UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
LINEALES Y SUS APLICACIONES

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A:

MARTÍN RICARDO CARBAJAL LÓPEZ

ASESOR: ING. DANIEL BUQUET SABAT

ENERO 2008

Mi agradecimiento:

A Dios por permitirme vivir.

A mis padres
Diego Carbajal Linares y Carmen López Sánchez
Por darme la vida, su apoyo, y ser guía y ejemplo
para llegar a ser alguien en la vida.

Al prof. Daniel Buquet Sabat y a la Profra. Luz María Lavín Alanís
con todo mi respeto y admiración por su apoyo incondicional.

A mis sobrinos por su solidaridad y apoyo.

A mi esposa y siempre amiga Conchita
Por motivarme y brindarme su ayuda,
compañía y amor cuando más lo necesito

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las leyes del universo están escritas en el lenguaje de las matemáticas. El álgebra es suficiente para resolver muchos problemas estáticos, sin embargo, los fenómenos naturales más interesantes implican cambios y se describen sólo por medio de ecuaciones que relacionan las cantidades que cambian. Puesto que la derivada de una función es la razón a la cual la función está cambiando con respecto a una variable que es independiente, es natural que las ecuaciones que incluyen derivadas, se usen con frecuencia para describir el universo que está cambiando constantemente.
Si una ecuación contiene derivadas ó diferenciales de una ó más variables dependientes con respecto a una ó más variables independientes se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas ramas de la física. Sin embargo es limitado pensar que las matemáticas se restringen únicamente a las aplicaciones físicas pues muchas de las leyes matemáticas también explican los fenómenos sociales ya que estos también sufren cambios con respecto al tiempo. Como es el caso del *crecimiento de la población, el interés que origina un capital, la depreciación de bienes, etc.* Esto se puede ver en la ecuación $\frac{dC}{dt} = kC$ que modela el interés continuo de un depósito inicial, donde C es la cantidad de dinero y k es la tasa de crecimiento debida al interés.

En muchas ocasiones se requiere de más de una ecuación diferencial para representar estos fenómenos matemáticamente, y a este conjunto de ecuaciones que contienen derivadas de diferentes funciones se les llama sistemas de ecuaciones diferenciales.

El objetivo del presente trabajo es:

Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, utilizando las herramientas matemáticas adquiridas durante la carrera, con la finalidad de aportar un panorama de la aplicación de estos, en diversos campos.

Capítulo 1. Proporcionar los elementos teóricos de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales necesarios para comprender los métodos de solución de los “sistemas de ecuaciones diferenciales lineales”.

Capítulo 2. Resolver los **“**sistemas de ecuaciones diferenciales lineales” a través de diversos métodos.

Capítulo 3. Aplicar los “sistemas de ecuaciones diferenciales lineales” a la solución de problemas reales.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DE ALGEBRA LINEAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Este capítulo tiene como propósito proporcionar los elementos teóricos y metodológicos de álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y transformadas de Laplace con la finalidad de tener elementos necesarios para la comprensión de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

1.1 MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

Comenzaremos por conceptos y operaciones de matrices.

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn números distribuidos en un orden de m renglones y n columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

El número a_{ij}, que aparece en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima de **A**, se conoce como la ij-ésima componente de **A**. Por conveniencia la matriz **A** se escribe a veces $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Comúnmente las matrices se denotan por letras mayúsculas.

Si **A** es una matriz de mxn con n=m se dice que **A** es una matriz cuadrada.
Una matriz de mxn con todas sus componentes iguales a cero es una matriz cero de mxn.
Se dice que una matriz de mxn tiene tamaño de mxn. Dos matrices $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ Son iguales si tienen el mismo tamaño y sus componentes correspondientes son iguales.

Los vectores pueden ser vistos como casos especiales de matrices. Así, por ejemplo, el vector renglón n-dimensional $(a_1, a_2, ..., a_n)$ es una matriz de 1xn, mientras que el vector columna n-dimencional $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de nx1.

Suma de matrices

Sean $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ dos matrices de mxn. La suma de **A** y **B** es la matriz **A**+**B** de mxn dada por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Esto es, **A**+**B** es la matriz de mxn obtenida al sumar los componentes correspondientes de **A** y **B**.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $\mathbf{A}=(a_{ij})$ es una matriz de mxn y si α es un escalar, entonces la matriz $\alpha\mathbf{A}$ de mxn esta dada por

$$\alpha\mathbf{A}=(\alpha a_{ij})=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}\text{...............................}(2)$$

En otras palabras, $\alpha\mathbf{A}=(\alpha a_{ij})$ es la matriz que se obtiene multiplicando por α cada componente de **A**.

Producto escalar de dos vectores

Sean $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ dos n-vectores. Entonces el producto escalar de **a** y **b,** representado por $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ esta dado por $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, los vectores deben tener el mismo número de componentes.
Frecuentemente se efectúa el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. Se tiene:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\text{......................}(3)$$

Producto de dos matrices

Sea $\mathbf{A}=(a_{ij})$ una matriz de mxn cuyo i-ésimo renglón denotamos por $a_{i\bullet}$. Sea $\mathbf{B}=(b_{ij})$ una matriz de nxp cuya j-ésima columna denotada por $b_{\bullet j}$. Entonces el producto de **A** y **B** es una matriz **C**$=(c_{ij})$ de mxp donde $c_{ij}=a_{i\bullet}\cdot b_{\bullet j}$.

Esto es el ij-ésimo elemento de **AB** es el producto escalar del i-ésimo renglón de $\mathbf{A}(a_{i\bullet})$ y la j-ésima columna de $\mathbf{B}(b_{\bullet j})$. Desarrollando se obtiene
$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.
Dos matrices pueden multiplicarse sólo si el número de columnas de la primera es igual al número de renglones de la segunda.

Determinantes

Para cada matriz cuadrada **A** existe un número llamado determinante de la matriz. El determinante de una matriz se denota por det **A** o $|\mathbf{A}|$

a) Si **A** es una matriz de 1x1 , entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}$
b) Si **A** es una matriz de 2x2, entonces:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{..............................(4)}$$

Menor: Sea **A** una matriz de nxn y sea $\mathbf{M}_{ij}$ la matriz de (n-1)x(n-1) que se obtiene de **A**, al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de **A**.

$\mathbf{M}_{ij}$ se denomina el ij-ésimo menor de **A**.

Ejemplo1: Obtener el menor del elemento del renglón 1, columna 3.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{M}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Cofactor: Sea una matriz de nxn el ij-esimo cofactor de **A**, denotado por $\mathbf{A}_{ij}$ es

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$$

$$\mathbf{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (1)(0-6) = -6$$

En general si **A** es una matriz de nxn entonces el det**A** se puede expresar en términos de n determinantes más pequeños de (n-1)x(n-1), como sigue:

Se toma cualquier renglón o columna de **A** . Suponga que se elige el i-ésimo renglón; sus elementos son $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$. Se multiplica cada a_{ij} por $(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$, donde $\mathbf{M}_{ij}$ es el menor de la matriz obtenida al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de **A**.

De la suma de $a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$ se obtiene det **A** es decir: $\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$.

Ejemplo 2: Obtener el determinante de la matriz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como se puede elegir cualquier renglón o columna, se hace menos trabajo si se usa una que tenga un cero. Si se selecciona el renglón 2

$$\det \mathbf{A} = a_{21}(-1)^{2+1}|\mathbf{M}_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|\mathbf{M}_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|\mathbf{M}_{23}|$$

$$\det \mathbf{A} = 1(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + -1(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(4-2) + 0 + 1(1-2) = -3$$

Propiedades de los determinantes

Suponga que **A** es una matriz de nxn , entonces:

1.- El intercambio de dos renglones o columnas de **A** cambia el signo de det**A.**
2.- Sumar un múltiplo de un renglón (columna) a otro renglón(columna) no cambia det**A.**
3.- Si A es triangular superior (todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero), entonces det**A** es el producto de los elementos en la diagonal.

Transpuesta de una matriz. Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz de mxn entonces la transpuesta de **A,** escrita $\mathbf{A}^t$, es una matriz de nxm obtenida intercambiando los renglones y columnas de **A.** Abreviadamente podemos escribir $\mathbf{A}^t = (a_{ji})$ en otras palabras ,

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Dicho simplemente, el *i*-ésimo renglón de **A** es la *i*-ésima columna de $\mathbf{A}^t$ y la *j*-ésima columna de **A** es el *j*-ésimo renglón de $\mathbf{A}^t$.

Matriz identidad. La matriz identidad **I** de nxn es la matriz de nxn en la que los componentes de la diagonal principal $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ son 1, y 0 todas las demás posiciones.

Matriz adjunta. Sea **A** una matriz de nxn y sea **B** la matriz de cofactores de **A**. Entonces la adjunta de **A** escrita como Adj **A**, es la transpuesta de la matriz **B** de nxn esto es:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad Adj\mathbf{A} = \mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad \ldots\ldots\ldots(6)$$

Teorema 1

$$(\mathbf{A})(Adj\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \det\mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det\mathbf{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det\mathbf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det\mathbf{A} & 0. & 0 \\ 0. & 0 & 0 & 0 & \det\mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \det\mathbf{A} \end{pmatrix}. = (\det \mathbf{A})\mathbf{I} \quad \blacksquare$$

Teorema 2

Sea **A** una matriz de nxn, entonces **A** es invertible si y solo si det $\mathbf{A} \neq 0$ ■

Esto se puede ver si consideramos lo siguiente

(**A**)(Adj **A**)=(det **A**)**I** entonces $\mathbf{I} = \dfrac{(\mathbf{A})(Adj\mathbf{A})}{\det\mathbf{A}}$

$(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$

$(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{(\mathbf{A})(Adj\mathbf{A})}{\det\mathbf{A}}$

$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{A}} Adj\mathbf{A}$

Funciones matriciales. Algunas veces será necesario considerar vectores o matrices cuyos elementos son funciones de una variable real t, escribimos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & . & . & . & a_{1n}(t) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1}(t) & . & . & . & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

respectivamente.

Se dice que la matriz **A**(t) es continua en $t = t_0$ sobre un intervalo $\alpha < t < \beta$ si cada elemento de **A** es una función continua en el punto dado o sobre un intervalo dado.

Derivada de una matriz de funciones. Se dice que **A**(t) es diferenciable si cada uno de sus elementos es diferenciable y su derivada $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ esta definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

esto es, cada elemento de $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ es la derivada del elemento correspondiente de **A**.■

Integral de una matriz de funciones. Esta definida como

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\right)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

esto es, cada elemento de $\int \mathbf{A}(t)dt$ es la integral del elemento correspondiente de **A**. ■

Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección describiremos un método para encontrar todas las soluciones (si existen) de un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas al hacer esto se vera que, como en el caso de 2x2, tales sistemas tienen una solución, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Antes de entrar al método se resolverán algunos ejemplos simples.

Ejemplo 3: Resolver el siguiente sistema $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$ $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$

Solución:

El método consiste en simplificar las ecuaciones de forma que las soluciones sean fácilmente identificadas.

Dividir la primera ecuación entre 2. Esto da como resultado:

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Multiplicar la primera ecuación por -4 y sumarla a la segunda ecuación

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$0x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -12$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Ahora multiplicar la primera ecuación por -3 y sumarla a la tercera ecuación

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$0x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -12$$
$$0x_1 - 5x_2 - 11x_3 = -23$$

Se divide la segunda ecuación entre -3

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 4$$
$$0x_1 - 5x_2 - 11x_3 = -23$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma con la primera; luego se multiplica la segunda ecuación por 5 y se suma a la tercera para obtener el sistema:

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= 1 \\
0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 4 \\
0x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

Se multiplica la tercera ecuación por -1

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= 1 \\
0x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 4 \\
0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Finalmente se suma la tercera ecuación a la primera y después se multiplica la tercera ecuación por -2 y se le suma a la segunda ecuación para obtener el sistema

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 4 \\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= -2 \\
0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Siendo esta la solución del sistema (4,-2,3).

Este método se conoce como el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Ejemplo 4: Resolver el sistema anterior utilizando matrices

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

Solución:

Esto puede expresarse como $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$

Se seguirán los mismos pasos y se presentaran las matrices de cada paso.
Cada ecuación esta representada por cada renglón.

Dividir la primera ecuación (renglón 1)entre 2. Esto da como resultado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Multiplicar el renglón uno por -4 y sumarle el renglón dos, después multiplicar el renglón uno por -3 y sumarle el renglón tres para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Dividiendo el renglón dos entre -3. Se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Se multiplica el renglón dos por -2 y se suma con el renglón uno; luego se multiplica el renglón dos por 5 y se suma al renglón 3 para obtener el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Si se multiplica el renglón tres por -1 se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Finalmente se suma el renglón tres al renglón uno y después se multiplica el renglón dos por -2 y se le suma al segundo renglón para llegar al sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Siendo la solución $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$

Ejemplo 5: Encontrar las soluciones del siguiente sistema $$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 3 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 1x_1 + 5x_2 - 1x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Solución:

Usaremos su forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones con renglones se llega a las siguientes matrices

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

El último renglón representa la ecuación $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, lo que es imposible ya que $0 \neq 5$. Por lo tanto el sistema no tiene solución.

Ejemplo 6: Encontrar las soluciones del siguiente sistema

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 1$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

Solución:

Rescribiéndola en su forma de matriz aumentada y haciendo operaciones con renglones de tiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema correspondiente a la última matriz es

$$x_1 + x_2 + x_4 = 2$$
$$x_3 + 2x_4 = 1$$

entonces

$$x_1 = 2 - x_2 - x_4$$
$$x_3 = 1 - 2x_4$$

La solución del sistema en forma de vector es: $(2 - x_2 - x_4, x_2, 1 - 2x_4, x_4)$

Si se le dan valores a x_2 y a x_4 se obtiene la solución del sistema, y como pueden tomar cualquier valor, el sistema tiene infinidad de soluciones, por lo cual es un sistema consistente e indeterminado.

Independencia lineal

Un conjunto de n vectores $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$, todos del mismo tamaño, son linealmente independientes si

$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n = 0$ para $c_1, c_2,...,c_n$ constantes , implica que la única solución es $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

La expresión $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$ es una combinación lineal . Intuitivamente un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos se puede escribir como una combinación lineal de los otros. Si un conjunto de vectores no es linealmente independiente, se llama linealmente dependiente.

Dos vectores son linealmente independientes si ninguno de los dos es un múltiplo del otro. Tres vectores son linealmente independientes si no están en el mismo plano.

Ejemplo7: Determinar si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución:

Esto es equivalente a preguntar si la única solución de

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

La ecuación antes mencionada equivale a

$c_1 + c_2 + 5c_3 = 0$

$c_1 + 2c_3 = 0$

$c_2 + 3c_3 = 0$

Si se aplica la eliminación gausiana , se llega a la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así, se puede tomar c_3 como arbitrario y $c_1 = -2c_3$, $c_2 = -3c_3$. En particular, c_3 no necesita ser cero, de manera que los vectores no son linealmente independientes.

Para verificar si n vectores de nx1(o 1xn) son linealmente independientes, se construye una matriz **A** con los vectores ya sea como renglones o como columnas. Los vectores son linealmente independientes si y sólo si det $\mathbf{A} \neq 0$.

1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Muchos problemas importantes y significativos en Ingeniería, Ciencias Físicas y Ciencias Sociales, cuando son formulados en términos matemáticos, requieren de la determinación de una función que satisfaga a una ecuación que contiene derivadas de la función desconocida. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales.

Se dice que una función f cualquiera definida en algún intervalo I , es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

Iniciaremos con un ejemplo para después formalizar el método de solución

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (y > 0)$,

multiplicamos ambos miembros por el factor $\frac{1}{y}$ para obtener

$\frac{1}{y} \bullet \frac{dy}{dx} = 2x$; esto es equivalente a: $D_x(\ln y) = D_x(x^2)$ y lo podemos expresar como: $d(\ln y) = d(x^2)$ ya que cada miembro es reconocible como diferencial, todo lo que resta es integrar $\ln y = x^2 + c$. Por esta razón la función $\mu(y) = \frac{1}{y}$ se denomina factor integrante para la ecuación original. Un factor integrante para una ecuación diferencial es una función $\mu(x, y)$ tal que la multiplicación de cada miembro de la ecuación diferencial por $\mu(x, y)$ produce una ecuación en la que cada miembro se reconoce como una derivada.

Ahora se proporcionará un método general.

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad ....(10)$$

donde $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ y $a_i(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I.

Cuando n=1 la ecuación es de primer orden, y la expresamos como

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$, dividiendo la ecuación entre $a_1(x)$ llegamos a:

$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ y si $\frac{a_0(x)}{a_1(x)} = p(x)$ y $\frac{g(x)}{a_1(x)} = f(x)$ se tiene la ecuación

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$ que igualado a cero resulta:

$dy + [p(x)y - f(x)]dx = 0$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante μ (x) para que la ecuación sea exacta.
$\mu(x)dy + \mu(x)[p(x)y - f(x)]dx = 0$

Si la ecuación es exacta se cumple
$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[p(x)y - f(x)]$

$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)$ entonces resolviendo por variables separables $\int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx$

obtenemos $\ln \mu = \int p(x)dx$ llegando al factor integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Sustituyendo el factor integrante en $\mu(x)dy + \mu(x)[p(x)y - f(x)]dx = 0$ se obtiene:

$e^{\int p(x)dx}dy + e^{\int p(x)dx}[p(x)y - f(x)]dx = 0$ que es igual a:

$e^{\int p(x)dx}dy + ye^{\int p(x)dx}p(x)dx = e^{\int p(x)dx}f(x)dx$.

Se observa que $d\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = e^{\int p(x)dx}f(x)dx$

Integrando ambos miembros $ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx}f(x)dx + c$

Despejando 'y ' llegamos a la fórmula $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}f(x)dx + c\right]$

que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$.

1.2.1 Teoría preliminar de ecuaciones lineales de orden superior

A una ecuación diferencial de orden n de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

se le llama homogénea si g(x)=0, mientras que si g(x) es diferente de cero se la llama ecuación no homogénea.

Teorema 3

Sean $y_1, y_2,...y_n$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en el intervalo I. Entonces la combinación lineal $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$,
en donde los c_i, i=1,2,3…n son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo. ■

Teorema 4

Sean $y_1, y_2,...y_n$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea en un intervalo. Entonces el conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y sólo si $W(y_{1,}y_2,...,y_n)\neq 0$ para toda x del intervalo. Siendo W el wronskiano definido como el determinante:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y^k{}_1 & y^k{}_2 & \cdots & y^k{}_n \end{vmatrix}\neq 0$$

para que la matriz sea cuadrada $k=n-1$. ■

Un conjunto de n soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial homogénea se llama conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

Teorema 5

Sea y_p una solución dada de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n en un intervalo I y sean $y_1, y_2,...y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, entonces para cualquier solución "y" en el intervalo I es posible encontrar $c_1, c_2,...c_n$ de modo que $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n+y_p$ es la solución general de la ecuación no homogénea cuando las constantes c_i no se determinan ■

A la solución de la ecuación homogénea se le llama solución complementaria y a la solución de la ecuación no homogénea se le llama solución particular .

Por la tanto la solución general de una ecuación esta formada por la solución complementaria más la solución particular.

Obtención de una segunda solución a partir de una solución conocida.

Supóngase la ecuación diferencial lineal de segundo grado
$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$
dividiendo entre $a_2(x)$ se puede transformar la ecuación en $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
donde P(x) y Q(x) son continuas en algún intervalo I .

Supóngase además que y_1 es una solución conocida de la ecuación anterior y que es diferente de cero ; es posible encontrar otra solución si introducimos una nueva variable $u = u(x)$ de modo que $y = uy_1$.

Derivando

$$y' = y_1u' + uy_1'$$
$$y'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

sustituyendo y' y y'' en la ecuación $y'' + Py' + Qy = 0$ se obtiene
$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + Py_1u' + Puy_1' + Quy_1 = 0$$
$$u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$$

como y_1 es solución, $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$, se reduce a $y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$

utilizando el cambio de variable $w = u'$ se obtiene $y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0$
multiplicando por $\dfrac{1}{y_1w}$ se obtiene $\dfrac{dw}{w} + 2\dfrac{y_1'}{y_1}dx + Pdx = 0$

$\dfrac{dw}{w} + 2\dfrac{y_1'}{y_1}dx = -Pdx$ integrando ambos miembros de la ecuación

$\ln w + 2\ln y_1 = \int -Pdx$ utilizando las propiedades de los logaritmos se tiene

$$\ln wy_1{}^2 = \int -Pdx + c$$

$wy_1{}^2 = e^{\int -Pdx} * e^c$ si $e^c = c_1$ obtenemos $w = \dfrac{c_1e^{-\int Pdx}}{y_1{}^2}$

$u' = \dfrac{c_1e^{-\int Pdx}}{y_1{}^2}$ entonces $u = \int \dfrac{c_1e^{-\int Pdx}}{y_1{}^2}dx$

$$\frac{y}{y_1} = c_1 \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^{\,2}} dx + c_2$$

$$y = c_1 y_1 \int \frac{e^{\int Pdx}}{y_1^{\,2}} dx + c_2 y_1$$ si $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ entonces $y = y_1 \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^{\,2}} dx$

1.2.2 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes.

Sea la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\frac{dy}{y} = -adx$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int adx$$

$$\ln y = -ax + c$$
$$y = e^{-ax+c}$$

$$y = e^{-ax} \cdot e^{c} \qquad \text{si } c_1 = e^{c}$$

$$y = c_1 e^{-ax}$$

Se observa que la solución es una función exponencial.

Sea la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$

se ensaya una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$, entonces $\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$

Sustituyendo en la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ se obtiene
$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$ factorizando $e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$ y como $e^{\lambda x} > 0$ para $\forall$ x reducimos para obtener la ecuación de segundo grado: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Esta última ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, se consideran tres casos, según la ecuación auxiliar tenga raíces reales distintas, raíces reales iguales o raíces complejas conjugadas.

Caso I λ_1 y λ_2 reales y distintas

$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$

entonces la solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ es

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Caso II λ_1 y λ_2 reales e iguales es decir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Una de las soluciones de la ecuación diferencial será $y_1 = e^{\lambda_1 x}$.

Se obtiene la segunda solución con la fórmula $y = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^{\,2}}$ con $P = \frac{b}{a} = -2\lambda_1$

Sustituyendo se obtiene $y_2 = e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{e^{2\lambda_1 x}}$.De la ecuación de 2° grado $\lambda = -\frac{b}{2a}$

para que $\lambda_1 = \lambda_2$. Entonces $y_2 = e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{2\lambda_1 x}}{e^{2\lambda_1 x}} dx = x e^{\lambda_1 x}$.

Por lo tanto la solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ es $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$

Caso III λ_1 y λ_2 son complejas

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ con $\alpha = -\frac{b}{2a}$ y $\beta = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$

Es importante recordar lo siguiente:

Serie de Maclaurin

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)t^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n(0)t^n}{n!} + \ldots$$

$$sent = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$$

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \ldots$$

agrupando se llega a

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ...\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...\right)$$

$$e^{it} = \cos t + isent \text{ ....(11)}$$

considerando este resultado

$$y = c_1' e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2' e^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1' e^{\beta ix} + c_2' e^{-\beta ix})$$

y se puede escribir como

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1'(\cos\beta x + isen\beta x) + c_2'(\cos(-\beta x) + isen(-\beta x))\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1'(\cos\beta x + isen\beta x) + c_2'(\cos\beta x - isen\beta x)\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1' + c_2')\cos\beta x + (c_1' i - c_2' i)sen\beta x\right]$$

si $c_1 = c_1' + c_2'$ y $c_2 = c_1' i - c_2' i$

Entonces la solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta x + c_2 sen\beta x\right] \text{ ....(12)}$$

Estas soluciones se pueden extender a una ecuación diferencial de orden n para los casos I y II, y de grado 2n para el caso III

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Caso I. Si todas las raíces son distintas

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$$

Caso II. Si todas las raíces son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} + c_3 x^2 e^{\lambda x} + ... + c_n x^{n-1} e^{\lambda x}$$

Caso III. Si las raíces son complejas $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \quad \lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i \qquad \lambda_n = \alpha_n + \beta_n i$

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[c_1 \cos\beta_1 x + c_2 sen\beta_1 x\right] + e^{\alpha_2 x}\left[c_3 \cos\beta_2 x + c_4 sen\beta_2 x\right] + ... + e^{\alpha_n x}\left[c_{2n-1}\cos\beta_n x + c_{2n} sen\beta_n x\right]$$

si la raíz es compleja y repetida entonces

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[c_1 \cos\beta_1 x + c_2 sen\beta_1 x\right] + xe^{\alpha_2 x}\left[c_3 \cos\beta_2 x + c_4 sen\beta_2 x\right] + ... + x^{n-1}e^{\alpha_n x}\left[c_{2n-1}\cos\beta_n x + c_{2n} sen\beta_n x\right]$$

1.2.3 Método de coeficientes indeterminados

Considérese $D^n y = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ entonces

$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$ se puede expresar como

$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + ... + a_2 D^2 y + a_1 Dy + a_0 y = g(x)$ factorizando se obtiene

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = g(x)$$

A la expresión $a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$ se le llama operador diferencial y es un polinomio de grado n y por lo tanto puede ser factorizado.
Entonces para resolver

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = g(x)$$

-Primero se resuelve la ecuación homogénea asociada encontrándose y_c.
-Se multiplica la ecuación por un factor diferencial f(D)de modo que g(x)f(D)=0 a este operador diferencial se le llama anulador

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right)(anulador) = g(x)(anulador)$$

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right)(anulador) = 0$$

Se resuelve esta ecuación homogénea separando la solución complementaria; el resto de la solución es la forma de la solución particular, la cual se sustituye en la ecuación inicial y se encuentran las constantes.

f(x)	Anulador
x^{k-1}	D^k
e^{ax}	$D-a$
$x^{k-1}e^{ax}$	$(D-a)^k$
cosbx ó senbx	$(D+b^2)$
$x^{k-1}\cos bx$ ó $x^{k-1}senbx$	$(D+b^2)^k$
$e^{ax}\cos bx$ ó $e^{ax}senbx$	$D^2-2aD+(a^2+b^2)$
$x^{k-1}e^{ax}\cos bx$ ó $x^{k-1}e^{ax}senbx$	$\left[D^2-2aD+(a^2+b^2)\right]^k$

Ejemplo 8: Resolver la ecuación

$$y''-2y'+5y=e^x senx$$

Solución:
Primero se resuelve la ecuación homogénea asociada

$\left(D^2-2D+5\right)y=0$

$\left(D^2-2D+5\right)=0$ aplicando la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado

$$D=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(5)}}{(2)(1)}$$

$D=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$ reduciendo $D=1\pm 2i$

$y_c=e^x(c_1\cos 2x+c_2 sen2x)$

Se encuentra la solución particular multiplicando ambos miembros por el anulador

$\left(D^2-2D+5\right)(D^2-2D+2)=(e^x senx)(D^2-2D+2)$

$\left(D^2-2D+5\right)(D^2-2D+2)=0$

Sacando D del segundo factor con la fórmula de la ecuación de segundo grado

$D=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}$ llegando a $D=1\pm i$

Así la solución general quedaría

$y=e^x(c_1\cos 2x+c_2 sen2x)+e^x(A\cos x+Bsenx)$ siendo

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x senx$$

$$y_p{}' = Ae^x \cos x - Ae^x senx + Be^x senx + Be^x \cos x$$

$$y_p{}'' = -2Ae^x senx + 2Be^x \cos x$$

sustituyendo en la ecuación inicial $y'' - 2y' + 5y = e^x senx$ se tiene:

$$-2Ae^x senx + 2Be^x \cos x - 2(Ae^x \cos x - Ae^x senx + Be^x senx + Be^x \cos x) + 5(Ae^x \cos x + Be^x senx) = e^x senx$$

reduciendo términos llegamos a: $3Be^x senx + 3Ae^x \cos x = e^x senx$

por lo tanto:

$$B = \frac{1}{3}$$

$$A = 0$$

Entonces la solución general es $y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 sen2x) + e^x (A \cos x + Bsenx)$

$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 sen2x) + \frac{1}{3} e^x senx$$

1.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición : sea y(t) una función definida para $t \geq 0$ entonces la integral

$$\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)dt = \lim_{b\to\alpha} \int_0^b e^{-st}\, y(t)dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

se llama transformada de Laplace de "y" siempre que el limite exista.
La transformada de Laplace de "y" se denota por $\ell\{y(t)\}$

Ejemplos:

y(t)=1 $\quad \ell\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \frac{1}{s}$

y(t)=t $\quad \ell\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)dt = \frac{1}{s^2}$

y(t)= t^n $\quad \ell\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}(t^n)dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$

y(t)= e^{at} $\quad \ell\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt = \frac{1}{s-a}$

Transformadas de Laplace de funciones derivadas

$$\ell\{y'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, y'(t)dt = e^{-st}\, y(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)dt = -y(0) + s\ell\{y(t)\}.$$

Para simplificar el resultado escribimos $\ell\{y(t)\} = Y(s)$

$$\ell\{y'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, y'(t)dt = e^{-st}\, y(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)dt = -y(0) + s\ell\{y(t)\} = -y(0) + sY(s) = sY(s) - y(0)$$

$$\ell\{y''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, y''(t)dt = e^{-st}\, y'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y'(t)dt = -y'(0) + s\ell\{y'(t)\}$$

$$= -y'(0) + s[sY(s) - y(0)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

en conclusión:

$\ell\{y\} = Y(s)$

$\ell\{y'\} = sY(s) - y(0)$

$\ell\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$\ell\{y'''\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

$\ell\{y^{IV}\} = s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$

$\ell\{y^{V}\} = s^5Y(s) - s^4y(0) - s^3y'(0) - s^2y''(0) - sy'''(0) - y^{IV}(0)$

en general

$$\ell\{y^n\} = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - y^{n-1}(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(14)$$

1.3.1 Transformadas de Laplace y transformadas inversas

Como ya vimos anotamos $\ell\{y(t)\} = Y(s)$
Si ahora se tiene Y(s) y se quiere encontrar la función y(t) que corresponde a esta transformada decimos que y(t) es la trasformada inversa de Laplace de Y(s) y lo representamos como $y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\}$

Ejemplos:

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \qquad \ell^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\} = senkt$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \qquad \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\} = \cos kt$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n \qquad \ell^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\} = senhkt$$

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \qquad \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\} = \cosh kt$$

ℓ^{-1} también es una operación lineal esto es, para las constantes a y b cualesquiera, se tiene
$\ell^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\ell^{-1}\{F(s)\} + b\ell^{-1}\{G(s)\}$, donde F y G son las transformadas de ciertas funciones f y g .

1.3.2 Método para resolver ecuaciones diferenciales lineales con transformadas de Laplace

La transformada de Laplace es especialmente adecuada para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Esta clase de ecuación diferencial puede ser reducida a una ecuación algebraica en la función transformada Y(s). Para ver esto considérese el problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0', \ldots, y^{n-1}(0) = y_0^{\,n-1}$$

donde $a_i,\ i = 0,1,\ldots n$ y $y_0, y_0', \ldots y_0^{(n-1)}$ son constantes. Por la linealidad de la transformada de Laplace podemos escribir.

$$a_n \ell\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} \ell\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0 \ell\{y\} = \ell\{g(t)\}$$

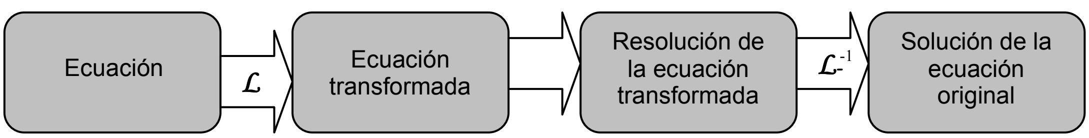
$$a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{n-1}(0)\right] + a_{n-1}\left[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \cdots - y^{(n-2)}\right] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s)$$

ó bien $\left[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right] Y(s) = a_n\left[s^{n-1} y_0 + \ldots + y_0^{(n-1)}\right] + a_{n-1}\left[s^{n-2} y_0 + \ldots + y_0^{(n-2)}\right] + \ldots + G(s)$

En donde $Y(s) = \ell\{y(t)\}$ y $G(s) = \ell\{g(t)\}$. Despejando Y(s) encontramos y(t) calculando la transformada inversa

$y(t) = \ell^{-1}\{Y(s)\}$.

El procedimiento se resume con el siguiente diagrama



Ejemplo 9: Resolver la siguiente ecuación con transformadas de Laplace. $\frac{dy}{dx} - y = 1$ con las condiciones iniciales y(0)=0

Solución:

$\ell\{y' - y\} = \ell\{1\}$

$\ell\{y'\} - \ell\{y\} = \ell\{1\}$

$$\mathrm{sY(s) - y(0) - Y(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{Y(s)(s-1)} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$\ell^{-1}\{Y(s)\} = \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}$$ Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$y(t) = \ell^{-1}\left\{\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t) = -\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$y(t) = -1 + e^{t}$$

Ejemplo 10: Resolver la siguiente ecuación:
$2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 1$

Solución:

Aplicando transformada a cada miembro de la ecuación

$$\ell\{2y'''\} + \ell\{3y''\} - \ell\{3y'\} - \ell\{2y\} = \ell\{e^{-t}\}$$

$$2\ell\{y'''\} + 3\ell\{y''\} - 3\ell\{y'\} - 2\ell\{y\} = \ell\{e^{-t}\}$$

$$2\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\right] + 3\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 3\left[sY(s) - y(0)\right] - 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y reduciendo términos obtenemos

$$2s^3Y(s) - 2 + 3s^2Y(s) - 3sY(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)\left[2s^3 + 3s^2 - 3s - 2\right] = \frac{1}{s+1} + 2$$

$$Y(s)\left[(2s+1)(s+2)(s-1)\right] = \frac{2s+3}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{2s+3}{(2s+1)(s+2)(s-1)(s+1)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales $Y(s) = \frac{A}{2s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1}$

Resolviendo obtenemos $A = \frac{-16}{9} \qquad B = \frac{1}{9} \qquad C = \frac{5}{18} \qquad D = \frac{1}{2}$

$$Y(s) = \frac{-16}{9(2s+1)} + \frac{1}{9(s+2)} + \frac{5}{18(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

$$\ell^{-1}\{Y(s)\} = \frac{-16}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{2s+1}\right\} + \frac{1}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{18}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\ell^{-1}\{Y(s)\} = \frac{-16}{18}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{9}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{18}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Por lo que la solución general es $y(t) = \frac{-8}{9}e^{\frac{-1}{2}t} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

CAPÍTULO II

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

El objetivo de este capitulo es desarrollar el tema de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con los conceptos fundamentales y métodos de solución.

2.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

2.2 Método de los operadores

2.3 Solución por transformadas de Laplace

2.4 Métodos matriciales para resolver sistemas homogéneos

- 2.4.1 Valores propios reales y distintos
- 2.4.2 Valores propios complejos
- 2.4.3 Valores propios repetidos
- 2.4.4 Retratos de fase

2.5 Sistemas no homogéneos

- 2.5.1 Método de coeficientes indeterminados
- 2.5.2 Método de variación de parámetros

2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

En ecuaciones diferenciales se estudio que se pueden resolver problemas de la física como enfriamiento, circuitos eléctricos etc. Así como problemas de las ciencias sociales como el crecimiento de la población, sin embargo los problemas físicos y sociales más complejos precisan en general, más de una ecuación diferencial para ser descritos matemáticamente.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas, comprenden dos o más ecuaciones que contienen las derivadas de dos o más funciones incógnitas de una sola variable independiente.

Si "x", "y", y "z" son las funciones de la variable t, entonces

$$\begin{cases} x' - 3x + y' + z' = 5 \\ x' - y' + 2z' = t^2 \\ x + y' - 6z' = t - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x'' + 3x' + y'' = t \\ x' + 3x + y'' + y' = e^{2t} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 6x + 5y \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x' = x + 3y - 2t^2 \\ y' = 3x + y + t + 5 \end{cases} \qquad (4)$$

Son ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas.

Un sistema es de primer orden si incluye sólo primeras derivadas.
Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es explícito si es de la forma

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

Los sistemas 3 y 4 están en forma explícita, donde los coeficientes a_{ij} y las f_i son funciones continuas en un intervalo común I.

Cuando las funciones $a_{ij}(t)$, *i,j*=1,2,…,n son constantes el sistema recibe el nombre de sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes.

Los sistemas 1,3 y 4 antes mencionados son de este tipo.

Un sistema es homogéneo cuando $f_i(t) = 0$ siendo i=1,2,3,…,n .

El sistema 3 es homogéneo.

Clasifiquemos los siguientes sistemas

a) $$\begin{aligned} x' &= t^2 x + 3y + t \\ y' &= (sent)x + \sqrt{t}y \end{aligned}$$
Es un sistema lineal de primer orden con coeficientes variables

b) $$\begin{aligned} x'' &= 5x + 3y + sent \\ y'' &= x - 7y \end{aligned}$$
Es un sistema lineal de segundo orden con coeficientes constantes

c) $$\begin{aligned} 2x' + 3y' - 2x + y &= t^2 \\ x' - 2y' + 3x + 4y &= e^t \end{aligned}$$
Es un sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes que no está en su forma explícita pero en su mayoría este tipo de sistemas se puede transformar en ella.

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones diferenciables:

x=f(t) y=g(t) z=h(t) etc., que satisfacen cada ecuación del sistema en algún intervalo I.

2.2 MÉTODO DE LOS OPERADORES

Sean los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x' - 3x + y' + z' = 5 \\ x' - y' + 2z' = t^2 \\ x + y' - 6z' = t - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' + 3x' + y'' = t \\ x' + 3x + y'' + y' = e^{2t} \end{cases}$$

se pueden representar en forma de operadores donde D representa la derivada. Así los sistemas anteriores en notación de operadores quedarían representados de la siguiente forma:

$$\begin{cases} (D-3)x + Dy + Dz = 5 \\ Dx - Dy + 2Dz = t^2 \\ x + Dy - 6Dz = t - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (D^2 + 3D)x + D^2 y = t \\ (D+3)x + (D^2 + D)y = e^{2t} \end{cases}$$

Método de eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales.

1.- Se escribe el sistema con operadores en la forma $\begin{matrix} L_1 x + L_2 y = f_1 \\ L_3 x + L_4 y = f_2 \end{matrix}$

siendo L_i los coeficientes de las funciones “x” y “y” ($L_i = L_i$ (D)).

2.- Se multiplica la primera y/o la segunda ecuación por los operadores diferenciales de coeficientes constantes de manera que ambas ecuaciones tengan el mismo coeficiente de “x” o “y” con signo contrario.

3.- Se suman las dos ecuaciones para llegar a una ecuación diferencial con una sola variable dependiente y se resuelve la ecuación diferencial

4.- Se repiten los pasos 2 y 3 para la otra variable.

5.- Se sustituyen las soluciones en una de las ecuaciones originales y se deducen los valores de las constantes.

La forma más elemental de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es el proceso directo de eliminación.

Esto es, las variables dependientes se eliminan sucesivamente con el objeto de obtener de ser posible una sola ecuación de orden superior que sólo contenga una variable dependiente.

Ejemplo 1: Para ilustrar el método de eliminación resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \end{cases}$$

Solución:

En forma de operadores

$$\begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -x + Dy = 0 \end{cases} \quad \text{de modo que} \quad L_1 = D-2 \quad L_2 = 1 \quad L_3 = -1 \quad L_4 = D$$

Al igual que en los sistemas algebraicos específicamente en el método de reducción; el sistema se multiplica por factores que eliminen una de la variables.

$$\begin{matrix} D \\ -1 \end{matrix} \begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -x + Dy = 0 \end{cases} \quad \text{Multiplicando} \quad \begin{cases} D(D-2)x + Dy = 0 \\ +x - Dy = 0 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones del sistema resulta $D(D-2)x + x = 0$ la cual se reduce a $(D^2 - 2D + 1)x = 0$

Siendo este último resultado una ecuación diferencial homogénea de segundo grado.

$(D-1)^2 = 0$

$D = 1$ raíz doble y, en consecuencia, la solución de esta ecuación es $x = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Para encontrar la solución "y" se sigue el mismo procedimiento.

Se multiplican ambas ecuaciones por factores de modo que al sumar las dos ecuaciones se elimine la función "x"

$$\begin{matrix} 1 \\ (D-2) \end{matrix} \begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -x + Dy = 0 \end{cases} \quad \text{Multiplicando} \quad \begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -(D-2)x + (D-2)Dy = 0 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones resulta

$(D-2)Dy + y = 0$

$(D^2 - 2D + 1)y = 0$

$(D-1)^2 = 0$

$D = 1$

por lo tanto $y = c_3 e^t + c_4 t e^t$.

Ahora se sustituyen las dos soluciones en una de las ecuaciones del sistema original. Sustituyendo en la ecuación $(D-2)x+y=0$

$$D(c_1e^t+c_2te^t)-2(c_1e^t+c_2te^t)+(c_3e^t+c_4te^t)=0$$

$$c_1e^t+c_2e^t+c_2te^t-2c_1e^t-2c_2te^t+c_3e^t+c_4te^t=0$$

$$te^t(c_2-2c_2+c_4)+e^t(c_1+c_2-2c_1+c_3)=0$$

$$te^t(-c_2+c_4)+e^t(-c_1+c_2+c_3)=0$$

$$-c_2+c_4=0$$

$$-c_1+c_2+c_3=0$$

Entonces: $c_4=c_2$ y $c_3=c_1-c_2$ sustituyendo en “y”

La solución del sistema es: $x=c_1e^t+c_2te^t$ $\qquad y=(c_1-c_2)e^t+c_2te^t$.

Ejemplo 2: Ahora se resolverá el siguiente sistema de segundo orden por el método de operadores

$$\begin{cases} x' + y'' = e^{3t} \\ x' + x + y' - y = 4e^{3t} \end{cases}$$

Solución:

En forma de operadores

$$\begin{cases} Dx + D^2 y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{cases}$$

Multiplicando por factores que eliminen a "y"

$$\begin{array}{l} D-1 \\ -D^2 \end{array} \begin{cases} Dx + D^2 y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(D-1)x + D^2(D-1)y = (D-1)e^{3t} \\ -D^2(D+1)x - D^2(D-1)y = (-D^2)4e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(D-1)x + D^2(D-1)y = 3e^{3t} - e^{3t} \\ -D^2(D+1)x - D^2(D-1)y = -36e^{3t} \end{cases}$$

Sumando los sistemas se tiene:

$D(D-1)x - D^2(D+1)x = -34e^{3t}$ factorizando

$\left[D(D-1) - D^2(D+1)\right]x = -34e^{3t}$ multiplicando se obtiene:

$\left[D^2 - D - D^3 - D^2\right]x = -34e^{3t}$

Reduciendo y multiplicando por -1 ambos miembros

$(D^3 + D)x = 34e^{3t}$ ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes

$D(D^2+1)x = 34e^{3t}$ resolvemos la ecuación homogénea

$D(D^2+1)x = 0$

$D = 0$

$D = 0 \pm i$

$x_c = c_1 + c_2 \cos t + c_3 sent$ solución general de la ecuación homogénea

Ahora encontraremos las soluciones particulares. Para ello buscamos un operador que anule a $34e^{3t}$ el cual es (D-3) y multiplicamos ambos miembros por este operador.

$D(D^2+1)(D-3)x = (D-3)34e^{3t}$, como $(D-3)34e^{3t} = 34e^{3t}(3) - 3(34e^{3t}) = 0$, entonces

$D(D^2+1)(D-3)x = 0$ resolviendo se obtiene

$x = c_1 + c_2 \cos t + c_3 sent + Ae^{3t}$

$x_p = Ae^{3t}$ Sustituyendo este resultado en $D(D^2+1)x = 34e^{3t}$ resulta

$27Ae^{3t} + 3Ae^{3t} = 34e^{3t}$

$30A = 34$ Por lo tanto $A = \frac{17}{15}$, entonces $x = c_1 + c_2\cos t + c_3 sent + \frac{17}{15}e^{3t}$

Ahora se hace el mismo procedimiento para obtener la "y"

$$\begin{matrix} (D+1) \\ -D \end{matrix} \begin{cases} Dx + D^2 y = e^{3t} \\ (D+1)x + (D-1)y = 4e^{3t} \end{cases} \quad \text{Multiplicando} \begin{cases} D(D+1)x + D^2(D+1)y = (D+1)e^{3t} \\ -D(D+1)x - D(D-1)y = (-D)4e^{3t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(D+1)x + D^2(D+1)y = 3e^{3t} + e^{3t} \\ -D(D+1)x - D(D-1)y = -12e^{3t} \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones y reduciendo se obtiene la ecuación

$D(D^2+1)y = -8e^{3t}$

$D(D^2+1) = 0$

$D = 0$

$D = 0 \pm i$

$y_c = c_4 + c_5\cos t + c_6 sent$

Ahora encontraremos las soluciones particulares

$D(D^2+1)(D-3) = (D-3)(-8e^{3t})$

$D(D^2+1)(D-3) = 0$

$y = c_4 + c_5\cos t + c_6 sent + Be^{3t}$

$y_p = Be^{3t}$ Sustituyendo este resultado en $D(D^2+1)y = -8e^{3t}$ resulta

$27Be^{3t} + 3Be^{3t} = -8e^{3t}$

$30B = -8$

$B = \frac{-4}{15}$

Por lo tanto: $y = c_4 + c_5\cos t + c_6 sent - \frac{4}{15}e^{3t}$

Se sustituyen las soluciones:

$x = c_1 + c_2\cos t + c_3 sent + \frac{17}{15}e^{3t}$ y $y = c_4 + c_5\cos t + c_6 sent - \frac{4}{15}e^{3t}$ en una de las ecuaciones del sistema original.

Sustituyendo en $Dx + D^2 y = e^{3t}$

$$D(c_1 + c_2 \cos t + c_3 sent + \frac{17}{15} e^{3t}) + D^2 (c_4 + c_5 \cos t + c_6 sent - \frac{4}{15} e^{3t}) = e^{3t}$$

Derivando

$$-c_2 sent + c_3 \cos t + \frac{17}{5} e^{3t} - c_5 \cos t - c_6 sent - \frac{12}{5} e^{3t} = e^{3t}$$

$$sent(-c_2 - c_6) + \cos t(c_3 - c_5) = 0$$

$$\begin{aligned} -c_2 - c_6 &= 0 \\ c_3 - c_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{Despejando} \qquad \begin{aligned} c_6 &= -c_2 \\ c_5 &= c_3 \end{aligned}$$

Se observa que c_1 y c_4 siempre serán eliminadas al ser derivadas por lo tanto no se presenta ningún problema al considerar que $c_1 = c_4$

En conclusión la solución del sistema será:

$$x = c_1 + c_2 \cos t + c_3 sent + \frac{17}{15} e^{3t}$$

$$y = c_1 + c_3 \cos t - c_2 sent - \frac{4}{15} e^{3t}$$

Ejemplo 3: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y - sen2t \\ y' = x - 2y + t \end{cases} \quad \text{Con valores iniciales} \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{matrix}$$

Solución

En forma de operadores y reordenado el sistema queda de la siguiente forma

$$\begin{cases} (D-2)x + 5y = -sen2t \\ -x + (D+2)y = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} (D+2) \\ -5 \end{matrix} \begin{cases} (D-2)x + 5y = -sen2t \\ -x + (D+2)y = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D-2)(D+2)x + 5(D+2)y = (D+2)(-sen2t) \\ 5x - 5(D+2)y = -5t \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones resulta

$$(D^2 - 4 + 5)x = -2\cos 2t - 2sen2t - 5t$$
$$(D^2 + 1)x = -2\cos 2t - 2sen2t - 5t$$

Resolviendo primero la ecuación homogénea

$$(D^2 + 1)x = 0$$
$$D = 0 \pm i$$
$$x_c = c_1 \cos t + c_2 sent$$

Ahora resolvemos la ecuación no homogénea, multiplicando la ecuación por operadores que eliminen el miembro derecho.

$$(D^2 + 1)(D^2 + 4)D^2 x = (-2\cos 2t - 2sen2t - 5t)(D^2 + 4)D^2$$

$$(D^2 + 1)(D^2 + 4)D^2 x = 0$$
$$D = 0 \pm i \qquad D = 0 \pm 2i \qquad D = 0 \qquad D = 0$$

$$x = c_1 \cos t + c_2 sent + A\cos 2t + Bsen2t + C + Dt$$
$$x_p = A\cos 2t + Bsen2t + C + Dt$$
$$x_p' = -2Asen2t + 2B\cos 2t + D$$
$$x_p'' = -4A\cos 2t - 4Bsen2t$$

Sustituyendo en $(D^2 + 1)x = -2\cos 2t - 2sen2t - 5t$ obtenemos:

$$-4A\cos 2t - 4Bsen2t + A\cos 2t + Bsen2t + C + Dt = -2\cos 2t - 2sen2t - 5t$$
$$-3A\cos 2t - 3Bsen2t + C + Dt = -2\cos 2t - 2sen2t - 5t$$

Asociando se obtienen los siguientes resultados:

$A=\frac{2}{3}$ $\qquad B=\frac{2}{3}$ $\qquad C=0$ $\qquad D=-5$

Por lo tanto la solución para "x" es: $x=c_1\cos t+c_2 sent+\frac{2}{3}\cos 2t+\frac{2}{3}sen2t-5t$

Se repite el procedimiento para obtener el valor de "y"

$$\begin{array}{ll} 1 & \left\{\begin{array}{l}(D-2)x+5y=-sen2t \\ -x+(D+2)y=t\end{array}\right. \\ (D-2) & \end{array}$$

Se obtiene $\left\{\begin{array}{l}(D-2)x+5y=-sen2t \\ -(D-2)x+(D+2)(D-2)y=t(D-2)\end{array}\right.$

Al sumar las ecuaciones del sistema se obtiene: $(D^2+1)y=1-2t-sen2t$

Resolviendo primero la ecuación homogénea

$(D^2+1)y=0$

$D=0\pm i$

$y_c=c_3\cos t+c_4 sent$

Ahora resolvemos la ecuación no homogénea, multiplicando la ecuación por operadores que eliminen el miembro derecho.

$$(D^2+1)(D^2+4)D^2y=(1-2t-sen2t)(D^2+4)D^2$$

$(D^2+1)(D^2+4)D^2x=0$

$D=0\pm i$ $\qquad D=0\pm 2i$ $\qquad D=0$ $\qquad D=0$

$y=c_3\cos t+c_4 sent+E\cos 2t+Fsen2t+G+Ht$

$y_p=E\cos 2t+Fsen2t+G+Ht$

$y'_p=-2Esen2t+2F\cos 2t+H$

$y''_p=-4E\cos 2t-4Fsen2t$

Sustituyendo en $(D^2+1)y=1-2t-sent$ obtenemos

$-4E\cos 2t-4Fsen2t+E\cos 2t+Fsen2t+G+Ht=1-2t-sent$

$-3E\cos 2t-3Fsen2t+G+Ht=1-2t-sent$

De esta última ecuación se obtiene:

$F=\frac{1}{3}$ $\qquad E=0$ $\qquad G=1$ $\qquad H=-2$

Entonces:

$$y = c_3 \cos t + c_4 sent + \frac{1}{3} sen2t + 1 - 2t$$

Ahora se sustituyen “ x” y “ y” en una de las ecuaciones del sistema original.

Sustituyendo en $(D-2)x + 5y = -sen2t$ obtenemos

$$sent(-c_1 - 2c_2 + 5c_4) + \cos t(c_2 - 2c_1 + 5c_3) = 0$$

de donde $c_4 = \dfrac{c_1 + 2c_2}{5}$ y $c_3 = \dfrac{2c_1 - c_2}{5}$

sustituyendo en y

$$y = \left(\frac{2c_1 - c_2}{5}\right)\cos t + \left(\frac{c_1 + 2c_2}{5}\right)sent + \frac{1}{3} sen2t + 1 - 2t$$

si $\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}$

sustituyendo x=0 , y=1 y t=0 en las soluciones x y y se tiene que $c_1 = \dfrac{-2}{3}$ y $c_2 = \dfrac{-4}{3}$

entonces la solución al sistema es:

$$x = -\frac{2}{3}\cos t - \frac{4}{3} sent + \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{2}{3} sen2t - 5t$$

$$y = -\frac{2}{3} sent + \frac{1}{3} sen2t + 1 - 2t$$

El método de operadores, por lo general es más adecuado para sistemas que incluyen pocas variables dependientes, ya que sería muy complejo el manejo algebraico de un número grande de variables.

2.3 SOLUCIÓN POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Este método tiene la ventaja de que se puede dividir libremente sin preocuparse de tener demasiadas constantes arbitrarias y facilita el manejo de condiciones iniciales.

El método de solución es una extensión de la solución de ecuaciones diferenciales con transformadas de Laplace.

Ejemplo 4: Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{matrix} 4x' + 4x + y' = 1, \\ 3x' + y' - y = t, \end{matrix} \quad \text{Con condiciones iniciales} \quad \begin{matrix} x(0) = 2 \\ y(0) = -6 \end{matrix}$$

Solución:

Tomando transformadas de Laplace en ambos lados de las ecuaciones se tiene:

$$\ell\{4x' + 4x + y' = 1\}$$
$$\ell\{3x' + y' - y = t\}$$
$$4[sX(s) - x(0)] + 4X(s) + sY(s) - y(0) = \frac{1}{s},$$
$$3[sX(s) - x(0)] + [sY(s) - y(0)] - Y(s) = \frac{1}{s^2},$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 2$,y(0)=-6 y combinando los términos se convierte

en: $4(s+1)X(s) + sY(s) = \frac{1}{s} + 2 = \frac{1+2s}{s}$

$$3sX(s) + (s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Se despeja Y(s) de la primera ecuación $Y(s) = \frac{1+2s}{s^2} - \frac{4(s+1)}{s}X(s),$

Se sustituye en la segunda ecuación $3sX(s) + (s-1)\left[\frac{1+2s}{s^2} - 4\frac{(s+1)}{s}X(s)\right] = \frac{1}{s^2}$

Se simplifica y se obtiene:

$$(-s^2 + 4)X(s) = \frac{1}{s}(2 + s - 2s^2),$$

despejando X(s) se llega a $X(s) = \frac{2s^2 - s - 2}{s(s^2 - 4)} = \frac{2s^2 - s - 2}{s(s-2)(s+2)}$

Por fracciones parciales

$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}$, donde $2s^2 - s - 2 = A(s-2)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-2).$

Como los tres factores del denominador son factores lineales, la manera mas sencilla de encontrar A, B, C , es evaluar esta última ecuación en las raíces s=0, s=2, s=-2, que son los valores que hacen cero cada uno de los denominadores de $X(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+2}$.

Esto nos da $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, C=1 .

Entonces $X(s)=\frac{1/2}{s}+\frac{1/2}{s-2}+\frac{1}{s+2}$ de manera que $x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-2t}$,

Sustituyendo x(t) en la ecuación $4x'+4x+y'=1$, se obtiene:

$$4(e^{2t}-2e^{-2t})+4(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-2t})+y'=1$$

$$4e^{2t}-8e^{-2t}+2+2e^{2t}+4e^{-2t}+y'=1$$

$$6e^{2t}-4e^{-2t}+2+y'=1$$

Despejando $y'=-1-6e^{2t}+4e^{-2t}$

Sacando antiderivada en cada miembro llegamos a $y=-t-3e^{2t}-2e^{-2t}+c_1$

La condición inicial y(0)=-6 da una ecuación para c_1
$-6=y(0)=-3-2+c_1$ de manera que $c_1=-1$ y la solución del sistema es:

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-2t}$$
$$y(t)=-t-3e^{2t}-2e^{-2t}-1$$

2.4 MÉTODOS MATRICIALES PARA RESOLVER SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Los métodos matriciales nos permiten resolver sistemas más complejos y con un mayor número de variables de una manera más simplificada utilizando las propiedades de las matrices..
Comenzaremos por la representación matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 8y \end{cases}$ este sistema se puede escribir como sigue:

$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces el sistema se puede representar como:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{x} \text{ ó } \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ con } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 8y - e^t \end{cases}$ se puede representar como $\dfrac{d}{dt}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y + \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ x + \dfrac{dy}{dt} - z = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + y - \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$ se puede escribir como $\begin{pmatrix} D & 1 & D \\ 1 & D & -1 \\ D & 1 & -D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt} + y = 0 \end{cases}$ se puede escribir como $\begin{pmatrix} D^2 + D & D + 1 \\ D^3 & D^2 + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} x' - 4x + 2y = 2t + 1 \\ -3x + y' + y = 3t + 1 \end{cases}$ puede ser escrito como $\begin{pmatrix} D - 4 & 2 \\ -3 & D + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 3t + 1 \end{pmatrix}$

Es importante mencionar que un mismo sistema puede ser escrito en diferentes formas.

Ejemplos:

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 7y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$ es igual a $\begin{cases} (D-4)x - 7y = 0 \\ -x + (D+2)y = 0 \end{cases}$ e igual a $\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} (2D-5)x + Dy = e^t \\ (D-1)x + Dy = 5e^t \end{cases}$ es igual a $\begin{cases} 2x' + y' = e^t + 5x \\ x' + y' = 5e^t + x \end{cases}$ e igual a $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 4e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9e^t \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x' + 4x + y' = 1 \\ 3x' + y' - y = t \end{cases}$ es igual a $\begin{cases} (4D+4)x + Dy = 1 \\ 3Dx + (D-1)y = t \end{cases}$ e igual a $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - y + 1 - t \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x + 4y - 3 + 4t \end{cases}$

Soluciones particulares y homogéneas de un sistema.

Ejemplo 5: Consideremos el sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ verificar que

$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema.

Solución:

Sustituyendo cada vector en el sistema se tiene

Para $\mathbf{x}_1$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Derivando y resolviendo la multiplicación

$$\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ por lo tanto $\mathbf{x}_1$ es solución del sistema

Para $\mathbf{x}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Derivando y resolviendo la multiplicación $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ por lo tanto $\mathbf{x}_2$ también es solución del sistema.

Como los vectores son linealmente independientes y el sistema es de 2x2, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ es una base del espacio vectorial de soluciones del sistema y en consecuencia, cualquier solución $\mathbf{x}$ del sistema será una combinación lineal de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ o sea: $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si no se determinan c_1 y c_2 por condiciones iniciales, a $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se le llama solución general del sistema.

Generalizando para un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$ será un vector de n variables $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y su derivada también $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$

A será una matriz de nxn.
En este caso para obtener la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ necesitamos n soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix};\ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix};\ldots;\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

en ese caso el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ se le llama conjunto fundamental de soluciones, la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es de la forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_n\mathbf{x}_n$.

Lo que significa que toda solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es de la forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + ... + c_n\mathbf{x}_n$.

Sea ahora el sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ (**f** también es un vector de nx1)

Teorema 1

Toda solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$ es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p$ en donde $\mathbf{x}_c$ es una solución de la ecuación homogénea asociada $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ y $\mathbf{x}_p$ es una solución particular de $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$. ■

En efecto como **x** es solución del sistema entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}$

Como $\mathbf{x}_p$ también es solución se verifica que $\mathbf{x}_p' = \mathbf{Ax}_p + \mathbf{f}$

Restando las dos ecuaciones $\mathbf{x}' - \mathbf{x}_p' = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_p$

Factorizando **A** resulta $\mathbf{x}' - \mathbf{x}_p' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$

En consecuencia $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ es solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ o sea $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_c$ y por lo tanto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p$

2.4.1 Valores propios reales y distintos

Ejemplo 6: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$

Solución:

La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales se enfoca de la misma manera en que se resuelve una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, buscando soluciones de la forma $y = e^{\lambda t}$.

Para el sistema se puede intentar la búsqueda de soluciones, en las que ambas incógnitas "x" y "y" tengan la forma $e^{\lambda t}$ para alguna constante λ, pero para evitar la suposición de que "x"y "y" son iguales se incluyen ciertos coeficientes. Así la solución tendría la forma:

$x = k_1 e^{\lambda t}$

$y = k_2 e^{\lambda t}$

Donde k_1, k_2 y λ son constantes, y ahora se sustituye la solución propuesta en el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} k_1 e^{\lambda t} = k_1 e^{\lambda t} + 2k_2 e^{\lambda t} \\ \dfrac{d}{dt} k_2 e^{\lambda t} = 4k_1 e^{\lambda t} + 3k_2 e^{\lambda t} \end{cases} \quad \text{Derivando} \quad \begin{cases} \lambda k_1 e^{\lambda t} = k_1 e^{\lambda t} + 2k_2 e^{\lambda t} \\ \lambda k_2 e^{\lambda t} = 4k_1 e^{\lambda t} + 3k_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Igualando a cero y eliminando $e^{\lambda t}$

$$\begin{cases} k_1 - \lambda k_1 + 2k_2 = 0 \\ 4k_1 + 3k_2 - \lambda k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)k_1 + 2k_2 = 0 \\ 4k_1 + (3-\lambda)k_2 = 0 \end{cases} \quad \text{A este sistema se le llama sistema auxiliar.}$$

Considerando k_1, k_2 y λ como incógnitas, tenemos un sistema no lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas, sin embargo, ésta no es la manera eficaz de examinar el problema, en lugar de esto suponga que se piensa en k_1 y k_2 como incógnitas y λ como un parámetro entonces el sistema se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}; \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}; \ \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ el sistema resulta}$$

$\mathbf{Ak} = \overline{0}$ y se resuelve analizando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

Es un sistema lineal para el cual existe una solución no trivial (no nula) si los renglones de la matriz son linealmente dependientes y esta condición se cumple si el determinante de la matriz es cero.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ Ecuación de segundo grado con solución $\lambda = -1$ y $\lambda = 5$

A estos valores de λ se les llama valores propios de la matriz **A.**

Sustituyendo en $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right)$ se obtiene,

Para $\lambda = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$ Haciendo operaciones con renglones llegamos a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Entonces se tiene $k_1 + k_2 = 0$ por lo cual $k_1 = -k_2$

Si $k_2 = -1$ entonces $k_1 = 1$

Con lo cual una solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{-t} \\ y = -1e^{-t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ siendo esta la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se le llama vector propio de la matriz **A**

Para $\lambda = 5$

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones llegamos a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

entonces se tiene $k_1 - \frac{1}{2}k_2 = 0$ por lo cual $k_1 = \frac{1}{2}k_2$

si $k_2 = 2$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual otra solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{5t} \\ y = 2e^{5t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$ siendo esta la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$

por lo tanto considerando las dos soluciones, la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Ejemplo 7: Resolver el sistema que no esta en su forma explícita

$$\begin{pmatrix} D^2+2 & D \\ D^3 & D^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se propone la solución $x=k_1e^{\lambda t}$ y $y=k_2e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1e^{\lambda t} \\ k_2e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema

$$\begin{pmatrix} D^2+2 & D \\ D^3 & D^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1e^{\lambda t} \\ k_2e^{\lambda t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices

$$\begin{pmatrix} k_1\lambda^2e^{\lambda t}+2k_1e^{\lambda t}+k_2\lambda e^{\lambda t} \\ k_1\lambda^3e^{\lambda t}+k_2\lambda^2e^{\lambda t}-k_2e^{\lambda t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualando elementos de las matrices se obtiene el sistema

$$\begin{cases} k_1\lambda^2e^{\lambda t}+2k_1e^{\lambda t}+k_2\lambda e^{\lambda t}=0 \\ k_1\lambda^3e^{\lambda t}+k_2\lambda^2e^{\lambda t}-k_2e^{\lambda t}=0 \end{cases}$$

Eliminando $e^{\lambda t}$

$$\begin{cases} k_1\lambda^2+2k_1+k_2\lambda=0 \\ k_1\lambda^3+k_2\lambda^2-k_2=0 \end{cases}$$

Agrupando se obtiene

$$\begin{cases} (\lambda^2+2)k_1+\lambda k_2=0 \\ \lambda^3k_1+(\lambda^2-1)k_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2 & \lambda \\ \lambda^3 & \lambda^2-1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2=0 \qquad \lambda=\sqrt{2} \text{ y } \lambda=-\sqrt{2}$$

Para $\lambda = \sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} k_2$ si $k_2 = -2\sqrt{2}$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{\sqrt{2}t} \\ y = -2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t}$ siendo esta la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t}$

Para $\lambda = -\sqrt{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} k_2$ si $k_2 = 2\sqrt{2}$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual otra solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{-\sqrt{2}t} \\ y = 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t}$ siendo esta la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t}$

Entonces la solución general será

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t}$$

2.4.2 Valores propios complejos

Ejemplo 8: Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$$

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (5-\lambda)k_1 + k_2 = 0 \\ -2k_1 + (3-\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen las soluciones

$\lambda = 4 + i$ y $\lambda = 4 - i$

Para $\lambda = 4 + i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ -2 & -1-i & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (1-i)k_1 = -k_2 \\ (1-i)(-k_1) = k_2 \end{array} \qquad \text{si} \qquad \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -1+i \end{array}$$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{(4+i)t} \\ y = (-1+i)e^{(4+i)t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{(4+i)t}$ siendo esta la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{(4+i)t}$

Para $\lambda = 4 - i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & 0 \\ -2 & -1+i & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (1+i)k_1 = -k_2 \\ (1+i)(-k_1) = k_2 \end{array} \qquad \text{si} \qquad \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -1-i \end{array}$$

con lo cual la otra solución del sistema es $\begin{array}{l} x = 1e^{(4-i)t} \\ y = (-1-i)e^{(4-i)t} \end{array}$ y se puede escribir como:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(4-i)t}$ siendo esta la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(4-i)t}$

la solución general del sistema es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{(4+i)t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(4-i)t} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{4t} e^{it} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{4t} e^{-it}$$

Utilizando la formula de Euler $e^{it} = \cos t + isent$

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} e^{4t}(\cos t + isent) + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{4t}(\cos t - isent)$$

Multiplicando

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + isent \\ -\cos t - isent + i\cos t - sent \end{pmatrix} e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - isent \\ -\cos t + isent - i\cos t - sent \end{pmatrix} e^{4t}$$

Agrupando se tiene

$$\mathbf{x} = c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - sent \end{pmatrix} + c_1 ie^{4t}\begin{pmatrix} sent \\ -sent + \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - sent \end{pmatrix} - c_2 ie^{4t}\begin{pmatrix} sent \\ -sent + \cos t \end{pmatrix}$$

Factorizando

$$\mathbf{x} = (c_1 + c_2)e^{4t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - sent \end{pmatrix} + (c_1 - c_2)ie^{4t}\begin{pmatrix} sent \\ -sent + \cos t \end{pmatrix}$$

Si $C_1 = (c_1 + c_2)$ y $C_2 = (c_1 - c_2)i$,

entonces la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - sent \end{pmatrix} e^{4t} + C_2\begin{pmatrix} sent \\ -sent + \cos t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Ejemplo 9: Ahora se resolverá el siguiente sistema que no esta en forma explícita

$$\begin{pmatrix} D & -5 \\ 1 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} \lambda k_1 - 5k_2 = 0 \\ k_1 + (\lambda - 2)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -5 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -5 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado se obtienen las soluciones $\lambda = 1 + 2i$ y $\lambda = 1 - 2i$

Para $\lambda = 1 + 2i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+2i & -5 & 0 \\ 1 & -1+2i & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = (1-2i)k_2 \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \\ k_1 = 1 - 2i \end{array}$$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{array}{l} x = (1-2i)e^{(1+2i)t} \\ y = 1e^{(1+2i)t} \end{array}$ y se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} \text{ siendo esta la primera solución } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$$

Para $\lambda = 1 - 2i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & -5 & 0 \\ 1 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = (1+2i)k_2 \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \\ k_1 = 1 + 2i \end{array}$$

con lo cual la otra solución del sistema es $\begin{array}{l} x = (1+2i)e^{(1-2i)t} \\ y = 1e^{(1-2i)t} \end{array}$ y la representamos como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} \text{ siendo esta la segunda solución } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t}$$

La solución general del sistema es

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1-2i\\1\end{pmatrix}e^{(1+2i)t}+c_2\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}e^{(1-2i)t}$$

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1-2i\\1\end{pmatrix}e^{t}e^{2it}+c_2\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}e^{t}e^{-2it}$$

Utilizando la formula de Euler $e^{it}=\cos t+isent$

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1-2i\\1\end{pmatrix}e^{t}(\cos 2t+isen2t)+c_2\begin{pmatrix}1+2i\\1\end{pmatrix}e^{t}(\cos 2t-isen2t)$$

Multiplicando

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}\cos 2t+isen2t-2i\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t+isen2t\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}\cos 2t-isen2t+2i\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t-isen2t\end{pmatrix}e^{t}$$

Agrupando

$$\mathbf{x}=c_1e^{t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}+c_1ie^{t}\begin{pmatrix}sen2t-2\cos 2t\\ sen2t\end{pmatrix}+c_2e^{t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}-c_2ie^{t}\begin{pmatrix}sen2t-2\cos 2t\\ sen2t\end{pmatrix}$$

Factorizando

$$\mathbf{x}=(c_1+c_2)e^{t}\begin{pmatrix}\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}+(c_1-c_2)ie^{t}\begin{pmatrix}sen2t-2\cos 2t\\ sen2t\end{pmatrix}$$

Si $C_1=(c_1+c_2)$ y $C_2=(c_1-c_2)i$,

entonces la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x}=C_1\begin{pmatrix}\cos 2t+2sen2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}sen2t-2\cos 2t\\ sen2t\end{pmatrix}e^{t}$$

Ejemplo 10: Resolver el siguiente sistema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$ con condiciones iniciales x(0)=1 y y(0)=-1

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (-1-\lambda)k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + (-1-\lambda)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado se obtienen las soluciones $\lambda = -1 + i$ y $\lambda = -1 - i$

Para $\lambda = -1 + i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = k_2 i \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \\ k_1 = i \end{array}$$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{array}{l} x = ie^{(-1+i)t} \\ y = 1e^{(-1+i)t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$ siendo esta la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$

Para $\lambda = -1 - i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = -k_2 i \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} k_2 = 1 \\ k_1 = -i \end{array}$$

con lo cual la otra solución del sistema es $\begin{array}{l} x = -ie^{(-1-i)t} \\ y = 1e^{(-1-i)t} \end{array}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$ siendo esta la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$

La solución general del sistema es

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}e^{(-1+i)t} + c_2\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}e^{(-1-i)t} = c_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}e^{it} + c_2\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}e^{-it}$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + isent$

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}(\cos t + isent) + c_2\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}(\cos t - isent)$$

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} i\cos t - sent \\ \cos t + isent \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -i\cos t - sent \\ \cos t - isent \end{pmatrix}e^{-t}$$

$$\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix} + c_1 ie^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ sent \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix} - c_2 ie^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ sent \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (c_1 + c_2)e^{-t}\begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix} + (c_1 - c_2)ie^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ sent \end{pmatrix}$$

Si $C_1 = (c_1 + c_2)$ y $C_2 = (c_1 - c_2)i$, la solución general se puede escribir como:

$$\mathbf{x} = C_1\begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} \cos t \\ sent \end{pmatrix}e^{-t}$$

Ahora se consideran las condiciones iniciales $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $t = 0$

y se sustituye en la solución

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -sen0 \\ \cos 0 \end{pmatrix}e^{0} + C_2\begin{pmatrix} \cos 0 \\ sen0 \end{pmatrix}e^{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$ por lo cual $C_1 = -1$ y $C_2 = 1$.

La solución general toma la forma

$$\mathbf{x} = -\begin{pmatrix} -sent \\ \cos t \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} \cos t \\ sent \end{pmatrix}e^{-t}$$

2.4.3 Valores propios repetidos

Hasta el momento no se ha considerado el caso en que alguno de los n valores propios de una matriz de nxn se repiten por ejemplo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases} \quad \text{con el cual} \quad \begin{cases} (3-\lambda)k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + (1-\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cuya solución es $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ esta es una raíz doble ó una raíz de multiplicidad dos.

Ahora el problema es la solución para cada valor propio sabiendo que al sustituir $\lambda_1 = 2$ Se obtiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

y lo mismo se obtendrá al sustituir $\lambda_2 = 2$.

¿Cómo se obtiene la solución para $\lambda_2 = 2$?

Puesto que lo principal es encontrar la solución general del sistema es necesario encontrar esta segunda solución.

En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, entonces se dice que λ_1 en un valor propio de multiplicidad m.

Entonces existen dos posibilidades:

i) Puede ser que para algunas matrices de nxn sea posible encontrar m vectores propios $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_m$ linealmente independientes que correspondan a un valor propio λ_1 de multiplicidad m<n. en este caso, la solución general del sistema contiene una combinación lineal

$$c_1\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{k}_2 e^{\lambda_1 t} + ... + c_m\mathbf{k}_m e^{\lambda_1 t}$$

ii) Si al valor propio λ_1 de multiplicidad m le corresponde solamente un vector propio, entonces siempre es posible encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{x}_1 = \mathbf{k}_{11} e^{\lambda_1 t} \\ &\mathbf{x}_2 = \mathbf{k}_{21} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{k}_{22} e^{\lambda_1 t} \\ &\mathbf{x}_3 = \mathbf{k}_{31} \frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} + \mathbf{k}_{32} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{k}_{33} e^{\lambda t} \\ &. \\ &. \\ &\mathbf{x}_m = \mathbf{k}_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{k}_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + ... + \mathbf{k}_{mm} e^{\lambda_1 t} \end{aligned}} \qquad (1)$$

en donde los $\mathbf{k}_{ij}$ son vectores columna.

En ecuaciones lineales homogéneas se estudio que cuando una raíz se repite n veces las soluciones toman la forma :
$e^{\lambda t}$ para la primera solución , $te^{\lambda t}$ para la segunda solución, y así sucesivamente hasta la n-ésima solución $t^{n-1}e^{\lambda t}$

De manera semejante en un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$,
la primera solución tendrá la forma $\mathbf{x_1} = \mathbf{k}_{11}e^{\lambda t}$ que se obtiene del primer vector propio del sistema. La segunda solución toma la forma $\mathbf{x_2} = \mathbf{k}_{21}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{22}e^{\lambda t}$ y para encontrarla, la sustituimos en el sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Entonces se tiene

$$\mathbf{x}_2' = \mathbf{A}\mathbf{x}_2$$
$$\mathbf{k}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{k}_{21}te^{\lambda t}\lambda + \mathbf{k}_{22}e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{A}\mathbf{k}_{21}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{22}e^{\lambda t}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{k}_{21}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{22}e^{\lambda t} - \mathbf{k}_{21}te^{\lambda t}\lambda - \mathbf{k}_{22}e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{k}_{21}e^{\lambda t}$$
$$te^{\lambda t}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{21} + e^{\lambda t}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{21}e^{\lambda t}$$

Se deduce que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{21} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{21}$$

fórmula con la cual se obtiene la solución de un sistema de multiplicidad 2.

Si el sistema tiene multiplicidad 3 la solución toma la forma
$\mathbf{x}_3 = \mathbf{k}_{31}t^2e^{\lambda t} + \mathbf{k}_{32}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}$ y por conveniencia se manejará como
$\mathbf{x_3} = \mathbf{k}_{31}\dfrac{t^2e^{\lambda t}}{2!} + \mathbf{k}_{32}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}$ como lo indica el cuadro (1) de la página anterior,
de igual forma sustituyendo en $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ se tiene:

$$\mathbf{x}_3' = A\mathbf{x}_3$$
$$\mathbf{k}_{31}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{31}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\lambda + \mathbf{k}_{32}e^{\lambda t} + \mathbf{k}_{32}te^{\lambda t}\lambda + \mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{A}\mathbf{k}_{31}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{32}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{k}_{31}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{32}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{k}_{33}e^{\lambda t} - \mathbf{k}_{31}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\lambda - \mathbf{k}_{32}te^{\lambda t}\lambda - \mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}\lambda = \mathbf{k}_{31}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{32}e^{\lambda t}$$
$$\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{31} + te^{\lambda t}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{32} + e^{\lambda t}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{31}te^{\lambda t} + \mathbf{k}_{32}e^{\lambda t}$$

Por lo tanto

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{31} = 0$$
$$(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{32} = \mathbf{k}_{31}$$
$$(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{33} = \mathbf{k}_{32}$$

Que es la fórmula para obtener la tercera solución de un sistema con multiplicidad tres.

Por supuesto la soluciones $\begin{matrix}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{31} = 0 \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{32} = \mathbf{k}_{31}\end{matrix}$ pueden utilizarse para encontrar las soluciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

De igual forma se obtienen las soluciones para multiplicidades mayores.

Ejemplo 11: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en forma no explícita

$$\begin{pmatrix} D & 2 & 3 \\ -1 & D-3 & -3 \\ 0 & 1-D & D-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ $z = k_3 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \\ k_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} \lambda k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ -k_1 + (\lambda - 3)k_2 - 3k_3 = 0 \\ (1-\lambda)k_2 + (\lambda - 1)k_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ -1 & \lambda-3 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 3° grado se obtienen las soluciones $\lambda = 5$, $\lambda = 1$, y $\lambda = 1$

Para $\lambda = 5$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$ mediante eliminación de Gauss se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{matrix} k_1 = -k_3 \\ k_2 = k_3 \end{matrix} \quad \text{si} \quad k_3 = -1 \quad \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{matrix}$$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{matrix} x = 1e^{5t} \\ y = -1e^{5t} \\ z = -1e^{5t} \end{matrix}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t}$ siendo esta la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t}$

Para $\lambda = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones llegamos a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

entonces se tiene $k_1 = -2k_2 - 3k_3$ si $\begin{matrix} k_2 = -1 \\ k_3 = 0 \end{matrix}$ entonces $k_1 = 2$

con lo cual la solución del sistema es $\begin{matrix} x = 2e^t \\ y = -1e^t \\ z = 0 \end{matrix}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ siendo esta la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$

si $\begin{matrix} k_2 = 0 \\ k_3 = -1 \end{matrix}$ entonces $k_1 = 3$

se encuentra otro vector propio e independiente de $\mathbf{x}_2$

con lo cual la solución del sistema es $\begin{matrix} x = 3e^t \\ y = 0 \\ z = -1e^t \end{matrix}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ siendo esta la tercera solución $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

entonces la solución general del sistema es

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

este método lleva a una solución completa debido a la posibilidad para encontrar dos soluciones linealmente independientes para el sistema auxiliar para el mismo valor propio.

Ejemplo 12: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$$

Solución:

expresado también como $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (3-\lambda)k_1 - k_2 = 0 \\ 9k_1 + (-3-\lambda)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & -3-\lambda & 0 \end{array}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado se obtienen las soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = 0$

Para $\lambda = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones se tiene $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$k_1 = \dfrac{1}{3}k_2$ si $k_2 = 3$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual el primer vector propio es $\mathbf{k}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

siendo la primera solución $\mathbf{x}_1 = \mathbf{k}_{21} e^{\lambda_1 t}$, así $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si se le da otro valor a k_2 se obtiene otro vector múltiplo de $\mathbf{k}_{21}$. Por lo tanto sólo hay Un vector propio asociado a $\lambda = 0$

Entonces utilizamos $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{22}=\mathbf{k}_{21}$

Para $\lambda = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & 3 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones llegamos a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

entonces se tiene $k_1 - \frac{1}{3}k_2 = \frac{1}{3}$ por lo cual $k_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}k_2$

si $k_2 = \frac{-1}{4}$ entonces $k_1 = \frac{1}{4}$

con lo cual el vector $\mathbf{k}_{22} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ siendo la segunda solución

de la forma $\mathbf{x}_2 = \mathbf{k}_{21}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{k}_{22}e^{\lambda_1 t}$ entonces

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto considerando las dos soluciones, la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 13: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales
$$\begin{pmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene
$$\begin{cases} (\lambda-3)k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + (\lambda-1)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtienen las soluciones $\lambda = 2$ y $\lambda = 2$

Para $\lambda = 2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones se tiene $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$k_1 = k_2$ si $k_2 = 1$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual el primer vector propio es $\mathbf{k}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

siendo la primera solución $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

utilizando $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{22} = \mathbf{k}_{21}$

Para $\lambda = 2$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ haciendo operaciones con renglones llegamos a $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

entonces se tiene $k_1 - k_2 = 1$ por lo cual $k_1 = 1 + k_2$. Si $k_2 = 0$ entonces $k_1 = 1$

con lo cual el vector $\mathbf{k}_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

siendo la segunda solución $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Por lo tanto considerando las dos soluciones, la solución general es
$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right\}$$

Ejemplo 14: Resolver el siguiente sistema con tres incógnitas

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ $z = k_3 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \\ k_3 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (1-\lambda)k_1 = 0 \\ 2k_1 + (2-\lambda)k_2 - k_3 = 0 \\ k_2 - \lambda k_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

Resolviendo obtienen la solución $\lambda = 1$ con multiplicidad 3

Utilizamos $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{k}_{31} = 0$

Para $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ haciendo operaciones con renglones se tiene } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

con lo cual $k_1 = 0$ y $k_2 = k_3$, si $k_3 = 1$ entonces $k_2 = 1$

con lo cual el primer vector propio es $\mathbf{k}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

por lo tanto la primera solución es $\mathbf{x}_1 = \mathbf{k}_{31} e^{\lambda_1 t}$, a sí $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

utilizando $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{32}=\mathbf{k}_{31}$

Para $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ haciendo operaciones con renglones llegamos a } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

entonces se tiene $k_1=0$ y $k_2=k_3+1$, si $k_3=0$ entonces $k_2=1$

con lo cual el vector $\mathbf{k}_{32}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

formando con este la segunda solución $\mathbf{x}_2=\mathbf{k}_{31}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{k}_{32}e^{\lambda_1 t}$, así $\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t$

Utilizando $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{k}_{33}=\mathbf{k}_{32}$

Para $\lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ haciendo operaciones con renglones llegamos a } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

entonces se tiene $k_1=1/2$ y $k_2=k_3$, si $k_3=0$ entonces $k_2=0$

con lo cual el vector $\mathbf{k}_{33}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

formando con este la tercera solución con forma $\mathbf{x}_3=\mathbf{k}_{31}\dfrac{t^2e^{\lambda_1 t}}{2!}+\mathbf{k}_{32}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{k}_{33}e^{\lambda t}$

$$\mathbf{x}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^2e^t}{2}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^t+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^t$$

Por lo tanto considerando las tres soluciones, la solución general es

$$\mathbf{x}_1=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+c_2\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t\right\}+c_3\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^2e^t}{2}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^t+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^t\right\}$$

2.4.4 Retratos de fase

Una amplia gama de fenómenos naturales son modelados por sistemas bidimensionales de primer orden de la forma:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{AX} \tag{1}$$

donde la variable independiente t no aparece en forma explícita. Dicho sistema se llama sistema autónomo. El hecho de que t no aparezca en el lado derecho de (1) facilita el análisis del sistema y la visualización de sus soluciones.

El interés de los análisis cualitativos de sistemas se encuentra en preguntas como :

- ¿Existen soluciones constantes?
- Si existen soluciones constantes ¿las soluciones se mueven hacia la solución constante o se alejan de ella?
- ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones conforme $t \to \pm\infty$?
- ¿Hay soluciones oscilantes?

Si consideramos a t, tiempo, como un parámetro, x(t) y y(t) representan una curva en el plano xy. Tal curva se denomina trayectoria del sistema. El plano se denomina plano fase.

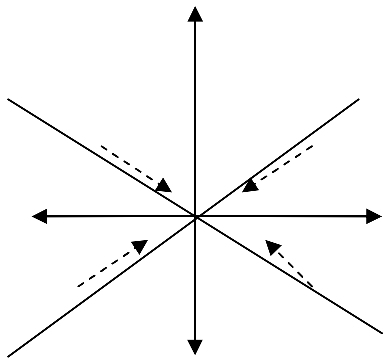
Un bosquejo de las trayectorias de un sistema en el plano fase se denomina retrato de fase. Un retrato de fase por lo regular contiene los bosquejos de unas cuantas trayectorias y una indicación de la dirección en la que se recorre la curva. Esto se hace colocando flechas en la trayectoria para indicar la dirección de movimiento de un punto (x,y) a medida que aumenta t.

Una de las preguntas que hemos planteado concierne a la existencia de soluciones constantes. Para que un sistema tenga una solución constante, tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ deben ser cero. Es decir el sistema no cambia. De esto resulta que los puntos correspondientes a soluciones constantes en el plano fase se determinan al resolver

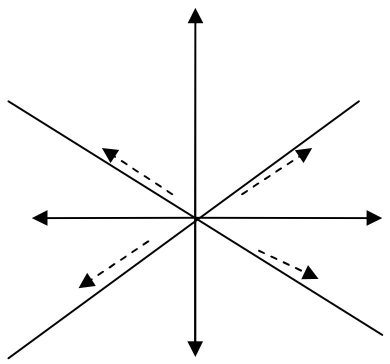
$$x'(t) = ax + by = 0$$
$$y'(t) = cx + dy = 0$$

Definición: Un punto en el plano fase en el que $x'(t)$ y $y'(t)$ son cero, se denomina punto de equilibrio o punto fijo del sistema.■

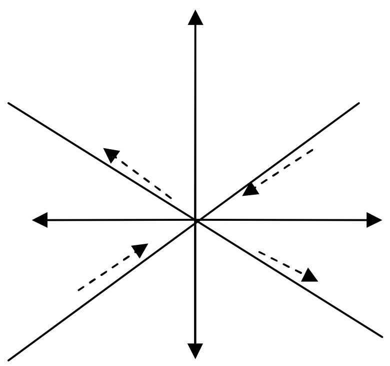
El comportamiento de las trayectorias cerca de un punto de equilibrio proporciona una forma de caracterizar tipos diferentes de puntos de equilibrio.
Si las trayectorias en todos los puntos cercanos al punto de equilibrio convergen a él decimos que el punto de equilibrio es sumidero o atractor.



En otras ocasiones trayectorias cercanas se alejan del punto de equilibrio; entonces decimos que el punto de equilibrio es fuente



Además podemos tener puntos de equilibrio en donde trayectorias cercanas se acerquen por un lado y se alejen por el otro. Tal punto de equilibrio se denomina punto silla.



Se dice que un sumidero es estable porque los puntos iniciales cercanos conducen a soluciones cuya tendencia es regresar hacia el punto de equilibrio conforme pasa el tiempo. Los puntos de equilibrio de un punto silla y fuente son llamados inestables porque hay condiciones arbitrarias y cercanas al punto de equilibrio cuyas soluciones se alejan.

Campo de direcciones

La combinación de puntos x(t) y y(t), tales que $x'(t)=0$ y $y'(t)=0$ representan dos líneas llamadas isoclinas.

El punto donde estas dos líneas se cruzan es el punto de equilibrio del sistema. Las isoclinas son útiles para obtener la dirección de los vectores del campo de dirección y por lo tanto sirven para esbozar las curvas solución. La isoclina $x'(t)=0$ divide el plano en dos regiones , una con $x'(t)>0$ y la otra con $x'(t)<0$; y la isoclina $y'(t)=0$ hace lo mismo. Al graficar ambas isoclinas el plano queda dividido en cuatro regiones y es posible dar el flujo de x(t) y y(t) en cada uno.

En el siguiente diagrama se ilustran las direcciones de movimiento de x(t) y y(t)

	$x'(t)>0$	$x'(t)=0$	$x'(t)<0$
$y'(t)>0$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$
$y'(t)=0$	$\rightarrow$	$\bullet$	$\leftarrow$
$y'(t)<0$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

Dado un sistema de 2x2 es relativamente sencillo realizar el campo de direcciones correspondiente. Debido a que el comportamiento cualitativo de la solución depende exclusivamente de la matriz del sistema, sin pérdida de generalidad , podemos analizar sólo sistemas homogéneos, Así, el origen siempre es un punto de equilibrio. Es claro que si tenemos un sistema lineal que no es homogéneo entonces simplemente se traslada el punto de equilibrio a la solución dada.

Consideremos el sistema dado por

$$x' = f(x,y) = ax + by\ ,$$
$$y' = g(x,y) = cx + dy\ .$$

Las isoclinas están dadas por las rectas

$$ax + by = 0\ ,$$
$$cx + dy = 0\ .$$

Ejemplo 15: Realizar un campo de direcciones para el siguiente sistema $$x' = x - y$$ $$y' = x + 3y$$

Solución:

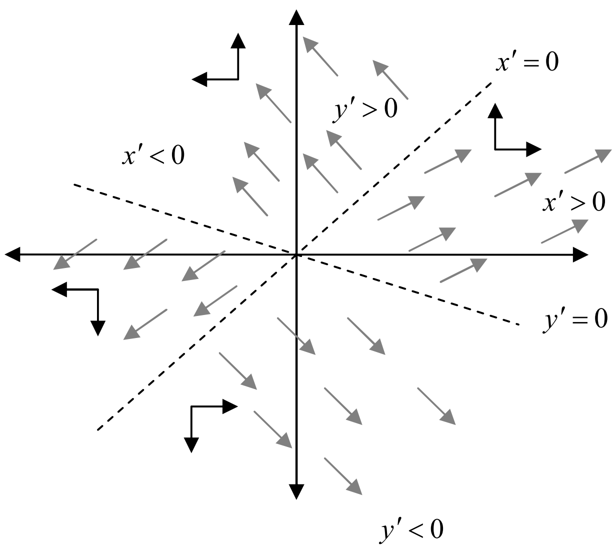
- Encontramos el punto de equilibrio con el sistema $\begin{matrix} x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{matrix}$, resolviendo, el punto de equilibrio es (0,0).

- Encontramos las isoclinas haciendo $x' = 0$ y $y' = 0$

$x - y = 0$ despejando $y = x$,

$x + 3y = 0$ despejando $y = -\dfrac{x}{3}$.

-En el plano XY dibujamos las isoclinas correspondientes; escogemos un punto en cada región y ponemos flechas horizontales a la derecha o a la izquierda para indicar si x crece o decrece, y verticales hacia arriba o hacia abajo para indicar si y crece o decrece.
Se dibuja el campo de direcciones para cada región, este flujo de direcciones se puede representar con sólo una flecha representativa de cada región.

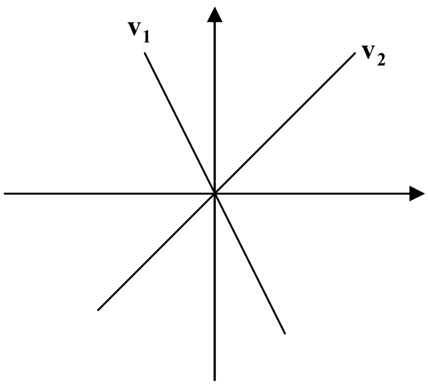


Soluciones de línea recta

Dado un sistema de ecuaciones $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{AX}$ esperamos que los valores propios y los vectores propios de la matriz **A** determinaran las características del retrato de fase del sistema el cual tendrá una solución

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$$

Donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de **A,** y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores propios asociados. Cuando los valores propios (y los vectores propios) son reales la interpretación del plano fase de las soluciones **x** es que toda solución esta generada por los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. En consecuencia, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son trayectorias. De lo anterior se desprende que los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ determinan rectas o rayos que pasan por el origen en el plano fase, a las cuales se les conoce como soluciones de línea recta



Para completar el retrato se necesitan otras trayectorias especiales que corresponden a las direcciones de los vectores propios. Estas otras trayectorias dependen de los valores λ_1 y λ_2.

Ejemplo 16: obtener las soluciones de línea recta del sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Solución:

Los eigenvalores del sistema son $\lambda = 4$ y $\lambda = 1$,

y la solución es $\mathbf{x} = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solución del sistema la podemos expresar en dos soluciones

$\mathbf{x}_1 = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}_2 = e^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ que a su vez se pueden expresar de la siguiente forma:

$\begin{array}{l} x = e^{4t} \\ y = e^{4t} \end{array}$ y $\begin{array}{l} x = -2e^{t} \\ y = e^{t} \end{array}$, si queremos eliminar el factor "e" resolvemos los cocientes

$\frac{x}{y} = 1$ y $\frac{x}{y} = -2$, despejando "y" en cada ecuación se obtienen las rectas:

y=x y $y = \frac{-x}{2}$ siendo estas, las soluciones de línea recta del sistema, que aparecen generalmente en los retratos de fase y que chocan en el punto de equilibrio.

Como ya se vio si tenemos el sistema $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{X}$, siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Encontramos los valores propios o eigenvalores de la siguiente forma:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

que al desarrollarlo nos da el polinomio cuadrático $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$

El signo del eigenvalor es preponderante para predecir el comportamiento del sistema.

A continuación analizaremos el comportamiento de un sistema lineal con ayuda de los eigenvalores y considerando que la solución del sistema es $\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$.

- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces el origen es un punto silla, hay dos líneas en el retrato fase que corresponden a soluciones de línea recta. Las soluciones a lo largo de la línea tienden hacia (0,0) cuando t se incrementa y las que se encuentra sobre la otra línea se alejan de punto de (0,0). Veamos un caso:

$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

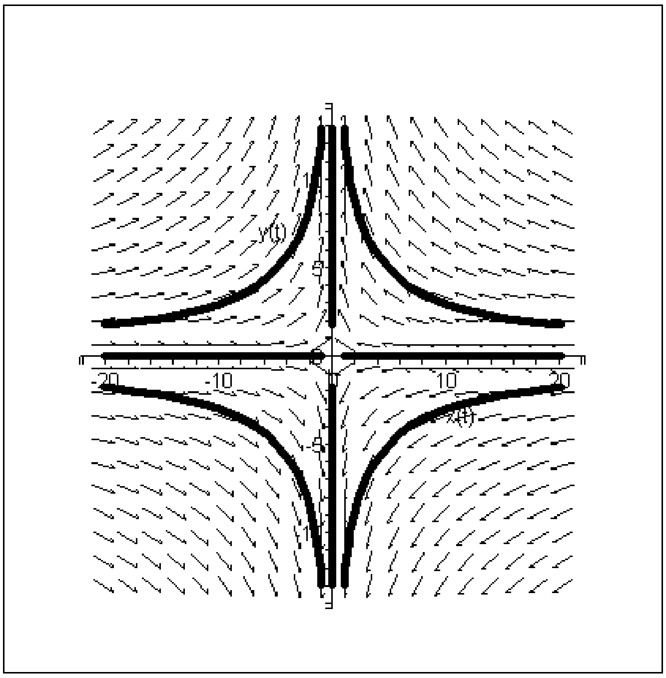
Eigenvalores $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$

Las soluciones de línea recta se encuentran sobre los ejes.

La solución del sistema es:

$$x = c_1 e^{-3t}$$
$$y = c_2 e^{2t}$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = \infty \end{matrix}$



- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ entonces el origen es un sumidero. Todas las soluciones tienden A (0,0) cuando t tiende a infinito y la mayoría de ellas tienden (0,0) en la dirección del vector propio o eigenvector λ_2. Comprobando con el sistema:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

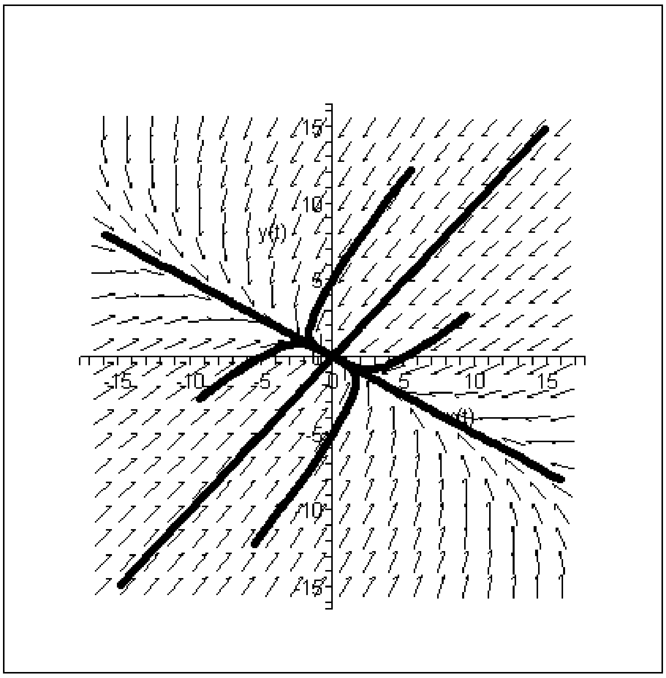
Eigenvalores $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = -1$

las soluciones de recta son:
y=x y y=-x/2

solución del sistema

$$x = c_1 e^{-4t} - 2c_2 e^{-t}$$
$$y = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$



- Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, entonces el origen es una fuente. Todas las soluciones se alejan del punto de equilibrio cuando t tiende a infinito, y una gran parte de estas lo hacen siguiendo la dirección del eigenvector λ_2. Lo vemos con el sistema:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

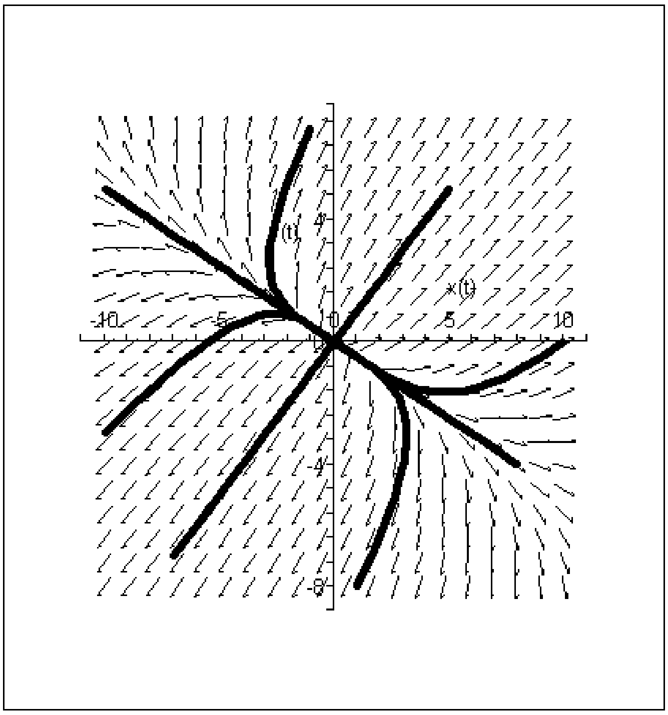
Eigenvalores $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$

soluciones de recta
y=x y=-x/2

Solución del sistema

$$x = c_1 e^{4t} - 2c_2 e^{t}$$
$$y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{t}$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$



Eigenvalores complejos.

Dado un sistema lineal (1) que tiene eigenvalores complejos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_1 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$, entonces sabemos que las soluciones complejas tienen la forma $\mathbf{x} = e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{x}_0$ donde $\mathbf{x}_0$ es un eigenvector (complejo) de la matriz $\mathbf{A}$. Podemos escribirlo como $\mathbf{x} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i sen\beta t)\mathbf{x}_0$.

Como $\mathbf{x}_0$ es una constante, las partes real e imaginaria de la solución $\mathbf{x}$ son una combinación de dos tipos de términos, los exponenciales y los trigonométricos.
El efecto del término exponencial en la solución depende del signo de α. Si α>0 , entonces $e^{\alpha \cdot t}$ crece exponencialmente cuando t tiende a infinito y la curva solución se mueve en espiral hacia el infinito . Si α<0 en ese caso el termino $e^{\alpha \cdot t}$ tiende exponencialmente a cero cuando t se incrementa, por lo que las soluciones tienden al origen. Si α=0 entonces $e^{\alpha \cdot t}$ es uno y las soluciones oscilan con amplitud constante todo el tiempo, es decir son periódicas.
Los términos seno y coseno alternan de valores positivos a negativos y nuevamente de regreso conforme t crece o decrece; por lo tanto esos términos hacen que x(t) y y(t) oscilen.
Por lo consiguiente, las soluciones en el plano fase xy se desplazan en espiral alrededor de (0,0).

- Si $\alpha < 0$, las soluciones se mueven en espiral hacia el origen. En este caso el origen se llama sumidero espiral. Comprobando con el sistema:

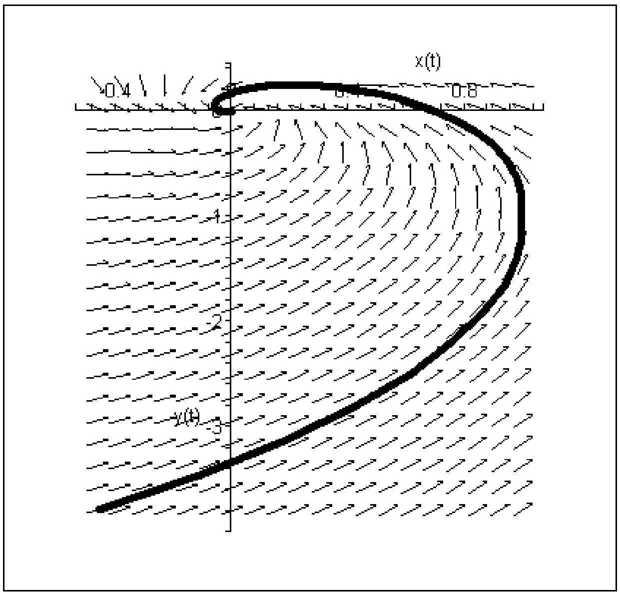
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X} \text{ con } \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalores $\lambda = -1 \pm i$

Solución del sistema:

$$x = e^{-t}(sent + \cos t)$$
$$y = e^{-t}(-\cos t + set)$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$



- Si $\alpha > 0$, las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen. Entonces el origen se denomina fuente espiral. Veamos un caso:

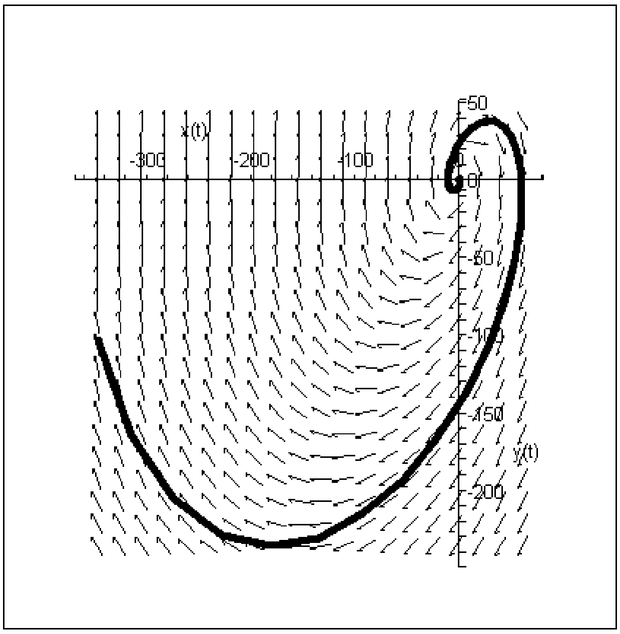
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} \quad \text{con} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalores $\lambda = 1 \pm i\sqrt{5}$

Solución del sistema

$$x = e^t(\cos\sqrt{5}t + \frac{1}{\sqrt{5}} sen\sqrt{5}t)$$
$$y = e^t(\cos\sqrt{5}t - \frac{2}{\sqrt{5}} sen\sqrt{5}t)$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$



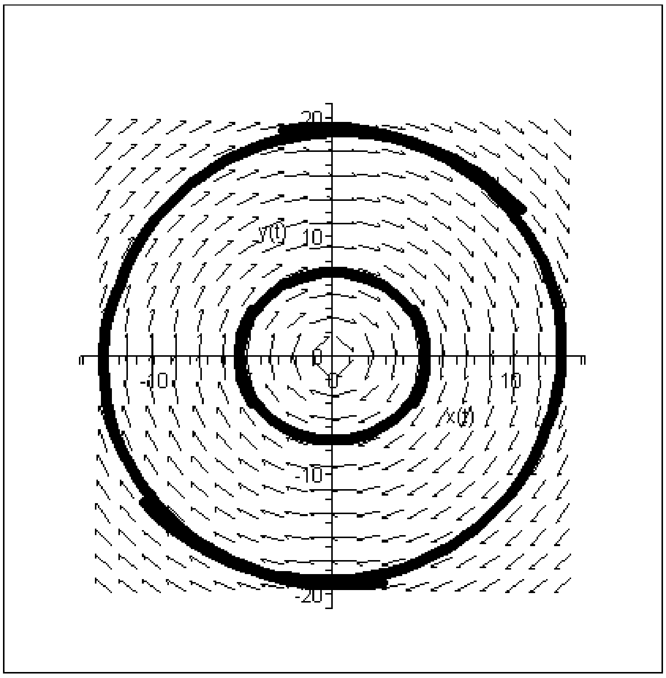
- Si $\alpha = 0$, las soluciones son periódicas. Vuelven exactamente a sus condiciones iniciales en el plano fase y repiten la misma curva cerrada una y otra vez, aquí el origen se llama un centro. Observemos el sistema:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Eigenvalores $\lambda = 0 \pm 2i$

Solución del sistema

$$x = c_1 \cos 2t + c_2 sen2t$$
$$y = -c_1 sen2t + c_2 \cos 2t$$



Eigenvalores repetidos

Antes de analizar los casos, consideraremos lo que nos dice la solución general acerca del comportamiento cualitativo de las soluciones. La forma de la solución general es $\mathbf{X} = c_1\mathbf{k}_{21}e^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t}(\mathbf{k}_{21}t + \mathbf{k}_{22}) = e^{\lambda t}(c_1\mathbf{k}_{21} + c_2\mathbf{k}_{22}) + c_2te^{\lambda t}\mathbf{k}_{21}$.

La dependencia de t proviene de dos términos, de $e^{\lambda t}$ y de $te^{\lambda t}$

- Si $\lambda < 0$, entonces esos dos términos tienden a cero cuando t crece y por lo tanto el punto de equilibrio en el origen es un sumidero. El término $te^{\lambda t}$ es mucho mayor que $e^{\lambda t}$ si t es grande. En consecuencia $\mathbf{x} \approx te^{\lambda t}\mathbf{k}_{21}$ cuando t es grande la solución tiende entonces a (0,0) en una dirección tangente a la línea de los eigenvectores.

- Si $\lambda > 0$, tenemos que todas las soluciones (excepto la de equilibrio) tienden a infinito cuando t crece, por lo que (0,0) es una fuente.

Veamos gráficamente el caso en el que $\lambda < 0$

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

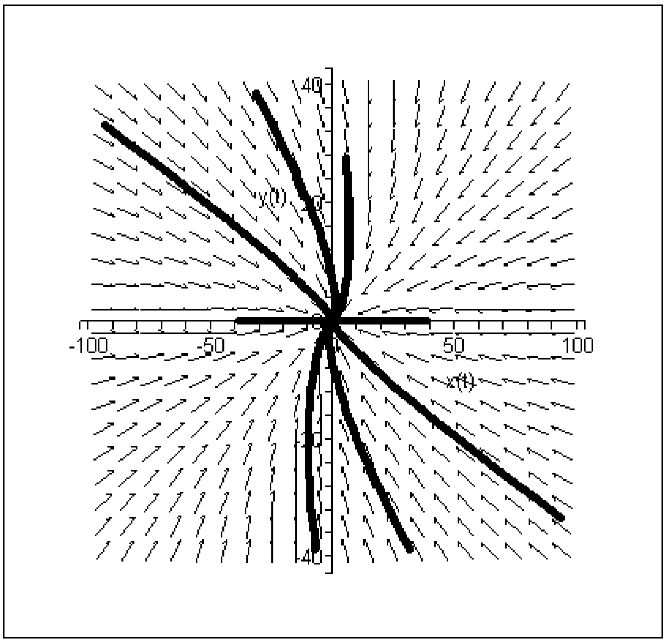
Eigenvalores $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -2$

solución de línea recta y=0

solución del sistema

$$x = c_1e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{-2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

si $t \to \infty$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$



Otra forma de analizar el diagrama de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales es la siguiente:

Sea el sistema: $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{X}$ siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

la fórmula para encontrar los eigenvalores del sistema es: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$

Esta ecuación se puede expresar como $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, donde T=a+d es la traza de **A** y D=ad-bc es el determinante de **A.**

Como el polinomio característico de **A** depende sólo de T y D , se infiere que los eigenvalores de **A** también están subordinados a esos valores . Si resolvemos el polinomio característico obtenemos los eigenvalores:

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

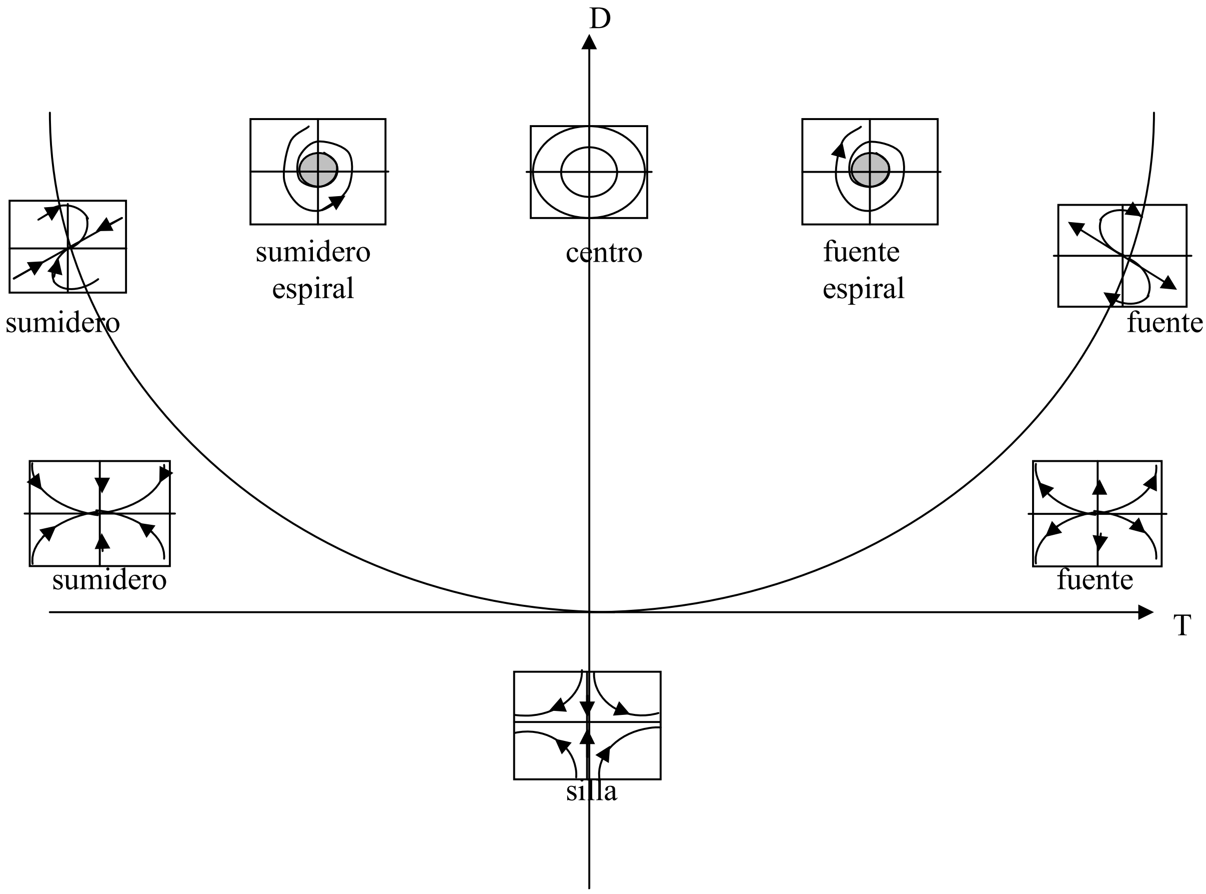
De esta formula nos percatamos de inmediato que los eigenvalores de A son complejos si $T^2 - 4D < 0$, son repetidos si $T^2 - 4D = 0$, y reales y distintos si $T^2 - 4D > 0$.

Haciendo un análisis de los eigenvalores con los casos antes mencionados obtenemos la siguiente tabla:

Discriminante	*Eigenvalores*	*traza*		*origen*
$T^2 - 4D < 0$	complejos	t>0		Fuente Espiral
		t<0		Sumidero Espiral
		t=0		Centro
$T^2 - 4D = 0$	repetidos	t>0		Fuente
		t<0		Sumidero
$T^2 - 4D > 0$	Reales	t>0	D=0	*
	Y		D>0	Fuente
	distintos		D<0	Silla
		t<0	D=0	**
			D>0	Sumidero
			D<0	silla

* un eigenvalor cero y otro positivo
** un eigenvalor cero y otro negativo

Ahora podemos empezar a examinar el plano traza-determinante . El eje T corresponde a la línea horizontal y el eje D a la vertical, entonces la curva $T^2 - 4D = 0$, que es igual a $D = \frac{T^2}{4}$, es una parábola con concavidad hacia arriba, la cual llamamos parábola de raíz repetida. Arriba de ésta encontramos $T^2 - 4D < 0.$ y abajo de ella $T^2 - 4D > 0.$



2.5 SISTEMAS NO HOMOGENEOS

Dado el sistema lineal no homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$
donde **A** es una matriz constante y el término no homogéneo **f**(t) es una función vectorial continua dada, sabemos que una solución general de la ecuación tiene la forma
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p$
$\mathbf{x}_c$ es una solución general del sistema homogéneo asociado.
$\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema original no homogéneo.

En esta sección se estudian los métodos para obtener la solución particular de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

2.5.1 Método de coeficientes indeterminados

Este es un método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas.
$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$
con el siguiente procedimiento

1) Se resuelve el sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
2) Se construye una forma para la solución particular tomando en cuenta la repetición de términos de la solución del sistema homogéneo asociado con los términos de la parte **f** del sistema.
3) Se sustituye esta solución particular y se resuelve para obtener las constantes en $\mathbf{x}_p$.

Formar la solución particular de los siguientes sistemas

a) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7 \end{cases}$$

en forma matricial
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

el determinante para sacar los valores propios es $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$\lambda = 4$ y $\lambda = 2$ entonces los vectores solución irán acompañados de factor e^{4t} y e^{2t} y no son iguales a e^{-t}, t y 1 por lo tanto se propone la solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + 1 \end{cases}$ en forma matricial $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

el determinante para sacar los valores propios es $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda = -3$ y $\lambda = 1$ los vectores solución irán acompañados del factor e^{-3t} y e^t.
Se repite e^t en la parte **f** del sistema y en la solución complementaria, por lo tanto se propone la solución particular considerando el valor propio 1 con multiplicidad 2, entonces la forma de la solución particular para el sistema es:

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + sent \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + \cos 2t \end{cases}$

En representación matricial el sistema tiene la forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} sent + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t$$

El determinante para sacar los valores propios es $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$ entonces los vectores solución irán acompañados del factor $e^{\lambda t}$ y no se repite con ningún factor de la parte **f** del sistema (s*ent, cos2t*) por lo tanto se propone la solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} sent + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} sen2t$$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y + e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + sen2t \end{cases}$

En forma matricial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} sen2t$$

el determinante para sacar los valores propios es $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda = \pm 2i$ entonces los vectores solución irán acompañados del factor $\cos 2t$ y $sen2t$.
Se repite $sen2t$ en la parte **f** del sistema y en la solución complementaria por lo tanto se propone la solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} sen2t + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} tsen2t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t \cos 2t$$

Con mucha frecuencia el método de coeficientes indeterminados puede encontrar la solución particular sin resolver el sistema homogéneo.

Ejemplo 17: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} e^{t}$$

Solución:

Primero se resuelve el sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ .Sustituyendo y simplificando se tiene

$$\begin{cases} (4-\lambda)k_1 + \frac{1}{3}k_2 = 0 \\ 9k_1 + (6-\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & \frac{1}{3} \\ 9 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$ entonces $\lambda = 7$ y $\lambda = 3$

Para $\lambda = 7$

$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & \frac{1}{3} & 0 \\ 9 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $k_1 = \frac{1}{9}k_2$, si $k_2 = 9$, $k_1 = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ es el primer vector propio.

Para $\lambda = 3$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 9 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $k_1 = \frac{-1}{3}k_2$ si $k_2 = -3$, $k_1 = 1$ entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ es el segundo vector propio.

La solución complementaria es

$$\mathbf{x}_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}e^{7t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}e^{3t}$$

Se sugiere una solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}e^{t} = \begin{pmatrix} a_1 e^{t} \\ b_1 e^{t} \end{pmatrix}.$$

Se sustituye en el sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 e^t \\ b_1 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^t \\ b_1 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{pmatrix} a_1 e^t \\ b_1 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 e^t + \frac{1}{3} b_1 e^t - 3e^t \\ 9a_1 e^t + 6b_1 e^t + 10e^t \end{pmatrix}$$

igualando obtenemos

$$\begin{aligned} 4a_1 e^t + \frac{1}{3} b_1 e^t - 3e^t - a_1 e^t &= 0 \\ 9a_1 e^t + 6b_1 e^t + 10e^t - b_1 e^t &= 0 \end{aligned}$$

reduciendo se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 3a_1 + \frac{1}{3} b_1 &= 3 \\ 9a_1 + 5b_1 &= -10 \end{aligned}$$ cuya solución es $a_1 = \dfrac{55}{36}$ y $b_1 = \dfrac{-19}{4}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 55/36 \\ -19/4 \end{pmatrix} e^t$$

Ejemplo 18: Encontrar la solución particular del siguiente Sistema de ecuaciones por el método de coeficientes indeterminados.

$$\begin{pmatrix} D^2-22 & D-3 \\ D+2 & D^2-4D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Solución:

Se propone la siguiente solución

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} a_1 e^{5t} \\ b_1 e^{5t} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema original

$$\begin{pmatrix} D^2-22 & D-3 \\ D+2 & D^2-4D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 e^{5t} \\ b_1 e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Resolviendo la multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} 25a_1e^{5t} - 22a_1e^{5t} + 5b_1e^{5t} - 3b_1e^{5t} \\ 5a_1e^{5t} + 2a_1e^{5t} + 25b_1e^{5t} - 20b_1e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

Igualando elementos

$$25a_1e^{5t} - 22a_1e^{5t} + 5b_1e^{5t} - 3b_1e^{5t} - 2e^{5t} = 0$$
$$5a_1e^{5t} + 2a_1e^{5t} + 25b_1e^{5t} - 20b_1e^{5t} - 3e^{5t} = 0$$

eliminando la exponencial llegamos a:

$$\begin{matrix} 25a_1 - 22a_1 + 5b_1 - 3b_1 - 2 = 0 \\ 5a_1 + 2a_1 + 25b_1 - 20b_1 - 3 = 0 \end{matrix} \quad \text{reduciendo} \quad \begin{matrix} 3a_1 + 2b_1 = 2 \\ 7a_1 + 5b_1 = 3 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$a_1 = 4$ y $b_1 = -5$

Entonces la solución particular es

$$x_p = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ -5e^{5t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 19: Encontrar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} D & -D-1 \\ 1 & D-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Se propone la solución para el sistema homogéneo asociado, $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} \lambda k_1 + (-\lambda - 1)k_2 = 0 \\ k_1 + (\lambda - 1)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -\lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen las soluciones $\lambda = 0 + i$ y $\lambda = 0 - i$

Para $\lambda = 0 + i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -i-1 & 0 \\ 1 & i-1 & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = (1-i)k_2 \quad \text{si} \quad k_2 = 1 \text{ entonces } k_1 = 1 - i$$

con lo cual una solución del sistema es $\begin{aligned} x &= (1-i)e^{it} \\ y &= 1e^{it} \end{aligned}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} \text{ siendo esta la primera solución } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}$$

Para $\lambda = 0 - i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & i-1 & 0 \\ 1 & -i-1 & 0 \end{array}\right) \qquad k_1 = (1+i)k_2 \quad \text{si} \quad k_2 = 1 \text{ entonces } k_1 = 1 + i$$

con lo cual otra solución del sistema es $\begin{aligned} x &= (1+i)e^{-it} \\ y &= 1e^{-it} \end{aligned}$

y se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}$$ siendo esta la segunda solución $$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}$$

La solución complementaria del sistema es

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it}$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + isent$

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + isent) + c_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t - isent)$$

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + isent - i\cos t + sent \\ \cos t + isent \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - isent + i\cos t + sent \\ \cos t - isent \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} + c_1 i \begin{pmatrix} sent - \cos t \\ sent \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} - c_2 i \begin{pmatrix} sent - \cos t \\ sent \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_c = (c_1 + c_2) \begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} + (c_1 - c_2) i \begin{pmatrix} sent - \cos t \\ sent \end{pmatrix}$$

Si $C_1 = (c_1 + c_2)$ y $C_2 = (c_1 - c_2)i$,

entonces la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x}_c = C_1 \begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} sent - \cos t \\ sent \end{pmatrix}$$

Se propone una solución particular de la forma

$$x_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{2t} \\ b_1 e^t + b_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Se sustituye la solución particular en el sistema

$$\begin{pmatrix} D & -D-1 \\ 1 & D-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^t + a_2 e^{2t} \\ b_1 e^t + b_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Resolviendo la multiplicación de matrices se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_1e^t + 2a_2e^{2t} - b_1e^t - 2b_2e^{2t} - b_1e^t - b_2e^{2t} \\ a_1e^t + a_2e^{2t} + b_1e^t + 2b_2e^{2t} - b_1e^t - b_2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Igualando las matrices e igualando a cero se obtiene

$$a_1e^t + 2a_2e^{2t} - b_1e^t - 2b_2e^{2t} - b_1e^t - b_2e^{2t} + e^t = 0$$
$$a_1e^t + a_2e^{2t} + b_1e^t + 2b_2e^{2t} - b_1e^t - b_2e^{2t} - e^{2t} = 0$$

Asociando se tiene
$$e^t(a_1 - 2b_1 + 1) + e^{2t}(2a_2 - 3b_2) = 0$$
$$a_1e^t + e^{2t}(a_2 + b_2 - 1) = 0$$
llegando a los sistemas

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 + 1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_2 - 3b_2 = 0 \\ a_2 + b_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas $a_1 = 0$ $b_1 = 1/2$ $a_2 = 3/5$ y $b_2 = 2/5$ por lo que

$$x_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Entonces la solución general es

$$\mathbf{x}_c = C_1\begin{pmatrix} \cos t + sent \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} sent - \cos t \\ sent \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Ejemplo 20: Encontrar la solución particular del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} D+1 & 2 \\ -1 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (\lambda+1)k_1 + 2k_2 = 0 \\ -k_1 + (\lambda-2)k_2 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \lambda+1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1) = 0$$

$\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ los vectores solución irán acompañados del factor e^0 y e^t.

Se repite e^0=constante en la parte **f** del sistema y en la solución complementaria, por lo tanto se propone la solución particular considerando el valor propio 0 con multiplicidad 2, entonces la forma de la solución particular para el sistema es:

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t e^{0t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{0t}$$

Reduciendo se obtiene

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema

$$\begin{pmatrix} D+1 & 2 \\ -1 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 t + a_2 \\ b_1 t + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices se obtiene

$$\begin{matrix} a_1 + a_1 t + a_2 + 2b_1 t + 2b_2 = 1 \\ -a_1 t - a_2 + b_1 - 2b_1 t - 2b_2 = 1 \end{matrix} \quad \text{asociando} \quad \begin{matrix} t(a_1 + 2b_1) + a_1 + a_2 + 2b_2 = 1 \\ t(-a_1 - 2b_1) - a_2 + b_1 - 2b_2 = 1 \end{matrix}$$

se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2b_1 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2b_2 = 1 \\ b_1 - a_2 - 2b_2 = 1 \end{cases} \quad \text{resolviendo}$$

$a_1 = 4$, $b_1 = -2$ y $a_2 = -2b_2 - 3$. Si $b_2 = -3$ entonces $a_2 = 3$

por lo tanto la solución particular del sistema es $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.5.2 Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros para sistemas goza de una gran flexibilidad y tiene una formulación matricial concisa que es conveniente tanto para propósitos prácticos como teóricos.

Se quiere encontrar una solución particular $\mathbf{x}_p$ del sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \qquad (1)$$

dado que se ha encontrado una solución general $\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + ... + c_n\mathbf{x}_n(t)$

del sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = p(t)\mathbf{x}$.

Utilizaremos la matriz fundamental $\phi(t)$ con vectores columna $\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_n$ para rescribir la función complementaria como $\mathbf{x}_c(t) = \phi(t)c$

si c=**U**(t) entonces

$$\mathbf{x}_p(t) = \phi(t)\mathbf{U}(t) \qquad (2)$$

Derivando ambos miembros

$$\mathbf{x}'_p(t) = \phi'(t)\mathbf{U}(t) + \phi(t)\mathbf{U}'(t) \qquad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos

$$\phi'(t)\mathbf{U}(t) + \phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{p}(t)\phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{f}(t)$$

pero $\phi'(t) = \mathbf{p}(t)\phi(t)$ por lo tanto

$\mathbf{p}(t)\phi(t)\mathbf{U}(t) + \phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{p}(t)\phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{f}(t)$ cancelando resulta

$$\phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{U}'(t) = \phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{U}(t) = \int \phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt \qquad (4)$$

sustituyendo (4) en (2)

$$\mathbf{x}_p(t) = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$$

Para utilizar este método el sistema debe tener su forma explícita.

Ejemplo 21: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{pmatrix} D-1 & 1 \\ 2D+4 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} e^t$ con condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:
El sistema puede expresarse como

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Se resuelve primero el sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} (1-\lambda)k_1 - k_2 = 0 \\ -6k_1 + (2-\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

Para encontrar los valores propios resolvemos

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 .$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen las soluciones
$\lambda = -1$ y $\lambda = 4$

Para $\lambda = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ o sea $k_1 = k_2/2$ si $k_2 = 2$ entonces $k_1 = 1$ por lo tanto la primera solución es $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$

Para $\lambda = 4$

$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ o sea $k_1 = -k_2/3$ si $k_2 = -3$ entonces $k_1 = 1$ por lo tanto la

segunda solución es $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}$

la solución complementaria es $\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}$

$$\phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & -3e^{4t} \end{pmatrix} \qquad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{t}/5 & e^{t}/5 \\ 2e^{-4t}/5 & -e^{-4t}/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & -3e^{4t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 3e^{t}/5 & e^{t}/5 \\ 2e^{-4t}/5 & -e^{-4t}/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} dt$$

Resolviendo el producto dentro de la integral

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & -3e^{4t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 21e^{2t}/5 - e^{2t}/5 \\ 14e^{-3t}/5 + e^{-3t}/5 \end{pmatrix} dt$$

Reduciendo en la integral

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & -3e^{4t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix} dt$$

Integrando la matriz se obtiene

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & -3e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 7e^{t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales t=0 y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que se reduce al sistema al sistema algebraico

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 = -6 \end{cases}$ con solución $c_1 = \frac{-6}{5}$ y $c_2 = \frac{6}{5}$.

Por lo tanto la solución es $\mathbf{x} = \frac{-6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}$

Ejemplo 22: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

Solución:
se resuelve primero el sistema homogéneo asociado

$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, para el cual $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$, entonces $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

Para $\lambda = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow k_1 = k_2 \qquad$ y si $k_2 = 1$ tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}k_2 \qquad$ y si $k_2 = 3$ tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$x_c = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-1}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{-t}/2 & -e^{-t}/2 \\ -e^t/2 & e^t/2 \end{pmatrix}$$

$$x_p = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 3e^{-t}/2 & -e^{-t}/2 \\ -e^t/2 & e^t/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}dt$$

$$x_p = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 3/2 - te^{-t}/2 \\ -e^{2t}/2 + te^t/2 \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t/2 + te^{-t}/2 + e^{-t}/2 \\ -e^{2t}/4 + te^t/2 - e^t/2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices se tiene

$$x_p = \begin{pmatrix} 3te^t/2 + t/2 + 1/2 - e^t/4 + t/2 - 1/2 \\ 3te^t/2 + t/2 + 1/2 - 3e^t/4 + 3t/2 - 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3te^t/2 - e^t/4 + t \\ 3te^t/2 - 3e^t/4 + 2t - 1 \end{pmatrix}$$

$$x_p = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución general será

$$x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-1} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 23: Resolver el siguiente sistema
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \tan t \end{pmatrix}$$

Solución:

Se resuelve primero el sistema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Se propone la solución $x = k_1 e^{\lambda t}$ y $y = k_2 e^{\lambda t}$ que en forma de matriz es $\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda t} \\ k_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema y simplificando se obtiene

$$\begin{cases} -\lambda k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + -\lambda k_2 = 0 \end{cases} \text{ para el cual } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado se obtienen las soluciones $\lambda = i$ y $\lambda = -i$.

Para $\lambda = i$

$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right)$ o sea $k_1 i = k_2$ si $k_1 = 1$, $k_2 = i$ por lo tanto la 1° solución es $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}$

Para $\lambda = -i$

$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right)$ o sea $k_1 i = -k_2$ si $k_1 = 1$, $k_2 = -i$ por lo tanto la 2° solución es $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it}$.

La solución complementaria es $\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it}$.

Utilizando la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i sen t$ y simplificando se llega a la siguiente solución

$$\mathbf{x}_c = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -sen t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} sen t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos t & sen t \\ -sen t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -sen t \\ sen t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \cos t & sen t \\ -sen t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & -sen t \\ sen t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sec t \tan t \end{pmatrix} dt$$

Resolviendo el producto dentro de la integral

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -sent \sec t \tan t \\ \cos t \sec t \tan t \end{pmatrix} dt$$

Reduciendo y por identidades trigonométricas se llega a

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 1 - \sec^2 x \\ \tan t \end{pmatrix} dt$$

Integrando la matriz se obtiene

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \cos t & sent \\ -sent & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \tan t \\ -in \cos t \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} t\cos t - sent - sentin \cos t \\ -tsent + sent \tan t - \cos tin \cos t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \cos t \\ -sent \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -sent \\ sent \tan t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} sent \\ \cos t \end{pmatrix} in \cos t$$

Por lo tanto la solución general es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -sent \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} sent \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ -sent \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -sent \\ sent \tan t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} sent \\ \cos t \end{pmatrix} in \cos t$$

CAPITULO III

APLICACIONES

En este capitulo se presenta una visión de la aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en diversos campos.

3.1 PANORAMA GENERAL

3.2 APLICACIÓN A MODELOS POBLACIONALES

3.3 UNA APLICACION A LAS MATEMATICAS FINANCIERAS

3.4 APLICACIÓN A LA ECONOMIA

3.1 PANORAMA GENERAL

Aunque en los libros de texto en su mayoría solo se mencionen aplicaciones a la física en la realidad su aplicación se extiende a otros campos cuando ocurren las siguientes situaciones

- Existen varias cantidades de interés.

- La tasa a la que una cantidad cambia a otra cantidad es proporcional a una combinación lineal de las cantidades.

Existe un gran número de posibilidades distintas. A continuación se mencionan algunas de las más usadas.

1. Una región está dividida en varias áreas. Las cantidades de interés son las poblaciones de cada área. Las poblaciones cambian debido a nacimientos, muertes, y migración. Las tasas de nacimiento y muerte son proporcionales al tamaño de la población actual. La tasa de migración puede ser proporcional a la población de un área.

2. Una especie animal está dividida en varios grupos de edad. Las cantidades de interés son el número en cada grupo de edad. Los individuos mueren o cambian de grupo de edad, con tasas proporcionales al número en el grupo. Nacen con tasas proporcionales a los números en los grupos de edad fértiles.

3. Una economía esta dividida en diferentes sectores. Las cantidades de interés son los bienes totales en cada sector. Los bienes de algunos sectores pueden ser consumidos, pueden usar bienes de otros sectores o pueden ser producidos para otros sectores a tasas que son combinaciones lineales de la cantidad de bienes en cada sector.

4. Un lago esta dividido en regiones sobre la base de patrones de circulación estable. Las cantidades de interés son las cantidades de contaminante en las diferentes regiones.

3.2 APLICACIÓN A MODELOS POBLACIONALES

Este es uno de los campos donde los sistemas de ecuaciones diferenciales han tenido mayor aplicación. Se maneja la siguiente situación:

Una especie se divide en *m* grupos, que se toman como grupos de edad. Suponga que *w* es el tamaño de los grupos en el tiempo *t*. Para cada grupo se hacen las siguientes suposiciones.

I. existe una pérdida debida a muertes que es proporcional al tamaño del grupo, *mw*.

II. Los individuos se gradúan de un grupo al siguiente a una tasa proporcional al tamaño del grupo, *gw*.

III. los grupos fértiles crían a sus recién nacidos a una tasa proporcional al tamaño del grupo, *nw*.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente problema
Suponga que una población de insectos pasa por tres etapas que se llaman larvas, embriones y adultos, sólo los adultos pueden reproducirse.
Encuentre el modelo para encontrar el número de individuos de cada grupo en el instante *t*

Solución:
Sea x=larvas, y = embriones y z=adultos.

Cada grupo tiene sus respectivas tasas de mortalidad, natalidad y graduación.

La ecuación que describe la razón de cambio en el número de larvas es la siguiente:

$$x' = -\begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ mortalidad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ larvas \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ graduación \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ larvas \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ natalidad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ adultos \end{bmatrix}$$

La ecuación que describe la razón de cambio en el número de embriones es:

$$y' = -\begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ mortalidad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ embriones \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ graduación \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ embriones \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ graduación \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ larvas \end{bmatrix}$$

La ecuación que describe la razón de cambio en el número de adultos es:

$$z' = -\begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ mortalidad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ adultos \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ graduación \end{bmatrix}\begin{bmatrix} número \cdot de \\ embriones \end{bmatrix}$$

por tanto el sistema a resolver es: $\begin{cases} x' = -m_1 x - g_1 x + n_1 z \\ y' = -m_2 y - g_2 y + g_1 x \\ z' = -m_3 z + g_2 y \end{cases}$

con todas las constantes positivas y las condiciones iniciales no negativas.

3.3 UNA APLICACIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Otro campo en el cual se presenta la aplicación de las ecuaciones diferenciales, es en las Instituciones Financieras, debido a que los Capitales se encuentran en constante movimiento y varían dependiendo del tiempo, es decir, mientras mayor Capital me preste el Banco, mayor interés debo pagarle, ó en el caso opuesto, el dinero que yo invierta en el Banco, habitualmente me generará mayor interés mientras mayor sea el tiempo que yo lo tenga invertido.

Interés simple

Ejemplo 2: Analicemos una aplicación de las ecuaciones diferenciales en las tasas de interés.

El Sr. Pedro Ramírez solicitó al Banco del Atlántico un préstamo por $100, el cual pagará en un plazo de 3 años, y el Banco del Atlántico le cobrará al Sr. Ramírez intereses a una tasa de interés del 10% anual.
¿Cuánto debe pagar el Sr. Ramírez al término del plazo?

Solución:
Este es un problema demasiado simple, sin embargo ahora lo abordaremos desde la perspectiva de las ecuaciones diferenciales.

Planteamiento del problema

Si "y" es el adeudo, entonces $\frac{dy}{dt} = 10$ con la condición inicial $y(0) = 100$

Lo anterior significa que la razón de cambio del adeudo "y" con respecto al tiempo "t" es 10, y que el valor del adeudo en el tiempo "0" es 100.

Resolviendo la ecuación	$\frac{dy}{dt} = 10$ con $y(0) = 100$
Separando variables	$dy = 10dt$
Integrando en ambos miembros de la se tiene que	$\int dy = \int 10dt$
Entonces	$y = 10t + c$
Sustituyendo la condición inicial donde	$y = 100$, $t = 0$
Obtenemos que $c = 100$, por lo cual la función del adeudo será:	$y = 10t + 100$
Por lo tanto, al término de los tres años $t = 3$, la deuda será:	$y = 10(3) + 100 = 130$

Interés compuesto

Ejemplo 3: Analicemos el siguiente problema.
El Sr. Jacinto Pérez abrió una cuenta en el Banco del Norte con un Capital inicial de \$5,000.00, y el Banco le ofreció pagarle una tasa de rendimiento del 6% capitalizable diariamente.
¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta el Sr. Pérez al término de 5 años?

Solución:

Planteamiento del problema

Sea:

C = Capital inicial invertido
M = Monto (al final del plazo)
i = Tasa de rendimiento anual

Si "M" es el Monto, entonces $\frac{dM}{dt} = 0.06M$ con la condición inicial $M(0) = 5{,}000$

Lo anterior significa que la razón de cambio del Monto con respecto al tiempo es $0.06M$, y que el valor del Monto en el tiempo "0" es $M(0)=5{,}000$.

Resolviendo la ecuación $\frac{dM}{dt} = 0.06M$

Por el método de variables separables $\frac{dM}{M} = 0.06dt$

Integrando en ambos miembros de la ecuación se tiene que $\int \frac{dM}{M} = \int 0.06dt$

Entonces $\ln M = 0.06t + c$

Eliminando los logaritmos $M = e^{0.06t} * e^{c}$ si $k = e^{c}$

La ecuación ahora toma la siguiente forma $M = ke^{0.06t}$

Sustituyendo la condición inicial donde $M=5000$, $t=0$

Obtenemos que $k=5000$, por lo cual la función del Monto será: $M = 5000e^{0.06t}$

Por lo tanto, al término de los cinco años t=5, el Monto será: $M = 5000e^{0.06*5}$

Es decir, el Sr. Pérez tendrá $M = \$6{,}749.29$

En conclusión la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ modela el interés continuo de un depósito inicial, donde $P(t)$ es la cantidad de dinero y k es la tasa de crecimiento. Este modelo, con frecuencia, es solo suficientemente exacto si se trata de interés compuesto diariamente. Sin embargo, pueden realizarse depósitos adicionales ó entradas. Esto lleva a una ecuación diferencial que no es homogénea.

Ejemplo 4: Resolver
El día de hoy, Arturo Peña va a invertir un Capital de $1,000 en el Banco Belice, y le ofrecieron pagarle un rendimiento anual del 7%, capitalizable diariamente, sin embargo, Arturo Peña desea agregar a su cuenta $10.00 diariamente.

¿De qué manera podemos saber qué cantidad de dinero tiene Arturo Peña en su cuenta en determinado tiempo?

Solución:

Primero debemos determinar la ecuación diferencial que se puede aplicar .

En este caso, la cantidad de dinero se incrementa por dos razones, *el interés* y los *depósitos adicionales*.

En general, se puede escribir una ecuación en palabras para la tasa de cambio de la cantidad:

$$\begin{bmatrix} tasa \cdot de \\ cambio \cdot del \\ dinero \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tasa \cdot de \cdot incremento \\ debida \cdot al \cdot \text{int}\, erés \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tasa \cdot de \cdot incremento \\ debida \cdot al \cdot deposito \end{bmatrix}$$

Entonces la ecuación diferencial es: $\frac{dP}{dt} = 0.07P + 3650$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes.

Este caso se puede extender a varias cuentas bancarias en las que hay entradas y salidas de dinero, por lo tanto el número de ecuaciones se incrementará en función al número de cuentas dando como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales formando así un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5: Resolver el siguiente problema.
Se establecen dos cuentas de inversión con \$1000 iniciales en la cuenta A, y \$ 2000 iniciales en la cuenta B.
La cuenta A, es una cuenta a largo plazo y gana el 10% de interés anual compuesto diariamente .
La cuenta B gana el 5% de interés anual compuesto diariamente.
Se hacen depósitos en B a una de tasa de \$10 al día.
Cada día el banco transfiere dinero de B a A, a una tasa anual de 20% de la diferencia entre B y \$2000.
Establecer las ecuaciones diferenciales que modelan esta situación.

Solución:
El sistema que modela la situación es

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 0.1a + 0.2(b-2000) \\ \dfrac{db}{dt} = 0.05b + 3650 - 0.2(b-2000) \end{cases} \quad \text{con condiciones iniciales} \quad \begin{array}{l} a(0) = 1000 \\ b(0) = 2000 \end{array}$$

simplificando el sistema se tiene

$$\begin{cases} a' = \dfrac{1}{10}a + \dfrac{1}{5}b - 400 \\ b' = \dfrac{-3}{20}b + 4050 \end{cases}$$

Se resolverá este sistema con transformadas de Laplace . Se puede ver que la segunda ecuación tiene una sola variable; se empezará por resolver esta ecuación:

$$b' = \frac{-3}{20}b + 4050$$

aplicando transformada de Laplace a ambos miembros

$$\ell\{b'\} = \frac{-3}{20}\ell\{b\} + 4050\ell\{1\}$$

$$sB(s) - b(0) = \frac{-3}{20}B(s) + \frac{4050}{s}$$

$B(s)(s + \frac{3}{20}) = \frac{4050}{s} + 2000$ despejando B(s) y simplificando se obtiene

$$B(s) = 1000\left(\frac{40s+81}{s(20s+3)}\right)$$

descomponiendo en fracciones parciales

$$B(s) = 1000\left(\frac{27}{s} - \frac{500}{20s+3}\right)$$

$$\ell^{-1}\{B(s)\} = 27000\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{500000}{20}\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{3}{20}}\right\}$$

Resolviendo las transformadas inversas, obtenemos:

$$b(t) = 27{,}000 - 25{,}000e^{-\frac{3}{20}t}$$

Ahora encontraremos a(t)

$$a' = \frac{1}{10}a + \frac{1}{5}b - 400$$

$$\ell\{a'\} = \frac{1}{10}\ell\{a\} + \frac{1}{5}\ell\{b\} - 400\ell\{1\}$$

$$sA(s) - a(0) = \frac{1}{10}A(s) + \frac{1}{5}B(s) - \frac{400}{s}$$

$$sA(s) - \frac{1}{10}A(s) = \frac{1}{5}B(s) - \frac{400}{s} + 1000$$

$$A(s)\left(s - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5}\left[1000\left(\frac{40s+81}{s(20s+3)}\right)\right] + \frac{1000s-400}{s}$$

$$A(s)\left(\frac{10s-1}{10}\right) = \frac{8000s+16200}{s(20s+3)} + \frac{1000s-400}{s}$$

$$A(s)\left(\frac{10s-1}{10}\right) = \frac{20000s^2+3000s+15000}{s(20s+3)}$$

$$A(s) = (10)(1000)\left[\frac{20s^2+3s+15}{s(20s+3)(10s-1)}\right]$$ descomponiendo en fracciones parciales

$$A(s) = 10000\left[\frac{-5}{s} + \frac{40}{20s+3} + \frac{31}{10s-1}\right]$$

$$\ell^{-1}\{A(s)\} = -50000\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 20000\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{3}{20}}\right\} + 31000\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{10}}\right\}$$

$$a(t) = -50000 + 20000e^{\frac{-3}{20}t} + 31000e^{\frac{1}{10}t}$$

Por lo tanto la solución del sistema es

$$a(t) = -50000 + 20000e^{\frac{-3}{20}t} + 31000e^{\frac{1}{10}t}$$

$$b(t) = 27{,}000 - 25{,}000e^{-\frac{3}{20}t}$$

Supongamos que queremos conocer el rendimiento de las cuentas A y B transcurridos 15 días, para lo cual sustituimos t=15/365 de lo cual se obtiene
a(t)=1004.75
b(t)=2153.63

Utilizando matemáticas financieras para elaborar una tabla del rendimiento de ambas inversiones por día se obtiene

CUENTA A

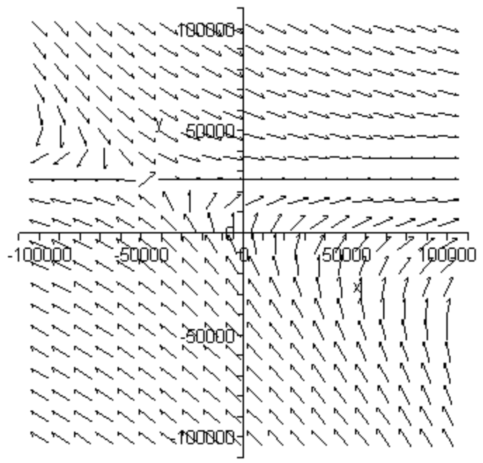
Día	Capital	Tasa diaria	Rendimiento Diario	Acumulado	Depósito	Monto final
1	1,000.00	0.0273973%	0.27	1,000.27	0.01	1,000.28
2	1,000.28	0.0273973%	0.27	1,000.55	0.01	1,000.56
3	1,000.56	0.0273973%	0.27	1,000.84	0.02	1,000.86
4	1,000.86	0.0273973%	0.27	1,001.13	0.02	1,001.15
5	1,001.15	0.0273973%	0.27	1,001.43	0.03	1,001.46
6	1,001.46	0.0273973%	0.27	1,001.73	0.03	1,001.76
7	1,001.76	0.0273973%	0.27	1,002.04	0.04	1,002.08
8	1,002.08	0.0273973%	0.27	1,002.35	0.04	1,002.40
9	1,002.40	0.0273973%	0.27	1,002.67	0.05	1,002.72
10	1,002.72	0.0273973%	0.27	1,003.00	0.06	1,003.05
11	1,003.05	0.0273973%	0.27	1,003.33	0.06	1,003.39
12	1,003.39	0.0273973%	0.27	1,003.66	0.07	1,003.73
13	1,003.73	0.0273973%	0.27	1,004.01	0.07	1,004.08
14	1,004.08	0.0273973%	0.28	1,004.35	0.08	1,004.43
15	1,004.43	0.0273973%	0.28	1,004.71	0.08	1,004.75
16	1,004.79	0.0273973%	0.28	1,005.07	0.09	1,005.16
17	1,005.16	0.0273973%	0.28	1,005.43	0.10	1,005.53
18	1,005.53	0.0273973%	0.28	1,005.80	0.10	1,005.90
19	1,005.90	0.0273973%	0.28	1,006.18	0.11	1,006.29
20	1,006.29	0.0273973%	0.28	1,006.56	0.11	1,006.67
21	1,006.67	0.0273973%	0.28	1,006.95	0.12	1,007.07
22	1,007.07	0.0273973%	0.28	1,007.34	0.12	1,007.47
23	1,007.47	0.0273973%	0.28	1,007.74	0.13	1,007.87
24	1,007.87	0.0273973%	0.28	1,008.15	0.13	1,008.28
25	1,008.28	0.0273973%	0.28	1,008.56	0.14	1,008.70
26	1,008.70	0.0273973%	0.28	1,008.98	0.15	1,009.12
27	1,009.12	0.0273973%	0.28	1,009.40	0.15	1,009.55
28	1,009.55	0.0273973%	0.28	1,009.83	0.16	1,009.98
29	1,009.98	0.0273973%	0.28	1,010.26	0.16	1,010.42
30	1,010.42	0.0273973%	0.28	1,010.70	0.17	1,010.87

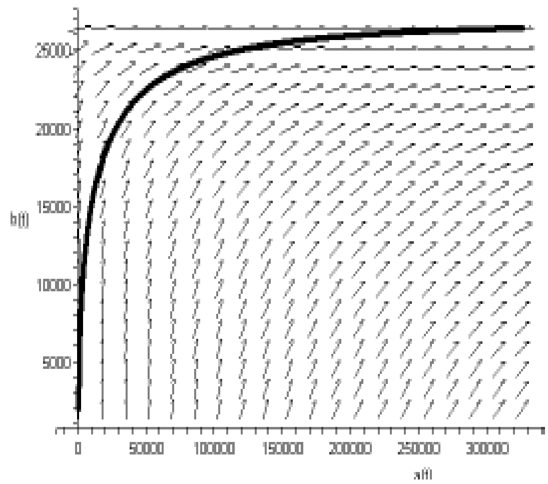
CUENTA B

Día	Saldo Inicial	Tasa diaria	Rend. Diario	Acumulado	Depósito	Monto	Importe de referencia	20% del excedente	Retiro A cuenta A	Saldo final
1	2,000.00	0.0136986%	0.27	2,000.27	10	2,010.27	2,000.00	10.27	0.01	2,010.27
2	2,010.27	0.0136986%	0.28	2,010.54	10	2,020.54	2,000.00	20.54	0.01	2,020.53
3	2,020.53	0.0136986%	0.28	2,020.81	10	2,030.81	2,000.00	30.81	0.02	2,030.79
4	2,030.79	0.0136986%	0.28	2,031.07	10	2,041.07	2,000.00	41.07	0.02	2,041.05
5	2,041.05	0.0136986%	0.28	2,041.33	10	2,051.33	2,000.00	51.33	0.03	2,051.30
6	2,051.30	0.0136986%	0.28	2,051.58	10	2,061.58	2,000.00	61.58	0.03	2,061.55
7	2,061.55	0.0136986%	0.28	2,061.83	10	2,071.83	2,000.00	71.83	0.04	2,071.79
8	2,071.79	0.0136986%	0.28	2,072.07	10	2,082.07	2,000.00	82.07	0.04	2,082.03
9	2,082.03	0.0136986%	0.29	2,082.31	10	2,092.31	2,000.00	92.31	0.05	2,092.26
10	2,092.26	0.0136986%	0.29	2,092.55	10	2,102.55	2,000.00	102.55	0.06	2,102.49
11	2,102.49	0.0136986%	0.29	2,102.78	10	2,112.78	2,000.00	112.78	0.06	2,112.72
12	2,112.72	0.0136986%	0.29	2,113.01	10	2,123.01	2,000.00	123.01	0.07	2,122.94
13	2,122.94	0.0136986%	0.29	2,123.23	10	2,133.23	2,000.00	133.23	0.07	2,133.16
14	2,133.16	0.0136986%	0.29	2,133.45	10	2,143.45	2,000.00	143.45	0.08	2,143.37
15	2,143.37	0.0136986%	0.29	2,143.67	10	2,153.67	2,000.00	153.67	0.08	2,153.63
16	2,153.58	0.0136986%	0.30	2,153.88	10	2,163.88	2,000.00	163.88	0.09	2,163.79
17	2,163.79	0.0136986%	0.30	2,164.08	10	2,174.08	2,000.00	174.08	0.10	2,173.99
18	2,173.99	0.0136986%	0.30	2,174.29	10	2,184.29	2,000.00	184.29	0.10	2,184.19
19	2,184.19	0.0136986%	0.30	2,184.49	10	2,194.49	2,000.00	194.49	0.11	2,194.38
20	2,194.38	0.0136986%	0.30	2,194.68	10	2,204.68	2,000.00	204.68	0.11	2,204.57
21	2,204.57	0.0136986%	0.30	2,204.87	10	2,214.87	2,000.00	214.87	0.12	2,214.75
22	2,214.75	0.0136986%	0.30	2,215.05	10	2,225.05	2,000.00	225.05	0.12	2,224.93
23	2,224.93	0.0136986%	0.30	2,225.24	10	2,235.24	2,000.00	235.24	0.13	2,235.11
24	2,235.11	0.0136986%	0.31	2,235.41	10	2,245.41	2,000.00	245.41	0.13	2,245.28
25	2,245.28	0.0136986%	0.31	2,245.59	10	2,255.59	2,000.00	255.59	0.14	2,255.45
26	2,255.45	0.0136986%	0.31	2,255.76	10	2,265.76	2,000.00	265.76	0.15	2,265.61
27	2,265.61	0.0136986%	0.31	2,265.92	10	2,275.92	2,000.00	275.92	0.15	2,275.77
28	2,275.77	0.0136986%	0.31	2,276.08	10	2,286.08	2,000.00	286.08	0.16	2,285.92
29	2,285.92	0.0136986%	0.31	2,286.24	10	2,296.24	2,000.00	296.24	0.16	2,296.07
30	2,296.07	0.0136986%	0.31	2,296.39	10	2,306.39	2,000.00	306.39	0.17	2,306.22

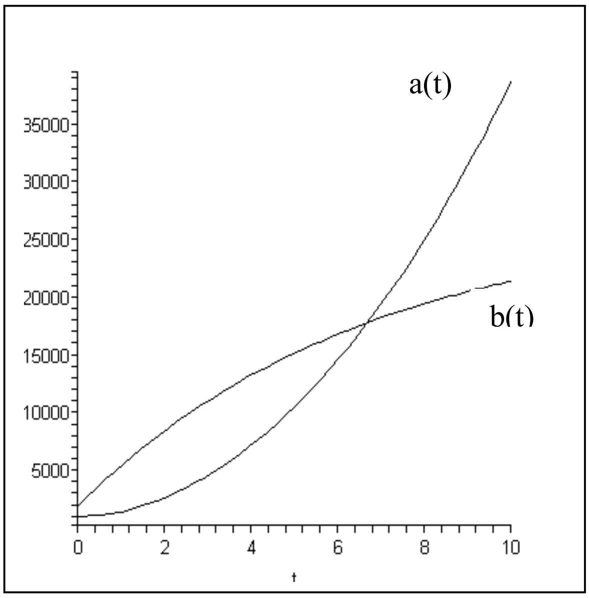
Se observa que los resultados del sistema y el análisis del rendimiento de cada cuenta coinciden.

A continuación se muestran el campo de direcciones y el retrato de fase del sistema





En el retrato de fase se puede observar el crecimiento continuo de la cuenta a(t), mientras que la cuenta b(t) también crece, pero a medida que el tiempo aumenta se mantiene constante.
Lo mismo se puede ver en la grafica de las soluciones.



Comportamiento de las cuentas en 10 años.

3.4 APLICACIÓN A LA ECONOMÍA

Sobreajuste del tipo de cambio (overshooting).

Antes de presentarlo, daremos algunas consideraciones económicas. Se tienen dos países: uno pequeño, que es el país de casa, digamos México y el otro grande, que es el país extranjero, por ejemplo Estados Unidos. Ambos países están poblados por agentes racionales con previsión perfecta.
Se coloca un asterisco a las variables cuando estas corresponden al país extranjero. Si M y P se refieren a la cantidad nominal de dinero, medida en pesos, y al índice de precios medido en $\left(\frac{pesos}{consumible}\right)$, entonces la cantidad real de dinero, o balances reales es el cociente M/P, cuyas unidades son simplemente consumibles, es decir unidades reales de consumo. En otras palabras M representa la cantidad de dinero disponible para comprar; y P precio del consumible por lo que el cociente dará el número de consumibles que se pueden adquirir.

Pensemos en la tasa nominal de interés como aquella que nos proporciona un instrumento gubernamental local, como un Cete (certificado de la tesorería). Si la tasa nominal de interés aumenta, los agentes económicos tienen un incentivo para comprar Cetes por lo que se deshacen de sus balances reales y adquieren esos instrumentos. Este comportamiento lo podemos expresar diciendo que los balances reales son inversamente proporcionales a la tasa nominal de interés $\frac{M}{P} = k_1\left(\frac{1}{I}\right)$.
I = tasa nominal de interés
Siendo k_1 la constante de proporcionalidad.
Para convertir esta ecuación en una ecuación lineal consideremos lo siguiente:
Sean B_r los balances reales, entonces $B_r = \frac{M}{P}$ sacando logaritmos en ambos miembros $\ln B_r = \ln\frac{M}{P}$ esto es $\ln B_r = \ln M - \ln P$, si $b = \ln B_r$, $m = \ln M$ y $p = \ln P$ la ecuación $\ln B_r = \ln M - \ln P$ queda expresada como $\underline{b_r = m - p}$.
Si $TN_i = \frac{1}{I}$ representa la inversa de la tasa nominal de interés, obteniendo logaritmos de ambos miembros se tiene $\ln TN_i = \ln\frac{1}{I}$ que es igual a $\ln TN_i = -\ln I$, si se toman los siguientes cambios de variable $tn_i = \ln TN_i$ y $i = \ln I$ entonces la ecuación $\ln TN_i = -\ln I$ queda expresada como $\underline{tn_i = -i}$.
Entonces la afirmación los balances reales son inversamente proporcionales a la tasa nominal de interés se puede representar como $m - p = -\mu i$

Si además i e $i*$ denotan las tasas de interés nominal del país de casa y del país extranjero, respectivamente.

El tipo de cambio F está medido en $\left(\frac{unidades \cdot de \cdot moneda \cdot local}{unidad \cdot de \cdot moneda \cdot extranjera}\right) = \left(\frac{pesos}{dolar}\right)$

El tipo de cambio real se define como el cociente $\frac{FP^*}{P}$ cuyas unidades quedan dadas por

$$\frac{\left(\frac{pesos}{dollar}\right)\left(\frac{dolar}{consumible^*}\right)}{\left(\frac{pesos}{consumible}\right)} = \left(\frac{consumible}{consumible^*}\right)$$

es decir, nos da el valor de los consumibles o bienes extranjeros en términos de los bienes locales. De ahí viene el nombre de "tipo de cambio real".Si el tipo de cambio real aumenta entonces los bienes extranjeros son mas caros con respecto a los bienes locales o equivalentemente, los bienes locales son más baratos con respecto a los extranjeros, lo que promueve el aumento en las exportaciones nacionales. Debido a esta observación, es natural suponer que la producción de bienes nacionales o ingreso Y es proporcional al tipo de cambio real . $Y = k_2 \frac{FP^*}{P}$.

Siendo k_2 la constante de proporcionalidad.

Para convertir el modelo en uno lineal consideremos lo siguiente
TCR = tipo de cambio real.

$TCR = \frac{FP^*}{P}$ sacando logaritmos en ambos miembros $\ln TCR = \ln F + \ln P^* - \ln P$

tomando los siguientes cambios de variable $tcr = \ln TCR$, $f = \ln F$, $p^* = \ln P^*$ y $p = \ln P$
la ecuación $\ln TCR = \ln F + \ln P^* - \ln P$ se puede expresar como $tcr = f + p^* - p$ y si $y = \ln Y$
la afirmación el ingreso es proporcional al tipo de cambio real la podemos representar como $y = \beta(f + p^* - p)$.

Entonces las observaciones hechas anteriormente implican las siguientes relaciones

$$m - p = -\mu i$$
$$y = \beta(f + p^* - p)$$

aquí μ y β son constantes positivas , m es la oferta nominal de dinero que suponemos constante..

Asumamos que i^* es una constante; esto sucede si $(p^*)'$,la inflación en el país extranjero es cercana a cero y por la tanto la tasa de interés nominal es igual a la tasa real. Adicionalmente asumimos que la economía es totalmente abierta en ambos países . La condición de paridad en la tasa de interés implica la relación $i = i^* + f'$

Esto simplemente nos dice que no existe arbitraje en el mercado de bonos de ambos países es decir no se puede hacer dinero comprando bonos en un país y vendiéndolos en otro. Tenemos entonces una relación en la cual la inflación es proporcional al ingreso $p' = \vartheta y$

Sin perdida de generalidad, las constantes p^* e i^* las normalizamos a cero (recuérdese que están expresadas en logaritmos). De esta forma $i = i^* + f'$ y $y = \beta(f + p^* - p)$ toman la siguiente forma $i = f'$ y $y = \beta(f - p)$ sustituyendo en $m - p = -\mu i$ y en $p' = \vartheta y$ obtenemos

$$f' = \frac{p-m}{\mu} \quad \text{y}$$

$$p' = \beta\vartheta(f - p)$$

Estas últimas dos ecuaciones forman un sistema lineal en las variables f y p, y que se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} f' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu \\ \beta\vartheta & -\beta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m/\mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante del sistema es negativo $-\dfrac{\beta\theta}{\mu}$. Ahora encontraremos los valores propios

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/\mu \\ \beta\theta & -\beta\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \beta\theta\lambda - \dfrac{\beta\theta}{\mu} = 0$ resolviendo la ecuación de 2° grado se tiene:

$$\lambda = \frac{-\beta\theta \pm \sqrt{\beta^2\theta^2 + 4\beta\theta/\mu}}{2}$$

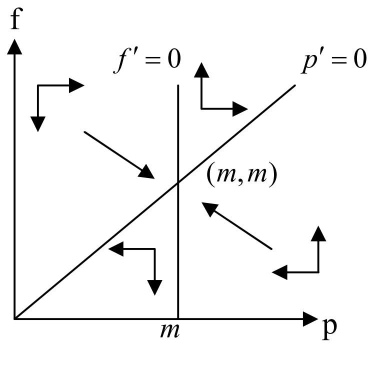
Los valores propios son reales y de signos diferentes.

El estado estacionario se obtiene resolviendo $f' = 0$ para el cual f=m

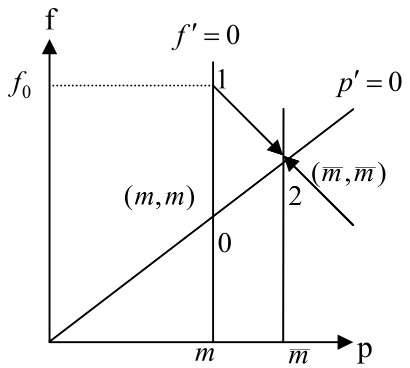
$p' = 0$ para el cual p=f o sea p=m.

por lo tanto el estado estacionario es (p,f)=(m,m).

dibujando el diagrama de fase obtenemos



Supongamos que el sistema se encuentra en su estado estacionario, (m,m) y que el índice de precios p en el país de casa es “pegajoso”, en el sentido de que los precios no se ajustan instantáneamente en respuesta a cambios a los parámetros . Si hay un cambio en la política monetaria del país de casa y la oferta nominal de dinero aumenta inesperadamente a un nivel $\overline{m}$ el nuevo estado estacionario ($\overline{m}$, $\overline{m}$), esta arriba y a la derecha del anterior.



En el momento en que la provisión de dinero se incrementa, la tasa de cambio brinca al punto 1 de su valor inicial estable 0. con el tiempo el sistema se mueve a lo largo de la ruta del punto silla al nuevo valor estable 2, con el tipo de cambio cayendo y el nivel de precios aumentando. Así el tipo de cambio sobrepasa su nuevo valor estable.

Con un incremento en la oferta monetaria, el tipo de cambio se deprecia en la misma proporción en que, en el largo plazo, suben el dinero los salarios y los precios.
La depreciación de F puede sobrepasar(over shoot) su valor de largo plazo.
El fenómeno del overshooting muestra que efectivamente las variaciones en la oferta monetaria pueden provocar saltos en el tipo de cambio que son proporcionalmente mayores en el corto plazo.

CONCLUSIONES

El presente trabajo es el resultado de una inquietud por conocer las aplicaciones reales que pueden tener los **"**sistemas de ecuaciones diferenciales**"**. Durante el desarrollo del mismo, se logró visualizar que estos se encuentran inmersos en los modelos matemáticos que definen determinados fenómenos sociales, y en ellos, el *tiempo* es la razón fundamental que determina su constante cambio.

En la bibliografía que se consultó, se encontró que la representación matemática de los "sistemas de ecuaciones diferenciales"**,** difiere de acuerdo con cada autor, y las principales formas utilizadas son: *la representación matricial, con operadores diferenciales, y a través de un conjunto de ecuaciones.*

Derivado de lo anterior, se identificó que independientemente de su forma de representación, se aplica el mismo método de solución para cada caso, ya que es posible adaptar los elementos que definen un sistema de ecuaciones diferenciales a dicho método. Así mismo, se establecieron las bases para identificar el método de solución que debe utilizarse para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, de acuerdo a las condiciones que éste lleve implícitas.

En la aplicación a las matemáticas financieras, se muestran las tablas del desarrollo de la obtención de interés compuesto a una tasa capitalizable diariamente, aplicado a dos cuentas de inversión, en las cuales, su monto se va modificando debido a la entrada y salida de capital. Este tipo de cuentas que tienen movimiento continuo, son utilizadas en los bancos, y son aquellas en las que el cliente puede disponer de su dinero en el momento que el lo requiera, por lo cual a través un sistema de ecuaciones diferenciales, es posible conocer el monto que la cuenta en determinada fecha rápidamente.

Basándonos en esta aplicación financiera, se dedujo que la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, simplifica operaciones que requieren de *tiempos* y *procesos* prolongados, reduciéndolos a una simple sustitución en una función matemática, cuya solución optimiza estos valiosos elementos, y cuyo resultado final es el mismo al que se obtiene a través del desarrollo de una tabla financiera. Cabe mencionar, que dependiendo de las necesidades de la persona, se optará por determinar el valor de una inversión a través de un proceso u otro.

Los "sistemas de ecuaciones diferenciales" tienen una fuerte aplicación en el campo de la ecología, como es el caso del estudio de los cambios poblacionales de los animales para los cuales ya existen modelos encontrados en los libros, sin embargo los autores plasman modelos aplicados en esta área, en las ciudades ó comunidades pero estos son de difícil acceso.

En esta investigación, solo se encontró información en libros y documentos provenientes de Estados Unidos, lo cual nos indica que en nuestro país, esta aplicación no ha sido abordada, ó quizá solo en cierta medida, siendo así esta, una oportunidad de estudio para nuevas generaciones que estén interesadas en las aplicaciones matemática en este entorno.

Los "sistemas de ecuaciones diferenciales" también son una herramienta muy importante en los modelos económicos, ya que estos manejan diversas variables que cambian constantemente con respecto al *tiempo*, tal es el caso del cambio de precio de un producto respecto al *tiempo* (inflación).

Anteriormente, la aplicación de los "sistemas de ecuaciones diferenciales" lineales se restringía a fenómenos de la Física, sin embargo, en los últimos años se ha extendido considerablemente en diversos campos como son: Medicina, Biología, Ecología, Demografía, etc.

El mundo se encuentra en constante cambio, y su razón de cambio es el *tiempo*, por lo cual podemos deducir, que los "sistemas de ecuaciones diferenciales" pueden ser aplicados en cualquier ámbito.

De acuerdo con el desarrollo del presente trabajo, queda demostrado que los sistemas de ecuaciones diferenciales son utilizados en diversos campos y su aplicación se esta extendiendo cada vez más a otras áreas, por lo que el estudio de esta herramienta matemática es muy importante. Por lo anterior, el objetivo de este trabajo ha sido cubierto.

BIBLIOGRAFÍA

1) Aplied calculus
Raymond A. Barnett
Macmillan college publishing company, Inc. 1994 New York

2) Introducción al Álgebra lineal
Howard Anton
Editorial limusa, S. A. de C.V. México D.F. 1968.

3) Álgebra Lineal
Stanley I. Grossman
Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. 1988.

4) Ecuaciones diferenciales
Daniel A. Marcus
Editorial CECSA. México 1996.

5) Introducción a las ecuaciones diferenciales
Con problemas de valor de frontera
Stephen L. Campell
McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V México DF. 1998

6) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera
William E. Boyce
Editorial Limusa. México DF. 1983.

7) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones
Dennis G. Zill
Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V. 1988.

8) Ecuaciones Diferenciales
C. Henry Edwards
Pearson Education, México, 2001.

9) Ordinary differential equations with modern applications.
Finizio and Ladas
Wadsworth publishing company. Inc. 1978.

10) Introduction to differential equations .
Richard K. Millar.
Printice Hall, Englewood Cliffs 1991.

11) Métodos Dinámicos en Economía
Héctor Lomelí
Internacional Thomsom Editores S.A. de C.V. México 2003.

12) Mathematical Methods for Ecomomics
Michael W. Klein
Addison-Wesley Educational Publishers Inc. 1998.