UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA INTERACTIVA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

MARÍA JUANA LINARES ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS HERNÁNDEZ GARCIADIEGO

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE DE 2007

AGRADECIMIENTOS

A Héctor de Jesús Argueta Villamar
Porque sin su amor, respeto y apoyo de siempre,
en particular este trabajo no hubiera sido posible.

A mis sinodales
Por sus oportunas y valiosas observaciones.

Una mención especial a mi director de tesis:
Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Por su paciencia y apoyo para culminar este trabajo.

A mis maestros y amigos
Quienes me hicieron crecer profesionalmente.

A mis padres
Por todo el esfuerzo que hicieron para darme la oportunidad de estudiar.

A mis hermanos
Por la unidad y el amor que siempre hemos cultivado.

A mi familia política
Por todas sus atenciones y cariño que siempre me han brindado.

A Luis Guillermo Custodio Linares
Por toda la fuerza que significa en mi vida.

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

OFICIO FCIE/DEP/0151/07
ASUNTO: Asignación de Sinodales

DR. CARLOS HERNÁNDEZ GARCIADIEGO
P r e s e n t e

Por este conducto me permito comunicarle como Director(a) de Tesis del(a) **MAT. MARÍA JUANA LINARES ALTAMIRANO,** quién desarrolló el Trabajo de Tesis titulado: "**GEOMETRIA INTERACTIVA**" que el Comité Académico del Posgrado de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada, designó a los siguientes sinodales para dictaminar si el trabajo que ha desarrollado como tesis el(a) alumno(a) antes mencionado tiene los méritos para obtener el grado de MAESTRO(A) EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS).

PRESIDENTE	DR.	CARLOS HERNÁNDEZ GARCIADIEGO
VOCAL	M. EN C.	JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA
SECRETARIO	DR.	JAVIER BRACHO CARPIZO
SUPLENTE	M. EN C.	ANA IRENE RAMÍREZ GALARZA
SUPLENTE	DR.	JOAQUÍN DELGADO FERNÁNDEZ

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarles un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPIRÍTU"
Cd, Universitaria, D. F., a 08 de mayo de 2007

COORDINADOR DEL PROGRAMA

FACULTAD DE CIENCIAS

DR. MANUEL JESÚS FALCONI MAGAÑA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MJFM/ASR/mnm*

Í N D I C E

GEOMETRÍA INTERACTIVA

Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Tesista: María Juana Linares Altamirano
Director de tesis: Dr. Carlos Hernández Garciadiego

1. Antecedentes

La computadora es una herramienta que en la etapa actual del desarrollo tecnológico, no deja lugar a dudas de su utilidad en casi todos los ámbitos de la actividad humana. La convergencia de medios a través de la computadora y las telecomunicaciones potencian su gran versatilidad y campo de acción.

En diversas partes del mundo la computadora ya se aplica de manera muy variada, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto de manera presencial como a distancia, y sin lugar a dudas, se vislumbra un enorme potencial, sobre todo con el desarrollo tan impresionante de Internet y de diversas tecnologías accesorias en permanente desarrollo, como los son las tabletas y los pizarrones electrónicos.

Un hecho fundamental es que en el campo de las matemáticas ya se cuenta con software diverso, que posibilita un mejor aprovechamiento de la creatividad, sensibilidad, experiencia, madurez y conocimiento matemático de quien lo usa y que además, entre otras cosas, facilita construir material interactivo para poder inducir el descubrimiento y ayudar a visualizar de muchas maneras resultados que se antojan complicados, dejando así más tiempo para el análisis y la profundización de los conceptos.

Muy especialmente para la Geometría, el uso del software proporciona amplías posibilidades para visualizar, explorar, analizar y conjeturar resultados. Existe software que le proporciona al usuario la posibilidad de colocar las construcciones geométricas en diversas situaciones, a diferencia de los dibujos estáticos y casi únicos de un libro, o lo que se puede hacer con gises de colores en un pizarrón tradicional. Al usar software para realizar construcciones geométricas, otro elemento de gran apoyo, aunque parezca simple, es el hecho de poder borrar y trazar cuantas veces sea necesario y hacerlo con extrema limpieza.

Existe una amplia gama de programas computacionales, cada uno con sus propias características y posibilidades de desarrollo de construcciones geométricas dinámicas e interactivas, que permiten de alguna manera apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Algunos de ellos son: The Geometer´s Sketchpad, GeoLab, Descartes, Geogebra, Cabri y Cinderella, entre otros.

1.a El Proyecto Descartes

Como un antecedente de gran relevancia, en materiales en Internet que pueden apoyar al estudiante en sus materias de matemáticas, se destaca el Proyecto Descartes promovido y financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España el sitio Web de tal proyecto es el siguiente:

http://descartes.cnice.mecd.es/

"Los materiales de este proyecto han sido desarrollados mediante **Descartes** que es un *applet* (programa en lenguaje *Java*) configurable, diseñado para presentar interacciones educativas con números, funciones y gráficas. **Descartes** puede ser utilizado por los autores de páginas *Web* educativas para enriquecer sus materiales con una amplia variedad de modelos matemáticos interactivos

El Proyecto Descartes ha sido promovido y financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, con la finalidad de aprovechar las ventajas del ordenador y de Internet para ofrecer a los profesores y a los alumnos una nueva forma de enseñar y aprender Matemáticas

Durante los últimos veinte años el Ministerio de Educación y Ciencia ha puesto en marcha numerosos proyectos para promover la utilización de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TICs) como recurso didáctico, uno de ésos es:

"El proyecto Descartes tiene como principal finalidad promover nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas integrando las TICs en el aula como herramienta didáctica. Aparece en el año 1999 con la intención de romper esa tendencia tradicional aprovechando las circunstancias que se dan en este nuevo siglo, tanto desde el punto de vista económico y tecnológico, como es el abaratamiento de los equipos, la aparición de las líneas de alta velocidad para la transmisión de datos, la utilización generalizada de Internet a bajo coste, etc.; como social, la utilización generalizada del ordenador y de Internet en nuestra sociedad y, en particular, el interés de muchos profesores de matemáticas por las TICs."

Los informes de la OCDE muestran mucho retraso en la utilización de las TICs como medio didáctico, en general, en los países más avanzados.

Esta información se obtuvo del sitio Web:
http://descartes.cnice.mecd.es/presentacion/presentacion_web.html

Se puede observar que aunque existen en la Web, diversos sitios sobre Geometría Euclidiana y casi nada sobre Geometría Moderna, frecuentemente son páginas Web con textos que contienen imágenes fijas, o bien construcciones interactivas aisladas sobre algunos tópicos particulares: El software Geometría Interactiva intenta ser un grano de arena en el sentido de ofrecer a los usuarios un software con características que lo distingan de los existentes, como lo haremos ver en el apartado 5.b.

2. El software Geometría Interactiva

Así, con base en las posibilidades del software The Geometer´s Sketchpad, y de JavaSketchpad su traductor a Java se construyó el software titulado Geometría Interactiva, que puede apoyar a los alumnos en el estudio de varios teoremas importantes de un primer curso de Geometría Moderna.

Antes que todo, se desea aclarar que Geometría Interactiva no es un libro, ni pretende reemplazar a ningún libro y mucho menos al maestro en la enseñanza de la Geometría Moderna, tampoco pretende reemplazar el trabajo que debe realizar el estudiante para comprender alguna demostración de geometría. Simplemente, se pretende sea una herramienta de apoyo al estudio de tan importante materia.

2.a Objetivo de Geometría Interactiva
El propósito inicial del software Geometría Interactiva, únicamente era crear un material de consulta para los estudiantes que presentara la estructura del trabajo que se realiza en matemáticas, mediante demostraciones de los teoremas que se estudian en un primer curso de Geometría Moderna. Los teoremas y sus demostraciones irían acompañados de construcciones geométricas (applets) realizadas en páginas Web. Pero al ir avanzando en la demostración de algunos ellos se vio la necesidad de incorporar como antecedentes, de la manera de trabajar en matemáticas, a la Geometría Euclidiana. De otra manera no sólo quedaría fuera de contexto este software, sino más aún, quedaría incompleto puesto que la forma de trabajar en matemáticas, en particular en Geometría Moderna, depende en gran medida de lo construido por los antiguos griegos, en particular por Euclides.

La página Web de Inicio del programa de Geometría Interactiva es la siguiente:

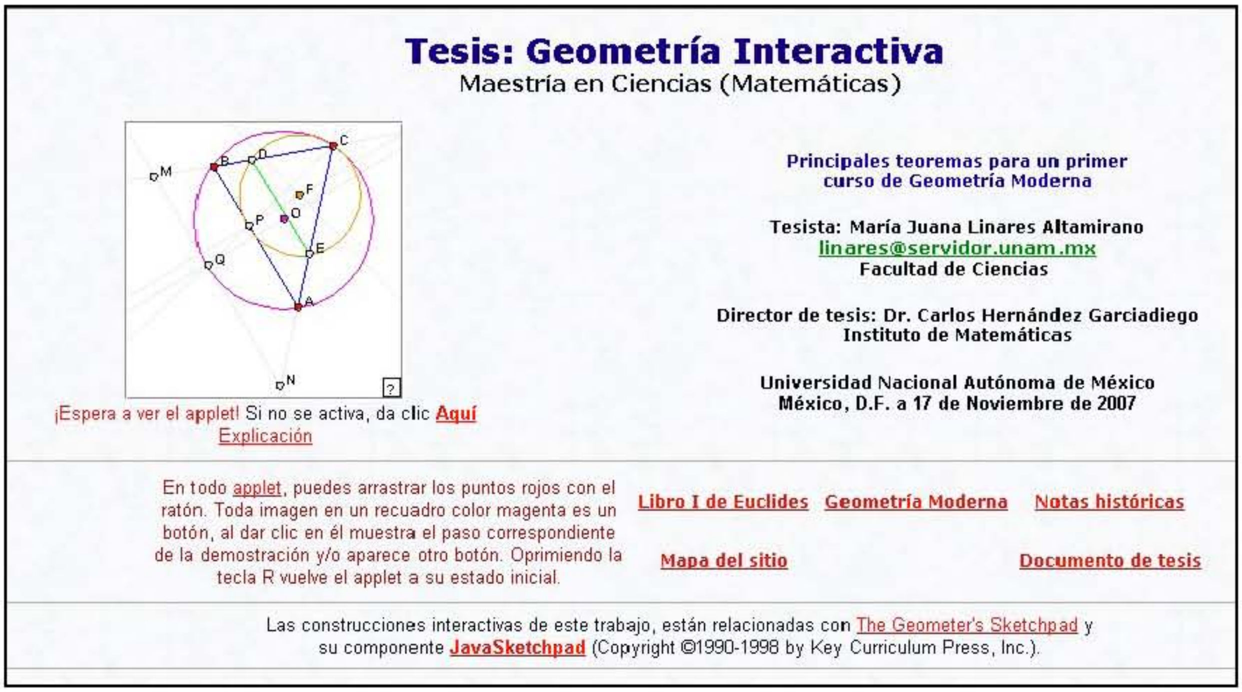


Imagen de la página Web que contiene el menú principal del software Geometría Interactiva.

Los hipervínculos que Geometría Interactiva tiene en su menú principal, corresponden a los temas que trata este software:

- Libro I de Euclides
- Geometría Moderna
- Notas históricas
- Mapa del Sitio
- Documento de tesis

2.b Características de las páginas Web de Geometría Interactiva
Se decidió presentar cada uno de los teoremas de la siguiente forma:
Cada teorema es presentado en una página Web, con su enunciado, su demostración formal, y un applet correspondiente a la construcción geométrica

interactiva. Esta página Web consta de tres marcos: el marco título, el marco izquierdo y el marco derecho. El marco título contiene la página Web correspondiente al enunciado del teorema, en el marco izquierdo está la página Web con la demostración del teorema, y en el marco derecho está la página Web que contiene el applet de la construcción geométrica interactiva. En él, se desarrolla paso a paso, la construcción geométrica conforme se van dando los argumentos de la demostración.

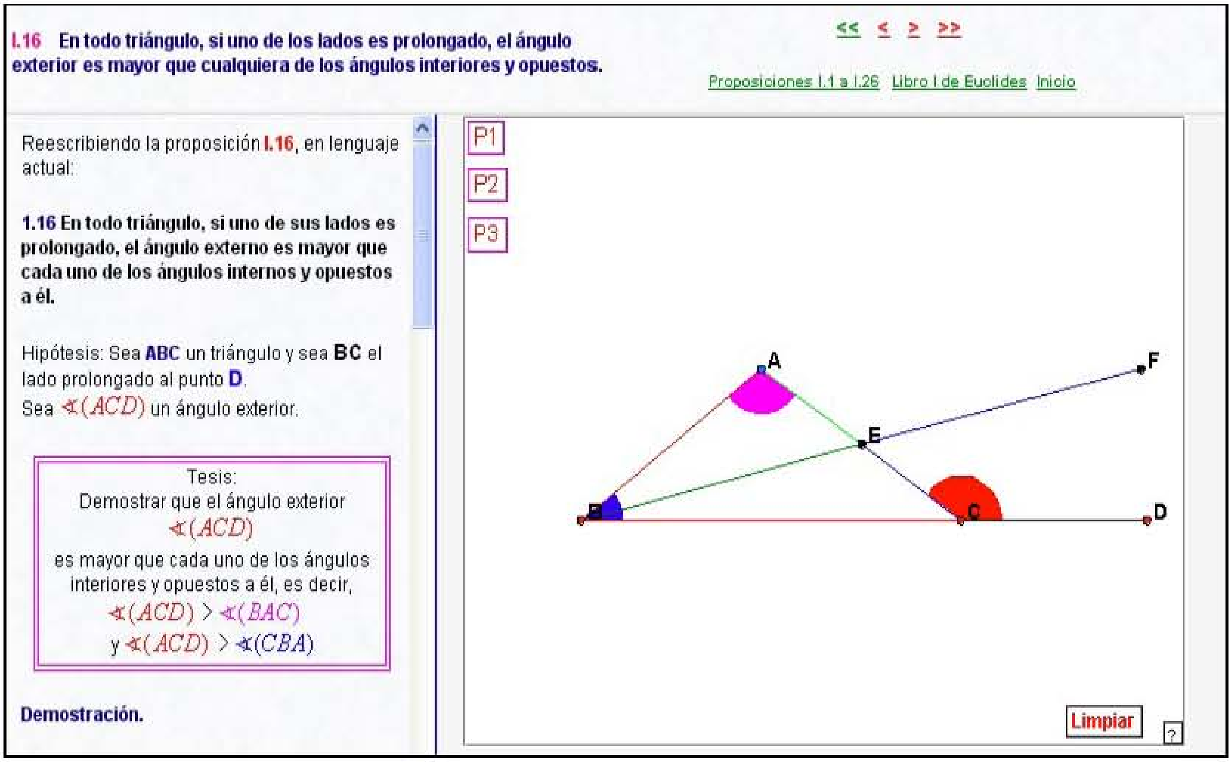


Imagen de la página Web que contiene la Proposición I.16 del Libro I de los Elementos de Euclides.

3. Los temas de Geometría Interactiva

A continuación se enlistan los temas desarrollados en este software.

3.a Tema **Libro I de Euclides**, página Web que presenta el Libro I de los Elementos de Euclides. Este tema se introdujo con la idea de hacer ver el gran rigor matemático con el que los antiguos griegos trabajaban las matemáticas. En cada paso de la demostración de una proposición se hace referencia a la definición, el postulado, la noción común o alguna otra proposición ya demostrada que lo justifique. La página Web del tema I, **Libro I de Euclides**, contiene una Introducción con las *23 definiciones*, los *5 postulados* y las *5 nociones comunes* de este libro; así como las *48 proposiciones* de que consta . Los hipervínculos que presenta esta página Web son los siguientes:

- Introducción.
- Proposiciones 1 a 26.
- Proposiciones 27 a 32.
- Proposiciones 33 a 48.
- Bibliografía

Más adelante, se describe con más detalle el contenido de este tema (ver **4.a**).

Es adecuado resaltar que los objetos con los que trabaja Euclides son *puntos*, *líneas rectas acotadas*, *círculos*, los que actualmente llamamos *segmentos*, *circunferencias*, *figuras*, etc. Y a pesar de que Euclides definió cada uno de los objetos con los que trabaja, algunas de sus definiciones no son afortunadas, más bien son muy oscuras.

A diferencia de los antiguos griegos, actualmente en la enseñanza de la geometría elemental, se da por supuesto que los alumnos están familiarizados con los conceptos básicos de *punto*, *recta*, *plano*, *espacio*, así como con las relaciones elementales entre ellos. "Pensamos diferente respecto a definiciones de objetos matemáticos hoy en día: no es necesario definir los objetos, lo que importa es únicamente la interrelación entre ellos. Esta interrelación se tiene que asentar por completo en los axiomas. Lo que nos imaginemos bajo el nombre de "*punto*" no importa mientras procuremos que el objeto imaginado satisfaga las relaciones exigidas en los axiomas" [Ba].

Cabe mencionar que los enunciados originales de las proposiciones del Libro I de los Elementos de Euclides se han respetado, pero se ha intentado enunciarlas en lenguaje actual, por ejemplo:

El enunciado de la Proposición I.4, es:

> *I.4 Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos contenidos por los lados iguales, entonces también tiene la base igual a la base, el triángulo igual al triángulo y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber aquellos opuestos a los lados iguales.*

Versión actualizada

> *I.4 Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes (LAL).*

Varios estudiosos de la ciencia concuerdan en que el estudio de la Geometría Euclidiana ayuda fuertemente a desarrollar el pensamiento matemático pues su método axiomático o método euclidiano es considerado la mejor introducción al razonamiento deductivo formal. Es decir, su método teórico deductivo es tan válido no sólo en el estudio de la Geometría sino de las matemáticas en general.

Cada una de las proposiciones del Libro I de Euclides, es presentada en una página Web, con las características que ya se han descrito (ver **2.b.**).

3.b Tema **Geometría Moderna**, página Web que comprende nueve apartados con los teoremas más relevantes de un primer curso de Geometría Moderna así como sus correspondientes demostraciones. En la Introducción se proporcionan algunos conocimientos previos necesarios para estudiar adecuadamente el material que sigue. Además, la página Geometría Moderna contiene 67 teoremas distribuidos en los 9 apartados restantes, y se proporciona la Bibliografía usada en esta parte. Los hipervínculos que presenta son los siguientes

Más adelante, se verá con más detalle el contenido de este tema (ver **4.b**).

Cada teorema es presentado en una página Web, con las características que ya se han descrito (ver **2.b**).

La siguiente es la imagen de la página Web correspondiente al Teorema **II.7.c**. Se trata del Teorema. La circunferencia de los nueves puntos.

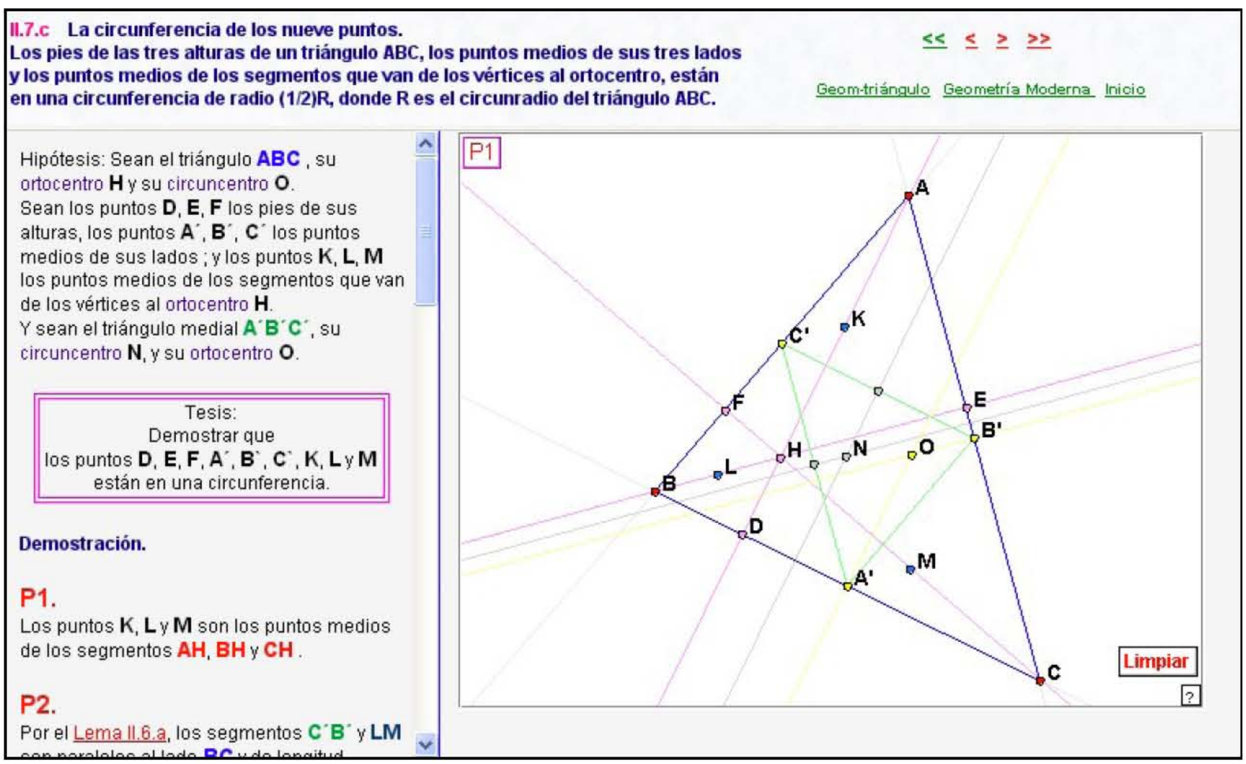


Imagen de la página Web contiene el Teorema II.7.c La circunferencia de los nueve puntos.

Reforzando lo escrito por [Ba], también puede verse en [Hi], como David Hilbert da una base para el análisis de nuestra intuición del espacio, y comienza su discusión, así:

"Consideremos tres sistemas distintos de cosas. Las cosas que componen el primer sistema las llamaremos *puntos* y los designaremos por las letras A, B, C, …; las que componen el segundo que llamaremos *líneas rectas* y las designaremos por las letras a, b, c, …; y aquellas del tercer sistema, que llamaremos *planos* y las designaremos por las letras griegas α, β, γ, …. Los puntos son llamados los *elementos de la geometría lineal*; los puntos y las líneas rectas, los elementos de la *geometría plana*; y los puntos, las líneas rectas, y los planos, los elementos de la *geometría del espacio* o los *elementos del espacio*. Imaginamos a estos puntos, líneas rectas, y planos como teniendo ciertas relaciones mutuas, que indicaremos por medio de palabras tales como "están situados", "entre", "paralelas", "congruentes", "continuas", etc. La descripción completa y exacta de estas relaciones se sigue como una consecuencia de los *axiomas de la geometría*. Estos axiomas pueden ser arreglados en cinco grupos. Cada uno de estos grupos expresa, por sí mismo, ciertos hechos fundamentales relativos a nuestra intuición. Llamaremos a estos grupos como sigue:

I. Axiomas de *conexión*.
II. Axiomas de *orden*.
III. Axiomas de las *paralelas* (axioma de Euclides).
IV. Axiomas de *congruencia*.
V. Axioma de *continuidad* (axioma de Arquímedes)."

En este tema de Geometría Moderna, se proporcionan algunos datos referentes a las aportaciones que se hicieron durante el siglo XIX a lo realizado por Euclides, por ejemplo, el empleo de *segmentos dirigidos*, *la razón en la que un punto sobre una recta divide a un segmento de ésta*, *sentido al área de un triángulo*, *puntos al infinito*, l*a recta al infinito*, *el plano al infinito*. Es decir, en este tema II se muestra una de las formas en que los matemáticos de la era moderna han extendido la geometría más allá de la heredada por los griegos mediante el descubrimiento de muchas nuevas proposiciones relacionadas con las circunferencias y las figuras rectilíneas, deducidas de las enumeradas en los Elementos de Euclides.

Como puede leerse en [Ca], "A la geometría deductiva desarrollada después de Euclides, y anterior a las llamadas geometrías no euclidianas, denominada por algunos autores Geometría Moderna, se le sitúa históricamente entre los siglos III A.C. y XIX D.C.".

3.c Tema **Notas Históricas**, página Web que contiene un conjunto de notas biográficas sucintas de matemáticos relacionados con el desarrollo de la Geometría. Los hipervínculos que presenta son los siguientes:

- III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
- III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
- III.c Menelao de Alejandría (70-130)

- III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
- III.e Pappus de Alejandría (290-350)
- III.f Girard Desargues (1591-1661)
- III.g Blaise Pascal (1623-1662)
- III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
- III.i Leonhard Euler (1707-1783)
- III.j William Wallace (1768-1843)
- III.k Charles Brianchon (1783-1864)
- III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
- III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
- III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

Más adelante, se describe con más detalle el contenido de este tema (ver **4.c**).

Las páginas Web de estas notas biográficas contienen hipervínculos, que permiten acceder a la demostración de algún teorema perteneciente a alguno de estos personajes.

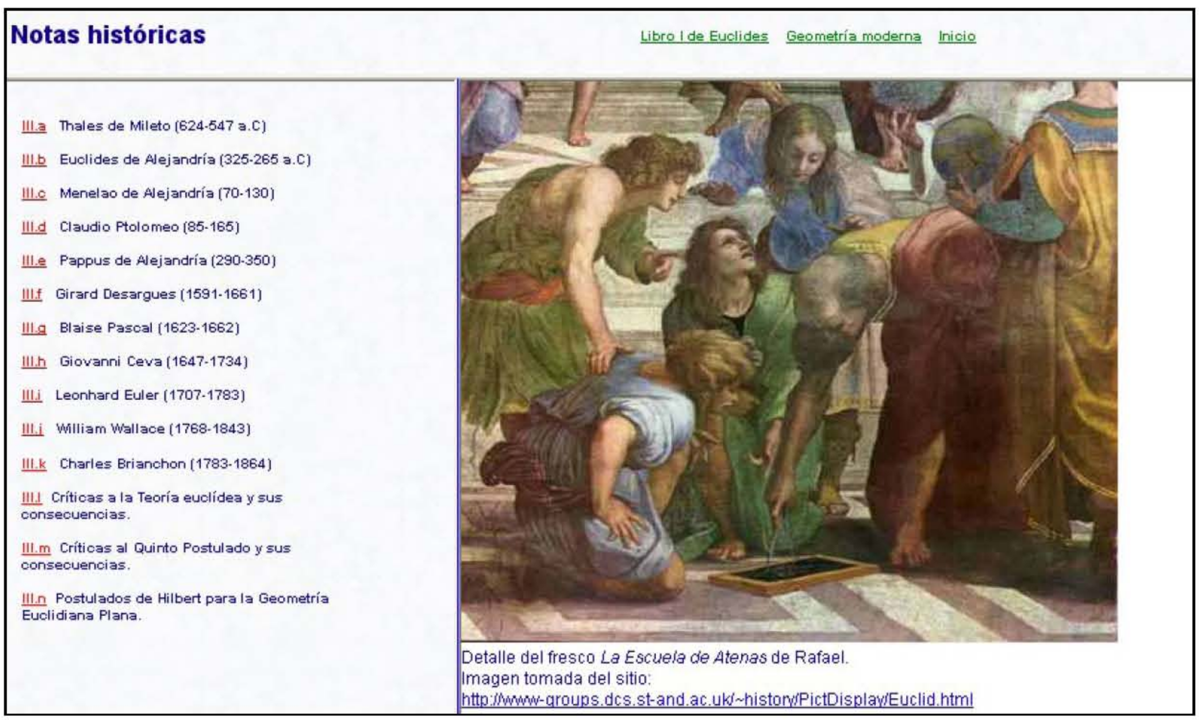


Imagen de la página Web correspondiente al tema III, Notas históricas

Como temas complementarios de esta tesis, aparecen en el menú principal (página Web de Inicio) de Geometría Interactiva, los siguientes hipervínculos:

3.d Tema **Mapa del Sitio**, página Web que presenta todos los tópicos de Geometría Interactiva, la manera en que están estructurados, y desde aquí se accede fácilmente a la página Web de cualquier teorema desarrollado en este software.

3.e Tema **Documento de la tesis**, página Web que contiene el documento de esta tesis en formato PDF.

4. Páginas Web: Libro I de Euclides, Geometría Moderna, Notas históricas

A continuación, se describe con más detalle el contenido de los temas principales.
Geometría Interactiva contiene dos temas fundamentales de gran apoyo para un estudiante de un curso de Geometría Moderna, de cualquier licenciatura de matemáticas o áreas afines: Libro I de Euclides y Geometría Moderna. Un tercer tema Notas Históricas, que contiene notas biográficas de matemáticos relacionadas con los resultados o teoremas de Geometría trabajados por ellos. También se incluyen notas biográficas de los matemáticos que hicieron críticas a la teoría euclidiana y en particular al Quinto Postulado, y de aquellos que hicieron aportaciones, sobre todo en el siglo XIX, a lo realizado por Euclides.

4.a Página Web **Libro I de Euclides de los Elementos de Euclides**, contiene en el marco derecho una breve descripción del contenido de esta página Web, y en el marco izquierdo se presentan cinco hipervínculos con las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las cuarenta y ocho proposiciones del Libro I de los Elementos de Euclides, y la Bibliografía que se usó en el desarrollo de este tema.

Introducción, hipervínculo que lleva a la página Web que contiene las veintitrés definiciones, los cinco postulados y las cinco nociones comunes del Libro I de los Elementos de Euclides.

Proposiciones 1 a 26, hipervínculo que lleva a la página Web donde se tratan fundamentalmente las propiedades de los triángulos. Aquí se encuentran las Proposiciones I.4, I.8 y I.26 que constituyen los criterios de congruencia de triángulos y la Proposición I.16, de la cual es interesante señalar que es la primera proposición que no se cumple en la geometría elíptica. Es decir, las 15 proposiciones anteriores se verifican tanto en la geometría euclidiana como en la geometría elíptica.

Proposiciones 27 a 32, hipervínculo que lleva a la página Web donde se establece la teoría de las paralelas y se demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. De la Proposición I.29, es importante mencionar que es la primera que no se cumple en la geometría hiperbólica y que para su demostración se aplica por primera vez el Quinto Postulado de la geometría euclidiana.
Es decir, las 28 proposiciones anteriores son independientes del postulado de las paralelas y, por lo tanto, se verifican tanto en la geometría euclidiana como en la geometría de Lobachevsky, también llamada geometría hiperbólica. Otra proposición interesante, es la Proposición I.32, que afirma: "En cualquier triángulo, la suma de sus ángulos internos suman 180º.

Proposiciones 33 a 48, hipervínculo que lleva a la página Web donde se establecen las propiedades de los paralelogramos, triángulos y cuadrados. Se hace referencia especial a las relaciones de área, y se destaca lo siguiente:

En la Proposición I.34, Euclides usa el término "área paralelográmica" en lugar de la palabra "paralelogramo", ésta última aparece por primera vez en la Proposición I.35. Proclus indicó que la palabra "paralelogramo" fue creada por Euclides.

Con la Proposición I.34 se inicia el estudio de áreas de figuras rectangulares. En varios de los enunciados de las proposiciones, se habla de "igualdad de paralelogramos", o "igualdad de triángulos", o "un paralelogramo igual a un triángulo", etc. El concepto de igualdad al que se hace referencia, está dado en términos de las áreas de las figuras rectilíneas que se mencionan. También es importante mencionar que la Proposición I.47 es el Teorema de Pitágoras y la Proposición I.48 es el recíproco del Teorema de Pitágoras.

Bibliografía, hipervínculo que lleva a la página Web donde se enlistan los libros utilizados en esta parte del software, y dos sitios de Internet de mucho apoyo para este trabajo.

4.b Página Web **Geometría Moderna**, contiene en el marco izquierdo los hipervínculos correspondientes a los temas del material de un primer curso de Geometría Moderna, y en el marco derecho se presenta una breve descripción del contenido de esta página Web, así como una Nota Aclaratoria, en la cual se hace notar la manera tan distinta en que actualmente se conciben los objetos matemáticos con respecto de cómo lo hacía los antiguos griegos.

II.1 **Introducción**, hipervínculo que lleva a la página Web que contiene algunos conocimientos previos, necesarios para estudiar adecuadamente el resto del material.

II.2 **Congruencia de triángulos**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se establecen los diferentes criterios de congruencia y se realizan cuatro demostraciones interactivas.

II.3 **Área de triángulos**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se precisa el concepto de altura y se demuestran cuatro proposiciones referentes al concepto de área de triángulos.

II.4 **Teorema de Thales**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se realizan las demostraciones de dos teoremas y sus recíprocos, conocidos como Teorema de Thales y además se proporcionan algunas anotaciones históricas.

II.5 **Semejanza de triángulos**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se demuestran tres resultados respecto a los tipos de semejanza de los triángulos y se presenta un resumen para comprobar la semejanza de triángulos.

II.6 **Puntos y rectas notables del triángulo**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se demuestran resultados sobre la concurrencia de Medianas, Bisectrices, Mediatrices y Alturas.

II.7 **Geometría del triángulo**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se presentan demostraciones interactivas de varios teoremas, entre los que podemos encontrar, el de la Recta de Euler, del Triángulo Medial, la Circunferencia de los nueve puntos, el teorema de Ceva y su recíproco, el teorema de Menelao, el teorema de la Bisectriz, el teorema de Pappus y el teorema de Desargues.

II.8 **Cuadriláteros cíclicos y ángulos en la circunferencia**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se presentan algunos teoremas importantes acerca de cuadriláteros cíclicos y ángulos en la circunferencia, el teorema Ptolomeo, la línea de Simson y su recíproco, además de algunas proposiciones del Libro III de Euclides, entre otros.

II.9 **Algunas propiedades de las circunferencias**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se presenta uno de los conceptos más interesantes de la geometría moderna: la potencia de un punto con respecto a una circunferencia. Además algunos resultados sorprendentes que hacen uso de este concepto, como son el teorema de la Fórmula de Euler, el teorema de Pascal y el teorema de Brianchon.

II.10 **Teoremas selectos**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se demuestran algunos teoremas que por su aplicación en trigonometría son de gran utilidad para realizar algunos cálculos. Por ejemplo, se puede aplicar el teorema de Stewart para encontrar las longitudes de las medianas, las simedianas y las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

II.11 **Bibliografía**, hipervínculo que lleva a la página Web donde se enlistan los libros utilizados en esta parte del software, así como los hipervínculos de dos sitios Web que fueron de gran utilidad en este trabajo.

4.c Página Web **Notas históricas**, contiene notas biográficas sucintas de personajes que tuvieron relevancia en el desarrollo de la Geometría.

En el marco izquierdo de esta página Web se muestran los siguientes hipervínculos:

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)

III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)

III.c Menelao de Alejandría (70-130)

III.d Claudio Ptolomeo (85-165)

III.e Pappus de Alejandría (290-350)

III.f Girard Desargues (1591-1661)

III.g Blaise Pascal (1623-1662)

III.h Giovanni Ceva (1647-1734)

III.i Leonhard Euler (1707-1783)

III.j William Wallace (1768-1843)

III.k Charles Brianchon (1783-1864)

III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.

III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.

III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana

Una vez seleccionado algún hipervínculo de la página Web del marco izquierdo, en el marco derecho se presenta el contenido de la pagina Web correspondiente al hipervínculo elegido. El contenido de ésta puede corresponder a algunos de los siguientes tópicos:

- La Nota biográfica del personaje relevante en la Historia de la Geometría, cuyo nombre o apellido fue tomado para titular su trabajo: los Elementos de Euclides, la Recta de Euler, la Línea de Simson, el Teorema de Thales, el Teorema de Ceva, el Teorema de Menealo, el Teorema de Desargues, el Teorema de Stewart, el Teorema de Pappus, etc.
- Algunas de las principales Críticas a la teoría euclidiana que hicieron los matemáticos durante más de 2000 años, y sus consecuencias en el sistema de postulados más difundido y aceptado que propuso David Hilbert en su obra Grundlagen der Geometrie en 1899.
- Algunas de las Críticas al Quinto Postulado de Euclides y las consecuencias de éstas, como son el surgimiento de las Geometrías no euclidianas en los trabajos de Gauss, Bolay y Lobachevsky.
- El Sistema de Postulados para la Geometría Euclidiana Plana de Hilbert, que tuvo una gran aceptación a finales del siglo XIX.

Cada página Web mostrada en el marco derecho también contiene la Bibliografía y sitios de interés en Internet para tener más información al respecto del hipervínculo seleccionado.

5. Geometría Interactiva está dirigido principalmente a estudiantes

El software Geometría Interactiva es un material de consulta dirigido principalmente a estudiantes y en particular, para aquellos inscritos en el primer año de una licenciatura en ciencias o en áreas afines y también para aquellos que aspiran a cursar una licenciatura en estas áreas.

Lo anterior es posible, por un lado, porque es un material bien organizado, interactivo, formal, con demostraciones apoyadas en construcciones geométricas interactivas que permite a los estudiantes analizar diversas situaciones para los teoremas, y por otro lado, porque pueden acceder fácilmente al tema específico de su interés y a sus temas relacionados. Algunas de las características de Geometría Interactiva son las siguientes:

- Geometría Interactiva es un software, cuyos temas pueden ser abordados por el estudiante de manera secuencial o en el orden que desee o que requiera. En cualquier caso, las formas de navegación son estándar y muy intuitivas.

- Todas las páginas Web de presentación de cada tema, cuentan con una explicación sucinta.
- El alumno al estudiar la página Web de algún teorema en este software, siempre tiene visible en la pantalla del monitor el enunciado del mismo, la página Web que contiene la demostración del teorema, y una construcción geométrica interactiva que muestra paso a paso el desarrollo de la demostración (ver **2.b**).
- La página Web de la demostración del teorema contiene hipervínculos a resultados anteriores o a algunos conceptos necesarios, éstos se muestran en la pantalla del monitor sin tener que abandonar la página Web de estudio.
- En todas las páginas Web que contienen demostraciones, al estudiante se le hace énfasis en cuáles son las hipótesis del teorema y cuál es la tesis a demostrar, así como el método de demostración a usar.
- En las demostraciones por casos, el estudiante los puede analizar dentro de la misma página Web de estudio.

Geometría Interactiva podría servir de material de consulta a estudiantes de Geometría Moderna de la Facultad de Ciencias de la UNAM o en áreas afines, pero en algunas de sus partes, la utilidad podría extenderse a estudiantes de otros niveles educativos, tanto para aquellos que sólo desean conocer los resultados, como para los que deseen saber de sus demostraciones.

5.a Geometría Interactiva y la Didáctica de las matemáticas

La materia de Geometría Moderna es una de las materias con alto índice de reprobación en la Facultad de Ciencias de la UNAM.
Sería deseable que el software Geometría Interactiva pudiera ser estudiado desde el punto de vista de la Didáctica de las matemáticas. A los investigadores de esa área podría servirles de base para hacer un estudio del impacto que este tipo de software tiene en el proceso enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

Este tipo de estudios queda fuera de la intención de esta tesis

Desde hace tiempo existe el concepto de Secuencia didáctica (ver **Apéndice 2**), acuñado en el campo de la Didáctica. Actualmente existen secuencias didácticas en Internet, que incorporan el uso de algún software. En ellas, se hacen sugerencias de cómo utilizar un software en Internet en el aprendizaje de algún tema. Por ejemplo, la secuencia didáctica de actividades para el estudio del cálculo, se presenta en la página Web:

http://geocities.com/apcastane/demo.htm

Definitivamente el software Geometría Interactiva, podría ser objeto de estudio en este sentido de los abocados a la investigación en Matemática Educativa.

6. La tesis: Geometría Interactiva

Geometría Interactiva es un software original, que intenta apoyar al alumno en su estudio de los teoremas que comprende un primer curso de la asignatura “Geometría Moderna” de una licenciatura en ciencias o en áreas afines.
También, puede servir de material de consulta para aquellos estudiantes que deseen conocer los trabajos de los antiguos geómetras griegos, la página Web Libro I de Euclides tiene esa intención.

Geometría Interactiva es innovador, por los temas que aborda, su formalidad matemática, sus demostraciones paso a paso, sus construcciones interactivas y por sus características, que ya se han mencionado (ver **5.**).

El software Geometría Interactiva puede ser distribuido en disco compacto, o bien accediendo a la página Web:

http://132.248.17.238/geometria/

Geometría Interactiva puede servir de modelo para la construcción de cursos completos interactivos en línea, que requieran demostraciones formales o explicaciones paso a paso, así como construcciones dinámicas interactivas que permitan manipular y representar diversas situaciones de teoremas o resultados.

7. Conclusiones

- **7.1.** La intención primera del software Geometría Interactiva es aportar al estudiante, un material de consulta o de apoyo, creado mediante una nueva herramienta tecnológica (el uso de applets). Este material de consulta muestra la <u>estructura</u> del trabajo que se realiza al estudiar matemáticas: pues en la demostración de cada teorema, se hace énfasis de cuáles son las hipótesis, de cuál es la tesis, de qué método de demostración se va a seguir. Además, en cada paso de la demostración, es decir en cada implicación, se hace referencia a los argumentos que permiten dar el siguiente paso, y así hasta culminar la demostración de la tesis.

- **7.2** Geometría Interactiva es un software pertinente, útil y necesario como material de consulta para los estudiantes de Geometría Moderna. Contiene:
    a) Las demostraciones paso a paso y de manera interactiva, de los principales resultados y teoremas de un primer curso de dicha asignatura.
    b) Los trabajos de los primeros geómetras griegos, varios de ellos se manifiestan en las demostraciones de las cuarenta y ocho proposiciones del Libro I de los Elementos de Euclides, y algunas proposiciones del Libro III de esta obra,
    c) Notas históricas de matemáticos relevantes en el desarrollo de la Geometría. También se hace referencia a las críticas que se han hecho a la geometría euclidiana y sus consecuencias. Igualmente, se tratan algunas de las críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
    d) Por último, se presentan los Postulados de David Hilbert para la Geometría Plana.

- **7.3** Geometría Interactiva constituye una aproximación a un curso en línea. Actualmente, no se pueden excluir las nuevas tecnologías (pizarrones, electrónicos, computadoras, videos, Internet, entre otras) como apoyo para los alumnos en su estudio de matemáticas. La Internet está en auge, existe en todos lados, incluso en Primaria y Secundaria los alumnos tienen acceso a la red. Es claro, que a las instituciones educativas debería interesarles apoyar, promover, fomentar e impulsar la construcción de este tipo de materiales.

- **7.4** Las personas que están llamadas a realizar este tipo de trabajos son aquellas del medio académico de la Facultad de Ciencias, o sea sus profesores. Pues son los que tienen el conocimiento matemático y la experiencia docente para usar las nuevas tecnologías y crear materiales de apoyo para sus alumnos. Las editoriales no se arriesgan en invertir en este tipo de trabajos, pues son muy conservadoras. Deben estar seguras de recuperar siempre su inversión Entonces, el compromiso de las instituciones y sus profesores hacia los estudiantes, en este sentido, debería ser muy grande

- **7.5** Una de las ventajas que tiene el software Geometría Interactiva sobre un libro de geometría, es que el estudiante puede ir avanzando a su ritmo, además cualquier postulado, definición o teorema que el alumno necesite para seguir y comprender la demostración, lo encontrará en la misma página Web que esté estudiando en ese momento. Si quiere volver a empezar la demostración, en el applet que la acompaña, hay un botón para Limpiar los trazos, o bien presionando la tecla R devuelve el applet a su estado original.

- **7.6** Geometría Interactiva es un aplicación original, pues aunque existen diversos sitios de Geometría Euclidiana y Geometría Moderna en Internet, éstos usualmente son páginas Web con textos e imágenes fijas. En general, los textos son los enunciados de los teoremas, o bien sus demostraciones, en algunos casos en lugar de imágenes fijas son acompañados por una animación o un applet. Sin embargo, la manera en que “Geometría Interactiva” propone el uso de los applets para apoyar la comprensión de la demostración de algún teorema, es original. Este tipo de desarrollos son escasos en la red.

8 Propuesta

Sería muy interesante continuar con este proyecto, creando las correspondientes páginas Web de las catorce proposiciones del Libro II de los Elementos de Euclides, con las mismas características de las de Geometría Interactiva. El contenido del Libro II es comúnmente llamado “álgebra geométrica”.

Apoyándose en el uso de las nuevas tecnologías, se podría crear un software interactivo que serviría de apoyo para visualizar esas proposiciones que son un puente entre el Álgebra y la Geometría.

9. Descripción del software mediante imágenes de sus páginas Web

A continuación se muestran imágenes de las páginas Web de algunos tópicos en cada uno de los temas de este software, incluyendo una breve explicación de su uso y sobre todo haciendo énfasis en los recursos de interactividad.

9.0 Imagen de la página Web de Inicio

En esta página de Inicio del software, el usuario encontrará lo siguiente:

- Un menú con hipervínculos de los temas: Libro I de Euclides, Geometría Moderna, Notas Históricas, Mapa del Sitio y Documento de tesis.
- Observaciones generales del uso de Geometría Interactiva.
- Un pequeño applet que sirve para que el usuario pueda verificar si en su equipo tiene instalada la máquina virtual de Java, necesaria para el funcionamiento de todo el programa.
- Si no estuviera instalada la máquina virtual de Java, se proporciona un hipervínculo para bajarla del portal de Sun Microsystems en Internet.
- Un mensaje importante señalando que todos los applets fueron diseñados con el software The Geometer´s Sketchpad y su componente JavaSketchpad, perteneciente a la compañía KeyCurriculum Press, Inc.

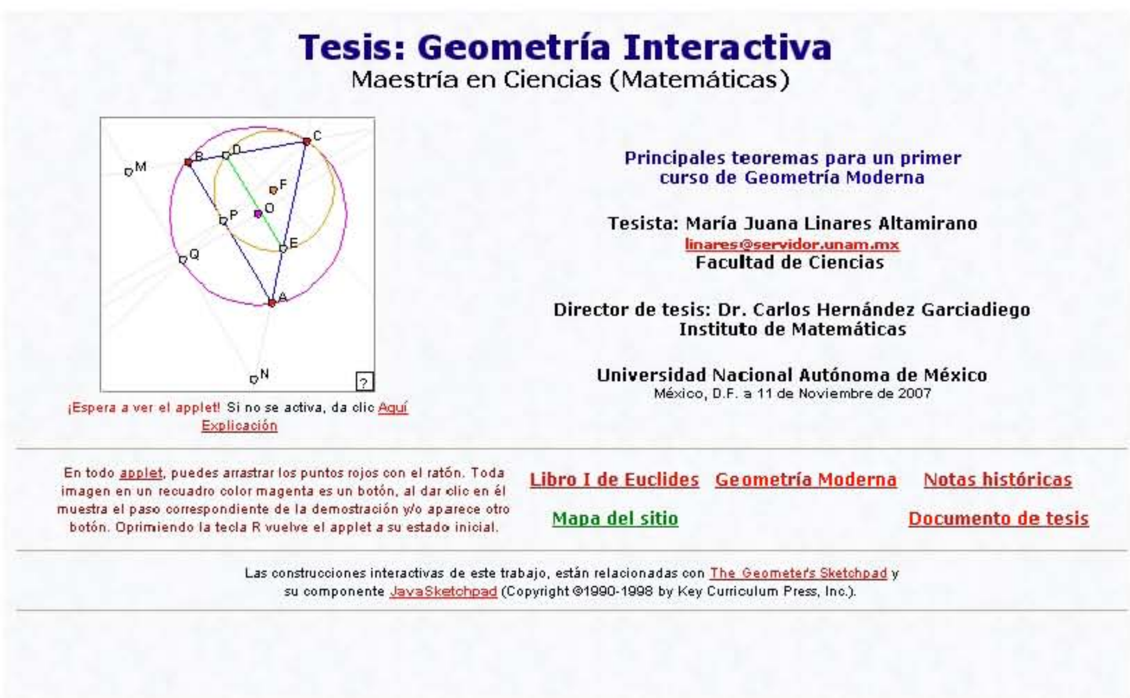
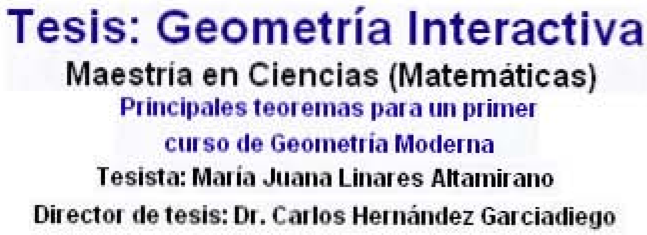
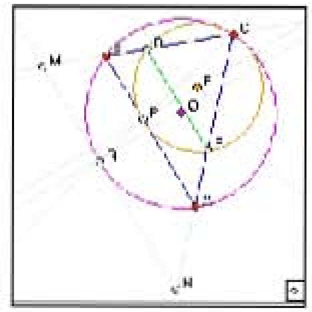


Imagen de la página Web de Inicio del software Geometría Interactiva

Algunas imágenes de los temas que contiene Geometría Interactiva:





Applet de Inicio

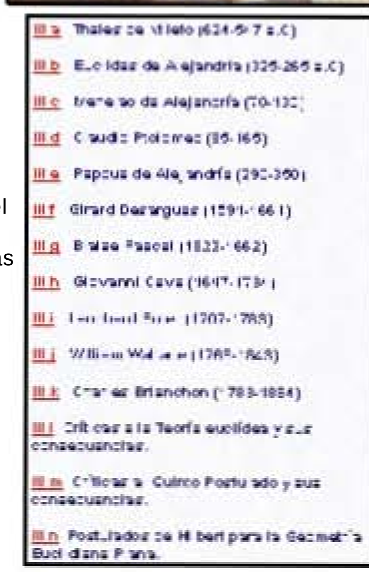
Geometría Moderna

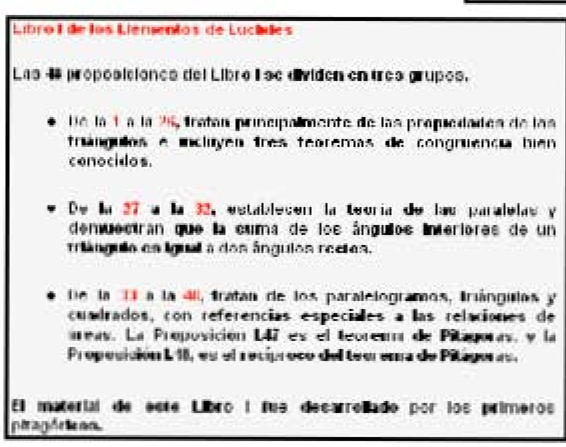
Teoremas de Geometría Moderna (67), con sus demostraciones formales paso a paso y sus applets interactivos correspondientes.

Libro I de Euclides

Proposiciones (48) del Libro I de Euclides, con sus demostraciones formales paso a paso y sus applets interactivos correspondientes.

Notas históricas





Notas biográficas (14) de personajes relacionados con el desarrollo de la Geometría, destacando sus resultados más importantes. Referencias bibliográficas y de Internet.

9.1 Imagen de la página Web Libro I de los Elementos de Euclides

En el marco del título se presenta la página Web con el título de este tema y a su derecha una navegación estándar (hipervínculos), que permite saltar a las páginas Web de los otros temas principales o ir a la página Web de Inicio.
El marco izquierdo de esta página Web contiene su menú principal.
En el marco derecho se da una breve presentación del contenido de la página Web Libro I de los Elementos de Euclides. También se muestra el applet correspondiente a la construcción geométrica del Teorema de Pitágoras.
En su menú principal se ven los hipervínculos de los temas que aquí se desarrollan:

- Introducción.
- Proposiciones 1 a 26 (que tratan fundamentalmente de los teoremas de congruencia).
- Proposiciones 27 a 32 (que establecen la teoría de las paralelas y demuestran que la suma de los ángulos interiores de un triángulo, suman dos ángulos rectos).
- Proposiciones 33 a 48 (que tratan de las áreas de paralelogramos, triángulos y cuadrados, además del famoso teorema de Pitágoras y su recíproco).
- Bibliografía.

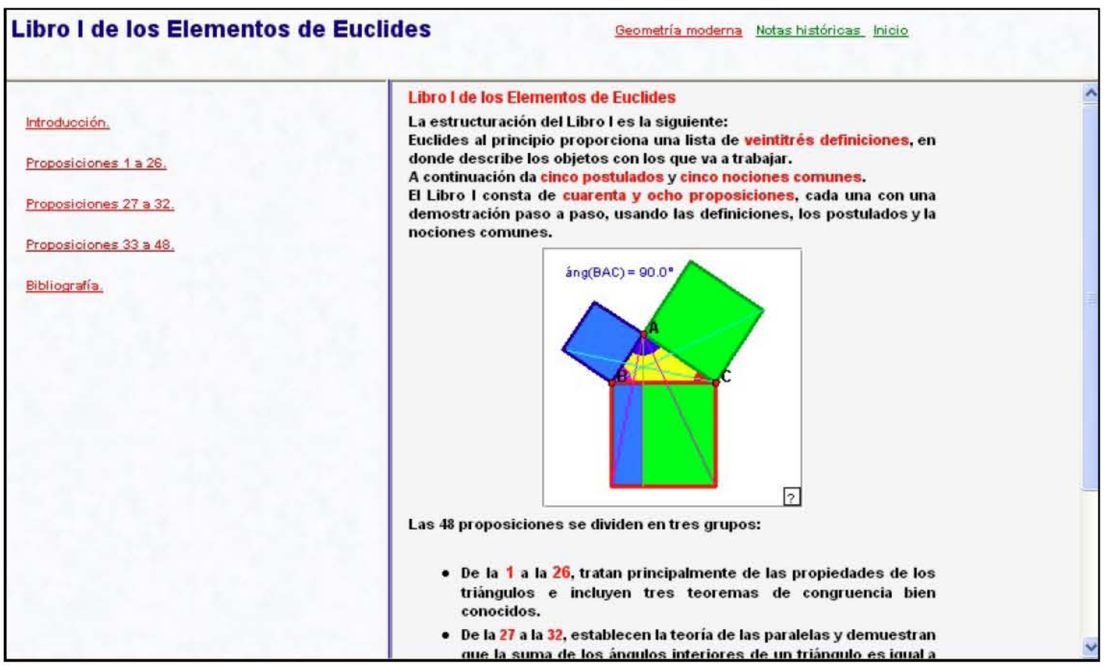
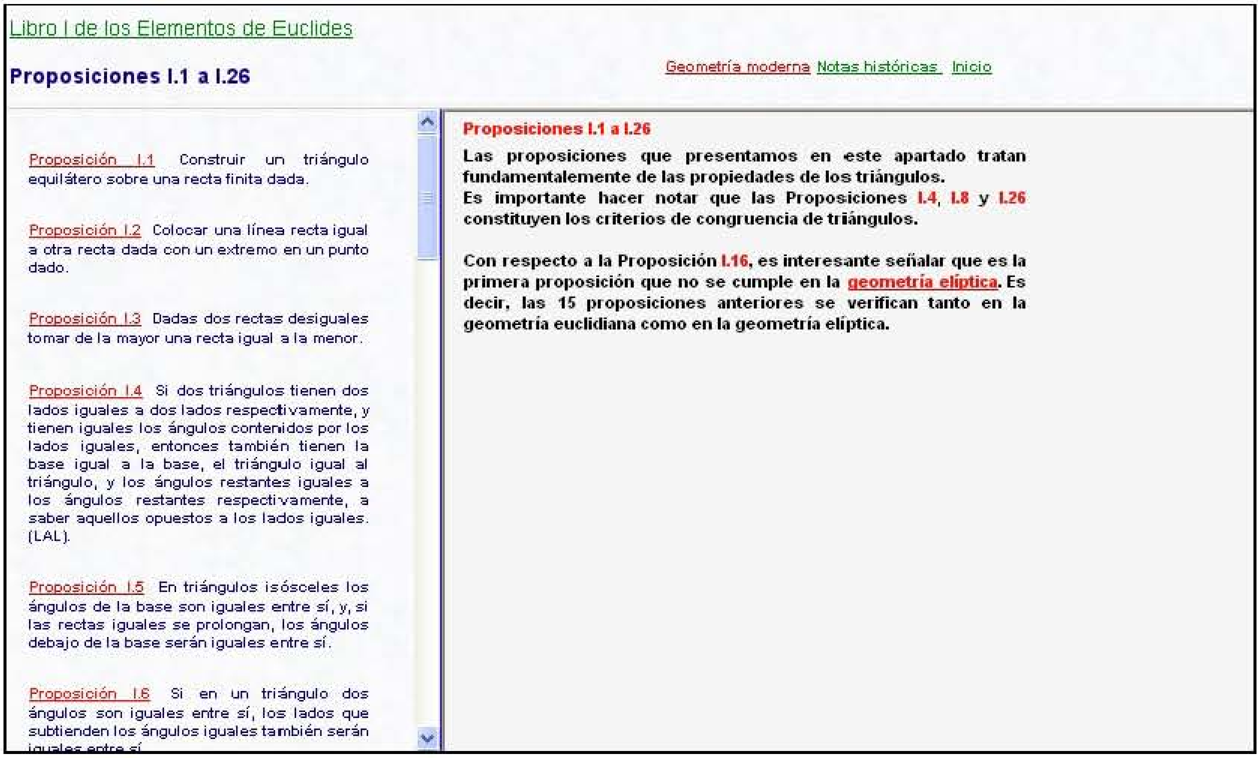
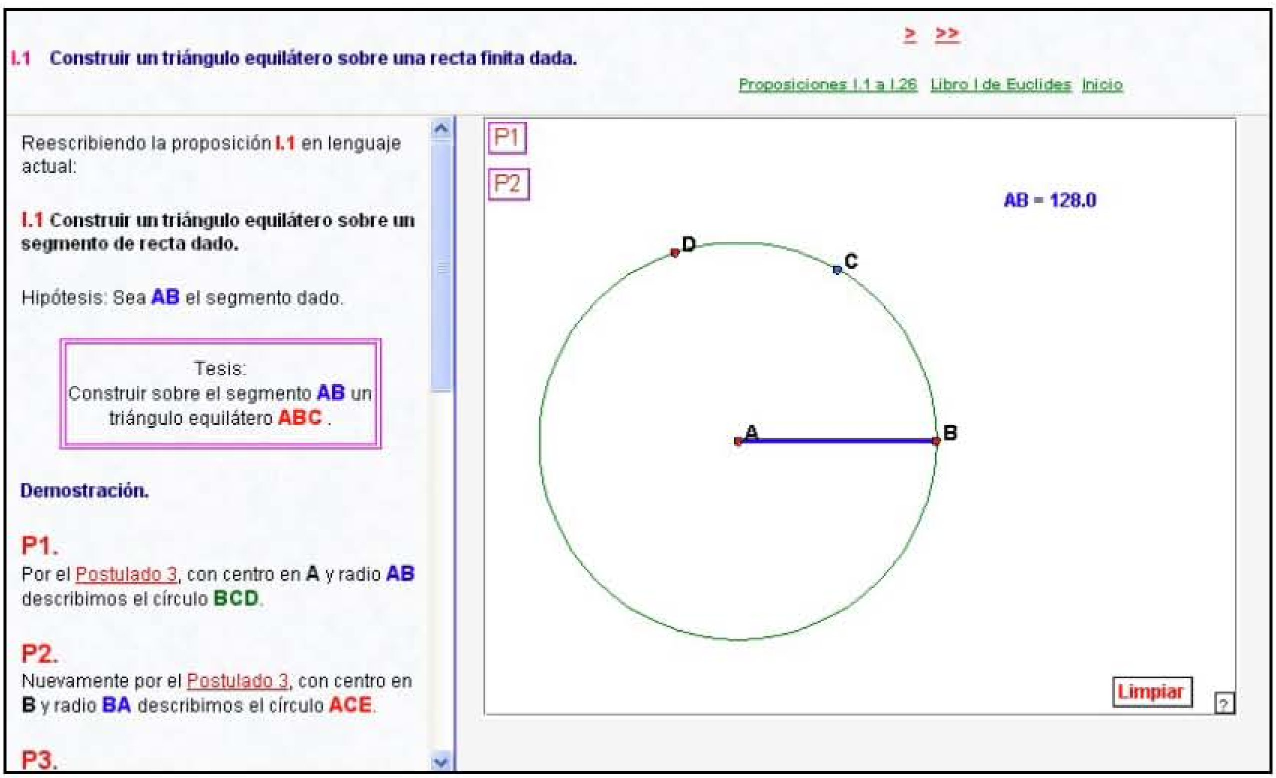


Imagen de la página Web de la presentación del tema I. Libro I de los Elementos de Euclides

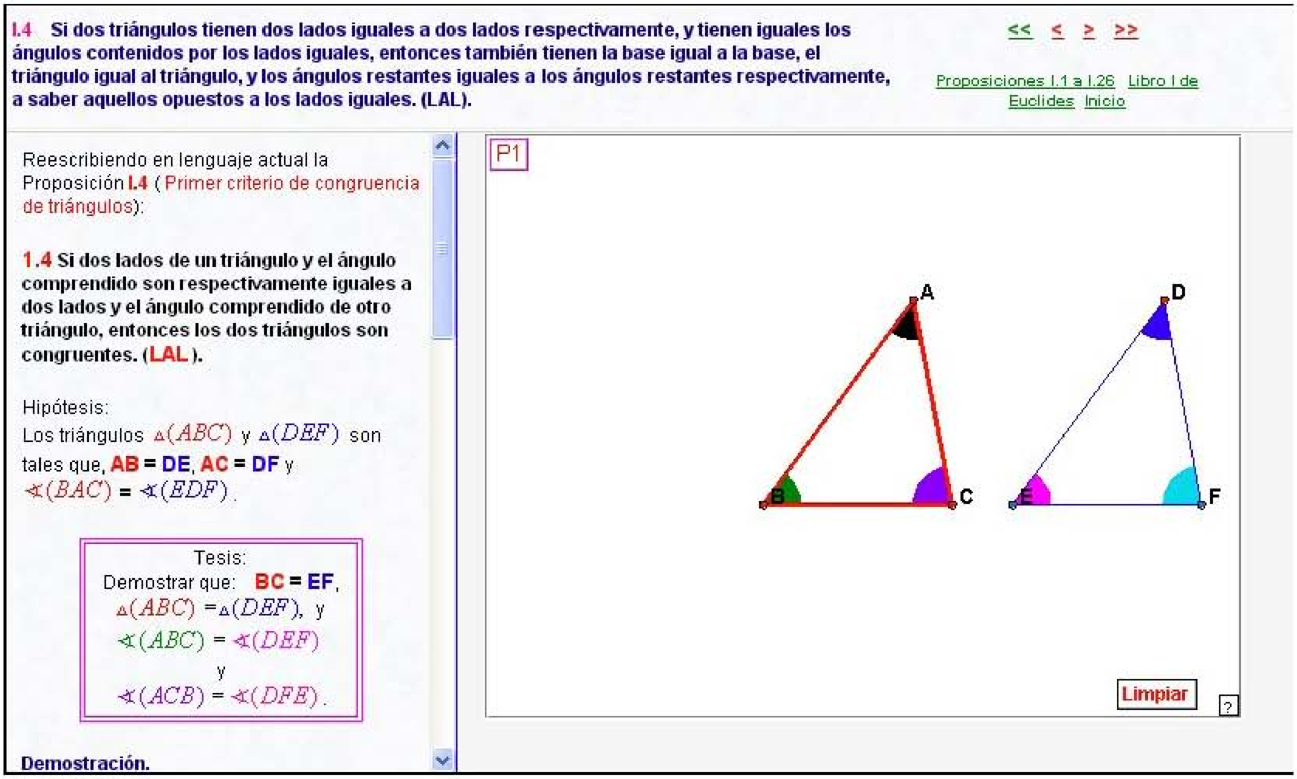
En las páginas Web que dependen de ésta, en el marco de título se muestra el título de la página Web en cuestión, y a su derecha una barra de navegación que permite saltar a las páginas Web de los otros temas principales o ir a la página Web de Inicio, o bien saltar al tópico siguiente o anterior.



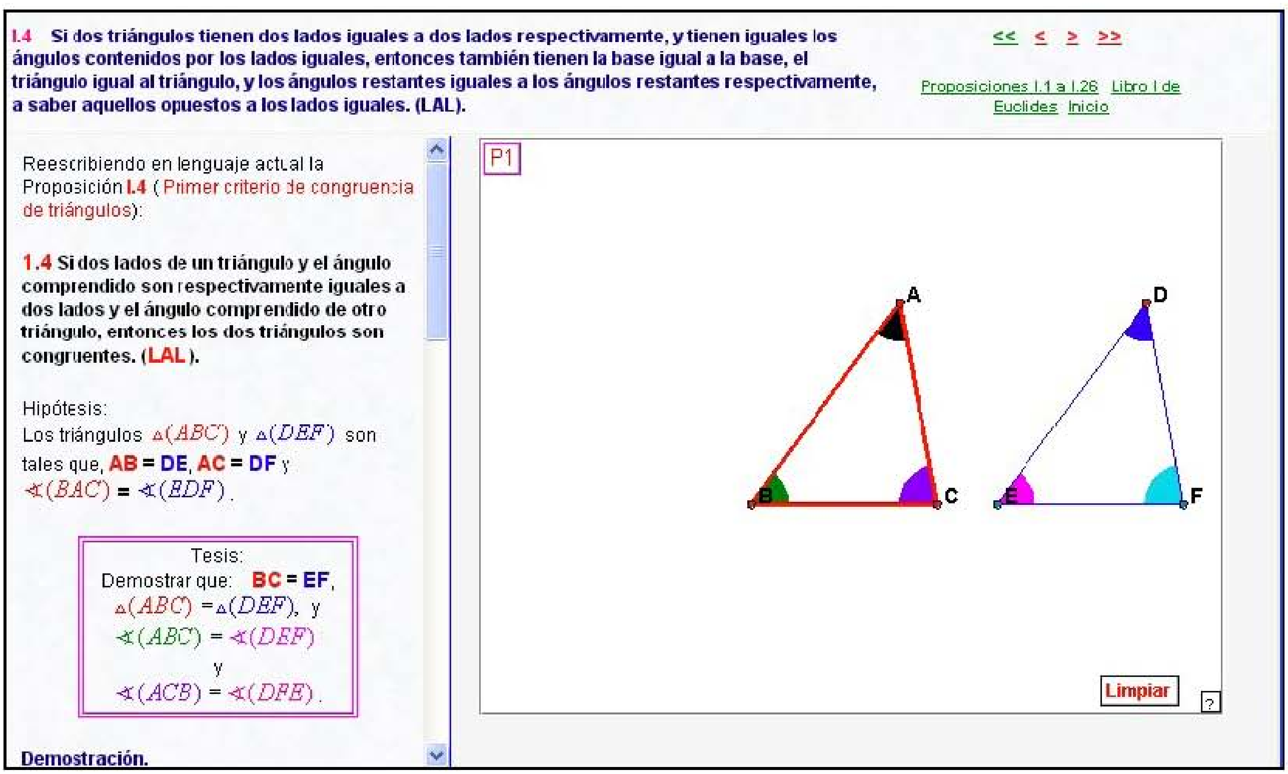
Habiendo dado clic en la opción con la leyenda Proposiciones 1 a 26, se pasa a esta página Web en donde se podrán encontrar 26 proposiciones relacionadas fundamentalmente con propiedades de triángulos y en particular la Proposición I.16 que no se cumple en la Geometría elíptica.



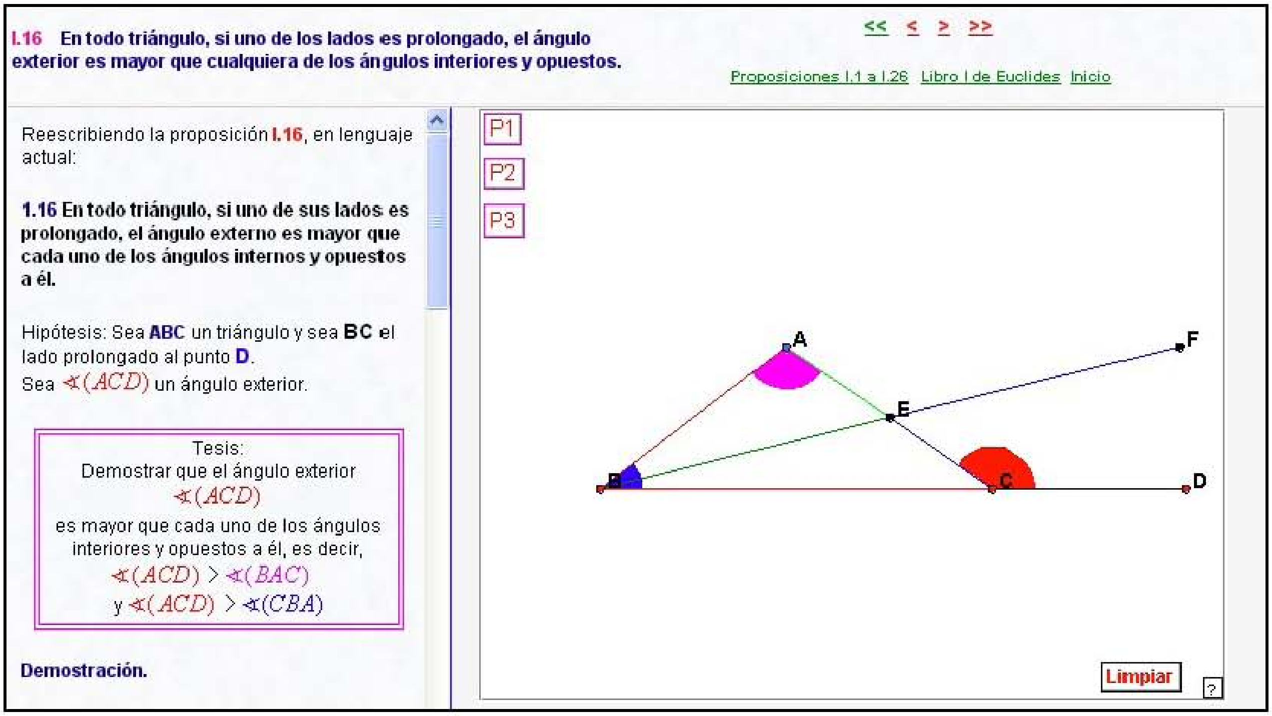
Por ejemplo dando clic en la Proposición I.1, se pasa a esta página Web en donde se podrán encontrar la formulación actual, su demostración formal y un applet interactivo que acompaña la demostración paso a paso.



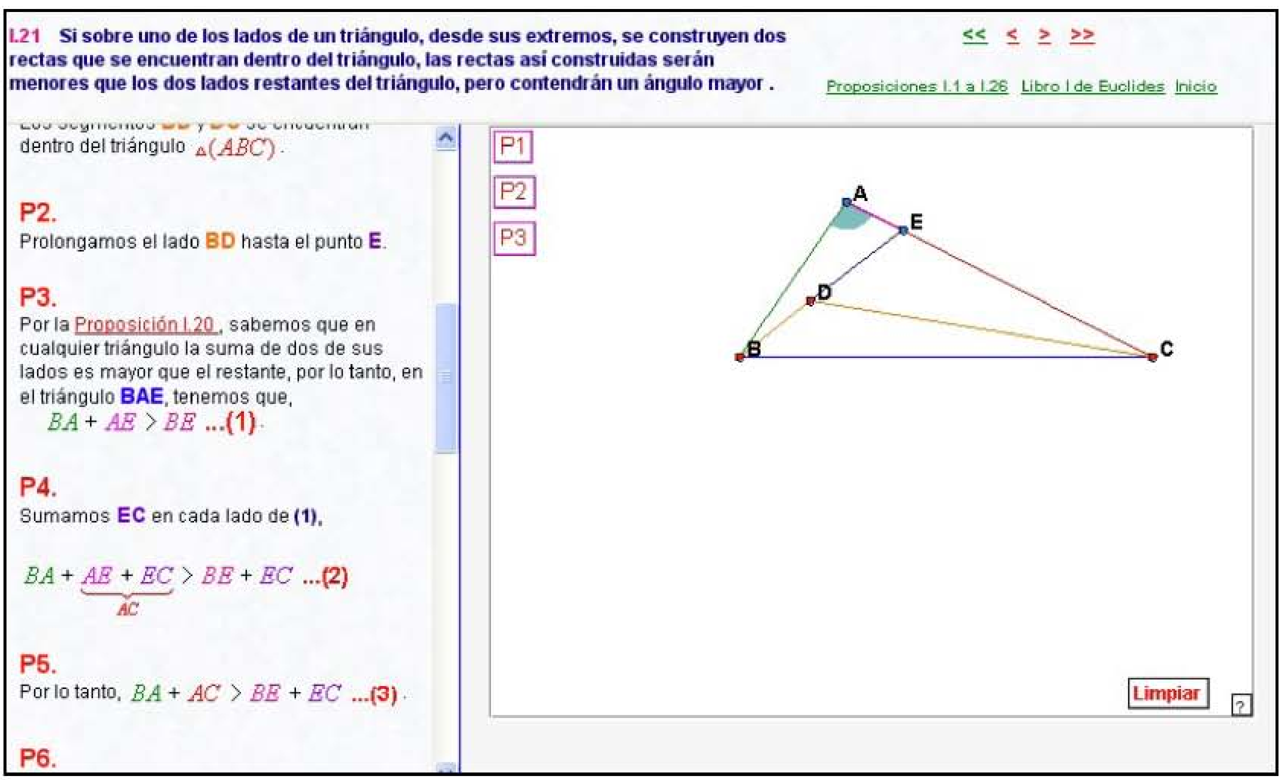
Otro ejemplo, dando clic en la Proposición I.4, se pasa a esta página Web en donde se podrán encontrar la formulación actual, su demostración formal y un interactivo que acompaña la demostración paso a paso. Además una barra de navegación para regresar a las Proposiciones 1 a 26 o continuar más adelante.



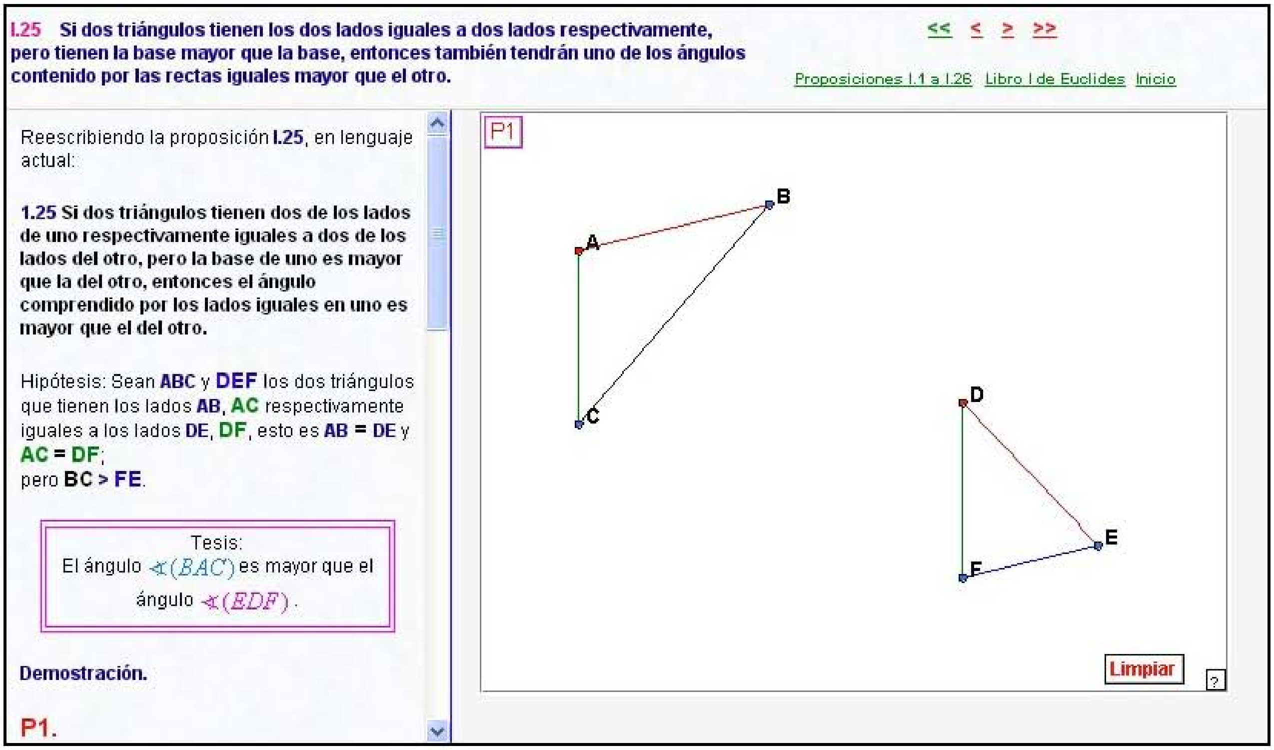
Además de lo ya dicho, se tiene una barra de navegación que puede llevar al Inicio, al conjunto de Proposiciones 1 a 26 o a un nivel anterior, al Libro I de los Elementos de Euclides.



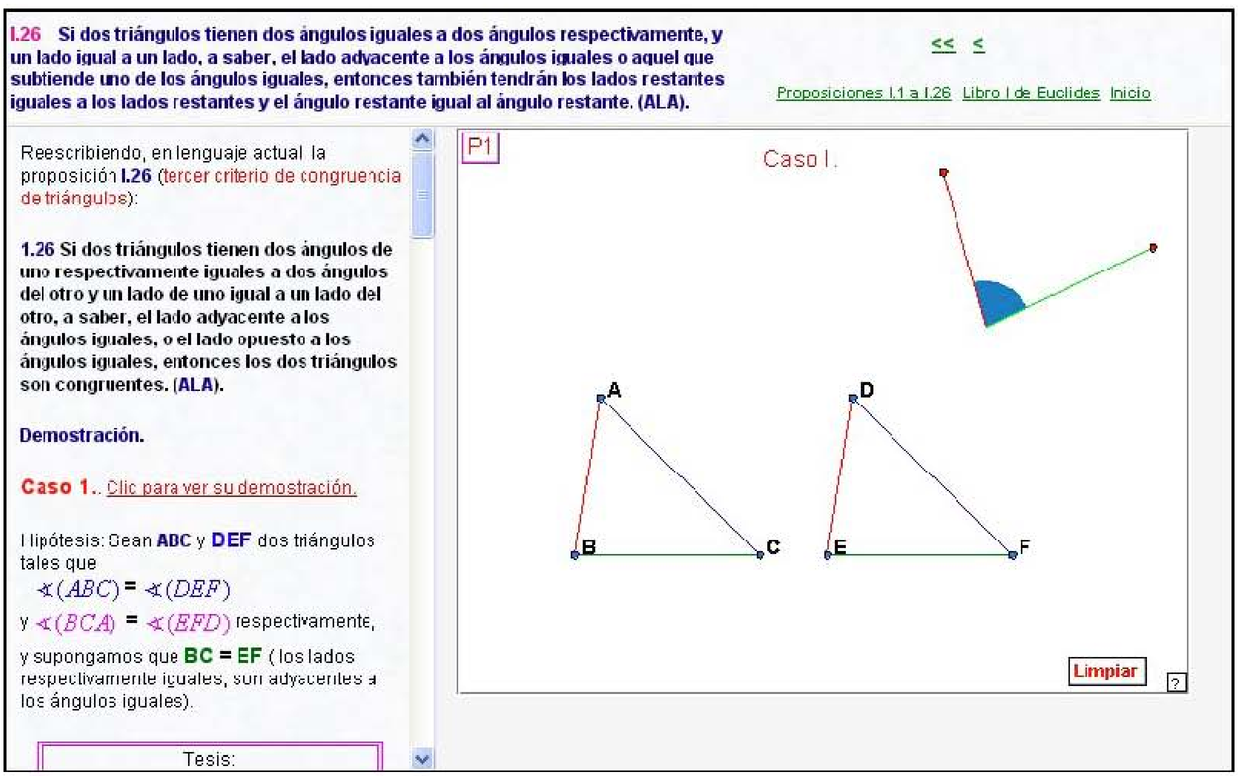
En cada una de las proposiciones se cuenta además de lo anterior, con la idea de la demostración y el método a utilizar, como es el caso de esta Proposición I.16.



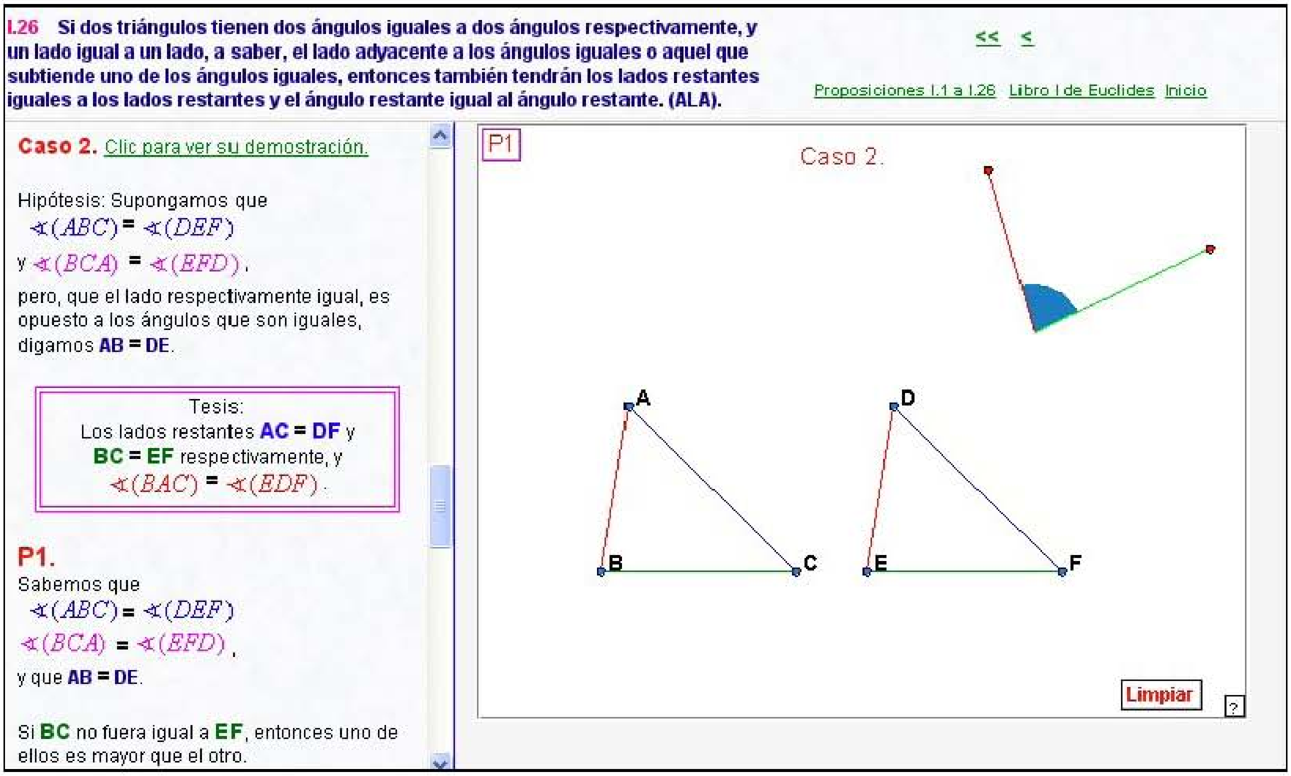
En todo applet, como es el caso de esta Proposición I.21, los puntos rojos se pueden mover con el ratón y así tener distintas posiciones en la construcción, sin afectar el resultado.



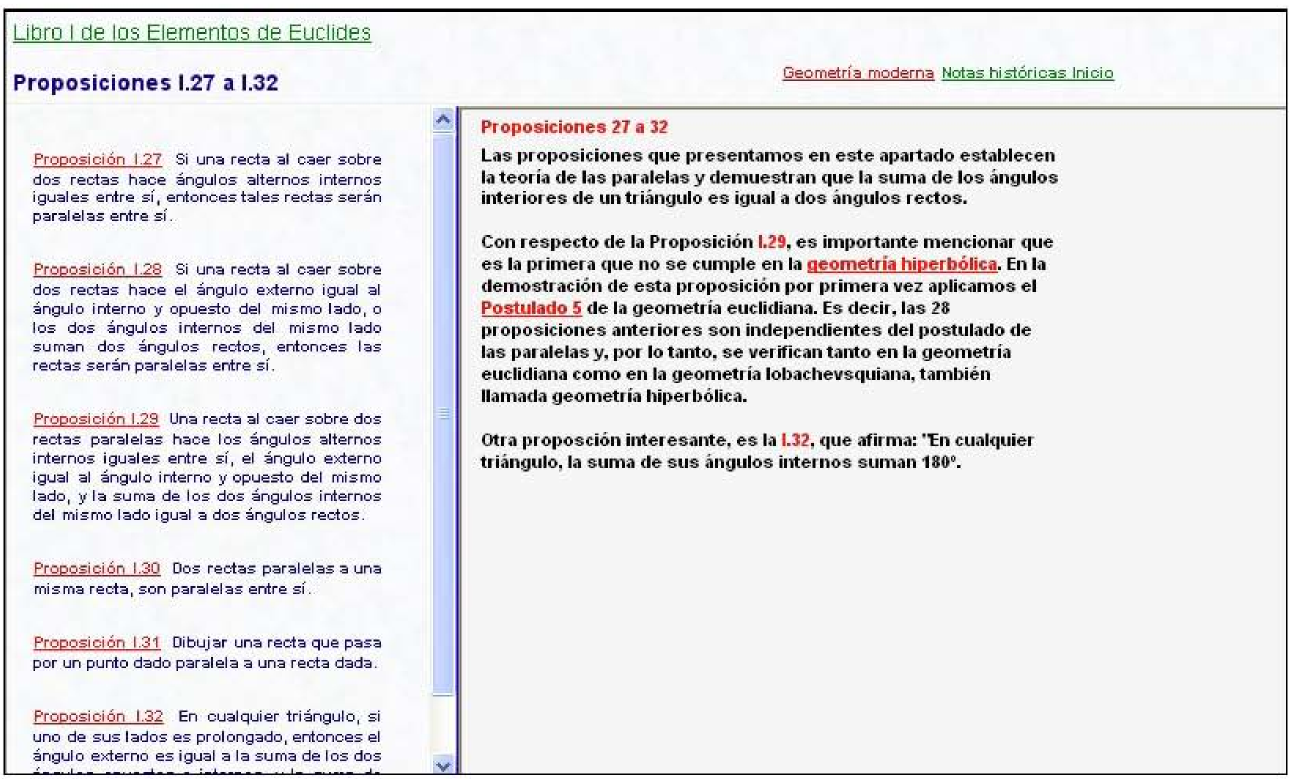
En todo applet, como es el caso de esta Proposición I.25, después de desplegar la demostración paso a paso, tiene un botón de Limpiar , para poder reiniciar el proceso, o presionando la tecla R vuelve a su estado original



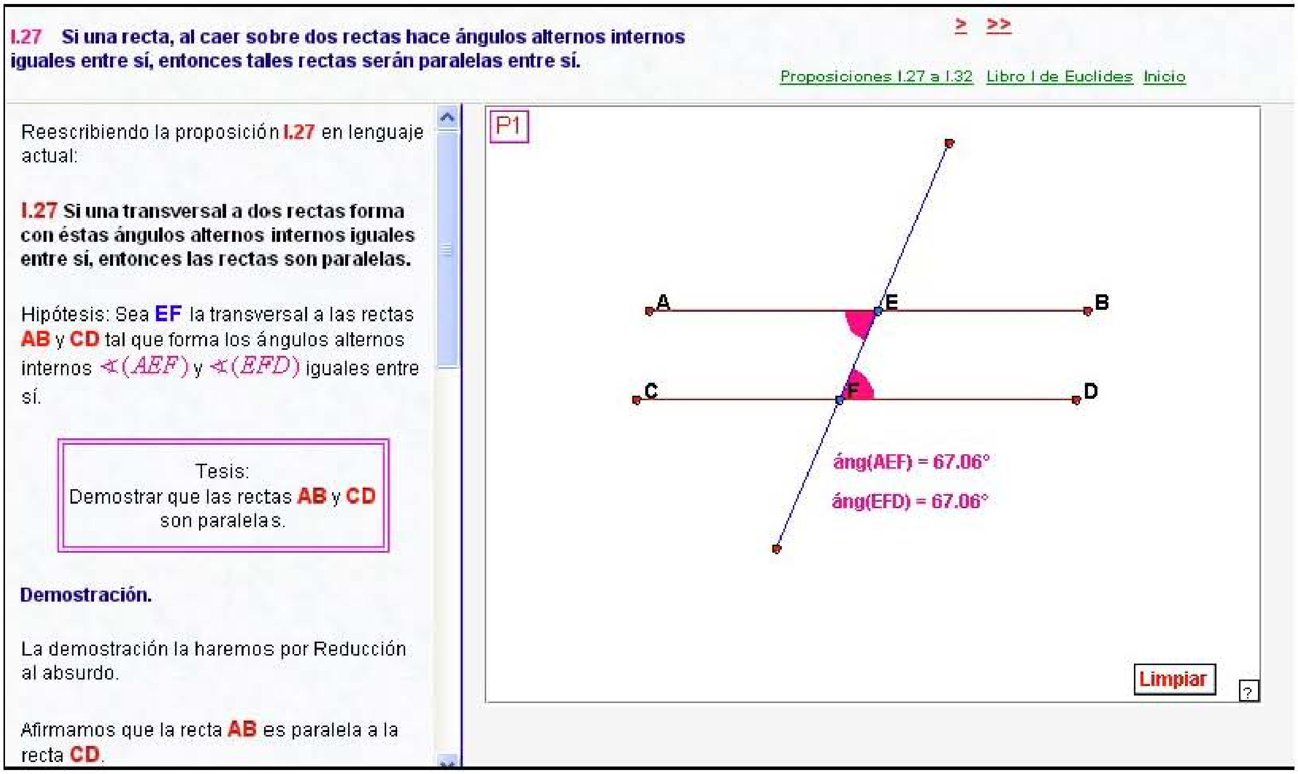
Cuando en uno de los resultados se presentan distintos casos como es el de esta Proposición I.26, dando clic en cada uno de ellos, a la derecha se presenta el applet correspondiente. Aquí el **Caso 1**.



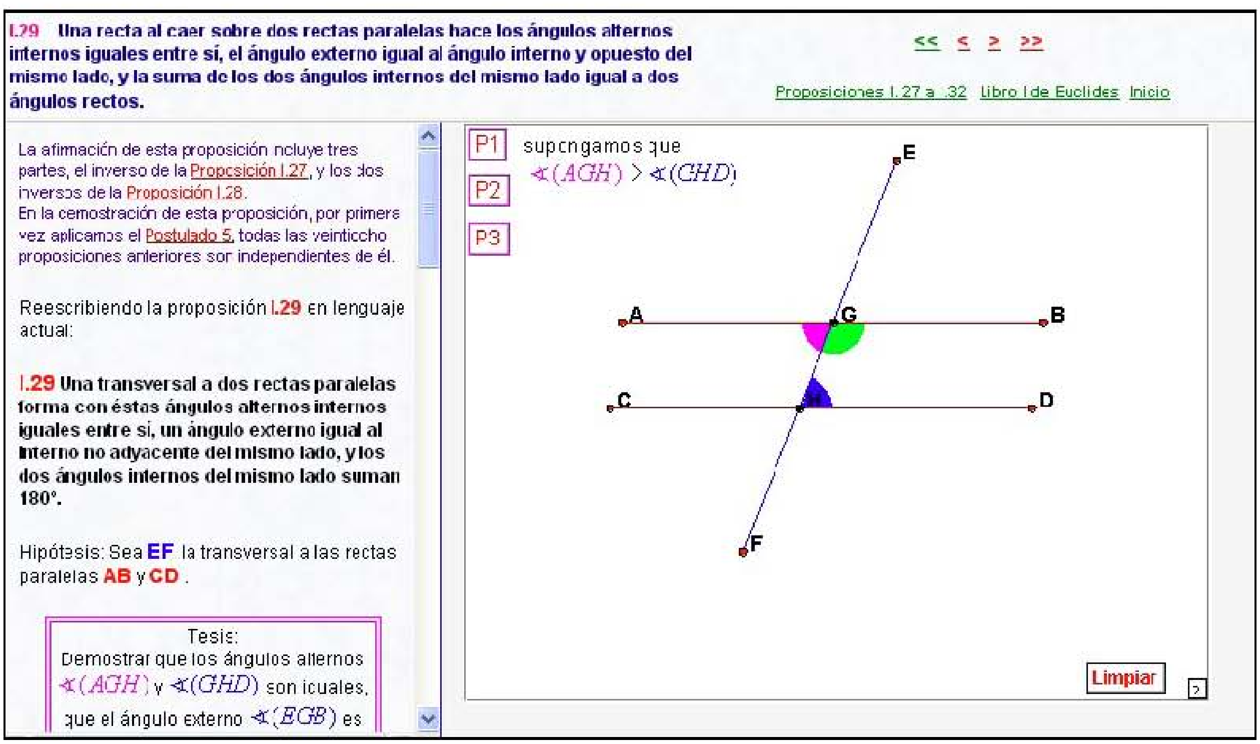
Cuando en uno de los resultados se presentan distintos casos como es el de esta Proposición I.26, dando clic en cada uno de ellos, a la derecha se presenta el applet correspondiente. Aquí el **Caso 2**.



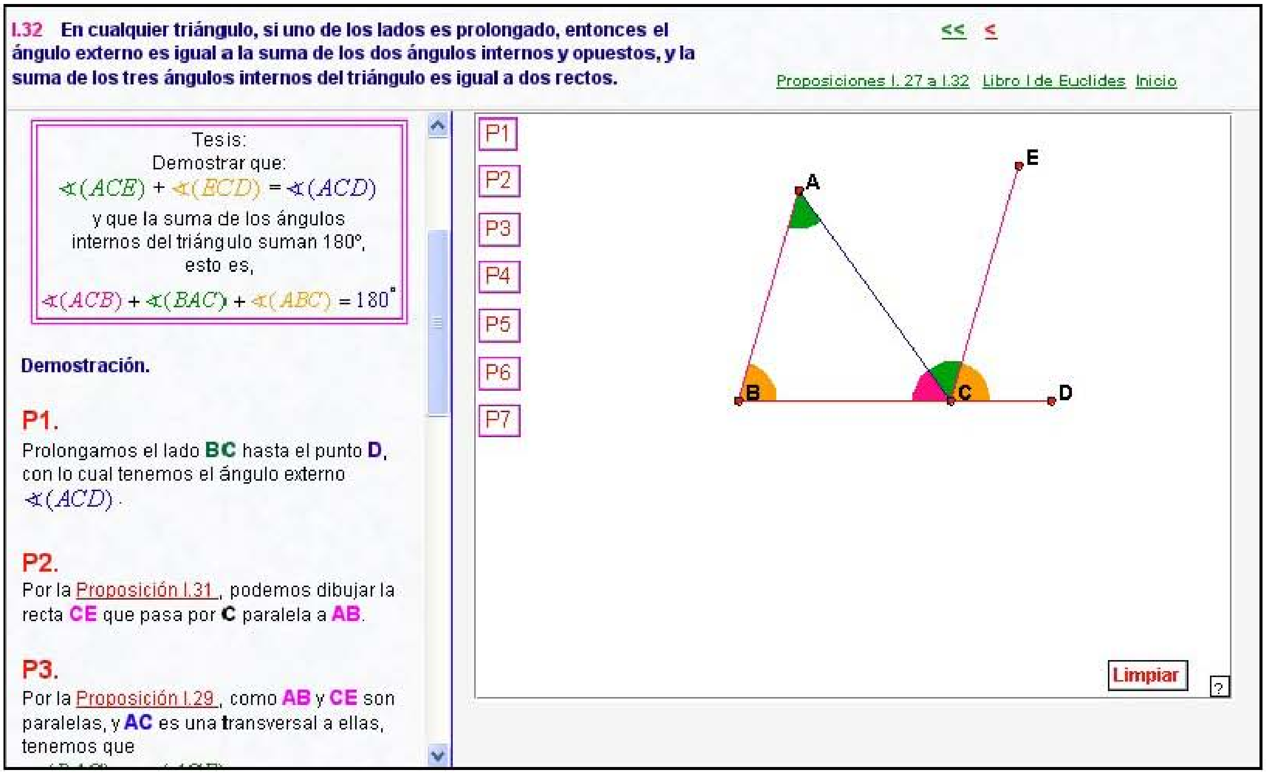
Las Proposiciones 27 a 32, están relacionadas fundamentalmente con propiedades de las paralelas y de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. En particular la Proposición I.29 es la primera que no se cumple en la Geometría hiperbólica.



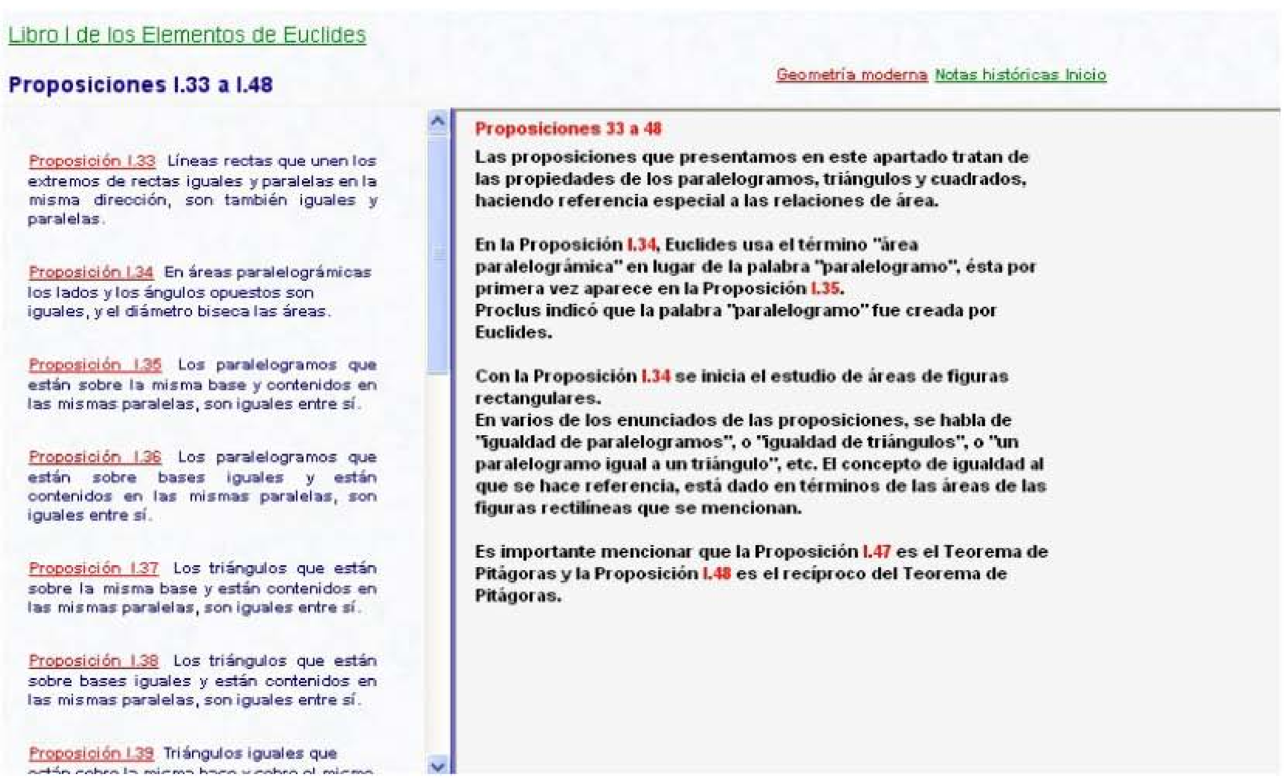
Como en las páginas Web anteriores, se muestra la proposición con un lenguaje actual y se destaca la tesis a demostrar. También se cuenta con la demostración paso a paso.



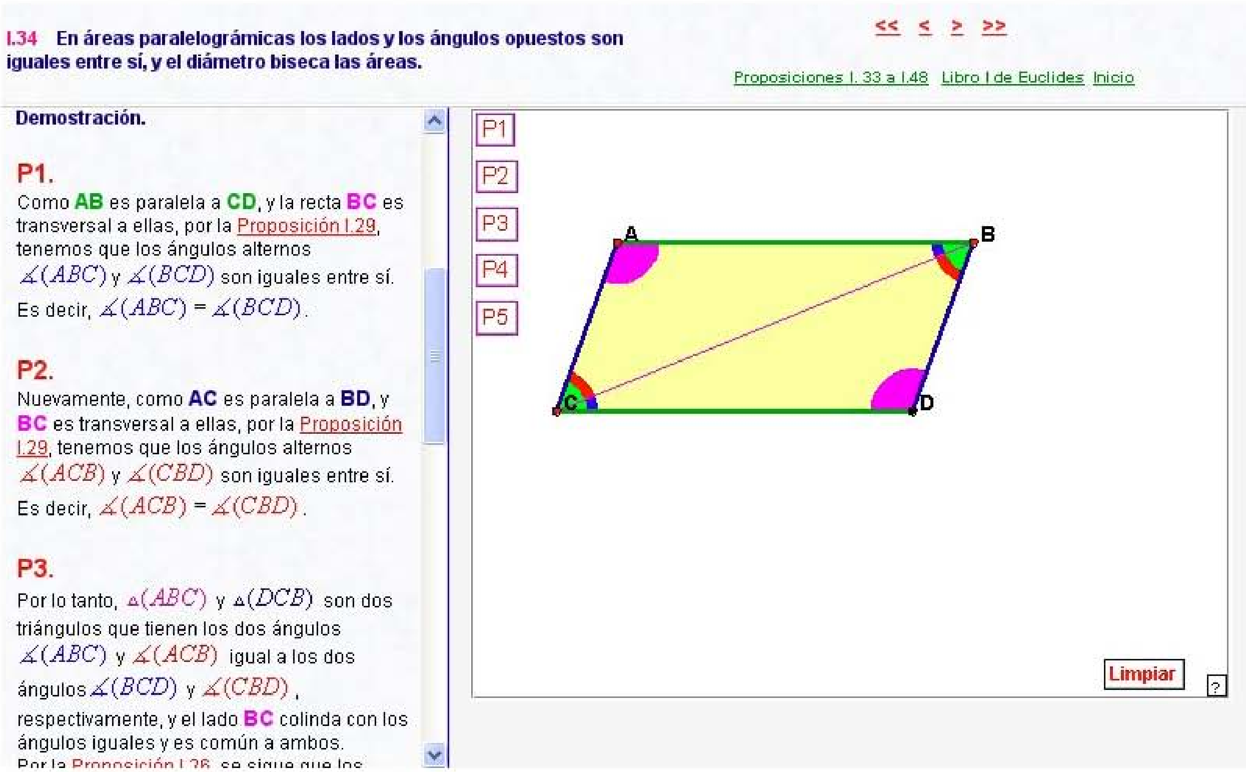
Además del applet interactivo que permite acompañar paso a paso a la demostración, en el marco izquierdo, se pueden accesar las proposiciones anteriores que se utilizan en la demostración., mediante los hipervínculos que se muestran en el marco derecho.



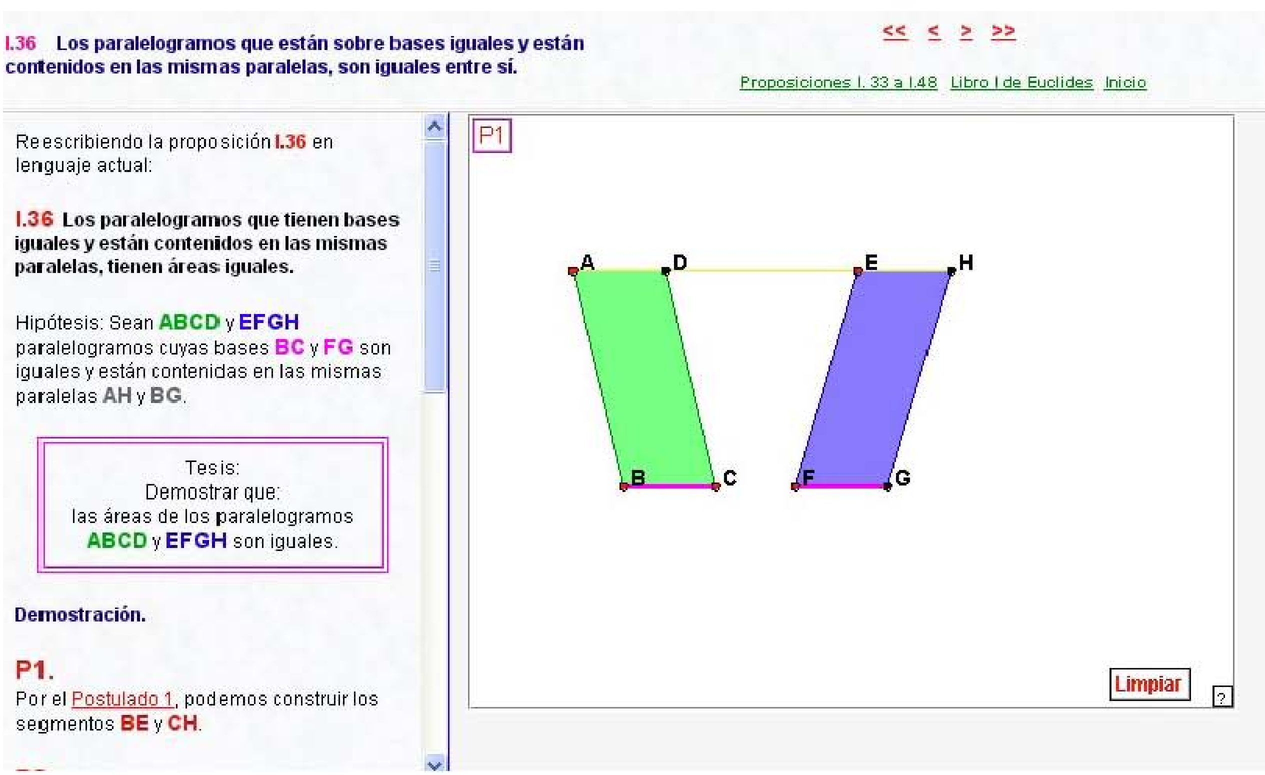
Después de desplegar el applet interactivo que acompaña paso a paso a la demostración y de poder acceder a proposiciones anteriores que se utilizan en la demostración, se puede dar clic en el botón Limpiar para poder reiniciar el proceso.



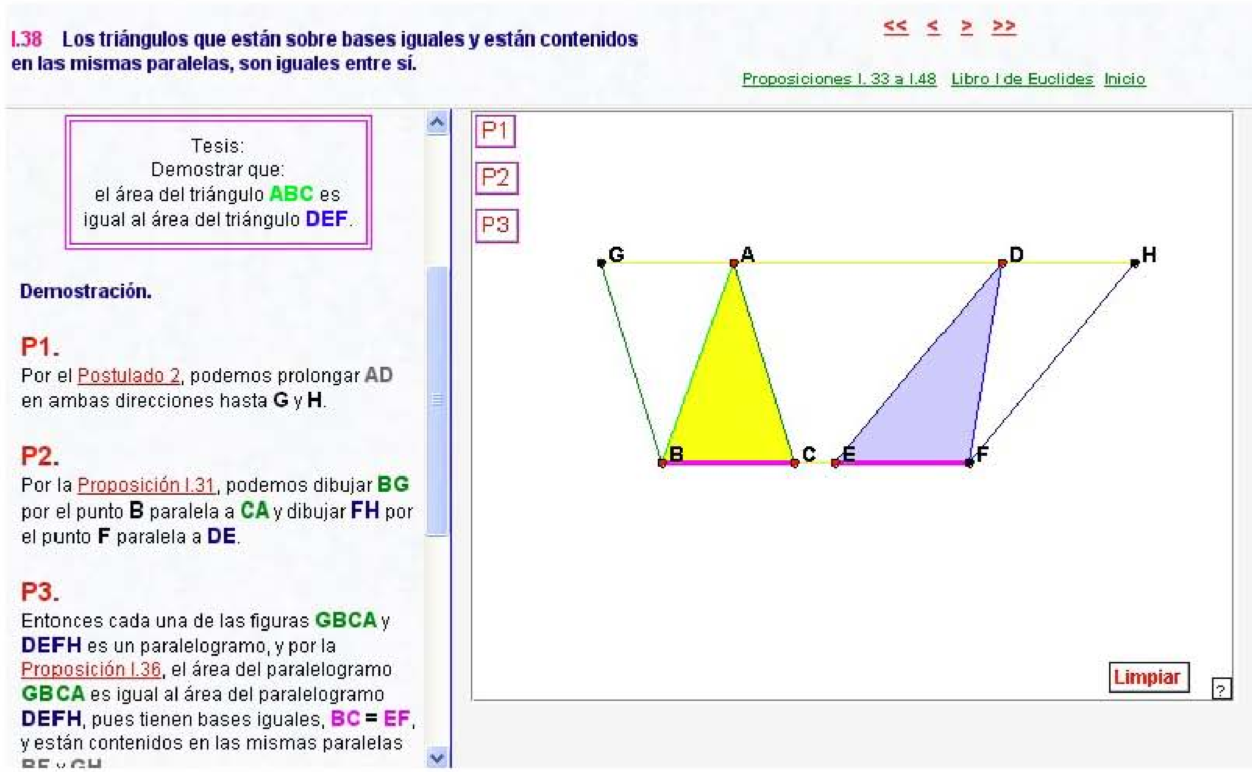
Aquí las proposiciones de la I.33 a la I.48 del Libro I de Euclides, relacionadas con las propiedades de paralelogramos, triángulos y cuadrados, pero referidas a sus áreas.



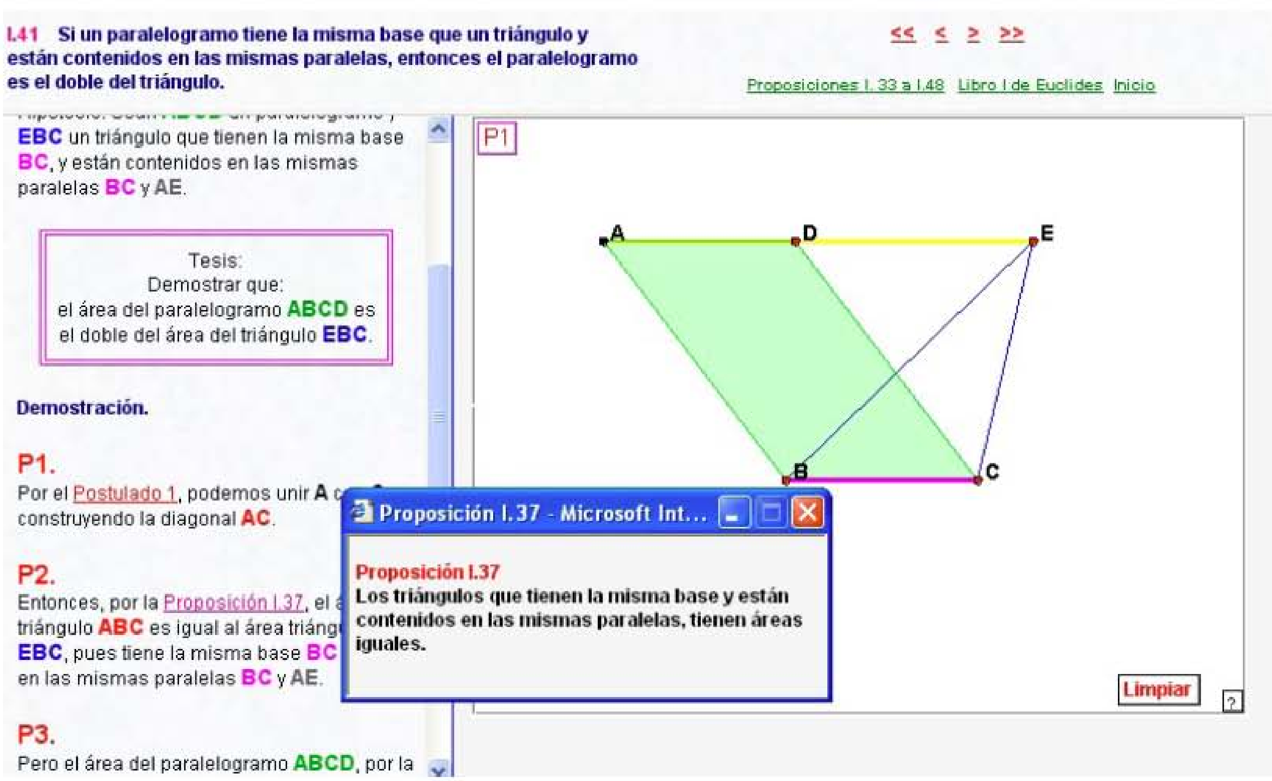
Al igual que en páginas Web anteriores, se tienen las proposiciones anteriores, requeridas en la demostración y se cuenta con un applet interactivo que acompaña la demostración paso a paso.



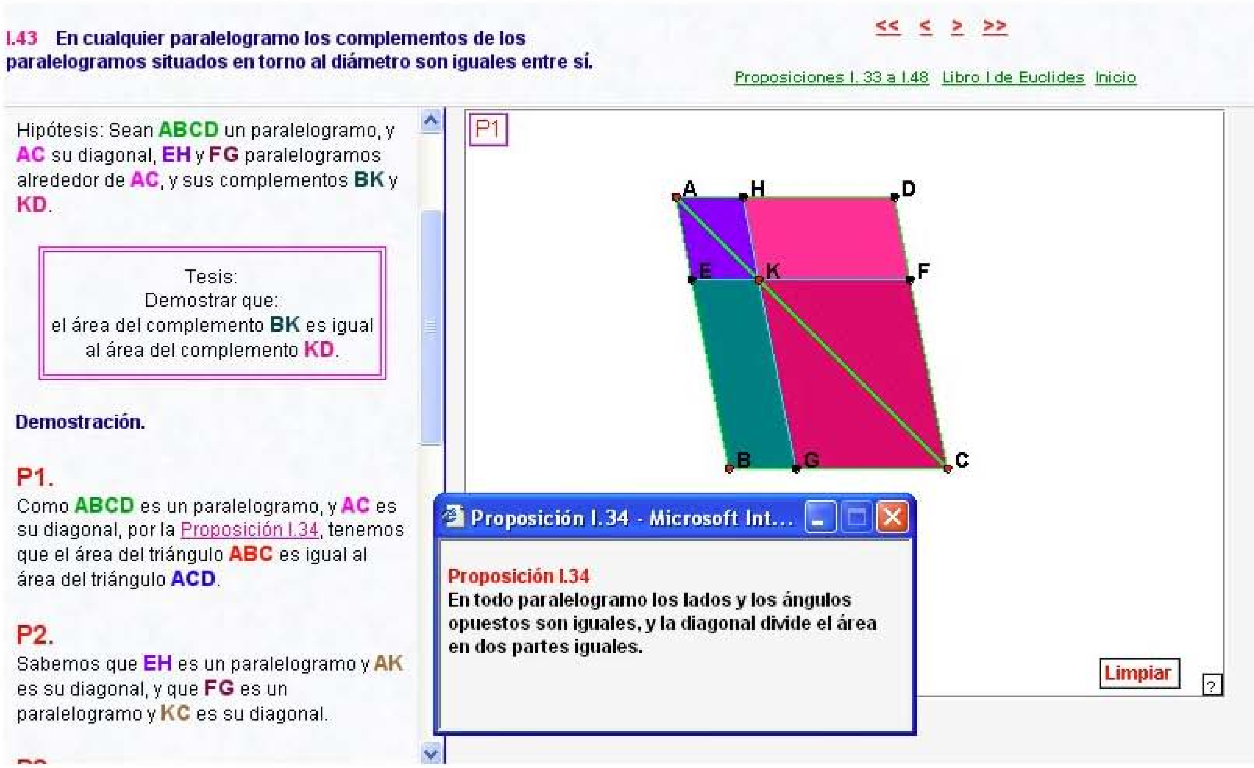
Al igual que en las páginas Web anteriores, se destaca la tesis a demostrar y se tienen accesibles las proposiciones anteriores, requeridas en la demostración. También se tiene la demostración formal paso a paso.



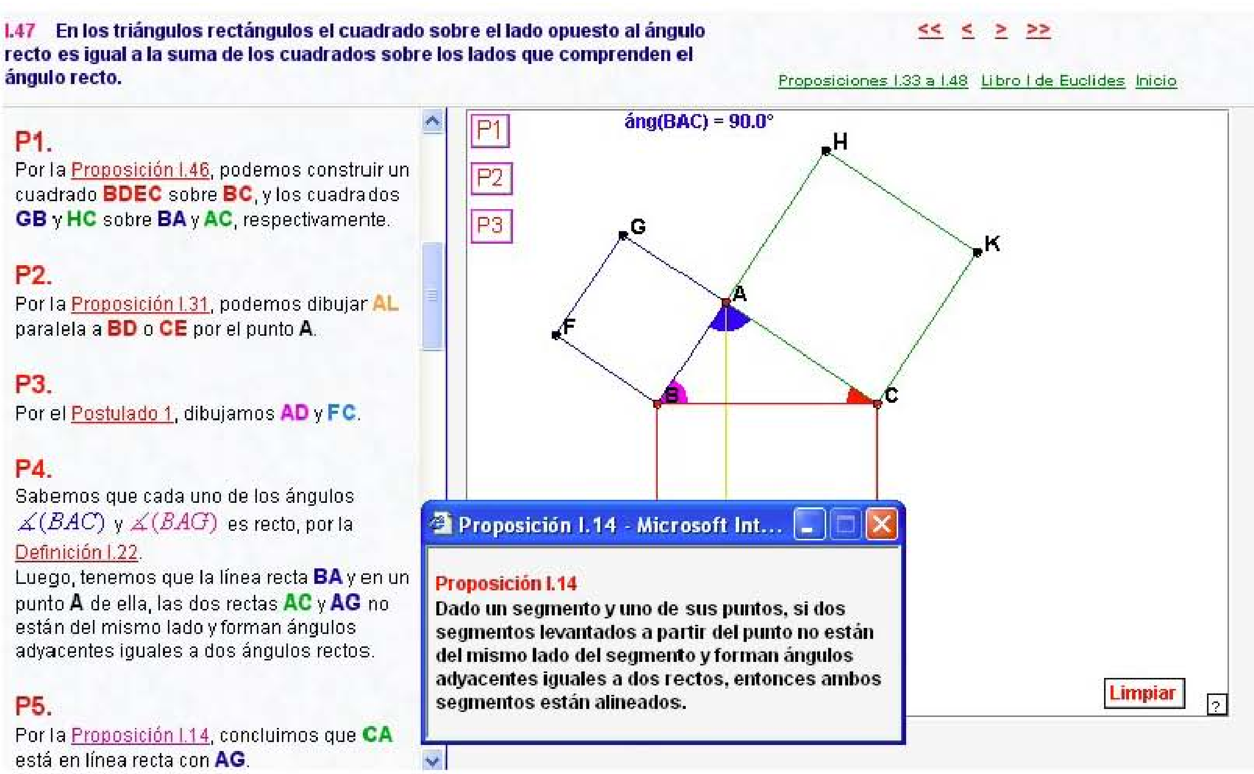
Al igual que en páginas Web anteriores, se destaca la tesis a demostrar y se tienen accesibles las proposiciones anteriores, requeridas en la demostración. También se tiene la demostración formal paso a paso y se puede limpiar para reiniciar el proceso.



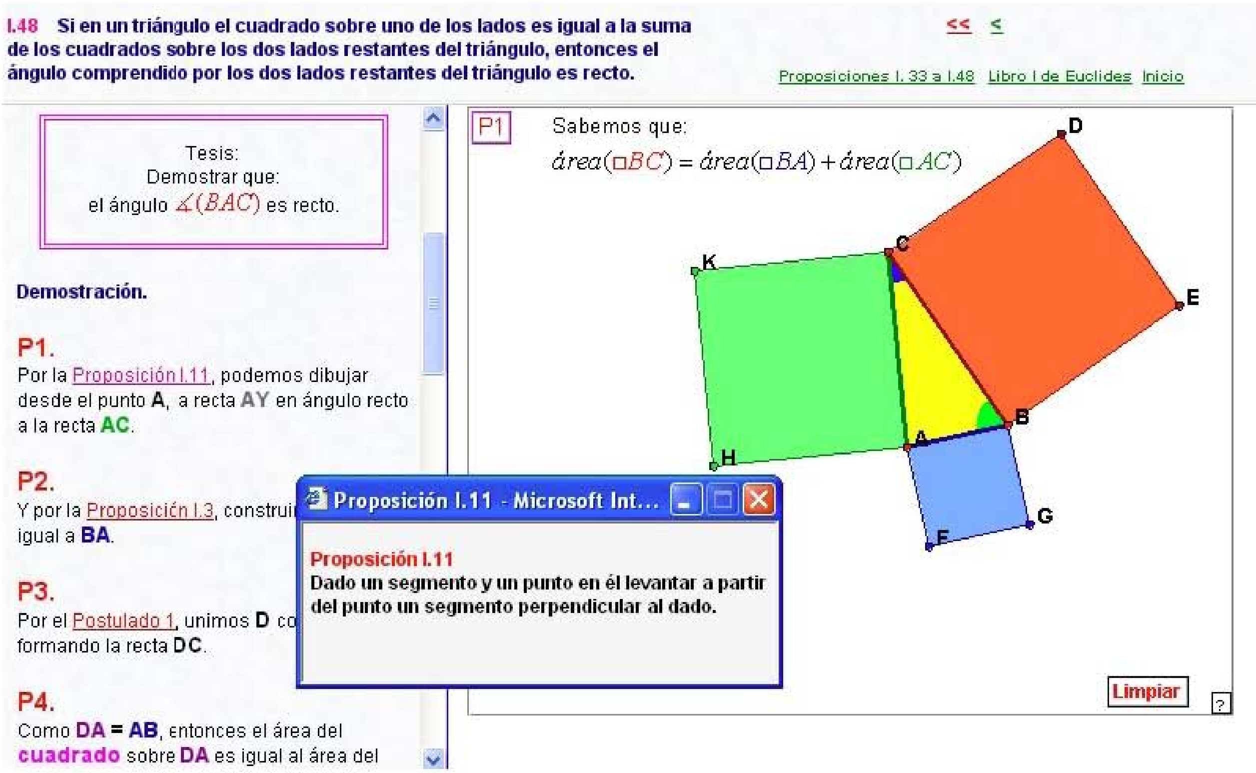
Aquí se puede apreciar el despliegue de una de las proposiciones requeridas para la demostración en una ventana flotante. No es necesario abandonar la página Web de lectura para recurrir a resultados anteriores.



Igualmente se puede apreciar el despliegue de una de las proposiciones requeridas para la demostración en una ventana flotante. Se tiene una demostración paso a paso y un applet interactivo que la acompaña.



No podía faltar el Teorema de Pitágoras, para cuya demostración se requieren una buena cantidad de proposiciones y definiciones anteriores, que se tienen disponibles, sin tener que abandonar la página Web de estudio.



Tampoco podía faltar el recíproco del Teorema de Pitágoras, para cuya demostración igualmente se requieren una buena cantidad de proposiciones y definiciones anteriores, que se tienen disponibles, sin tener que abandonar la página Web de estudio.


Libro I de los Elementos de Euclides

Geometría moderna Notas históricas Inicio

Bibliografía

Introducción.

Proposiciones 1 a 26.

Proposiciones 27 a 32.

Proposiciones 33 a 48.

Bibliografía.

I.5 Bibliografía

Heath, Sir Thomas Little (1861-1940)
Euclid
The thirteen books of THE ELEMENTS. Vol 1 (Books I and II).
Traducido y comentado por Sir Thomas L. Heath.
DOVER, PUBLICATIONS, INC. Second Edition

Euclides.
Elementos de Geometría. Tomos I - II.
Introducción, versión y notas de
Juan David García Bacca
Universidad Nacional Autónoma de México. 1992.

Eves Howard.
Estudio de las Geometrías.
UTEHA.

Radmila Bulajich Manfrino.
José Antonio Gómez Ortega.
GEOMETRÍA.
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas.
Instituto de Matemáticas. UNAM. 2003.

Michael Barot
Un paseo a Hiperbolia
Serie: Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza
Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT). 2005.

Los Elementos de Euclides:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

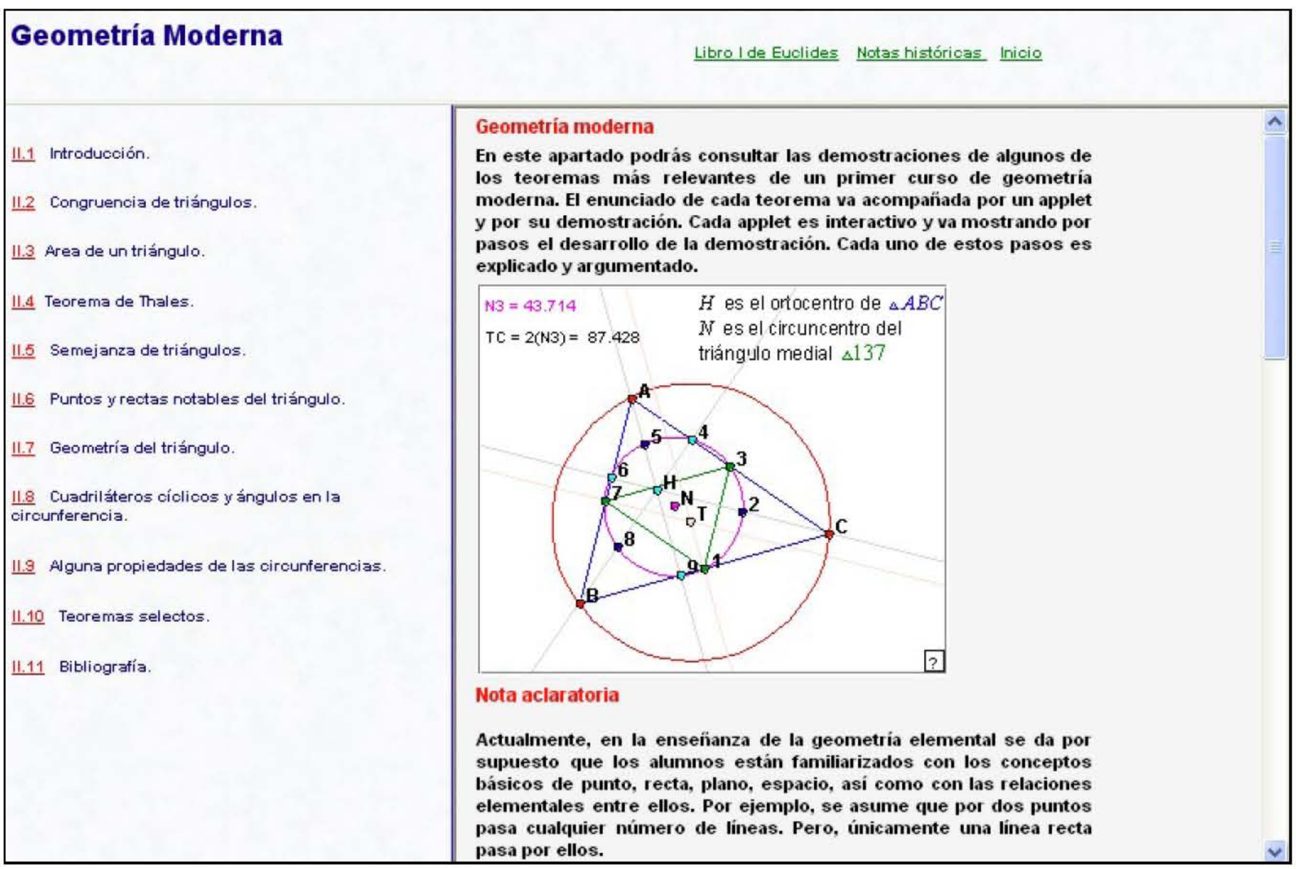
Software
The Geometer´s Sketchpad.
http://www.keypress.com/sketchpad/

Se proporciona bibliografía y referencias de Internet, todas ellas de gran utilidad para la elaboración de este trabajo y muy importantes para cualquiera que desee consultar las fuentes del tema.

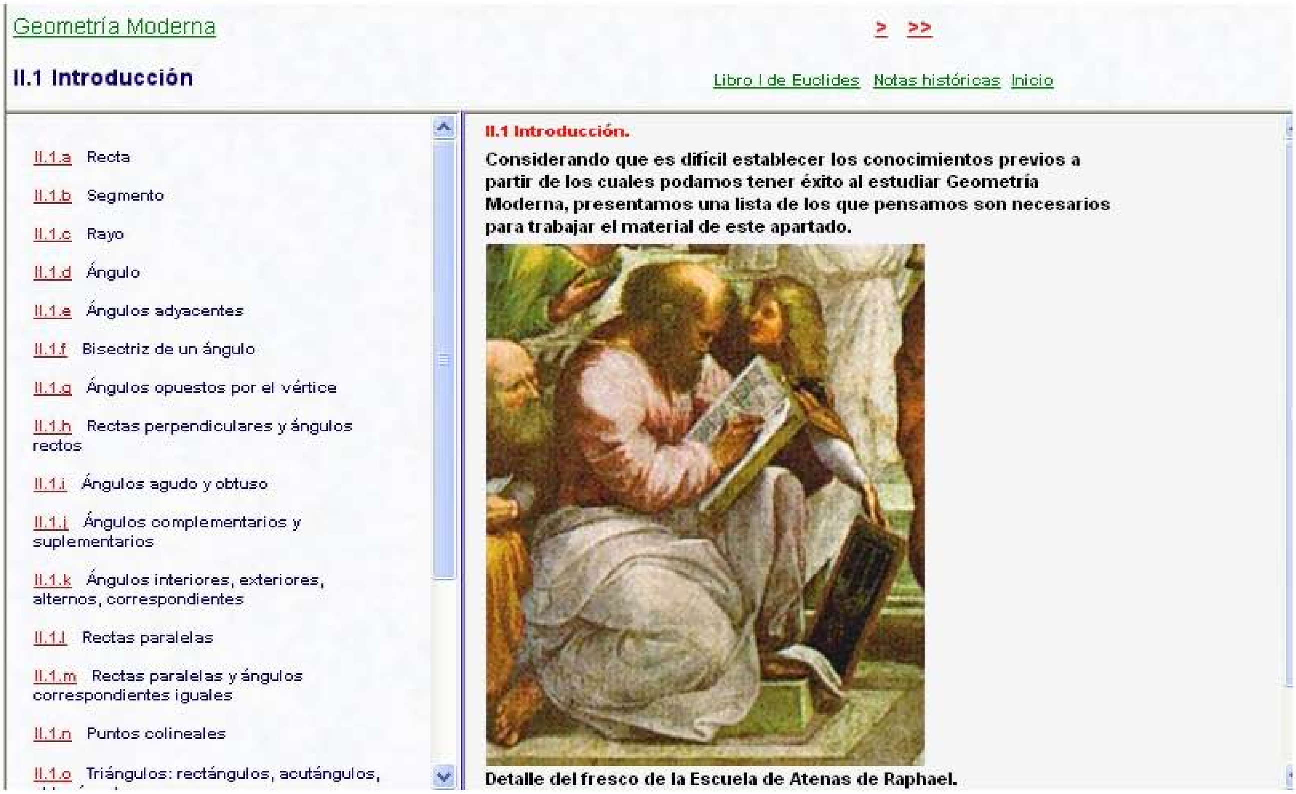
9.2 Imagen de la página Web Geometría Moderna

En el marco del título se presenta la página Web con el título de este tema y a su derecha una navegación estándar (hipervínculos), que permite saltar a las páginas Web de los otros temas principales o ir a la página Web de Inicio. El marco izquierdo de esta página Web contiene su menú principal. En el marco derecho se da una breve presentación del contenido de la página Web Geometría Moderna. También se muestra el applet correspondiente a la construcción geométrica de la Circunferencia de los nueve puntos. Y se da una Nota aclaratoria. En su menú principal se enlistan los hipervínculos de los temas que aquí se desarrollan:

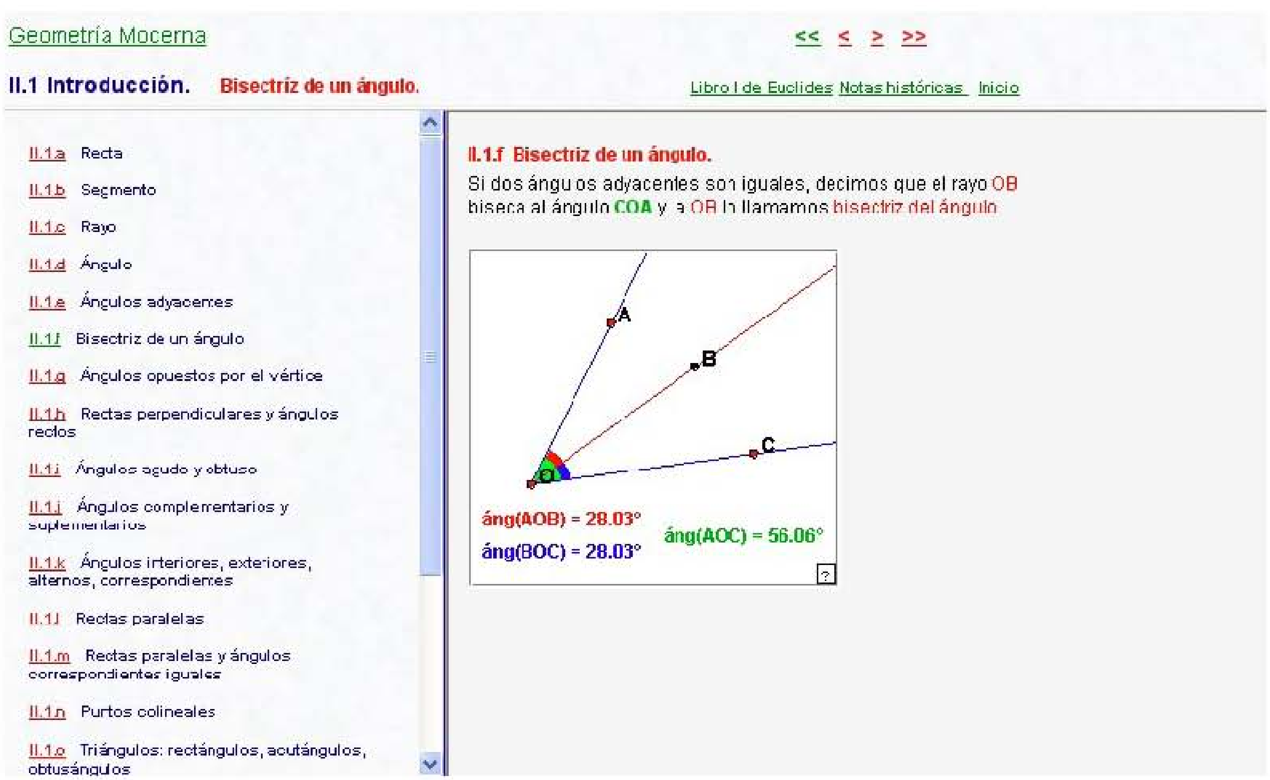
- II.1 Introducción.
- II.2 Congruencia de triángulos.
- II.3 Área de triángulos
- II.4 Teorema de Thales
- II.5 Semejanza de triángulos
- II.6 Puntos y rectas notables del triángulo
- II.7 Geometría del triángulo
- II.8 Cuadriláteros cíclicos y ángulos en la circunferencia
- II.9 Algunas propiedades de las circunferencias
- II.10 Teoremas selectos.
- II.11 Bibliografía.



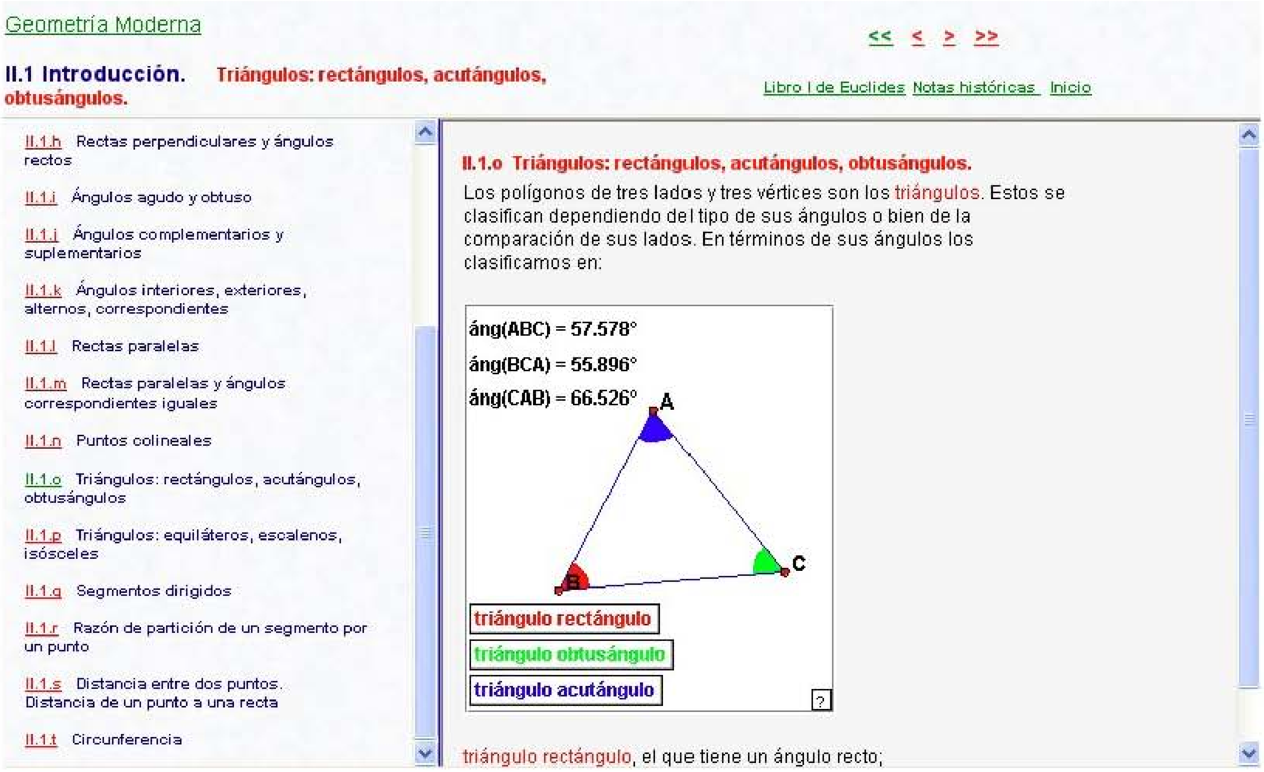
En la barra de navegación, que está en el marco título, se puede ir a los otros temas principales o bien regresar a la página Web de Inicio.



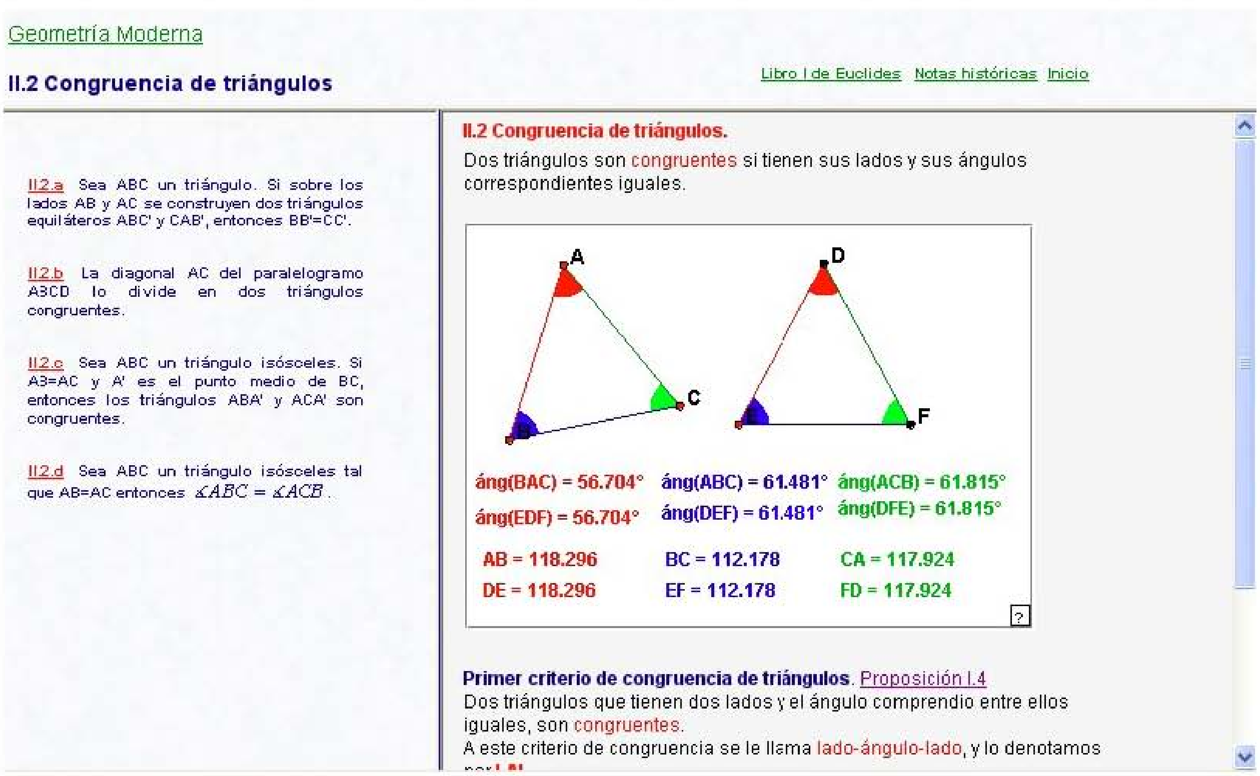
En esta introducción se proporcionan los conceptos que se considerar necesarios para iniciar un curso de Geometría Moderna.



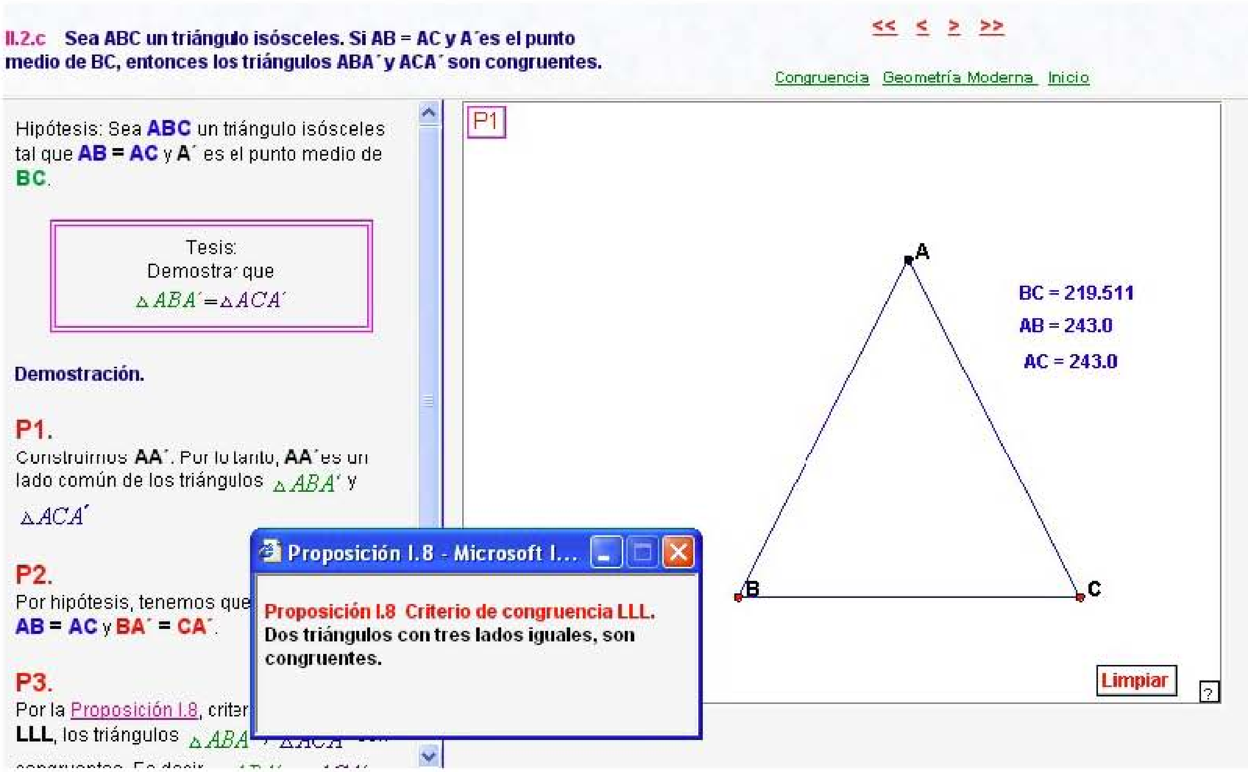
Aquí por ejemplo se ha seleccionado los conocimientos referentes a la bisectriz de un ángulo, el cuál cuenta con un applet para elegir distintos ángulos.



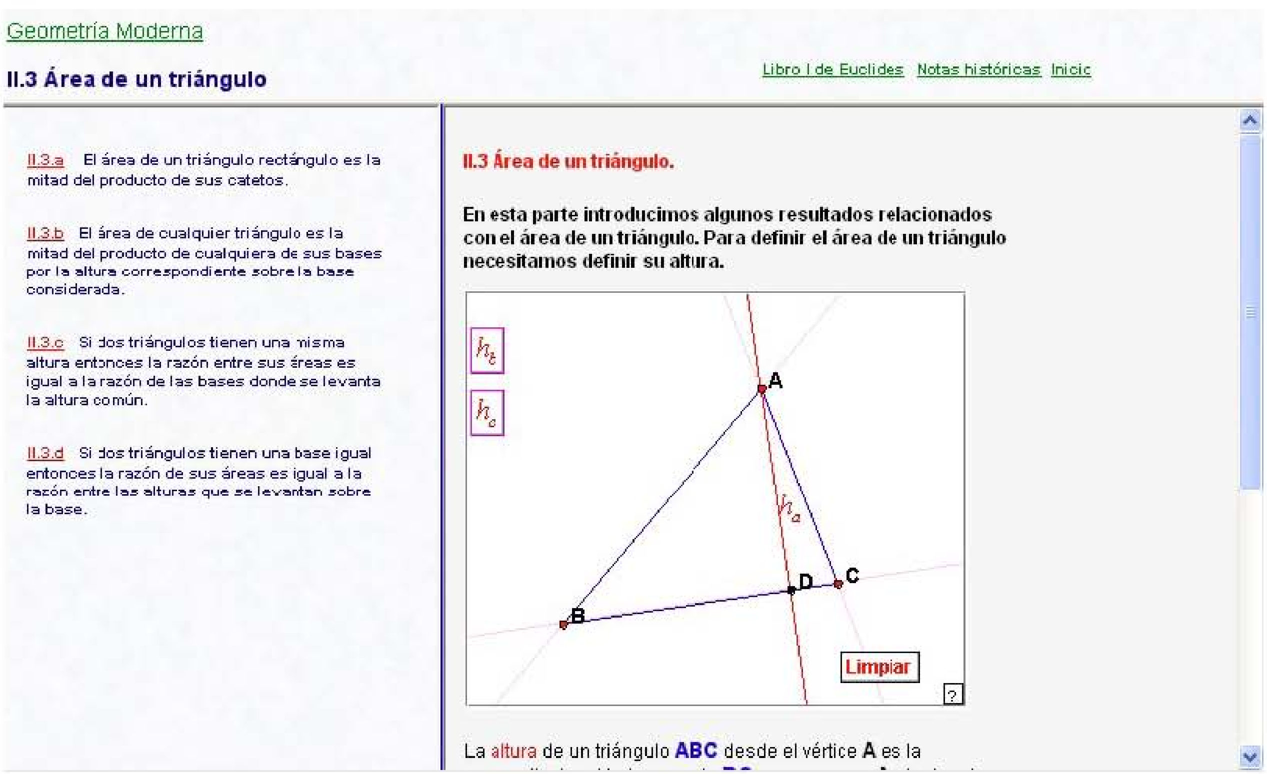
Aquí por ejemplo se ha seleccionado los conocimientos referentes a los distintos tipos de triángulos según sus ángulos, el cuál cuenta con un applet para poderlos observar con mayor claridad.



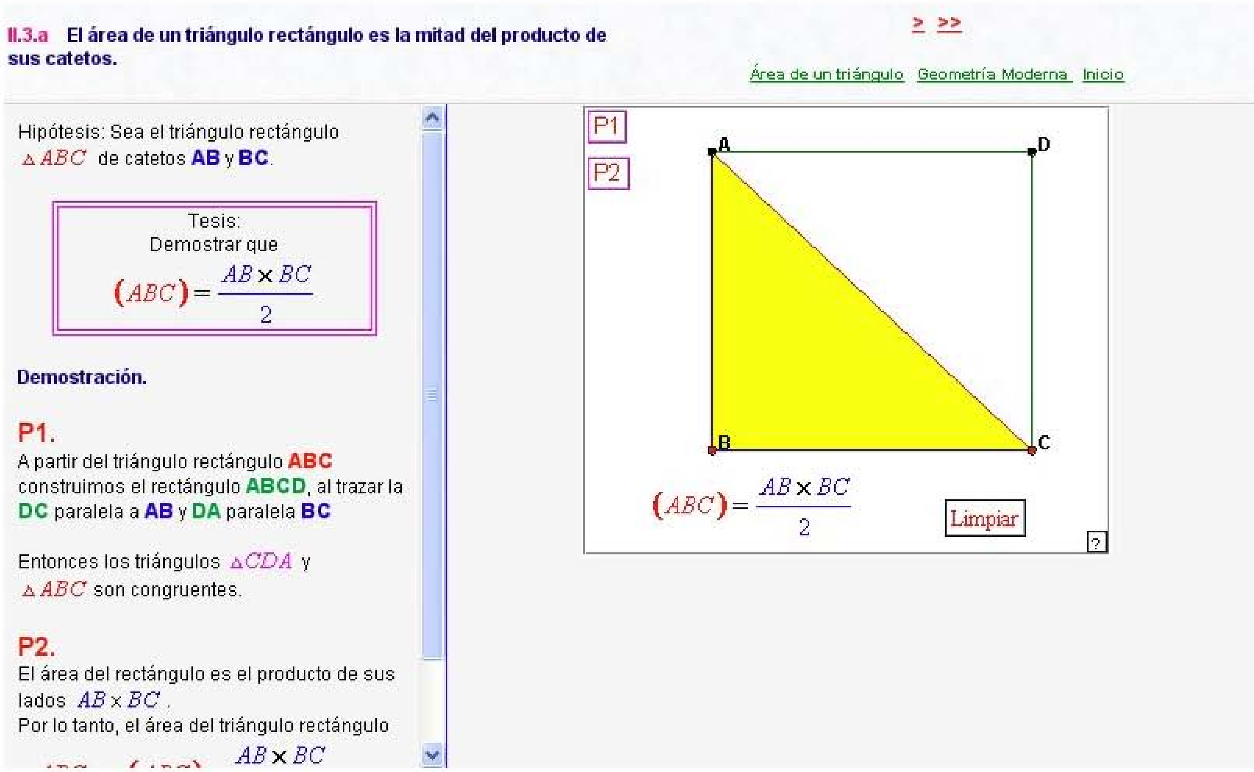
Entrando al tema de congruencia de triángulos se encuentran cuatro resultados al respecto y no falta en cada caso un applet interactivo que permite explorar distintas situaciones.



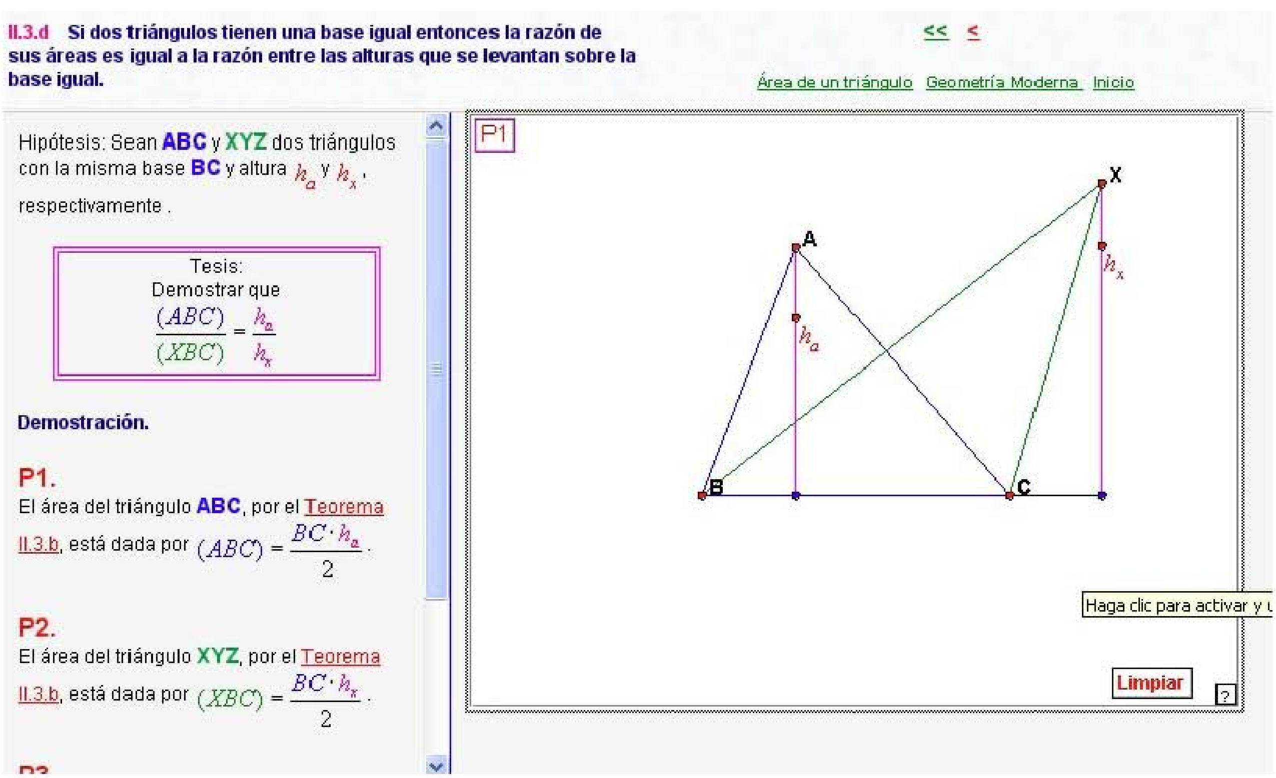
Por ejemplo el resultado II.2.c. Como requiere de una proposición anterior, se tiene disponible para desplegarla en una ventana flotante, sin tener que abandonar la página Web de lectura.



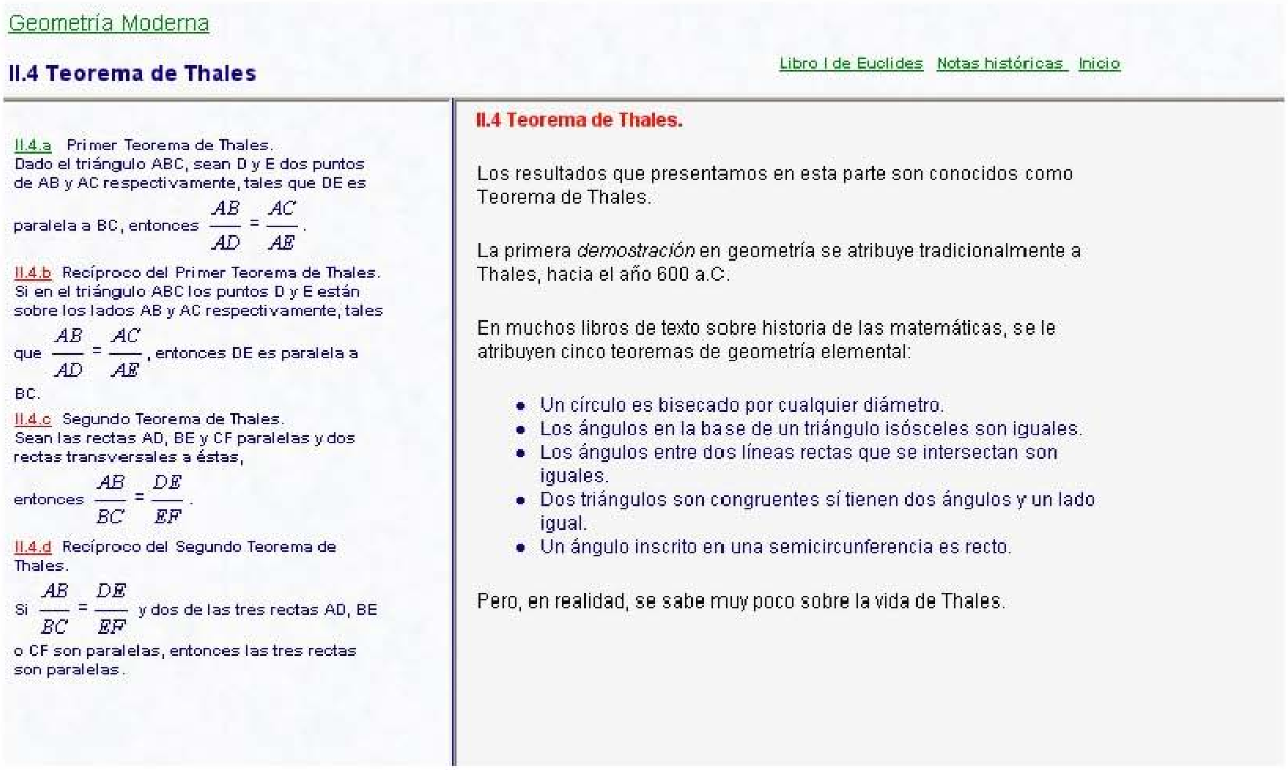
En esta sección II.3 se encuentran cuatro resultados relacionados con el área de un triángulo. Como en todos los casos se cuentan con applets interactivos que acompañan paso a paso la demostración.



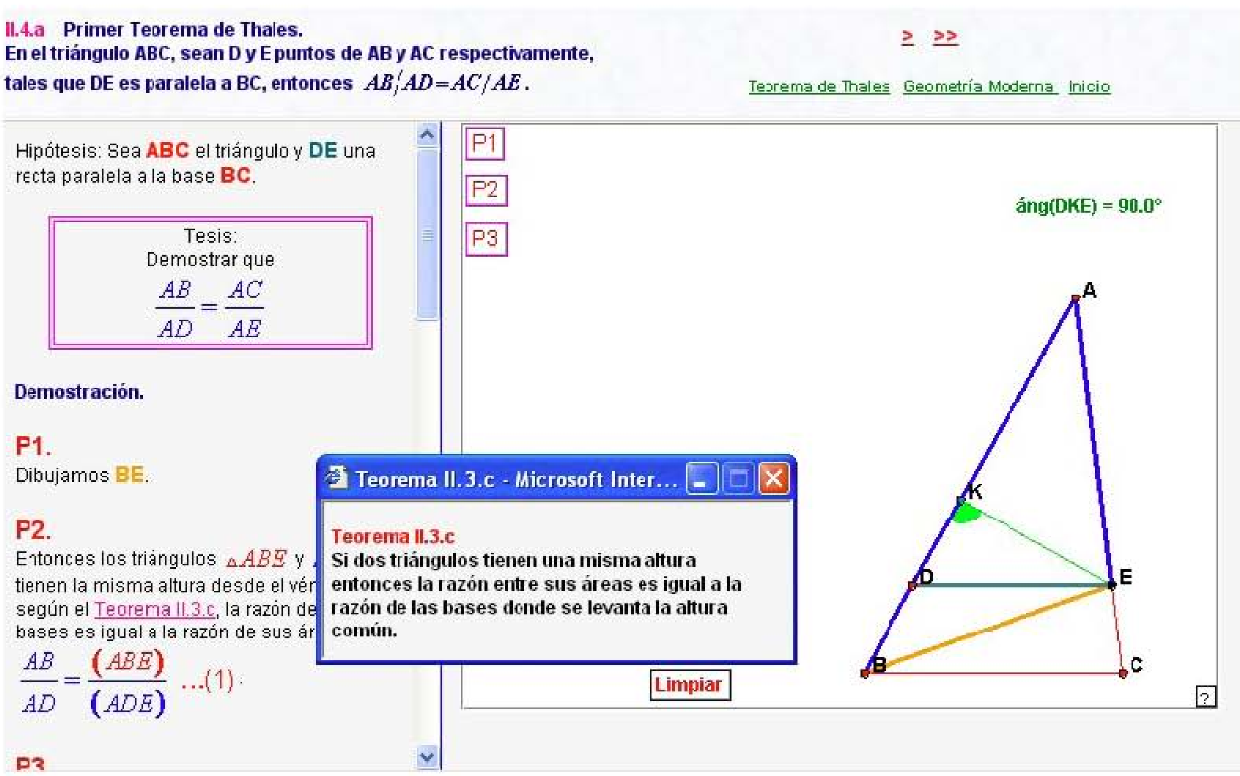
El primer resultado de esta sección referente al área de un triángulo rectángulo. Tiene su demostración paso a paso y un applet interactivo para acompañarla.



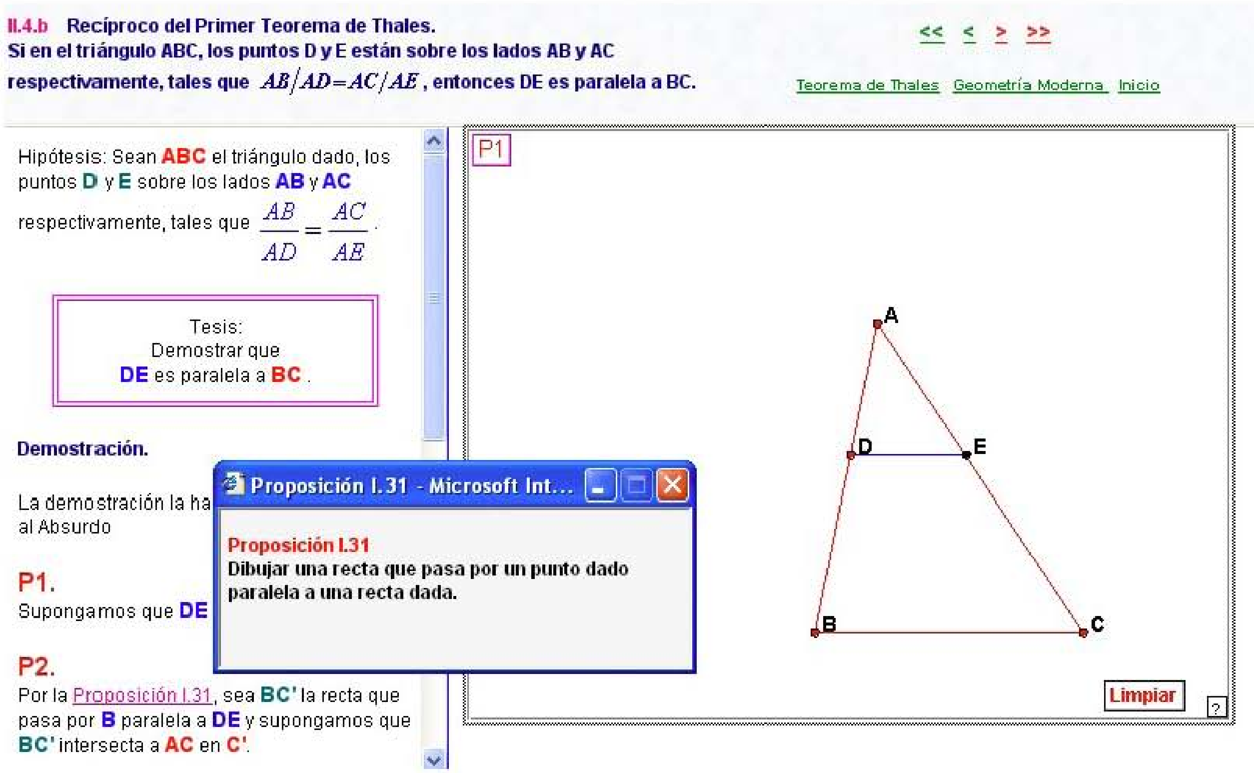
El cuarto resultado de esta sección referente al área de dos triángulos que comparten la base. Se tienen a la mano teoremas anteriores que son necesarios para la demostración.



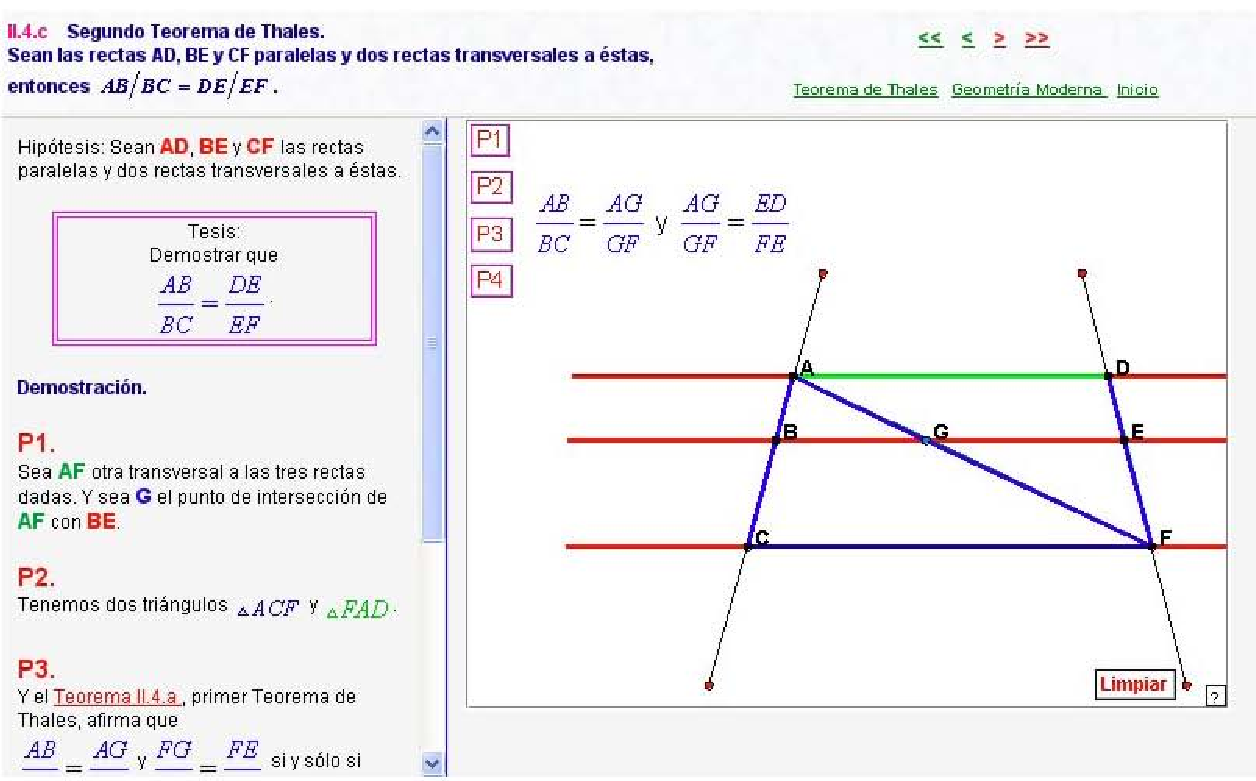
El Teorema de Thales, que en realidad son dos y sus recíprocos. Es muy importante resaltar que a Thales de Mileto se le atribuye la primera demostración en Geometría.



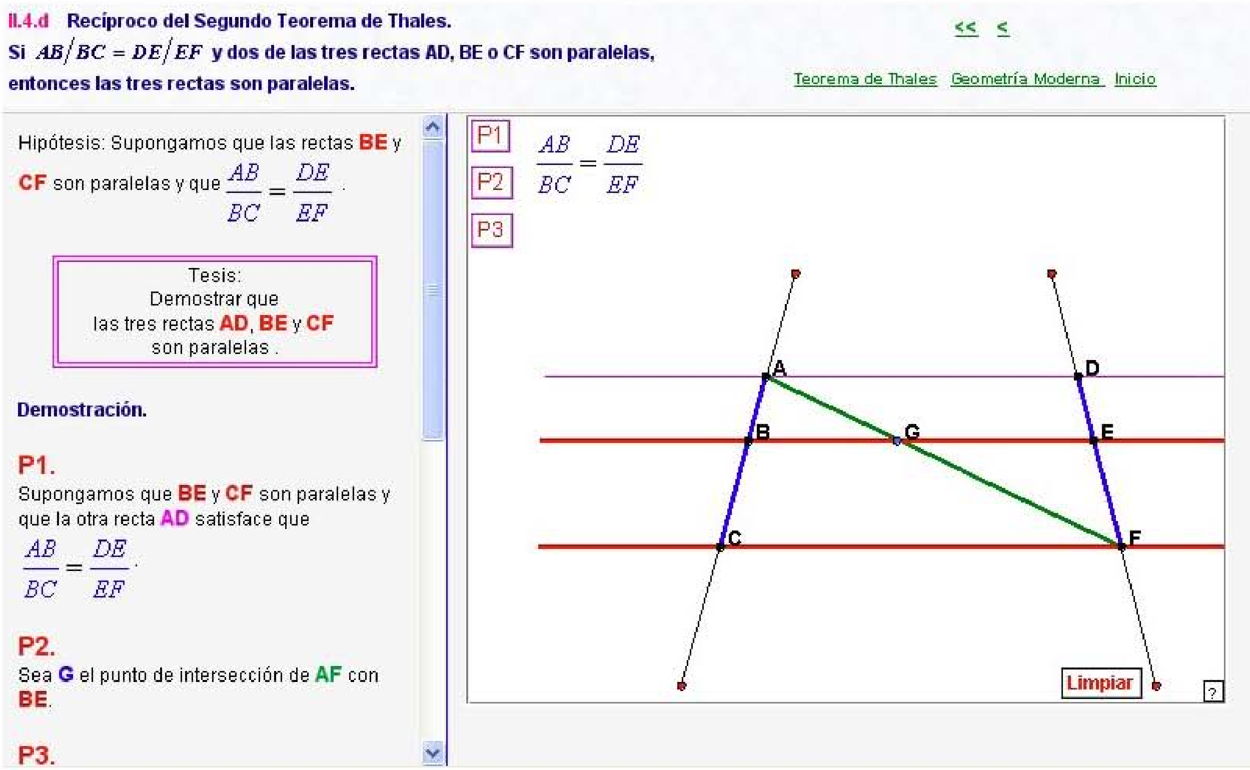
El primer teorema de Thales, incluye su demostración paso a paso, acompañada de un applet interactivo en donde se van observando los pasos de la demostración. Se pueden desplegar referencias necesarias.



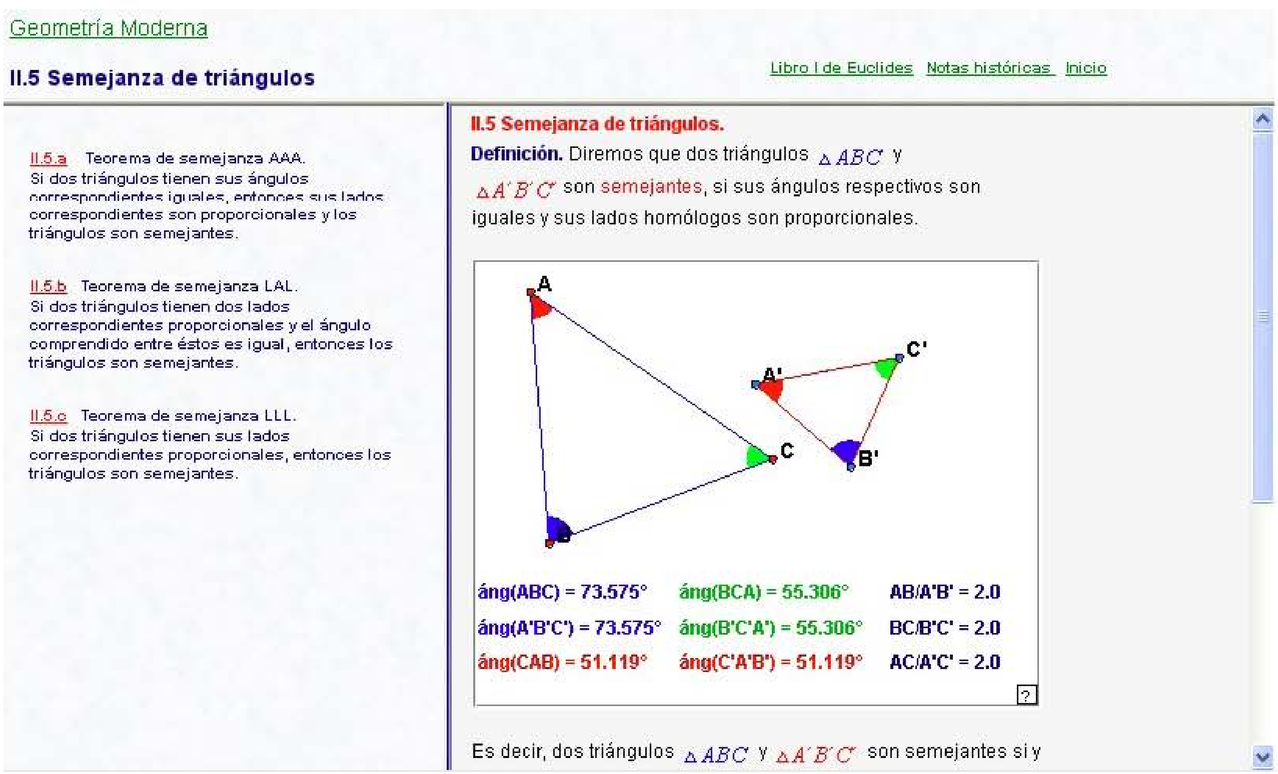
Aquí el recíproco del primer teorema de Thales, incluye su demostración paso a paso, acompañada de un applet interactivo en donde se van observando los pasos de la demostración.



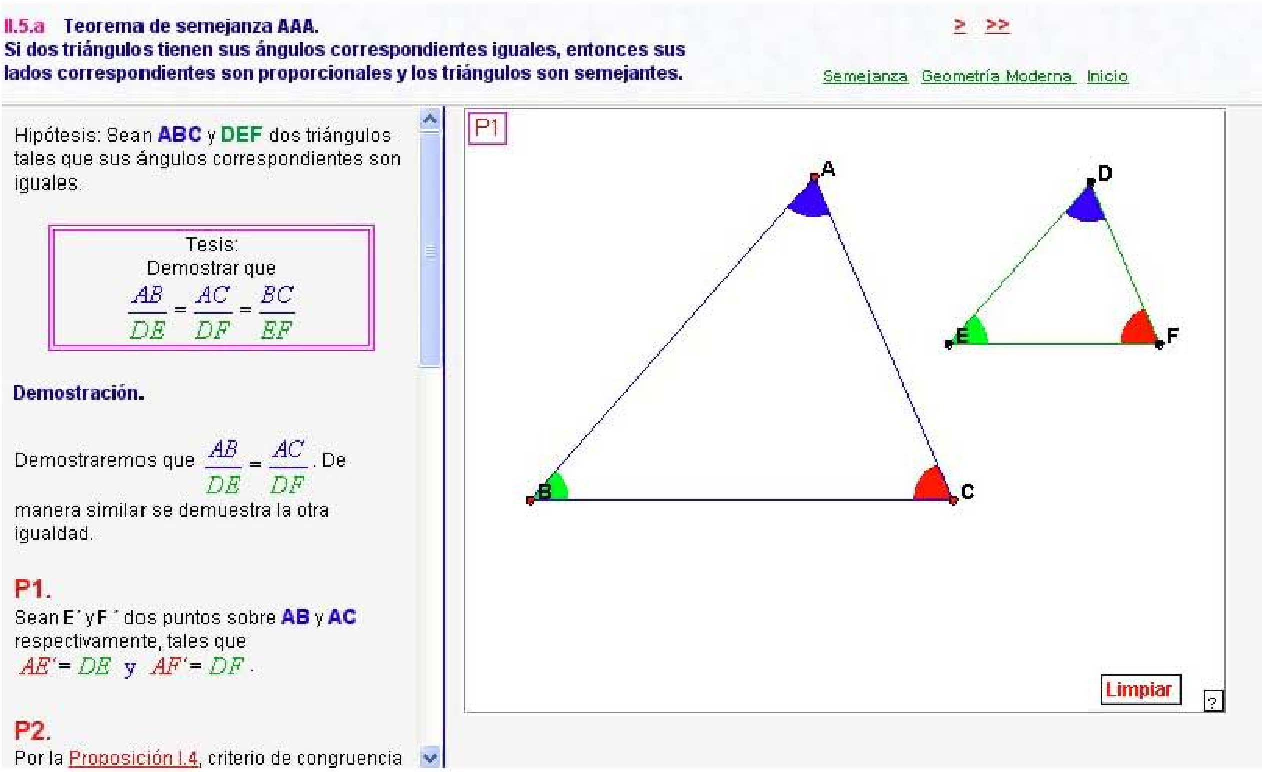
Aquí el segundo teorema de Thales, incluye su demostración paso a paso, acompañada de un applet interactivo en donde se van observando los pasos de la demostración.



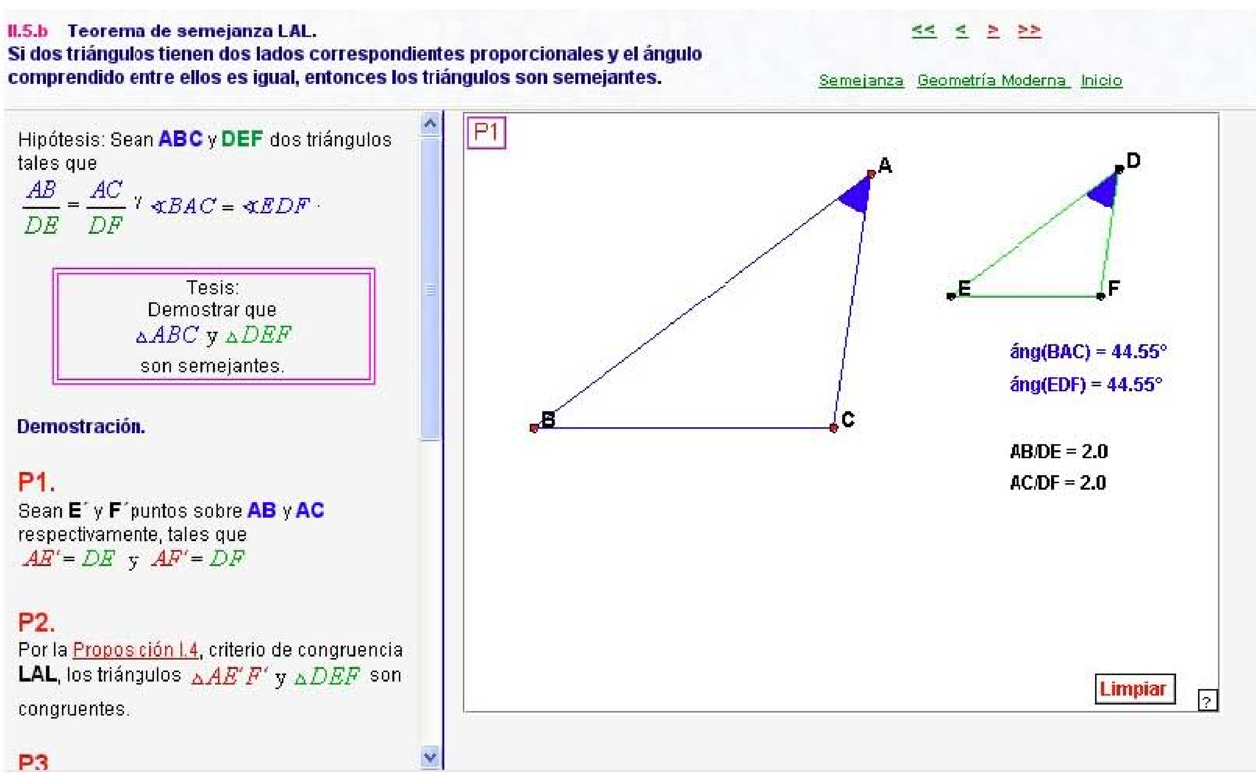
Aquí el recíproco del segundo teorema de Thales, incluye su demostración paso a paso, acompañada de un applet interactivo en donde se van observando los pasos de la demostración.



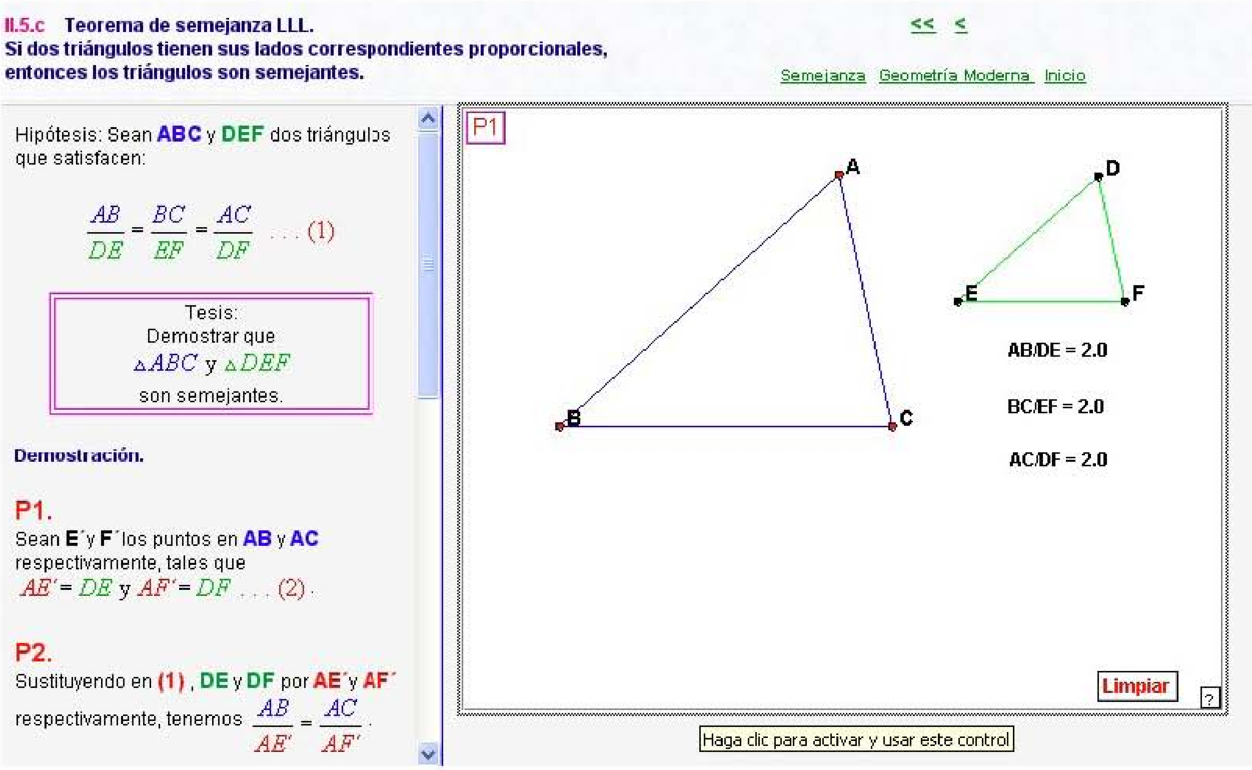
El tema II.5 cuyos resultados tienen que ver con semejanza de triángulos. Todos cuentas con demostraciones paso a paso y applets interactivos para seguir los pasos de cada una de ellas.



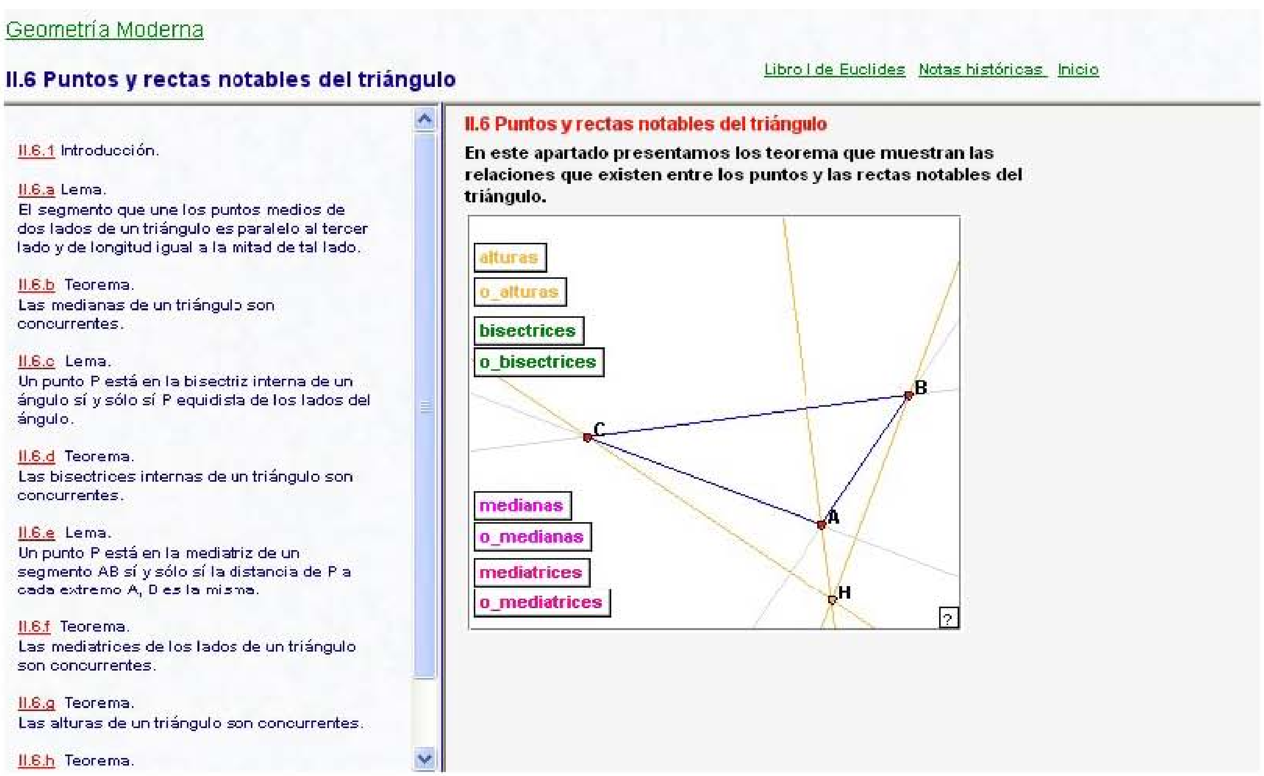
El resultado II.5a, por ejemplo, aclara en un recuadro llamado tesis, lo que se pretende demostrar y se tienen disponibles resultados previos necesarios para la demostración.



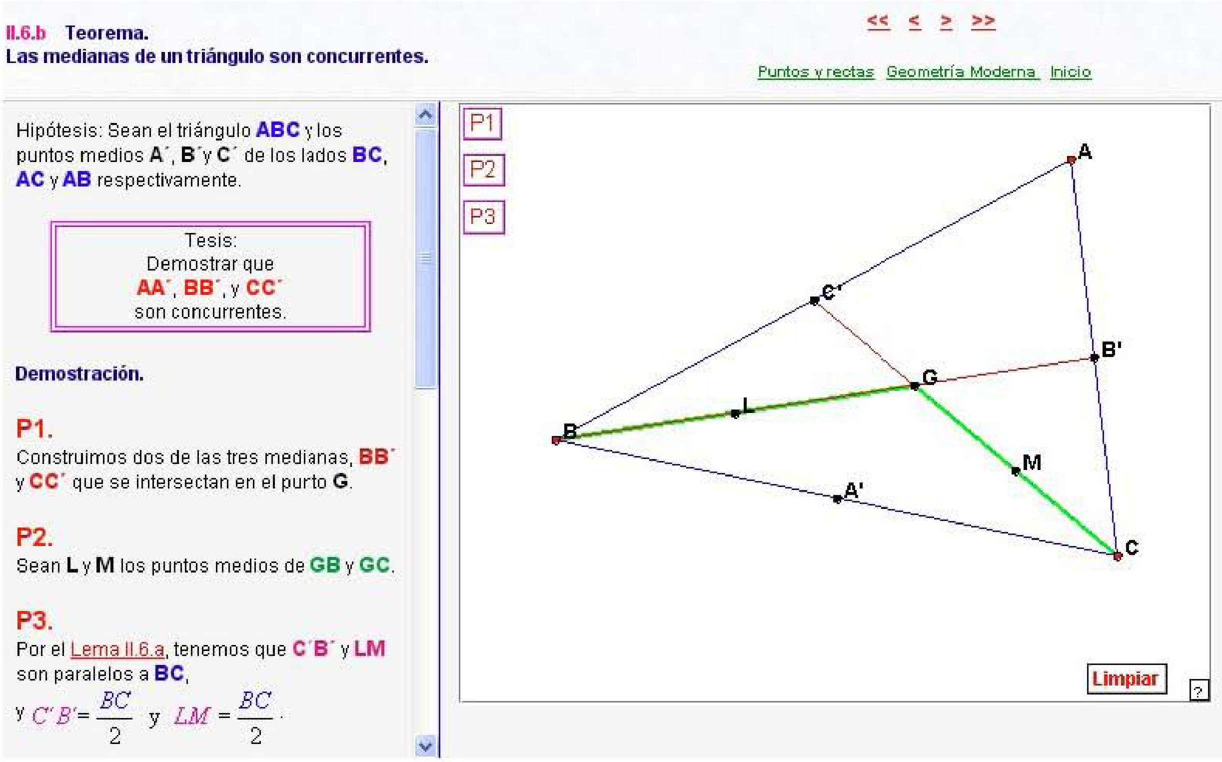
El resultado II.5b, por ejemplo, aclara en un recuadro llamado tesis, lo que se pretende demostrar y se tienen disponibles resultados previos necesarios para la demostración.



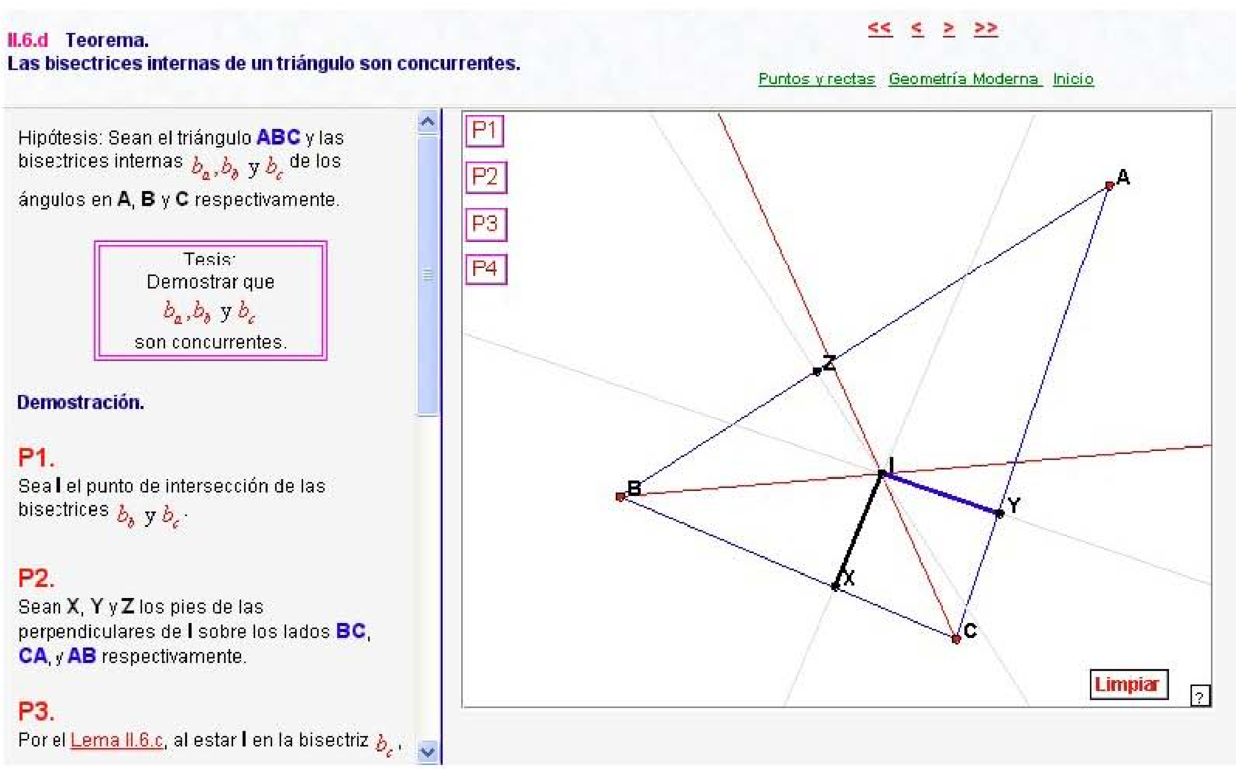
El resultado II.5c, por ejemplo, se refiere a un tercer caso de semejanza de triángulos. Aclara en un recuadro llamado tesis, lo que se pretende demostrar y se tienen disponibles resultados previos.



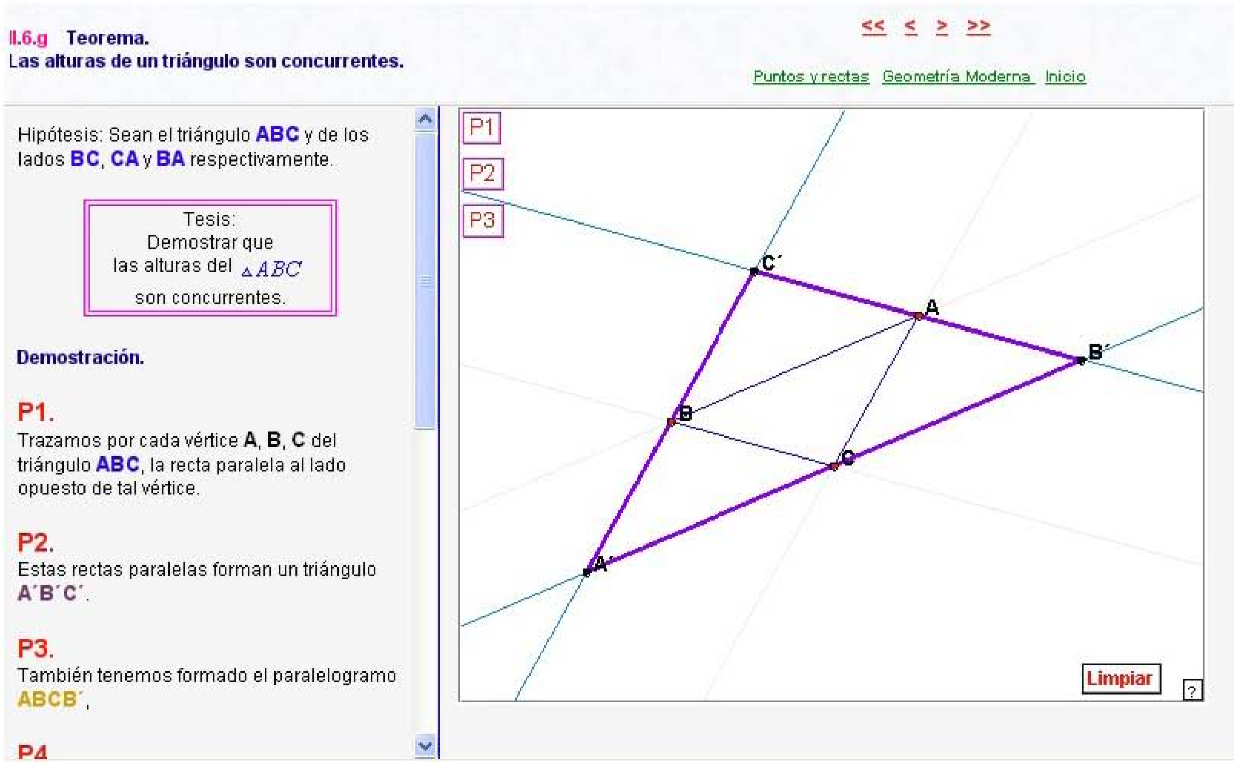
En este apartado se muestran una buena cantidad de resultados referentes a los puntos y rectas notables del triángulo. Como en todos los casos se tienen demostraciones formales paso a paso.



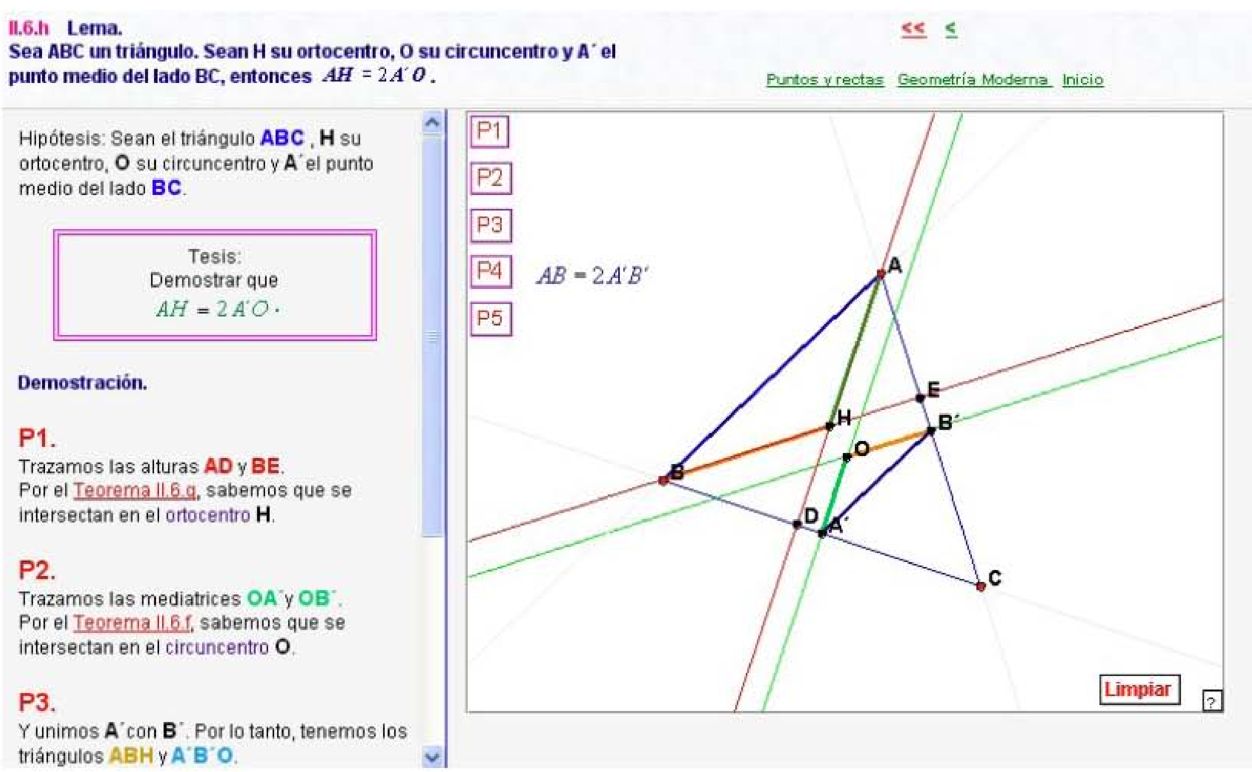
Este resultado II.6.b por ejemplo, sobre las medianas de un triángulo, al igual que en todos los casos, tiene un applet interactivo para seguir la demostración paso a paso. Así también se tienen disponibles resultados previos necesarios.



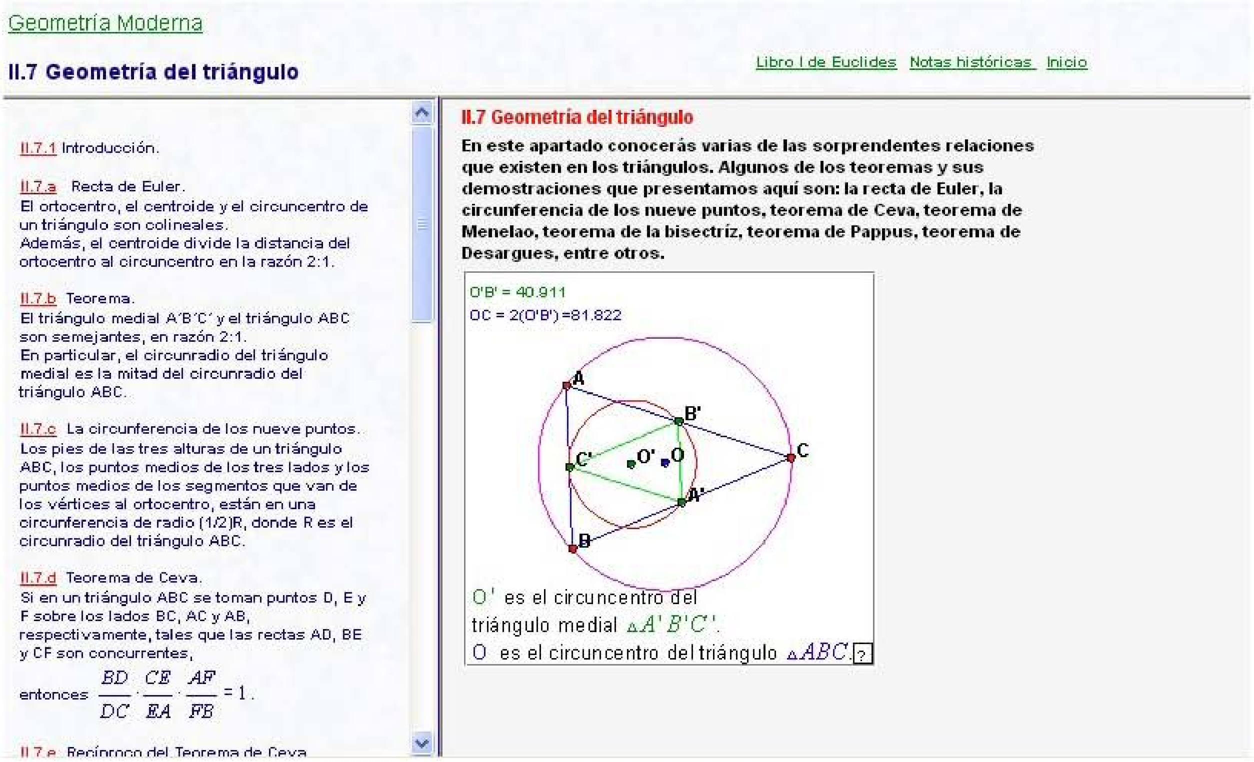
Este resultado II.6.d por ejemplo, sobre las bisectrices internas de un triángulo, al igual que en todos los casos, tiene un botón de limpiar para poder seguir nuevamente el proceso de la demostración. Siempre se destaca la tesis a demostrar.



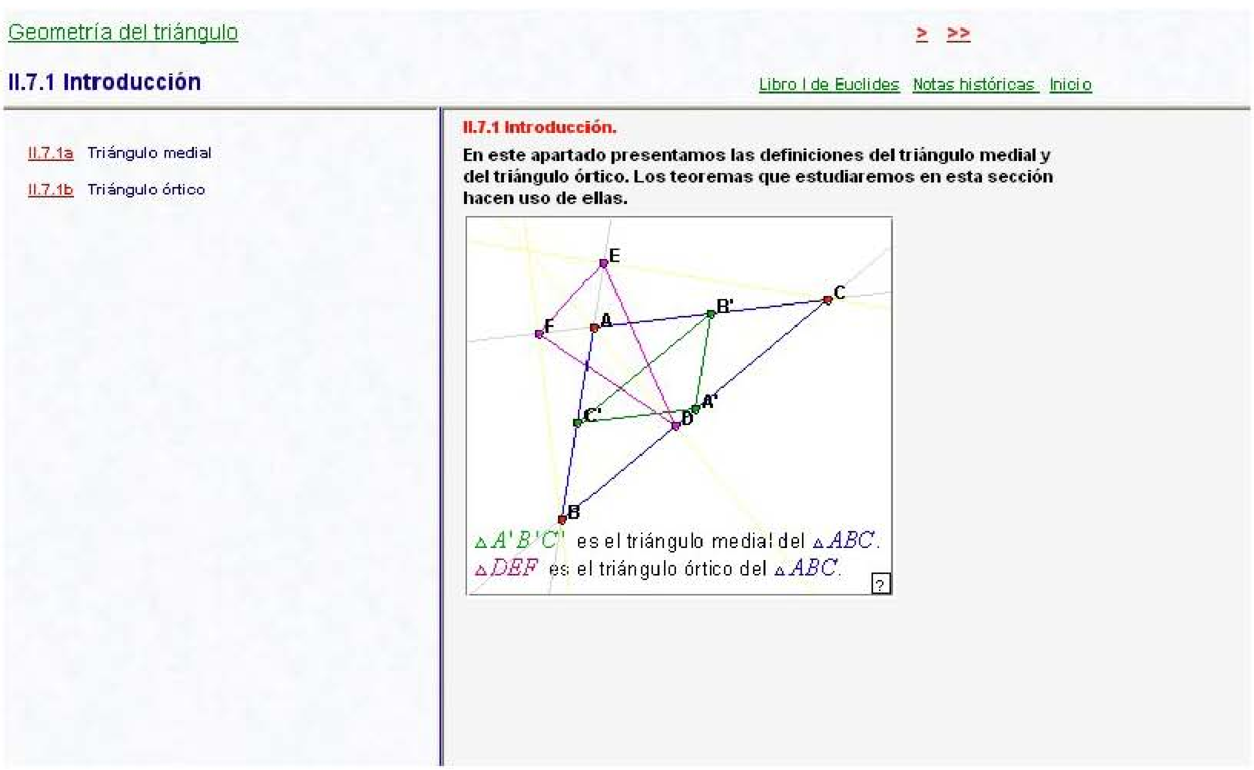
Este resultado II.6.g por ejemplo, sobre las alturas de un triángulo, al igual que en todos los casos, tiene una demostración paso a paso que se puede acompañar por un applet interactivo, para entender mejor cada uno de los pasos dados.



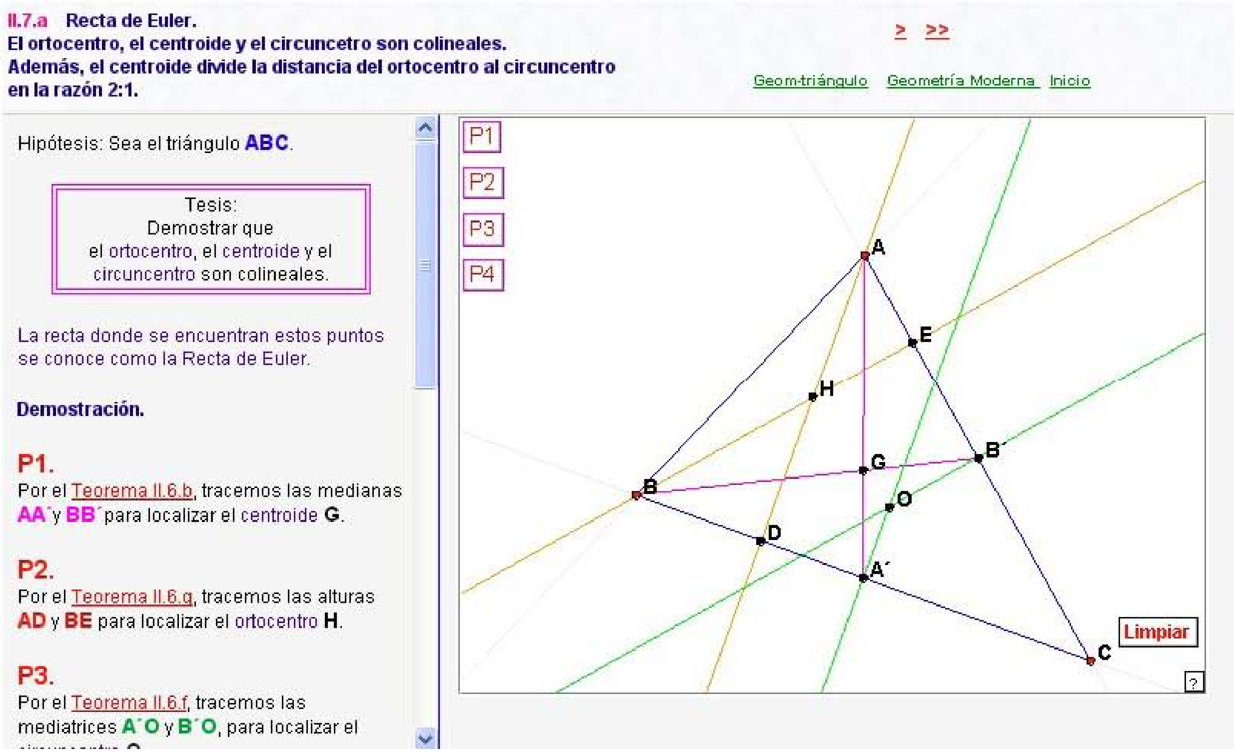
Este resultado II.6.h por ejemplo, con relaciones numéricas interesantes en un triángulo, al igual que en todos los casos, tiene una demostración paso a paso que se puede acompañar por un applet interactivo, para entender mejor cada uno de los pasos dados. Además tiene disponibles referencias necesarias.



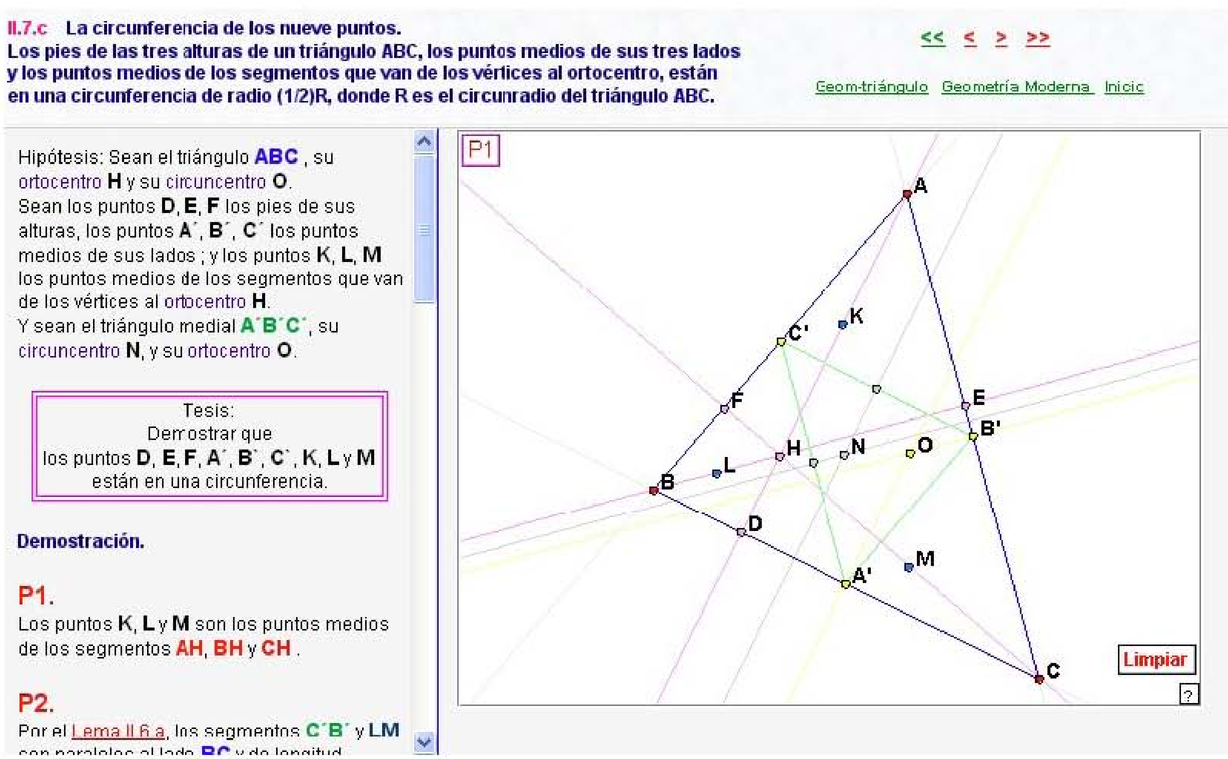
Este apartado sobre la Geometría del triángulo, contiene varias relaciones que se pueden tipificar como sorprendentes y en todos los casos se cuentan con applets interactivos para acompañar a las demostraciones formales paso a paso.



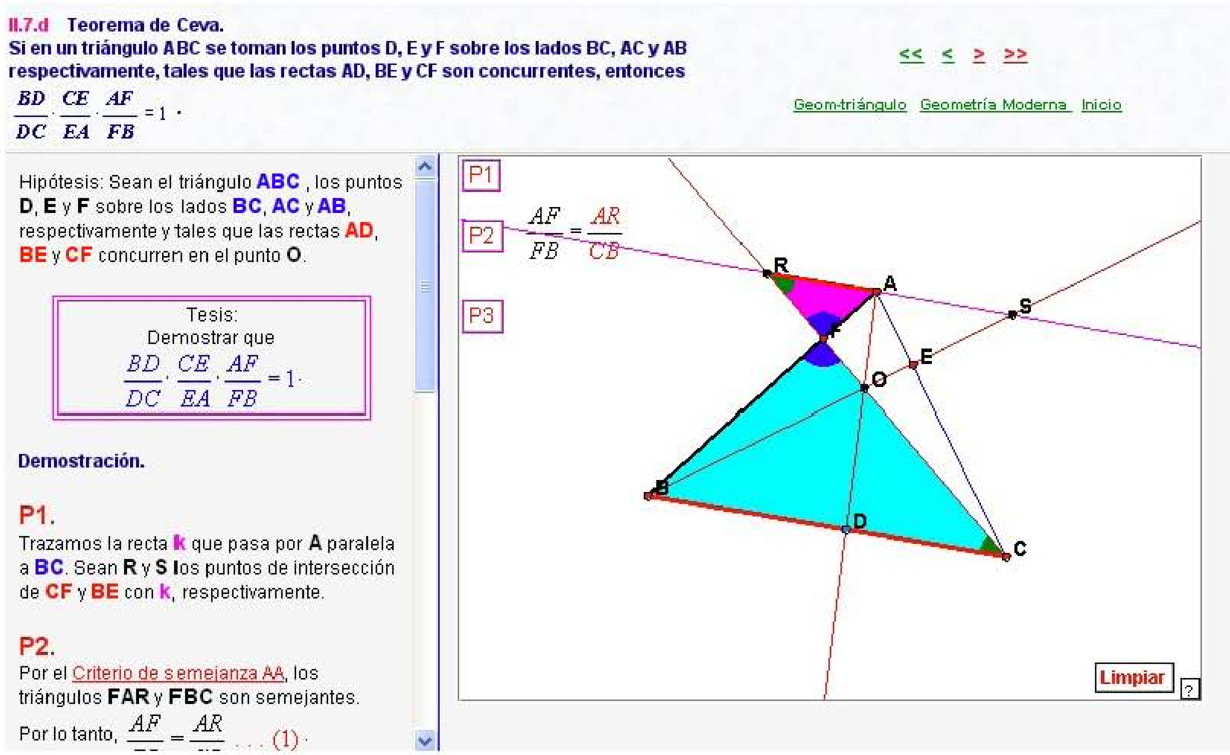
En esta introducción se establecen las definiciones de los objetos con los que se va a trabajar de manera importante: el triángulo medial y el triángulo órtico. Se ilustran además con un applet interactivo, cuyo objetivo es poder explorar distintas situaciones para poder obtener una mejor comprensión.



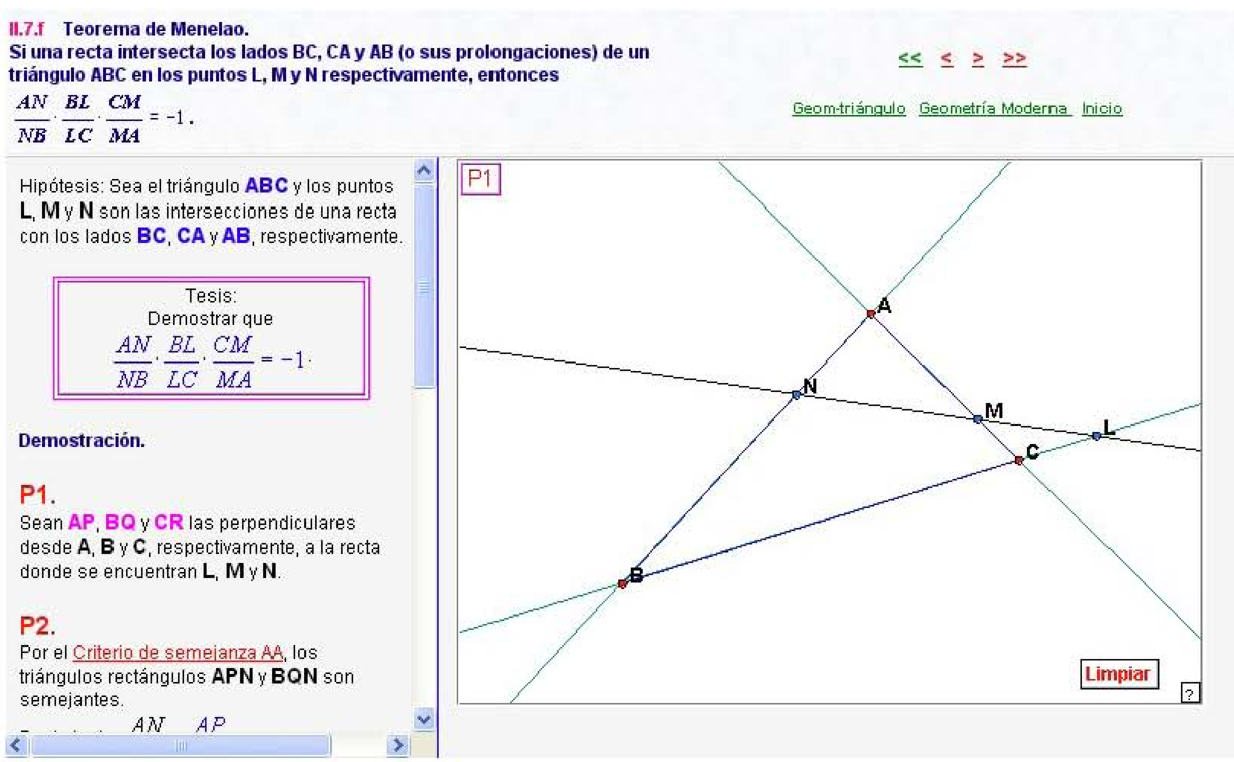
Un resultado bastante importante llamado la Recta de Euler se demuestra de manera formal paso a paso y se acompaña de un applet interactivo para ir comprendiendo de mejor manera todos y cada uno de los pasos. Se pueden desplegar resultados anteriores, necesarios en esta demostración.



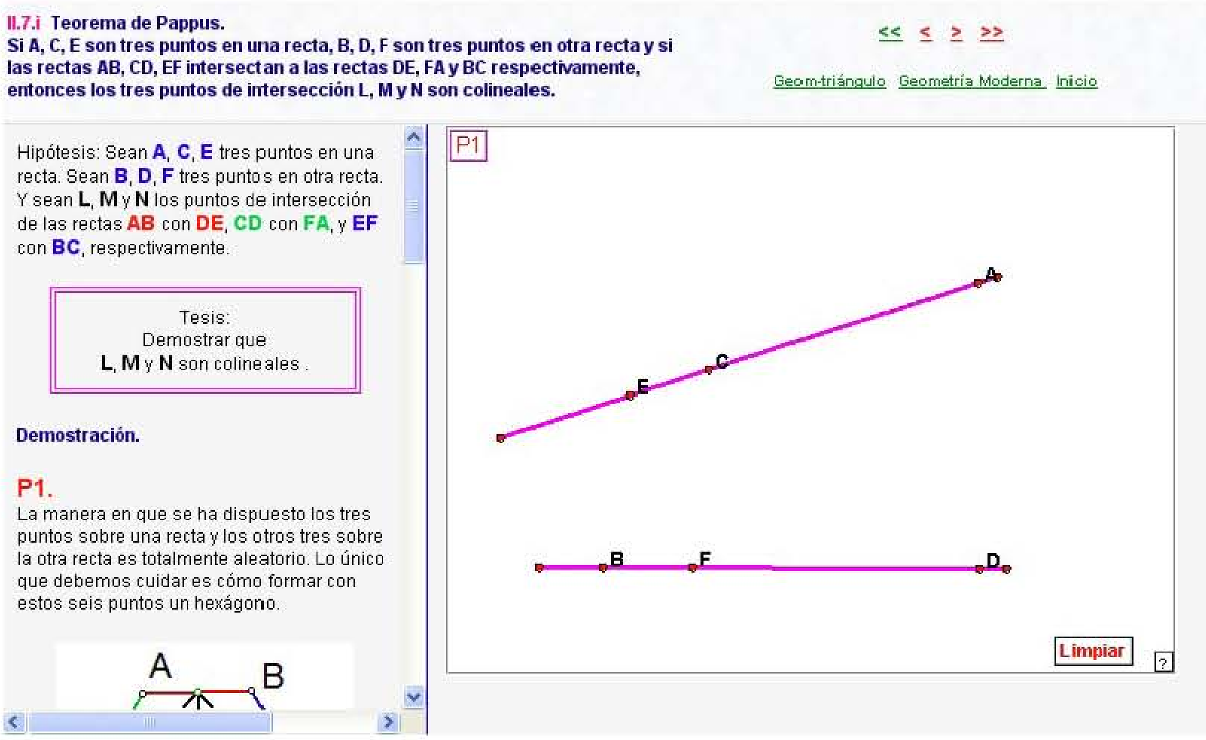
Otro Teorema importante llamado la Circunferencia de los nueve puntos, se destaca la tesis a demostrar como en todos los demás resultados en este trabajo y se demuestra de manera formal paso a paso. En este y otros, se puede apreciar mejor la importancia del applet interactivo que acompaña a la demostración.



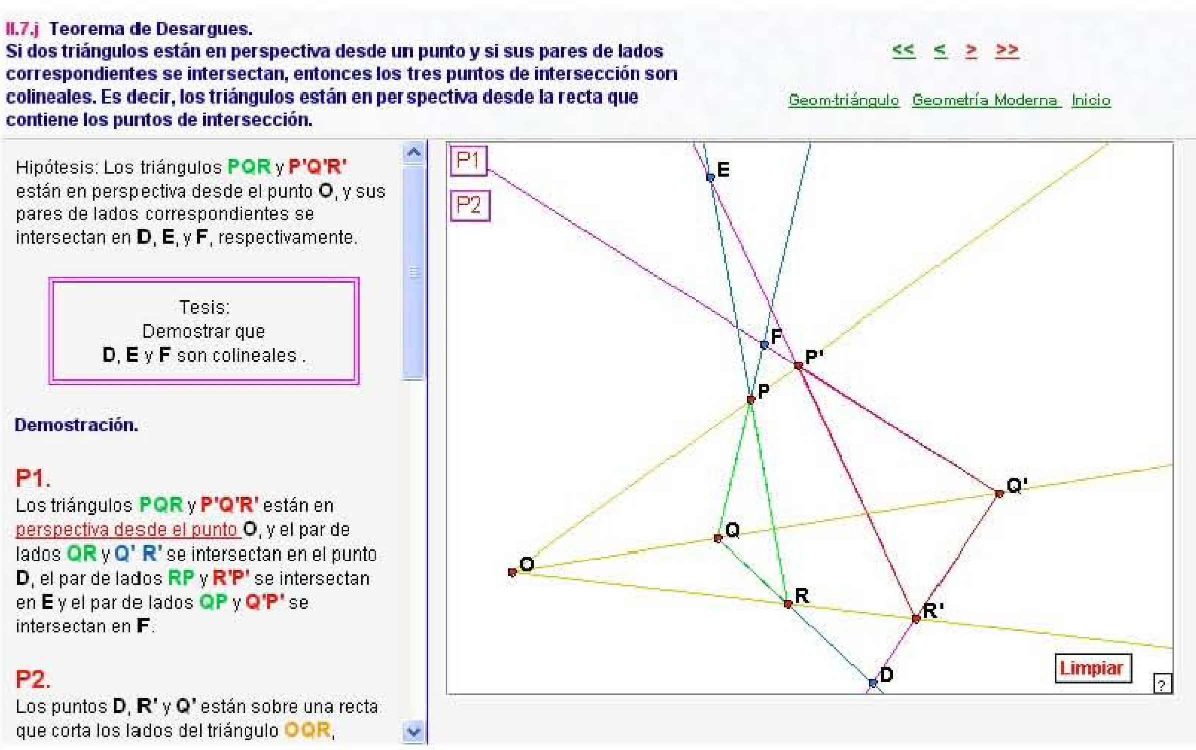
Otro resultado importante llamado el Teorema de Ceva, que establece una relación numérica muy importante, también se va demostrando de manera formal paso a paso y como en todos los demás resultados se tiene un applet interactivo que acompaña a la demostración.



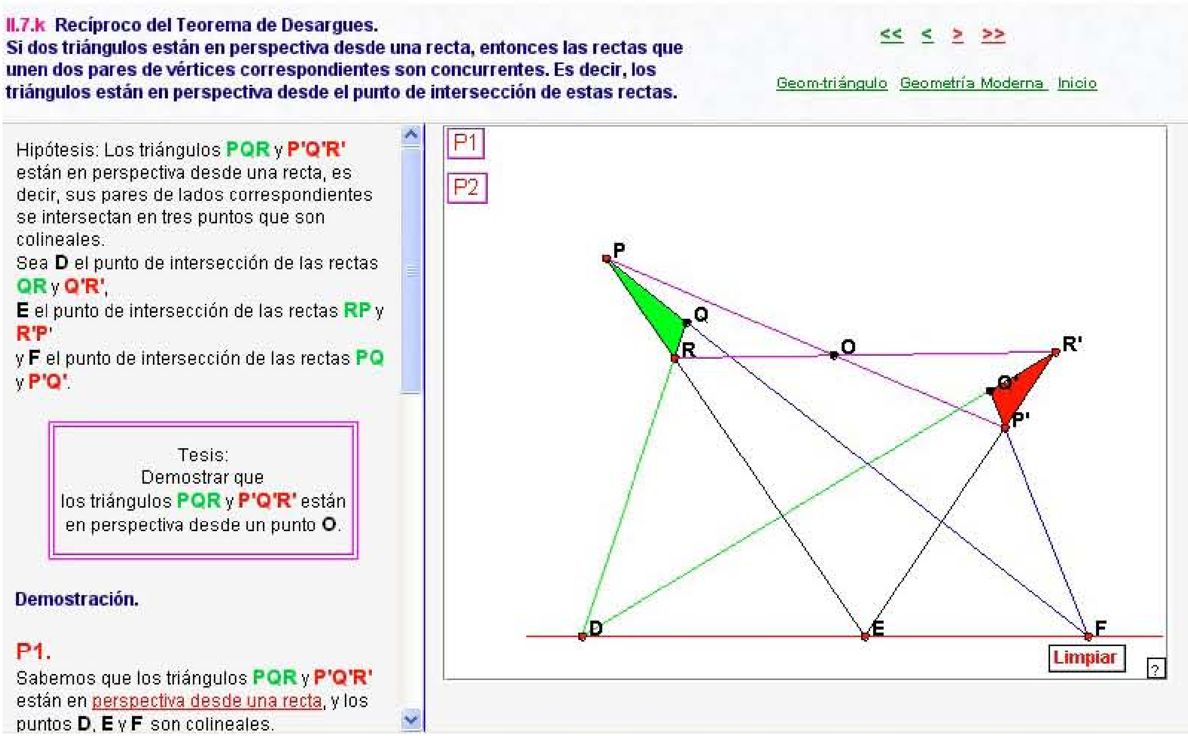
Otro resultado bastante importante llamado el Teorema de Menelao, que establece otra relación numérica muy importante, también se va demostrando de manera formal paso a paso. Entre más compleja resulta una demostración, más se aprecia la importancia del applet interactivo que la acompaña.



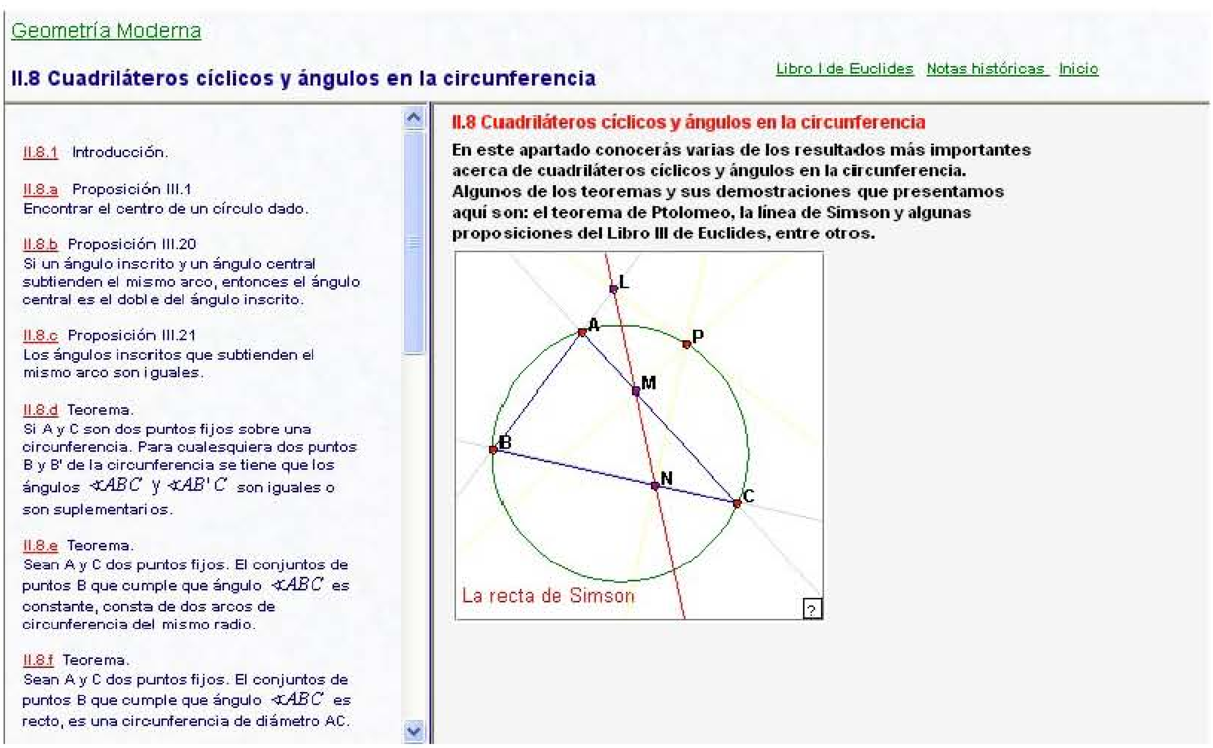
Otro resultado bastante importante llamado el Teorema de Pappus, que establece otra relación de colinealidad, al igual que en todo este trabajo, se demuestra de manera formal paso a paso y también se hace acompañar de un applet interactivo para ir entendiendo mejor cada uno de los pasos a seguir. Se cuenta además con un botón de Limpiar para poder repetir el proceso cuantas veces se requiera.



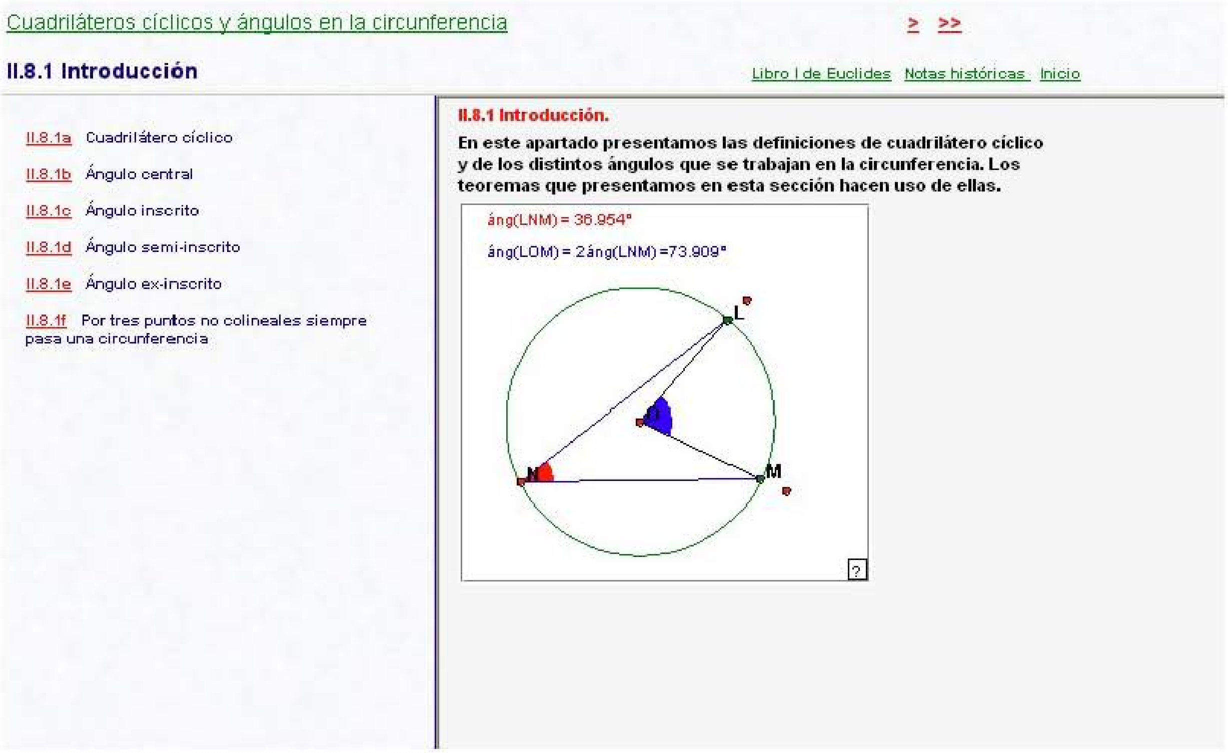
Otro resultado bastante importante llamado el Teorema de Desargues, que establece otra relación de colinealidad, al igual que en todo este trabajo, se demuestra de manera formal paso a paso y también se hace acompañar de un applet interactivo para ir entendiendo mejor cada uno de los pasos a seguir. Se cuenta además con conceptos previos, necesarios en la demostración.



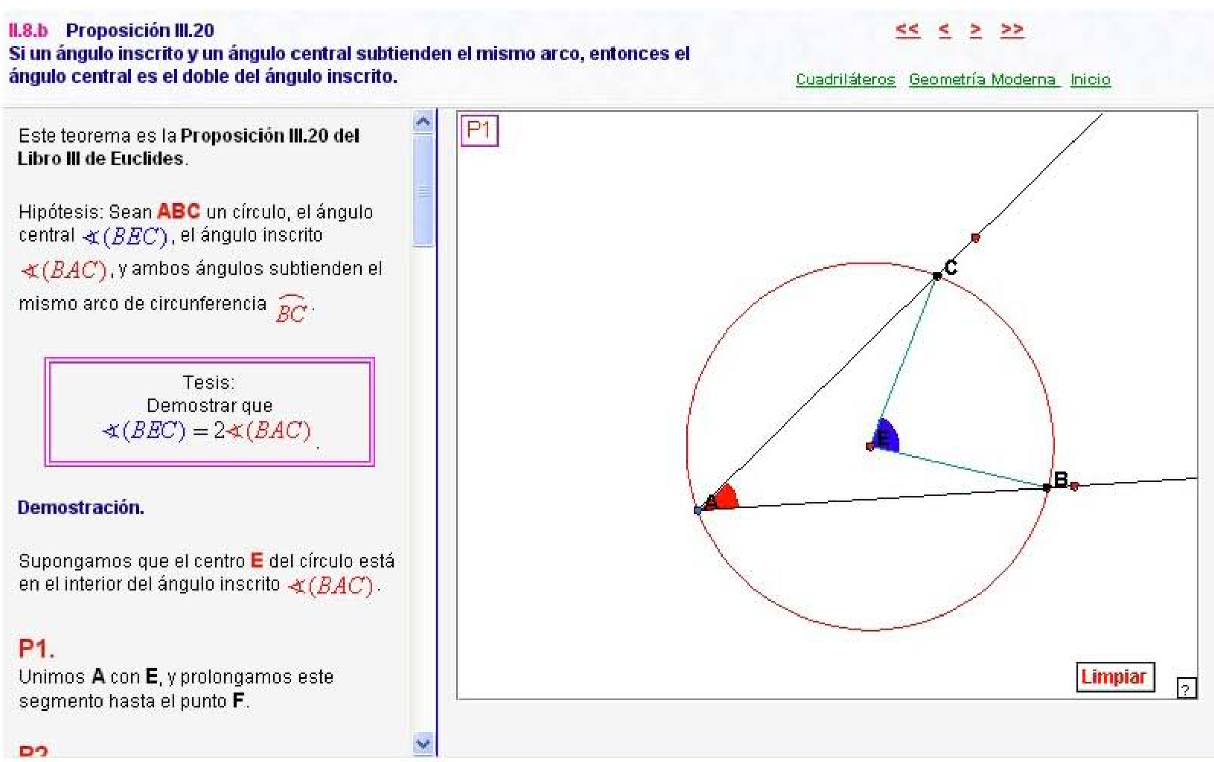
El teorema recíproco del Teorema de Desargues, que establece la perspectiva de triángulos a partir de la colinealidad de ciertos puntos, al igual que en todo este trabajo, se demuestra de manera formal paso a paso y también se hace acompañar de un applet interactivo para ir entendiendo mejor cada uno de los pasos.



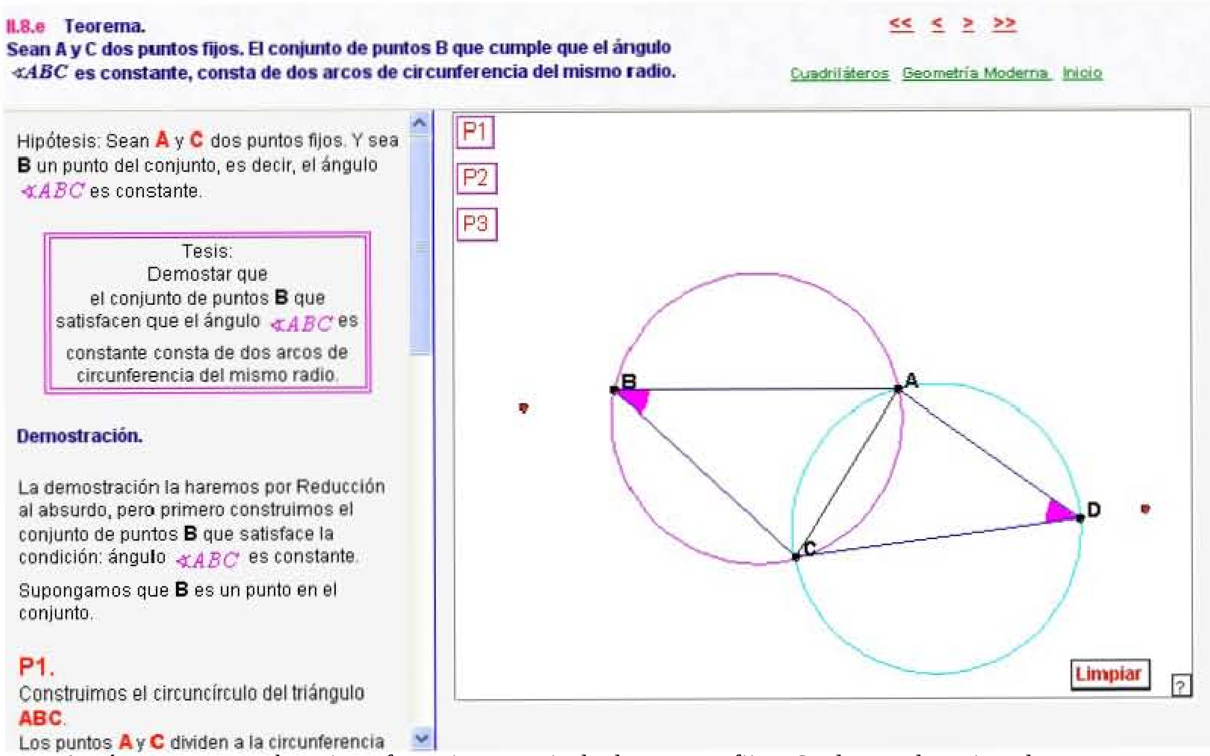
Este apartado cuenta con una serie de resultados sobre cuadriláteros llamados cíclicos y sobre ángulos en la circunferencia. Aquí se presentan teoremas bastante importantes en la Geometría Moderna, como el Teorema de Ptolomeo, el Teorema de la línea de Simson y algunas proposiciones del libro III de Euclides. Como en todo el trabajo se realizan las demostraciones formales paso a paso.



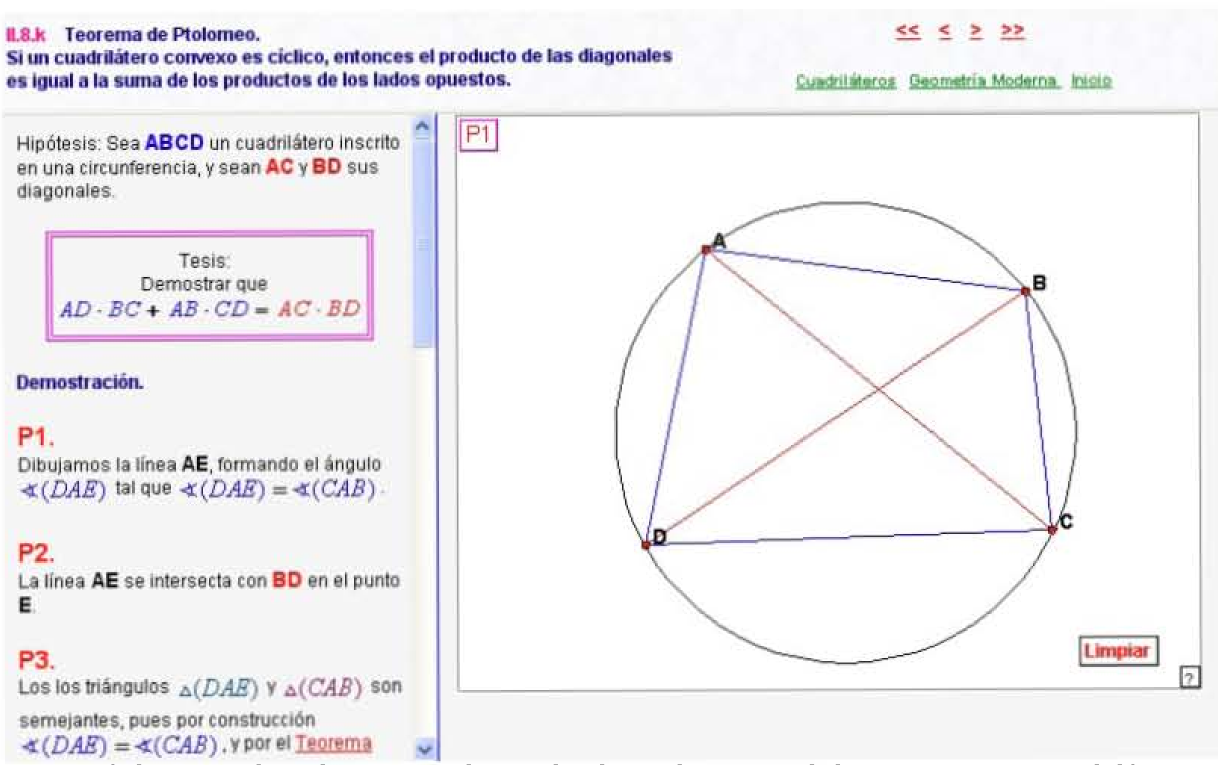
En esta sección II.8.1 se establecen las definiciones necesarias para el desarrollo de todos los teoremas o resultados en este apartado. Se incluyen además applets interactivos para poder explorar distintas situaciones y así propiciar una mejor comprensión de ellas.



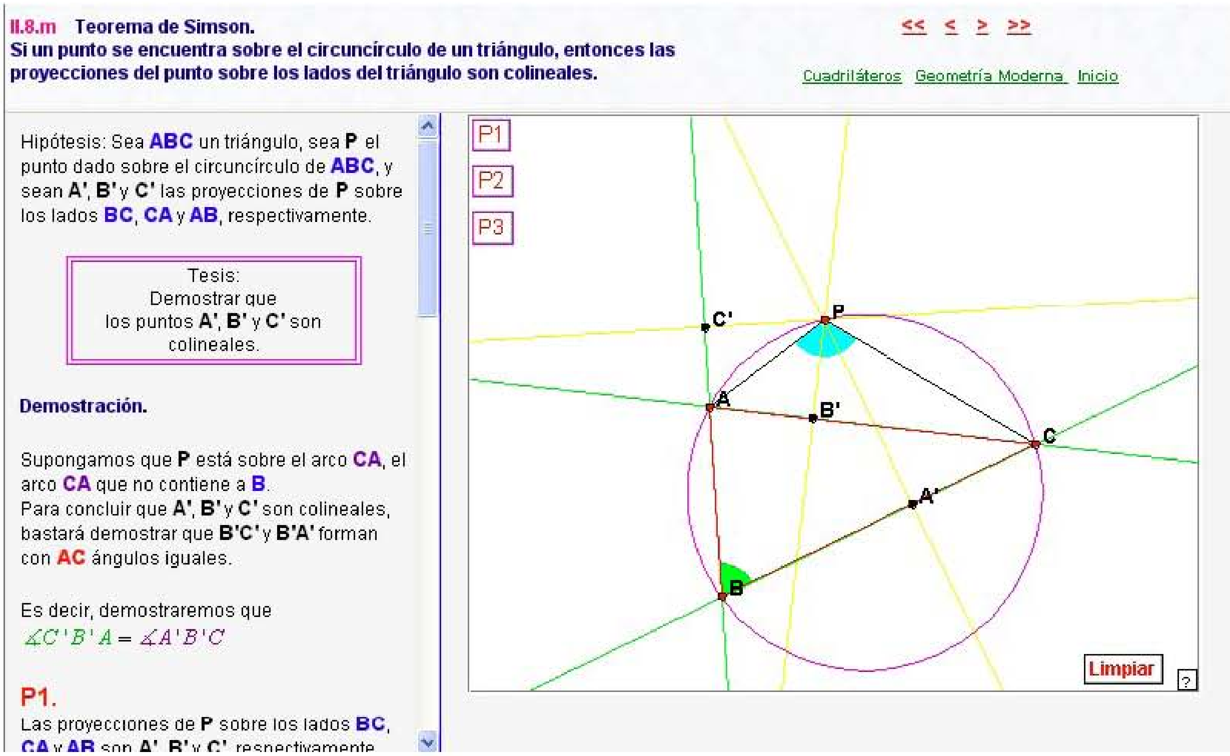
Aquí la proposición III. 20 del Libro III de los Elementos de Euclides, que relaciona al ángulo inscrito con el ángulo central. Se tiene como en los demás resultados la demostración paso a paso, un applet interactivo que la acompaña y un botón de limpiar para repetir el proceso cuantas veces se requiera.



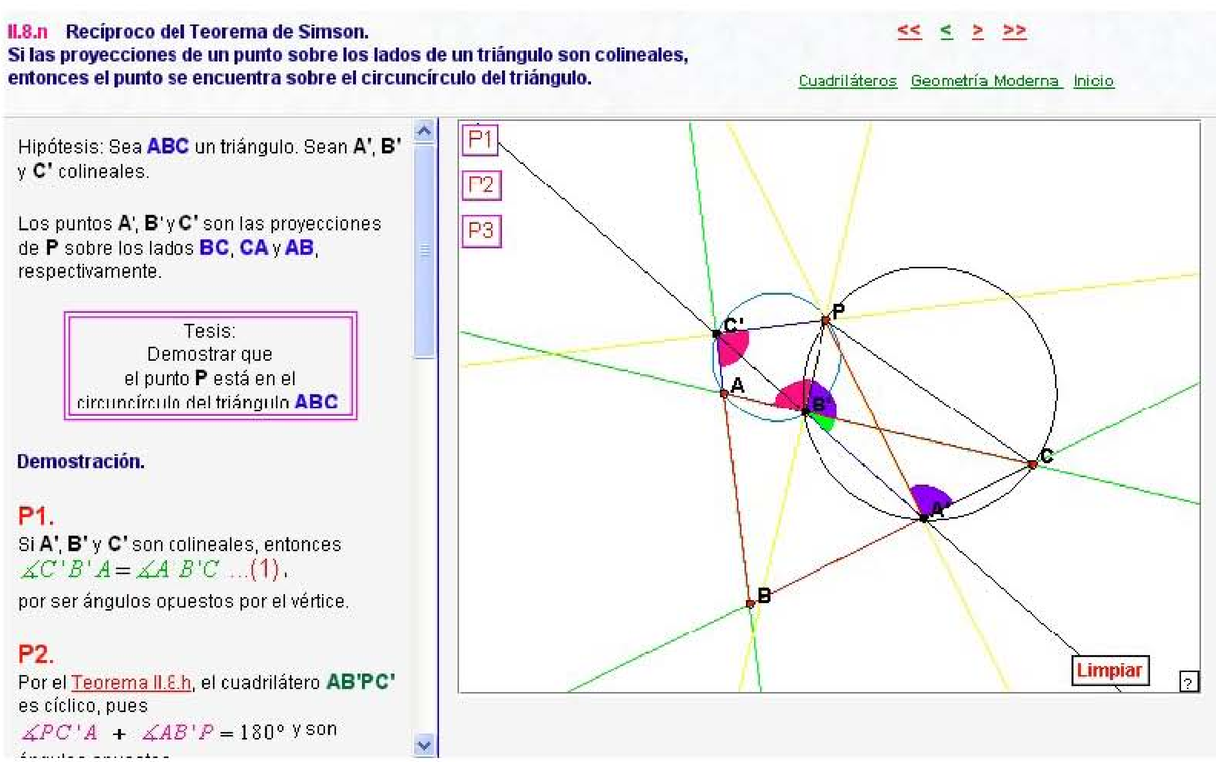
Aquí un teorema sobre circunferencias a partir de dos puntos fijos. Se destaca la tesis a demostrar y se establece el método de reducción al absurdo para realizar la demostración. Como en todos los casos se hace la demostración formal paso a paso.



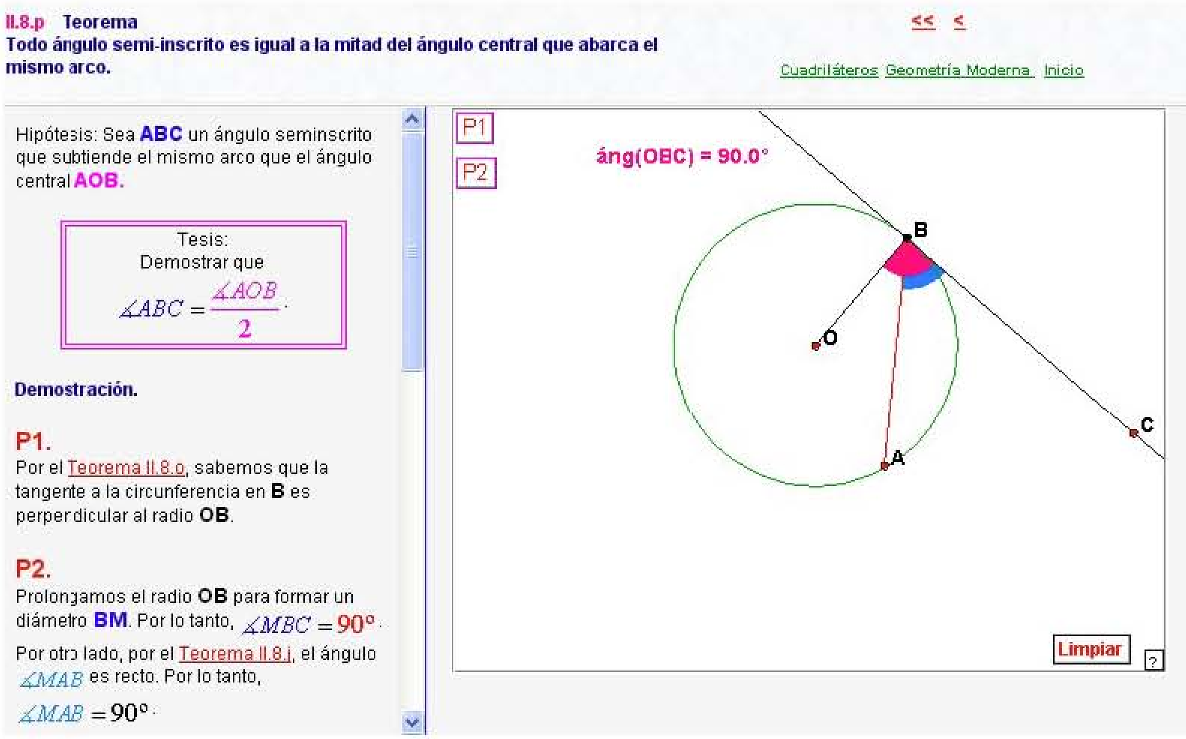
Aquí el teorema de Ptolomeo que relaciona las diagonales con sus lados opuestos en un cuadrilátero convexo cíclico. Se destaca la tesis a demostrar, se demuestra formalmente paso a paso y se acompaña de un applet interactivo para ir visualizando cada paso de la demostración. Con la tecla R, se regresa a la situación original.



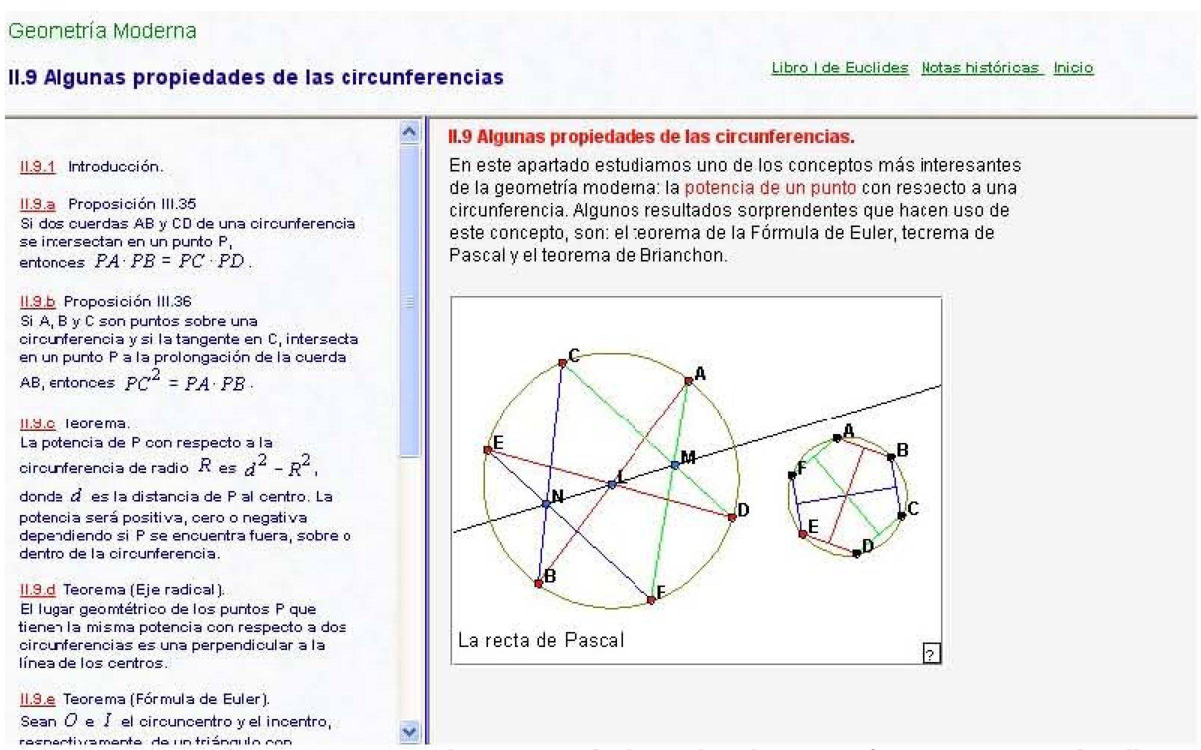
Aquí el Teorema de Simson que establece la colinealidad de las proyecciones de un punto sobre el circuncírculo de un triángulo en los lados del mismo. Teoremas como este resultan de una gran importancia y por ello es más apreciable el applet interactivo que acompaña a la demostración.



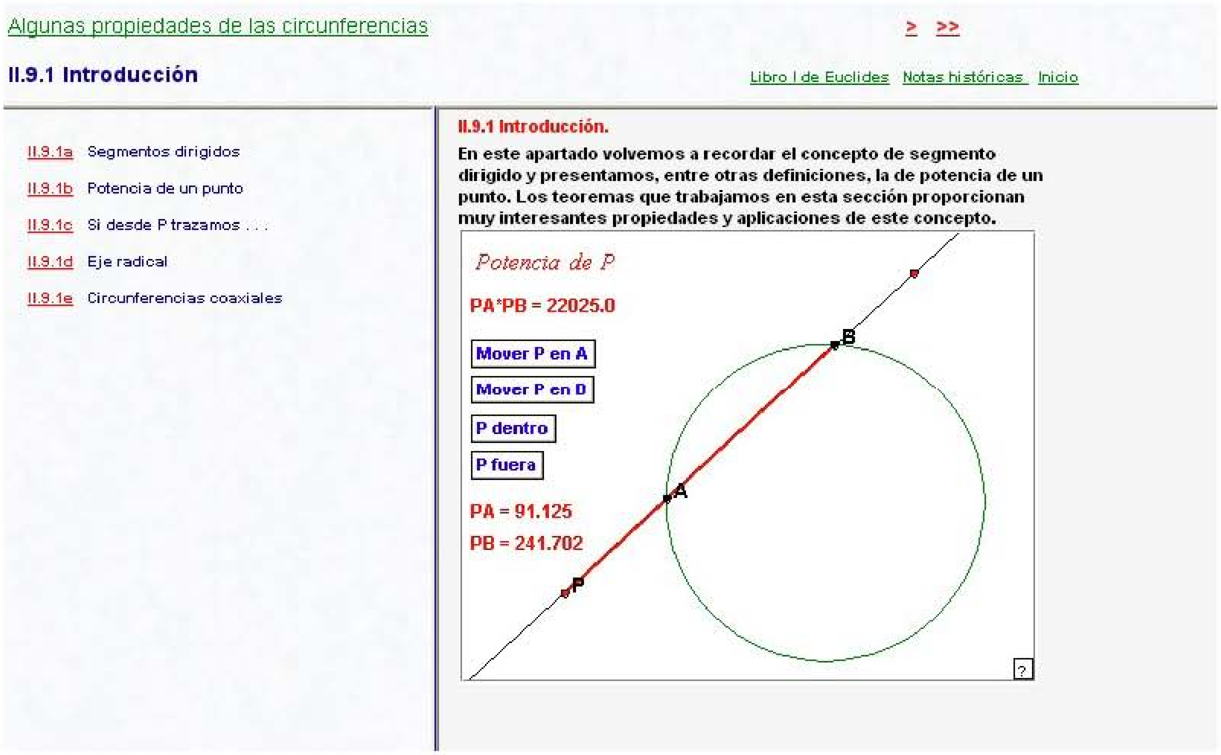
Aquí el Teorema recíproco del Teorema de Simson que establece la existencia de un punto sobre el circuncírculo de un triángulo, a partir de la colinealidad de sus proyecciones en los lados del triángulo. Teoremas como este hacen apreciar de mejor manera el poder tener un applet interactivo para acompañar a la demostración.



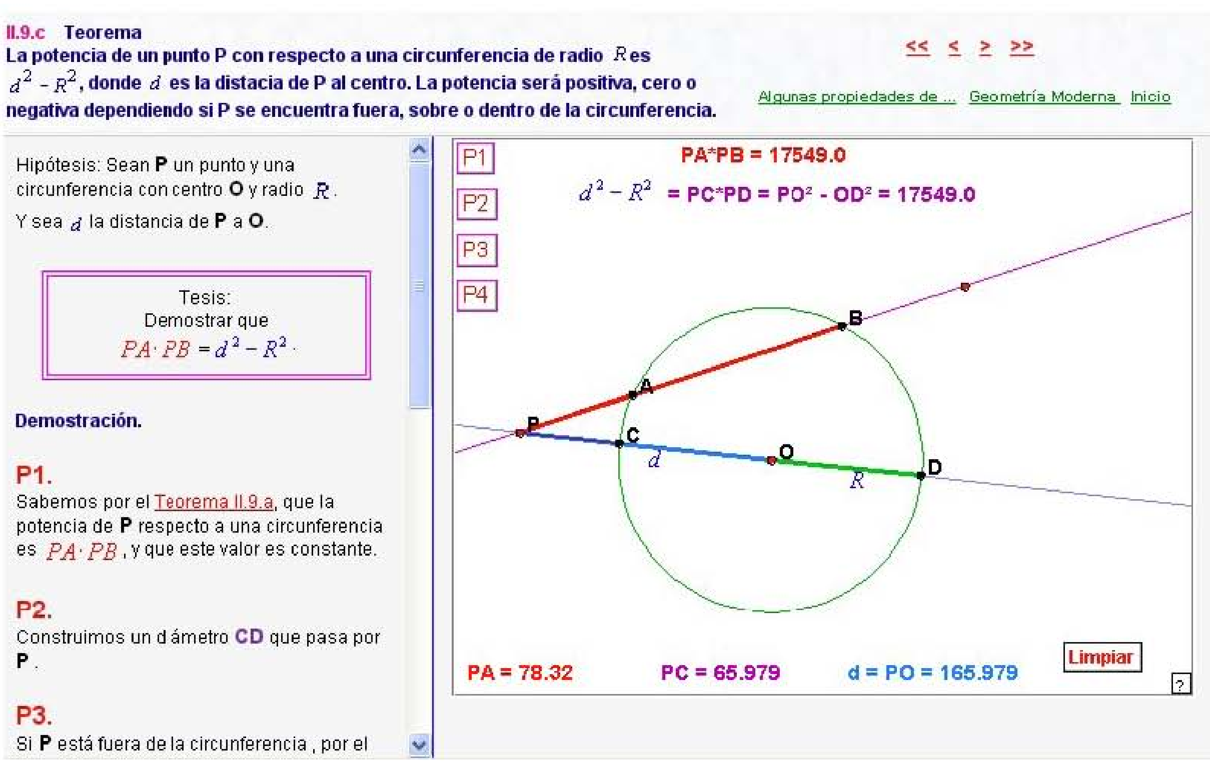
Aquí un teorema que establece una relación entre un ángulo semi-inscrito y el ángulo central que abarca el mismo arco. Se tienen a la mano resultados previos necesarios en la demostración, sin tener que abandonar la página Web de lectura. Los puntos rojos en cada applet se pueden mover con el ratón y así se pueden explorar distintas situaciones del resultado, sin alterar la demostración.



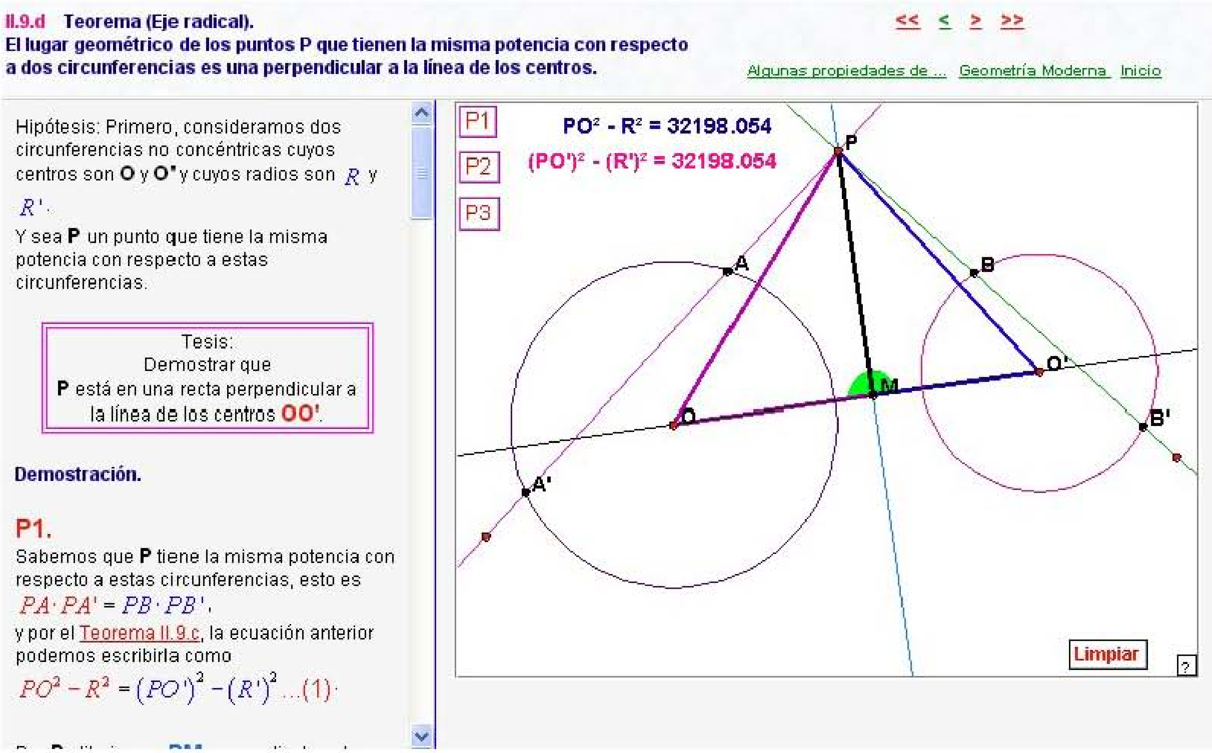
En este apartado se encuentran diversos resultados sobre las circunferencias, varios de ellos relacionados con uno de los conceptos más interesantes de la Geometría Moderna que es el de Potencia de un punto con respecto a una circunferencia. Se tienen varios teoremas reconocidos, como el de la fórmula de Euler, el de Pascal y el de Brianchon.



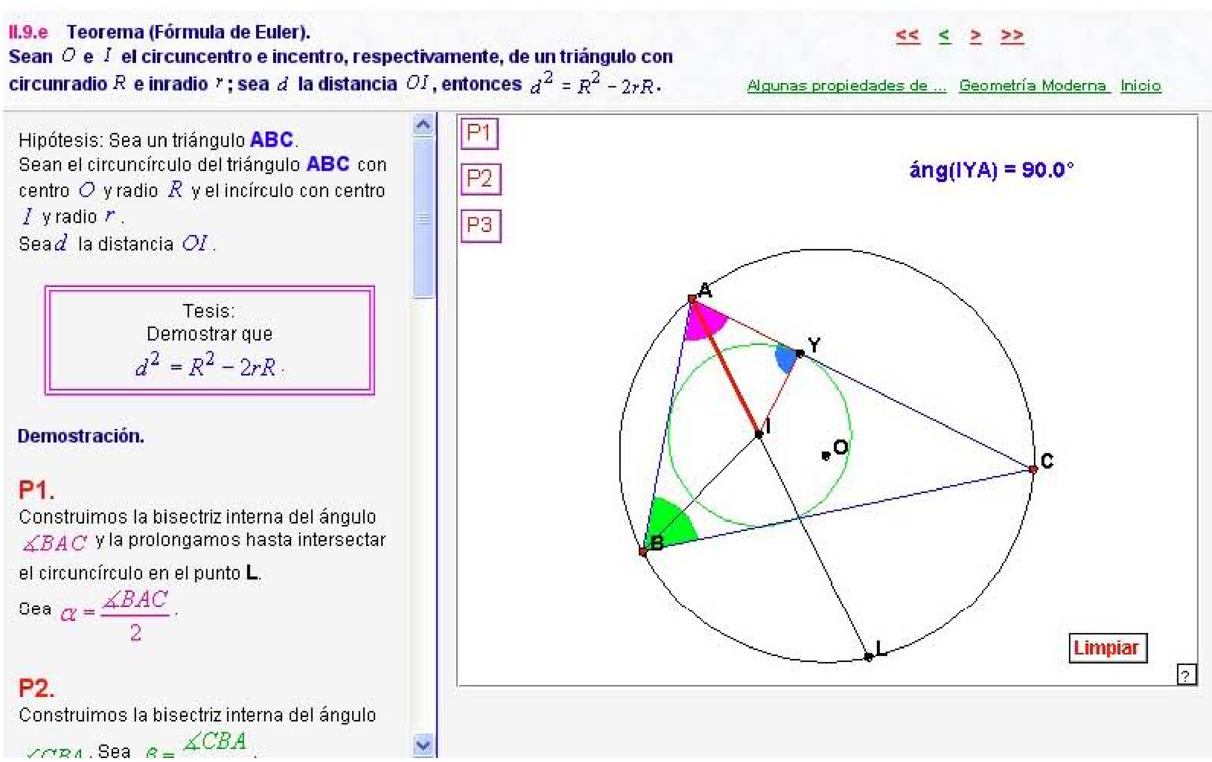
Aquí se establecen las definiciones necesarias para todo este apartado. Se recuerdan conceptos como el de segmentos dirigidos, se define la potencia de un punto, el de eje radical y el de circunferencias coaxiales. Como en todo el trabajo, se encontrarán demostraciones formales acompañadas de applets interactivos.



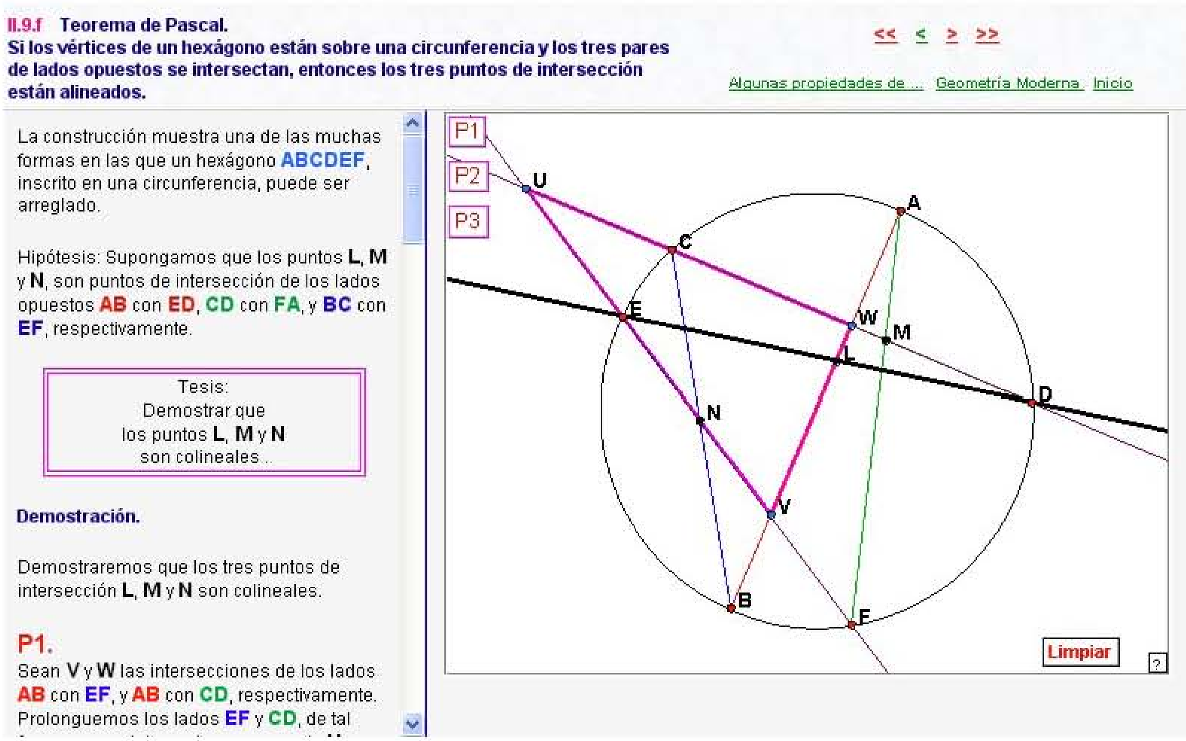
Aquí en este teorema se establece el valor de la potencia de un punto en relación con una circunferencia de radio R. Se tienen presentes resultados previos sin tener que abandonar la página Web y poder así, seguir la demostración con mayor atención.



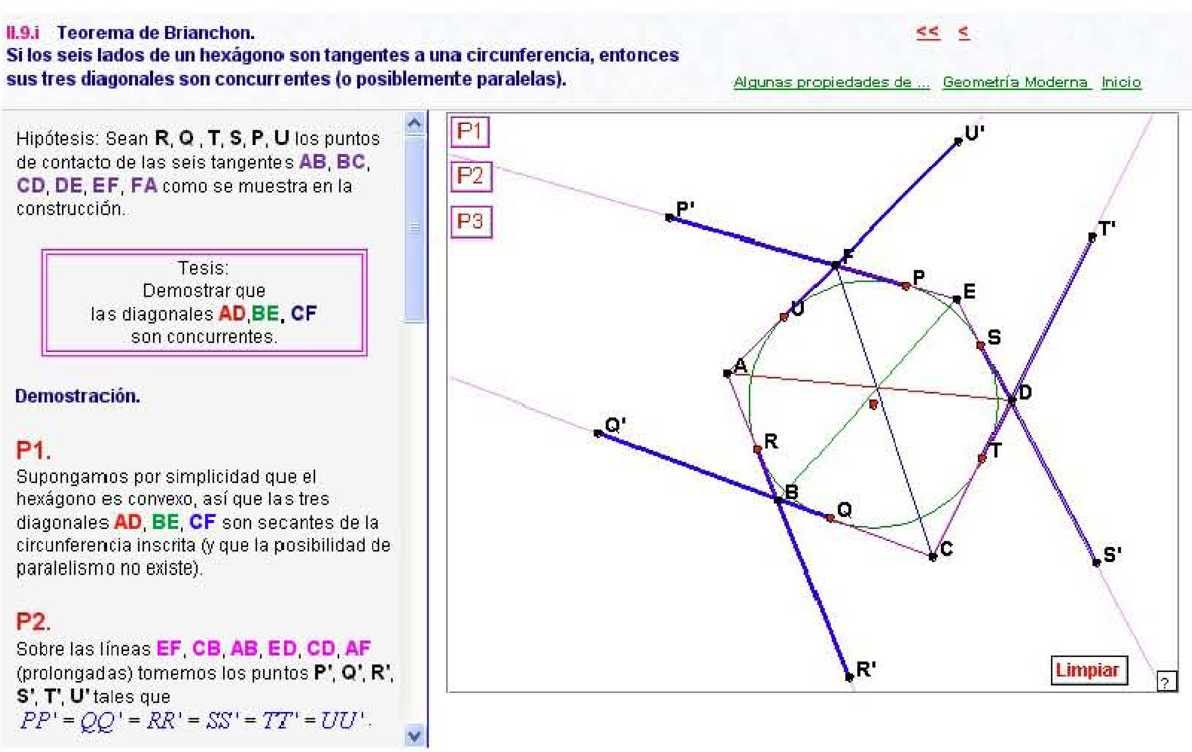
Aquí este teorema que establece el lugar geométrico de los puntos P con la misma potencia respecto a dos circunferencias. Se destaca la tesis a demostrar, se demuestra el teorema paso a paso de manera formal y se tiene un applet interactivo que acompaña los pasos de la demostración. Se tienen a la mano resultados previos necesarios.



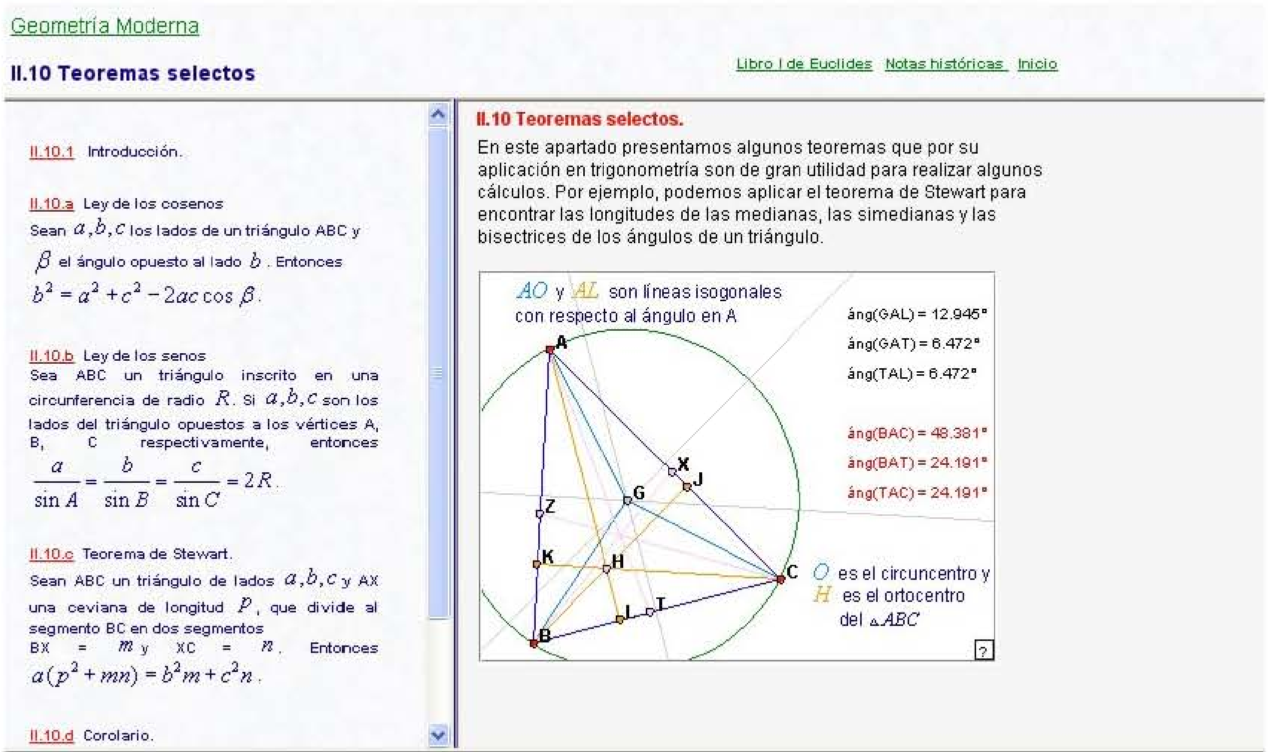
Aquí el teorema conocido como la Fórmula de Euler que relaciona el Circunradio y el Inradio de un triángulo, con la distancia entre ellos. Resultado realmente sorprendente, difícil de imaginar, pero que con la demostración formal acompañada del applet interactivo, lo hacen más comprensible.



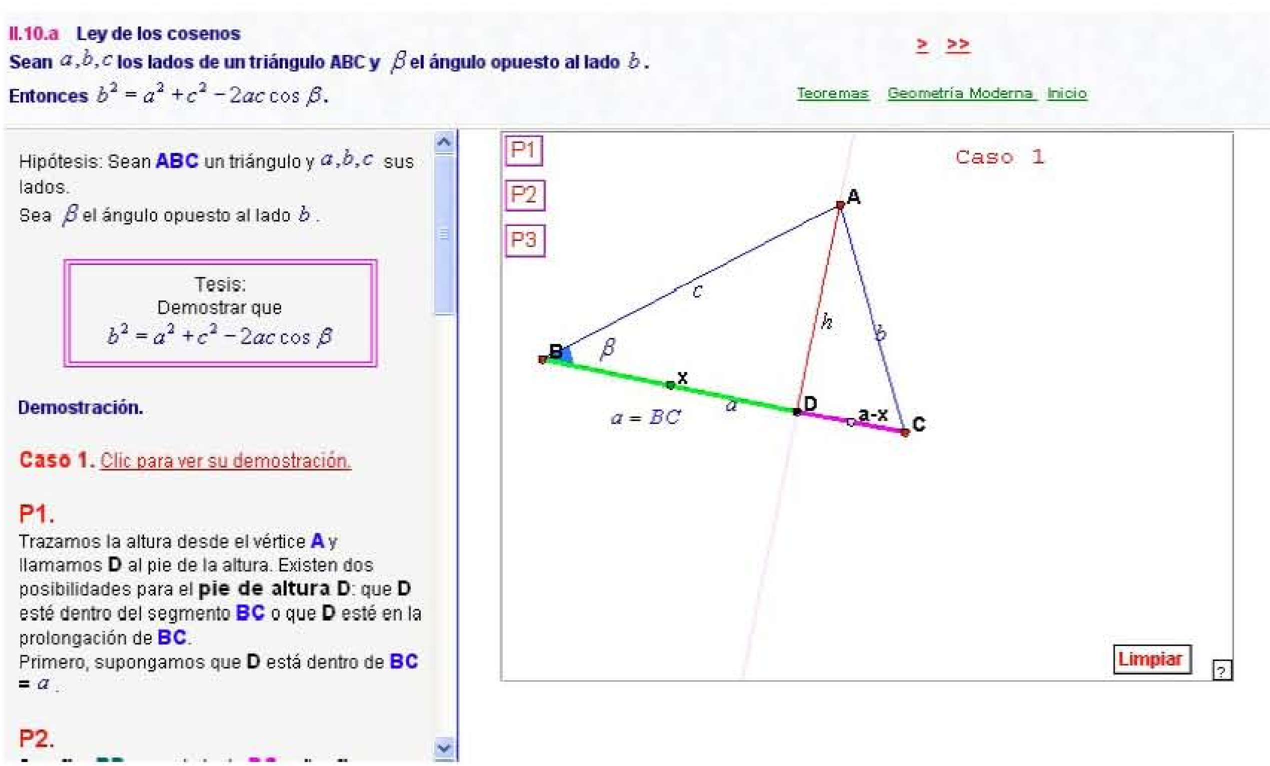
Aquí el teorema de Pascal que establece la colinealidad de los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono, cuyos vértices se encuentran en una circunferencia. Resultado igualmente sorprendente, difícil de imaginar, pero que con la demostración formal acompañada del applet interactivo, lo hacen más comprensible.



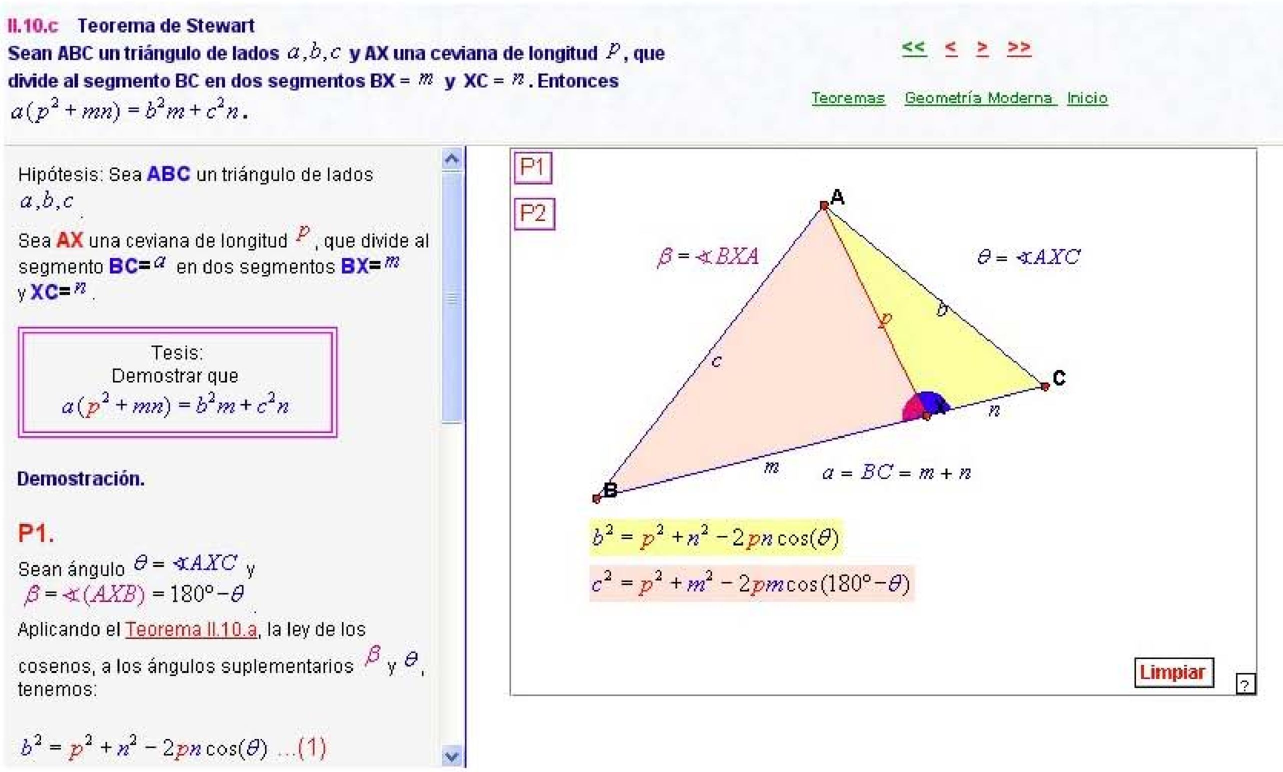
Aquí el teorema de Brianchon que establece la concurrencia de las tres diagonales de un hexágono, cuyos seis lados son tangentes a una circunferencia. Resultado igualmente sorprendente, difícil de imaginar, pero que con la demostración formal acompañada del applet interactivo, lo hacen más comprensible.



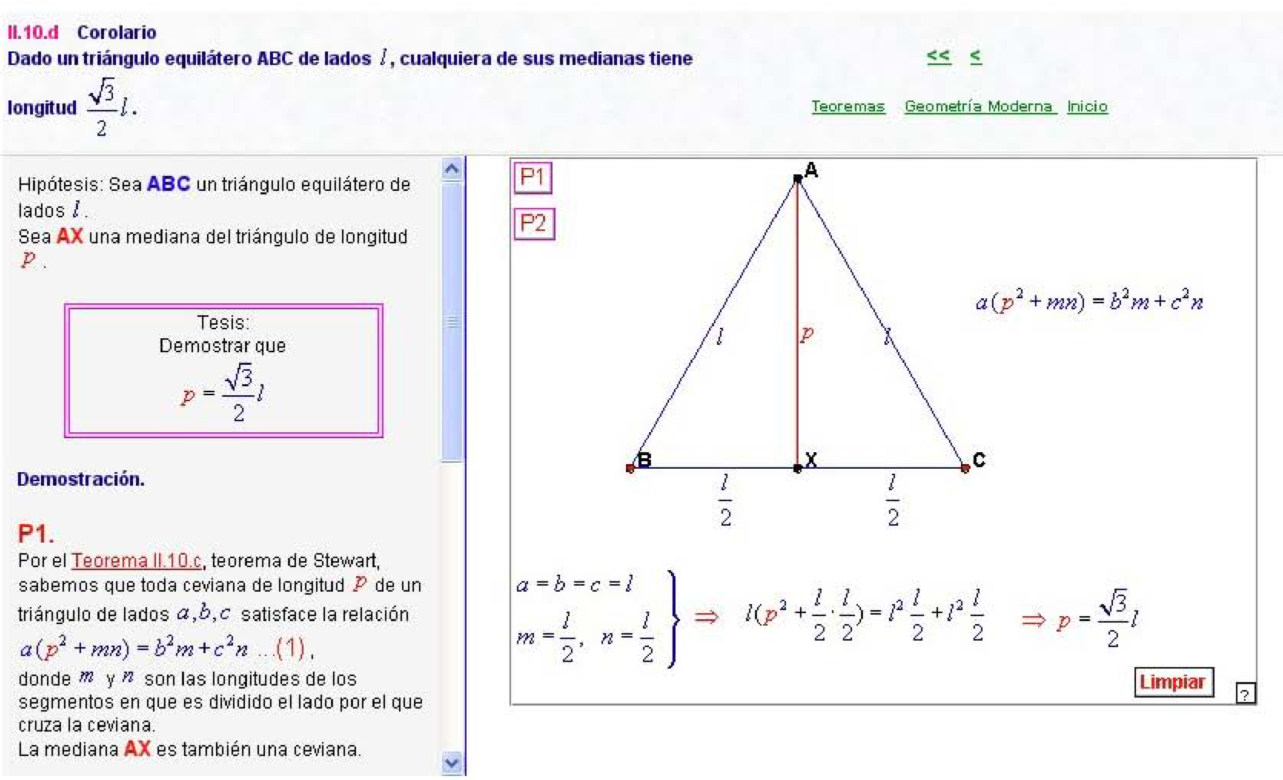
Este apartado de Teoremas Selectos aborda diversos teoremas que resultan de gran aplicación en la trigonometría y por consecuencia son de mucha utilidad para la realización de cálculos diversos. Por ejemplo el Teorema de Stewart se puede usar para encontrar las longitudes de las medianas, de las simedianas y de las bisectrices de un triángulo.



Por ejemplo, aquí encontramos la Ley de los cosenos y cuya demostración se realiza por casos. Para cada uno de estos casos, el programa dispone un applet interactivo para seguir su demostración.



Por ejemplo, aquí encontramos el Teorema de Stewart de gran aplicación en la trigonometría. Se aclara la tesis a demostrar, se demuestra formalmente paso a paso y se acompaña de un applet interactivo. Se tienen a la mano resultados previos necesarios en la demostración.



Un corolario, resultado del Teorema de Stewart en donde se obtiene la longitud de las medianas de un triángulo.

Geometría moderna

Libro I de Euclides   Notas históricas   Inicio

II.11 Bibliografía

II.11 Bibliografía

Levy S. Shively.
Introducción a la Geometría Moderna.
Compañía Editorial Continental. 1957.

H.S.M. Coxeter.
Geometry Revisited.
RANDOM HOUSE. 1967.

Radmila Bulajich Manfrino.
José Antonio Gómez Ortega.
GEOMETRÍA.
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas.
Instituto de Matemáticas. UNAM. 2003.

Heath, Sir Thomas Little (1861-1940)
Euclid
The thirteen books of THE ELEMENTS. Vol 2 (Books III-IX).
Traducido y comentado por Sir Thomas L. Heath.
DOVER, PUBLICATIONS, INC. Second Edition

Eves Howard.
Estudio de las Geometrías. Vol.I.
UTEHA.

Michael Barot
Un paseo a Hiperbolia
Serie: Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza
Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT). 2005.

Cárdenas Rubio Silvestre.
Dos o Tres Trazos.
Temas de Matemáticas para el Bachillerato.
Instituto de Matemáticas. UNAM. 2003.

Los Elementos de Euclides:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/ java/elements/elements.html

Software
The Geometer´s Sketchpad.
http://www.keypress.com/sketchpad/

Se proporciona bibliografía y referencias de Internet, todas ellas de gran utilidad para la elaboración de este trabajo y muy importantes para cualquiera que desee consultar las fuentes del tema.

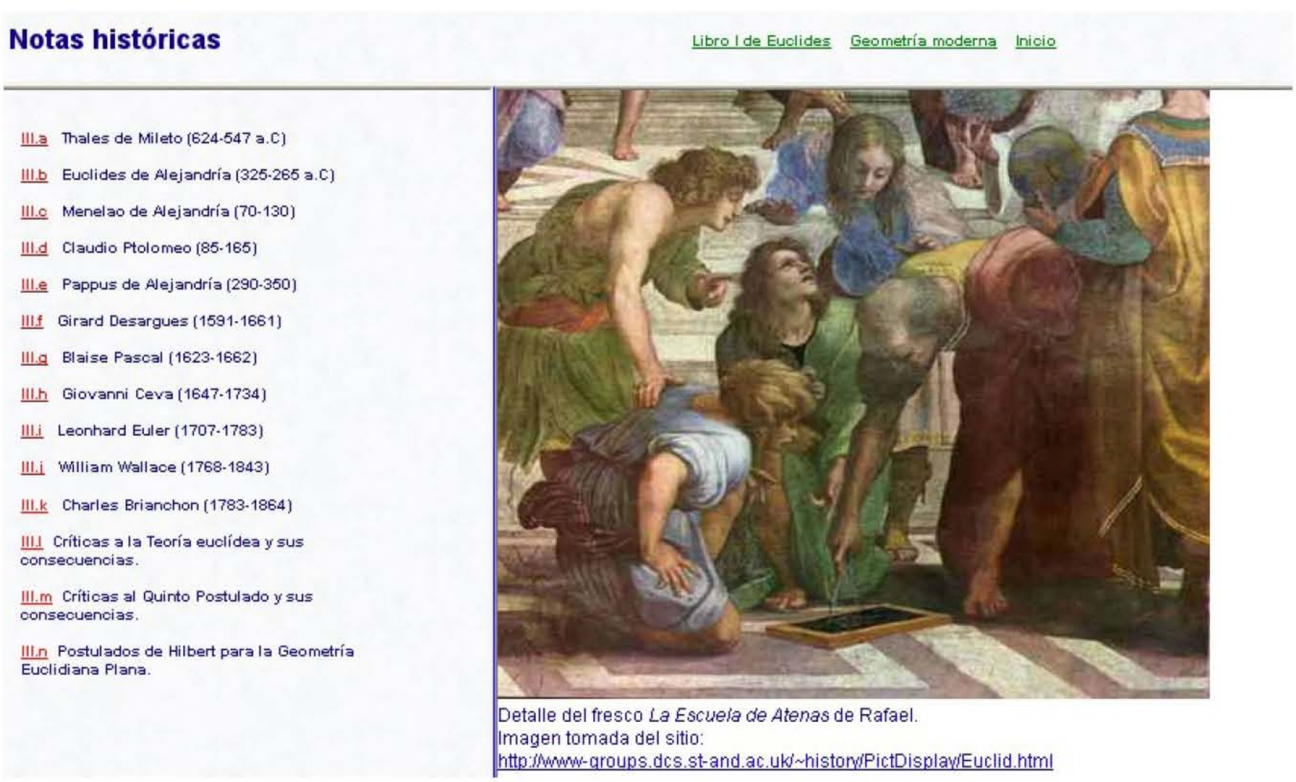
9.3 Imagen de la página Web Notas históricas

En el marco del título se presenta la página Web con el título de este tema y a su derecha una navegación estándar (hipervínculos), que permite saltar a las páginas Web de los otros temas principales o ir a la página Web de Inicio.

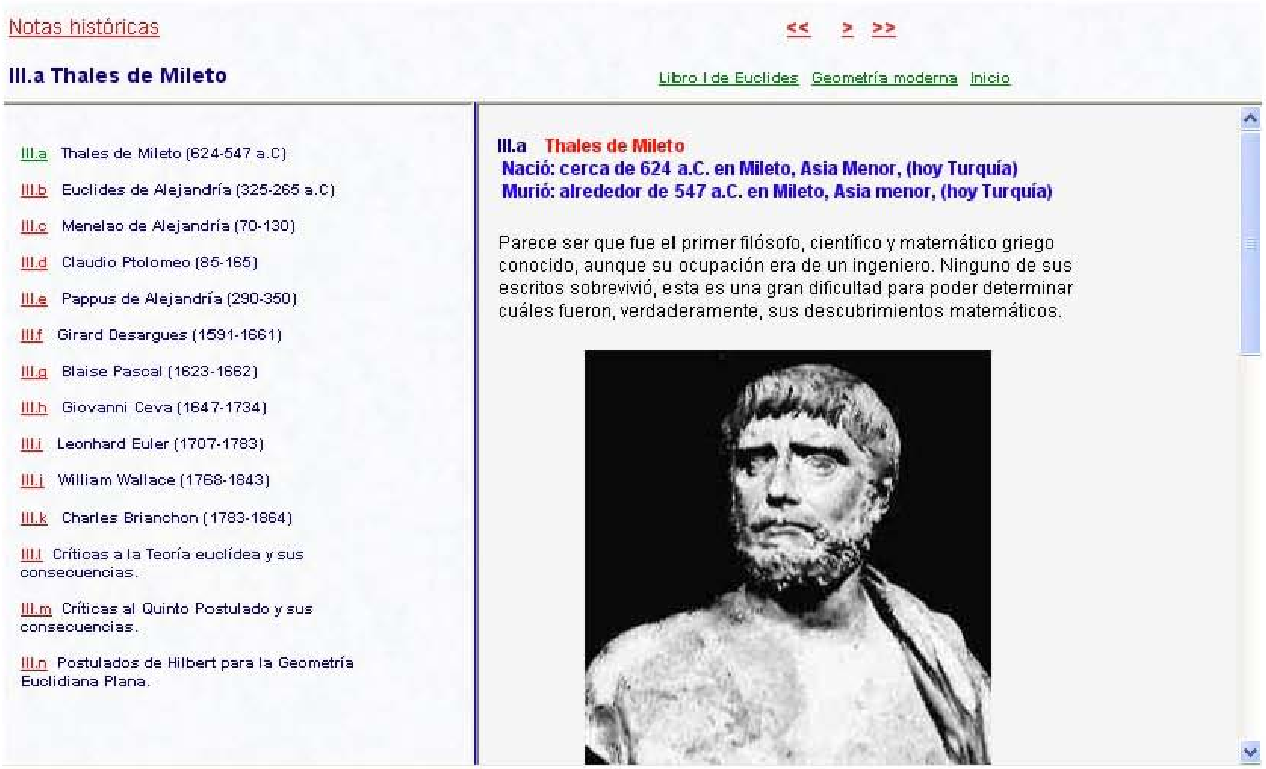
El marco izquierdo de esta página Web contiene su menú principal.

El marco derecho muestra una imagen del detalle del fresco La Escuela de Atenas de Rafael. En su menú principal, que está en el marco izquierdo, se enlistan los hipervínculos correspondientes a las notas históricas que aquí se desarrollan:

- III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
- III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
- III.c Menelao de Alejandría (70-130)
- III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
- III.e Pappus de Alejandría (290-350)
- III.f Girard Desargues (1591-1661)
- III.g Blaise Pascal (1623-1662)
- III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
- III.i Leonhard Euler (1707-1783)
- III.j William Wallace (1768-1843)
- III.k Charles Brianchon (1783-1864)
- III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
- III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
- III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.



En este apartado se presentan notas históricas sobre personajes relacionados con el desarrollo de la Geometría. En cada una de ellas se mencionan resultados importantes que se tratan en este trabajo y desde estas páginas Web se puede saltar al resultado deseado.



Notas históricas

<< > >>

III.a Thales de Mileto

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)

III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)

III.c Menelao de Alejandría (70-130)

III.d Claudio Ptolomeo (85-165)

III.e Pappus de Alejandría (290-350)

III.f Girard Desargues (1591-1661)

III.g Blaise Pascal (1623-1662)

III.h Giovanni Ceva (1647-1734)

III.i Leonhard Euler (1707-1783)

III.j William Wallace (1768-1843)

III.k Charles Brianchon (1783-1864)

III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.

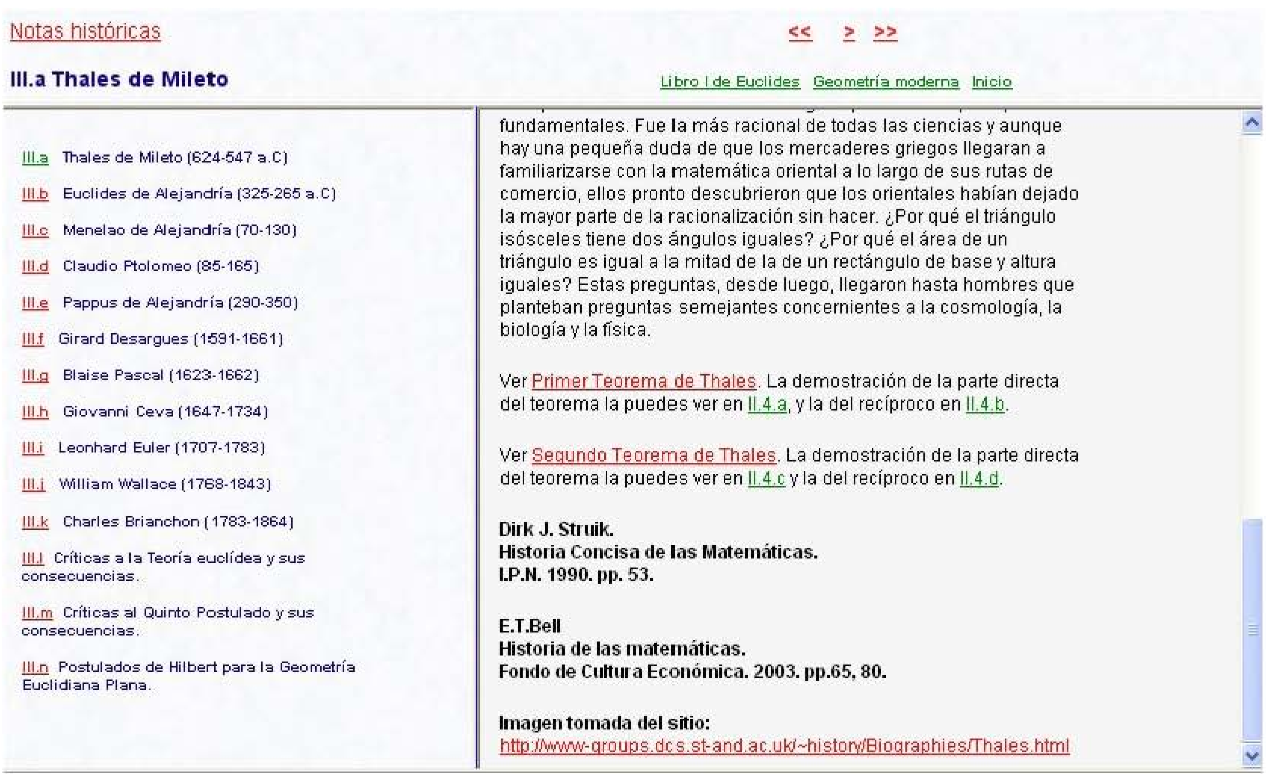
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.

III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

III.a Thales de Mileto
Nació: cerca de 624 a.C. en Mileto, Asia Menor, (hoy Turquía)
Murió: alrededor de 547 a.C. en Mileto, Asia menor, (hoy Turquía)

Parece ser que fue el primer filósofo, científico y matemático griego conocido, aunque su ocupación era de un ingeniero. Ninguno de sus escritos sobrevivió, esta es una gran dificultad para poder determinar cuáles fueron, verdaderamente, sus descubrimientos matemáticos.

Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre Thales de Mileto, quien al parecer fue el primer filósofo, científico y matemático griego conocido, en particular las referencias a cuatro resultados que llevan su nombre, dos teoremas y sus recíprocos correspondientes.



Notas históricas

<< > >>

III.a Thales de Mileto

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)

III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)

III.c Menelao de Alejandría (70-130)

III.d Claudio Ptolomeo (85-165)

III.e Pappus de Alejandría (290-350)

III.f Girard Desargues (1591-1661)

III.g Blaise Pascal (1623-1662)

III.h Giovanni Ceva (1647-1734)

III.i Leonhard Euler (1707-1783)

III.j William Wallace (1768-1843)

III.k Charles Brianchon (1783-1864)

III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.

III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.

III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

fundamentales. Fue la más racional de todas las ciencias y aunque hay una pequeña duda de que los mercaderes griegos llegaran a familiarizarse con la matemática oriental a lo largo de sus rutas de comercio, ellos pronto descubrieron que los orientales habían dejado la mayor parte de la racionalización sin hacer. ¿Por qué el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales? ¿Por qué el área de un triángulo es igual a la mitad de la de un rectángulo de base y altura iguales? Estas preguntas, desde luego, llegaron hasta hombres que planteban preguntas semejantes concernientes a la cosmología, la biología y la física.

Ver Primer Teorema de Thales. La demostración de la parte directa del teorema la puedes ver en II.4.a, y la del recíproco en II.4.b.

Ver Segundo Teorema de Thales. La demostración de la parte directa del teorema la puedes ver en II.4.c y la del recíproco en II.4.d.

Dirk J. Struik.
Historia Concisa de las Matemáticas.
I.P.N. 1990. pp. 53.

E.T.Bell
Historia de las matemáticas.
Fondo de Cultura Económica. 2003. pp.65, 80.

Imagen tomada del sitio:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Thales.html

Aquí se pueden ver las referencias a los teoremas de Thales de Mileto y sus recíprocos, a los cuales se puede acceder dando un clic en la liga correspondiente. También se pueden apreciar parte de las referencias a las fuentes de las que fueron tomadas estas notas.


Notas históricas

<< < > >>

III.c Menelao de Alejandría

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

III.c Menelao de Alejandría
Nació: alrededor del 70 d.C. posiblemente en Alejandría, Egipto
Murió: alrededor del 130 d.C.

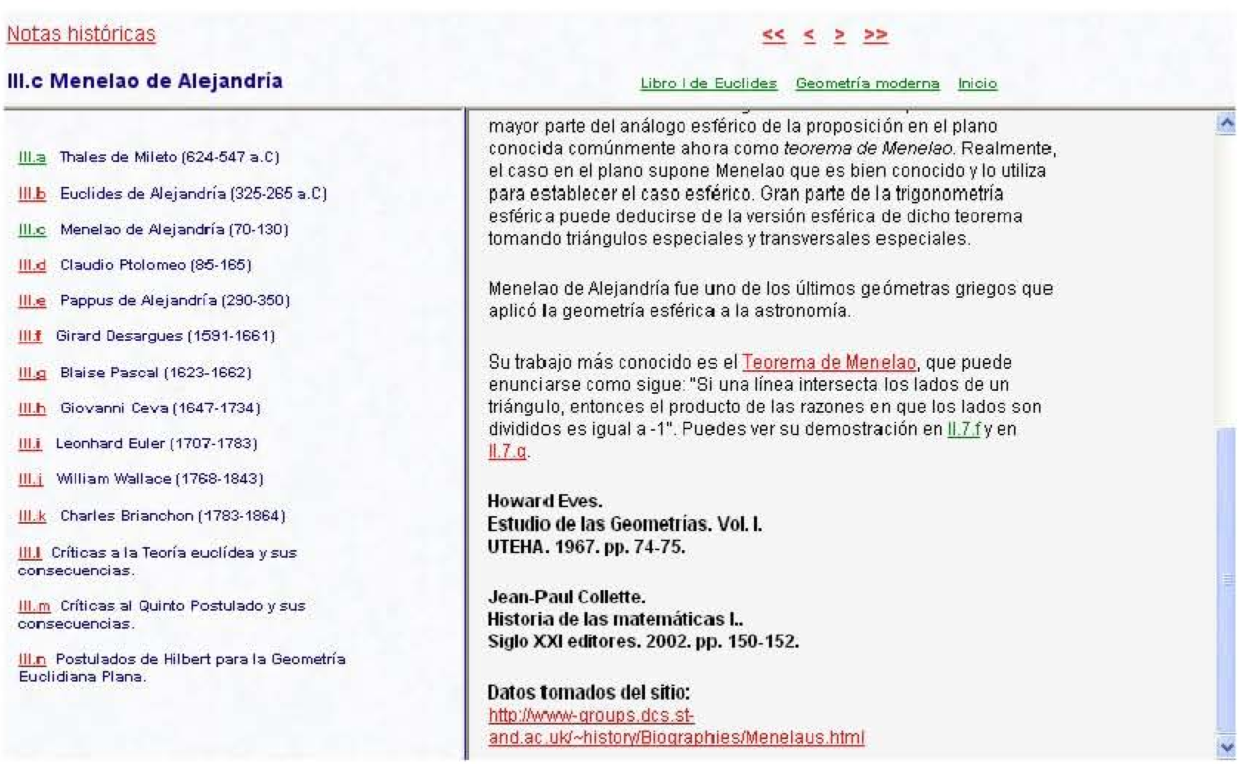
Menelao de Alejandría (no confundirlo con Menelao de Esparta) fue un astrónomo griego que vivió en el primer siglo de nuestra era. Aunque sus obras en griego original no han llegado a nosotros, sabemos de algunas de ellas por las observaciones que han hecho comentadores posteriores y su tratado de tres libros *Sphoerica* se ha conservado hasta nuestra época en árabe. Este trabajo arroja considerable luz sobre el desarrollo griego de la trigonometría.

El libro I de su obra, se dedica a establecer para triángulos esféricos muchas de las proposiciones de los *Elementos* de Euclides que se verifican en los triángulos planos, tales como los conocidos teoremas de congruencia, los teoremas acerca de los triángulos isósceles, y así sucesivamente. Además, Menelao establece la congruencia de dos triángulos esféricos en que los ángulos de uno son iguales a los del otro (para la cual no hay analogía en el plano) y el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos.

El libro II contiene problemas de interés en astronomía.

En el libro III se desarrolla la trigonometría esférica, deducida en su mayor parte del análogo esférico de la proposición en el plano conocida comúnmente ahora como *teorema de Menelao*. Realmente

Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre Menelao de Alejandría, quien fue un astrónomo griego que vivió en el primer siglo ya de nuestra era y al que se le deben diversos resultados sobre triángulos y sus congruencias. Su tratado Sphoerica deja ver el desarrollo que los griegos habían alcanzado en la trigonometría.


Notas históricas

<< < > >>

III.c Menelao de Alejandría

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

mayor parte del análogo esférico de la proposición en el plano conocida comúnmente ahora como *teorema de Menelao*. Realmente, el caso en el plano supone Menelao que es bien conocido y lo utiliza para establecer el caso esférico. Gran parte de la trigonometría esférica puede deducirse de la versión esférica de dicho teorema tomando triángulos especiales y transversales especiales.

Menelao de Alejandría fue uno de los últimos geómetras griegos que aplicó la geometría esférica a la astronomía.

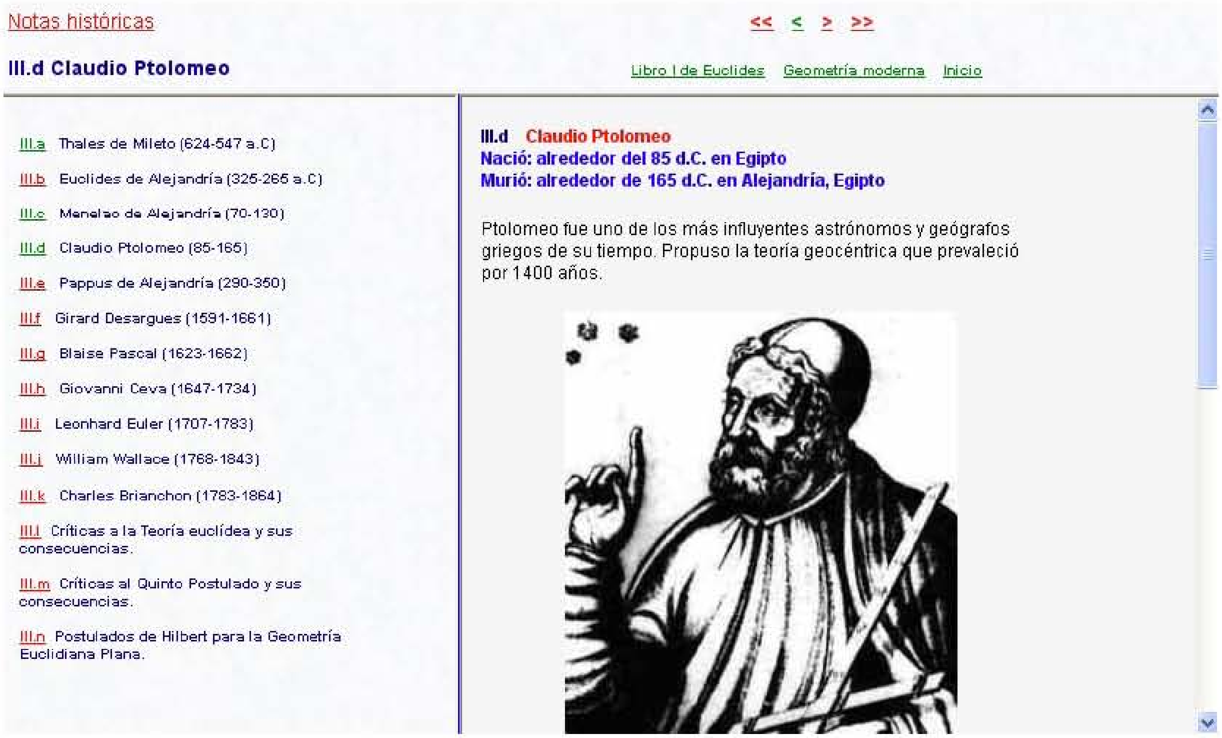
Su trabajo más conocido es el Teorema de Menelao, que puede enunciarse como sigue: "Si una línea intersecta los lados de un triángulo, entonces el producto de las razones en que los lados son divididos es igual a -1". Puedes ver su demostración en II.7.f y en II.7.g.

Howard Eves.
Estudio de las Geometrías. Vol. I.
UTEHA. 1967. pp. 74-75.

Jean-Paul Collette.
Historia de las matemáticas I..
Siglo XXI editores. 2002. pp. 150-152.

Datos tomados del sitio:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Menelaus.html

Aquí se pueden ver la referencia a uno de sus resultados más importantes, conocido con el nombre de Teorema de Menelao sobre triángulos, al cual se puede acceder dando un clic en la liga correspondiente. También se pueden apreciar las referencias a las fuentes de las que fueron tomadas estas notas.


Notas históricas

<< < > >>

III.d Claudio Ptolomeo

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

III.d Claudio Ptolomeo
Nació: alrededor del 85 d.C. en Egipto
Murió: alrededor de 165 d.C. en Alejandría, Egipto

Ptolomeo fue uno de los más influyentes astrónomos y geógrafos griegos de su tiempo. Propuso la teoría geocéntrica que prevaleció por 1400 años.

Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre Claudio Ptolomeo, quien fue uno de los más influyentes astrónomos y geógrafos de su tiempo. Es a Ptolomeo a quien se le debe la teoría geocéntrica que prevaleció por más de 1400 años. Es el autor de una obra de trece libros, que recibe generalmente el nombre de *Almagesto.*


Notas históricas

<< < > >>

III.d Claudio Ptolomeo

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

una obra de trece libros, que recibe generalmente el nombre de *Almagesto* y ha desempeñado en la astronomía el mismo papel que *Los Elementos* de Euclides en matemáticas. Esta *Síntesis matemática* influyó en la trigonometría de toda la antigüedad, y todas las tablas astronómicas aparecidas hasta el siglo XII se basan fundamentalmente en el *Almagesto*. Los fundamentos matemáticos se encuentran en el Libro I y su contenido trigonométrico fue mejorado hasta finales de la Edad Media.

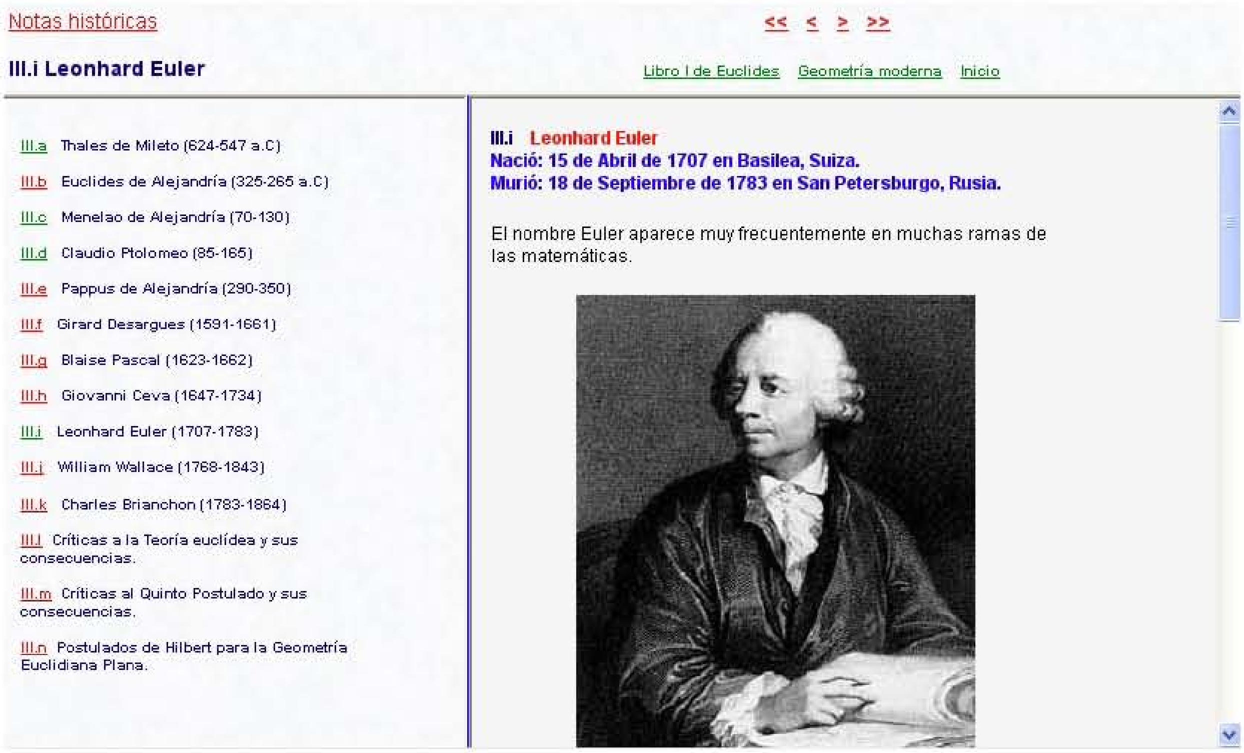
El Almagesto de Ptolomeo soportó los estragos del tiempo y se conservan no sólo las tablas trigonométricas, sino también las explicaciones de los métodos utilizados para su construcción. Para el cálculo de cuerdas, Ptolomeo utilizaba entre otras una proposición de naturaleza geométrica a la que se dá el nombre de Teorema de Ptolomeo: "La suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico es igual al producto de las diagonales".

La demostración de este teorema puedes verla en II.8.k y en II.8.l.

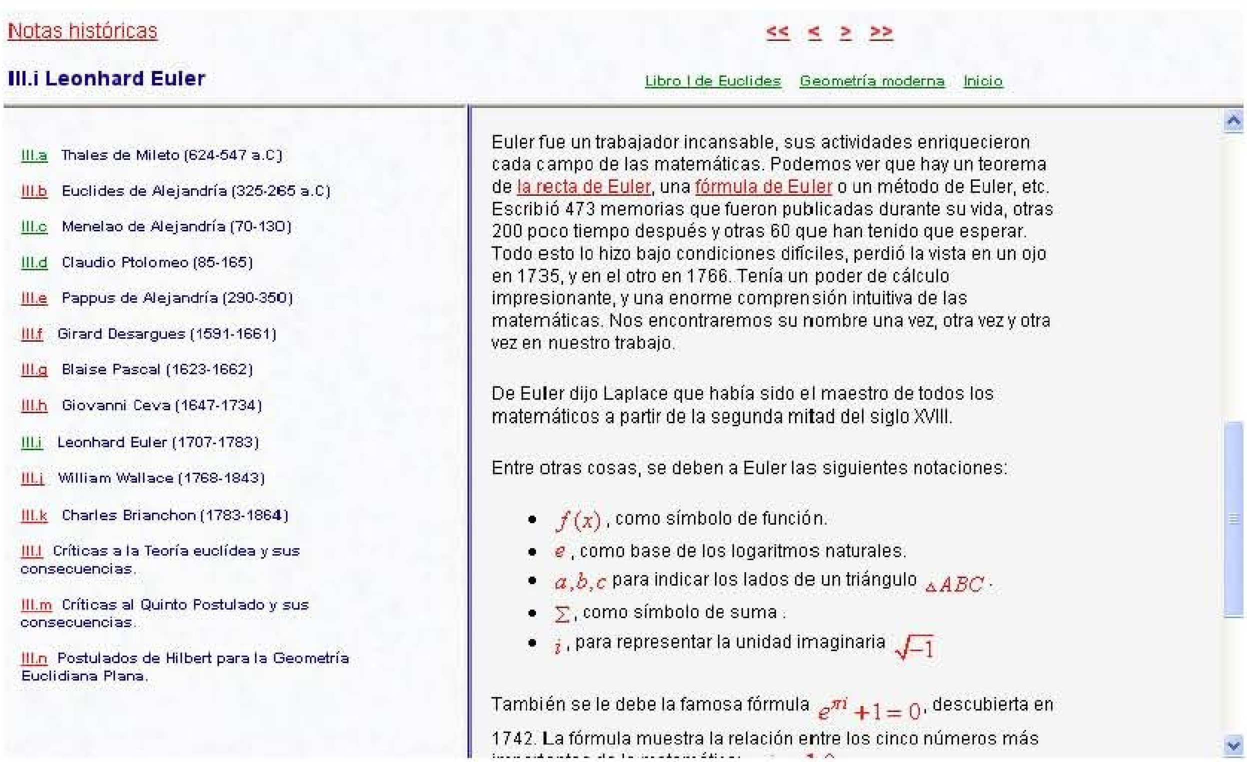
Jean-Paul Collette.
Historia de las matemáticas I.
Siglo XXI editores. 2002. pp. 152.

Datos tomados del sitio:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ptolemy.html

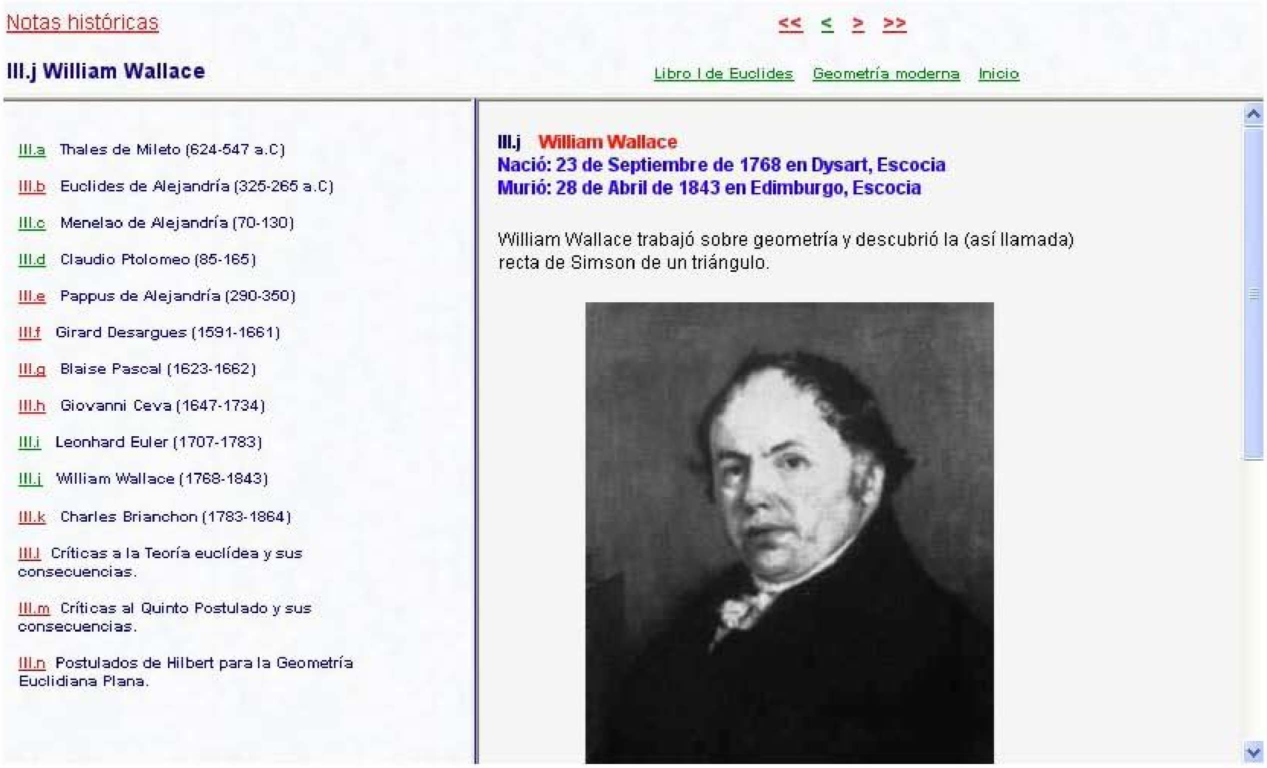
Aquí se pueden ver la referencia a uno de sus resultados más importantes, conocido con el nombre de Teorema de Ptolomeo sobre cuadriláteros cíclicos, al cual se puede acceder dando un clic en la liga correspondiente. También se pueden apreciar las referencias a las fuentes de las que fueron tomadas estas notas.



Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre Leonhard Euler quien fue durante mucho tiempo, el matemático más importante de Europa y quien es, todavía ahora, el autor más prolífico de toda la historia de las matemáticas. Laplace, se expresó de Euler como el maestro de todos los matemáticos a partir de la segunda mitad del siglo XVIII.



Aquí se pueden ver la referencia a dos de sus resultados más importantes en lo que a Geometría se refiere, la Recta de Euler y la Fórmula de Euler, a las cuales se puede acceder dando un clic en la liga correspondiente.



Notas históricas

<< < > >>

III.j William Wallace

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.j William Wallace
Nació: 23 de Septiembre de 1768 en Dysart, Escocia
Murió: 28 de Abril de 1843 en Edimburgo, Escocia

William Wallace trabajó sobre geometría y descubrió la (así llamada) recta de Simson de un triángulo.

Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre William Wallace a quien al parecer, se le debe en realidad el teorema de la llamada Línea de Simson, referente a la recta que contiene los pies de las perpendiculares de un punto sobre los lados de un triángulo.

Notas históricas

<< < > >>

III.k Charles Brianchon

Libro I de Euclides Geometría moderna Inicio

III.k Charles Julien Brianchon
Nació: 19 de Diciembre de 1783 en Sèvres, Francia
Murió: 29 de Abril de 1864 en Versalles, Francia

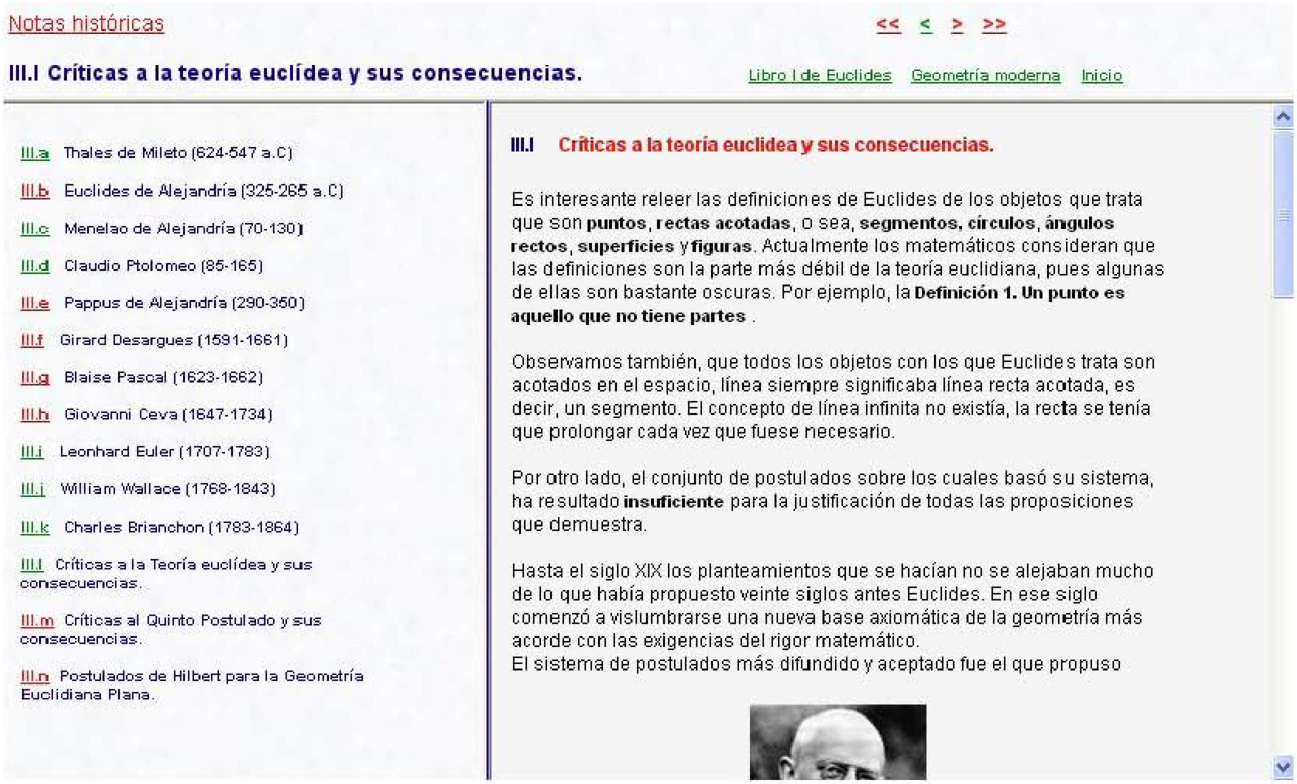
Descubrió un interesante teorema (relacionado de una manera muy sutil con el teorema de Pascal) involucrando un hexágono circunscrito a una cónica. La demostración de Brianchon emplea la "dualidad" de puntos y líneas, lo cual pertenece a la geometría proyectiva. Sin embargo, en el caso en que la cónica es un círculo, la investigación para una demostración euclidiana se convierte en un verdadero desafío. Este desafío fue exitosamente respondido por A. S. Smogorzhevskii.

La demostración que aquí se presenta del teorema de Brianchon es debida a Smogorzhevskii, y la puedes consultar en II.9.i.

H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer.
Geometry Revisited.
Random House. 1967. pp. 77.

Datos tomados del sitio:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Brianchon.html

Aquí se podrán encontrar los datos más importantes sobre Charles Julien Brianchon relacionado con el Teorema de Pascal. Se puede acceder a la demostración de este teorema y al applet interactivo que la acompaña, dando clic en la liga correspondiente.



Notas históricas

<< < > >>

III.l Críticas a la teoría euclídea y sus consecuencias.

Libro I de Euclides   Geometría moderna   Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

III.l Críticas a la teoría euclidea y sus consecuencias.

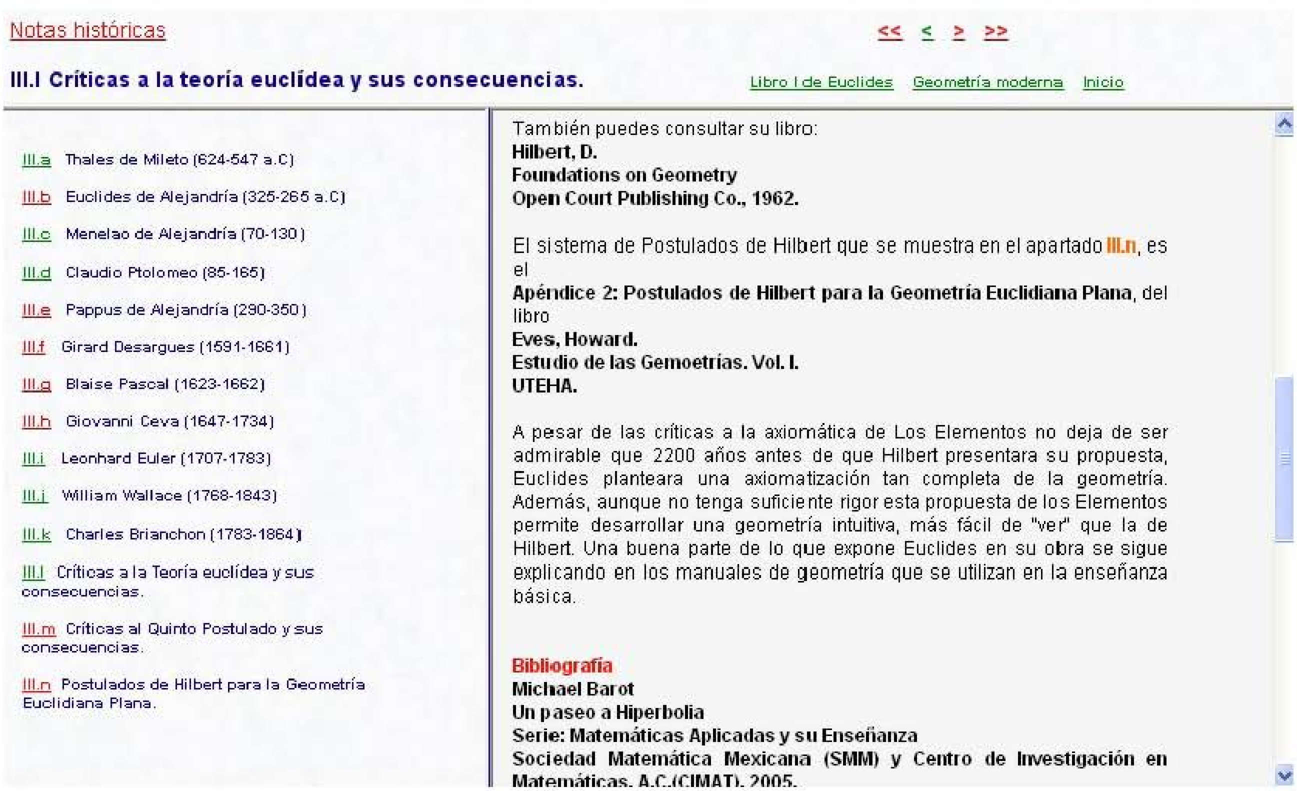
Es interesante releer las definiciones de Euclides de los objetos que trata que son **puntos**, **rectas acotadas**, o sea, **segmentos**, **círculos**, **ángulos rectos**, **superficies** y **figuras**. Actualmente los matemáticos consideran que las definiciones son la parte más débil de la teoría euclidiana, pues algunas de ellas son bastante oscuras. Por ejemplo, la **Definición 1. Un punto es aquello que no tiene partes** .

Observamos también, que todos los objetos con los que Euclides trata son acotados en el espacio, línea siempre significaba línea recta acotada, es decir, un segmento. El concepto de línea infinita no existía, la recta se tenía que prolongar cada vez que fuese necesario.

Por otro lado, el conjunto de postulados sobre los cuales basó su sistema, ha resultado **insuficiente** para la justificación de todas las proposiciones que demuestra.

Hasta el siglo XIX los planteamientos que se hacían no se alejaban mucho de lo que había propuesto veinte siglos antes Euclides. En ese siglo comenzó a vislumbrarse una nueva base axiomática de la geometría más acorde con las exigencias del rigor matemático.
El sistema de postulados más difundido y aceptado fue el que propuso

Aquí se podrán encontrar las críticas más importantes a la teoría euclidiana y de ahí consecuencias muy interesantes para el desarrollo de la geometría.



Notas históricas

<< < > >>

III.l Críticas a la teoría euclídea y sus consecuencias.

Libro I de Euclides   Geometría moderna   Inicio

III.a Thales de Mileto (624-547 a.C)
III.b Euclides de Alejandría (325-265 a.C)
III.c Menelao de Alejandría (70-130)
III.d Claudio Ptolomeo (85-165)
III.e Pappus de Alejandría (290-350)
III.f Girard Desargues (1591-1661)
III.g Blaise Pascal (1623-1662)
III.h Giovanni Ceva (1647-1734)
III.i Leonhard Euler (1707-1783)
III.j William Wallace (1768-1843)
III.k Charles Brianchon (1783-1864)
III.l Críticas a la Teoría euclídea y sus consecuencias.
III.m Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
III.n Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana.

También puedes consultar su libro:
Hilbert, D.
Foundations on Geometry
Open Court Publishing Co., 1962.

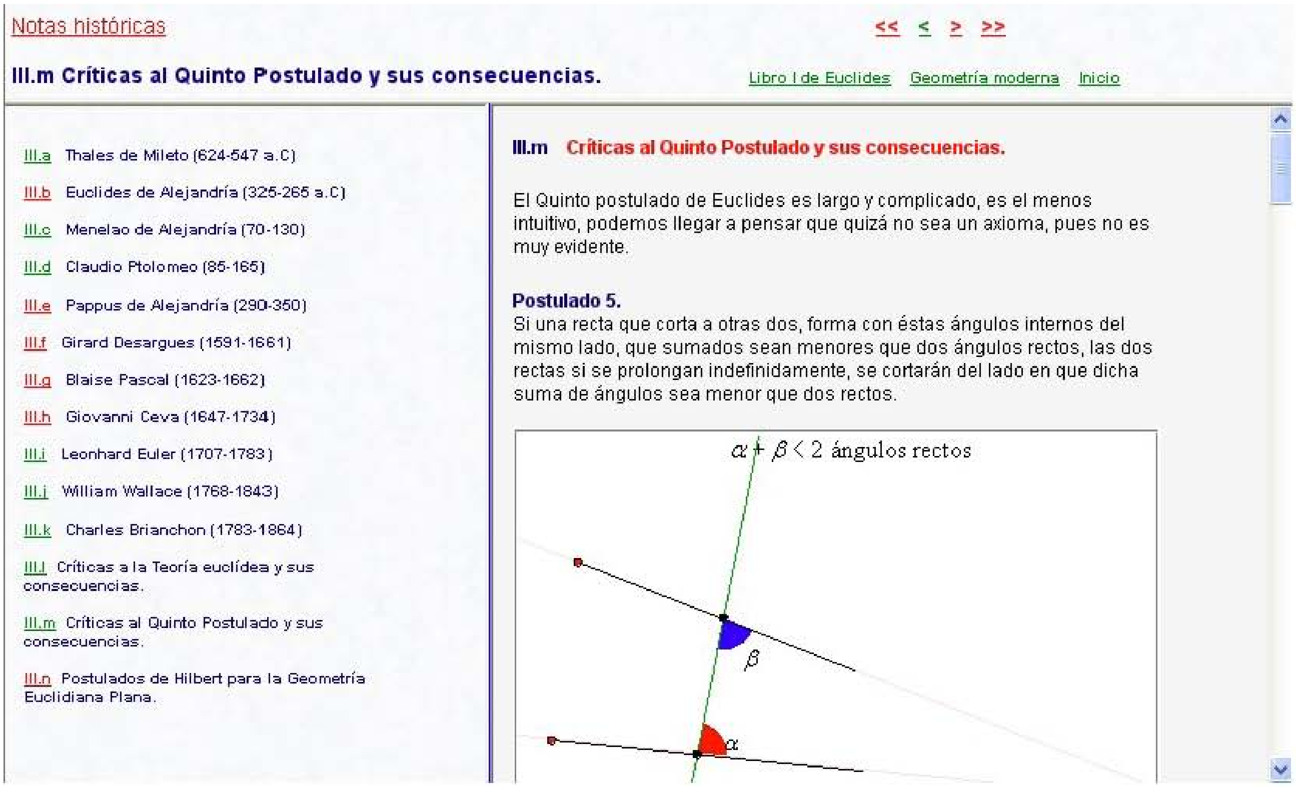
El sistema de Postulados de Hilbert que se muestra en el apartado **III.n**, es el
Apéndice 2: Postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana Plana, del libro
Eves, Howard.
Estudio de las Gemoetrías. Vol. I.
UTEHA.

A pesar de las críticas a la axiomática de Los Elementos no deja de ser admirable que 2200 años antes de que Hilbert presentara su propuesta, Euclides planteara una axiomatización tan completa de la geometría. Además, aunque no tenga suficiente rigor esta propuesta de los Elementos permite desarrollar una geometría intuitiva, más fácil de "ver" que la de Hilbert. Una buena parte de lo que expone Euclides en su obra se sigue explicando en los manuales de geometría que se utilizan en la enseñanza básica.

Bibliografía

Michael Barot
Un paseo a Hiperbolia
Serie: Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza
Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.(CIMAT), 2005.

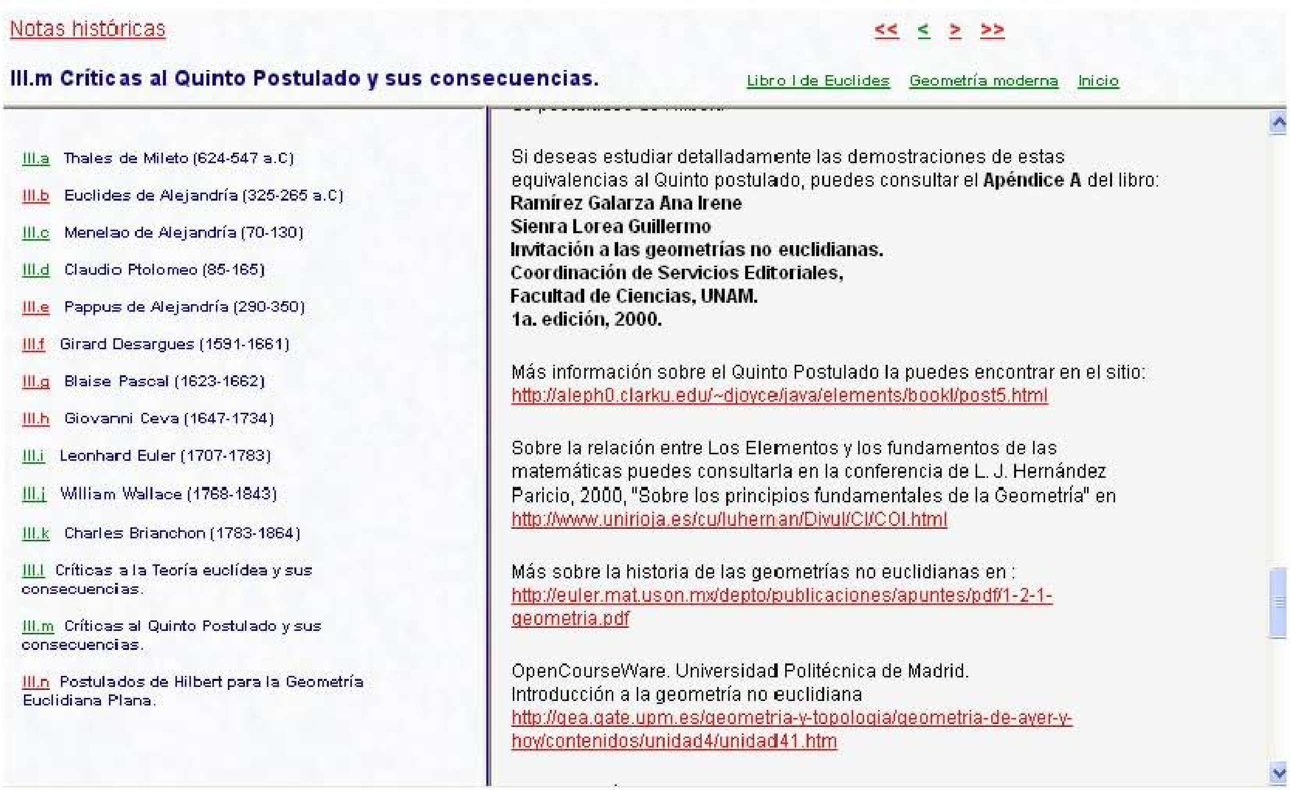
Se incluyen bibliografía y sitios de Internet que contienen referencias importantes a la teoría euclidiana y sobre las consecuencias que ello acarreó en el desarrollo de la geometría.



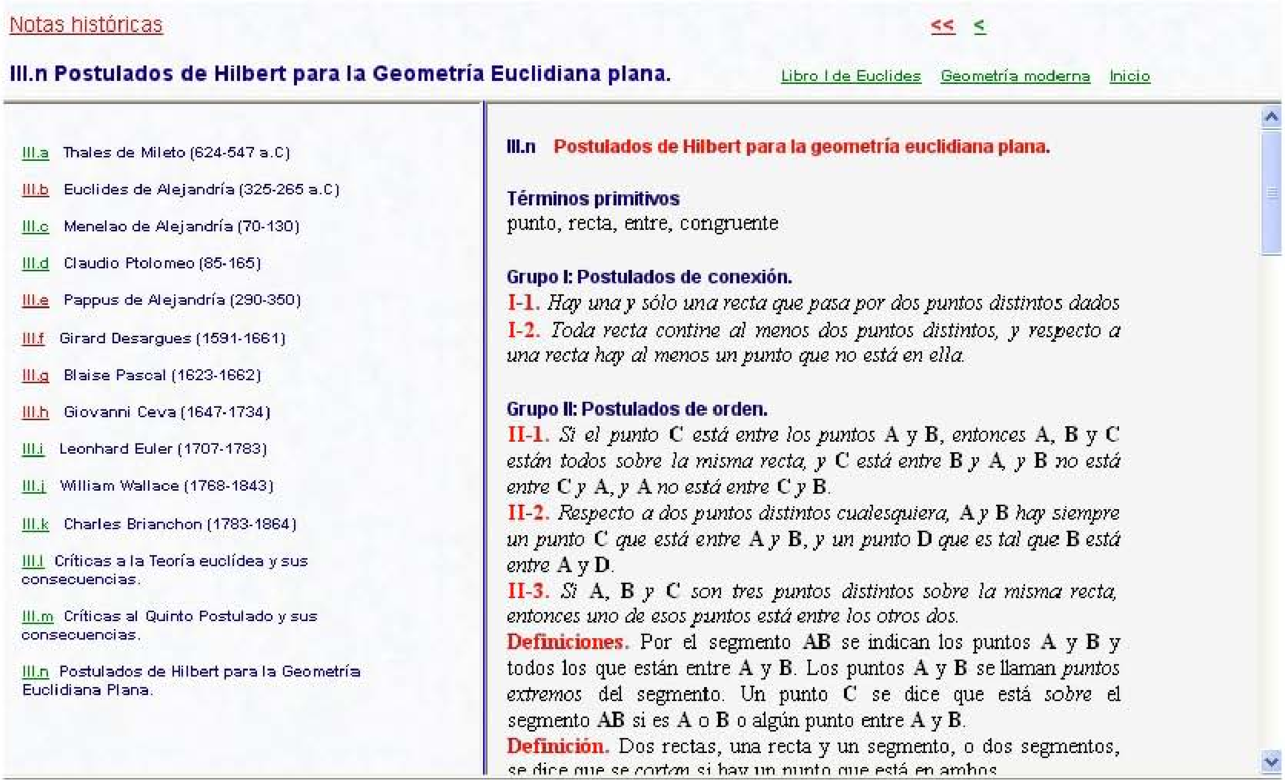
Aquí se podrán encontrar las críticas más importantes al quinto postulado de la geometría de Euclides y de ahí consecuencias muy interesantes para el desarrollo de la geometría.

Se incluyen referencias a obras de matemáticos muy renombrados como Gauss, Bolyai, Lobachevsky, etc. También se proporciona bibliografía y sitios de Internet al respecto.

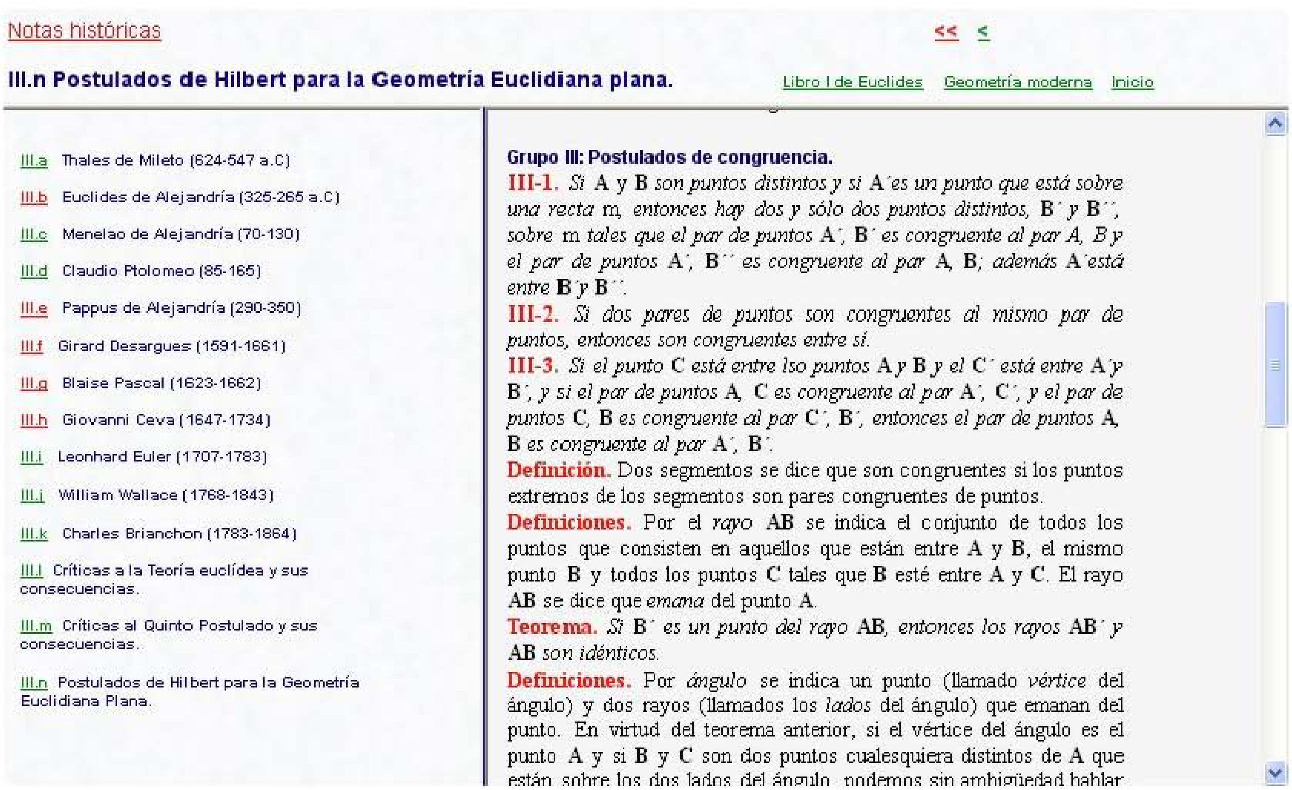
Aquí se podrán encontrar una lista de formulaciones equivalentes al quinto postulado de la geometría de Euclides y referencias dentro del propio software.



Las referencias bibliográficas y de sitios de Internet son abundantes y cuentan con una explicación de lo que en ellos se pueden encontrar.



Aquí se podrán encontrar los postulados de Hilbert para la Geometría Euclidiana, organizada en diversos grupos, de acuerdo con sus contenidos temáticos.



Se incluyen referencias bibliográficas y de sitios de Internet de manera abundante, acompañadas de una breve explicación de lo que en ellos se pueden encontrar.

APÉNDICE 1
Ficha técnica y construcción de Geometría Interactiva.

10. Apéndice 1.
Ficha técnica y construcción de Geometría Interactiva.

10.1 Ficha técnica del software.

Geometría Interactiva es un software que corre en cualquier computadora personal con Windows XP ServicePack2 y que tenga instalada la máquina virtual de Java.

Se encuentra en Internet en la dirección:

http://132.248.17.238/geometria/

Se ejecuta en cualquier navegador, particularmente en Internet Explorer 6.0 o superior, Netscape Comunicator 7.0 o superior, o FireFox.

También se tiene en disco compacto y se puede correr ejecutando con doble clic el archivo **index.html**. Se abre en el navegador que tenga declarado por omisión el usuario y el menú que se presenta contiene las opciones:

Libro I de Euclides, **Geometría Moderna** **Notas históricas**
Mapa del sitio **Documento de tesis**

Es importante señalar que en cualquier página Web, todo texto subrayado es un **hipervínculo** que puede abrir una página Web o una ventana flotante con el enunciado de algún teorema o con alguna referencia importante.

En cada applet, todo recuadro con alguna imagen es un **botón**, que al darle clic produce una acción, como abrir otro botón y/o mostrar una construcción o alguna situación particular en una construcción interactiva.

Los puntos rojos en las construcciones interactivas se pueden arrastrar con el ratón y así se pueden visualizar distintas situaciones de un teorema o resultado en particular.

La navegación en el sitio es muy estándar:

<< **<** **>** **>>**

Al inicio de la serie, al anterior, al que sigue, al final de la serie.

También se utiliza como **hipervínculo**, el nombre del tema o subtema en cuestión.

10.2 Construcción del software.

Para construir el programa Geometría Interactiva se utilizaron varias herramientas de cómputo: una de software matemático, una de edición de fórmulas matemáticas, una de edición de imágenes, una de edición de texto, una de edición de páginas Web y, algunos conocimientos de los lenguajes HTML y JavaScript, así como de la gramática del JavaSketchpad, además para probar las construcciones interactivas, tres navegadores (Microsoft Internet Explorer 6.0, Mozilla FireFox 1 y Netscape 8.0)

Para aquellos interesados, a continuación se describirán las herramientas utilizadas y un poco de la mecánica seguida para la construcción de Geometría Interactiva.

10.2.1 Herramienta de software matemático

Todas las construcciones interactivas de este trabajo se realizaron con The Geometer`s Sketchpad (GSP) y con su componente JavaSketchpad, que permite exportar las construcciones GSP a un formato de html.

GSP es una herramienta de construcción y exploración dinámica originalmente creada para hacer geometría plana y desde su aparición en 1990, su desarrollo y aceptación ha sido impresionante. Actualmente se usa también para explorar temas de álgebra, geometría analítica y cálculo, entre otras materias.

GSP permite trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos, curvas cónicas, funciones, etcétera y cuenta con diversas herramientas, entre ellas, las de selección, rotación, traslación, dilatación, reflexión y medición.

Con GSP se pueden producir dibujos interactivos y lecciones grabadas para ser reproducidas en cualquier momento. Por sus capacidades de animación, es posible construir simulaciones para aplicarlas a distancia o directamente en el salón de clase**.**

En Internet, es posible encontrar muchos sitios con aplicaciones educativas: artículos, ejemplos interactivos, referencias bibliográficas y audiovisuales, por mencionar algunos.
El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.keypress.com/sketchpad/

The Geometer's Sketchpad ha tenido varias versiones, pero se puede decir que las más estables han sido la 3.1 y la 4.05. Este se ha realizado con la versión GSP 3.1, pero con la componente de Java de la versión 4.05.

Todas las construcciones interactivas se realizaron en GSP versión 3.x, se exportaron al formato html con el convertidor propio de la versión 3.x y ya en el código, se utilizan las clases y la gramática del JavaSketchpad 4.x.

Es decir, una vez que se tiene una construcción en html, se usa el Bloc de notas o cualquier editor de texto para editar mediante la gramática de JavaSketchpad el código de dicho archivo, y así darle una mejor apariencia y sobre todo funcionalidad.

Por tanto, en el código se tuvo que sustituir ARCHIVE="jsp4.jar" CODEBASE="../jsp" por ARCHIVE="JSPDR3.JAR" CODEBASE="JSP" (esto último siempre lo escribe el convertidor de la versión 3.x en el código html), donde jsp se refiere a la carpeta donde se encuentran las clases de java de la versión 4.x. Por cierto, la carpeta jsp tiene que sustituir a la carpeta JSP que contiene las clases de la versión 3.x.

10.2.2 Herramienta de edición de fórmulas matemáticas

MathType es un editor de fórmulas matemáticas y científicas con un extenso conjunto de símbolos y plantillas para la composición de complejas expresiones matemáticas mediante pulsaciones con el ratón sobre botones y paletas.
Se usó para construir todas las imágenes de las expresiones matemáticas existentes en Geometría Interactiva. Este programa tiene la posibilidad de escribir una amplísima gama de símbolos matemáticos y fuentes de texto, puede proporcionarles diversos atributos de color, espacios entre fuentes y entre renglones, proporcionarles fondo transparente y exportarlos en formatos gráficos muy comunes en las páginas Web o a código TeX, LaTeX y MathML. Tiene entre otras características, una interfase sencilla de usar, bastante intuitiva, de tal manera que se puede usar en breve tiempo.

De hecho MathType consiste en la versión profesional del familiar Editor de Ecuaciones incluido en Microsoft Word, Corel WordPerfect, AppleWorks y otros productos similares. Este editor fue desarrollado por la empresa Design Science Inc., fundada en 1986 y con sede en Long Beach (California) y de su página Web, se pueden bajar versiones gratuitas temporales.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.dessci.com/en/products/mathtype/

10.2.3 Herramienta de edición de imágenes

Para realizar las imágenes incorporadas a este documento, se capturan desde la pantalla, y después se debe procesarlas para que queden de buen tamaño y buena resolución, para ello se utilizó el programa de computadora Corel PhotoPaint.

Corel PhotoPaint es un programa de edición de imágenes de mapa de bits que permite retocar fotografías existentes o crear gráficos originales.

Por sus amplias posibilidades para la edición de imágenes es un programa muy utilizado por profesionales del ramo, pero en el caso de esta tesis tan sólo fue utilizado para abrir imágenes, producto de capturas de pantalla, recortarlas, si acaso darles un nuevo muestreo o un pequeño retoque y exportar las imágenes resultantes a un formato gráfico jpg o gif., para posteriormente insertarla en este documento creado en Word.

10.2.4 Herramienta de edición de texto

Un editor de texto fue muy importante para poder editar los applets contenidos en el código html de una construcción creada en GSP, y transformada mediante su componente JavaSketchpad a un archivo en formato html

En este trabajo de tesis se utilizó el Bloc de notas de Windows. Se puede utilizar cualquier otro editor de texto, ya que se trata simplemente de corregir, quitar o aumentar instrucciones en el código de texto, siguiendo la gramática del JavaSketchpad.

10.2.5 Herramientas de edición de páginas Web

Eventualmente fue muy importante introducir o corregir hipervínculo, modificar la posición de imágenes, editar tablas, entre otros elementos de las páginas Web en formato html. Para esta tarea se usó Dreamweaver un editor de páginas Web.
Las tareas realizadas con Dreamweaver, en realidad hubiesen podído realizar con cualquiera editor de texto. Sin embargo, un editor como Dreamweaver facilita el trabajo, dada su interfase gráfica sumamente intuitiva.
Dreamweaver es de los editores de páginas Web más populares en el medio, es parte de una suite de la compañía Macromedia, que se ha convertido en uno de los estándares en lo que a producción de multimedios se refiere.

El sitio oficial de esta herramienta es:

http://www.macromedia.com/

10.2.6 Algunos conocimientos de HTML y JavaScript

Para armar adecuadamente este software Geometría Interactiva los conocimientos de html y JavaScript fueron básicos, pues de otra manera hubiera sido muy complicado construir desde una página Web hasta una estructura de páginas Web ligadas entre sí.

No obstante los conocimientos no son tan profundos, que puedan desanimar a cualquiera que desee iniciar un trabajo como éste. No es necesario previamente agotar sendos cursos de html y JavaScript, más bien, sería necesario entender algunos cuantos procesos y de ahí ir consultando lo que se fuera necesitando.

Con esto, desde luego, no se quiere decir que uno deba negarse a conocer de manera profunda estos lenguajes, es evidente que a mayores conocimientos, menos tropiezos y mejores productos.

JavaScript se utilizó en particular para establecer una rutina que permitiera que las ventanas flotantes que pudiera abrir el usuario de Geometría Interactiva, se cerraran de manera automática, al dar clic en cualquier otro lugar de la pantalla. El trabajo de estructuración se realizó con html.

10.2.7 Navegadores para Internet

Una parte fundamental, es poder probar que las páginas Web se visualicen adecuadamente en los diversos navegadores para Internet y, en este caso, se hicieron pruebas en tres de ellos, de los más comunes entre los usuarios de Windows: Microsoft Internet Explorer 6.0, Netscape 8.0 y Mozilla FireFox.

Los sitios oficiales respectivamente de estos tres navegadores son los siguientes:

http://www.microsoft.com/spain/windows/ie/default.mspx

http://browser.netscape.com/

http://www.software-gratis.org/firefox-es.html

10.2.7 Algunas dificultades técnicas

Al iniciar el proyecto de construcción del software Geometría Interactiva, se contaba con una amplia experiencia en el programa de computadora The Geometer´s Sketchpad (GSP), se conocían los tipos de construcciones geométricas que se podían exportar a html y cuáles no.

También se tenía alguna experiencia en html, pues se sabía la forma de estructurar páginas Web, la forma de ligar unas con otras y la manera de construir una navegación adecuada en todo el programa. Es decir, se conocía la forma de lograr la estructuración total del software, así como su navegación.

Las dificultades técnicas más bien se presentaron al momento de:

- Lograr una buena apariencia y funcionalidad en las demostraciones y las construcciones interactivas que las acompañarían,
- Conseguir un elemento importante de funcionalidad de la página Web correspondiente a una demostración: acceder sin abandonar la página Web de estudio, a los teoremas o referencias necesarios, para seguir adecuadamente la demostración.

La solución no fue fácil, pero se resolvió con paciencia, y estudiando un poco más de JavaScript y html.

APÉNDICE 2
GEOMETRÍA INTERACTIVA Y LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

11. Apéndice 2.

Geometría Interactiva y la Didáctica de las matemáticas

Se hace énfasis en que este programa de computadora pudiese servir de base para un estudio sobre el impacto en el proceso enseñanza - aprendizaje de la materia Geometría Moderna. Sería útil conocer el alcance que pudiera tener este software como material de apoyo para estudiantes de dicha asignatura.

Los profesionales de la Didáctica de las matemáticas, y en particular de aquellos que se apoyan en las nuevas tecnologías, cuentan con metodologías específicas para hacer un estudio de esta naturaleza.

Este tipo de estudios quedan fuera de la intención de esta tesis.

Desde hace tiempo, se viene manejando en ese campo el concepto de secuencia didáctica, que inclusive puede ser aplicado usando software. Hay evidencias de este tipo de trabajos en Internet.

11.1 Acerca del concepto secuencia didáctica.

Una secuencia didáctica es la planeación y diseño del trabajo en el aula. Es la estructuración sistemática del trabajo en el aula en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica). Las secuencias didácticas se caracterizan por tener tres momentos básicos referidos a actividades de apertura, de desarrollo y de cierre. En una secuencia didáctica se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje: ¿qué sabe?, ¿qué conocimientos va a aprender?, ¿qué va a aprender a hacer?, ¿cómo lo va a hacer?

En varios documentos de la Secretaría de Educación Pública (SEP), se recomienda a los profesores, en particular de matemáticas, aplicar este concepto en sus clases.
Véase la página Web:

http://www.sep.gob.mx/work/resources/LocalContent/39526/1/matematicas.pdf
Matemáticas y Secuencias didácticas. 1a. Edición 2004.
Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas. SEP

En el año de 2006, se llevó a cabo el Taller breve para Docentes No.1 sobre secuencias didácticas y desarrollo de competencias matemáticas, como se puede apreciar en la siguiente página Web:

http://www.secolima.gob.mx/estruc/dde/Talleres%20Breves/PENSAMIENTO%20CR%CDTICO.pdf
Secretaría de Educación de Colima. Dirección de Desarrollo Educativo.
Fortalecimiento del Pensamiento Crítico y Desarrollo de Competencias Matemáticas.
Secuencias Didácticas. Taller breve para Docentes No.1
3a. Etapa. Colima, Col. Septiembre. 2006.
Ver el Capítulo 7. Ejemplificación de Secuencias didácticas. Página 33.

11.2 Ejemplo de secuencia didáctica usando Geometría Interactiva.

Un ejemplo de cómo usar el software Geometría Interactiva en una secuencia didáctica se puede consultar en la página Web:

http://132.248.17.238/geometria/secdidac_m.html

Más páginas Web sobre el concepto de secuencia didáctica.

Una versión corta de secuencia didáctica.
Secuencia de actividades para el estudio del cálculo.
http://geocities.com/apcastane/demo.htm

Secuencia didáctica con enfoque constructivista: El caso de la función valor absoluto.
http://www.uady.mx/~matemati/dme/docs/Resumen_RELMEXX.pdf

Una secuencia didáctica: Sistema de ecuaciones lineales.
http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33570103&iCveNum=1967

La práctica docente y la teoría de las situaciones didácticas.
http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-Fernando-Gerrero.pdf

Manual de secuencias didácticas.
http://www.dgeti.sep.gob.mx/AreasDeptos/ReformaCurricular/secuendi.html

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS DE INTERNET

12. Bibliografía y Referencias de Internet

12.1 Bibliografía.

[He] Heath, Sir Thomas Little (1861-1940)
Euclid
The thirteen books of THE ELEMENTS. Vol 1 (Books I and II).
Traducido y comentado por Sir Thomas L. Heath.
DOVER, PUBLICATIONS, INC. Second Edition

[Eu] Euclides.
Elementos de Geometría. Tomos I - II.
Introducción, versión y notas de
Juan David García Bacca
Universidad Nacional Autónoma de México. 1992.

[Co] Coxeter, H.S.M..
Geometry Revisited.
RANDOM HOUSE. 1967.

[Sh] Shively Levy, S.
Introducción a la Geometría Moderna.
Compañía Editorial Continental. 1957.

[Bu] Bulajich Manfrino, Rudmila.
Gómez Ortega, José Antonio.
GEOMETRÍA.
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas.
Instituto de Matemáticas. UNAM. 2003.

[Hi] Hilbert, David.
The Foundations of Geometry.
La Salle. The open Court. 1950.

[Ev] Eves, Howard.
Estudio de las Geometrías. Vol. I
UTEHA. 1969.

[Ba] Barot, Michael.
Un paseo a Hiperbolia
Serie: Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza
Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. (CIMAT). 2005.

[Ra] Ramírez Galarza, Ana Irene.
Sienra Lorea, Guillermo.
Invitación a las geometrías no euclidianas.
Coordinación de Servicios Editoriales,
Facultad de Ciencias, UNAM.
1a. edición, 2000.

[Ca] Cárdenas Rubio, Silvestre.
Dos o Tres Trazos.
Temas de Matemáticas para el Bachillerato.
Instituto de Matemáticas. UNAM. 2003.

[Mi] Millán Gasca, Ana.
Euclides. La fuerza del razonamiento matemático.
NIVOLA libros y ediciones, S. L. 2004. pp. 51-53.

[Co] Collette, Jean-Paul.
Historia de las matemáticas I.
Siglo XXI editores. 2002. pp. 150-152.

[Pe] Perero, Mariano.
Historia e historias de matemáticas.
Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. 1994. pp. 34-35.

[St] Struik, Dirk J.
Historia Concisa de las Matemáticas.
I.P.N. 1990. pp. 53.

[Be] Bell, E.T.
Historia de las matemáticas.
Fondo de Cultura Económica. 2003. pp.65, 80.

[Be1] Bell, E.T.
MEN OF MATHEMATICS
A Fireside Book Publishing by SIMON AND SCHUSTER. New Cork

[Mo] Morris, Kline
El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.
Alianza Editorial , 1972.
Tomo III. Capítulo 36. La geometría no euclídea

12.2 Sitios de Internet.

Los Elementos de Euclides.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

The Geometer´s Sketchpad.
http://www.keypress.com/sketchpad/

Proyecto Descartes.
http://descartes.cnice.mecd.es/

Más referencias sobre los Elementos y sus críticas.
http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/02-03/PG02-03-navarro.pdf

Sobre geometría hiperbólica.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI29.html#hyperbolic

Sobre geometría elíptica.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI16.html#elliptic

En línea el libro de E.T. Bell: Los grandes matemáticos.
http://www.geocities.com/grandesmatematicos/index.html

Más información sobre el Quinto Postulado.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/post5.html

Sobre la relación entre Los Elementos y los fundamentos de las matemáticas.
Conferencia de L. J. Hernández Paricio, 2000. “Sobre los principios fundamentales de la Geometría.”
http://www.unirioja.es/cu/luhernan/Divul/CI/COI.html

Más sobre la historia de las geometrías no euclidianas.
http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-2-1-geometria.pdf

Todas las imágenes que aparecen en este texto y en el software Geometría Interactiva, fueron tomadas del sitio:

The MacTutor History of Mathematics archive.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html
School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland.

Si quieres saber más sobre:

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Gauss.html

János Bolyai (1802-1860)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Bolyai.html

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lobachevsky.html

Moritz Pasch(1843-1930)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pasch.html

John Playfair (1748-1819)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Playfair.html

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Saccheri.html

John Wallis (1616-1703)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Wallis.html

David Hilbert (1862-1943)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html

Más información sobre el sistema de postulados de Hilbert.
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/cultura/Literatura/OrigLib.asp

Son muchas las teorías matemáticas y los hechos históricos que contribuyeron …
http://www.matematicas.unal.edu.co/boletin/Archivos/2004-I/Doc7.pdf

Biografía de David Hilbert (1862-1943)
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Hilbert.asp

Otra sitio para saber más del trabajo de David Hilbert.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html

Biografías en línea de grandes científicos.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/