



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**MODELOS PARA EL ANÁLISIS DE MIEMBROS  
COMPUESTOS DE CONCRETO Y ACERO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

**JOSÉ ENRIQUE BLANCO BELTRÁN**

TUTOR:

**Dr DAVID MURIÀ VILA**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr Meli Piralla Roberto  
Secretario: Dr Gómez Martínez Roberto  
Vocal: Dr Escobar Sánchez José Alberto  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr Escobar Sánchez José Alberto  
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr Perez Gavilan Escalante Juan José

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**



DAVID MURIA VILA

Dedico este trabajo a mis padres José Manuel Blanco García y Adela Beltrán Erazo, por su apoyo a pesar de la larga separación que hemos sufrido durante el desarrollo de esta investigación.

A mi esposa Jacqueline Peralta Martínez por su paciencia y comprensión

A una hermosa bebe que me dio mucha fuerza al final, y la cual no tiene nombre en el momento de escribir esta dedicatoria.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a mi tutor, Dr David Murià Vila por su paciencia, apoyo y valiosos comentarios brindados durante el desarrollo de la presente investigación.

Manifiesto mi agradecimiento al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo económico dado para la realización de este estudio, y por las oportunidades brindadas para exponer los principales resultados de esta investigación ante varios investigadores de reconocido prestigio internacional.

Expreso mi gratitud a los miembros del comité doctoral, Dr Juan José Pérez Gavilán Escalante, Dr Roberto Meli Piralla, y Dr Roberto Gómez Martínez por sus valiosos comentarios en aras de mejorar el trabajo presentado.

## ÍNDICE

<b>1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Modelos disponibles en la literatura.....	2
1.2 Objetivos y alcance.....	5
<b>2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA</b> .....	<b>6</b>
2.1 Método general de solución.....	11
2.2 Solución por el método de diferencia finita.....	13
2.2.1 Implementación de las diferencias finitas .....	14
2.2.2 Limitaciones de los procedimientos de la literatura .....	15
2.2.3 Procedimiento propuesto .....	16
2.2.3.1 Definición de la matriz de rigidez y el vector de resistencia.....	17
2.2.3.2 Cálculo de valores de respuesta internos.....	20
2.3 Solución por el método de elemento finito.....	21
2.3.1 Sistema de ecuaciones diferenciales sin efecto del cortante.....	21
2.3.2 Modelo EF basado en desplazamientos.....	22
2.3.3 Modelo EF basado en fuerza .....	24
2.3.3.1 Deducción de las funciones de forma.....	27
2.3.3.2 Cálculo de la respuesta interna del miembro.....	30
<b>3 CALIBRACIÓN DE LOS MODELOS</b> .....	<b>32</b>
3.1 Trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortante .....	32
3.2 Trabe compuesta sometida a carga cíclica .....	34
3.3 Columna reforzada con cuatro ángulos metálicos conectados con placa a lo largo del miembro.....	38
<b>4 APLICACIÓN DE LOS MODELOS</b> .....	<b>40</b>
4.1 Efecto de las condiciones de apoyo.....	41
4.2 Efecto del uso de diferentes arreglos de conectores .....	44
<b>5 CONCLUSIONES</b> .....	<b>49</b>
5.1- Recomendaciones.....	50
<b>APÉNDICE A MOVIMIENTOS DE CUERPO RÍGIDO</b> .....	<b>52</b>
A.1 Deducción de la matriz de equilibrio $[E_E]$ .....	53
A.2 Deducción de la matriz de compatibilidad de desplazamientos $[E_E]^T$ .....	54
<b>APÉNDICE B MODELOS CONSTITUTIVOS DE LOS MATERIALES</b> .....	<b>57</b>
B.1 Introducción .....	57
B.2 Modelos para el acero .....	57
B.3 Modelos para el concreto.....	62
B.3.1 Envolvente en compresión.....	63

B.3.1.1 Efecto del confinamiento .....	66
B.3.1.2 Efecto de concentración del daño en compresión.....	67
B.3.2 Leyes cíclicas.....	70
B.4 Modelos de transferencia de fuerzas a través de conectores.....	73
<b>APÉNDICE C DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO.....</b>	<b>79</b>
C.1 Estructura del programa.....	79
C.2 Tipos de análisis.....	81
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>84</b>
<b>ARTÍCULOS .....</b>	<b>85</b>

## **RESUMEN**

En el trabajo se propone un nuevo modelo para el estudio de miembros compuestos, conformados por diferentes materiales ligados a través de interfaces deformables en la dirección longitudinal del elemento. Este procedimiento permite una estimación más precisa de la respuesta de miembros compuestos en comparación con modelos similares existentes en la literatura; tal como se muestra para una trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortantes. Esto se debe a que el nuevo procedimiento considera fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores de cortante; mientras que en el resto de los modelos disponibles en la literatura se supone un flujo continuo de fuerzas en la interfaz.

Otra aportación del trabajo es la detección de dos aspectos importantes para el desarrollo de procedimientos de diseños más racionales de miembros compuestos. El primero indica que el número de conectores calculado con los códigos de diseño, en una trabe compuesta sometida a carga vertical en el centro de su claro, se puede reducir si se consideran las fuerzas introducidas por la interacción con otros elementos (nudos, columnas, paredes, etc). Por otro lado, se muestra como la rotación última en una trabe compuesta sometida a momentos iguales en sus extremos, se puede incrementar modificando la colocación de los conectores.

## 1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento de los miembros compuestos depende de los distintos materiales que los componen y de los mecanismos de transferencia de fuerzas en las interfaces o superficies de contacto entre estos materiales. Usualmente la transferencia de fuerzas se realiza a través de conectores, pernos etc; los cuales requieren del desarrollo de deslizamiento relativo entre los distintos materiales para poder transferir las fuerzas entre ellos (fig 1.1). Esto provoca una discontinuidad en el estado deformado de la sección transversal (fig 1.1), la cual conduce a una reducción en la rigidez y resistencia del miembro respecto a los valores obtenidos en el miembro con adherencia perfecta (fig 1.2). Por otro parte, para considerar el efecto en la distribución de fuerzas internas debido a la pérdida de adherencia, varios códigos de diseño (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004) consideran como acciones de diseño a las fuerzas axiales en los elementos componentes (materiales componentes) y el momento total en la sección transversal (fig 1.1). Sin embargo, estas no se pueden obtener a partir del equilibrio con las fuerzas actuantes en el miembro con pérdida de adherencia, tal como se hace en el miembro con adherencia perfecta (fig 1.2).

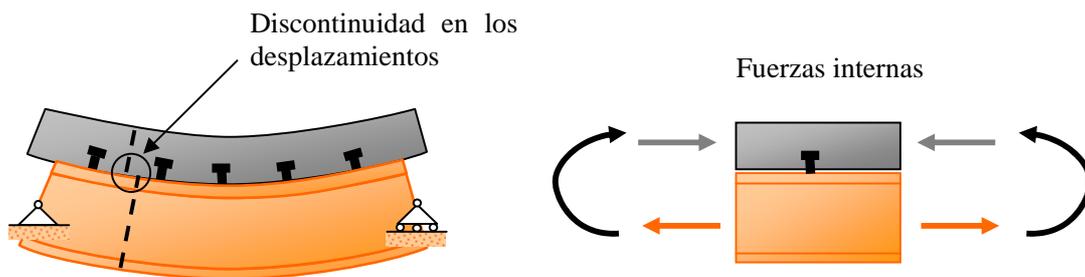


Fig 1.1 Modelo con pérdida de adherencia

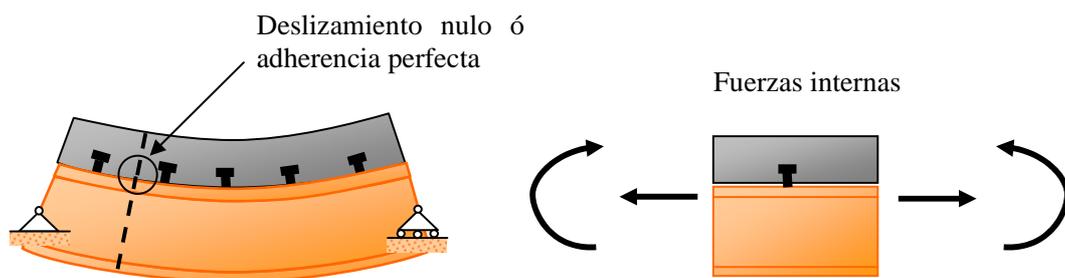


Fig 1.2 Modelo con adherencia perfecta

A pesar de las diferencias existentes entre los miembros con pérdidas de adherencia y adherencia perfecta (figs 1.1 y 1.2), algunos códigos permiten el uso de modelos con adherencia perfecta para el análisis de miembros compuestos, en los cuales se conoce la importante influencia en su comportamiento del desarrollo de deslizamiento relativo entre sus partes componentes. Este es el caso de la trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortantes (fig1.3), donde los códigos AISC (2005) y

NTC\_Metálicas (2004) aceptan el análisis del miembro con un modelo de adherencia perfecta, en el cual se incorpora una reducción en la rigidez de la sección transversal para incluir el efecto de la pérdida de adherencia; mientras que para estimar las fuerzas de diseño introducen hipótesis acerca de la distribución de las fuerzas internas. Estas se basan en el equilibrio entre las fuerzas actuantes en las secciones transversales del centro y el extremo (fig1.3). A partir de esta condición de equilibrio, los códigos de diseño AISC (2005) y NTC\_Metálicas (2004) plantean que la fuerza axial de diseño corresponderá a la menor resistencia asociada a tres posibles condiciones de falla, el aplastamiento del concreto ( $R_L$  ó resistencia a compresión de la losa), la falla del perfil metálico ( $R_P$  ó resistencia del perfil de metálico) ó la falla de los conectores que se encuentran entre estas dos secciones transversales (suma de la resistencia de los conectores  $R_I, R_n$ , etc ). El problema que yace en esta hipótesis es si realmente las fuerzas axiales son nulas en la sección de momento nulo ó sección transversal del extremo para otras condiciones de apoyo o estados de carga.

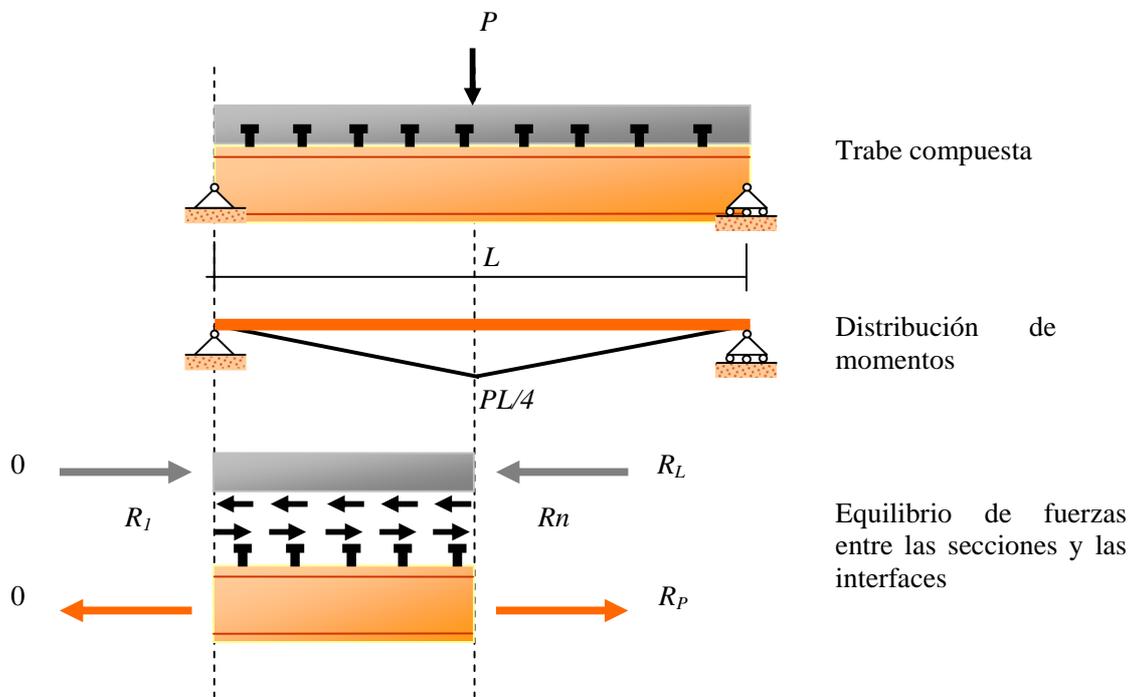


Fig 1.3 Hipótesis de distribución de fuerzas internas

Los aspectos expuestos anteriormente muestran la necesidad de contar con modelos confiables que den información del estado de los elementos componentes o distintos materiales, y de las interfaces o superficies de contacto entre estos elementos.

### 1.1 Modelos disponibles en la literatura

Los modelos escogidos para este estudio representan los elementos componentes a través de elementos viga-columna; mientras que la transferencia de fuerza en la interfaz se modela con resortes. Por ejemplo, para una losa de concreto reforzada ligada a un perfil metálico a

través de conectores se introduce un elemento viga-columna para la losa y otro para el perfil (fig 1.4), mientras que las propiedades de los conectores se modelan con resortes que unen a ambos elementos. También se puede estudiar una columna reforzada con ángulos en sus extremos y placas horizontales distribuidas en toda su longitud como aparece en la fig 1.5. En este caso se introducen cinco elementos viga-columna para la columna y los cuatros ángulos metálicos, así como elementos resortes para la interfaz entre la columna y los ángulos, y para representar las placas entre los ángulos

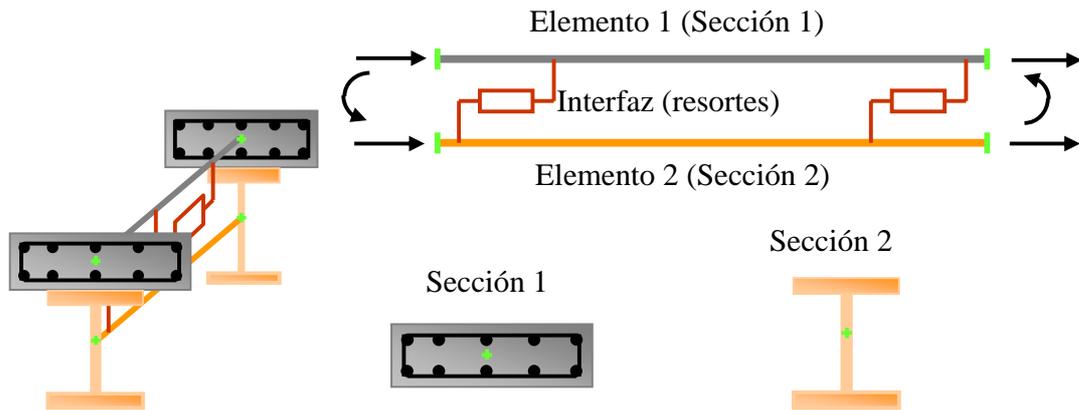


Fig 1.4 Modelo de una trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortante

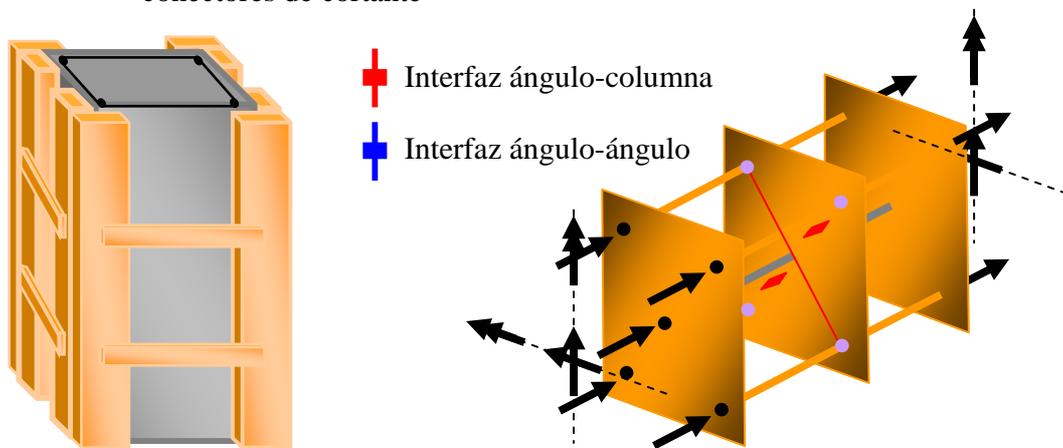


Fig 1.5 Modelo de una columna reforzada con ángulos y placas horizontales distribuidas en toda su longitud

La ventaja de estos modelos es que la respuesta se obtiene primero en los extremos de los elementos componentes, y posteriormente se calcula la variación del deslizamiento y las fuerzas en la interfaz; así como la distribución de fuerzas y deformaciones en secciones transversales escogidas a lo largo de cada elemento componente. De esta forma se reduce notablemente el esfuerzo de cómputo si se compara con un modelo 3D de elemento finito donde el volumen del miembro se divide en elemento finitos y la matriz de rigidez y el vector de resistencia se obtienen en los grados de libertad de los nudos que conectan a cada uno de estos pequeños elementos finitos (Bursi *et al.*, 2005).

En la literatura existentes diversos modelos con las características descritas en la fig 1.4, los cuales se basan en los métodos de elemento finito (EF) (Dall'Asta y Zona, 2002; Dall'Asta y Zona, 2004a; Dall'Asta y Zona, 2004b; Limkatanyu y Spacone, 2002a; Limkatanyu y Spacone, 2002b), diferencia finita (DF) (Dezi *et al.*, 2001; Fabbrocino *et al.*, 1999; Fabbrocino *et al.*, 2000; Oehlers y Bradford, 1995) y rigidez directa (Ranzi *et al.*, 2004).

Según sea el método numérico empleado (DF, EF o RD), se tienen limitaciones en la capacidad del modelo para estimar la respuesta del miembro. En el caso del método DF, existen soluciones aproximadas para dos traveses sometidas a cargas verticales en su centro, una simplemente apoyada y articulada (Fabbrocino *et al.*, 1999), y la otra simplemente apoyada y empotrada (Fabbrocino *et al.*, 2000). El modelado de estas traveses se ha realizado con un máximo de tres elementos componentes (losa de concreto, perfil metálico y barra de acero) con dos interfaces. Este mismo problema de la traveses compuesta de concreto y acero se ha resuelto con el modelo RD (Ranzi *et al.*, 2004); sin embargo, su aplicación a miembros compuestos con más elementos componentes aún se requiere desarrollar. Por último, contrario a los modelos anteriores (DF y RD), los modelos EF se han aplicado a una mayor variedad de miembros compuestos: Dall'Asta y Zona (2002), Daniels y Crisinel (1993) entre otros, han estudiado la traveses metálica ligada a la losa de concreto a través de conectores, Spacone y Limkatanyu (2000) analizaron una traveses de concreto reforzado trabajando en conjunto con una placa metálica, y Limkatanyu y Spacone (2002b) usaron un modelo de EF basado en desplazamientos para estudiar la respuesta de una columna de concreto reforzado considerando el deslizamiento entre las barras de acero y el concreto alrededor de estas.

Otros autores han propuestos refinamientos a los modelos anteriores. Dezi *et al.* (2001) y, Sun y Bursi (2005) incorporaron la variación no uniforme de las deformaciones en la dirección perpendicular al plano de flexión de la losa de concreto, la cual está ligada a una traveses metálica a través de conectores de cortante. Dall'Asta y Zona (2004a), Limkatanyu y Spacone (2002b), Ranzi *et al.* (2004) entre otros, han estudiado diferentes alternativas para reducir el esfuerzo de cómputo optimizando ya sea, el número de elementos longitudinales a lo largo del miembro o el número de puntos de integración por elementos; mientras que la eficacia de cada una de estas técnicas han sido evaluadas en estudios comparativos realizados por Limkatanyu y Spacone (2002b) y, Ranzi *et al.* (2006).

Sin embargo, a pesar de todos estos esfuerzos, existen diversos aspectos que aún requieren estudiarse para aplicar este tipo de modelo (figs 1.4 y 1.5) a una mayor variedad de miembros compuestos. Es conveniente desarrollar modelos capaces de analizar miembros con  $m$  elementos componentes y  $n$  interfaces; ya que debido a la combinación de elementos de concreto, placas metálicas etc, existen configuraciones en los casos prácticos de rehabilitación estructural, más complejas que las estudiadas con estos modelos (EF, DF, RD). Por otro lado, los códigos de diseño (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004) permiten colocar un grupo de conectores de diferentes formas, variando el espaciamiento y la cantidad por sección transversal. Como se demuestra en este trabajo, existen miembros cuya respuesta varía para diferentes arreglos de conectores, lo que obliga a representar la variación de fuerzas en la interfaz como fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores (pernos, canales etc), para calcular correctamente su respuesta.

Sin embargo, esto no es posible en todos los métodos (EF, DF, RD). La mayor parte de los modelos suponen variaciones continuas del flujo en la interfaz (Dall'Asta y Zona, 2002; Dall'Asta y Zona, 2004c; Daniels y Crisinel, 1993; Dezi *et al.*, 2001; Limkatanyu y Spacone, 2002a; Limkatanyu y Spacone, 2002b; Reza y Spacone, 2001), mientras que solo algunos modelos DF reconocen la presencia de fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores (Fabbrocino *et al.*, 1999; Fabbrocino *et al.*, 2000; Oehlers y Bradford, 1995).

## 1.2 Objetivos y alcance

Para resolver las necesidades anteriores, en este trabajo se desarrolla un nuevo modelo DF capaz de representar la interfaz como fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores de cortante ó a través de un flujo continuo de fuerzas. Este modelo permite analizar miembros con  $m$  elementos componentes y  $n$  interfaces deformables en la dirección longitudinal del miembro, suponiendo que los elementos componentes permanecen unidos, y es aplicable para cualquier condición de apoyo y fuerzas actuando en los bordes del miembro. Además, el modelo se incorpora en un programa de análisis no lineal basado en el método de la rigidez. Por último, con el propósito de tener una referencia de los resultados que se obtienen con los modelos que suponen un flujo continuo de fuerza en la interfaz, se emplean dos modelos EF representativos de las principales tendencias existentes en la literatura. El primero de ellos es uno de los más usados, se basa en funciones de forma de desplazamientos y fue propuesto por Daniels y Crisinel (1993); mientras que el segundo emplea funciones de forma de fuerzas y fue desarrollado por Reza *et al.* (1998). Ambos modelos se adecuan para el estudio de miembros con la cantidad de elementos componentes e interfaces que se requiera.

Para evaluar la capacidad de los modelos propuestos, primero se validan los resultados teóricos con mediciones realizadas en ensayos experimentales y valores obtenidos con modelos EF tridimensionales (3D). Después, se aplican los modelos EF y DF a miembros con diferentes condiciones de apoyo, estados de carga y mecanismos de transferencias de fuerzas en las interfaces. Esto con el propósito de ilustrar en cuáles casos conviene emplear el nuevo modelo DF respecto a los modelos EF, y además mostrar cuáles son las ventajas de realizar el análisis con estos modelos y no con los procedimientos alternativos existentes en algunos códigos de diseños (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004).

Tantos los modelos EF y como DF estudiados en este trabajo no incluyen las deformaciones por cortante y se basan en teorías de pequeños desplazamientos. Esto significa que son aplicables a miembros donde la disipación de energía es principalmente por flexo-compresión y cuyos modos de falla no están dominados por pandeo local o global del miembro.

## 2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

Considérese una columna reforzada con ángulos y placas horizontales, tal como se muestra en la fig 2.1. Esta se somete a fuerza axial y flexión biaxial, lo cual genera en la columna momentos ( $M$ ), fuerza axial ( $N$ ), cortante ( $V$ ) y flujos de fuerzas ( $f$ ) localizados en los ejes longitudinales de las superficies de contacto o interfaces con los ángulos metálicos (fig 2.2).

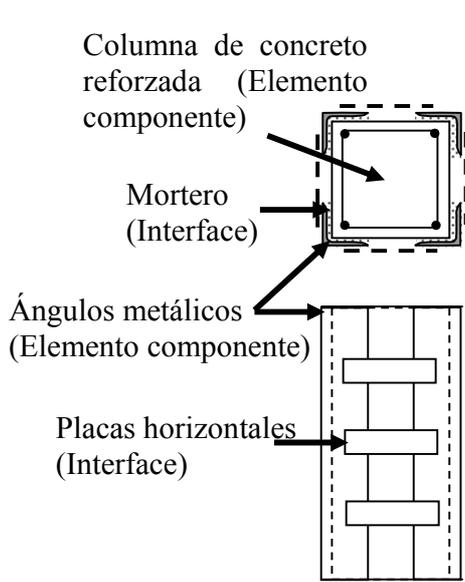


Fig 2.1 Columna reforzada con ángulos y placas horizontales

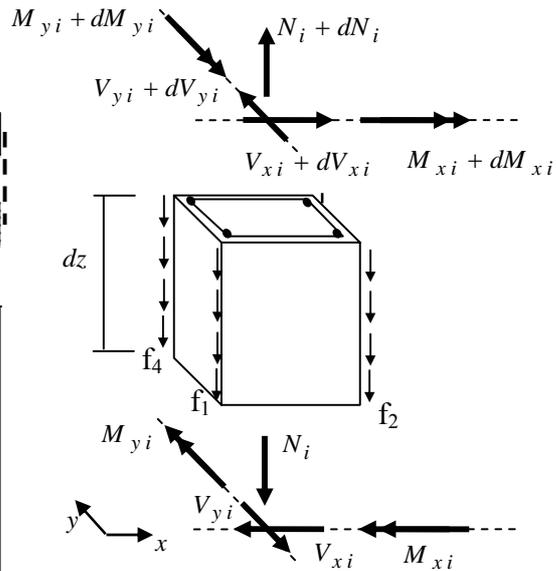


Fig 2.2 Diagrama de cuerpo libre de la columna

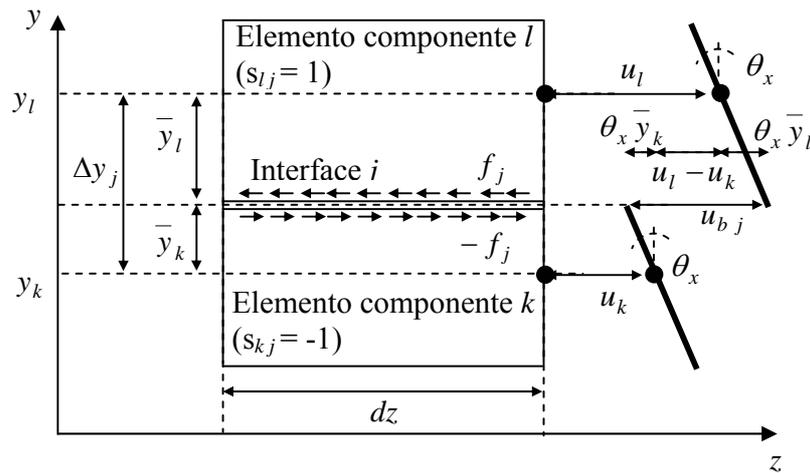
La columna y cada ángulo metálico se idealizan en el modelo descrito en este trabajo, como elementos componentes de la columna compuesta. En la columna se producen un total de cuatro flujos de fuerzas  $f$  localizadas en los ejes de cada una de las interfaces o superficies de contacto con los ángulos metálicos; mientras que en cada ángulo se genera la fuerza en la interfaz con la columna y en las uniones con las placas horizontales. En este trabajo, el miembro compuesto se descompone en  $m$  elementos componentes ligados por  $n$  interfaces longitudinales. Cada elemento componente estará sometido al estado de carga mostrado en la fig 2.2, con un máximo de  $n$  flujos de fuerzas de corte correspondientes a cada una de las  $n$  interfaces ó superficies de contacto con los restantes elementos componentes del miembro. Para estas condiciones, las ecuaciones del equilibrio de cada elemento componente  $i$  del miembro compuesto son

$$\frac{dN_i}{dz} = \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \quad (2.1)$$

$$\frac{dV_{x_i}}{dz} = 0, \quad \frac{dV_{y_i}}{dz} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dM_{x_i}}{dz} + \frac{dN_i}{dz} x_i - V_{y_i} = 0, \quad \frac{dM_{y_i}}{dz} + \frac{dN_i}{dz} y_i - V_{x_i} = 0 \quad (2.3)$$

Donde  $x_i$  y  $y_i$  son las coordenadas del centro del sistema de referencia local del elemento medidas respecto a un sistema de referencia global para todos los elementos componentes en el miembro.  $s_{ij}$  representa el signo de la fuerza en la interfaz; se supone que cada interfaz conecta a dos elementos componentes y genera fuerzas positivas en uno ( $s_{ij} = 1$ ) y negativa en el otro ( $s_{ij} = -1$ ), tal como aparece en la fig 2.3. Si no existe conexión entre la interfaz  $j$  y el elemento  $i$ , entonces  $s_{ij}$  es igual a cero. Cuando se define  $s_{ij}$  para dos elementos componentes unidos por una interfaz  $j$ , no es relevante en cual de los dos elementos componentes el valor asignado es 1 o -1, sino que estos valores tengan siempre signos opuestos.



$$u_{b,j} = u_l - u_k + \theta_x (\bar{y}_k + \bar{y}_l)$$

$$u_{b,j} = u_l - u_k + \theta_x \Delta y$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^m s_{ij} y_i, \quad s_{ij} = 0 \quad (i \neq l, k)$$

Fig 2.3 Deslizamiento en la interfaz

Las fuerzas en las interfaces solo influyen en la variación de la fuerza axial en el elemento componente (ec 2.1) y no en el equilibrio vertical (ec 2.2), debido a que las interfaces son paralelas al eje longitudinal del miembro. Además, se considera que no ocurre separación entre los elementos componentes. Por esta razón, las rotaciones ( $\theta_x, \theta_y$ ) y desplazamientos perpendiculares al eje longitudinal del miembro ( $v, w$ ) son iguales (figs 2.3 y 2.4).

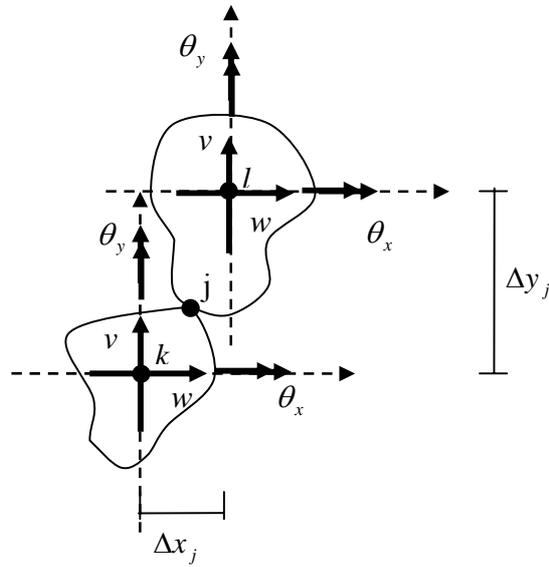


Fig 2.4 Desplazamientos en los elementos componentes

Con estas hipótesis, las condiciones de compatibilidad de desplazamientos para un elemento  $i$  y una interfaz  $j$  se expresan

$$e_i = \frac{du_i}{dz}, \quad \phi_x = \frac{d\theta_x}{dz}, \quad \phi_y = \frac{d\theta_y}{dz}, \quad \gamma_y = \frac{dv}{dz} - \theta_x, \quad \gamma_x = \frac{dw}{dz} - \theta_y \quad (2.4)$$

$$u_{b_j} = s_{lj} u_l + s_{kj} u_k + \theta_x \Delta y_j + \theta_y \Delta x_j \quad (2.5)$$

donde  $e_i$  es la deformación axial del elemento  $i$ ;  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son las curvaturas alrededor de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente;  $\gamma_x$  y  $\gamma_y$  son las deformaciones por cortante;  $u_l$  y  $u_k$  son los desplazamientos axiales de los elementos componentes  $l$  y  $k$ , respectivamente;  $\Delta x_j$  y  $\Delta y_j$  son las distancias entre los centroides de los elementos componentes unidos por la interfaz  $j$  (figs 2.3 y 2.4);  $u_{b_j}$  es el deslizamiento en la interfaz  $j$ .

Las ecs 2.4 y 2.5 correspondiente a cada elemento componente e interfaz del miembro, se ensamblan para obtener las condiciones de compatibilidad de desplazamientos del miembro

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \gamma_y \\ \phi_y \\ \gamma_x \\ e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dz & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & d/dz & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d/dz & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d/dz & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d/dz & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d/dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ v \\ \theta_y \\ w \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{b1} \\ \vdots \\ u_{bn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 & 0 & \Delta x_1 & 0 & s_{11} & \cdots & s_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta y_n & 0 & \Delta x_n & 0 & s_{1n} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ v \\ \theta_y \\ w \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $m$  es el número de elementos componentes,  $n$  es la cantidad de interfaces.

Rescribiendo las ecs 2.6 y 2.7 en forma condensada

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T \{S\} \quad (2.8)$$

$$\{u_b\} = [E_b]^T \{S\} \quad (2.9)$$

donde  $\{S\}^T = \{\theta_x \quad v \quad \theta_y \quad w \quad u_1 \quad \dots \quad u_m\}$  es el vector de desplazamientos en la sección transversal,  $\{\varepsilon\}^T = \{\phi_x \quad \gamma_y \quad \phi_y \quad \gamma_x \quad e_1 \quad \dots \quad e_m\}$  es el vector de deformaciones en la sección transversal,  $\{u_b\}^T = \{u_{b1} \quad \dots \quad u_{bn}\}$  contiene los desplazamientos en las interfaces,  $[\partial]$  es un operador diferencial y  $[E_b]^T$  es una matriz de compatibilidad de desplazamientos entre las secciones transversales y las interfaces.

En el procedimiento anterior, se consideran las conexiones entre los elementos componentes; al calcular  $\Delta x_j$  y  $\Delta y_j$  para un interfaz  $j$  y al definir los valores  $s_{ij}$ .

Para agrupar las ecuaciones de equilibrio de todos los elementos componentes (ecs 2.1, 2.2 y 2.3), primero se sustituye la ec 2.1 en la ec 2.3 y luego se suman todas las ecuaciones resultantes de cada elemento componente

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{dM_{xi}}{dz} + \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \right) x_i - V_{yi} \right] = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{dM_{yi}}{dz} + \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \right) y_i - V_{xi} \right] = 0$$

Estas ecuaciones y las ecs 2.1 y 2.2 escritas para todos los elementos componentes, se escriben en forma condensada

$$[\partial]\{P\} + [E_b] \{f\} = 0 \quad (2.11)$$

donde  $\{f\}^T = \{f_1 \ \dots \ f_n\}$  es el vector de fuerzas en las interfaces  $\{P\}^T = \{M_x \ V_y \ M_y \ V_x \ N_1 \ \dots \ N_m\}$  es el vector de fuerzas en el miembro, cuyos términos  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $V_x$  y  $V_y$  sustituyen a la suma de los momentos y las fuerzas de cortantes de cada elemento componente, debido a que las rotaciones y los desplazamientos son iguales entre los elementos componentes (fig 2.4).

Los términos asociados a los efectos de cortantes en las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos (ecs 2.8 y 2.9) y condiciones de equilibrio (ec 2.9) serán eliminados cuando se resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales mediante los diferentes métodos (DF y EF).

Por último, la relación entre las fuerzas  $\{\Delta P\}$  y las deformaciones  $\{\Delta \varepsilon\}$  se obtiene a través de un modelo de fibra para la sección transversal de cada elemento componente (Kaba y Mahin, 1984). Este modelo ha sido empleado satisfactoriamente en miembros sin efecto significativo de las deformaciones por cortante (Limkatanyu y Spacone, 2002b; Reza y Spacone, 2001; Spacone y Limkatanyu, 2000), y se basa en asignar un ley de comportamiento uniaxial del material para cada fibra y en aceptar la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas en el estado deformado. Con estas hipótesis se deducen la matriz de rigidez  $[K_s]$  y el vector de resistencia  $\{\bar{P}\}$ ; y se define la relación entre las fuerzas y las deformaciones

$$\{\Delta P\} = [k_s] \{\Delta \varepsilon\} + \{\bar{P}\} \quad (2.12)$$

donde  $[k_s]$  es la matriz de rigidez tangente de la sección transversal del miembro, y  $\{\bar{P}\}$  representa las fuerzas residuales actuando en la misma sección.

En la interfaz también se usa una aproximación lineal, con fuerzas residuales debido al comportamiento no lineal real de la interfaz. En este caso

$$\{\Delta f\} = [k_b] \{\Delta u_b\} + \{\bar{f}\} \quad (2.13)$$

donde  $[k_b]$  es la matriz de rigidez en la interfaz y  $\{\bar{f}\}$  son las fuerzas residuales actuando en la interfaz.

Con esta formulación (ec 2.13) se pueden reproducir leyes constitutivas para la interfaz, obtenidas de ensayos experimentales y representativas de distintos mecanismos de

transferencia de fuerzas (Aprile *et al.*, 2001; Oehlers y Bradford, 1995; Reza y Spacone, 2001).

Las ecuaciones diferenciales no lineales (ecs 2.8 a 2.13) se resuelven transformando el sistema en uno de ecuaciones algebraicas no lineales y aplicando un proceso iterativo. Esto se puede realizar usando diferentes procedimientos numéricos. Sin embargo, se debe evitar que el método matemático limite la capacidad del modelo. Este aspecto se estudia para los modelos DF y EF.

## 2.1 Método general de solución

Los modelos EF y DF se diseñan para incorporarse en un programa de análisis no lineal basado en el método de la rigidez. Sus propiedades requeridas durante el análisis estructural, se explican a través del cálculo de la respuesta de una estructura de un grado de libertad (fig 2.5). Esta se somete a incrementos de carga e iteraciones de Newton-Rapshon para satisfacer las leyes de comportamiento de los materiales y las condiciones de compatibilidad de desplazamientos.

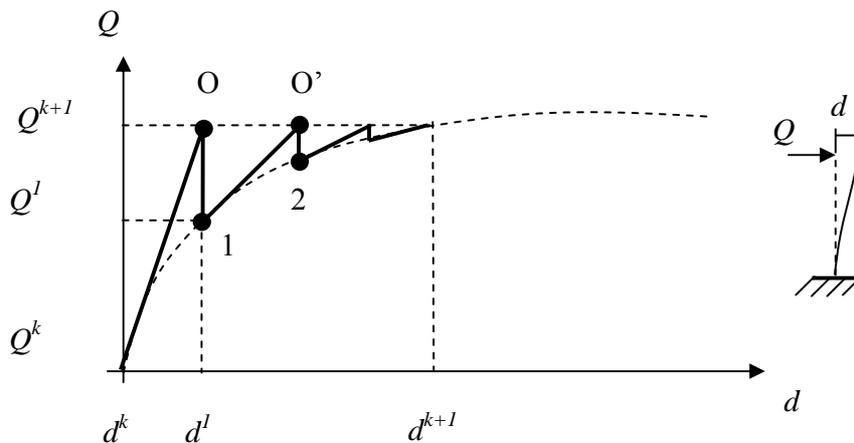


Fig 2.5 Iteraciones de Newton\_Raphson controlando las fuerzas en una estructura de un grado de libertad

En el primer paso se calcula un desplazamiento  $d^l$  suponiendo un comportamiento elástico-lineal

$$Q^{k+1} - Q^k = K^k (d^l - d^k) \quad (2.14)$$

donde  $K^k$  es la rigidez tangente en el desplazamiento  $d^k$ .

Luego en el punto 1 (fig 2.5) se calcula la resistencia según las leyes constitutivas del material

$$Q^1 = g(d^1) \quad (2.15)$$

donde  $g$  son leyes constitutivas del material en función de  $d^1$ .

Sin embargo, debido al comportamiento no lineal del material, pueden existir diferencias importantes entre  $Q^1$  y  $Q^{k+1}$ . Para reducir esta diferencia se continúa actualizando el valor del desplazamiento

$$Q^{k+1} - Q^1 = K^1(d^2 - d^1) \quad (2.16)$$

Si el proceso converge, entonces la resistencia en el nuevo desplazamiento  $d^2$  ( $Q^2$ ) debe estar más cerca de  $Q^{k+1}$  que el valor de resistencia anterior ( $Q^1$ ). Por lo tanto, con la aplicación de las ecs 2.15 y 2.16, se llegará a una iteración  $i$  en la cual se cumpla

$$Q^{k+1} - Q^i \leq Tol \quad (2.17)$$

donde  $Tol$  es un valor de tolerancia especificado,  $Q^i$  es la resistencia asociada a un desplazamiento  $d^i$  ( $g(d^i)$ ), el cual se calculó en la iteración anterior a partir de

$$Q^{k+1} - Q^{i-1} = K^{i-1}(d^i - d^{i-1}) \quad (2.18)$$

De esta forma se busca el estado de la estructura que satisface el equilibrio y la ecuación constitutiva del material (ec 2.15).

Por otro lado, los pasos descritos de la ec 2.14 a la ec 2.16 se pueden simplificar en una sola ecuación. Supongamos que la estructura se encuentra en el punto O ( $d^1$ ,  $Q^{k+1}$ ) de la fig 2.5, y se desea llevarla al O'. En ese caso, el incremento de carga sería

$$\Delta Q = -\bar{Q} + K^1 \Delta d \quad (2.19)$$

donde  $\bar{Q}$  es el error en fuerza igual a la diferencia entre la fuerza  $Q^{k+1}$  y la resistencia en el desplazamiento  $d^1$ , y  $\Delta d$  es la diferencia de desplazamiento  $d^2 - d^1$ .

En la primera iteración el comportamiento es elástico lineal, por tanto  $\Delta \bar{Q} = 0$  y la ec 2.19 se reduce entonces a la ec 2.14. Por otro lado, en las iteraciones se busca mantener el valor de la fuerza ( $Q^{k+1}$ ) de la primera iteración (ec 2.14), ya que se realiza el análisis controlando las fuerzas. Por esta razón,  $\Delta Q$  debe ser cero en la ec 2.19, lo cual reduce esta ecuación a una expresión análoga a las ecs 2.16 y 2.18.

En sistemas de múltiples grados de libertad, la ec 2.19 se plantea para cada grado de libertad y se obtiene la ecuación matricial

$$\{\Delta Q\} = -\{\bar{Q}\} + [K] \{\Delta d\} \quad (2.20)$$

donde  $\{\bar{Q}\}$  es el vector de fuerzas residuales en los nudos,  $[K]$  es la matriz de rigidez,  $\{\Delta d\}$  es el vector de incrementos en los desplazamientos, y  $\{\Delta Q\}$  es el vector de incremento de carga en los nudos.

La ec 2.20 es el objetivo que se debe alcanzar en la formulación de los diferentes modelos, ya que en esta se definen la matriz de rigidez y el vector de resistencia asociado a un estado desplazado. Estos dos términos son suficientes para usar los modelos DF y EF con diferentes estrategias iterativas y métodos para seguir historias de cargas más complejos que los mostrados en esta sección (Bathe, 1982).

## 2.2 Solución por el método de diferencia finita

El primer paso para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (ecs 2.8 a 2.13) es definir una malla de puntos donde se calcularán los parámetros de respuesta. En este trabajo se decidió emplear una malla uniforme con el objeto de simplificar la formulación del modelo; sin embargo, es posible adaptarlo a mallas con cualquier distribución. En la fig 2.6 se muestra un ejemplo del tipo de malla escogido para un miembro con dos elementos componentes y una interfaz.

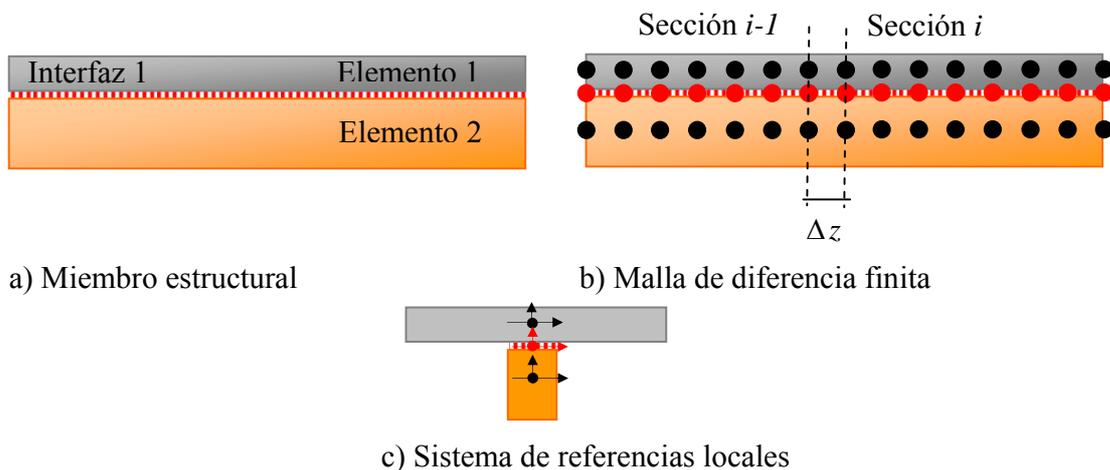


Fig 2.6 Malla de diferencia finita para un miembro con dos elementos componentes y una interfaz

El siguiente paso es transformar el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. Para esto, la derivada de una variable  $R$  (desplazamiento, fuerza etc) se aproxima con una diferencia finita hacia delante

$$\frac{dR}{dz} = \frac{(R_i - R_{i-1})}{\Delta z} \quad (2.21)$$

donde  $r$  puede ser las deformaciones, la curvaturas, la rotación, la fuerza en la interfaz o el cortante; mientras que  $R$  puede ser los desplazamientos, la rotación, la fuerza axial en los elementos componentes o los momentos.

### 2.2.1 Implementación de las diferencias finitas

En este procedimiento, las derivadas en las ecs 2.8 y 2.11 para los desplazamientos, rotaciones, momentos y fuerzas, se aproximan con la diferencia finita de la ec 2.21. Esto permite definir el equilibrio (ec 2.22) y las condiciones de compatibilidad de desplazamientos (ec 2.23) entre la sección  $i$  y  $i-1$ , respectivamente

$$\{\Delta P\}_i = [E_s] \{\Delta P\}_{i-1} + [E_b] \{\Delta f\}_{i-1} \Delta z \quad (2.22)$$

$$\{\Delta S\}_i = [C_s] \{\Delta S\}_{i-1} + \{\Delta \varepsilon\}_{i-1} \Delta z \quad (2.23)$$

donde  $[E_s]$  es la matriz de equilibrio entre dos secciones transversales consecutivas. Todos los términos de su diagonal son iguales a uno, y el resto cero, excepto los términos  $E_{1,2}$  y  $E_{3,4}$ , los cuales son iguales a  $\Delta z$ .  $[C_s]$  es la matriz de compatibilidad de desplazamientos entre dos secciones transversales consecutivas. Su forma es similar a  $[E_s]$  excepto que los términos diferentes de cero y uno son  $C_{2,1}$  y  $C_{4,1}$ , los cuales son iguales a  $-\Delta z$ .  $\{\Delta f\}_{i-1}$  es el incremento de la fuerza resultante en las interfaces entre las secciones  $i$  y  $i-1$ .

En la ec 2.22,  $\{\Delta f\}_{i-1} \Delta z$  significa una fuerza concentrada en  $i-1$ , la cual se genera por una rigidez  $k_b$  y un deslizamiento  $u_b$  (ec 2.13). Si la rigidez de la interfaz se concentra en los puntos donde se encuentran los conectores, entonces la transferencia de fuerza se representa a través de fuerzas concentradas en estos puntos. Este aspecto es lo que le permite al modelo tener en cuenta la posición real de los conectores.

Después de estimar los desplazamientos ( $\{S\}$ ) en la sección a partir de la ec 2.23, se calculan los deslizamientos en la interfaces a través de la ec 2.9; y las deformaciones en la sección transversal con

$$\{\Delta \varepsilon\}_i = [F_s]_i \{\Delta P\}_i + \{\bar{\varepsilon}\}_i \quad (2.24)$$

donde  $[F_s]_i$  es la matriz de flexibilidad de la sección transversal, y  $\{\bar{\varepsilon}\}$  es el vector de deformaciones residuales.

Esto significa que los parámetros  $\{P\}$  y  $\{S\}$  son suficientes para obtener la respuesta completa de la sección transversal y la interfaz en un punto  $i$ . Por lo tanto, la respuesta de la sección  $i$ , expresada en función de  $\{P\}$  y  $\{S\}$ , se puede calcular en función de la respuesta en la sección  $i-1$  sustituyendo las ecs 2.9, 2.13 y 2.24 en las ecs 2.22 y 2.23.

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_i = [D]_{i \ i-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_{i-1} + \{\bar{R}\}_{i-1} \quad (2.25)$$

donde  $[D]_{i \ i-1}$  es una matriz que relaciona la respuesta de la sección  $i$  con la respuesta de la sección  $i-1$ , y  $\{\bar{R}\}_{i-1}$  es el vector de residuos en la sección  $i-1$

$$[D]_{i \ i-1} = \begin{bmatrix} [E_s] & [E_b][k_b]_{i-1}[E_b]^T \Delta z \\ [F_s]_{i-1} \Delta z & [C_s] \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\{\bar{R}\}_{i-1} = \begin{Bmatrix} [E_b]\{\bar{F}\}_{i-1} \Delta z \\ \{\bar{\varepsilon}\}_{i-1} \Delta z \end{Bmatrix}$$

Como se mencionó anteriormente, el modelo de la sección transversal usado en este trabajo (Kaba y Mahin, 1984) no incluye el efecto de las deformaciones por cortante. Para eliminar este efecto, la flexibilidad asociada al cortante en la matriz  $[F_s]_{i-1}$  (ecs 2.24 y 2.26) se hacen cero, lo cual provoca que las dislocaciones se hagan cero en la ec 2.24.

De esta forma, el cálculo de la respuesta del miembro se reduce a obtener la respuesta de una o más secciones transversales, ya que las respuestas del resto de las secciones transversales en el miembro se obtendrían con la ec 2.25.

## 2.2.2 Limitaciones de los procedimientos de la literatura

En la literatura existen diferentes procedimientos con modelos DF para obtener la respuesta de al menos una sección transversal en el miembro (Fabbrocino *et al.*, 1999; Fabbrocino *et al.*, 2000; Oehlers y Bradford, 1995). Estos iteran con valores de respuesta hasta lograr reproducir otras variables de la respuesta que se pueden inferir de la geometría y condiciones de apoyo del miembro. En la fig 2.7 se muestran algunos parámetros de

respuesta conocidos en una trabe simplemente apoyada y sometida a carga vertical. Su respuesta fue obtenida por Fabbrocino *et al.* (1999) y Oehlers y Bradford (1995) iterando con los desplazamientos en los extremos (únicos valores desconocidos en los extremos) hasta lograr que el deslizamiento fuera cero en el centro.

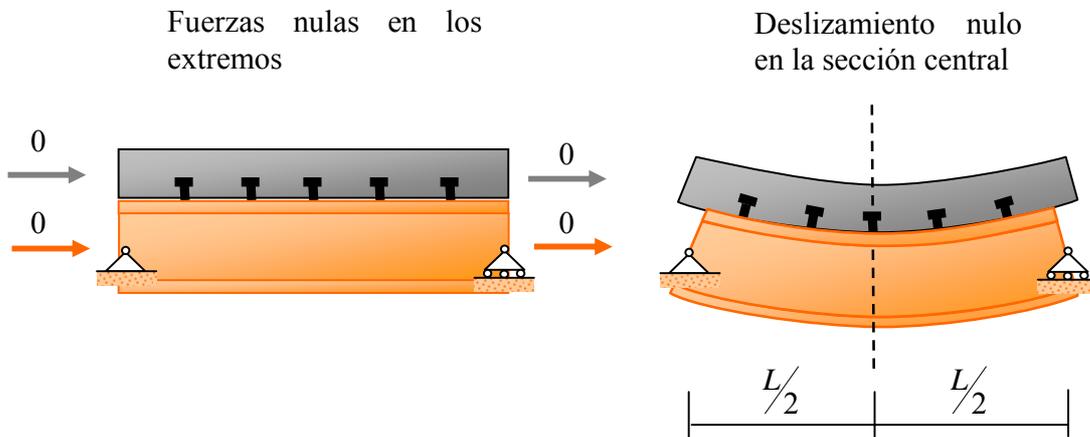


Fig 2.7 Valores de respuestas conocidos en una trabe simplemente apoyada sometida a una carga vertical en su centro

Los procedimientos anteriores están adaptados a las condiciones de apoyo, estados de carga y número de elementos componentes e interfaces de los miembros estudiados, y por lo tanto, no aplican para miembros para otras condiciones de apoyo, a otras cargas y/o con otro número de elementos componentes e interfaces a los ejemplos estudiados en la literatura.

Por último, el cálculo de la respuesta de las secciones transversales de estos modelos DF, se basa en estimar los diagramas momento-curvatura cuando se aplican distintos niveles de carga axial, de forma monótona-creciente. Por lo tanto, no permiten el análisis de miembros sometidos a cargas cíclicas.

### 2.2.3 Procedimiento propuesto

Con el fin de eliminar las restricciones anteriores, se propone un nuevo modelo DF que puede incorporarse en un programa de análisis basado en el método de la rigidez. Para ello se requiere desarrollar un procedimiento para deducir la matriz de rigidez y el vector de resistencia asociado a un estado desplazado. Con estos parámetros se obtienen los desplazamientos en los nudos de la estructura a partir de un análisis estructural convencional (Bathe, 1982); y finalmente con los desplazamientos y fuerzas en los extremos del miembro se calculan los valores de respuesta en el interior del elemento.

### 2.2.3.1 Definición de la matriz de rigidez y el vector de resistencia

Primero, se expresa la respuesta de la sección  $n-1$  en función de la respuesta de la sección  $n-2$  a través de la ec 2.25 con  $i = n-1$ . Luego se sustituye esta expresión para la respuesta de la sección  $n-1$  en la ec 2.25 con  $i = n$ ; y de esta forma se escribe la respuesta de la sección  $n$  en función de la respuesta en la sección  $n-2$ . Siguiendo este procedimiento hasta la sección  $1$  se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_n = [D]_{n-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_1 + \{\bar{R}\}_{n-1} \quad (2.27)$$

donde  $[D]_{n-1}$  es la matriz que relaciona la respuesta en la sección  $1$  con la respuesta en la sección  $n$ , y  $\{\bar{R}\}_{n-1}$  es el vector de residuos acumulados entre la sección  $1$  y la sección  $n$

$$[D]_{n-1} = [I] [D]_{n-1} [D]_{n-1} \cdots [D]_{2-1}, [I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\{\bar{R}\}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} [D]_{n-i+1} \{\bar{R}\}_i, [D]_{n-i+1} = [I] [D]_{n-i+1} [D]_{n-i+1} \cdots [D]_{i+2-i+1} \quad (2.29)$$

Mediante la ec 2.27, la respuesta de la sección en el centro del claro del miembro ( $L/2$ ) se expresa en función de la respuesta de cada una de las secciones en los extremos del miembro. Sin embargo, la respuesta de la sección en el centro del claro del miembro debe ser la misma, independientemente de la forma en que sea calculada, y cumplir

$$[D]_{L-L/2} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_L + \{\bar{R}\}_{L-L/2} = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_{L/2} = [D]_{L/2-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_1 + \{\bar{R}\}_{L/2-1} \quad (2.30)$$

donde los subíndices  $1$ ,  $L/2$  y  $L$  se refieren a las secciones transversales localizadas al principio, en el medio y al final del miembro estructural, respectivamente.

Los valores de las fuerzas y los desplazamientos en ambos bordes del miembro estructural están incluidos en la ec 2.30. Por lo tanto, esta ecuación se emplea para obtener la matriz de rigidez y el vector de residuos de fuerzas. Para esto, primero hay que reagrupar los términos separando los que están asociados a las fuerzas, de los que están relacionados con los desplazamientos. De esta forma, la matriz  $[D]$  se subdivide en

$$[D]_{i-i-1} = \begin{bmatrix} D^{PP} & D^{PS} \\ D^{SP} & D^{SS} \end{bmatrix}_{i-i-1} \quad (2.31)$$

donde  $D^{PP}$  y  $D^{PS}$  son las fuerzas producidas en la sección  $i$  debido a fuerzas y desplazamientos unitarios en la sección  $i-1$ ; mientras que  $D^{SP}$  y  $D^{SS}$  son los desplazamientos producidos en la sección  $i$  debido a fuerzas y desplazamientos unitarios en la sección  $i-1$ , respectivamente.

La ec 2.31 se sustituye en la ec 2.30 y se reagrupan los términos para obtener la ec 2.32

$$[D^P] \begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_L \end{Bmatrix} = [D^S] \begin{Bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} + \{\bar{R}\}_{L/2-1} - \{\bar{R}\}_{L-L/2} \quad (2.32)$$

donde  $[D^P]$  y  $[D^S]$  son matrices en las cuales están agrupados los términos asociados a las fuerzas y a los desplazamientos, respectivamente.

$$[D^P] = \begin{bmatrix} -D_{L/2-1}^{PP} & D_{L/2-L}^{PP} \\ -D_{L/2-1}^{SP} & D_{L/2-L}^{SP} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$[D^S] = \begin{bmatrix} D_{L/2-1}^{PS} & -D_{L/2-L}^{PS} \\ D_{L/2-1}^{SS} & -D_{L/2-L}^{SS} \end{bmatrix}$$

Para despejar el vector de fuerzas  $\{\Delta P_1 \ \Delta P_L\}^T$  en la ec 2.32, se eliminan los movimientos de cuerpo rígido suponiendo que el miembro se encuentra simplemente apoyado en un extremo y articulado en el otro. Para estas condiciones de apoyo el miembro es estáticamente determinado, y algunas de las fuerzas en el extremo ( $\{\Delta P_1 \ \Delta P_L\}^T$ ) son reacción de apoyo, las cuales se calculan a partir del equilibrio con el resto de las fuerzas actuantes en los extremos del miembro.

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_L \end{Bmatrix} = [E_E] \{\Delta \tilde{Q}\} \quad (2.34)$$

donde  $\{\Delta \tilde{Q}\}$  es el vector  $\{\Delta P_1 \ \Delta P_L\}^T$  sin las fuerzas de reacción de apoyo del miembro, y  $[E_E]$  es una matriz que contiene las condiciones de equilibrio entre las fuerzas actuantes en los extremos del miembro.

En los apoyos del miembro, algunos de los desplazamientos incluidos en  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$  son iguales a cero. Algebraicamente, esto se expresa como

$$\begin{Bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} = [R] \{\Delta \tilde{d}\} \quad (2.35)$$

donde  $\{\Delta \tilde{d}\}$  es el vector  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$  sin los desplazamientos en los apoyos.  $[R]$  es una matriz donde cada fila  $i$  está asociada al término  $\Delta S_i$  del vector  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$ , y tiene todos

sus términos nulos si  $\Delta S_i$  es un desplazamiento restringido por el apoyo. En caso contrario, se debe cumplir que el término  $\Delta S_i$  sea igual al término  $\Delta d_j$ . Por tanto, solo el término  $R_{ij}$  será igual a uno.

Sustituyendo las ecs 2.34 y 2.35 en la ec 2.32.

$$[D^P][E_E] \{\Delta Q\} = [D^S][R] \{\Delta d\} + \{\bar{R}\}_{L/2-1} - \{\bar{R}\}_{L-L/2} \quad (2.36)$$

En esta ecuación, la matriz  $[D^P][E_E]$  es cuadrada y no singular. Por lo tanto se puede invertir y multiplicar ambos términos de la ec 2.36 por la inversa de  $[D^P][E_E]$ , y obtener una ecuación análoga a la ec 2.20 pero sin los movimientos de cuerpo rígido.

$$\{\Delta \bar{Q}\} = [\bar{K}] \{\Delta \bar{d}\} - \{\bar{Q}\} \quad (2.37)$$

donde  $[\bar{K}]$  es la matriz de rigidez del miembro sin los movimientos de cuerpo rígido,  $\{\bar{Q}\}$  es el vector de fuerzas residuales.

$$[\bar{K}] = \left[ [D^P][E_E] \right]^{-1} [D^S][R] \quad (2.38)$$

$$\{\bar{Q}\} = \left[ [D^P][E_E] \right]^{-1} \left\{ \{\bar{R}\}_{L-L/2} - \{\bar{R}\}_{L/2-1} \right\} \quad (2.39)$$

Finalmente, se introducen los movimientos de cuerpo rígido como se indica en el apéndice A para obtener la ec 2.20.

La matriz de rigidez  $[K]$  y el vector de fuerzas residuales  $\{\bar{Q}\}$  son los términos requeridos para incorporar el modelo en un programa de análisis no lineal basado en el método de la rigidez y en un procedimiento iterativo como el método de Newton-Raphson (sección 2.1). Con este análisis incremental es factible reproducir el comportamiento de miembros sometidos a cargas cíclicas.

Aunque la ec 2.37 indica que el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  son fuerzas en los extremos del miembro, esto no es correcto desde el punto de vista de los valores de desplazamientos, deformaciones y fuerzas obtenidos con las ecs 2.24 y 2.26. Según la ec 2.30, los estados desplazado y de equilibrio descrito por las ecuaciones anteriores, se deben al vector de fuerzas  $\{P\}$ , los desplazamientos  $\{S\}$  y las discontinuidades en la sección central  $(\{\bar{R}\}_{L/2-1} - \{\bar{R}\}_{L-L/2})$ . Este vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  representa las fuerzas que se deben aplicar en los extremos para eliminar estas discontinuidades (ec 2.39). Para ello es necesario recalcular los valores de respuesta internos considerando que en los extremos se aplica el vector de fuerzas  $\{\bar{Q}\}$ .

### 2.2.3.2 Cálculo de valores de respuesta internos

En un análisis estructural realizado con el método de la rigidez, se obtienen los desplazamientos en los bordes del miembro. Con estos desplazamientos y el vector de residuos de fuerza  $\{\bar{Q}\}$  de la iteración anterior, se calcula el vector de fuerzas  $\{Q\}$  en los extremos del miembro (ec 2.20). Definidos los valores de respuestas en los bordes del miembro, se actualizan los valores respuesta internos.

En el primer paso, se usa la ec 2.25 para estimar las fuerzas  $\{P\}$  y los desplazamientos  $\{S\}$  en las secciones transversales del interior del miembro. El vector de residuos ( $\{\bar{R}\}$ ) en esta ecuación se calcula con los residuos ( $\{\bar{F}\}$ ,  $\{\bar{\varepsilon}\}$ ) de la iteración pasada (ec 2.26), mientras que las deformaciones  $\{\varepsilon\}$ , deslizamientos  $\{u_b\}$ , y fuerzas en las interfaces  $\{F\}$  se calculan con las ecs 2.24, 2.9 y 2.13, respectivamente. Este procedimiento se simplifica si es la primera iteración de un incremento de carga o desplazamiento, ya que todos los residuos son cero.

El siguiente paso es estimar los residuos para este nuevo estado desplazado y de equilibrio en el interior del miembro. En la sección transversal se define un residuo de deformación (ec 2.40) y en la interfaz, un residuo de fuerzas (ec 2.41)

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [F_s] (\{P\} - \{R_p\}) \quad (2.40)$$

$$\{\bar{F}\} = \{F\} - \{R_f\} \quad (2.41)$$

donde  $\{R_p\}$  y  $\{R_f\}$  son las resistencias en las secciones transversales y en las interfaces, respectivamente.

Para incorporar los residuos de las ecs 2.40 y 2.41 en el estado desplazado y de equilibrio del miembro, se repite el primer paso suponiendo que los desplazamientos y fuerzas en los bordes son iguales a cero. La otra diferencia respecto al primer paso, es que se usan los nuevos residuos (ecs 2.40 y 2.41) en vez de los residuos de la iteración anterior. Sin embargo, al actualizar los valores de respuesta internos con estos nuevos valores, se producen las discontinuidades  $\{\bar{R}\}_{L/2} - \{\bar{R}\}_{L/2-1}$  en la sección central.

Finalmente,  $\{\bar{R}\}_{L/2} - \{\bar{R}\}_{L/2-1}$  se eliminan con el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  (ec 2.39). Para esto se repite el primer paso suponiendo que en los extremos, los desplazamientos son cero y las fuerzas son  $\{\bar{Q}\}$ . Además, todos los residuos en el interior del miembro se consideran cero, ya que estos se incorporaron en el paso anterior.

### 2.3 Solución por el método de elemento finito

En la literatura se han propuesto una gran variedad de modelos de elementos finitos (EF). Los principales modelos se basan en funciones de forma de desplazamientos (Aprile *et al.*, 2001; Dall'Asta y Zona, 2002; Daniels y Crisinel, 1993), fuerzas (Reza *et al.*, 1998; Reza y Spacone, 2001) y mixtos, donde se combinan funciones de forma de desplazamientos, fuerzas, esfuerzos y deformaciones (Dall'Asta y Zona, 2004a; Limkatanyu y Spacone, 2002a).

En este trabajo se usan los modelos EF basados en funciones de forma de desplazamientos y fuerzas. Estos modelos pueden considerarse como representativos de los modelos EF, puesto que los métodos mixtos son soluciones que buscan mejorar la precisión de los procedimientos basados en fuerzas y desplazamientos para representar valores de respuesta internos, tales como la distribución de esfuerzos, deformaciones etc (Dall'Asta y Zona, 2004b; Limkatanyu y Spacone, 2002b). Estos dos modelos EF (basados en desplazamientos y fuerzas) se adaptan para el estudio de miembros compuestos con  $m$  elementos componentes y  $n$  interfaces; y se usan como referencia de los resultados que se obtendrían con los diferentes modelos existentes en la literatura que suponen un flujo continuo de fuerzas en la interfaz.

#### 2.3.1 Sistema de ecuaciones diferenciales sin efecto del cortante

En los modelos EF (Daniels y Crisinel, 1993; Limkatanyu y Spacone, 2002a) el efecto del cortante se elimina de diferente manera respecto al modelo DF. Primero se despeja la fuerza cortante en la segunda y cuarta fila de la ec 2.11, y se hacen igual a cero las deformaciones de cortante en la ec 2.8.

$$V_y = \frac{dM_x}{dz} + \sum_{j=1}^n f_j \Delta y_j, \quad (2.42)$$

$$V_x = \frac{dM_y}{dz} + \sum_{j=1}^n f_j \Delta x_j$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{dz} - \theta_x = 0, \quad \gamma_x = \frac{dw}{dz} - \theta_y = 0 \quad (2.43)$$

Luego la ec 2.42 se sustituye en la ec 2.11, y la ec 2.43 en las ecs 2.8 y 2.9 para llegar a

$$[\hat{\partial}] \{ \hat{P} \}_+ [\partial_b] \{ f \} = 0 \quad (2.44)$$

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [\hat{\partial}]^T \{\hat{S}\} \quad (2.45)$$

$$\{u\} = [\partial_b]^T \{\hat{S}\} \quad (2.46)$$

donde  $\{\hat{\varepsilon}\}$  es el vector de deformaciones en la sección transversal  $\{\varepsilon\}$  sin las deformaciones por cortante,  $\{\hat{S}\}$  es el vector de desplazamientos  $\{S\}$  sin las rotaciones,  $\{\hat{P}\}$  es el vector de fuerzas  $\{P\}$  sin incluir las fuerzas de cortante y;  $[\hat{\partial}]$  y  $[\partial_b]$  son operadores diferenciales.

$$[\hat{\partial}] = \begin{bmatrix} d^2/dz^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d^2/dz^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d/dz & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d/dz \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$[\partial_b]^T = \begin{bmatrix} d/dz \Delta y_1 & d/dz \Delta x_1 & s_{11} & \cdots & s_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d/dz \Delta y_n & d/dz \Delta x_n & s_{1n} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

### 2.3.2 Modelo EF basado en desplazamientos

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (ecs 2.44 y 2.45), en los modelos EF basados en desplazamientos se usan funciones de formas con el objeto de relacionar los desplazamientos internos  $\{\hat{S}\}$  con los desplazamientos en los extremos del miembro  $\{d\}$  (ec 2.49). Estas funciones de forma le permiten satisfacer en cada punto del miembro las condiciones de compatibilidad de desplazamientos (ec 2.45); mientras que las condiciones de equilibrio (ec 2.44) se satisfacen de forma aproximada haciendo el variacional del funcional de energía potencial ( $\Pi_{PE}$ ) igual a cero (Limkatany y Spacone, 2002a).

$$\{\hat{S}\} = [N_{sd}] \{d\} \quad (2.49)$$

$$\delta \Pi_{PE} = \int_L \left( \delta \{\hat{S}\}^T \left[ [\hat{\partial}] \{\hat{\Delta P}\} + [\partial_b] \{\Delta f\} \right] \right) dz = 0 \quad (2.50)$$

donde  $\{d\}$  es el vector de desplazamientos en los extremos del miembro, y  $[N_{sd}]$  es una matriz que contiene las funciones de forma de desplazamiento.

Para armar las funciones de forma de la ec 2.49 y transformar la ec 2.50 a un sistema de ecuaciones lineales donde se pueda inferir la matriz de rigidez y el vector de resistencia del miembro, se escogió el modelo propuesto por Daniels y Crisinel (1993). Este modelo incluye un grado de libertad para el desplazamiento axial en el centro de cada elemento componente; lo cual evita problemas numéricos que obligan al uso de mallas más finas para converger a la solución (Dall'Asta y Zona, 2002); tal como sucede con el modelo propuesto por Spacone y Limkatanyu (2000).

Las funciones de forma se construyen partiendo de un polinomio de Hermite para el desplazamiento perpendicular al eje longitudinal del miembro (ec 2.51); mientras que para los desplazamientos axiales se usa un polinomio cuadrático (ec 2.52) (Dall'Asta y Zona, 2002; Daniels y Crisinel, 1993). Este último se construye colocando un grado de libertad en el centro del claro de cada elemento componente.

$$\begin{aligned} v &= \left( z - 2 \frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right) \theta_{x1} + \left( - \frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right) \theta_{xL} + \left( 1 - 4 \frac{z}{L} + 3 \frac{z^2}{L^2} \right) v_1 \\ &\quad + \left( - 2 \frac{z}{L} + 3 \frac{z^2}{L^2} \right) v_L \\ w &= \left( z - 2 \frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right) \theta_{y1} + \left( - \frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right) \theta_{yL} + \left( 1 - 4 \frac{z}{L} + 3 \frac{z^2}{L^2} \right) w_1 \\ &\quad + \left( - 2 \frac{z}{L} + 3 \frac{z^2}{L^2} \right) w_L \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$u = \left( 1 - 3 \frac{z}{L} + 4 \frac{z^2}{L^2} \right) u_1 + \left( 4 \frac{z}{L} - 4 \frac{z^2}{L^2} \right) u_{L/2} + \left( - \frac{z}{L} + 2 \frac{z^2}{L^2} \right) u_L \quad (2.52)$$

donde  $\theta_{x1}, \theta_{y1}, v_1, w_1$  son los desplazamientos en el extremo izquierdo del miembro; y  $\theta_{xL}, \theta_{yL}, v_L, w_L$  son los desplazamientos en el extremo derecho.

Sustituyendo las ecs 2.51 y 2.52 en la ec 2.46 se terminan de construir las funciones de forma de la ec 2.49.

Las ecuaciones constitutivas, en este caso, son la ec 2.13 para las interfaces y la ec 2.12 para las secciones transversales, pero sin los términos asociados a las deformaciones y a las fuerzas de cortante.

$$\{\Delta \hat{P}\} = [k_s] \{\Delta \hat{\varepsilon}\} + \{\bar{P}\} \quad (2.53)$$

Por último, para definir la matriz de rigidez y el vector de resistencia del miembro, se sustituyen las ecs 2.13, 2.45, 2.46, 2.49 y 2.53 en la ec 2.50, y se realiza la integración por partes para obtener

$$\int_L \left( [N_{s \ d}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix}^T [N_{s \ d}] \right) dz \{\Delta d\} = \{\Delta Q\} \\ - \int_L \left( [N_{s \ d}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{P} \\ \hat{f} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (2.54)$$

Rescribiendo la ec 2.54 en una forma reducida se llega a una ecuación análoga a la ec 2.20

$$\{\Delta Q\} = [K] \{\Delta d\} - \{\bar{Q}\} \quad (2.55)$$

donde

$$[K] = \int_L \left( [N_{s \ d}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix}^T [N_{s \ d}] \right) dz \quad (2.56)$$

$$\{\bar{Q}\} = - \int_L \left( [N_{s \ d}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P} \\ \bar{f} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (2.57)$$

Con la ec 2.55 se puede implementar el modelo en un programa de análisis basado en el método de la rigidez, tal como se describe en la sección 2.1. Este análisis incremental le permite al modelo reproducir el comportamiento de un miembro compuesto sometido a carga alternada. Por otro lado, a diferencia del modelo DF (sección 3.4.2) y el modelo EF basado en fuerzas (sección 4.4.2), en el modelo EF basado en desplazamiento si se genera el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  producto de la actualización de los valores de respuesta internos a través de las ecs 2.13 y 2.53. Por lo tanto, no es necesario realizar ningún paso adicional. Este aspecto, es lo que hace atractivo a estos modelos, puesto que requieren menos pasos que el resto de los modelos (Limkatanyu y Spacone, 2002b).

### 2.3.3 Modelo EF basado en fuerza

En el modelo EF basado en fuerzas, las funciones de forma relacionan las fuerzas en los extremos del miembro ( $\{Q\}$ ) y en puntos escogidos a lo largo de las interfaces ( $\{q\}$ ), con

las fuerzas resultantes en las secciones transversales ( $\{P\}$ ) y en cualquier punto de la interfaz ( $\{f\}$ ) (ec 2.58). La selección de las mismas se hace para satisfacer las condiciones de equilibrio (ec 2.44) en todos los puntos del miembro, suponiendo que este se encuentra articulado en un extremo y simplemente apoyado en el otro (Limkatanyu y Spacone, 2002a). El caso contrario son las condiciones de compatibilidad de desplazamientos (ec 2.45), las cuales se satisfacen de forma aproximada mediante el principio estacionario del funcional de energía potencial complementaria ( $\Pi_{CPE}$ ) (Limkatanyu y Spacone, 2002a) (ec 2.59).

$$\begin{Bmatrix} \hat{P} \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{PQ} & N_{Pq} \\ N_{fQ} & N_{fq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Q} \\ q \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\delta \Pi_{CPE} = \int_L \left( \delta \{\hat{\Delta P}\}^T \begin{bmatrix} \{\hat{\varepsilon}\} - [\hat{\partial}]^T \{\hat{S}\} \\ \{u\} - [\hat{\partial}_b]^T \{\hat{S}\} \end{bmatrix} + \delta \{\hat{\Delta f}\}^T \begin{bmatrix} \{u\} - [\hat{\partial}_b]^T \{\hat{S}\} \end{bmatrix} \right) dz = 0 \quad (2.59)$$

donde  $N_{PQ}$ ,  $N_{Pq}$ ,  $N_{fQ}$ ,  $N_{fq}$  son las funciones de forma basadas en las condiciones de equilibrio,  $\{q\}$  es el vector de fuerzas en la interfaces calculadas en puntos seleccionados de la misma,  $\{\tilde{Q}\}$  es el vector de fuerzas  $\{Q\}$ , pero sin las reacciones de apoyo en el miembro simplemente apoyado.

Por su parte, las ecuaciones constitutivas (ecs 2.12 y 2.13) se plantean en término de deformaciones, ya que las fuerzas se obtienen a partir de equilibrio (ec 2.58). Por lo tanto, en la sección transversal se emplea la ec 2.24, la cual es la contraparte o inverso de la ec 2.12; mientras que la contraparte de la ec 2.13 es

$$\{\Delta u_b\} = [F_b] \{\Delta f\} + \{\bar{u}\} \quad (2.60)$$

donde  $[F_b]$  es la matriz de flexibilidad de las interfaces y  $\{\bar{u}\}$  es el vector de deslizamientos residuales en las interfaces.

Finalmente, integrando por partes la ec 2.59 y sustituyendo las ecs 2.24, 2.58 y 2.60 para un incremento de carga, se obtiene

$$\int_L \left( \begin{bmatrix} N_{PQ} & N_{Pq} \\ N_{fQ} & N_{fq} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_s & 0 \\ 0 & F_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{PQ} & N_{Pq} \\ N_{fQ} & N_{fq} \end{bmatrix} \right) dz \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{Q} \\ \Delta q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{d} \\ 0 \end{Bmatrix} - \int_L \left( \begin{bmatrix} N_{PQ} & N_{Pq} \\ N_{fQ} & N_{fq} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \bar{u} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (2.61)$$

Rescribiendo la ec 2.61 en una forma condensada

$$\begin{bmatrix} F_{PQ} & F_{Pq} \\ F_{fQ} & F_{fq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\tilde{Q} \\ \Delta q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\tilde{d} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_\varepsilon \\ r_u \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

donde

$$F_{PQ} = \int_L \left( [N_{PQ}]^T [F_s] [N_{PQ}] + [N_{fQ}]^T [F_b] [N_{fQ}] \right) dz \quad (2.63)$$

$$F_{Pq} = \int_L \left( [N_{PQ}]^T [F_s] [N_{Pq}] + [N_{fQ}]^T [F_b] [N_{fq}] \right) dz \quad (2.64)$$

$$F_{fQ} = F_{Pq} \quad (2.65)$$

$$F_{fq} = \int_L \left( [N_{Pq}]^T [F_s] [N_{Pq}] + [N_{fq}]^T [F_b] [N_{fq}] \right) dz \quad (2.66)$$

$$\{r_\varepsilon\} = \int_L \left( [N_{PQ}]^T \{\bar{\varepsilon}\} + [N_{Pq}]^T \{\bar{u}\} \right) dz \quad (2.67)$$

$$\{r_u\} = \int_L \left( [N_{fQ}]^T \{\bar{\varepsilon}\} + [N_{fq}]^T \{\bar{u}\} \right) dz \quad (2.68)$$

Luego, se eliminan por condensación estática los grados de libertad asociados al vector  $\{\Delta q\}$  en la ec 2.62. Para esto se despeja el vector  $\{\Delta q\}$  en la segunda fila de la ec 2.62

$$\{\Delta q\} = [F_{fq}]^{-1} \left( [F_{fQ}] \{\Delta\tilde{Q}\} - \{r_u\} \right) \quad (2.69)$$

Se sustituye la ec 2.69 en la primera fila de la ec 2.62

$$[F] \{\Delta\tilde{Q}\} = \{\Delta\tilde{d}\} - \{R_\varepsilon\} - \{R_u\} \quad (2.70)$$

donde

$$[F] = [F_{PQ}] - [F_{Pq}] [F_{fq}]^{-1} [F_{fQ}] \quad (2.71)$$

$$\{R_\varepsilon\} = \int_L \left( [N_{PQ}]^T - [F_{Pq}] [F_{fq}]^{-1} [N_{fQ}]^T \right) \{\bar{\varepsilon}\} dz \quad (2.72)$$

$$\{R_u\} = \int_L \left( [N_{Pq}]^T - [F_{Pq}] [F_{fq}]^{-1} [N_{fQ}]^T \right) \{\bar{u}\} dz \quad (2.73)$$

Por último, se multiplican ambos términos de la ec 2.70 por  $[F]^{-1}$  para obtener una ecuación análoga a la ec 2.20, y se introducen los movimientos de cuerpo rígido como se describe en el apéndice A.

$$\{\Delta\bar{Q}\} = [K] \{\Delta\bar{d}\} - \{\bar{Q}\} \quad (2.74)$$

donde

$$[K] = [F]^{-1} \quad (2.75)$$

$$\{\bar{Q}\} = [F]^{-1} (\{R_\varepsilon\} + \{R_u\}) \quad (2.76)$$

Al igual que en el modelo DF, en este método tampoco es correcto aceptar que el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  son fuerzas en los extremos del miembros, tal como indica la ec 2.74. Los desplazamientos  $\{\Delta u_b\}$ , deformaciones  $\{\varepsilon\}$  y fuerzas  $\left\{ \begin{matrix} \hat{P} \\ f \end{matrix} \right\}^T$  calculadas con las ecs 2.60, 2.24 y 2.58, respectivamente, se producen por las fuerzas  $\{\bar{Q}\}$ , los desplazamientos  $\{\Delta\bar{d}\}$  y los residuos de desplazamientos en los extremos  $\{R_\varepsilon\}$  y  $\{R_u\}$  (ec 2.70). El vector  $\{\bar{Q}\}$  son las fuerzas necesarias para eliminar los residuos de desplazamientos en los extremos  $\{R_\varepsilon\}$  y  $\{R_u\}$  (ec 2.76), lo cual se lograría después de recalcular los valores de respuesta internos producto de la aplicación del vector de fuerzas  $\{\bar{Q}\}$ .

### 2.3.3.1 Deducción de las funciones de forma

El proceso de deducción de las funciones de forma se basa en el método propuesto por Reza *et al.* (1998). Sin embargo, para aplicarlo a un miembro compuesto, el cual se requiera descomponer en  $m$  elementos componentes ligados por  $n$  interfaces, es necesario realizar algunas modificaciones al método.

Se parte de fijar funciones que describan la variación de las fuerzas en la interfaz. Para esto, la fuerza en cualquier punto de la misma se obtiene a partir de valores de fuerzas en cuatro puntos seleccionados (fig 2.8), empleando polinomios cúbicos

$$f = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2L^3} z^3 + \frac{9}{L^2} z^2 - \frac{11}{2L} z + 1 \\ \frac{27}{2L^3} z^3 - \frac{45}{2L^2} z^2 + \frac{9}{L} z \\ -\frac{27}{2L^3} z^3 + \frac{18}{L^2} z^2 - \frac{9}{2L} z \\ \frac{9}{2L^3} z^3 - \frac{9}{2L^2} z^2 + \frac{1}{L} z \end{bmatrix} \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \quad (2.77)$$

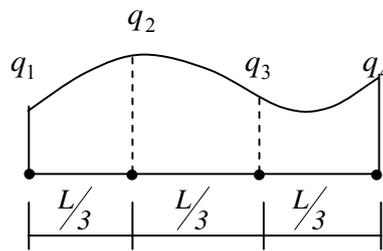


Fig 2.8 Variación de la fuerza en la interfaz j

En cada elemento componente  $i$ , se debe satisfacer el equilibrio de fuerzas axiales (ec 2.1). Para cumplir con esta condición se integra la ec 2.1 en toda la longitud del elemento

$$N_L - N_1 = \int_L \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \right) dz \quad (2.78)$$

donde  $N_1$  y  $N_L$  son las fuerzas axiales en los dos extremos del elemento componente.

Se sustituye la ec 2.77 en la ec 2.78 y se realiza la integración

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} q_{4j} = \frac{8}{L} (N_1 + N_L) - \sum_{j=1}^n s_{ij} (q_{1j} + 3q_{2j} + 3q_{3j}) \quad (2.79)$$

Esta ecuación se escribe para los  $m$  elementos componentes del miembro compuesto y se agrupa en forma matricial

$$[S]\{q_4\} = \frac{8}{L} [C]\{N\} + [H]\{q\} \quad (2.80)$$

donde  $[S]_{m-1 \times n}$  es la matriz de equilibrio entre las fuerzas axiales en las interfaces y en las secciones transversales del miembro. Sus términos son los valores  $s_{ij}$  de la ec2.1, sin

incluir los valores asociados a los elementos donde se apoya el miembro.  $\{q_4\}_{1 \times n}$  es el vector de fuerzas  $q_4$  de todas las interfaces.  $\{N\}$  es el vector de fuerza axial en los bordes del miembro.  $\{q\}^T$  es  $\{q_{11} \ q_{21} \ q_{31} \ \dots \ q_{1n} \ q_{2n} \ q_{3n}\}$ .  $[C]$  es una matriz de conectividad entre los nudos y los elementos. Los términos  $c_{ji}$  son iguales a uno si el nudo  $i$  tiene contacto con el elemento  $j$ , y cero si no existe ningún contacto.  $[H]$  es una matriz donde cada término  $h_{j3(i-1)+k}$  ( $k = 1,2,3$ ) está relacionado a un elemento  $j$ , una interfaz  $i$  y a un punto  $k$ . Si una interfaz  $i$  no tiene contacto con el elemento  $j$ ,  $h$  es cero. Si existe contacto, entonces el valor depende de  $k$ . Si  $k$  es 1, el valor de  $h$  es  $-s_{ij}$ ; y si  $k$  es 2 o 3,  $h$  es  $-3 s_{ij}$ .

El único elemento excluido de la ec 2.80 es él que tiene conexión con los apoyos del miembro, ya que todos los términos correspondientes a este elemento en la ec 2.80, se hacen nulos cuando se introduce la ecuación de equilibrio de fuerza axial de todo el miembro.

El vector de fuerzas en las interfaces  $\{q_4\}$  se despeja de la ec 2.80 al multiplicar ambos por  $[S]^{-1}$ , el resultado se sustituye en la ec 2.77 escrita para todas las interfaces del miembro

$$\{f\} = \frac{8}{L} [S]^{-1} [C] \{N\} + ([Z] + [S]^{-1} [H]) \{q\} \quad (2.81)$$

donde  $[Z]$  es la matriz de funciones de forma de la ec 2.77 para los términos  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  correspondiente a cada una de las interfaces. Cada término  $Z_{j3(i-1)+k}$  ( $k = 1,2,3$ ) se relaciona con una interfaz  $j$  y una interfaz  $i$ , mientras que  $k$  indica si se refiere a  $q_1$ ,  $q_2$  o a  $q_3$  en la interfaz. Todos los términos donde  $j$  sea diferente de  $i$ , son iguales a cero. En caso contrario, se tomará el polinomio de la columna  $k$  en la matriz de funciones que multiplica al vector  $\{q_1 \ q_2 \ q_3\}$  en la ec 2.77.

De esta forma se obtienen parte de las funciones de forma de la ec 2.58, donde  $[N_{f q}]$  es  $[Z] + [S]^{-1} [H]$ ; mientras que  $\frac{8}{L} [S]^{-1} [C]$  son los términos de  $[N_{f Q}]$  asociados a las fuerzas axiales en los extremos. El resto de los términos en  $[N_{f Q}]$  son cero.

Para definir el resto de las funciones de forma de la ec 2.58, se sustituye la ec 2.81 en la ecuación de equilibrio de fuerza axial para cada elemento componente  $i$  (ec 2.82) y de equilibrio de momentos (ecs 2.83 y 2.84).

$$N_i = \int_0^z \left( \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \right) dz - N_{i1} \quad (2.82)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^m [(N_i - N_{i1}) x_i] + V_y z + M_{x1} \quad (2.83)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^m [(N_i - N_{i1}) y_i] + V_x z + M_{y1} \quad (2.84)$$

donde  $N_i$  y  $N_{i1}$  son las fuerzas axiales en el elemento  $i$ , a una distancia  $z$  del borde y en el extremo izquierdo, respectivamente.  $M_{y1}$  y  $M_{x1}$  son los momentos actuantes en el extremo izquierdo.

Si el procedimiento descrito en las ecs 2.81 a 2.84 se aplica para un miembro con dos elementos componentes y una interfaz, se llegan a las mismas funciones de forma descritas por Reza *et al.* (1998). Sin embargo, si el procedimiento se aplica a un miembro con  $m$  elementos componentes y  $n$  interfaces es necesario tener en cuenta un problema adicional. La matriz  $[S]$  tiene  $m-1$  filas con  $n$  columnas. Por lo tanto el proceso de inversión requerido para pasar de la ec 2.80 a 2.81, se puede realizar de forma exacta únicamente en miembros donde el número de elementos ( $m$ ) es igual al número de interfaces ( $n$ ) más uno, ya que la matriz  $[S]$  resulta singular y cuadrada. Esta condición se cumple en un gran número de ejemplos donde se ha aplicado este modelo (Reza *et al.*, 1998; Limkatanyu, y Spacone, 2002b; Reza y Spacone, 2001).

Para estudiar miembros donde el número de elementos no es igual al número de interfaces más uno, como el ejemplo mostrado en la fig 2.1, se introdujo un método para invertir matrices rectangulares basado en la descomposición de valores singulares (Wilkinson y Reinsch, 1971).

### 2.3.3.2 Cálculo de la respuesta interna del miembro

Después de realizar el análisis estructural correspondiente a una iteración, se obtienen los desplazamientos en los extremos del miembro. Luego se usa la ec 2.74 y el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  de la iteración anterior para obtener las fuerzas en los extremos  $\{Q\}$  a partir de los desplazamientos. Conocida la respuesta del miembro en sus extremos, se calculan los valores internos  $\{q\}$ ,  $\{\hat{P}\}$ ,  $\{f\}$ ,  $\{u_b\}$  y  $\{\varepsilon\}$  con la ecs 2.69, 2.58, 2.60 y 2.24, respectivamente. En todos estos cálculos se usan los residuos de la iteración anterior, excepto cuando es la primera iteración de un incremento de carga o desplazamiento. En ese caso, se considera que todos los residuos son cero.

El siguiente paso es calcular los residuos en las secciones transversales e interfaces para este nuevo estado desplazado. Para ello, en este método se usa un residuo para las deformaciones igual al método DF (ec 2.40), mientras que en las interfaces se define un residuo para el deslizamiento en la interfaz

$$\{\bar{u}\} = [F_b] (\{F\} - \{R_f\}) \quad (2.85)$$

Los residuos de deformaciones  $\{\bar{\varepsilon}\}$  y deslizamientos  $\{\bar{u}\}$  se integran para obtener los residuos en desplazamientos ( $\{R_\varepsilon\} + \{R_u\}$ ) (ecs 2.72 y 2.73).

Por último, para eliminar los residuos de desplazamientos en los bordes y llevar el miembro al estado desplazado que se obtuvo del análisis estructural, se calcula el vector de residuos  $\{\bar{Q}\}$  (ec 2.76). Este vector de fuerzas se aplica con el mismo procedimiento descrito en el primer paso y los residuos calculados en el paso anterior.

### 3 CALIBRACIÓN DE LOS MODELOS

En esta sección los modelos teóricos se aplican a tres casos prácticos con el propósito de verificar su estabilidad numérica y capacidad para reproducir el comportamiento de miembros estructurales reales. En los primeros dos se comparan las respuestas de los modelos DF y EF con datos experimentales obtenidos de una trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de pernos. En esta comparación se evalúa la capacidad de ambos modelos para reproducir la respuesta global y local del miembro estructural sometido a carga monótona-creciente y cíclica. Por otro lado, con el tercero se estudia el alcance de ambos modelos para incluir el deslizamiento relativo en miembros con varios elementos componentes e interfaces, y sus resultados se comparan con los obtenidos de un modelo de elemento finito tridimensional (3D).

#### 3.1 Trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortante

Este ejemplo consiste en una trabe metálica ligada a una losa de concreto a través de conectores de cortante. Sus propiedades geométricas y de los materiales se ilustran en las figs 3.1 y 3.2, respectivamente. Esta trabe fue ensayada experimentalmente por Abdel (1986), donde se le denominó como P14. En el ensaye, se le aplicó una carga vertical y se midió el desplazamiento en el centro del claro, así como la variación del deslizamiento en la interfaz para distintos niveles de cargas. Debido a esta variedad de información experimental disponible, Fabbrocino *et al.* (1999) empleó este ensaye para validar su modelo teórico; y por estas mismas razones, se usa en este trabajo para el modelo DF propuesto.

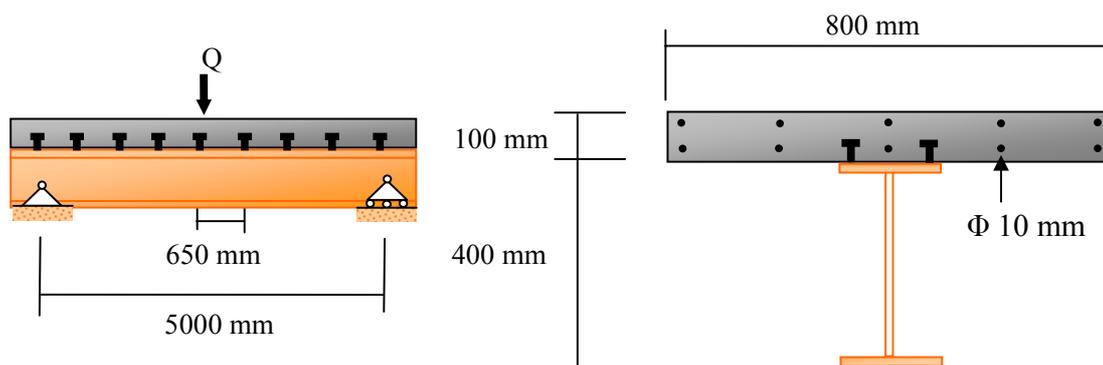
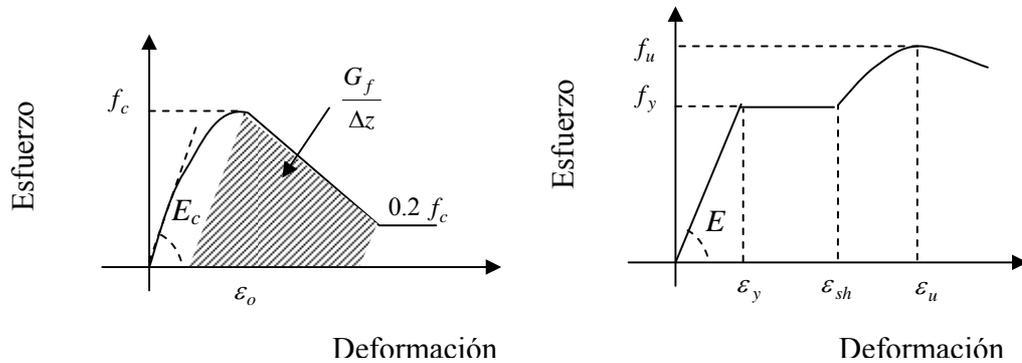


Fig 3.1 Miembro estructural estudiado experimentalmente (Fabbrocino *et al.*, 1999)

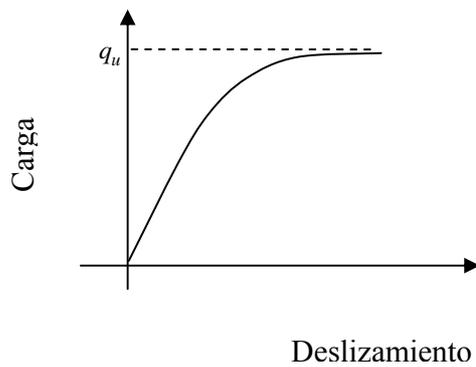
Para la simulación numérica se construyeron tres modelos con los métodos: EF basado en desplazamiento, DF con la rigidez de los conectores distribuida uniformemente a lo largo de la interfaz, y DF con la rigidez de los conectores concentrada en los puntos donde estos se encuentran. Los conectores en los extremos se movieron hacia los apoyos para no incluir los voladizos en los modelos y simplificarlos (fig 3.3). La integración a lo largo del

miembro y en las secciones transversales, se hizo con las mallas de elementos y fibras que se muestran en la fig 3.3; mientras que los análisis se realizaron controlando los desplazamientos, con un incremento de 1 mm y una tolerancia de error de 0.001 mm, y las iteraciones se hicieron con el método de Newton-Rapshon.



a) Concreto (Coleman y Spacone, 2001)

b) Acero (Mander *et al.*, 1988)



**Losa de concreto**

$f'_c = 35 \text{ MPa}$

$\epsilon_0 = 0.002$

$G_f = 20 \text{ N/mm}$

**Conectores de cortante**

$q_u = 130 \text{ kN}$

**Perfil metálico IPE-400**

Ala:  $f_y = 245 \text{ MPa}$   $f_u = 370 \text{ MPa}$

Alma:  $f_y = 260 \text{ MPa}$   $f_u = 372 \text{ MPa}$

$\epsilon_{sh} = 18 \epsilon_y$   $\epsilon_u = 80 \epsilon_y$

c) Conector (Ollgaard *et al.*, 1971).

Fig 3.2 Modelos constitutivos

Las curvas carga-deflexión y la variación del deslizamiento para una carga de 344 kN se muestran en las figs 3.4 y 3.5, respectivamente. Ambas curvas se compararon con los resultados obtenidos con los dos modelos DF y el modelo EF, así como las mediciones experimentales y valores teóricos descritos por Fabbrocino *et al.* (1999). El análisis de los resultados muestra una buena correlación entre los resultados experimentales y los valores teóricos. Por lo tanto, en este ejemplo no es importante modelar la transferencia de fuerza como fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores de cortante o a través de una variación continua de fuerzas en la interfaz.

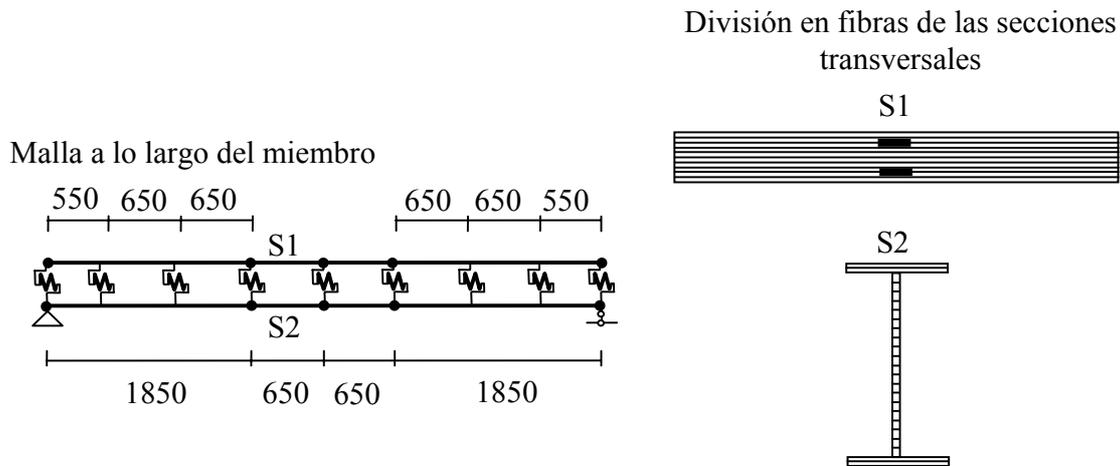


Fig 3.3 Mallas para la integración numérica

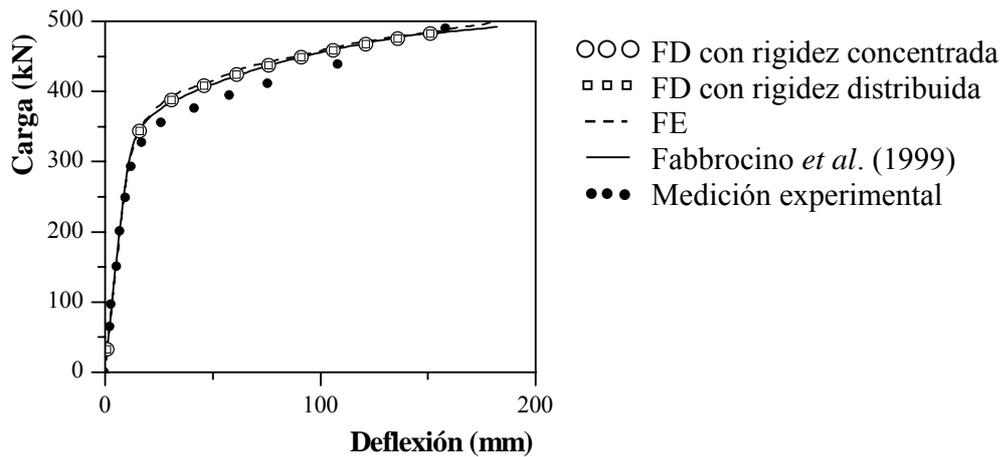


Fig3.4 Comparación de la curva carga-desplazamiento.

### 3.2 Trabe compuesta sometida a carga cíclica

En este ejemplo se compara el modelo DF con las mediciones experimentales realizadas por Bursi y Gramola (2000) en una estructura sometida a carga cíclica, cuyas principales características se ilustran en la fig 3.6. Esta estructura está conformada por una columna HE360B, la cual fue diseñada con la resistencia y rigidez suficiente para que la disipación de la energía ocurra únicamente en la trabe compuesta. Por su parte, la trabe está compuesta por un perfil IPE330 unido a una losa de concreto a través de conectores de cortante. Este perfil metálico se considera representativo de la práctica común en Europa y es conocido el desarrollo de pandeo en el mismo antes de alcanzar su resistencia. En el ensaye se colocaron rigidizadores con el objeto de retardar el pandeo, sin embargo no se pudo evitar que este fuera la causa principal del colapso de la estructura (Bursi y Gramola, 2000).

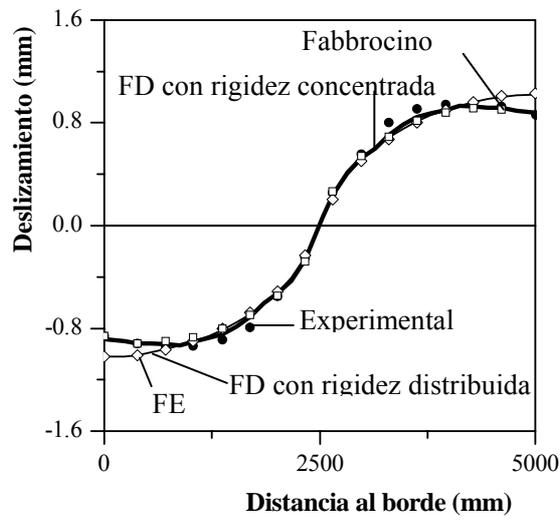


Fig 3.5 Comparación del deslizamiento para una carga de 344 kN

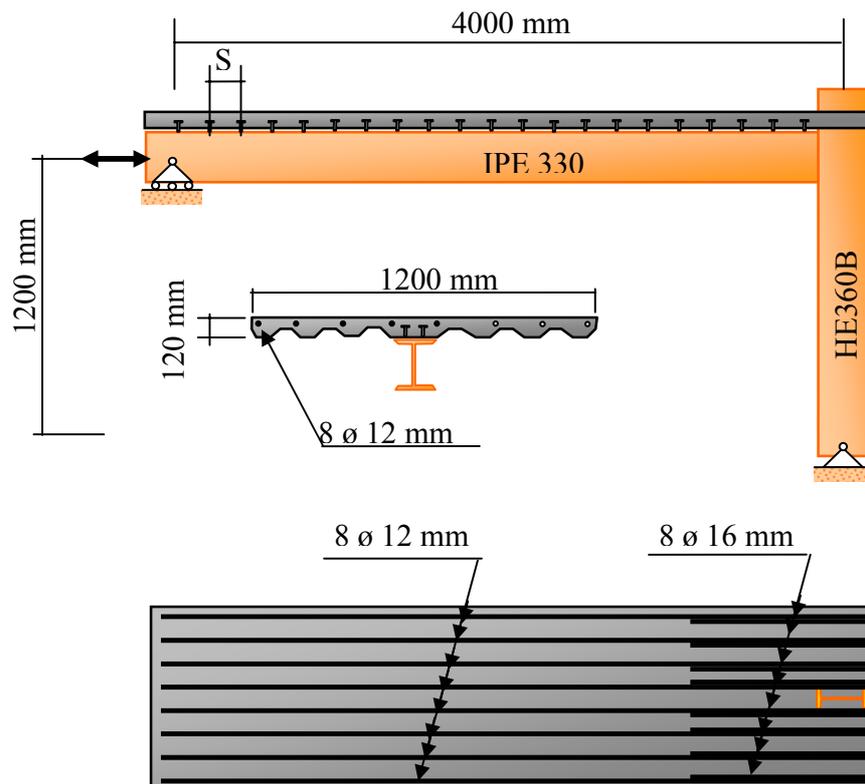
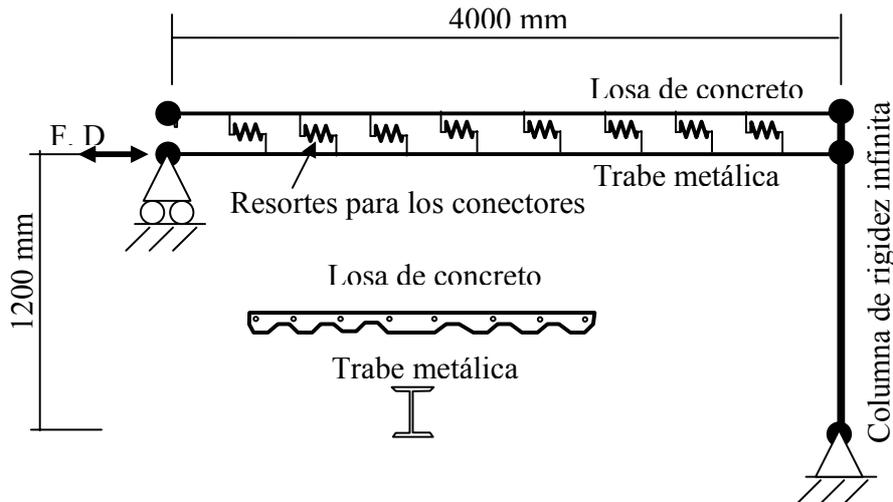


Fig 3.6 Características del ensayo de Bursi y Gramola (2000)

Las simulaciones numéricas se realizaron con los modelos DF y EF basado en desplazamiento. Las principales características de los modelos se ilustran en la fig 3.7. Estos incluyen una columna con rigidez infinita para representar el hecho de que la columna no disipa energía. La distribución no uniforme de esfuerzo a lo largo del ancho de la losa se modela con un ancho efectivo constante de 800 mm. Este valor se infirió de la variación del ancho efectivo a lo largo de la trabe (fig 3.7), la cual fue calculada por Bursi y Ballerini (1996) con un modelo EF 3D.



Variación del ancho efectivo obtenida por Bursi y Ballerini (1996)

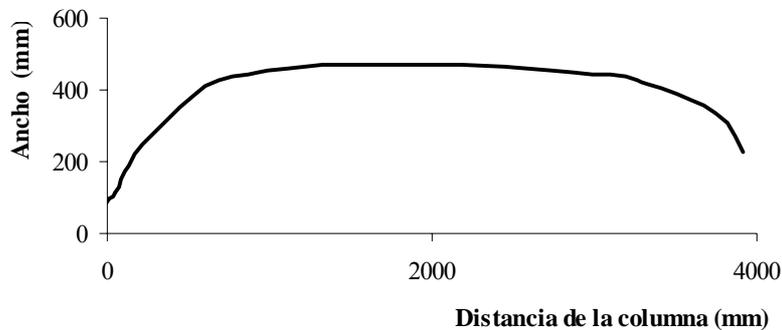
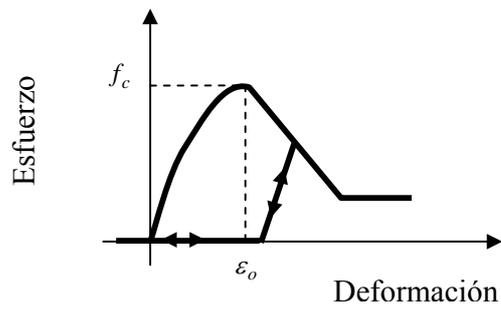
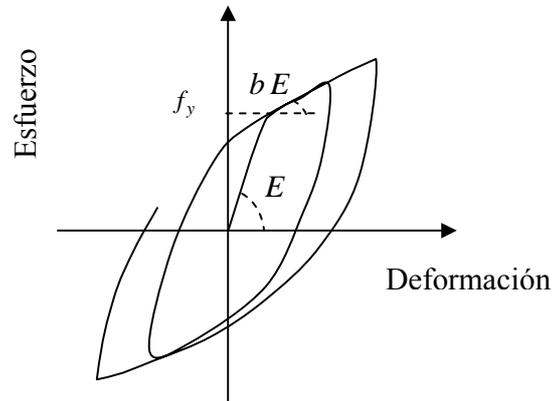


Fig 3.7 Principales características de los modelos teóricos

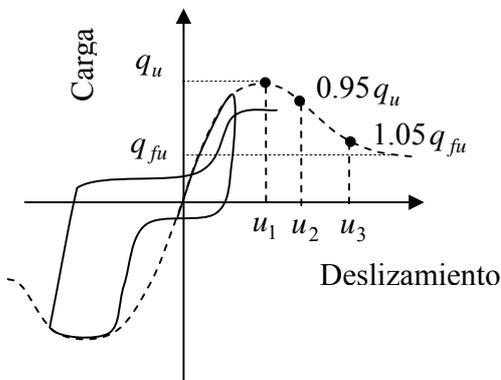
Las propiedades de los materiales se obtuvieron a partir de los ensayos realizados por Bursi y Gramola (1999), los cuales incluyeron pruebas para determinar las propiedades de los conectores. Estos valores son los datos los modelos constitutivos de la fig 3.8.



a) Concreto (Reza, 1999)



b) Acero (Filippou *et al.*, 1983)



c) Conector (Reza, 1999).

**Losa de concreto**

$f'_c = 39 \text{ MPa}$

$\epsilon_0 = 0.003$

**Conectores de cortante**

$q_u = 550 \text{ kN}$       $q_{fu} = 200 \text{ kN/mm}$

$u_1 = 2.25 \text{ mm}$

$u_2 = 5 \text{ mm}$

$u_3 = 40 \text{ mm}$

**Perfil metálico IPE-330**

$f_y = 300 \text{ MPa}$     $E = 2.05 \times 10^5 \text{ Mpa}$     $b = 0.0077$

**Barra de acero**

$f_y = 480 \text{ MPa}$     $E = 2.1 \times 10^5 \text{ Mpa}$     $b = 0.0077$

Fig 3.8 Modelos constitutivos y propiedades del acero, el concreto y los conectores

Al igual que el ejemplo anterior, se siguió la historia de desplazamiento del ensaye experimental (Bursi y Gramola, 2000), con incrementos de 1 mm e iteraciones con el método de Newton-Raphson para buscar la condición de equilibrio.

En la fig 3.9 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con las mediciones experimentales reportadas por Bursi y Gramola (2000). Las comparaciones muestran una adecuada correlación con las mediciones experimentales. La diferencia principal se produce en los últimos ciclos donde ocurrió pandeo local del perfil metálico. Esto no se puede modelar con los modelos propuestos debido a que no consideran los efectos no lineales geométricos.

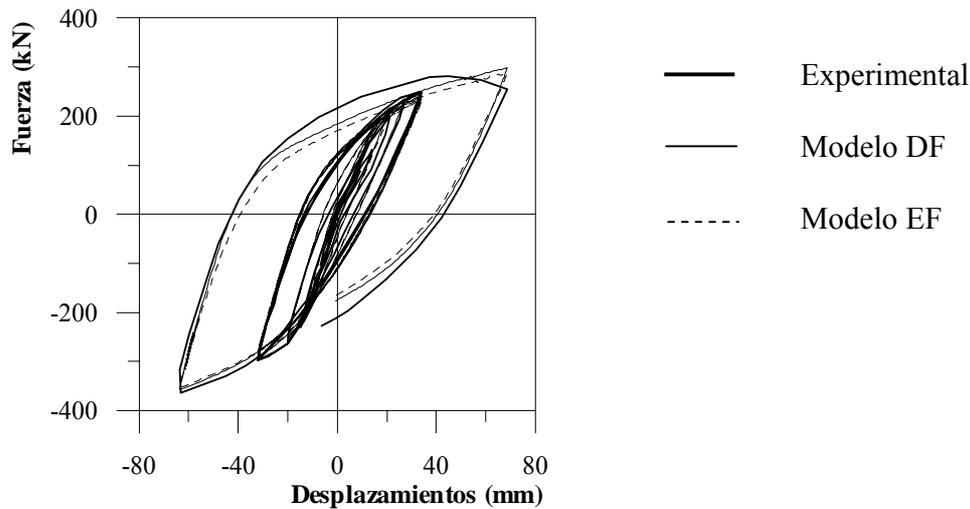


Fig 3.9 Comparación teórico-experimental del miembro sometido a carga cíclica

### 3.3 Columna reforzada con cuatro ángulos metálicos conectados con placa a lo largo del miembro

El miembro estudiado se muestra en la fig 2.1. Está compuesto por cinco elementos componentes, los cuales son la columna y los cuatro ángulos metálicos. Estos se encuentran ligados a través de ocho interfaces. Por otro lado, se supuso que la columna está sometida a momentos iguales en los extremos y apoyada en un extremo articulado y el otro simplemente apoyado.

Los modelos FE y FD se validan con un modelo EF 3D elaborado en el programa SAP2000 (2002). Este modelo 3D se construye con elementos sólidos para la columna, elementos cascarón para los ángulos y resortes para las interfaces ángulos-columna y ángulo-ángulo. Los materiales se consideran dentro del intervalo de comportamiento elástico-lineal y en los extremos se colocan elementos cascarón con la rigidez suficiente para lograr que en cada extremo las secciones permanezcan planas después del desarrollo de las deformaciones.

Las rotaciones en los dos extremos del miembro son iguales y sus valores obtenidos con los diferentes modelos se comparan en la tabla 3.1. La respuesta local se evaluó a través de la comparación del deslizamiento relativo en la interfaz, la cual se ilustra en la fig 3.10. Se observa que los modelos DF y EF se comportaron adecuadamente. Únicamente, en los bordes del modelo EF basado en fuerzas se produjeron fluctuaciones; sin embargo esto no impidió una buena estimación de la respuesta global del miembro, y al quitar estas fluctuaciones, la respuesta teórica reproduce la obtenida con los otros modelos. La razón de este comportamiento es que la compatibilidad de desplazamiento no se satisface estrictamente en los bordes de cada uno de los 20 elementos en los cuales se dividió al miembro.

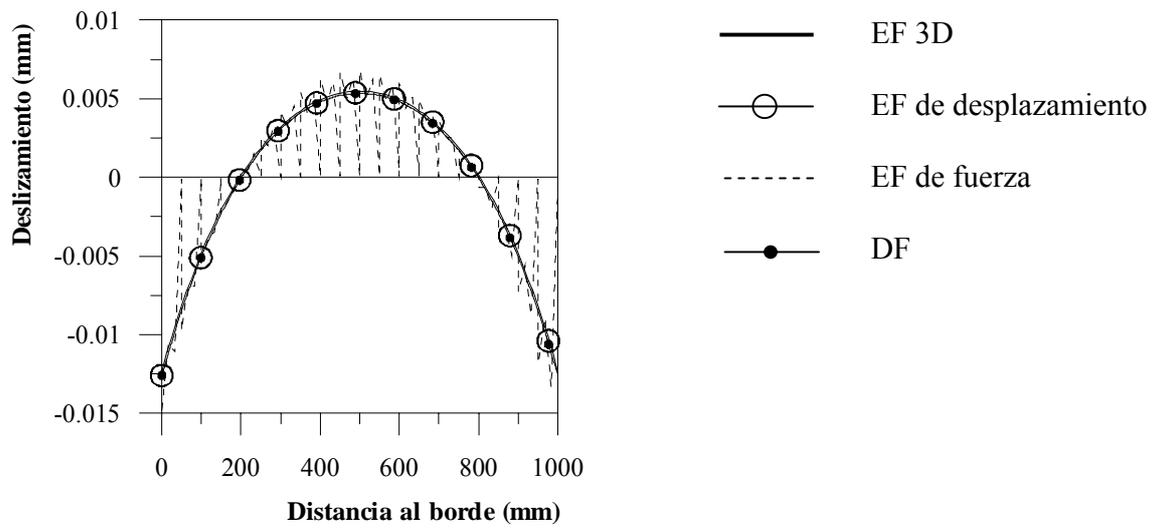


Fig 3.10 Comparación del deslizamiento.

Tabla 3.1. Comparación de las rotaciones en el extremo de la columna

Modelo de elemento finto	Modelo DF		Modelo EF de fuerza		Modelo EF de desplazamiento	
	Rotación (rad)	Error (%)	Rotación (rad)	Error (%)	Rotación (rad)	Error (%)
2.15E-04	2.18E-04	1.15	2.18E-04	1.16	2.18E-04	1.28
4.81E-04	4.89E-04	1.69	4.89E-04	1.69	4.89E-04	1.81

#### 4 APLICACIÓN DE LOS MODELOS

El objetivo de este capítulo es definir los casos donde conviene emplear al nuevo modelo DF respecto a los modelos EF; y además, determinar las ventajas de realizar el análisis con estos modelos y no con los procedimientos alternativos existentes en algunos códigos (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004). Para esto se aplican los modelos DF y EF a diferentes variantes de condiciones de apoyo, estados de cargas y distribución de los conectores en la trabe compuesta de la fig 3.1. La trabe se somete a dos condiciones de carga. La primera es una carga vertical en el centro del miembro, y la segunda está compuesta por momentos iguales en los extremos. Cada estado de carga se combina con dos condiciones de apoyos: bordes restringidos (fig 4.1) y bordes libres (fig 4.2). Con respecto a los conectores, se distribuyeron 18 conectores en la interfaz con tres arreglos diferentes: uno con tres conectores por sección espaciados longitudinalmente a 800 mm, otro con dos conectores por sección espaciados a 650 y 500 mm, y el último con un conector por sección espaciado a 294 mm (fig 4.3). La distribución de los conectores se hizo simétrica con respecto al centro del claro, tratando en lo posible de colocarlos desde los extremos del miembro. Sin embargo, esto no se logró para las separaciones de 500 mm y 800 mm, donde se dejó una zona de 500 mm en cada extremo sin conectores. Los espaciamientos longitudinal y transversal entre conectores cumplieron con los requerimientos del AISC (2005).

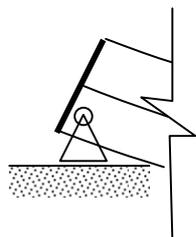


Fig 4.1 Bordes restringidos

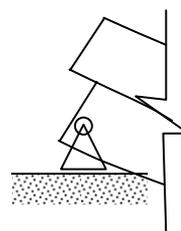


Fig 4.2 Bordes libres

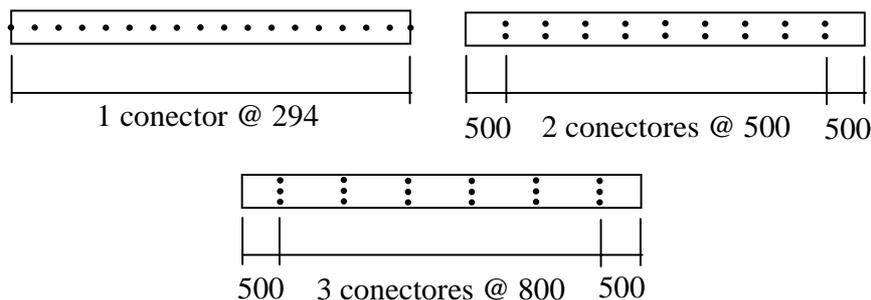


Fig 4.3 Diferentes arreglos de 18 conectores sobre el ala del perfil

#### 4.1 Efecto de las condiciones de apoyo

En el ejemplo de la trabe ilustrada en la fig 3.1, las fuerzas axiales de diseño establecidas por algunos reglamentos (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004) para la sección en el centro del claro, deben ser el menor valor entre la resistencia a compresión de la losa de concreto ( $R_L$ ), la resistencia a tensión del perfil ( $R_p$ ) y la suma de resistencias de los conectores ubicados en la mitad de un claro ( $\sum_{i=1}^n R_i$ ); tal como se ilustra en la fig 1.3. Según las hipótesis de estos códigos de diseño, si no se colocan conectores en la interfaz, entonces las fuerzas axiales en la sección del centro del claro, deberían ser cero independientemente de las condiciones de apoyo en los extremos, siempre y cuando los momentos sean cero en los bordes. Sin embargo, los resultados obtenidos con el modelo DF no confirman esta hipótesis, ya que en la fig 4.4 se observa como la curva carga-deflexión del modelo con bordes restringidos y sin conectores, es similar a la curva carga-deflexión del modelo con conectores y bordes libres. Esto significa que la ausencia de los conectores se compensó con la presencia de la restricción al deslizamiento en los extremos. La razón de este comportamiento es que la restricción del deslizamiento en los bordes genera fuerzas axiales en la sección central del modelo sin conectores en la interfaz, similares a las del modelo con conectores en la interfaz y bordes libres (fig 4.5). Este efecto de la restricción del deslizamiento en los extremos, no se incluye en algunos códigos de diseños (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004). Por lo tanto, el número de conectores obtenido con estos códigos se puede disminuir si se considera el efecto de la restricción al deslizamiento en los extremos del miembro, producto de otros miembros en una estructura (por ejemplo, nudos, paredes etc).

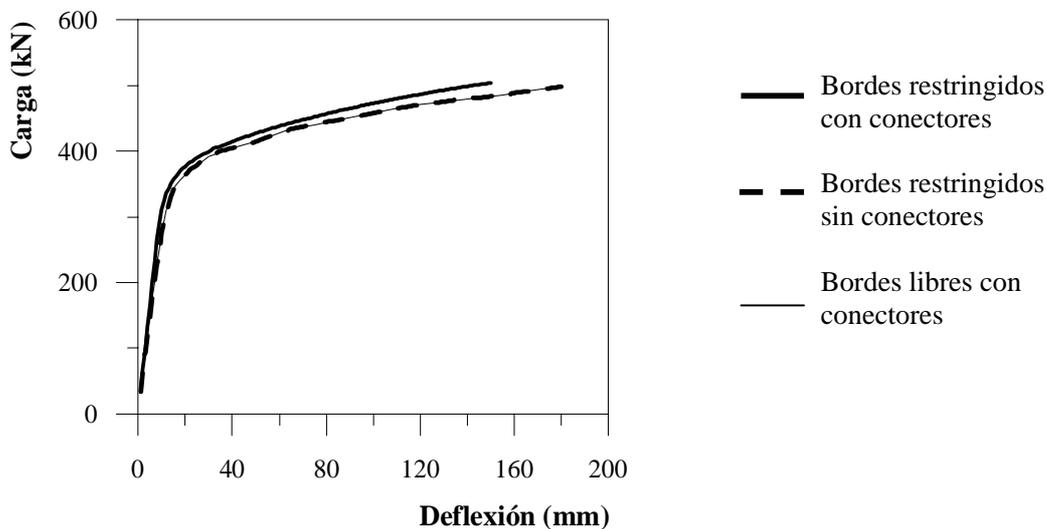


Fig 4.4 Curvas carga-desplazamiento para modelos con diferentes condiciones de apoyos y conectores en las interfaces

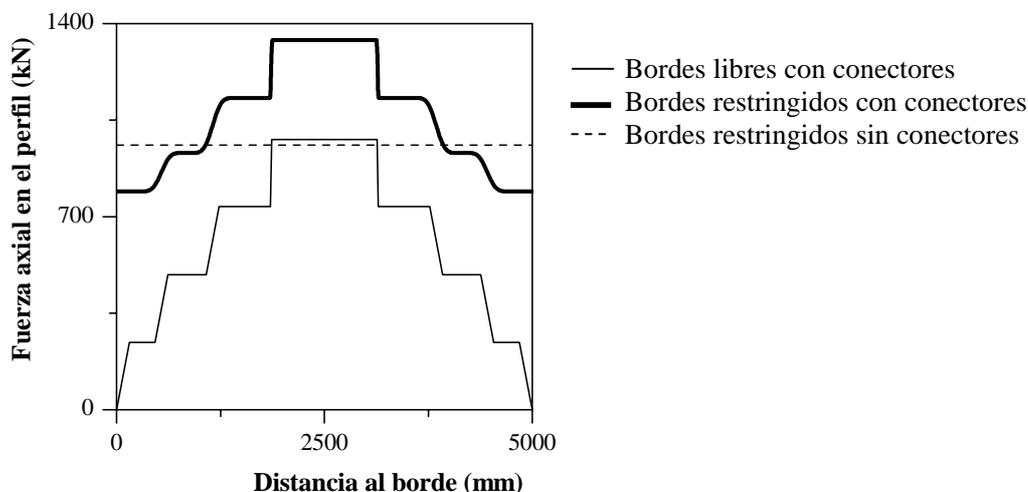


Fig 4.5 Fuerzas axiales en el perfil metálico del miembro con diferentes condiciones de apoyo y estados de carga.

En las figs 4.4 y 4.5 también se muestran las respuestas del miembro con bordes restringidos y conectores en la interfaz. Su comparación con los otros dos modelos confirma la poca variación en la respuesta del miembro sometido a carga vertical con bordes restringidos y diferentes números de conectores en la interfaz. En esta trabe, la restricción del deslizamiento en los extremos junto con la existencia de conectores en la interfaz generaron fuerzas axiales un 30 por ciento mayores que las producidas al existir únicamente la restricción al deslizamiento ó los conectores en la interfaz (fig 4.5), lo cual indujo a una diferencia del 20 por ciento entre los desplazamientos últimos calculados para el modelo con bordes restringidos sin conectores, y para el miembro con bordes libres y conectores (fig 4.4).

La aplicación de las hipótesis de distribución de fuerzas internas de los códigos (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004) a otras condiciones de apoyo y estados de carga diferentes a la trabe simplemente apoyada y sometida a carga vertical, requiere dividir el miembro en tramos delimitados por las secciones de momento máximo y momento nulo. En la fig 4.6 se muestra el ejemplo de una trabe sometida a momentos iguales en sus extremos. Para su diseño, esta se divide en dos partes iguales. En la parte izquierda se considera que la condición de falla se producirá cuando ocurra la ruptura en tensión de la losa de concreto ( $R_L^T$ ), el aplastamiento del perfil metálico o el colapso de los conectores localizados en el lado izquierdo del miembro ( $\sum_{i=1}^n R_i$ ); mientras que en la parte derecha la falla se origina por el daño de los conectores en esta zona, el aplastamiento de la losa de concreto ( $R_L^C$ ) o la falla en tensión del perfil metálico ( $R_p^T$ ).

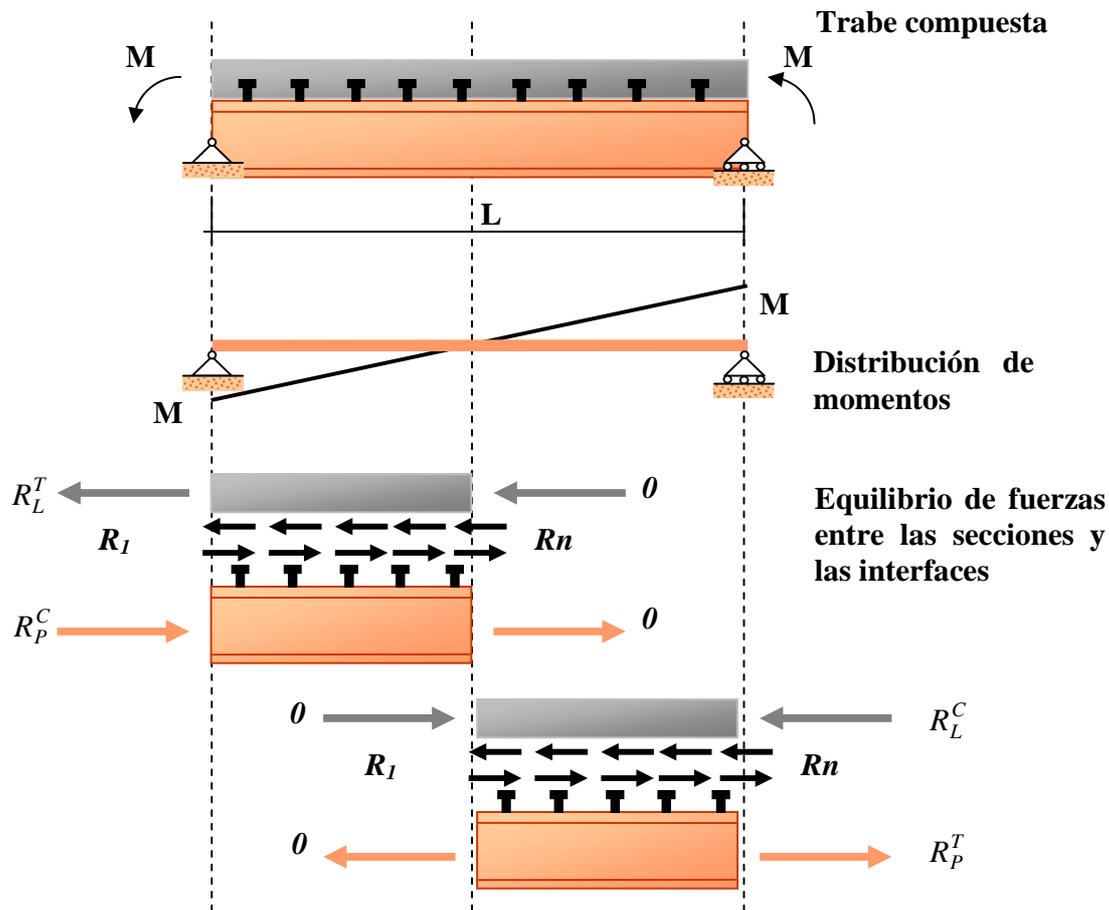


Fig 4.6 Análisis en dos partes de la trabe sometida a momentos iguales en sus extremos

La división en dos partes del miembro ilustrado en la fig 4.6 es posible cuando las fuerzas axiales en la sección central son cero. Sin embargo, esto solo ocurrió en el miembro con los bordes libres, tal como se muestra en la variación de la fuerza axial en la losa de concreto, ilustrada en la fig 4.7. En el caso del miembro con bordes restringidos, el punto de fuerza axial nulo en la losa, se encuentra desplazado hacia la izquierda del centro del miembro, lo cual incrementó notablemente la fuerza axial en su extremo derecho respecto al miembro con los bordes libres (fig 4.7). Este incremento en la fuerza axial es la causa de las diferencias existentes entre las curvas momento-rotación calculadas en los extremos de los miembros con bordes restringidos y libres (fig 4.8). Principalmente, este efecto ocasionó que la rotación última en el extremo derecho del miembro con bordes restringidos resultara mucho menor que los valores calculados en su extremo izquierdo y en el miembro con bordes libres.

Estos resultados muestran los errores que se pueden cometer al usar las hipótesis de los códigos para estimar las fuerzas internas. Estos errores no influyen en la estimación de la resistencia, pero sí en el cálculo de la rotación última. Si no se tienen en cuenta las restricciones del deslizamiento en los extremos, se pueden suponer valores de ductilidad en el miembro mucho mayores que su capacidad real.

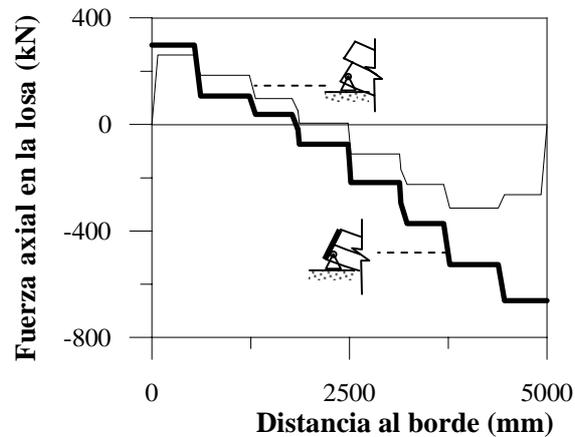


Fig 4.7 Distribución de fuerzas axiales en la losa de concreto de los modelos con dos conectores por sección separados 650 mm y distintas condiciones de apoyo.

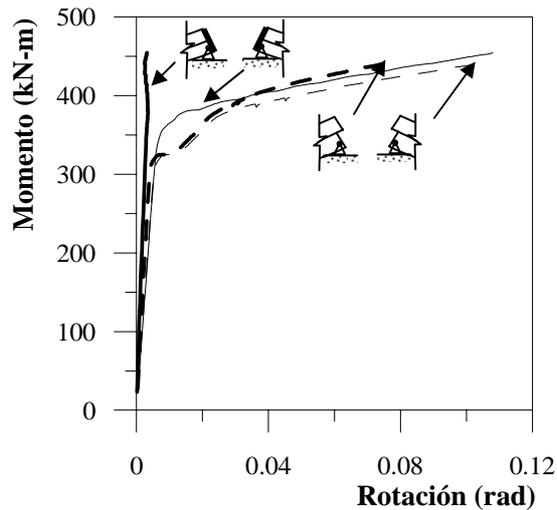


Fig 4.8 Curvas momento-rotación calculadas en ambos extremos del miembro con distintas condiciones de apoyo.

#### 4.2 Efecto del uso de diferentes arreglos de conectores

La colocación de 18 conectores usando diferentes arreglos en la trabe de la fig 3.1 (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004), afectó la respuesta del miembro dependiendo del estado de carga aplicado en la misma. Para la trabe sometida a carga vertical, su respuesta no se modificó al variar el arreglo de los conectores. En los miembros con bordes libres, la variación del deslizamiento en el momento de su falla, tendió a valores constantes en las zonas positivas y negativas (fig 4.9). Esto permitió que la fuerza en los conectores, la fuerza axial en la sección central y por tanto la respuesta del miembro, no cambiara para distintos

arreglos. Por otro lado, para las traveses con bordes restringidos, las variaciones de fuerzas axiales en la sección central fueron menores al 8 por ciento respecto al caso con conectores separados a 800 mm (fig 4.10). Esto se debió a que la presencia de la restricción al deslizamiento en los extremos generó fuerzas entre el 40 y el 50 por ciento del valor máximo en la sección central. Por esta razón, las variaciones en las fuerzas de los conectores debido a diferentes colocaciones de estos a lo largo de la interfaz, ocasionaron poca variación en las fuerzas axiales en la sección central.

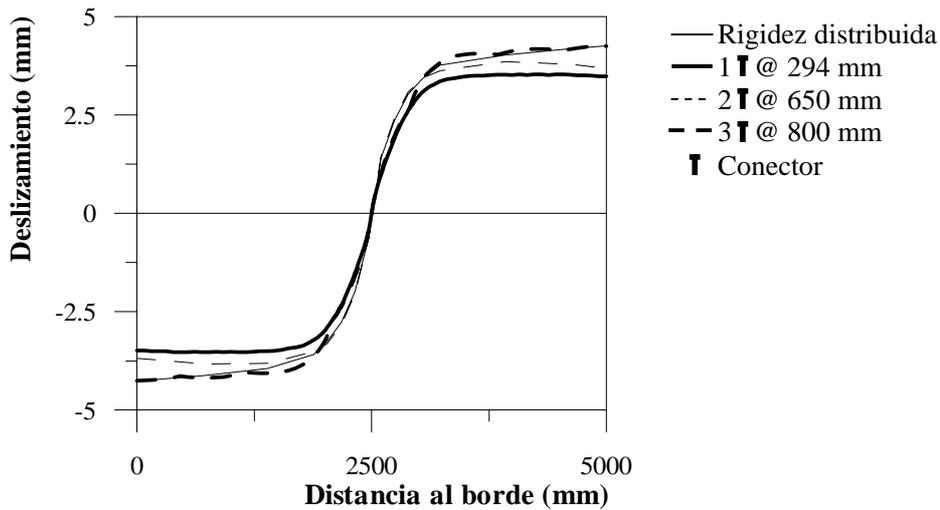


Fig 4.9 Variación del deslizamiento en la interfaz de modelos con bordes libres, diferentes arreglos de conectores y modelos de interfaces.

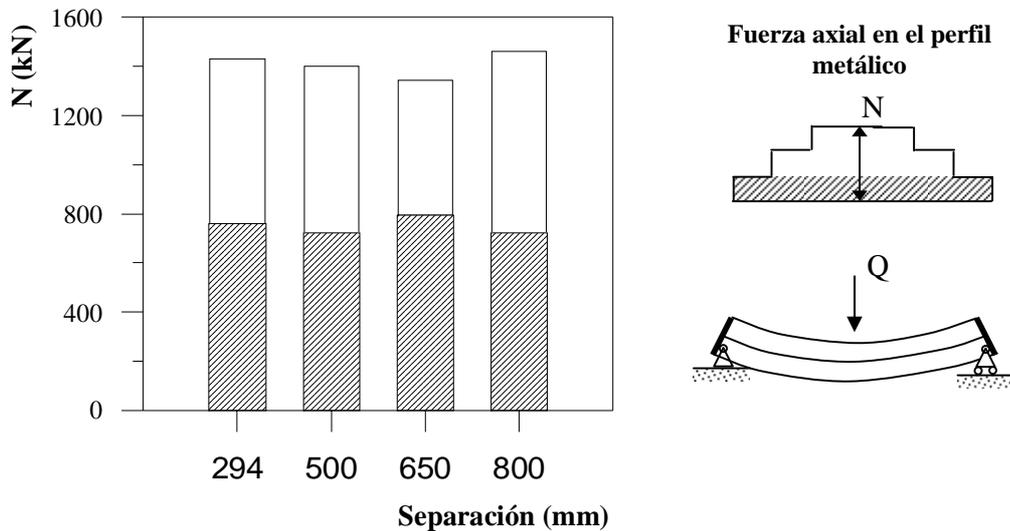


Fig 4.10 Variación de las fuerzas axiales en la sección central

En los miembros sometidos a momentos en sus extremos, la respuesta si varió al colocar los 18 conectores en diferentes arreglos. En las figs 4.11 y 4.12 se muestran las curvas

momento-rotación obtenidas con el modelo DF considerando la posición real de los 18 conectores para los diferentes arreglos, y un modelo adicional donde se distribuyeron las propiedades de los conectores uniformemente en la interfaz. Los resultados de los diferentes modelos indican que la resistencia varía muy poco en función de arreglo de conectores; mientras que las diferencias entre las rotaciones últimas llegan hasta el 106 por ciento entre los modelos con bordes libres y conectores separados a 650 y 800 mm (fig 4.11). Este resultado es similar al miembro con bordes restringidos, donde las diferencias entre las rotaciones últimas en el extremo derecho alcanzaron el 152 por ciento para los modelos con conectores separados a 650 mm y rigidez distribuida (fig 4.12).

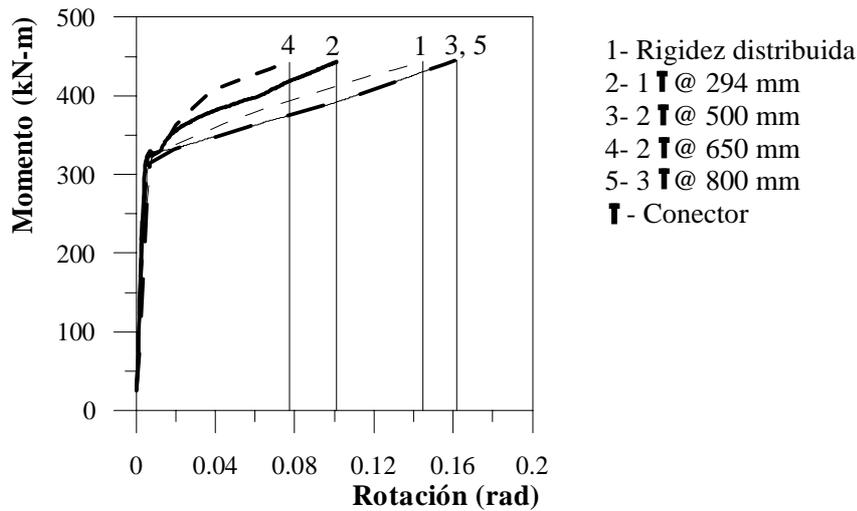


Fig 4.11 Curvas momento-rotación de los modelos con bordes libres y diferentes arreglos de 18 conectores.

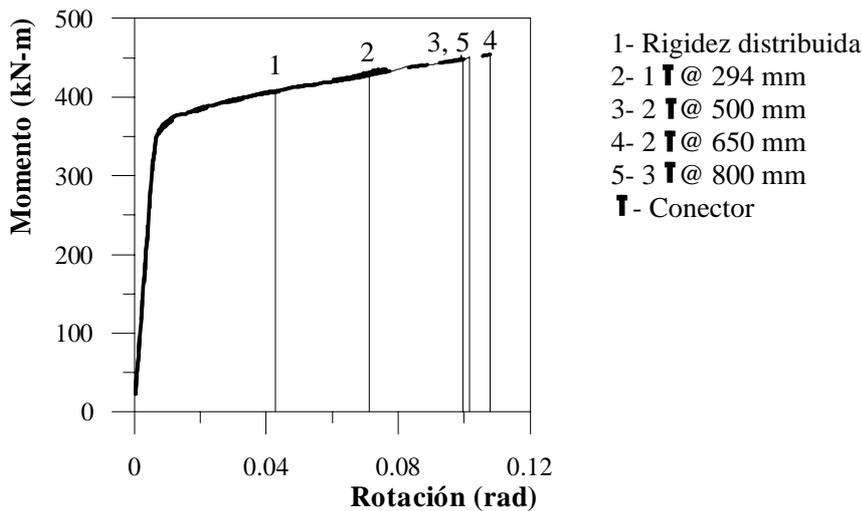


Fig 4.12 Curvas momento-rotación de los modelos con bordes restringidos y diferentes arreglos de 18 conectores.

La razón de este comportamiento está relacionada con la distribución de los conectores de cortante dentro de la zona de la articulación plástica. La reducción en el número de conectores en la articulación plástica, incrementa la flexibilidad del miembro y su rotación última. Esta tendencia se observa mejor en las figs 4.13 y 4.14 donde se muestran las deformaciones del acero de refuerzo en la losa de concreto. En los miembros con bordes libres (fig 4.13), las mayores rotaciones últimas se producen en los miembros con conectores separados a 500 y 800 mm, debido a la ausencia de conectores en 500 mm de ambos extremos (zona de la articulación plástica); mientras que la menor rotación última se produce en el miembro con conectores separados a 650 mm (miembro con el mayor número de conectores en sus extremos). Sin embargo, la tendencia observada en las figs 4.11 y 4.13 entre los miembros con conectores espaciados a 650 mm y 298 mm, así como con el miembro con rigidez distribuida, se invierte para los casos con bordes restringidos (figs 4.12 y 4.14). En este caso, la acción de los conectores colocados en los extremos se elimina por la restricción al deslizamiento en esta zona. Esto provoca una distancia de 550 mm sin conectores en los bordes del miembro con conectores separados a 650 mm (fig 3.3) e induce la mayor flexibilidad en este miembro con respecto al resto de los casos con bordes restringidos.

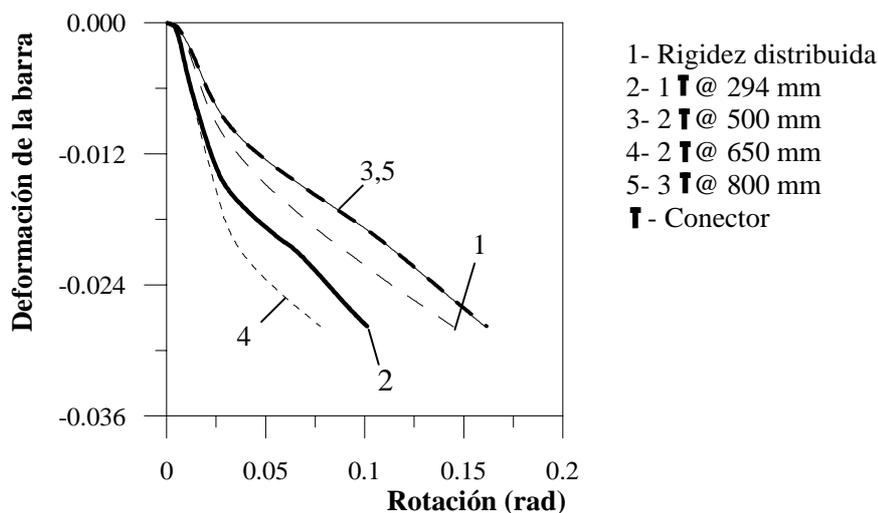


Fig 4.13 Variación de la deformación en el acero de refuerzo de miembros con bordes libres y diferentes arreglos de 18 conectores.

Los resultados de las figs 4.11 a 4.14 indican también que las rotaciones últimas de los miembros compuestos se pueden incrementar disminuyendo la cantidad de conectores en la interfaz. Esto es un resultado importante para el desarrollo de procedimientos de diseño más racionales de miembros compuestos.

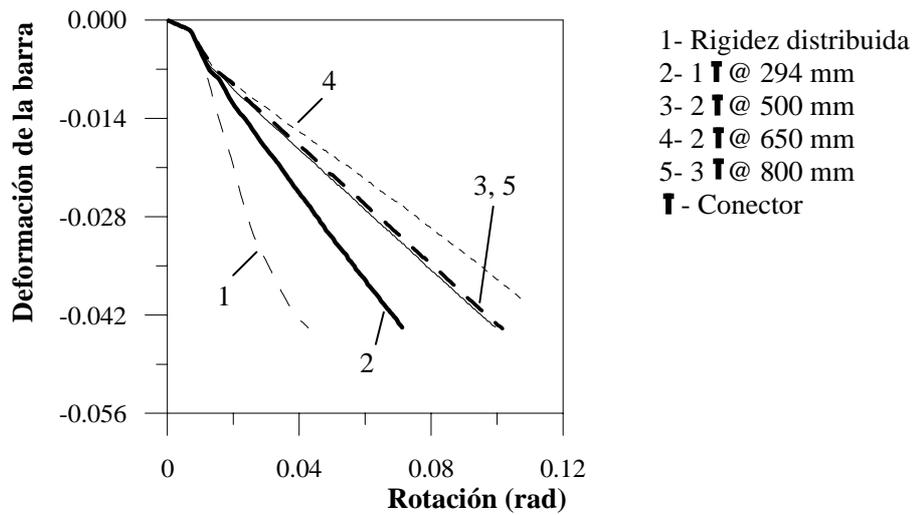


Fig 4.14 Variación de la deformación en el acero de refuerzo de miembros con bordes restringidos y diferentes arreglos de 18 conectores.

Por último, las diferencias entre las respuestas de los miembros debido al uso de diferentes distribuciones de conectores (figs 4.11 a 4.14), muestra la necesidad de modelar la posición real de los conectores. Para esto se recomienda el uso de un modelo con la capacidad del nuevo modelo DF propuesto, puesto que los modelos existentes en la literatura basados en la hipótesis de un flujo continuo de fuerzas en la interfaz, indicarían una respuesta similar al modelo DF con rigidez distribuida. Esto se puede observar en la fig 4.15 donde se observa como las curvas momento-rotación calculadas con los modelos EF y DF con rigidez distribuida, son muy similares.

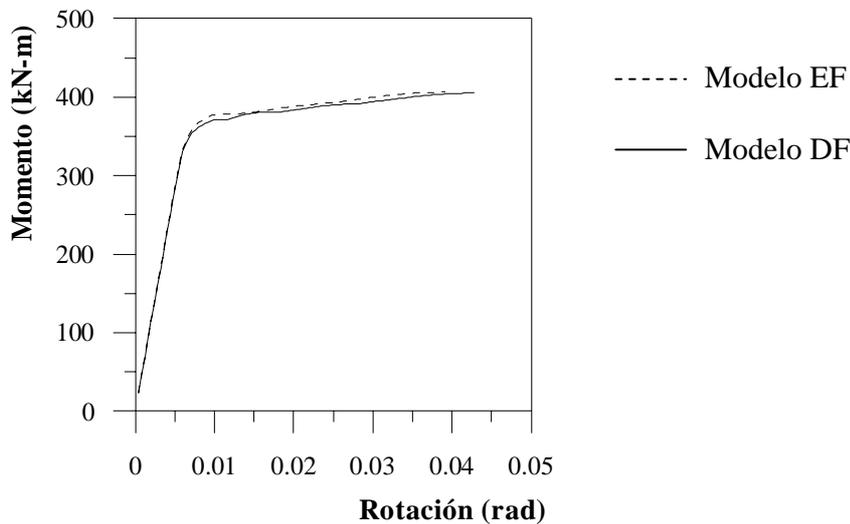


Fig 4.15 Curvas momento-rotación obtenidas con modelos diferentes

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un nuevo modelo basado en diferencias finitas (DF). Este incorpora dos nuevos aspectos del comportamiento del miembro respecto a los modelos existentes en la literatura: primero, la posición real de los conectores; segundo, diferentes configuraciones del miembro estructural respecto al número de elementos componentes e interfaces entre ellos. Además, sus bondades se pueden aprovechar incorporándolo en un programa de análisis basado en el método de la rigidez, con lo cual es posible estudiar la interacción del miembro con otros miembros de la estructura.

El adecuado comportamiento del nuevo modelo DF para estudiar miembros con varios elementos componentes e interfaces, se mostró mediante el estudio de una columna reforzada con ángulos y placas horizontales. Los resultados calculados con el método DF y las formulaciones de EF modificadas (representativas de los modelos basados en un flujo continuo de fuerza en la interfaz), se compararon con los valores calculados en un modelo EF 3D más complejo. La comparación resultó satisfactoria, y mostró que no es necesario el refinamiento del modelo EF 3D.

La capacidad del nuevo modelo DF para reproducir el comportamiento de un miembro real se corroboró mediante la simulación numérica de mediciones experimentales disponibles en la literatura para traveses compuestas por un perfil metálico ligado a una losa de concreto a través de conectores. Estas comparaciones incluyeron miembros sometidos a carga monótona creciente y alternada.

La validez del modelo DF también se mostró cuando se distribuyeron uniformemente las propiedades de los conectores a lo largo de la interfaz y se obtuvieron los mismos resultados calculados con el modelo EF.

La ventaja del nuevo modelo DF respecto a los procedimientos que suponen un flujo de fuerzas continuo en la interfaz (representados por los modelos EF de fuerzas y desplazamientos), se evidenció con el ejemplo de la trabe estudiada, en el cual esta se sometió a momentos iguales en sus extremos. La razón es que en este caso, la rotación última en sus extremos varió notablemente por el uso de diferentes arreglos de 18 conectores, lo cual indica la necesidad de considerar en el modelo teórico, el desarrollo de fuerzas concentradas en los puntos donde se encuentran los conectores. Por otro lado, en el ejemplo de la misma trabe sometida a carga vertical en el centro de su claro, se obtuvieron los mismos resultados con los modelos EF y DF.

Por último, el análisis comparativo de los modelos DF y EF, permitió detectar dos resultados importantes para establecer procedimientos de diseños más racionales de miembros compuestos. El primero indica que el número de conectores calculados según algunos códigos de diseño (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004) para una trabe compuesta sometida a una carga vertical en el centro de su claro, se puede reducir si se considera la acción de la restricción al deslizamiento en sus extremos ocasionada por otros miembros en una estructura (por ejemplo, nudos, muros etc). Además, el análisis de los resultados

obtenidos en la trabe sometida a momentos iguales en sus extremos y con distintas distribuciones de conectores, muestra que la rotación última de la trabe se podría modificar cambiando la distribución de los conectores sin alterar su cantidad. Ambos resultados se recomiendan estudiar con más detenimiento en trabajos futuros.

Con el objeto de poder usar los resultados de esta investigación, se elaboró un programa de cómputo con una interfaz amigable para construir los modelos e interpretar los resultados.

### **5.1- Recomendaciones**

Como siguientes pasos a este trabajo se sugiere realizar un programa de ensayos experimentales en trabes metálicas ligadas a losas de concreto a través de conectores de cortante. Los objetivos de estos ensayos serían estudiar la influencia de la colocación de los conectores en la rotación última de trabes compuestas sometidas a momentos iguales en sus extremos, y definir la cantidad mínima de conectores para lograr una interacción determinada (parcial o completa) entre la losa y el perfil, cuando se restringe el deslizamiento en los extremos. Estas condiciones de apoyo serían representativas de lo que ocurre en una trabe en contacto con otros elementos dentro de una estructura.

Para estudiar los aspectos anteriores se sugiere construir un conjunto de trabes compuestas donde se varié el número de conectores, su distribución a lo largo de la interfaz, la restricción o no del deslizamiento en los extremos mediante la colocación de bloques de concretos. Las cargas en las trabes se aplicarán de tal forma que se produzcan momentos similares en sus extremos. Se revisará que el pandeo local o global no ocurra antes de la falla del perfil, la losa o los conectores de cortantes.

La comparación entre las trabes con el mismo arreglo de conectores y diferentes condiciones de apoyo (bordes libres o restringidos) permitirá estudiar cómo influye la restricción al deslizamiento en el número de conectores necesarios en la interfaz para lograr una resistencia determinada del miembro. Esto servirá para determinar el número mínimo de conectores en una trabe cuyos deslizamientos en los extremos son restringidos por la presencia de otros elementos en una estructura (uniones viga-columna, paredes, etc).

Por otro lado, al comparar las trabes con las mismas condiciones de apoyo e igual número de conectores distribuidos en diferentes formas, se determinará la influencia de la forma de colocar los conectores en la rotación última de la trabe. De esta forma se evaluarán los requerimientos actuales de los códigos de diseño para la colocación de los conectores en la interfaz.

Para simular numéricamente estos ensayos se recomienda introducir los términos no lineales geométricos en las deformaciones axiales y considerar el equilibrio de fuerzas en el estado desplazado, por ejemplo como se plantea en el trabajo de Marques y Barreto (2005) para miembros con adherencia perfecta. Esto permitirá mejorar la estimación del deslizamiento en trabes compuestas próximas a la falla y además, analizar columnas compuestas esbeltas (Pi *et al.*, 2006b).

Por último, se sugiere realizar otros ensayos en columnas con bajas resistencias a cortante y reforzadas con ángulos metálicos en las esquinas (Fig. 2.1). En los extremos se colocarían bloques de concreto a los cuales se fijarán los ángulos metálicos en algunas variantes, mientras que en otras se dejará libre. El ensaye se instrumentará para medir el deslizamiento en la interfaz, además de las deformaciones en puntos estratégicos de los perfiles y la columna. Esto posibilitará evaluar cómo es la transferencia de fuerzas de los perfiles a la columna y si el trabajo en conjunto mejora al garantizar una continuidad desde los extremos. Para simular numéricamente las mediciones experimentales de este ensaye se recomienda incorporar en el modelo DF propuesto, un modelo de sección transversal capaz de representar la variación de la dislocación en el interior de la misma.

## APÉNDICE A MOVIMIENTOS DE CUERPO RÍGIDO

En el capítulo 2 se usaron los modelos DF y EF basados en fuerzas para obtener la relación entre los desplazamientos y las fuerzas en los bordes de un miembro, articulado en un extremo y simplemente apoyado en el otro (ecs 2.37 y 2.74). Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para incorporar los modelos DF y EF en un programa de cómputo basado en el método de la rigidez. Falta introducir los movimientos de cuerpo rígido, lo cual equivale a obtener la relación entre las fuerzas y los desplazamientos del miembro sin apoyo (ec 2.20).

Este procedimiento consiste en calcular las reacciones en los apoyos articulado y simplemente apoyado, a partir de su equilibrio con las fuerzas actuantes en el miembro (ec 2.34); y además, en expresar el vector de desplazamiento del miembro apoyado ( $\{\tilde{d}\}$ ) en función del vector de desplazamientos con los movimientos de cuerpo rígido ( $\{d\}$ ).

$$\{\tilde{d}\} = [E_E]^T \{d\} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\{\tilde{d}\}^T = \{\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ u_{21} \ \dots \ u_{m1} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ u_{12} \ \dots \ u_{m2}\}$ ,

$\{d\}^T = \{\theta_{x1} \ v_1 \ \theta_{y1} \ w_1 \ u_{11} \ \dots \ u_{m1} \ \theta_{x2} \ v_2 \ \theta_{y2} \ w_2 \ u_{12} \ \dots \ u_{m2}\}$ ,  $[E_E]^T$  es una matriz que contiene condiciones de compatibilidad de desplazamientos entre los vectores  $\{\tilde{d}\}$  y  $\{d\}$ .

Las ecs A.1 y 2.34 se sustituyen en la ec 2.37, y se considera que  $\{Q\}^T = \{P_1 \ P_L\}$ , para llegar a una ecuación análoga a la ec 2.20:

$$\{\Delta Q\} = [K] \{\Delta d\} - \{\bar{Q}\} \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$[K] = [E_E] [\tilde{K}] [E_E]^T \quad (\text{A.3})$$

$$\{\bar{Q}\} = [E_E] \{\bar{\tilde{Q}}\} \quad (\text{A.4})$$

El paso anterior constituye el procedimiento general para incorporar los movimientos de cuerpo rígido, tal como se hace en otros miembros como viga, columnas etc. Para aplicar este método a los miembros compuestos estudiados en este trabajo, con  $m$  elementos componentes, se requiere definir cómo obtener la matriz de equilibrio  $[E_E]$  en la ec 2.34 y la matriz de compatibilidad de desplazamientos  $[E_E]^T$  incluida en la ec A.1.

### A.1 Deducción de la matriz de equilibrio $[E_E]$

La matriz de equilibrio  $[E_E]$  relaciona las fuerzas en el miembro articulado en un extremo y simplemente apoyado en el otro (fig A.1), con las fuerzas ilustradas en el diagrama de cuerpo libre de la fig A.2. Para esto se plantea el equilibrio entre las reacciones de apoyo y las fuerzas actuantes en el miembro (fig A.1) a través de las ecs A.5 a A.6.

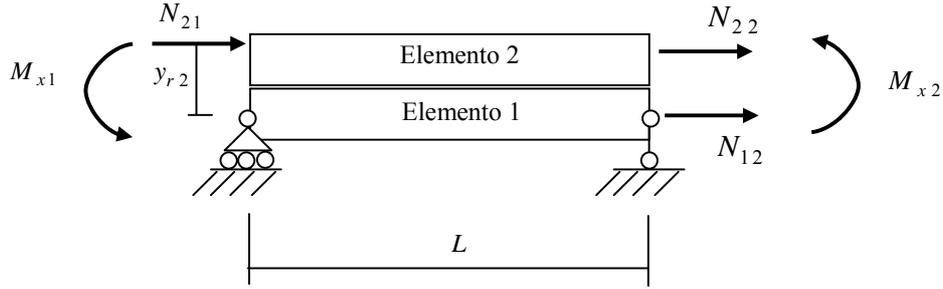


Fig A.1 Fuerzas actuantes en el miembro articulado en un extremo y simplemente apoyado en el otro

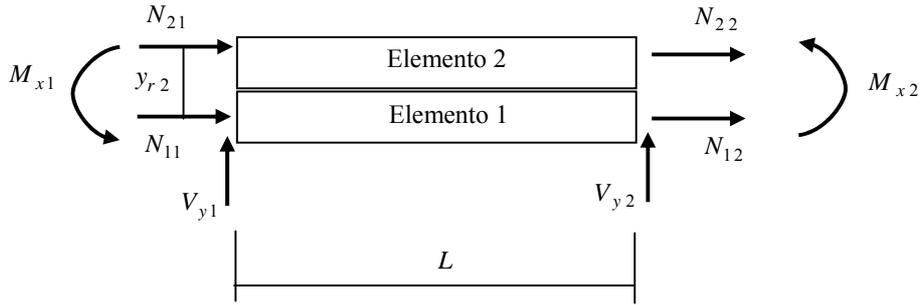


Fig A.2 Fuerzas en los extremos del miembro sin apoyos

$$N_{11} = -N_{21} - N_{22} - N_{12} \quad (\text{A.5})$$

$$V_{y2} = \frac{(-M_{x2} - M_{x1} + (N_{21} + N_{22})y_{r2})}{L} \quad (\text{A.6})$$

$$V_{y1} = -V_{y2} \quad (\text{A.7})$$

Las ecs A.6 y A.7 se plantean para los  $m$  elementos componentes de un miembro compuesto y para la flexión respecto al eje  $x$  también. De esta forma se llega a la ec 2.34 y se infiere la expresión de la matriz  $[E_E]$

$$[E_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/L & 0 & -y_{r2}/L & \dots & -y_{rm}/L & 1/L & 0 & -y_{r1}/L & \dots & -y_{rm}/L \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/L & -x_{r1}/L & \dots & -x_{rm}/L & 0 & 1/L & -x_{r1}/L & \dots & -x_{rm}/L \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/L & 0 & y_{r2}/L & \dots & y_{rm}/L & -1/L & 0 & y_{r1}/L & \dots & y_{rm}/L \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/L & x_{r1}/L & \dots & x_{rm}/L & 0 & -1/L & x_{r1}/L & \dots & x_{rm}/L \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(A.8)

donde  $y_{rj}$  es la diferencia entre la coordenada  $y_j$  del centroide del elemento componente  $j$  y la coordenada  $y_1$  del elemento componente  $1$  (donde está apoyado el miembro)

$$y_{rj} = y_j - y_1 \quad (A.9)$$

## A.2 Deducción de la matriz de compatibilidad de desplazamientos $[E_E]^T$

En la fig A.3 se muestra el estado desplazado de una trabe compuesta por elementos componentes y sometida a flexión en un solo plano. Este estado desplazado incluye los movimientos de cuerpo rígido ( $u_{11}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ). Al eliminar estos desplazamientos, se obtiene un estado desplazado equivalente al caso donde la trabe está articulada en un extremo y simplemente apoyada en el otro (fig A.4).

Matemáticamente, la relación entre los desplazamientos ilustrados en la figs A.3 y A.4 se expresa a través de:

$$\tilde{\theta}_{xi} = \theta_{xi} + \frac{(v_1 - v_2)}{L} \quad (A.10)$$

$$\tilde{u}_{ji} = u_{ji} + \frac{(v_2 - v_1)}{L} y_{rj} - u_{11} \quad (A.11)$$

donde  $i$  indica el extremo del miembro ( $i = 1, 2$ ),  $j$  es el número de elementocomponente

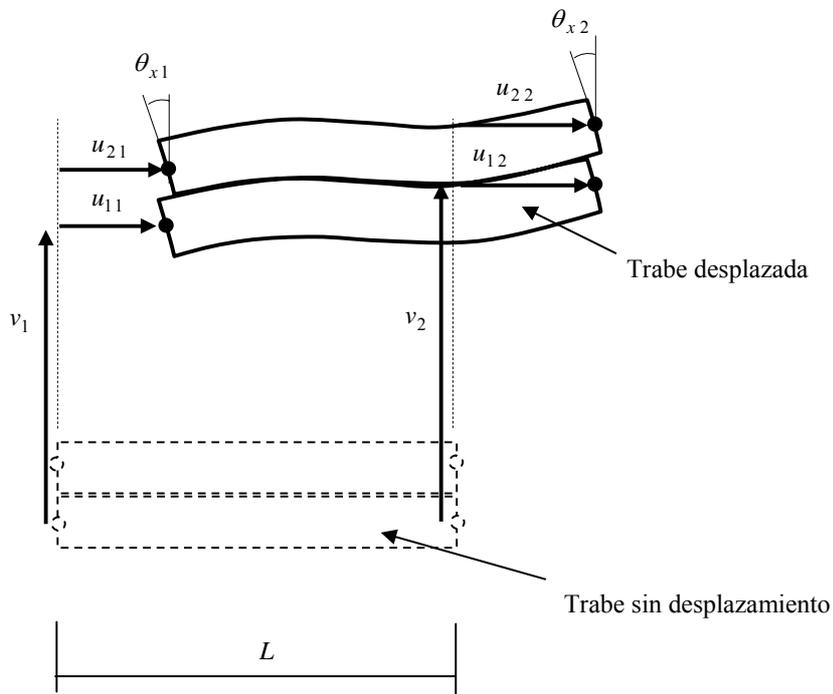


Fig A.3 Desplazamientos con movimientos de cuerpo rígido en una trabe compuesta por elementos componentes

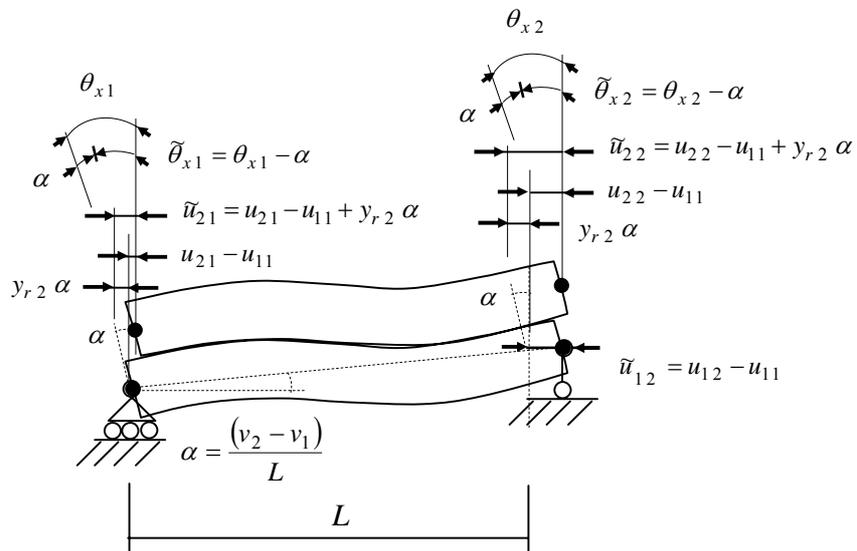


Fig A.4 Relación entre los desplazamientos con y sin movimientos de cuerpo en un trabe compuesta por dos elementos componentes

Los estados desplazados descritos en las figs A.3 y A.4 corresponden a un desplazamiento en la dirección  $y$  de la fig 2.4. Por esta razón, las rotaciones fueron alrededor del eje  $x$  ( $\theta_x$ ) y los desplazamientos en la dirección del eje  $y$  ( $v$ ). Si los desplazamientos de las figs A.3 y A.4 se cambian a la dirección del eje  $x$  (fig 2.4), entonces las rotaciones serían  $\theta_y$  y los desplazamientos  $w$ , con lo cual las ecs A.10 y A.11 se transforman en:

$$\tilde{\theta}_{y_i} = \theta_{y_i} + \frac{(w_1 - w_2)}{L} \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{u}_{j_i} = u_{j_i} + \frac{(w_2 - w_1) x_{r_j}}{L} - u_{11} \quad (\text{A.13})$$

donde  $x_{r_j}$  es la diferencia entre la coordenada  $x_j$  del centroide del elemento componente  $j$  y la coordenada  $x_1$  del elemento componente  $1$  (donde está apoyado el miembro)

$$x_{r_j} = x_j - x_1 \quad (\text{A.14})$$

Cuando el miembro se somete a flexión biaxial, la rotación respecto a los ejes  $x$  y  $y$  se describen con las ecs A.10 y A.12, respectivamente; mientras que el desplazamiento axial se obtiene superponiendo las ecs A.11 y A.13

$$\tilde{u}_{j_i} = u_{j_i} + \frac{(w_2 - w_1) x_{r_j}}{L} + \frac{(v_2 - v_1) y_{r_j}}{L} - u_{11} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, se escriben las ecs A.10, A.12 y A.15 para los  $m$  elementos componentes de un miembro compuesto. De esta forma, se llega a la relación entre los vectores de desplazamientos  $\{\tilde{d}\}$  y  $\{d\}$  (ec A.1); y se demuestra que su relación está determinada por un matriz igual a la transpuesta la matriz  $[E_E]$  descrita en la ec A.8.

## APÉNDICE B MODELOS CONSTITUTIVOS DE LOS MATERIALES

### B.1 Introducción

En este apéndice se discuten los modelos constitutivos empleados para modelar el acero, el concreto y los conectores de cortante, en los análisis descritos en los capítulos 3 y 4.

En cada caso se describen brevemente las principales características del comportamiento del material, las formulaciones matemáticas de los modelos numéricos escogidos y se muestran comparaciones con resultados experimentales. Estas comparaciones con mediciones experimentales permiten demostrar la adecuada implementación de estas leyes de comportamiento en el programa de cómputo desarrollado.

### B.2 Modelos para el acero

En la fig B.1 se muestran las principales características del comportamiento del acero que deben incluir los modelos constitutivos para simular correctamente las mediciones experimentales. Estas son la fluencia del acero, el endurecimiento por deformaciones plásticas durante una carga monótona-creciente o ciclos alternados, y el efecto de Baushinguer.

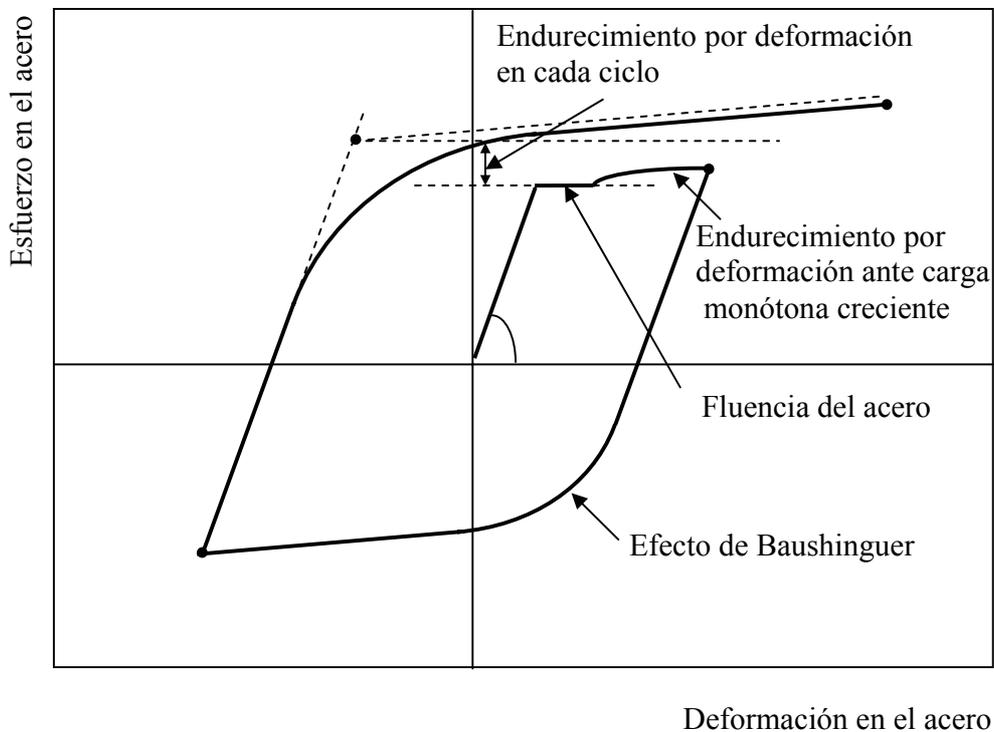


Fig B.1 Principales aspecto del comportamiento del acero

En la literatura existe una amplia variedad de modelos capaces de simular el comportamiento del acero ante distintas condiciones de cargas (Mander *et al.*, 1984, Menegotto y Pinto, 1973; Dodd y Restrepo-Posada, 1995 entre otros). En este trabajo se seleccionó el modelo de Filippou *et al.* (1983) por su simplicidad y probada precisión en varios trabajos reportados en la literatura (Limkatanyu y Spacone, 2002b; Reza, 1999). Este modelo es una modificación del procedimiento propuesto por Menegotto y Pinto (1973), en la cual se incluye el endurecimiento por deformación plástica en cada ciclo de carga (fig B.1).

En la fig B.2 se ilustran los datos del modelo de Filippou *et al.* (1983). Estos son el esfuerzo de fluencia del acero ( $\sigma_y$ ), el módulo de elasticidad ( $E$ ), la relación entre la rigidez de posfluencia y el modulo de elasticidad ( $b$ ), la curvatura inicial ( $R_0$ ) y dos constantes ( $a_1$ ,  $a_2$ ) que regulan la variación de la curvatura para representar apropiadamente el efecto de Baushinger (fig B.1); así como otras dos constantes ( $a_3$ ,  $a_4$ ) para el incremento en el esfuerzo de fluencia debido al endurecimiento por deformaciones plásticas durante un incremento monotónico de la carga ó en cada ciclo de carga (fig B.1).

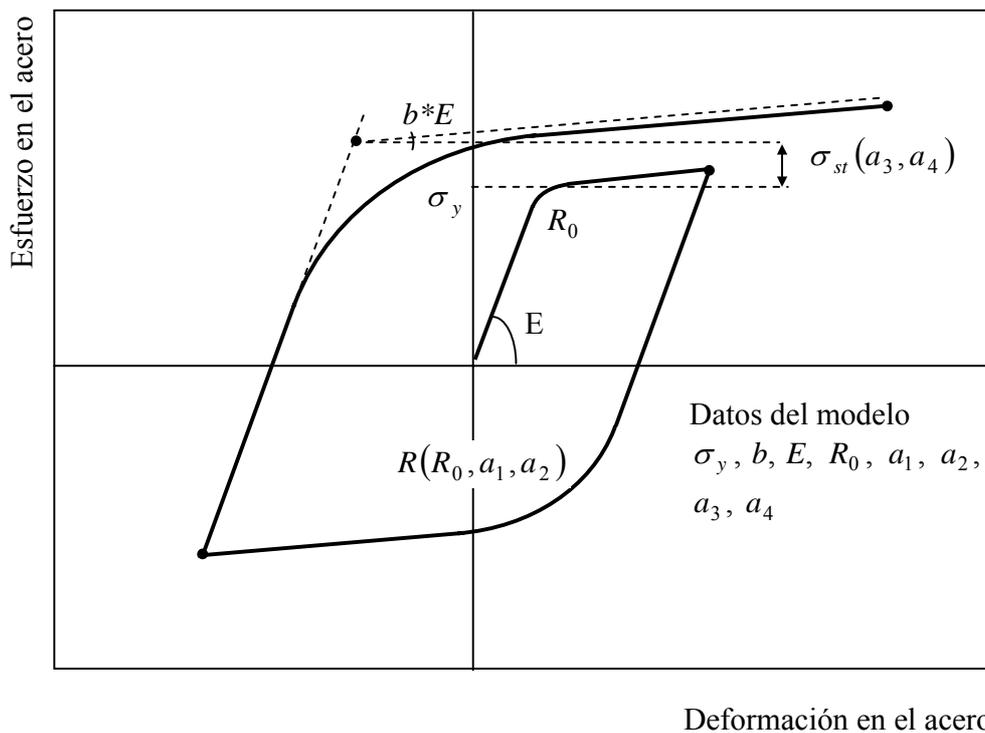


Fig B.2 Datos del modelo para el acero propuesto por Filippou *et al.* (1983)

Para trazar las curvas mostradas en la fig B.2, en el modelo de Filippou *et al.* (1983) se emplea la ec B.1, cuyos parámetros permanecen constantes mientras no se produzca un cambio en el sentido de la carga. Por ejemplo, en la fig B.3, se definen diferentes parámetros de la ec B.1 para



La ec B.1 representa una curva que parte del punto  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  con una pendiente  $E$   $(\frac{\sigma_0 - \sigma_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r})$ , y al incrementar la deformación en la dirección del punto  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  al punto  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ , la curva tiende a una recta con pendiente  $b^*E$ . La transición entre estas dos rectas con pendientes  $E$  y  $b^*E$ , es una curva cuya curvatura se controla con el parámetro  $R(\xi)$ . De esta forma se reproduce el efecto de Baushinguer.

Finalmente, para modelar el endurecimiento por deformación plástica, se introduce un incremento del esfuerzo de fluencia en cada ciclo de carga (fig B.3), el cual se calcula como

$$\sigma_{st} = \left( a_3 \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) \sigma_y \quad (B.5)$$

donde  $\sigma_{st}$  es el incremento en el esfuerzo de fluencia debido al endurecimiento por deformación plástica,  $\varepsilon_{\max}$  es la deformación máxima registrada en la dirección de carga,  $\varepsilon_y$  es la deformación de fluencia, y  $a_3$  y  $a_4$  son constante que se calibran de los resultados experimentales.

Este modelo constitutivo para el acero, se ha validado en varios trabajos disponibles en la literatura (Filippou *et al.*, 1983) a través de la comparación con mediciones experimentales. Sin embargo, para verificar la adecuada implementación del modelo en el programa de cómputo, se hicieron comparaciones con mediciones realizadas en ensayos experimentales. Los resultados fueron satisfactorios como se puede apreciar en la fig B.4, donde se observa una adecuada correlación entre los resultados teóricos obtenidos con el modelo de Filippou *et al.* (1983) y las mediciones experimentales realizadas por Monti y Nuti (1992).

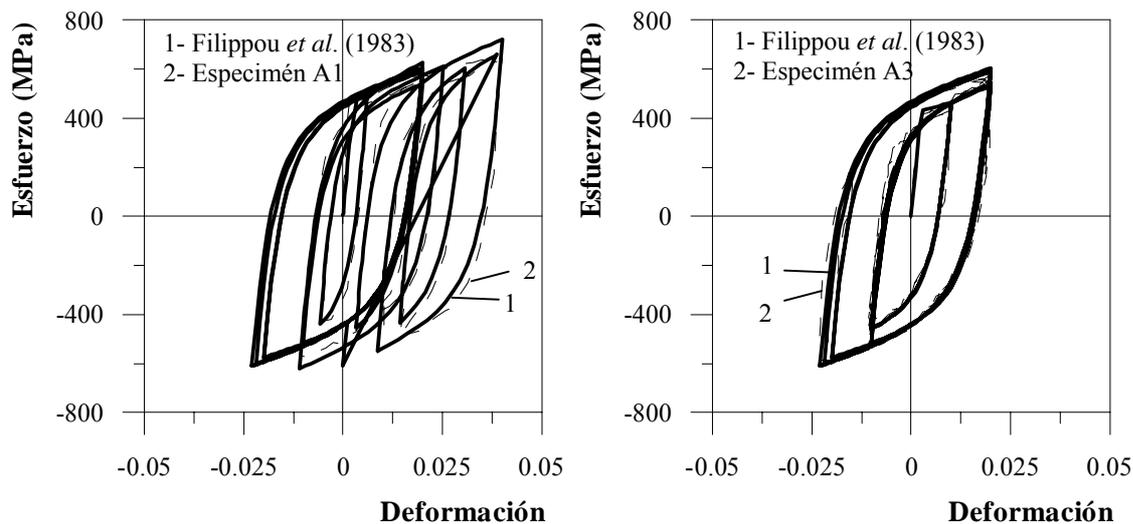


Fig B.4 Comparación del modelo de Filippou *et al.* (1983) con las mediciones experimentales realizadas por Monti y Nuti (1992)

El único problema encontrado en el modelo propuesto por Filippou *et al.* (1983) fue en el estudio de barras sometidas a cargas monótonas-crecientes. En este caso, el modelo predice una curva bilineal. Por lo tanto, no reproduce adecuadamente el eslabón de fluencia y la zona de endurecimiento por deformación ante carga monótona-creciente. Por esta razón, para los miembros sometidos a carga monótona-creciente se empleó el modelo propuesto por Mander *et al.*, 1984, cuyas principales características se describen en la fig B.5 y en las ecs B.6 y B.7.

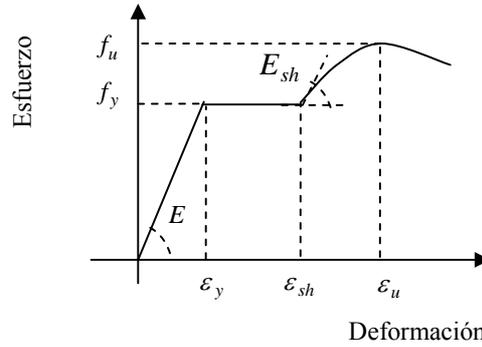


Fig B.5 Principales características del modelo de Mander *et al.* (1984)

$$\sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_{sh}} \right)^P \quad \varepsilon_{sh} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \quad (\text{B.7})$$

donde el punto  $(\varepsilon_u, \sigma_u)$  corresponde al punto de resistencia última,  $\varepsilon_{sh}$  es la deformación donde termina el eslabón de fluencia, y  $P$

$$P = E_{sh} \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{sh}}{\sigma_u - \sigma_y} \right) \quad (\text{B.8})$$

$E_{sh}$  en la ec B.8 es la pendiente inicial en la zona de endurecimiento por deformación (fig B.5). Este parámetro no es sencillo de obtener a partir de ensayos, y no siempre está disponible. Por esta razón, Rodríguez *et al.* (1999) propusieron una expresión para  $P$  en función de un punto cualquiera en la zona de endurecimiento por deformación  $(\varepsilon_{sh1}, \sigma_{sh1})$

$$P = \frac{\log \left( \frac{\sigma_u - \sigma_{sh1}}{\sigma_u - \sigma_y} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{sh1}}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \right)} \quad (\text{B.9})$$

En el programa de cómputo se introdujo el modelo de Mander *et al.* (1984). Por lo tanto, no es posible introducir el valor de  $P$  a través de la ec B.9, ya que no es posible indicar explícitamente

los valores de  $\varepsilon_{sh1}$  y  $\sigma_{sh1}$ . Sin embargo, si se puede inferir un valor para  $E_{sh}$  a partir de  $\varepsilon_{sh1}$  y  $\sigma_{sh1}$  si se sustituye la ec B.9 en la ec B.8.

$$E_{sh} = \left( \frac{\sigma_u - \sigma_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_{sh}} \right) \frac{\log \left( \frac{\sigma_u - \sigma_{sh1}}{\sigma_u - \sigma_y} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{sh1}}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \right)} \quad (\text{B.10})$$

En el caso extremo donde se cuente únicamente con el valor de la deformación donde termina la fluencia del acero ( $\varepsilon_{sh}$ ) y donde alcanza su resistencia ( $\varepsilon_u$ ), entonces los valores de  $\varepsilon_{sh1}$  y  $\sigma_{sh1}$  se calculan con la recomendación de Dhakal y Maekawa (2002)

$$\varepsilon_{sh1} = \frac{(\varepsilon_u + \varepsilon_{sh})}{2} \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_{sh1} = \sigma_y + 0.75 (\sigma_u - \sigma_y) \quad (\text{B.12})$$

### B.3 Modelos para el concreto

En la fig B.6 se muestran los principales aspectos que se consideran en los modelos uniaxiales desarrollados en la literatura para el concreto.

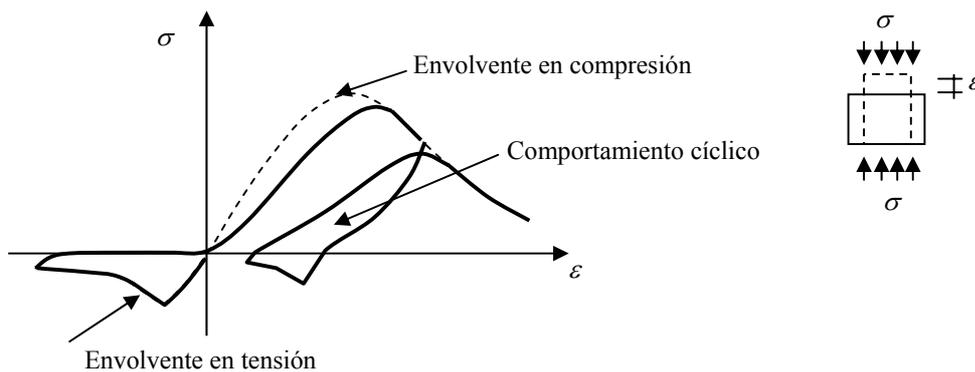


Fig B.6 Principales aspectos del comportamiento del concreto

En las siguientes secciones se discuten diferentes variantes para modelar cada una de estas características; excepto la envolvente en tensión, cuya influencia resultó pequeña en los diferentes casos que se estudiaron en los capítulos 3 y 4.

### B.3.1 Envolvente en compresión

La envolvente en compresión es la curva esfuerzo-deformación que se mide al someter el concreto a una variación monótona creciente de la deformación. Esta envolvente no se modifica inclusive cuando el concreto se somete a ciclos de deformaciones. Su forma se ha definido en la literatura a partir del módulo de elasticidad, la resistencia máxima y la deformación asociada a esta en un concreto no reforzado; el efecto del confinamiento debido a la acción lateral de estribos, placas etc; y el efecto de localización del daño debido a esfuerzos de compresión (Cusson y Paultre, 1995; Jansen y Shah, 1997; Légeron y Paultre, 2003; Madas y Elnashai, 1992; Mander *et al.*, 1988; Martínez y Elnashai, 1997 entre otros).

En la literatura existen una gran variedad de modelos capaces de representar el comportamiento del concreto para diferentes rangos de resistencias (Cusson y Paultre, 1995; Légeron y Paultre, 2003), esfuerzos de confinamiento (Mander *et al.*, 1988; Madas y Elnashai, 1992) y falla del acero de refuerzo (Mander *et al.*, 1988) ó aplastamiento del concreto (Hilleborg, 1989; Bazant y Planas, 1998). En este trabajo, se seleccionaron dos modelos adecuados para las condiciones de los miembros estudiados; y que a la vez brindan ventajas numéricas para su implementación en un proceso de integración de esfuerzo en la sección transversal a través de fibras uniaxiales (Kaba y Mahin, 1984).

El primer modelo es la formulación presentada por Martínez y Elnashai (1997), el cual es una versión numéricamente más estable del modelo de Mander *et al.* (1988). Su envolvente en compresión está constituida por una sola ecuación (ec B.13), tal como se muestra en la fig B.7. Su ventaja es que la pendiente es continua, por lo tanto es adecuado en métodos iterativos basados en Newton-Raphson y usados en el análisis de miembros de concreto reforzado (Martínez y Elnashai, 1997). Sin embargo, estos modelos (Mander *et al.*, 1988; Madas y Elnashai, 1992) fueron calibrados para concretos donde el módulo de elasticidad ( $E_c$ ) se relaciona con la resistencia a compresión ( $\sigma_c$ ) a través de la ec B.15 (Mander *et al.*, 1988). Si se usa en concretos con otras relaciones entre la resistencia a compresión y el módulo de elasticidad, tales como la ec B.16 para concretos tipos I de las NTC\_Concreto (NTC\_Concreto, 2004), se obtienen variaciones importantes en las ramas descendentes como se muestra en la fig B.8. Además, debido al uso de una sola ecuación (ec B.13), no es posible modificar la rama descendente para incluir otros efectos como la concentración del daño en zonas específicas, y eliminar problemas de pérdida de objetividad en la respuesta (Coleman y Spacone, 2001). Por estas razones, este modelo se usó únicamente en el miembro sometido a carga cíclica descrito en el capítulo 3 (fig 3.6). En este caso, la falla no fue por aplastamiento del concreto, lo cual implica que su respuesta no es sensible a la rama descendente del concreto.

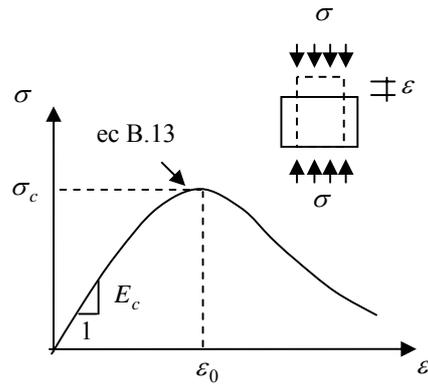


Fig B.7 Envolvente en compresión del modelo de Martínez y Elnashai (1997)

$$\sigma = \sigma_c \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^r}{\left(r - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^r\right)} \quad (\text{B.13})$$

donde  $\varepsilon_0$  es la deformación en la resistencia máxima a compresión del concreto y  $r$  es

$$r = \frac{E_c}{E_c - \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0}} \quad (\text{B.14})$$

$$E_c = 5000 \sqrt{\sigma_c} \quad (\text{B.15})$$

$$E_c = 4000 \sqrt{\sigma_c} \quad (\text{B.16})$$

donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad, y  $\sigma_c$  es la resistencia a compresión del concreto.

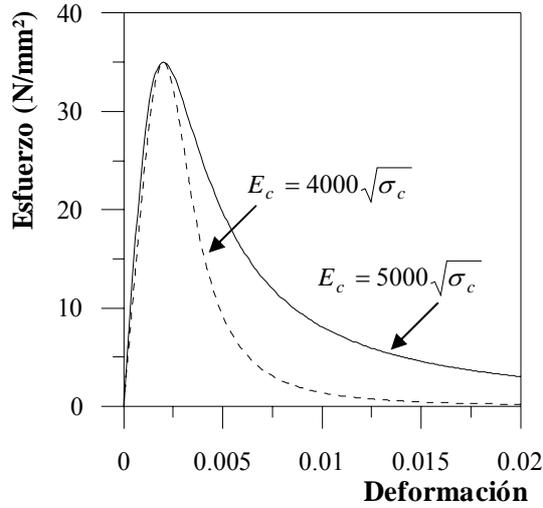


Fig B.8 Efecto del módulo de elasticidad en la rama descendente del modelo de Mander *et al.* (1988)

En miembros donde se produjo la falla por aplastamiento del concreto, tal como la trabe compuesta ilustrada en la fig 3.1, se decidió emplear el modelo de Kent y Park (1971). Este modelo se escogió por la facilidad para modificar su rama descendente e incluir el efecto de concentración del daño en compresión, lo cual es importante para reproducir el comportamiento del miembro cuando la resistencia del concreto comienza a degradarse por el desarrollo de grandes de deformaciones (Coleman y Spacone, 2001). Además, sus expresiones matemáticas son bastante sencillas de implementar en un programa de cómputo como se ilustra en la fig B.9 y en las ecs B.17 y B.18.

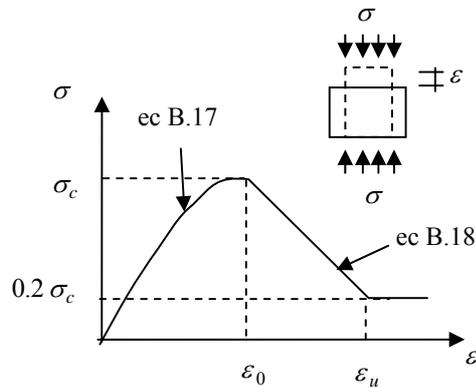


Fig B.9 Envoltente del modelo de Kent y Park (1971)

$$\sigma = \sigma_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (\text{B.17})$$

$$\sigma = \sigma_c [1 - Z(\varepsilon - \varepsilon_0)] \geq 0.2\sigma_c \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \quad (\text{B.18})$$

Donde  $\varepsilon_0 = 0.002$  y  $Z$  es:

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29 \sigma_c}{145 \sigma_c - 1000}} \quad (\text{B.19})$$

Las envolventes en compresión mostradas en las figs B.7 y B.9, son formuladas para concretos con deformación libre en la dirección transversal a la carga, y ensayados en probetas cuyas dimensiones son muy diferentes de las existentes en miembros reales. Sin embargo, en miembros compuestos reales pueden existir restricciones a la expansión transversal del concreto o esfuerzos de confinamiento que incrementan su resistencia. Además, las mayores dimensiones de los miembros comúnmente usados en la práctica, respecto a las probetas, impiden el desarrollo del daño en todo el volumen del concreto. Experimentalmente se ha observado que aún cuando la probeta esté sometida a esfuerzos constantes, las grandes deformaciones se concentran en pequeñas zonas de la misma (Jansen y Shah, 1997). Esto provoca variaciones importantes en la respuesta del miembro, respecto al comportamiento observado experimentalmente, si los valores teóricos se obtienen suponiendo un daño constante en todo su volumen.

### **B.3.1.1 Efecto del confinamiento**

El confinamiento en el concreto es el efecto inducido por acero de refuerzo, placas metálicas ó cualquier otro aditamento que restrinja su tendencia a una expansión lateral producto de la acción de una carga aplicada en su dirección longitudinal. El resultado de la acción combinada de la carga y los aditamentos transversales es un incremento de su resistencia y ductilidad en la dirección de la carga.

Este efecto no fue importante en ninguno de los miembros estudiados en los capítulos 3 y 4. Por lo tanto, no se incluyó en ninguno de los modelos de materiales presentados. Sin embargo, este podría ser importante en diferentes casos de miembros compuestos y entonces sería necesaria su inclusión. Por ejemplo, tubos metálicos rellenos de concreto, concreto reforzado con suficientes refuerzos transversales para restringir la expansión lateral del concreto etc.

La introducción de este efecto en los modelos del miembro presentados se podría realizar de dos formas, según el estudio de la literatura realizado en este trabajo.

1- Modificar los modelos constitutivos uniaxiales del concreto

2- Introducir modelos tridimensionales del concreto y modificar el proceso de integración de los esfuerzos en la sección transversal

En el primer caso se modifican las curvas esfuerzos-deformación del concreto sin confinamiento a partir de sus propiedades y las características de los aditamentos que lo confinan (Sheikh y Usumeri, 1980; Scott *et al.*, 1982; Mander *et al.*, 1988; Madas y Elnashai, 1992; Cusson y Paultre, 1995; Légeron y Paultre, 2003). Posteriormente, estos modelos constitutivos se aplican a

miembros sometidos a flexo-compresión suponiendo que los esfuerzos transversales son constantes en toda la sección transversal del miembro, tal como ocurre en las probetas de los ensayos experimentales sometidas a carga axial.

Debido a la naturaleza empírica de las relaciones entre las propiedades del concreto confinado y sin confinamiento de los modelos anteriores, es necesario proponer distintas expresiones que abarquen el rango de variación de las principales características del concreto comúnmente encontradas en la práctica. Por ejemplo, el caso más estudiado es la columna de concreto reforzada transversalmente por estribos. En este caso, existen modelos para concretos de resistencia normal (Sheikh y Usumeri, 1980; Scott *et al.*, 1982; Mander *et al.*, 1988) ó alta (Légeron y Paultre, 2003), y situaciones donde el refuerzo transversal alcanza la fluencia antes (Madas y Elnashai, 1992; Ahmad y Shah, 1982); ó después de que el concreto alcance su resistencia (Cusson y Paultre, 1995).

El segundo método considera modelos tridimensionales del concreto e introduce explícitamente las condiciones de compatibilidad y equilibrio existentes entre el concreto y los aditamentos transversales (Petrangeli *et al.*, 1999). Este tipo de modelo brinda información más detallada del efecto del confinamiento que los casos anteriores, sin embargo, aún se requiere aplicarlo a más casos para probar las hipótesis del mismo.

### **B.3.1.2 Efecto de concentración del daño en compresión**

El efecto de concentración del daño consiste en el desarrollo de grandes deformaciones en una zona limitada de la probeta cuando su altura es mayor de 200 mm (Jansen y Shah, 1997), tal como se observa en la fig B.10. Al someter la probeta a esfuerzos en sus extremos e incrementar el desplazamiento, comienzan a desarrollarse grietas en la zona media de la probeta. Inicialmente estas grietas son paralelas al eje longitudinal de la misma hasta que se forman grietas diagonales. En ese momento, la resistencia del concreto comienza a degradarse debido al incremento de los desplazamientos, mientras que en la zona no dañada aún no alcanza su resistencia y por tanto se produce una descarga elástica para mantener el equilibrio con los esfuerzo en la zona central.

El comportamiento del concreto ilustrado en la fig B.10 significa que aunque este esté sometido a un esfuerzo longitudinal constante a lo largo de una longitud  $L$ , el daño se concentra en una distancia menor o igual a  $L$ . Sin embargo, en los modelos de elementos que se estudian en este trabajo se supone un comportamiento homogéneo del concreto, lo cual puede generar errores importantes en la respuesta calculada. Por ejemplo, en la fig B.11 se muestra el empleo de un modelo de elemento finito basado en fuerzas para obtener la respuesta de una columna empotrada sometida a una carga horizontal en su borde libre. En este caso, la distribución de momentos es lineal alcanzando su valor máximo en la base; mientras que la variación de la curvatura se calcula a partir del momento y las propiedades de los materiales. Esta se obtiene en puntos del esquema de integración seleccionado para calcular los desplazamientos a través de la ec B.20.

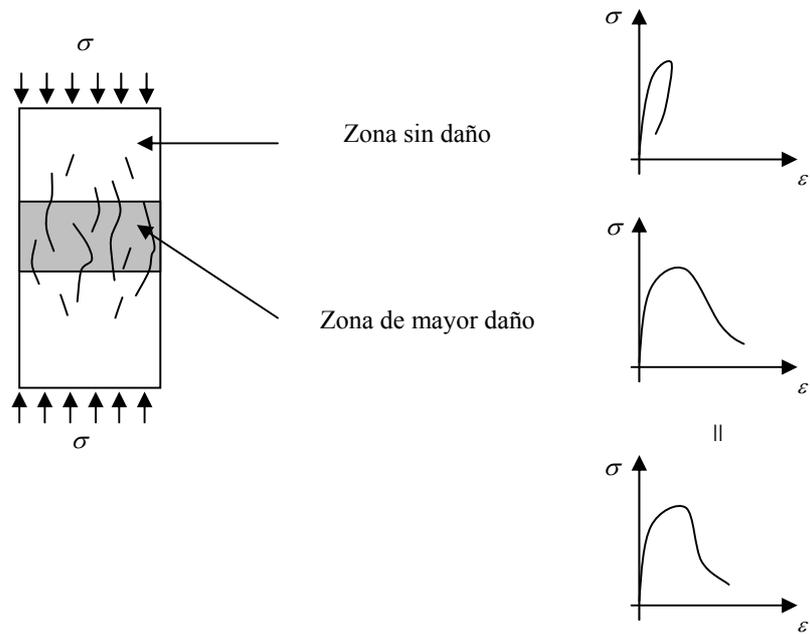


Fig B.10 Efecto de localización del daño en una probeta de concreto

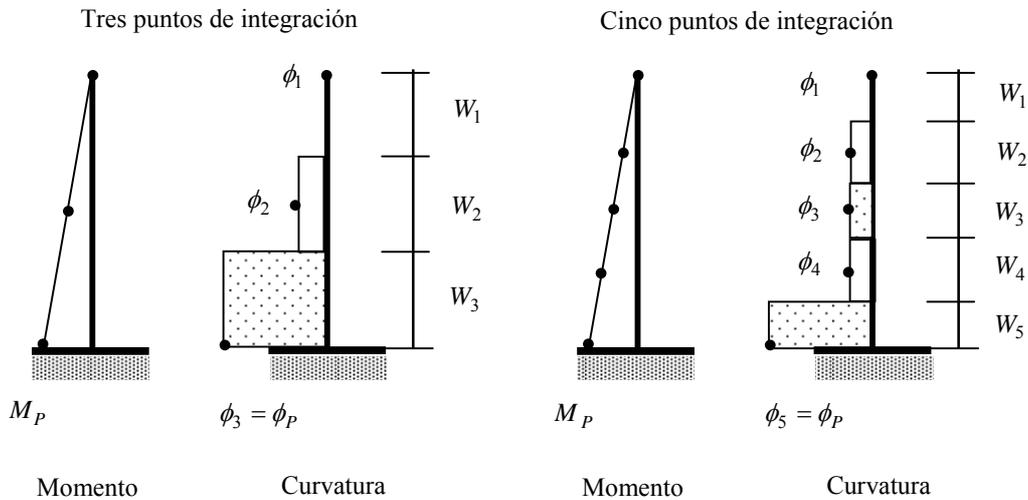


Fig B.11 Integración numérica de las curvaturas en un miembro sometido a carga horizontal

$$d = \sum_{i=1}^{N_p} (M_i \phi_i W_i) \quad (\text{B.20})$$

donde  $d$  es el desplazamiento.  $i$  es el número del punto de integración.  $M_i$  es el momento producido por una carga horizontal unitaria, evaluado en el punto  $i$ .  $\phi_i$  es la curvatura en el punto  $i$ ; y  $W_i$  es el peso de integración de la cuadratura escogida (Coleman y Spacone, 2001), el cual

corresponde a una distancia como se ejemplifica en la fig B.11 para tres y cinco puntos de integración.

En la medida que se incrementa la carga horizontal en la fig B.11, aumenta el momento en la base hasta que este alcanza el momento plástico. A partir de esta fuerza se comienza a formar la articulación plástica en la parte inferior y la curvatura en esta zona se hace mucho mayor que los valores en el resto del miembro. Si el momento en el extremo no se incrementa o disminuye con el aumento del desplazamiento en borde superior de la columna, el único punto de integración que registraría el incremento en la curvatura sería el punto en el apoyo. Por lo tanto, la longitud de la articulación plástica sería el valor de  $W$  asociado al punto de integración en la base (fig B.11). Esta longitud depende del número de puntos de integración y por tanto no corresponde con las mediciones experimentales realizadas en traveses (Coleman y Spacone, 2001; Scott y Fenves, 2006). Esto provoca que al incrementar el número de puntos de integración disminuye la longitud de la articulación plástica ( $W$ ), y se incrementa el desplazamiento en la parte superior de la trabe para alcanzar la deformación de falla en el apoyo. Este problema numérico se denomina en la literatura, “Pérdida de objetividad en el modelo numérico” (Coleman y Spacone, 2001).

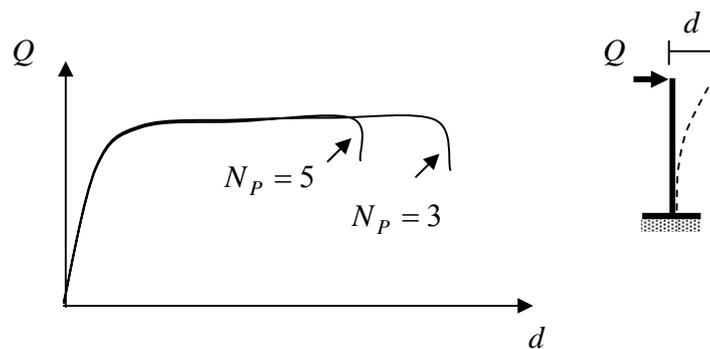


Fig B.12 Variación en la respuesta del miembro por el incremento en el número de puntos de integración ( $N_p$ )

Para solucionar este problema, en este trabajo se seleccionó el procedimiento propuesto por Coleman y Spacone (2001), donde se ajusta la rama descendente del concreto para que la energía liberada en la zona de la articulación plástica sea la misma independientemente del esquema de integración empleado. En este caso, se usa una pequeña variación de la propuesta de Coleman y Spacone (2001). En vez de suponer que la energía  $G_f$  se debe disipar en una longitud plástica empírica y después introducir una corrección debido a la diferencia entre esta longitud y el peso de integración ( $W$ ), en este trabajo se supone de inicio que la energía  $G_f$  se disipa en el peso de integración  $W$  y ya no se requiere ninguna corrección adicional. Por esta razón, la energía de fractura (zona sombreada en la fig B.13) se supone igual a  $G_f$  entre el peso de integración  $W$ .

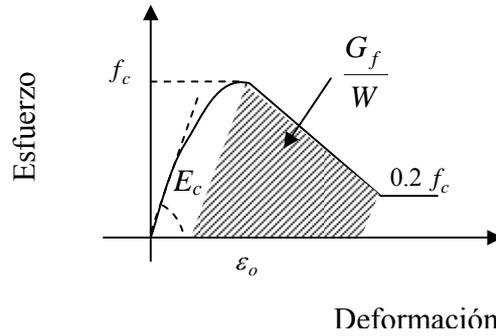


Fig B.13 Modificación de la rama descendente del modelo de Kent y Park (1971) por el efecto de concentración del daño

En el caso del modelo DF,  $W$  se consideró igual a la distancia entre dos secciones transversales consecutivas, debido a que en esta zona es donde se supone que la deformación es constante. Mientras que para el modelo EF basado en desplazamiento, se siguió la recomendación de Bazant y Planas (1998) donde  $W$  es la longitud total del miembro.

### B.3.2 Leyes cíclicas.

En este trabajo se estudiaron dos leyes cíclicas de diferentes grados de complejidad. El primer modelo se combina con la curva esfuerzo-deformación propuesta por Kent y Park (1971) para el concreto en compresión, y el otro forma parte del modelo de Martínez y Elnashai (1997).

Las leyes cíclicas usadas con el modelo de Kent y Park (1971) se ilustran en la fig B.14 y las ecs B.21 a B.23; mientras que las leyes de comportamiento propuestas por Martínez y Elnashai (1997) aparecen en la fig B.15 y las ecs B.24 a B.26.

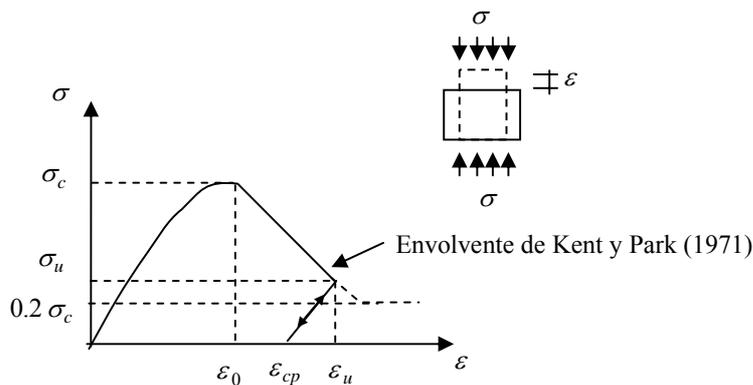


Fig B.14 Ley cíclica del modelo Concrete01 del OpenSees (2007)

$$\varepsilon_{cp} = \left( 0.707 \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} - 2 \right) + 0.834 \right) \varepsilon_0 \quad \text{si } \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \geq 2 \text{ y } \varepsilon_{cp}^* - \varepsilon_0 \leq \frac{\sigma_u \varepsilon_0}{2 \sigma_c} \quad (\text{B.21})$$

$$\varepsilon_{cp} = \left( 0.145 \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0.13 \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \right) \varepsilon_0 \quad \text{si } \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} < 2 \text{ y } \varepsilon_{cp}^* - \varepsilon_0 \leq \frac{\sigma_u \varepsilon_0}{2 \sigma_c} \quad (\text{B.22})$$

$$\varepsilon_{cp} = \varepsilon_u - \frac{\sigma_u \varepsilon_0}{2 \sigma_c} \quad \text{si } \varepsilon_{cp}^* - \varepsilon_0 > \frac{\sigma_u \varepsilon_0}{2 \sigma_c} \quad (\text{B.23})$$

donde  $\varepsilon_{cp}^*$  es la deformación  $\varepsilon_{cp}$  calculada con las ecs B.21 y B.22; mientras que el resto de las variables se ilustran en la fig B.14.

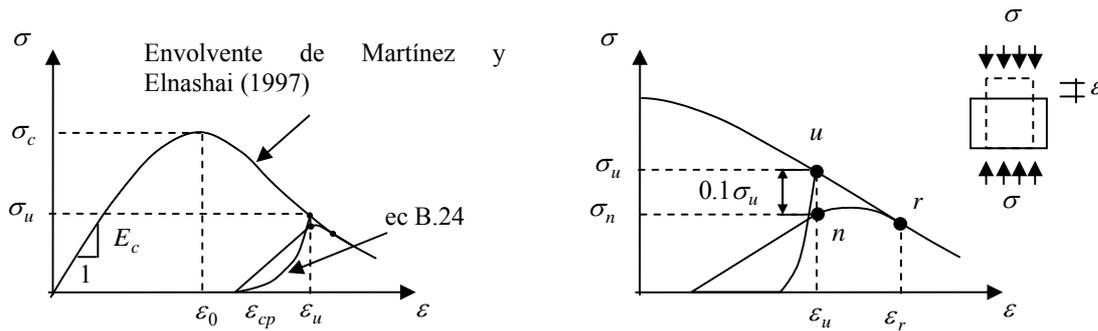


Fig B.15 Leyes cíclicas en el modelo de Martínez y Elnashai (1997)

$$\sigma = \sigma_u \left( \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{cp})}{(\varepsilon_u - \varepsilon_{cp})} \right)^2 \quad (\text{B.24})$$

$$\sigma = \frac{\sigma_n}{(\varepsilon_u - \varepsilon_{cp})} (\varepsilon - \varepsilon_{cp}) \quad (\text{B.25})$$

$$\varepsilon_r = \left( 1.00273 + 1.2651 \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \right) \frac{\varepsilon_u}{2} \leq 1.14 \varepsilon_u \quad (\text{B.26})$$

donde  $\varepsilon_{cp}$  es función de  $\varepsilon_u$ ,  $\sigma_u$ ,  $E$  y  $\varepsilon_0$ .

Como se puede apreciar en las figuras y ecuaciones anteriores, el modelo propuesto por Martínez y Elnashai (1997) considera la disipación de energía en cada ciclo y la degradación de resistencia. Esto significa que la curva esfuerzo-deformación descrita por el concreto no retorna a la envolvente en compresión por el mismo punto donde ocurrió la última descarga (fig B.15). Por otro lado, el modelo CONCRETE01 (OpenSees, 2007) no considera la disipación de energía ni la degradación de resistencia en cada ciclo de carga. Además, ambos modelos se rigen por los parámetros de la envolvente de compresión, sin necesidad del incluir nuevos parámetros que se requieran calibrar mediante ensayos de probetas sometidas a cargas cíclicas.

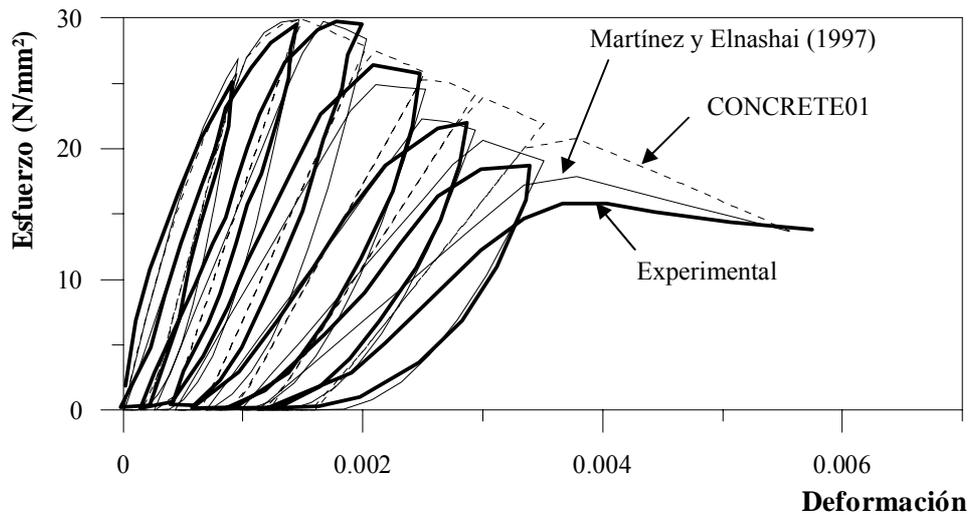


Fig B.16 Comparación de los modelos teóricos con las mediciones realizadas por Karsan y Jirsa (1969)

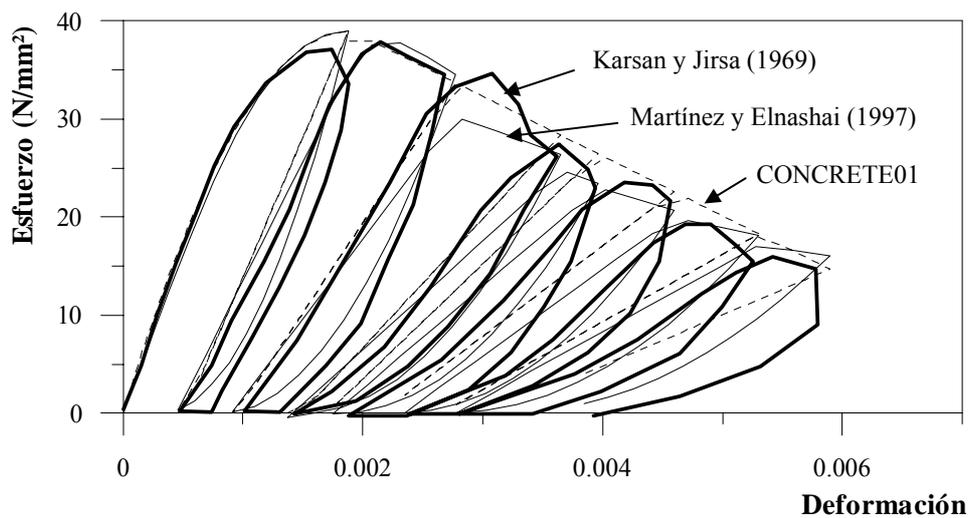


Fig B.17 Comparación de los modelos teóricos con las mediciones realizadas por Karsan y Jirsa (1969)

Sin embargo, las diferencias entre los modelos de concretos anteriores, observadas en las figs B.16 y B.17, no provocan variaciones significativas en las respuestas de miembros de concreto reforzado. Esto se observa en la fig B.18 donde se muestra la comparación de las curvas momento-curvatura medida por Park *et al.* (1982) y calculadas con los modelos propuesto por Martínez y Elnashai (1997) e implementado en OpenSees (2007) (CONCRETE01).

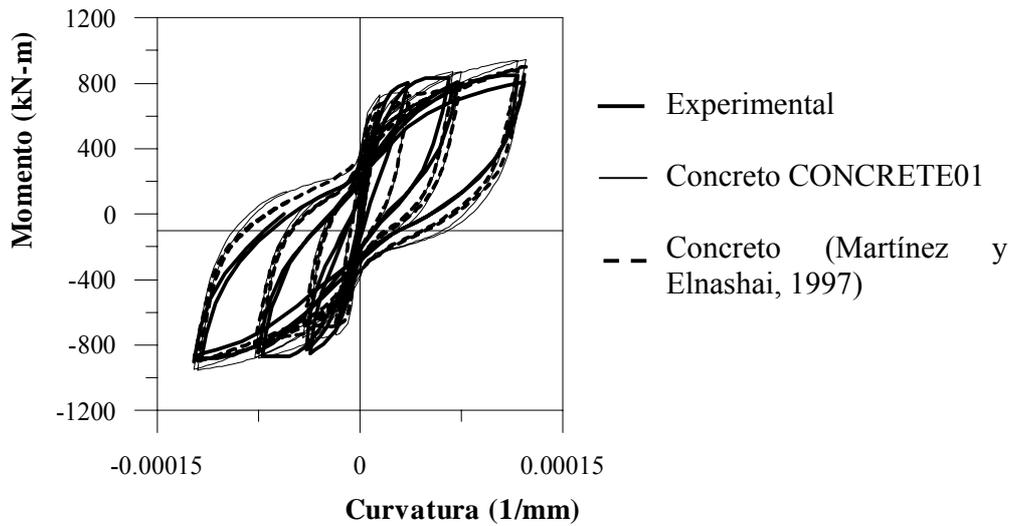


Fig B.18 Comparación de las curvas momento-curvaturas obtenidas con los modelos teóricos y medidas experimentalmente por Park *et al.* (1982)

#### B.4 Modelos de transferencia de fuerzas a través de conectores

Los modelos de transferencia de fuerza a través de conectores indican la fuerza que se genera en la base del mismo debido a un deslizamiento determinado en la interfaz.

En este trabajo se escogieron dos modelos para los distintos casos estudiados. El primero de ellos fue propuesto por Ollgaard *et al.*, (1971) y se aplica en miembros sometidos a cargas monótonas-crecientes donde los conectores no sobrepasan su resistencia máxima. Su forma y expresión numérica son

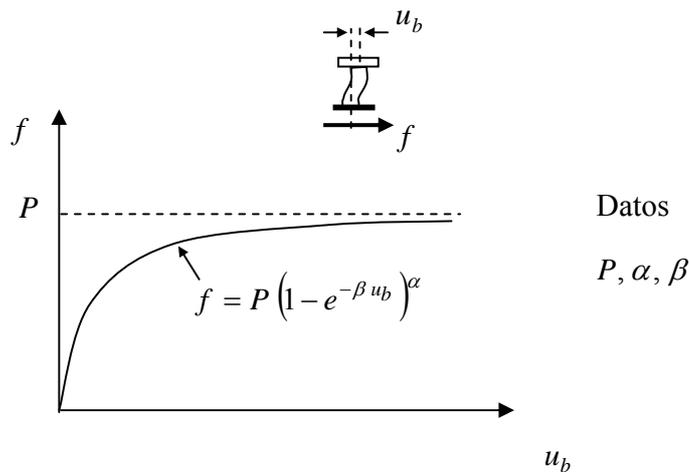


Fig B.19 Modelo de interfaz propuesto por Ollgaard *et al.*, (1971)

El segundo modelo fue propuesto por Reza (1999) y se aplica a miembros sometidos a carga monótona-creciente y cíclica. Según este modelo, cuando el deslizamiento se incrementa de forma monótona-creciente, la fuerza varía como se ilustra en la figura

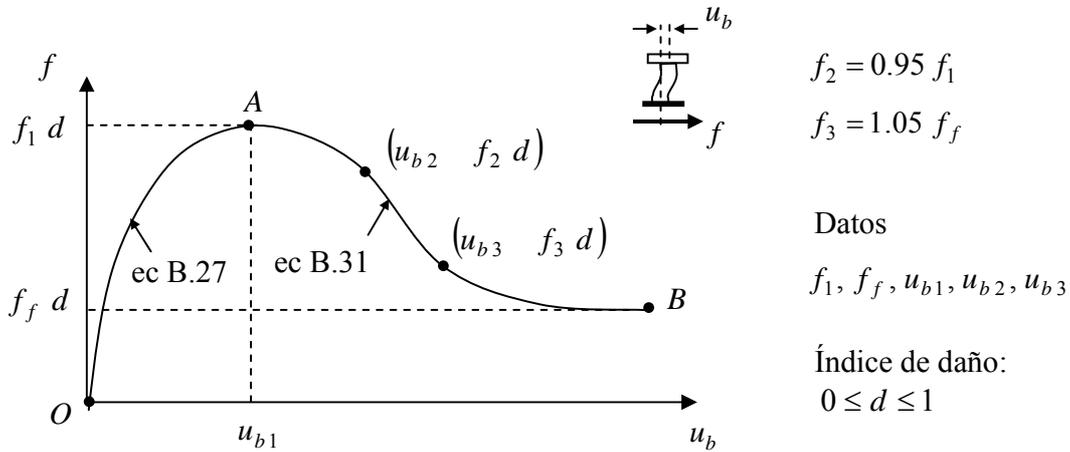


Fig B.20 Variación de la fuerza en la interfaz debido a un incremento monótono creciente del deslizamiento según Reza (1999)

La formulación matemática de la curva ilustrada en la fig B.20 se divide en dos tramos  $\overline{OA}$  y  $\overline{AB}$ . En el primer tramo ( $\overline{OA}$ ) la resistencia se incrementa hasta alcanzar su valor máximo, debido a los mecanismos de fricción, deformación del conector y compresión del concreto alrededor del mismo. La expresión para este tramo propuesta por Reza (1999) es

$$f = f_1 d \alpha_1 \left( \frac{u_b}{u_{b1}} \right) e^{-\alpha_2 \left( \frac{u_b}{u_{b1}} \right)^{\alpha_3}} \quad u_b \leq u_{b1} \quad (\text{B.27})$$

donde  $d$  es un índice de daño:

$$\alpha_1 = \frac{E_0 u_{b1}}{f_1} \quad (\text{B.28})$$

$$\alpha_2 = -\ln \left( \frac{1}{\alpha_1} \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2} \quad (\text{B.30})$$

En el segundo tramo  $\overline{AB}$ , la resistencia comienza a deteriorarse debido al aplastamiento del concreto alrededor del conector y la falla del mismo. En la medida que se incrementa el deslizamiento, la resistencia continúa degradándose hasta llegar a una resistencia mínima asociada al mecanismo de fricción. Matemáticamente, este tramo se representa con

$$f = f_1 \beta_1 d e^{-\beta_2 \left( \frac{u_b}{u_{b1}} - 1 \right)^{\beta_3}} + f_f d \quad u_b \geq u_{b1} \quad (\text{B.31})$$

donde:

$$\beta_1 = 1 - \frac{f_f}{f_1} \quad (\text{B.32})$$

$$\beta_2 = - \frac{\ln(R_2)}{\left( \frac{u_{b2}}{u_{b1}} - 1 \right)^{\beta_3}} \quad (\text{B.33})$$

$$\beta_3 = \frac{\ln\left( \frac{\ln(R_2)}{\ln(R_3)} \right)}{\ln\left( \frac{u_{b2} - u_{b1}}{u_{b3} - u_{b1}} \right)} \quad (\text{B.34})$$

$$R_i = \frac{f_i - f_f}{f_1 - f_f} \quad i = 2,3 \quad (\text{B.35})$$

Si la interfaz se somete a ciclos de deslizamientos, se ha observado experimentalmente (Bursi y Gramola, 1999) que la envolvente se degrada debido a la acumulación de daño. Esto se considera en este modelo mediante el índice de daño  $d$  en las ecs B.27 y B.31, el cual degrada la envolvente de la fig B.20 y se calcula como

$$d = 1 - e^{-0.1 e_{ff}^{-1.05}} \quad (\text{B.36})$$

donde  $e_{ff}$  es la energía disipada normalizada por  $f_1 u_{b1}$

$$e_{ff} = \frac{\int f du_b}{2 f_1 u_{b1}} \quad (\text{B.37})$$

En la medida que se disipa energía a través de ciclos de deslizamiento relativos, el valor de  $e_{ff}$  comienza a crecer y  $d$  a disminuir tendiendo a cero. Esto provoca que la envolvente de la fig B.20 tienda a valores nulos para cualquier valor de deslizamiento.

En los ensayos experimentales reportados en la literatura (Bursi y Gramola, 1999; Sun y Bursi, 2005), se ha observado que la curva fuerza-deslizamiento producida durante un proceso de descarga y carga en la dirección contraria, tiene la forma ilustrada en la fig B.21. Según Reza (1999), al producirse la descarga desde un punto A (fig B.21), la fuerza se reduce con poca variación del deslizamiento relativo. Únicamente después de sobrepasar la resistencia de fricción (próxima a  $f_a$ ), comienza a cerrarse el espacio abierto entre el conector y el concreto, el cual se abrió cuando se sometió a compresión el concreto en la otra cara. Una vez que se cierra este espacio en el punto C, el conector comienza a transferir fuerza nuevamente al concreto y la fuerza vuelve a incrementarse hasta alcanzar la envolvente (punto D).

Para simular numéricamente el proceso de descarga desde el punto A y carga hasta el punto D, Reza (1999) propone procedimientos para obtener cinco puntos de control (fig B.21) a partir de los puntos de máximos deslizamientos en una y otra dirección, y considerando distintas situaciones. Por ejemplo, que ocurra un recarga en el tramo  $\overline{AB}$ .

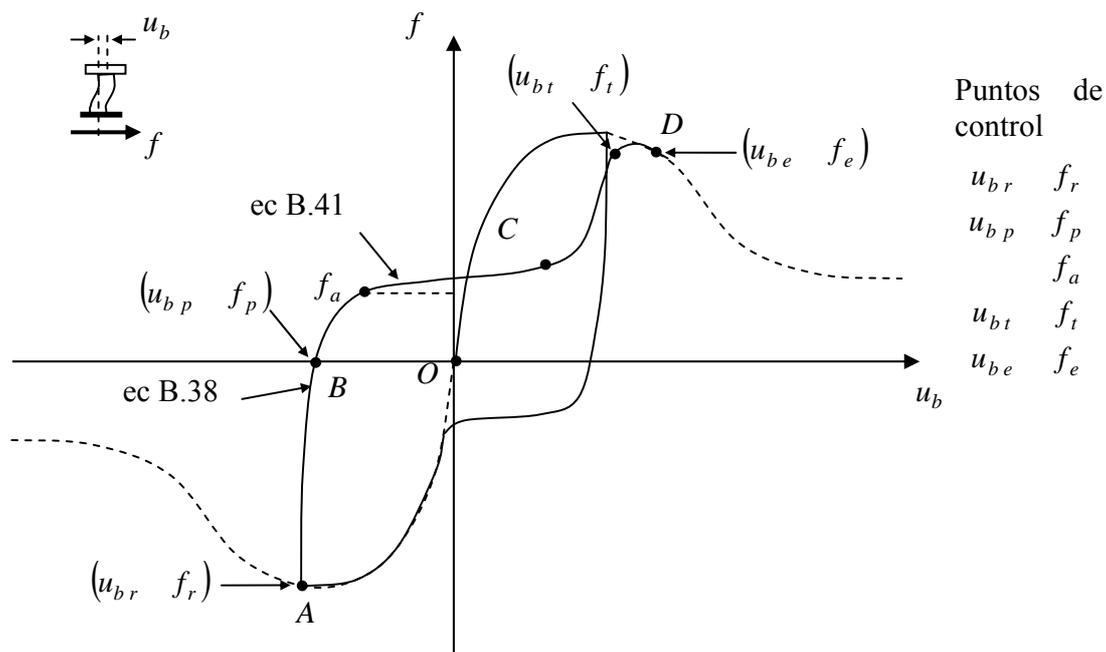


Fig B.21 Curva fuerza-deslizamiento para un ciclo de carga según Reza (1999)

Conocidos estos cinco puntos de control, la curva se divide en dos tramos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BD}$  (fig B.21). El primer tramo se representa con

$$f = f_a + \beta_1 e^{\beta_2 \frac{u_b}{u_{b_r}}} \quad (\text{B.38})$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes que se calculan a partir de los puntos de control  $(u_{b_r}, f_r)$  y  $(u_{b_p}, f_p)$

$$\beta_1 = \frac{f_r - f_a}{e^{\beta_2}} \quad (\text{B.39})$$

$$\beta_2 = \frac{\ln\left(\frac{f_r - f_a}{f_p - f_a}\right)}{1 - \frac{u_{b_p}}{u_{b_r}}} \quad (\text{B.40})$$

Mientras que el segundo tramo  $\overline{BD}$  se traza a través de:

$$f = f_a + \beta_1 e^{\beta_2 \frac{u_b}{u_{b_r}}} + \eta (u_b - u_{b_p})^3 \quad (\text{B.41})$$

donde:

$$\eta = \frac{(f_{\max} - f_{1\max})}{(u_{b_{\max}} - u_{b_p})} \quad (\text{B.42})$$

En esta ecuación,  $u_{b_{\max}}$ ,  $f_{\max}$  corresponden al punto de la envolvente donde ocurrió la descarga con mayor deslizamiento, en la dirección actual de carga; y  $f_{1\max}$  es el valor de la ec B.38 evaluada en  $u_{b_{\max}}$ .

Para lograr una transición suave a la envolvente de carga, Reza (1999) usa una función de Bezier entre el punto  $(u_{b_t}, f_t)$  y el punto D.

Como se puede observar en las ecuaciones y figuras expuestas en esta sección, tanto el modelo de Ollgaard *et al.*, (1971) como el modelo de Reza (1999) dependen de valores asociados a la curva carga-deslizamiento de una interfaz sometida a carga monótona-creciente. Para obtener esta curva, en la literatura se ha propuesto una gran diversidad de procedimientos basados en ensayos experimentales (Bursi y Gramola, 1999; Eurocódigo 4, 1995; Gattesco y Giuriani, 1996; Gattesco

et al., 1997; Oehlers y Bradford, 1995; Scott y Prabhjeet, 2003), modelos de elemento finitos calibrados (Lam y El-Lobody, 2005) o ecuaciones simples incorporadas en los códigos de diseño (AISC, 2005; NTC\_Metálicas, 2004), como por ejemplo

$$R_c = 0.5A_c\sqrt{E_c f_{cu}} \leq A_c f_{su} \quad (\text{B.36})$$

donde  $R_c$  es la resistencia del conector,  $A_c$  es el área del conector,  $f_{cu}$  es la resistencia a compresión del concreto,  $f_{su}$  es la resistencia de ruptura del acero.

Para verificar la adecuada implementación de los modelos anteriores en el programa de cómputo y su validez, se hicieron varias comparaciones con mediciones experimentales. Una de estas comparaciones se ilustra en la fig B.22, donde se muestran las curvas carga-deslizamiento calculada con el modelo de Reza (1999) y la medida experimentalmente por Bursi y Gramola (1999). Los datos requeridos para el modelo de Reza (1999) (fig B.20) se obtuvieron de pruebas descritas en Bursi y Gramola (1999) para un espécimen con las mismas características del caso donde se midió la curva experimental de la figB.22.

La adecuada correlación entre las curvas de la fig B.22 demuestra un correcto funcionamiento del modelo propuesto por Reza (1999) e implementación del mismo en el programa de cómputo.

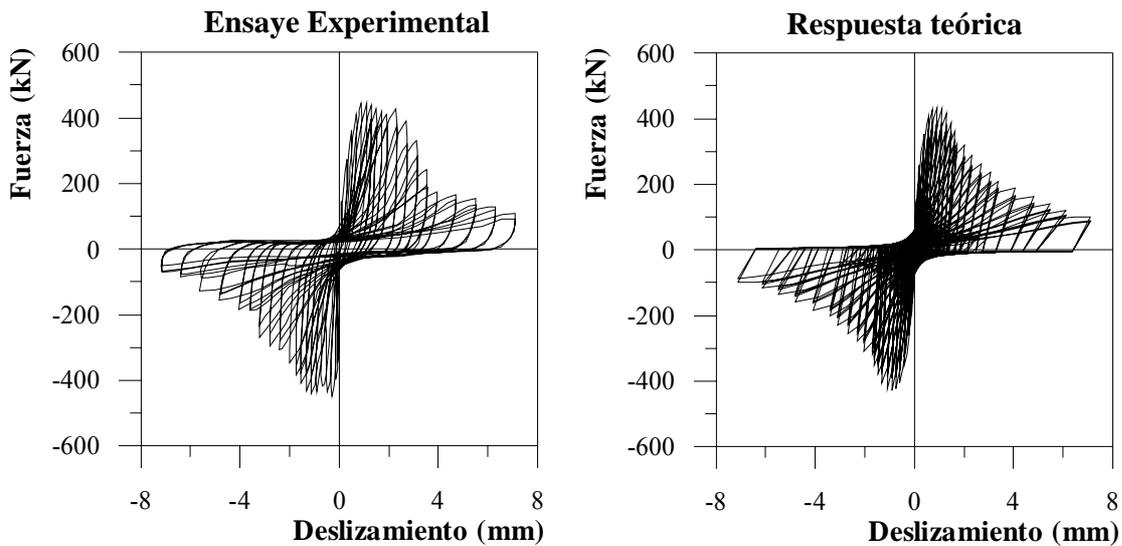


Fig B.22 Comparación de las curvas fuerza-deslizamiento medidas en el ensaye experimental de Bursi y Gramola (1999) y calculado con el modelo de Reza (1999) I

## APÉNDICE C DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE CÓMPUTO

En este programa se integra el análisis de materiales, secciones transversales, elementos y estructuras con el propósito de emplear óptimamente los modelos DF y EF en el estudio de miembros compuestos. Esto permite desglosar la respuesta estructural en momentos, fuerzas y deformaciones en la sección transversal, así como conocer el esfuerzo y la deformación del material localizado en puntos de las secciones transversales y las interfaces. También se pueden realizar análisis de materiales y secciones transversales para calibrar sus parámetros de respuestas antes de realizar un análisis estructural.

Por otro lado, para facilitar la incorporación de modelos de materiales, secciones transversales, elementos, etc, se empleó la filosofía de programación orientada a objeto, en la cual el programa se divide en objetos o módulos de archivos independientes. Esto permite modificar cada módulo sin alterar el resto del programa. Además, se separó el ambiente visual de las librerías numéricas para realizar mejoras visuales o numéricas modificando la menor cantidad de código fuente posible.

### C.1 Estructura del programa

La estructura del programa se muestra en la fig C.1 en un diagrama de flujo. Este representa las relaciones de jerarquía entre los distintos módulos u objetos en los cuales se divide el programa. Como se puede apreciar, el ambiente visual lo conforman los módulos visualizadores de datos, dibujos y resultados, así como el módulo principal. Por otro lado, los módulos de análisis corresponden a materiales, secciones transversales, macromodelos y estructura, los cuales se comunican con el ambiente visual a través de una interfaz.

Cada módulo de análisis permite realizar análisis propios y a la vez usar datos de los módulos u objetos inferiores. Por ejemplo, el módulo de sección transversal permite obtener los diagramas momento-curvatura y a la vez emplea la librería de materiales disponibles en el módulo de análisis de materiales.

Por otro lado, dentro de cada módulo es posible seleccionar distintos tipos de modelos. La librería de materiales incluye modelos para el concreto, el acero y los conectores de cortantes sometidos a carga monótona o cíclica. En el módulo de sección transversal existe un modelo de fibras que se puede adaptar a cualquier geometría. El módulo de macromodelos considera dos modelos. Uno para los modelos DF y otro para los modelos EF. Por último, en el módulo de estructura es posible definir una estructura compuesta con los macromodelos del módulo anterior, sometida a distintas combinaciones de cargas monótonas-crecientes o cíclicas.

Es importante destacar que no existe restricción en el número de materiales, secciones transversales, macromodelos o estructuras de marcos planos que se pueden cargar en una corrida.

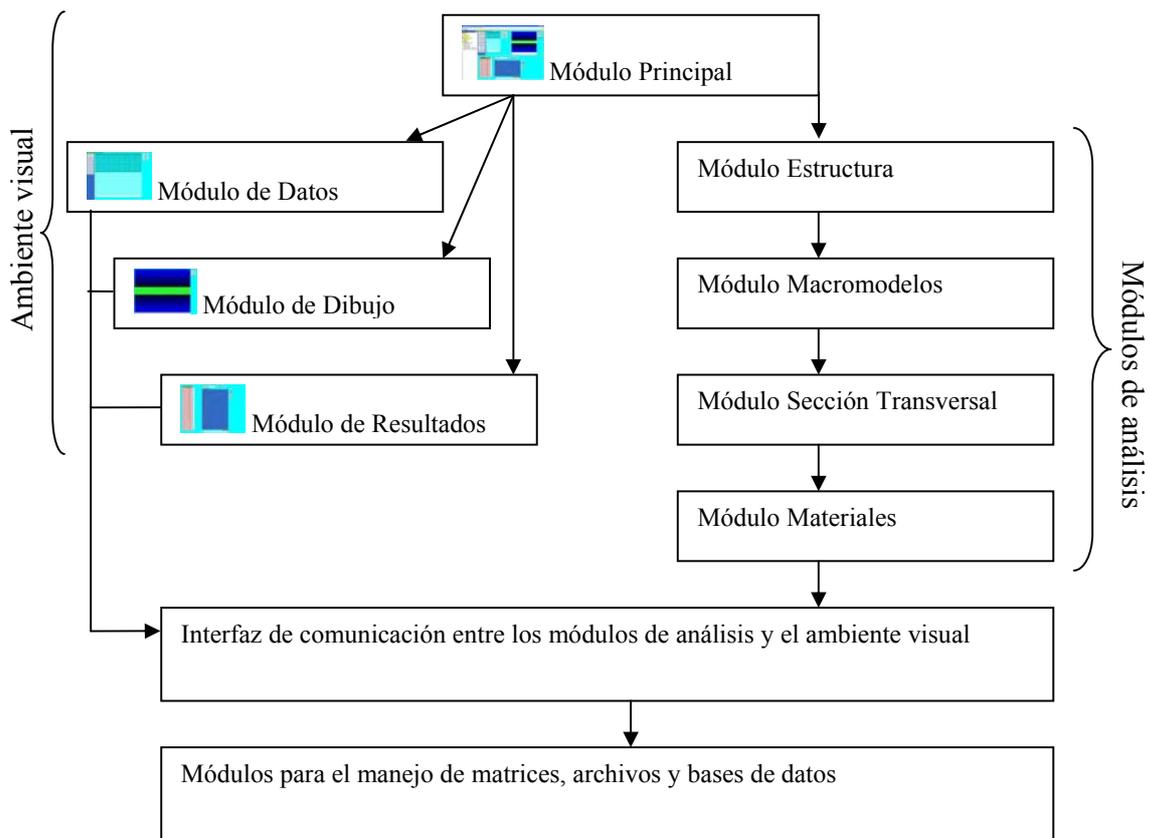


Fig C.1 Jerarquía entre los módulos del programa de cómputo

En este programa se entiende como macromodelo a un modelo de elemento compuesto por una combinación de elementos resortes, barras, cubos, etc. Esta definición es una generalización del concepto de propiedad del elemento establecida en la mayor parte de los programas de análisis. En este caso no son solamente las propiedades de una sección transversal o un material, también se incorporan distribuciones de otros elementos más simples, sistema de coordenadas internas y posiciones relativas de los nudos, las cuales se escalan posteriormente cuando el macromodelo se incorpora a la estructura. Esto le permite al programa brindar una gran flexibilidad en los tipos de modelos de elementos que se podrían incorporar, como por ejemplo modelos de nudos, muros, etc, donde la distribución o combinación de elementos resortes o barras puede ser muy variada. Por otro lado, para evitar la declaración excesiva de macromodelos durante la construcción de un modelo estructural, se permitió que su longitud se escalara de acuerdo a la longitud del elemento, por lo que dos elementos con diferentes longitudes pueden usar las propiedades de un mismo macromodelo.

Los dos macromodelos disponibles en el programa corresponden a los modelos DF viga-columna (DF) y a los modelos EF (EF). Ambos están dirigidos al estudio de miembros compuestos con cualquier cantidad de elementos componentes e interfaces entre ellos, sin considerar la separación entre los elementos componentes. Para comprender como se declaran en el programa de cómputo, en la fig C.2 se muestra el caso de un miembro compuesto por dos elementos componentes, entre los cuales se declara una interfaz. Si es un solo miembro, en el módulo de

estructura se declaran cuatro nudos y un macromodelo tipo EF o DF. También se deben incluir dos secciones transversales, así como los materiales de la interfaz y las secciones transversales.

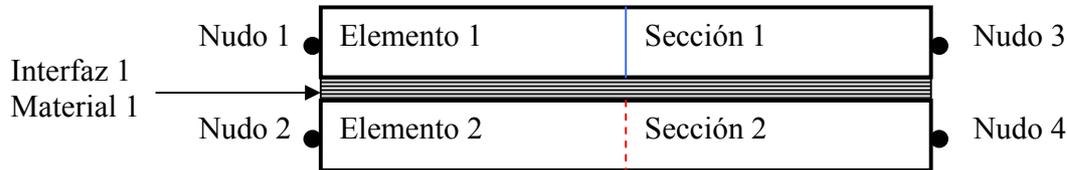


Fig C.2 Declaración de un miembro compuesto en el programa de cómputo

En el ambiente visual del programa de cómputo esto quedaría desglosado en una estructura, un macromodelo, dos secciones transversales y en este caso, cinco materiales como se muestra en la fig C.3. Los datos que aparecen corresponden al ensaye experimental estudiado y expuesto en el artículo del apéndice B.

En el caso de la fig C.3 se hizo clic en el icono de estructura 1, y por eso muestra los datos de la estructura. Sin embargo, se puede hacer clic en iconos correspondientes al macromodelo, las secciones transversales o los materiales y visualizar información específica de estos módulos de análisis, o realizar estudios particulares en los mismos como se describe en la sesión siguiente. Por ejemplo, en la fig C.4 se muestra la información correspondiente al perfil metálico después de haber calculado el diagrama momento-curvatura.

## C.2 Tipos de análisis

Los tipos de análisis que permite el programa actualmente son:

- Someter el material a una historia de deformaciones uniaxiales monótona o cíclica
- Aplicar una variación de curvatura con carga axial constante a una sección transversal
- Obtener el diagrama de interacción carga axial- momento de la sección transversal
- Realizar el análisis de una estructura sometida a cargas monótonas-crecientes o cíclicas.

Para realizar el análisis estructural se desarrolló un procedimiento nuevo que engloba los distintos procedimientos implementados en otros programas de análisis (Taylor, 2004; SEISMOSTRUCT, 2005; SAP2000, 2002; OpenSees, 2007). Este consiste en declarar un estado de carga activo y cualquier cantidad de estados pasivos, donde el incremento del estado de carga activo es controlado por una función que define el usuario, mientras que los factores de carga de los estados pasivos son calculados por el programa buscando satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad de desplazamiento que impone el estado activo. Por ejemplo, si se desea controlar la rotación en un extremo para calcular el diagrama momento-rotación de una trabe, entonces se debe declarar el estado activo y pasivo que se muestra en la fig C.5.

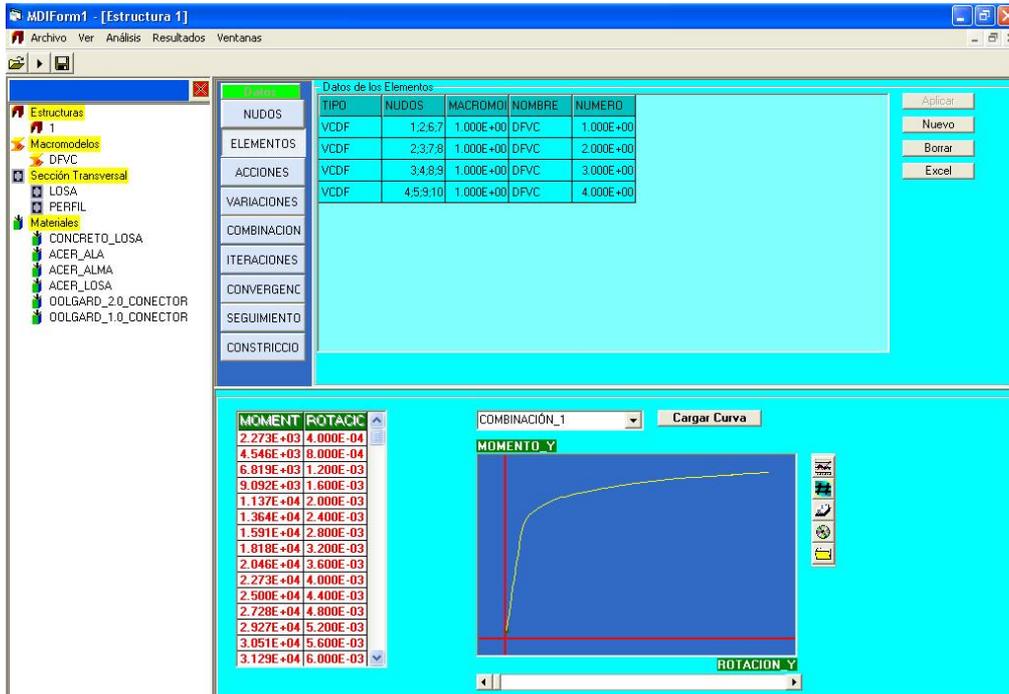


Fig C.3 Muestra visual de los distintos módulos de análisis en el programa de cómputo

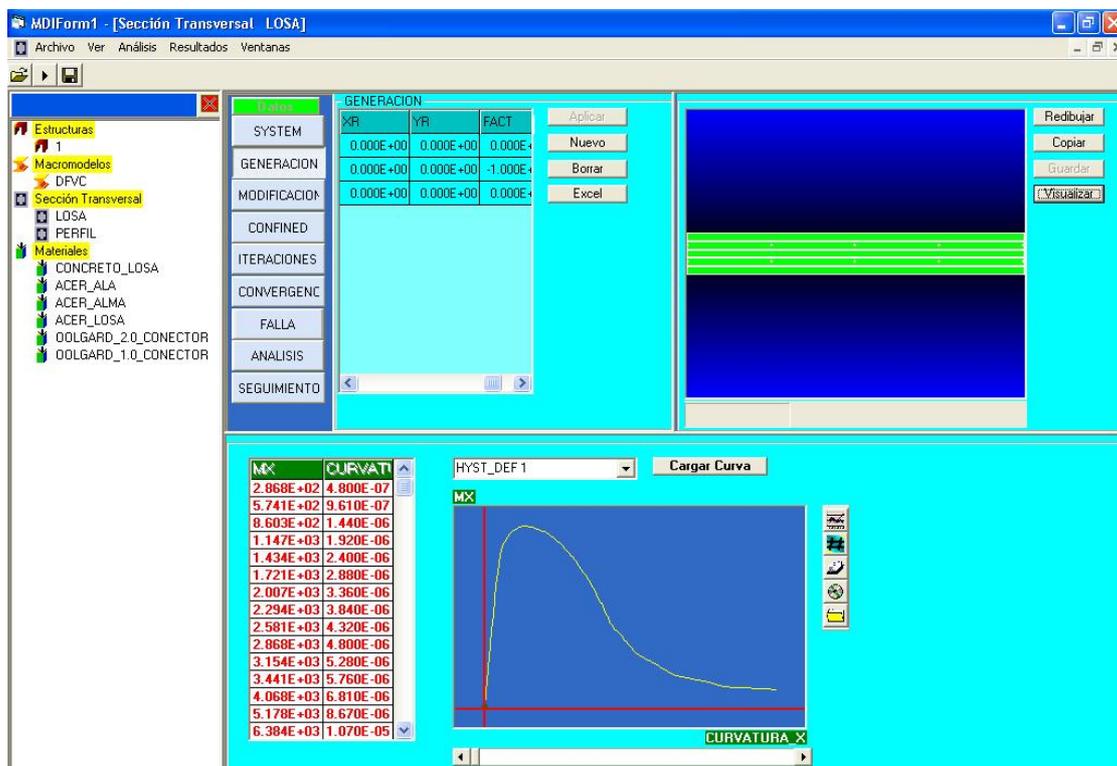


Fig C.4 Muestra visual de una sección transversal

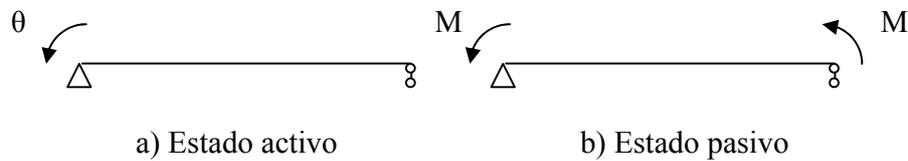


Fig C.5 Declaración de estados de carga para controlar la rotación en el cálculo del diagrama momento-rotación de una trabe

En cada estado pueden especificarse desplazamientos y fuerzas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que por cada desplazamiento que se especifique se elimina una incógnita del problema y por cada estado pasivo, se introduce otra incógnita (factor de carga). Por lo tanto, para que el problema tenga solución, el número de incógnitas que se introducen y las que se eliminan deben ser iguales. Esta condición la verifica el programa antes de empezar el análisis.

La idea de aplicar variaciones a estados de cargas formados por fuerzas y desplazamientos permite generalizar en un solo procedimiento, diferentes opciones que aparecen de manera separada en distintos programas de cómputo (Taylor, 2004; SEISMOSTRUCT, 2005; SAP2000, 2002; Prakash y Powell, 1993; OpenSees, 2004). Por ejemplo, se puede realizar el análisis de una estructura ante carga monótona creciente controlando fuerzas o desplazamiento en un punto cualquiera como se hace en el SAP2000 (SAP2000, 2002), los programas DRAIN (Prakash y Powell, 1993), el SEISMOSTRUCT (SEISMOSTRUCT, 2005), o el OpenSees (OpenSees, 2007). También es posible aplicar una historia de desplazamiento en un nudo de la estructura como lo permiten el SEISMOSTRUCT y el OpenSees; o introducir un estado de carga reversible controlando el desplazamiento en un nudo a través del OpenSees.

## REFERENCIAS

Abdel Aziz K.(1986) “Modelisation et etude experimentale de poutres mixtes acier-beton a connexion partielle ou espacee”, PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquees des Rennes, 1986.

Ahmad, S. H. y Shah, P. (1982), “Stress-Strain Curves of Concrete Confined by Spiral Reinforcement”, *ACI Journal*, pp 484-490.

AISC (2005), “American Institute for Steel Construction. Specification for Structural Steel Building”

Aprile, A., Spacone, E., y Limkatanyu, S. (2001), “Role of Bond in RC Beams Strengthened with Steel and FRP plates”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, No 12, pp 1445-1452.

Bathe, K. (1982), “Finite element procedures in engineering analysis”. Englewood cliffs, New Jersey: Prentice Hall

Bazant, Z. P., y Planas, J. (1998), “Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials”, CRC Press, Boca Raton, Fla.

Bursi, O., y Ballerini, M. (1996), “Behaviour of a steel-concrete composite substructure with full and partial shear connection”, *Eleventh World Conference on Earthquake Engineering*, Proceeding, Paper No 771.

Bursi, O., y Gramola, G. (1999), “Behaviour of headed stud shear connectors under low-cycle high amplitude displacements”, *Materials and structures*, Vol. 32, pp 290-297.

Bursi, O., y Gramola, G. (2000), “Behavior of composite substructures with full and partial shear connection under quasi-static cyclic and pseudo-dynamic displacement”, *Materials and structures*, Vol. 33, pp. 154-163.

Bursi, O., Fei-fei, S., y Postal, S. (2005), “Non-linear analysis of steel-concrete composite frames with full and partial shear connection subjected to seismic loads”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 61, pp 67-92.

Coleman, J., y Spacone, E. (2001), “Localization issues in force-based frame elements”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, No 11, pp 1257-1265.

Cusson, D., y Paultre, P. (1995), “Stress- Strain model for confined high- strength concrete”, *J. Struct. Engrg.*, Vol. 121, No 3, pp 468-476.

Dall’Asta, A., y Zona, A. (2002), “Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach.” *Computers & Structures*, Vol. 80, pp 2217-2228.

- Dall'Asta, A., y Zona, A. (2004a), "Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection." *Finite elements in analysis and design*, Vol. 40, pp 425-448.
- Dall'Asta, A., y Zona, A. (2004b), "Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection.", *Finite elements in analysis and design*, Vol. 40, pp 1907-1930.
- Dall'Asta, A., y Zona, A. (2004c), "Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams.", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp 2117-2130.
- Daniels, B., y Crisinel, M. (1993), "Composite slab behavior and strength analysis. Part I: calculation procedure", *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 119 No 1, pp16–35.
- Dezi, L., Gara, F., Leoni G., y Tarantino A. (2001), "Time-Dependent analysis of shear-lag effect in composite beams.", *J. Engng. Mech.*, Vol. 127 No. 1, pp 71-79.
- Dhakal, R. P., y Maekawa, K. (2002), "Path-dependent cyclic stress-strain relationship of reinforcing bar including buckling", *Engineering Structures*, Vol. 24, pp 1383-1396.
- Dodd, L., y Restrepo-Posada, J. (1995), "Model for predicting cyclic behavior of reinforced steel", *J. Struct. Engrg.*, 121, 3, 433- 444.
- Eurocódigo 4 (1995). Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de hormigón y acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación. Versión oficial ENV 1994-1:1992, Secretaría del CTN 140.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., y Cosenza, E. (1999), "Non-linear analysis of composite beams under positive bending", *Computers and Structures*, Vol. 70, pp 77-89.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., y Cosenza, E. (2000), "Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond.", *Journal of Struct. Engrg.*, Vol. 126 No. 11, pp 1288-1284.
- Filippou, F., Popov E., y Bertero, V. (1983), "Effects of bond deterioration on Hysteretic behavior of Reinforced Concrete Joints", *EERC Report 83/19*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
- Gattesco, N., y Giuriani, E. (1996), "Experimental Study on Stud Shear Connectors subjected to cyclic loading", *J. Construct. Steel Res.*, Vol. 38, No1, pp 1-21.
- Gattesco N., Giuriani, E., y Gubana, A. (1997), "Low-cycle fatigue test on stud shear connectors", *Journal of Struct. Engrg.*, Vol. 123, No 2, pp 145-150.

Hilleborg A. (1989), “The compression stress-strain curve for design of reinforced concrete beams”, ACI Sp-118.

Jansen, D., y Shah, S. (1997), “Effect of length on compressive strain softening of concrete”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 123, No 1, pp 25-35.

Kaba, S., y Mahin, S. (1984), “Refined modeling of Reinforced Concrete Columns for seismic analysis”, *EERC Report 84/03*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Karsan, I., y Jirsa, O. (1969), “Behavior of concrete under compressive loading”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 95, No ST12, pp 2543-2563.

Kent, D. C., y Park, R. (1971), “Flexural members with confined concrete”, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, No 7, pp 1964–1990.

Lam D., y El-Lobody E., (2005), “Behaviour of headed stud shear connectors in composite beam”, *Journal of Struct. Engrg.*, Vol. 131, No 2, pp 96-107

Légeron, F., y Paultre, P. (2003), “Uniaxial confinement model for normal- and high-strength concrete columns”, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 129, No2, pp 241-251.

Limkatanyu, S., y Spacone, E. (2002a), “Reinforced Concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No 3, pp 346-355.

Limkatanyu, S., y Spacone, E. (2002b), “Reinforced Concrete frame element with bond interfaces. II: State determinations and numerical validation”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 128, No 3, pp 356-364.

Madas, P., y Elnashai, A. S. (1992), “A new passive confinement model for the analysis of concrete structures subjected to cyclic and transient dynamic loading”, *Earth. Eng. And Struc. Dyn.*, Vol. 21, pp 409-431.

Mander, J. B., Priestley, M. J. N., y Park, R. (1984), “Seismic design of bridge piers”. In: *Research Report 84-2*, Christchurch (New Zealand), Department of Civil Engineering, University of Canterbury.

Mander, J., Priestley, J., y Park, R. (1988), “Theoretical Stress-strain model for confined concrete”, *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 114, No 2, pp 1804-1826.

Marques, J., y Barreto, R. (2005) “Numerical analysis of composite steel-concrete columns of arbitrary cross section”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 131, No 11, pp 1721-1730

Martínez, J. E., y Elnashai., A. S. (1997), “Confined concrete model under cyclic load”, *Materials and Structures*, Vol. 30, pp 139-147.

Menegotto, M., y Pinto, P. E. (1973), “Method of analysis of cyclically loaded RC plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under normal force and bending”, *Preliminary Report IABSE*; Vol.13, pp 15–22.

Monti, G. y Nuti, C. (1992), “Nonlinear cyclic behavior of reinforcing bars including buckling”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 12, pp 3268-3285.

NTC\_Concreto (2004), “Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto”. México: Gaceta Oficial del Distrito Federal.

NTC\_Metálicas (2004), “Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras metálicas”. México: Gaceta Oficial del Distrito Federal.

Oehlers, D., y Bradford, M. (1995), “Composite Steel and Concrete Structural Members”, Pergamon, Oxford, U.K.

Ollgaard, J., Slutter, R., y Fisher, J. (1971), “Shear strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete”, *AISC Engineering Journal*; Vol. 8, pp 55-64.

OpenSees, (2007) “Open System for Earthquake engineering simulation: User Manual”, *Pacific Earthquake Research Center*, University of California, Berkeley, <http://opensees.berkeley.edu>.

Park, R., Priestley, M. J. y Gill, W. D. (1982), “Ductility of square-confined concrete columns”, *Journal of Structural Division*, ASCE, 108, ST4, pp 929-951

Petrangeli, M., Pinto P., y Ciampi, V. (1999), “Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory” *Journal of Engineering Mechanics*; Vol. 125 No 9, pp 994-1001.

Pi Y., Bradford, M., y Uy, B. (2006b) “Second Order Nonlinear Inelastic Analysis of Composite Steel-Concrete Members. II: Applications”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 132, No 5, pp 762-761.

Prakash, V. y Powell, G. H., (1993) “DRAIN-2DX, DRAIN-3DX and DRAIN-BUILDING: Base Program Design Documentation”, *Report UCB/SEMM-93/16*, Dept. of Civ. Engrg., University of Berkeley, California

Ranzi, G., Bradford, M., y Uy, B. (2004), “A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction.”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 61, pp 657-672.

Ranzi, G., Gara, F., Leoni, G., y Bradford, M. (2006), “Analysis of composite beams with partial shear interaction using available modeling techniques: A comparative study.”, *Computers & Structures*, Vol. 84, pp 930-941.

Reza, S., Spacone, E., Benson, P., y Frangopol, D. (1998), “Nonlinear Analysis of Composite Beams with Deformable Shear Connectors”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No 10, pp 1148-1158.

Reza, S. (1999) “Modeling of bond-slip in steel-concrete composite beams and reinforced bars”, *PhD thesis*, Dept. of Civ., Envir. And Arch. Engrg., University of Colorado, Boulder.

Reza, S., y Spacone, E. (2001), “Analysis of Steel-Concrete Composite Frames with Bond Slip”, *Journal of Structural Engineering*, Vol.127, No 11, pp 1243-1250.

Rodriguez, M. E., Botero, J. C., y Villa, J. (1999), “Cyclic stress–strain behavior of reinforcing steel including effect of buckling”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, pp 605–612.

SAP2000 (2002), “*SAP2000 Structural Analysis program User Manual*, Computer and Structures Inc.,Version 8.02”, Berkeley, California.

SEISMOSTRUCT (2005) “Seismostruct: Version 3.0.1”, Seismosoft, <http://www.seismosoft.com/>.

Scott, B. D., Park, R., y Priestley, M. J. N., (1982), “Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates”. *Am. Concr. Inst. J.*, Vol 79, No 1, pp 13-27

Sheikh, S. A., y Usumeri, S. M., (1980), “Strength and ductility of tied concrete columns.”, *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol 106, No 5, pp 1079-1102

Scott, M., y Fenves, G. (2006), “Plastic hinge integration methods for force-based beam-column elements”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 132, No. 2, pp 244-252.

Scott, A., y Prabhjeet, S. (2003), “Behavior of shear studs subjected to fully reversed cyclic loading”, *Journal of Struct. Engrg.*, Vol. 129, No. 11.

Spacone, E., y Limkatanyu, S. (2000), “Response of Reinforced Concrete Members Including Bond-Slip Effects”, *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No 6, pp 831-839.

Sun, F., y Bursi, S. (2005). “Displacement-based and two-field mixed variational formulations for composite beams with shear lag”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 131, No 2, 19-210.

Taylor, R. L. (2004). “FEAP: A finite element analysis program User manual: Version 7.5”, *Dept of Civ. and Envir. Engrg.*, University of California, Berkeley, Calif., <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/>

Wilkinson, J., y Reinsch, C. (1971), “Linea Algebra”, Springer-Verlag, New York, US.

# ARTÍCULOS

# ARTÍCULOS

# Modelo para el análisis de miembros estructurales compuestos con deslizamiento relativo

José Enrique Blanco, David Murià-Vila y José Alberto Escobar S.

Instituto de Ingeniería, UNAM  
Coordinación de Estructuras y Materiales  
Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510, México D.F.  
Tel.: 55-56-22 34 71; Fax: 55-56-22 34 68  
e-mail: jblb@pumas.iingen.unam.mx  
e-mail: dmv@pumas.iingen.unam.mx  
e-mail: jess@pumas.iingen.unam.mx

## Resumen

En este trabajo se estudian miembros estructurales compuestos en los que pueden existir deslizamientos relativos entre las partes que los forman. Comúnmente, para calcular las fuerzas en los elementos componentes, se acepta como hipótesis de análisis la adherencia perfecta entre los distintos materiales, sin embargo, esto puede originar errores importantes en varios casos y conducir a un diseño inadecuado del miembro. Para evaluar este problema se han desarrollado modelos de fibras viga-columna basados en el método de las diferencias finitas que permiten considerar el deslizamiento entre elementos. Sin embargo, estos modelos emplean procedimientos numéricos que parten de un extremo articulado en el miembro y requieren localizar una sección donde los deslizamientos en la interfaz sean nulos, lo cual limita las condiciones de frontera y estados de carga que se pueden considerar. Además, se producen complicaciones numéricas importantes cuando se incluyen más de dos planos de deslizamientos, incrementando el costo computacional. Por esta razón se desarrolla y calibra un nuevo modelo que resuelve estas limitaciones. Los resultados obtenidos muestran que los miembros compuestos, en donde ocurran deslizamientos relativos entre sus elementos, pueden sufrir degradación de resistencia y rigidez significativa respecto a la respuesta de elementos con adherencia perfecta.

**Palabras clave:** miembros compuestos, deslizamiento relativo, comportamiento no lineal, diferencias finitas.

## ANALYSIS MODEL OF COMPOSITE STRUCTURAL MEMBERS WITH BOND SLIP

### Summary

Structural composite members, in which bond slip at the interface among its components can occur, are studied. The forces in the composite members are usually calculated assuming perfect adherence among the different materials. Nevertheless, with this assumption, important mistakes may arise in several cases and lead to an inappropriate design of the members. In order to study this problem, several theoretical fibre beam-column models, based on the finite difference method where the bond slip may be taken into account, have been developed. These models use numerical methods, they start from a pinned end of the member and require locating a section where the interface slip is zero which is a strong limitation on the boundary conditions and load states to be considered. In addition, if more than two slip layers are considered, numerical complications arise and the computational cost is increased. By these reasons, a new model that solves these limitations is developed and calibrated. The results obtained show that the composite members in which relative slip among their elements could occur, significant stiffness and strength degradation in the composite elements may arise.

**Keywords:** composite members, relative slip, non-linear behaviour, finite difference.

## INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de materiales de construcción, cada uno tiene las ventajas e inconvenientes, que los hacen más idóneos para la ejecución de una obra determinada. Sin embargo, en muchos casos resulta conveniente combinar distintos materiales, buscando aprovechar las ventajas de cada uno y minimizar las limitaciones de éstos por separado. De esta manera se obtienen materiales con mejores propiedades y de ahí que haya múltiples materiales compuestos. Una de las combinaciones más empleadas es la de acero y concreto que se analiza en el presente trabajo.

Para lograr un comportamiento óptimo en los miembros mixtos de concreto y acero es necesario comprender los mecanismos que rigen el comportamiento en la interfaz entre éstos. El desarrollo de deslizamientos relativos en la interfaz puede disminuir significativamente el trabajo de conjunto. Las superficies potenciales de deslizamiento pueden aparecer entre materiales distintos o en zonas del miembro donde existan juntas constructivas debido a la secuencia de construcción empleada.

Uno de los casos más estudiados es una viga metálica con una losa de concreto<sup>10</sup>. Su resistencia varía notablemente con las características de la conexión en la interfaz entre ambos elementos, lo cual se ha plasmado inclusive en los códigos de diseño de distintos países<sup>9</sup>. Para llegar a esto se desarrollaron investigaciones teóricas y experimentales<sup>10</sup>.

Los modelos teóricos se diferencian en cuanto a su grado de complejidad y aproximación. Como en todos los campos del análisis estructural, existe el debate de cuál es el mínimo grado de refinamiento necesario para representar los principales aspectos del comportamiento del fenómeno. En el caso del estudio de miembros de materiales compuestos con planos potenciales de deslizamiento existen modelos muy refinados de elementos finitos<sup>2</sup>, en los cuales se divide el miembro en elementos tridimensionales o planos, para realizar la integración de las deformaciones y los esfuerzos del material en el volumen del miembro y obtener su respuesta ante una acción externa. Estos modelos se pueden emplear en una gran variedad de geometrías e incluir distintas fuentes de comportamiento no lineal. Sin embargo, su desventaja son los grandes recursos de cómputo que requieren. En el análisis de miembros viga-columna este proceso se puede reducir notablemente integrando las propiedades del material en secciones transversales escogidas a lo largo del miembro<sup>14</sup>. El proceso de integración se realiza con modelos de fibras y la respuesta del miembro se calcula mediante el método de los elementos finitos<sup>17</sup>. Este modelo para el miembro viga-columna se conoce en la literatura como modelo de fibra viga-columna<sup>14</sup> (FVC).

La aplicación de modelo FVC al estudio de miembros con deslizamientos relativos se complica debido a que la respuesta de las secciones transversales depende de la respuesta de la interfaz. Para considerar analíticamente las características de la interfaz de deslizamiento se han desarrollado dos procedimientos. Uno basado en el método del elemento finito, en donde se proponen funciones de forma para el flujo de fuerzas, el deslizamiento o ambos a lo largo de la interfaz<sup>12</sup>. El otro procedimiento plantea las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la interfaz entre los elementos componentes de un miembro con diferencias finitas y reduce el problema a un sistema de ecuaciones lineales<sup>5,6,10</sup>.

El modelo FVC combinado con la función de forma en la interfaz permite representar la degradación de resistencia y rigidez en la interfaz y en las secciones. Sin embargo, su campo de aplicación se ha limitado al análisis de estructuras de barras, con una superficie de deslizamiento cuando los elementos componentes se encuentran sometidos a efectos combinados de carga axial y momento flexionante. Para el caso de varias superficies de deslizamiento, sólo un elemento componente puede estar en flexo-tensión o flexo-compresión<sup>1</sup>, por ejemplo, columnas de concreto armado con posibilidad de deslizamiento relativo entre las barras de acero y el concreto<sup>15</sup>. En este caso, las barras se encuentran sometidas a fuerza axial solamente. Por otro lado, los modelos FVC que emplean el método de las diferencias finitas se han aplicado al estudio de miembros con dos superficies de deslizamiento<sup>6</sup>,

pero los métodos numéricos utilizados dificultan analizar miembros con más de dos superficies de deslizamiento y restringen el análisis para miembros estructurales con un extremo articulado.

Ninguno de los modelos FVC propuestos en la literatura permiten estudiar el comportamiento de miembros más complejos, como, por ejemplo, una columna sometida a flexo-compresión o flexo-tensión con varias superficies de deslizamiento. Esta situación impide analizar miembros rehabilitados con elementos metálicos, como ángulos en las esquinas de la sección transversal o perfiles canales en sus lados u otros esquemas de estructuras compuestas<sup>10</sup>. Para superar esta limitación se decidió emplear los modelos FVC combinados con diferencias finitas, puesto que sus limitaciones se deben a los procedimientos numéricos, mientras que los que emplean funciones de forma en la interfaz requieren de una reformulación para ampliar su campo de trabajo. Por esta razón, en este trabajo se desarrolla un nuevo modelo FVC de diferencias finitas para el análisis de miembros estructurales compuestos que admite emplear los procedimientos numéricos desarrollados para los modelos FVC<sup>14</sup>, con lo que se pretende lograr:

- estudiar distintas condiciones de frontera y estados de carga en el miembro y evitar las limitaciones de modelos existentes en la literatura<sup>5,6</sup>;
- analizar miembros estructurales con varias superficies de deslizamiento donde todos sus elementos componentes puedan estar sometidos a efectos combinados de carga axial y flexión;
- reducir el costo computacional, ya que los procedimientos existentes para modelos FVC de diferencias finitas<sup>5,6</sup> requieren un proceso iterativo por cada interfaz del miembro, lo cual incrementa notablemente el esfuerzo de cómputo;
- plantear la solución de manera incremental para aplicar el modelo FVC con diferencias finitas al estudio de miembros sometidos a carga cíclica.

### MIEMBRO COMPUESTO VIGA-COLUMNA

Por simplicidad en la explicación del modelo se estudia un miembro lineal con un extremo articulado y otro simplemente apoyado. Las acciones son una carga  $Q$  y una fuerza axial  $N$  en el extremo simplemente apoyado (Figura 1).

La carga  $Q$  es la magnitud de la carga aplicada. Ésta puede ser el valor de una carga distribuida en una porción o en toda la longitud del miembro o la magnitud de una o varias cargas aplicadas en el mismo.

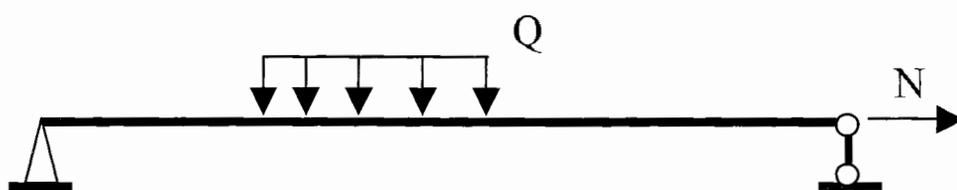


Figura 1. Miembro viga-columna

La respuesta de una viga o columna compuesta de  $n$  elementos (Figura 2) se obtiene integrando numéricamente la respuesta de sus secciones transversales. Para realizar esta integración, la viga se divide en un número  $d$  de secciones. La cantidad de éstas depende de las condiciones particulares de cada problema y del método de integración numérica que se emplee para obtener la respuesta de la viga. La separación entre las secciones es constante a lo largo del miembro e igual a  $\Delta x$ .

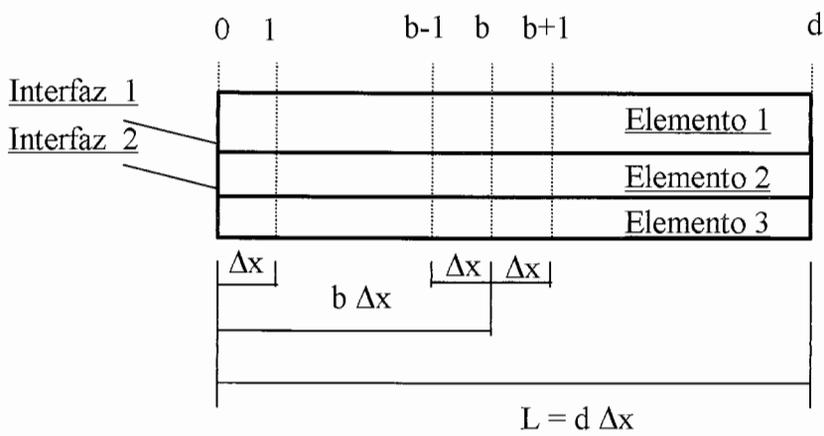


Figura 2. Secciones consideradas de una viga compuesta por tres elementos y dos interfaces

La respuesta de cualquier sección transversal  $b$  de la viga (Figura 2) difiere notablemente del comportamiento de una sección transversal totalmente acoplada. Como se muestra posteriormente, su comportamiento depende de las fuerzas internas en la misma y se relaciona con la respuesta en otras secciones a través de la interfaz entre ellas.

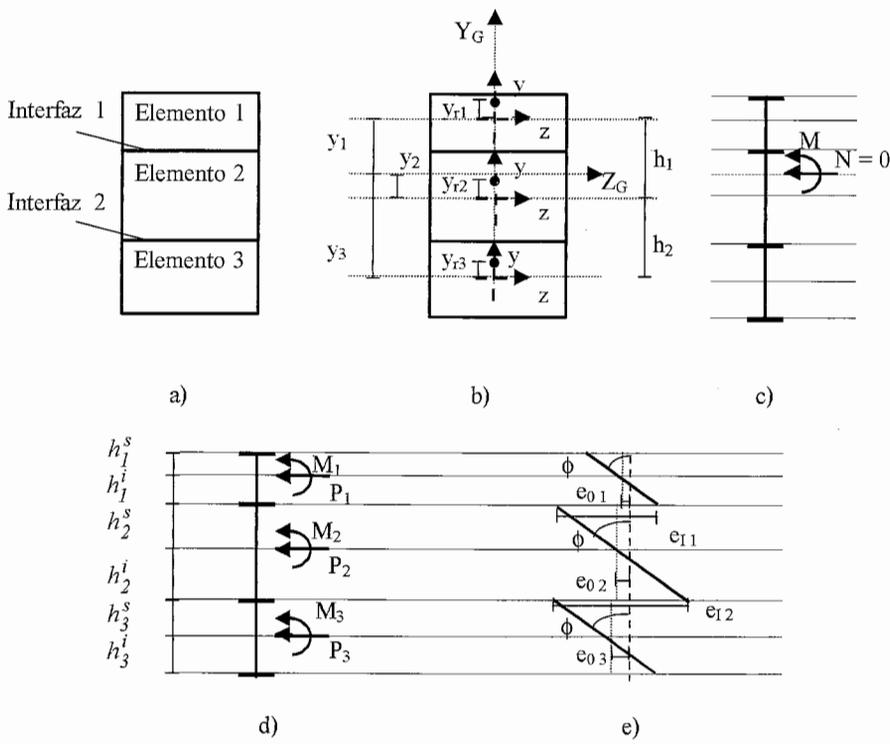


Figura 3. Características de la sección transversal de una viga de tres elementos y dos interfaces: a) división en elementos, b) sistemas de referencias, c) acción en la sección, d) fuerzas internas en los elementos, e) estado deformado

Las principales características del comportamiento de la sección transversal  $b$  se muestran en la Figura 3. Se ejemplifica una sección compuesta por tres elementos y dos interfaces,

aunque el procedimiento que se expone es general y permite estudiar secciones con  $n$  elementos y  $m$  interfaces.

Al someter la sección  $b$  a la acción de un momento flexionante y una carga axial (Figura 3c) se produce un estado deformado caracterizado por el deslizamiento en la interfaz. Producto de estas deformaciones aparecen fuerzas normales y momentos en cada elemento (Figura 3d) cuya suma equilibra al momento actuante en la sección (Figura 3c). El análisis de la sección transversal consiste en determinar el estado deformado a partir de las acciones en la viga. El estado deformado en una sección se define con las deformaciones axiales y la curvatura (Figura 3e). La curvatura en se considera igual en todos los elementos componentes, debido a que se desprecia la separación entre los mismos.

En la sección  $b$  (Figura 2) se producen los incrementos de fuerzas internas

$$\Delta M_b = a_b \Delta Q \quad (1)$$

$$\Delta N_b = \Delta N \quad (2)$$

donde  $a_b$  es el momento producido en la sección  $b$  por una carga  $Q$  unitaria. El símbolo  $\Delta$  indica que se trata de un incremento y se usa en este trabajo en todas las variables en las cuales se esté haciendo referencia a un incremento de la misma.

De la Figura 3d se puede plantear la relación entre las fuerzas y momentos internos de los elementos y de la sección transversal (Figura 3c) mediante las condiciones de equilibrio

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n (\Delta M_i + \Delta P_i y_i) \quad (3)$$

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 = 0 \quad (4)$$

donde  $\Delta M$  es el momento flexionante en la sección transversal,  $\Delta M_i$  y  $\Delta P_i$  son el momento flexionante y la fuerza normal en el  $i$ -ésimo elemento componente, respectivamente;  $y_i$  es la distancia del origen del sistema de referencia local del elemento componente  $i$  al origen del sistema de referencia global (Figura 3b); y  $n$  el número de elementos componentes.

Conocidas las fuerzas y momentos internos en los elementos componentes, se calculan sus deformaciones axiales ( $\Delta e_{0i}$ ) y la curvatura de la sección transversal ( $\Delta \phi$ ). Para realizar esto se deben considerar los efectos no lineales debido al comportamiento inelástico del material, los cuales se incorporan mediante el método iterativo de la referencia 14 basado en el de Newton-Raphson. En cada iteración se supone que los materiales se comportan linealmente y, por lo tanto, se debe aceptar un residuo debido al comportamiento no lineal. Partiendo de estos razonamientos, en la referencia 14 los autores plantean que el estado deformado en una sección transversal totalmente acoplada (equivalente a un elemento componente  $i$ ) se puede calcular a partir del estado de carga en una iteración  $\alpha$

$$\Delta \begin{Bmatrix} e_{0i}^\alpha \\ \phi^\alpha \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_s^{\alpha-1} \Delta \begin{Bmatrix} P_i^\alpha \\ M_i^\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{F}_s^{\alpha-1}$  es la matriz de flexibilidad de la viga. Ésta se calcula a partir de la distribución del módulo de elasticidad tangente asociado al estado deformado de la iteración  $\alpha - 1$

$$\mathbf{F}_s^{\alpha-1} = \begin{bmatrix} f_{nn}^{\alpha-1} & f_{na}^{\alpha-1} \\ f_{na}^{\alpha-1} & f_{aa}^{\alpha-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h_i^s}^{h_i^s} E^{\alpha-1} b \, dy & \int_{-h_i^s}^{h_i^s} E^{\alpha-1} b y \, dy \\ \int_{-h_i^s}^{h_i^s} E^{\alpha-1} b y \, dy & \int_{-h_i^s}^{h_i^s} E^{\alpha-1} b y^2 \, dy \end{bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

$\begin{Bmatrix} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{Bmatrix}$  es el vector de residuos en la deformación axial y en la curvatura en la iteración

$\alpha - 1$  debido a los residuos en las fuerzas<sup>14</sup>  $\begin{Bmatrix} \ddot{P}_i^{\alpha-1} \\ \ddot{M}_i^{\alpha-1} \end{Bmatrix}$  y se expresa como

$$\begin{Bmatrix} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_s^{\alpha-1} \begin{Bmatrix} \ddot{P}_i^{\alpha-1} \\ \ddot{M}_i^{\alpha-1} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Definidos los principales parámetros del estado deformado, se pueden conocer la curvatura y las deformaciones en las interfaces.

Para obtener la curvatura en la sección transversal se despeja el momento flexionante en los elementos componentes de la ecuación (5) y se sustituye en la ecuación de equilibrio de momentos (3).

$$\Delta\phi_b^\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta M_b^\alpha - \frac{(\mathbf{y}_b + \mathbf{y}_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n f_{aa_i}^{\alpha-1}} \Delta \mathbf{P}_b^\alpha + \ddot{\phi}_b^{\alpha-1} \quad (8)$$

donde  $\ddot{\phi}_b^{\alpha-1}$  es el residuo en la curvatura debido al residuo en las fuerzas

$$\ddot{\phi}_b^{\alpha-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \ddot{M}_b^{\alpha-1} - \frac{(\mathbf{y}_b + \mathbf{y}_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n f_{aa_i}^{\alpha-1}} \ddot{\mathbf{P}}_b^{\alpha-1} \quad (9)$$

Las deformaciones centroidales en los elementos se calculan a partir de la curvatura y de las fuerzas en los elementos componentes, combinando la primera y segunda fila de la ecuación (5). Se despeja en la segunda fila el momento actuante en el elemento componente y el resultado se incorpora en la primera fila de la ecuación (5). De esta manera se obtiene la deformación centroidal de un elemento componente. Si esta ecuación se expresa matricialmente para todos los elementos componentes, se llega a

$$\Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha = \mathbf{\Omega}_b^\alpha \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \mathbf{y}_{rb}^\alpha \Delta \phi_b^\alpha \quad (10)$$

donde  $\Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha$  es el vector de deformaciones centroidales en los elementos  $e_{0i}$   $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\mathbf{\Omega}_b^\alpha$  la matriz diagonal de flexibilidad axial. Cada término  $\Omega_{ii}$  de la diagonal representa el inverso de la rigidez axial del elemento componente  $i$

$$\Omega_{ii} = \frac{1}{\int_{-h_i^i}^{h_i^i} E_i^{\alpha-1} b dy} \quad (11)$$

Los términos del vector  $\mathbf{y}_{rb}^\alpha$ ,  $\mathbf{y}_{ri}^{\alpha-1}$  son la distancia del centroide instantáneo (Figura 3b) correspondiente a la distribución del módulo de elasticidad tangente  $E$  en la iteración  $\alpha - 1$

$$\mathbf{y}_{ri}^{\alpha-1} = - \frac{\int_{-h_i^i}^{h_i^i} E_i^{\alpha-1} b y dy}{\int_{-h_i^i}^{h_i^i} E_i^{\alpha-1} b dy} \quad (12)$$

Con las deformaciones centroidales de los elementos componentes y la curvatura de la sección transversal es posible calcular la deformación en cualquier punto de la sección. Esto incluye las deformaciones en las interfaces.

La deformación en una interfaz  $j$  de la sección  $b$  se calcula mediante la relación geométrica<sup>6</sup>

$$\Delta e_{Ij} = \Delta e_{0s} - \Delta e_{0i} - \phi h_j \quad (13)$$

donde  $s$  e  $i$  son los números del elemento superior e inferior a la interfaz  $j$ , respectivamente;  $e_{0s}$  y  $e_{0i}$  son la deformación centroidal en los elementos superior e inferior a la interfaz  $j$ ; y  $h_j$  es la distancia entre los centroides de los elementos  $s$  e  $i$ .

Aplicando esta ecuación para las  $m$  interfaces

$$\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{G} \Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha - \Delta \phi_b^\alpha \mathbf{h} \quad (14)$$

donde  $\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha$  es el vector de deformaciones en la interfaz para  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $\mathbf{h}$  el vector de distancias  $h_j$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ ; y  $\mathbf{G}$  una matriz geométrica con  $n$  elementos (columnas) y  $m$  interfaces (filas). Cada término  $G_{j,i}$  está asociado a una interfaz  $j$  y un elemento  $i$ . Los valores de  $G_{j,i}$  dependen de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ . Si el elemento  $i$  está encima de la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = 1$ . Si el elemento  $i$  está debajo de la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = -1$ . Si el elemento  $i$  no tiene contacto con la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = 0$ .

Las deformaciones en las  $m$  interfaces se obtienen sustituyendo la primera fila de (5) y (8) en (14)

$$\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha \Delta \mathbf{M}_b^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1} \quad (15)$$

donde  $\bar{\mathbf{E}}_b^\alpha$  es el vector de términos independientes y cada término  $\bar{E}_j$  está relacionado con la interfaz  $j$

$$\bar{E}_j = \frac{h_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}}} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

en esta ecuación  $\ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1}$  es el vector de residuo en las deformaciones en las interfaces debido a los residuos en las fuerzas

$$\ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1} = \mathbf{E}_b^\alpha \ddot{\mathbf{P}}_b^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha \ddot{\mathbf{M}}_b^{\alpha-1} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha$  es la matriz de flexibilidad axial con  $n$  elementos (columnas) y  $m$  interfaces (filas), en que  $EA_{j,i}$  es asociado al elemento  $i$  y a la interfaz  $j$ .

La forma de calcular los valores de  $EA_{j,i}$  depende de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ .

Si el elemento  $i$  está por encima de la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}} + \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b \, dy (y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b \, dy \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}}} \quad (18)$$

Si el elemento  $i$  está por debajo de la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}} + \int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b \, dy (y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b \, dy \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}}} \quad (19)$$

Si el elemento  $i$  no tiene ningún contacto con la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{(y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{\alpha\alpha_i}^{\alpha-1}}} \quad (20)$$

Como se puede apreciar en las ecuaciones (8) y (15), el estado deformado en el miembro queda definido por las cargas axiales en los elementos y el momento actuante en la sección transversal. Es decir, que el estado deformado no puede ser determinado solamente a partir de las fuerzas internas en la sección, como ocurre en una sección acoplada, debido a que las fuerzas en los elementos componentes se desconocen.

### Comportamiento en la interfaz

Cuando se integran las deformaciones en la interfaz, se obtienen los deslizamientos a lo largo de la misma. Aplicando el método de las diferencias finitas, se calculan los deslizamientos a partir de la deformación en la interfaz con la expresión

$$\Delta \mathbf{S}_b^\alpha = \Delta \mathbf{S}_{b-1}^\alpha + \frac{\{\Delta \mathbf{E}_{Ib-1}^\alpha + \Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha\}}{2} \Delta x \quad (21)$$

donde los vectores  $\mathbf{S}_{b-1}^\alpha$  y  $\mathbf{S}_b^\alpha$  son los deslizamientos en las interfaces en las secciones  $b-1$  y  $b$ , entre las cuales existe una distancia  $\Delta x$ . Estos deslizamientos producen una fuerza en la interfaz entre la sección  $b$  y la  $b-1$

$$\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha = \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \Delta \mathbf{S}_{b-1}^\alpha \Delta x + \ddot{\mathbf{f}}_{b-1}^{\alpha-1} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{k}_{b-1}^\alpha$  es la matriz de rigidez de la interfaz. Es una matriz diagonal donde cada término  $k_{j,j}$  representa la rigidez de la interfaz  $j$ ;  $\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha$  es el vector de fuerzas en la interfaz entre la sección  $b$  y la  $b-1$ ; y  $\ddot{\mathbf{f}}_{b-1}^{\alpha-1}$  un vector de los residuos en las fuerzas en la interfaz entre ambas secciones, debido al comportamiento no lineal de la interfaz.

La ecuación (22) considera que el flujo de fuerza en la interfaz es constante e igual al valor del flujo producido en la sección  $b-1$ . Esta hipótesis ha brindado resultados adecuados cuando el mecanismo de transferencia de cortante produce un flujo de fuerza. Si la transferencia de cortante es a través de conectores se producen fuerzas concentradas, las cuales se calculan suponiendo que todos los conectores se encuentran en la sección  $b-1$ .

Si la fuerza resultante en la interfaz entre la sección 0 y la sección  $b-1$  es  $\Delta \mathbf{F}_{b-1}^\alpha$ , entonces la fuerza resultante entre la sección 0 y la sección  $b$  es

$$\Delta \mathbf{F}_b^\alpha = \Delta \mathbf{F}_{b-1}^\alpha + \Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha \quad (23)$$

### Dependencia entre la respuesta de las secciones a través de la interfaz

Para calcular la respuesta de una sección  $b$  se requiere conocer las fuerzas en los elementos  $\Delta \mathbf{P}_b^\alpha$  y el momento actuante ( $\Delta M_b^\alpha$ ) en la sección (ecuaciones (8) y (15)). Sin embargo, no es posible establecer ninguna condición en la sección transversal que permita conocer las fuerzas axiales en los elementos, dado que estas fuerzas se relacionan con las fuerzas en los elementos en la sección anterior  $\Delta \mathbf{P}_{b-1}^\alpha$  y con las resultantes de las fuerzas en la interfaz entre ambas secciones  $\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha$  por condiciones de equilibrio de fuerza. Esta condición se puede escribir de la forma siguiente

$$\Delta \mathbf{P}_b^\alpha = \Delta \mathbf{P}_{b-1}^\alpha + \mathbf{E} \Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha \quad (24)$$

donde  $\mathbf{E}$  es una matriz de equilibrio. Cada término  $E_{i,j}$  está asociado al elemento  $i$  y a la interfaz  $j$  y su valor depende de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ . Si el elemento  $i$  está debajo de la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = -1$ . Si el elemento  $i$  está encima de la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = 1$ . Si el elemento  $i$  no tiene contacto con la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = 0$ .

Las resultantes de las fuerzas en la interfaz se calculan con los deslizamientos en la sección  $b-1$  (22). Por esta razón, para determinar las fuerzas en los elementos en la sección

$b$ , se requiere conocer la respuesta en la sección  $b - 1$ . Por lo tanto, si se puede definir la respuesta de la sección en el extremo, se puede calcular la respuesta del miembro. El problema radica en que no es posible definir todos los parámetros de respuestas de esta sección. En la literatura se han propuesto procedimientos iterativos para poder fijar los valores de respuesta de la sección en el extremo<sup>6</sup>, pero estos limitan el campo de aplicación del modelo FVC con diferencias finitas restringiendo las posibles condiciones de frontera y dificultando el análisis de miembros con más de dos interfaces.

Para calcular los parámetros de respuesta de la sección inicial se propone un nuevo procedimiento que elimina las limitaciones impuestas a los modelos propuestos en la literatura. La idea se fundamenta en la relación entre la respuesta de las secciones transversales. Si es posible expresar la respuesta de una sección en función de la anterior, entonces se puede expresar la respuesta de todas las secciones en función de la respuesta de la sección del extremo. Los principales aspectos de la respuesta en la sección del extremo son el deslizamiento en la interfaz  $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y la fuerza en los elementos  $\Delta\mathbf{P}_0^\alpha$ .

Se puede demostrar<sup>3</sup> que la relación entre la respuesta en una sección  $b$  y la sección 0, para una iteración  $\alpha$ , se puede expresar de la forma siguiente

$$\Delta\mathbf{F}_b^\alpha = \mathbf{K}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{C}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{C}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{F}}_b^{\alpha-1} \quad (25)$$

$$\Delta\mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{A}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{D}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{D}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} \quad (26)$$

$$\Delta\mathbf{S}_b^\alpha = \mathbf{B}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{R}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{R}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{S}}_b^{\alpha-1} \quad (27)$$

donde  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  es un vector de fuerzas en el elemento;  $\mathbf{I}$  un vector donde todos los valores son nulos excepto el último término que es 1; y  $\mathbf{\Lambda}$  es una matriz de equilibrio de fuerzas en la sección.

Los términos  $\Lambda_{i,j}$  de la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  son 1 si  $i = j$ ; -1 si  $i = n$ ; y el resto cero.

Las matrices y vectores  $\mathbf{K}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{A}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{B}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{C}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{D}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{R}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{F}}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{E}}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha$  y  $\ddot{\mathbf{S}}_b^\alpha$  se calculan como se indica en el Apéndice.

El objetivo es calcular los vectores  $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$ . Con estos se obtiene las respuestas en todas las secciones y a lo largo de toda la interfaz (ecuaciones 25 a 27). Para obtener estos valores se deben expresar las ecuaciones (25) y (27) para la sección  $d$  correspondiente al otro extremo del miembro.

$$\Delta\mathbf{S}_d^\alpha = \mathbf{B}_d^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{R}_d^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{R}_d^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{S}}_d^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{S}}_d^{\alpha-1} \quad (28)$$

$$\Delta\mathbf{F}_d^\alpha = \mathbf{K}_d^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{C}_d^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{C}_d^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{F}}_d^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{F}}_d^{\alpha-1} \quad (29)$$

Además de estas ecuaciones se requiere considerar las condiciones de frontera del miembro para obtener la solución elástica de cualquier problema. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestran dos casos con distintas condiciones de frontera en la interfaz. En el primer caso, donde se restringen los deslizamientos en las interfaces en los extremos y las fuerzas en los elementos son distintas de cero (Figura 4a), y en el segundo donde, las fuerzas en los elementos son cero y los deslizamientos no están restringidos (Figura 4b).

En el primer ejemplo, los deslizamientos son cero en ambos extremos ( $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y  $\Delta\mathbf{S}_d^\alpha$ ), y, por tanto, se pueden calcular las fuerzas en los elementos  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  en la sección 0 empleando la ecuación (28), mientras que el segundo se resuelve con la ecuación (29), ya que las fuerzas en los elementos en la sección 0 y la resultante de las fuerzas en las interfaces en la sección  $d$   $\Delta\mathbf{F}_d^\alpha$  son cero.

De esta manera se obtiene la solución para una iteración  $\alpha$  de un miembro sometido a una carga  $Q$  y con determinadas condiciones de frontera

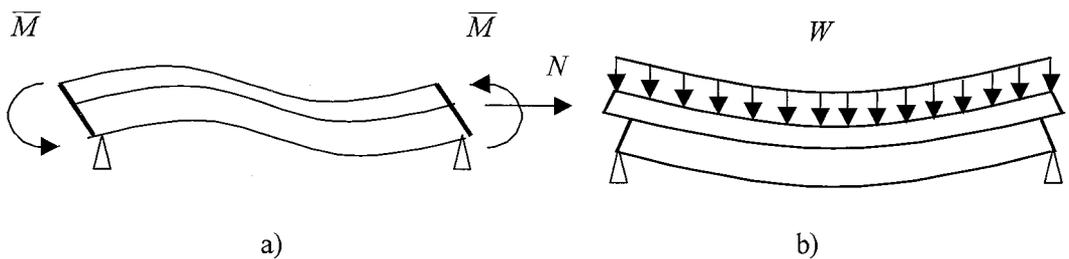


Figura 4. Posibles condiciones de frontera en la interfaz: a) viga-columna con los desplazamientos restringidos, b) viga-columna con las fuerzas restringidas

### Cálculo de los desplazamientos

Los desplazamientos se obtienen sumando el incremento de los mismos en cada iteración  $\alpha$ . Cada incremento se calcula mediante el método de los residuos pesados<sup>14</sup>, para el caso en estudio se replantea la integral pesada de la ecuación de la curvatura.

$$\int_0^L \tilde{M} \left( \Delta\phi_b^\alpha - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta M_b^\alpha + \frac{(y_b + y_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \ddot{\phi}_b^{\alpha-1} \right) dx = 0 \quad (30)$$

La función de peso  $\tilde{M}$  es una ecuación de momentos. Se recomienda tomar la distribución de momentos producida por una carga unitaria en la ubicación y dirección del desplazamiento que se desea calcular.

Integrando por partes (30), como se detalla en la referencia 3, se llega a

$$\mathbf{W}^{\alpha T} \Delta \mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{Z}^{\alpha T} \Lambda \Delta \bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{Z}^{\alpha T} \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \left( \frac{1}{\bar{k}^\alpha} - \frac{1}{\tilde{k}^\alpha} \right) \Delta Q^\alpha = \Delta \theta^\alpha - \ddot{\theta}_b^{\alpha-1} \quad (31)$$

Los vectores y términos  $\mathbf{W}^\alpha$ ,  $\mathbf{Z}^\alpha$ ,  $\bar{k}^\alpha$ ,  $\tilde{k}^\alpha$  y  $\ddot{\theta}_b^{\alpha-1}$  se describen en el Apéndice.

Esta ecuación se combina con las ecuaciones (28) y (29) y se pueden calcular las fuerzas  $\Delta \bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$ , los desplazamientos  $\Delta \bar{\mathbf{S}}_0^\alpha$  y la carga actuante  $\Delta Q$  para un valor de la rotación  $\theta$  y carga axial  $\Delta N$  y determinadas condiciones de frontera en las secciones transversales en los extremos.

### ANÁLISIS INCREMENTAL

La solución presentada permite obtener la respuesta paso a paso debido a un incremento en la excitación mediante iteraciones  $\alpha$ . El proceso iterativo se basa en la modificación propuesta por la referencia 17 al método de la referencia 14, según la cual no es necesario lograr la compatibilidad de desplazamientos en el miembro y definir los residuos en fuerza en sus extremos para luego realizar las iteraciones en el sistema estructural con el objeto de satisfacer las condiciones de equilibrio. La referencia 17 plantea que se puede lograr la compatibilidad de desplazamiento y el equilibrio de fuerza en el miembro a través de las iteraciones en el sistema estructural. Por esta razón, en cada iteración en este trabajo se busca el incremento de momento  $\Delta M$  debido al incremento en la rotación  $\Delta \theta$  y la carga axial  $\Delta N$  para determinados valores de desplazamientos o fuerzas en los extremos de los miembros según las condiciones de frontera del mismo.

Si se realiza el análisis para un incremento  $j$  de la rotación  $\Delta \theta^j$  y la carga axial  $\Delta N^j$ , el incremento en la respuesta del miembro, representada a continuación por la variable genérica  $\Phi$ , sería

$$\Delta\Phi^j = \sum_{\alpha=1}^{ne} (\Delta\Phi^\alpha)^j \quad (32)$$

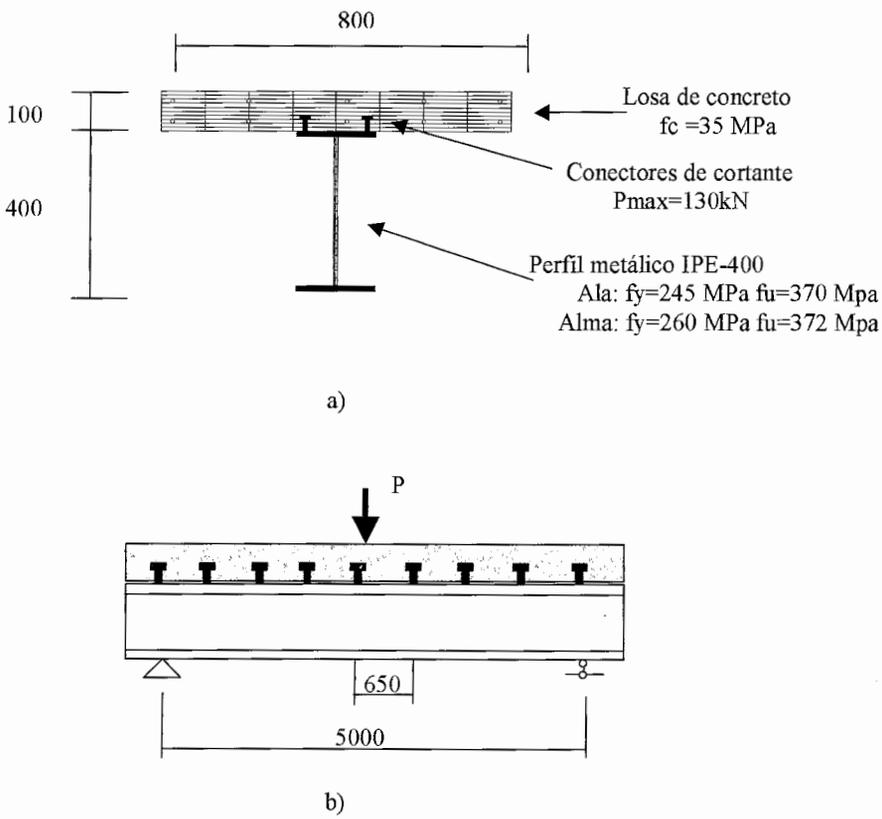
donde  $ne$  es el número de iteraciones, y la variable  $\Phi$  puede ser la deformación, el deslizamiento en la interfaz o cualquiera de las variables de respuesta para las cuales se explicó anteriormente como obtener el incremento en cada iteración  $\alpha$ .

La respuesta total del miembro es la suma de los incrementos  $j$  hasta llegar a los valores de excitación que se deseen.

Esta formulación incremental es general y puede emplearse en el análisis ante carga monótona creciente o cíclica.

## CALIBRACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

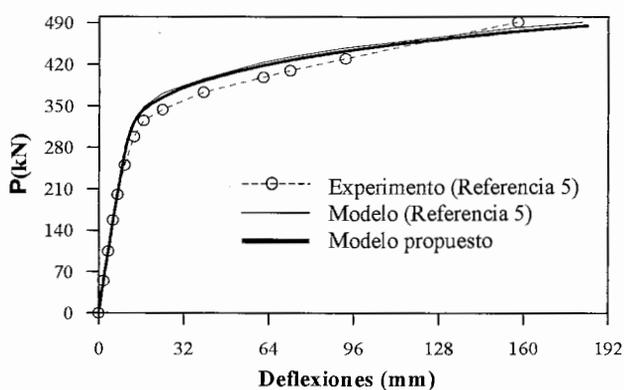
El proceso de validación del modelo consistió en una comparación con los resultados del ensayo experimental descrito en la referencia 5, con el objeto de demostrar que el procedimiento desarrollado puede reproducir el comportamiento de un miembro estructural real. Posteriormente, se realizó un estudio teórico cuyo propósito es mostrar la capacidad del modelo para estudiar otras condiciones de frontera y estados de carga no tratados con modelos FVC de diferencias finitas en la literatura.



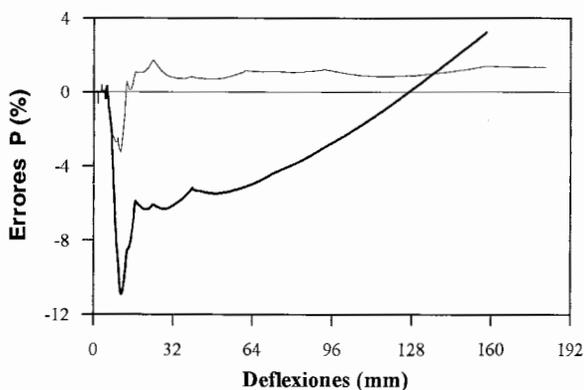
**Figura 5.** Miembro estructural estudiado experimentalmente: a) sección dividida en fibras, b) condiciones de apoyo y estado de carga de la trabe de la referencia 5 (las medidas están en mm)

### Comparación teórico-experimental

Las características del ensayo experimental se resumen en la Figura 5. En la Figura 6a se presenta la relación carga-deflexión al centro del vano calculada con el modelo propuesto en este trabajo y con el de la referencia 5. Los valores de la carga y la deflexión máximas del modelo difieren de los datos experimentales en 1,2 y 17 %, respectivamente. Al comparar estos valores con los del modelo de la referencia 5, los errores son 2 y 1 %. En la Figura 6b aparece la variación de los errores de la carga en función de la deflexión en el centro del vano con respecto a los datos experimentales y teóricos de la referencia 5. Los errores de la carga del modelo propuesto alcanzaron un valor del 11 % y 3,5 % respecto a los datos experimentales y al modelo de la referencia 5, respectivamente. Los resultados obtenidos muestran que el modelo propuesto reproduce adecuadamente el comportamiento del miembro ensayado.



a)



— Errores del modelo propuesto con respecto al experimento de la Referencia 5

— Errores del modelo propuesto con respecto al modelo de la Referencia 5

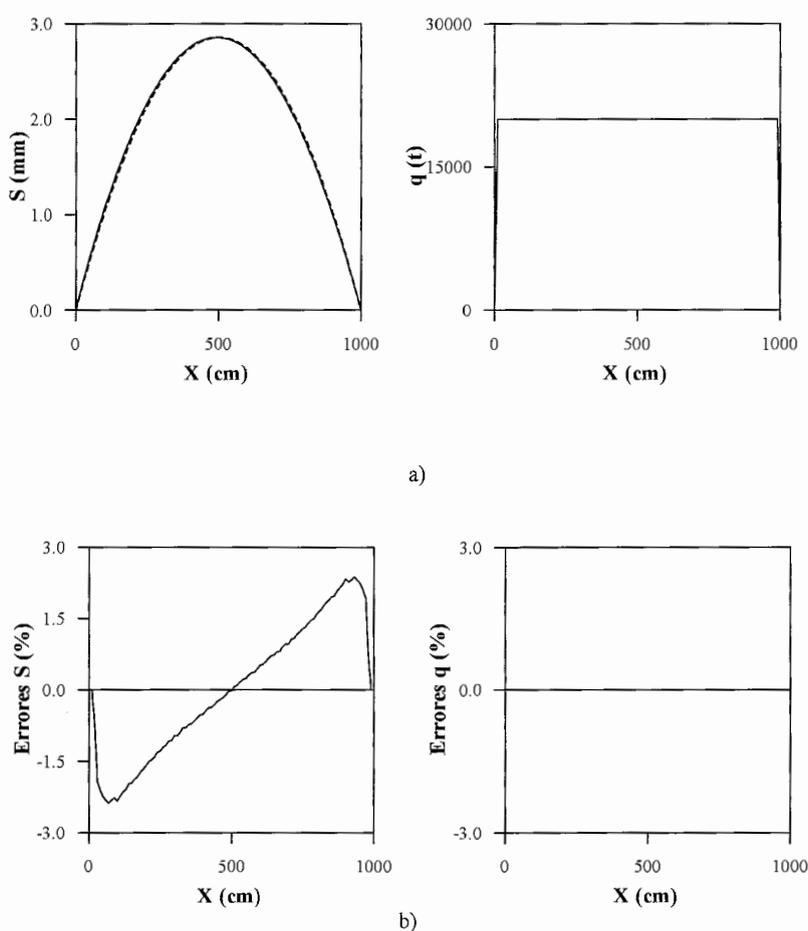
b)

**Figura 6.** Comparación del modelo propuesto con los datos experimentales y el modelo de la referencia 5: a) curvas carga versus deflexiones, b) errores relativos

### Estudio teórico para otras condiciones de apoyo y estados de carga

En esta sección se muestra una aplicación del modelo propuesto a un miembro estructural con las condiciones de frontera y estado de carga de la Figura 4a, el cual incluye dos superficies de deslizamientos. Con este ejemplo se ilustran varias ventajas del modelo desarrollado respecto a los procedimientos expuestos en las referencias 5, 6 y 10, tales como incluir la acción de carga axial, analizar un miembro estructural, donde ninguno de sus extremos presenta momento nulo en la sección y obtener la solución del problema iterando con todas las incógnitas simultáneamente, en vez de emplear un proceso iterativo por cada incógnita del problema<sup>6</sup>, con lo cual se reduce el esfuerzo de cómputo.

Para verificar los resultados del procedimiento se elaboró un modelo en el programa de cómputo RUAUMOKO<sup>4</sup>. El comportamiento de los materiales fue en el intervalo no lineal en la interfaz y elástico-lineal en la sección transversal. En la Figura 7a se muestra el deslizamiento y el flujo de fuerza en la interfaz inferior. Los errores del deslizamiento del modelo, con respecto a los del modelo de elementos finitos (Figuras 7b), son menores del 3 %. En cuanto al flujo de fuerza no hay diferencias en los resultados.



**Figura 7.** Comparación del modelo propuesto con un modelo de elemento finito: a) variación del deslizamiento relativo y el flujo de fuerza en la interfaz a lo largo del miembro, b) errores relativos

Por último, para el ejemplo anterior se realizó un estudio teórico del comportamiento del modelo propuesto cuando se incluye el comportamiento no lineal de los materiales en la sección transversal. El objetivo fue verificar que el procedimiento numérico converja a una solución coherente con las condiciones de compatibilidad de desplazamiento y equilibrio de fuerzas a lo largo del miembro estructural. Con este propósito se seleccionó un punto cualquiera del diagrama momento-rotación ilustrado en la Figura 8. Los residuos en las fuerzas internas en la sección transversal y en la fuerza en la interfaz se presentan en la Figura 9. Se observa que el valor de los residuos tiende a cero, por lo que el procedimiento converge. Con esto se logra el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos entre las secciones transversales y la interfaz a lo largo de todo el miembro.

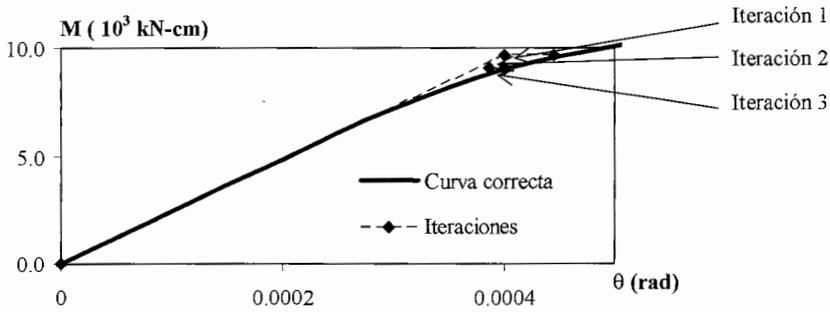


Figura 8. Gráfico momento-rotación

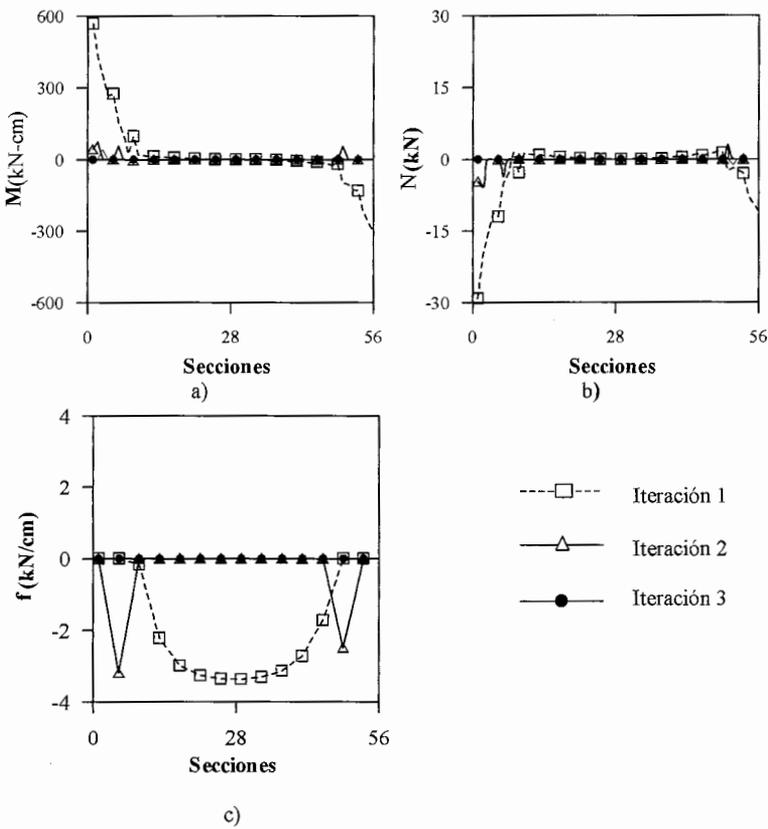


Figura 9. Convergencia de las fuerzas internas en el miembro

## LIMITACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Con las pruebas realizadas en el modelo se detectó inestabilidad numérica cerca de la condición de rigidez infinita en la interfaz. Esta se puede observar en la Figura 10, donde se muestra la deformación calculada  $\mathbf{E}_{Ib}$  a partir de la suma de las respuestas de todas las iteraciones  $\alpha$  (26). En la cercanía de la sección, en el extremo  $d$ , aparece un comportamiento que no se observa en las otras secciones. Para poder verificar si esto se debe a un comportamiento del miembro o son problemas numéricos del método, se calcularon las deformaciones en la interfaz a partir de las fuerzas resultantes en la misma. Primero, por condiciones de equilibrio (24) se obtienen las fuerzas en los elementos componentes y después se calcula la deformación en la interfaz de cada sección  $\mathbf{E}_{Ib}$  (15). Al comparar estas dos curvas (Figura 10) se aprecia que éstas se separan en la zona donde aparece el comportamiento extraño próximo a la sección  $d$ , lo cual demuestra que éste se debe a problemas numéricos del procedimiento.

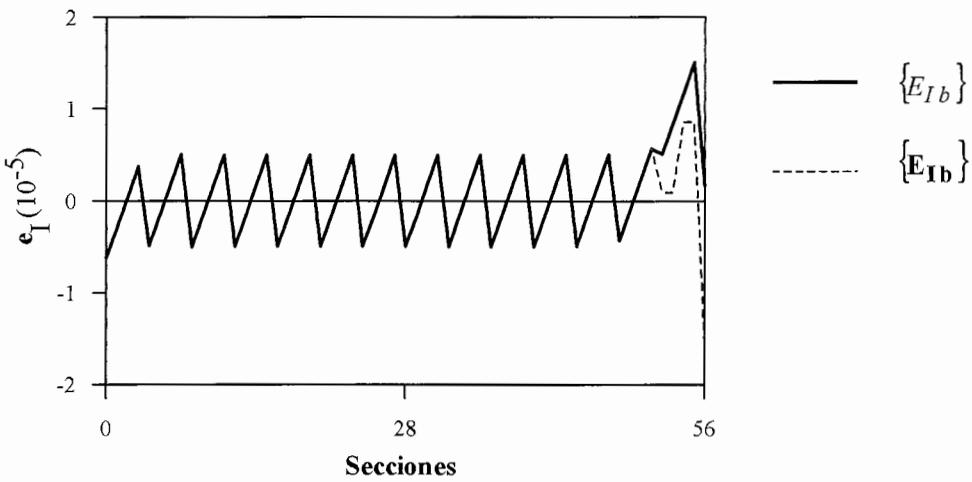


Figura 10. Deformaciones próximas a la condición de rigidez nula

Sin embargo, a pesar de este problema numérico el procedimiento permite estimar prácticamente la condición del deslizamiento nulo, en términos de la respuesta global del miembro, como se mostrará en el ejemplo de la siguiente sección.

## APLICACIÓN DEL MODELO

El modelo se empleó para el estudio de una columna de un edificio rehabilitado<sup>7</sup>. La columna está compuesta por el elemento original de concreto armado y dos elementos de rehabilitación de concreto armado cubiertos con placas de acero y colocadas a ambos lados del elemento original (Figura 11). El objetivo es determinar la influencia de los deslizamientos relativos en las interfaces, la resistencia y la rigidez de la columna compuesta. Por esta razón se acepta la posibilidad de deslizamiento entre las placas de acero y los elementos de rehabilitación y entre éstos y el elemento original. En función de la rigidez de la interfaz, la sección se comporta como totalmente acoplada (rigidez infinita de la interfaz), parcialmente acoplada (rigidez finita) y totalmente desacoplada (rigidez nula).

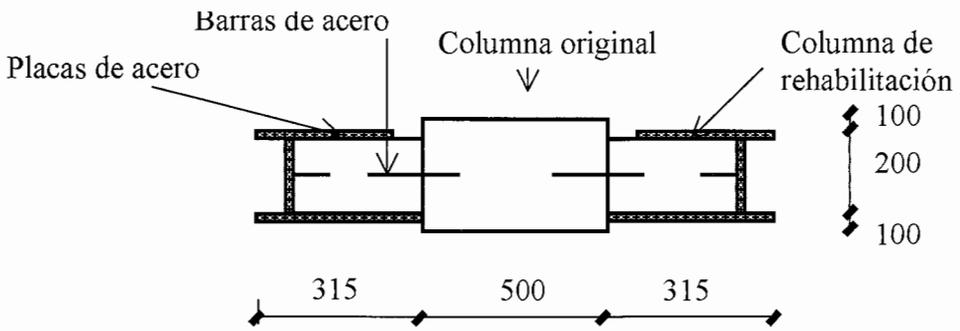


Figura 11. Columna rehabilitada

La columna se supone bajo la acción de las cargas que se muestran en la Figura 4a. Para el concreto del elemento original y los elementos de rehabilitación las resistencias a compresión son 27,2 y 25,0 MPa y los módulos de elasticidad 13 400 MPa y 12 650 MPa, respectivamente. Para el acero la resistencia es 253 MPa (A-36) y el módulo de elasticidad 200 000 MPa y se empleó un modelo elásto-plástico.

El modelo constitutivo supuesto del concreto fue una parábola, la cual se ajustó para que la pendiente secante en el 40 % de la resistencia fuera igual a  $E_c$  y que la pendiente en la resistencia a compresión  $f'_c$  fuera cero. No fue necesario especificar el comportamiento del concreto después de alcanzar la resistencia, debido a que con las condiciones anteriores las deformaciones en la resistencia máxima estuvieron entre 0,003 y 0,004 y como criterio de falla se tomó 0,003 de acuerdo al código de diseño<sup>9</sup>. Estos valores están en correspondencia con estudios experimentales realizados en concretos elaborados en la ciudad de México<sup>8</sup>.

En la interfaz se aceptó que la transferencia de cortante se realiza por el mecanismo de fricción-cortante<sup>16</sup>. Para este mecanismo, el modelo constitutivo tiene una rigidez infinita antes de la resistencia y una rigidez nula después de alcanzar su resistencia. La resistencia del mismo se calculó según las recomendaciones de la referencia 9.

El análisis consistió en determinar las relaciones momento-rotación, donde esta última se calcula en el extremo izquierdo y el momento es el que se indica en la Figura 4a. La Figura 12 muestra las gráficas momento-rotación con y sin fuerza normal  $N$ .

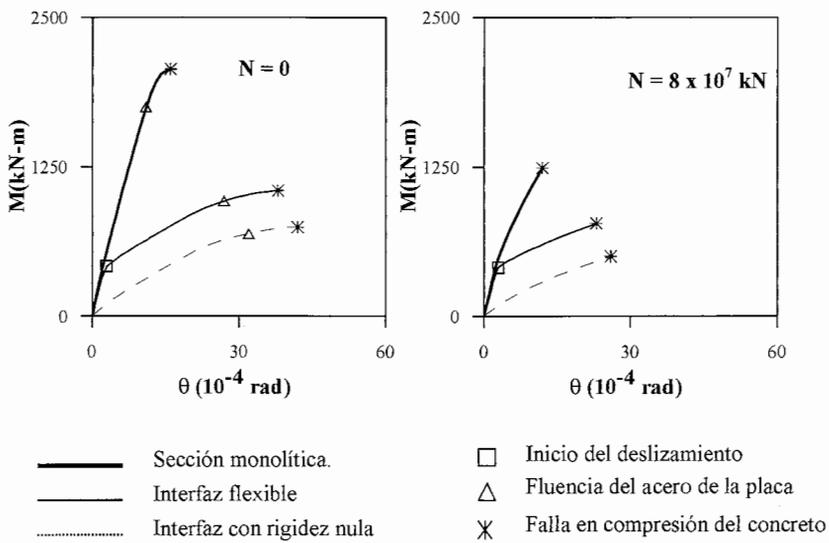


Figura 12. Diagramas momento-rotación con y sin fuerza axial

Para poder comprender mejor estos resultados se muestran dos curvas límite del comportamiento en la interfaz. Una donde la rigidez de la interfaz es infinita, es decir, la sección es monolítica, y la otra donde su rigidez es nula. En el momento en el cual se inicia el deslizamiento en la interfaz, la sección deja de comportarse de manera similar a la sección monolítica y se produce una degradación de resistencia y rigidez importante.

La influencia de la fuerza normal se observa mejor en los diagramas de interacción momento-fuerza axial para distintas etapas de comportamiento. En la Figura 13 se observa como la fuerza normal influye muy poco en el instante que inicia el deslizamiento en las interfaces, pero sí influye en la fluencia del acero de la placa y la falla en compresión del concreto.

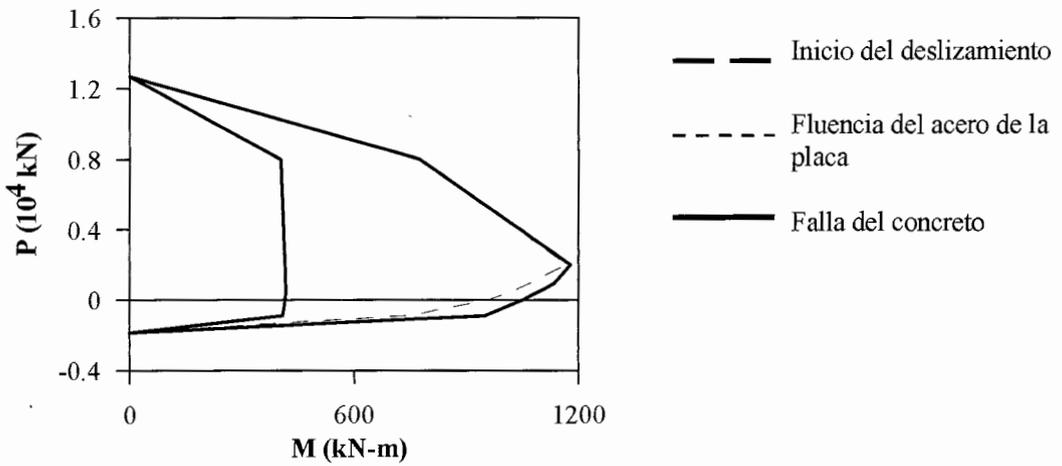


Figura 13. Diagrama de interacción momento-fuerza axial

Este caso no se hubiera podido analizar adecuadamente con los modelos propuestos en la literatura debido a que los elementos componentes se encuentran sometidos a esfuerzos combinados de carga axial y flexión. Por otro lado, para los modelos FVC con diferencias finitas se consideran condiciones de frontera donde los deslizamientos en la interfaz son nulos y las incógnitas son las fuerzas en los extremos de los elementos. En los resultados se observa que el instante en el cual comienzan los deslizamientos en las superficies de contacto es poco sensible a la variación de la carga axial. Además, se produce una degradación importante de la rigidez y la resistencia, respecto al comportamiento del miembro sin deslizamiento en las superficies de contacto entre las partes componentes, lo cual demuestra la necesidad de considerar la flexibilidad de la interfaz para poder estimar correctamente la rigidez y resistencia del miembro.

## CONCLUSIONES

Se propone un nuevo modelo FVC con diferencias finitas para el estudio de miembros compuestos con deslizamientos relativos entre sus partes componentes. Su calibración y validación con resultados experimentales obtenidos de la literatura demuestran que el procedimiento numérico puede reproducir el comportamiento de miembros estructurales reales.

Dicho modelo incorpora procedimientos numéricos más eficientes que permiten incluir nuevos aspectos respecto a los modelos FVC con diferencias finitas propuestos en la literatura los cuales son:

- considerar varias superficies potenciales de deslizamiento relativo entre los elementos sin las complicaciones numéricas de los modelos existentes, los cuales requieren introducir un proceso iterativo por cada superficie de deslizamiento<sup>5,6,10</sup>. El modelo propuesto no necesita realizar iteraciones cuando el comportamiento de los materiales es elástico lineal. Cuando los materiales incursionan en el intervalo no lineal se itera con todas las incógnitas del problema a la vez, reduciendo notablemente el esfuerzo de cómputo requerido.
- incluir la acción de carga axial y momento flexionante en todos los elementos componentes.
- generalizar para las condiciones de frontera y estados de carga que se pueden encontrar en casos prácticos de análisis de miembros estructurales, ya que no se requiere un extremo articulado o localizar una sección en el miembro estructural, donde los deslizamientos son nulos en la interfaz<sup>5,6,10</sup>.

En consecuencia, con este modelo es posible estudiar diversos problemas de pérdida de adherencia entre miembros originales y/o rehabilitados, como pueden ser miembros de concreto armado, reforzados con placas de acero o con un encamisado de concreto armado. Además de estos casos, se pueden analizar otras situaciones donde el alcance de los modelos existentes, no lo permiten, debido a que los efectos de flexión y carga axial son importantes en más de dos elementos componentes del miembro (por ejemplo, una columna reforzada con perfiles canales en dos de sus lados o columnas con ángulos metálicos en sus esquinas).

## AGRADECIMIENTOS

Se le agradece a Santiago Loera Pizarro y Oscar López Bátiz por sus sugerencias en la realización de este trabajo. Los comentarios de los revisores contribuyeron a aclarar el contenido del presente artículo.

## REFERENCIAS

- 1 Aprile, E. Spacone y S. Limkatanyu, "Role of bond in beams strengthened with steel and FRP plates", *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol. **127**, N° 12, pp. 1445–1452, (2001).
- 2 ASCE Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures of the Structural Division y Committee on Concrete and Masonry Structures, "*Finite element analysis of reinforced concrete structures*", A.H. Nilson, (1982).
- 3 J.E. Blanco, "Análisis de elementos compuestos con deslizamiento relativo", Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, (2002).
- 4 A.J. Carr, "RUAUMOKO", Computer program library, University of Canterbury, Nueva Zelanda, (1998).
- 5 G. Fabbrocino, G. Manfredi y E. Cosenza, "Non-linear analysis of composite beams under positive bending", *Computers and Structures*, Vol. **70**, pp. 77–89, (1999).
- 6 G. Fabbrocino, G. Manfredi y E. Cosenza, "Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond", *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol. **126**, N° 11, pp. 1288–1294, (2000).
- 7 L. Fuentes y D. Murià Vila, "Modelos calibrados de un edificio instrumentado", *Revista Digital Universitaria*, [www.revista.unam.mx](http://www.revista.unam.mx), Vol. **2**, N° 3, (2001).

- 8 C. J. Mendoza, "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal", *Series del Instituto de Ingeniería*, N° 495, (1985).
- 9 NTCEC, "Normas técnicas complementarias para el diseño y construcción de estructuras de concreto del distrito federal", *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, marzo, (1996).
- 10 D.J. Oehlers y M.A. Bradford, "*Composite steel and concrete structural members. Fundamental Behavior*", Pergamon, New York, (1995).
- 11 M.R. Salari, E. Spacone, P.B. Shing y D.M. Frangopol, "Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **124**, N° 10, pp. 1148-1158, (1998).
- 12 M.R. Salari y E. Spacone, "Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip", *Engng. Struct.*, Vol. **23**, N° 7, pp. 815-826, (2001a).
- 13 M.R. Salari y E. Spacone, "Analysis of steel-concrete composite frames with bond slip", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **127**, N° 11, pp. 1243-1250, (2001b).
- 14 E. Spacone, F.C. Filippou y F.F. Taucer, "Fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation", *Earthquake Engng. and Struct. Dyn.*, Vol. **25**, N° 7, pp. 711-725, (1996).
- 15 E. Spacone y S. Limkatanyu, "Responses of reinforced concrete members including bond slip", *ACI Struct. J.*, Vol. **97**, N° 6, pp. 831-839, (2000).
- 16 R. Valluvan, M. E. Kreger y J. O. Jirsa, "Evaluation of ACI 318-95 Shear-friction provisions", *ACI Struct. J.*, Vol. **96**, N° 4, pp. 473-481, (1999).
- 17 A. Neuenhofer y F. C. Filippou, "Evaluation of nonlinear frame finite-element models", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **123**, N° 7, pp. 958-966, (1997).
- 18 R. Durán-Hernández y S. Alcocer, "Seismic performance of a RC building with columns rehabilitated with steel angles and straps. Innovations design with emphasis on seismic, wind and environmental loading; quality control and innovations in materials/hot-weather concreting", *ACI International*, SP209, N° 29, pp. 531-552, (2002).
- 19 E. Jones y J. Jirsa, "Seismic strengthening of reinforced concrete frame using structural steel bracing", PMFSEL Report 86-5, Department of civil engineering/Bureau of engineering research, University of Texas, Austin, (1986).

## APÉNDICE

### Cálculo de las constantes de las ecuaciones del procedimiento propuesto

En la sección en el extremo (sección 0) las fuerzas en los elementos son  $\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  y los deslizamientos en la interfaz  $\mathbf{S}_0^\alpha$ . Estos provocan deformaciones y fuerzas resultantes en las interfaces entre la sección 0 y la sección siguiente (sección 1) (ecuaciones (15) y (22)).

$$\Delta \mathbf{E}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha (\Delta \mathbf{P}_0^\alpha + \ddot{\mathbf{P}}_0^{\alpha-1}) - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \Delta M_0^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \ddot{M}_0^{\alpha-1} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{F}_0^\alpha = \mathbf{k}^\alpha \Delta \mathbf{S}_0^\alpha \Delta x + \ddot{\mathbf{f}}_0^\alpha \quad (2)$$

$$\Delta \mathbf{S}_0^\alpha = \Delta \mathbf{S}_0^\alpha \quad (3)$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (25), (26) y (27), respectivamente, se obtiene que  $\mathbf{A}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_0^\alpha = -\bar{\mathbf{E}}_0^\alpha M_0^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{E}}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha \ddot{\mathbf{P}}_0^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \ddot{M}_0^{\alpha-1}$ ,  $\mathbf{K}_0^\alpha = \mathbf{k}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{C}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{F}}_0^\alpha = \ddot{\mathbf{f}}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{B}_0^\alpha = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_0^\alpha = \tilde{\mathbf{S}}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_0^\alpha = \mathbf{0}$ .

Con las constantes en la sección 0 calculadas se va de una sección a otra siguiendo el procedimiento que se describe a continuación. En este procedimiento se muestra cómo calcular las constantes en una sección  $b$  a partir de la sección  $b-1$ .

Primero se calculan las constantes relacionadas con las resultantes de las fuerzas en las interfaces (25)

$$\mathbf{K}_b^\alpha = \mathbf{K}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \mathbf{B}_{b-1} \Delta x \quad (4)$$

$$\mathbf{C}_b^\alpha = \mathbf{C}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \mathbf{R}_{b-1}^\alpha \Delta x \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha = \tilde{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \tilde{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{F}}_b^\alpha = \ddot{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \ddot{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \ddot{\mathbf{f}}_b^{\alpha-1} \quad (7)$$

Luego se obtienen las constantes relacionadas con las deformaciones en las interfaces (26)

$$\mathbf{D}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{C}_{b-1}^\alpha) \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \mathbf{E} \mathbf{k}_b^{\alpha-1} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \mathbf{E} \tilde{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha a_b \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^{\alpha-1} \mathbf{E} \ddot{\mathbf{F}}_{b-1}^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} \ddot{M}_b^{\alpha-1} \quad (11)$$

Por último, se calculan las constantes relacionadas con los deslizamientos en las interfaces (27)

$$\mathbf{R}_b^\alpha = \mathbf{R}_{b-1}^\alpha + \frac{(\mathbf{D}_b^\alpha + \mathbf{D}_{b-1}^\alpha)}{2} \Delta x \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_b^\alpha = \mathbf{B}_{b-1}^\alpha + \frac{(\mathbf{A}_{b-1}^\alpha + \mathbf{A}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha = \tilde{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \frac{(\tilde{\mathbf{E}}_{b-1}^\alpha + \tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (14)$$

$$\ddot{\mathbf{S}}_b^\alpha = \ddot{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \frac{(\ddot{\mathbf{E}}_{b-1}^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (15)$$

Con las constantes relacionadas con las resultantes de las fuerzas en las interfaces en todas las secciones, se pueden calcular las constantes relacionadas con la ecuación de desplazamiento (31)

$$\ddot{\theta}^{\alpha-1} = \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} [(\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{f}}_b^{\alpha-1} + \ddot{M}_b^{\alpha-1}] \Delta x \quad (16)$$

$$\mathbf{Z}^{\alpha T} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T (\mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{C}_b^\alpha) \Delta x \quad (17)$$

$$\mathbf{W}^{\alpha T} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \mathbf{k}_b^\alpha \Delta x \quad (18)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}^\alpha} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha \Delta x \quad (19)$$

$$\frac{1}{\bar{k}^\alpha} = \sum_{b=1}^d \frac{a_b \tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} \Delta x \quad (20)$$

# MODEL FOR COMPOSITE MEMBERS WITH DEFORMABLE LONGITUDINAL INTERFACES.

J. E. BLANCO-BELTRÁN<sup>1</sup>, D. MURIÀ-VILA<sup>2</sup>

## ABSTRACT

In this paper a new model based on finite difference, capable of representing the interfaces as concentrated forces at the points where connectors are located or as a continuous force flux, is proposed. The model can be used to analyse the behaviour of member with  $m$  elements of different materials and  $n$  flexible interfaces in the member's longitudinal direction, by assuming no separation between components, with any support conditions and loads applied on the member's edges. Its advantage and accuracy are analyzed through three practical cases where some relevant aspects for the development of a rational design procedure are also identified.

<sup>1</sup> Phd student, Coordinación de Estructuras y Materiales, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán 04510, México DF, México Email: jblb@pumas.iingen.unam.mx.

<sup>2</sup> Professor, Coordinación de Estructuras y Materiales, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán 04510, México DF, México Email: dmv@pumas.iingen.unam.mx . Telephone: (52 55) 5623 3644. Fax: (52) (55) 5623 3641.

Key words: composite member, finite difference, finite element, capability

## INTRODUCTION

The behavior of composite members depends on the properties of their components and shear transfer mechanisms in the interfaces among them. Usually the forces transfer across the interface is provided by means of stud connectors, steel bar, etc. that requires slip development to achieve its resistance. This slip introduces a stiffness and strength degradation compared with the case where no slip takes place along interface. Therefore, models capable to represent non-linearity of both components and interfaces are required.

Different models based on the finite element method (FE) (Ayoub and Filippou 2000; Dall'Asta and Zona 2002; Dall'Asta and Zona 2004a; Dall'Asta and Zona 2004b; Limkatanyu and Spacone 2002a; Limkatanyu and Spacone 2002b], finite difference (FD) (Dezi et al. 2001; Fabbrocino et al. 1999; Fabbrocino et al. 2000; Oehlers and Bradford 1995] and direct stiffness (DS) (Ranzi et al. 2004) are available in literature to analyze composite member behaviour. All of these models use beam-column elements to represent composite member's components, while the force transfer at interfaces between them are included in spring elements linking all components together.

Depending upon the selected numerical method (FD, FE or DS), there are limitations in the capabilities of the models to predict the member response. In the case of the FD method, approximate solutions are available for beams subjected to vertical loads at mid-span with two

support conditions: simply supported (Fabbrocino et al. 1999), and a propped cantilever (Fabbrocino et al. 2000). The analysis of these beams has been done using a maximum of three components (concrete slab, steel joist and steel bar), linked all together by means of two longitudinal interfaces (concrete slab – steel beam and steel bar – concrete slab). Ranzi et al. (2006) developed a DS model that was applied to a steel-concrete composite beam and has no restriction with respect to support conditions and load state applied to member. However, application of this model to composite member with more components and interfaces needs to be addressed. In contrast with the above models, the FE models have been applied to wider variety of composite member: Ayoub and Filippou (2000), Dall'Asta and Zona (2002), Daniels and Crisinel (1993) among others, have studied concrete-steel composite beam, Spacone and Limkatanyu (2000) analysed a reinforced concrete beam strengthened with steel plates, and Limkatanyu and Spacone (2002b) used a FE model based on displacement to obtain the response of a reinforced concrete column considering slip between the steel bar and the concrete around it.

Some others works have been devoted to making some refinements to the above models. Dezi et al. (2001) and Sun and Bursi (2005) incorporated shear lag effect on the response of steel-concrete composite beam. In this case, wrapped functions are implemented in the formulation of beam-column element to take into account the variation of the deformation through the slab. Dall'Asta and Zona (2004a), Limkatanyu and Spacone (2002b), Ranzi et al. (2004) among others, have studied different alternatives to reduce the computational effort, by optimizing the number of either longitudinal elements along the member

or the integration points per element. The efficacy of these techniques has been evaluated in comparative studies carried out by Limkatanyu and Spacone (2002b) and Ranzi et al. (2006).

Nevertheless, despite all of these efforts, there are still several issues that need to be addressed in order to use this kind of models to study wider variety of composite members. It is convenient to develop models capable of analysing composite member behaviour with  $m$  components of different materials, joined by  $n$  flexible interfaces in the longitudinal direction; because for the combination of concrete elements with steel plates etc, there are configurations among practical cases of structurally strengthened members more complex than those studied with all these models (FE, FD and DS). Also, design codes allow different distributions of a group of connectors, by varying their spacing and quantity per transverse section. As it will be shown herein, there are members whose response is different for each array of shear connectors. This prompts the need of representing the bond forces as concentrated forces at the points where connectors are located, in order to calculate accurately the response of the member. However, not all the models (FE, FD and DS) are capable to represent the force transfer through shear mechanical connectors (stud, channel, bolt etc) as concentrated forces where they are located. Most of the models assume continuous functions for the shear force along the interface (Dall'Asta and Zona 2002; Dall'Asta and Zona 2004c; Daniels and Crisinel 1993; Dezi et al. 2001; Limkatanyu and Spacone 2002a; Limkatanyu and Spacone 2002b; Reza and Spacone 2001), while just few models, based on finite difference, recognize the presence of concentrated forces at the points where the connectors are located (Fabbrocino et al. 1999; Fabbrocino et al. 2000; Oehlers and Bradford 1995).

In order to satisfy the above requirements, in this paper a new model based on finite difference (FD), capable of representing the interfaces as concentrated forces at the points where connectors are located or as a continuous force flux, is proposed. The model can be used to analyse member's behaviour with  $m$  elements of different materials and  $n$  flexible interfaces in the member's longitudinal direction, by assuming no separation between components, with any support conditions and loads applied on the member's edges. The model was implemented in a computer analysis program based on the stiffness method. The FE model developed by Daniels and Crisinel (1993) was used, as a reference, to verify the results obtained with models based on a continuous force flux at interfaces. This model is based on displacement shape functions with an axial degree of freedom at mid-span of each component. It was modified in order to study members with the required quantity of

both components and interfaces to represent the slip effects in different parts of the member.

Also, an evaluation of the performance of the new FD and the modified FE models was carried out by comparing with experimental measures and results obtained with a three-dimensional FE model. Several cases of a concrete-steel composite beam with different support conditions and load states were studied. Analysis of the results shows examples where it is important to take into account the real location of shear connectors instead of assuming a continuous force flux at interfaces. Moreover, variations of axial forces obtained with these models are compared with those introduced by some design codes (AISC 2005; NTC\_Metálicas 2004). The main purpose is to illustrate the efficacy of these models to analyze and design these members in a more rational manner.

### MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

The forces applied to a reinforced concrete column when it interacts with four steel angles located at its corners, are shown in Fig. 1. The free body diagram of this column (Fig. 2) illustrates the combined actions of bending moments ( $M$ ), axial force ( $N$ ), shear force ( $V$ ), and bond forces ( $f$ ) located at the longitudinal axis of the contact surfaces or interfaces with the angles.

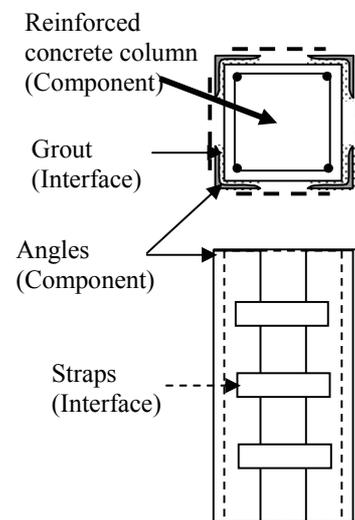


Fig. 1 Reinforced concrete column with steel angles and straps

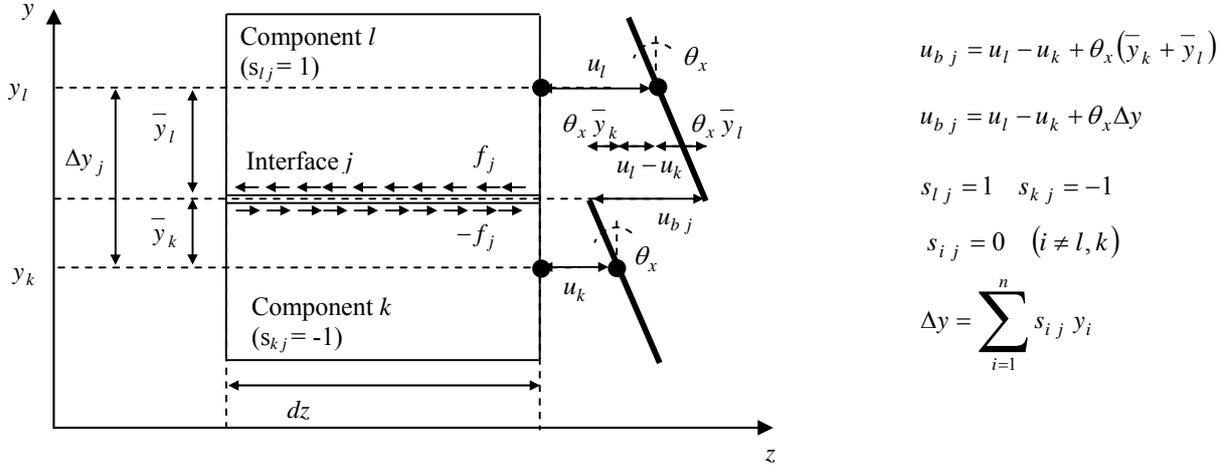


Fig. 3 Force and slip at the interface in one direction

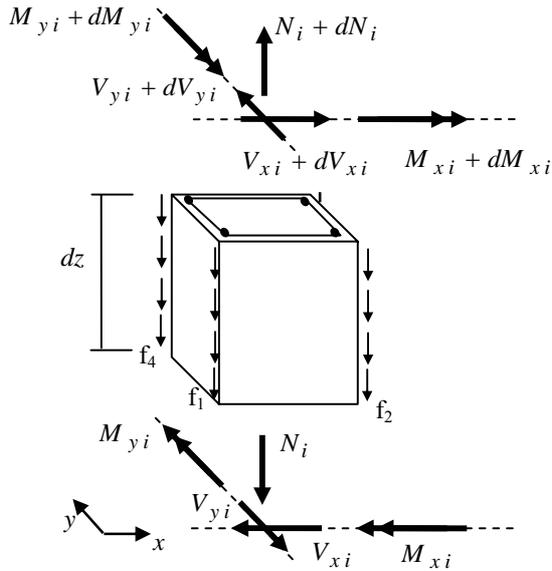


Fig. 2 Free body diagram of a reinforced concrete column

The column and each angle are called components of the composite member in the model. Each component is subjected to a different number of bond forces. At the column, there is a bond force  $f$  at each column-angle interface; while in each angle there are bond forces in the interface with the column and additional bond forces at each angle-strap. In this work, the composite member comprises  $m$  components connected together by  $n$  longitudinal interfaces. Fig. 2 shows  $n$  bond forces, which are associated to  $n$  interfaces or contact surfaces with the rest of the components. For these conditions,

equilibrium equations for each component  $i$ , may be written as

$$\frac{dN_i}{dz} = \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j \quad (1)$$

$$\frac{dV_{xi}}{dz} = 0, \quad \frac{dV_{yi}}{dz} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dM_{xi}}{dz} + \frac{dN_i}{dz} x_i - V_{yi} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dM_{yi}}{dz} + \frac{dN_i}{dz} y_i - V_{xi} = 0$$

where  $x_i$  and  $y_i$  are distances of centroid of component  $i$  from the longitudinal axis of the member;  $s_{ij}$  represents the sign of the bond force. It is assumed that each interface connects two components, which induces a positive bond force in one of them ( $s_{ij} = 1$ ), and a negative force in the other one ( $s_{ij} = -1$ ), as shown in Fig. 3. If there is no connection between interface  $j$  and component  $i$ , then  $s_{ij}$  is zero. When  $s_{ij}$  is defined for the two components joined by the interface  $j$ , it is not relevant in which of the two components is assigned a value of 1 or -1, as long as values of  $s_{ij}$  have opposite signs.

Because the interfaces are assumed parallel to the longitudinal axis of the composite member, bond forces cause only variation of the axial force  $N$  in the

component (Eq. 1), without disturbing the transverse balance of forces (Eq. 2). Besides, because no separation takes place among components, both rotations ( $\theta_x, \theta_y$ ) and displacements perpendicular to the longitudinal axis ( $v, w$ ) are identical (Figs. 3 and 4).

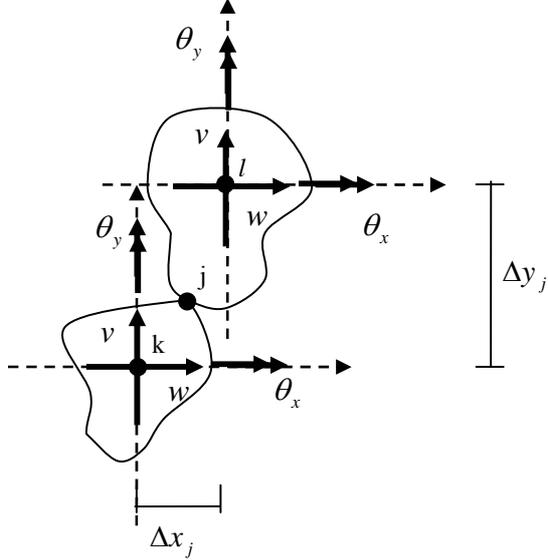


Fig. 4 Degrees of freedom for the components

Based on the above hypothesis, the displacement compatibility conditions for a component  $i$  and an interface  $j$ , are expressed as

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{du_i}{dz}, \quad \phi_x = \frac{d\theta_x}{dz}, \quad \phi_y = \frac{d\theta_y}{dz}, \quad \gamma_y = \frac{dv}{dz} - \theta_x, \\ \gamma_x &= \frac{dw}{dz} - \theta_y \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_{b_j} = s_{l_j} u_l + s_{k_j} u_k + \theta_x \Delta x_j + \theta_y \Delta y_j \quad (5)$$

where  $e_i$  is the axial deformation of component  $i$ ;  $\phi_x$  and  $\phi_y$  are curvatures with respect to both axes  $x$  and  $y$ , respectively;  $\theta_x$  and  $\theta_y$  are the rotations;  $\gamma_x$  and  $\gamma_y$  are the shear deformations;  $u_l$  and  $u_k$  are the axial displacements of components  $l$  and  $k$ , respectively;  $\Delta x_j$  and  $\Delta y_j$  are the distance of the two component centroids joined by interface  $j$  (Figs. 3 and 4); and  $u_{b_j}$  is the slip at interface  $j$ .

Eqs. 4 and 5 are written for each component  $i$  and interface  $j$  in a member, and assembled to build the following displacement compatibility conditions

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T \{S\} \quad (6)$$

$$\{u_b\} = [E_b]^T \{S\} \quad (7)$$

where  $\{S\}^T = \{\theta_x \ v \ \theta_y \ w \ u_1 \ \dots \ u_m\}$  and  $\{\varepsilon\}^T = \{\phi_x \ \gamma_y \ \phi_y \ \gamma_x \ e_1 \ \dots \ e_m\}$  are the vector of displacements and deformations at the cross section, respectively;  $\{u_b\}^T = \{u_{b_1} \ \dots \ u_{b_n}\}$  is a vector containing the interface slips and,  $[\partial]$  is a differential operator;  $[E_b]^T$  is a matrix containing compatibility conditions among cross sections and interfaces;  $m$  is the number of components and  $n$  is the number of interfaces. The former procedure takes into account the link among components, when  $\Delta x_j$  and  $\Delta y_j$  are calculated and values of  $s_{i_j}$  are defined.

In order to put together the equilibrium equations 1, 2 and 3, associated to all components in the member, first, Eq. 1 is substituted into Eq. 3 and summed for all components

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{dM_{x_i}}{dz} + \left( \sum_{j=1}^n s_{i_j} f_j \right) x_i - V_{y_i} \right] &= 0, \\ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{dM_{y_i}}{dz} + \left( \sum_{j=1}^n s_{i_j} f_j \right) y_i - V_{x_i} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

These equations and Eqs. 1 and 2 for all components are written in concise form

$$[\partial]\{P\} + [E_b] \{f\} = 0 \quad (9)$$

where  $\{P\}^T = \{M_x \ V_y \ M_y \ V_x \ N_1 \ \dots \ N_m\}$  is a vector of forces or resultant stresses at the cross section of the member; and  $\{f\}^T = \{f_1 \ \dots \ f_n\}$  is a vector of forces at interfaces. Summation of both bending moment and shear force of each component are substituted by resultant forces at the cross section of the member, because rotations and transverse displacements are identical among all components.

The terms associated to shear effects in compatibilities equations (Eqs. 6 and 7) and equilibrium conditions (Eq. 9) are going to be eliminated when the nonlinear differential equations are solved by applying the different methods (DF and FE).

The relation between forces  $\{\Delta P\}$  and deformations  $\{\Delta \varepsilon\}$  is obtained by means of a fiber model (Kaba and Mahin 1984) for each cross section of the different components. This model has been employed successfully for members where shear effects were neglected (Limkatanyu and Spacone 2002b; Reza and Spacone 2001; Spacone and Limkatanyu 2000); and it is based on both the assignment of nonlinear uniaxial material law to each fiber and the hypothesis that sections remain plane after the development of deformations. With these assumptions, stiffness matrix  $[K_s]$  and residual forces vector  $\{\bar{P}\}$  can be derived; so as to obtain a linear relation between  $\{\Delta P\}$  and  $\{\Delta \varepsilon\}$

$$\{\Delta P\} = [k_s] \{\Delta \varepsilon\} + \{\bar{P}\} \quad (10)$$

where  $[k_s]$  is the tangent stiffness matrix of the transverse section of the member, and  $\{\bar{P}\}$  represents the residual forces acting in the same section.

A linear approximation is also used in the interface, with residual forces due to the experimental nonlinear behavior. In this case

$$\{\Delta f\} = [k_b] \{\Delta u_b\} + \{\bar{f}\} \quad (11)$$

where  $[k_b]$  is the stiffness matrix of the interface,  $\{\Delta u_b\}$  are the interface slips, and  $\{\bar{f}\}$  are the residual forces acting in the interfaces. Using this incremental formulation, bond laws can be deduced from experimental observation and related to different mechanisms of force transfer in the interface (Aprile et al. 2001; Oehlers and Bradford 1995; Reza and Spacone 2001), can be tracked.

The resulting set of nonlinear differential equations (Eqs. 6 to 11) is solved by transforming the system to one of nonlinear algebraic equations and applying an iterative process. This can be accomplished using several numerical procedures, considering that any limitation in the capacity of the models, due to the mathematical method, must be avoided. In the following this issue is presented for the FD and FE methods.

### Solution with FD model

In this procedure, the derivatives in Eqs. 9 and 6 of moment, axial forces, transverse displacements, rotations and axial displacements are approximated by finite forward differences. This allows transforming the above equations to define both equilibrium and compatibility

conditions between transverse sections  $i$  and  $i-1$ , respectively. This is

$$\{\Delta P\}_i = [E_s] \{\Delta P\}_{i-1} + [E_b] \{\Delta f\}_{i-1} \Delta z \quad (12)$$

$$\{\Delta S\}_i = [C_s] \{\Delta S\}_{i-1} + \{\Delta \varepsilon\}_{i-1} \Delta z \quad (13)$$

where  $[E_s]$  is the equilibrium matrix between two consecutive cross sections. Diagonal terms of this matrix are equal to one and the rest is zero, except for terms  $E_{1,2}$  and  $E_{3,4}$  which are equal to  $\Delta z$ .  $[C_s]$  is a matrix of compatibility between two consecutive cross sections. Its form is similar to  $[E_s]$  except that the terms different from one and zero are  $C_{2,1}$  and  $C_{4,3}$ , which are equal to  $-\Delta z$ .  $\{\Delta f\}_{i-1}$  is the increment of the resultant force at the interfaces between sections  $i$  and  $i-1$ .

In Eq. 12, the product  $\{\Delta f\}_{i-1} \Delta z$  represents a concentrated force at  $i-1$ , which it is produced by  $k_b$  and  $u_b$  (Eq. 11). If the interface stiffness is concentrated at points where the connectors are located, then, the force transfer is represented as concentrated forces at these points. This issue is what allows the model to take into account the real position of connectors, even though; the connectors should be at grid points.

Once the section displacements ( $\{S\}$ ) are calculated from Eq. 13, slips at the interface can be obtained by applying Eq. 7, and consequently section deformations are estimated using

$$\{\Delta \varepsilon\}_i = [F_s]_i \{\Delta P\}_i + \{\bar{\varepsilon}\}_i \quad (14)$$

where  $[F_s]_i$  is the flexibility matrix of the transverse section, and  $\{\bar{\varepsilon}\}_i$  is the vector of residual deformations.

This means that vectors  $\{P\}$  and  $\{S\}$  provide enough information to obtain the whole response of both, section and interface, at a point  $i$ . Therefore, the response of section  $i$ , expressed as a function of  $\{P\}$  and  $\{S\}$ , can be calculated from the response of section  $i-1$  by substituting Eqs. 7, 11 and 14 into Eqs. 12 and 13. This is

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_i = [D]_{i-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_{i-1} + \{\bar{R}\}_{i-1} \quad (15)$$

where  $[D]_{i-1}$  is a matrix that relates the response in section  $i$  to the response in section  $i-1$ , and  $\{\bar{R}\}_{i-1}$  is the residual vector in section  $i-1$

$$[D]_{i-1} = \begin{bmatrix} [E_s] & [E_b][k_b]_{i-1}[E_b]^T \Delta z \\ [F_s]_{i-1} \Delta z & [C_s] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\{\bar{R}\}_{i-1} = \begin{Bmatrix} [E_b]\{\bar{F}\}_{i-1} \Delta z \\ \{\bar{\varepsilon}\}_{i-1} \Delta z \end{Bmatrix}$$

As mentioned, the section model used in this work and proposed by Kaba and Mahin (1984), does not take into account shear stiffness. To remove this effect, shear flexibilities are equal to zero in matrix  $[F_s]_{i-1}$  that was already included in Eqs. 14 and 16. This induces a shear deformation equal to zero (Eq. 14). In this way, calculation of the member response is reduced to obtain the response of one or more transverse sections; because the response of the sections remainder in the member are calculated by applying Eq. 15.

Procedures employed in the related literature (Fabbrocino et al. 1999; Oehlers and Bradford 1995) constraint the use of different type of boundary and load conditions that can be taken into account; besides, the stiffness matrix and the strength vector associated to a displacement state can not be deduced. On the other hand, these procedure are numerically laborious and complicated when they are used to study members with more than three components, or to calculate the response of members subjected to cyclic loads. In order to eliminate these restrictions, a new model based on FD is proposed herein. First, the response of section  $n-1$  as a function of the response of section  $n-2$  (Eq. 15) is substituted into Eq. 15 written for the responses of both sections  $n$  and  $n-1$ , so that the response of section  $n$  is expressed as a function of section  $n-2$ . By following this process up to section  $1$ , we obtain

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_n = [D]_{n-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_{n-1} + \{\bar{R}\}_{n-1} \quad (17)$$

where  $[D]_{n-1}$  is the matrix that relates the response in section  $1$  to the response in section  $n$ , and  $\{\bar{R}\}_{n-1}$  is an accumulated residual vector between both sections  $1$  and  $n$ , and can be written as

$$[D]_{n-1} = [I] [D]_{n-1} [D]_{n-2} \cdots [D]_{2-1},$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{\bar{R}\}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} [D]_{n-i+1} \{\bar{R}\}_i, \quad (19)$$

$$[D]_{n-i+1} = [I] [D]_{n-i} [D]_{n-i-1} \cdots [D]_{i+2-i+1}$$

By using Eq. 17, the response of the cross section at mid-span ( $L/2$ ) is written as a function of the response of the sections at the member's edges, keeping in mind that the response at mid-span must be unique, independently of the way it is calculated. Therefore, the following condition has to be fulfilled

$$[D]_{L/2} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_L + \{\bar{R}\}_{L/2} = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_{L/2} = [D]_{L/2-1} \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta S \end{Bmatrix}_1 + \{\bar{R}\}_{L/2-1} \quad (20)$$

where the subscripts  $1$ ,  $L/2$  and  $L$  refer to sections located at the beginning, mid-span and the end of the structural member, respectively. Because values of forces and displacements at the member's edges are included in this equation, it can be used to obtain the stiffness matrix and the residual force vector. In order to achieve this, terms must be regrouped by separating forces and displacements. For this reason, matrix  $[D]$  is subdivided into

$$[D]_{i-1} = \begin{bmatrix} D^{PP} & D^{PS} \\ D^{SP} & D^{SS} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (21)$$

where  $D^{PP}$  and  $D^{PS}$  are the forces produced in section  $i$  by unitary forces and displacements in section  $i-1$ , respectively; while  $D^{SP}$  and  $D^{SS}$  are the displacements produced in section  $i$  by unitary forces and displacements in section  $i-1$ , respectively. Next, Eq. 21 is substituted into Eq. 20 and it is regrouped as

$$[D^P] \begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_L \end{Bmatrix} = [D^S] \begin{Bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} + \{\bar{R}\}_{L/2-1} - \{\bar{R}\}_{L/2} \quad (22)$$

where  $[D^P]$  and  $[D^S]$  are matrices with regrouped terms, related to the forces and displacements, respectively

$$[D^P] = \begin{bmatrix} -D_{L/2-1}^{PP} & D_{L/2-1}^{PP} \\ -D_{L/2-1}^{SP} & D_{L/2-1}^{SP} \end{bmatrix}$$

$$[D^S] = \begin{bmatrix} D_{L/2-1}^{PS} & -D_{L/2-1}^{PS} \\ D_{L/2-1}^{SS} & -D_{L/2-1}^{SS} \end{bmatrix} \quad (23)$$

In order to obtain from Eq. 22 element nodal forces  $\{\Delta P_1 \ \Delta P_L\}^T$ , rigid body modes must be eliminated by assuming the member as simply supported. In this statically determinate member, some of the nodal forces of the element are reaction forces, which can be calculated from the equilibrium with the rest of the element nodal forces

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_L \end{Bmatrix} = [E_E] \{\Delta Q\} \quad (24)$$

where  $\{\Delta Q\}$  is the vector  $\{\Delta P_1 \ \Delta P_L\}^T$  without the reaction forces of the member, and  $[E_E]$  is a matrix containing the equilibrium conditions of the reaction forces.

At supports of the member, some displacements, which are included in  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$ , are equal to zero. Algebraically, this can be expressed as

$$\begin{Bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} = [R] \{\Delta d\} \quad (25)$$

where  $\{\Delta d\}$  is the vector  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$  without displacements related to supports.  $[R]$  is a matrix where each row  $i$ , which is associated with term  $\Delta S_i$  in vector  $\{\Delta S_1 \ \Delta S_L\}^T$ , would have all its terms equal to zero, if  $\Delta S_i$  is related to a degree of freedom restrained by the supports. Otherwise, only the term  $R_{ij}$  is equal to one, indicating that the term  $\Delta S_i$  is equal to the term  $\Delta d_j$ .

By substituting Eqs. 24 and 25 into Eq. 22 we obtain

$$[D^P][E_E] \{\Delta Q\} = [D^S][R] \{\Delta d\} + \{\bar{R}\}_{L/2 \ 1} - \{\bar{R}\}_L \quad (26)$$

The product  $[D^P][E_E]$  provides a non singular and square matrix, which can be inverted and used to multiply both sides of Eq. 26 by its inverse to obtain

$$\{\Delta Q\} = [K] \{\Delta d\} + \{\bar{Q}\} \quad (27)$$

where  $[K]$  is the stiffness matrix of the member and,  $\{\bar{Q}\}$  is the vector of residual forces

$$[K] = \left[ [D^P] [E_E] \right]^{-1} [D^S] [R] \quad (28)$$

$$\{\bar{Q}\} = \left[ [D^P] [E_E] \right]^{-1} \left\{ \{\bar{R}\}_{L/2 \ 1} - \{\bar{R}\}_L \right\} \quad (29)$$

The stiffness matrix  $[K]$  and the residual forces  $\{\bar{Q}\}$  are required to incorporate the model into a nonlinear analysis program based on the stiffness method and with an iterative process, such as the Newton-Raphson method, for solving the nonlinear problem at each step. This incremental analysis allows the model to reproduce the response of a member subjected to cyclic load. On the

other hand, the procedure to update internal forces and displacements at each iteration, is discussed in appendix A.

### Solution with FE model

The displacement based FE model, proposed by Daniels and Crisinel (1993), is adapted to study composite members with the required number of both components and interfaces, to represent slip in different places of the member. This model is used as reference of the response obtained in composite members when it is assumed that the shear forces in its interfaces, or contact surfaces among its components are continuous.

In their FE models (Daniels and Crisinel 1993; Limkatanyu and Spacone 2002a), the shear effects are eliminated in a different way with respect to the FD model. First, the shear force is obtained from the second and fourth row of Eq. 9, and the shear deformations are enforced to be zero, this is

$$V_y = \frac{dM_x}{dz} + \sum_{j=1}^n f_j \Delta y_j, \quad V_x = \frac{dM_y}{dz} + \sum_{j=1}^n f_j \Delta x_j \quad (30)$$

$$\gamma_y = \frac{dv}{dz} - \theta_x = 0, \quad \gamma_x = \frac{dw}{dz} - \theta_y = 0 \quad (31)$$

Then, Eq. 30 is substituted into Eq. 9, and Eq. 31 into Eqs. 6 and 7 to produce

$$[\hat{\partial}] \{\hat{P}\} + [\partial_b] \{f\} = 0 \quad (32)$$

$$\{\hat{\varepsilon}\} = [\hat{\partial}]^T \{\hat{S}\}, \quad \{u\} = [\partial_b]^T \{\hat{S}\} \quad (33)$$

where, for each section,  $\{\hat{\varepsilon}\}$  is the vector of deformations without shear deformations,  $\{\hat{S}\}$  is the vector of displacement  $\{S\}$  without rotations,  $\{\hat{P}\}$  is the vector of forces  $\{P\}$  not including the shear forces and;  $[\hat{\partial}]$  and  $[\partial_b]$  are differential operators.

To solve the system of equations represented by Eqs. 32 and 33, a displacement-based FE model was selected. This model included a degree of freedom at edges and an additional degree of freedom for the axial displacement at mid-span of each component (Daniels and Crisinel 1993). Numerical application of this model was carried out by Dall'Asta and Zona (2002) to study a steel-concrete composite beam. Its main advantage is the easiness of its implementation in a nonlinear analysis

program based on the stiffness method (Dall'Asta and Zona 2002; Limkatanyu and Spacone 2002b). Kinematical conditions (Eq. 33) are satisfied pointwise by an appropriate selection of displacement shape functions (Eq. 34); while the equilibrium (Eq. 32) are only fulfilled in an integral sense by imposing that the first variation of the potential energy functional ( $\Pi_{PE}$ ) be equal to zero (Spacone and Limkatanyu 2000). This is

$$\{\hat{S}\} = [N_{sd}] \{d\} \quad (34)$$

$$\delta \Pi_{PE} = \int_L \left( \delta \{\hat{S}\}^T \left[ [\hat{\partial}] \{\Delta P\} + [\partial_b] \{\Delta f\} \right] \right) dz = 0 \quad (35)$$

where  $\{d\}$  is the vector of nodal displacements, which includes an axial displacement of each component, rotations and displacements perpendicular to the longitudinal axis of the member; as well as the axial displacement at the middle of each component;  $[N_{sd}]$  are the displacement shape functions. These are equal to those described by Dall'Asta and Zona (2002): third order Hermite polynomials are assumed for the transverse displacement and a quadratic polynomial is used for the axial displacements. The latter are built by setting an axial degree of freedom at the mid-span of every component. This avoids a numerical problem which demands more elements (FE models) per member to converge to the solution (Dall'Asta and Zona 2002).

The nonlinear constitutive equations of both transverse sections and interfaces are linearized according to Eqs. 10 and 11. These equations and Eq. 34 are substituted into Eq. 35, and after performing integration by parts we obtain

$$\begin{aligned} & \int_L \left( [N_{sd}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix}^T [N_{sd}] \right) dz \{\Delta d\} \\ & = \{\Delta Q\} - \int_L \left( [N_{sd}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{f} \end{bmatrix} \right) dz \end{aligned} \quad (36)$$

Rewriting this equation in a reduced form leads to Eq. 27, except for the stiffness matrix and the vector of residual forces. These two are required for incorporating the model in a nonlinear analysis program based on the stiffness method, and are defined as:

$$[K] = \int_L \left( [N_{sd}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix}^T [N_{sd}] \right) dz \quad (37)$$

$$\{\hat{Q}\} = \int_L \left( [N_{sd}]^T \begin{bmatrix} \hat{\partial} & 0 \\ 0 & \partial_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{f} \end{bmatrix} \right) dz \quad (38)$$

## EVALUATION OF THE MODEL

The accuracy of the new FD model is evaluated by comparison with three cases. The first one shows that the model is capable of reproducing values measured experimentally, and the remaining two cases verify the capability of the model for studying the behavior of composite members, and evaluating its numerical performance.

For the construction of the theoretical models, in all cases the cross section was represented using fiber models (Kaba and Mahin 1984). With respect to the interface in the FE model, a continuous variation of the strength and stiffness were taken into account. These were obtained by dividing the properties of all connector by the beam length. FD models were built by considering two ways of representing the interfaces: one using springs with the connector stiffness placed on the real location of each connector, and another one with the connector properties distributed over the interface.

### Steel-concrete composite beam

Data and experimental measures of a composite steel-concrete beam (Fig. 5) used by Fabbrocino et al. (1999) for calibrating its FD model, are considered. The experimental test comprises a steel-concrete beam with shear studs separated 650 mm. The structural member is simply supported; there is no restriction to slip at their edges, and a concentrated load is applied at mid-span. The studs located out the beam span were moved over beam supports in order to eliminate the cantilevers at member edges (Fig. 5).

The load-deflection curves and variations of slip due to a load of 344 kN, are shown in Figs. 6 and 7, respectively. In both cases, the comparison includes results obtained with the two FD models and the FE model, and experimental test data and theoretical values, both reported by Fabbrocino et al. (1999). The analysis of the results indicates a good agreement between the experimental test data and the numerical values. Therefore, in this case whether the transfer of forces in the interfaces is modelled by considering either concentrated forces at the point where the connectors are located, or a continuous variation of bond forces, has no relevance.

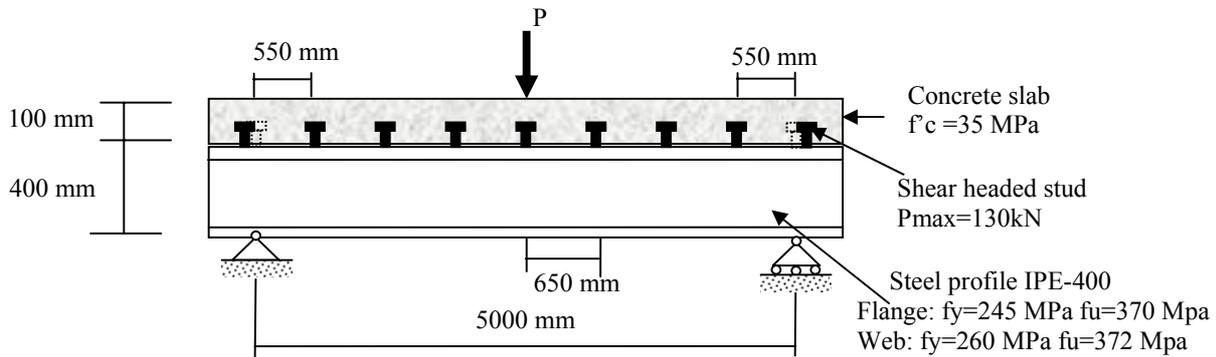


Fig. 5. Experimentally studied structural member (Fabbrocino et al. 1999)

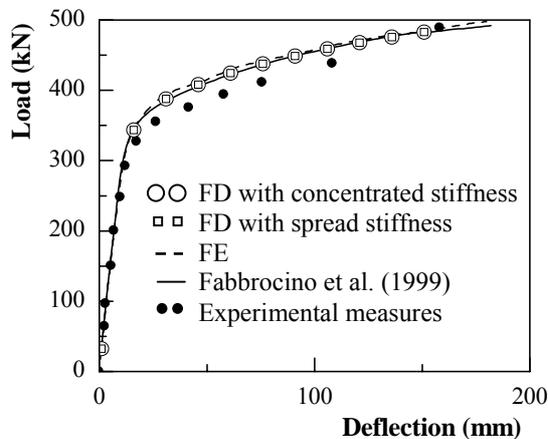


Fig. 6. Comparison of load-deflection curves

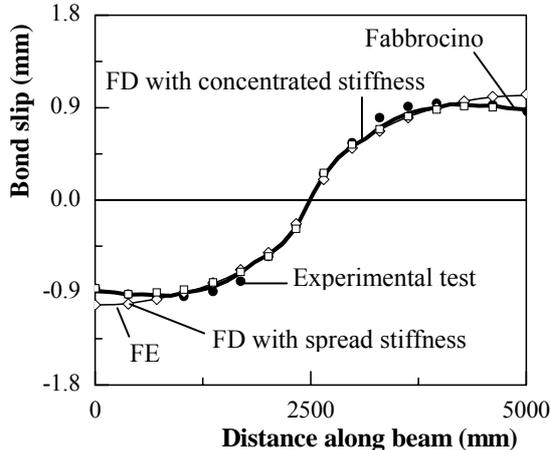


Fig. 7. Comparison of slip along interfaces

### Composite beam with different boundary conditions, load states and stud arrangements

The objective of this case is to study the influence of boundary conditions and distribution of connectors, on

the response of the composite beam of Fig 5. The beam is subjected to two load conditions: vertical load at mid-span, and equal moments acting at the member's edges. Each load state is combined with two support conditions, slip restrained at the edges and slip free (Figs. 8 and 9). With respect to the connectors, 18 shear headed studs were distributed in the interface with three arrangements: one with three connectors per section, longitudinally spaced at 800 mm (Fig. 10); two connectors per section, spaced at 650 mm (Fig. 5) and 500 mm (Fig. 10); and the last with one connector per section, spaced at 294 mm (Fig. 10). In all cases, requirements of the AISC (2005) for longitudinal and transverse separation between connectors were fulfilled. In each case the distribution was symmetrical with respect to mid-span, and whenever it was possible, the connectors were placed starting from the borders of the members. Nevertheless, this was not possible for spacings of 500 and 800 mm, where a distance of 500 mm from the border was free of connectors (Fig. 10).

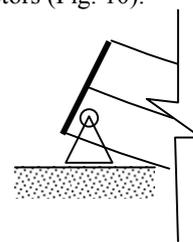


Fig. 8 Restrained edges

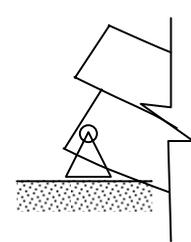


Fig. 9 Free edges

Analysis of the theoretical response obtained for each of the above cases shows trends, which are important for the future development of more rational designs of composite members, as well as to illustrate the advantage of the proposed FD model with respect to the models available in the literature. The first of these results illustrates how the response of the beam shown in Fig. 5 was not modified by restraining the slips at the edges and removing the shear connectors in the interface. This can be observed in Fig. 11 where the load-deflection curve

obtained for the beam with shear connectors and free edges, is equal to the one of the beam without studs and restrained edges. The reason of this behaviour is the restriction of the slip at the edges, which produces axial forces in the components of the member without studs and restrained edges, similar to the one induced using only the shear connectors in the member with free edges and connectors (Fig. 12). This aspect is not included in some design codes (AISC 2005; NTC\_Metálicas 2004). Therefore, the number of shear connectors obtained using these codes can be reduced if the effect of slip restriction at edges, caused by other members in a real structures (for example, joints, wall, etc), is taken into account.

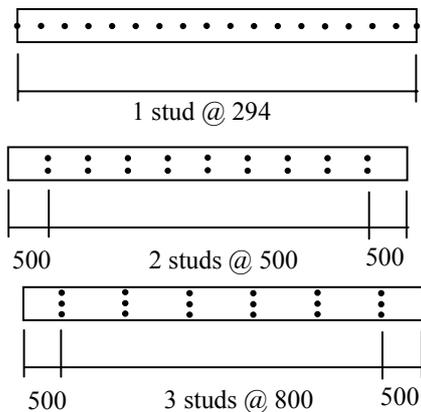


Fig. 10 Different arrays of 18 studs over the flange

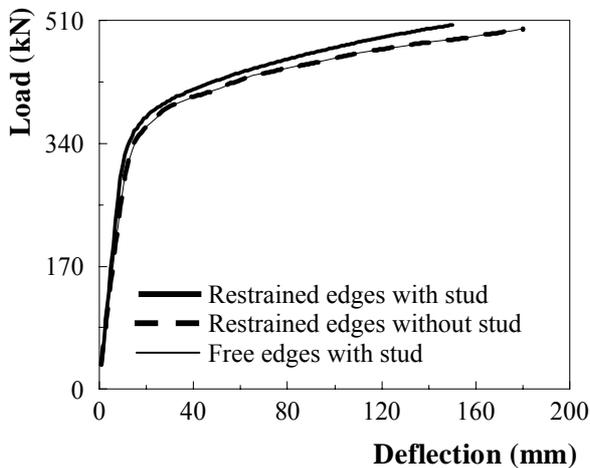


Fig. 11. Load-deflection curves for models with different edge conditions and connectors at the interface

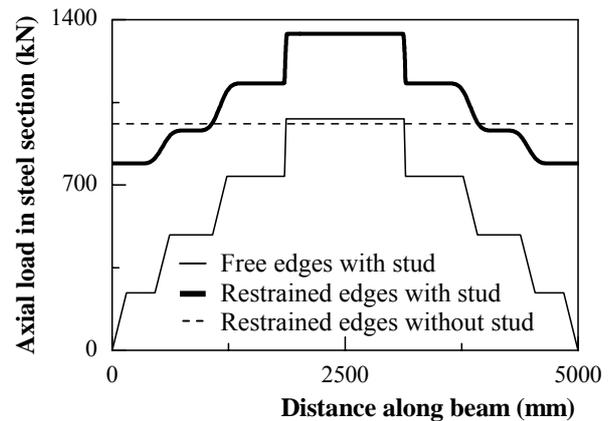


Fig. 12. Axial forces in the steel section of the member with different edge conditions and arrangement of connectors

The response of the composite beam subjected to the same vertical load was not affected by different arrangements of the studs, the restriction or development of slip at edges, or modeling the interface by assuming continuous shear forces or concentrated forces where the connectors are located. In this case, the introduction of the slip restriction at edges of the composite beam illustrated in Fig. 5, induces an increment of 30 percent in the axial forces produced at mid-span, with respect to the value obtained for the beam with connectors and free edges (Fig. 12). This reduces approximately 20 percent the ultimate deflection calculated for the beam with restrained edges and connectors when compared to the beam with free edges. The same tendency was observed for the rest of the studs arrangement studied. With free borders, the variation of slip tended towards constant values in the negative and positive zone, as illustrated in Fig. 13 for the slip curves associated to the failure of the models with different arrangements of connectors. Because of this, the axial forces at mid-span section were similar in all cases, regardless of the use of different arrangements of connectors and interface models (interface stiffness either spread or concentrated), and therefore there was no evidence of any significant variation of the member response.

Results obtained with the displacement-based FE model for the same beam with its edges restrained and free, were equal to those calculated by means of the FD model with spread stiffness (equivalent to zero space between studs). The same tendency was observed for the theoretical responses obtained with both FE and FD models for a composite beam subjected to equal moments at its edges, as shown in Fig. 14. The analysis of these results indicates that the FE model is equivalent to the FD model with spread stiffness.

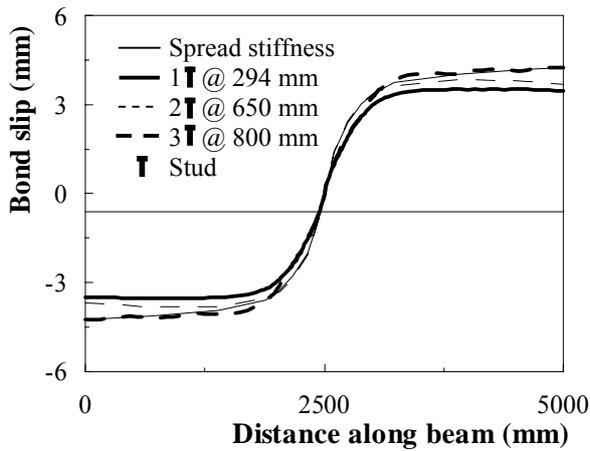


Fig. 13. Variation of slip in the interface of models with free borders, different arrangements of connectors and interface models

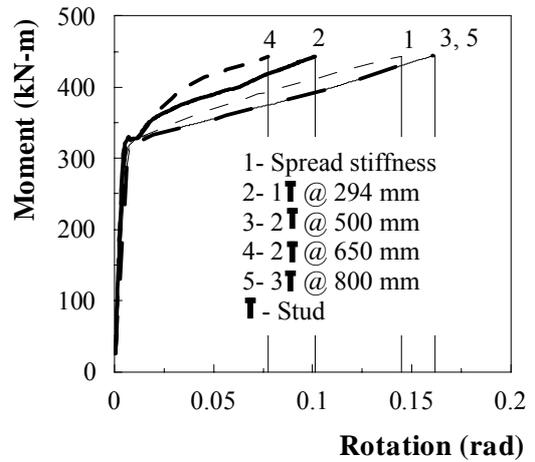


Fig. 15. Moment-rotation curves of models with free edges and different arrangements of 18 connectors along the interface

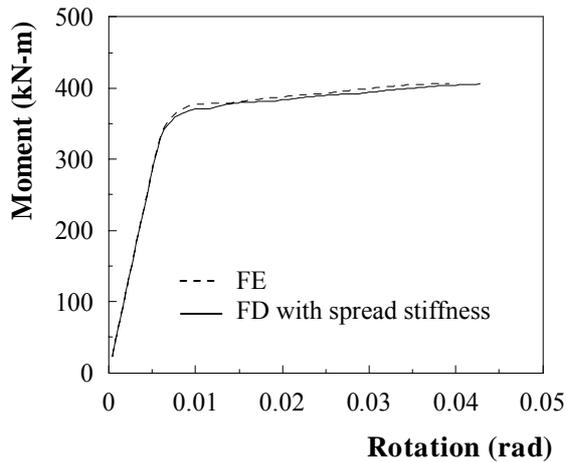


Fig. 14. Moment-rotation curves of both models, FE and FD, with spread stiffness.

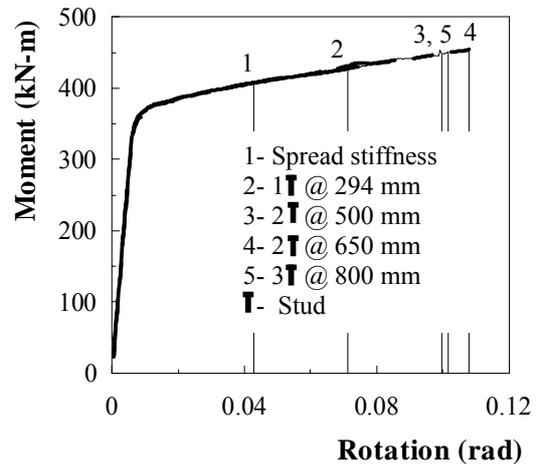


Fig. 16. Moment-rotation curves of models with restrained edges and different arrangements of 18 connectors along the interface.

By using the FD model with a real location of connectors for each arrangement and with spread stiffness, the moment-rotation curves were calculated. Results indicate that the resistances are almost the same, while the differences in the ultimate rotation are up to 106 percent between the models with free borders and spaced connectors at 650 and 800 mm (Fig. 15). This result is similar for the members with restrained borders, where the differences between the ultimate rotations at the right border reached the 152 percent for the models with connector separation of 650 mm and spread stiffness (Fig. 16).

The reason of this behaviour is related to the distribution of shear connector along the plastic hinge region. The reduction of the number of connectors in the plastic hinge length increases both the flexibility of the member and its ultimate rotation. This trend is better observed in Figs. 17 and 18, where deformation of the steel bar in the concrete slab is shown. In members with free edges (Fig. 17), the largest ultimate rotations are produced in the members with connectors spaced at 500 mm and 800 mm, because the lack of connectors along 500 mm at both member edges (plastic hinge region); while the smallest ultimate rotation was developed in the member with connectors spaced at 650 mm (member with the largest number of connectors at its edges). Nevertheless, the trend observed in Figs. 15 and 17 among members with connectors spaced at both 650 mm and 298 mm, as well as the member with spread stiffness, was inverted for the cases

with restrained edges (Figs. 16 and 18). In this case, the action of connectors located at the member's edges is eliminated by the slip restriction in this zone. This provokes a distance of 550 mm length without connectors in the edges of the member with connectors spaced at 650 mm (Fig. 5), and induces the largest flexibility in this member with respect to the rest of cases with restrained edges.

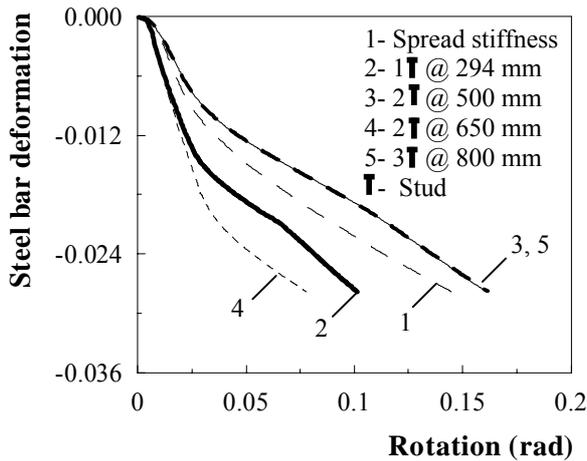


Fig. 17. Variation of deformation in a steel bar of the members with free edges and different arrangements of 18 connectors

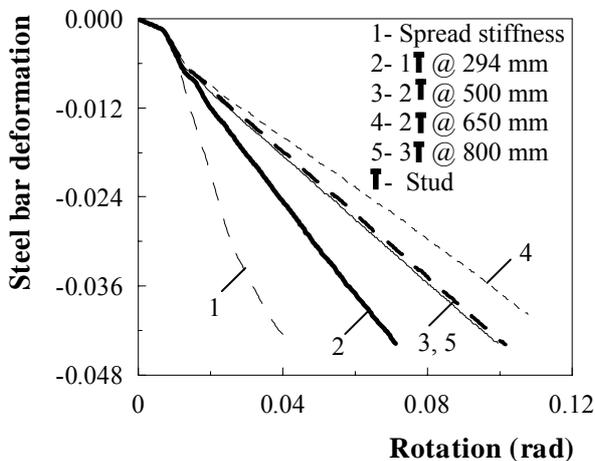


Fig. 18 Variation of deformation in a steel bar of the members with restrained edges and different arrangements of 18 connectors

#### Column with angles and straps

In this case, a five-component member (Fig. 1) was studied. The elements are a column and four angles, which are linked by eight interfaces (four angle-column interfaces and four angle-strap-angle interfaces). The

member is simply supported and supposed to be subjected to equal moments at the borders.

Both models, FE and FD, are validated by comparing them with 3D FE model assembled with SAP2000 software (SAP2000 2002). This 3D model is set up using solid elements to represent column behavior, shell elements to model angles and spring elements to trace the behavior of both interfaces angle-column and angle-angle. Other shell elements, whose stiffness are large enough, were used at both edges of the member to compel edges sections to remain plane after the deformations have taken place. The materials are assumed to be linear-elastic.

Comparison carried out using the above models included rotations at edges and distribution of slip along the interfaces. Relative errors were less than 0.6 percent in all methods, which indicates that the proposed FD model has good behavior, and the modifications made to the FE models provide adequate results.

#### CONCLUSIONS

A new model based on finite difference (FD) was proposed. Two new aspects of the member behavior with respect to the models available in literature were incorporated: real location of the shear mechanical connectors; different configurations of the structural member with regard to the number of components and interfaces among them. Besides, its capability can be extended by implementing the formulation into a computer analysis program based on the stiffness method. Therefore, it is now possible to study the member interaction with other members into one structure.

The adequate performance of the new FD element to analyze members with several components and interfaces were shown by studying a column with angles and straps. The results obtained with both the FD formulation and a modified finite element (FE) model that are representative of the elements that assume continuous variation of interface forces, were compared with those calculated with a more complex 3D FE model. The comparison was satisfactory showing that the refinement of the 3D FE model is not required.

The ability of the FD model to reproduce the behavior of a real composite member was corroborated by simulating numerically the experimental test available in literature for a steel-concrete composite beam.

The good performance of the FD model was also shown when the connector stiffness was uniformly distributed

along the interface, and the same results were obtained with the FE model.

The advantage of the new FD element with respect to the models who adopt a continuous variation of the interface force (represented with the FE), was illustrated through the example of the studied beam, where the member was subjected to equal moments at its edges. The reason is that the ultimate rotations at member edges varied in a large manner because of the use of different arrangements of connectors, which indicates the need to consider it in the theoretical model. For the case of beam subjected to a concentrated load at mid-span, the same results were obtained with both models FE and FD.

Finally, the analysis of the different cases used to compare both FD and FE models, allowed to detect two important results for the future development of more rational design procedures for composite members. The first one indicates that the number of connectors calculated for a composite beam subjected to a vertical load and according to some design codes (AISC 2005; NTC\_Metálicas 2004), can be reduced if it is considered the action of the slip restriction at member's edges caused by other members in an structure (for example beam-column joint, walls, etc). Besides, the analysis of the results obtained in the beam subjected to equal moments at its edges indicates that the ultimate rotation can be modified by changing the arrangement of connectors. Both results are recommended to be considered more carefully in future studies.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The economic support of the Institute of Engineering, UNAM, for the development of this investigation, and the careful review of Roberto Gómez and Juan José Pérez-Gavilan, are deeply appreciated.

#### APPENDIX A: CALCULATION OF INTERNAL RESPONSE AND RESIDUAL FORCES OF THE FD MODEL

The procedure to calculate the internal forces and displacements, in the transverse sections and the interfaces, produced by a displacement increment is described in this appendix, and how the residual strength associated to this new displacement state is estimated. This is carried out without iterations, which allows the model to be combined with the Newton-Raphson method usually employed in the non-linear analysis with the finite element models and the stiffness method (Bathe 1982).

The procedure is described in table 1. It is subdivided into three steps. In the first one, the increments in the

displacements, the deformations and the forces at the transverse sections and interfaces, produced by an increment in the displacements and the forces at the member's edges are calculated. In this step, the material behavior is accepted in the linear-elastic interval; hence, the stiffness values are those associated to the last iteration where they were updated.

The nonlinear material behaviour is taken into account in the second step where the residual strength and displacement in selected points are calculated. This process is carried out by keeping the displacement compatibility and the equilibrium conditions at sections and interfaces, which cause a discontinuity in the variation of both displacements and forces at the mid-span section when its values are calculated from the sections responses in one and the other border of the member. This is eradicated in the third step by calculating the force increment at the member's edges, which are required to remove the discontinuities in the section at mid-span.

Each step is subdivided into member response at its edges and definition of response of the section  $i$  as a function of the response of the section  $i - 1$ . This allows obtaining the response at every transverse section and interface of the member, after knowing the response at its edges.

#### NOTATION

The following symbols are used in this paper:

$[C_s]$  = matrix of displacement compatibility

between two consecutive cross sections;

$e$  = axial deformation;

$[D]$  = matrix relating the response of two sections;

$[E_s]$  = equilibrium matrix between two consecutive cross sections;

$$[E_b] = \begin{bmatrix} \Delta y_1 & \cdots & \Delta y_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \Delta x_1 & \cdots & \Delta x_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

= matrix of displacement compatibility among transverse sections and interfaces;

$f, \bar{f}$  = bond force and residual bond force;

$[F_s]$  = flexibility matrix of the transverse section;

Table 1. Member's strength calculation due to specified displacement state

Steps	Member response at its edges	Response of section $i$ as a function of the section $i - 1$ response
Update of internal response	$\{\Delta S\}, \{\Delta Q\} = [K] \{\Delta S\}$ $\{S\} = \{S\} + \{\Delta S\}$ $\{Q\} = \{Q\} + \{\Delta Q\}$ $\begin{Bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta S_L \end{Bmatrix} = \{\Delta S\}, \begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_L \end{Bmatrix} = \{\Delta Q\}$	$\{\Delta S\}_i = [C_s] \{\Delta S\}_{i-1} + \{\Delta \varepsilon\}_{i-1} \Delta z$ $\{\Delta P\}_i = [E_s] \{\Delta P\}_{i-1} + [E_b] \{\Delta f\}_{i-1} \Delta z$ $\{\Delta \varepsilon\}_i = [F_s]_i \{\Delta P\}_i$ $\{\Delta u_b\}_i = [E_b]^T \{\Delta S\}_i$ $\{\Delta f\}_i = [k_b] \{\Delta u_b\}_i$ <p>All increments are added to the response values of sections and interfaces</p>
Calculation of the residual values at interfaces and transverse sections	$\{\Delta S\} = \{0\}, \{\Delta Q\} = \{0\}$	$\{\bar{S}\}_i = [C_s] \{\bar{S}\}_{i-1} + \{\bar{\varepsilon}\}_{i-1} \Delta z$ $\{\bar{P}\}_i = [E_s] \{\bar{P}\}_{i-1} + [E_b] \{\bar{f}\}_{i-1} \Delta z$ $\{\bar{\varepsilon}\}_i = [F_s]_i \{\{\bar{P}\}_i + \{P\}_i - \{R_s\}_i\}^{(1)}$ $\{\bar{f}\}_i = \{R_b\}_i - \{f\}_i + [k_b] \{\bar{u}\}_i^{(2)}$ <p>All residual values are added to the respective values of response in the sections and the interfaces.</p>
The restoration of compatibility conditions and equilibrium at midsection	$\{\Delta S\} = \{0\}$ $\{\Delta Q\} = [D^P]^{-1} \{\{\bar{R}\}_{L/2, 1} - \{\bar{R}\}_{L, L/2}\}$	Same as first step

<sup>(1)</sup>  $\{R_s\}$  is the vector of strength at the transverse section produced by deformations calculated in the first step

<sup>(2)</sup>  $\{R_b\}$  is the vector of strength at the interfaces produced by the bond slip calculated in the first step

$[k_s], [k_b]$  = tangent stiffness matrices of a transverse section, interface and member, respectively;

$[K]$  = tangent stiffness matrix of a member  
 $m$  = number of components;

$M_x, M_y$  = bending moments;

$n$  = number of interfaces;

$N$  = axial force;

$\{P\}, \{\bar{P}\}$  = vector of resultant stresses and residual section forces, respectively;

$\{Q\}, \{\bar{Q}\}$  = nodal member forces and residual forces, respectively;

$\{\bar{R}\}$  = residual vector;

$s$  = sign of the bond force;

$\{S\}$  = vector of section displacements;

$u, u_b$  = axial displacement and interface slip, respectively;

$V_x, V_y$  = shear forces;

$v, w$  = perpendicular displacements;

$\gamma_x, \gamma_y$  = shear deformations;

$\{\varepsilon\}, \{\bar{\varepsilon}\}$  = vectors of section deformations and residual section deformations, respectively;

$\phi_x, \phi_y$  = section curvatures;

$\theta_x, \theta_y$  = section rotations;

$$[\partial_b]^T = \begin{bmatrix} d/dz \Delta y_1 & d/dz \Delta x_1 & s_{11} & \cdots & s_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d/dz \Delta y_n & d/dz \Delta x_n & s_{1n} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{d}{dz} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{d}{dz} \end{bmatrix},$$

$$\hat{[\delta]} = \begin{bmatrix} d^2/dz^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d^2/dz^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d/dz & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d/dz \end{bmatrix},$$

= differential operators;

## REFERENCES

- AISC (2005). "American Institute for Steel Construction. Specification for Structural Steel Building"
- Aprile, A., Spacone, E., and Limkatanyu, S. (2001). "Role of Bond in RC Beams Strengthened with Steel and FRP plates." *Journal of Structural Engineering*, 127(12), 1445-1452.
- Ayoub, A., and Filippou, F. C. (2000). "Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element" *Journal of Structural Engineering*, 126(3), 371-381.
- Bathe K. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*, Englewood cliffs, Prentice Hall, New Jersey.
- Dall'Asta, A., and Zona, A. (2002). "Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach." *Computers & Structures*, 80, 2217-2228.
- Dall'Asta, A., and Zona, A. (2004a). "Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection." *Finite elements in analysis and design*, 40, 425-448.
- Dall'Asta, A., and Zona, A. (2004b). "Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection." *Finite elements in analysis and design*, 40, 1907-1930.
- Dall'Asta, A., and Zona, A. (2004c) "Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of continuous composite beams." *Computers & Structures*, 82, 2117-2130.
- Daniels, B., and Crisinel, M. (1993). "Composite slab behavior and strength analysis. Part I: calculation procedure." *J. Struct. Eng.*, ASCE, 119(1), 16-35.
- Dezi, L., Gara, F., Leoni G., and Tarantino A. (2001) "Time-Dependent analysis of shear-lag effect in composite beams." *J. Engng. Mech.*, 127(1), 71-79.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., and Cosenza, E. (1999). "Non-linear analysis of composite beams under positive bending." *Computers and Structures*, 70, 77-89.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., and Cosenza, E. (2000). "Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond." *Journal of Struct. Engrg.*, 126 (11), 1288-1284.
- Kaba, S., and Mahin, S. (1984). *Refined modeling of Reinforced Concrete Columns for seismic analysis*, EERC Report 84/03, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
- Limkatanyu, S., and Spacone, S. (2002a). "Reinforced Concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations." *Journal of Structural Engineering*, 128(3), 346-355.
- Limkatanyu, S., and Spacone, E. (2002b). "Reinforced Concrete frame element with bond interfaces. II: State determinations and numerical validation." *Journal of Structural Engineering*, 128(3), 356-364.
- NTC\_Metálicas (2004). *Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras metálicas*. Gaceta Oficial del Distrito Federal, México.
- Oehlers, D., and Bradford, M. (1995). *Composite Steel and Concrete Structural Members*, Pergamon, Oxford, U.K.
- Ranzi, G., Bradford, M., and Uy, B. (2004). "A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 61, 657-672.
- Ranzi, G., Gara, F., Leoni, G., and Bradford M. (2006). "Analysis of composite beams with partial shear interaction using available modeling techniques: A comparative study." *Computers & Structures*, 84, 930-941.
- Reza, S., and Spacone, E. (2001). "Analysis of Steel-Concrete Composite Frames with Bond Slip." *Journal of Structural Engineering*, 127(11), 1243-1250.
- SAP2000 (2002). *SAP2000 Structural Analysis program User Manual*, Computer and Structures Inc., Version 8.02, Berkeley, California.
- Spacone, E., and Limkatanyu, S. (2000). "Response of Reinforced Concrete Members Including Bond-Slip Effects." *ACI Structural Journal*, 97(6), 831-839.

Sun, F., and Bursi, S. (2005). "Displacement-based and two-field mixed variational formulations for composite beams with shear lag" *Journal of Engineering Mechanics*, 131(2), 19-210.