k}(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-TR} R(t - t_k - TR) f_k(t_k) dt_k \right] f_{TR}(TR) dTR. \quad (104)$$

donde f_{TR} es la función de densidad del tiempo de reposición y f_k es la función de densidad del tiempo de la k -ésima falla: (Ver Apéndice F)

$$f_k = \Phi^{-1}((\Phi(f_1))^k) \quad (105)$$

La probabilidad de que el número de eventos sea igual a k es (ver demostración en apéndice G):

$$\Pr[k] = F_k(t) - F_{k+1}(t). \quad (106)$$

3.7.3 Flujos de efectivo concentrados

Para los fines de este trabajo se presenta una manera más útil de representar los flujos. Esta consiste en dividir al proyecto en periodos y calcular los flujos esperados correspondientes llevados al tiempo inicial del periodo, suponiendo que el precio en ese instante es conocido. Definimos el valor de S_i como el valor esperado de los flujos de dinero del proyecto entre los tiempos T_i y T_{i+1} , $i=0,1,\dots,n-1$; $T_0=0$, $T_n=L$.

$$S_i = \int_{T_i}^{T_{i+1}} E[\mathcal{F}(t)]e^{-\delta(t-T_i)} dt = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \{[N(t)E[p(t)] - G(t)]D(t) - CR(1 - D(t))\}e^{-\delta(t-T_i)} dt \quad (107)$$

donde δ es la tasa de descuento del proyecto y p es el precio del hidrocarburo. La tasa de descuento es una medida de la ganancia esperada por el inversionista. Si el proyecto es muy riesgoso el inversionista requerirá un valor de δ muy grande para atreverse a invertir en él. Un proyecto con riesgo bajo requerirá un valor de δ menor que en el caso anterior. En un mercado libre de *arbitrage* la tasa δ de proyectos sin riesgo es la tasa libre de riesgo. En el caso de proyectos de IPH el riesgo proviene de los aspectos técnicos como financieros. Reemplazando (87) en (107) se obtiene:

$$S_i = p_i n_i - g_i - m_i \quad (108)$$

donde

$$n_i = \int_{T_i}^{T_{i+1}} N(t)D(t)e^{-(\delta-\mu)(t-T_i)} dt \quad (109)$$

$$g_i = \int_{T_i}^{T_{i+1}} G(t)D(t)e^{-\delta(t-T_i)} dt$$

$$m_i = CR \int_{T_i}^{T_{i+1}} (1 - D(t))e^{-\delta(t-T_i)} dt$$

y $p_i = p(T_i)$ es el valor del precio del hidrocarburo en el instante T_i . El dominio de S_i es $]-g_i - m_i, +\infty[$.

El valor de S_i para $i > 0$ es aleatorio pues el valor de p_i es aleatorio y sigue un proceso de Ito tal como se aprecia en la ecuación (84). La variable n_i se puede

entender como la suma esperada de los ingresos en el intervalo $[T_i, T_{i+1}]$ llevados al tiempo T_i con una tasa de descuento que es igual a la del proyecto menos la tasa de crecimiento del bien producido y suponiendo que el precio del bien es igual a una unidad monetaria. Cuando la tasa de crecimiento es igual que la tasa de descuento del proyecto, $\delta=\mu$, n_i resulta la suma de los flujos de efectivo en moneda corriente considerando que el precio es constante e igual a uno. El valor de g_i es la suma esperada de los egresos por costos ordinarios de operación y mantenimiento en el intervalo $[T_i, T_{i+1}]$ llevados al instante T_i con una tasa de descuento igual a la del proyecto. El valor de m_i es el valor esperado del costo de reposición de la estructura en caso de falla en el mismo intervalo y con la misma tasa de descuento. Dado que S_i es una función de p_i continua y estrictamente creciente podemos encontrar de manera directa la función de densidad de S_i a partir de la función de p_i

$$f_{S_i}(x) = \frac{1}{n_i} f_p \left[\frac{x + g_i + m_i}{n_i} \right] \quad (110)$$

Dado que la variable p_i tiene distribución log-normal, ver (86):

$$f_p(y) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}y} e^{-(\ln y - M)^2 / 2D^2} \quad (111)$$

donde:

$$\begin{aligned} M &= \ln p_i + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T_{i+1} - T_i) \\ D &= \sigma \sqrt{T_{i+1} - T_i} \end{aligned} \quad (112)$$

la función de densidad de probabilidad de S_i se obtiene reemplazando (111) en (110)

$$f_{S_i}(x) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(x + g_i + m_i)} \exp \left\{ - \left[\ln \left(\frac{x + g_i + m_i}{n_i} \right) - M \right]^2 / 2D^2 \right\} \quad (113)$$

que es la expresión de la función de densidad de probabilidad log-normal desfasada cuyo dominio es $](-g_i - m_i), +\infty[$. La media y la varianza de S_i son

$$E[S_i] = n_i E[p_i] - g_i - m_i \quad (114)$$

$$Var[S_i] = n_i^2 Var[p_i] \quad (115)$$

donde $E[p_i]$ y $Var[p_i]$ se encuentran en (87) y (88).

De la ecuación (108) se tiene:

$$p_i = \frac{S_i + g_i + m_i}{n_i}, \quad dp_i = \frac{dS_i}{n_i} \quad (116)$$

Considerando que p sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, expresado en (84) se obtiene:

$$\frac{dS_i}{n_i} = \mu \frac{S_i + g_i + m_i}{n_i} dt + \sigma \frac{S_i + g_i + m_i}{n_i} dz \quad (117)$$

$$dS_i = (S_i + g_i + m_i)(\mu dt + \sigma dz) \quad , \quad S_i > -g_i - m_i \quad (118)$$

donde μ y σ son constantes y z es un proceso de Wiener. En consecuencia, la variable S_i sigue un proceso de Ito, aunque diferente al movimiento browniano geométrico empleado para el precio del hidrocarburo.

3.7.4 Flujo del proyecto por unidad de tiempo

Un resultado útil para la evaluación del proyecto con propósitos financieros y de seguros, puede ser el del cálculo de los flujos del proyecto por unidad de tiempo llevados a tiempo presente. Las expresiones para el cálculo de la producción, los costos operativos y los costos de falla del proyecto con mantenimiento pueden obtenerse a partir de las ecuaciones expresadas en (109):

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= N(t)D^M(t)e^{-(\delta-\mu)t} \\ \bar{g}(t) &= G(t)D^M(t)e^{-\delta t} \\ \bar{m}(t) &= CR(1-D^M(t))e^{-\delta t} \end{aligned} \quad (119)$$

El valor de $\bar{n}(t)$ multiplicado por el precio del hidrocarburo en el instante inicial representa el valor esperado de la venta de hidrocarburo por unidad de tiempo llevada a tiempo presente. $\bar{g}(t)$ es el valor esperado de los costos operativos normales llevados a tiempo presente por unidad de tiempo y $\bar{m}(t)$ es el valor esperado del costo de reposición de la estructura (considerando que la reposición se realiza inmediatamente después de que se produce la falla) por unidad de tiempo llevado a tiempo presente.

4 CASOS DE ANÁLISIS

4.1 INTRODUCCIÓN

En el transcurso de la vida útil de un proyecto de infraestructura se pueden tener situaciones críticas debido a eventos o escenarios que afectan a la estructura. Estos eventos pueden ser programados (trabajos de mantenimiento) o aleatorios (sismos, huracanes, oleaje) tanto en su intensidad como en el tiempo de ocurrencia. En esos momentos críticos el tomador de decisiones puede modificar el proyecto con respecto a su esquema original de acuerdo a las condiciones dadas en el momento de decisión. En la actualidad, estas posibilidades, a las que se denominará “opciones reales” no han sido identificadas en los proyectos de ingeniería y por lo tanto no se consideran en su valoración. En este capítulo se analizarán las opciones de mantenimiento, de abandono cerca del final de la vida útil de la estructura y la compuesta de mantenimiento y abandono.

4.2 OPCIÓN DE MANTENIMIENTO

4.2.1 Planteamiento

Para la plataforma definida en el modelo matemático se tiene programado realizar una inspección de costo fijo CI en el tiempo T_1 . De acuerdo con los resultados de la inspección se tendrá la posibilidad de llevar a cabo trabajos de mantenimiento con el fin de regresar al sistema a su estado original y a los niveles aceptables de confiabilidad. En caso contrario, los flujos esperados podrían sufrir una disminución debido al aumento de la probabilidad de falla y a sus consecuencias económicas.

El mantenimiento tiene un costo de X_1 . El valor de X_1 es aleatorio y depende del número de conexiones dañadas y de la magnitud del daño que éstas presenten. En cualquier caso $X_1 \geq 0$. Si no se detectan grietas en una conexión, no se realiza ningún trabajo de mantenimiento. En caso que ninguna conexión presente grietas el valor de X_1 es igual cero. Si se detecta una grieta con un espesor menor que un valor crítico, corresponde realizar trabajos de esmerilado con costo igual a CL por cada conexión dañada. En caso de que la grieta sea mayor que el valor crítico especificado será necesario colocar una abrazadera en la conexión y el costo será igual a CA por conexión. Cabe mencionar que la realización de los trabajos de mantenimiento no afectan la operación de la plataforma.

Supóngase que el mantenimiento es ideal, es decir, que luego del mantenimiento la estructura queda como nueva. Supóngase que la política general de la empresa que va a operar la plataforma señala que en caso de que ésta falle, es decir, que se llegue a un estado de no operatividad, la reposición de la estructura se realizará sistemáticamente luego de cada falla.

En general, la duración de los trabajos que regresarán a la estructura a la condición de operatividad, es una variable aleatoria. La disponibilidad de la estructura, definida como la probabilidad de que ésta se encuentre en estado operativo, depende de la función de peligro, $\lambda(t)$ y de la función de reposición, $\gamma(t)$. En (71) y (76) se ha encontrado la expresión para la disponibilidad de estructuras con mantenimiento ideal en T_1

4.2.2 Identificación de la opción de mantenimiento

La Figura 3 muestra un esquema del proyecto con la misma nomenclatura que se ha venido utilizando: X_0 es el costo inicial del proyecto, L es el horizonte del proyecto, CI es el costo de la inspección, X_1 es el costo de los trabajos de

mantenimiento y T_1 es el instante de realización de dichos trabajos. Para que la opción de mantenimiento exista, el valor de X_1 debe ser mayor que cero. Los flujos de la producción original con mantenimiento se muestran con línea continua; la producción mermada debido a la falta de mantenimiento se muestra con línea discontinua. Más adelante se explicará la razón de esta disminución en el flujo del proyecto sin mantenimiento.

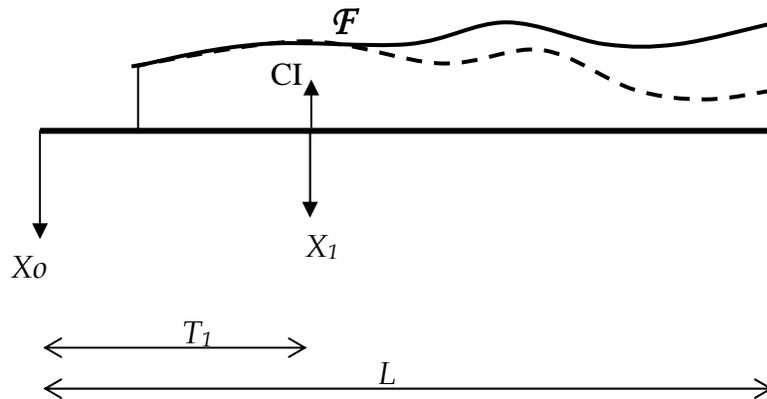


Figura 3: Esquema de flujos de efectivo de proyecto con producción original (en línea continua) y mermada (en línea discontinua)

El proyecto puede dividirse en dos, como se ve en la Figura 4.

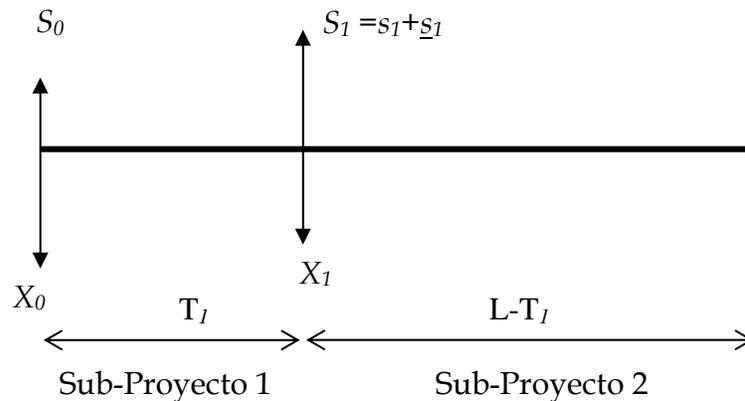


Figura 4: Esquema flujos de efectivo de proyecto con opción de mantenimiento (desglosado)

En este caso S_0 es el flujo de efectivo concentrado correspondiente al periodo $[0, T_1]$ más el valor de la inspección llevados a tiempo presente, s_1 es el flujo correspondiente al periodo $[T_1, L]$ de la producción mermada y \underline{s}_1 es el flujo

adicional correspondiente al mismo periodo que se obtendría al realizar los trabajos de mantenimiento. La suma de ambos términos da como resultado el flujo de la producción original. En el instante T_1 , el tomador de decisiones tiene dos alternativas:

1. Pagar el costo del mantenimiento y continuar con la producción original hasta el final de la vida útil de la estructura
2. No realizar ningún mantenimiento y continuar con una producción mermada

Los flujos de cada alternativa se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 5: Alternativas de un proyecto con opción de mantenimiento

Alternativa 1	Alternativa 2
Pagar el costo del mantenimiento y continuar con la producción original	No realizar ningún mantenimiento y continuar con una producción mermada

La primera alternativa será válida si $s_1 - X_1 > 0$, en este caso el valor del proyecto será:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} (S_1 - X_1), \quad X_1 > 0 \quad (120)$$

En caso contrario, es decir si $s_1 - X_1 < 0$, la segunda alternativa será la correcta y el valor del proyecto será:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} (s_1) \quad (121)$$

De (120) y (121) se obtienen dos expresiones equivalentes para calcular el valor total del proyecto:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} (S_1 - X_1) + \mathcal{P} \quad (122)$$

y

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} s_1 + \mathcal{C} \quad (123)$$

donde:

$$\mathcal{P} = e^{-\delta T_1} \text{máx}(X_1 - \underline{s}_1, 0) \quad (124)$$

$$\mathcal{E} = e^{-\delta T_1} \text{máx}(\underline{s}_1 - X_1, 0) \quad (125)$$

Se puede interpretar el término $\text{máx}(\underline{s}_1 - X_1, 0)$ como el valor de una opción de compra (*call option*) de \underline{s}_1 con precio de ejercicio X_1 , justo antes de su vencimiento en T_1 , ver deducción de la ecuación (2). De la misma manera el término $\text{máx}(X_1 - \underline{s}_1, 0)$ es el valor de la opción de venta (*put option*) análoga justo antes del vencimiento en T_1 . Los valores de \mathcal{P} y \mathcal{E} son opciones de venta y compra llevadas a tiempo presente con una tasa de descuento igual a la tasa de descuento del proyecto.

El planteamiento anterior indica que un proyecto con opción de mantenimiento puede tratarse desde dos puntos de vista: el primero, en (122), es considerar que el proyecto con mantenimiento tiene una opción de reducción equivalente a no realizar el mantenimiento (es decir una opción de venta) y el segundo, en (123), en que el proyecto sin mantenimiento tiene una opción de ampliación (o de compra) que es equivalente a la opción de realizar el mantenimiento.

4.2.3 Cálculo de flujos esperados

Los valores de S_0 y S_1 se definen como los valores esperado de los flujos de dinero del proyecto en los intervalos $[0, T_1]$ y $[T_1, L]$, respectivamente. Utilizando las expresiones (108) y (109) se obtiene:

$$S_0 = p_0 n_0 - g_0 - m_0 - (CI)e^{-\delta T_1} \quad S_1 = p_1 n_1 - g_1 - m_1 \quad (126)$$

donde:

$$\begin{aligned} n_0 &= \int_0^{T_1} N(t)D(t)e^{-(\delta-\mu)t} dt & n_1 &= \int_{T_1}^L N(t)D^M(t)e^{-(\delta-\mu)(t-T_1)} dt \\ g_0 &= \int_0^{T_1} G(t)D(t)e^{-\delta t} dt & g_1 &= \int_{T_1}^L G(t)D^M(t)e^{-\delta(t-T_1)} dt \\ m_0 &= CR \int_0^{T_1} (1-D(t))e^{-\delta t} dt & m_1 &= CR \int_{T_1}^L (1-D^M(t))e^{-\delta(t-T_1)} dt \end{aligned} \quad (127)$$

donde δ es la tasa anual de descuento del proyecto. El valor del sub-proyecto 2 cuando no se realizan los trabajos de mantenimiento, s_1 , resulta:

$$s_1 = p_1 n_1^* - g_1^* - m_1^* \quad (128)$$

donde:

$$\begin{aligned}
n_1^* &= \int_{T_1}^L N(t)D(t)e^{-(\delta-\mu)(t-T_1)} dt \\
g_1^* &= \int_{T_1}^L G(t)D(t)e^{-\delta(t-T_1)} dt \\
m_1^* &= CR \int_{T_1}^L (1-D(t))e^{-\delta(t-T_1)} dt
\end{aligned} \tag{129}$$

En consecuencia lo que se obtiene al realizar los trabajos de mantenimiento es la diferencia entre el valor de S_1 y s_1 :

$$\underline{s}_1 = S_1 - s_1 = \Delta n_1 p_1 - \Delta g_1 + \Delta m_1 \tag{130}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Delta n_1 &= \int_{T_1}^L N(t)(D^M(t) - D(t))e^{-(\delta-\mu)(t-T_1)} dt \\
\Delta g_1 &= \int_{T_1}^L G(t)(D^M(t) - D(t))e^{-\delta(t-T_1)} dt \\
\Delta m_1 &= CR \int_{T_1}^L (D^M(t) - D(t))e^{-\delta(t-T_1)} dt
\end{aligned} \tag{131}$$

Los parámetros expresados en (131) son deterministas e independientes del tiempo. Sólo dependen de las características de la producción y de las políticas de mantenimiento y reposición. En el caso de plataformas el volumen de producción no se altera debido a la realización de los trabajos de mantenimiento. Δn_1 es una medida de la diferencia en el volumen de producción de la estructura con mantenimiento respecto a la estructura sin mantenimiento. Considerando que para estructuras con deterioro en el tiempo y mantenimiento ideal $D^M(t) > D(t)$, Δn_1 es positiva, lo cual significa que la producción esperada en la plataforma con mantenimiento será mayor que en la plataforma sin mantenimiento. Δg_1 es la diferencia de los flujos actualizados de los gastos operativos debido a la realización de los trabajos de mantenimiento. Al igual que para el volumen de producción, se espera que los gastos operativos y de producción en la estructura con mantenimiento sean mayores que los de la estructura sin mantenimiento en este tipo de estructuras con deterioro en el tiempo. Esto se debe a que la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado operativo (y por lo tanto, de que se eroguen los gastos operativos y de producción) es mayor en la estructura con mantenimiento. El valor de Δm_1 es la diferencia en los costos esperados de falla de la estructura sin mantenimiento con respecto a la misma estructura con mantenimiento.

El valor de \underline{s}_1 en (130) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\underline{s}_1 = a_1 p_1 - b_1 \quad (132)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta n_1 \\ b_1 &= \Delta g_1 - \Delta m_1 \end{aligned} \quad (133)$$

Dado que \underline{s}_1 y S_1 tienen la misma forma funcional, se desprende que \underline{s}_1 sigue el proceso de Ito que se muestra en la expresión (118)

$$d\underline{s}_1 = (\underline{s}_1 + b_1)(\mu dt + \sigma dz) \quad (134)$$

donde μ y σ son constantes y z es un proceso de Wiener. Adicionalmente se ha demostrado en (113) que la función de densidad de probabilidad de \underline{s}_1 es log-normal desfasada.

$$f_{\underline{s}_1}(s) = \frac{1}{\Omega \sqrt{2\pi}(s+b_1)} \exp \left\{ - \left[\ln \left(\frac{s+b_1}{a_1} \right) - M \right]^2 / 2\Omega^2 \right\} \quad (135)$$

$$M = \ln p_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1 \quad (136)$$

$$\Omega = \sigma \sqrt{T_1}$$

y p_0 es el valor del hidrocarburo conocido al inicio del proyecto. El dominio de \underline{s}_1 es $]-b_1, \infty[$.

4.2.4 Valor de la opción y del proyecto

Para evaluar el proyecto con opción de mantenimiento se analizarán las ecuaciones (122) y (123) deducidas en la sección 4.2.2:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} (S_1 - X_1) + \mathcal{P}, \quad X_1 > 0 \quad (137)$$

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} s_1 + \mathcal{E} \quad (138)$$

donde:

$$\mathcal{P} = e^{-\delta T_1} \text{máx}(X_1 - \underline{s}_1, 0) \quad (139)$$

$$\mathcal{E} = e^{-\delta T_1} \text{máx}(\underline{s}_1 - X_1, 0) \quad (140)$$

\mathcal{P} es el valor presente de una opción de venta en T_1 de \underline{s}_1 con precio de ejercicio X_1 y \mathcal{E} es el valor presente de la opción de compra análoga suponiendo que la tasa de descuento es la tasa de descuento del proyecto, δ . Considérese que el valor de X_1 es conocido.

Cuando X_1 es mayor que el mínimo valor de \underline{s}_1 , es decir $X_1 > -b_1 = -\Delta g_1 + \Delta m_1$, la solución para los valores de las opciones \mathcal{E} y \mathcal{P} puede encontrarse siguiendo el razonamiento utilizado por Black y Scholes (1973) para el caso de opciones financieras y que se muestra en el Apéndice A. Es posible suponer que las hipótesis acerca del mercado financiero en el análisis de opciones financieras son adecuadas para el análisis de las opciones de mantenimiento \mathcal{E} y \mathcal{P} . Esta suposición es válida debido a que \underline{s}_1 es directamente proporcional al valor del hidrocarburo y éste se comporta como una acción, tal como se explica en la sección 3.6. Sin embargo, en las opciones \mathcal{E} y \mathcal{P} la variable \underline{s}_1 , sigue un proceso de Ito, ecuación (134), mientras que en el análisis de las opciones financieras se supone que el valor de la acción sigue un proceso browniano geométrico (que es un tipo particular del proceso de Ito). Esta diferencia no impide aplicar el lema de Ito (Apéndice C) a \mathcal{E} y \mathcal{P} , las cuales son funciones de la variable \underline{s}_1 . Aplicando el lema de Ito a \mathcal{P} y eliminando los subíndices por simplicidad en la nomenclatura, se obtiene:

$$d\mathcal{P} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} \mu(s+b) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \right) dt + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} \sigma (s+b) dz \quad (141)$$

$$d\mathcal{P} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \right) dt + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} ds \quad (142)$$

Se puede formar una cartera ficticia, V_H , consistente en la venta de $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}$ veces el valor s y la compra de una opción de compra \mathcal{P} . El valor de V_H es:

$$V_H = s \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - \mathcal{P} \quad (143)$$

$$dV_H = ds \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - d\mathcal{P} \quad (144)$$

Reemplazado (142) en (144):

$$dV_H = ds \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \right) dt - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} ds \quad (145)$$

$$dV_H = \left(-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \right) dt \quad (146)$$

La ecuación (146) no depende de dz , en consecuencia la cartera V_H no tiene riesgo en el intervalo dt , por lo tanto se puede suponer que la variación de la cartera en el tiempo depende de la tasa de interés libre de riesgo, r :

$$dV_H = rV_H dt = r \left(s \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - \mathcal{P} \right) dt \quad (147)$$

Igualando (147) y (146) se obtiene:

$$rs \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - r\mathcal{P} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \quad (148)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = r\mathcal{P} - rs \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial s^2} \sigma^2 (s+b)^2 \quad (149)$$

La ecuación diferencial tiene las siguientes condiciones de borde

$$\mathcal{P} = \max(X_1 - \underline{s}_1, 0) \quad , \text{ cuando } t = T_1$$

$$\mathcal{P} = (X_1 + b_1) e^{-rt} \quad , \text{ cuando } \underline{s}_1(t=0) = -b_1$$

La primera condición proviene de un razonamiento similar al de la ecuación (2) que es la expresión para calcular una *call option* justo antes de su vencimiento. La segunda condición se explica por la ecuación (134) que indica que la variación en el tiempo de \underline{s}_1 es nula cuando \underline{s}_1 evaluado en $t=0$ es $-b_1$. En este caso el valor de \underline{s}_1 en $t=T_1$ es $-b_1$. Considerando que $X_1 > -b_1$, resulta que $X_1 > \underline{s}_1$ y por lo tanto, es más provechoso ejecutar el trabajo de mantenimiento. Dado que no hay incertidumbre en la ejecución de estos trabajos resulta que el valor de la opción es la diferencia entre el valor de ejercicio y el valor de la opción llevado a tiempo presente. Considerando que no tiene riesgo y bajo la hipótesis de un mercado libre de *arbitrage*, (ver hipótesis en Apéndice A) la tasa de descuento de la opción es la tasa libre de riesgo, r .

Cabe recordar que la ecuación (149) es válida también para la opción \mathcal{E} , lo único que varía son las condiciones de borde, que para este caso son:

$$\mathcal{E} = \max(\underline{s}_1 - X_1, 0) \quad , \text{ cuando } t = T_1$$

$$\mathcal{E} = 0 \quad , \text{ cuando } \underline{s}_1 = 0$$

La ecuación (149) es similar a la ecuación diferencial de Black-Scholes (A 8) cuando \mathcal{P} es una opción financiera, *call option* o *put option*, excepto que el término elevado al cuadrado incluye una constante igual a $b_1 = \Delta g_1 + \Delta m_1$. Se puede observar que, al igual que la ecuación de Black y Scholes, la ecuación (149) no depende de la variable μ . En el área de las finanzas, esta variable se conoce como tasa de retorno de la acción y depende de la aversión al riesgo del inversionista (en el caso de acciones más riesgosas el valor de μ será mayor que en el caso de acciones menos riesgosas). La ecuación (149) sólo depende del precio de s_1 , de las constantes $\Delta g + \Delta m$, del tiempo, de la volatilidad, σ , y de la tasa de interés libre de riesgo, r . Todos estos parámetros son independientes de las preferencias de riesgo de los inversionistas y por lo tanto la solución de dicha ecuación diferencial no depende de dichas preferencias. Este hecho es el fundamento del método neutral al riesgo (Cox y Ross, 1976). Como un caso particular, se puede suponer que no existe riesgo, entonces la tasa de descuento, δ , y la de crecimiento del precio del hidrocarburo, μ , se igualan a la tasa de interés libre de riesgo, r .

Aplicando el método neutral al riesgo para evaluar el valor de \mathcal{P} , se obtiene:

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} E[\text{máx}((X_1 - s_1), 0)] \quad (150)$$

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} \int_{-b_1}^{X_1} (X_1 - s) f_{s_1}^*(s) ds \quad (151)$$

donde $f_{s_1}^*$ es idéntica a (135) salvo que la tasa de crecimiento μ se reemplaza por r . La ecuación (151) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} \int_{-b_1}^{\infty} (X_1 - s) f_{s_1}^*(s) ds - e^{-rT_1} \int_{X_1}^{\infty} (X_1 - s) f_{s_1}^*(s) ds \quad (152)$$

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} X_1 - e^{-rT_1} \int_{-b_1}^{\infty} s f_{s_1}^*(s) ds + e^{-rT_1} \int_{X_1}^{\infty} (s - X_1) f_{s_1}^*(s) ds \quad (153)$$

Desarrollando el segundo término de la ecuación (153) se obtiene:

$$e^{-rT_1} \int_{-b_1}^{\infty} s f_{s_1}^*(s) ds = e^{-rT_1} E[s_1] = e^{-rT_1} (a_1 E[p_1] - b_1) \quad (154)$$

El valor esperado de p_1 está dado en la ecuación (87) excepto que el valor de μ se reemplaza por r . Entonces:

$$E[p_1] = p_0 e^{rT_1} \quad (155)$$

Reemplazando en (154) se obtiene:

$$e^{-rT_1} \int_{-b_1}^{\infty} s f_{s_1}^*(s) ds = e^{-rT_1} (a_1 p_0 e^{rT_1} - b_1) = a_1 p_0 - b_1 e^{-rT_1} \quad (156)$$

Por otro lado, el tercer término de la ecuación (153) es igual al valor esperado de la opción de compra sobre el activo s_1 con un precio de ejercicio X_1 en un mundo neutral al riesgo

$$\mathcal{C} = e^{-rT_1} \int_{X_1}^{\infty} (s - X_1) f_{s_1}^*(s) ds \quad (157)$$

En consecuencia, reemplazando (156) en (153) se obtiene una expresión que relaciona la opción de compra con la opción de venta, que es lo que en finanzas se conoce como ecuación de paridad:

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} (X_1 + b_1) - a_1 p_0 + \mathcal{C} \quad (158)$$

En el Apéndice D se muestra que \mathcal{C} se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{C} = n_1 e^{-rT_1} \exp\left[\frac{2M + D^2}{2}\right] \Phi\left[\frac{-\ln\left(\frac{X_1 + b_1}{a_1}\right) + (M + D^2)}{D}\right] - (X_1 + b_1) e^{-rT_1} \Phi\left[-\frac{\ln(X_1 + b_1) - (\ln(a_1) + M)}{D}\right] \quad (159)$$

donde Φ es la función de distribución de una variable normal estándar. De (112) para $i=1$ se obtiene que:

$$\frac{2M + D^2}{2} = \frac{2 \ln p_0 + 2(r - \sigma^2 / 2)T_1 + \sigma^2 T_1}{2} = \ln p_0 + rT_1 \quad (160)$$

$$M + D^2 = \ln p_0 + (r - \sigma^2 / 2)T_1 + \sigma^2 T_1 = \ln p_0 + (r + \sigma^2 / 2)T_1 \quad (161)$$

Reemplazando en (159)

$$\mathcal{C} = a_1 p_0 \Phi[k_1] - (X_1 + b_1) e^{-rT_1} \Phi[k_2] \quad (162)$$

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{a_1 p_0}{X_1 + b_1}\right) + (r + \sigma^2 / 2)T_1}{\sigma \sqrt{T_1}}, \quad k_2 = k_1 - \sigma \sqrt{T_1} \quad (163)$$

Reemplazando (162) en (158) se obtiene:

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} (X_1 + b_1) - a_1 p_0 + a_1 p_0 \Phi[k_1] - (X_1 + b_1) e^{-rT_1} \Phi[k_2] \quad (164)$$

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} (X_1 + b_1) (1 - \Phi[k_2]) - a_1 p_0 (1 - \Phi[k_1]) \quad (165)$$

$$\mathcal{P} = e^{-rT_1} (X_1 + b_1) (\Phi[-k_2]) - a_1 p_0 (\Phi[-k_1]) \quad (166)$$

Las expresiones (162) y (166) son similares a las expresiones (3) y (8) para valorar opciones de compra y venta, respectivamente, de un activo $a_1 p_0$ con precio de ejercicio $X_1 + b_1$ con una volatilidad igual a la del precio del hidrocarburo con vencimiento en T_1 , y tasa de interés libre de riesgo.

La evaluación del valor esperado de \mathcal{P} en la ecuación (139) resulta trivial cuando el valor de X_1 es menor que el mínimo valor posible de s_1 , es decir, $X_1 < -b_1 = -\Delta g_1 + \Delta m_1$. En este caso, la opción de venta vale cero y el valor total del proyecto según (137) es el valor presente neto (VPN) de los flujos del proyecto con mantenimiento. En otras palabras, dado que realizar el mantenimiento siempre es lo más ventajoso independientemente del precio (siempre positivo) del hidrocarburo, no tiene sentido que el tomador de decisiones piense en dejar de realizar dichos trabajos. De la misma manera, la opción de compra \mathcal{C} en (140) siempre será mayor que cero para cualquier valor del precio del hidrocarburo y por lo tanto el tomador de decisiones siempre ejercerá su derecho de realizar el mantenimiento. La estimación del valor de \mathcal{C} no es trivial y se basa en el concepto de *arbitrage* que se ha venido utilizando. Sea Π una cartera ficticia, compuesta por la compra de a_1 unidades de hidrocarburo y la venta de una opción \mathcal{C} . El valor de la cartera en el tiempo t es:

$$\Pi(t) = a_1 p(t) - \mathcal{C} \quad (167)$$

el valor de la cartera justo antes de su vencimiento en T_1 es:

$$\Pi(T_1) = a_1 p_1 \cdot (s_1 - X_1) = b_1 + X_1 \quad (168)$$

como el valor de la cartera en el momento de vencimiento es una constante, la cartera brinda una ganancia sin riesgo. Por lo tanto, considerando que no existe *arbitrage*, el valor de la cartera antes del vencimiento se debe descontar con la tasa libre de riesgo, r :

$$\Pi(t=0) = (b_1 + X_1) e^{-rT_1} \quad (169)$$

Igualando (169) y (167) cuando $t=0$ se obtiene el valor de la opción en $t=0$.

$$\mathcal{C} = a_1 p_0 - (b_1 + X_1) e^{-rT_1} \quad (170)$$

que es un resultado similar al que se hubiera obtenido con la ecuación de paridad en el caso en el que $X_1 < -b_1 = -\Delta g_1 + \Delta m_1$ y deducida en (158).

Luego de la deducción de las expresiones para evaluar \mathcal{E} y \mathcal{P} , se revisarán a continuación las ecuaciones para el valor total del proyecto que se muestran en (137) y (138). En la primera de ellas se incluye la opción \mathcal{P} y se descuentan los flujos de la segunda parte del proyecto, S_1 , con una tasa de interés igual a la del proyecto, δ . La variable S_1 contiene a \underline{s}_1 por lo que también resulta afectada por esta tasa de descuento. Por otro lado, \underline{s}_1 es el bien que subyace en la opción \mathcal{P} . Dado que se ha demostrado que tener la opción de mantenimiento anula el riesgo del inversionista de tomar una mala decisión al respecto, no resulta correcto utilizar el valor de δ para descontar el valor de \underline{s}_1 , tal como implícitamente se está realizando en la ecuación (137). Por esta razón, en este trabajo se utilizará la ecuación (138) en la que se descuentan con δ la parte del proyecto que no tiene flexibilidad y utiliza el concepto de la opción de compra, \mathcal{E} .

En resumen el valor de la opción \mathcal{E} es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \Delta n_1 p_0 - (X_1 + \Delta g_1 - \Delta m_1) e^{-rT_1} \quad \text{si } \Delta m_1 - \Delta g_1 \geq X_1 \\ \mathcal{E} &= \Delta n_1 p_0 \Phi[k1] - (X_1 + \Delta g_1 - \Delta m_1) e^{-rT_1} \Phi[k2] \quad \text{si } \Delta m_1 - \Delta g_1 < X_1 \end{aligned} \quad (171)$$

donde:

$$k1 = \frac{\ln\left(\frac{\Delta n_1 p_0}{X_1 + \Delta g_1 - \Delta m_1}\right) + (r + \sigma^2 / 2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \quad (172)$$

$$k2 = k1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

y σ es la volatilidad del precio del hidrocarburo. El valor del proyecto con opción de mantenimiento es:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} S_1 + \mathcal{E} \quad (173)$$

Los valores de flujos se calculan con las expresiones encontradas en la sección 4.2.3.

Se analizará a continuación el caso en el que el resultado de la inspección indica que ninguna de las conexiones de la estructura presenta grietas, es decir, el valor de X_1 es igual a cero. En este caso no existe la opción de mantenimiento, de tal manera que la estructura sigue con su proceso de deterioro después de T_1 . Esto significa que el valor total del proyecto cuando la estructura no presenta grietas aparentes resulta:

$$E[VTP] = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} (s_1^*) \quad (174)$$

donde s_{1^*} es el valor del proyecto sin mantenimiento calculado con la función de disponibilidad estimado con las funciones de probabilidad de falla por fatiga de las conexiones, actualizadas con Bayes. Dicha actualización considera el hecho de que el resultado de la inspección es la no detección de grietas.

Considerando que se puede tener distintos programas de mantenimiento dependiendo del daño en las conexiones, el valor total del proyecto es:

$$E[VTP] = \sum P(M=m)E[VTP|m] \quad (175)$$

donde $P(M=m)$ es la probabilidad de que el programa de mantenimiento sea m .

4.2.5 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1

Supóngase que se piensa instalar una nueva plataforma ubicada en la bahía de Campeche. Se trata de una plataforma de acero ubicada en un tirante de 35 m. Consta de 8 piernas, dos marcos longitudinales y 4 transversales. En función del volumen de producción la categoría de riesgo de acuerdo con las normas NRF-003-PEMEX-2000 es de muy altas consecuencias de falla. En la Figura 5 se puede ver un modelo estructural del *jacket* de la plataforma del ejemplo. Se supone que la estructura tendrá una vida útil de 35 años.

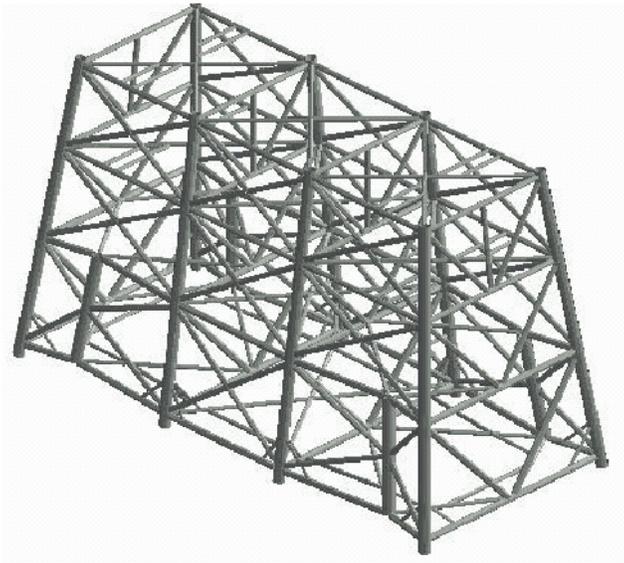


Figura 5: Modelo estructural del *jacket* de la plataforma de ocho piernas

En este ejemplo se considera que el daño por fatiga de tres de sus conexiones soldadas son las que más influyen en el daño estructural de la plataforma. Dado que la conexión tiene dos posibles condiciones (falla o no falla) y son 3 conexiones analizadas, existen $2^3=8$ estados de daño. En la tercera columna de la Tabla 6 se muestra la descripción de cada uno de los estados de daño considerados. En la cuarta columna de la misma tabla se muestran los valores de probabilidad anual de falla de la estructura ante un evento catastrófico para los distintos estados de daño. Estos valores han sido tomados de Heredia y Silva (2006) quienes realizaron el estudio de la probabilidad de falla de la plataforma con el fin de establecer criterios para diseñar programas de inspección de las conexiones. Se puede observar que la probabilidad anual de falla de la estructura con daño en alguna de sus conexiones aumenta entre 7 y 30% con respecto a la probabilidad anual de falla de la estructura intacta.

Tabla 6: Probabilidad anual de falla de plataforma para distintos estados de daño

	estado	descripción del estado de daño	$P(\text{falla} d(t)=d_i)$
1	d0	estructura intacta	1.6×10^{-4}
2	d1	estructura con falla por fatiga de conexión 1	2.07×10^{-4}
3	d2	estructura con falla por fatiga de conexión 2	1.78×10^{-4}
4	d3	estructura con falla por fatiga de conexión 3	1.71×10^{-4}
5	d4	estructura con falla por fatiga de conexiones 1 y 2	-
6	d5	estructura con falla por fatiga de conexiones 1 y 3	-
7	d6	estructura con falla por fatiga de conexiones 2 y 3	-
8	d7	estructura con falla por fatiga de conexiones 1, 2 y 3	-

La probabilidad de falla de cada conexión i , P_i , se tomará igual a los encontrados por Montes (2006) para estructuras similares ubicadas en la bahía de Campeche y que se muestran en la Tabla 7. Estos valores fueron encontrados con un procedimiento similar al descrito en la sección 2.3.3. Recuérdese que estos valores están relacionados con la probabilidad de que la profundidad de la grieta sea mayor que un valor crítico.

Aplicando las expresiones (41), (43) y (44) se encuentra la variación en el tiempo de la probabilidad de ocurrencia de los 7 primeros estados de daño definidos en la Tabla 6. Con un razonamiento análogo al empleado en la deducción de dichas fórmulas, se encuentra la probabilidad de ocurrencia del estado de daño d7. Las gráficas de la probabilidad de ocurrencia de los distintos estados de daño se muestran en las figuras 6 y 7. Se verifica que la suma de las 8 gráficas da como resultado la unidad. El escenario más probable al inicio de la vida de la plataforma es la condición de intacta, d0. A los 10 años, la probabilidad de ocurrencia de los

estados de daño d0 y d1 (estructura intacta y con daño por fatiga en conexión 1) es de 50% aproximadamente, para ambos estados. A partir de 10 años el estado de daño más probable es el d1. Los demás estados de daño son muy poco probables en comparación con los dos primeros estados de daño. Es de esperar que los estados de daño d0 y d1 contribuyan en mayor medida en el cálculo de la probabilidad anual de falla, P_a , que los demás estados de daño.

Tabla 7: Valores de probabilidad de falla por fatiga de tres conexiones

<i>Año</i>	P_1	P_2	P_3
1	4.536E-02	1.015E-07	6.883E-07
2	1.033E-01	1.049E-06	6.013E-06
3	2.020E-01	8.877E-06	4.315E-05
4	2.698E-01	2.499E-05	1.115E-04
5	3.287E-01	5.371E-05	2.244E-04
6	3.801E-01	9.792E-05	3.877E-04
7	4.250E-01	1.599E-04	6.054E-04
8	4.647E-01	2.415E-04	8.795E-04
9	4.998E-01	3.441E-04	1.211E-03
10	5.309E-01	4.687E-04	1.601E-03
11	5.589E-01	6.160E-04	2.047E-03
12	5.841E-01	7.865E-04	2.550E-03
13	6.070E-01	9.806E-04	3.108E-03
14	6.277E-01	1.198E-03	3.719E-03
15	6.466E-01	1.439E-03	4.382E-03
16	6.640E-01	1.704E-03	5.095E-03
17	6.799E-01	1.993E-03	5.856E-03
18	6.946E-01	2.304E-03	6.664E-03
19	7.082E-01	2.638E-03	7.517E-03
20	7.208E-01	2.995E-03	8.413E-03
21	7.325E-01	3.373E-03	9.350E-03
22	7.433E-01	3.774E-03	1.033E-02
23	7.535E-01	4.195E-03	1.134E-02
24	7.630E-01	4.638E-03	1.239E-02
25	7.719E-01	5.100E-03	1.348E-02
26	7.803E-01	5.583E-03	1.459E-02
27	7.881E-01	6.084E-03	1.574E-02
28	7.955E-01	6.605E-03	1.692E-02
29	8.025E-01	7.144E-03	1.813E-02
30	8.091E-01	7.701E-03	1.937E-02
31	8.153E-01	8.275E-03	2.063E-02
32	8.212E-01	8.867E-03	2.192E-02
33	8.268E-01	9.475E-03	2.323E-02
34	8.321E-01	1.010E-02	2.456E-02
35	8.372E-01	1.074E-02	2.592E-02

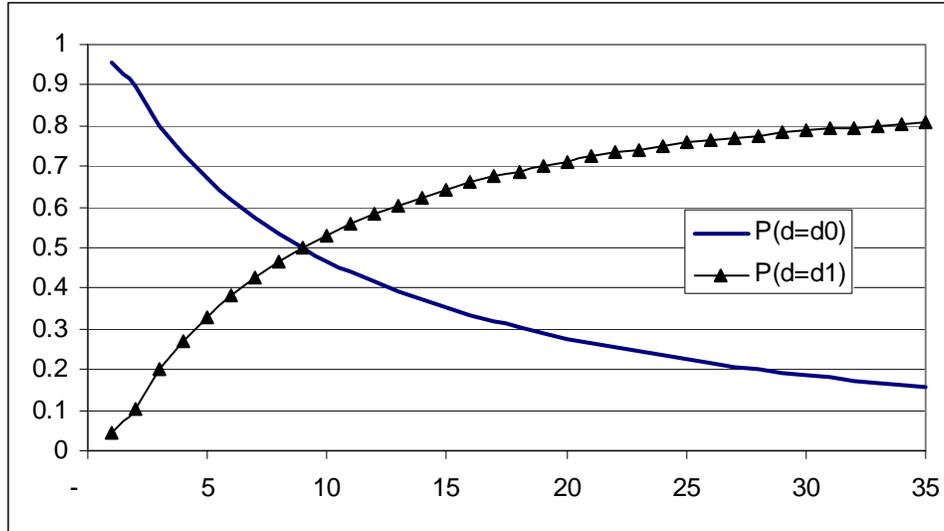


Figura 6: Probabilidad de ocurrencia de estados de daño d0 y d1

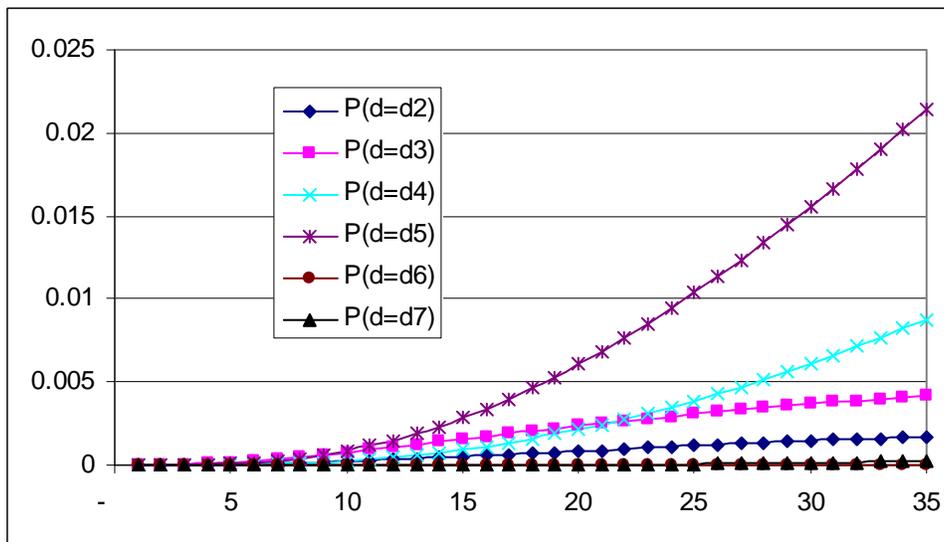


Figura 7: Probabilidad de ocurrencia de estados de daño d2 al d7

Cálculo de la probabilidad anual de falla. Aplicando la ecuación (40) se obtiene la probabilidad anual de falla de la estructura sin mantenimiento, P_a . Considerando que los estados de daño d2 al d7 tienen muy poca probabilidad de ocurrencia y que no se cuenta con la probabilidad condicional de falla para los estados d4 al d7, se despreciará la contribución de estos últimos estados de daño en el cálculo de la probabilidad anual de falla. Dado que el valor de P_a es un promedio ponderado de los valores de probabilidad anual de falla ante eventos extremos para los distintos estados de daño, se espera que se encuentre en el intervalo $[1.6 \times 10^{-4}$ y $2.07 \times 10^{-4}]$, definido por los valores límites de la Tabla 6. La gráfica de P_a se muestra en la Figura 8.

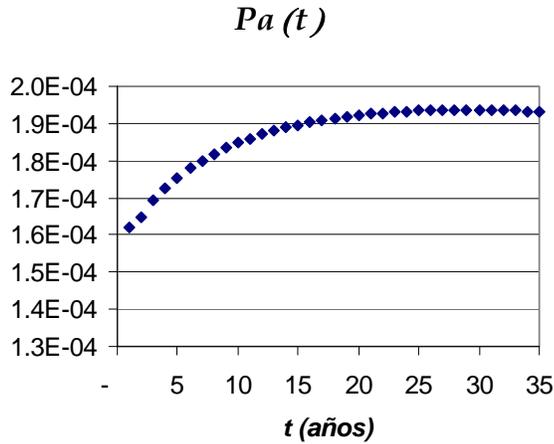


Figura 8: Probabilidad anual de falla de la plataforma sin mantenimiento

Los valores de la gráfica varían desde un valor inicial de 1.6×10^{-4} hasta 1.93×10^{-4} a los 35 años de vida. Ambos valores son lo suficientemente bajos para cumplir con los requisitos de estructuras nuevas con consecuencia de falla muy altas en caso de colapso como los recomendados por Bea et al (1998) y que se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8: Confiabilidades recomendadas para plataformas en la Bahía de Campeche

Consecuencias de falla	Producción (barriles por día)	Probabilidad anual de falla (nueva)	Probabilidad anual de falla (existente)
Muy alta	> 100,000	2.0 E-4	4.0 E-4
Alta	50,000 a 100,000	3.5 E-4	7.0 E-4
Moderada	20,000 a 50,000	5.0 E-4	1.0 E-3
baja	1,000 a 20,000	1.0 E-3	2.0 E-3

La poca disminución de la confiabilidad de la plataforma luego de 35 años se debe a que la probabilidad de falla ante un evento extremo cuando la estructura se ha deteriorado no es significativamente mayor que la de la estructura intacta. En el caso extremo, si $P(falla | d(t)=d_i) = P(falla)$ es igual para todo los estados de daño d_i , reemplazando en (40):

$$Pa(t) = P(falla) \sum_{i=0}^{Ne} P(d(t) = d_i) = P(falla) \quad (176)$$

se obtiene que Pa es constante en el tiempo.

Dado que se está analizando el proyecto en $t=0$, no se dispone los resultados de la inspección en T_1 . Si la conexión i se somete a trabajos de mantenimiento ideal (ya sea de esmerilado o de colocación de abrazadera) su probabilidad anual de falla por fatiga es:

$$P_i^M(t) = P_i(t - T_1). \text{ Para } t > T_1. \quad (177)$$

En el caso en el que no se encuentre una grieta, y dado que para el ejemplo no contamos con la probabilidad de falla por fatiga de la conexión actualizada se supondrá que la probabilidad de falla de la conexión es la misma que la supuesta a priori, es decir la que se muestra en la Tabla 7. Esta suposición es conservadora en la medida que lo son las probabilidades de falla a priori.

$$P_i^M(t) = P_i(t). \text{ para } t > T_1. \quad (178)$$

En el caso en el que se realice mantenimiento en las tres conexiones, la probabilidad de ocurrencia de un estado de daño, d_k en el tiempo t , en la estructura con mantenimiento es $P^M(d(t) = d_k) = P(d(t - T_1) = d_k)$ y la probabilidad anual de falla de la plataforma con mantenimiento es $Pa^M(t) = Pa(t - T_1)$. Si no se realiza mantenimiento a ninguna de las conexiones, la probabilidad anual de falla es la mostrada en la Figura 8. En cualquier otro caso $P^M(d(t) = d_k)$ se calcula con las funciones P_i^M , calculada con (177) o (178). En la Figura 9 se muestra la función Pa^M para los casos en los que sólo se realice mantenimiento en una conexión en $T_1=15$ años. La gráfica muestra que el efecto de realizar el mantenimiento en las conexiones 2 y 3 es despreciable. Esto se debe a que los trabajos de mantenimiento disminuyen la probabilidad de falla por fatiga de dichas conexiones, sin embargo, esta disminución no hace variar significativamente la probabilidad de ocurrencia de los estados d_0 (estructura intacta) y d_1 (falla por fatiga en la conexión 1), los cuales son los que más influyen en el cálculo de Pa .

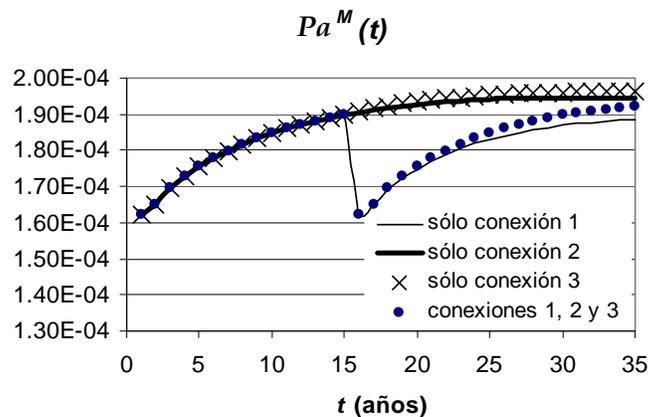


Figura 9: Probabilidad anual de falla de la plataforma con mantenimiento únicamente en algunas de sus conexiones

Cálculo de la función de peligro. Dado que el intervalo de tiempo es 1 año la función de peligro es aproximadamente igual a la probabilidad anual de falla, $Pa=\lambda(t)$, y $Pa^M=\lambda^M(t)$, tal como se demuestra en la sección 3.2.

Cálculo de función de reposición. El tiempo que toman los trabajos de reposición (en caso de falla del sistema) es una variable aleatoria con valor medio igual a 4 años. Se supone que el tiempo de reposición tiene distribución exponencial por lo tanto, de la ecuación (63) se obtiene que la función de reposición es $\gamma=1/4$ años⁻¹=0.25 años⁻¹.

Cálculo de disponibilidad con y sin mantenimiento Conocidos λ , λ^M y γ se calcula la función de disponibilidad de la plataforma con las expresiones (25) y (26). En el caso en el que se haga mantenimiento ideal a todas las conexiones consideradas en el análisis, la disponibilidad se calcula con (80). Con fines ilustrativos, en la Figura 10 se presenta la función de disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en sus tres conexiones, para diferentes valores de T_1 . El cálculo de estos valores fue realizado con la regla de integración de los trapecios considerando un intervalo de tiempo igual a 1 año.

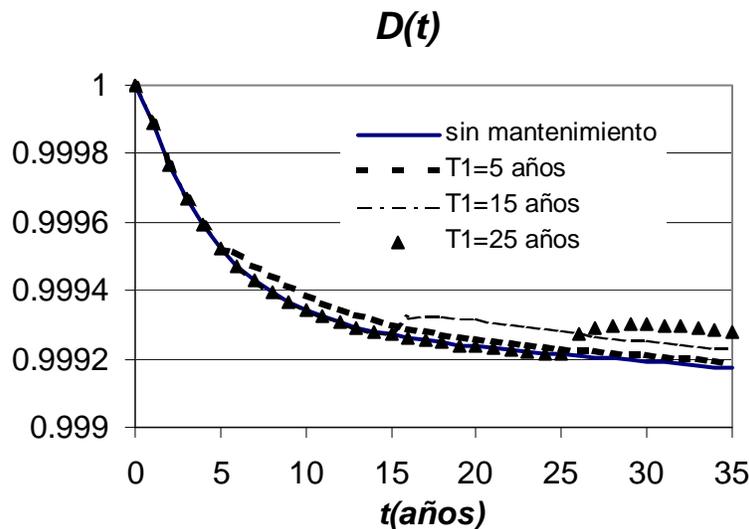


Figura 10: Disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en T_1

Se observa que la función de disponibilidad no disminuye de manera considerable con el tiempo. Esto es reflejo de que la estructura mantiene unos niveles de confiabilidad muy altos inclusive a los 35 años. A pesar de esta situación, es posible resaltar algunos aspectos interesantes del comportamiento de la función de disponibilidad en estructuras con mantenimiento. Se puede apreciar que el efecto

de realizar los trabajos de mantenimiento ideal es un aumento en los valores de la disponibilidad luego de realizado dichos trabajos. Sin embargo, esto no significa que necesariamente las ordenadas tengan que igualarse a los valores de disponibilidad que la estructura tenía en $t=0$. Las ordenadas de disponibilidad llegan a un máximo relativo un tiempo después de realizado el mantenimiento y luego decaen. De esta manera, tomando en cuenta únicamente los casos analizados en la Figura 10, la disponibilidad de la estructura a los 30 años será mayor que a los 25 años, si el mantenimiento es realizado en $T_1 = 25$ años.

Para apreciar el efecto que tiene la función de reposición, γ , en la disponibilidad de la estructura, la Figura 11 muestra la disponibilidad de un sistema con mantenimiento en $T_1=15$ años para diferentes valores de γ . Se puede observar que la disponibilidad de la estructura crece a medida que el valor de γ se hace más grande, es decir, cuando el tiempo promedio de reposición es menor.

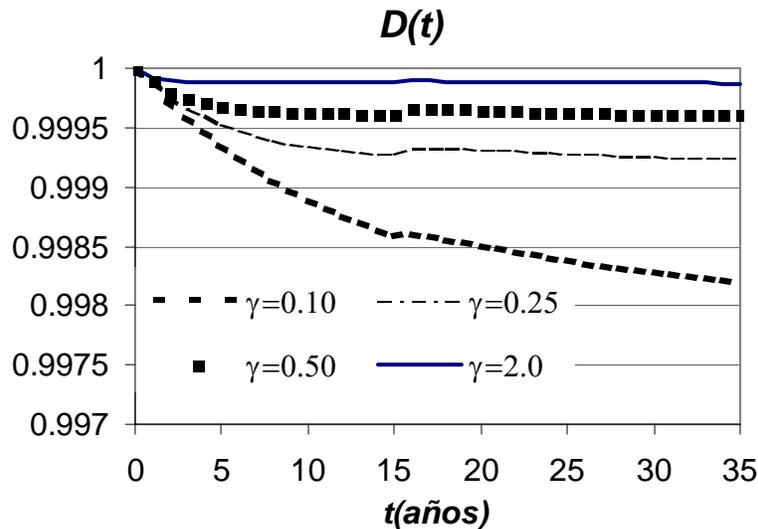


Figura 11: Variación de la disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en $T_1=15$ años para distintos valores de γ

En la Figura 12 se presentan las gráficas de la función de disponibilidad de la plataforma con mantenimiento para los casos mostrados en la Figura 9. La función de disponibilidad cuando se realizan trabajos de mantenimiento sólo en las conexiones 2 y 3 resultan similares a la función de disponibilidad de la estructura sin mantenimiento.

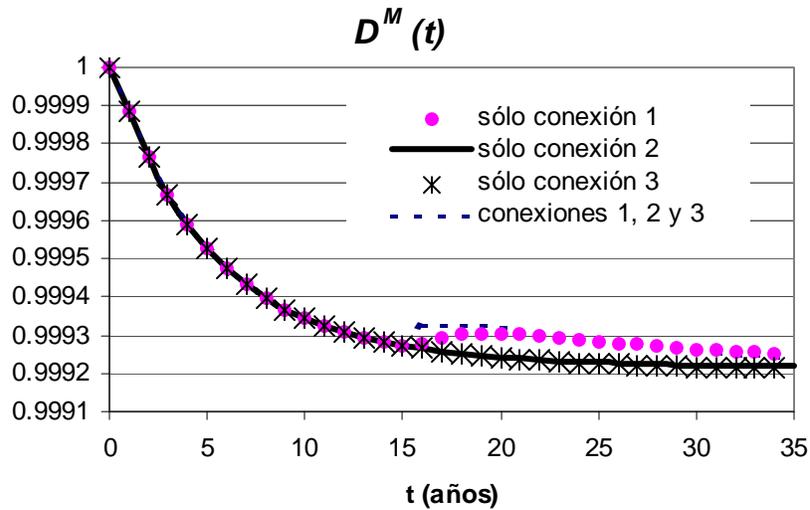


Figura 12: Disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en $T_1 = 15$ años únicamente en algunas de sus conexiones

Cálculo de flujos esperados. Con el fin de simplificar los cálculos supondremos que los volúmenes de producción y los costos fijos son constantes durante toda la vida útil de la estructura. Los datos económicos y de producción de la plataforma para el cálculo de los flujos de efectivo del proyecto se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9: Información económica y de producción de la plataforma

parámetro	Valor	unidades	Descripción
N	62,050,000.00	1000 p3/año	Volumen promedio de producción anual de gas
G	3,000,000.00	USD/año	Costos fijos de operación por año
CR	50,000,000.00	USD/año	Costo de reposición por año
CI	10,000.00	USD	Costo de inspección
δ	0.1		Tasa de retorno del proyecto
R	0.05		Tasa libre de riesgo para el periodo de T_1
μ	0.07		Tasa de crecimiento del precio del hidrocarburo
p_0	3.5	USD/1000p ³	Precio del hidrocarburo en t=0
σ	20%		Volatilidad del precio del hidrocarburo
X_0	200,000,000.00	USD	Costo de construcción de plataforma y perforación de pozos
CL	15,000.00	USD/conexión	Costo de esmerilado (mantenimiento)
CA	30,000.00	USD/conexión	Costo de colocación de abrazadera

Dado que el precio del hidrocarburo sigue un proceso de movimiento browniano se puede calcular el valor esperado del mismo en el año T_1 con la siguiente expresión:

$$p(T_1) = p_0 \exp\{\mu T_1\} \quad (179)$$

que para $T_1=15$ años resulta ser de 10.0018 USD. Los flujos del proyecto se calculan con las expresiones (126)-(130). Con el fin de mostrar la influencia de los trabajos de mantenimiento en los valores esperados de costos anuales de reposición se calcula $\bar{m}(t)$ para la plataforma con y sin mantenimiento. Las gráficas de estas curvas se muestran en la Figura 13. Ambas curvas presentan un crecimiento atribuible a la disminución en la disponibilidad de la plataforma. El máximo costo anual de falla se da a los 6 años y es menor que 15 mil USD. Es un valor bajo en comparación con los costos de operación anuales que son del orden de 3 millones USD los cuales llevados a tiempo presente $3 \times \exp(-0.1*6) = 1.6$ millones USD. A partir de los 6 años la curva presenta un descenso que es atribuible al efecto de llevar los montos a tiempo presente. La curva de la plataforma con mantenimiento exhibe un descenso en el valor del costo anual de falla inmediatamente después de los trabajos de mantenimiento aunque esta diferencia no es significativa para fines prácticos.

Este tipo de gráficas pueden ser útiles para fijar límites de cobertura de seguros o para determinar programas de mantenimiento (determinación de tiempos de ejecución de mantenimiento o calidad de los mismos) que tengan como criterio no sobrepasar un valor determinado en el costo anual de falla. Para el caso particular de este ejemplo, los trabajos de mantenimiento no logran aumentar la confiabilidad de la estructura que es alta como ya se ha puntualizado anteriormente.

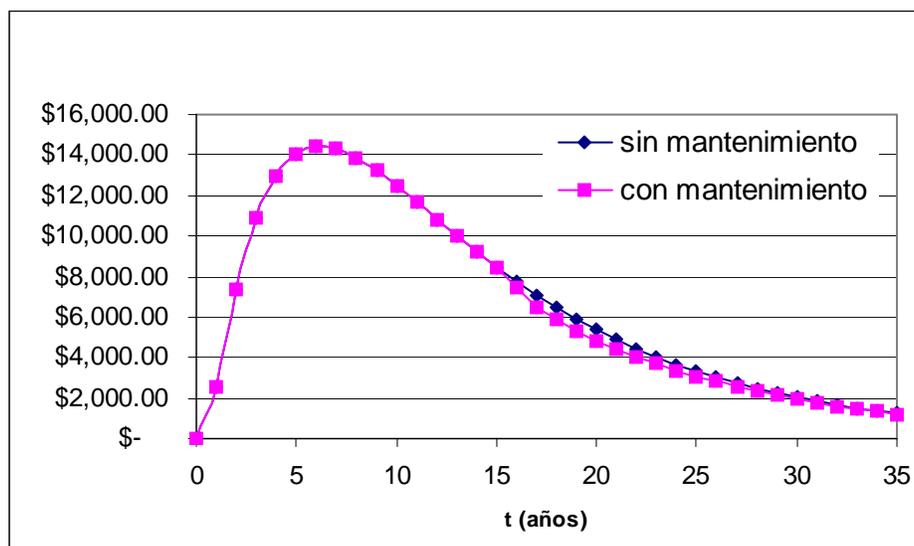


Figura 13: Valor Esperado de Costo Anual de Falla en Valor Presente

Es posible calcular el costo total de la falla en valor presente como la suma de los costos anuales de falla en valor presente en el horizonte del proyecto. El monto fijo que pagado anualmente durante los 35 años de vida del proyecto, equipara al costo total de falla, con una tasa de interés de 10% anual, se muestra en la Tabla 10. La diferencia entre los montos anuales es de 2%.

Tabla 10: Costos de falla para plataforma del ejemplo

	sin mantenimiento	con mantenimiento
Costo total de falla (valor presente)	239 mil USD	234 mil USD
Monto fijo a pagar durante 35 años	24.8 mil USD	24.3 mil USD

Cálculo del valor total del proyecto con opciones: Supóngase que en los trabajos de inspección de una conexión soldada previos al mantenimiento se encuentra una grieta con tamaño menor que el crítico. En este caso, procederá realizar los trabajos de esmerilado con valor de 15 mil USD . En el caso que la inspección arroje que el tamaño de la grieta es mayor que el tamaño crítico, se debe proceder con la colocación de una abrazadera cuyo costo es 30 mil USD. El hecho de no encontrar grietas puede deberse a que efectivamente no haya ninguna grieta o que haya y no se detecte. Dado que se están analizando 3 conexiones de la estructura con posibilidad de 3 tipos de mantenimiento (nulo, esmerilado y abrazadera) se tienen $3^3=27$ programas de mantenimiento posibles.

De la Tabla 7 se obtiene que la probabilidad de que la grieta de la conexión 1 tenga un tamaño mayor que el crítico a los 15 años es de 0.647, para las conexiones 2 y 3 estos valores son $1.439E-03$ y $4.382E-03$, respectivamente. La probabilidad de que la estructura presente una grieta menor que la detectable puede estimarse con la ecuación (14) excepto que el valor de la variable α_c debe ser la profundidad de grieta detectable en vez de la profundidad crítica. En este ejemplo no se cuenta con estos valores por lo que se supondrá que la probabilidad de que en 15 años el tamaño de una grieta sea menor que el tamaño detectable y la probabilidad de que la grieta sea detectada pero que su tamaño sea menor que el ancho crítico son iguales. Se obtiene que dichas probabilidades son 0.177, 0.499 y 0.498 para las conexiones 1, 2 y 3 respectivamente. El cálculo del costo total y la probabilidad de cada programa de mantenimiento se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11: Posibles programas de mantenimiento de la plataforma a los 15 años

pro gra ma	Tipo de mantenimiento en conexión 1		Tipo de mantenimiento en conexión 2		Tipo de mantenimiento en conexión 3		costo total	probabilidad
	costo	prob.	costo	prob.	costo	prob.		
1	\$ -	0.177	\$ -	0.499	\$ -	0.499	\$ -	0.0440
2	\$ -	0.177	\$ -	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 15,000	0.0440
3	\$ -	0.177	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 30,000	0.0001
4	\$ -	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ -	0.499	\$ 15,000	0.0440
5	\$ -	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 30,000	0.0440
6	\$ -	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 45,000	0.0001
7	\$ -	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.0001
8	\$ -	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ 15,000	0.499	\$ 45,000	0.0001
9	\$ -	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ 30,000	0.001	\$ 60,000	0.0000
10	\$ 15,000	0.177	\$ -	0.499	\$ -	0.499	\$ 15,000	0.0440
11	\$ 15,000	0.177	\$ -	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 30,000	0.0440
12	\$ 15,000	0.177	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 45,000	0.0001
13	\$ 15,000	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.0440
14	\$ 15,000	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 45,000	0.0440
15	\$ 15,000	0.177	\$ 15,000	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 60,000	0.0001
16	\$ 15,000	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ -	0.499	\$ 45,000	0.0001
17	\$ 15,000	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ 15,000	0.499	\$ 60,000	0.0001
18	\$ 15,000	0.177	\$ 30,000	0.001	\$ 30,000	0.001	\$ 75,000	0.0000
19	\$ 30,000	0.647	\$ -	0.499	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.1612
20	\$ 30,000	0.647	\$ -	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 45,000	0.1612
21	\$ 30,000	0.647	\$ -	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 60,000	0.0005
22	\$ 30,000	0.647	\$ 15,000	0.499	\$ -	0.499	\$ 45,000	0.1612
23	\$ 30,000	0.647	\$ 15,000	0.499	\$ 15,000	0.499	\$ 60,000	0.1612
24	\$ 30,000	0.647	\$ 15,000	0.499	\$ 30,000	0.001	\$ 75,000	0.0005
25	\$ 30,000	0.647	\$ 30,000	0.001	\$ -	0.499	\$ 60,000	0.0005
26	\$ 30,000	0.647	\$ 30,000	0.001	\$ 15,000	0.499	\$ 75,000	0.0005
27	\$ 30,000	0.647	\$ 30,000	0.001	\$ 30,000	0.001	\$ 90,000	0.0000
							suma	1.0000

Para ilustrar los cálculos de la opción de mantenimiento cuando $X_1 > 0$, se analizará el programa de mantenimiento 19 que consisten en colocar una abrazadera en la conexión 1. Las otras conexiones no presentan grieta y por lo tanto no se realiza ningún trabajo en ellas. El costo total de mantenimiento es 30,000 USD y la probabilidad de que ocurra esta situación es de 16.12%. En este caso, el valor de X_1 es de 30,000 US dólares y la función de disponibilidad de la estructura con mantenimiento es la que se muestra en la Figura 12 con línea punteada. El valor de la opción, \mathcal{E} , se calcula con las expresiones (171) y (172), y en este caso es de 136.4 mil USD. El valor total del proyecto sin mantenimiento es de \$4,474,048,080 USD. El valor total del proyecto para este programa de mantenimiento se calcula con (138) y es de \$4,474,184,446 USD. El programa de

mantenimiento 10 es similar al 19 excepto que el costo de mantenimiento es de la mitad es decir de 15 mil dólares. Las funciones de disponibilidad de la plataforma con el programa de mantenimiento 10 y el 19 son iguales ya que en ambos casos la conexión 1 vuelve a su condición original. Lo anterior dejaría de ser cierto en el caso en el que se utilizara los resultados de la inspección para actualizar las probabilidades de falla por fatiga de la conexiones. Bajo estas consideraciones el valor de la opción en el programa 10 es de 143 mil dólares es decir 5 % más que la opción del programa 19. Esto se debe a que el programa 10 tiene un precio de ejercicio que es menor al del programa 19, lo cual hace que la opción de mantenimiento sea más beneficiosa.

Tabla 12: VTP para los distintos programas de mantenimiento

programa	\mathcal{E}	VTP
1	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
2	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
3	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
4	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
5	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
6	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
7	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
8	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
9	\$ -	\$ 4,474,048,080.37
10	\$ 143,450.89	\$ 4,474,191,531.27
11	\$ 126,724.02	\$ 4,474,174,804.39
12	\$ 119,651.64	\$ 4,474,167,732.01
13	\$ 132,672.96	\$ 4,474,180,753.33
14	\$ 155,081.23	\$ 4,474,203,161.60
15	\$ 148,016.77	\$ 4,474,196,097.15
16	\$ 125,597.61	\$ 4,474,173,677.99
17	\$ 148,016.77	\$ 4,474,196,097.15
18	\$ 141,017.79	\$ 4,474,189,098.16
19	\$ 136,365.49	\$ 4,474,184,445.86
20	\$ 119,651.64	\$ 4,474,167,732.01
21	\$ 112,651.55	\$ 4,474,160,731.92
22	\$ 125,597.61	\$ 4,474,173,677.99
23	\$ 148,016.77	\$ 4,474,196,097.15
24	\$ 141,017.79	\$ 4,474,189,098.16
25	\$ 118,583.02	\$ 4,474,166,663.39
26	\$ 141,017.79	\$ 4,474,189,098.16
27	\$ 134,142.32	\$ 4,474,182,222.69

Los programas 2 a 9 consideran que se realiza mantenimiento en las conexiones 2, 3 o ambas. Como se ve en la Figura 12 la función de disponibilidad de la plataforma con alguno de estos programas de mantenimiento es muy similar a la disponibilidad de la plataforma sin mantenimiento. Es por eso que, para efectos prácticos, el valor de la opción en esos casos es nulo.

En caso que X_1 sea igual a cero el valor total del proyecto se calcula con (174) y en este ejemplo es igual al valor del proyecto sin mantenimiento. Este resultado varía si es que se toma en consideración los resultados de la inspección, los cuales pueden variar los valores que influyen en la función de disponibilidad y, por lo tanto, en los flujos esperados del proyecto.

Los valores obtenidos para cada programa de mantenimiento se observan en la Tabla 12. Aplicando (175) se encuentra que el valor total del proyecto con opción de mantenimiento es US\$ \$4,474,158,334.

Los flujos del proyecto del ejemplo que se acaba de presentar no se ven muy afectados por la realización de los trabajos de mantenimiento. En consecuencia, el ejemplo no permite apreciar de manera adecuada la ventaja de realizar mantenimiento en la plataforma ni la ventaja de tener la opción de mantenimiento. Con el fin de ilustrar estas ventajas se presenta el ejemplo 2, el cual es similar al ejemplo anterior con algunos cambios en los datos de confiabilidad de las conexiones.

Ejemplo 2

Se trata de la misma plataforma del ejemplo anterior, excepto que la probabilidad anual de falla por fatiga de las tres conexiones es igual a P_1 (Tabla 7). La probabilidad de ocurrencia de los 4 estados de daño se muestra en la Figura 14. Las curvas correspondientes a los estados d2 y d3 son iguales al estado de daño d1; los estados de daño 5 y 6 tienen igual probabilidad de ocurrencia que el estado d4. Antes del año 9 es más probable que la estructura se encuentre en el estado de daño d0. A partir del año 9 el estado de daño con mayor probabilidad de ocurrencia es el estado d7 correspondiente a la falla de las tres conexiones.

Cálculo de probabilidad anual de falla: A diferencia del ejemplo 1, en este ejemplo el cálculo de la probabilidad anual de falla no puede desprestigiar ningún estado de daño. Por esta razón y con fines ilustrativos se supone que los valores de probabilidad condicional de falla omitidos en la Tabla 6 correspondientes a la falla de dos conexiones (d4 - d5) son un 10% mayor que el valor asociado al estado d1, es decir 2.28×10^{-4} . La probabilidad de falla condicionada a la falla de las tres conexiones (d7) se supone que es 10 veces mayor que para el estado d1, esto es

2.07×10^{-3} . Con estas suposiciones se obtiene la función de probabilidad anual de falla que se muestra en la Figura 15.

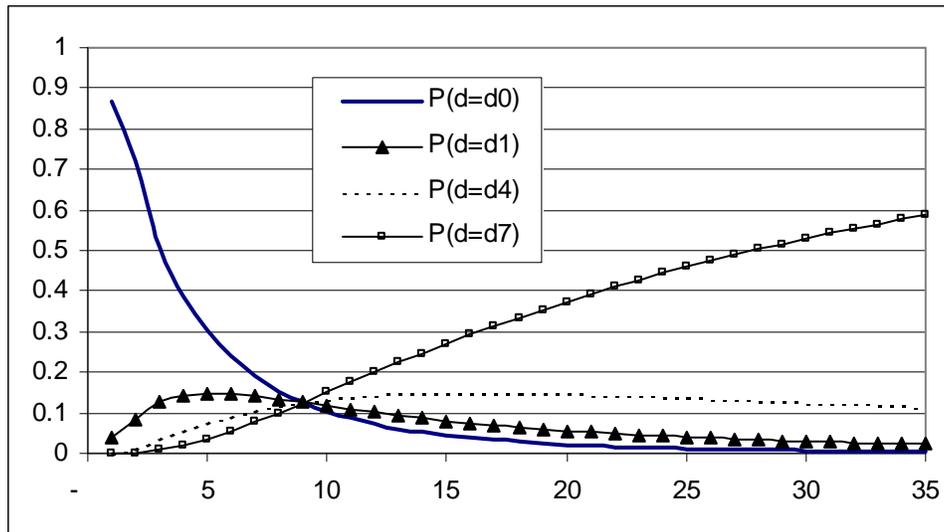


Figura 14: Probabilidad de ocurrencia de estados de daño

$$Pa(t)$$

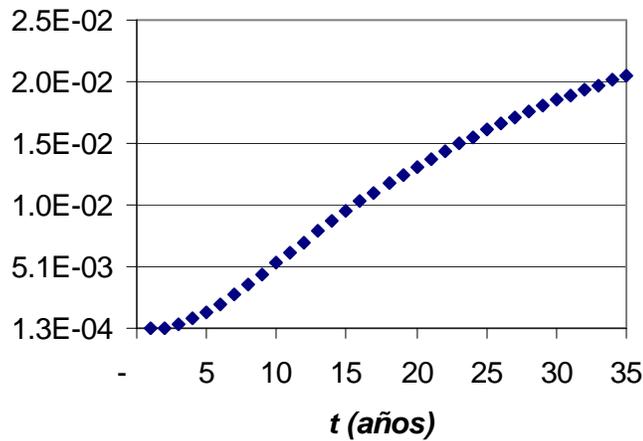


Figura 15: Probabilidad anual de falla de la plataforma sin mantenimiento

Cálculo de la función de peligro y disponibilidad: Tomando en cuenta que la función de peligro es discreta con $\Delta t = 1$ año, se obtiene la función de peligro para la estructura sin mantenimiento es igual a la probabilidad anual de falla. La función de disponibilidad de la estructura sin mantenimiento y con mantenimiento ideal en algunas de sus conexiones se muestra en la Figura 16.

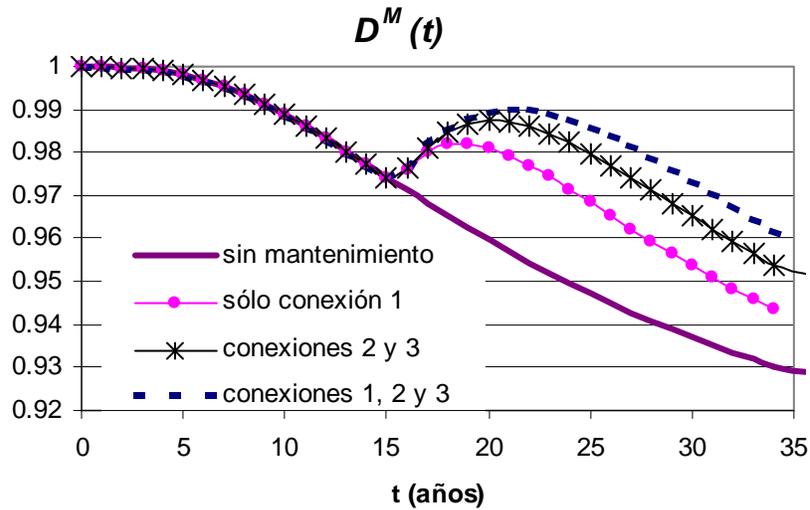


Figura 16: Disponibilidad de la plataforma con mantenimiento algunas de sus conexiones a los 15 años

La función de disponibilidad para la estructura sin mantenimiento y con mantenimiento ideal en las tres conexiones para distintos valores de T_1 se muestra en la Figura 17. Se puede apreciar que para los casos analizados la disponibilidad de la estructura a los 20 años será mayor si el mantenimiento es realizado en $T_1 = 15$ años. Sin embargo, la disponibilidad a 16 años es la mayor si el mantenimiento se realiza a los 5 años. Para apreciar el efecto que tiene la función de reposición, γ , en la disponibilidad de la estructura, la Figura 18 muestra la disponibilidad de un sistema con mantenimiento en $T_1=15$ años para diferentes valores de γ . Se puede observar que la disponibilidad de la estructura crece a medida que el valor de γ se hace más grande, es decir, cuando el tiempo promedio de reposición es menor. Las gráficas de la Figura 18 también permiten apreciar que el valor máximo de la disponibilidad luego del mantenimiento se aproxima al valor de T_1 cuando el valor de γ se hace mayor.

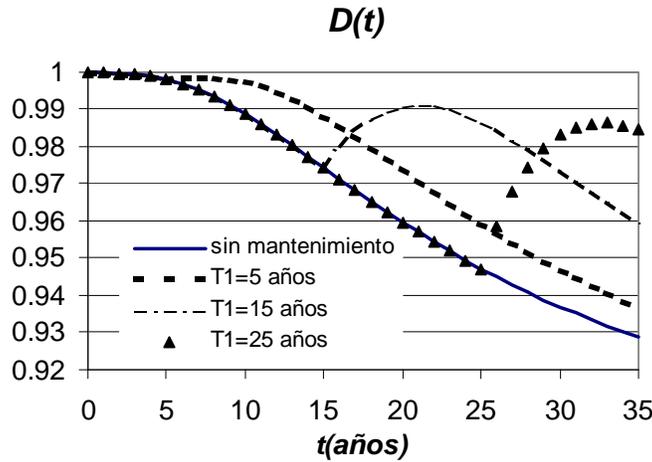


Figura 17: Disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en T_1

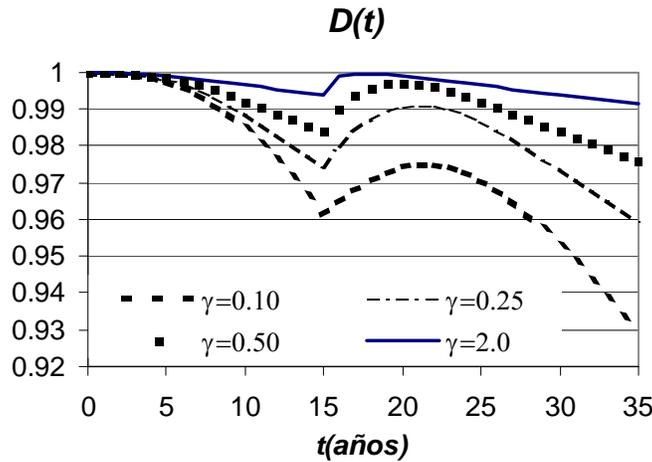


Figura 18: Variación de la disponibilidad de la plataforma con mantenimiento en $T_1=15$ años para distintos valores de γ

Cálculos de los flujos del proyecto: Se calculan con las expresiones (126)-(130). Las gráficas de $\bar{m}(t)$ para la estructura con y sin mantenimiento se muestran en la Figura 19. El valor máximo del costo de reposición de la estructura sin mantenimiento ocurre a los 17 años y es de \$290 mil USD. La curva de la plataforma con mantenimiento exhibe un descenso brusco en el valor del costo anual de falla inmediatamente después de los trabajos de mantenimiento. En este caso la ordenada máxima se da justamente a los 15 años y es de \$283 mil USD. Se aprecia que las ordenadas se mantienen siempre por debajo de las de la plataforma sin mantenimiento.

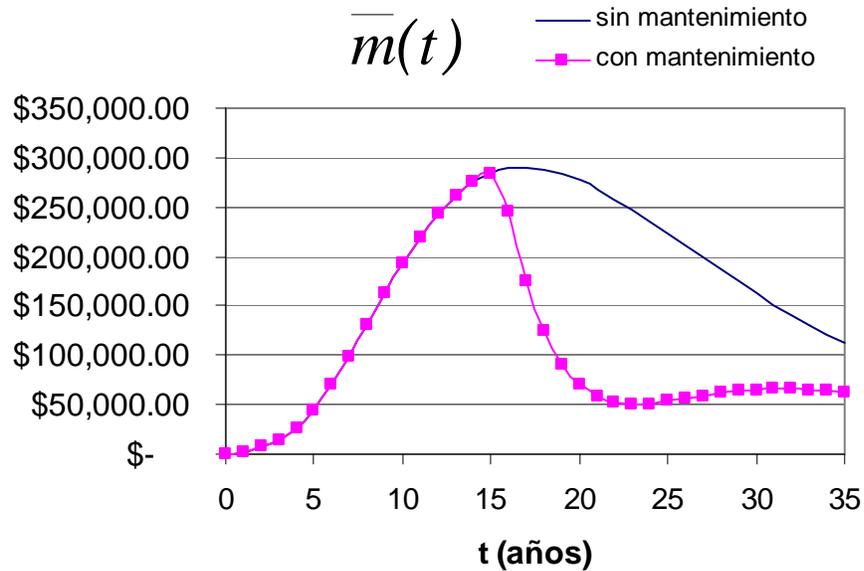


Figura 19: Valor Esperado de Costo Anual de Falla en Valor Presente

Supóngase que la estrategia de manejo de riesgo de la plataforma indica que el costo esperado por falla ante un evento extremo no debe sobrepasar los \$150 mil USD. En este caso, según la Figura 19, lo más conveniente sería realizar el mantenimiento en el año 8. Las gráficas de la función de disponibilidad y del costo anual de falla de la estructura con mantenimiento en $T_1 = 8$ años se puede apreciar en la

Figura 20. El costo de falla en valor presente no excede el costo límite de 150 mil USD en el resto de su vida útil. Este criterio, podría incorporarse al análisis de los programas de mantenimiento de estructuras de IPH.

Al igual que en el ejemplo 1 se puede estimar el costo total de falla en valor presente y la cuota anual equivalente a pagar por un periodo igual a la vida útil de la estructura. Dichos valores para la estructura sin mantenimiento y con mantenimiento a los 8 y 15 años se muestran en la Tabla 13.

Tabla 13: Costos de falla para plataforma del ejemplo

	sin mantenimiento	con mantenimiento	
		a los 15 años	a los 8 años
Costo total de falla (valor presente)	6.28 millones USD	3.63 millones USD	3.11 millones USD
Monto fijo a pagar durante 35 años	651 mil USD	376 mil USD	322 mil USD

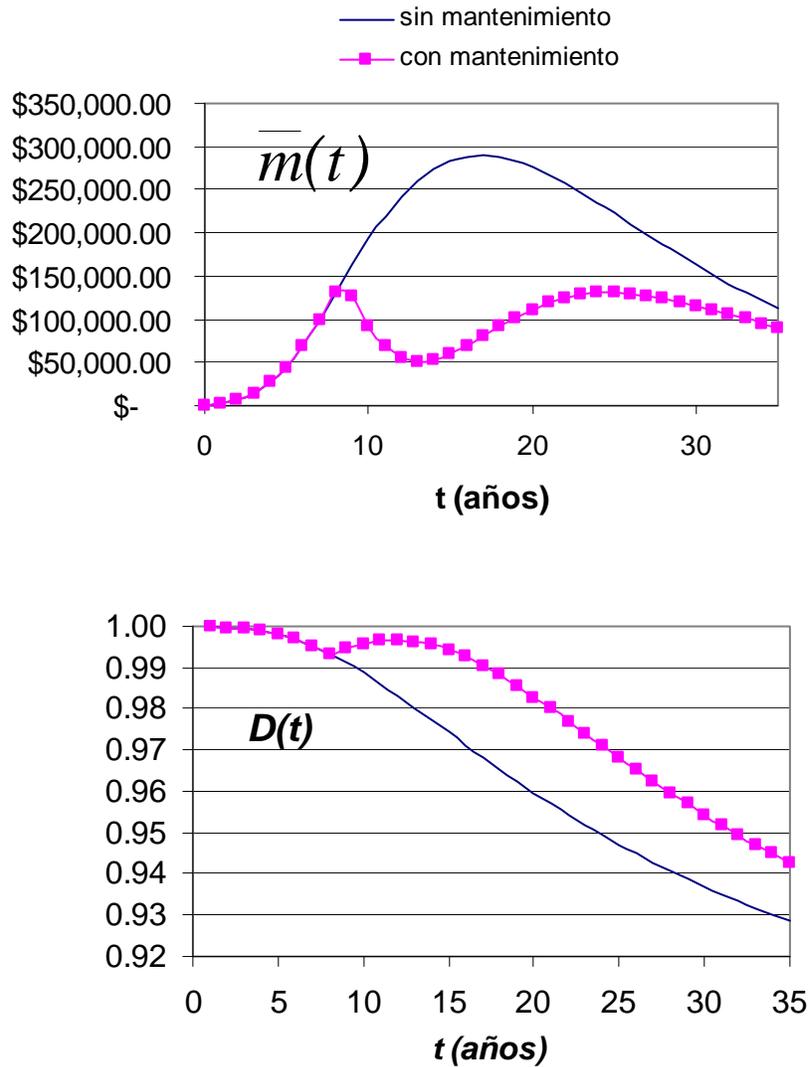


Figura 20: Costo Anual de Falla esperado en Valor Presente y disponibilidad de la estructura con mantenimiento ideal a los 8 años

Cálculo del valor total del proyecto con opción de mantenimiento: Supóngase que en $T_1 = 15$ años se tiene la opción de realizar el mantenimiento ideal de las tres conexiones consideradas en el ejemplo dependiendo de su situación en dicho momento. En la Tabla 11 se muestran los programas de mantenimiento posibles, sus costos y sus probabilidades. Los valores obtenidos para cada programa de mantenimiento se observan en la Tabla 14. Aplicando (175) se encuentra que el valor total del proyecto con opción de mantenimiento es US\$ \$4,427,187,514.

Tabla 14: VTP para los distintos programas de mantenimiento

programa	ℳ	VTP
1	\$ -	\$ 4,349,998,263.64
2	\$ 58,342,336.02	\$ 4,408,340,599.66
3	\$ 58,335,250.52	\$ 4,408,333,514.16
4	\$ 58,348,608.18	\$ 4,408,346,871.83
5	\$ 85,542,482.71	\$ 4,435,540,746.35
6	\$ 85,535,397.21	\$ 4,435,533,660.85
7	\$ 58,341,522.69	\$ 4,408,339,786.33
8	\$ 85,535,397.21	\$ 4,435,533,660.85
9	\$ 85,528,311.71	\$ 4,435,526,575.35
10	\$ 58,374,593.14	\$ 4,408,372,856.78
11	\$ 85,607,600.86	\$ 4,435,605,864.51
12	\$ 85,600,515.36	\$ 4,435,598,779.01
13	\$ 85,623,319.45	\$ 4,435,621,583.09
14	\$ 101,855,138.73	\$ 4,451,853,402.38
15	\$ 101,848,053.23	\$ 4,451,846,316.88
16	\$ 85,616,233.95	\$ 4,435,614,497.59
17	\$ 101,848,053.23	\$ 4,451,846,316.88
18	\$ 101,840,967.74	\$ 4,451,839,231.38
19	\$ 58,367,507.64	\$ 4,408,365,771.29
20	\$ 85,600,515.36	\$ 4,435,598,779.01
21	\$ 85,593,429.87	\$ 4,435,591,693.51
22	\$ 85,616,233.95	\$ 4,435,614,497.59
23	\$ 101,848,053.23	\$ 4,451,846,316.88
24	\$ 101,840,967.74	\$ 4,451,839,231.38
25	\$ 85,609,148.45	\$ 4,435,607,412.09
26	\$ 101,840,967.74	\$ 4,451,839,231.38
27	\$ 101,833,882.24	\$ 4,451,832,145.88

4.3 OPCIÓN DE ABANDONO

4.3.1 Planteamiento

Durante el transcurso de la vida útil de una estructura se puede esperar que se presente alguna situación en la que sea necesario evaluar la factibilidad del resto del proyecto. Esta situación puede deberse a la disminución del precio del hidrocarburo, el aumento en los costos de producción, por ejemplo uso de técnicas para mantener volúmenes de producción ante declinación de yacimientos,

aumento en costos de mantenimiento, la generación de estados de falla de la estructura, la posibilidad de utilizar la infraestructura en otro proyecto que brinde un beneficio mayor, etc. Dependiendo del resultado de dicha evaluación el tomador de decisiones puede decidir cambiar el plan original del proyecto según su conveniencia y abandonar el proyecto.

En este caso de análisis, supóngase que en el tiempo, T_1 ($0 < T_1 < L$), el tomador de decisiones va a requerir de un nuevo análisis del proyecto en lo que le resta de vida útil, con el fin de valorar la conveniencia de continuar con el mismo. Este análisis consistirá en la comparación de valores esperados de flujos de egresos e ingresos de acuerdo a las condiciones vigentes en T_1 . Nótese que T_1 es un punto arbitrario en el tiempo y no tiene que coincidir necesariamente con algún suceso asociado a la falla de la estructura o a la inspección o a situaciones de mantenimiento. Se considera que la estructura analizada va a estar sometida a un programa de mantenimiento adecuado y a una política de reposición sistemática.

4.3.2 Identificación de la opción de abandono

El esquema del proyecto se muestra en la Figura 21.

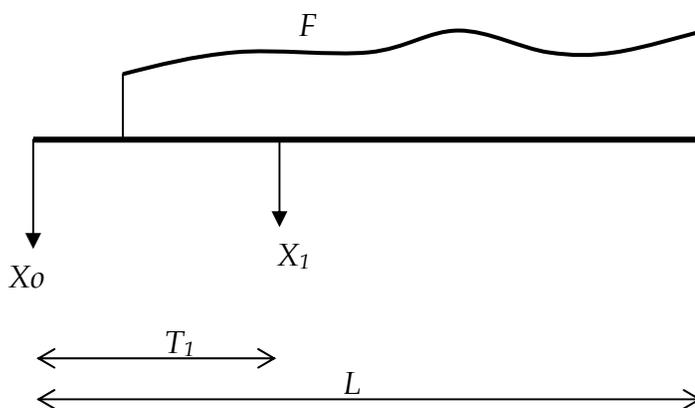


Figura 21: Esquema de flujos de efectivo del proyecto con opción de abandono

Para fines prácticos supongamos que el proyecto se divide en dos, el primero de 0 a T_1 y el segundo de T_1 a L . (Ver Figura 22). El primer sub-proyecto tiene un costo de inversión igual a X_0 , un horizonte T_1 y un flujo esperado igual a S_0 . El segundo sub-proyecto tiene un costo inicial de X_1 , un horizonte de $L-T_1$, un flujo esperado igual a S_1 y una fecha de inicio igual a T_1 . Los valores de S_0 y S_1 se calculan con la expresión (108).

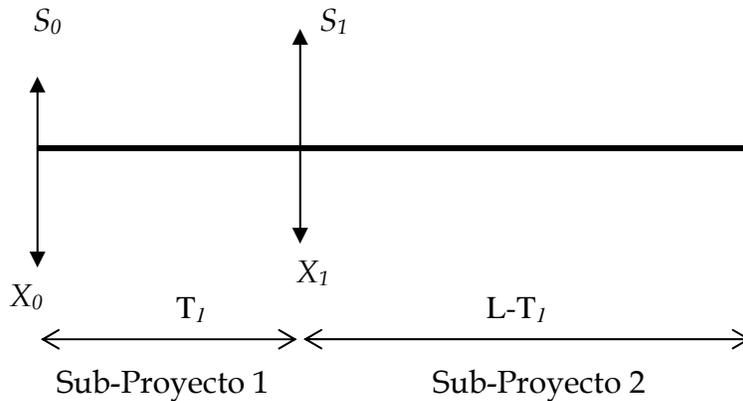


Figura 22: Esquema de flujos de efectivo del proyecto con opción de abandono (desglosado)

Una situación crítica como la que se da en T_1 genera un punto de quiebre del proyecto en el que el tomador de decisiones tiene dos alternativas:

1. Continuar con la producción hasta el final de la vida útil de la estructura, tal como estaba previsto y eventualmente pagar una suma para seguir produciendo.
2. Abandonar el proyecto y obtener el beneficio de lo que se pueda rescatar (estructura, equipo, chatarra, etc) por un precio de liquidación, A_1 .

Los flujos de cada una de las alternativas del proyecto se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 15: Alternativas de un proyecto con opción de abandono

Alternativa 1	Alternativa 2
Continuar con la producción	Abandonar el proyecto

El tomador de decisiones optará por la alternativa que resulte más rentable. La primera alternativa será válida si el flujo de efectivo correspondiente al tiempo restante de la vida útil menos el costo de reparación supera el valor de la liquidación, esto es, si $A_1 < S_1 - X_1$. En caso contrario, la decisión correcta será la segunda alternativa. El valor del sub-proyecto2, $VTP2$ en el tiempo T_1 será:

$$\begin{aligned} VTP2 &= (S_1 - X_1) && \text{si } A_1 < S_1 - X_1 \\ VTP2 &= A_1 && \text{si } A_1 > S_1 - X_1 \end{aligned} \quad (180)$$

Las fórmulas (180) pueden expresarse de manera resumida de la siguiente manera:

$$VTP2 = A_1 + \mathcal{E}^* \quad (181)$$

donde

$$\mathcal{E}^* = \text{máx}(S_1 - X_1 - A_1, 0) \quad (182)$$

\mathcal{E}^* es el valor de una opción de compra (*call option*) justo antes de su vencimiento en T_1 . El valor de S_1 , es el precio del bien subyacente de la opción de compra; y $A_1 + X_1$ el precio de ejercicio. Llevando a tiempo $t=0$ y sumando el valor del subproyecto 1, se obtiene el valor total del proyecto.

$$VTP = S_0 - X_0 + A_1 e^{-rT_1} + \mathcal{E} \quad (183)$$

donde \mathcal{E} es la opción de compra en el tiempo $t=0$. Dado que la segunda parte del proyecto no tiene riesgo el valor de la liquidación se descuenta con la tasa libre de riesgo, r .

En general, la intensidad, el tiempo de ocurrencia del evento crítico y el precio del bien producido son aleatorios. Por lo tanto, el valor total del proyecto VTP es una función aleatoria que, para fines de la toma de decisiones, puede ser caracterizada por su valor esperado.

4.3.3 Cálculo de flujos esperados

Los valores de S_0 y S_1 de la Figura 22 corresponden a los flujos de efectivo de la primera y segunda parte del proyecto y están definidos en (108) y (109) como:

$$S_0 = p_0 n_0 - g_0 - m_0 \quad S_1 = p_1 n_1 - g_1 - m_1 \quad (184)$$

donde p_0 y p_1 es el precio unitario del hidrocarburo en el tiempo inicial y en T_1 , respectivamente, y:

$$\begin{aligned} n_0 &= \int_0^{T_1} N(t) D(t) e^{-(\delta-\mu)t} dt && n_1 = \int_{T_1}^L N(t) D(t) e^{-(\delta-\mu)(t-T_1)} dt \\ g_0 &= \int_0^{T_1} G(t) D(t) e^{-\delta t} dt && g_1 = \int_{T_1}^L G(t) D(t) e^{-\delta(t-T_1)} dt \\ m_0 &= CR \int_0^{T_1} (1-D(t)) e^{-\delta t} dt && m_1 = CR \int_{T_1}^L (1-D(t)) e^{-\delta(t-T_1)} dt \end{aligned} \quad (185)$$

donde N es la producción por unidad de tiempo, G representa los gastos de operación normales por unidad de tiempo, CR es el costo total de reposición de la

estructura más costos por pérdidas (contenidos y vidas humanas) en caso de falla de la estructura, dividido entre el tiempo que tomarán los trabajos de reposición y D es la disponibilidad de la estructura, es decir la probabilidad de que se encuentre en estado operativo.

4.3.4 Valor de la opción y del proyecto

De (182) el valor de la opción justo antes de su vencimiento es

$$\mathcal{E}^* = \text{máx}(S_1 - X_1 - A_1, 0) , \quad (186)$$

S_1 es el valor de la segunda parte del proyecto, A_1 es el costo de la liquidación y X_1 es el costo inicial del sub-proyecto 2. Supóngase que estas dos últimas variables son conocidas. Aplicando el mismo razonamiento que para el caso de la opción de mantenimiento se puede aplicar el principio de neutralidad al riesgo (Cox y Ross, 1976) , el valor de la opción de abandono en el tiempo $t=0$ es:

$$\mathcal{E} = e^{-rT_1} \int_{X_1+A_1}^{\infty} (S - (X_1 + A_1)) f^*_{S_1}(S) dS \quad (187)$$

donde $f^*_{S_1}$ se muestra en (113) para $i=1$. salvo que la tasa de crecimiento μ se reemplaza por r Esta ecuación es similar a (157) la cual fue desarrollada para el caso de mantenimiento. Haciendo los reemplazos correspondientes, el valor de \mathcal{E} resulta:

$$\mathcal{E} = n_1 p_0 \Phi[k_1] - (X_1 + A_1 + g_1 + m_1) e^{-rT_1} \Phi[k_2] \quad (188)$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar y

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1 p_0}{X_1 + A_1 + g_1 + m_1}\right) + (r + \sigma^2 / 2) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} , \quad k_2 = k_1 - \sigma \sqrt{T_1} , \quad (189)$$

n_1 y g_1 se calculan con (109), p_0 es el precio del bien en el instante cero y σ es la volatilidad del precio del bien producido.

La expresión que se obtiene para el valor de la opción \mathcal{E} es igual a la fórmula de Black y Scholes (1973) para una opción financiera de compra de tipo europeo, expresada en la ecuación (3). Este resultado nos indica que el valor de continuar el proyecto luego de T_1 , es igual al valor de una opción financiera de compra de un bien con valor igual a la suma de los ingresos del proyecto en el intervalo $[T_1, L]$ llevado al tiempo T_1 con una tasa de descuento que es igual a la del proyecto menos la tasa de crecimiento del bien producido y suponiendo un precio del bien constante e igual al del instante cero. El precio de ejercicio es igual a la suma del costo X_1 más los egresos por costos ordinarios de operación en el intervalo $[T_1, L]$

más el costo de falla en el mismo intervalo y el costo de liquidación. La volatilidad es igual a la del bien producido y el plazo de vencimiento es T_1

Tabla 16: Analogía entre una opción de compra y una opción de abandono

Opción de abandono	Opción de compra
$X_1 + A_1 + g_1 + m_1$	Precio del ejercicio
$n_1 p_0$	Precio de la acción
T_1	Plazo hasta el vencimiento
σ	Varianza de los rendimientos de la acción
r	Tasa de interés libre de riesgo

Nótese que el monto requerido para continuar con la producción, X_1 , depende de la situación que se esté analizando. En el caso de abandono por cambios en las condiciones financieras el valor de X_1 sería nulo. En el caso de abandono por alguna situación relativa a fallas estructurales por sobreesfuerzo o deterioro, el valor de X_1 es el costo de la reparación o restauración de la estructura y puede ser un valor aleatorio. Por otro lado, el valor de T_1 puede estar programado desde el inicio del proyecto o puede ser aleatorio al quedar determinado por un evento que ocasione la falla de la estructura. En este trabajo consideraremos el caso cuando $X_1=0$ y T_1 sea determinista, por lo tanto en (188) y (189) se obtiene:

$$E[\mathcal{E}] = n_1 p_0 \Phi[k_1] - (A_1 + g_1 + m_1) e^{-rT} \Phi[k_2] \quad (190)$$

donde:

$$k_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1 p_0}{A_1 + g_1 + m_1}\right) + (r + \sigma^2 / 2) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}} \quad (191)$$

$$k_2 = k_1 - \sigma \sqrt{T_1}$$

El valor total del proyecto con opción de abandono en el tiempo $t=0$ se calcula con (183).

Si X_1 se refiere a la falla asociada a un evento extremo en T_1 , entonces bajo la suposición de que sólo ocurre un evento crítico en la vida de la estructura el valor del proyecto podrá ser calculado con el teorema de la probabilidad total de la siguiente manera:

$$E[VTP] = \iint E[VTP / t, x] f_{X_1, T_1}(x, t) dx dt \quad (192)$$

donde f_{X_1, T_1} es la densidad de probabilidad conjunta del costo de reparación de la estructura y el tiempo de ocurrencia del evento en la vida útil de la estructura.

4.3.5 Ejemplo numérico

Considérese la misma plataforma del ejemplo 1 en la sección 4.2.5. En este ejemplo los trabajos de mantenimiento se realizarán invariablemente a los 15 años y para efectos del ejemplo, supóngase que se realizará el mantenimiento en las tres conexiones consideradas en el análisis con un costo total de US\$ 90,000. Por lo tanto, la función de disponibilidad será la que se muestra en la Figura 10 para $T_1=15$ años.

En este análisis se debe considerar la posibilidad de abandono del proyecto faltando 5 años para la finalización del mismo ($T_1=30$ años). Esta posibilidad de abandono puede justificarse en las posibles variaciones en el precio del hidrocarburo que hagan que la rentabilidad del proyecto disminuya de tal manera que sea más rentable re-utilizar la plataforma en otro proyecto cuyo valor es de 100 millones. Los datos numéricos del ejemplo se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17: Información económica y de producción de la plataforma

Variable	Valor	Unidades	Descripción
N	\$ 62,050,000.00	1000 p ³ /año	Volumen de producción anual promedio
G	\$ 3,000,000.00	USD/año	Costos fijos de operación por unidad de tiempo
CR	\$ 50,000,000.00	USD/año	Costo de reposición por unidad de tiempo
δ	0.10		Tasa de retorno del proyecto
r	0.05		Tasa libre de riesgo para el periodo de T1
μ	0.07		Crecimiento del bien
p_0	3.5	USD/1000p ³	Precio del hidrocarburo en el momento de análisis
X_0	\$ 200,000,000.00	USD	Costo de construcción de plataforma y perforación de pozos
A_1	\$ 100,000,000.00		Valor de liquidación
$E(p_1)$	\$ 28.58	USD/1000p ³	Valor esperado del precio del hidrocarburo en T1
S_0	\$4,265,066,391.04	USD	Flujo neto de la primera parte del proyecto
n_1	\$287,906,891.84	p ³	Producción de la segunda parte del proyecto
g_1	\$ 11,805,022.18	USD	Costo operativo de la segunda parte del proyecto
m_1	\$ 148,218.75	USD	Costo de falla de la segunda parte del proyecto

Utilizando las expresiones (190) y (191) se calcula el valor de la opción de abandono, que es de US\$ 982,708,482. El valor total del proyecto calculado con (183) es US\$ 5,070,067,808.

Con fines comparativos se realiza la evaluación del proyecto con el método del valor presente neto, el cual arroja un resultado de US\$ 4,474,160,998 . Este valor confirma el hecho de que el método del valor presente neto subestima el valor del proyecto al ignorar la opción de abandono por un monto de 596 mil USD, que representa el 12% del valor total del proyecto.

Resulta interesante analizar la variación del valor del proyecto con el tiempo de abandono, es decir T_1 . Cuando la decisión de seguir o continuar el proyecto se hace al inicio del mismo, es decir $T_1=0$, el valor S_0 de la ecuación (184) es nulo y el valor de S_1 de la misma ecuación es determinista, debido a que depende del precio del hidrocarburo en el tiempo inicial, el cual es conocido. El valor de \mathcal{E} de la ecuación (186) resulta S_1-A_1 debido a que para este ejemplo, esta diferencia es positiva. Por lo tanto, el valor total del proyecto es $VTP= 0-X_0+A_1+ S_1-A_1= S_1-X_0$, que es el valor del proyecto durante toda la vida útil trasladado al tiempo presente menos el costo inicial; textualmente la definición del valor presente neto. En el caso extremo en el que la decisión de seguir o abandonar se haga un instante antes de finalizar la vida útil de la estructura, es decir, $T_1=L= 35$ años se obtiene que S_0 es determinista y $S_1=0$ por la ecuación (184). Con (186) o (190) se determina que el valor de la opción \mathcal{E} es nulo, por lo tanto, el valor total del proyecto resulta $S_0-X_0 + A_1e^{-rL}$ o lo que es lo mismo $VPN+A_1e^{-rL}$. Esto significa que el valor total del proyecto VTP es mayor que el VPN en el valor de la liquidación llevado a tiempo presente. En este caso el VTP resulta 4,491 millones de USD mientras que el VPN es 4,474 millones de USD . Esto da una diferencia de 17 millones de USD, que coincide con el valor de la liquidación llevada a tiempo presente con la tasa de descuento libre de riesgo.

En la Figura 23 se muestra la gráfica del VTP con opción de abandono en T_1 y el VPN. En este caso el VPN es independiente del valor de T_1 , mientras que el valor del proyecto con opción de abandono se hace mayor para $T_1=18$ años. Este último resultado indica que si al inicio del proyecto tuviéramos la posibilidad de elegir el punto de decisión para abandonar el proyecto o continuar con él, lo más conveniente sería elegir un tiempo alrededor de la mitad de la vida útil de la estructura. La diferencia entre el VTP con $T_1=18$ años y el VPN es de 1,200 millones de dólares US.

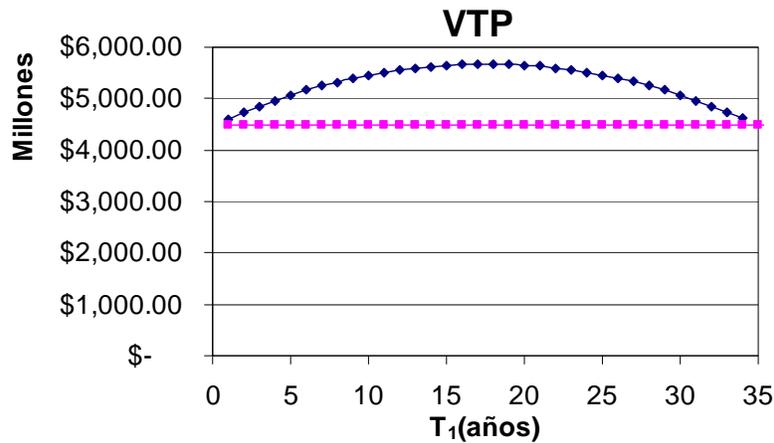


Figura 23: Variación del valor del proyecto con opción de abandono en T_1

En la Figura 24 se muestra el *VTP* del proyecto con opción de abandono en $T_1=30$ años para distintos valores de liquidación, A_1 . La gráfica muestra que el valor del proyecto aumenta en la medida en la que lo hace el valor de liquidación. Suponiendo que el valor de liquidación proviene de los flujos netos de un proyecto alternativo casi al final de la vida útil de la estructura, este tipo de gráficas puede ser útil para evaluar distintas alternativas estructurales con diferente capacidad de adaptación al proyecto alternativo. Los costos de la adaptación estructural deben restarse a los flujos de dicho proyecto. Por lo tanto, una estructura con costos de adaptación bajos tiene un valor de liquidación mayor y eso aumenta el valor del proyecto original.

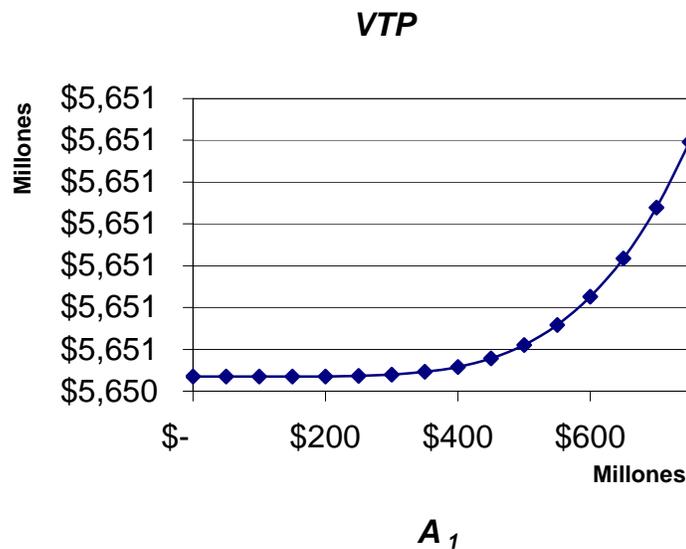


Figura 24: Variación del valor del proyecto con el valor de liquidación, A_1

4.4 OPCIÓN DE MANTENIMIENTO Y ABANDONO

4.4.1 Planteamiento

Se tiene una situación similar al planteado en los casos de análisis 4.2 y 4.3. La estructura en análisis será sometida a una nueva evaluación en un momento durante el transcurso de su vida útil para establecer la rentabilidad de lo que resta del proyecto luego de posibles cambios en las variables financieras o técnicas, desconocidos al inicio del proyecto. Dependiendo del resultado de la evaluación, el tomador de decisiones podrá continuar con el proyecto tal como estaba establecido al principio o modificar los planes para su beneficio.

4.4.2 Identificación de la opción de mantenimiento y abandono

Se supone que en T_1 ($0 < T_1 < L$, L es el horizonte del proyecto), el tomador de decisiones tendrá la oportunidad de elegir entre tres alternativas

- 1) Continuar con la producción realizando unos trabajos de mantenimiento con costo X_1 para mejorar la confiabilidad de la estructura,
- 2) Continuar con la producción con las condiciones estructurales vigentes en T_1
- 3) Abandonar el proyecto y recibir a cambio un valor de liquidación, A_1

Esta opción es una combinación de las opciones de mantenimiento y de abandono estudiadas en los puntos anteriores. Los flujos de las tres alternativas son los siguientes:

Tabla 18: Alternativas de un proyecto con opción de mantenimiento y abandono

Continuar con estructura con mantenimiento	Continuar con estructura deteriorada	Abandonar el proyecto

Considerando que el tomador de decisiones tomará la alternativa más rentable se tiene que el valor del sub-proyecto 2 en el tiempo T_1 es:

$$VTP2 = \max[S_1 - X_1, s_1, A_1] \quad (193)$$

Las variables s_1 y S_1 son linealmente dependientes entre sí, ver ecuaciones (126) y (128). Por lo tanto la expresión (193) también puede escribirse de la siguiente manera:

$$VTP2 = \max[\alpha s_1 - \beta + \gamma - X_1, s_1, A_1] \quad (194)$$

donde:

$$\alpha = \frac{n_1}{n_1^*} > 1 \quad \beta = g_1 - g_1^* > 0 \quad \gamma = m_1^* - m_1 > 0 \quad (195)$$

La expresión (194) es una función de la variable s_1 , por lo tanto, con un razonamiento similar al que se utilizó en la deducción de expresión (149) se puede concluir que el valor presente de la segunda parte del proyecto no depende de las preferencias del inversionista y se puede utilizar el método neutral al riesgo para encontrar el valor esperado de $VTP2$. Una forma sencilla de estimar el valor esperado de (194) consiste en graficar las expresiones en función de s_1 y encontrar la envolvente. Dado que el valor de α es mayor que uno las posibles formas de las gráficas son las que se muestran en las figuras 25 y 26.

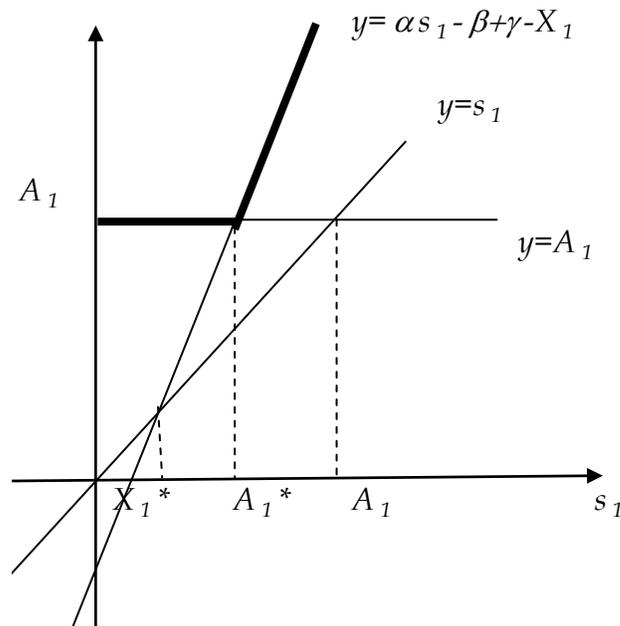


Figura 25: Posibles valores de VTP2

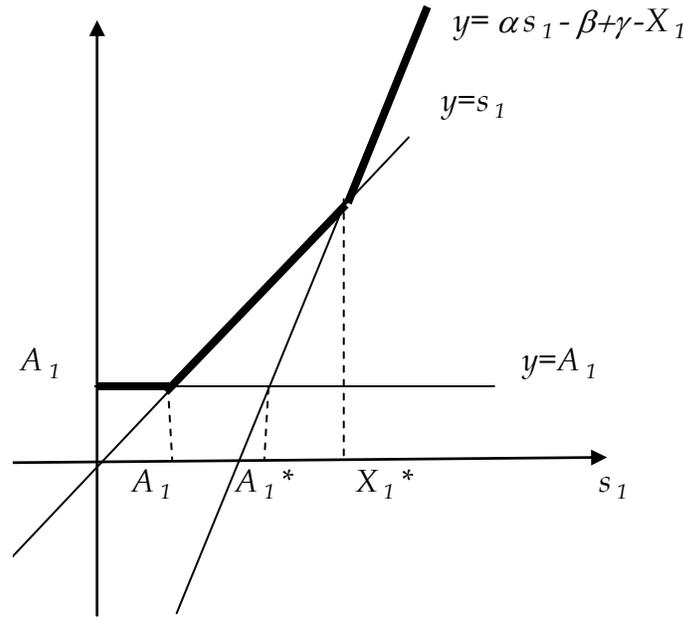


Figura 26: Posibles valores de VTP2

En las figuras 25 y 26, X_1^* es el valor de s_1 para el cual el valor de la segunda parte del proyecto sin y con mantenimiento son iguales y el valor de A_1^* es el valor de s_1 para el cual la segunda parte del proyecto con mantenimiento se hace igual al valor de liquidación A_1 :

$$X_1^* = \frac{X_1 + \beta - \gamma}{\alpha - 1} \quad A_1^* = \frac{A_1 + X_1 + \beta - \gamma}{\alpha}, \quad (196)$$

La expresión para estimar el valor esperado de (194) dependerá de la relación entre las constantes X_1^* , A_1 y A_1^* . Es necesario también revisar la relación entre el mínimo valor posible de s_1 , s_{1min} , y las constantes antes mencionadas.

En el caso en que $s_{1min} < X_1^* < A_1^* < A_1$ se tiene:

$$E[VTP2] = A_1 \left(1 - \int_{A_1^*}^{\infty} f s_1 ds_1 \right) + \int_{A_1^*}^{\infty} (\alpha s_1 - \beta + \gamma - X_1) f s_1 ds_1 \quad (197)$$

$$E[VTP2] = A_1 \left(1 - \int_{A_1^*}^{\infty} f s_1 ds_1 \right) + \int_{A_1^*}^{\infty} \alpha (s_1 - A_1^*) f s_1 ds_1 + \int_{A_1^*}^{\infty} (A_1^*) f s_1 ds_1 \quad (198)$$

Entonces

$$E[VTP2]=A_1+\alpha \int_{A_1^*}^{\infty} (s_1 - A_1^*) f s_1 ds_1 \quad (199)$$

Se puede escribir (199) en la forma de las opciones que se han analizado hasta el momento.

$$E[VTP2]=A_1+\alpha E[\max(0, s_1 - A_1^*)]=A_1+\alpha \mathcal{E}_1^* \quad (200)$$

Se obtiene que el valor de VTP2 es el valor de liquidación más α veces una opción de abandono del proyecto sin mantenimiento a punto de expirar con valor de liquidación igual a A_1^* .

En el caso en que $s_{1min} < A_1 < A_1^* < X_1^*$ se tiene:

$$E[VTP2]=A_1 (1 - \int_{A_1}^{\infty} f s_1 ds_1) + \int_{A_1}^{X_1^*} s_1 f s_1 ds_1 + (\alpha - 1) \int_{X_1^*}^{\infty} (s_1 - X_1^*) f s_1 ds_1 + \int_{X_1^*}^{\infty} s_1 f s_1 ds_1 \quad (201)$$

$$E[VTP2]=A_1 + \int_{A_1}^{\infty} (s_1 - A_1) f s_1 ds_1 + (\alpha - 1) \int_{X_1^*}^{\infty} (s_1 - X_1^*) f s_1 ds_1 \quad (202)$$

Escribiendo la expresión anterior en la forma de opciones se tiene:

$$E[VTP2]=A_1 + E[\max(s_1 - A_1, 0)] + (\alpha - 1) E[\max(s_1 - X_1^*, 0)] \quad (203)$$

$$= A_1 + \mathcal{E}_2^* + (\alpha - 1) \mathcal{E}_3^*$$

El valor de VTP2 es la suma del valor de liquidación más una opción de abandono en el momento de su expiración con valor de liquidación A_1 más $\alpha - 1$ veces una opción de abandono en el momento de su expiración con valor de liquidación igual a X_1^* .

4.4.3 Cálculo de flujos

Los flujos del sub-proyecto 2 sin mantenimiento, s_1 se encuentra expresado en las ecuaciones (128) y (129).

4.4.4 Valor de las opciones y del proyecto

La opción \mathcal{E}_1^* de la ecuación (200) llevada a tiempo presente se calcula con (190) y (191) reemplazando las variables n_1 , g_1 y m_1 por n_1^* , g_1^* y m_1^* , respectivamente, y A_1 por A_1^* :

$$\mathcal{E}_1 = n_1^* p_0 \Phi[k1] - (A_1^* + g_1^* + m_1^*) e^{-rT_1} \Phi[k2] \quad (204)$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar y :

$$k1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1^* p_0}{A_1^* + g_1^* + m_1^*}\right) + (r + \sigma^2 / 2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad k2 = k1 - \sigma\sqrt{T_1} \quad (205)$$

Las opciones \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_3 son similares a \mathcal{E}_1 excepto por el valor de la liquidación. En el caso de \mathcal{E}_2 es A_1 y en el caso de \mathcal{E}_3 es X_1^* . El valor total del proyecto será:

$$VTP = S_0 - X_0 + A_1 e^{-rT_1} + \alpha \mathcal{E}_1 \quad \text{si } X_1^* < A_1^* \quad (206)$$

$$VTP = S_0 - X_0 + A_1 e^{-rT_1} + \mathcal{E}_2 + (\alpha - 1) \mathcal{E}_3 \quad \text{si } X_1^* > A_1^* \quad (207)$$

4.4.5 Ejemplo numérico

Considérese la misma plataforma del ejemplo 2 en la sección 4.2.5 analizada al inicio de su construcción. A los 15 años se tienen tres opciones: abandonar el proyecto, continuar con la operación de la estructura y realizar mantenimiento, y continuar con la operación de la estructura sin realizar trabajos de mantenimiento. Para ser congruentes con los ejemplos anteriores, supóngase que el costo de mantenimiento es determinista e igual a $X_1 = \$90,000$ USD y el costo de liquidación A_1 es 100 millones de dólares. Los cálculos y los resultados se muestran en la Tabla 19.

Tabla 19: Evaluación de proyecto con opción de abandono y mantenimiento

Variable	Valor	Unidades
A_1	\$ 100,000,000.00	US\$
n_1	916,066,095.64	p3
n_1^*	887,514,710.08	p3
g_1	\$ 25,531,768.72	US\$
g_1^*	\$ 24,819,816.21	US\$
m_1	\$ 7,163,096.64	US\$
m_1^*	\$ 19,028,971.81	US\$
α	1.032170042	--
β	\$ 711,952.51	US\$
γ	\$ 11,865,875.16	US\$
X_1^*	-\$ 343,920,055.47	US\$
A_1^*	\$ 86,164,172.30	US\$
\mathcal{E}_1	\$ 3,044,887,723.26	US\$
valor total del proyecto	\$ 5,569,197,752.28	US\$

El valor presente neto del proyecto con mantenimiento sin flexibilidad es de \$4,416 millones de dólares, la diferencia al no considerar la flexibilidad del proyecto es de \$1,153 millones de dólares.

Con el fin de analizar la influencia de las distintas opciones estudiadas hasta el momento en el valor del proyecto se realizó el ejercicio que se describe a continuación. Considerando los mismos costos de mantenimiento y liquidación y utilidades libres de impuestos se calculó el valor del proyecto para dos casos más. El primero considera que se tiene únicamente la opción de abandono a los 15 años (desarrollo en sección 4.3) y el segundo considera que sólo se tiene la opción de mantenimiento a los 15 años (ver resultados en la Tabla 14). Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 20: Evaluación de proyecto con diversas opciones

Proyecto	valor (en millones de dólares US)
Únicamente opción de abandono	\$5,569
Únicamente opción de mantenimiento	\$4,451
Opción de abandono y mantenimiento	\$5,569

Se puede apreciar que el proyecto con las dos opciones tiene mayor valor que los proyectos con opciones simples, lo cual es congruente con la idea de que la flexibilidad operativa aumenta el valor del proyecto.

4.5 OPCIÓN DE ABANDONO EN DOS PUNTOS

4.5.1 Planteamiento

El planteamiento original del proyecto con abandono en el punto crítico T_1 , mostrado en la sección 4.2, puede ampliarse al caso en el que se tengan o esperen dos puntos críticos T_1 y T_2 en el horizonte del proyecto. Esto significa que el proyecto tiene dos puntos de decisión en los cuales es posible abandonarlo dependiendo de las condiciones vigentes en dichos instantes. En la Figura 27 se muestra un esquema de dicho proyecto.

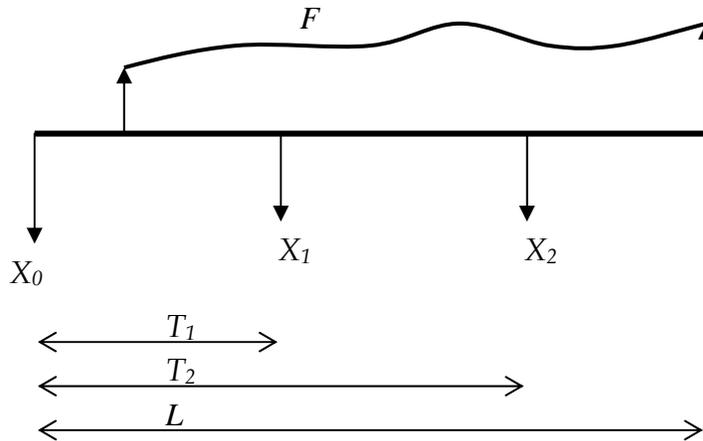


Figura 27: Esquema de proyecto con opción de abandono en dos puntos críticos

El valor de X_0 representa el costo inicial, X_1 y X_2 son los costos que eventualmente se tendrían que erogar en caso de continuar con el proyecto en los tiempos T_1 y T_2 respectivamente. El proyecto total puede ser dividido en tres sub-proyectos, el primero de 0 a T_1 , el segundo de T_1 a T_2 y el tercero de T_2 a L ; tal como se aprecia en la Figura 28.

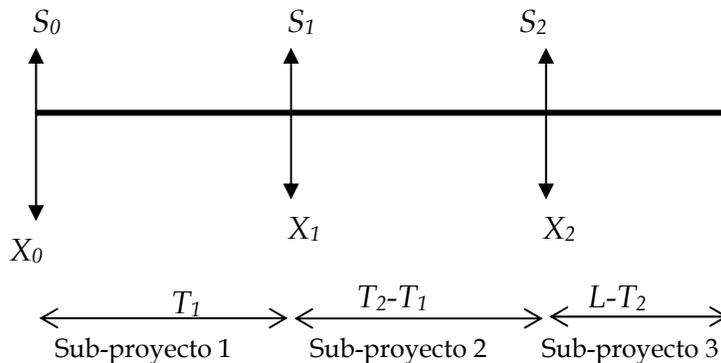


Figura 28: Esquema de proyecto con abandono en dos puntos críticos (desglosado)

Los valores S_i son los flujos correspondientes al sub-proyecto $i+1$ que se calculan con (108) y (109).

4.5.2 Identificación de las opciones de abandono

En T_1 se tiene un primer punto de decisión en donde el tomador de decisiones tiene dos alternativas.

1. Continuar con la producción hasta T_2 en donde se tienen dos alternativas:
 - a. continuar hasta la vida útil de la estructura.
 - b. abandonar el proyecto y recibir el pago de liquidación A_2
2. Abandonar el proyecto y recibir el pago de la liquidación A_1

Nótese que a partir de T_1 el proyecto es equivalente a un proyecto con opción de abandono en T_2 . Colocando los subíndices adecuados en la expresión (183) se obtiene la expresión para el valor del proyecto equivalente:

$$VTP_1 = S_1 - X_1 + e^{-\delta(T_2-T_1)} A_2 + \mathcal{E}_1 \quad (208)$$

donde \mathcal{E}_1 es una opción de compra que se tiene en T_1 para la adquisición de S_2 con precio de ejercicio $X_2 + A_2$ con plazo de vencimiento en T_2 :

$$\mathcal{E}_1 = \max(S_2 - X_2 - A_2, 0) e^{-\delta(T_2-T_1)} \quad (209)$$

En T_1 el tomador de decisiones elegirá continuar si el valor esperado de VTP_1 es mayor que el valor de la liquidación A_1 , en caso contrario, la decisión correcta será abandonar el proyecto. Entonces el valor total del proyecto será:

$$VTP = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} A_1 + \mathcal{E}_0 \quad (210)$$

donde

$$\mathcal{E}_0 = \max(VTP_1 - A_1, 0) e^{-\delta T_1} \quad (211)$$

Finalmente el valor esperado del VTP del proyecto total condicional a T_1 , T_2 , X_1 y X_2 será:

$$E[VTP] = S_0 - X_0 + e^{-\delta T_1} A_1 + E[\mathcal{E}_0] \quad (212)$$

4.5.3 Valor de las opciones

Utilizando (208) en (211) se obtiene

$$E[\mathcal{E}_0] = E[\max(E[S_1 - X_1 + e^{-\delta(T_2-T_1)} A_2 + \mathcal{E}_1 - A_1], 0) e^{-\delta T_1}] \quad (213)$$

El valor esperado de \mathcal{E}_1 se calcula con (188) considerando que el tiempo cero se ha desfasado al tiempo T_1 . Por lo tanto, las cantidades referidas al tiempo T_1 , se refieren al tiempo T_2 y el plazo del vencimiento es T_2-T_1 .

$$E[\mathcal{E}_1] = n_2 p_1 \Phi[q_1] - (X_2 + A_2 + g_2) e^{-r(T_2-T_1)} \Phi[q_2] \quad (214)$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_2 p_1}{X_2 + A_2 + g_2}\right) + (r + \sigma^2 / 2)(T_2 - T_1)}{\sigma \sqrt{(T_2 - T_1)}}, \quad q_2 = q_1 - \sigma \sqrt{(T_2 - T_1)} \quad (215)$$

Despejando p_1 de (108)

$$p_1 = \frac{S_1 + g_1}{n_1} \quad (216)$$

Y reemplazando (216) en (214) y (215) y éstas en (213) se obtiene:

$$E[\mathcal{E}_0] = e^{-\delta T_1} E\left[\max\left(S_1 - X_1 - A_1 + e^{-\delta(T_2-T_1)} A_2 + \frac{n_2}{n_1} (S_1 + g_1) \Phi[q_1] - (X_2 + A_2 + g_2) e^{-r(T_2-T_1)} \Phi[q_2], 0\right)\right] \quad (217)$$

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_2 (S_1 + g_1)}{n_1 (X_2 + g_2)}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma \sqrt{T_2 - T_1}}, \quad q_2 = q_1 - \sigma \sqrt{T_2 - T_1} \quad (218)$$

Para calcular el valor esperado de c_0 consideramos que la tasas δ y μ son iguales a la tasa libre de riesgo.

$$E[\mathcal{E}_0] = e^{-r T_1} \int_{S^*}^{\infty} (S_1 - X_1 - A_1 + e^{-r(T_2-T_1)} A_2 + \frac{n_2}{n_1} (S_1 + g_1) \Phi[q_1] - (X_2 + A_2 + g_2) e^{-r(T_2-T_1)} \Phi[q_2]) f_{S_1}(S_1) dS_1 \quad (219)$$

donde S^* es el valor que cumple

$$S^* - X_1 - A_1 + e^{-r(T_2-T_1)} A_2 + \frac{n_2}{n_1} (S^* + g_1) \Phi[q_1] - (X_2 + A_2 + g_2) e^{-r(T_2-T_1)} \Phi[q_2] = 0 \quad (220)$$

y f_{S_1} es la función de densidad de S_1 . (113). En el Apéndice E se muestra que la expresión (219) es igual a:

$$E[\mathcal{E}_0] = n_1 p_0 \Phi(h_1) - (X_1 + A_1 - A_2 e^{-r(T_2-T_1)} + g_1) e^{-rT_1} \Phi(H_1) + n_2 p_0 \Phi(h_1, h_2, \rho) - (X_2 + A_2 + g_2) e^{-rT_2} \Phi(H_1, H_2, \rho) \quad (221)$$

donde $\Phi(x, y, \rho)$ es la función de distribución normal bivariada con límites superiores x y y con correlación $\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

$$h_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1 p_0}{S^* + g_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad H_1 = h_1 - \sigma\sqrt{T_1} \quad (222)$$

$$h_2 = \frac{\ln\left(\frac{n_2 p_0}{X_2 + A_2 + g_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad H_2 = h_2 - \sigma\sqrt{T_2}$$

La expresión que se obtiene para el cálculo de la opción \mathcal{E}_0 es similar a la que corresponde a una opción financiera compuesta (Geske, 1979). Una opción financiera compuesta consiste en una opción anidada dentro de otra opción.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un método para la evaluación de proyectos de infraestructura de producción de hidrocarburos, IPH. Este método se basa en los modelos de opciones reales utilizados en el área de finanzas e inversiones para la evaluación de proyectos con posibilidad de cambios y grandes incertidumbres en los beneficios esperados. El método ha sido aplicado al caso particular de plataformas marinas de acero de producción de hidrocarburos. Se considera que dichas estructuras van a estar sometidas a los efectos de huracanes que pueden llevar a la estructura a una paralización de actividades. Por otro lado, el oleaje operacional ocasiona deterioro por fatiga en sus conexiones soldadas, lo cual puede disminuir la capacidad de desempeño de la estructura frente a los eventos extremos.

Durante el desarrollo del trabajo se han logrado los siguientes resultados: (1) la modelación de los flujos de dinero en proyectos de IPH; (2) la modelación de la función de disponibilidad para IPH; (3) la identificación de opciones reales de mantenimiento y abandono en el transcurso de la vida útil de la estructura; (4) la deducción de expresiones para la evaluación de las opciones de mantenimiento y abandono; (5) la evaluación de proyectos con opciones reales de mantenimiento, abandono, mantenimiento y abandono. Adicionalmente se resolvieron dos aspectos que surgieron a raíz del estudio numérico de los casos de análisis. El primero de ellos fue la demostración de que la función de peligro de la plataforma, necesaria para estimar los flujos esperados del proyecto, puede aproximarse mediante la probabilidad anual de falla. El segundo aspecto fue el de encontrar una expresión para el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de estados de daño en la estructura a partir de la probabilidad de falla por fatiga de sus conexiones soldadas .

El flujo de dinero esperado es determinado por el precio del hidrocarburo, modelado como un proceso aleatorio de movimiento browniano geométrico, así como por las características de producción, los costos de reparación y por la función de disponibilidad. Dicha función, definida como la probabilidad de que la estructura se encuentre en operación en un instante dado, contiene la información sobre el comportamiento de la estructura frente a eventos extremos, las consecuencias del deterioro por fatiga, la duración de los trabajos de reposición en caso de falla de la estructura y, dado el caso, la información de inspecciones y los efectos de realizar trabajos de mantenimiento en la estructura.

El modelo utilizado para los flujos de dinero concentrados resulta práctico y eficiente para la identificación de opciones reales en los proyectos de infraestructura extractiva o de producción. El modelo puede aplicarse de manera general para el análisis de proyectos en los que existan otros tipos de opciones o combinaciones de ellas, tales como reforzamiento o rehabilitación de estructuras para ampliación de vida útil o por cambio de códigos. El análisis de los flujos anuales del proyecto permite cuantificar el beneficio de realizar los trabajos de mantenimiento y así evaluar y comparar programas de mantenimiento. Así mismo el análisis de los costos anuales de falla puede ser útil para establecer periodos de mantenimiento, determinar la calidad de dichos trabajos, fijar políticas de aseguramiento, límites de cobertura o primas de seguros.

En general, las expresiones deducidas para la evaluación de proyectos con opciones reales consisten en una suma de flujos del proyecto (o parte del proyecto) más el valor de la opción. Las expresiones para el cálculo de las opciones reales resultaron similares a las de Black y Scholes para opciones financieras, lo cual puede resultar ventajoso al tener disponible software desarrollado para opciones

financieras. Adicionalmente se estudió el caso de proyectos con dos puntos críticos en su vida útil y se obtuvo las expresiones para la evaluación del proyecto y para la opción real contenida en él.

Se presentaron tres ejemplos numéricos de aplicación del método en los casos de mantenimiento y abandono de IPH que ilustran las características del método y las diferencias y ventajas respecto de los métodos tradicionales de evaluación económica de proyectos. Para dichos ejemplos se utilizaron los resultados de estudios de confiabilidad de plataformas marinas existentes en la República Mexicana realizados en el Instituto Mexicano del Petróleo, IMP.

Estos ejemplos nos muestran la capacidad del método para cuantificar el valor agregado que tienen los proyectos con posibilidad de abandono o mantenimiento. Las implicaciones prácticas son tanto técnicas como financieras. Un ejemplo del primer caso podría ser la elección entre una nueva alternativa estructural con posibilidad de montaje más eficiente que las soluciones actuales. Esta ventaja puede significar un mayor costo de infraestructura y en un análisis convencional el uso de la alternativa estructural puede resultar menos rentable que los sistemas usados actualmente. Sin embargo, la posibilidad de un montaje más eficiente, puede significar un mayor valor de liquidación que puede hacer que la estructura alternativa sea a la larga, la más rentable. En el segundo caso, la posibilidad de efectuar la valoración de proyectos de infraestructura con flexibilidad operativa permite una mejor colocación de proyectos de inversión en infraestructura frente a otros tipos de inversiones.

El método puede aplicarse a IPH sujeta a otros peligros como explosiones, incendios provocados por accidentes o error humano, además de las solicitaciones sísmicas que pueden generar desde deterioro en los elementos estructurales hasta el colapso de la estructura. Adicionalmente existen otros efectos que pueden deteriorar la capacidad de la estructura con el tiempo, como por ejemplo, la corrosión por sustancias abrasivas, agua salada, entre otras. Si consideramos todas estas situaciones la función de peligro aumentará, lo cual hará más vulnerable a la estructura. La función de peligro para una estructura expuesta a varios peligros independientes entre sí, es la suma de las funciones de peligro correspondientes a cada peligro. En cada caso será necesario un estudio del efecto de combinar eventos extremos y efectos de deterioro ya que no necesariamente en todos los casos se puede suponer que los efectos son independientes.

REFERENCIAS

Ang, A. y Tang, W. (1984) *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*. Volumen II: Decision, Risk and Reliability. John Wiley & sons.

Ayala, E. (2001) Probabilistic analysis of ultimate strength capacity of damaged jackets. Tesis de Maestría en Ciencias, Departamento de Estructuras Marinas, Facultad de Tecnología Marina, Universidad de Noruega de Ciencias y Tecnología (NTNU)

Bea, R. G., Ramos, R., Valle, O., Valdez, V., Maya, R., (1998), OTC 8692 - *Risk Assessment and Management Based Hurricane Wave Criteria for Design and Requalification of Platforms in the Bay of Campeche*, Offshore Technology Conferences, Houston TX.

Black, F., Scholes, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities" *Journal of political economy* 81 637-659.

Bouchart, J.; Goulter, I. (1998). "Is rational decision making appropriate for management of irrigation reservoirs?" *Journal of water resources planning and management* 124(6) 301-309.

Brealey, R. y Myers, S. (1993) *Fundamentos de Financiación Empresarial*. Mac Graw Hill.

Cardone, V, Ramos, R., (1998), *Wave, Wind and Current Characteristics of Bay of Campeche*, Paper No. OTC 8697 Offshore Technology Conferences, Houston TX.

Dharmavasan, S. y Peers, SMS. (1996), "*Inspection ,maintenance an repair planning scheduling for tubular joints using reliability methods*" *Fatigue in offshore Structures* cap 25 vol 2 Oxford and IBH Publishing Co.

Dixit, A. Y Pindyck, R. (1994) *Investment under uncertainty*. Princeton University Press.

Geske, R. (1979) "The Valuation of Compound Options". *Journal of Financial Economics*, No 7, 63-81

Heredia-Zavoni, E. y Montes, R.(2002). "Analytical models for the probability distributions of fatigue parameters and crack size of offshore structures based on bayesian updating." 21st International Conference on offshore mechanics and artic engineering, OMAE, Oslo, Noruega.

Heredia-Zavoni, E. y Montes R. (2004) "A bayesian model for the probability distribution of fatigue damage in tubular joints" *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, ASME*, 126, 3, 243-249.

Heredia-Zavoni E. y F. Silva (2006), *Memorias del Simposio "Aplicaciones del Análisis de Riesgo y Confiabilidad en la Planeación y Diseño de Ingeniería"* realizado en la Universidad de Toluca.

Hull, John C. (1993) "Options, Futures and other derivate securities" Prentice Hall. 2 edition.

IMP (2004) "Evaluación de la Integridad Estructural de Plataformas Marinas, Estableciendo su Vida Remanente", Reporte para PEMEX, Proyecto F.32015.

Johnson, N. y Kotz S. (1972) *Distributions in statistics: continuous multivariate distributions*, John Wiley & Sons. Inc

Lewis ,E.E. (1987) *Introduction to reliability engineering*. New York . J. Wiley.

Luehrman T., 1998. "Investment opportunities as real options: Getting started on the numbers" *Harvard Business Review* July-August.

Moang y Song (1998). "Implications of inspection updating on system fatigue reliability of offshore structures" Proceedings of the 17th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, ASME.

Moan, T. ,Vårdal, O. Johannesen, J. (1999) *Probabilistic inspection planning of fixed offshore structures* Proceedings of Application of Statistics and probability, ICASP Vol 1. Melchers & Stewart (eds).

Montes (2006) comunicación personal

Paddock, J.; Siegel, D.; Smith, J.(1988) "Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases." *Quarterly Journal of Economics* Agosto, 479-508.

Paul, W. y Baschnagel J. (1999) *Stochastic Processes, From Physics to Finance* Ed. Springer.

Rackwitz, R. (2000). "Optimization - the basis of code-making and reliability verification." *Structural Safety* 22 27-60.

Rosenblueth, E. y Mendoza, E. (1971) *Reliability optimization in isostatic structures*. J. Eng. Mech. Div, ASCE. 97 (EM6):1625-1642.

Ross, S.; Westerfield, R. y Jordan, B. (1996) *Fundamento de finanzas corporativas* Segunda edición Ed. Irwin.

SESAM (2001) User Manual version 2.2 , Profast Theory, Probabilistic Fatigue Analysis. Developed and marketed by DET NORSKE VERITAS, www.dnv.com

Stansbury, J.; Bogardi, L. y Stakhiv, E.Z. (1999). "Risk-cost optimization under uncertainty for dredged material disposal." *Journal of water resources planning and management* 125(6) 342-351.

Stonier, J. y Triantis, A. (1998). "Natural and contractual real options: The case of aircraft delivery options" Notes for lecture at University of Bocconi.

Thoft-Christensen, P. y Baker, M.J. (1982) *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag.

Weston, J., Copeland, T. (1994) *Finanzas en Administración* Vol I. Mac Graw Hill

Whitman, R. (2000). "Organizing and evaluating uncertainty in geotechnical engineering." *Journal Of Geotechnical And Geoenvironmental Engineering* 126 (7) 583-593.

Zhang, R. y Mahadevan, S. (2000). *Model uncertainty and Bayesian updating in reliability-based inspection* *Structural Safety* 22(2), 145-160.

Apéndice A: DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE BLACK Y SCHOLES PARA LA EVALUACIÓN DE OPCIONES DE COMPRA DE TIPO EUROPEO

Hipótesis

1. No existe riesgo de crédito, sólo riesgo de mercado
2. El mercado es eficiente
3. Las transacciones del mercado son continuas
4. El precio de la acción es estocástico y exhibe un comportamiento de movimiento browniano geométrico
5. La tasa de riesgo y la volatilidad son constantes
6. Las acciones no pagan dividendos
7. El precio de la acción no necesariamente es un número entero
8. El mercado no presenta situaciones de *arbitrage*, lo cual significa que no existe una tasa de crecimiento sin riesgo mayor que la tasa sin riesgo que garantiza el banco.

Se supone que el precio de la opción, a la cual se denotará c , sólo depende del precio de la acción S , del tiempo t y de otras variables que se consideran como constantes conocidas. Dado que el precio de la acción sigue el proceso expresado en B 1 es posible aplicar el lema de Ito (Ver Apéndice C) para encontrar la variación del precio de la opción.

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial S} \mu S + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma S dz \quad \text{A 1}$$

Es posible crear una cartera V_H consistente en la compra de Q_s acciones y la venta de una opción de tal manera que el proceso de Wiener sea eliminado. El valor de Q_s para que esto ocurra deberá ser:

$$Q_s = \frac{\partial c}{\partial S} \quad \text{A 2}$$

De esta manera el valor de la cartera V_H queda definida por:

$$V_H = S \frac{\partial c}{\partial S} - c \quad \text{A 3}$$

El cambio en el valor de la cartera en el intervalo dt está dado por:

$$dV_H = dS \frac{\partial c}{\partial S} - dc \quad \text{A 4}$$

Sustituyendo B 1 y A 1 en A 4 se obtiene:

$$dV_H = -\frac{\partial c}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \quad \text{A 5}$$

Dado que la ecuación A 5 no depende de dz , la cartera V_H no tiene riesgo en el intervalo dt , por lo tanto, la variación de la cartera debe seguir ser:

$$dV_H = rV_H dt = r \left(S \frac{\partial c}{\partial S} - c \right) dt, \quad r = \text{tasa libre de riesgo} \quad \text{A 6}$$

Igualando las expresiones A 5 y A 6 se obtiene

$$-\frac{\partial c}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt = rS \frac{\partial c}{\partial S} dt - rcdt \quad \text{A 7}$$

Eliminando los dt queda la siguiente expresión:¹

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rc - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rS \frac{dc}{dS} \quad \text{A 8}$$

La expresión A 8 es conocida como la ecuación diferencial de Black-Scholes. Para solucionar esta ecuación diferencial es necesario definir las condiciones de borde que, para el caso particular de la opción de compra europea, es:

$$c = \text{máx}(0, S - E) \quad \text{cuando } t=T \quad \text{A 9}$$

donde E es el precio del ejercicio y T es la fecha de vencimiento.

En la referencia original, Black y Scholes (1973) obtienen la solución analítica de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones de borde, mediante un cambio de

¹ En la derivación de la ecuación A 8 se ha supuesto que la cartera V_H está libre de riesgo solo por un periodo de tiempo dt . En realidad La tasa de cambio de la opción varía con el tiempo y con el precio de la acción. Para mantener la cartera sin riesgo es necesario cambiar continuamente la proporción entre el número de acciones y el número de opciones.

variable. Una explicación detallada de dicho análisis se puede encontrar en Paul y Baschnagel (1999). En este trabajo se presenta una manera alternativa para encontrar las fórmulas, propuesta por Hull (1993). El valor esperado de la opción en su fecha de vencimiento, en un mundo neutral al riesgo es:

$$E[c_T] = E[\text{máx}(0, S_T - E)] \quad \text{A 10}$$

donde el subíndice T indica que se trata de los precios en la fecha de vencimiento T . Para encontrar el valor actual de la opción debemos descontarlo con la tasa libre de riesgo r .

$$E[c] = e^{-r(T-t)} E[\text{máx}(0, S_T - E)] \quad \text{A 11}$$

$$E[c] = e^{-r(T-t)} \int_E^{\infty} (S_T - E) g(S_T) dS_T \quad \text{A 12}$$

donde g es la función de densidad de probabilidad de S_T . Dado que el logaritmo de S_T tiene una distribución normal (Ver Apéndice B) se obtiene que:

$$E[c] = \Phi(d_1)S - \Phi(d_2)Ee^{-r(T-t)} \quad \text{A 13}$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Φ es la función de distribución acumulada normal estándar.

Apéndice B: PROCESO DE MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

Sea la variable S modelada como un proceso aleatorio continuo, conocido como proceso de movimiento browniano geométrico.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad \text{B 1}$$

donde μ , σ son constantes, t es el tiempo y z es un proceso de Wiener, el cual cumple que

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \quad \text{B 2}$$

donde ϵ es una variable aleatoria con distribución normal estándar. La ecuación B1 es un caso particular de un proceso de Ito que se muestra en el Apéndice C.

Reemplazando B 2 en B 1 se obtiene:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma \epsilon \sqrt{dt} \quad \text{B 3}$$

Por lo tanto, la variable dS/S tiene una distribución normal

$$\frac{dS}{S} \sim \phi(\mu dt, \sigma \sqrt{dt}) \quad \text{B 4}$$

Se demostrará a continuación que S tiene una distribución lognormal. Sea una función G definida como $G = \ln S$. Por el lema de Ito (ver Apéndice C) la función G cumple que:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad \text{B 5}$$

Reemplazando B 2 en B 5 y expresando ésta última de manera discreta se obtiene:

$$\Delta G = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad \text{B 6}$$

Lo que indica que la variación de G en un intervalo pequeño Δt tiene una distribución normal con media $(\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{\Delta t}$. El valor de $G_T - G_t$ (que es la variación de G en un intervalo $T-t = K\Delta t$, donde K es un entero cualquiera) es una variable aleatoria que resulta de la suma de varias variables normales independientes, dz (por definición del proceso de Wiener). De allí que $G_T - G_0$ resulta ser una variable normal con media $K(\mu - \sigma^2/2)\Delta t$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{K\Delta t}$, donde el subíndice indica el instante en el que está definido la variable. Dado que S_0 es conocida, G_0 lo es también.

Regresando a la variable S y reemplazando K por $(T-t)/\Delta t$ se obtiene:

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right) \quad \text{B 7}$$

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right) \quad \text{B 8}$$

Apéndice C: ENUNCIADO DEL LEMA DE ITO

Supóngase que el valor de una variable x sigue un proceso de Ito:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad \text{C 1}$$

donde z es un proceso de Wiener y a y b son funciones de x y t . El lema de Ito indica que una función G de x y t cumple con la siguiente expresión:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad \text{C 2}$$

Apéndice D: DEDUCCIÓN DE VALOR ESPERADO DE OPCION DE COMPRA

Se desea calcular el valor de la siguiente función:

$$E[c] = e^{-rT} \int_X^{\infty} (S - X) f_S(S) dS \quad \mathbf{D 1}$$

donde X es determinista y S es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_S(x) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(x+g)} e^{-\left[\ln\left(\frac{x+g}{n}\right) - M\right]^2 / 2D^2}, \quad -g < x < \infty \quad \mathbf{D 2}$$

donde M , D , g y n son constantes. Se tiene que:

$$E[c] = e^{-rT} \int_X^{\infty} S f_S(S) dS - e^{-rT} \int_X^{\infty} X f_S(S) dS = I1 - I2 \quad \mathbf{D 3}$$

Reemplazando D 2 en la integral I1 queda:

$$I1 = e^{-rT} \int_X^{\infty} (S + g - g) \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(S+g)} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{S+g}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] dS \quad \mathbf{D 4}$$

$$I1 = e^{-rT} \int_X^{\infty} (S + g) \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(S+g)} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{S+g}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] dS \\ - e^{-rT} \int_X^{\infty} (g) \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(S+g)} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{S+g}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] dS \quad \mathbf{D 5}$$

$$I1 = I3 - I4 \quad \mathbf{D 6}$$

donde

$$I3 = e^{-rT} \int_X^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{S+g}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] dS \quad \mathbf{D 7}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$\frac{S+g}{n} = e^{\omega}, \quad \frac{dS}{n} = e^{\omega} d\omega \quad \mathbf{D 8}$$

Entonces

$$I3 = e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{X+g}{n}\right)}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\omega - M)^2 / 2D^2\right] d\omega \quad \mathbf{D 9}$$

Completando cuadrados en el término dentro del exponencial

$$I3 = ne^{-rT} \exp\left[\frac{2M+D^2}{2}\right] \int_{\ln\left(\frac{X+g}{n}\right)}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - (M+D^2))^2}{2D^2}\right] d\omega \quad \mathbf{D 10}$$

Transformando I3 con el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{\omega - (M + D^2)}{D} \quad dz = \frac{d\omega}{D} \quad \mathbf{D 11}$$

La integral I3 queda

$$I3 = ne^{-rT} \exp\left[\frac{2M+D^2}{2}\right] \Phi\left[\frac{-\ln\left(\frac{X+g}{n}\right) + (M+D^2)}{D}\right] \quad \mathbf{D 12}$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar. La integral I4

$$I4 = ge^{-rT} \int_X^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}(S+g)} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{S+g}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] dS \quad \mathbf{D 13}$$

se transforma con el siguiente cambio de variable

$$S + g = e^{\omega} \quad dS = e^{\omega} d\omega \quad \mathbf{D 14}$$

$$I4 = ge^{-rT} \int_{\ln(X+g)}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}e^{\omega}} \exp\left[-\left(\ln\left(\frac{e^{\omega}}{n}\right) - M\right)^2 / 2D^2\right] e^{\omega} d\omega \quad \mathbf{D 15}$$

$$I4 = ge^{-rT} \int_{\ln(X+g)}^{\infty} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\omega - (\ln(n) + M))^2 / 2D^2\right] d\omega \quad \mathbf{D 16}$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{\omega - (\ln(n) + M)}{D} \quad dZ = \frac{d\omega}{D} \quad \mathbf{D 17}$$

Con lo que se obtiene

$$I4 = ge^{-rT} \int_{\frac{\ln(X+g) - (\ln(n)+M)}{D}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2] dz \quad \mathbf{D 18}$$

$$I4 = ge^{-rT} \Phi \left[-\frac{\ln(X+g) - (\ln(n)+M)}{D} \right] \quad \mathbf{D 19}$$

Por lo tanto, reemplazando D 12 y D 19 en D 6 se obtiene

$$I1 = ne^{-rT} \exp \left[\frac{2M + D^2}{2} \right] \Phi \left[\frac{-\ln \left(\frac{X+g}{n} \right) + (M + D^2)}{D} \right] \quad \mathbf{D 20}$$

$$- ge^{-rT} \Phi \left[-\frac{\ln(X+g) - (\ln(n)+M)}{D} \right]$$

La integral I2 es similar a la integral I4

$$I2 = Xe^{-rT} \int_X^{\infty} f_S(S) dS = X \frac{I4}{g} \quad \mathbf{D 21}$$

$$I2 = Xe^{-rT} \Phi \left[-\frac{\ln(X+g) - (\ln(n)+M)}{D} \right] \quad \mathbf{D 22}$$

Finalmente reemplazando D 20 y D 22 en D 3 se obtiene

$$E[c] = ne^{-rT} \exp \left[\frac{2M + D^2}{2} \right] \Phi \left[\frac{-\ln \left(\frac{X+g}{n} \right) + (M + D^2)}{D} \right] \quad \mathbf{D 23}$$

$$- (X+g)e^{-rT} \Phi \left[-\frac{\ln(X+g) - (\ln(n)+M)}{D} \right]$$

Apéndice E: DEDUCCIÓN DE VALOR ESPERADO DE OPCIÓN DE COMPRA COMPUESTA

Se requiere calcular el siguiente valor:

$$E[c_0] = e^{-rT_1} \int_{S^*}^{\infty} (S_1 - X_1 + \frac{n_2}{n_1}(S_1 + g_1)\Phi[q_1] - (X_2 + g_2)e^{-r(T_2-T_1)}\Phi[q_2])f_{S_1}(S_1)dS_1 \quad \text{E 1}$$

donde

$$q_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_2(S_1 + g_1)}{n_1(X_2 + g_2)}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma(T_2 - T_1)}, \quad q_2 = q_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1} \quad \text{E 2}$$

y T_i , X_i , S^* , n_i y g_i , r y σ son constantes conocidas Φ es la función de distribución de probabilidad normal estándar y S_1 es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_{S_1}(x) = \frac{1}{D\sqrt{2\pi(x + g_1)}} e^{-\left[\ln\left(\frac{x+g_1}{n_1}\right) - M\right]^2 / 2D^2} \quad \text{E 3}$$

donde M y D son constantes. Resolviendo se obtiene:

$$E[c_0] = A_1 + A_2 - A_3 \quad \text{E 4}$$

Donde

$$A_1 = e^{-rT_1} \int_{S^*}^{\infty} (S_1 - X_1)f_{S_1}(S_1)dS_1 \quad \text{E 5}$$

$$A_2 = e^{-rT_1} \int_{S^*}^{\infty} \frac{n_2}{n_1}(S_1 + g_1)\Phi(q_1)f_{S_1}(S_1)dS_1 \quad \text{E 6}$$

$$A_3 = e^{-rT_2} \int_{S^*}^{\infty} (X_2 + g_2)\Phi(q_2)f_{S_1}(S_1)dS_1 \quad \text{E 7}$$

La integral A_1 es similar a D 1 del Apéndice D. Por analogía resulta:

$$A_1 = n_1 p_0 \Phi(h_1) - (X_1 + g_1)e^{-rT_1}\Phi(H_1) \quad \text{E 8}$$

donde

$$h_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1 p_0}{S^* + g_1}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}} \quad , \quad H_1 = h_1 - \sigma\sqrt{T_1} \quad \text{E 9}$$

y Φ es la función de distribución de probabilidad normal. Reemplazando E 3 en la integral E 6 resulta

$$A_2 = e^{-rT_1} \int_{S^*}^{\infty} \frac{n_2}{n_1 D \sqrt{2\pi}} \Phi(q_1) e^{-\ln\left(\frac{S_1 + g_1}{n_1} - M\right)^2 / 2D^2} dS_1 \quad \text{E 10}$$

Con el siguiente cambio de variable

$$v = \ln\left(\frac{S_1 + g_1}{n_1} - M\right) / D \quad \text{E 11}$$

La integral A2 queda

$$A_2 = e^{-rT_1} \int_k^{\infty} \frac{n_2}{k \sqrt{2\pi}} \Phi(q_1) e^{-\left(\frac{v^2}{2} - Dv - M\right)} dv \quad \text{E 12}$$

donde

$$k = \frac{\ln\left(\frac{S^* + g_1}{n_1}\right) - M}{D} \quad \text{E 13}$$

$$q_1 = \frac{h_2 + \rho v - \frac{\sigma T_1}{\sqrt{T_2}}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad \text{E 14}$$

$$h_2 = \frac{\ln\left(\frac{n_2 p_0}{X_2 + g_2}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}} \quad , \quad \rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad \text{E 15}$$

Completando cuadrados en el argumento de la exponencial:

$$A_2 = e^{-rT_1 + M + D^2/2} \int_k^{\infty} \frac{n_2}{\sqrt{2\pi}} \Phi(q_1) e^{-\frac{1}{2}(v-D)^2} dv \quad \mathbf{E\ 16}$$

Luego con el siguiente cambio de variable

$$z = D - v \quad \mathbf{E\ 17}$$

y reemplazando M y D se obtiene

$$A_2 = n_2 p_0 \int_{-\infty}^{h_1} \Phi(q_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad \mathbf{E\ 18}$$

$$q_1 = \frac{h_2 - \rho z}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad \mathbf{E\ 19}$$

Por propiedad de la función normal bivariada (Johnson y Kotz, 1972) se tiene:

$$A_2 = n_2 p_0 \Psi(h_1, h_2, \rho) \quad \mathbf{E\ 20}$$

donde Ψ es la función de distribución normal bivariada de h_1 y h_2 con correlación ρ .

La integral A_3 queda

$$A_3 = e^{-rT_2} \int_{S^*}^{\infty} \frac{(X_2 + g_2)}{(S_1 + g_1)D\sqrt{2\pi}} \Phi(q_2) e^{-\left(\ln\left(\frac{S_1 + g_1}{n_1}\right) - M\right)^2 / 2D^2} dS_1 \quad \mathbf{E\ 21}$$

Con el siguiente cambio de variable

$$v = -\ln\left(\frac{S_1 + g_1}{n_1} - M\right) / D \quad \mathbf{E\ 22}$$

La integral queda

$$A_3 = (X_2 + g_2)e^{-rT_2} \int_{-\infty}^{H_1} \Phi(q_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv \quad \mathbf{E\ 23}$$

donde

$$q_2 = \frac{H_2 - \rho v}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad \mathbf{E\ 24}$$

y

$$H_2 = h_2 - \sigma\sqrt{T_2} \quad \mathbf{E\ 25}$$

$$A_3 = (X_2 + g_2)e^{-rT_2} \Phi(H_1, H_2, \rho) \quad \mathbf{E\ 26}$$

Finalmente:

$$c_0 = n_1 p_0 \Phi(h_1) - (X_1 + g_1)e^{-rT_1} \Phi(H_1) + n_2 p_0 \Psi(h_1, h_2, \rho) - (X_2 + g_2)e^{-rT_2} \Psi(H_1, H_2, \rho) \quad \mathbf{E\ 27}$$

Apéndice F: FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DEL TIEMPO DE OCURRENCIA DE LA K-ÉSIMA FALLA

Supóngase que se tiene una estructura con un proceso de deterioro y con una probabilidad anual de falla que aumenta con el tiempo. Además se sabe que luego de una falla la estructura retorna a su condición original por acciones de mantenimiento ideal. La probabilidad de que el tiempo de ocurrencia de la k-ésima falla de la estructura sea mayor que t es igual a la probabilidad de que ocurran a lo más k-1 fallas en el intervalo $[0,t]$.

$$\Pr(t_k > t) = 1 - F_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} P_i \quad \mathbf{F 1}$$

donde F_k es la función de distribución del tiempo de ocurrencia del k-ésimo evento y P_i es la probabilidad de que ocurran "i" fallas en el intervalo.

$$P_0 = 1 - F_1(t), \quad \mathbf{F 2}$$

$$P_i = \int_0^t f_i(t_i)(1 - F_1(t - t_i)) dt_i, \text{ para } i > 1$$

donde F_1 es la función de distribución del tiempo de ocurrencia del primer evento Efectuando las operaciones se obtiene:

$$P_i = \int_0^t f_i(t_i) dt_i - \int_0^t f_i(t_i) F_1(t - t_i) dt_i = F_i(t) - F_i(0) - \int_0^t f_i(t_i) F_1(t - t_i) dt_i \quad \mathbf{F 3}$$

Dado que se supone que al inicio la estructura se encuentra en estado operativo $F_i(0)=0$. Reemplazando F 3 en F 1 se obtiene

$$\Pr(t_k > t) = P_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \left[F_i(t) - \int_0^t f_i(t_i) F_1(t - t_i) dt_i \right] \quad \mathbf{F 4}$$

De F 4 se deduce que:

$$\Pr(t_{k+1} > t) = \Pr(t_k > t) + F_k(t) - \int_0^t f_k(t_k) F_1(t - t_k) dt_k \quad \mathbf{F 5}$$

Ordenando términos

$$-\Pr(t_{k+1} > t) + \Pr(t_k > t) + F_k(t) = \int_0^t f_k(t_k) F_1(t-t_k) dt_k \quad \mathbf{F 6}$$

$$-(1-F_{k+1}) + 1 - F_k + F_k(t) = \int_0^t f_k(t_k) F_1(t-t_k) dt_k \quad \mathbf{F 7}$$

$$F_{k+1} = \int_0^t f_k(t_k) F_1(t-t_k) dt_k \quad \text{para } k=1, 2, 3... \quad \mathbf{F 8}$$

Por lo tanto:

$$F_{k+1} = f_k * F_1 \quad \mathbf{F 9}$$

donde * denota la convolución de f_k y F_1 . Por propiedad de la convolución:

$$\Phi(F_{k+1}) = \Phi(f_k) \Phi(F_1) \quad \mathbf{F 10}$$

donde Φ es la transformada de Fourier directa. Además:

$$\Phi(f_k) = \Phi\left(\frac{dF_k}{dt}\right) = i\omega \Phi(F_k) \quad \mathbf{F 11}$$

Utilizando F 11 en F 10 se obtiene:

$$\Phi(f_{k+1}) = \Phi(f_k) \Phi(f_1) \quad \mathbf{F 12}$$

Por otro lado:

$$\Phi(f_2) = \Phi(f_1) \Phi(f_1) = (\Phi(f_1))^2 \quad \mathbf{F 13}$$

$$\Phi(f_3) = \Phi(f_2) \Phi(f_1) \quad \mathbf{F 14}$$

Reemplazando F 13 en F 14 se obtiene:

$$\Phi(f_3) = (\Phi(f_1))^3 \quad \mathbf{F 15}$$

Siguiendo con un procedimiento similar se llega a la siguiente expresión general:

$$\Phi(f_{k+1}) = (\Phi(f_1))^{k+1} \quad \mathbf{F 16}$$

Finalmente la expresión para calcular la función de densidad de la k-ésima falla queda en términos de la función de distribución del tiempo a la primera falla:

$$f_k = \Phi^{-1}\left((\Phi(f_1))^k\right) \quad \mathbf{F\ 17}$$

y F-1 denota la transformada de Fourier Inversa. Como verificación calcularemos la función de densidad de probabilidad para el tiempo de llegada del k-ésimo evento de un proceso de Poisson, en donde :

$$f_1 = \lambda \exp\{-\lambda t\} \quad \text{para } t > 0 \quad \mathbf{F\ 18}$$

De tablas obtenemos que:

$$\Phi(\exp\{-\lambda t\}, t > 0) = \frac{1}{\lambda + i\omega} \quad \mathbf{F\ 19}$$

$$\Phi\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{-\lambda t\}, t > 0\right) = \frac{1}{(\lambda + i\omega)^k} \quad \mathbf{F\ 20}$$

Aplicando F 17 se obtiene:

$$f_k = \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \exp\{-\lambda t\} \quad \mathbf{F\ 21}$$

que es la función de densidad de probabilidad de una variable con distribución gamma y que corresponde al tiempo de llegada del k-ésimo evento de un proceso de Poisson.

Apéndice G: PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE K FALLAS

La probabilidad de que ocurran k fallas en un intervalo $[0,t]$ es según F 3

$$P_k = F_k(t) - \int_0^t f_k(t_k) F_1(t-t_k) dt_k \quad \text{G 1}$$

Además por F 8:

$$F_{k+1}(t) = \int_0^t f_k(t_k) F_1(t-t_k) dt_k \quad \text{G 2}$$

Reemplazando G 2 en G 1 se obtiene:

$$P_k = F_k(t) - F_{k+1}(t) \quad \text{G 3}$$