



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de una columna de agua oscilante

INFORME ACADEMICO
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE FÍSICO

PRESENTA:

FRANCISCO GONZÁLEZ MONTOYA

TUTOR:

Dr. ARTURO OLVERA CHÁVEZ



2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Gonzalez
Montoya
Francisco
56 68 30 82
Universidad Nacional Autonoma de México
Fisica
098081132
2. Datos del Tutor
Dr
Olvera
Chávez
Arturo
3. Datos del sinodal 1
Dr
Czitrom
Baus
Steven Peter Reed
4. Datos del sinodal 2
Dra
Stern
Forgach
Catalina Elizabeth
5. Datos del sinodal 3
Dr
Málaga
Iguñiz
Carlos
6. Datos del sinodal 4
Dra
Jorge
y Jorge
María del Carmen
7. Trabajo escrito
Estudio de una columna de agua oscilante
40 p
2007

Dedicado a mi familia y a mis maestros

*Die Welt ist alles,
was der Fall ist.*

*Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen,
nicht der Dinge.*

*Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch,
dass es alle Tatsachen sind.*

*Denn, die Gesamtheit der Tatsachen bestimmt,
was der Fall ist und auch,
was alles nicht der Fall ist.*

...

*Die Welt und das Leben sind Eins.
Ich bin meine Welt.*

Resumen

En este trabajo se encuentra un estudio del comportamiento de una columna de agua oscilante excitada paraméricamente mediante un cambio armónico en el volumen de la cámara de compresión. Para realizar este estudio se construyó un dispositivo experimental como el que se muestra en la figura (2.1), este dispositivo nos permite medir la altura de la columna de agua en función del tiempo al cambiar el volumen de la cámara de compresión. El objetivo fue determinar la dependencia de la amplitud de oscilación en función de la frecuencia y tamaño de la excitación, en particular, se buscó determinar la dependencia de la amplitud de resonancia de la columna en función de la amplitud de excitación. Se compararon los resultados experimentales con los resultados obtenidos mediante el análisis asintótico de una ecuación diferencial ordinaria ya antes propuesta para modelar el movimiento de la columna de agua y también, se compararon con las simulaciones numéricas de dicha ecuación diferencial. El desarrollo experimental del dispositivo y los resultados obtenidos servirán para construir un prototipo de un sistema de bombeo bidireccional que permita utilizar a la energía del oleaje del mar para bombear agua de una laguna costera al mar.

Introducción

En los últimos tiempos se han buscado nuevas formas de obtener energía limpia y segura que sustituyan a la quema de hidrocarburos y a la fisión nuclear. Se han desarrollado diversos dispositivos que transforman la energía del oleaje marino en energía eléctrica. La idea básica de estos dispositivos consiste en aprovechar el movimiento de vaivén de las olas del mar para mover una turbina conectada a un generador eléctrico. Se han hecho avances importantes en las últimas décadas en el diseño y construcción de nuevos dispositivos como los de Salter [9] y Mc Cormick [7]. El incremento en el rendimiento de estos aparatos se debe al desarrollo de sofisticados sistemas electrónicos y mecánicos.

Otro tipo de dispositivo que aprovecha la energía del mar es el sistema de bombeo por energía de oleaje (SIBEO) desarrollado por Czitrom [3], [2]. El SIBEO utiliza la energía mecánica de las olas del mar para bombear agua de mar a una laguna costera. Entre las aplicaciones del SIBEO se encuentran: El saneamiento de lagunas y manglares contaminados, la acuicultura y la recuperación de lagunas costeras como zonas de cría. Este sistema ya ha sido probado con éxito en la comunidad del Lagartero, en las costas de Oaxaca, esta comunidad tienen entre sus actividades la pesca del camarón. En un futuro el SIBEO se implantará para sanear lagunas de la zona turística de Cancún en Quintana Roo.

En la siguiente figura se muestran las partes básicas del SIBEO. Este sistema consta básicamente de dos columnas de agua, ambas columnas conectadas a una cámara de compresión. Un cambio en la presión en la boca del tubo resonante debido al oleaje provoca que las dos columnas de agua oscilen. Es posible ajustar el volumen de la cámara de compresión para que el sistema entre en resonancia. Al entrar el sistema en resonancia el oleaje del mar provoca oscilaciones en la columna conectada al mar de suficiente amplitud como para desbordar agua en la cámara de compresión. El agua

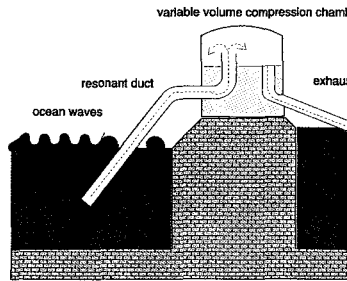


Figura 1: Diagrama del SIBEO.

desbordada empuja al agua de la columna conectada a la laguna costera, el cambio en el volumen de la cámara de compresión debido a este desajuste de agua junto con las variaciones de las alturas de las columnas de agua provocan que los niveles medios de las columnas de agua se mantengan constantes. El volumen de la cámara de compresión se puede ajustar para que el sistema entre en resonancia con el oleaje y el bombeo sea óptimo. Cabe destacar que el bombeo se debe al acoplamiento de todas las partes del sistema. De entre las grandes ventajas con las que cuenta este sistema es que no tiene partes móviles, lo cual resulta fundamental para sus aplicaciones debido a que no lastima a los organismos que pasan del mar a la laguna. La eficiencia de este dispositivo es mayor a los que buscan generar electricidad debido a que transforma la energía del oleaje en trabajo mecánico.

Una propuesta para bombear el agua de una laguna costera al mar utilizando la energía de las olas se encuentra en artículo [8], vea la siguiente figura. La idea básica es utilizar una columna de agua oscilante impulsada por el mar solo para variar el volumen de la cámara de compresión y así excitar a las otras dos columnas de agua, una conectada a la laguna costera y la otra a un depósito conectado al mar, vea la figura 2. Una ventaja de este sistema con respecto a un sifón es que se puede tener un mayor control sobre la cantidad de agua que se bombea al mar sin tener necesidad modificar el área transversal del ducto de agua.

Para desarrollar este nuevo sistema de bombeo bidireccional es necesario, entre otras cosas, estudiar el comportamiento de una columna de agua oscilante excitada paramétricamente mediante la variación del volumen de la cámara de compresión, ya que, en una fase del bombeo, estas dos columnas se mueven solo por el cambio en la presión de la cámara de compresión.

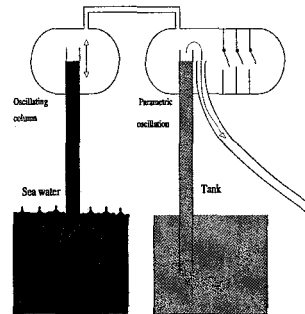


Figura 2: Diagrama del sistema de bombeo bidireccional.

Al conocer el comportamiento de la columna de agua oscilante se podrá en un futuro, desarrollar un modelo numérico del sistema que permita determinar las condiciones de bombeo y a partir estos resultados numéricos se podrá construir un prototipo experimental. El objetivo de este trabajo es conocer más sobre el comportamiento de la columna de agua oscilante excitada paramétricamente mediante el cambio en el volumen de la cámara de compresión, vea la figura (1.1).

Planteamiento y descripción del problema

Para poder construir un prototipo de un sistema de bombeo por energía de oleaje bidireccional es necesario estudiar el comportamiento de una columna de agua oscilante excitada mediante el cambio en el volumen en la cámara de compresión, vea la siguiente figura. La columna de agua oscilante es la base del sistema de bombeo por energía de oleaje bidireccional. En equilibrio, el nivel de la columna se mantiene constante debido a la anulación entre las fuerzas que actúan sobre ella, estas fuerzas son: La debida a la presión del aire en la cámara de compresión, la fuerza gravitacional y la debida a la presión del agua en la boca del tubo. Para que la columna de agua oscile es necesario que el equilibrio deje de cumplirse. Una manera de hacerlo es variando el volumen de la cámara de compresión, la variación del volumen de la cámara provoca un cambio en la presión del aire que se encuentra dentro de la cámara, este cambio en la presión impulsa a la columna de agua.

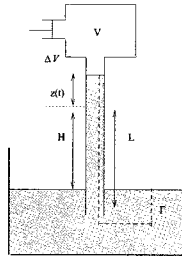


Figura 3: Columna de agua oscilante

Objetivos

Los objetivos de este trabajo son: Determinar la dependencia de la amplitud de la oscilación de la columna de agua en función de la magnitud y la frecuencia del cambio en el volumen de la cámara de compresión para una altura de equilibrio fija, determinar las condiciones en las que la columna de agua entra en resonancia y desarrollar un dispositivo experimental que nos permita encontrar dicha dependencia. El desarrollo del dispositivo junto con los datos obtenidos servirán como base para la construcción de un prototipo del sistema de bombeo bidireccional.

Acciones realizadas para la resolución del problema

Para encontrar la dependencia de la amplitud de oscilación de la columna de agua oscilante con respecto a la amplitud y la frecuencia de excitación, se estudio un modelo matemático, este modelo ya se había propuesto antes en el artículo [3] para describir el movimiento de una columna de agua oscilante. Se utilizó el método asintótico de escalas múltiples para encontrar una aproximación a dicha dependencia, esta parte del estudio se encuentra el primer capitulo "Modelo Matemático".

Para obtener una estimación de las dimensiones del dispositivo experimental se calculó la frecuencia de las oscilaciones libres de pequeña amplitud a partir de la ecuación diferencial que modela el movimiento del sistema, a partir de este cálculo se encuentra una relación entre los parámetros que aparecen en el modelo. Se construyó un dispositivo experimental para obtener el comportamiento de la amplitud de oscilación de la columna de agua, todo lo referente al dispositivo experimental se encuentra en el segundo capitulo "Dispositivo Experimental y Medición".

Se hicieron simulaciones numéricas de la ecuación diferencial ordinaria que se ha propuesto para modelar el movimiento de la columna de agua oscilante. Estas simulaciones se compararon con los resultados obtenidos mediante el análisis asintótico del modelo y también con los resultados experimentales. El resultado de estas simulaciones y las comparaciones se encuentra en el tercer capitulo "Simulaciones Numéricas y Análisis de Resultados".

Capítulo 1

Modelo Matemático

La base del sistema de bombeo por energía de oleaje bidireccional es una columna de agua oscilante como la que se muestra en la figura 1.1. En equilibrio, el nivel de la columna, se mantiene constante debido a la cancelación entre las fuerzas que actúan sobre ella. En la dirección vertical la fuerza asociada a la presión en la boca del tubo compensa a la suma del peso de la columna con la fuerza asociada a presión en la cámara de compresión, en la dirección horizontal todas las fuerzas se cancelan. Para que la columna de agua oscile es necesario que este balance entre deje de cumplirse. Una manera de hacerlo es variando el volumen de la cámara de compresión. La variación del volumen de la cámara provoca un cambio en la presión del aire que se encuentra dentro de la cámara. Este cambio en la presión mueve a la columna de agua.

Un hecho experimental muy importante es que la velocidad del fluido en casi toda la columna es prácticamente la velocidad de la superficie superior de la columna, a excepción de la región cercana a las paredes del tubo. En este capítulo se buscará un modelo que permita describir el movimiento de la columna de agua oscilante. Una manera de obtener una ecuación que modele el movimiento de la columna de agua oscilante, a partir de las ecuaciones de la mecánica de fluidos, se basa en aprovechar el hecho de que la velocidad de casi toda el agua dentro del tubo es prácticamente uniforme; este hecho permite describir a la columna sólo con una coordenada, el desplazamiento con respecto al nivel de equilibrio. A continuación se desarrollará la ecuación de flujo de momento de un fluido encerrado en un volumen. Esta ecuación es útil para describir el movimiento del agua dentro del tubo resonante. Además se obtendrá una expresión útil para describir la interacción del fluido dentro

del tubo con el fluido fuera de éste. Esta expresión se deduce a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible de manera analoga a la ecuación de Bernoulli; la única diferencia es que aparecen más términos debido a que se considera al flujo como no estacionario, rotacional y viscoso. En la segunda sección se encuentra el análisis asintótico de la ecuación que modela el movimiento de la columna de agua oscilante excitada paramétricamente mediante la variación del volumen de la cámara de compresión. Este análisis permite obtener una estimación de algunas de las propiedades de la solución a dicha ecuación.

1.1. Ecuación de flujo de momento y Ecuación para flujo incompresible

El movimiento del agua dentro del tubo resonante se puede describir a partir de la ecuación de flujo de momento para un fluido. La ecuación de flujo de momento es una consecuencia de la segunda ley del movimiento de Newton y la hipótesis del continuo. Sean $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ la densidad, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ la velocidad del flujo en un punto en el espacio al tiempo t y V un volumen fijo. El momento \vec{P} de un fluido encerrado el volumen V esta dado por

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{v} dV$$

al derivar respecto al tiempo esta ecuación se obtiene

$$\int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) dV. \quad (1.1)$$

Al sustituir la ecuación de continuidad y la derivada material del vector velocidad en la ecuación (1.1) se llega a

$$\dot{\vec{P}} = \int_V \left(-\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \vec{v} + \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) \right) dV.$$

Para analizar de manera más sencilla esta última expresión es conveniente expresarla en la notación tensorial.

$$\dot{P}_i = \int_V \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} v_i \right) + \rho \left(\frac{dv_i}{dt} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV.$$

$$\dot{P}_i = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV - \int_V \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} \right) dV.$$

Utilizando el teorema de la divergencia de Gauss en la segunda integral del lado derecho de la igualdad anterior se llega a

$$\dot{P}_i = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV - \int_S \left(\sum_{j=1}^3 \rho v_i v_j dS_j \right). \quad (1.2)$$

Escrita de esta manera se le puede dar una interpretación clara a la ecuación anterior. La primera integral corresponde a la componente i -ésima de la fuerza neta que actúa sobre el volumen V , la segunda integral es el flujo de la i -ésima componente del momento a través de la superficie S que limita a dicho volumen.

A continuación se desarrolla una expresión a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible que nos permita relacionar la presión en la boca del tubo resonante con la presión atmosférica. La ecuación de Navier-Stokes para un flujo incompresible es

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

donde p es la presión, ϕ la energía potencial gravitacional por unidad de volumen y ν la viscosidad dinámica. Sustituyendo la identidad del análisis vectorial

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times \nabla \times \vec{v}$$

en la ecuación de Navier Stokes para flujo incompresible se obtiene

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla v^2 - \rho \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} = -\nabla p - \nabla \phi + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

al calcular la integral de línea de esta ecuación sobre una curva arbitraria Γ , cuyos extremos inicial y final son \vec{a} y \vec{b} respectivamente, se llega a

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\rho}{2} \nabla v^2 + \nabla p + \nabla \phi \right) \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v} \right) \cdot d\vec{l}.$$

Utilizando el teorema para integrales de línea de un campo vectorial gradiente en la ecuación anterior se obtiene

$$\left(\frac{\rho}{2}v^2 + p + \phi\right) \Big|_{\vec{a}} = \int_{\Gamma} \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v}\right) \cdot d\vec{l} \quad (1.3)$$

Esta última ecuación es semejante a la ecuación de Bernoulli, los términos del lado derecho de la igualdad provienen de considerar que el flujo no es estacionario, ni irrotacional, ni inviscido. Estas tres condiciones son esenciales para el estudio nuestro sistema.

1.2. Ecuación de la columna oscilante

En base a los resultados de la sección anterior, es posible obtener una ecuación que modele el movimiento de la columna de agua oscilante. La velocidad de la columna de agua es casi uniforme por tanto podemos aproximar la velocidad en todo punto del fluido por la velocidad promedio de la superficie. Entre menor sea la interacción de las paredes del tubo con el fluido menor será la diferencia entre la velocidad promedio del fluido y la velocidad en los puntos cercanos a las paredes.

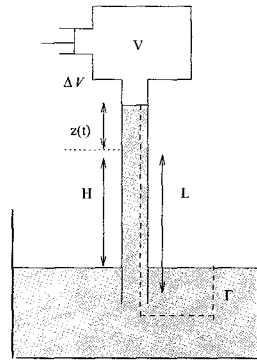


Figura 1.1: Columna de agua oscilante.

Sea V el volumen de la columna y S la superficie que limita su volumen. Notemos que es necesario modificar la ecuación de flujo momento (1.2) ya que el volumen de agua no es constante debido a que la longitud de la columna

cambia. La longitud de la columna esta dado por $L + z(t)$, vea la figura (1.1), donde $z(t)$ es el desplazamiento promedio de la columna con respecto a la posición de equilibrio ¹. Calcúlese la derivada con respecto al tiempo de la componente z del momento del fluido encerrado en V , utilizando la formula para la derivada de integrales donde el límite superior e integrando dependen de un parámetro, en este caso el parámetro es el tiempo t , ², se llega a

$$\dot{P}_z = \dot{z} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \rho v_z r \, d\theta dr + \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{z(t)} \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} r \, dz d\theta dr.$$

El primer sumando de la ecuación se debe a la variación del volumen de la columna, la segunda integral está asociada a la variación temporal del momento del fluido en el volumen instantáneo V . El integrando es de la misma forma que el integrado del lado izquierdo de la ecuación de (1.1), por tanto, lo podemos desarrollar de la misma forma, ya que la dependencia temporal de la frontera no cambia el desarrollo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{z(t)} \rho v_z r \, dz d\theta dr = & \dot{z} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \rho v_z r \, d\theta dr - \int_S v_z \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \\ & + \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^{z(t)} \rho \frac{dv_z}{dt} r \, dz d\theta dr. \end{aligned}$$

Calcúlese la integral que aparece en el lado izquierdo de la ecuación anterior, después calcúlese la derivada con respecto al tiempo del resultado de la integral. Para calcular el lado izquierdo se tiene que tomar en cuenta que el flujo neto a través de la superficie que se mueve es cero y que las fuerzas externas no balanceadas son: La fuerza gravitacional, la fuerza debida a la presión en las caras superior e inferior y la fuerza debida a la interacción del volumen V con las paredes del tubo, que denotada por F , por tanto se obtiene

$$\rho A \dot{z}^2 + \rho A (z + L) \ddot{z} = \rho A \dot{z}^2 + F + (Ap_f - Ap_c) - \rho g A (z + L),$$

donde p_f es la presión media en la boca del tubo y p_c la presión en la cámara de compresión. Al despejar p_f de la ecuación (1.3) y tomar una curva Γ que

¹En la superficie de la columna se forma un pequeño menisco de tamaño despreciable comparado con el tamaño de las oscilaciones de la columna de agua

²

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi}^{\psi(t)} f(t, z) dz = \int_{\xi}^{\psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, z) dz + f(t, \psi(t)) \frac{d\psi(t)}{dt}$$

tenga como extremo inicial la superficie del tanque y como extremo final un punto en la parte inferior del tubo se llega a

$$\rho A(z+L)\ddot{z} + \rho A \frac{\dot{z}^2}{2} - Ap_c + \rho g A(z+H) + A(p_c - p_a) - \int_{\Gamma} \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \rho \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} - \nu \nabla^2 \vec{v} \right) \cdot d\vec{l} - F = 0, .$$

donde p_a es la presión atmosférica. Nótese que $gAH - p_a$ corresponde a la presión de equilibrio de la cámara de compresión. Las oscilaciones de la columna de agua son lo bastante rápidas como para que el flujo de calor del gas de la cámara de compresión a sus alrededores sea importante. Podemos aproximar el cambio en el volumen de la cámara de compresión como un proceso adiabático. La ecuación que describe este tipo de procesos para un gas perfecto con capacidad calorífica constante es $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$, entonces se obtiene

$$\rho g H + (p_c - p_a) = p_0 \left(\left(1 - \frac{A_c z}{V_0} \right)^\gamma - 1 \right).$$

Al no contar con una manera de calcular la última integral que aparece en la ecuación de movimiento ni con una expresión para la fuerza de fricción F , se utiliza análisis dimensional para obtener expresiones asociadas a las pérdidas de presión por vorticidad y fricción con las paredes del tubo proporcionales a $\dot{z}|\dot{z}|$. La integral de $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ se aproxima por un término proporcional a \ddot{z} , de acuerdo con la aproximación de que la velocidad de todo el fluido dentro del tubo es prácticamente la velocidad de la superficie, vea este análisis hecho en [3]. Finalmente la ecuación que se propone para modelar el movimiento de la columna de agua es

$$(z+L(1+\eta))\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} \right) \dot{z}|\dot{z}| + gz + \frac{p_a - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{A_c z}{V_0} \right)^\gamma - 1 \right) = 0, \quad (1.4)$$

donde K es el coeficiente asociado a pérdidas por vorticidad, f a pérdidas por fricción con el tubo, D el diámetro del tubo y η es un incremento en la longitud efectiva del tubo debido a los efectos de borde en la salida del tubo, vea [3]. Al linealizar esta ecuación y suponiendo que la amplitud de las oscilaciones es pequeña, es decir, $L \gg |z|$ se obtiene una frecuencia para oscilaciones libres pequeñas dada por

$$\omega_i^2 = \gamma \frac{(P_a - \rho g H) A}{\rho V_0 L (1 + \eta)} + \frac{g}{L(1 + \eta)} \quad (1.5)$$

1.2.1. Deducción Lagrangiana de la ecuación de movimiento

Una manera más breve de obtener esta ecuación de movimiento de la columna de agua es utilizando la ecuación de Euler-Lagrange, vea [8], aprovechando el hecho de que la velocidad es prácticamente uniforme dentro del tubo, la coordenada que determina el estado de la columna es el desplazamiento de la posición de equilibrio de la superficie de la columna $z(t)$. La energía cinética del agua dentro del tubo resonante esta dada por

$$T = A\rho(L + z) \frac{\dot{z}^2}{2}.$$

Las fuerzas restitutivas no balanceadas que actúan sobre el sistema son: La fuerza de gravedad sobre la masa de agua arriba de la posición de equilibrio y la presión en la cámara de compresión ³ entonces

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = \rho g A z + p_0 \left(\left(1 - \frac{A_c x}{V_0} \right)^\gamma - 1 \right),$$

utilizando la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial L}{\partial z}$ se llega a

$$(z + L(1 + \eta))\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + gz + \frac{p_a - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{A_c z}{V_0} \right)^\gamma - 1 \right) = 0.$$

Al sumar los términos asociados a las pérdidas por vorticidad, fricción con las paredes del tubo y los efectos de borde a la salida del tubo se llega nuevamente a la ecuación (1.4). El describir a nuestro sistema de esta manera

³Las fuerzas sobre la columna son $\rho g(z + L)$ el peso de la columna, la presión en la cámara de compresión p_c , la fricción con las paredes del tubo f y la debida a la interacción con el agua que no esta dentro del tubo. Esta interacción es la suma de la presión hidrostática más otros términos como se aprecia en la ecuación (1.3). Los términos que no se pueden escribir como el gradiente de una función escalar de la ecuación (1.3) son tomados en cuenta después en la descripción lagrangiana, también pueden ponerse de manera explicita desde el principio como fuerzas generalizadas Q

permite ver el origen del término η . Este incremento en la longitud de la columna está asociado con el agua cercana a la salida del tubo que interacciona de manera directa con la columna. Esta masa de agua también oscila con la misma frecuencia que la que está en la columna. La descripción lagrangiana nos permite obtener de manera muy sencilla y rápida los términos cinéticos de la ecuación (1.4). Al realizar el cálculo con la ecuación de flujo de momento el término $\rho \frac{\dot{z}^2}{2}$ proviene de la ecuación (1.3). Si se utiliza $F_z = \frac{dm(t)v_z(t)}{dt}$ donde $m = \rho(L + z(t))A$, $v_z = \dot{z}$ y $F = (p_f - p_c - \rho g(L + z(t)))A$ también se tiene que utilizar la ecuación (1.3) para que aparezca el término $\rho \frac{\dot{z}^2}{2}$. Desidero utilizar la ecuación de flujo de momento para aclarar más el origen de ese término y así evitar cualquier confusión al utilizar la segunda ley de Newton en este sistema que cambia de masa y volumen. También es posible obtener la ecuación de movimiento directamente a partir de la ecuación (1.3) tomando como punto inicial de la curva Γ un punto en la superficie superior de la columna de agua y como punto final la superficie del depósito de agua, vea [3]. La integral de línea del vector $\rho \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{v}$ en el segmento de la curva Γ contenido en la columna representa la interacción de las paredes del tubo con la columna de agua. Si la velocidad de la columna de agua es casi igual en todos los puntos entonces dicho vector contribuye poco.

1.3. Excitación de la columna

Es posible excitar de varias maneras a la columna de agua de manera periódica. En el caso del SIBEO la excitación es la variación en la presión de la parte inferior del tubo resonante provocada por el oleaje del mar. Otra forma es mediante un cambio en el volumen V de la cámara de compresión. Este cambio en el volumen del gas de la cámara genera un cambio en la presión del gas encerrado en la cámara, que a su vez provoca que la columna de agua se mueva, vea la figura (1.1). La ecuación que describe el movimiento de la columna producido por este tipo de excitación es

$$(z + L(1 + \eta))\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \left(\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}\right)\dot{z}|\dot{z}| + gz + \frac{p_a - \rho g H}{\rho} \left(\left(1 - \frac{A_c z + A b \cos \Omega t}{V_0}\right)^\gamma - 1 \right) = 0, \quad (1.6)$$

donde A es el área transversal del pistón y $b \cos \omega t$ la amplitud del despla-

miento del pistón. Para analizar la ecuación (1.6) hay que escribirla en forma adimensional haciendo los cambios de variable $\frac{A}{V_0}z \rightarrow z$ y $\omega_l^2 t \rightarrow t$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{V_0}{L(1+\eta)}z + 1 \right) \ddot{z} + \frac{V_0}{2L(1+\eta)}\dot{z}^2 + \frac{V_0}{L(1+\eta)} \left(\frac{K}{2} + f \frac{L}{D} \right) \dot{z} | \dot{z} | \\ & + \frac{g}{\omega_l^2 L(1+\eta)}z + \frac{(p_a - \rho g H)A}{\omega_l^2 V_0 L(1+\eta)\rho} \left(\left(1 - z + \beta \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} \right)^\gamma - 1 \right) = 0, \quad (1.7) \end{aligned}$$

donde $\beta = Ab/V_0$. Si el volumen de aire comprimido por la columna durante las oscilaciones y el volumen desplazado por el pistón son pequeños comparados con el volumen de equilibrio de la cámara de compresión, es decir, $|z|, |\beta| \ll 1$, se puede aproximar el último sumando de la expresión anterior por los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor con respecto a β y z .

$$\begin{aligned} \left(1 - z + \beta \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} \right)^\gamma &= 1 + \gamma z + \gamma \beta \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} \\ &+ \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) z^2 + \gamma(\gamma + 1) z \beta \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} \\ &+ \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) \beta^2 \cos^2 \frac{\Omega t}{\omega_l} + \dots \end{aligned}$$

Para el siguiente análisis sólo se considerarán los términos hasta segundo orden de la serie de la compresión adiabática, supondremos que los demás términos son despreciables, por tanto, la ecuación que se estudiará es

$$(Wz + 1)\ddot{z} + \frac{W}{2}\dot{z}^2 + \kappa \dot{z} |\dot{z}| + \left(\omega_0^2 + \epsilon \alpha \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} \right) z + \lambda \epsilon^2 \cos \frac{\Omega t}{\omega_l} + \nu z^2 = 0, \quad (1.8)$$

donde las constantes que aparecen en la ecuación son:

$$\begin{aligned} W &= \frac{V_0}{L(1+\eta)}, & \kappa &= \frac{K}{2} + f \frac{L}{D}, \\ \alpha \epsilon &= \gamma(\gamma + 1) \beta \frac{(p_a - \rho g H)}{\omega_l^2 (1+\eta) \rho} \sqrt{\frac{V_0 L}{A}}, & \lambda \epsilon^2 &= \gamma \beta \frac{(p_a - \rho g H) V_0 L}{\omega_l^2 V_0 L(1+\eta) \rho}, \\ \nu &= \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) \beta \frac{(p_a - \rho g H) A}{\omega_l^2 V_0 L(1+\eta) \rho}, & \epsilon &= \sqrt{\frac{\beta A}{V_0 L}}, \\ \omega_0^2 &= 1. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial anterior es no lineal y no se conoce un método para resolverla analíticamente. Para poder para obtener algunas propiedades de la solución de esta ecuación utilizaremos el método asintótico de escalas múltiples. Los métodos asintóticos fueron desarrollados por los matemáticos y astrónomos del siglo XIX para analizar trayectorias de los cuerpos celestes del sistema solar. Las observaciones astronómicas revelan que las trayectorias de los cuerpos presentan desviaciones a las trayectorias predichas por la solución al problema de los dos cuerpos, estas diferencias solo se pueden medir en intervalos de tiempo bastante grandes, del orden de años o incluso centurias. Debido a la dificultad para resolver el problema de los tres cuerpos, como siguiente aproximación a la solución del problema, se buscó obtener aproximaciones a las soluciones en base a las trayectorias del problema de dos cuerpos, donde se considera que los parámetros que describen las órbitas cambian en una escala de tiempo largo. Este tipo de métodos también se han empleado, de manera satisfactoria, para obtener aproximaciones a las funciones de onda de átomos con más de un electrón. Una buena introducción a estos métodos se encuentra en el libros de Nayfeh AH.[1] y el de Smith H. Jordan D.W. [4]., una discusión más detallada en el libro de Cole C. y Kevorkian C[5].

1.3.1. Método de escalas múltiples

En el caso de la columna de agua oscilante se observa experimentalmente que la oscilación de la columna presenta una modulación apenas perceptible a simple vista. La envolvente de la oscilación tenía una amplitud típica de 0.5 mm y un periodo de 20 oscilaciones de la columna, para los intervalos en los que se realizó el experimento. En la siguiente figura se ilustra el fenómeno de modulación de manera exagerada. En este fenómeno existen dos escalas de tiempo, una asociada al periodo de la oscilación, y otra asociada al periodo de la modulación. Estas dos escalas se denominarán tiempo corto y tiempo largo respectivamente

Dada esta característica de las oscilaciones de la columna de agua, se propone utilizar el método de escalas múltiples para determinar algunas propiedades de la solución a la ecuación diferencial (1.6). El método de escalas múltiples aprovecha el hecho de que se presentan dos escalas de tiempo en el fenómeno. Por este motivo se propone una solución a la ecuación diferencial de la forma

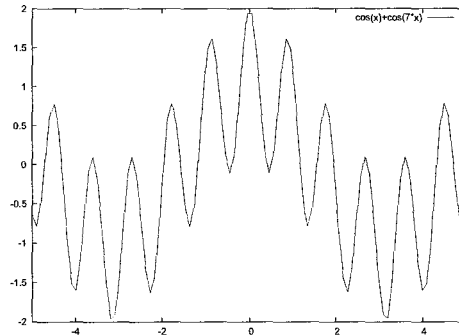


Figura 1.2: Modulación de la oscilación de la columna de agua, en esta gráfica la modulación se ha exagerado para hacerla visible.

$$z = \epsilon z_0(t_0, t_1) + \epsilon^2 z_1(t_0, t_1) + \epsilon^3 z_3(t_0, t_1),$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y las variables $[t_i]_i^2 = 1$ están asociadas con las diferentes escalas de tiempo que se observan en el fenómeno: a la variable t_0 le corresponde la escala de tiempo corto y a la variable t_1 la escala de tiempo larga. Debido a la forma propuesta para la solución es necesario cambiar la derivada con respecto al tiempo t por un operador diferencial donde se tomen en cuenta las magnitudes de las diferentes escalas de tiempo

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt_0} + \epsilon \frac{d}{dt_1} + \epsilon^2 \frac{d}{dt_2}.$$

También se debe proponer que la frecuencia de oscilación varíe en función de la magnitud de la perturbación, es decir, la frecuencia es la forma

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2.$$

El método asintótico no se puede aplicar si aparece un valor absoluto en la ecuación diferencial por tanto proponemos la siguiente aproximación

$$\dot{z}|\dot{z}| \rightarrow \frac{\dot{z}^3}{|z_0|}.$$

Sustituyendo estas expresiones propuestas en la ecuación (1.6) obtenemos un polinomio en ϵ . Como las potencias de ϵ son linealmente independientes,

todos los coeficientes de este polinomio deben ser nulos. Por tanto se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas con la característica de que para encontrar la solución x_{n+1} se tiene que tener antes la solución x_n . Las ecuaciones correspondientes a ϵ y ϵ^2 son:

$$\begin{aligned}\epsilon &\rightarrow \frac{d^2 z_0}{dt_0^2} + \omega_0^2 z_0 = 0, \\ \epsilon^2 &\rightarrow \frac{d^2 z_1}{dt_0^2} + \omega_1^2 z_1 = 2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial t_0 \partial t_1} + (\lambda + \alpha z_0) \cos \omega_0 t_0 + \frac{W}{2} \left(\frac{d^2 x_0}{dt_0^2} \right)^2 + W z_0 \frac{d^2 z_0}{dt_0^2}.\end{aligned}$$

Proponemos como solución a la primera ecuación la función $z_0 = r(t_1) \sin(\omega_0 t_0 + \theta(t_1))$ o de manera equivalente $z_0 = A(t_1) \sin \omega_0 t_0 + B(t_1) \cos \omega_0 t_0$, notemos que las amplitudes sólo dependen del tiempo largo t_1 de acuerdo con las hipótesis. Al sustituir la solución z_0 en la segunda ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z_1}{dt_1^2} + \omega_0^2 z_1 &= \frac{\nu}{2}(A^2 + B^2) + \frac{\alpha}{2}B + \frac{\omega_0^2 W}{2}(A^2 + B^2) \\ &+ \sin \omega_0 t_0 \left(2\omega_0 \omega_1 A - \frac{3W\kappa\omega_0(A^2 B + B^3)}{4\sqrt{A^2 + B^2}} - 2 \frac{dB}{dt_1} \right) \\ &+ \cos \omega_0 t_0 \left(\lambda + 2\omega_0 \omega_1 B - \frac{3W\kappa\omega_0(AB^2 + B^3)}{4\sqrt{A^2 + B^2}} + 2 \frac{dA}{dt_1} \right) \\ &+ \sin 2\omega_0 t_0 \left(-\frac{3\omega^2 W}{2} AB + \frac{\alpha}{2} A \right) \\ &+ \cos 2\omega_0 t_0 \left(\nu AB + \frac{3\omega^2 W}{4}(A^2 - B^2) + \frac{\nu}{2}(B^2 - A^2) + \frac{\alpha}{2} B \right) \\ &+ \sin 3\omega_0 t_0 \left(\frac{\kappa\omega_0 W}{4\sqrt{B^2 - A^2}} (A^2 B + B^3) \right) \\ &+ \cos 3\omega_0 t_0 \left(\frac{\kappa\omega_0 W}{4\sqrt{A^3 - AB^2}} (A^2 B + B^3) \right)\end{aligned}$$

Los términos proporcionales a $\cos \omega_0 t_0$ y $\sin \omega_0 t_0$ son resonantes, provocan que la solución crezca indefinidamente con el tiempo, lo cual es inaceptable dado que se requiere que la solución sea periódica y acotada, para evitar este comportamiento, hay que proponer que los coeficientes que los multiplican sean nulos. De esta manera, se obtiene una sistema de ecuaciones diferenciales para las amplitudes $A(t_1)$ y $B(t_1)$

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt_1} &= -\frac{\lambda}{2\omega_0} - \omega_1 B - \frac{3\kappa\omega_0 W A^3}{2\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{3\kappa\omega_0 W A B^2}{8\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \frac{dB}{dt_1} &= 2\omega_1 A - \frac{3\kappa\omega_0 W B^3}{2\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{3\kappa\omega_0 W A^2 B}{8\sqrt{A^2 + B^2}}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Reescribiendo este sistema de ecuaciones en términos de las funciones la amplitud de oscilación $r(t_1) = \sqrt{A(t_1)^2 + B(t_1)^2}$ y el ángulo de desfase $\theta(t_1) = \arctan \frac{B(t_1)}{A(t_1)}$ se llega a

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt_1} &= \frac{\lambda \sin \theta}{2\omega_0} + \omega_1 r, \\ \frac{dr}{dt_1} &= -\frac{\lambda \cos \theta}{2\omega_0} - \frac{3\kappa\omega_0 W r^2}{8},\end{aligned}$$

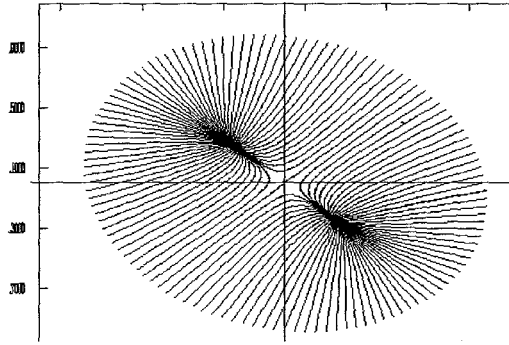


Figura 1.3: Diagrama fase del sistema de ecuaciones diferenciales (1.8).

A partir de este sistema ecuaciones diferenciales es posible obtener una estimación de la amplitud de oscilación $r(t_1)$ para tiempos largos calculando los puntos fijos del sistema ⁴. Los puntos fijos son:

$$\begin{aligned}r_0^2 &= \frac{64\omega_0^2\omega_1 \pm \sqrt{(64\omega_0^2\omega_1)^2 + 567\kappa^2\omega_0^2W}}{18\kappa^2\omega_0^2W}, \\ \cos \theta_0 &= \sqrt{1 - \frac{2\omega_0\omega_1 r}{\lambda}}.\end{aligned}$$

⁴los puntos fijos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias son los puntos donde las derivadas de las variables independientes del sistema se anulan.

Para simplificar el análisis se considerará el caso en el cual, la frecuencia ω_1 es muy pequeña comparada con ω_0 , es decir, la frecuencia de excitación es casi la frecuencia del sistema lineal de ecuaciones diferenciales asociado, entonces se puede aproximar los puntos de equilibrio por

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\frac{4\lambda}{3\omega_0^2 \kappa W}}, \\ \theta &= \pm\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el comportamiento asintótico de la amplitud de oscilación con respecto a la amplitud de excitación a primer orden es $r_0 \sim \lambda^{0.5}$, la respuesta de la amplitud de oscilación es proporcional a la raíz cuadrada de la amplitud de excitación. Para saber si los puntos fijos son puntos de equilibrio estable, se tienen que calcular los valores propios del jacobiano en los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial(\dot{r}, \dot{\theta})}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\omega_0\kappa W} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{\omega_0} \end{pmatrix}$$

Como el jacobiano es diagonal, los valores propios del jacobiano asociado al sistema (1.7) son los elementos de la diagonal del jacobiano. Se tiene un punto atractor ya que ambos valores propios negativos, vea [4]. Las soluciones son estables, se ve en el plano fase del sistema asociado a la ecuación diferencial que se propuso para modelar el movimiento de la columna de agua, la ecuación (1.6).

Cabe destacar que el estudio asintótico muestra a primer orden de aproximación que el coeficiente α no aparece en la expresión en r_0 . Se concluye que a este orden no existe un efecto de resonancia paramétrica. Esto debe a que la frecuencia de oscilación es igual a la frecuencia de excitación.

Capítulo 2

Dispositivo Experimental y Medición

En este capítulo se describen las características del dispositivo experimental que se utilizó para el estudio de una columna de agua oscilante excitada paraméricamente mediante la variación periódica del volumen de la cámara de compresión. Se busca determinar la dependencia de la amplitud de oscilación de la columna en función de la amplitud y frecuencia de excitación.

2.1. Características del Dispositivo Experimental

El dispositivo experimental que se construyó para realizar el estudio de la columna de agua oscilante, como se muestra en la siguiente figura, consta de siete partes básicamente:

1. El tubo resonante donde oscila la columna de agua.
2. Un dispositivo para medir el nivel de agua dentro del tubo resonante.
3. Una cámara de compresión.
4. Un mecanismo para variar el volumen de la cámara de compresión con frecuencia variable.
5. Un sensor de posición para el pistón.

6. Un deposito de agua.
7. Un sistema de captura y almacenamiento de datos.

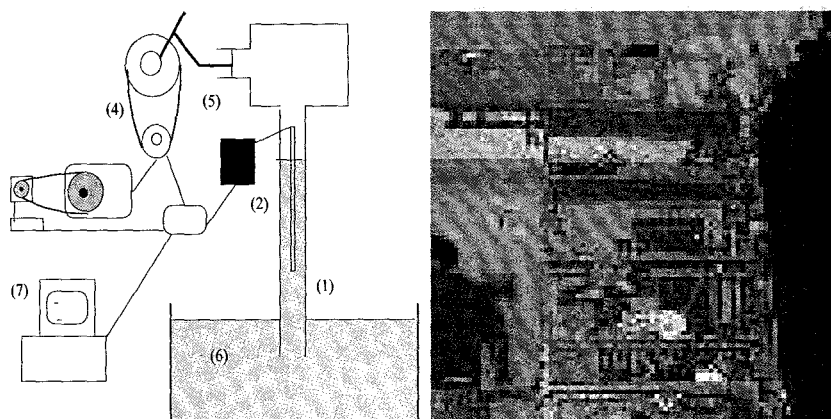


Figura 2.1: Dispositivo experimental para el estudio de una columna de agua oscilante excitada mediante el cambio en el volumen de la cámara de compresión.

Para determinar las dimensiones del dispositivo se consideraron varias cosas: Las dimensiones del laboratorio donde se construyó, el tamaño del depósito cilíndrico de agua con el que se contaba, el máximo intervalo de medición de los sensores del nivel de la columna de agua, el intervalo de frecuencias de excitación que se podían conseguir con los motores disponibles. La altura máxima del tubo resonante tenía que ser menor a la altura del laboratorio donde se construyó el dispositivo, ya que, el tubo tenía que estar en posición vertical. Cuando el tubo resonante se inclina, la superficie superior de la columna de agua al oscilar no es lo suficientemente plana; se forman pequeñas ondas en su superficie. De esta manera no es posible determinar el nivel de la columna de agua con la precisión deseada. La variación del nivel del depósito de agua durante las oscilaciones de la columna debe ser muy pequeña comparada con la altura de la columna. Esta variación está relacionada con la cantidad de agua que se desplaza durante las oscilaciones. Para poder realizar el experimento en un intervalo extenso de amplitudes

| | | | |
|----------|-----------------------|------------|------------------------|
| L | 1.045 m | H | 0.695 m |
| A | 0.0063 m ² | V | 0.0288 m ³ |
| p_a | 77.8 KPa | ρ | 1000 kg/m ³ |
| γ | 1.4 | g | 9.78 m/s ² |
| f_l | 0.991 1/s | ω_l | 6.23 rad/s |

Cuadro 2.1: Valores de los parámetros del montaje experimental

de oscilación es necesario que el área transversal del tubo resonante (1) sea mucho menor al área transversal del depósito cilíndrico (6).

Para determinar el volumen de la cámara de compresión se utilizó la expresión para la frecuencia de las oscilaciones libres (1.5), se escogió un intervalo de frecuencia tal que se pudiera medir las oscilaciones libres a simple vista con ayuda de un cronometro.

Los valores que se escogieron para la frecuencia de oscilaciones libres f_l , la distancia de la salida del tubo al nivel de equilibrio de la columna de agua L , el área transversal de tubo A , la distancia del nivel de equilibrio de la columna a la superficie del depósito de agua H ; aparecen en la siguiente tabla junto con el valor del coeficiente de compresibilidad adiabática γ para un gas ideal, el valor promedio de la presión atmosférica p_a y la aceleración de la gravedad g , ambos medidos en la Ciudad de México.¹

La cámara de compresión debe estar lo suficientemente bien sellada como para que el nivel de equilibrio de la columna no cambie durante una medición del promedio de la amplitud de las oscilaciones de la columna para una frecuencia y amplitud de excitación fijas. Se utilizó piezas de PVC reforzado como material de construcción de la cámara. Inicialmente se utilizaron piezas de acrílico para la construcción de toda la cámara, sin embargo no se consiguió que las fugas en las uniones pegadas con silicón fueran lo suficientemente pequeñas como para realizar el experimento; el silicón no se adhiere lo suficientemente bien al acrílico. Las piezas de PVC se pegan muy bien con pegamento para PVC, además de que son fáciles de adquirir y de ensamblar. El tubo donde oscila la columna está hecho de acrílico transparente, se escogió de este material para poder observar directamente la oscilación de la columna y obtener una calibración del sensor de nivel ya instalado dentro del

¹el valor de la presión atmosférica que se utilizó es el que reportó la estación meteorológica de Tezontle del SMN.

tubo. En vez de utilizar un pistón para cambiar el volumen de la cámara de compresión se utilizó un fuelle de automóvil. Este cambio se debió a que no es sencillo lograr que un pistón no tenga fugas de aire hacia el interior de la cámara, vea la figura (2.2).

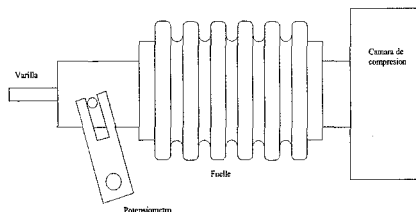


Figura 2.2: Fuelle utilizado como sustituto de un pistón.

El volumen de aire desplazado al comprimir el fuelle varía prácticamente de forma lineal con la longitud del desplazamiento, en la siguiente sección se muestra la calibración del fuelle en la figura (2.5).

El mecanismo de compresión del fuelle consta de una biela, un brazo con eje de giro variable para cambiar la amplitud de excitación, un motor de corriente directa alimentado por una fuente de voltaje variable y un juego de poleas para reducir la velocidad angular del motor. Para controlar la velocidad del motor se variaba el voltaje suministrado al motor por la fuente de poder moviendo la perilla de la fuente con ayuda de un motor de pasos controlado por la computadora por medio de la tarjeta analógica-digital.

Para medir la frecuencia de la excitación se utilizó un dispositivo basado en un potenciómetro, esta resistencia forma parte de un circuito divisor de voltaje. Al variar la posición del fuelle cambia la resistencia del potenciómetro y por lo tanto varía en el voltaje de salida del divisor de voltaje. La salida del divisor está conectada a un puerto analógico de la tarjeta de adquisición de datos.

Se utilizaron dos sensores distintos para realizar la medición del nivel del agua dentro del tubo resonante. Uno de los sensores está basado en reflexión de luz infrarroja y el otro en cambio de capacitancia entre dos cables paralelos. El sensor infrarrojo utiliza el principio de reflexión para medir la distancia entre un objeto y el sensor, es necesario que la superficie del objeto refleje la suficiente luz infrarroja como para que el sensor la detecte. En el caso de la columna de agua, su no refleja la suficiente luz infrarroja como

para detectar el nivel de la columna, además al oscilar la columna de agua se forma un menisco en la superficie superior de la columna, lo cual dificulta que la luz reflejada llegue al detector. Para resolver este problema se utilizó un cilindro de poliuretano muy delgado. El cilindro, al ser menos denso que el agua flota mientras la columna oscila y refleja la suficiente luz infrarroja como para ser detectado por el sensor. En la siguiente figura se muestra el funcionamiento del sensor infrarrojo básico

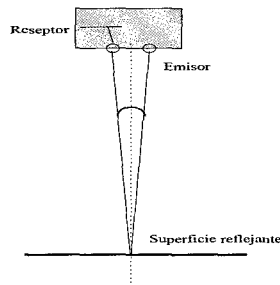


Figura 2.3: Funcionamiento básico del sensor infrarrojo.

El emisor manda un pulso de luz infrarroja cada cierto intervalo de tiempo hacia la superficie reflejante a una distancia d con un cierto ángulo θ con respecto al eje del sensor. La luz infrarroja es reflejada en la superficie del objeto hasta llegar a una lente cercana al emisor que la enfoca, la luz llega a un punto del receptor, este produce una diferencia de potencial distinta según sea el punto al que haya llegado la luz, la señal sale del receptor para ser amplificada y limpiada por un circuito y finalmente la señal llega a la tarjeta de adquisición de datos.

El sensor basado en capacitancia variable consta de dos circuitos resonantes RLC básicamente, uno de los circuitos está sintonizado a una frecuencia $\sqrt{L_0 C_0}$ fija que sirve de referencia. El segundo circuito tiene una frecuencia de resonancia que varía debido al cambio en la capacitancia de cables dentro del tubo resonante. Al moverse el agua entre los cables cambia el dieléctrico entre ellos provocando una variación en la capacitancia. De esta manera es posible obtener una relación entre la diferencia de voltaje y la altura de la columna de agua.

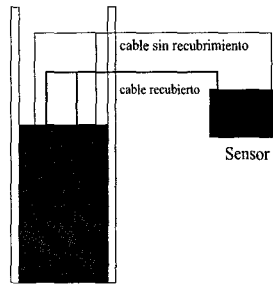


Figura 2.4: Sensor de capacitancia.

2.1.1. Calibraciones

Es necesario que la variación del volumen provocada por el desplazamiento del fuelle sea del mismo tipo que la producida por un pistón de sección transversal constante, debe ser lineal. Para encontrar la relación entre el desplazamiento del fuelle y el cambio en el volumen de la cámara de compresión, se midió la diferencia del nivel de la columna de agua con respecto a su nivel de equilibrio H provocada por el desplazamiento con respecto la posición de equilibrio del fuelle de manera estática.

Utilizando la relación para compresión adiabática $p_c V^\gamma = p_c 0 V_0^\gamma$ y la ecuación para la presión hidrostática de la columna de agua $p_c - p_a = \rho g H$ se llega la siguiente expresión

$$\Delta V = \left(\frac{p_a + \rho g H}{p_a \rho g (H + \Delta H)} - 1 \right) V_0,$$

esta expresión relaciona el cambio en el volumen en la cámara de compresión ΔV con el cambio en la altura de la columna ΔH . La gráfica siguiente muestra la dependencia lineal del desplazamiento del fuelle con el cambio en el volumen de la cámara de compresión. Este comportamiento nos permite sustituir al pistón por un fuelle.

Se realizaron mediciones de prueba con los dos sensores de nivel de agua para determinar cual era el mejor para realizar nuestro experimento. Se hicieron dos tipos de calibraciones, una con la columna de agua estática y otra con la columna oscilando. Para realizar la calibración estática simplemente se dejaba fijo el nivel de la columna y se capturaban los datos. En las mediciones estáticas los datos obtenidos con el sensor infrarrojo tienen menos

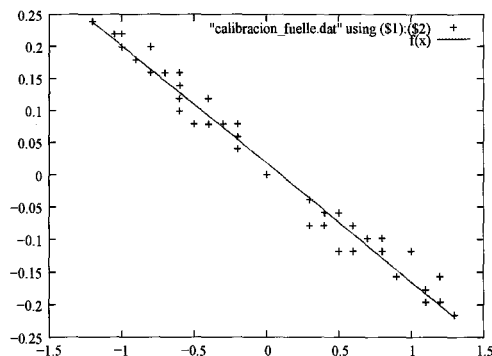


Figura 2.5: Calibración del fuelle. El eje vertical corresponde al volumen desplazado, el eje horizontal al desplazamiento del fuelle.

ruido que los obtenidos con el sensor de capacitancia.

La calibración de los sensores de nivel con la columna de agua en movimiento se realizó de la siguiente manera. Se hacía oscilar la columna de agua con una frecuencia de excitación constante. Una vez que la columna alcanzaba un movimiento periódico se capturaban en la computadora los datos obtenidos por los sensores. Al mismo tiempo se medían los máximos y mínimos de la oscilación con ayuda de una regla. Este proceso se repitió para distintas amplitudes de excitación, para un nivel de equilibrio fijo de la columna. Se encontró que cuando la columna de agua oscila el sensor de capacitancia es mejor para medir la altura de la columna. La señal que proviene del sensor óptico tiene más ruido que la del sensor de capacitancia variable. El cilindro de poliuretano que se utilizó como superficie reflejante tenía un movimiento un tanto errático durante la medición, debido a la fricción con las paredes del tubo. Durante el movimiento el cilindro deja de ser perpendicular al eje del sensor, por este motivo elegimos el sensor de capacitancia para realizar el experimento. La curva de calibración del sensor de capacitancia se muestra a continuación.

Para realizar la calibración de sensor de posición del fuelle se procedió de manera similar. Se capturaron los datos provenientes del divisor de voltaje y se midió los puntos máximos y mínimos de la oscilación. En base a estos se obtuvo la curva de calibración.

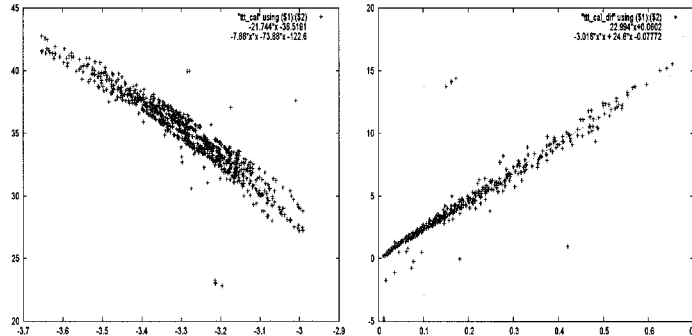


Figura 2.6: Calibraciones de sensor basado en capacitancia. Como se aprecia en la gráfica de la izquierda el voltaje de salida del sensor tiene casi un comportamiento lineal con respecto a la altura de la columna en un intervalo de veinte centímetros. La gráfica de la derecha muestra la diferencia de voltajes de la salida contra la diferencia de alturas y también se aprecia un comportamiento casi lineal.

2.1.2. Automatización del dispositivo

Para poder encontrar la dependencia de la amplitud de máxima oscilación en términos de la amplitud de excitación, se requiere tomar un número considerable de mediciones. Es necesario hacer un barrido en las frecuencias de excitación para cada amplitud de excitación, y así, determinar un intervalo de frecuencias en donde la columna entra en resonancia. Por este motivo, se decidió implementar un sistema de captura de datos automático y un sistema de control de la frecuencia de excitación también automático, ambos controlados por una computadora. Para su realización, se optó por utilizar una tarjeta NIDAQmx 1608 de la marca National Instruments con puertos de entrada y salida tanto analógicas como digitales. Esta tarjeta también fue utilizada para controlar el motor de pasos que controla el voltaje suministrado por la fuente para el motor. Los programas que realizaron la captura e interpolación de los datos provenientes de los sensores de capacitancia y de la posición del fuelle, así como también los programas que controlaban el motor de pasos y el interruptor para el motor, fueron escritos en lenguaje C. Se utilizaron subrutinas de entrada y salida de National Instruments hechas para la tarjeta. El sistema operativo que se utilizó fue Linux Fedora Core

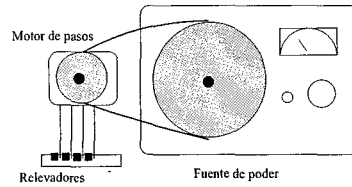


Figura 2.7: Dispositivo para controlar la velocidad del motor que mueve el fuelle.

4. La estructura del programa que controlaba el dispositivo para realizar el experimento es la siguiente:

1. Encendido del motor.
2. Captura de datos provenientes de los sensores de posición del fuelle y nivel de la columna.
3. Interpolación de los datos obtenidos.
4. Cálculo de la amplitud de oscilación de la columna y frecuencia de oscilación del fuelle.
5. Apagado del motor.
6. Cambio de la frecuencia de excitación (cambio en el voltaje la fuente de poder del motor).
7. Repetición de ciclo.

2.2. Medición

Para realizar la medición de la amplitud promedio de las oscilaciones de la columna para una amplitud de excitación fija se procedió de la siguiente manera: Primero, se dejaba a la columna con un nivel de equilibrio, el mismo para todas las mediciones que se realizaron, se encendía el motor, se esperaban veinte segundos mientras la columna de agua alcanzaba un movimiento periódico, después se capturaban los datos del sensores de nivel de agua y de la posición del fuelle. Estos datos se promediaban y después se interpolaban

utilizando el método de interpolación polinomial de Lagrange. A partir de estos nuevos datos se obtuvo la frecuencia promedio de excitación y la amplitud promedio de oscilación de la columna. Una vez concluida la medición se apagaba el motor y se verificaba si se había cambiado el nivel de equilibrio de la columna, este cambio es debido a las fugas de aire al interior de la cámara de compresión. En caso de variar el nivel de equilibrio se colocaba nuevamente en el nivel inicial. Esta variación en el nivel de equilibrio entre cada medición era menor a dos milímetros. Todo este proceso se repitió diez veces. Las frecuencias de excitación y las amplitudes de oscilación para esa frecuencia se promediaron. Después se variaba la frecuencia de excitación variando el voltaje de la fuente que alimenta al motor y se repetía el proceso de medición. En la siguiente gráfica aparecen las curvas promedio para cada amplitud de oscilación.

Para definir más los máximos de estas curvas se hicieron más mediciones en la región de resonancia haciendo menor la diferencia de frecuencias entre puntos consecutivos, a estos puntos se les ajustó una parábola y partir del máximo de la parábola, se calculó el punto de resonancia. Los puntos obtenidos se muestran en la figura (2.8). Como se observa en la graficas de arriba, la frecuencia de resonancia depende de la amplitud de excitación. La máxima amplitud de oscilación de la columna esta en un pequeño intervalo de frecuencias, vea la figura (2.8). La dependencia de la amplitud de oscilación de la columna con respecto a la amplitud del cambio en el volumen de la cámara se muestra en la figura (2.9). En la misma figura se aprecian dos comportamientos, para amplitudes de excitación bajas la dependencia la amplitud de oscilación con respecto a la amplitud de excitación es $r \sim \lambda$, conforme aumenta la amplitud de excitación la pendiente disminuye de 1 a 0.8, es decir, $r \sim \lambda^{0.8}$.

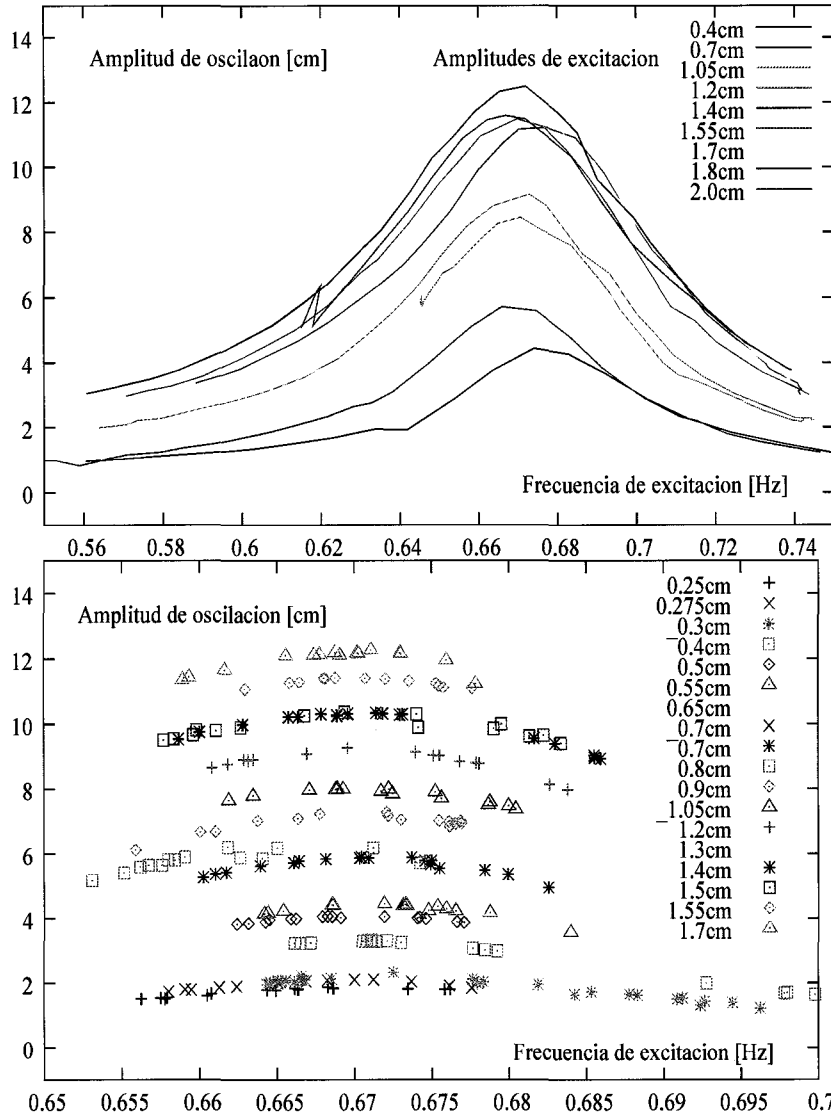


Figura 2.8: El eje vertical corresponde a la amplitud de oscilación de la columna, el eje horizontal a la frecuencia de excitación. En la gráfica de arriba cada curva corresponde a una amplitud de excitación distinta, abajo se encuentran más mediciones en la región de resonancia.

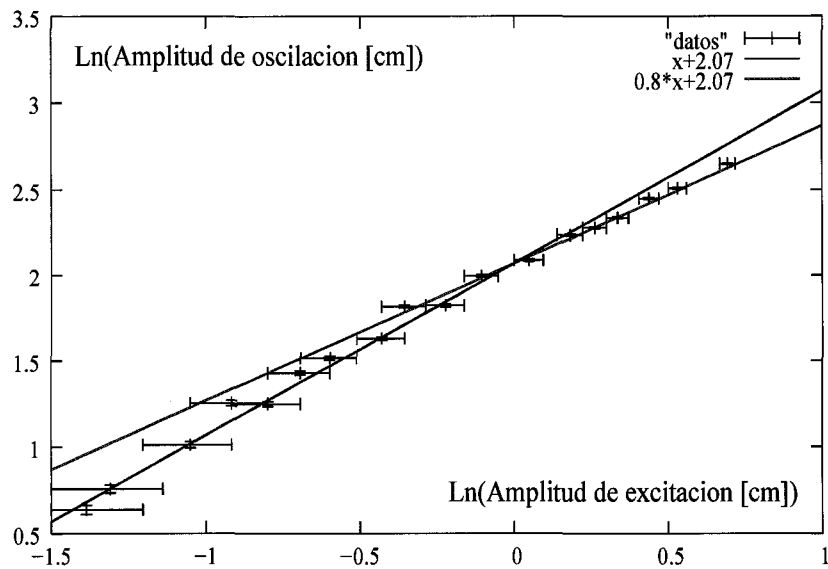


Figura 2.9: En el eje vertical el logaritmo natural de la máxima amplitud de oscilación, en el eje horizontal el logaritmo natural amplitud de excitación. Se tienen dos comportamientos distintos para la máxima amplitud de oscilación en función de la amplitud de excitación. Cuando las amplitudes de excitación son pequeñas $r \sim \lambda$ y $r \sim \lambda^{0.8}$ para las amplitudes de excitación mayores.

Capítulo 3

Simulación Numérica y Análisis de Resultados

El análisis asintótico hecho en el primer capítulo permite estimar algunas propiedades de la solución a la ecuación (1.8). Esta ecuación es una simplificación de la ecuación que se ha propuesto para modelar el movimiento de la columna de agua oscilante, la ecuación (1.7). La simplificación que se hizo consiste en solo tomar en cuenta los términos hasta segundo orden de la serie de potencias del término asociado a la compresión adiabática del gas en la cámara de compresión. El desarrollo en serie se hizo con respecto a las variables z y $\beta \cos \Omega t / \omega_l$, además se aproximó el término de disipación $\kappa \dot{z} |\dot{z}|$ por $\kappa \dot{z}^3 \dot{z}_0$. Es necesario hacer este tipo de aproximaciones para poder aplicar el método asintótico de escalas múltiples.

Para saber si los resultados obtenidos mediante el análisis asintótico de la ecuación (1.8) concuerdan con las propiedades de la solución a la ecuación (1.7) es necesario hacer simulaciones numéricas de la ecuación (1.7). La propiedad en la que se centró el análisis, fue la dependencia de la máxima amplitud de oscilación de la columna con respecto a la amplitud de excitación al variar la frecuencia de excitación.

El método numérico utilizado para calcular la solución numérica de la ecuación (1.7) fue Runge-Kutta de orden 7-8. Las condiciones iniciales fueron $\dot{z}_0 = 0$ y $z_0 = 0$. El intervalo de tiempo que se utilizó para el cálculo de las soluciones fue $[0, 300]$ segundos, este intervalo es lo suficientemente grande como para que la solución alcanzara un comportamiento periódico. Los valores de las constantes que aparecen en la ecuación (1.7) son los mismos que las del experimento, vea la tabla (2.1).

La ecuación diferencial (1.7) tiene dos parámetros libres, la masa añadida η y la constante de disipación $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}$. Para obtener una estimación de estos dos parámetros se realizaron un número considerable de simulaciones variando sus valores. Se encontró que entre mayor es el valor de la masa añadida η menor es la frecuencia de resonancia y entre mayor es la constante de disipación $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}$ menor es la máxima amplitud de oscilación, como es de esperarse. Se buscaron los valores de las constantes η y $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}$ tales que los datos obtenidos a partir de las simulaciones se aproximaran más a las curvas experimentales. Se obtuvo $\eta = 0,1$ y $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D} = 0,45$. En la siguiente grafica se muestra la amplitud de oscilación en función de la frecuencia de excitación para distintas amplitudes de excitación obtenidas a partir de las simulaciones numéricas.

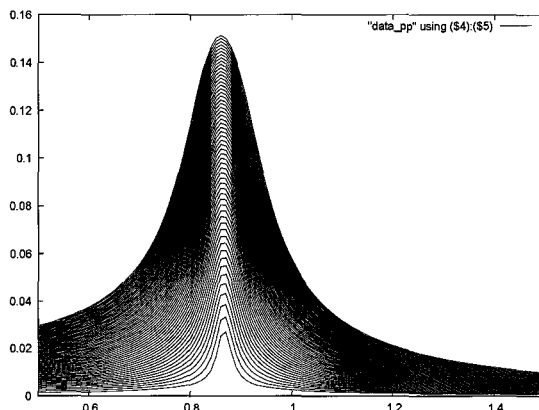


Figura 3.1: En el eje vertical tenemos a la amplitud de oscilación de la columna, en el eje horizontal a la frecuencia de excitación. Estas curvas fueron calculadas a partir de las simulaciones numéricas de la ecuación (1.5) esta ecuación es equivalente la ecuación (1.7).

Como se observa en la gráfica anterior el comportamiento de las curvas obtenidas por medio de las simulaciones es muy similar al de las curvas obtenidas experimentalmente, para frecuencias mayores que la de resonancia la amplitud de oscilación decrece más rápido que para las frecuencias más bajas, como se ve en la figura (2.7). Comparando la dependencia de la máxima amplitud de oscilación en función de la amplitud de la excitación se encuentra que los resultados obtenidos a partir de las simulaciones de la ecuación

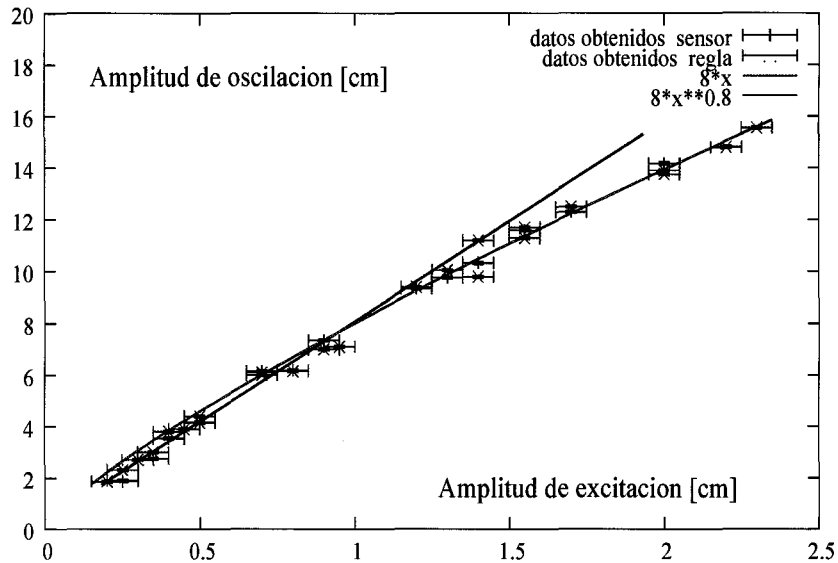


Figura 3.2: En el eje vertical tenemos a la amplitud de oscilación, en el eje horizontal a la amplitud de la excitación. La curva azul corresponde al ajuste con una potencia $r_0 \sim \lambda$ y la roja a $r_0 \sim \lambda^{0.8}$, los puntos negros fueron obtenidos con el sensor de capacitancia y los azules directamente con una regla.

(1.7) se ajustan muy bien al resultado obtenido mediante el análisis asintótico, es decir, $r_0 \sim \lambda^{0.5}$, sin embargo obtuvimos de manera experimental que el comportamiento de la máxima amplitud de oscilación con respecto a la amplitud de excitación es $r_0 \sim \lambda$ para amplitudes de excitación pequeñas y $r_0 \sim \lambda^{0.8}$ para las amplitudes de excitación grandes, vea las figuras (3.2) y (2.8). Una posible explicación a esta discrepancia es que los valores de la máxima amplitud de oscilación obtenidos a partir de los datos experimentales no se aproximan lo suficiente a la máxima amplitud de oscilación. Entre menor es la amplitud de la excitación las curvas se vuelven más angostas, por lo tanto si la amplitud de excitación es pequeña al desplazarse alrededor de la frecuencia de resonancia la amplitud de oscilación cambia más rápido, como se aprecia en las figuras (2.7) y (3.1).

Si se considera una frecuencia ν cercana a la frecuencia de resonancia y se grafican las amplitudes de oscilación correspondiente a la frecuencia ν

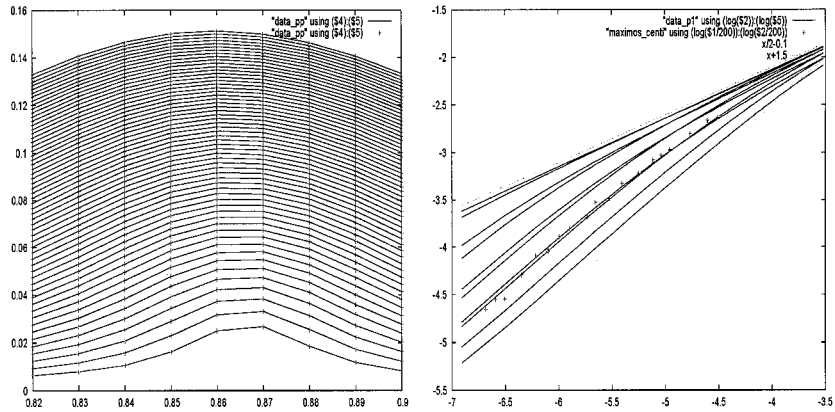


Figura 3.3: En la grafica de la izquierda los puntos verdes corresponden a amplitudes de oscilación con la misma frecuencia. A la derecha se grafica la amplitud de esas oscilaciones en rojo contra la amplitud de excitación en escala logarítmica, los puntos verdes son los datos obtenidos a partir del experimento, se aprecia los máximos de la simulaciones que forman una recta de pendiente 0.5, de color azul. Conforme la amplitud de excitación crece, las curvas se acercan se acercan más a una recta de pendiente un medio.

contra la amplitudes de excitación, se encuentra que la grafica tiene el mismo comportamiento que la obtenida a partir de los datos experimentales, como se aprecia en la figura (3.3). Este hecho nos sugiere que talvez es necesario mejorar las mediciones para determinar el máximos de la curva de amplitud de oscilación en función de la frecuencia de excitación.

Conclusiones y Recomendaciones

Se encontro que el comportamiento de la máxima amplitud de oscilación en función de la amplitud de excitación predicho por el análisis asintótico de la ecuación (1.8) concuerda con el obtenido por medio de las simulaciones de la ecuación (1.7). La ecuación (1.7) se propuso para modelar el movimiento de la columna de agua oscilante excitada paramétricamente mediante el cambio periódico del volumen de la cámara de compresión, esto muestra que las aproximaciones hechas precervan el comportamiento de la solución. Sin embargo los resultados experimentales difieren de los predichos por el modelo. Esto talvez se deba a que se requiere de una mayor precisión para determinar los máximos de dichas curvas que la lograda con los sensores basados en capacitancia que se tienen. Otra posible explicación sería que los valores de la masa añadida η y coeficiente asociado a las pérdidas $\frac{K}{2} + f\frac{L}{D}$ varíen de manera considerable en los intervalos en los que realizamos el experimento y por tanto no se puedan aproximar por constantes en dichos intervalos. Para confirmar cualquiera de estas dos posibles explicaciones es necesario mejorar la medición del nivel de la columna de agua oscilante. Para obtener más información de los términos de disipación y masa añadida se podría utilizar la técnica de visualización por imágenes de partículas para obtener el campo de velocidades del fluido cercano a la boca del tubo resonante, de esta forma se puede observar el comportamiento de los vórtices que se forman a su alrededor, también se podría obtener una estimación de la cantidad de agua oscila junto con la columna de agua y así poder asociar directamente un valor a la masa añadida η .

Es necesario mejorar los dispositivos para medir el nivel de la columna de agua mientras esta oscila, sobre todo para amplitudes de oscilación pequeñas y también los dispositivos de control de la velocidad del motor que mueve el

fuelle para poder tener muchas más mediciones en la región de resonancia. Otra posibilidad para medir el nivel de la columna sería mediante una cámara de vídeo y un programa que procese las imágenes obtenidas por la cámara, también podría medir el nivel de la columna con un sensor basado en la resistencia del agua.

Los datos experimentales obtenidos junto con desarrollo del dispositivo experimental, servirán para construir un prototipo de un sistema de bombeo por energía de oleaje capaz de bombear el agua de una laguna constera al mar. Entre las aplicaciones de este dispositivo se encuentra la acuicultura y el saneamiento de lagunas costeras.

Bibliografía

- [1] Nayfeh AH. *Introduction to Perturbation Methods*. John Wiley Sons, Inc., New York, 1970.
- [2] Prado E Olvera A Czitrom SPR, Godoy R and Stern C. Hydrodynamics of an oscillating water column seawater pump: Part ii tuning to monochromatic waves. *Ocean Engineering*, (27):1199–1219, 2000.
- [3] Prado E Pérez P Czitrom SPR, Godoy R and Peralta-Fabi R. Hydrodynamics of an oscillating water column seawater pump: Part i theoretical aspects. *Ocean Engineering*, (27):1181–1198, 2000.
- [4] Smith Jordan DW. *Introduction to diferencial ecuation and dinamical systems*. Applied mathematics. Oxford Univ Press, 1998.
- [5] Cole Kevorkian. *Multiple scale and singular perturbation methods*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, 1996.
- [6] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluids Mechanic*. Pergamon Press, USA, 1968.
- [7] Mc Cormick M. Ocean waves energy conversion. (249):720–724, 1974.
- [8] Prado E Olvera A and Czitrom S. Parametric resonance in an oscillating water column. *Journal of Engineering Mathematics*, (57):1–21, 2007.
- [9] Salter SH. Wave power. (249):720–724, 1974.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Modelo Matemático | 8 |
| 1.1. Ecuación de flujo de momento y Ecuación para flujo incompresible | 9 |
| 1.2. Ecuación de la columna oscilante | 11 |
| 1.2.1. Deducción Lagrangiana de la ecuación de movimiento . | 14 |
| 1.3. Excitación de la columna | 15 |
| 1.3.1. Método de escalas múltiples | 17 |
| 2. Dispositivo Experimental y Medición | 22 |
| 2.1. Características del Dispositivo Experimental | 22 |
| 2.1.1. Calibraciones | 27 |
| 2.1.2. Automatización del dispositivo | 29 |
| 2.2. Medición | 30 |
| 3. Simulación Numérica y Análisis de Resultados | 34 |