UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Matemáticas III - Geometría Analítica

Actividad de Apoyo a la Docencia

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación

PRESENTA

Dulce María Alfaro Melchor

Asesor: Físico Manuel Valadez Rodríguez

Diciembre 2007

Agradecimientos

A Dios por bendecirme al permitir alcanzar ésta meta.

A la UNAM, a la FES Acatlán y a mis profesores por contribuir a mi formación profesional y gracias a ella tener bellas experiencias en mi vida laboral, social y familiar.

A mi papá por la vida y todos los consejos que me dio.

A mi mamá que me ha apoyado en todo lo que he emprendido en la vida.

A mi esposo e hija por su apoyo incondicional.

A mi asesor Manuel Valadez Rodríguez por sus valiosos conocimientos y tiempo que dedico a éste trabajo.

A mis sinodales Mtro. Víctor J. Palencia Gómez, Ing. Jorge J. Jiménez Zamudio, Lic. Guadalupe del Carmen Rodríguez Moreno y Lic. Christian C. Delgado Elizondo por sus sugerencias y apreciable voto.

Contenido

Introducción

El Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) originalmente inicia con el objetivo de formar técnicos profesionales en diferentes áreas que tienen alta demanda en diferentes regiones del país. Con el paso del tiempo y debido a las necesidades no sólo tecnológicas sino también científicas y sociales de dichas regiones, tiene a bien en 2003 reformar su objetivo inicial de formar profesionales técnicos a formar profesionales técnicos bachiller para que los egresados puedan incorporarse de manera inmediata y competitiva al mercado laboral, además de continuar con estudios de nivel superior y acceder a mejores niveles de bienestar social, económico y profesional.

La estructura del plan de estudios es como se presenta

Ingreso	Ingreso	Ingreso	Ingreso	Ingreso	Ingreso
1er Sem	2do Sem	3er Sem	4to Sem	5to Sem	6to Sem
Módulos Autocontenidos de formación vocacional basado en ECBCC*: 65%					
Módulos Integradores de la Educación Media Superior en ECBCC: 35%					
	Egreso Técnico Auxiliar		Egreso Técnico Básico		Egreso Profesional Técnico Bachiller

* ECBCC: Educación y Capacitación Basada en Competencias Contextualizadas

El nuevo modelo curricular es flexible para atender a una población diferenciada en intereses y posibilidades. Por ello, además del ingreso normal en el primer semestre, se considera la posibilidad de ingreso en cualquiera de los seis semestres mediante esquemas de equivalencias de estudios. También, si el alumno desea dar por terminados sus estudios en el segundo semestre se le otorga un documento que lo acredita como Técnico Auxiliar, si esto ocurre en el cuarto semestre el documento que recibe lo acredita como Técnico Básico. Si concluye los seis semestres el alumno se gradúa como Profesional Técnico Bachiller.

Los Módulos Autocontenidos conforman una estructura integral multidisciplinaria y autosuficiente de actividades de enseñanza-aprendizaje, que permiten alcanzar objetivos educacionales a través de la interacción del alumno con el objeto de conocimiento, y a su vez, proporcionan una formación vocacional y disciplinaria en una carrera específica.

Los Módulos Integradores proporcionan los conocimientos disciplinarios científicos, humanísticos y sociales de carácter básico y propedéutico, que forman a los alumnos en el nivel de educación media superior, y los preparan para tener la opción de cursar estudios en el nivel de educación superior.

De acuerdo a lo anterior se reestructuró el plan de estudios el cual incluye en los Módulos Integradores materias de Matemáticas durante los primeros cinco semestres:

Matemáticas I – Aritmética y Algebra
Matemáticas II – Geometría y Trigonometría
Matemáticas III – Geometría Analítica
Matemáticas IV – Introducción al Calculo Diferencial e Integral
Matemáticas V – Probabilidad y Estadística

Desde el año 2004 tuve la oportunidad de desempeñarme como Prestador de Servicios Profesionales en el Plantel Bernardo Quintana Arrioja ubicado en Cuautitlán Izcalli impartiendo la materia de Matemáticas III -Geometría Analítica-.

El colegio, preocupado por estandarizar la forma de trabajo y el alcance de los objetivos, por cada materia que se imparte en cada semestre forma equipos de trabajo con los profesores que trabajan con la misma materia llamando a dichos equipos "Academias". Esto implica que como profesores de la misma materia se deben reunir periódicamente para quedar de acuerdo con respecto a los temas que se abarcarán por bimestre, la bibliografía que se va a utilizar, la escala de evaluación y la elaboración de exámenes de manera conjunta.

En Agosto del 2004, al lado de otros dos profesores trabaje en la Academia de Matemáticas III -Geometría Analítica-. Dado que era un nuevo temario desarrollamos notas para dicha materia.

De éste semestre obtuve los siguientes resultados estadísticos con los grupos que estuvieron a mi cargo.

Semestre Agosto-Diciembre del 2004

- 12 grupos de tercer semestre
- Entre 22 y 37 alumnos en cada grupo
- Población: 390 alumnos
- Muestra: 191 alumnos que estuvieron a mi cargo

	Número	Promedio	Reprobados	% Reprobados
Hombres	72	6.75	33	46%
Mujeres	119	7.12	44	37%
Total	191	6.9	77	40%

En Agosto del 2005, nuevamente trabaje al lado de dos profesores en la Academia de la materia de Matemáticas III -Geometría Analítica-. En esta ocasión completamos, y a su vez, depuramos las notas que se habían elaborado para la ocasión anterior, además de revisar bibliografía adicional. También se incremento la cantidad de ejercicios para el alumno.

De éste semestre obtuve los siguientes resultados estadísticos con los grupos que estuvieron a mi cargo.

Semestre Agosto-Diciembre del 2005

- 12 grupos de tercer semestre
- 21 y 38 alumnos cada grupo
- Población: 395 alumnos
- Muestra: 179 alumnos a mi cargo

	Número	**Promedio**	**Reprobados**	**% Reprobados**
Hombres	112	7.2	37	33%
Mujeres	67	7.4	23	34%
Total	179	7.3	60	34%

En Agosto del 2006, por tercera ocasión trabaje con dos profesores de la Academia de la materia de Matemáticas III -Geometría Analítica-. Esta ocasión dejamos a disposición de los alumnos las notas para que pudieran tenerlas desde el inicio del curso y recurrir a ellas en caso de inasistencia o para preparar exámenes bimestrales y extraordinarios.

De éste semestre obtuve los siguientes resultados estadísticos con los grupos que estuvieron a mi cargo.

Semestre Agosto-Diciembre del 2006

- 12 grupos de tercer semestre
- 30 y 39 alumnos cada grupo
- Población: 420 alumnos
- Muestra: 173 alumnos que estuvieron a mi cargo

	Número	Promedio	Reprobados	% Reprobados
Hombres	69	7	19	28%
Mujeres	93	8	19	20%
Total	162	7.5	38	23%

Actualmente los semestres se dividen en tres bimestres. En cada uno se aplica un examen parcial y durante todo el semestre se va construyendo una carpeta de evidencias que incluye tareas de investigación, prácticas indicadas en el temario de la materia así como ejercicios propuestos por el profesor.

En términos generales el conjunto de notas que contienen el material correspondiente al temario de la materia de Matemáticas III - Geometría Analítica -, abordan los contenidos a través de explicaciones, ejemplos resueltos y ejercicios con los que se pretende desarrollar en el estudiante sus capacidades de autoaprendizaje; meta fundamental de la pedagogía moderna. El trabajo contiene en sus últimas páginas las respuestas de los ejercicios que se presentan en los distintos capítulos. Esto facilita la realización del proceso de autoevaluación que sin duda es de gran valor para el estudiante, ya que le ayuda a conseguir un avance seguro y a su propio ritmo en la adquisición de los conocimientos, la acumulación de experiencias y el desarrollo de hábitos y habilidades.

Se agregó en las notas también un formulario para facilitar el manejo y el aprendizaje de las fórmulas requeridas en cada tema.

Adicionalmente se incluyo una lista de páginas Web en las que el alumno puede acceder a información explicada de diferente manera o practicar las fórmulas con diferentes valores y observar los cambios en las gráficas correspondientes de manera interactiva. Se sugiere también una serie de películas que muestran que no todas las matemáticas son frías y calculadoras sino también tienen su lado interesante.

El propósito de este trabajo es apoyar tanto al docente como al estudiante en las tareas propias de la asignatura señalada.

El objetivo de la materia es:

Identificar los modelos matemáticos y su representación gráfica, a través de la aplicación de las ecuaciones de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, para encontrar soluciones de problemas teórico-prácticos en el ámbito de la Geometría Analítica.

El temario de la materia es:

Mapa Curricular del Módulo	

Módulo	Matemáticas III: Geometría Analítica. 72 hrs.	
Unidad de Aprendizaje	1. Aplicación de los principales modelos matemáticos de las rectas, en la solución de problemas. 24 hrs.	2. Aplicación de los principales modelos matemáticos de las cónicas en la solución de problemas 48 hrs.

Resultados de Aprendizaje		
	1.1 Graficar rectas en un sistema coordenado	7 hrs.
	1.2 Usar los diferentes tipos de ecuaciones de una recta para la solución de problemas prácticos.	17 hrs.
	2.1 Usar las ecuaciones de la circunferencia en la solución de problemas prácticos.	12 hrs.
	2.2 Usar las ecuaciones de la parábola en la solución de problemas prácticos.	12 hrs.
	2.3 Usar las ecuaciones de la elipse en la solución de problemas prácticos.	12hrs.
	2.4 Usar las ecuaciones de la hipérbola en la solución de problemas prácticos.	12 hrs.

Capítulo 1

Rectas

Capítulo 1 - RECTAS

1.1 Graficar puntos en un sistema coordenado rectangular

Antecedentes

En la antigüedad la geometría y el álgebra se estudiaban por separado.

La *Geometría* es la rama de las matemáticas, que estudia las propiedades, las medidas y los objetos del espacio.

El *Álgebra* es la rama de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita.

Figura 1.1

Fue en 1637 cuando el científico, matemático y filósofo francés René Descartes publicó su obra *Le Geometrie* en la cual unificaba ambas ramas por medio de un sistema coordenado con el que se establecía una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y parejas de números reales. Lo anterior introdujo la aplicación de los métodos del análisis en la geometría con lo cual surgió la *geometría analítica* que permite el empleo de métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, así como la representación geométrica de ecuaciones, relaciones y funciones.

La aplicación de la geometría analítica en la resolución de problemas geométricos implica la utilización de un sistema coordenado al que se trasladan las condiciones geométricas que deben satisfacerse.

1.1.1 Relaciones y Funciones

Relaciones

Una *relación* es un conjunto de pares ordenados de números (x, y).

Ejemplo 1

$(3, 13)$, $(17, 13)$, $(28, 55)$, $(3, 25)$, $(17, 25)$, $(28, 49)$, $(3, 37)$ y $(28, 13)$.

Una *relación* es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que asocia a cada elemento del primer conjunto A un elemento cualquiera del segundo conjunto B.

Ejemplo 2

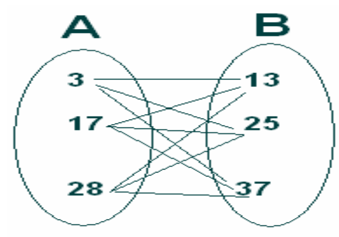
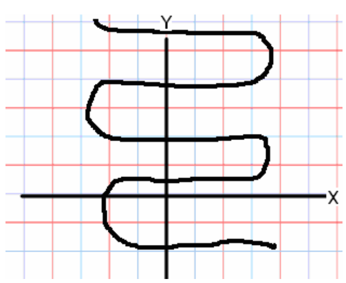
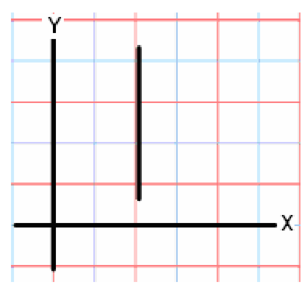


Figura 1.2

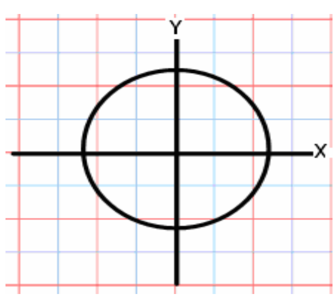
Son ejemplos gráficos de una relación los siguientes:



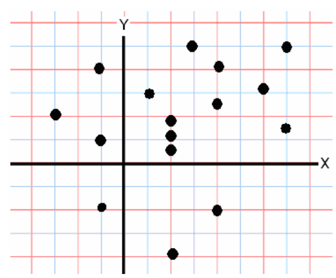
(a)



(b)



(c)



(d)

Figuras 1.3

En las figuras 1.3 a, b, c y d anteriores es posible visualizar que a cada elemento del eje X le corresponde más de un elemento del eje Y.

Funciones

Una *función* es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no hay dos pares ordenados distintos que tengan el mismo primer número, es decir y es único para un valor específico de x.

Ejemplo 1

(1,25), (4,100), (7, 175), (2,50), (5,125), (8, 200), (3,75), (6,150) y (9, 225).

Una *función* también es una correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos y asocia a cada elemento del primer conjunto A con un elemento único del segundo conjunto B.

Ejemplo 2

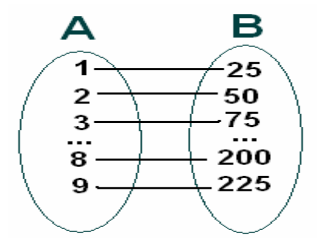
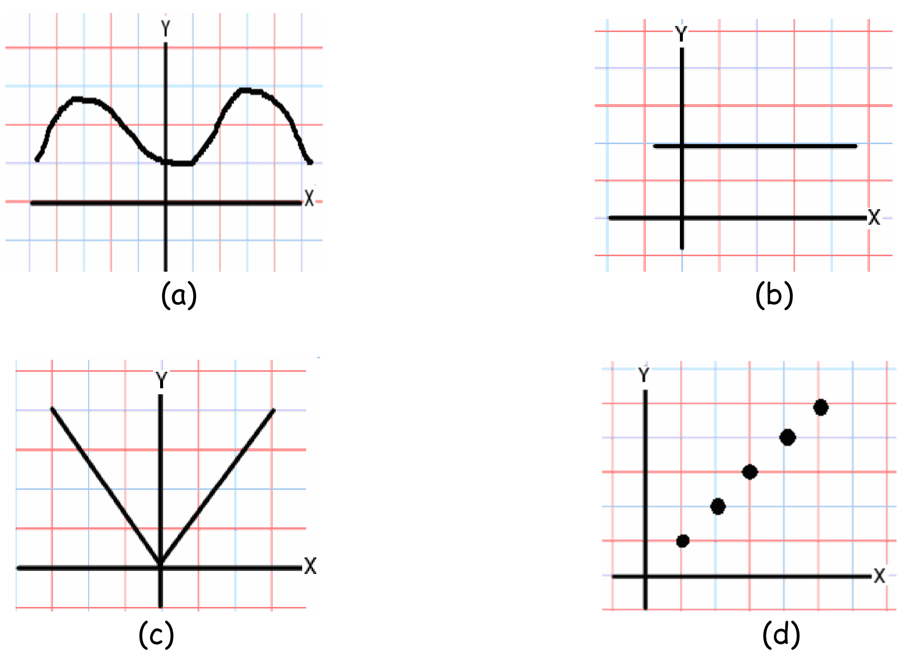


Figura 1.4

Son ejemplos gráficos de una función los siguientes:



Figuras 1.5

En las figuras 1.5 a, b, c y d es posible visualizar que a cada elemento del eje X le corresponde uno y sólo un elemento del eje Y.

Ejercicio 1

1. De acuerdo con los siguientes conjuntos de pares ordenados, grafícalos y determina si pertenecen a una relación o a una función:

a) (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3) y (3, 4).

b) (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14) y (8, 16).

c) (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (7, 5) y (8, 5).

d) (7, -5), (7, -3), (7, -1), (7, 0), (7, 1), (7, 2), (7, 3) y (7, 5).

e) (-5, 5), (-3, 3), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (5, 5).

Variables dependientes e independientes

Una *variable* es una letra o símbolo que puede tomar cualquier valor de un conjunto de números; es *dependiente* cuando su valor depende del valor elegido para otra variable y es *independiente* cuando su valor se elige libremente y no depende de otra variable.

Por ejemplo: $y = 2x$

Si x toma el valor de 1 y vale 2
Si x toma el valor de 5 y vale 10
Si x toma el valor de 10 y vale 20

En este caso x es la variable independiente porque su valor no depende de nada y y es la variable dependiente porque su valor depende del valor que tome x.

Si se hubiera escrito la ecuación así $x = \frac{y}{2}$, x sería la variable dependiente y y la variable independiente.

Ejercicio 2

En las siguientes expresiones algebraicas indica cuales son las variables independientes y cuales son las variables dependientes

a) $y = \frac{x-9}{3}$ b) $v = \frac{d}{t}$ c) $P_2 = \frac{P_1 V_1 T_2}{T_1 V_2}$ d) $F = k\frac{qq_1}{r^2}$ e) $y = 5$

1.1.2 Coordenadas rectangulares

Los conceptos fundamentales de la geometría plana son la base del estudio de la geometría analítica. La geometría analítica a través de sus métodos generaliza los conceptos de la geometría elemental.

Segmento rectilíneo dirigido

Un *segmento rectilíneo ó segmento* es la porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos. Los dos puntos se llaman *extremos del segmento.*

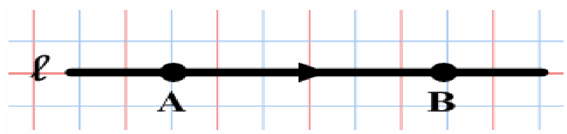


Figura 1.6

Así, en la figura 1.6, para la recta ℓ, AB es un segmento cuyos extremos son A y B.

La *longitud del segmento AB* se representa como $\overline{AB}$.

El segmento AB es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta ℓ de A hacia B, entonces el *segmento AB esta dirigido* de A a B lo cual se indica por medio de la flecha. En este caso, el punto A se llama *origen* o *punto inicial* y el punto B *extremo* o *punto final*. Si el segmento se dirige de B a A; entonces B es el origen y A es el extremo y el segmento se designa como BA.

El *sentido de un segmento dirigido* se indica siempre escribiendo primero el origen.

En Geometría elemental las longitudes de los segmentos dirigidos AB y BA son las mismas.

En Geometría analítica se hace una distinción entre los signos de estas longitudes. Si $\overline{AB}$ es positiva entonces $\overline{BA}$ es negativa y se escribe $\overline{AB} = -\overline{BA}$

Considere 3 puntos diferentes A, B y C sobre una línea recta cuya dirección positiva es de izquierda a derecha

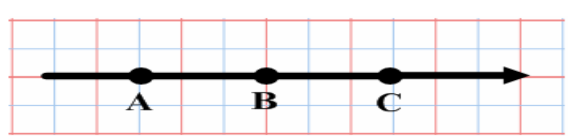


Figura 1.7

donde:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Sistema coordenado lineal

Existe correspondencia entre un punto geométrico y un número real.

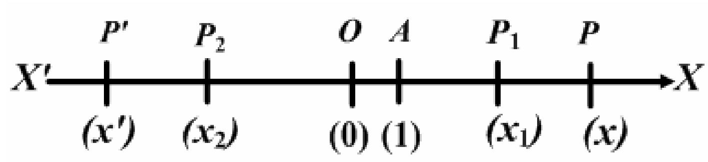


Figura 1.8

En la figura 1.8, la recta $X'X$ cuya dirección positiva es de izquierda a derecha, O es un punto fijo sobre esta línea.

A es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la derecha de O, $\overline{OA}$ puede considerarse como unidad de longitud.

P es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la derecha de O. Sea $\overline{OP}$ el segmento dirigido de longitud positiva que contiene x veces la unidad de longitud adoptada. P corresponde al número positivo x.

P' es un punto cualquiera de $X'X$ situado a la izquierda de O. Sea $\overline{OP'}$ el segmento dirigido de longitud negativa que contiene x veces la unidad de longitud adoptada. P' corresponde al número negativo x'.

Entonces, a cada número real x corresponde uno y solamente un punto P sobre la recta $X'X$ y recíprocamente cada punto P situado sobre la recta $X'X$ representa uno y sólo un número real x cuyo valor numérico es igual a la longitud del segmento OP y cuyo signo es positivo o negativo según P este a la derecha o a la izquierda de O.

Por lo anterior se puede decir, que un *sistema coordenado lineal* establece una correspondencia biunívoca entre los puntos que están en una misma recta y los números reales.

En la figura 1.8, la recta $X'X$ se llama *eje* y el punto O, *origen* del sistema coordenado lineal.

El número real x correspondiente al punto P se llama *coordenada del punto P* y se representa por (x).

El punto P con su coordenada (x) es la representación geométrica o gráfica del número real x y la coordenada (x) es la representación analítica del punto P. Ordinariamente se escribirá el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: P=(x).

En Geometría analítica, se dice que los puntos están dados cuando se conocen sus coordenadas.

Se requiere determinar la longitud del segmento que une dos puntos dados cualesquiera tales como $P_1=(x_1)$ y $P_2=(x_2)$ donde x_1 y x_2 son números conocidos

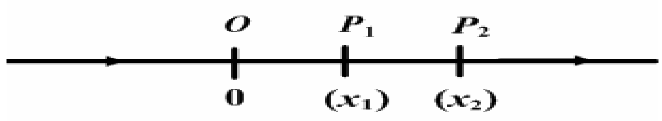


Figura 1.9

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}$$

pero

$$\overline{OP_1} = x_1 \quad \text{y} \quad \overline{OP_2} = x_2$$

luego

$$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2$$

de donde

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

de acuerdo con lo anterior

$$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2.$$

En cualquier caso, la *longitud del segmento dirigido* que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.

La *distancia entre dos puntos* se define como el valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si d es la distancia, se puede escribir

$$d = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad d = \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2|.$$

Ejemplo 1

Hallar la distancia entre los puntos $P_1 = (4)$ y $P_2 = (-5)$.

$$\left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_2 - x_1| = |-5 - 4| = |-9| = 9 \qquad \text{y} \qquad \left|\overline{P_2P_1}\right| = |x_1 - x_2| = |4 - (-5)| = |9| = 9$$

entonces, para cualquiera de los dos segmentos dirigidos la distancia esta dada por

$$d = |-9| = |9| = 9.$$

Sistema coordenado rectangular

En un sistema coordenado lineal sus puntos están restringidos a estar sobre una recta, el eje.

En un sistema coordenado un punto puede moverse en todas direcciones manteniéndose siempre en un plano, éste se llama *sistema coordenado-bidimensional* o *plano*, y es el sistema usado en la Geometría analítica plana.

En este trabajo se estudiará el *sistema coordenado rectangular* uno de los sistemas coordenados planos, indicado en la figura 1.10.

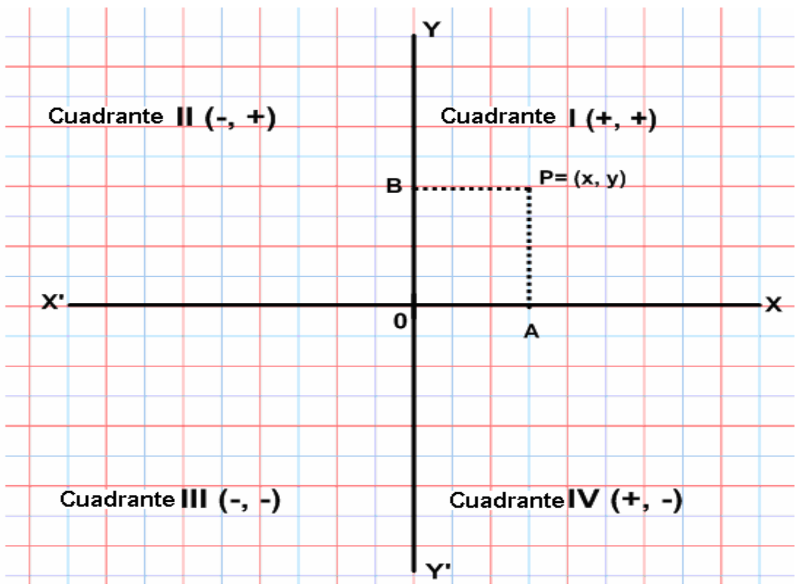


Figura 1.10

El *sistema coordenado rectangular* consta de:

- dos rectas dirigidas $X'X$ y $Y'Y$ llamadas *ejes de coordenadas,* que son perpendiculares entre si
- la recta $X'X$ se llama *eje* X
- la recta $Y'Y$ se llama *eje* Y
- el punto de intersección O se llama *origen*
- los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, numerados tal como se indica en la figura 1.10.

La dirección positiva del eje X es hacia la derecha y la del eje Y es hacia arriba.

Abscisas y ordenadas

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema coordenado rectangular. Se traza PB perpendicular al eje Y y PA perpendicular al eje X. La longitud del segmento OA se representa por x y se llama *abscisa* de P; a la longitud del segmento OB se representa por y y se llama *ordenada* de P, ver figura 1.10.

Los dos números reales, x y y, se llaman *coordenadas* de P y se representan por (x, y).

Las abscisas medidas sobre el eje X a la derecha de O son positivas y a la izquierda son negativas. Las ordenadas medidas sobre el eje Y hacia arriba de O son positivas y hacia abajo son negativas.

Los signos de las coordenadas se encuentran indicados en la figura 1.10.

Es posible observar que a cada punto P del plano coordenado le corresponde uno y sólo un par de coordenadas (x, y) y recíprocamente, un par de coordenadas (x, y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado.

Pares ordenados

No es lo mismo (x, y) que (y, x) cuando $x \neq y$, de aquí la importancia de escribir las coordenadas en su propio orden, escribiendo la abscisa en primer lugar y la ordenada en segundo lugar. Por esta razón un par de coordenadas en el plano se llama *par ordenado* de números reales.

Se puede decir en este momento que el sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números.

Representación gráfica de puntos

La localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado de un punto*.

Ejemplo 1

Trazar el punto $P = (-5, -2)$.

Para ello partiendo del origen del plano coordenado se avanza cinco unidades a la izquierda, de ahí avanzar dos unidades hacia abajo, obteniendo así el punto $P = (-5, -2)$.

La figura 1.11 muestra la ubicación del punto mencionado y otros puntos más para ejemplificar.

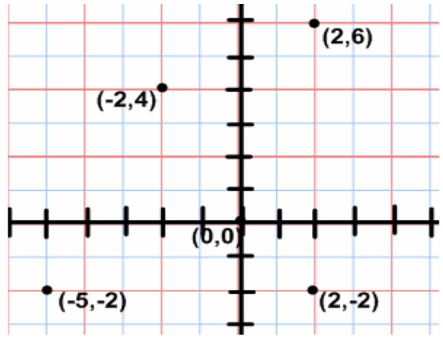


Figura 1.11

En Geometría analítica la solución de un problema no se ha efectuado si no se ha empleado el sistema coordenado plano.

Ejemplo 2

Un triángulo equilátero $OABO$ cuyo lado tiene una longitud a está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

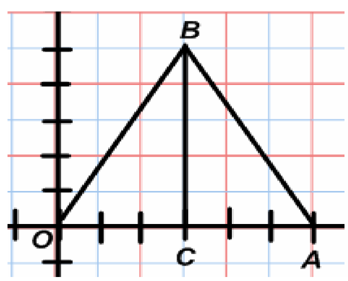


Figura 1.12

Con respecto a los ejes coordenados, el triángulo está en la posición indicada en la figura 1.12. Como $\overline{OA} = a$, la abscisa del punto A es a, también por estar A sobre el eje X, su ordenada es 0, por tanto las coordenadas del vértice A son $(a,0)$. Si se traza el segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{OA}$, se sabe, por geometría elemental, que C es el punto medio de $\overline{OA}$, por tanto la abscisa de C es $\frac{a}{2}$ como $\overline{BC}$ es paralela al eje Y, la abscisa del punto B es también $\frac{a}{2}$. La ordenada de B se obtiene ahora por el teorema de Pitágoras; dicha ordenada es

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Las coordenadas del vértice B son $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

El área del triángulo $OABO$ es $\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Ejercicio 3

1. Localizar los siguientes puntos en un sistema coordenado:

$A = \left(-\frac{23}{4}, 4\right)$ $B = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$ $C = \left(\sqrt{5}, \pi\right)$ $D = \left(-\frac{15}{4}, -\pi\right)$ $E = \left(0, -\frac{9}{2}\right)$

2. ¿Cuál es el valor de la ordenada en cualquier punto del eje X?

3. Probar gráficamente:

a) Que los puntos $M = (5,6)$, $N = (2,5)$ y $O = (-3,3)$ están sobre la misma recta.

b) Que los puntos $A = (4,4)$, $B = (-2,6)$, $C = (-4,1)$ y $D = (2,-1)$ son vértices de un paralelogramo.

1.2 Líneas rectas

1.2.1 Fórmula de la distancia entre dos puntos

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos dados cualesquiera. Se determinará la distancia d entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P_1P_2}|$.

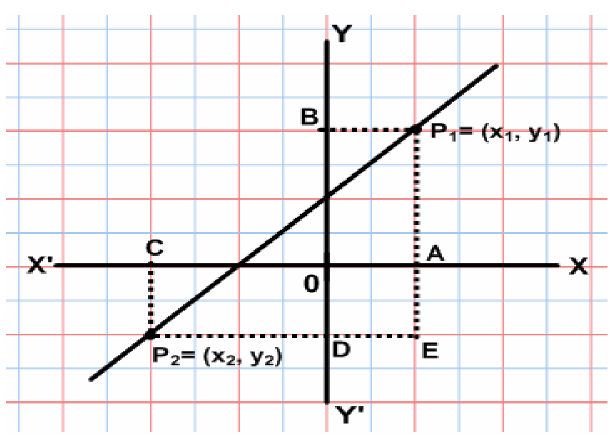


Figura 1.13

Se trazan perpendiculares P_1A y P_2D a ambos ejes coordenados como lo indica la figura 1.13 y sea E su punto de intersección. Considere el triángulo rectángulo $P_2EP_1P_2$.

Por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = \left|\overline{P_2P_1}\right|^2 = \left|\overline{P_2E}\right|^2 + \left|\overline{EP_1}\right|^2$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son:

$$A=(x_1, 0), \quad B=(0, y_1), \quad C=(x_2,0) \quad \text{y} \quad D=(0, y_2),$$

luego

$$d^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$$

de donde

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

lo cual se enuncia como sigue: la distancia d entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ esta dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ . \tag{1}$$

Ejemplo 1

Hallar la distancia entre los puntos $A = (3,5)$ y $B = (-3,-1)$.

Si A es P_1 entonces $x_1 = 3$ y $y_1 = 5$.
Si B es P_2 entonces $x_2 = -3$ y $y_2 = -1$.

De la ecuación (1)

$$\left|\overline{AB}\right| = d = \sqrt{(-3-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 8.4$$

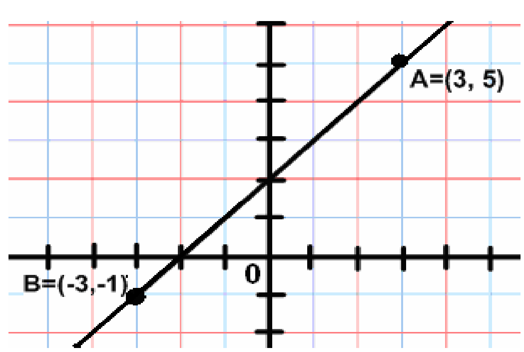


Figura 1.14

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos $A=(5,3)$, $B=(2,0)$ y $C=(-2,-4)$ son colineales, es decir, están sobre una misma recta y se cumple que $|\overline{AB}|+|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$.

De la ecuación (1)

$$|\overline{AB}| = d_1 = \sqrt{(2-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 4.24,$$

$$|\overline{BC}| = d_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5.65,$$

$$|\overline{AC}| = d_3 = \sqrt{(-2-5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 9.89,$$

$$|\overline{AB}|+|\overline{BC}| = |\overline{AC}|.$$

Sustituyendo

$$4.24 + 5.65 = 9.89,$$
$$9.89 = 9.89,$$

entonces los puntos son colineales.

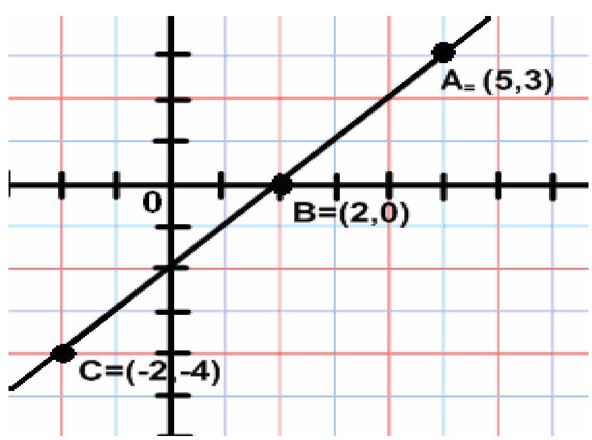


Figura 1.15

Ejemplo 3

Los puntos $P=(-1,3)$, $Q=(6,-2)$ y $R=(3,6)$ son vértices de un triángulo. Determinar si es equilátero, isósceles o escaleno.

De la ecuación (1)

$$|\overline{PQ}| = d_1 = \sqrt{(6-(-1))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-5)^2} = 8.6$$

$$|\overline{QR}| = d_2 = \sqrt{(3-6)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (8)^2} = 8.54$$

$$|\overline{PR}| = d_3 = \sqrt{(3-(-1))^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\overline{PQ}| = 8.6, \quad |\overline{QR}| = 8.54 \quad \text{y} \quad |\overline{PR}| = 5.$$

Por tener los tres lados desiguales $|\overline{PQ}|$, $|\overline{QR}|$ y $|\overline{PR}|$ entonces es un triángulo escaleno.

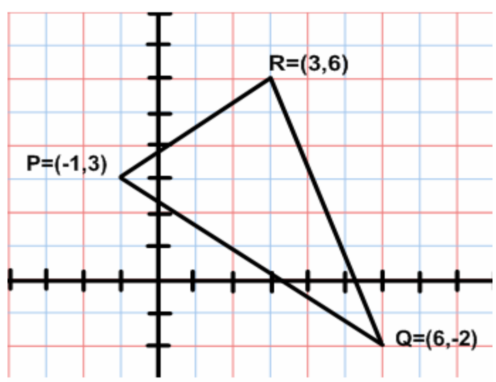


Figura 1.16

Ejercicio 4

1. Hallar la distancia entre los puntos
a) $A=(5, 7)$ y $B=(2, 3)$ b) $D=(\sqrt{5}, -2)$ y $E=(4\sqrt{5}, 6)$ c) $S=(m, m)$ y $T=(-n, m)$

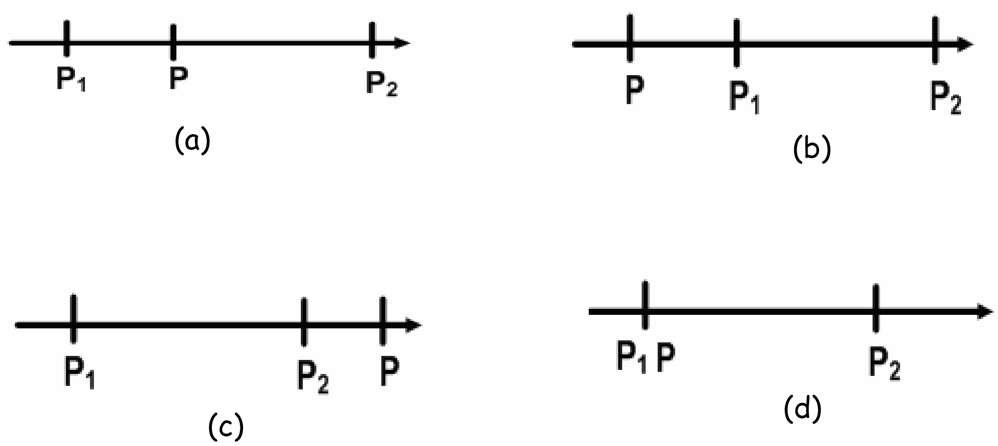
2. Demostrar que los puntos
   a) $A=(-1, 7)$, $B=(1, 4)$ y $C=(4, -1)$ son colineales
   b) $H=(-4, -1)$, $I=(-1, -2)$ y $J=(2, -3)$ son colineales

3. Determinar el perímetro de los triángulos cuyos vértices son
   a) $A=(1, 5)$, $B=(-2, 3)$, $C=(4, -3)$.
   b) $E=(-3, 2)$, $F=(1, -1)$, $G=(9, 7)$.
   c) $K=(3, -5)$, $L=(-5, -6)$, $M=(10, 2)$.

División de un segmento en una razón dada.

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son los extremos del segmento $P_1\,P_2$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad \text{donde} \quad r \neq -1.$$



Figuras 1.17

La razón de los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$, es decir, $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ se llama *razón de división.*

En cualquiera de las cuatro situaciones de las figuras 1.17 a, b, c y d se tiene

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r, \quad \text{donde} \quad r \text{ es la razón de división.}$$

Se presentan cuatro casos:

1) Si P está entre P_1 y P_2, $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$, donde r es positivo porque $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ tienen el mismo sentido.

2) Si P está antes que P_1, $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$, donde r es negativo, pero además $r > -1$ y

$r < 0$. Porque $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ tienen sentidos opuestos, la razón es negativa y como puede observarse en la figura 1.17, su valor estará comprendido entre 0 y -1.

3) Si P está después de P_2, $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$, donde r es negativo. Porque $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ tienen sentidos opuestos, la razón es negativa y como puede observarse en la figura 1.17, el valor de la razón será menor que -1

4) Si P coincide con P_1, $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$, donde $r = 0$.

Por los puntos P_1, P y P_2, se trazan perpendiculares a los ejes coordenados, tal como se indica en la figura 1.18

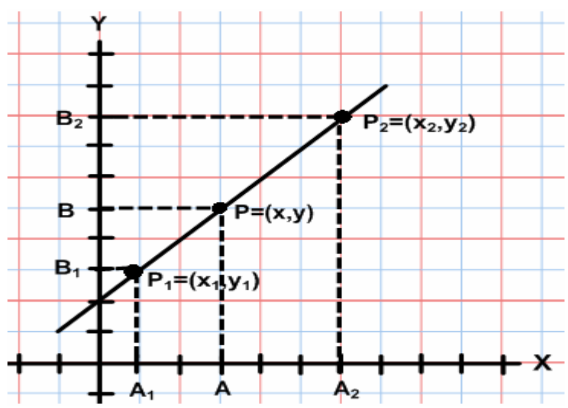


Figura 1.18

Los puntos A_1, A, A_2 y P_1, P, P_2 intersectan segmentos proporcionales sobre las líneas $P_1 P_2$, $A_1 A_2$, y $B_1 B_2$ por tanto se puede escribir

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje X son $A_1 = (x_1, 0)$, $A = (x, 0)$ y $A_2 = (x_2, 0)$ por tanto se tiene que

$$\overline{A_1A} = x - x_1 \qquad \text{y} \qquad \overline{AA_2} = x_2 - x .$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje Y son $B_1 = (y_1, 0)$, $B = (y, 0)$ y $B_2(y_2, 0)$ por tanto se tiene que

$$\overline{B_1B} = y - y_1 \qquad \text{y} \qquad \overline{BB_2} = y_2 - y\,.$$

Sustituyendo esos valores en

$$r = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}}$$

se tiene

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad\qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$rx_2 - rx = x - x_1 \qquad\qquad ry_2 - ry = y - y_1$$

$$rx_2 + x_1 = x + rx \qquad\qquad ry_2 + y_1 = y + ry$$

$$rx_2 + x_1 = x(1 + r) \qquad\qquad ry_2 + y_1 = y(1 + r)$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad (2) \qquad\qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\,. \quad (3)$$

Las expresiones (2) y (3) permiten calcular *las coordenadas* x y y *de un punto* P *que divide a un segmento en la razón dada* $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ *donde:* $r \neq -1$.

Ejemplo 1

Hallar las coordenadas del punto M que divide en la razón $\dfrac{2}{3}$ al segmento que une los puntos $A = (-7, 3)$ con $B = (3, 5)$.

Como la razón es positiva el punto se encuentra entre A y B, de la ecuación (2) $$x = \frac{(-7)+\left(\frac{2}{3}(3)\right)}{\left(1+\frac{2}{3}\right)} = -3,$$

de la ecuación (3) $$y = \frac{(3)+\left(\frac{2}{3}(5)\right)}{\left(1+\frac{2}{3}\right)} = 3.8,$$

el punto que divide a $A=(-7,3)$ y $B=(3,5)$ en una razón de $\frac{2}{3}$ es $M=(-3,3.8)$.

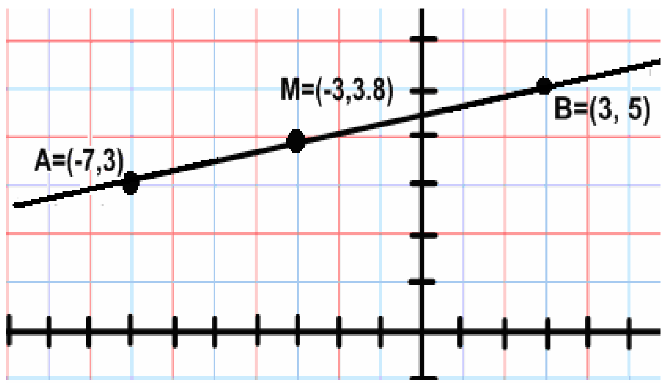


Figura 1.19

Ejemplo 2

Determinar las coordenadas del punto P de la recta que une $A=(-3,-5)$ con $B=(7,-1)$ de manera que $\overline{AP}$ = $3\overline{PB}$

Si $\overline{AP}$ = $3\overline{PB}$ entonces $r=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ y $r=3$,

de la ecuación (2) $$x = \frac{(-3)+(3(7))}{1+3} = \frac{18}{4} = 4.5,$$

y de la ecuación (3) $$y = \frac{(-5)+(3(-1))}{1+3} = -\frac{8}{4} = -2.$$

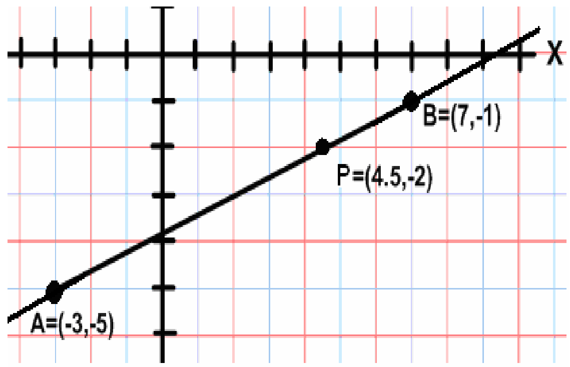


Figura 1.20

El punto que divide a $A=(-3,-5)$ y $B=(7,-1)$ en una razón de 3 es $P=(4.5,-2)$ y su gráfica se muestra en la figura 1.20.

Ejercicio 5

1. Hallar las coordenadas del punto de división del segmento AB en cada uno de los siguientes casos:
   a) $A=(6,-4)$, $B=(-3,2)$ $r=½$
   b) $A=(-8,-5)$, $B=(4,3)$ $r=3$
   c) $A=(3,-2)$, $B=(-6,7)$ $r=4/5$
   d) $A=(5,-4)$, $B=(2,-1)$ $r=-2$
   e) $A=(2,4)$, $B=(4,5)$ $r=-3/2$.

1.2.2 Fórmula del punto medio

La obtención de las coordenadas del punto medio de un segmento, se puede considerar como un caso particular de la división de un segmento por un punto, cuando la razón de división es igual a 1.

De esta manera dado un segmento dirigido P_1P_2 donde $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ siendo $P=(x,y)$ el punto medio,

de la fórmula (2) con $r=1$ se tiene:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

y

de la fórmula (3) con $r=1$ se tiene:

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$x = \frac{x_1 + 1x_2}{1+1} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + 1y_2}{1+1}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (4) \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5)$$

Las expresiones (4) y (5) dan *las coordenadas* x y y *del punto medio del segmento dado.*

En general se puede decir que:
- la *abscisa del punto medio* de un segmento es igual al promedio de las abscisas de los extremos y
- la *ordenada del punto medio* de un segmento es igual al promedio de las ordenadas de los extremos.

Ejemplo 1

Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $A = (-5,3)$ y $B = (5,-7)$.

Por la ecuación (4) $x = \dfrac{-5+5}{2} = 0$.

Por la ecuación (5) $y = \dfrac{3+(-7)}{2} = -2$.

El punto medio del segmento que une los puntos $A = (-5,3)$ y $B = (5,-7)$ es $P = (0,-2)$.

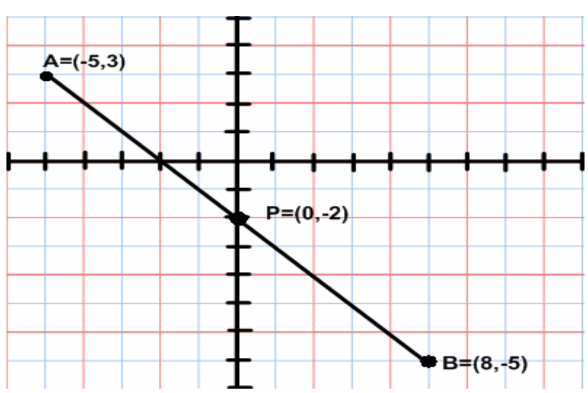


Figura 1.21

Ejercicio 6

1. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a cada par de puntos:
   a) $A = (1, 3)$ y $B = (2, 5)$
   b) $G = (6, 3)$ y $H = (8, 9)$
   c) $M = (-2,4)$ y $N = (6,-8)$
   d) $C = (2,-5)$ y $D = (-4,1)$
   e) $E = (10,-9)$ y $F = (-8,-1)$

Áreas positivas y negativas

Se sabe que si un móvil recorre el perímetro o contorno de una figura, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el área de dicha figura es *positiva*; y si lo hace siguiendo el sentido del movimiento de las manecillas, ésta es *negativa*. Por ejemplo en la figura 1.22 se tiene:

Área $ABCDA$, positiva.

Área $ADCBA$, negativa.

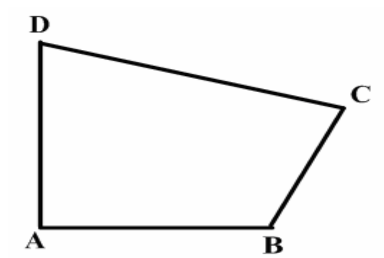


Figura 1.22

Área de un triángulo

Es posible obtener el área de un triángulo conociendo las coordenadas de sus vértices.

Ejemplo 1

Obtener el área de un triángulo cuyos vértices son $O = (0,0)$, $A = (6,4)$ y $B = (8,9)$.

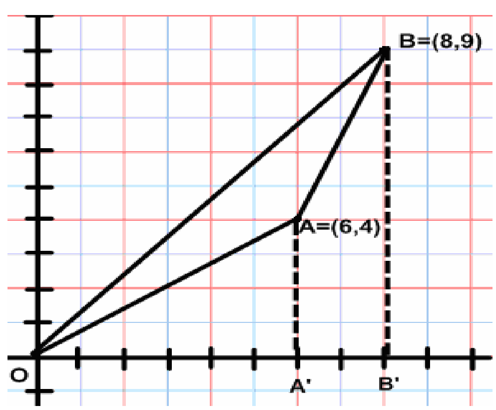


Figura 1.23

Por los puntos A y B, se trazan perpendiculares sobre el eje X y se obtienen A' y B', respectivamente, (véase la figura 1.23)

Área del triángulo $OABO$ = Área $OB'BO$ - Área $OA'AO$ - Área trapecio $A'B'BAA'$

Área $OB'BO$ = $\dfrac{(\overline{OB'})(\overline{B'B})}{2} = \dfrac{(8)(9)}{2} = 36$

Área $OA'AO$ = $\dfrac{(\overline{OA'})(\overline{A'A})}{2} = \dfrac{(6)(4)}{2} = 12$

Área del trapecio $A'B'BAA'$ = $\left(\dfrac{\overline{A'A}+\overline{B'B}}{2}\right)\overline{A'B'} = \left(\dfrac{4+9}{2}\right)(2) = 13$

Área del triángulo $OABO$ = $36 - 12 - 13 = 11$ unidades cuadradas.

Ejemplo 2

Obtener el área del triángulo cuyos vértices son A =(3,-6), B =(6, 2) y C =(-4,5).

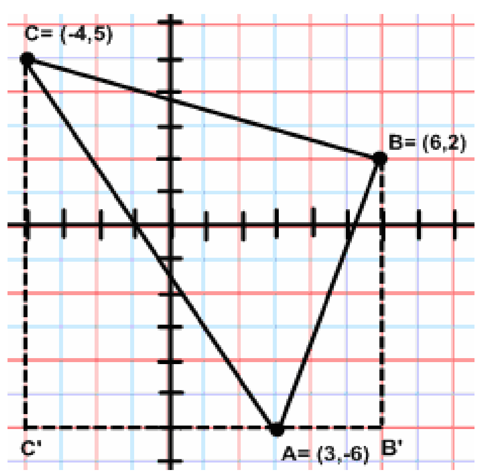


Figura 1.24

Se pasa por A el segmento $C'B'$ paralelo al eje X.

Se construyen $C'C$ y $B'B$ paralelas al eje Y.

Área $ABCA$ = Área trapecio $C'B'BCC'$ – Área triángulo $C'ACC'$ – Área triángulo $AB'BA$

Área trapecio $C'B'BCC'$ = $\left(\frac{\overline{C'C}+\overline{B'B}}{2}\right)\overline{C'B'}$ = $\left(\frac{11+8}{2}\right)(10) = 95$

Área triángulo $C'ACC'$ = $\frac{(\overline{C'A})(\overline{C'C})}{2}$ = $\left(\frac{(7)(11)}{2}\right)$ = 38.5

Área triángulo $AB'BA$ = $\frac{(\overline{AB'})(\overline{B'B})}{2}$ = $\left(\frac{(3)(8)}{2}\right) = 12$

Área triángulo $ABCA$ = $95 - 38.5 - 12 = 44.5$ unidades cuadradas.

Ejercicio 7

1. Obtener el área de los triángulos cuyos vértices son

a) $A = (8,2)$, $B = (2,7)$ y $C = (3, 3)$

b) $A = (-5,2)$, $B = (-2, 3)$ y $C = (-4, 8)$

c) $A = (-3,-9)$, $B = (-1,-1)$ y $C =(-7, -5)$

d) $A = (5,0)$, $B = (0, -4)$ y $C = (8,-3)$

e) $A = (2,3)$, $B = (8, 0)$ y $C = (5,6)$

Caso General

Obtener el área del triángulo cuyos vértices son $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$.

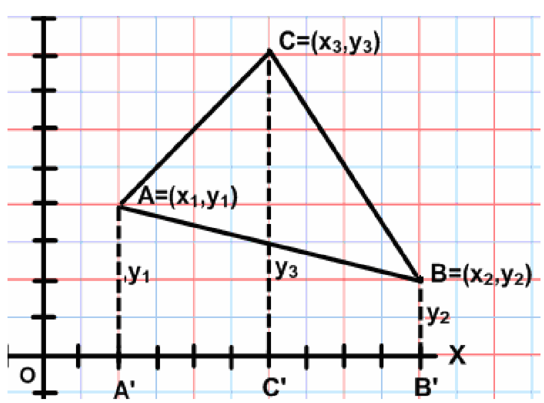


Figura 1.25

Trazar perpendiculares sobre el eje X de A a A', de B a B' y de C a C'.

Área triángulo $ABCA$ = Área trapecio $AA'C'CA$ + Área trapecio $CC'B'BC$
- Área trapecio $AA'B'BA$.

Área trapecio $AA'C'CA$ = $\left(\dfrac{\overline{AA'}+\overline{CC'}}{2}\right)\overline{A'C'}$ = $\dfrac{1}{2}(\overline{AA'})(\overline{A'C'})$ + $\dfrac{1}{2}(\overline{CC'})(\overline{A'C'})$

= $\dfrac{1}{2}\, x_3\, y_1 - \dfrac{1}{2}\, x_1\, y_1 + \dfrac{1}{2}\, x_3\, y_3 - \dfrac{1}{2}\, x_1\, y_3$

Área trapecio $CC'B'BC$ = $\left(\dfrac{\overline{CC'}+\overline{BB'}}{2}\right)\overline{C'B'}$ = $\dfrac{1}{2}(\overline{CC'})(\overline{C'B'})$ + $\dfrac{1}{2}(\overline{BB'})(\overline{C'B'})$

= $\dfrac{1}{2}\, x_2 y_3 - \dfrac{1}{2}\, x_3 y_3 + \dfrac{1}{2}\, x_2 y_2 - \dfrac{1}{2}\, x_3 y_2$

Área trapecio $AA'B'BA$ = $\left(\dfrac{\overline{AA'}+\overline{BB'}}{2}\right)\overline{A'B'}$ = $\dfrac{1}{2}(\overline{AA'})(\overline{A'B'})$ + $\dfrac{1}{2}(\overline{BB'})(\overline{A'B'})$

= $\dfrac{1}{2}\, x_2 y_1 - \dfrac{1}{2}\, x_1 y_1 + \dfrac{1}{2}\, x_2 y_2 - \dfrac{1}{2}\, x_1 y_2$

Simplificando se tiene

Área triángulo $ABCA$ = $\dfrac{1}{2}(\, x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3\,)$

Lo anterior puede expresarse en forma de determinante, escribiendo:

Área triángulo $ABCA$ = $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Ejemplo 1

Encontrar el área del triángulo de vértices $A = (2,5)$, $B = (-5,6)$ y $C = (9,-4)$. La grafica correspondiente es la figura 1.26.

Área triángulo $ABCA$ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -5 & 6 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(20 + 45 + 12 + 25 - 54 + 8)$

$= 28$ unidades cuadradas.

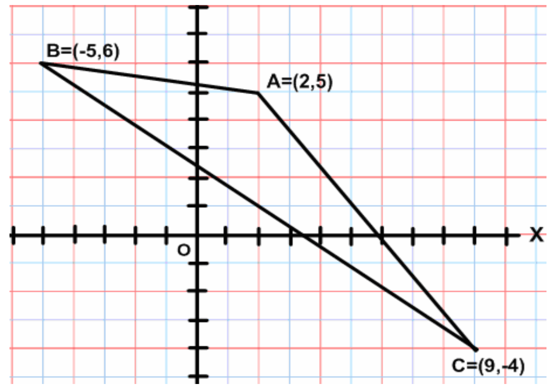


Figura 1.26

Área de un polígono

Obtener el área del polígono $ABCDEA$ en el que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$ y $E = (x_5, y_5)$.

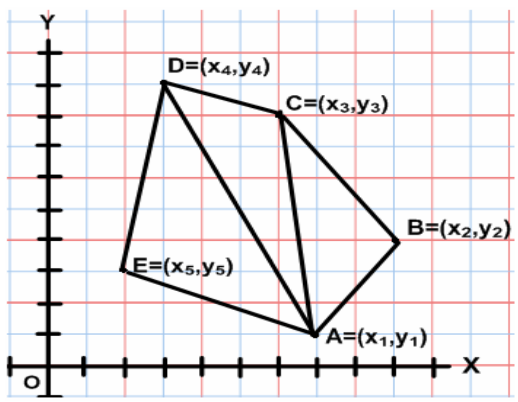


Figura 1.27

Considerando que en todo polígono se forman tantos triángulos como lados tiene, menos dos, resulta

Área Polígono $ABCDEA$ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}$. (6)

Haciendo operaciones y reduciendo términos semejantes, se tiene

Área Polígono $ABCDEA$ =

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_5y_1 - x_1y_5). \quad (7)$$

Puede observarse en la expresión (7) que la forma en que se relacionan los productos es, abscisa del primer vértice por ordenada del segundo vértice menos abscisa del segundo vértice por ordenada del primer vértice mas abscisa del segundo vértice por ordenada del tercer vértice menos abscisa del tercer vértice por ordenada del segundo vértice, etc., y así sucesivamente, hasta llegar a menos abscisa del primer vértice por ordenada del último vértice.

Ejemplo 1

Hallar el área del cuadrilátero cuyos vértices son $A = (3, -4)$, $B = (4, 4)$, $C = (-3, 9)$ y $D = (-7,1)$.

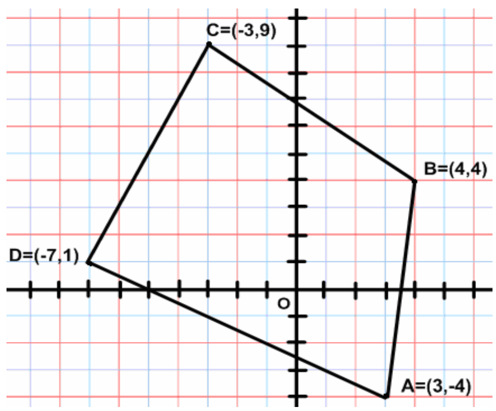


Figura 1.28

Área Polígono $ABCDA$ =

$$\frac{1}{2}[(3)(4)-(-4)(4)+(4)(9)-(4)(-3)+(-3)(1)-(-7)(9)+(-7)(-4)-(3)(1)]$$

Área Polígono $ABCDA$ = $\frac{1}{2}(12 + 16 + 36 + 12 - 3 + 63 + 28 - 3) = 80.5$ unidades cuadradas

Ejercicio 8

1. Encontrar el área de los polígonos cuyos vértices en cada caso son:

a) $A = (6,-6)$, $B = (-3,-4)$ y $C = (-1, 7)$
b) $A = (3,3)$, $B = (6,8)$, $C = (-4, 8)$ y $D = (-7, 3)$
c) $A = (0,-5)$, $B = (7,2)$, $C = (2, 7)$ y $D = (-5, 0)$
d) $A = (2, -5)$, $B = (10, -3)$, $C = (6,4)$, $D = (1,2)$ y $E = (2,0)$
e) $A = (6, 7)$, $B = (9, -1)$, $C = (-4, 0)$, $D = (-2, 7)$ y $E = (0, -5)$

1.2.3 Pendiente de una recta

Dos rectas al cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el punto de intersección (figura 1.29). Por tanto la expresión "el ángulo comprendido entre dos rectas" es ambigua, ya que tal ángulo puede ser el ángulo α o bien su suplemento el ángulo β. Para hacer una distinción entre estos dos ángulos, se considera que las rectas están dirigidas y luego se establece lo siguiente: se llama *ángulo comprendido entre dos rectas dirigidas* al formado por los dos lados que se alejan del punto de intersección.

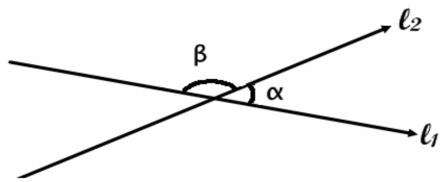


Figura 1.29

Así por ejemplo en la figura 1.29 el ángulo formado por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 es el ángulo α.

Si la dirección de ℓ_1 se invierte entonces el ángulo formado por las rectas ℓ_2 y ℓ_1 sería el ángulo β.

Si ℓ_1 y ℓ_2 son líneas paralelas y tienen la misma dirección, el ángulo comprendido entre ellas es de $0°$ y si tienen dirección opuesta el ángulo comprendido entre ellas es de $180°$.

Se llama *ángulo de inclinación de una recta*, al formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba.

Así, de la figura 1.30 el ángulo de inclinación de la recta ℓ_1 es α y de la recta ℓ_2 es α'.

El intervalo de variación del ángulo de inclinación de una recta esta comprendido en el rango: $0° \leq \alpha \leq 180°$.

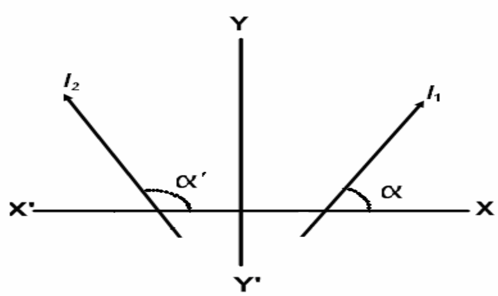


Figura 1.30

Se llama *pendiente o coeficiente angular de una recta* a la tangente de su ángulo de inclinación, es decir, la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que una recta forma con la dirección positiva del eje X, y se representa con la letra m, por tanto se puede escribir:

$$m = \tan\alpha\,.$$

Si la recta	**La pendiente es**	**El ángulo es**
- Es paralela al eje X o coincide con éste	CERO	$\alpha = 0°$
- Es paralela al eje Y o coincide con él	ES INFINITA	$\alpha = 90°$
- Esta inclinada hacia la derecha	POSITIVA	$0° < \alpha < 90°$
- Esta inclinada hacia la izquierda	NEGATIVA	$90° < \alpha < 180°$

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta se expresa de manera analítica como

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2\,. \tag{8}$$

La expresión (8) se conoce como la ecuación de la *pendiente de una recta*.

La pendiente de una recta puede expresarse en términos de las coordenadas de dos puntos cualesquiera de ella. Por ejemplo en la figura 1.31

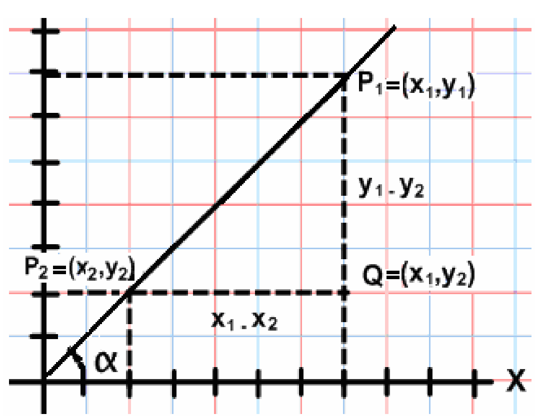


Figura 1.31

Considérese la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, trazando por P_1 una paralela al eje Y y por P_2 una paralela al eje X, se observa que dichas rectas se cortan en Q.

como $\overline{P_2Q} = x_1 - x_2$

y $\overline{QP_1} = y_1 - y_2$

luego $\tan\alpha = m = \dfrac{\overline{QP_1}}{\overline{P_2Q}} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Ejemplo 1

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A = (-5, 3)$ y $B = (6, 7)$.

De la ecuación (8)

$$m = \frac{3-7}{-5-6} = \frac{-4}{-11} = .36$$

α = ang tan (.36)

α = 19º.7'

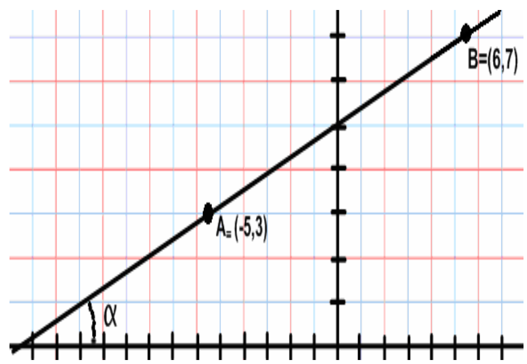


Figura 1.32

Ejemplo 2

Obtener la inclinación de la recta que pasa por los puntos $A = (4, -1)$ y $B = (-2, 4)$

De la ecuación (8)

$$m = \frac{-1-4}{4-(-2)} = \frac{-5}{6} = -.83$$

α = ang tan (- .83)

α = 140º

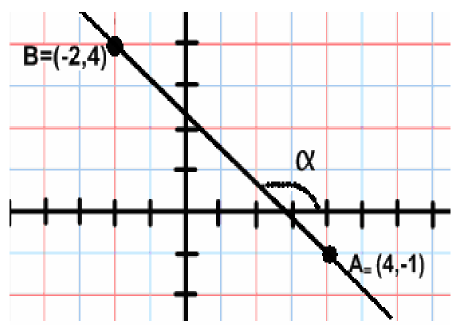


Figura 1.33

Ejercicio 9

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos

   a) $A = (5, 3)$ y $B = (2, 7)$ b) $A = (-6, 9)$ y $B = (12, 4)$

   c) $A = (-5, 2)$ y $B = (4, 3)$ d) $A = (-4, -3)$ y $B = (8, 7)$

2. Obtener la inclinación de la recta que pasa por los puntos

   a) $A = (-5, -2)$ y $B = (9, 6)$ b) $A = (-7, -5)$ y $B = (3, 2)$

   c) $A = (-4, 6)$ y $B = (7, 9)$ d) $A = (-7, 9)$ y $B = (8, 6)$

1.2.4 Pendientes de rectas perpendiculares

Pendientes de rectas paralelas

Las rectas paralelas r_1 y r_2 tienen inclinaciones iguales y por lo mismo pendientes iguales. Recíprocamente, si dos rectas tienen pendientes iguales entonces *son paralelas*. De esta manera, si las pendientes de dos rectas son respectivamente m_1 y m_2, éstas son paralelas si se cumple la condición:

$$m_1 = m_2 \tag{9}$$

La expresión (9) se conoce como *condición de paralelismo de dos rectas.*

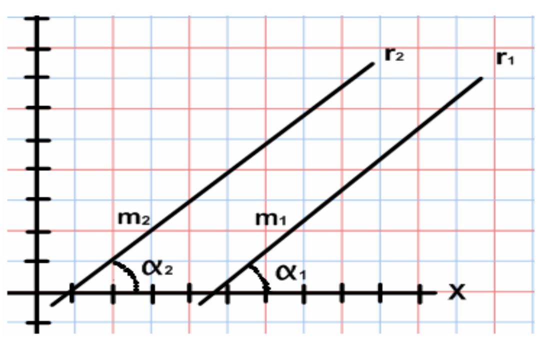


Figura 1.34

Pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas r_1 y r_2 son *perpendiculares* y se escribe $r_1 \perp r_2$ si la inclinación de una es 90^o más que la de la otra.

Siendo α_1 y α_2 las respectivas inclinaciones de dos rectas perpendiculares r_1 y r_2 se tiene

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o,$$

porque un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los interiores no adyacentes.

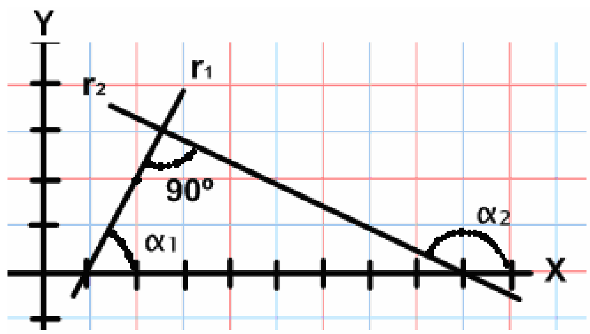


Figura 1.35

Utilizando algunas fórmulas trigonométricas conocidas, resulta

$$\tan\ \alpha_2 = \tan\ (\alpha_1 + 90^o)$$

$$\tan\ \alpha_2 = -\cot\ \alpha_1$$

$$\tan\ \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

sabiendo que $\tan\ \alpha_1 = m_1$ y $\tan\ \alpha_2 = m_2$ sustituyendo las pendientes m_2 y m_1 se tiene

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \text{ó} \qquad m_1\, m_2 = -1 \qquad (10)$$

La expresión (10) se conoce como *condición de perpendicularidad de dos rectas.*

Luego, *dos rectas son perpendiculares* si tienen pendientes reciprocas y de signo contrario, es decir, si el producto de sus pendientes es -1.

Ejemplo 1

Probar que la recta que pasa por los puntos A = (-2, -6) y B = (7, -3) es paralela a la recta que pasa por C = (-3, -5) y D = (6, -2).

Por la ecuación (8)

$$m_1 = \frac{-6+3}{-2-7} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3},$$

$$m_2 = \frac{-5+2}{-3-6} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3},$$

como

$$m_1 = m_2,$$

se tiene que las rectas son paralelas.

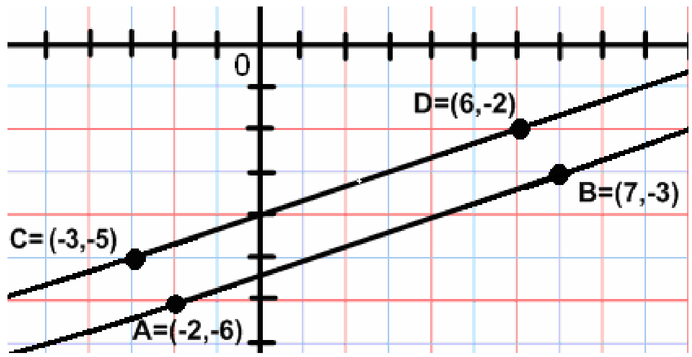


Figura 1.36

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos A = (6, -4) B = (1, 6) y C = (-2, 2) son vértices de un triángulo rectángulo.

Denotando por m_1, m_2 y m_3 las pendientes respectivas de AB, BC y CA se tiene

de la ecuación (8)

$$m_1 = \frac{-4-6}{6-1} = \frac{-10}{5} = -2,$$

$$m_2 = \frac{6-2}{1-(-2)} = \frac{4}{3},$$

$$m_3 = \frac{2-(-4)}{-2-6} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4},$$

como $\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -1,$

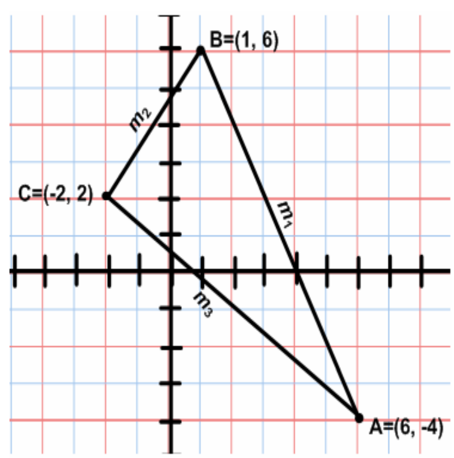


Figura 1.37

entonces $BC \perp CA$ por consiguiente el triángulo $ABCA$ es un triángulo rectángulo en C.

Ejercicio 10

1. Demostrar que los siguientes cuadriláteros son paralelogramos
Los cuadriláteros son paralelogramos si las pendientes $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{AD} = m_{BC}$
a) $A = (6, 4)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-4, -3)$ y $D = (5, -1)$
b) $A = (4, 4)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-5, -5)$ y $D = (1, -3)$
c) $A = (5, 2)$, $B = (-4, 4)$, $C = (-1, -2)$ y $D = (8, -4)$.

2. Demostrar que son triángulos rectángulos los que tienen como vértices

a) $A = (-5,-1)$ $B = (-1,4)$ y $C = (9,-4)$
b) $A = (-5,-1)$ $B = (4,-4)$ y $C = (6,2)$
c) $A = (-3,-5)$ $B = (-2,2)$ y $C = (5,1)$.

Ángulo que forman dos rectas

El *ángulo que forman dos rectas* que se cortan r_1 y r_2 es aquél que se mide por la amplitud de la rotación de r_1 (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) en torno del punto de intersección hasta colocarse sobre r_2. En las figuras 1.38 y 1.39 el ángulo se representa por α.

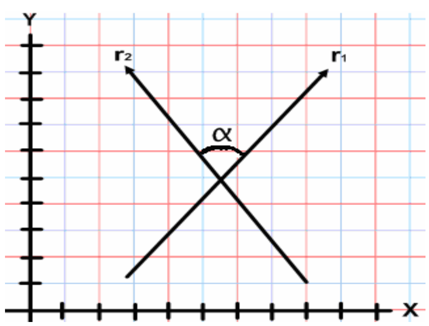


Figura 1.38

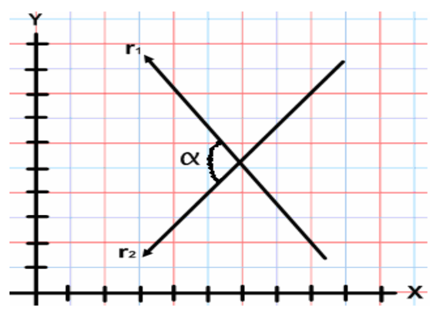


Figura 1.39

De acuerdo con la figura 1.40, sean las rectas r_1 y r_2, de inclinaciones α_1 y α_2 y pendientes m_1 y m_2, respectivamente,

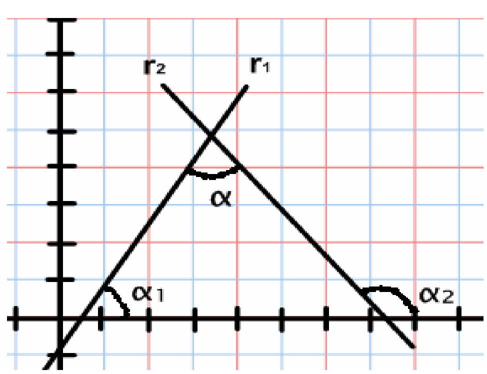


Figura 1.40

considerando el ángulo α formado por r_1 y r_2 y recordando, que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los interiores no adyacentes, se tiene:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha$$

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

luego

$$\tan \alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

pero

$$\tan \alpha_1 = m_1 \qquad \tan \alpha_2 = m_2$$

entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \tag{11}$$

la expresión (11) es la *ecuación del ángulo que forman dos rectas.*

De acuerdo con lo anterior se puede decir que un ángulo denotado por α formado por dos rectas ésta dado por la fórmula

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1$$

en donde m_1 es la pendiente inicial y m_2 es la pendiente final correspondiente al ángulo α.

Ejemplo 1

Obtener los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son: $A = (6,4)$, $B = (-2, 3)$ y $C = (-1,-2)$.

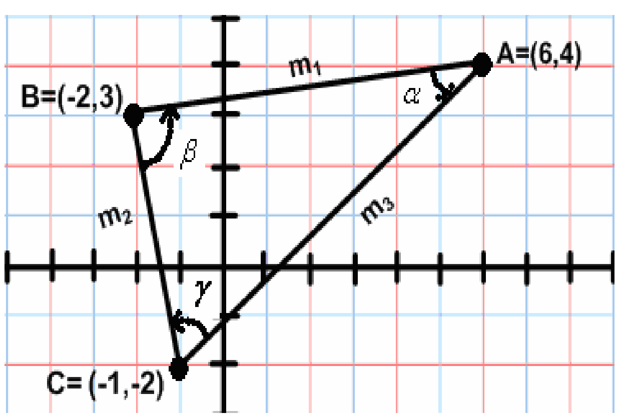


Figura 1.41

$m_1 = m_{AB} = \dfrac{4-3}{6+2} = \dfrac{1}{8}$ $\quad m_2 = m_{BC} = \dfrac{3+2}{-2+1} = -\dfrac{5}{1}$ $\quad m_3 = m_{CA} = \dfrac{-2-4}{-1-6} = \dfrac{6}{7}$

$$\tan\alpha = \frac{m_3 - m_1}{1 + m_1 m_3} = \frac{\frac{6}{7} - \frac{1}{8}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)} = \frac{.732}{1.107} = .661 \qquad \alpha = 33º47'$$

$$\tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-5 - \frac{1}{8}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)(-5)} = \frac{-5.12}{.375} = -13.65 \qquad \beta = 85º8'$$

$$\tan\gamma = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_3 m_2} = \frac{-5 - \frac{6}{7}}{1 + \left(\frac{6}{7}\right)(-5)} = \frac{-5.85}{-3.28} = 1.78 \qquad \gamma = 60º6'$$

Ejercicio 11

1. Encontrar los ángulos interiores para demostrar que son triángulos isósceles los que tienen los siguientes vértices.
   a) $A = (2, 0)$, $B = (1, 3)$ y $C = (0, 0)$
   b) $A = (4, 8)$, $B = (2, 2)$ y $C = (6, 2)$
   c) $A = (2, 1)$, $B = (1, 4)$ y $C = (0, 1)$

Gráfica de una ecuación y lugares geométricos

Existen en Geometría analítica dos problemas fundamentales:

1) Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente y
2) Dada una figura geométrica o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar la ecuación.

Gráfica de una ecuación

Suponga que se da una ecuación de dos variables x y y, que se puede escribir brevemente de la forma

$$f(x,y) = 0.$$

En general existe un número infinito de valores de x y y que satisfacen esta ecuación. Cada uno de tales pares de valores reales se toma como las coordenadas (x, y) de un punto en el plano.

Al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación se llama *gráfica de la ecuación* ó *lugar geométrico*. Y cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación pertenece a la gráfica de la ecuación.

Como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica o lugar geométrico.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 10x$.

Dando valores a x y calculando los valores correspondientes de y, se obtienen los pares de valores que se muestran en la tabla y el lugar geométrico de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 10x$ lo contiene la figura 1.42.

x	$y = x^3 - 6x^2 + 10x$
-.2	-2.25
.2	1.77
.6	4.06
1	5
1.4	4.98
1.8	4.39
2.2	3.61
2.6	3.02
3	3
3.4	3.94
3.8	6.23

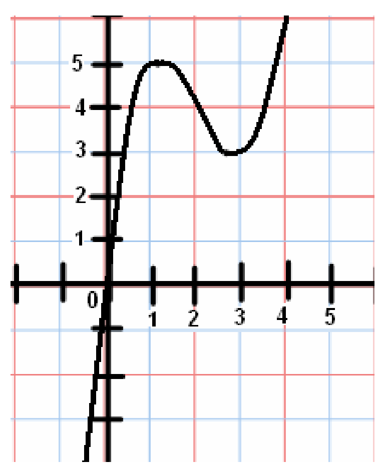


Figura 1.42

Cuando se grafican varios puntos y se dibuja una línea continua entre ellos puede resultar erróneo si la gráfica en cuestión hubiera sido la de la figura 1.42 por ello se debe discutir la ecuación antes de trazar una curva y también se deben tomar intervalos pequeños donde se note que hay más variación para encontrar el lugar geométrico más exacto.

Intersecciones con los ejes

La abscisa del punto de intersección de la curva con el eje X se le llama *intersección de una curva con el eje X.*

La ordenada del punto de intersección de la curva con el eje Y se le llama *intersección de una curva con el eje Y.*

El procedimiento para obtener las intersecciones es

a) haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva se obtienen las intersecciones con el eje X,

b) haciendo $x = 0$ en la ecuación de la curva se obtienen las intersecciones con el eje Y.

Ejemplo 1

Considere la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

Para $y = 0$, esta ecuación se reduce a

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

de donde,

$$x\,(x - 2)\,(x - 4) = 0$$

y las raíces son

$$x = 0, 2, 4$$

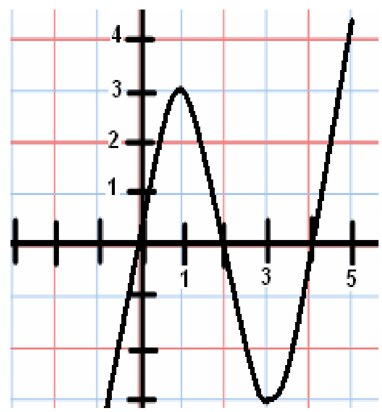


Figura 1.43

La gráfica de la curva, se muestra en la figura 1.43

Ejercicio 12

1. Representar gráficamente las funciones, utilizando los métodos anteriormente mencionados
   a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
   b) $y = x^3 - 5x^2 + 6x$
   c) $y = x^3 - 7x^2 + 12x$
   d) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

Simetría

Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio. La recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos se llama eje de simetría.

Así en la figura 1.44, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al eje de simetría ℓ si la recta ℓ es perpendicular al segmento AB en su punto medio.

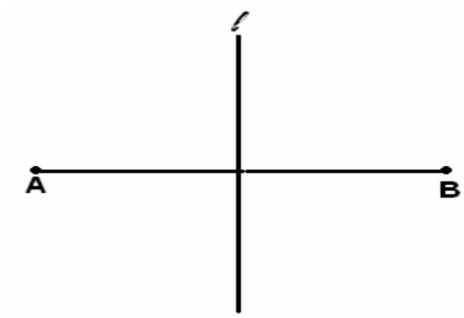


Figura 1.44

Dos puntos son simétricos con respecto a un punto O, si O es el punto medio del segmento que los une. El punto O se llama centro de simetría.

Así en la figura 1.45 los dos puntos A y B son simétricos con respecto al centro de simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento AB.

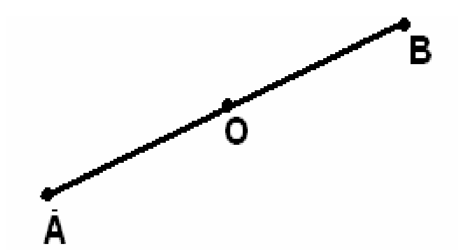


Figura 1.45

Ecuación de un lugar geométrico

Se llama *ecuación de un lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0, \qquad (12)$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x y y son todas las coordenadas de aquellos puntos que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas.

El procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es como sigue:

1. Suponga que el punto P, de coordenadas (x, y) es un punto cualquiera que satisface la condición o condiciones dadas y por tanto es punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x y y.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que quede como $f(x, y) = 0$

4. Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de cualquier punto que satisfacen $f(x, y) = 0$ de tal manera que $f(x_1, y_1) = 0$ es verdadera. Si de $f(x_1, y_1) = 0$ se puede deducir la expresión analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x_1, y_1), entonces $f(x, y) = 0$ es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A = (-2, 3)$ y $B = (3, 1)$.

Sea $P=(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB sean iguales en longitud, o sea, que

$$\left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PB}\right|.$$

Por la ecuación (1)

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\left|\overline{PB}\right| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

Sustituyendo en la condición mencionada

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

si se elevan al cuadrado a ambos miembros, se desarrolla, se traspone y se simplifica, la ecuación se reduce a

$$10x - 4y + 3 = 0.$$

Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto cualquiera P_1 que satisfacen la ecuación, de tal manera que la ecuación

$$10x_1 - 4y_1 + 3 = 0,$$

es verdadera.

Los puntos $P_1 = \left(0, \frac{3}{4}\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{3}{10}, 0\right)$ hacen verdadera la ecuación.

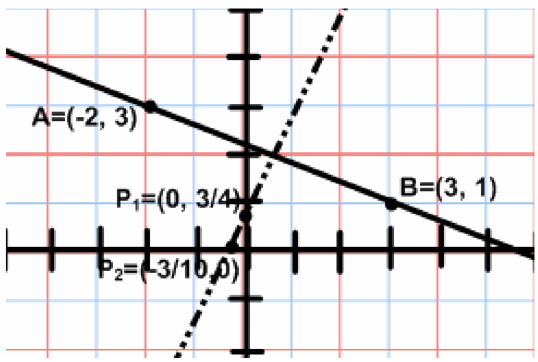


Figura 1.46

La ecuación $10x - 4y + 3 = 0$ es la ecuación buscada. El lugar geométrico que aparece en la figura 1.46 es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, es decir, la mediatriz del segmento AB.

Ecuaciones y propiedades de la recta

A continuación, se presentan las distintas formas en que se expresa la ecuación de la recta para identificarlas. Cada ecuación corresponde a características y propiedades geométricas específicas, lo que permite localizar y representar la recta en el sistema coordenado.

Las distintas formas son:

- Ecuación de la recta en su forma punto-pendiente
- Ecuación de la recta dados dos de sus puntos
- Ecuación de la recta dada su pendiente y ordenada al origen
- Ecuación simétrica de la recta
- Ecuación general de una recta
- Ecuación normal de una recta

1.2.5 Ecuación de una recta en su forma punto-pendiente

Se llama *línea recta* al lugar geométrico de los puntos, tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m calculado por la fórmula

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2,$$

resulta siempre constante.

Geométricamente una recta queda definida por uno de sus puntos y su dirección.

Analíticamente la recta queda determinada si se conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación o su pendiente.

La recta que pasa por el punto dado $P_1 = (x_1, y_1)$ y tiene la pendiente dada m, tiene por ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

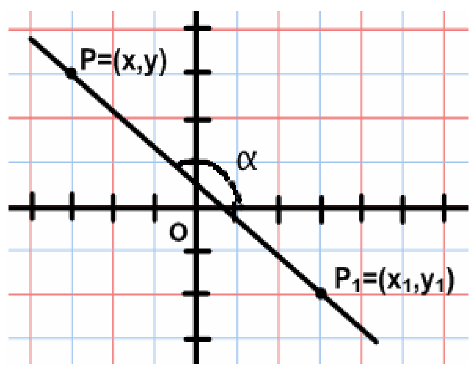


Figura 1.47

Para demostrar lo anterior, en la figura 1.47 sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la recta, diferente del punto dado $P_1 = (x_1, y_1)$. Por la definición de la recta las coordenadas del punto $P = (x, y)$ satisfacen la ecuación

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

de la cual, multiplicando a ambos miembros por $(x - x_1)$, se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{13}$$

la expresión (13) que se conoce como la *ecuación de la recta punto-pendiente.*

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $B = (-2, 4)$ y tiene un ángulo de inclinación de $135°$.

Por definición de pendiente $m = \tan 135° = -1$

Sustituyendo el punto $B = (-2, 4)$ y la pendiente $m = -1$ en la ecuación (13) se tiene

$$y - 4 = -1\,(x - (-2))$$

$$y - 4 = -1\,(x + 2)$$

por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$y - 4 = -x - 2$$
$$x + y - 2 = 0$$

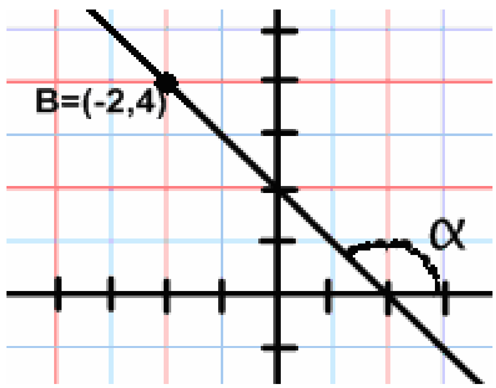


Figura 1.48

Ejemplo 2

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (-1, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $P_1 = (4, 3)$ y $P_2 = (-2, -3)$.

La pendiente de la recta P_1P_2 es $m = \dfrac{3+3}{4+2} = \dfrac{6}{6} = 1$.

Por ser rectas paralelas tienen pendientes iguales y se tiene entonces $P = (-1, 2)$ y $m = 1$.

Sustituyendo los datos en la ecuación (13) se obtiene la ecuación de la recta

$$y - 2 = 1\ (x + 1),$$

por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$y - 2 = x + 1,$$

$$x - y + 3 = 0.$$

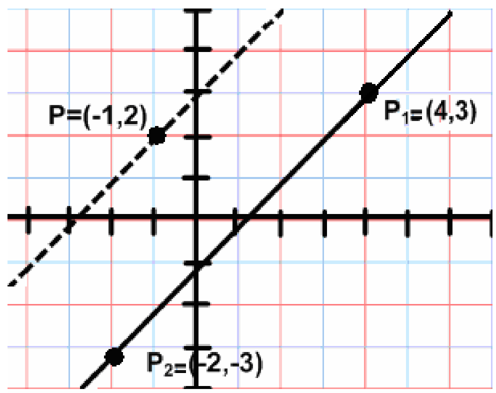


Figura 1.49

Ejemplo 3

Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $P_1 = (6, 5)$ y $P_2 = (2, -3)$.

La pendiente de la recta P_1P_2 es

$$m = \frac{5-(-3)}{6-2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Por ser la mediatriz perpendicular a la recta, su pendiente es

$$m = -\frac{1}{2}\ .$$

Un punto de la mediatriz es el punto medio de la recta P_1P_2 cuyas coordenadas son

$$x = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{5-3}{2} = 1$$

Teniendo entonces un punto de la mediatriz $(4, 1)$ y su pendiente $-\frac{1}{2}$, se sustituyen los datos en la ecuación (13) para obtener su ecuación

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\,(x - 4),$$

por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{2},$$

$$\frac{1}{2}x + y - 3 = 0.$$

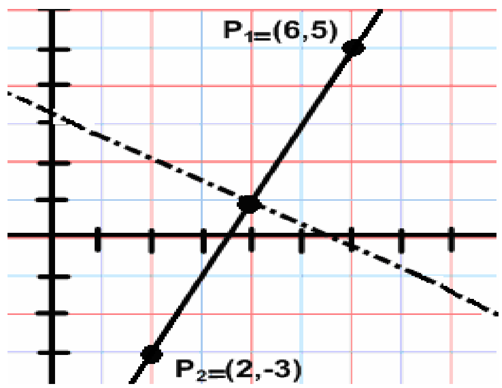


Figura 1.50

Ejercicio 13

Para cada caso hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto:

a) $B = (3, 7)$ y tiene un ángulo de inclinación de $135°$.

b) $B = (-4, -5)$ y tiene un ángulo de inclinación de $45°$.

c) $P = (-2, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $P_1 = (6, 5)$ y $P_2 = (-4, -5)$.

d) $P = (3, -4)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (-1, -2)$.

Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos

e) $P_1 = (7, 5)$ y $P_2 = (-2, -3)$.

f) $P_1 = (5, 7)$ y $P_2 = (-3, -5)$.

Ecuación de la recta dados dos de sus puntos

Geométricamente una recta queda definida por dos de sus puntos.

Analíticamente la recta queda determinada si se conocen las coordenadas de dos de sus puntos.

En la figura 1.51 la recta esta determinada por P_1 y P_2 y tiene como pendiente

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \ ,$$

sustituyendo el valor de la pendiente en la ecuación punto-pendiente

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

se obtiene

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1), \qquad x_1 \neq x_2 \qquad (14)$$

la expresión (14) que se conoce como la *ecuación de la recta que pasa por dos puntos*.

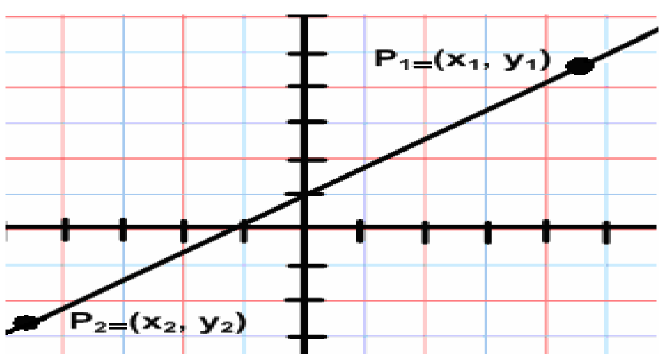


Figura 1.51

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (5, -2)$ y $B = (-3, 4)$.

Por la ecuación (14)

$$y - (-2) = \frac{-2-4}{5-(-3)}\ (x-5),$$

$$y + 2 = \frac{-6}{8}\ (x-5),$$

por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$6x + 8y - 14 = 0.$$

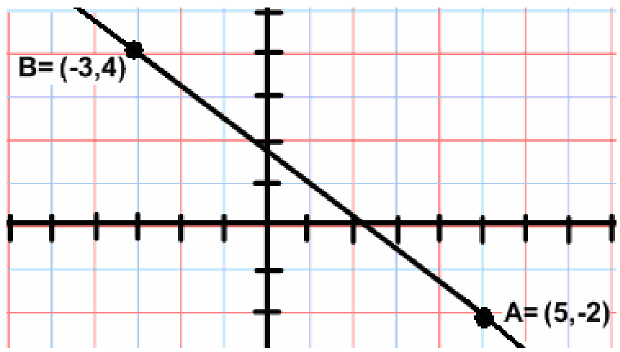


Figura 1.52

Ejemplo 2

Los puntos $A = (1, 1)$, $B = (2, 6)$ y $C = (-3, 4)$ son los vértices de un triángulo, encontrar la ecuación de la mediana que corresponde al vértice C.

Con base en la geometría se sabe que la *mediana correspondiente a un vértice de un triángulo* es el segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto y así lo muestra la figura 1.53.

Se obtiene el punto medio de la recta AB, es decir M

$$x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \qquad\qquad y = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (14) los puntos $C = (-3, 4)$ y $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$(y-4)=\frac{\left(4-\dfrac{7}{2}\right)}{\left(-3-\dfrac{3}{2}\right)}(x+3),$$

se obtiene la ecuación de la mediana que corresponde al vértice C

$$y-4=-\frac{1}{9}(x+3).$$

Por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$9y-36=-x-3,$$

$$x+9y-33=0.$$

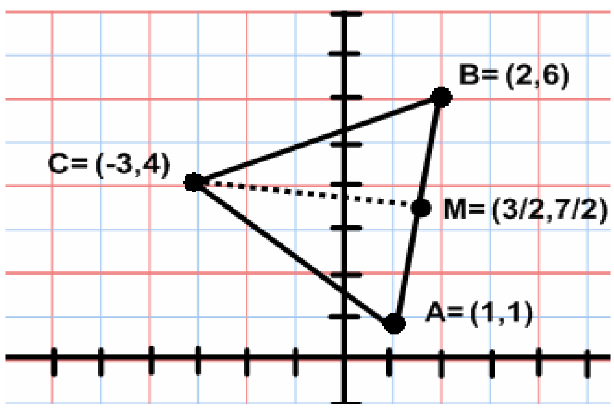


Figura 1.53

Ejemplo 3

Los puntos $A=(a,\ b)$, $B=(-a,\ b)$, $C=(-a,\ -b)$ y $D=(a,\ -b)$, donde $a\neq b$, son los vértices de un rectángulo. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen las diagonales.

Las ecuaciones que contienen las diagonales son:

Por la ecuación (14)

- La recta que pasa por A y C y - La recta que pasa por B y D

$$y-b=\frac{b+b}{a+a}(x-a) \qquad\qquad y-b=\frac{b+b}{-a-a}(x+a)$$

$$y - b = \frac{2b}{2a}\,(x - a) \qquad\qquad y - b = \frac{2b}{-2a}\,(x + a).$$

Por definición de la ecuación de un lugar geométrico (12)

$$2ay - 2ab = 2bx - 2ab \qquad\qquad -2ay + 2ab = 2bx + 2ab$$

$$2bx - 2ay + 2ab - 2ab = 0 \qquad\qquad 2bx + 2ay + 2ab - 2ab = 0$$

$$bx - ay = 0 \qquad\qquad bx + ay = 0$$

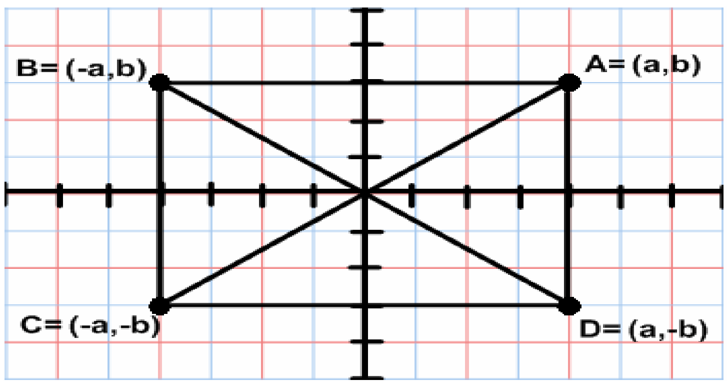


Figura 1.54

Ejercicio 14

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-5, 2)$ y $B = (4, -3)$

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (7, -3)$ y $B = (-5, 6)$

c) Los puntos $A = (-4, -4)$, $B = (2, 7)$ y $C = (-7, 10)$ son los vértices de un triángulo, encontrar la ecuación de la mediana que corresponde al vértice C.

d) Los puntos $A = (2, 6)$, $B = (8,3)$ y $C = (-2, -1)$ son los vértices de un triángulo, encontrar la ecuación de la mediana que corresponde al vértice C.

e) Los puntos $A = (1, -2)$, $B = (5, 1)$, $C = (2, 5)$ y $D = (-2, 2)$ son los vértices de un rectángulo. Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen las diagonales.

1.2.6 Ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada al origen

Geométricamente una recta queda definida por el punto de intersección de ésta con el eje Y y su dirección. Analíticamente la recta queda determinada si se conocen la ordenada del punto donde la recta corta el eje Y y su ángulo de inclinación o su pendiente.

Intersecciones de una recta con los ejes

La abscisa a del punto donde una recta corta al eje X se llama *abscisa al origen*.

La ordenada b del punto donde una recta corta al eje Y se llama *ordenada al origen*.

Como se observa en la figura 1.55

- la *abscisa al origen* corresponde al valor de la distancia que existe entre el origen y el punto de intersección de la recta con el eje X.

- la *ordenada al origen* corresponde al valor de la distancia que existe entre el origen y el punto de intersección de la recta con el eje Y.

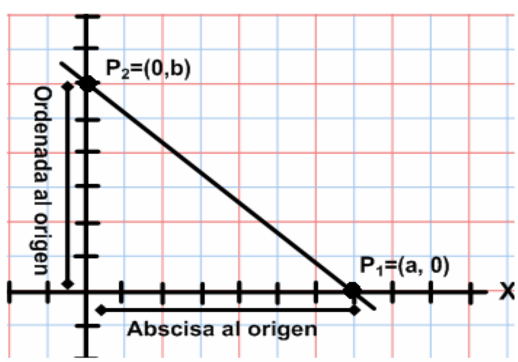


Figura 1.55

Para obtener la abscisa al origen de una recta se hace $y = 0$ en su ecuación y se despeja x puesto que el punto de intersección de la recta con el eje X tiene ordenada cero.

Para obtener la ordenada al origen de una recta se hace $x = 0$ en la ecuación y se despeja y puesto que el punto de intersección de la recta con el eje Y tiene abscisa cero.

Ejemplo 1

Obtener la abscisa, la ordenada al origen y los puntos de intersección $(a,0)$ y $(0,b)$ de la recta con los ejes de coordenadas, de la recta $3x + 6y = 12$.

Abscisa al Origen	Ordenada al Origen
Si $y = 0$	Si $x = 0$
$3x + 6(0) = 12$	$3(0) + 6y = 12$
$x = 12/3$	$y = 12/6$
$x = 4 = a$	$y = 2 = b$

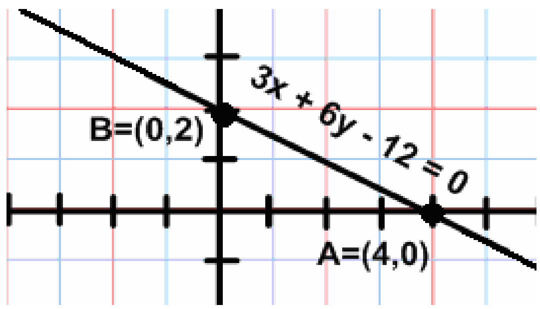


Figura 1.56

La abscisa al origen es $a = 4$, la ordenada al origen es $b = 2$, los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son $(4, 0)$ y $(0, 2)$ y el lugar geométrico esta trazado en la figura 1.56.

Ejemplo 2

Obtener las coordenadas al origen de la recta $x + y = 0$

Abscisa al Origen	Ordenada al Origen
Si $y = 0$	Si $x = 0$
$x + 0 = 0$	$0 + y = 0$
$x = 0 = a$	$y = 0 = b$

Los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son $(0, 0)$ y $(0, 0)$. Por lo que sólo se tiene un punto que es el origen. Para obtener otro punto se asigna un valor a una de las variables y se obtiene el correspondiente de la otra variable

Si $x = 2$	Si $y = 2$
$2 + y = 0$	$x + 2 = 0$
$y = -2$	$x = -2$

Y entonces se obtienen dos puntos $A = (2, -2)$ y $B = (-2, 2)$.

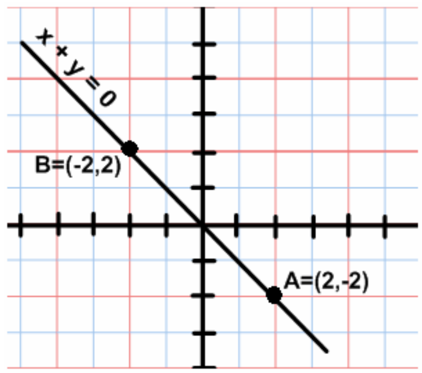


Figura 1.57

Ejercicio 15

1. Obtener la abscisa y la ordenada al origen y los puntos de intersección $(a,0)$ y $(0,b)$ de la recta con los ejes de coordenadas, de las rectas

a) $2x - 3y + 3 = 0$ b) $3x - 4y - 8 = 0$ c) $x + 3y + 15 = 0$
d) $2x + 3y - 9 = 0$ e) $7x - 2y + 8 = 0$ f) $2x + 5y + 10 = 0$

Ecuación de una recta dada su pendiente y su ordenada al origen

Si de una recta se tiene su pendiente m y la ordenada al origen b como se aprecia en la figura 1.58, se tendría un caso especial de ecuación de la recta de la forma punto-pendiente, es decir, por la ecuación (13)

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - b = m\,(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b \qquad (15)$$

La expresión (15) se conoce como la *ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada al origen.*

De manera inversa, si se tiene

$$y = mx + b$$

entonces se conocen

- la pendiente m
- y la ordenada al origen b.

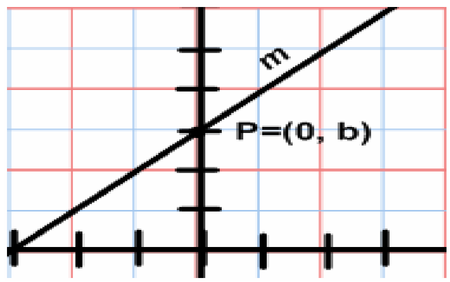


Figura 1.58

Ejemplo 1

Dada la ecuación $2x - 4y + 6 = 0$, expresarla en la forma pendiente-ordenada al origen, identificar los valores de m y b y representar la recta en el plano.

De la ecuación $2x - 4y + 6 = 0$ se despeja y y entonces $\quad y = \dfrac{2x+6}{4}$

se obtiene la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen $\quad y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

se identifican los valores de m y b entonces $\quad m = \dfrac{1}{2}$ y $b = \dfrac{3}{2}$

Para obtener la abscisa al origen se hace en la ecuación original $y = 0$, entonces

$$2x - 4(0) + 6 = 0$$

y

$$x = -3.$$

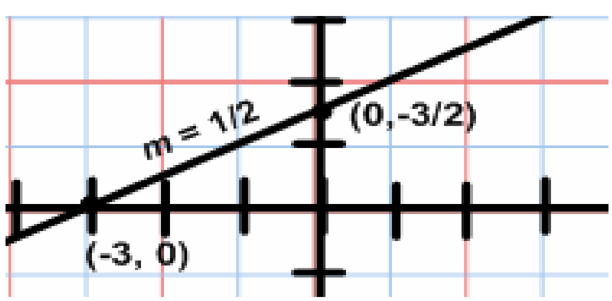


Figura 1.59

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y = -21$, $x - y = -9$ y que además es:

a) paralela a la recta $2x + 4y = 7$.

b) perpendicular a la recta $3x - 5y = -18$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas formado por las dos primeras rectas

$$x - 3y = -21$$

$$x - y = -9$$

se obtiene la solución

$$x = -3 \quad \text{y} \quad y = 6;$$

por tanto el punto de intersección es

$$(-3, 6).$$

a) La recta

$$2x + 4y = 7$$

puede ser expresada así,

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Toda recta paralela a esta tiene la misma pendiente, en particular la que pasa por el punto $(-3,6)$ tiene por ecuación

$$y - 6 = -\frac{1}{2}(x + 3)$$

ó bien por la ecuación (12)

$$x + 2y - 9 = 0.$$

b) La recta

$$3x - 5y = -18$$

se puede expresar en la forma

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}.$$

Toda recta perpendicular a ésta tiene pendiente recíproca y de signo contrario, es decir,

$$m = -\frac{5}{3}$$

en particular la que pasa por el punto

$$P = (-3,6),$$

tiene por ecuación

$$y - 6 = -\frac{5}{3}\ (x + 3)$$

ó bien por la ecuación (12)

$$5x + 3y - 3 = 0.$$

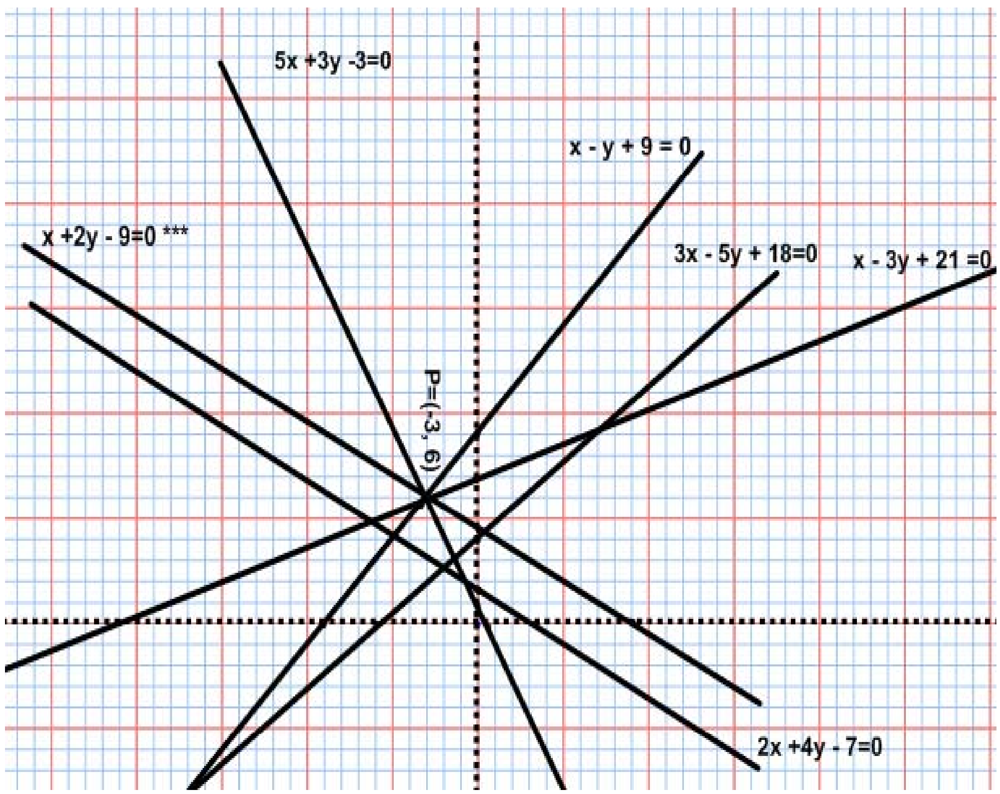


Figura 1.60

Ejercicio 16

1. Expresar en la forma pendiente-ordenada al origen cada recta del ejercicio 15.
2. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de cada recta del ejercicio 15.
3. Trazar cada una de las rectas obtenidas en el punto 1 de éste ejercicio.

Ecuación simétrica de la recta

La ecuación simétrica existe, si la recta no es paralela a ninguno de los ejes coordenados y si no pasa por el origen.

Geométricamente una recta queda definida por los puntos de intersección de la recta con el eje X y con el eje Y. Analíticamente la recta queda determinada si se conocen la abscisa del punto donde la recta corta el eje X y la ordenada del punto donde la recta corta el eje Y.

La representación gráfica de la recta que intersecta los ejes coordenados se expresa mediante una ecuación en la que aparecen los valores de las coordenadas de los puntos de intersección.

En la figura 1.61 se ilustra la recta que intersecta a los ejes X y Y en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ respectivamente. La abscisa al origen es a $(a \neq 0)$ y la ordenada al origen es b $(b \neq 0)$.

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por $P_1 = (a, 0)$ y $P_2 = (0, b)$ se utiliza la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1)$$

sustituyendo

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}\,(x - a),$$

$$y = \frac{-b}{a}(x - a),$$

$$ay = -bx + ab,$$

$$\frac{ay}{ab} + \frac{bx}{ab} = \frac{ab}{ab},$$

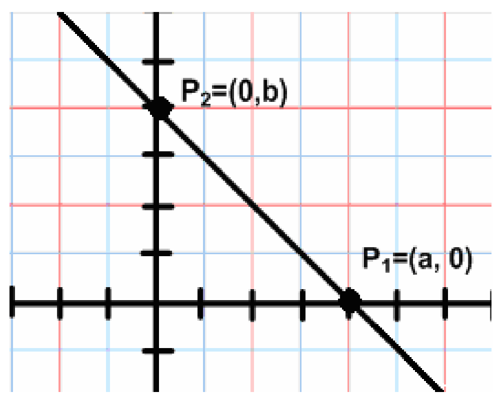


Figura 1.61

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad a \neq 0 \text{ y } b \neq 0. \tag{16}$$

La expresión (16) se conoce como la *ecuación simétrica de la recta*, en ella aparecen en los denominadores la abscisa a y la ordenada al origen b.

Ejemplo 1

Expresar en forma simétrica la ecuación $2x + 4y - 8 = 0$.

Al trasponer el término independiente al segundo miembro se tiene

$$2x + 4y = 8$$

dividiendo la ecuación entre 8 , queda

$$\frac{2x}{8} + \frac{4y}{8} = \frac{8}{8},$$

de donde resulta

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1,$$

que corresponde a la forma simétrica de la recta,

La abscisa al origen es a =4, la ordenada al origen es b=2, los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son $(4, 0)$ y $(0, 2)$ y el lugar geométrico esta trazado en la figura 1.62.

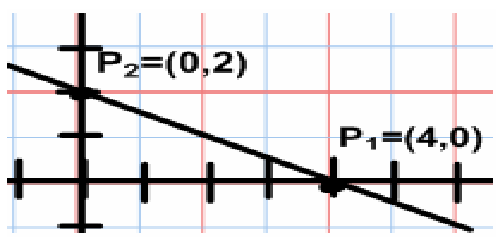


Figura 1.62

Ejemplo 2

Expresar en forma simétrica la ecuación $7x - 4y + 12 = 0$.

Al trasponer el término independiente al segundo miembro se tiene

$$7x - 4y = - 12,$$

dividiendo la ecuación entre 12 , queda

$$\frac{7x}{-12}+\frac{-4y}{-12}=\frac{-12}{-12},$$

de donde resulta

$$\frac{x}{\left(\frac{-12}{7}\right)}+\frac{y}{3}=1,$$

que corresponde a la forma simétrica de la recta.

La abscisa al origen es $\frac{12}{7}$ y la ordenada al origen es 3; en este caso los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son $\left(-\frac{12}{7},0\right)$ y $(0,\ 3)$ y el lugar geométrico esta trazado en la figura 1.63.

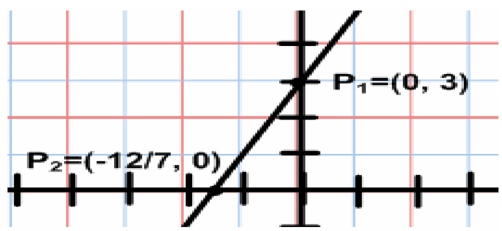


Figura 1.63

Ejercicio 17

1. Escribir en forma simétrica la ecuación de la recta que interseca a los ejes X y Y en a y b, respectivamente

a) $a = 4,\ b = 3$	b) $a = 5,\ b = 2$	c) $a = 4,\ b = -3$
d) $a = -7,\ b = 5$	e) $a = -2,\ b = -2$	f) $a = -3/4,\ b = 1$

2. Expresar las siguientes ecuaciones en forma simétrica

a) $2x - 3y + 3 = 0$	b) $3x - 4y - 8 = 0$	c) $x + 3y + 15 = 0$
d) $2x + 3y - 9 = 0$	e) $7x - 2y + 8 = 0$	f) $2x + 5y + 10 = 0$

1.2.7 Ecuación general de una recta

La ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal

$$Ax + By + C = 0 \tag{17}$$

La expresión (17) corresponde a la *forma general de la recta*, donde A, B y C pueden ser cero. Pero A y B no pueden ser cero a la vez.

Las formas estudiadas indican que la ecuación de una recta es de primer grado en las variables x y y. Inversamente, cualquier ecuación de primer grado en x y y representa una recta; de ahí el nombre de ecuación lineal, la cual se obtiene del siguiente razonamiento:

la ecuación de primer grado en x y y es

$$Ax + By + C = 0.$$

Si $B = 0$

entonces $Ax + C = 0$ y si se despeja x queda

$$x = -\frac{C}{A}$$

que es de la forma $x = |k|$ y corresponde a una recta paralela al eje Y a k unidades de distancia de éste.

Si $B \neq 0$

despejando y se obtiene

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$$

que es de la forma

$$y = mx + b$$

donde:

- la pendiente es $$m = -\frac{A}{B} \tag{18}$$

- la ordenada al origen es $$b = -\frac{C}{B} \tag{19}$$

- la abscisa al origen es $a = -\dfrac{C}{A}$ (20)

A partir del la ecuación general de la recta se pueden obtener de manera directa los valores indicados en las expresiones (18), (19) y (20).

Discusión de la ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta es de la forma

$$Ax + By + C = 0.$$

A continuación se presentan los posibles casos de la relación entre los coeficientes A, B y C

Valor de las constantes	**Ecuación**	**Representa**
$A \neq 0$, $B = 0$ y $C = 0$	$x = 0$	Eje Y
$A = 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$	$y = 0$	Eje X
$A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$	$y = \dfrac{-C}{B}$, $y = k$	Recta paralela al eje X
$A \neq 0$, $B = 0$ y $C \neq 0$	$x = \dfrac{-C}{A}$, $x = k$	Recta paralela al eje Y
$A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C = 0$	$y = \dfrac{-A}{B}x$	Recta que pasa por el origen
$A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$	$Ax + By + C = 0$	Forma General

Ejemplo 1

Obtener los valores de A, B y C en la ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta que pasa por los puntos P_1 = (-4, -3) y P_2 = (2, 5). Hallar la ecuación de la recta y trazar su grafica.

Usando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{-3-5}{-4-2}\,(x - (-4))$$

$$3y + 9 = 4x + 16$$

La ecuación de la recta es

$$4x - 3y + 7 = 0$$

Los valores de A, B y C son

$$A = 4,\quad B = -3 \quad \text{y} \quad C = 7$$

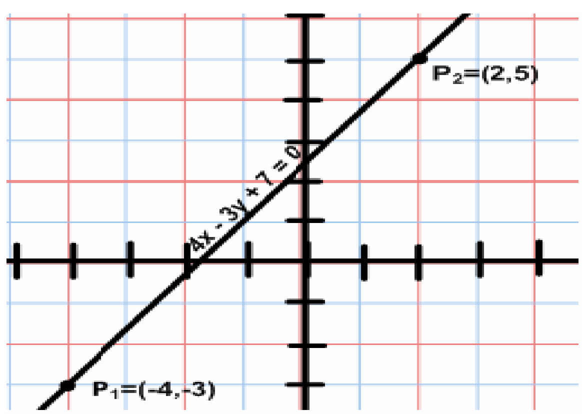


Figura 1.64

Ejercicio 18

1. Obtener los valores de A, B y C en la ecuación $Ax + By + C = 0$ de las rectas que pasan por los siguientes puntos, hallar la ecuación y la gráfica de la recta.

a) P_1 = (-6, -5) y P_2 = (1, 4)　　b) P_1 = (2,1) y P_2 = (5, 6)
c) P_1 = (1, 5) y P_2 = (4, 1)　　d) P_1 = (3, 5) y P_2 = (-1, -2)
e) P_1 = (-2, -4) y P_2 = (3, 3)　　f) P_1 = (-5, 4) y P_2 = (-1, 2)

Posiciones relativas de dos rectas

Dadas dos rectas, r_1 y r_2, estas pueden ser:

a) paralelas.

b) perpendiculares.

c) coincidentes (caso particular de paralelismo).

d) que se intersecten en uno y sólo un punto.

Estas condiciones se obtendrán a partir de sus respectivas ecuaciones:

$$r_1 : Ax + By + C = 0$$

$$r_2 : A'x + B'y + C' = 0$$

Paralelismo

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

Si las pendientes de las rectas m_1 y m_2, son iguales entonces

$$m(r_1) = -\frac{A}{B} \qquad m(r_2) = -\frac{A'}{B'}$$

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

$$AB' = A'B$$

$$AB' - A'B = 0 \tag{21}$$

La expresión (21) establece *la condición de paralelismo* de las rectas r_1 y r_2.

Ejemplo 1

Sean r_1: $2x - y + 4 = 0$ y r_2: $4x - 2y - 7 = 0$ entonces

sus pendientes son:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2 \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{A'}{B'} = -\frac{4}{-2} = 2$$

como las pendientes de r_1 y r_2 son iguales, r_1 y r_2 son paralelas.

Aplicando la condición de paralelismo: $AB' - A'B = 0$

se obtiene

$$[2(-2)] - [4(-1)] = -4 + 4 = 0$$

por tanto

r_1 y r_2 son paralelas.

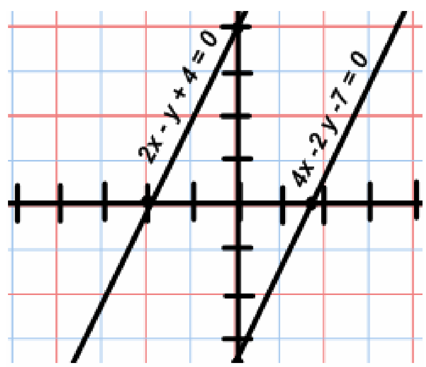


Figura 1.65

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares cuando la pendiente de una es recíproca negativa a la de la otra; es decir, cuando el producto de sus pendientes es igual a -1.

Las pendientes de las rectas r_1 y r_2 son respectivamente $-\frac{A}{B}$ y $-\frac{A'}{B'}$.

Por la condición de perpendicularidad se tiene que $\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1$,

entonces
$$\frac{AA'}{BB'} = -1,$$

$$AA' = -BB',$$

$$AA' + BB' = 0. \tag{22}$$

La expresión (22) establece la *condición de perpendicularidad* de las rectas r_1 y r_2.

Ejemplo 1

Sean r_1: $6x + 4y - 12 = 0$ y r_2: $2x – 3y + 15 = 0$ entonces

sus pendientes son
$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

Como las pendientes son recíprocas y de signo contrario una de la otra,

r_1 y r_2 son perpendiculares.

Aplicando la condición analítica de perpendicularidad $AA' + BB' = 0,$
$$[\,-3\,(2)\,] + [\,2\,(3)\,] = 0,$$

$$-6 + 6 = 0,$$

por tanto r_1 y r_2 son perpendiculares.

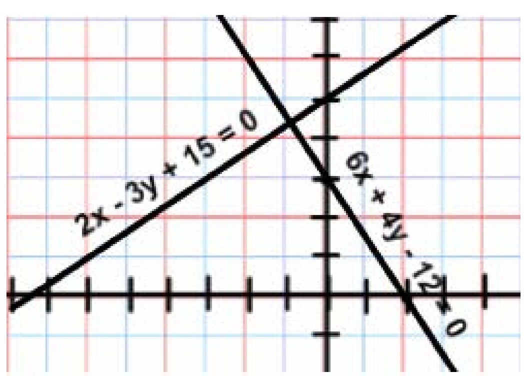


Figura 1.66

Coincidentes

Si tanto r_1 como r_2 se expresan de la forma $y = mx + b$ se obtiene

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A} \qquad\qquad y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{A'}$$

Para que r_1 y r_2 coincidan se requiere que sus respectivas ordenadas en el origen sean iguales, es decir,

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

Y además que sus respectivas pendientes sean iguales, es decir,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

De las dos condiciones anteriores se obtiene lo siguiente

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{23}$$

La expresión (23) establece *la condición de coincidencia*. Esto significa que dos rectas son coincidentes cuando sus coeficientes correspondientes son directamente proporcionales.

Ejemplo 1

Sean $r_1 : 9x + 7y - 5 = 0$ y $r_2 : \frac{9}{7}x + y - \frac{5}{7} = 0,$

donde la constante de proporcionalidad es igual a $\frac{1}{7}$, es decir la segunda ecuación se puede obtener a partir de la primera multiplicándola por $\frac{1}{7}$.

Por tanto las dos rectas son coincidentes.

Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ => $\frac{9}{\left(\frac{9}{7}\right)} = \frac{7}{1} = \frac{5}{\left(\frac{5}{7}\right)}$ => $7 = 7 = 7$ por lo tanto r_1 y r_2 son coincidentes.

Intersección

Dos rectas se intersectan en un único punto cuando no son paralelas, en consecuencia las pendientes son diferentes

$$-\frac{A}{B} \neq -\frac{A'}{B'} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{A}{B} \neq \frac{A'}{B'}.$$

Por tanto $AB' \neq A'B$

y $$AB' - A'B \neq 0. \tag{24}$$

La expresión (24) establece la *condición de intersección*.

Ejemplo 1

Sean $r_1 : 7x + 8y - 10 = 0$ y r_2: $6x + 7y + 8 = 0$

si se aplica la condición de intersección $AB' - A'B \neq 0$ se tiene que

$$[7\,(7)\,] - [\,6\,(8)\,] \neq 0,$$

$$49 - 48 \neq 0,$$

$$1 \neq 0.$$

Por lo tanto las rectas se cortan en un punto, es decir, se intersectan en un punto.

Ejercicio 19

1. Hallar la ecuación de dos rectas que pasen por el punto A, una paralela y otra perpendicular a la recta que corresponde a la ecuación dada.

a) $A = (3,2)$, $2x - 3y + 3 = 0$
b) $A = (-2,3)$, $3x - 4y - 8 = 0$
c) $A = (2,-1)$, $x + 3y + 15 = 0$
d) $A = (-3,1)$, $2x + 3y - 9 = 0$
e) $A = (4,3)$, $7x - 2y + 8 = 0$
f) $A = (3,1)$, $2x + 5y + 10 = 0$

1.2.8 Ecuación normal de una recta

Para la resolución de cierto tipo de problemas es de mayor utilidad representar la ecuación de la recta en su forma normal que en su forma general.

Obtener la ecuación de la forma normal a partir de la forma general

En la figura 1.67 se observa una recta ℓ que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$.

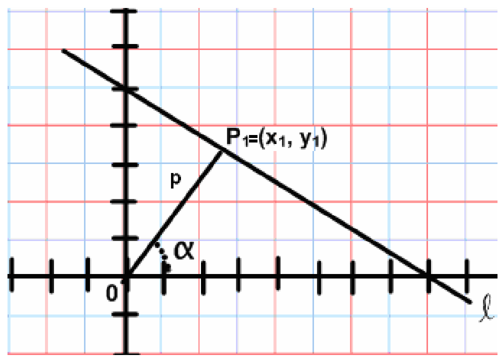


Figura 1.67

El segmento OP_1 de longitud p tiene un extremo en el origen O y forma con el segmento OX un ángulo α positivo.

Por trigonometría se sabe que

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{p} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y_1}{p}$$

entonces

$$x_1 = p \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad y_1 = p \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto las coordenadas pueden expresarse como $P_1 = (p \cos \alpha,\ p \operatorname{sen} \alpha)$.

También se sabe que la pendiente de una recta es igual a la tangente de su ángulo de inclinación por tanto $m = \tan \alpha$.

Utilizando la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

$$y - y_1 = m\,(x - x_1),$$

$$y - p \operatorname{sen} \alpha = \tan \alpha\,(x - p \cos \alpha),$$

la normal (perpendicular) a la recta ℓ debe tener pendiente reciproca, por tanto

$$y - p \text{ sen } \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}(x - p \cos \alpha),$$

como la reciproca de la tangente es la cotangente, se tiene

$$y - p \text{ sen } \alpha = -\cot \alpha\,(x - p \cos \alpha).$$

Además $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{sen \alpha}$; por tanto, al multiplicar la ecuación por sen α

$$y \text{ sen } \alpha - p \text{ sen}^2\alpha = -x \cos \alpha + p \cos^2 \alpha,$$

$$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha = p \text{ sen}^2\alpha + p \cos^2 \alpha,$$

$$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha = p\,(\text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha),$$

como $\quad \text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1,$

$$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha = p,$$

$$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha - p = 0. \tag{25}$$

La expresión (25) corresponde a la *forma normal de la ecuación de una recta*, donde p es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta, y α es el ángulo positivo < $360°$ medido a partir de la parte positiva del eje X a la normal.

Para cierto tipo de problemas, como ya se mencionó, la ecuación de la recta en su forma normal es más útil que en su forma general, por lo cual se requiere transformar ésta en aquella mediante el siguiente razonamiento:

Si $Ax + By + C = 0$ y $x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha - p = 0$ representan la misma recta,

sus coeficientes son directamente proporcionales, es decir,

$$\frac{A}{K} = \cos \alpha, \qquad \frac{B}{K} = \text{sen } \alpha, \qquad \frac{C}{K} = -p$$

elevando al cuadrado se obtiene

$$\frac{A^2}{K^2} = \cos^2 \alpha \qquad \frac{B^2}{K^2} = \text{sen}^2 \alpha$$

sumando miembro a miembro se obtiene

$$\frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} = \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\frac{A^2 + B^2}{K^2} = 1$$

$$K^2 = A^2 + B^2$$

$$K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

Sustituyendo el valor de K en $\frac{A}{K} = \cos \alpha$, $\frac{B}{K} = \text{sen}\, \alpha$, $\frac{C}{K} = -p$

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha, \qquad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \text{sen}\, \alpha, \qquad -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = p$$

Por lo tanto la ecuación de la recta en su forma general

$$Ax + By + C = 0$$

se transforma en

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\, x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\, y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

o bien

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (26)$$

La expresión (26) establece *la ecuación normal de la recta* obtenida a partir de la forma general.

Los resultados anteriores quedan resumidos de la siguiente manera:

La *forma general de la ecuación de una recta*,

$$Ax + By + C = 0$$

puede reducirse a la *forma normal*

$$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha - p = 0$$

dividiendo cada término de la forma general de la ecuación de la recta por

$$r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

en donde el signo que precede al radical r se escoge como sigue

a) Si $C \neq 0$, r es de signo contrario a C
b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo
c) Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo

Ejemplo 1

Transformar a la forma normal la ecuación $5x + 7y - 9 = 0$ y determinar los valores de p y α.

La ecuación de la recta en su forma normal se expresa así

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

de ésta manera se tiene

$$\frac{5x + 7y - 9}{\pm\sqrt{5^2 + 7^2}} = 0,$$

como el radical y C son del signo contrario, por tanto

$$\frac{5x + 7y - 9}{\sqrt{74}} = 0$$

ó bien

$$\frac{5}{8.6}x + \frac{7}{8.6}y - \frac{9}{8.6} = 0.$$

Esta ecuación corresponde a la recta en su forma normal donde:

$$p = -\frac{9}{8.6} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{7}{8.6} \qquad \cos \alpha = \frac{5}{8.6}.$$

Como el seno y el coseno del ángulo son positivos significa que la normal está en el primer cuadrante, además

$$\tan \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{7}{8.6}\right)}{\left(\frac{5}{8.6}\right)} = \frac{7}{5} = 1.4 = \ 1.4 \qquad \alpha = \ 54º46'$$

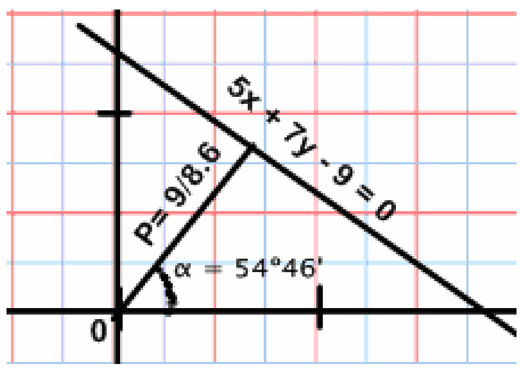


Figura 1.68

Ejemplo 2

Transformar a la forma normal la ecuación $x - 5y = 0$ y determinar los valores de p y α.

En la ecuación

$$x - 5y = 0, \qquad A = 1, \qquad B = -5 \quad \text{y} \quad C = 0.$$

La ecuación de la recta en su forma normal es

$$\frac{x - 5y}{\pm\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = 0 \quad \text{ó} \quad -\frac{1}{5.09}x + \frac{5}{5.09}y = 0,$$

entonces

$$p = 0 \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{5.09} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{5.09}$$

Esto significa que la normal está en el segundo cuadrante donde el coseno es negativo y el seno es positivo.

Por otro lado

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{5}{5.09}\right)}{\left(\frac{1}{5.09}\right)} = -5$$

$$\alpha = 180^\circ - 78^\circ 55' = 101^\circ\, 05'$$

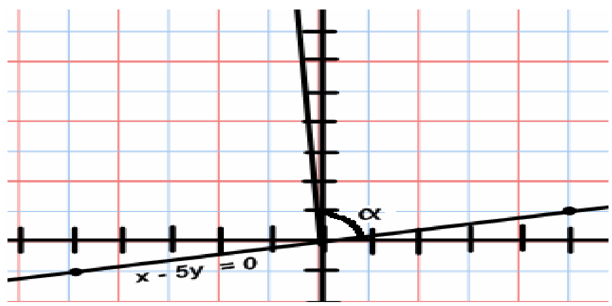


Figura 1.69

Ejercicio 20

1. Expresar en forma normal la ecuación de la recta para la α y p son:
   a) $\alpha = 45^\circ$, $p = 4$
   b) $\alpha = 60^\circ$, $p = 5$
   c) $\alpha = 90^\circ$, $p = 3$
   d) $\alpha = 150^\circ$, $p = 10$

2. Expresar en forma general las ecuaciones del punto anterior

3. Expresar en su forma normal cada una de las ecuaciones siguientes:
   a) $3x - 4y + 30 = 0$
   b) $2x + 3y + 12 = 0$
   c) $8x - 15y + 34 = 0$
   d) $y = 3x + 2$

1.2.9 Distancia de un punto a una recta

Una de las aplicaciones de la recta en su forma normal consiste en la determinación de la distancia entre un punto y una recta.

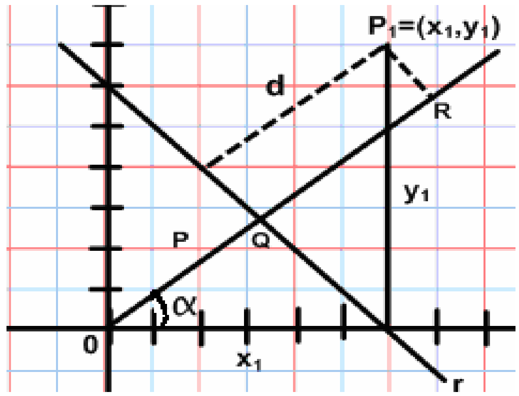


Figura 1.70

En la figura 1.70, r es una recta cuya ecuación en su forma general es

$$r : Ax + By + C = 0$$

y en su forma normal es

$$r : \cos\alpha\, x + \operatorname{sen}\alpha\, y - p = 0$$

entonces

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \operatorname{sen}\alpha - p \qquad (27)$$

es la expresión que corresponde a la *ecuación de la distancia del punto P_1 a la recta r en su forma normal* y

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (28)$$

es la expresión que corresponde a la *ecuación de la distancia del punto P_1 a una recta r en su forma general*

-el signo que precede al radical $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ se escoge como sigue

a) Si $C \neq 0$, r es de signo contrario a C
b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo
c) Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo

y además:

- Si $d > 0$ el punto y el origen están en distinto lado con respecto a la recta.
- Si $d < 0$ el punto y el origen están en el mismo lado con respecto a la recta.
- Si la recta pasa por el origen y $d > 0$ el punto se encuentra sobre la recta.
- Si la recta pasa por el origen y $d < 0$ el punto se encuentra debajo de la recta.

Ejemplo 1

Hallar la distancia de los puntos $P_1 = (2, 4)$ y $P_2 = (-4, -1)$ a la recta cuya ecuación es $2x + 3y - 8 = 0$.

Para el punto $P_1 = (2, 4)$

$$d = \frac{2(2) + 3(4) - 8}{\pm\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

cuando $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C y en este caso como $C = -8$ el radical es positivo y entonces,

$$d = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8}{3.6} = 2.2$$

y además la distancia positiva indica que P_1 y el origen están de distinto lado con respecto a la recta.

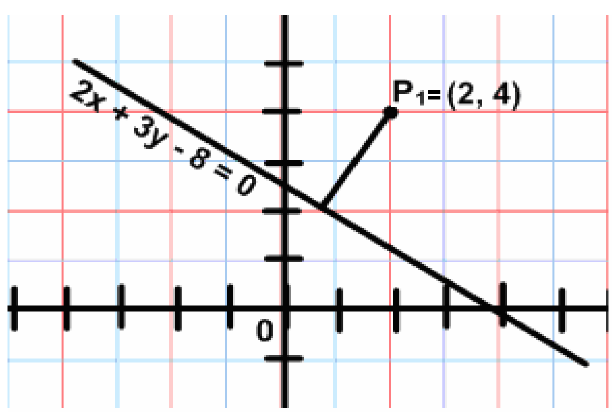


Figura 1.71

Para el punto $P_2 = (-4, -1)$

$$d = \frac{2(-4)+3(-1)-8}{\pm\sqrt{2^2+3^2}}$$

cuando $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C y en este caso como $C = -8$ el radical es positivo y entonces,

$$d = \frac{-19}{\sqrt{13}} = \frac{-19}{3.6} = -5.2$$

y además la distancia negativa indica que P_2 y el origen están del mismo lado con respecto a la recta.

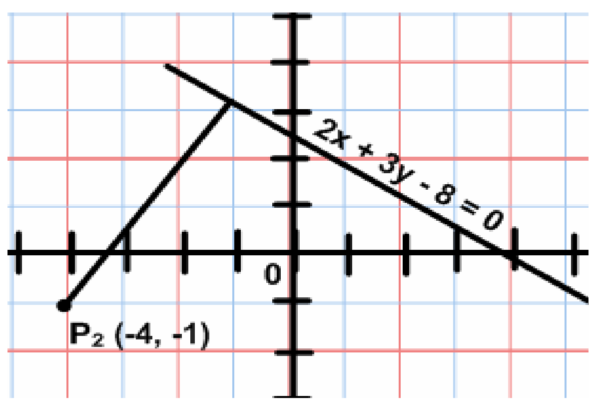


Figura 1.72

Ejercicio 21

1. Hallar la distancia entre la recta y el punto dados:

a) $5x + 12y - 30 = 0 \quad P = (9, 2)$

b) $y = 2x - 6 \quad P = (10, -2)$

c) $3x + 4y + 12 = 0 \quad P = (-3, -\frac{1}{2})$

d) $5x - 12y - 5 = 0 \quad P = (6, 1)$

1.2.10 Distancia entre rectas paralelas

Ejemplo 1

Determinar la distancia que separa al par de rectas paralelas, dadas a continuación:
$4x - 3y - 10 = 0$ y $4x - 3y + 10 = 0$.

Las ecuaciones también pueden escribirse así

$$4x - 3y - 10 = 0 \qquad\qquad 4x - 3y + 10 = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \qquad\qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

Como las rectas dadas son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente, la distancia es la misma en cualquier región de ellas, como se observa en la figura 1.73. En este caso, para mayor facilidad la distancia se calcula desde el origen del sistema, por donde pasa una de ellas, hasta la recta $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$.

Se puede ver que

$$O=(0,0), \qquad b= -\frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad m = \frac{4}{3}.$$

Entonces aplicando la fórmula

$$d_1 = \left| \frac{-b}{\sqrt{1+m^2}} \right| \tag{29}$$

se obtiene

$$d_1 = \left| \frac{-\left(-\frac{10}{3}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} \right| = 2$$

Posteriormente se calcula la distancia del origen del sistema hasta la otra recta

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3},$$

y entonces se puede ver que

$$O = (0{,}0), \qquad b = \frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad m = \frac{4}{3},$$

entonces aplicando la fórmula

$$d_2 = \left| \frac{-b}{\sqrt{1+m^2}} \right|,$$

se obtiene

$$d_2 = \left| \frac{-\left(\frac{10}{3}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} \right| = 2.$$

Sumando las dos distancias $d_1 + d_2$ se obtiene: $d_1 + d_2 = 2 + 2 = 4$

Por tanto la distancia entre las dos rectas paralelas es 4 unidades.

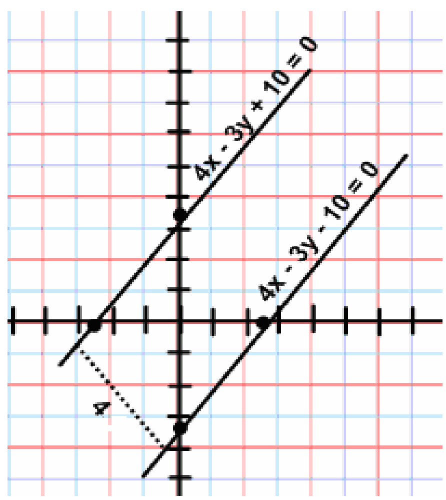


Figura 1.73

Ejercicio 22

1. Determinar la distancia que separa cada par de rectas paralelas, dadas a continuación:

a) $3 + 4y - 12 = 0$ y $3x + 4y = 0$
b) $5x + 12y - 26 = 0$ y $5x + 12y + 65 = 0$
c) $7x - 24y + 48 = 0$ y $7x - 24y + 30 = 0$
d) $2x + 3y - 15 = 0$ y $2x + 3y - 5 = 0$

Capítulo 2

Cónicas

Capítulo 2 CÓNICAS

Circunferencia y secciones cónicas

La *ecuación general de segundo grado en* x y y se expresa en la forma siguiente

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Al lugar geométrico que describe la ecuación anterior se le llama *sección cónica* o simplemente *cónica*. Este nombre proviene del hecho de que el lugar geométrico o curva se obtiene por la intersección de un cono circular recto con un plano.

Un cono circular recto se genera al hacer girar una recta que pasa por un punto fijo de una recta también fija formando con ésta un ángulo constante. Al punto fijo se le llama *vértice* y cualquier posición de la recta generatriz se denomina *elemento*. El vértice divide al cono en dos partes llamadas *mantos*.

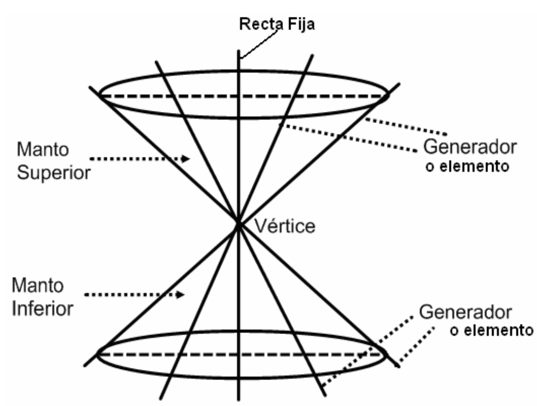


Figura 2.1

Cortes en un cono para obtener elipses y circunferencias

Un plano que no pase por el vértice, puede cortar a todos los elementos de un manto y formar una curva cerrada, dicha sección se llama *elipse* (figura 2.2).

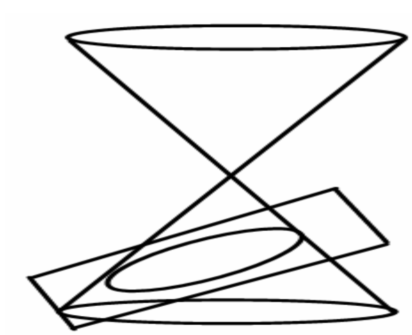


Figura 2.2

Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección es una *circunferencia* (figura 2.3).

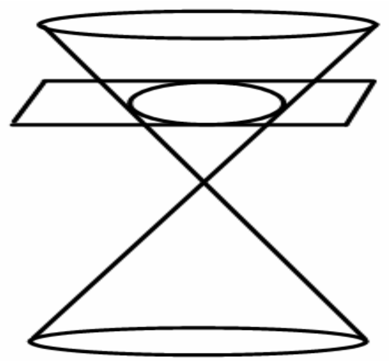


Figura 2.3

Si el plano pasa por el vértice, la sección es un *punto* (figura 2.4).

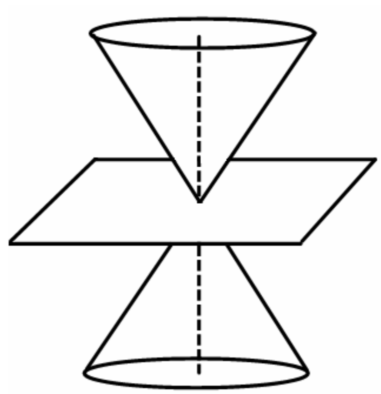


Figura 2.4

Cortes en un cono para obtener una parábola

Cuando el plano es paralelo a un elemento, la intersección se extiende a lo largo de un manto sin cortar el otro manto, la sección recibe el nombre de *parábola* (figura 2.5).

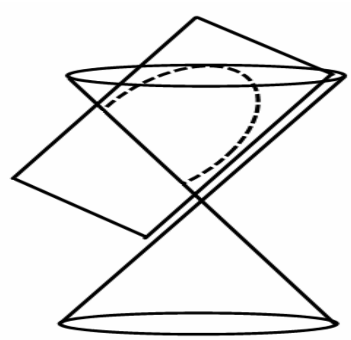


Figura 2.5

Cortes en un cono para obtener una hipérbola

Si el plano es paralelo al eje del cono y corta a sus dos mantos, la sección se llama *hipérbola* (figura 2.6).

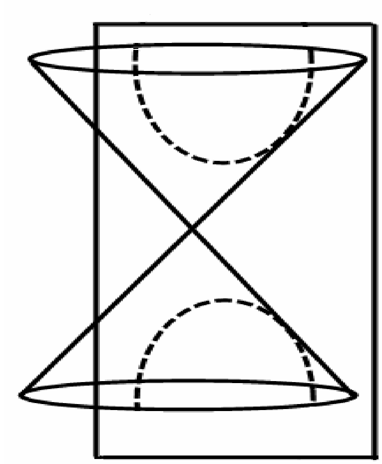


Figura 2.6

En una cónica la razón de sus distancias no dirigidas desde un punto fijo y desde una recta fija es la constante positiva e, a la que se le llama *excentricidad de la cónica*.

Cuando $e < 1$ representa una elipse.
Cuando $e = 0$ representa una circunferencia.
Cuando $e = 1$ representa una parábola.
Cuando $e > 1$ representa una hipérbola.

En este capítulo se estudiaran cuatro curvas que por su importancia y aplicaciones en algunas ramas de la ciencia, es necesario considerarlas. Cada una de estas curvas se describirá como un lugar geométrico y se demostrará que cada una de ellas es la gráfica de una ecuación cuadrática en x y y, que se puede representar como caso especial de la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en la cual los coeficientes A, B y C no son todos cero.

Estas cuatro curvas son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola llamadas *cónicas* debido a que se pueden describir como las curvas que se generan al intersecarse un plano con un cono circular.

2.1 Circunferencia

De las cuatro curvas cónicas, la circunferencia es la más simple y geométricamente se describe como la intersección de un cono recto circular y un plano paralelo a la base que no pase por el vértice como se muestra en la figura 2.7

La *circunferencia* es el lugar geométrico del plano descrito por un punto que se mueve a una distancia constante de un punto fijo, llamado *centro* de la circunferencia.

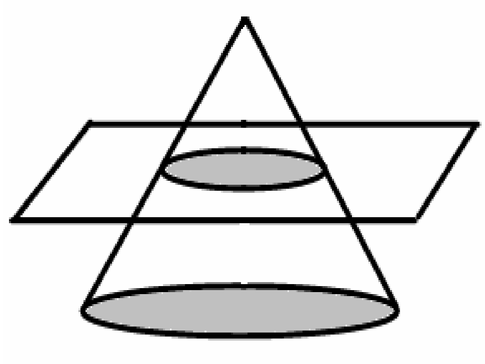


Figura 2.7

2.1.1 Elementos de la circunferencia

El *centro* C es el punto fijo de la circunferencia.

El *radio* r es la distancia constante al punto fijo; es decir, $r = \overline{CP}$.

La figura 2.8 muestra la circunferencia con:

- centro en $C = (h, k)$
- radio r y
- un punto en $P = (x, y)$

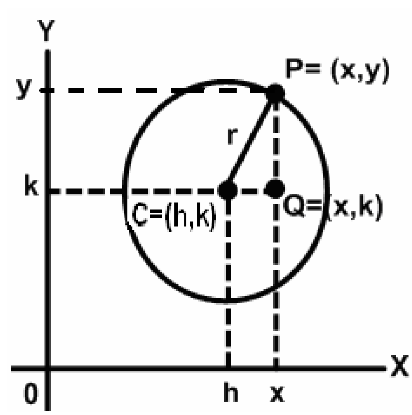


Figura 2.8

2.1.2 Ecuación normal u ordinaria de la circunferencia

En la figura 2.8, la distancia constante $|\overline{CP}|$ es el radio r que cumple la siguiente condición

$$|\overline{CP}| = r$$

aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo CQP

$$\overline{CQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{CP}^2$$

es decir

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (2)$$

La expresión (2) se conoce como la *ecuación normal u ordinaria de la circunferencia*, a partir de ella y mediante simple inspección se pueden determinar las coordenadas del centro $C = (h, k)$ y la longitud del radio r.

Circunferencia con centro en el origen o ecuación canónica de la circunferencia

Cuando el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas ($h = 0$ y $k = 0$) su ecuación se expresa de la siguiente manera

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

La expresión (3) se conoce como la *ecuación canónica de la circunferencia.*

Obtener la ecuación de la circunferencia cuando se conoce el radio

Cuando la circunferencia tiene su centro en el origen, su ecuación es de la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

por lo que si se conoce el radio, se sustituye su valor para obtener la ecuación correspondiente.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y su radio es 5.

Como el centro es $C = (0,0)$ y el radio es $r = 5$, se utiliza la ecuación canónica de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

y entonces la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 = 25$$

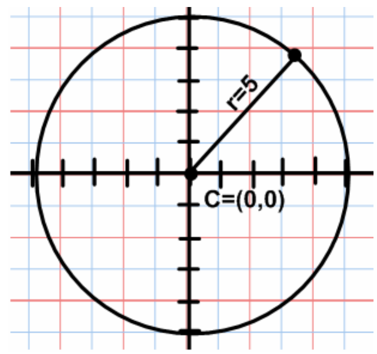


Figura 2.9

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto $P = (-5, 9)$.

La distancia entre el origen $C = (0,0)$ y el punto fijo $P = (-5, 9)$, es el radio r, esto es $r = |\overline{CP}|$, entonces hallar la distancia de C a P

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = |\overline{CP}| = \sqrt{(-5-0)^2 + (9-0)^2} = 10.29 \text{ unidades}$$

$$x^2 + y^2 = (10.29)^2$$

$$x^2 + y^2 = 106$$

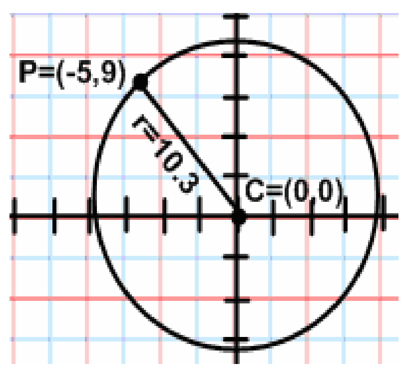


Figura 2.10

Obtener el centro y el radio a partir de la ecuación de la circunferencia

Cuando la ecuación de una circunferencia es de la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

se sabe que se trata de una circunferencia que tiene su centro en el origen y cuyo radio es la raíz cuadrada del término independiente.

Ejemplo 1

La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 169$. Determine su centro y su radio.

Por inspección de la ecuación de la circunferencia se ve que está expresada en su forma canónica, entonces se sabe que tiene:

- su centro en el origen $C = (0, 0)$ y

- su radio es $r = \sqrt{169} = 13$.

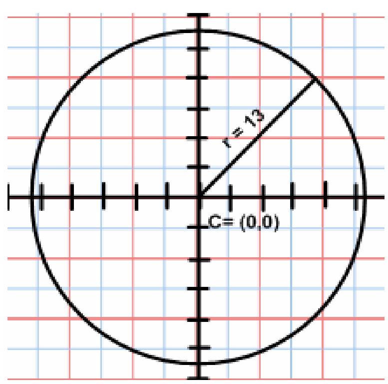


Figura 2.11

Circunferencia con centro fuera del origen

Cuando el centro de la circunferencia esta fuera del origen su ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

donde h y k son las coordenadas del centro.

Obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y el radio

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C = (-8, -3)$ y su radio es 6.

En la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

se sustituyen las coordenadas del centro $C = (-8, -3) = (h, k)$ y $r = 6$, se tiene

$$(x - (-8))^2 + (y - (-3))^2 = 6^2,$$

es decir,

$$(x + 8)^2 + (y + 3)^2 = 6^2,$$

que corresponde a la ecuación de la circunferencia solicitada, la cual también se expresa en forma desarrollada de la siguiente manera

$$x^2 + y^2 + 16x + 6y + 37 = 0.$$

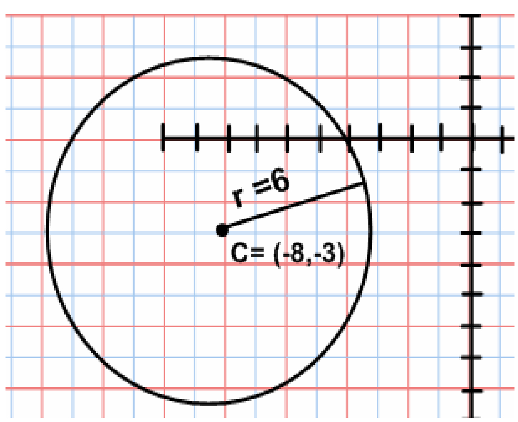


Figura 2.12

Obtener el centro y el radio a partir de la ecuación de la circunferencia

Ejemplo 1

Expresar la ecuación $x^2 + y^2 + 14x + 8y + 30 = 0$ en la forma ordinaria. Si representa una circunferencia, hallar su centro y su radio.

Trasponiendo el término independiente y ordenando los demás términos se tiene

$$x^2 + 14x + y^2 + 8y = -30$$

Sumando a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos de primer grado, queda así:

$$x^2 + 14x + (7)^2 + y^2 + 8y + (4)^2 = (7)^2 + (4)^2 - 30$$

o bien

$$(x^2 + 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16) = 49 + 16 - 30.$$

Factorizando en el primer miembro y sumando en el segundo

$$(x + 7)^2 + (y + 4)^2 = 35.$$

Por tanto, la ecuación representa una circunferencia con:

- centro $C = (-7, -4)$ y
- radio $r = \sqrt{35} = 5.9.$

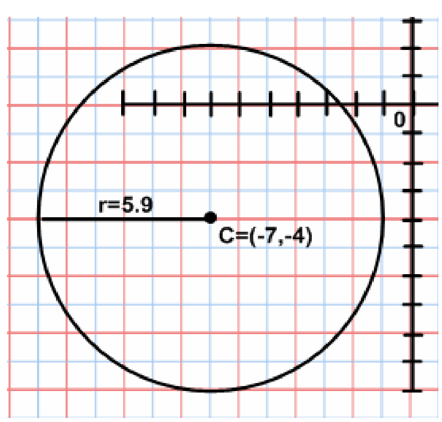


Figura 2.13

Ejercicio 23

1. Hallar en cada caso la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y su radio es:

a) 9 b) 12 c) 4 d) 7

2. Hallar en cada caso la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por el punto:

a) $P = (-4, 7)$ b) $P = (5, 8)$ c) $P = (-3, 4)$ d) $P = (-5, -5)$

3. Determine el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

a) $x^2 + y^2 = 49$ b) $x^2 + y^2 = 121$ c) $x^2 + y^2 = 64$ d) $x^2 + y^2 = 16$

4. Determinar en cada caso la ecuación de la circunferencia cuyo centro y radio son:

a) $C = (-7, -3)$, $r = 5$ b) $C = (4, -3)$, $r = 9$
c) $C = (2, 2)$, $r = 2$ d) $C = (5, 4)$, $r = 6$

5. Si las siguientes ecuaciones corresponden a ecuaciones de circunferencias, expresarlas en la forma ordinaria y hallar sus centros y sus radios.

a) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 8 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 16x + 6y - 12 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 14 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 8 = 0$

Es recomendable hacer la gráfica de cada uno de lo ejercicios anteriores.

2.1.3 Ecuación general de la circunferencia

Conversión de la forma ordinaria a la forma general

Si la ecuación de la circunferencia se presenta en la forma ordinaria,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

al desarrollar y ordenar sus términos, se puede escribir así

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0,$$

de manera que reordenando términos, encontramos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Si se hacen

$$D = -2h, \quad E = -2k \quad \text{y} \quad F = h^2 + k^2 - r^2$$

entonces se obtiene la *Ecuación General de la Circunferencia*

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

Observación

Cuando la ecuación de una circunferencia está expresada en su forma general, los dos términos de segundo grado tienen coeficientes iguales, es decir, del mismo valor absoluto y del mismo signo.

Ejemplo 1

Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en $(7, 3)$ y cuyo radio es 4.

Se obtiene la ecuación ordinaria

$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4^2.$$

Al desarrollar se puede escribir así

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0.$$

Se reordenan los términos y se obtiene la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 14x - 6y + 42 = 0.$$

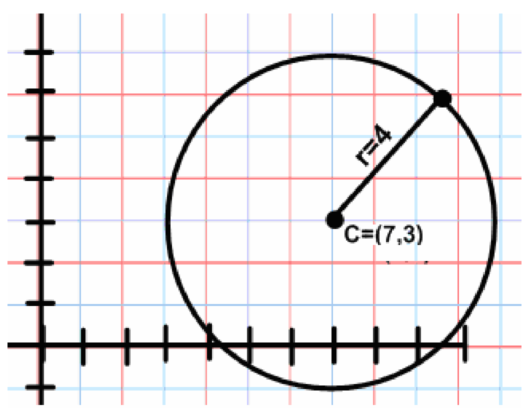


Figura 2.14

Conversión de la forma general a la forma ordinaria

Para determinar el radio de la circunferencia a partir de la ecuación general se procede de manera inversa. Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

se traspone el término independiente y se reordenan los otros términos

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = - F,$$

sumando a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes D y E, se obtiene:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F.$$

Al factorizar en el primer miembro y sumar en el segundo, se transforma en

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}.$$

Para que esta expresión corresponda a una circunferencia se requiere que:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

ó bien

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

con lo cual se presentan tres casos posibles para $D^2 + E^2 - 4F$

a) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación corresponde a una circunferencia de

centro $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

b) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación corresponde a una circunferencia de radio cero, un circulo punto o un circulo nulo, es decir, representa un solo punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

c) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, se dice que la ecuación corresponde a una circunferencia imaginaria y, por tanto no tiene representación real.

En lo sucesivo se dirá que $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa a una circunferencia de radio diferente de cero sólo cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$,

con las coordenadas del centro

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \tag{5}$$

y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}\,. \tag{6}$$

Ejemplo 1

Expresar la ecuación $x^2 + y^2 - 14x + 9y - 36 = 0$ en la forma ordinaria y obtener el centro y el radio de la circunferencia que representa.

Se traspone el término independiente y se reordenan los otros términos

$$x^2 - 14x + y^2 + 9y = 36$$

se suma a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos lineales y se obtiene

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 9y + \frac{81}{4} = 36 + 49 + \frac{81}{4}$$

Al factorizar en el primer miembro y sumar en el segundo, se transforma en

$$(x-7)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{421}{4}\,.$$

De aquí que

- el centro de la circunferencia es $C = \left(7, -\frac{9}{2}\right)$ y
- el radio es $r = \sqrt{\frac{421}{4}} = 10.2.$

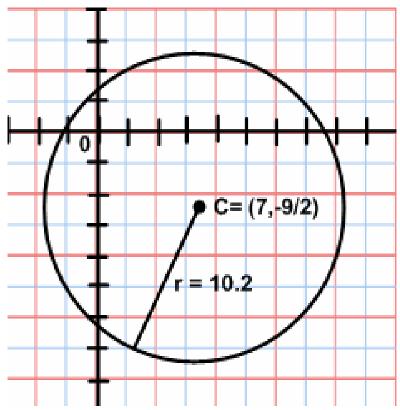


Figura 2.15

Ejercicio 24

1. Hallar en cada caso la ecuación de la circunferencia. Expresarla en las formas ordinarias y general y hacer la representación gráfica.

a) $C = (2, 4)$ $r = 3$

b) $C = (2, \text{-}7)$ $r = \sqrt{53}$

c) $C = (\text{a, b})$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

d) $C = (2, 3)$ diámetro $= 10$

2. Obtener las coordenadas del centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$

c) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 5x - 7y - 10 = 0$

2.1.4 Intersección de una recta con una circunferencia

Obtener la ecuación de la circunferencia a partir de los extremos del diámetro

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos $A = (-5, -3)$ y $B = (4, 6)$.

Se requiere obtener el centro de la circunferencia, para lo cual se calculará el punto medio de la recta AB

$$P_m = (x_m, y_m) = \left(\frac{-5+4}{2}, \frac{-3+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

entonces

$$C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

También se requiere tener el radio, que es la distancia del centro hacia cualquier punto de la circunferencia, entonces se puede calcular la distancia de $\overline{CA}$ o de $\overline{CB}$. En éste caso se obtiene la distancia de $\overline{CA}$

De la ecuación de la distancia entre dos puntos

$$r = |\overline{CA}| = \sqrt{\left(-5-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-3-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{40.5} = 6.36,$$

la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 40.5,$$

la ecuación de la circunferencia en su forma general es

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 38 = 0.$$

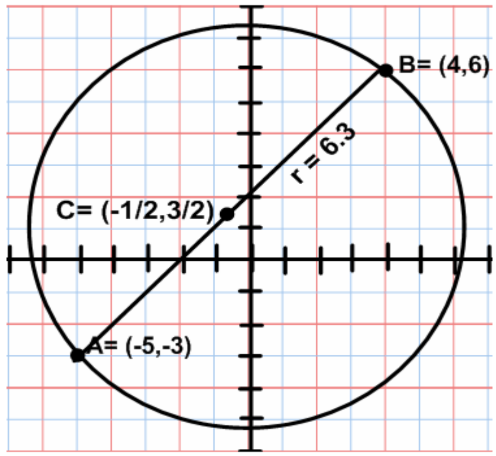


Figura 2.16

Ejercicio 25

1. Hallar, en cada caso, la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos A y B y hacer su representación gráfica.
   a) $A = (2, 4)$ y $B = (-3, 5)$
   b) $A = (-5, 5)$ y $B = (1, 3)$
   c) $A = (0, 0)$ y $B = (4, 6)$
   d) $A = (-2, -3)$ y $B = (1, -2)$

Obtener los extremos de la recta que corta la circunferencia

Hallar los puntos donde la recta $x - y - 1 = 0$ corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

Se despeja x de la ecuación de la recta

$$x = y + 1.$$

Se sustituye éste valor de x en la ecuación de la circunferencia

$$(y + 1)^2 + y^2 = 25,$$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 - 25 = 0,$$

y así se tiene el formato de una ecuación general de segundo grado

$$2y^2 + 2y - 24 = 0,$$

$$a = 2 \qquad b = 2 \qquad c = -24$$

que se resuelve utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

sustituyendo los valores

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-24)}}{2(2)} = \frac{-2 \pm 14}{4},$$

con el signo positivo

$$y_1 = \frac{12}{4} = 3 \qquad x_1 = 3 + 1 = 4 \qquad P_1 = (4, 3),$$

con el signo negativo

$$y_2 = \frac{-16}{4} = -4 \qquad x_2 = -4 + 1 = -3 \qquad P_2 = (-3, -4).$$

La recta $x - y - 1 = 0$ corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en los puntos $P_1 = (4, 3)$ y $P_2 = (-3, -4)$ como se muestra en la figura 2.17.

Para encontrar el lugar geométrico de la ecuación de la recta se obtienen la pendiente y las coordenadas al origen

$$x - y - 1 = 0$$

$$m = -1/-1 = 1$$

$$a = -(-1)/1 = 1$$

$$b = -(-1)/-1 = -1$$

Para encontrar el lugar geométrico de la ecuación de la circunferencia se obtienen el centro y el radio

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$C = (0,0)$$

$$r = 5$$

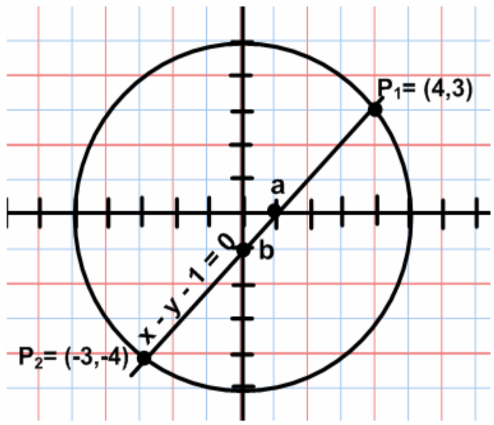


Figura 2.17

Ejercicio 26

1. En cada caso, hallar los puntos donde las rectas cortan a las circunferencias y graficar

a) $x + 2y - 6 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 4x - 6y - 40 = 0$

b) $x + 7y + 5 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 6x - 2y - 19 = 0$

c) $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 25 = 0$

d) $x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 9 = 0$

2.1.5 Recta tangente a una circunferencia

Hallar la ecuación de una circunferencia tangente a una recta de ecuación dada.

Ejemplo 1

Sea la circunferencia con centro en el punto C = (-6,-4) tangente a la recta $4x + 5y + 8 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia.

Por la ecuación (28) del capítulo de rectas, se puede obtener el radio de la circunferencia

$$r = \frac{4(-6)+5(-4)+8}{\pm\sqrt{4^2+5^2}} = \frac{-36}{\pm 6.4} = 5.6.$$

La ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x+6)^2 + (y+4)^2 = 31.36.$$

La ecuación de la circunferencia en el formato general es

$$x^2 + y^2 + 12x + 8y + 20.64 = 0.$$

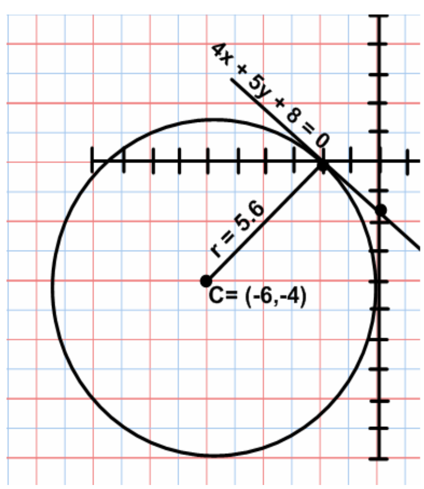


Figura 2.18

Ejercicio 27

1. Hallar en cada caso las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia y su gráfica.
   a) Centro $C = (-3, 5)$, tangente a la recta $3x + 4y + 5 = 0$
   b) Centro $C = (-2, -6)$, tangente a la recta $-4x + 6y - 8 = 0$
   c) Centro $C = (2, 4)$, tangente a la recta $7x - 3y + 10 = 0$
   d) Centro $C = (-4, -3)$, tangente a la recta $-8x - 5y - 9 = 0$

2.1.6 Intersección de dos circunferencias

Hallar los puntos de intersección de las circunferencias representadas por sus ecuaciones.

Ejemplo 1

Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias representadas por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0.$$

Para encontrar los puntos de intersección, se resuelve el sistema de ecuaciones:

se resta la primera ecuación a la segunda

$$\begin{array}{r} -x^2 - y^2 + 2x - 4y = 0 \\ \underline{x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0} \\ 4x + 2y = 0. \end{array}$$

Se despeja y y entonces

$$y = -2x.$$

Se sustituye el valor de y en

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

y se obtiene

$$x^2 + (-2x)^2 - 2x + 4(-2x) = 0,$$
$$x^2 + 4x^2 - 2x - 8x = 0,$$
$$5x^2 - 10x = 0,$$

$$5x\,(x - 2) = 0,$$

entonces

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 2.$$

Se sustituyen x_1 y x_2 en $y = -2x$

$$y_1 = 0 \quad \text{y} \quad y_2 = -4.$$

Por lo tanto, los puntos de intersección de las circunferencias son

$$P_1 = (0, 0) \quad \text{y} \quad P_2 = (2, -4)$$

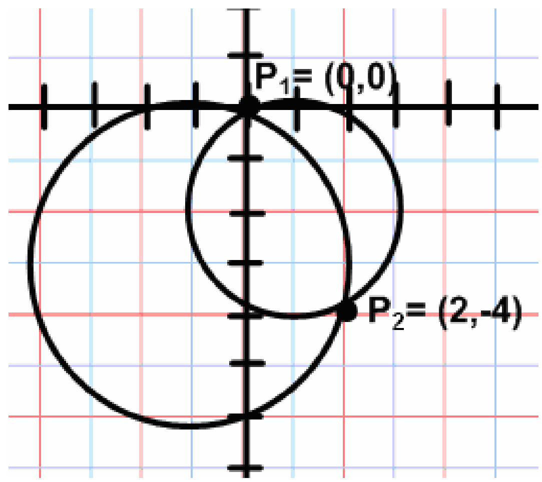


Figura 2.19

Ejercicio 28

1. En cada caso encontrar los puntos de intersección de las circunferencias representadas por las ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 - 14x + 16y + 100 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 16 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$

2.2 Parábola

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija. El punto fijo es el *foco* de la parábola. La recta fija es la *directriz*.

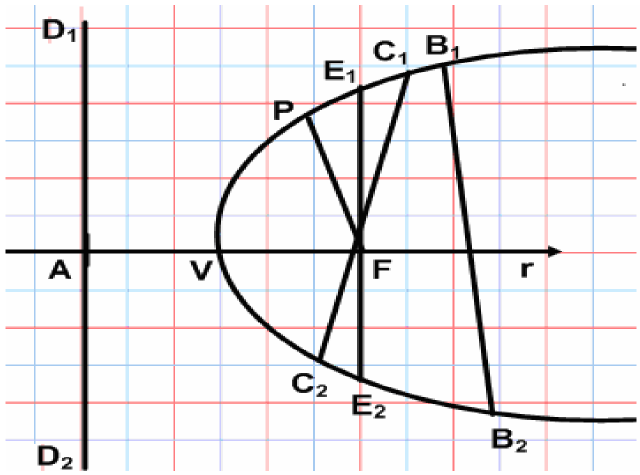


Figura 2.20

2.2.1 Elementos de la parábola

Sea la figura 2.20 donde:

F	es el *foco*.
D_1D_2	es la *directriz*.
r	es el *eje* de la parábola. es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz.
A	es la intersección del eje y la directriz.
V	es el punto llamado *vértice*. es la intersección de la parábola con su eje. por definición es equidistante del foco y de la directriz. es el punto medio del segmento $\overline{AF}$.
B_1B_2	es una *cuerda*. segmento de recta que une dos puntos de la parábola.
C_1C_2	es una *cuerda focal*. segmento de recta que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco.
E_1E_2	es el *lado recto*, el cual se identificará con $L.R.$ es una cuerda focal perpendicular al eje de la parábola.
PF	es el *radio focal* o radio vector. es un segmento de recta que une cualquier punto de la parábola con el foco.

2.2.2 Parábola vertical

Parábola vertical con vértice en el origen

La ecuación canónica de una parábola vertical se obtiene cuando:

- su eje coincide con el eje Y y
- su vértice está en el origen.

Sea el eje Y, la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, es decir, el eje de la parábola.

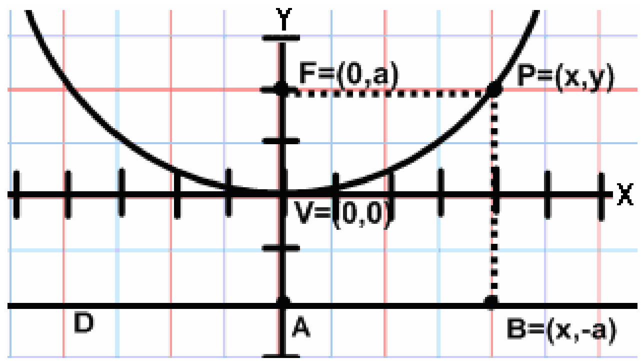


Figura 2.21

De acuerdo con la figura 2.21 se designan a:

- la distancia entre la directriz y el foco como $2a$; es decir, $\overline{AF} = 2a$
- al foco como $(0, a)$; esto es, $F = (0, a)$
- el punto A como $(0, -a)$; es decir, $A = (0, -a)$.

Cualquier punto $P = (x, y)$ de la parábola está a la misma distancia del foco y de la directriz, esta condición geométrica se establece de la siguiente manera

$$|\overline{FP}| = |\overline{PB}|.$$

Ahora, como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} ,$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-a))^2} = \sqrt{(y+a)^2} = | y + a | ,$$

se tiene

$$\sqrt{x^2 + (y-a)^2} = |y+a|.$$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 - y^2 - 2ay - a^2 = 0,$$

quedando finalmente

$$x^2 = 4ay. \tag{7}$$

Esta expresión se conoce como la *ecuación canónica de una parábola vertical* donde:

- su *vértice* está en el origen $V = (0,0)$
- su *foco* se encuentra en $F = (0, a)$
- si $a > 0$ entonces la curva abre hacia arriba figura 2.22
- si $a < 0$ entonces la curva abre hacia abajo figura 2.23
- la *ecuación de la directriz* es

$$y = -a \tag{8}$$

- las *coordenadas de los extremos del lado recto* son

$$(2a, a) \text{ y } (-2a, a) \tag{9}$$

- la *longitud del lado recto* es

$$|4a| . \tag{10}$$

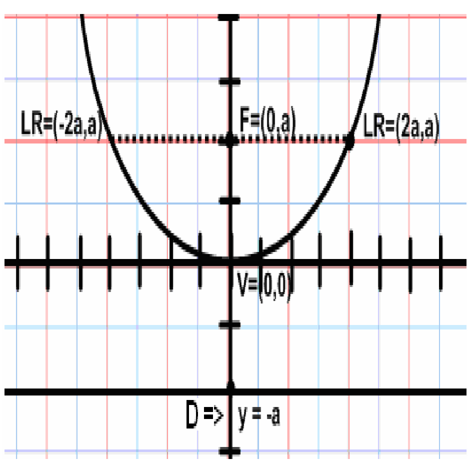


Figura 2.22

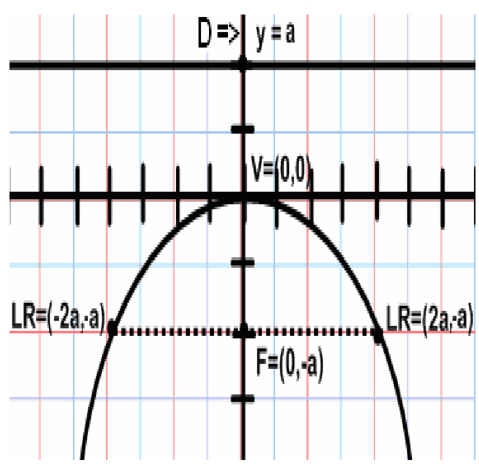


Figura 2.23

Conociendo el vértice y los extremos del lado recto es posible trazar un bosquejo aproximado de la parábola.

Obtener los elementos de la parábola a partir de su ecuación

Ejemplo 1

La ecuación de la parábola es $x^2 = -8y$. Obtener las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Trazar la gráfica.

- La variable del término de primer grado indica que el eje de la parábola es el eje Y

- El signo negativo indica que a es negativa.

Por tanto el foco está sobre el rayo negativo del eje Y y la parábola abre hacia abajo.

Se requiere obtener el valor de a

$$x^2 = 4ay$$

$$x^2 = -8y$$

$$4a = -8$$

$$a = -2.$$

Teniendo el valor de a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- El vértice esta en el origen entonces $V = (0,0)$.

- El foco es $F = (0, a) = (0,-2)$.

- La ecuación de la directriz es $y = -a = -(-2)$. Entonces $y = 2$.

- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = |4(-2)| = 8$.

- Los extremos del lado recto son los puntos $(2a, a) = (-4, -2)$ y $(-2a, a) = (4, -2)$.

- La gráfica de la parábola es la figura 2.24.

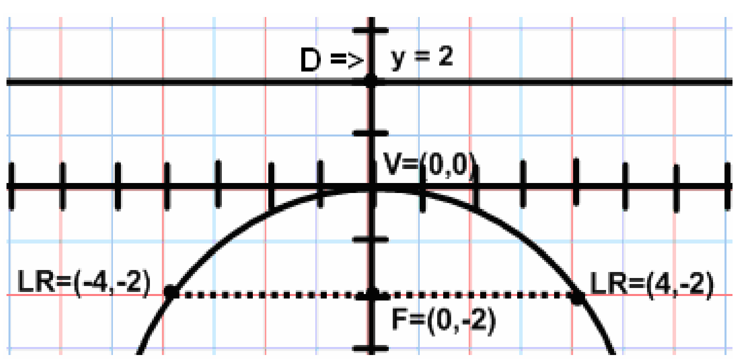


Figura 2.24

Obtener la ecuación a partir de los elementos de la parábola

Ejemplo 1

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $(0,5)$, hallar la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Trazar la gráfica.

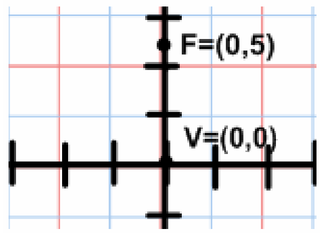


Figura 2.25

De acuerdo con la figura 2.25, por las coordenadas del foco se sabe que la parábola tiene su eje en el eje Y y abre hacia arriba, de manera que su ecuación es de la forma

$$x^2 = 4ay$$

como $\overline{VF} = 5$, se tiene $a = 5$

Teniendo el valor de a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- El vértice es $V = (0,0)$.

- El foco es $F = (0, a) = (0, 5)$.

- La ecuación de la directriz es $y = -a = -5$. Entonces $y = -5$.

- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 20$.

- Los extremos del lado recto son $(2a, a) = (10,5)$ y $(-2a, a) = (-10,5)$.

- Sustituyendo el valor de a en la ecuación $x^2 = 4ay$ se tiene $x^2 = 4(5)y$.

  Por tanto la ecuación de la parábola es $x^2 = 20y$.

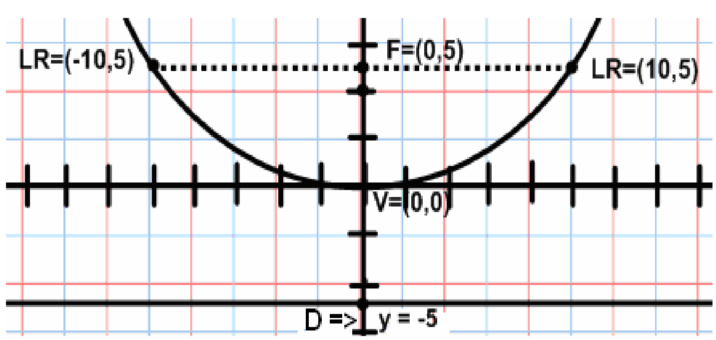


Figura 2.26

Ejemplo 2

Se tiene una parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje Y y pasa por el punto $(6, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Trazar su gráfica.

La parábola tiene su eje sobre el eje Y y su vértice está en el origen, por lo que su ecuación es de la forma

$$x^2 = 4ay.$$

Como la parábola pasa por el punto $(6,-3)$, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación,

$$6^2 = 4a\,(-3),$$

$$36 = -12\,a,$$

$$a = -3.$$

Sustituyendo a en la ecuación $x^2 = 4ay$ se tiene $x^2 = 4(-3)y$.

Por tanto la ecuación de la parábola es $x^2 = -12y$.

Teniendo el valor de a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- El vértice es $V = (0,0)$.
- El foco es $F = (0, a) = (0, -3)$.
- La ecuación de la directriz es $y = -a = -(-3) = 3$. Entonces $y = 3$.
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 12$.
- Los extremos del lado recto son $(2a, a) = (-6, -3)$ y $(-2a, a) = (6, -3)$.

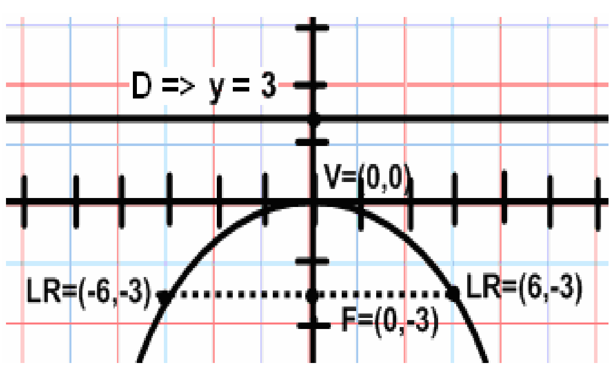


Figura 2.27

Ejercicio 29

1. Para cada una de las siguientes parábolas: hallar el foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y la ecuación de la directriz. Trazar la curva.
   a) $x^2 = -10y$
   b) $x^2 = 12y$
   c) $x^2 - 8y = 0$
   d) $x^2 = y$

2. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface la condición dada:
   a) Foco en $(0, 4)$
   b) Foco en $(0, -3)$
   c) Directriz $y - 6 = 0$
   d) Longitud del lado recto es 20 y abre hacia abajo

2.2.3 Ecuación normal de una parábola vertical o ecuación de una parábola vertical con vértice fuera del origen

Parábola con vértice en (h,k) y eje paralelo al eje Y

Se considera una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y pero que no coincida con él.

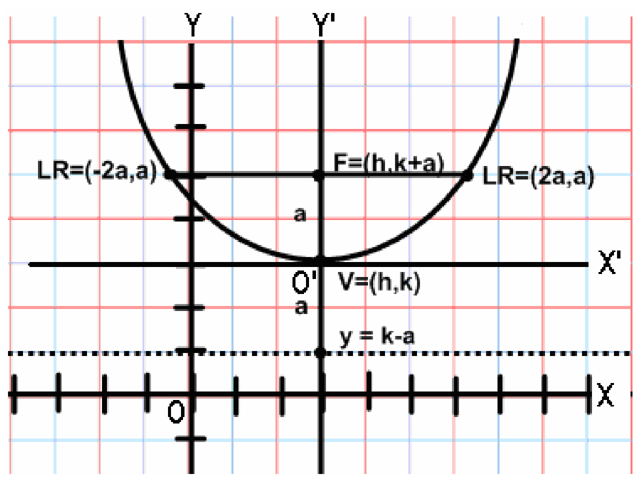


Figura 2.28

En la figura 2.28

- el vértice está en (h, k)

- el foco está en $(h, k+a)$.

Si se trasladan los ejes coordenados de manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), la distancia del vértice al foco es a y la ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes X', Y' es

$$(x')^2 = 4a(y').$$

Las ecuaciones de transformación para esta traslación de los ejes son:

$$x = x' + h \qquad\qquad y = y' + k$$

de donde

$$x' = x - h \qquad\qquad y' = y - k.$$

Si se sustituyen los valores de x' y y' en la ecuación de la parábola se obtiene

$$(x - h)^2 = 4a\,(y - k). \tag{11}$$

La expresión (11) es la *ecuación de una parábola con vértice en* (h, k) y *eje paralelo al eje* Y.

Tanto en la ecuación (11) como en la figura 2.28 se observa que:
Cuando $a > 0$, el factor $(y - k)$ debe ser ≥ 0. Entonces la parábola abre hacia arriba.
Cuando $a < 0$, el factor $(y - k)$ debe ser ≤ 0. Entonces la parábola abre hacia abajo.

Teniendo los valores de h, k y a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- $\overline{VF} = a$
- El *vértice* es $V = (h, k)$.
- El *foco* es $F = (h, k+a)$.
- La *ecuación de la directriz* es $y = k-a$.
- La *longitud del lado recto* es $L.R. = |4a|$.
- Los *extremos del lado recto* son los puntos $(h+2a, k+a)$ y $(h-2a, k+a)$.

Ejemplo 1

Con base en la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es $(5, 2)$ y su directriz es $y + 4 = 0$.

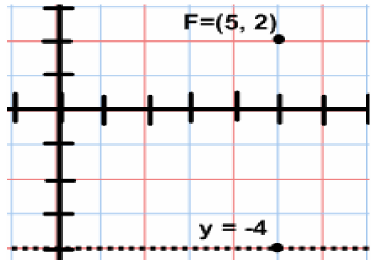


Figura 2.29

Al graficar los datos $F = (5, 2)$ y directriz $y = -4$, (figura 2.29) se puede observar que el eje de la parábola es paralelo al eje Y y abre hacia arriba por tanto su ecuación es

$$(x - h)^2 = 4a\ (y - k).$$

El vértice V, es el punto medio entre la directriz y el foco por lo que $V = (5, -1)$.

Como $V = (h, k)$ entonces $h = 5$ y $k = -1$.

$\overline{DF} = 2a$ entonces $\overline{VF} = a$ por lo tanto $a = 3$.

- La ecuación de la parábola es $(x - 5)^2 = 12\ (y + 1)$.
- El vértice es $V = (h, k) = (5, -1)$.
- El foco es $F = (h, k+a) = (5, 2)$.
- La ecuación de la directriz es $y = k\text{-}a$. Entonces $y = -4$.
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 12$.
- Los extremos del lado recto son $(h+2a, k+a) = (11, 2)$ y $(h\text{-}2a, k+a) = (-1, 2)$.
- La gráfica correspondiente se muestra en la figura 2.30.

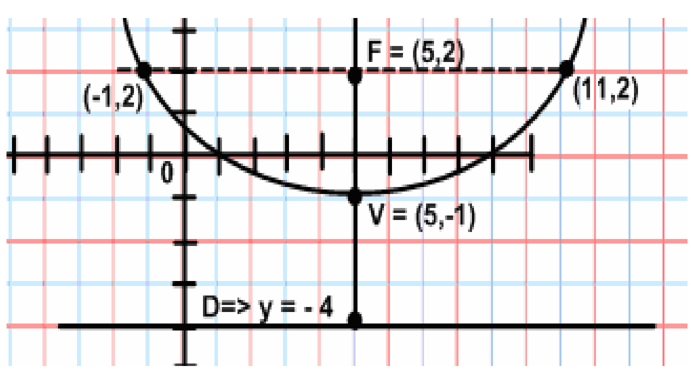


Figura 2.30

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice esta en (3, 0) y el foco en (3,-2).

Al graficar los datos (figura 2.31) se puede observar que el eje de la parábola es paralelo al eje Y y abre hacia abajo.

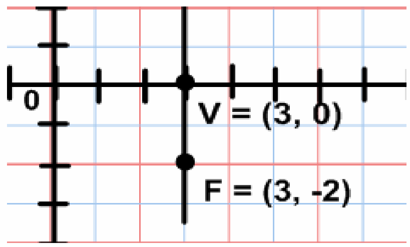


Figura 2.31

- El vértice es $V = (h, k)$ entonces $V = (3, 0)$.
- $\overline{VF} = a$ por tanto $a = -2$.
- El foco es $F = (h, k+a) = (3, -2)$.
- La ecuación de la directriz es $y = k\text{-}a$. Entonces $y = 2$.
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a|$. Entonces $L.R. = 8$.
- Los extremos del lado recto son los puntos $(h+2a, k+a) = (-1, -2)$ y $(h\text{-}2a, k+a) = (7, -2)$.

Una vez que se tiene la información anterior se puede obtener la ecuación de la parábola

$$(x - h)^2 = 4a \; (y - k),$$

$$(x - 3)^2 = 4(-2) \; (y - 0),$$

$$(x - 3)^2 = -8\, y,$$

la gráfica correspondiente se muestra en la figura 2.32.

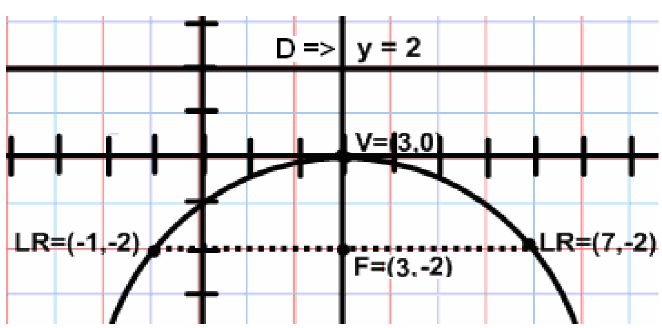


Figura 2.32

Ejercicio 30

1. Hallar en cada caso la ecuación de la parábola cuyo foco y directriz son:
a) $F = (3, 4)$; $y = 0$.
b) $F = (-6, 2)$; $y - 3 = 0$.

2. Hallar la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:

a) Vértice $(2, 0)$ y foco $(2, 2)$
b) Vértice $(4, 5)$ y foco $(4, 1)$
c) Vértice $(-1, -2)$, el lado recto es igual a 12 y abre hacia abajo
d) Extremos del lado recto en $(-2, -7)$ y $(6, -7)$ y abre hacia arriba

2.2.4 Parábola horizontal

La ecuación canónica de una parábola horizontal se obtiene cuando su eje coincide con el eje coordenado X y su vértice esta en el origen.

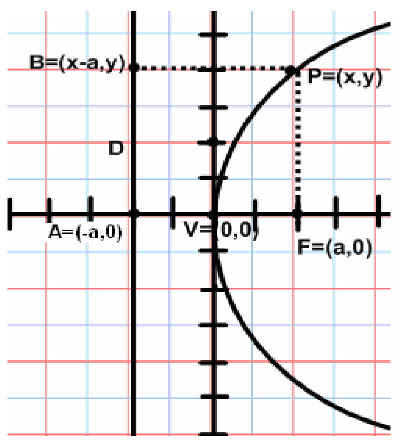


Figura 2.33

De acuerdo con la figura 2.33 se designan a:

- La distancia entre la directriz y el foco como $2a$. Entonces $\overline{AF} = 2a$.
- El foco como $(a, 0)$; esto es $F = (a, 0)$.
- El punto A como $(-a, 0)$.

Cualquier punto $P = (x, y)$ de la parábola está a la misma distancia del foco y de la directriz. Esta condición geométrica se establece de la siguiente manera

$$|\overline{FP}| = |\overline{PB}|$$

como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(y-0)^2 + (x-a)^2} = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(y-y)^2 + (x-(-a))^2} = \sqrt{(x+a)^2} = |x+a|$$

se tiene $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = |x+a|.$

Elevando al cuadrado se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2 = 0.$$

Finalmente, al sumar, encontramos

$$y^2 = 4ax. \qquad (12)$$

La expresión (12) se conoce como la *ecuación canónica de una parábola horizontal* donde:

- su *vértice* está en el origen $V = (0,0)$
- su *foco* se encuentra en $F = (a, 0)$
- si $a > 0$ entonces la curva abre hacia la derecha figura 2.34
- si $a < 0$ entonces la curva abre hacia la izquierda figura 2.35
- la *ecuación de la directriz* es $x = -a$ (13)
- la *longitud del lado recto* es $L.R. = |4a|$ (14)
- los *extremos del lado recto* son los puntos $(a, 2a)$ y $(a, -2a)$. (15)

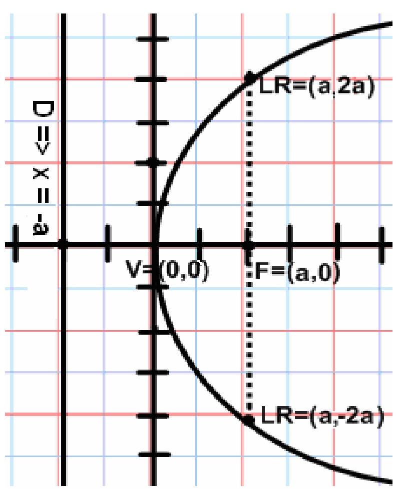


Figura 2.34

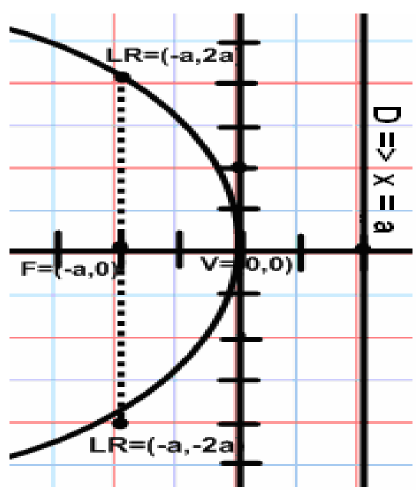


Figura 2.35

Conociendo el vértice y los extremos del lado recto es posible trazar un bosquejo aproximado de la parábola.

Obtener los elementos de la parábola a partir de su ecuación

Ejemplo 1

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$. Obtener las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Trazar la gráfica.

La variable del término de primer grado indica que el eje de la parábola es X y el signo negativo indica que a es negativa. Por tanto el foco está sobre el rayo negativo del eje X y la parábola abre hacia la izquierda.

$$y^2 = 4ax$$

$$y^2 = -12x$$

$$4a = -12$$

$$a = -3.$$

Teniendo el valor de a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- El vértice es $V = (0,0)$.

- El foco es $F = (a, 0) = (-3, 0)$.

- La ecuación de la directriz es $x = -a = -(-3)$. Entonces $x = 3$.

- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 12$.

- Los extremos del lado recto son los puntos $(a, 2a)= (-3, -6)$ y $(a,-2a)= (-3, 6)$.

- Sustituyendo el valor de a en la ecuación $y^2 = 4ax$ se tiene $y^2 = 4(-3)x$;

  por tanto, la ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$.

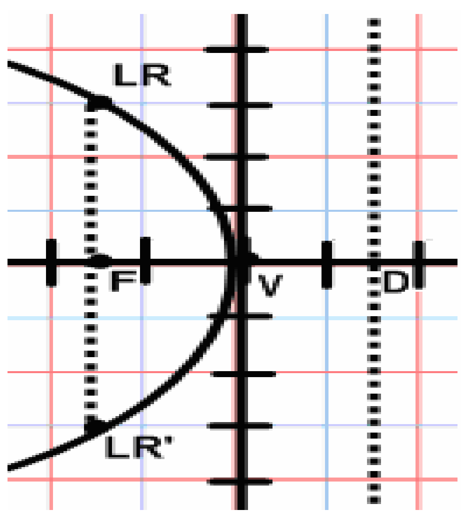


Figura 2.36

Obtener la ecuación de la parábola a partir de sus elementos

Ejemplo 1

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $(6,\ 0)$, hallar la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Trazar la gráfica.

Por las coordenadas del foco se sabe que la parábola tiene su eje en el eje X, abre hacia la derecha de manera que su ecuación es de la forma $y^2 = 4ax$.

$\overline{VF} = 6$ entonces $a = 6$.

- Sustituyendo el valor de a en la ecuación

$$y^2 = 4ax$$

se tiene

$$y^2 = 4(6)x;$$

por tanto, la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 24x.$$

- El vértice es $V = (0, 0)$.
- El foco es $F = (a, 0) = (6, 0)$.
- La ecuación de la directriz es $x = -a$. Entonces $x = -6$.
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 24$.
- Los extremos del lado recto son los puntos $(a, 2a) = (6, 12)$ y $(a, -2a) = (6, -12)$.

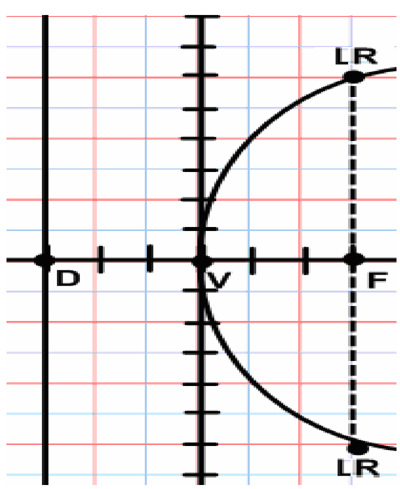


Figura 2.37

Ejemplo 2

Una parábola con vértice en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto (5, -3). Hallar su ecuación, las coordenadas de su foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Trazar su gráfica.

La parábola tiene su eje sobre el eje X por lo que su ecuación es de la forma $y^2 = 4ax$.

Como la parábola pasa por el punto (5, -3), las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación, es decir

$$(-3)^2 = 4a\,(5)$$

$$9 = 20a$$

$$a = 9/20$$

$$a = .45.$$

- Sustituyendo el valor de a en la ecuación

$$y^2 = 4ax$$

se tiene

$$y^2 = 4(.45)x$$

por tanto la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 1.8x$$

- El vértice es $V = (0, 0)$.
- El foco es $F = (a, 0) = (.45, 0)$.
- La ecuación de la directriz es $x = -a$. Entonces $x = -\ .45$.
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 1.8$.
- Los extremos del lado recto son los puntos $(a, 2a) = (.45, .9)$ y $(a, -2a) = (.45, -.9)$.

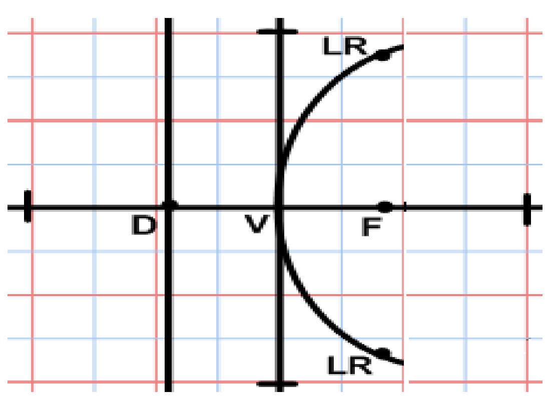


Figura 2.38

Ejercicio 31

1. Para cada una de las siguientes parábolas con vértice en el origen, hallar las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y la ecuación de la directriz. Trazar la curva.

a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = x$ c) $y^2 = 2x$ d) $y^2 + 3x = 0$

2. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface la condición dada.

a) Foco en $(8, 0)$
b) Foco en $(-5, 0)$
c) Directriz $x - 7 = 0$
d) Longitud del lado recto es 16 y abre hacia la derecha

2.2.5 Ecuación normal de una parábola horizontal o ecuación de una parábola horizontal con vértice fuera del origen

Parábola con vértice en (h,k) y eje paralelo al eje X

Se considera una parábola cuyo eje es paralelo al eje coordenado X pero que no coincida con él.

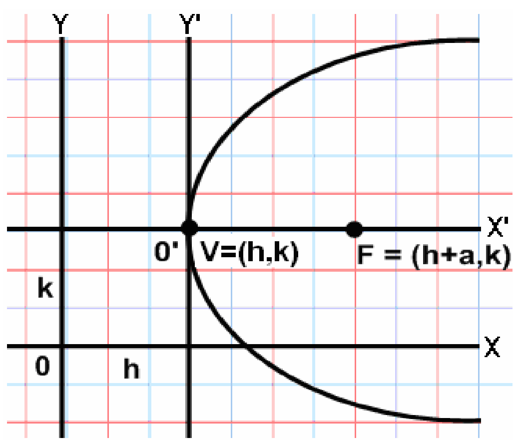


Figura 2.39

De acuerdo con la figura 2.39:

- el vértice está en (h, k), entonces, $V = (h, k)$
- el foco está en $(h+a, k)$, entonces, $F = (h+a, k)$
- se trasladan los ejes coordenados de manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k),

- la distancia del vértice al foco es a, es decir $\overline{VF} = a$

- la ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes X', Y' es

$$(y')^2 = 4a\ (x').$$

Las ecuaciones de transformación para esta traslación de los ejes son:

$$x = x' + h \qquad\qquad y = y' + k$$

de donde

$$x' = x - h \qquad\qquad y' = y - k.$$

Si se sustituyen los valores de x' y y' en la ecuación de la parábola se obtiene

$$(y - k)^2 = 4a\ (x - h) \tag{16}$$

que corresponde a la *ecuación de una parábola con vértice en* (h, k) y *eje paralelo al eje* X.

Tanto en la ecuación (16) como en la figura 2.39 se observa que:

- cuando $a > 0$, el factor $(x - h) \geq 0$. Entonces la parábola abre hacia la derecha.

- cuando $a < 0$, el factor $(x - h) \leq 0$. Entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Teniendo los valores de h, k y a se pueden generar los valores de los demás elementos de la parábola.

- $\overline{VF} = a$

- El *vértice* es $V = (h, k)$

- El *foco* es $F = (h+a, k)$

- La *ecuación de la directriz* es $x = h-a$

- La *longitud del lado recto* es $L.R. = |4a|$

- Los *extremos del lado recto* son los puntos $(h+a, k+2a)$ y $(h+a, k-2a)$.

Ejemplo 1

Con base en la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es $(3, 3)$ y su directriz es $x + 3 = 0$.

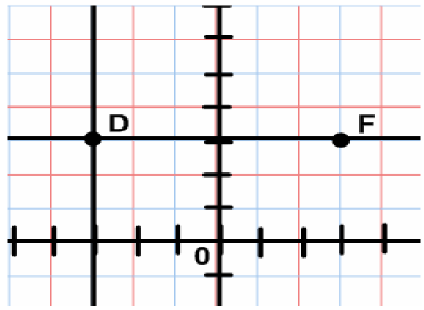


Figura 2.40

Al graficar los datos, ver figura 2.40, se puede observar que:

- $\overline{DF} = 2a$ entonces $\overline{VF} = a$ por lo tanto $a = 3$
- El vértice es $V = (h, k) = (0,3)$ por tanto $h = 0$ y $k = 3$
- El foco es $F = (h+a, k) = (3, 3)$
- La ecuación de la directriz es $x = h\text{-}a$; es decir, $x = -3$
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 12$
- Los extremos del lado recto son los puntos $(h+a, k+2a) = (3, 9)$ y $(h+a, k\text{-}2a) = (3, -3)$.

Una vez que se tiene la información anterior se puede obtener la ecuación de la parábola

$$(y - k)^2 = 4a\ (x - h)$$

$$(y - 0)^2 = 4(3)\ (x + 3)$$

$$y^2 = 12x + 36$$

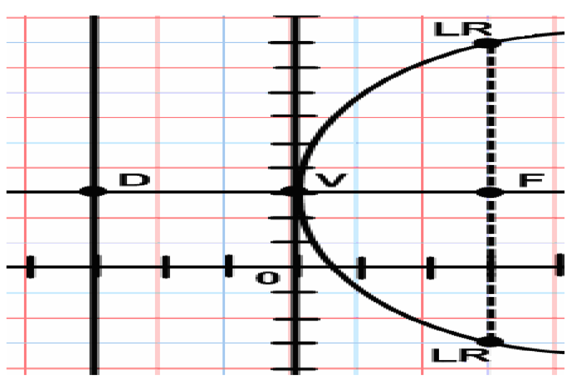


Figura 2.41

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la parábola para la cual $V = (-2, 2)$ y $F = (-5, 2)$.

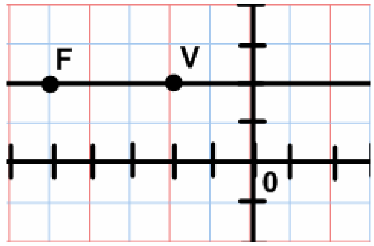


Figura 2.42

Al graficar los datos (figura 2.42) se puede observar que:

- $\overline{VF} = a$ por lo que $a = -3$
- El vértice es $V = (h, k) = (-2, 2)$, quedando $h = -2$ y $k = 2$
- El foco es $F = (h+a, k) = (-5, 2)$
- La ecuación de la directriz es $x = h-a$; esto es $x = 1$
- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 12$
- Las extremos del lado recto son los puntos $(h+a, k+2a) = (-5, 8)$ y $(h+a, k\text{-}2a) = (-5, -4)$.

Una vez que se tiene la información anterior se puede obtener la ecuación de la parábola

$$(y-k)^2 = 4a\ (x-h)$$

$$(y-2)^2 = 4(-3)\ (x-(-2))$$

$$(y-2)^2 = -12\ (x+2)$$

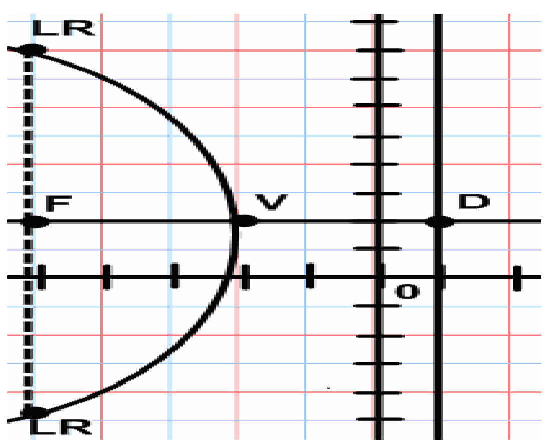


Figura 2.43

Ejercicio 32

1. Con base en la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola cuyo foco y directriz son:
   a) $(-5, 3)$; $x + 1 = 0$
   b) $(-2, 0)$; $x - 4 = 0$

2. Hallar la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:
   a) Vértice $(-3, 1)$ y foco $(1,1)$
   b) Vértice $(5, -2)$ y foco $(-2, -2)$
   c) Vértice $(-3, -2)$, el lado recto es igual a 12 y abre hacia la izquierda
   d) Extremos del lado recto en $(5, -10)$ y $(5, 6)$ y abre hacia derecha

Ecuación General de la Parábola

Las ecuaciones de la parábola, tienen una variable cuadrática y una variable lineal.

Conversión de la forma ordinaria a la forma general (Parábola horizontal)

Si se tiene la ecuación ordinaria de la parábola horizontal

$$(y - k)^2 = 4a \ (x - h),$$

al desarrollar el cuadrado y reagrupar términos se obtiene

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah$$

$$y^2 - 4ax - 2ky + k^2 + 4ah = 0.$$

Si se hacen

$$D = - 4a , \quad E = -2k \quad \text{y} \quad F = k^2 + 4ah,$$

entonces, se puede expresar de forma general

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{17}$$

La expresión (17) se le conoce como la *Ecuación General de la Parábola Horizontal.*

Conversión de la forma ordinaria a la forma general (Parábola vertical)

Si se tiene la ecuación ordinaria de la parábola vertical

$$(x-h)^2 = 4a\,(y-k).$$

Procediendo como se hizo antes, se llega a que

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4ay - 4ak$$

$$x^2 - 4ay - 2hx + h^2 + 4ak = 0.$$

Nuevamente, si se propone

$$D = -4a\,, \quad E = -2h \quad \text{y} \quad F = h^2 + 4ak,$$

entonces, se puede expresar de forma general

$$x^2 + Dy + Ex + F = 0. \tag{18}$$

La expresión (18) se le conoce como la *Ecuación General de la Parábola Vertical*.

Conversión de la forma general a la forma ordinaria

El procedimiento se invierte transformando la forma general a la forma ordinaria, siempre que $D \neq 0$. De esta manera

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$y^2 + Ey = -Dx - F\,,$$

$$y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = -Dx - F + \left(\frac{E}{2}\right)^2,$$

$$\left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = -Dx - F + \left(\frac{E}{2}\right)^2,$$

$$\left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = -D\left(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4D}\right),$$

$$\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = -D\left(x+\frac{4F-E^2}{4D}\right),$$

donde $D = -4a$, $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ah,$

$$\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = -D\left(x+\frac{4F-E^2}{4D}\right)$$

$$\left(y+\frac{(-2k)}{2}\right)^2 = -(-4a)\left(x+\frac{4(k^2+4ah)-(-2k)^2}{4(-4a)}\right)$$

$$(y-k)^2 = 4a\left(x+\frac{4k^2+16ah-4k^2}{4(-4a)}\right)$$

$$(y-k)^2 = 4a\left(x+\frac{k^2+4ah-k^2}{-4a}\right)$$

$$(y-k)^2 = 4a\left(x+\frac{+4ah}{-4a}\right)$$

y entonces se tiene nuevamente la forma ordinaria

$$(y-k)^2 = 4a(x-h).$$

Obtener los elementos a partir de la ecuación

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de la ecuación $y^2 - 8x + 6y + 8 = 0.$

La ecuación representa una parábola porque y aparece en forma cuadrática y x en forma lineal, además el coeficiente $D \neq 0.$ El trazo de la parábola se facilita si se reduce la ecuación a la forma ordinaria.

$$y^2 - 8x + 6y + 8 = 0$$

$$y^2 + 6y = 8x - 8$$

$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 8 + 9$$

$$(y+3)^2 = 8\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

- Como el vértice es $V = \left(-\frac{1}{8}, -3\right) = (h, k)$. Entonces $h = -\frac{1}{8}$ y $k = -3$

- Como $4a = 8$, resulta $a = 2$

- El foco es $F = (h+a, k) = \left(\frac{15}{8}, -3\right)$

- La ecuación de la directriz es $x = h\text{-}a$, con lo que $x = -\frac{17}{8}$

- La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 8$

- Los extremos del lado recto son los puntos

$$(h+a,\ k+2a) = \left(\frac{15}{8}, 1\right) \text{ y } (h+a,\ k\text{-}2a) = \left(\frac{15}{8}, -7\right).$$

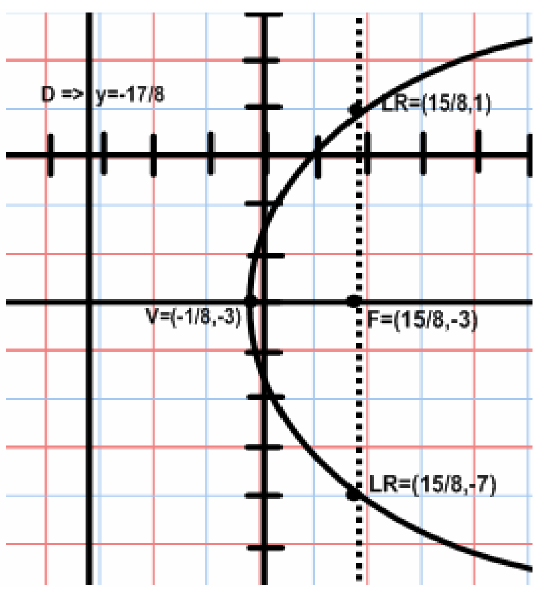


Figura 2.44

Obtener la ecuación a partir de los elementos

Ejemplo 1

Obtener la ecuación, en forma general, de la parábola con vértice en $(3, 4)$, eje paralelo al eje de las ordenadas y que pasa por el punto $(5, 6)$.

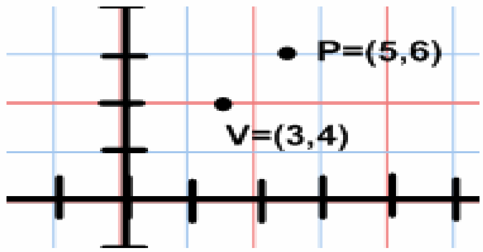


Figura 2.45

Al graficar los datos (ver figura 2.45) se confirma que la parábola tiene su eje paralelo al eje de las ordenadas y su vértice está fuera del origen, entonces la ecuación es de la forma

$$(x-h)^2 = 4a\ (y-k)$$

Las coordenadas del vértice y del punto por el que pasa la parábola deben satisfacer esta ecuación, de manera que se puede obtener el valor de a, quedando

$$(5-3)^2 = 4a\ (6-4),$$
$$2^2 = 8a,$$
$$a = \frac{1}{2}.$$

Como $V = (h, k)$, resulta $V = (3, 4)$; de donde se obtienen $h = 3$ y $k = 4$

El foco es $F = (h, k+a) = \left(3, \frac{9}{2}\right)$

La ecuación de la directriz es $y = h+a$, quedando $y = \frac{7}{2}$

La longitud del lado recto es $L.R. = |4a| = 2$

Los extremos del lado recto son los puntos $(h+2a, k+a) = \left(4, \frac{9}{2}\right)$ y $(h\text{-}2a, k+a) = \left(2, \frac{9}{2}\right)$.

Sustituyendo los valores de $a = \frac{1}{2}$ y el vértice $V = (3,4)$ en la ecuación de la parábola

$$(x-3)^2 = (4)\frac{1}{2}\ (y-4),$$

$$(x-3)^2 = 2\ (y-4),$$

y al desarrollar se tiene la ecuación de la parábola en su forma general

$$x^2 - 6x - 2y + 17 = 0.$$

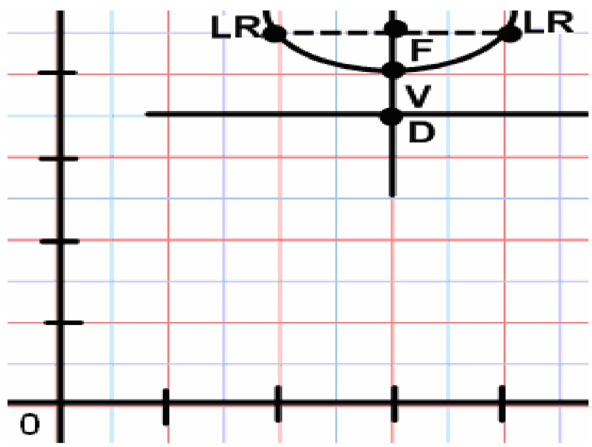


Figura 2.46

Ejercicio 33

1. Expresar en la forma ordinaria cada parábola. Hallar las coordenadas del vértice, del foco y los extremos del lado recto.

a) $y^2 + 12x - 48 = 0$
b) $y^2 + 12x - 6y + 45 = 0$
c) $x^2 + 10x + 20y + 25 = 0$
d) $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$

2. Hallar la ecuación de cada parábola:

a) Con vértice en $(2, 3)$ y foco en $(5, 3)$
b) Con vértice en $(5, 4)$ y foco en $(5, -2)$
c) Vértice $(4, -2)$, el lado recto es igual a 8 y abre hacia la izquierda
d) Extremos del lado recto en $(-2, -7)$ y $(6, -7)$ y abre hacia derecha

2.3 Elipse

Una *elipse* se define como el lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

Los puntos fijos se llaman *focos*.

2.3.1 Elementos de la elipse

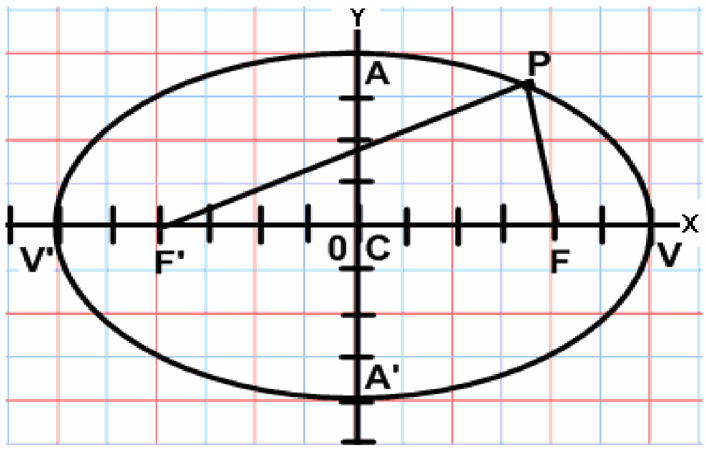


Figura 2.47

De acuerdo con la figura 2.47, se muestra una elipse donde:

F y F' son los *focos.*

V y V' son los *vértices.*

$V'V$ es el *eje mayor* (segmento de recta determinado por V y V').

$A'A$ es el *eje menor* (segmento de recta determinado por A y A').

C es el *centro* (punto medio del segmento determinado por los focos).

PF y PF' son *radios vectores* (segmentos de recta que van de un punto cualquiera P de la elipse hacia uno de los focos).

Cuerda : es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse.

Cuerda Focal : es una cuerda que pasa por uno de los focos.

Lado Recto: es la cuerda focal perpendicular al eje mayor.

Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro.

2.3.2 Ecuación normal de la elipse con el eje mayor horizontal

Ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen y ejes coincidentes con los ejes coordenados

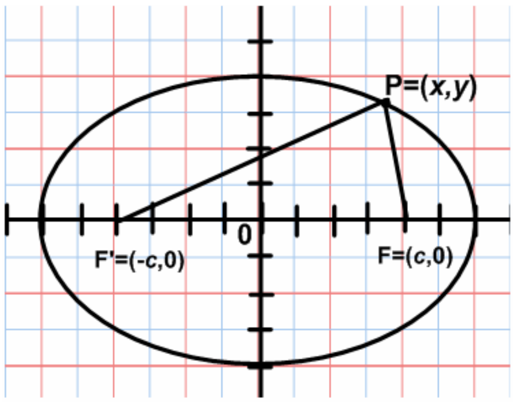


Figura 2.48

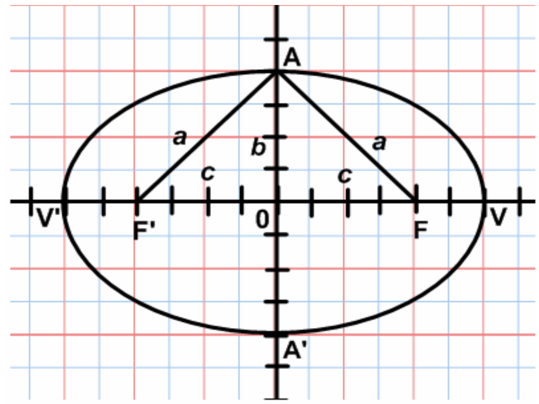


Figura 2.49

Para obtener la ecuación:

- se hace coincidir el centro de la elipse con el origen del sistema coordenado
- el eje X pasa por los focos
- el eje Y contiene la mediatriz del segmento determinado por los focos F y F'
- la distancia entre F y F' es $2c$, donde $c > 0$
- los focos son los puntos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$.

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, por definición

$$|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$$

donde a es una constante y $a > c$.

Usando la ecuación para la distancia entre dos puntos, resultan

$$|\overline{PF}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{PF'}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior se tiene

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

para eliminar los radicales de la ecuación se procede de la siguiente forma: se escribe

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

y se eleva al cuadrado esta expresión, para obtener

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Desarrollando y simplificando, encontramos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx.$$

Elevando nuevamente al cuadrado, se obtiene

$$a^2 (x + c)^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2 (x^2 + 2c\mathrm{x} + c^2) + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 + 2\, a^2c\mathrm{x} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

de manera que al factorizar, resulta

$$x^2 (a^2- c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Definiendo una cantidad b mediante

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

de la expresión anterior queda

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2 b^2.$$

Dividiendo ambos miembros entre $a^2 b^2$ se obtiene, lo que se conoce como *la ecuación de la elipse horizontal*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (19)$$

Nota

El denominador mayor de la expresión (19) indica la variable cuyo eje coordenado coincide con el eje mayor de la elipse y se designa por a.

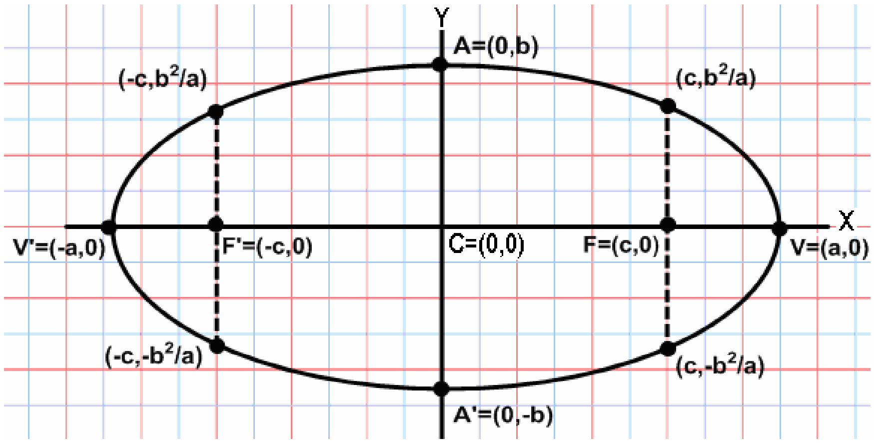


Figura 2.50

De la figura 2.50 se tiene:

- Los *vértices* son $V = (a, 0)$ y $V' = (-a, 0)$
- Los *focos* son $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$
- Los *extremos del eje menor* son $A = (0, b)$ y $A' = (0, -b)$
- La *excentricidad* e de una elipse está dada por la relación $e = \dfrac{c}{a}$ (20)
- La *longitud del lado recto* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$ (21)
- Los *extremos de los lados rectos* son $\left(c, \dfrac{b^2}{a}\right)$, $\left(c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$, $\left(-c, \dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(-c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$
- La *longitud del eje mayor* es $2a$
- La *longitud el eje menor* es $2b$
- Como la suma de las distancias de un punto de la elipse a sus focos no puede ser menor que la distancia entre éstos, a no puede ser menor que c; en otras palabras la excentricidad de la elipse no puede ser mayor que 1. Si $e = 1$ entonces la elipse degenera en una recta. Si $e = 0$ entonces la elipse degenera en una circunferencia.

Relación entre los ejes y la distancia focal

En una elipse cualquiera como la de la figura 2.49, se tiene por construcción

$$\overline{AF} = a, \ \overline{OA} = b \text{ y } \overline{OF} = c,$$

de manera que aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $OFAO$, resulta

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{22}$$

fórmula que permite calcular uno de los elementos a, b ó c en términos de los dos elementos restantes.

Obtener la ecuación de la elipse a partir de sus elementos

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de una elipse con vértices en $(\pm 6, 0)$ y sus focos en $(\pm 4,0)$.

- Dado que $V = (\pm 6, 0)$, se tiene que $a = 6$

- En el caso de los focos tenemos que $F = (\pm 4, 0)$ de manera que $c = 4$

- De acuerdo con la relación $a^2 = b^2 + c^2$, de los valores encontrados para a y c, resulta

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 4.4$$

- Los extremos del eje menor son los puntos $A = (0, \pm b) = (0, \pm 4.4)$

- La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{6} = .66$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(6) = 12$

- La longitud del eje menor es $2b = 2(4.4) = 8.8$

- El longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4.4)^2}{6} = 6.6$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) = (4, 3.3),\quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right) = (4, -3.3),\quad \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) = (-4, 3.3) \text{ y } \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) = (-4, -3.3)$$

- La ecuación de la elipse queda en este caso como $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.51.

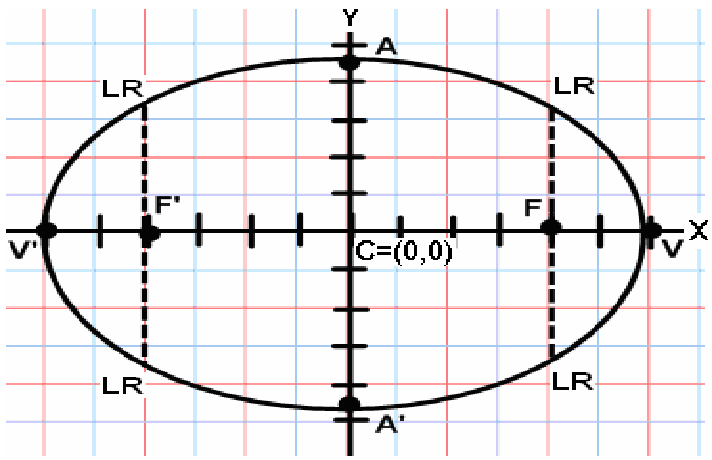


Figura 2.51

Ejemplo 2

Una elipse tiene sus vértices en $(\pm 8,\ 0)$ y su excentricidad es $\frac{1}{2}$. Hallar los focos, la longitud de su eje mayor y de su eje menor, la longitud de su lado recto y su ecuación.

- Los vértices son $V = (\pm a, 0) = (\pm 8, 0)$; de donde $a = 8$

- Si $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{8} = \frac{1}{2}$, resulta $c = 4$

- Los focos son $F = (\pm c, 0)$ y, con $c = 4$ resulta $F = (\pm 4, 0)$

- De acuerdo con la relación $a^2 = b^2 + c^2$ y teniendo $a = 8$ y $c = 4$ nos queda

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 6.9$$

- Los extremos del eje menor son los puntos $A = (0, \pm b) = (0, \pm 6.9)$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(6.9)^2}{8} = 12$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(8) = 16$

- La longitud del eje menor es $2b = 2(6.9) = 13.8$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) = (4, 6),\ \left(c, -\frac{b^2}{a}\right) = (4, -6),\ \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) = (-4, 6) \text{ y } \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) = (-4, -6)$$

- La ecuación de la elipse queda como

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

- La gráfica correspondiente se muestra en la figura 2.52.

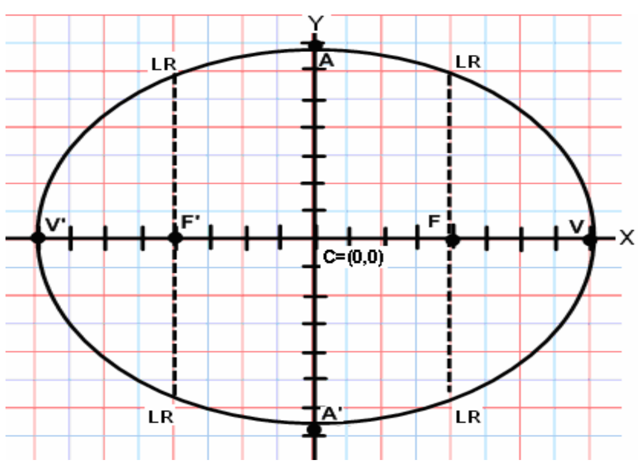


Figura 2.52

Obtener los elementos de la elipse a partir de su ecuación

Ejemplo 1

Determinar los focos, los vértices, la longitud del lado recto y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 = 144$.

La ecuación de la elipse queda en su forma ordinaria si se divide la ecuación entre 144; esto es

$$\frac{9}{144}x^2 + \frac{16}{144}y^2 = \frac{144}{144},$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- El denominador mayor es 16 por lo que $a^2 = 16$ y $a = 4$, quedando entonces

$$V = (\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$$

- El denominador menor es 9 de manera que $b^2 = 9$ y $b = 3$. De aquí que

$$A = (0, \pm b) \text{ entonces } A = (0, \pm 3)$$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 4$ y $b = 3$ resulta

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = 2.6$$

- Dado que $c = 2.6$ tenemos $F = (\pm c, 0) = (\pm 2.6, 0)$

- La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{2.6}{4} = .65$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(4) = 8$

- La longitud del eje menor es $2b = 2(3) = 6$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{4} = 4.5$

- Los extremos de los lados rectos son

$\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ =(2.6, 2.2) , $\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$ = (2.6, -2.2), $\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ = (-2.6, 2.2) y $\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$ = (-2.6, -2.2).

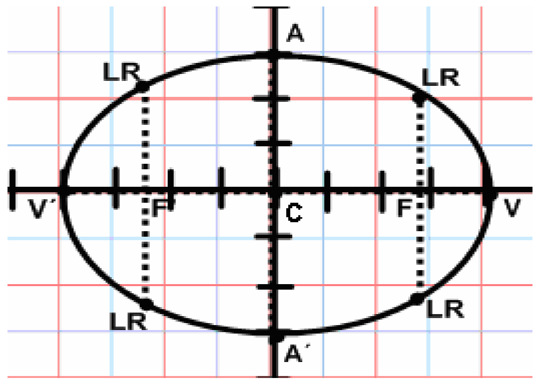


Figura 2.53

Ejercicio 34

1. Para cada caso, hallar la ecuación de la elipse y construir la gráfica:

   a) $C = (0,0)$, $2a = 10$, $2b = 6$ y AA' coincide con el eje X
   b) $C = (0,0)$, $A = (6,0)$, $F = (5,0)$
   c) $A = (4, 0)$, $F = (3,0)$
   d) $A = (6,0)$, $2b = 10$
   e) $V = (20, 0)$, $e = \frac{6}{10}$
   f) $F = (6, 0)$, $e = \frac{3}{5}$ $F = (3, 0)$, longitud del lado recto igual a 9
   g) $F = (4, 0)$, longitud del lado recto igual a 12

2. Para cada una de las siguientes elipses, hallar los focos, los vértices, la longitud del lado recto y la excentricidad. Trazar la curva correspondiente.

   a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

   c) $16x^2 + 25y^2 = 400$ d) $2x^2 + 3y^2 = 12$

Elipse horizontal con centro en (h, k)

Si los ejes de una elipse son paralelos a los ejes coordenados y su centro está en el punto (h, k) su ecuación se puede obtener trasladando los ejes coordenados de manera que el nuevo origen O' coincida con el punto (h, k).

La ecuación de la elipse horizontal referida a los nuevos ejes es

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1 .$$

Dada la transformación

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

tenemos

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

los cuales se sustituyen en la *ecuación de la elipse* y queda

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \tag{23}$$

- Los *vértices* son los puntos $V = (h+a, k)$ y $V' = (h-a, k)$

- Los *focos* son los puntos $F = (h+c, k)$ y $F' = (h-c, k)$

- Los *extremos del eje menor* son $A = (h, k+b)$ y $A' = (h, k-b)$

- La *excentricidad* e de una elipse es $e = \dfrac{c}{a}$

- La *longitud del eje mayor* es $2a$

- La *longitud el eje menor* es $2b$

- La *longitud del lado recto* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$

- Los *extremos de los lados rectos* son

$$\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right),\ \left(h+c,k-\frac{b^2}{a}\right),\ \left(h-c,k+\frac{b^2}{a}\right)\ \text{y}\ \left(h-c,k-\frac{b^2}{a}\right)$$

- La relación entre las longitudes de los ejes y la distancia focal es como antes $a^2 = b^2 + c^2$.

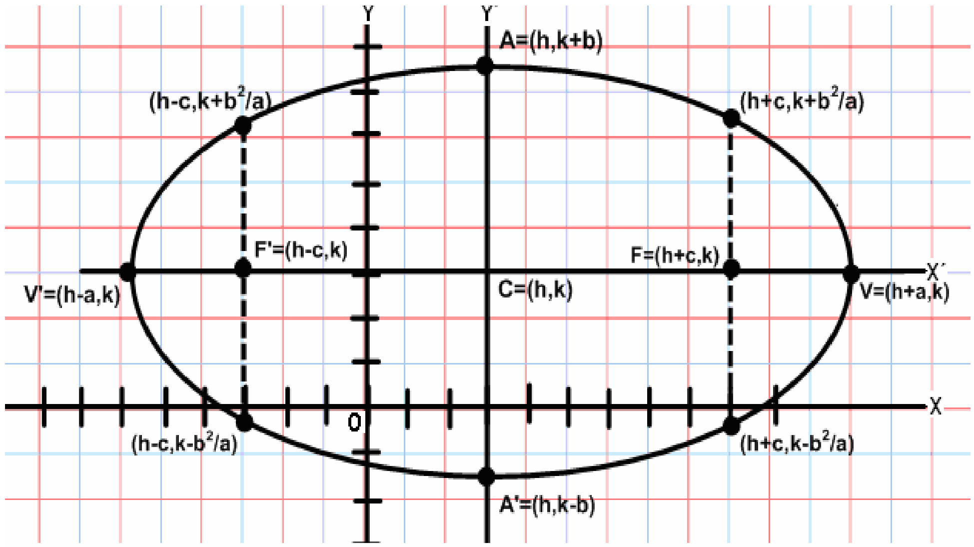


Figura 2.54

Obtener la ecuación de la elipse horizontal con centro en (h,k) a partir de sus elementos

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la elipse, la longitud de sus ejes mayor y menor, así como sus vértices, si tiene sus focos en $(-2, 4)$ y $(4, 4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{4}$.

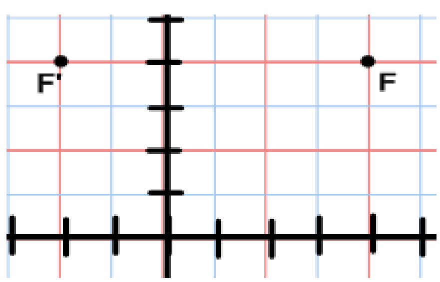


Figura 2.55

- De acuerdo con la gráfica de la figura 2.55

. el punto medio de $F'F$ es el centro de la elipse entonces $C = (1, 4)$

. la distancia de $\overline{F'C}$ ó $\overline{CF}$ es $c = 3$

- La excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4} = \frac{3}{a}$ de donde $a = 4$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 4$ y $c = 3$ resulta $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7} = 2.6$

- Los focos son los puntos $F = (h+c, k) = (4, 4)$ y $F' = (h\text{-}c, k) = (\text{-}2, 4)$

- Los vértices son los puntos $V = (h+a, k) = (5, 4)$ y $V' = (h\text{-}a, k) = (\text{-}3, 4)$

- Los extremos del eje menor son $A = (h, k+b) = (1, 6.6)$ y $A' = (h, k\text{-}b) = (1, 1.4)$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2.6)^2}{4} = 3.5$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h+c, k+\frac{b^2}{a}\right) = (4, 5.7), \quad \left(h+c, k-\frac{b^2}{a}\right) = (4, 2.3),$$

$$\left(h-c, k+\frac{b^2}{a}\right) = (\text{-}2, 5.7) \quad \text{y} \quad \left(h-c, k-\frac{b^2}{a}\right) = (\text{-}2, 2.3)$$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(4) = 8$

- La longitud el eje menor es $2b = 2(2.6) = 5.2$

- La ecuación de la elipse queda entonces como $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$

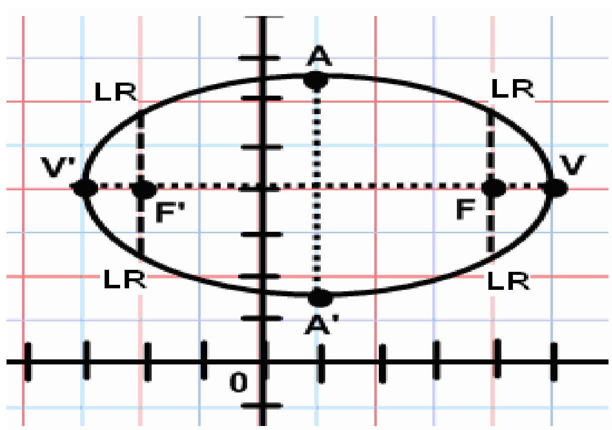


Figura 2.56

Ecuación General de la Elipse Horizontal

Como se mencionó anteriormente, una elipse con centro en el punto (h, k) y eje mayor horizontal tiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

esta ecuación se puede reducir a la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (24)$$

en la cual

A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$

$A \neq C$ porque si $A = C$ el lugar geométrico es una circunferencia.

Obtener los elementos a partir de la ecuación de la elipse horizontal con centro en (h, k)

Ejemplo 1

La ecuación de una elipse es $9x^2 + 16y^2 + 54x + 32y - 47 = 0$, hallar el centro, los focos y los vértices. Determinar la longitud del lado recto y la excentricidad.

Trasponiendo el término independiente y ordenando los demás términos se tiene

$$9x^2 + 54x + 16y^2 + 32y = 47,$$

factorizando el primer miembro se obtiene

$$9(x^2 + 6x) + 16(y^2 + 2y) = 47,$$

sumando a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos de primer grado, queda así

$$9(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 + 2y + 1) = 47 + 81 + 16.$$

Factorizando nuevamente en el primer miembro y sumando en el segundo

$$9\,(x+3)^2 + 16\,(y+1)^2 = 144.$$

Dividiendo ambos miembros entre 144

$$\frac{9(x+3)^2}{144} + \frac{16(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144},$$

la ecuación representa una elipse

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

donde:

- Centro $C = (-3,-1) = (h, k)$ por tanto $h = -3$ y $k = -1$

- Como el denominador mayor es 16, $a^2 = 16$ entonces $a = 4$

- Los vértices son $V = (h \pm a, k) = (-3 \pm 4, -1)$, de donde $V' = (-7,-1)$ y $V = (1,-1)$

- Como el denominador menor es 9 entonces $b^2 = 9$ y $b = 3$

- Los extremos del eje menor son $A = (h, k \pm b) = (-3, -1 \pm 3)$; es decir $A' = (-3, -4)$ y $A = (-3, 2)$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 4$ y $b = 3$, resulta $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7} = 2.6$

- Los focos son $F = (h \pm c, k) = (-3 \pm 2.6, -1)$, y de aquí que $F' = (-5.6, -1)$ y $F = (-.4, -1)$

- La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2.6}{4} = .65$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(3)^2}{4} = 4.5$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right) = (-.4,\ 1.2),\quad \left(h+c,k-\frac{b^2}{a}\right) = (-.4,-\ 3.2),$$

$$\left(h-c,k+\frac{b^2}{a}\right) = (-5.6,\ 1.2) \text{ y } \left(h-c,k-\frac{b^2}{a}\right) = (-5.6,\ -3.2)$$

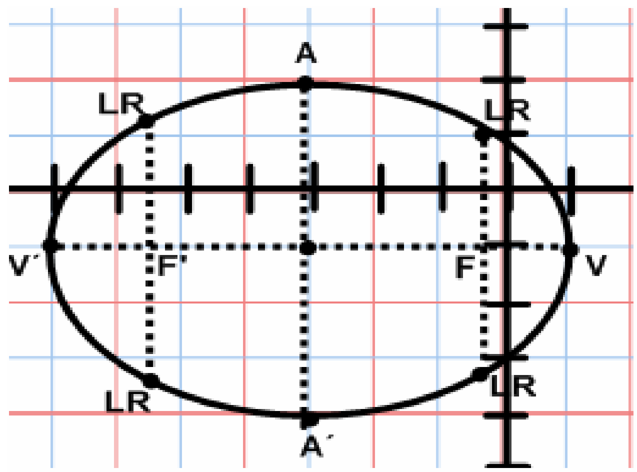


Figura 2.57

Ejercicio 35

1. En cada caso hallar la ecuación de la elipse, si tiene:
   a) $C = (2, -1)$, eje mayor paralelo al eje X de longitud 12, la longitud del eje menor es 10.
   b) Los vértices están en $(8, 2)$ y $(-2, 2)$ y uno de los focos se encuentra en $(6,2)$.
   c) Foco en $(1, -1)$ y el eje menor tiene sus extremos en $(-1, 2)$ y $(-1, -4)$.
   d) La longitud del eje menor es 4 y sus vértices están en $(-1, 3)$ y $(-5, 3)$.

2. Para cada una de las ecuaciones hallar el centro, los focos y los vértices de las elipses. Determinar la longitud del lado recto y la excentricidad.
   a) $9x^2 + 25y^2 - 36x - 189 = 0$
   b) $16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$

2.3.3 Ecuación normal de la elipse con el eje mayor vertical

Ecuación de la elipse vertical con centro en el origen y ejes coincidentes con los ejes coordenados

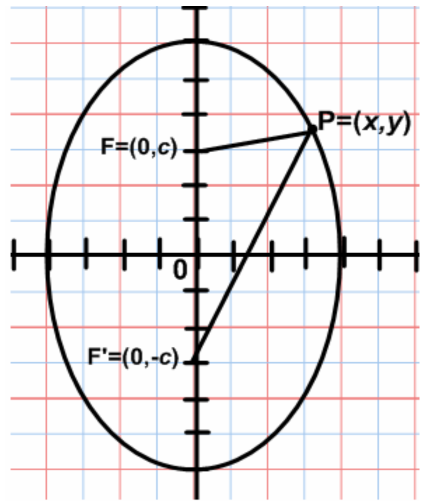


Figura 2.58

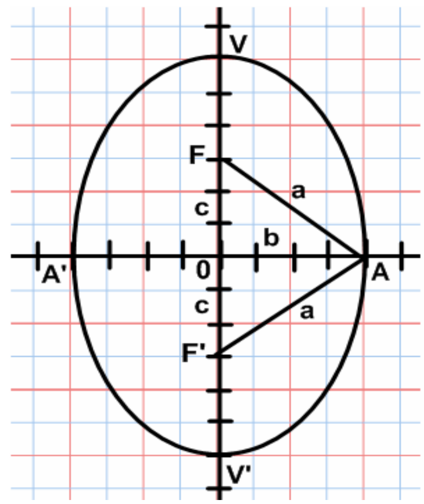


Figura 2.59

Para obtener la ecuación:

- se hace coincidir el centro de la elipse con el origen del sistema coordenado
- el eje Y pasa por los focos
- el eje X contiene la mediatriz del segmento determinado por los focos F y F'.
- la distancia entre F y F' es $2c$, donde $c > 0$
- los focos son los puntos $F = (0, c)$ y $F' = (0, -c)$

Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, por definición

$$|\overline{PF}| + |\overline{PF'}| = 2a$$

donde a es una constante y $a > c$.

De la expresión para la distancia entre dos puntos, se tiene

$$|\overline{PF}| = \sqrt{x^2 + (y-c)^2} \quad \text{y} \quad |\overline{PF'}| = \sqrt{x^2 + (y+c)^2}\ .$$

Sustituyendo en la igualdad anterior, se tiene

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a.$$

Para eliminar los radicales de la ecuación se procede de la siguiente forma: se escribe

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2+(y+c)^2},$$

y se eleva al cuadrado esta expresión, para obtener

$$(y - c)^2 + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + (y + c)^2 + x^2.$$

Desarrollando y simplificando nos queda

$$y^2 - 2cy + c^2 + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + y^2 + 2cy + c^2 + x^2,$$

$$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = 4a^2 + 4cy,$$

$$a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = a^2 + cy.$$

Elevando nuevamente al cuadrado, obtenemos

$$a^2 (y + c)^2 + a^2x^2 = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2,$$

$$a^2 (y^2 + 2cy + c^2) + a^2x^2 = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2,$$

$$a^2y^2 + 2a^2cy + a^2c^2 + a^2x^2 = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2,$$

$$a^2y^2 - c^2y^2 + a^2x^2 = a^4 - a^2c^2,$$

de manera que al factorizar se llega a la igualdad

$$y^2 (a^2- c^2) + a^2x^2 = a^2 (a^2 - c^2).$$

Usando la igualdad

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

resulta

$$b^2y^2 + a^2x^2 = a^2 b^2.$$

Finalmente dividiendo ambos miembros entre a^2b^2 se obtiene, lo que se conoce como *la ecuación de la elipse vertical*

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (25)$$

<u>Nota</u>

El denominador mayor de la expresión (25), indica la variable cuyo eje coordenado coincide con el eje mayor de la elipse y se designa por a.

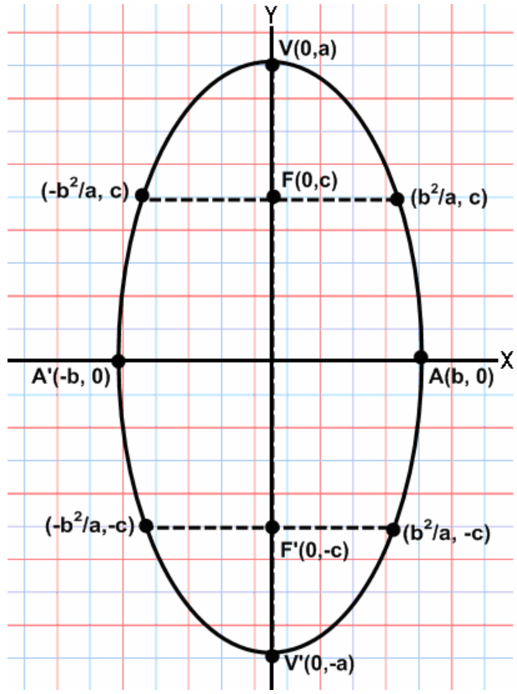


Figura 2.60

De la figura 2.60 se tiene:

- Los *vértices* son los puntos $V = (0, a)$ y $V' = (0, -a)$
- Los *focos* son los puntos $F = (0, c)$ y $F' = (0, -c)$
- Los *extremos del eje menor* son los puntos $A = (b, 0)$ y $A' = (-b, 0)$
- La *excentricidad* de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$
- La *longitud del lado recto* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$
- La *longitud del eje mayor* es $2a$
- La *longitud el eje menor* es $2b$
- Los *extremos de los lados rectos* son $\left(-\dfrac{b^2}{a}, c\right)$, $\left(\dfrac{b^2}{a}, c\right)$, $\left(-\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$ y $\left(\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$

- La suma de las distancias $2a$ de un punto de la elipse a sus focos no puede ser menor que la distancia entre éstos, también a no puede ser menor que c; en otras palabras la excentricidad de la elipse no puede ser mayor que 1. Si $e = 1$ entonces la elipse degenera en una recta. Si $e = 0$ entonces la elipse degenera en una circunferencia.

- La fórmula que permite calcular uno de los elementos a, b ó c en términos de los otros dos elementos restantes es

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Obtener la ecuación de la elipse a partir de sus elementos

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de una elipse con vértices en $(0, \pm 5)$ y sus focos en $(0, \pm 3)$.

- Dado que $V = (0, \pm 5)$, se tiene que $a = 5$

- En el caso de los focos tenemos que $F = (0, \pm 3)$ de manera que $c = 3$

- De acuerdo con la relación $a^2 = b^2 + c^2$, de los valores encontrados para a y c, resulta

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- Los extremos del eje menor son los puntos $A = (\pm b, 0)$; esto es $A = (\pm 4, 0)$

- La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} = .6$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(5) = 10$

- La longitud el eje menor es $2b = 2(4) = 8$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)^2}{5} = 6.4$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = (-3.2, 3), \quad \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = (3.2, 3), \quad \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = (-3.2, -3) \text{ y } \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = (3.2, -3)$$

- La ecuación de la elipse queda en este caso como $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.61.

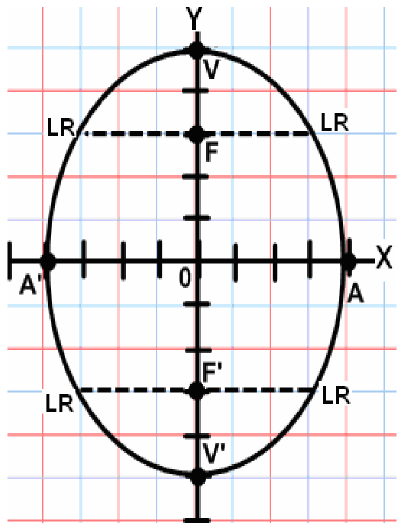


Figura 2.61

Ejemplo 2

Una elipse tiene sus vértices en $(0, \pm 6)$ y su excentricidad es $\frac{1}{5}$. Hallar sus focos, la longitud de su eje mayor y de su eje menor, la longitud de su lado recto y su ecuación.

- Los vértices son $V = (0, \pm a)$ $= (0, \pm 6)$; de donde $a = 6$

- Si $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{6} = \frac{1}{5}$, resulta $c = 1.2$

- Los focos son $F = (0, \pm c)$ y, con $c = 1.2$ resulta $F = (0, \pm 1.2)$

- De acuerdo con la relación $a^2 = b^2 + c^2$ y teniendo $a = 6$ y $c = 1.2$ nos queda

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 1.4} = \sqrt{34.5} = 5.8$$

- Los extremos del eje menor son los puntos $A = (\pm b, 0)$ entonces $A = (\pm 5.8, 0)$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(6) = 12$

- La longitud el eje menor es $2b = 2(5.8) = 11.6$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(5.8)^2}{6} = 11.5$

- Los extremos de los lados rectos son

$\left(-\dfrac{b^2}{a}, c\right) = (-5.7, 1.2)$, $\left(\dfrac{b^2}{a}, c\right) = (5.7, 1.2)$, $\left(-\dfrac{b^2}{a}, -c\right) = (-5.7, -1.2)$ y $\left(\dfrac{b^2}{a}, -c\right) = (5.7, -1.2)$

- La ecuación de la elipse queda como $\dfrac{x^2}{34.5} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

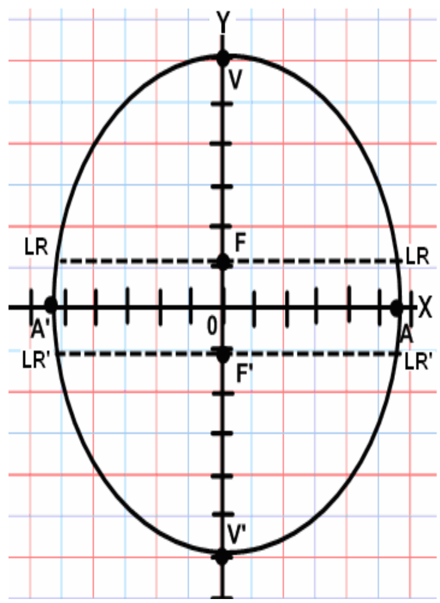


Figura 2.62

Obtener los elementos de la elipse a partir de su ecuación

Ejemplo 1

Determinar los focos, los vértices, la longitud del lado recto y la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $25x^2 + 9y^2 = 225$.

- La ecuación de la elipse queda en su forma ordinaria si se divide la ecuación entre 225; esto es

$$\frac{25}{225}x^2 + \frac{9}{225}y^2 = \frac{225}{225} \quad ,$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 .$$

- El denominador mayor es 25 por lo que $a^2 = 25$ y $a = 5$, quedando entonces

$$V = (0, \pm a) = (0, \pm 5)$$

- El denominador menor es 9 de manera que $b^2 = 9$ y $b = 3$. De aquí que

$$A = (\pm\, b, 0) = (\pm\, 3,\, 0)$$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 5$ y $b = 3$ resulta $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

- Dado que $c = 4$ tenemos $F = (0, \pm c) = (0, \pm 4)$

- La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = .8$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(5) = 10$

- La longitud el eje menor es $2b = 2(3) = 6$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(3)^2}{5} = 3.6$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = (-1.8,\, 4),\quad \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = (1.8,\, 4),\quad \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = (-1.8,\, -4), \text{ y } \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = (1.8,\, -4)$$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.63.

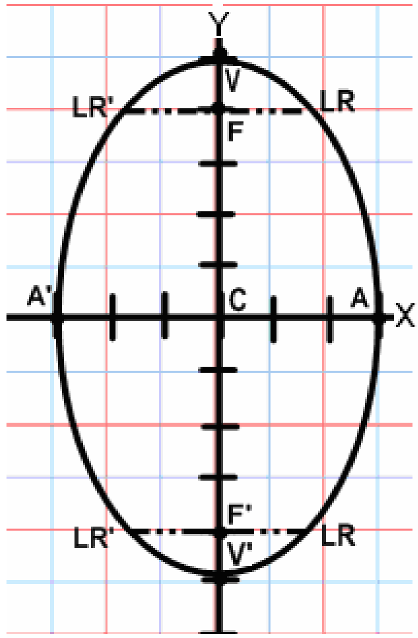


Figura 2.63

Ejercicio 36

1. Hallar la ecuación de una elipse y construir la gráfica en cada caso:
   a) $C = (0, 0)$, $2a = 20$, $2b = 12$ y la recta AA' coincide con el eje Y
   b) $A = (0, 6)$, $F = (0, 4)$
   c) $A = (0, 4)$, $2a = 12$
   d) $V = (0, 12)$, $e = \dfrac{8}{10}$
   e) $F = (0, 4)$, $e = \dfrac{3}{5}$
   f) $F = (0, 3)$, longitud del lado recto igual a 24
   g) $F = (0, 7)$, longitud del lado recto igual a 12

2. Para cada una de las siguientes elipses, hallar los focos, los vértices, la longitud del lado recto y la excentricidad. Trazar la curva correspondiente.
   a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$
   b) $\dfrac{x^2}{121} + \dfrac{y^2}{144} = 1$
   c) $49x^2 + 25y^2 = 1225$
   d) $8x^2 + 6y^2 = 48$

Elipse vertical con centro en (h,k)

Si los ejes de una elipse son paralelos a los ejes coordenados y su centro está en el punto (h, k) su ecuación se puede obtener trasladando los ejes coordenados de manera que el nuevo origen O' coincida con el punto (h, k).

La ecuación de la elipse vertical referida a los nuevos ejes es

$$\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1\,.$$

Dada la transformación

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

tenemos

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

los cuales se sustituyen en la ecuación de la elipse y queda

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{26}$$

- Los *vértices* son los puntos $V = (h, k+a)$ y $V' = (h, k-a)$

- Los *focos* son los puntos $F = (h, k+c)$ y $F' = (h, k-c)$

- Los *extremos del eje menor* son $A = (h+b, k)$ y $A' = (h-b, k)$

- La *excentricidad* de una elipse es $e = \dfrac{c}{a}$

- La *longitud del lado recto* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$

- Los *extremos de los lados rectos* son

$$\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right),\quad \left(h-\frac{b^2}{a},k+c\right),\quad \left(h+\frac{b^2}{a},k-c\right) \quad \text{y} \quad \left(h-\frac{b^2}{a},k-c\right)$$

- La *longitud del eje mayor* es $2a$

- La *longitud el eje menor* es $2b$

- La relación entre las longitudes de los ejes y la distancia focal es como antes $a^2 = b^2 + c^2$.

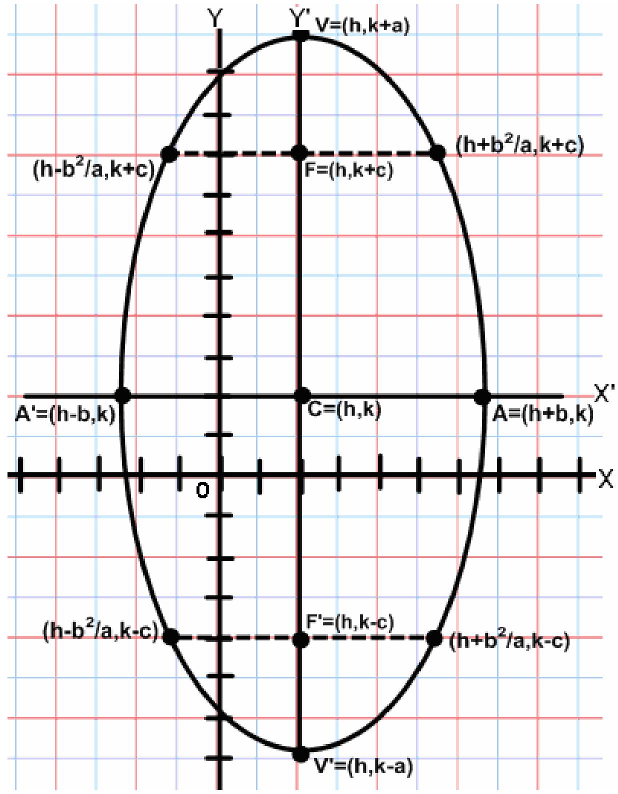


Figura 2.64

Obtener la ecuación de la elipse vertical con centro en (h, k) a partir de sus elementos

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la elipse, la longitud de sus ejes mayor y menor, así como sus vértices, si tiene sus focos en $(5,-2)$ y $(5,4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

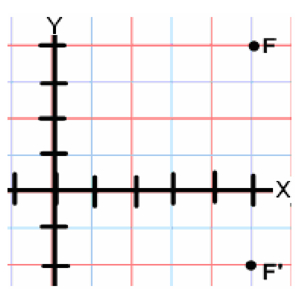


Figura 2.65

- De acuerdo con la gráfica de la figura 2.65

  . el punto medio de la recta $F'F$ es el centro de la elipse entonces $C = (5, 1)$

  . la distancia de $\overline{F'C}$ ó $\overline{CF}$ es $c = 3$

- La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$ $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{a}$ de donde $a = 5$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 5$ y $c = 3$ resulta

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- Las focos son los puntos $F = (h, k+c) = (5, 4)$ y $F' = (h, k - c) = (5, -2)$

- Los vértices son los puntos $V = (h, k+a) = (5, 6)$ y $V' = (h, k-a) = (5,-4)$

- Los extremos del eje menor son $A = (h+b, k) = (9, 1)$ y $A' = (h-b, k) = (1, 1)$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)^2}{5} = 6.4$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h + \frac{b^2}{a}, k + c\right) = (8.2, 4),\ \left(h - \frac{b^2}{a}, k + c\right) = (1.8, 4),$$

$$\left(h + \frac{b^2}{a}, k - c\right) = (8.2,-2) \text{ y } \left(h - \frac{b^2}{a}, k - c\right) = (1.8, -2)$$

- La longitud del eje mayor es $2a = 2(5) = 10$

- La longitud el eje menor es $2b = 2(4) = 8$

- La ecuación de la elipse queda entonces como $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

- La gráfica de la elipse se muestra en la figura 2.66

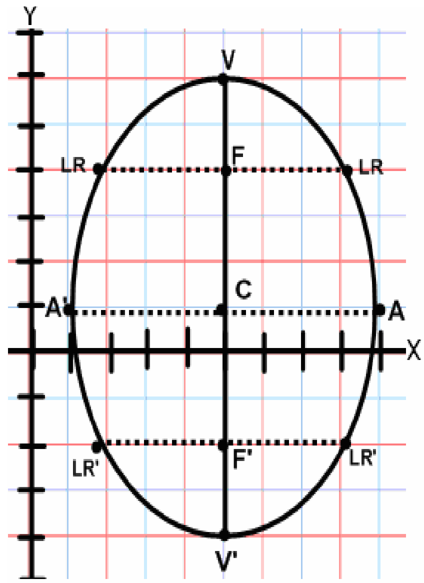


Figura 2.66

Ecuación General de la Elipse Vertical

Como se mencionó anteriormente, una elipse con centro en el punto (h, k) y eje mayor vertical tiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

esta ecuación se puede reducir a la ecuación general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (27)$$

en la cual

- A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$
- $A \neq C$ porque si $A = C$ el lugar geométrico es una circunferencia.

Obtener los elementos a partir de la ecuación de la elipse vertical con centro en (h, k)

Ejemplo 1

La ecuación de una elipse es $25x^2 + 9y^2 - 100x - 54y - 44 = 0$, hallar el centro, los focos y los vértices. Determinar la longitud del lado recto y la excentricidad.

Trasponiendo el término independiente y ordenando los demás términos se tiene

$$25x^2 - 100x + 9y^2 - 54y = 44,$$

factorizando el primer miembro se obtiene

$$25\,(x^2 - 4x) + 9\,(y^2 - 6y) = 44,$$

sumando a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad de los coeficientes de los términos de primer grado, queda así

$$25\,(x^2 - 4x + 4) + 9\,(y^2 - 6y + 9) = 44 + 100 + 81.$$

Factorizando nuevamente en el primer miembro y sumando en el segundo

$$25\,(x - 2)^2 + 9\,(y - 3)^2 = 225.$$

Dividiendo ambos miembros entre 225

$$\frac{25(x-2)^2}{225} + \frac{9(y-3)^2}{225} = \frac{225}{225},$$

la ecuación representa una elipse

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1,$$

donde:

- Centro $C = (2, 3) = (h, k)$ por tanto $h = 2$ y $k = 3$

- Como el denominador mayor es 25, $a^2 = 25$ entonces $a = 5$

- Los vértices son $V = (h, k \pm a) = (2, 3 \pm 5)$, de donde $V' = (2, -2)$ y $V = (2, 8)$

- Como el denominador menor es 9 entonces $b^2 = 9$ y $b = 3$

- Los extremos del eje menor son $A = (h\pm b, k) = (2\pm 3, 3)$; es decir $A' = (-1, 3)$ y $A = (5, 3)$

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, con $a = 5$ y $b = 3$, resulta $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

- Los focos son los puntos $F = (h, k\pm c) = (2, 3\pm 4)$, de aquí que $F' = (2,-1)$ y $F = (2,7)$

- La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = .8$

- La longitud del lado recto es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(3)^2}{5} = 3.6$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h+\frac{b^2}{a}, k+c\right) = (3.8, 7), \quad \left(h-\frac{b^2}{a}, k+c\right) = (.2, 7),$$

$$\left(h+\frac{b^2}{a}, k-c\right) = (3.8, -1) \text{ y } \left(h-\frac{b^2}{a}, k-c\right) = (.2, -1)$$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.67.

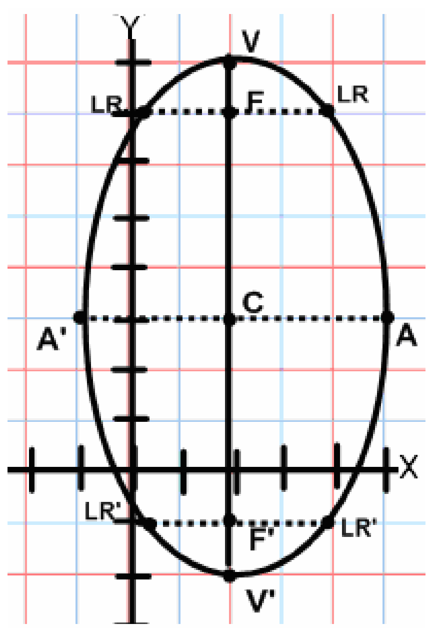


Figura 2.67

Ejercicio 37

1. En cada caso, hallar la ecuación de la elipse, si tiene:

   a) $C = (5, 1)$, $V = (5,4)$ y uno de los extremos del eje menor es $(3, 1)$.

   b) Los vértices están en $(3, 8)$ y $(3, -2)$ y uno de los focos se encuentra en $(3, 6)$.

   c) Un foco en $(-2, 2)$ y los extremos del eje menor son $(-5, -2)$ y $(1, -2)$.

   d) La longitud del eje menor es 2 y sus vértices son los puntos $(3, -1)$ y $(3, -5)$.

2. Para cada una de las ecuaciones hallar el centro, los focos y los vértices de las elipses.

   Determinar la longitud del lado recto y la excentricidad.

   a) $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

   b) $25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0$

2.4 Hipérbola

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

2.4.1 Elementos de la hipérbola

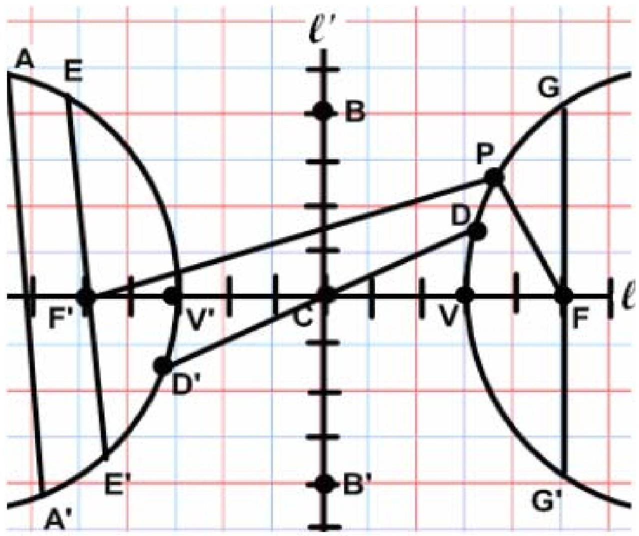


Figura 2.68

Los elementos de la hipérbola (ver figura 2.68) son:

- Dos *ramas* diferentes de longitud infinita.

- Los *focos* designados por *F'* y *F.*

- El *eje focal* corta a la parábola en dos puntos *V'* y *V* llamados *vértices*.

- La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento *V´V*, se llama *eje transverso*

- El punto medio *C* del eje transverso se llama *centro*

- La recta ***ℓ'*** que pasa por *C* y es perpendicular al eje focal ***ℓ*** se denomina *eje normal*

- Una porción del eje normal *B'B* que tiene a *C* por punto medio, se llama *eje conjugado*

- El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda*, estos puntos pueden ser ambos de la misma rama como la cuerda $A'A$ o uno de una rama y otro de la otra como la cuerda $V'V$.

- Una cuerda focal tal como $G'G$, perpendicular al eje focal ℓ se llama *lado recto;* evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos.

- Una cuerda que pasa por C tal como $D'D$, se llama *diámetro*

- Si P es un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

2.4.2 Ecuación normal de la hipérbola con el eje mayor horizontal

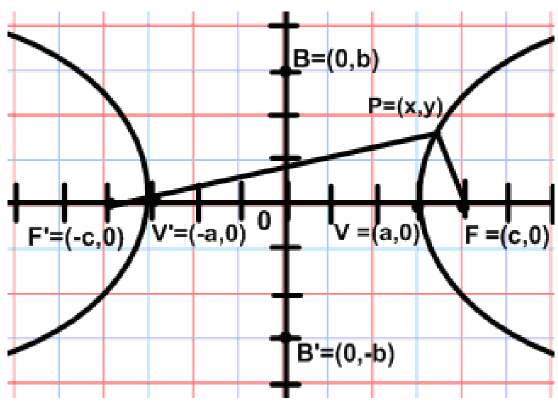


Figura 2.69

Considere la posición horizontal donde el eje transverso coincide con el eje X y el eje conjugado coincide con el eje Y (figura 2.69).

- Los focos F' y F están entonces sobre el eje X.

- El centro O es el punto medio del segmento $F'F$, las coordenadas de F' y F serán ($-c$, 0) y (c, 0) respectivamente, siendo c una constante positiva.

- Sea $P=(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola.

Entonces, por definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

$$\left| \left| \overline{FP} \right| - \left| \overline{F'P} \right| \right| = 2a$$

En donde a es una constante positiva y $2a < 2c$

La diferencia $2a$ será positiva si P está en la rama izquierda de la hipérbola y negativa si se encuentra en la rama derecha.

Usando la ecuación para la distancia entre dos puntos, se tiene

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ .$$

Sustituyendo en la igualdad

$$\left\| \overline{FP} \right| - \left| \overline{F'P} \right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \ - \ \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a,$$

trasponiendo el segundo radical, resulta

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,$$

elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se obtiene

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2\ ,$$

desarrollando y simplificando, encontramos

$$-4a^2-4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,$$

elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad

$$16a^4 + 32a^2cx + 16c^2x^2 = 16a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2),$$

dividiendo la ecuación entre 16 y simplificando

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

trasponiendo términos

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$

factorizando

$$(c^2-a^2)\, x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2),$$

dado que $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo y se puede definir un número b tal que

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Sustituyendo la ecuación $c^2 - a^2$ por b^2 en la ecuación anterior, queda

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

dividiendo la ecuación entre $a^2 b^2$, se obtiene

$$\frac{b^2 x^2}{a^2 b^2} - \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2},$$

o sea

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{28}$$

que es *la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen.*

Las ramas de la hipérbola cortan el eje X en los vértices V' y V, cuyas coordenadas son $V' = (-a, 0)$ y $V = (a, 0)$, por tanto la longitud del eje transverso es $2a$ que es la constante.

La hipérbola no corta al eje Y, pero los puntos B' y B se toman como los extremos del eje conjugado de longitud igual a $2b$, razón por la cual sus coordenadas son $B' = (0, -b)$ y $B = (0, b)$.

Si en la ecuación de la hipérbola se sustituye x por $-x$ y y por $-y$, no se altera, esto significa que la hipérbola es simétrica con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

Si en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se despeja x se obtiene

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2},$$

donde y puede tomar cualquier valor real.

Si se despeja y se obtiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

donde x puede tomar cualquier valor real excepto aquellos para los cuales $x^2 < a^2$.

Por tanto las ramas de la hipérbola se extienden indefinidamente a la derecha de la recta vertical cuando $x = a$ y a la izquierda de la recta cuando $x = -a$.

Si en la ecuación

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ ,$$

se sustituye x por c y usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$, resulta lo siguiente

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}\ ,$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}\ ,$$

$$y = \pm\frac{b}{a}b\ ,$$

$$y = \pm\frac{b^2}{a}\ .$$

Por lo que los extremos de los lados rectos son $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$ y $\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$.

La longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

La excentricidad e de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$, esto se debe a que $c^2 = a^2 + b^2$ y, por tanto, $c > a$.

En la figura 2.70 se pueden localizar los siguientes puntos:

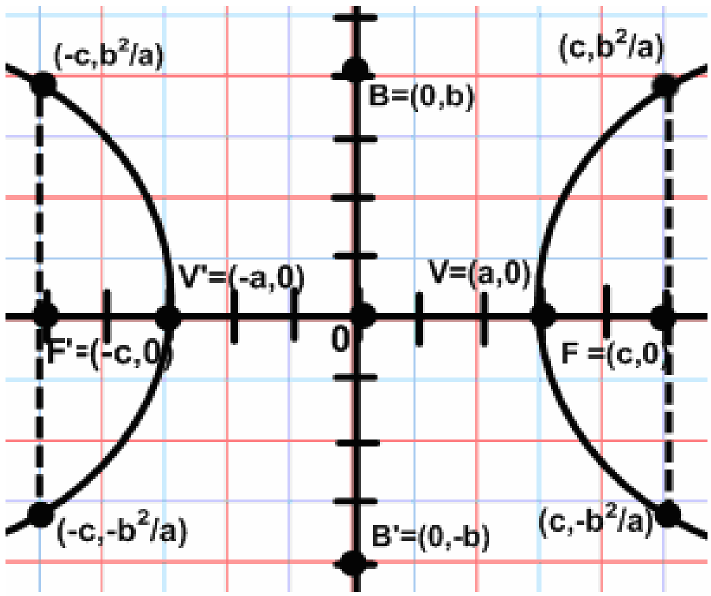


Figura 2.70

- Los *vértices* son los puntos $V' = (-a, 0)$ y $V = (a, 0)$

- Los *focos* son los puntos $F' = (-c, 0)$ y $F = (c, 0)$

- Los *extremos del eje conjugado* son $B' = (0, -b)$ y $B = (0, b)$

- El *centro* es $C = (0,0)$

- Los *extremos de los lados rectos* son $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ y $\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$

- La *longitud de los lados rectos* es $L.R. = \frac{2b^2}{a}$

- La *excentricidad* e de la hipérbola esta dada por la relación $e = \frac{c}{a}$ con $e > 1$

El criterio con que se determina la posición del eje transverso de la hipérbola es con respecto a la variable que tiene el coeficiente positivo.

Relación entre los ejes y la distancia focal

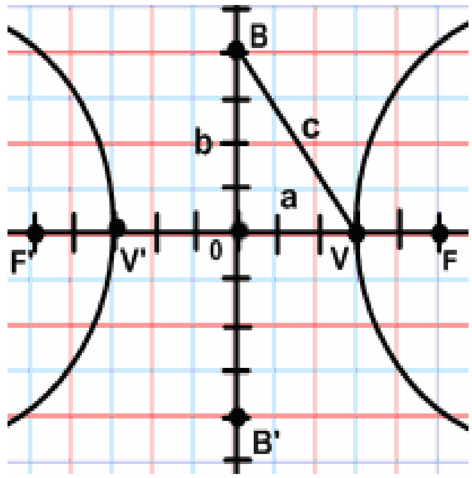


Figura 2.71

En una hipérbola cualquiera como la de la figura 2.71, se tiene por construcción

$$\overline{VB} = \overline{OF} = c$$

entonces en el triángulo $OVBO$, que es rectángulo en O se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (29)$$

fórmula que permite calcular la longitud de uno de los ejes o la distancia focal, cuando se conocen los otros dos elementos.

Teniendo en cuenta que:

a equivale a la mitad de la longitud del eje transverso,

b equivale a la mitad de la longitud del eje conjugado y

c es la distancia del centro al foco.

Asíntotas de una hipérbola horizontal

A diferencia de otras cónicas, la hipérbola tiene asociadas dos rectas con las que guarda una relación importante. Estas rectas contienen a las diagonales del rectángulo de la figura 2.72

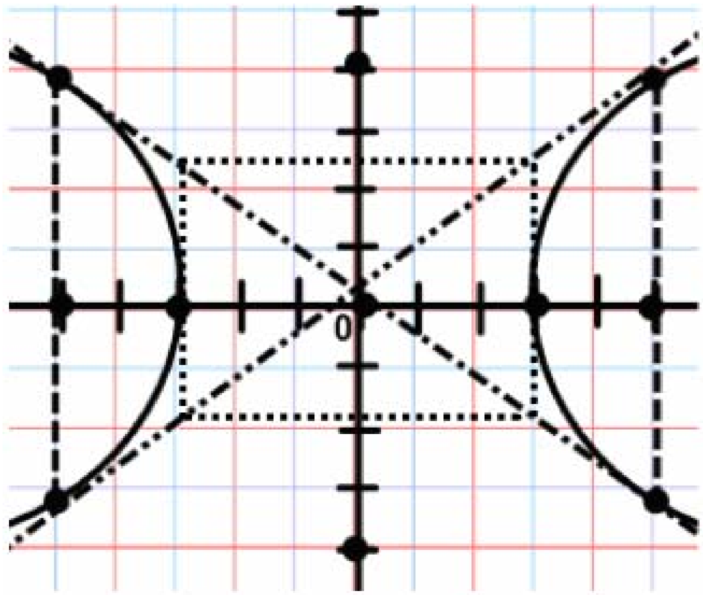


Figura 2.72

Como la ecuación de la hipérbola horizontal es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Las *ecuaciones de sus asíntotas* son

$$y=-\frac{b}{a}x \qquad (30)$$

y

$$y=\frac{b}{a}x \qquad (31)$$

cuando $a=b$ el rectángulo es un cuadrado y las asíntotas son perpendiculares entre si. En tal caso se dice que la hipérbola es equilátera porque sus ejes transverso y conjugado tienen la misma longitud. También se dice que la hipérbola es rectangular porque sus asíntotas se intersecan en ángulo recto.

Obtener las ecuaciones particulares de la hipérbola dados los elementos que la definen

Ejemplo 1

Los vértices de una hipérbola son los puntos $V = (\pm 5,\, 0)$ y sus focos los puntos $F = (\pm 6,\, 0)$. Hallar la ecuación, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de sus asíntotas.

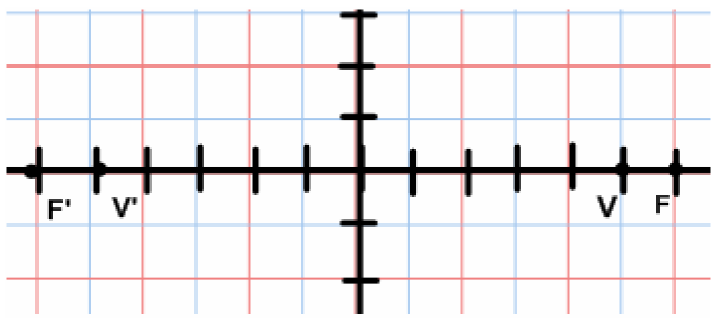


Figura 2.73

- Dado que $V = (\pm 5,\, 0) = (\pm a,\, 0)$, se tiene que $a = 5$

- En el caso de los focos, se tiene que $F = (\pm 6,\, 0) = (\pm c,\, 0)$, de manera que $c = 6$

- De acuerdo con la relación $c^2 = a^2 + b^2$, de los valores encontrados para a y c, resulta

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} = 3.3$$

- Los extremos del eje conjugado son los puntos $B = (0, \pm b)$; esto es $B = (0, \pm 3.3)$

- El centro es $C = (0,0)$

- La excentricidad de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{6}{5} = 1.2$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(5) = 10$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(3.3) = 6.6$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3.3)^2}{5} = 4.4$$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) = (6,\ 2.2),\quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right) = (6,\ -2.2),\quad \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) = (-6,\ 2.2) \quad \text{y} \quad \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) = (-6,\ -2.2)$$

-La ecuación de la hipérbola queda en este caso como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

- Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = -\frac{3.3}{5}x \qquad \text{y} \qquad y = \frac{3.3}{5}x$$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.74

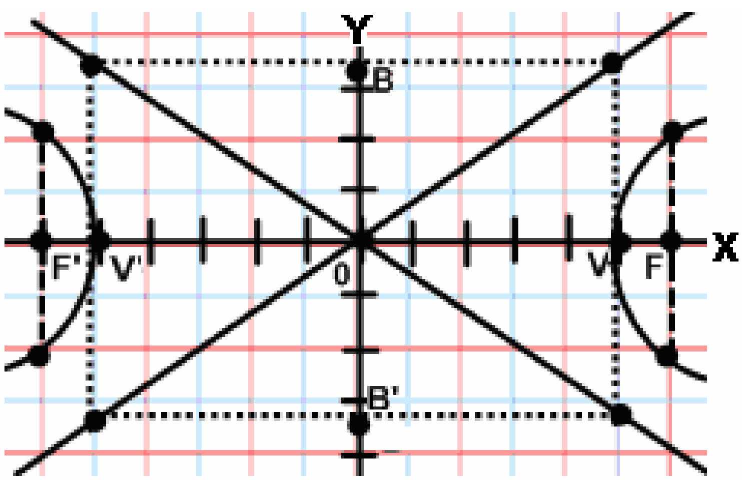


Figura 2.74

Obtener los elementos de la hipérbola a partir de la ecuación

Trazar la hipérbola $16x^2 - 36y^2 = 576$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas, los focos, los vértices y el valor de su excentricidad.

La ecuación de la hipérbola queda en su forma ordinaria, si se divide la ecuación entre 576; esto es

$$\frac{16}{576}x^2 - \frac{36}{576}y^2 = 576$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$$

- El denominador de la variable positiva es 36 por lo que $a^2 = 36$ y $a = 6$, quedando entonces

$$V = (\pm a, 0) = (\pm 6, 0)$$

- El denominador de la variable negativa es 16 de manera que $b^2 = 16$ y $b = 4$, de aquí que

$$B = (0, \pm b) = (0, \pm 4)$$

- Si $c^2 = a^2 + b^2$, con $a = 6$ y $b = 4$ resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7.2$$

- Dado que $c = 7.2$ se tiene $F = (\pm c, 0) = (\pm 7.2, 0)$, de manera que

$$F' = (-7.2, 0) \text{ y } F = (7.2, 0)$$

- El centro es $C = (0,0)$

- La excentricidad de la hipérbola es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7.2}{6} = 1.2$$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(6) = 12$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(4) = 8$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{6} = 5.3$$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) = (7.2,\ 2.6), \quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right) = (7.2,\ -2.6),$$

$$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) = (-7.2,\ 2.6) \text{ y } \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) = (-7.2,\ -2.6)$$

- Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = -\frac{2}{3}x \quad \text{y} \quad y = \frac{2}{3}x$$

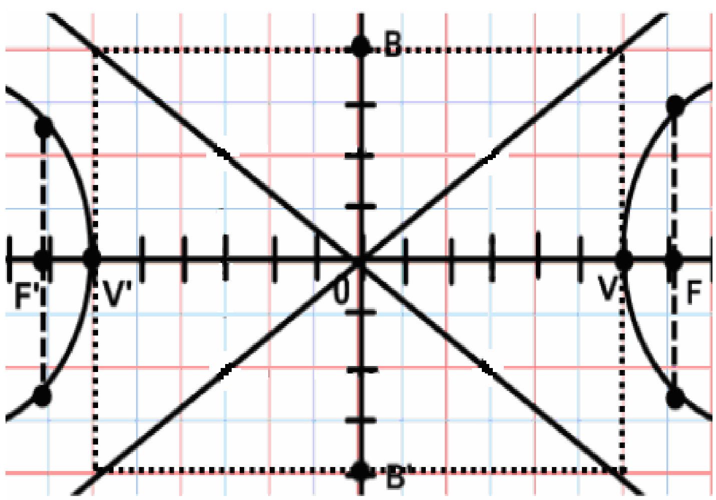


Figura 2.75

Ejercicio 38

1. Para cada caso obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y ejes localizados en los ejes coordenados que satisfacen las siguientes condiciones:

a) Vértice en $(4, 0)$ y un extremo del eje conjugado en $(0, 3)$.

b) Vértice en $(6, 0)$ y un foco en $(9, 0)$.

c) Un foco en $(9, 0)$ y excentricidad $e = 3/2$.

d) Un foco en $(6, 0)$ y un vértice en $(-4, 0)$.

2. Para cada ecuación dada de la hipérbola, hallar los vértices, los focos, la excentricidad, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas.

a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) $81x^2 - 144y^2 = 11664$

c) $16x^2 - 36\ ^2 = 576$

d) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{49} = 490$

Hipérbola horizontal con centro en (h,k)

Si los ejes de una hipérbola son paralelos a los ejes coordenados y su centro esta en el punto (h, k) su ecuación se puede obtener trasladando los ejes de manera que el nuevo origen O' coincida con el punto (h, k).

Si el eje transverso es paralelo al eje X, la ecuación de la hipérbola en relación con los nuevos ejes X' y Y' es

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Dada la transformación

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

tenemos

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

los cuales se sustituyen en la ecuación de la hipérbola y queda la *ecuación de la hipérbola con centro en (h, k)* y *con eje transverso paralelo al eje X*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \qquad (32)$$

Las ecuaciones de sus asíntotas son

$$y - k = -\frac{b}{a}(x-h) \qquad (33)$$

y

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \qquad (34)$$

En cada una de las ecuaciones:

a es la mitad de la longitud del eje transverso

b es la mitad de la longitud del eje conjugado

c es la distancia del centro al foco

y las tres se relacionan de la siguiente manera $c^2 = a^2 + b^2$

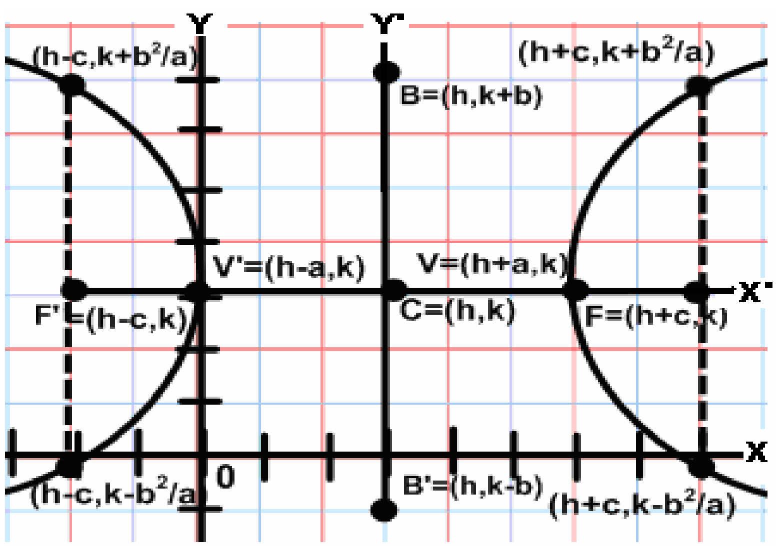


Figura 2.76

En la figura 2.76 se pueden localizar los siguientes puntos:

- Los *vértices* son los puntos $V' = (h-a, k)$ y $V = (h+a, k)$

- Los *focos* son los puntos $F' = (h-c, k)$ y $F = (h+c, k)$

- Los *extremos del eje conjugado* son $B' = (h, k-b)$ y $B = (h, k+b)$

- El *centro* es $C = (h, k)$

- La *excentricidad* de una hipérbola es $e = \dfrac{c}{a}$ con $e > 1$

- La *longitud de los lados rectos* de la hipérbola es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$

- Los *extremos de los lados rectos* son

$$\left(h+c, k+\frac{b^2}{a}\right), \quad \left(h+c, k-\frac{b^2}{a}\right), \quad \left(h-c, k+\frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(h-c, k-\frac{b^2}{a}\right)$$

<u>Nota</u>
El criterio con que se determina la posición del eje transverso de la hipérbola es con respecto a la variable que tiene el coeficiente positivo, y se designa como a.

Ecuación general de la hipérbola horizontal

La ecuación de la hipérbola con centro en (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

se puede expresar en la *forma general de la hipérbola horizontal*

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (35)$$

La forma general representa una hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados si A y C tienen signos contrarios.

Ejemplo 1

Hallar los vértices, los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola que representa la ecuación $9x^2 - 16y^2 - 54x - 63 = 0$.

Trasponiendo el término independiente y reordenando los demás términos, se tiene

$$9x^2 - 54x - 16y^2 = 63,$$

factorizando el primer miembro, queda

$$9(x^2 - 6x) - (4y)^2 = 63,$$

sumando a los dos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado, queda así

$$9(x^2 - 6x + 9) - (4y)^2 = 63 + 81,$$

factorizando nuevamente en el primer miembro y sumando en el segundo

$$9(x - 3)^2 - 16(y^2) = 144.$$

Dividiendo ambos miembros entre 144

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}.$$

La ecuación de la hipérbola queda entonces como

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

- El centro es $C = (3, 0) = (h, k)$ entonces $h = 3$ y $k = 0$

- Como el coeficiente del término cuadrático en x es positivo significa que el eje transverso es paralelo al eje X; $a^2 = 16$ es decir $a = 4$

- Los vértices son los puntos $V = (h \pm a, k)$, de donde

$$V' = (-1, 0) \quad \text{y} \quad V = (7, 0)$$

- Como el coeficiente del término cuadrático en y es negativo significa que el eje conjugado es paralelo al eje Y; $b^2 = 9$ y $b = 3$.

- Los extremos del eje conjugado son $B = (h, k \pm b)$; esto es

$$B' = (3, -3) \quad \text{y} \quad B = (3, 3)$$

- Si $c^2 = a^2 + b^2$, con $a = 4$ y $b = 3$, resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

- Los focos son los puntos $F = (h \pm c, k) = (3 \pm 5, 0)$, de manera que

$$F' = (-2, 0) \quad \text{y} \quad F = (8, 0)$$

- La excentricidad de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} = 1.25$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(4) = 8$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(3) = 6$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{4} = 4.5$$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h + c, k + \frac{b^2}{a}\right) = (8, 2.2), \ \left(h + c, k - \frac{b^2}{a}\right) = (8, -2.2),$$

$$\left(h - c, k + \frac{b^2}{a}\right) = (-2, 2.2) \text{ y } \left(h - c, k - \frac{b^2}{a}\right) = (-2, -2.2)$$

- Las ecuaciones de las asíntotas son $y = -\frac{3}{4}(x - 3)$ y $y = \frac{3}{4}(x - 3)$

- La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.77.

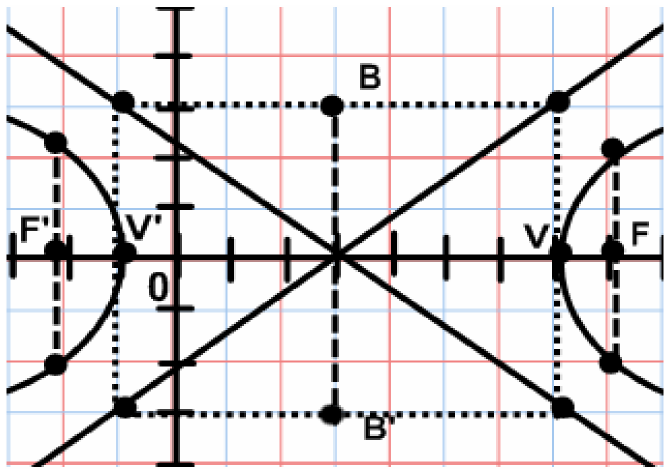


Figura 2.77

Ejercicio 39

1. Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en (h, k) que satisface las siguientes condiciones:

a) Centro en $(1, 3)$, un vértice en $(4, 3)$ y un extremo del eje conjugado en $(1, 1)$.
b) Eje transverso al eje X de longitud 12, eje conjugado de longitud 10 y $C = (2, -1)$.
c) Un vértice en $(-4, 0)$ y focos en los puntos $(-5, 0)$ y $(1, 0)$.
d) Sus vértices se hallan en los puntos $(-6, 8)$ y $(2, 8)$ y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$.

2. Para cada una de las ecuaciones de la hipérbola, hallar el centro, los vértices, los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas, obtener su gráfica y su ecuación ordinaria.
a) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$
b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 32y - 59 = 0$
c) $21x^2 - 4y^2 + 84x - 32y - 64 = 0$
d) $4x^2 - 9y^2 + 32x - 18y + 19 = 0$

2.4.3 Ecuación normal de la hipérbola con el eje mayor vertical

Ecuación de la hipérbola vertical cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados

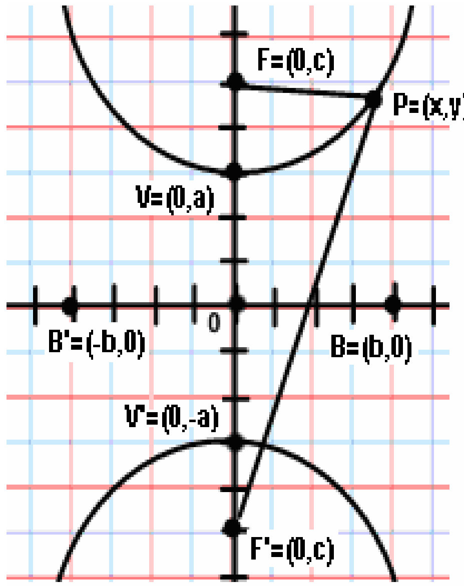


Figura 2.78

En éste caso se considera la posición vertical donde el eje transverso coincide con el eje Y y el eje conjugado coincide con el eje X.

En la figura 2.78 sea:

$P = (x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola

$F = (0, c)$ y $F' = (0, -c)$ son los focos.

De acuerdo con la definición de la hipérbola

$$\overline{FP} - \overline{F'P} = 2a,$$

y de la expresión para la distancia entre dos puntos

$$\overline{FP} = \sqrt{x^2 + (y-c)^2} \quad \text{y} \quad \overline{F'P} = \sqrt{x^2 + (y+c)^2},$$

se tiene

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a,$$

trasponiendo el segundo radical, resulta

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = 2a + \sqrt{x^2+(y+c)^2},$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$x^2 + (y - c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + (y + c)^2 + x^2,$$

desarrollando y simplificando

$$y^2 - 2cy + c^2 + x^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + y^2 + 2cy + c^2 + x^2,$$

simplificando nuevamente

$$-4a^2 - 4cy = 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2},$$

elevando al cuadrado

$$16a^4 + 32a^2cy + 16c^2y^2 = 16a^2x^2 + 32a^2cy + 16a^2c^2 + 16a^2y^2,$$

dividiendo entre 16

$$a^4 + c^2y^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

trasponiendo términos

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4,$$

factorizando

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

dado que $c > a$, c^2-a^2 es un número positivo y se puede definir un número b tal que

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Sustituyendo la ecuación c^2-a^2 por b^2 en la ecuación anterior, resulta

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

dividiendo ambos miembros entre a^2b^2 se obtiene

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

o sea

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (36)$$

que es la ecuación de la *hipérbola vertical con centro en el origen.*

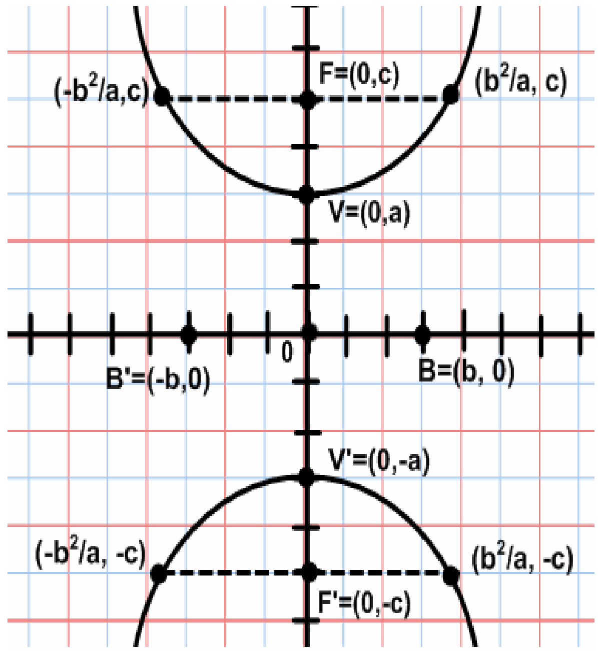


Figura 2.79

En la figura 2.79 se pueden localizar los siguientes puntos:

- Los *vértices* son los puntos $V' = (0, -a)$ y $V = (0, a)$

- Los *focos* son los puntos $F' = (0, -c)$ y $F = (0, c)$

- Las *extremos del eje conjugado* son los puntos $B' = (-b, 0)$ y $B = (b, 0)$

- El *centro* es $C = (0,0)$

- La *longitud de los lados rectos* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$

- Los *extremos de los lados rectos* son $\left(\dfrac{b^2}{a}, c\right)$, $\left(-\dfrac{b^2}{a}, c\right)$, $\left(\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$ y $\left(-\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$

- La *excentricidad* de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a}$ con $e > 1$

-La relación entre las variables a, b y c en la hipérbola es

$$c^2 = a^2 + b^2$$

-El criterio con que se determina la posición del eje transverso de la hipérbola es con respecto a la variable que tiene el coeficiente positivo.

Asíntotas de una hipérbola vertical

Como ya se mencionó, a diferencia de otras cónicas, la hipérbola tiene asociadas dos rectas con las que guarda una relación importante. Estas rectas contienen a las diagonales del rectángulo de la figura 2.80

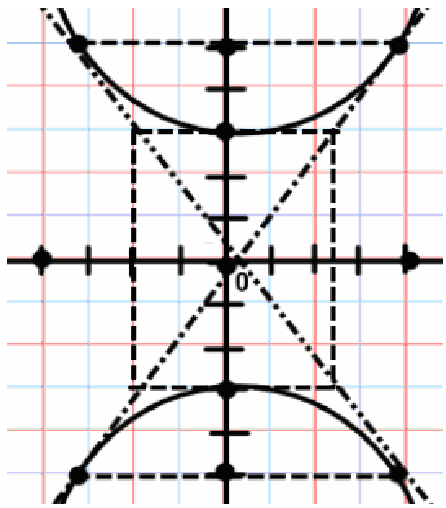


Figura 2.80

Como la ecuación de la hipérbola vertical es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Las *ecuaciones de sus asíntotas* son

$$y = -\frac{a}{b}x \qquad (37)$$

y

$$y = \frac{a}{b}x \qquad (38)$$

cuando $a = b$ el rectángulo es un cuadrado y las asíntotas son perpendiculares entre si. En tal caso se dice que la hipérbola es equilátera porque sus ejes transverso y conjugado tienen la misma longitud. También se dice que la hipérbola es rectangular porque sus asíntotas se intersecan en ángulo recto.

Obtener las ecuaciones de la hipérbola dados sus elementos

Ejemplo 1

Los vértices de una hipérbola son los puntos $V = (0, \pm 6)$ y sus focos los puntos $F = (0, \pm 7)$. Hallar la ecuación, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de sus asíntotas.

- Dado que $V = (0, \pm a) = (0, \pm 6)$, se tiene que $a = 6$

- En el caso de los focos se tiene $F = (0, \pm c) = (0, \pm 7)$ de manera que $c = 7$

- De acuerdo con la relación $c^2 = a^2 + b^2$, de los valores encontrados para a y c resulta

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13} = 3.6$$

- Los extremos del eje conjugado son los puntos $B = (\pm b, 0)$; esto es $B = (\pm 3.6, 0)$

- El centro es $C = (0,0)$

- La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{6} = 1.1$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(6) = 12$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(3.6) = 7.2$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es $L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3.6)^2}{6} = 4.3$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(\frac{b^2}{a}, c\right) = (2.1, 7),\quad \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = (-2.1, 7),\quad \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = (2.1, -7) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = (-2.1, -7)$$

La ecuación de la hipérbola queda en este caso como

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$$

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = -\dfrac{6}{3.6}x$ y $y = \dfrac{6}{3.6}x$

La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.81

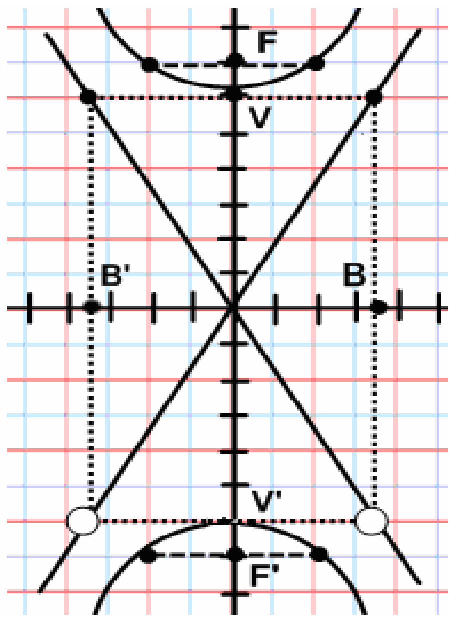


Figura 2.81

Obtener los elementos de la hipérbola a partir de la ecuación

Ejemplo 1

Trazar la hipérbola $16y^2 - 25x^2 = 400$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas, los focos, los vértices y el valor de su excentricidad.

La ecuación de la hipérbola queda en su forma ordinaria si se divide la ecuación entre 400; esto es

$$\frac{16}{400}y^2 - \frac{25}{400}x^2 = \frac{400}{400}$$

de donde resulta

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

- El denominador de la variable positiva es 25 por lo que $a^2 = 25$ y $a = 5$, quedando entonces

$$V = (0, \pm a) = (0, \pm 5)$$

- El denominador de la variable negativa es 16 de manera que $b^2 = 16$ y $b = 4$, de aquí que

$$B = (\pm b, 0) = (\pm 4, 0)$$

- Si $c^2 = a^2 + b^2$, con $a = 5$ y $b = 4$, resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} = 6.4$$

- Dado que $c = 6.4$ se tiene $F = (0, \pm c) = (0, \pm 6.4)$, de manera que

$$F' = (0, -6.4) \text{ y } F = (0, 6.4)$$

- El centro es $C = (0,0)$

- La excentricidad de la hipérbola es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6.4}{5} = 1.28$$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(5) = 10$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(4) = 8$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es $L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = 6.4$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(\frac{b^2}{a}, c\right) = (3.2, 6.4),\ \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = (-3.2, 6.4),\ \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = (3.2, -6.4) \text{ y } \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = (-3.2, -6.4)$$

- Las ecuaciones de las asíntotas son $y = -\frac{5}{4}x$ y $y = \frac{5}{4}x$

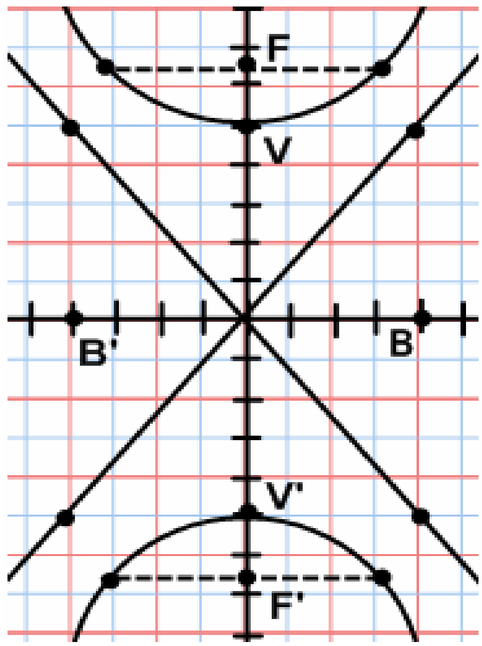


Figura 2.82

Ejercicio 40

1. Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y ejes localizados en los ejes coordenados que satisfacen las condiciones dadas:
   a) Un vértice en $(0, 4)$ y un extremo del eje conjugado en $(3, 0)$.
   b) Un vértices en $(0, 6)$ y un foco en $(0, 9)$.
   c) Un foco en $(0, 9)$ y excentricidad de $3/2$
   d) Un foco en $(0, 6)$ y un vértice en $(0, -4)$

2. Para cada ecuación dada de la hipérbola, hallar los vértices, los focos, la excentricidad, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas:
   a) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$
   b) $81y^2 - 144x^2 = 11664$
   c) $16y^2 - 36x^2 = 576$
   d) $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{49} = 490$

Hipérbola vertical con centro en (h, k)

Si una hipérbola tiene su centro en (h, k) y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, su ecuación se puede obtener trasladando los ejes de manera que el nuevo origen O', coincida con el punto (h, k).

Si el eje transverso es paralelo al eje Y, la ecuación de la hipérbola en relación con los nuevos ejes X' y Y' es

$$\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1.$$

Dada la transformación

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k$$

se tiene

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

los cuales se sustituyen en la ecuación de la hipérbola y resulta la *ecuación de la hipérbola con centro en* (h,k) y *con eje transverso paralelo al eje Y*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \qquad (39)$$

Las ecuaciones de sus asíntotas son

$$y - k = -\frac{a}{b}(x-h) \qquad (40)$$

y

$$y - k = \frac{a}{b}(x-h) \qquad (41)$$

- Como ya se mencionó, la relación entre las variables a, b y c en la hipérbola es

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- El criterio con que se determina la posición del eje transverso de la hipérbola es con respecto a la variable que tiene el coeficiente positivo y se designa por a.

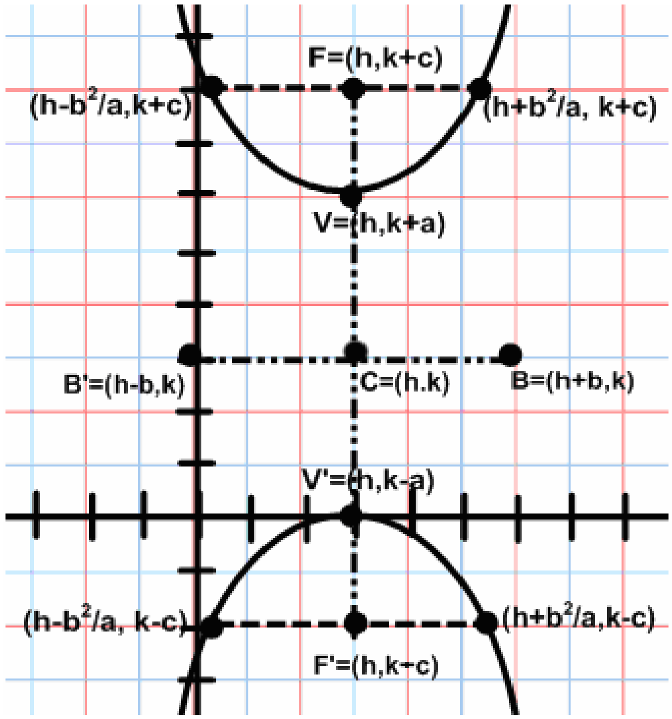


Figura 2.83

En la figura 2.83 se pueden localizar los siguientes puntos:

- Los *vértices* son los puntos $V' = (h, k\text{-}a)$ y $V = (h, k+a)$

- Los *focos* son los puntos $F' = (h, k\text{-}c)$ y $F = (h, k+c)$

- Los *extremos del eje conjugado* son $B' = (h\text{-}b, k)$ y $B = (h+b, k)$

- El *centro* es $C = (h, k)$

- Los *extremos de los lados rectos* son

$$\left(h+\frac{b^2}{a}, k+c\right),\quad \left(h-\frac{b^2}{a}, k+c\right),\quad \left(h+\frac{b^2}{a}, k-c\right) \quad \text{y} \quad \left(h-\frac{b^2}{a}, k-c\right)$$

- La *longitud de los lados rectos de la hipérbola* es $L.R. = \dfrac{2b^2}{a}$

- La *excentricidad de la hipérbola* es $e = \dfrac{c}{a}$ con $e > 1$.

Ecuación general de la hipérbola vertical

La ecuación de la hipérbola vertical con centro en (h, k)

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

se puede expresar en la *forma general de la hipérbola vertical*

$$-Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (42)$$

La forma general representa una hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados si A y C tienen signos contrarios.

Ejemplo 1

Hallar los vértices, los focos, la longitud del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola que representa la ecuación $y^2 - 4x^2 + 12x - 4y - 21 = 0.$

Trasponiendo el término independiente y reordenando los demás términos, se tiene

$$y^2 - 4y - 4x^2 + 12x = 21,$$

factorizando en el primer miembro, queda

$$(y^2 - 4y) - 4(x^2 - 3x) = 21$$

sumando a los dos miembros de la igualdad, el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado, queda así

$$(y^2 - 4y + 4) - 4(x^2 - 3x + 2.25) = 21 + 4 - 9$$

factorizando nuevamente en el primer miembro y sumando en el segundo

$$(y - 2)^2 - 4(x - 1.5)^2 = 16$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre 16

$$\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{4(x-1.5)^2}{16} = \frac{16}{16}$$

La ecuación de la hipérbola queda entonces como

$$\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1.5)^2}{4} = 1$$

El centro es $C = (2, 1.5) = (h, k)$ entonces $h = 2$ y $k = 1.5$

- Como el coeficiente del término cuadrático en y es positivo significa que el eje transverso es paralelo al eje Y; $a^2 = 16$ es decir $a = 4$

- Los vértices son los puntos $V = (h, k \pm a)$, de donde

$$V' = (2, -2.5) \quad \text{y} \quad V = (2, 5.5)$$

- Como el coeficiente del término cuadrático en x es negativo significa que el eje conjugado es paralelo al eje X; $b^2 = 4$ y $b = 2$.

- Los extremos del eje conjugado son $B = (h \pm b, k)$, esto es

$$B' = (0, 1.5) \quad \text{y} \quad B = (4, 1.5)$$

- Si $c^2 = a^2 + b^2$, con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4.4$$

- Los focos son los puntos $F = (h, k \pm c) = (2, 1.5 \pm 4.4)$, de manera que

$$F' = (2, -2.9) \text{ y } F = (2, 5.9)$$

- El centro es $C = (2, 1.5)$

- La excentricidad de la hipérbola es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4.4}{4} = 1.1$$

- La longitud del eje transverso es $2a = 2(4) = 8$

- La longitud del eje conjugado es $2b = 2(2) = 4$

- La longitud de los lados rectos de la hipérbola es

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{4} = 2$$

- Los extremos de los lados rectos son

$$\left(h+\frac{b^2}{a}, k+c\right) = (3, 5.9), \quad \left(h-\frac{b^2}{a}, k+c\right) = (1, 5.9),$$

$$\left(h+\frac{b^2}{a}, k-c\right) = (3, -2.9) \quad \text{y} \quad \left(h-\frac{b^2}{a}, k-c\right) = (1, -2.9)$$

- Las ecuaciones de las asíntotas son

$(y - 1.5) = -2\,(x - 2)$ y $(y - 1.5) = 2\,(x - 2)$

La gráfica correspondiente es como se muestra en la figura 2.84

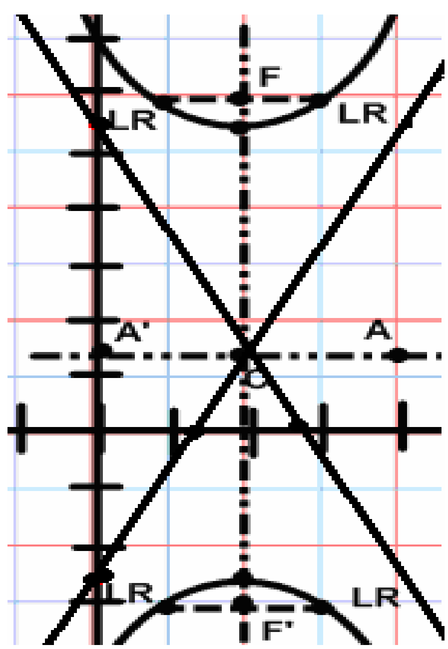


Figura 2.84

Ejercicio 41

1. Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en (h, k) que satisface las siguientes condiciones:

a) Centro en $(2, 3)$, un vértice en $(2, 0)$ y un extremo del eje conjugado en $(4, 3)$.
b) Eje transverso al eje Y y mide 8, eje conjugado mide 10 y $C = (-4, 1)$
c) Un vértice en $(-3, -2)$ y focos en $(-3, 0)$ y $(-3, 8)$
d) Sus vértices se hallan en $(-3, 5)$ y $(-3, 13)$ y su excentricidad es igual a $\frac{5}{4}$

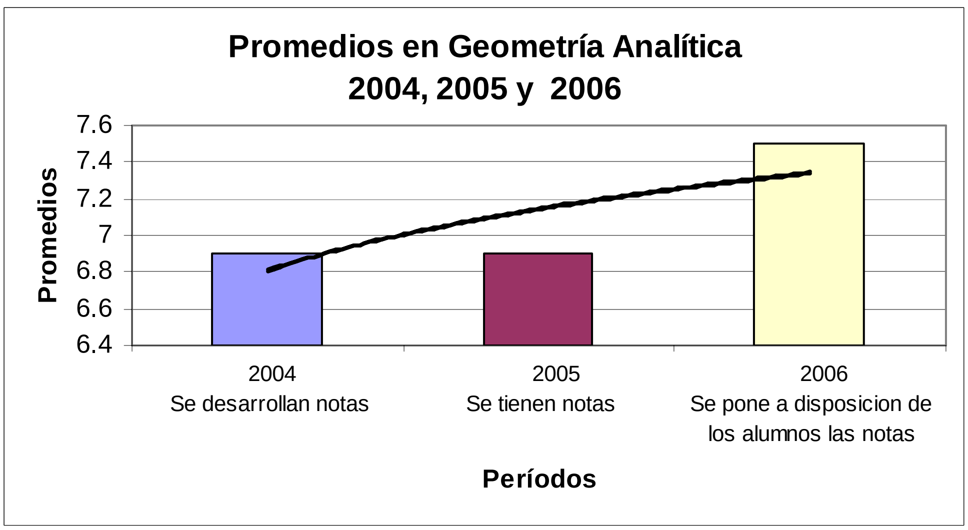
2. Para cada ecuación de la hipérbola, hallar el centro, los vértices y los focos. Obtener la longitud del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas. Obtener su gráfica y su ecuación ordinaria

a) $5y^2 - 4x^2 - 30y + 32x - 99 = 0$
b) $4y^2 - 9x^2 + 54x - 8y - 36 = 0$
c) $9y^2 - 4x^2 - 32x - 36y - 64 = 0$
d) $8y^2 - 3x^2 - 24x - 72 = 0$

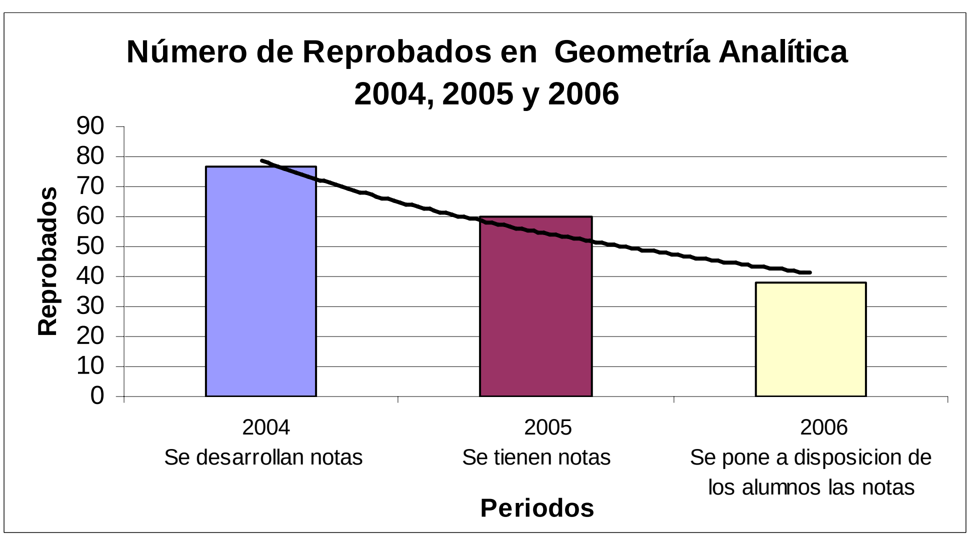
Conclusiones

El material presentado ha sido empleado, al menos en algunas de sus partes, por profesores del CONALEP. Además de que los docentes participantes han contribuido en diversas formas para mejorar el contenido del material, han manifestado una opinión favorable a éste trabajo.

El material ha sido probado durante los tres últimos años. Mi percepción con respecto a como ha sido aceptado por parte de los alumnos es que, efectivamente, ha servido de apoyo, orientación y estimulación para el trabajo de ellos fuera de clase. Esto puede verse reflejado en las siguientes gráficas



Esta gráfica muestra que el promedio ha aumentado de 6.9 a 7.5



Esta gráfica muestra que la cantidad de reprobados ha disminuido del 41% al 23%. Es evidente que la bibliografía que comercialmente existe sobre los temas que se desarrollan en el trabajo es amplia y que es obligación tanto del profesor como del alumno consultarla. Sin embargo, pienso que siempre es de utilidad disponer de material que lleve el orden y sea consistente con el nivel y el enfoque con los cuales se debe trabajar en una escuela en particular, ésto facilita a los alumnos las actividades de búsqueda y aprendizaje en general.

Evidentemente, todo material o proceso puede ser mejorado. Para hacer más atractivo el presente trabajo, pienso que sería conveniente:

- agregarle ilustraciones que llamen la atención del alumno
- editarlo en varios colores
- agregar, por cada tema ejemplos y ejercicios que ilustren su uso en la vida real
- convertirlo a página Web
- convertirse en tutorial interactivo del CONALEP si se le agregan imágenes, video, sonido y animaciones
- también, de acuerdo al índice realizar un cuadernillo de actividades, problemas y ejercicios que el alumno se viera obligado a entregar completo al final del semestre.

Todo ello permitiría al alumno estudiar fuera del salón de clase, repasar y enriquecer lo aprendido, aprender de manera diferente y divertida, estudiar algún tema que no se haya visto en clase y prepararse mejor para sus exámenes.

Sería bueno también extender ésta práctica a todas las materias que tienen un alto índice de reprobación, tales como Física, Química y las materias restantes de Matemáticas.

Al realizar éste trabajo se observó:

a) La importancia de trabajar en equipo para facilitar el trabajo de investigación de docentes y alumnos, tanto para la enseñanza de la materia, como para su estudio.

b) Se requiere conservar e incrementar el promedio para dejar de entregar alumnos con promedio de 7, para ello se propone crear cursos interactivos y cursos en línea.

c) Es urgente también disminuir el índice de reprobación, ya que éste es el principal motivo de deserción, porque una vez que el alumno empieza por reprobar una materia parece seguro que continuará con otras y casi en todos los casos se encuentran incluidas una de las materias de matemáticas, para éste problema en particular se propone que los alumnos que vayan mejor ayuden a los que van mal y tomarlo en cuenta para su calificación, así también se propone que existan las asesorías extra clase impartidas por los profesores de la materia cuando menos dos horas semanales.

Formulario de Geometría Analítica

RECTAS

1. Ecuación de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 + (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2)^2}$$

2. Coordenadas (x, y) de un punto P que divide a un segmento en la razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ donde: $r \neq -1$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

3. Coordenadas (x, y) del Punto Medio que divide a un segmento en la razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ donde: $r = 1$.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4. Las expresiones que se utilizan para obtener el área de un polígono a través del uso de determinantes.

Área Polígono de cinco vértices $ABCDE$ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}$

Área Polígono de cinco vértices $ABCDE$ =

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_5y_1 - x_1y_5)$$

5. Ecuación de la pendiente de una recta

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

6. Condición de paralelismo de dos rectas

$$m_1 = m_2$$

7. Condición de perpendicularidad de dos rectas

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad \text{ó} \qquad m_1\, m_2 = -1$$

8. Ecuación del ángulo que forman dos rectas

$$\tan\,\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

9. Ecuación de la recta punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

10. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1), \qquad x_1 \neq x_2$$

11. Ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

12. Ecuación simétrica de la recta, en ella aparecen en los denominadores la abscisa y la ordenada al origen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

13. Ecuación de la forma general de una recta, donde A, B y C pueden ser cero. Pero A y B no pueden ser cero a la vez

$$Ax + By + C = 0$$

14. A partir de la ecuación general de la recta se pueden obtener de manera directa los valores indicados en las siguientes expresiones:

- la pendiente es $m = -\dfrac{A}{B}$

- la ordenada al origen es $b = -\dfrac{C}{B}$

- la abscisa al origen es $a = -\dfrac{C}{A}$

15. Las ecuaciones representan una recta en cualquier posición que no es paralela a los ejes y no pasa por el origen.

$$Ax + By + C = 0 \qquad\qquad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

16. La expresión establece la condición analítica de coincidencia. Esto significa que dos rectas son coincidentes cuando sus coeficientes correspondientes son directamente proporcionales.

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

17. Dos rectas se intersecan en un único punto cuando no son paralelas, en consecuencia las pendientes son diferentes. La siguiente expresión establece la condición analítica de intersección.

$$AB' - A'B \neq 0$$

18. Ecuación de la recta en la forma normal.

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$$

19. Ecuación de la distancia de un punto a una recta

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

CÓNICAS

CIRCUNFERENCIA

1. Ecuación general de segundo grado en x y y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2. Ecuación normal u ordinaria de la circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

3. Ecuación canónica de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

4. Ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

5. A partir de la ecuación general de la circunferencia se puede determinar el centro con la siguiente expresión

$$C = \left(\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right)$$

6. A partir de la ecuación general de la circunferencia se puede determinar el radio con la siguiente expresión

$$r = \frac{D^2 + E^2 - F}{4}$$

PARÁBOLA

7. Ecuación canónica de la parábola vertical

$$x^2 = 4ay$$

8. Ecuación de la parábola vertical con vértice en (h, k)

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

9. Ecuación general de la parábola vertical.

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

10. Ecuación canónica de una parábola horizontal

$$y^2 = 4ax$$

11. Ecuación de la parábola horizontal con vértice en (h, k).

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

12. Ecuación general de la parábola horizontal.

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ELIPSE

13. Ecuación de la elipse horizontal

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

14. Ecuación de la elipse horizontal con centro en (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

15. Ecuación de la elipse vertical

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

16. Ecuación de la elipse vertical con centro (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

17. Ecuación de la elipse en la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

HIPÉRBOLA

18. Ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

19. Ecuación de la hipérbola horizontal con centro en (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

20. Ecuación en la forma general de la hipérbola horizontal

$$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

21. Ecuación de la hipérbola vertical con centro en el origen

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

22. Ecuación de la hipérbola vertical con centro en (h, k)

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

23. Ecuación en la forma general de la hipérbola vertical

$$-Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Solución a los ejercicios

Ejercicio 1

a) Relación b) Función c) Función d) Relación e) Función

Ejercicio 2

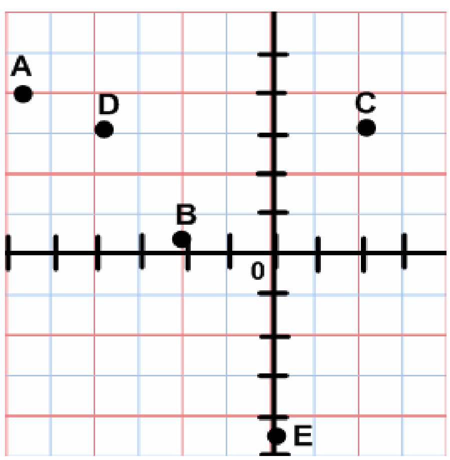
VI : Variable Independiente VD : Variable Dependiente

a) VI: x; VD: y b) VI: d, t; VD: v c) VI: P_1, V_1, T_2, T_1, V_2; VD: P_2

d) VI: q, q_1, r; VD: F e) No hay variables y es una constante

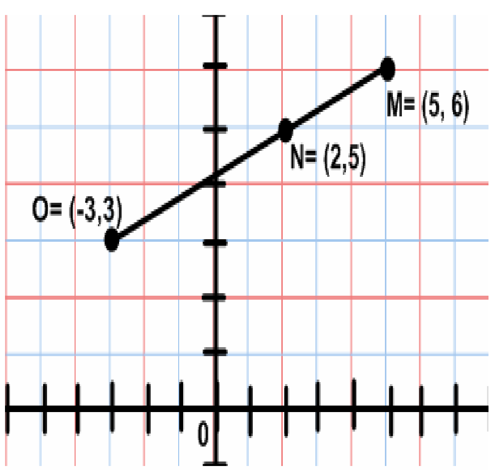
Ejercicio 3

1.

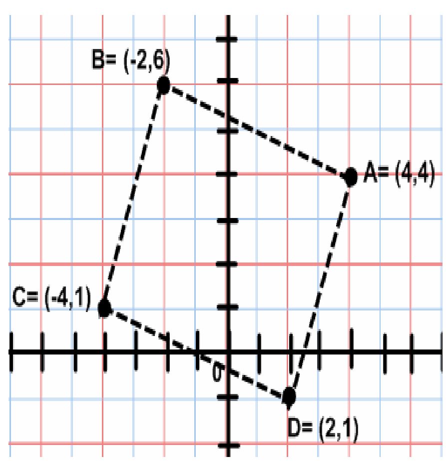


2. Cero

3. a)



b)



Ejercicio 4

1. a) 5 b) 11.3 c) $m + n$

2. a) como se pide, si son colineales b) como se pide, si son colineales

3. a) 20.635 b) 29.31 c) 34.961

Ejercicio 5

1. a) (3, -2) b) (1, 1) c) (-1, 2) d) (-1, 2) e) (8, 7)

Ejercicio 6

1. a) $(\frac{3}{2}, 4)$ b) (7, 6) c) (2, -2) d) (-1, -2) e) (1, -5)

Ejercicio 7

1. a) 9.5 b) 8.5 c) 20 d) 13.5 e) 13.5

Ejercicio 8

1. a) -51.5 b) 50 c) 70 d) 48 e) -30.5

Ejercicio 9

1. a) -1.3 b) -.27 c) .11 d) .83

2. a) 29º b) 34º c) 15º25’ d) 168º

Ejercicio 10

1. Los cuadriláteros son paralelogramos si $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{AD} = m_{BC}$
   Realizar como el ejemplo

2. Realizar como el ejemplo

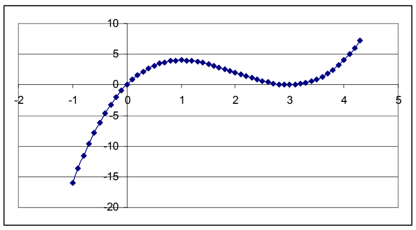
Ejercicio 11

a) $\alpha = 71^{\circ}56'$ $\beta = 71^{\circ}56'$ $\gamma = 0^{\circ}$ Si es un triángulo isósceles

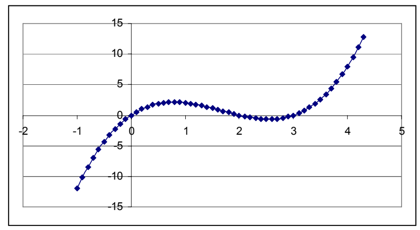
b) $\alpha = 36^{\circ}46'$ $\beta = 71^{\circ}56'$ $\gamma = 71^{\circ}56'$ Si es un triángulo isósceles

c) $\alpha = 71^{\circ}56'$ $\beta = 36^{\circ}46'$ $\gamma = 71^{\circ}56'$ Si es un triángulo isósceles

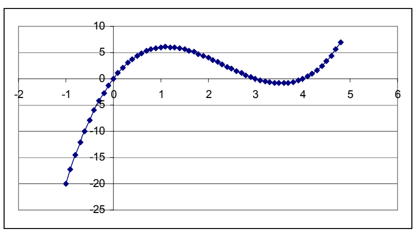
Ejercicio 12



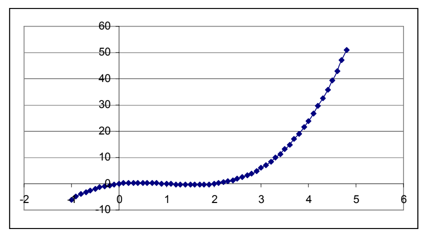
a) Las raíces son x = 0, 3



b) Las raíces son x = 0, 2, 3



c) Las raíces son x = 0, 3, 4



d) Las raíces son x = 0, 1, 2

Ejercicio 13

a) $x + y - 10 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$ c) $x - y + 5 = 0$

d) $x - y - 7 = 0$ e) $18x + 16y - 61 = 0$ f) $2x + 3y - 5 = 0$

Ejercicio 14

a) $5x + 9y + 7 = 0$ b) $9x + 12y - 27 = 0$ c) $17x + 12y - 1 = 0$

d) $11x - 14y + 8 = 0$ e) $7x - y - 9 = 0;$ $x + 7y - 12 = 0$

Ejercicio 15

a) $x = -\frac{3}{2}, \quad y = 1$ b) $x = \frac{8}{3}, \quad y = -2$ c) $x = -15, \quad y = -2$

d) $x = \frac{9}{2}, \quad y = 3$ e) $x = -\frac{8}{7}, \quad y = 4$ f) $x = -5, \quad y = -2$

Ejercicio 16

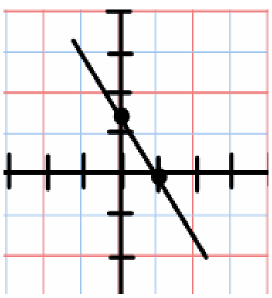
1. a) $y = \frac{2}{3}x + 1$ b) $y = \frac{3}{4}x - 2$ c) $y = -\frac{1}{3}x - 5$

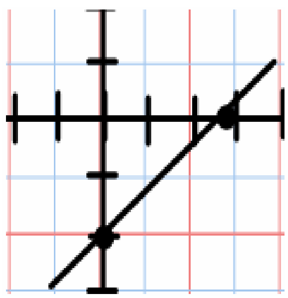
d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ e) $y = \frac{7}{2}x + 4$ f) $y = -\frac{2}{5}x - 2$

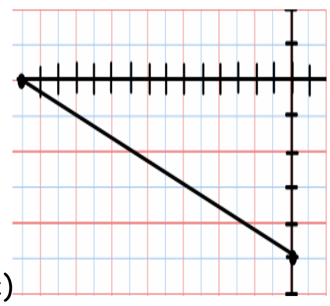
2. a) $m = \frac{2}{3},\ b = 1$ b) $m = \frac{3}{4},\ b = -2$ c) $m = -\frac{1}{3},\ b = -5$

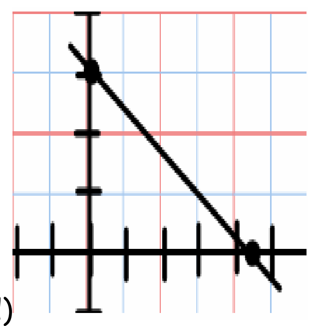
d) $m = -\frac{2}{3},\ b = 3$ e) $m = \frac{7}{2},\ b = 4$ f) $m = \frac{2}{5},\ b = -2$

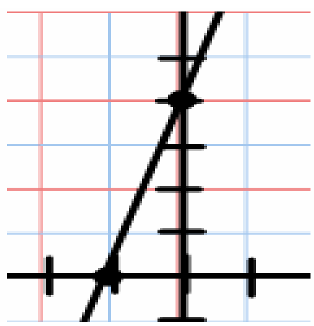
3.

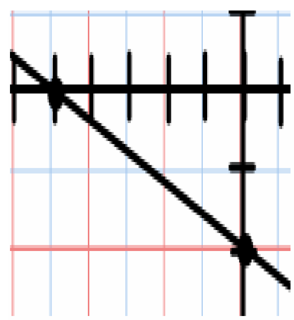
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Ejercicio 17

1. a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ b) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

d) $\frac{x}{-7} + \frac{y}{5} = 1$ e) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1$ f) $\frac{x}{-\frac{3}{4}} + \frac{y}{1} = 1$

2. a) $\dfrac{x}{-\frac{3}{2}}+\dfrac{y}{1}=1$ b) $\dfrac{x}{\frac{8}{3}}+\dfrac{y}{-2}=1$ c) $\dfrac{x}{-15}+\dfrac{y}{-5}=1$

d) $\dfrac{x}{\frac{9}{2}}+\dfrac{y}{3}=1$ e) $\dfrac{x}{-\frac{8}{7}}+\dfrac{y}{4}=1$ f) $\dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{-2}=1$

Ejercicio 18

1. a) $A = 9, B = -7$ y $C= 19$ $9x - 7y + 19 = 0$
   b) $A = 5, B = -3$ y $C= -7$ $5x - 3y - 7 = 0$
   c) $A = 4, B = 3$ y $C= -19$ $4x + 3y - 19 = 0$
   d) $A = 7, B = -4$ y $C= -1$ $7x - 4y - 1 = 0$
   e) $A = 7, B = -3$ y $C= -6$ $7x - 3y - 6 = 0$
   f) $A = 1, B = 2$ y $C= -3$ $x + 2y - 3 = 0$

   Es recomendable hacer la gráfica de cada uno de lo ejercicios anteriores.

Ejercicio 19

1. a) $2x - 3y = 0;$ $3x + 2y - 13 = 0$ b) $3x - 4y + 18 = 0;$ $4x + 3y - 1 = 0$
   c) $x + 3y + 1 = 0;$ $3x - y - 7 = 0$ d) $2x + 3y + 3 = 0;$ $3x - 2y + 11 = 0$
   e) $7x - 2y - 22 = 0;$ $2x + 7y - 29 = 0$ f) $2x + 5y - 11 = 0;$ $5x - 2y - 13 = 0$

Ejercicio 20

1. a) $\dfrac{\sqrt{2}x}{2}+\dfrac{\sqrt{2}y}{2}-4=0$ b) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}y}{2}-5=0$
   c) $y-3=0$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+\dfrac{y}{2}-10=0$

2. a) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-8=0$ b) $x+\sqrt{3}y-10=0$
   c) $y-3=0$ d) $\sqrt{3}x-y+20=0$

3. a) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-6=0$ b) $\frac{-2\sqrt{13}x}{13}-\frac{3\sqrt{13}y}{13}-\frac{12\sqrt{13}}{13}=0$

c) $\frac{-8}{17}x+\frac{15}{17}y-2=0$ d) $\frac{-3\sqrt{10}x}{10}+\frac{\sqrt{10}y}{10}-\frac{2\sqrt{10}}{10}=0$

Ejercicio 21

1. a) 3 b) $-\frac{16}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{1}{5}$ d) -1

Ejercicio 22

1 a) 2.4 unidades b) 7 unidades

c) 6.9 unidades d) 7.6 unidades

Ejercicio 23

1. a) $x^2+y^2=81$ b) $x^2+y^2=144$ c) $x^2+y^2=16$ d) $x^2+y^2=49$

2. a) $x^2+y^2=65$ b) $x^2+y^2=89$ c) $x^2+y^2=25$ d) $x^2+y^2=50$

3. a) $C=(0, 0), \quad r=7$ b) $C=(0, 0), \quad r=11$

c) $C=(0, 0), \quad r=8$ d) $C=(0,0), \quad r=4$

4. a) $x^2+y^2+14x+6y+33=0$ b) $x^2+y^2-8x+6y-56=0$

c) $x^2+y^2+4x+4y+6=0$ d) $x^2+y^2+10x+8y+5=0$

5. a) $(x+5)^2+(y+3)^2=26$ b) $(x-8)^2+(y+3)^2=85$

c) $(x-6)^2+(y-4)^2=38$ d) $(x+4)^2+(y-4)^2=24$

Ejercicio 24

1. a) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9,$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

   b) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 53,$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x + 14y = 0$

   c) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2,$ $\qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$

   d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25,$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

2. a) $C = (5,-6), \quad r = 6$ $\qquad$ b) $C = (4, 0), \quad r = 4$

   c) $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \quad r = 1$ $\qquad$ d) $C = \left(-\frac{5}{4}, +\frac{7}{4}\right), \quad r = \frac{\sqrt{154}}{4}\ 4$

Ejercicio 25

1. a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = 26$ $\qquad x^2 + y^2 + x - 9y - \frac{19}{4} = 0$

   b) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 40,$ $\qquad x^2 + y^2 + 4x - 8y - 20 = 0$

   c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 52,$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 39 = 0$

   d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 10,$ $\qquad x^2 + y^2 + x + 5y - \frac{7}{2} = 0$

Ejercicio 26

1. a) $P_1 = (6, 0) \quad P_2 = (0, 3)$ $\qquad$ b) $P_1 = (.3, 7.5) \quad P_2 = (-.8, 1.1)$

   c) $P_1 = (-2.3, 4.3) \quad P_2 = (4.3, -2.3)$ $\qquad$ d) $P_1 = (.45, 2.9) \quad P_2 = (-2.1, 2.05)$

Ejercicio 27

a) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 10.24$ $\qquad x^2 + y^2 + 6x - 10y + 23.76 = 0$

b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$ $\qquad x^2 + y^2 + 4x + 12y + 14 = 0$

c) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2.4$ $\qquad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 17.6 = 0$

d) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16.32$ $\qquad x^2 + y^2 + 8x + 6y + 8.68 = 0$

Ejercicio 28

1. a) $P_1 = (4, 6)$ $P_2 = (5, 5)$ b) $P_1 = (-2, 1)$ $P_2 = (-1, 2)$

   c) $P_1 = (0,-4)$ $P_2 = (4, 0)$ d) $P_1 = (0, 3)$ $P_2 = (0, 5)$

Ejercicio 29

1. a) $F = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$; extremos del lado recto $\left(-5, -\frac{5}{2}\right)$ $\left(5, -\frac{5}{2}\right)$; directriz $y = \frac{5}{2}$

   b) $F = (0,3)$; extremos del lado recto $(-6,3)$ $(6,3)$; directriz $y + 3 = 0$

   c) $F = \left(0, \frac{1}{3}\right)$; extremos del lado recto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; directriz $y = -\frac{1}{3}$

   d) $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$; extremos del lado recto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; directriz $y = -\frac{1}{4}$

2. a) $x^2 = 16y$ b) $x^2 = -12y$ c) $x^2 = -24y$ d) $x^2 = -20y$

Ejercicio 30

1. a) $(x - 3)^2 = 16(y - 4)$ b) $(x + 6)^2 = -20(y - 2)$
2. a) $(x - 2)^2 = 8y$ b) $(x - 4)^2 = -16(y - 5)$

   c) $(x + 1)^2 = -12(y + 2)$ d) $(x - 2)^2 = 8(y + 9)$

Ejercicio 31

1. a) $F = (1, 0)$; extremos del lado recto $(1, -2)$, $(1, 2)$; directriz $x = -1$

   b) $F = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$; extremos del lado recto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$; directriz $x = -\frac{1}{4}$

c) $F = \left(\frac{1}{2},0\right)$; extremos del lado recto $\left(\frac{1}{2},1\right)$ $\left(\frac{1}{2},-1\right)$; directriz $x = -\frac{1}{2}$

d) $F = \left(-\frac{3}{4},0\right)$; extremos del lado recto $\left(-\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$ $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$; directriz $x = \frac{3}{4}$

2. a) $y^2 = 32\,x$ b) $y^2 = -20\,x$ c) $y^2 = -28\,x$ d) $y^2 = 16x$

Ejercicio 32

1. a) $(y - 3)^2 = -8\,(x + 5)$ b) $(x + 6)^2 = -20\,(y - 2)$

2. a) $(y - 1)^2 = 16\,(x + 3)$ b) $(y + 2)^2 = -28\,(x - 5)$
   c) $(y + 2)^2 = -12\,(x + 6)$ d) $(y + 2)^2 = 16\,(x - 2)$

Ejercicio 33

1. a) $V = (4,0)$, $F = (1,0)$; extremos del lado recto $(1, -6)\ (1,6)$
   b) $V = (-3, 3)$, $F = (-6, 3)$; extremos del lado recto $(-6, 9)\ (-6, -3)$
   c) $V = (-5, 0)$, $F = (-5, -5)$; extremos del lado recto $(-15, -5)\ (5, -5)$
   d) $V = (4, 4)$, $F = \left(4,\frac{5}{2}\right)$; extremos del lado recto $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ $\left(7,\frac{5}{2}\right)$

2. a) $(y - 3)^2 = 12\,(y - 2)$, $y^2 - 6y - 12x + 33 = 0$
   b) $(x - 5)^2 = -24\,(y - 4)$, $x^2 - 10x + 24y - 71 = 0$
   c) $(y + 2)^2 = -8\,(x - 4)$, $y^2 + 4y + 8x - 28 = 0$
   d) $(x - 2)^2 = -8\,(y + 5)$, $x^2 - 4x + 8y + 44 = 0$

Ejercicio 34

1. a) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ b) $11x^2 + 36y^2 - 396 = 0$

   c) $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$ d) $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$

   e) $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{256} = 1$ f) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{\frac{576}{25}} = 1$

   g) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$ h) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

2. a) $F = (\pm 4, 0)$; $V = (\pm 5, 0)$; $L.R. = \dfrac{18}{5}$; $e = \dfrac{4}{5}$

   b) $F = (\pm 5, 0)$; $V = (\pm 13, 0)$; $L.\ R. = \dfrac{288}{13}$; $e = \dfrac{5}{13}$

   c) $F = (\pm 3, 0)$; $V = (\pm 5, 0)$; $L.\ R. = \dfrac{32}{5}$; $e = \dfrac{3}{5}$

   d) $F = (\pm\sqrt{2}, 0)$; $V = (\pm\sqrt{6}, 0)$; $L.\ R. = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 35

1. a) $\dfrac{(x-2)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$ b) $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

   c) $\dfrac{(x+1)^2}{13} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ d) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

2. a) $C = (2,0)$; $F = (6, 0)$, $F' = (-2, 0)$; $V = (7,0)$, $V' = (-3,0)$; $L.\ R. = \dfrac{18}{5}$; $e = \dfrac{4}{5}$

   b) $C = (-2,-1)$; $F = (1, -1)$, $F' = (-5, -1)$; $V = (3,-1)$, $V' = (-7,-1)$; $L.\ R. = \dfrac{32}{5}$; $e = \dfrac{3}{5}$

Ejercicio 36

1. a) $100x^2 + 36y^2 - 3600 = 0$ b) $9x^2 + 5y^2 - 180 = 0$

   c) $36x^2 + 16y^2 - 576 = 0$ d) $144x^2 + 51.8y^2 - 7459.2 = 0$

   e) $43.5x^2 + 128.4y^2 - 1235.4 = 0$ f) $36x^2 + 27y^2 - 972 = 0$

   g) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

2. a) $F = (0, \pm 4.4)$; $V = (0, \pm 6)$; $L.\ R. = 5.3$; $e = .73$

   b) $F = (0, \pm 4.7)$; $V = (0, \pm 12)$; $L.\ R. = 20.1$; $e = .39$

   c) $F = (0, \pm 4.8)$; $V = (0, \pm 7)$; $L.\ R. = 7.1$; $e = .68$

   d) $F = (0, \pm 1.4)$; $V = (0, \pm 2.8)$; $L.\ R. = 4.2$; $e = .5$

Ejercicio 37

1. a) $\dfrac{(x+5)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$ b) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$

   c) $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$ d) $\dfrac{(x-3)^2}{1} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

2. a) $C = (4,-3)$; $F = (4, -2)$, $F' = (4, -4)$; $V = (4,-3+\sqrt{3})$, $V' = (-3,-3-\sqrt{3})$;

   $L.\ R. = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   b) $C = (4, -5)$; $F = (4, -1)$, $F' = (4, -9)$; $V = (4, 0)$, $V' = (4, 10)$;

   $L.\ R. = \dfrac{18}{5}$; $e = \dfrac{4}{5}$

Ejercicio 38

1. a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) $45x^2 - 36y^2 = 1620$

   c) $36x^2 - 81y^2 = 1$ d) $20x^2 - 16y^2 = 320$

2. a) $V = (\pm 4, 0)$; $F = (\pm 5, 0)$, $e = \dfrac{5}{4}$, $L.\ R. = \dfrac{18}{4}$; $y = -\dfrac{3}{4}x$, $y = \dfrac{3}{4}x$

b) $V = (\pm 12, 0)$; $F = (\pm 15, 0)$, $e = \frac{15}{12}$, $L.R. = \frac{162}{12}$; $y = -\frac{9}{12}x$, $y = \frac{9}{12}x$

c) $V = (\pm 6, 0)$; $F = (\pm 7.2, 0)$, $e = \frac{7.2}{6}$, $L.R. = \frac{32}{6}$; $y = -\frac{4}{6}x$, $y = \frac{4}{6}x$

d) $V = (\pm 10, 0)$; $F = (\pm 12.2, 0)$, $e = \frac{12.2}{10}$, $L.R. = \frac{98}{10}$; $y = -\frac{7}{10}x$, $y = -\frac{7}{10}x$

Ejercicio 39

1. a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

   c) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ d) $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{20} = 1$

2. a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

   $C = (1,2)$; $V' = (-2, 2)$ $V = (4, 2)$; $F' = (-2.6, 2)$ $F = (4.6, 2)$; $L.R. = 2.6$; $e = 1.8$

   b) $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{1} = 1$

   $C = (-3,4)$; $V' = (-1, 4)$ $V = (-5, 4)$; $F' = (-5.2, 4)$ $F = (.76, 4)$; $L.R. = .5$; $e = 1.1$

   c) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{21} = 1$

   $C = (-2,-4)$; $V' = (-4, -4)$ $V = (0, -4)$; $F' = (-7, -4)$ $F = (3, -4)$; $L.R. = 21$; $e = 2.5$

   d) $\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

   $C = (-4,-1)$; $V' = (-1,-1)$, $V = (-7, -1)$; $F' = (-7.6, -1)$ $F = (-.4, -1)$; $L.R. = .8$; $e = 1.2$

Ejercicio 40

1. a) $9y^2 - 16x^2 = 144$ b) $45y^2 - 36x^2 = 1620$

   c) $36y^2 - 81x^2 = 2916$ d) $20y^2 - 16x^2 = 320$

2. a) $V=(0, \pm 4)$; $F=(0, \pm 5)$, $e = \frac{5}{4}$, $L.R. = \frac{18}{4}$; $y = -\frac{4}{3}x$, $y = \frac{4}{3}x$

b) V=(0, ±12); F=(0, ± 15), e= $\frac{15}{12}$, $L.\ R.$ = $\frac{162}{12}$; y =-$\frac{12}{9}x$, $y=\frac{12}{9}x$

c) V=(0, ±6); F=(0, ±7.2), e= $\frac{7.2}{6}$, $L.\ R.$ = $\frac{32}{6}$; y =-$\frac{6}{4}x$, y = $\frac{6}{4}x$

d) V=(0, ±10); F=(0, ± 12.2), e= $\frac{12.2}{10}$, $L.\ R.$ = $\frac{98}{10}$; y =-$\frac{10}{7}x$, y =-$\frac{10}{7}x$

Ejercicio 41

1. a) $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$ b) $\frac{(y+4)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{25}=1$

c) $\frac{(y+3)^2}{36}-\frac{(x-4)^2}{16}=1$ d) $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-9)^2}{9}=1$

2. a) $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+4)^2}{20}=1$

C = (-4,3); V' = (-4, -1) V = (-4, 7); F' = (-4, -3) F = (-4, 9); $L.R.$ = 10; e = 3/2

$$y+3=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-4)$$

b) $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$

C = (3, 1); V' = (3, -2) V = (3, 4); F' = (3,-2.6) F = (3, 4.6); $L.R.$ = 2.6; e = 1.2

$$(y-1)=\pm\frac{3}{2}(x-3)$$

c) $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$

C = (-4, 2); V' = (-4, 0) V = (-4, 4); F' = (-4, -1.6) F = (-4, 5.6); $L.R.$ = 9;

$e=1.8,\ \ (y-2)=\pm\frac{2}{3}(x+4)$

d) $\frac{y^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{25}=1$

C = (-3, 0); V' = (-3, -4), V = (-3, 4); F' = (-3, -6.4) F = (-.3, 6.4); $L.R.$= 12.5;

$e=1.6,\ \ y=\pm\frac{4}{5}(x+3)$

Bibliografía

Geometría Analítica
Charles H. Lehmann
Editorial Limusa
1996

Geometría Analítica
Fuller, Gordon
Compañía Editorial Continental S. A. (CECSA)
1969

El Cálculo con Geometría Analítica
Leithold, Louis
Harla
1973

Matemáticas III - Geometría Analítica
Francisco Javier Ortiz Campos
Publicaciones Cultural
2005

Geometría Analítica
Arquímedes Caballero C, Lorenzo Martínez C. y Jesús Bernardez G.
Editorial Esfinge
2003

Fundamentos de Matemáticas
Juan Manuel Silva y Adriana Lazo
Editorial Limusa
1991

Lista de páginas Web que puedes consultar:

http://usuarios.lycos.es/manuelnando/practicageometriaespaciosin.htm
Ejercicios de Rectas con soluciones

http://www.sectormatematica.cl/apuntes.htm
La finalidad de estos apuntes es recurrir a algún contenido en forma rápida y precisa cuando sea necesario. Hay algunos que contienen el tema tratado completamente, mientras que otros son de algún tema específico

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/ContenidoUnidad6.html
(apuntes muy buenos de geometría analítica , revisa la Cuarta unidad: Línea recta y la quinta unidad: la circunferencia)

http://mathworld.wolfram.com/topics/ConicSections.html
Abundante teoría, pero en inglés

http://www.ping.be/~ping1339/Pana.htm
Problemas de Geometría Analítica pero en inglés

http://www.matematicas.net/paraiso/materia.php?id=ap_geoanali
Apuntes de Geometría, Geometría Algebraica y Curvas Elípticas en formato PDF o ZIP

https://www.academica.ues.edu.sv/uiu/elementos_estudio/matematica/Jesus%20Infante%20Murillo%20-%20Geometria%20Analitica/2.%20Linea%20Recta.pdf
Apuntes de Rectas

http://ima.ucv.cl/mapoyo/guias/gana_elipses.pdf
Ejercicios de elipses

http://www.micromegas.com.mx/apuntes/apunt-hm.htm
Apuntes, trabajos, tareas y exámenes

www.educa.eneayudas.cl/pdf/CURSO%20DE%20GEOMETRIA**%20**ANALITICA**.pdf**
Apuntes de materia, ejemplos y ejercicios

www.chapingo.mx/Prepa/matematicas/archivos_htm/matematicas_i.htm
Apuntes, ejercicios y formularios

Lista de películas relacionadas con Geometría Analítica:

Cube
http://www.imdb.com/title/tt0123755/

Moebius
http://www.imdb.com/title/tt0117069/

Pi
http://www.imdb.com/title/tt0138704/

Proof (La prueba de Madden)
http://www.imdb.com/title/tt0377107/

Stand-in (siempre Eva)
http://www.imdb.com/title/tt0029605/

Una mente maravillosa
http://www.imdb.com/title/tt0268978/