



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**CÁLCULO DE ROTACIONES EN EL TERRENO DEBIDAS
A EFECTOS DE SITIO EMPLEANDO EL MÉTODO
INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS
P R E S E N T A :

ALEJANDRO CADENA ISAZA

TUTOR:

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER

Secretario: DR. EDUARDO REINOSO ANGULO

Vocal: DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

1er. Suplente: DR. JUAN JOSÉ PEREZ GAVILÁN ESCALANTE

2do. Suplente: DR. ALEJANDRO RODRIGUEZ CASTELLANOS

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

Agradecimientos

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por toda su paciencia, confianza, ayuda y orientación, brindadas a lo largo mi estadía en México.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme sus puertas para continuar con mi crecimiento académico y personal.

Al Instituto de Ingeniería, UNAM, por financiar parcialmente mi estancia en México además de mis estudios de maestría y brindarme las facilidades para la realización de los mismos, así como del presente trabajo.

Al CONACYT por financiar parcialmente mis estudios de maestría y estancia en México.

A Juliana porque sin ella esta experiencia no habría sido lo que fue y deseo que siga siendo ...

A mis amigos de la casa del ritmo Juan, Carlos, Alejandro y Germán por hacerme sentir durante todo este tiempo en casa, estando lejos de ella.

A mis profesores: Dr. Francisco Sánchez, Dr. Mario Rodríguez, Dr. Mario Ordaz y Dr. David Muria por sus invaluable enseñanzas.

A mis amigos y compañeros de Fénix por brindarme su amistad y apoyo incondicional y desinteresado.

A mi familia por su apoyo moral constante y amor.

CONTENIDO

RESUMEN	1
ABSTRACT	1
CONTENIDO	2
1. INTRODUCCIÓN	4
1.1 Introducción	4
1.2 Objetivos	6
2. METODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA	7
2.1 Descripción General del IBEM	7
2.2 Formulación Matemática del IBEM	7
2.3 Formulación Matemática para el Cálculo de Rotaciones Usando el IBEM	14
2.3.1 Caso 2D	15
2.3.1.1 Incidencia de Ondas Planas P, SV y Rayleigh	16
2.3.1.2 Incidencia de Ondas Planas SH	20
2.3.2 Caso 3D	21
2.3.2.1 Incidencia de Ondas Planas P, SV y Rayleigh	23
2.3.2.2 Incidencia de Ondas Planas SH	23
3. VALIDACIÓN	24
3.1 Cambio de Coordenadas	24
3.2 Soluciones Analíticas Exactas	25
3.2.1 Geometría Triangular de 90°	25
3.2.1.1 Incidencia de Ondas SH	25
3.2.1.2 Incidencia de Ondas SV	26
3.2.2 Geometría Triangular de 120°	26
3.2.2.1 Incidencia de Ondas SH	27
3.2.2.2 Incidencia de Ondas SV	27
3.3 Validación	28
3.3.1 Geometría Triangular de 90°	28
3.3.1.1 Incidencia de Ondas SH	28
3.3.1.2 Incidencia de Ondas SV	33
3.3.2 Geometría Triangular de 120°	35
3.3.2.1 Incidencia de Ondas SH	35
3.3.2.2 Incidencia de Ondas SV	36
3.3.3 Geometría Triangular de 60°	37
3.4 Rotaciones Calculadas Numéricamente a Partir de Desplazamientos	40
3.5 Discusión sobre la validación del IBEM	42
4. CÁLCULO DE ROTACIONES EN LA SUPERFICIE DE IRREGULARIDADES TOPOGRÁFICAS	44
4.1 Rotaciones de Campo Libre	44
4.2 Rotaciones en la Superficie de Irregularidades Topográficas	45

4.2.1 Rotaciones en el Dominio de la frecuencia	45
4.2.2 Rotaciones en el Dominio del Tiempo	49
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	53
RECONOCIMIENTOS	55
REFERENCIAS	56
APÉNDICE	57

RESUMEN

El estudio del movimiento rotacional, particularmente en el terreno y debido a acciones de tipo sísmico, es un tema que ha despertado el interés de la comunidad científica y en el que actualmente se desarrolla tanto investigación de tipo teórica como experimental. Sin embargo la escasez de datos de rotaciones medidas en el terreno, hace que las estimaciones a partir de métodos numéricos sean importantes para el estudio del problema. El Método Indirecto de Elementos de Frontera, IBEM (por sus iniciales en inglés) ha demostrado ser confiable y práctico para el cálculo de desplazamientos y tracciones en diferentes configuraciones topográficas y ha sido empleado, con éxito, en algunos casos para la estimación de desplazamientos en irregularidades topográficas reales.

En esta tesis se presentan las expresiones desarrolladas para el cálculo de las rotaciones empleando el IBEM. Además se realizó una validación de dichas expresiones empleando para ello algunas soluciones analíticas exactas existentes para desplazamiento en algunas cuñas triangulares ante la incidencia de ondas planas P, SV y SH. Finalmente se empleó el IBEM para la estimación de las rotaciones en diferentes configuraciones topográficas ante la incidencia de ondas planas P, SV y de Rayleigh y se analiza la dependencia de las mismas con la forma de la irregularidad y el ángulo de incidencia de las ondas.

ABSTRACT

The study of rotational movement, particularly at the surface and due to seismic actions, is a topic that has captured the interest of the scientific community and currently, theoretical and experimental investigation is being carried on. Nevertheless the shortage on rotational data from direct measurement at the surface makes estimations from numerical methods important in the study of the problem. The Indirect Boundary Element Method, IBEM, has demonstrated to be reliable and practical for calculating displacements and tractions in different topographical configurations and has been used, successfully, in some cases for the estimation of displacements on real topographical irregularities.

The expressions developed to calculate the rotations using the IBEM are presented in this work. A validation of the mentioned expressions was also carried out using some known exact analytical solutions of displacement for wedge like configurations under incidence of plane P, SV and SH waves. Finally the IBEM was used for the estimation of rotations on some topographical configurations under incidence of plane P, SV and Rayleigh waves. The dependency of rotations with the shape of the irregularity and the incidence angle of the waves is analyzed.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

*Perfectly general motion would also involve rotations about three perpendicular axes, and three more instruments for these. Theory indicates, and observations confirms, that such rotations are negligible**. (Richter, 1958)

Esta frase de Charles Richter en su libro “Elementary Seismology” resume lo que comúnmente y durante mucho tiempo se ha pensado con respecto a las rotaciones y es tal vez la razón por la cual el registro de movimientos sísmicos se ha limitado casi de forma exclusiva a las tres componentes, perpendiculares, de desplazamiento, velocidad o aceleración traslacionales.

Afortunadamente desde hace ya algún tiempo ha resurgido el interés por el estudio de los movimientos rotacionales inducidos en el terreno y en las estructuras por excitaciones de tipo sísmico, y se sabe en la actualidad que dichos movimientos pueden contribuir significativamente a la respuesta total de una estructura durante un sismo fuerte. Esto se hace más evidente cuando se consideran estructuras que son sensibles al cabeceo y en aquellos lugares donde la interacción suelo estructura juega un papel determinante.

Adicional al hecho de haber considerado, a priori, despreciables las rotaciones, la falta de instrumentos para la medición confiable y precisa de rotaciones ha sido una limitante para que en la actualidad se cuente con una base de registros de rotación durante eventos sísmicos. Es considerablemente difícil diseñar sensores que detecten exclusivamente movimientos de rotación pura, además debido al orden de magnitud de las mismas, se requiere una gran sensibilidad para que las mediciones sean confiables.

** el movimiento más general incluye además rotaciones alrededor de tres ejes perpendiculares y tres instrumentos adicionales para medirlos. La teoría indica, y la observación confirma, que esas rotaciones son despreciables*

Los registros obtenidos de la gran mayoría de instrumentos empleados para medir las componentes traslacionales del movimiento están contaminados por rotaciones. Una consecuencia fundamental de lo anterior es que no se puedan obtener historias de desplazamiento correctas a partir de la doble integración de los registros de aceleración; de aquí que la medición adecuada de movimientos rotacionales permitiría corregir los registros traslacionales, además, entre otras cosas, la determinación del tiempo de arribo de las ondas SH y aspectos relacionados con las fuentes sísmicas (Takeo, 1997)

Existe actualmente un gran interés a nivel mundial por conocer más sobre el fenómeno de las rotaciones. Un hecho que respalda lo anterior es la conformación en el año 2005 del “International Working Group on Rotational Seismology” cuyos intereses van desde el estudio teórico de los movimientos rotacionales, pasando por la medición de rotaciones de campo cercano y lejano, el diseño y prueba de sensores de rotación hasta llegar a las aplicaciones ingenieriles de los movimientos rotacionales. Desde el punto de vista estructural, se tiene que ya el Eurocode 8 incluye especificaciones para el movimiento de cabeceo.

Debido a la escasez de registros y datos experimentales de rotaciones, se hace necesario desarrollar expresiones analíticas que permitan estimar directamente las rotaciones o su estimación a partir de los correspondientes componentes de traslación. Lo anterior ayuda a comprender mejor el fenómeno de las rotaciones así como a tener estimaciones que sirvan como datos de entrada en los nuevos modelos estructurales que consideran las rotaciones en el sistema.

El Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM, por sus iniciales en inglés) ha demostrado ser consistente y adecuado para la estimación de desplazamientos en diferentes configuraciones topográficas 2 y 3D, así como en valles aluviales.

Se pretende en este trabajo desarrollar y validar expresiones que permitan calcular las rotaciones, empleando el IBEM, en la superficie de irregularidades topográficas. Además, observar el efecto de las irregularidades topográficas en las rotaciones, comparándolas con las de una superficie libre.

1.2 Objetivos

Desarrollar expresiones para el cálculo de rotaciones inducidas en un medio por la propagación de ondas planas al interior del mismo empleando el IBEM.

Emplear algunas soluciones analíticas exactas conocidas, de desplazamientos, en algunas geometrías superficiales para validar las expresiones desarrolladas para rotaciones, incluidas en el IBEM.

Calcular en el dominio del tiempo y de la frecuencia las rotaciones, en el caso 2D, generadas por la incidencia de ondas planas P, SV, SH y de Rayleigh en la superficie de un medio para diferentes irregularidades topográficas, evaluando el efecto de la irregularidad misma, de la frecuencia, del módulo de Poisson y del ángulo de incidencia de las ondas.

2. METODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

En este capítulo se presenta la formulación del Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM por sus iniciales en inglés) así como el planteamiento matemático desarrollado para el cálculo de rotaciones irregulares topográficas, ante la incidencia de ondas planas, usando este método. Esto último constituye el tema central del presente trabajo.

2.1 Descripción General del IBEM

El IBEM se basa en la representación integral de los campos difractados de ondas elásticas usando fuentes en la frontera de un dominio. Las ondas difractadas son construidas en la frontera a partir de la cual son irradiadas. Por lo tanto, este método puede ser entendido como una adaptación numérica del Principio de Huygens.

Este método requiere del cálculo de las densidades de fuerza en la frontera como un paso intermedio para el cálculo de desplazamientos y tracciones, razón por la cual recibe la denominación de indirecto. Al considerar condiciones de frontera para desplazamientos o esfuerzos, se forma un sistema de ecuaciones integrales para las fuentes situadas en la frontera. Al resolver el sistema se obtienen las densidades de fuerza. Conocidas éstas, se calcula directamente el campo difractado de desplazamientos y tracciones. Para el cálculo del campo total de desplazamientos y tracciones debe sumarse el campo difractado y el campo libre (definido como aquel producido por la incidencia de ondas en un medio homogéneo). Para la solución del sistema de ecuaciones es indispensable conocer las funciones de Green (bi o tridimensionales dependiendo de la naturaleza del problema en estudio) de desplazamientos y tracciones, las cuales mediante un esquema de discretización de la frontera, pueden integrarse numérica y analíticamente.

2.2 Formulación Matemática del IBEM

Considérese el espacio tridimensional euclídeo y una superficie continua S , finita o infinita. Los ejes x_1 (x) y x_2 (y) definen un plano horizontal, mientras que el eje x_3 (z) es el eje vertical orientado positivo hacia abajo. Los vectores directores de los ejes se notarán como \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 para los ejes x_1 , x_2 y x_3 respectivamente. Los desplazamientos en cualquier punto en las direcciones x_1 , x_2 y x_3 , vienen representados por \mathbf{u}_1 (u), \mathbf{u}_2 (v) y \mathbf{u}_3 (w) respectivamente. Ambas notaciones para los ejes y los desplazamientos se usarán indistintamente durante el presente trabajo, dependiendo de la conveniencia en cada caso. El sistema de referencia y la notación para desplazamientos que se usan en este y en los siguientes capítulos se ilustran en la figura 2.1.

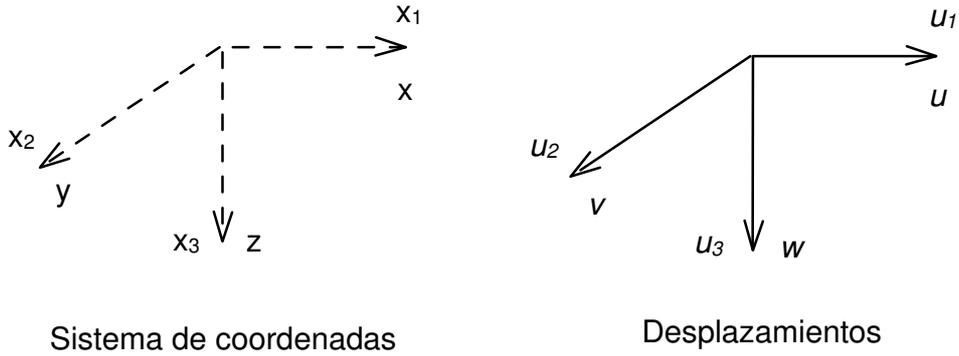


Figura 2.1 Sistema de coordenadas y notación para desplazamientos

Si se considera el campo de desplazamiento armónico $u_i(\mathbf{x}, \omega)$ producido por una distribución armónica de fuerzas de cuerpo $f_j(\mathbf{x}, \omega)$ dentro de un medio elástico, anisótropo, heterogéneo arbitrario, los desplazamientos satisfacen la ecuación elástica de onda, la cual puede escribirse, empleando notación indicial como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_k} \right) + \omega^2 \rho u_i(\mathbf{x}, \omega) = -f_i(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.1)$$

Donde c_{ijkl} es un tensor elástico que puede variar en el espacio, ρ es la densidad de masa y ω la frecuencia angular.

Sea una fuerza armónica unitaria concentrada en \mathbf{x}_A en la dirección m , la cual puede ser representada por

$$f_i(\mathbf{x}, \omega) \equiv \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \delta_{im} \exp(i\omega t) \quad (2.2)$$

Reemplazando en la ecuación 2.1 se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial G_{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A, \omega)}{\partial x_k} \right) + \omega^2 \rho G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \delta_{im} \quad (2.3)$$

Donde $G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A, \omega)$ es el desplazamiento en la dirección i en el punto \mathbf{x} debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección m en el punto \mathbf{x}_A .

Multiplicando la expresión 2.1 por $G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A, \omega)$, la ecuación 2.3 por $u_i(\mathbf{x}, \omega)$ y restando, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A)}{\partial x_k} \right) u_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|) u_m(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) \quad (2.4)$$

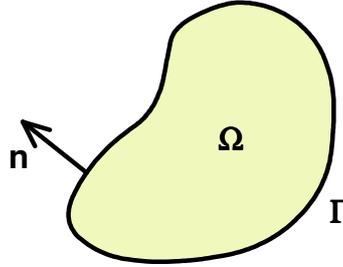


Figura 2.2 Representación del volumen de integración y su frontera

Ahora considérese un volumen $\Omega \subset \mathfrak{R}^3$ cuya frontera es Γ . Usando la fórmula de Gauss para integrar la expresión 2.4 en este volumen y reorganizando se tiene que

$$k u_m(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) t_i(\mathbf{x}) - T_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) u_i(\mathbf{x})] dS_x + \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}) G_{mi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) dV_x \quad (2.5)$$

Donde $u_m(\mathbf{x})$ es el desplazamiento en la dirección m del punto \mathbf{x} . El punto \mathbf{x}_A se encuentra dentro del volumen Ω y

$$t_i(\mathbf{x}) = n_j(\mathbf{x}) \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) \quad (2.6)$$

Que corresponde a la tracción en el punto \mathbf{x} , con normal $n_j(\mathbf{x})$, en dirección i , asociada con el campo desplazamiento $u_l(\mathbf{x})$ mientras

$$T_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) = n_j(\mathbf{x}) \left(c_{ijkl} \frac{\partial G_{lm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A)}{\partial x_k} \right) \quad (2.7)$$

Es la tracción en el punto \mathbf{x} , con normal $n_j(\mathbf{x})$, en dirección i , generada por la fuerza armónica puntual actuando en \mathbf{x}_A en dirección m asociada con la función de Green.

La ecuación 2.5 es el fundamento del Método Directo de Elementos de Frontera (BEM por sus iniciales en inglés). Puede asociarse a la solución del problema interior. Para la formulación del IBEM, se plantea el problema exterior al volumen Ω . Haciendo uso de la misma expresión se tiene

$$k \dot{u}_m(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} [G_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) t_i(\mathbf{x}) - T_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) u_i(\mathbf{x})] dS_x \quad (2.8)$$

Donde

$$k = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \\ 1/2 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9.1) \quad k' = \begin{cases} 0 & x \in \Omega \\ 1 & x \notin \Omega \\ 1/2 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9.2)$$

Al unir ambos problemas, se cumplen las siguientes condiciones

$$k + k' = 1 \quad (2.10.1)$$

$$t_i(\mathbf{x}) - t'_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2.10.2)$$

$$u_i(\mathbf{x}) - u'_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.10.3)$$

La expresión 2.10.3 garantiza la continuidad de desplazamientos en la frontera.

De las expresiones 2.6 y 2.8 se obtiene una representación integral del campo de desplazamientos, despreciando fuerzas de volumen, la cual se puede escribir, haciendo uso de la notación indicial, como

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\boldsymbol{\xi}) G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi \quad (2.11)$$

Donde $u_i(\mathbf{x})$ es la i ésima componente del desplazamiento en el punto \mathbf{x} ; $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$ es la densidad de fuerza en la dirección j en el punto $\boldsymbol{\xi}$, por lo tanto, $\phi_j(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi$ es una distribución de fuerzas en la curva S .

Esta integral de capa simple puede ser obtenida a partir de la identidad de Somigliana (Sánchez-Sesma y Campillo, 1981) y fue obtenida por Kupradze (1963) desde el punto de vista de la teoría del potencial cuando demostró que el campo de desplazamientos es continuo a través de S si $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$ es continuo a lo largo de S .

Es posible obtener los esfuerzos y tracciones al aplicar directamente la ley de Hooke a la ecuación 2.11, con excepción de las singularidades en la frontera, es decir, cuando $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$. Con base en consideraciones de equilibrio alrededor de la frontera es posible escribir para \mathbf{x} sobre S , que

$$t_i(\mathbf{x}) = t_i^{(0)}(\mathbf{x}) + c_1 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\boldsymbol{\xi}) T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi \quad (2.12)$$

Donde $t_i(\mathbf{x})$ es la i -ésima componente de la tracción en la frontera, $T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es la función de tracción de Green, es decir, la tracción en la dirección i en el punto \mathbf{x} sobre la frontera con normal $n(\mathbf{x})$ (con la suposición de que el vector apunta hacia afuera si \mathbf{x} está en S) debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j , en el punto $\boldsymbol{\xi}$. La constante c puede tomar los siguientes valores.

$$c_1 = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in S \text{ por dentro} \\ 0 & \mathbf{x} \notin S \\ -1 & \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in S \text{ por fuera} \end{cases} \quad (2.13)$$

Este resultado se debe a Kupradze, a pesar de que su versión escalar fue obtenida por Fredholm en 1900. Las ecuaciones 2.11 y 2.12 forman la base del IBEM y permiten una interpretación directa de las cantidades físicas involucradas.

Considerando un semiespacio E con una irregularidad topográfica superficial, sobre el que incide un frente de ondas elásticas como se muestra en la figura 2.3.

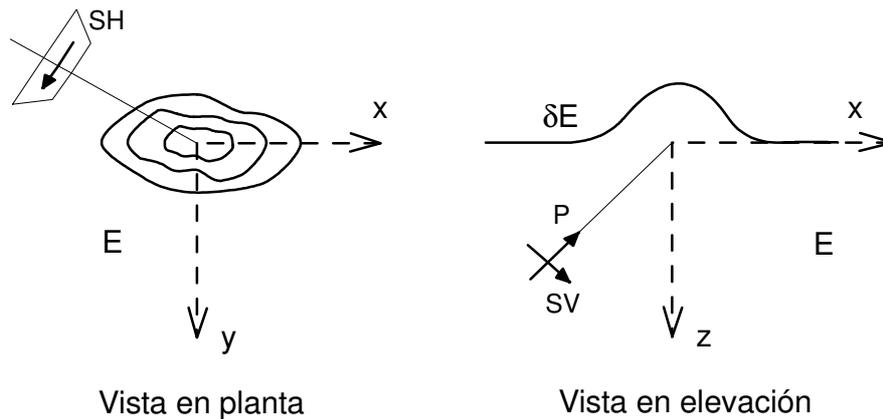


Figura 2.3 Irregularidad topográfica en un semiespacio E ante incidencia de ondas planas P y S

En este caso se presentan interferencias constructivas y destructivas de los campos de ondas incidentes, reflejados y difractados. El movimiento del terreno puede obtenerse como la suma de las ondas difractadas más la solución de campo libre (el desplazamiento del semiespacio en ausencia de la irregularidad).

$$u_i^E = u_i^{(0)} + u_i^{(d)} \quad (2.14)$$

Aquí $u_i^{(0)}$ es el desplazamiento de campo libre y que para este caso es la suma del campo incidente más el reflejado. El campo de ondas difractado por la superficie libre puede ser descrito por la radiación de fuentes secundarias distribuidas en toda la

superficie. Así, es posible emplear la representación integral descrita anteriormente para el campo difractado.

$$u_i^{(d)}(\mathbf{x}) = \int_{\partial E} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_\xi \quad (2.15)$$

Las condiciones de frontera implican tracciones nulas en la superficie libre de donde se tiene que

$$t_i^{(0)} + t_i^{(d)} = 0 \quad \text{en} \quad \partial E \quad (2.16)$$

Haciendo uso de la ecuación 2.12 esta condición se puede expresar como

$$-t_i^{(0)}(x) = 0.5\phi_i(x) + \int_{\partial E} \phi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dS_\xi \quad (2.17)$$

Las ecuaciones 2.15 y 2.17 constituyen un sistema de ecuaciones integrales para las fuentes en la frontera.

Para resolver el sistema de ecuaciones integrales es necesario discretizar las expresiones en una porción finita de la frontera ∂E , que incluye la topografía y las partes laterales planas de la frontera del semiespacio elástico. La elección del esquema de discretización depende del problema y de la formulación matemática a usar. En el caso 2D y de acuerdo con la convención establecida para los ejes coordenados, se emplean segmentos rectilíneos de igual longitud ΔS , para discretizar la superficie. En 3D se usan círculos con los que aproximadamente se rectifica la frontera libre. En la figura 2.4 se ilustra la discretización con la distribución de fuentes sobre toda la frontera en una irregularidad topográfica superficial.

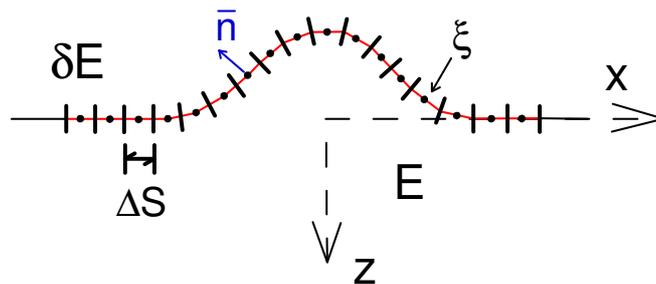


Figura 2.4 Esquema de discretización de la superficie libre

Para poder integrar las funciones de Green, es necesario conocer el valor de ΔS y el vector normal \mathbf{n} correspondiente a cada elemento.

El número de elementos en los que se dividen las fronteras depende de la frecuencia y de las dimensiones de la estructura en estudio. Para tener una discretización con la que se obtengan resultados fiables es necesario que haya un número mínimo de elementos por longitud de onda λ . En el presente trabajo se optó por realizar una sola discretización

considerando para ésto la frecuencia más alta, con lo cual se garantiza que el espacio está bien muestreado para longitudes de onda de frecuencias menores.

En este trabajo se asumió además que las densidades de fuerza $\phi_j(\xi)$ son constantes sobre cada uno de los elementos que forman la frontera. Cada elemento tiene una longitud ΔS y está centrado en el punto ξ .

La ecuación 2.17 se puede discretizar entonces de la siguiente forma

$$\sum_{l=1}^N \phi_j(\xi) t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) = -t_i^{(0)}(\mathbf{x}_n) \quad n = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

$$t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\Delta S_l} T_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.19)$$

Estas integrales se pueden calcular numéricamente usando integración gaussiana excepto cuando $n = l$. En este caso se tiene que

$$t_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

Debido a que la única contribución de aquella ecuación proviene del término de la delta de Kronecker para $n = l$, la contribución del tensor de tracciones de Green T_{ij} es nula para los segmentos rectos como ocurre en este trabajo. El valor para t_{ij} en la ecuación 2.20 se puede interpretar como la mitad de la fuerza unitaria aplicada en el punto, es decir, que la fuerza se distribuye simétricamente en los dos medios, sin importar su dirección de aplicación. De hecho, este resultado corresponde con la solución estática (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991).

Sea M el número de elementos que existen en la parte plana del semiespacio E (ver figura 2.3) y L el número de elementos en la superficie irregular no plana de la topografía, entonces el número total de elementos de frontera N será igual a $M+L$ y el número de incógnitas $\phi_j(\xi_l)$ (con $j = 1, 2, 3$) será de $3M+3L$, el cual coincide con el número de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones integrales discretizadas se puede representar como $M\phi = t$ donde M es la matriz de coeficientes, t es el vector de términos independientes (solución de tracciones libres) y ϕ es el vector de las densidades de fuerza (incógnitas). Este es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos que se puede resolver haciendo una descomposición de la matriz de coeficientes $M = L \cdot U$.

Después de resolver el sistema de ecuaciones lineales se conocen los valores de $\phi_j(\xi)$, con los que se puede calcular el campo difractado en los puntos \mathbf{x} de interés según la versión discretizada de la ecuación 2.15

$$u_i^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) g_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) \quad (2.21)$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \int_{\Delta S} G_{ij}(\mathbf{x}_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.22)$$

Estas integrales se calculan numéricamente con integración gaussiana, excepto cuando el punto \mathbf{x} está en las proximidades de ξ . Para el caso bidimensional se tienen expresiones analíticas a partir de las series ascendentes de las funciones de Bessel que aparecen en las funciones de Green obtenidas por Sánchez-Sesma y Campillo (1991).

2.3 Formulación Matemática para el Cálculo de Rotaciones Usando el IBEM

De acuerdo con la mecánica del medio continuo, las rotaciones generadas por un campo de desplazamiento, pueden calcularse como $\frac{1}{2}$ del operador rotacional aplicado sobre dicho campo.

Haciendo uso de la notación indicial, la expresión general para el cálculo de las rotaciones viene dada por

$$r_i = e_{ijk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.23)$$

Donde el subíndice i indica el eje con respecto al cual se presentan las rotaciones y e_{ijk} el tensor de combinaciones dado por

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{para } i,j,k \text{ como una combinación par} \\ 0 & \text{para } i=j=k \\ -1 & \text{para } i,j,k \text{ como una combinación impar} \end{cases} \quad (2.24)$$

En el caso del IBEM, el campo de desplazamiento se obtiene mediante una representación integral, como se ilustró previamente. De aquí que las rotaciones se calculen aplicando a este campo el operador rotacional. Se propone la siguiente notación.

$$\frac{1}{2} \text{rot}(u_i(\mathbf{x})) = R_i(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

En este caso el operador rotacional se aplica directamente sobre la función de Green, con excepción de las singularidades en la frontera cuando $\mathbf{x} = \xi$, de forma similar a como ocurre en el caso de las tracciones. La expresión general para el cálculo de las rotaciones haciendo uso de la representación integral es de la forma

$$R_i(\mathbf{x}) = r_i^{(0)}(\mathbf{x}) + c_2 (\phi \times n) + \frac{1}{2} \int_S r_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (2.26)$$

El primer término de la expresión 2.26 corresponde a la rotación de campo libre, que sería la rotación que se presentaría en ausencia de la irregularidad. Estas rotaciones dependen del tipo de onda incidente.

El segundo término corresponde al aporte de la singularidad, cuando $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$. La constante c_2 toma los siguientes valores y se explica más adelante la manera como fue obtenida.

$$c_2 = \begin{cases} 1/2\mu\pi & \mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} \in S \text{ por dentro} \\ 0 & \mathbf{x} \notin S \\ -1/2\mu\pi & \mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi} \in S \text{ por fuera} \end{cases} \quad (2.27)$$

El último término corresponde a la rotación generada por el campo difractado. Aquí se tiene que

$$r_{ij}(\mathbf{x}) = rot [G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] \quad (2.28)$$

Para hacer uso del IBEM, la expresión 2.26 se discretiza de forma similar a como se hizo para el caso de los desplazamientos y tracciones, con lo cual se obtiene

$$\mathbf{R}_i(\mathbf{x}) = r_i^{(0)}(\mathbf{x}) + c_2(\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \phi_j(\boldsymbol{\xi}_l) r_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_l) dS_{\boldsymbol{\xi}_l} \quad (2.29)$$

A continuación se presenta el desarrollo de las expresiones obtenidas para el cálculo de rotaciones en topografías superficiales ante la incidencia de ondas planas P y S.

2.3.1 Caso 2D

La función de Green del espacio completo, en el caso 2D, viene dada por la siguiente expresión

$$G_{ij} = -\frac{i}{8\rho} [(A+B)\delta_{ij} - 2B\gamma_i\gamma_j] \quad (2.30)$$

Donde γ_i es el coseno director en la dirección i del vector que une los puntos $\boldsymbol{\xi}$ y \mathbf{x} . Además

$$A = \frac{H_0^{(2)}(qr)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(kr)}{\beta^2} \quad (2.31)$$

$$B = \frac{H_2^{(2)}(qr)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(kr)}{\beta^2} \quad (2.32)$$

Siendo α y β las velocidades de propagación de las ondas P y S respectivamente, r la distancia entre los puntos ξ_i y \mathbf{x} ; $H_0^{(2)}$, $H_2^{(2)}$ las funciones de Hankel de segunda especie y de órdenes 0 y 2, respectivamente.

Además $q = \frac{\omega}{\alpha}$ y $k = \frac{\omega}{\beta}$, donde ω es la frecuencia angular en rad/s.

2.3.1.1 Incidencia de Ondas Planas P, SV y Rayleigh

De acuerdo con la convención establecida para los ejes, los desplazamientos generados por la incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh estarán contenidos en el plano x_1 - x_3 . Estos desplazamientos generarán por lo tanto rotaciones en la dirección del eje x_2 , el cual tiene por vector unitario \hat{e}_2 .

Para el término correspondiente a la rotación de campo libre, se tiene que los desplazamientos de campo libre, ante incidencia de ondas P y SV se pueden expresar, mediante potenciales, como (Pérez Rocha, 1987).

$$u^{(0)} = -il\phi_1 + ik\psi_2 \quad (2.33)$$

$$w^{(0)} = im\phi_2 + il\psi_1 \quad (2.34)$$

Donde

$l = \omega/c$, $m = lf_\alpha$, $k = lf_\beta$ y c la velocidad de fase aparente

$$f_\alpha = \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.35.1)$$

$$f_\beta = \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.35.2)$$

$$c = \frac{\alpha}{\text{sen}\gamma_P} = \frac{\beta}{\text{sen}\gamma_S} \quad (2.35.3)$$

Con γ_P y γ_S los ángulos de incidencia y reflexión, con respecto al eje x_3 , para ondas P y S respectivamente.

Los potenciales escalares y vectoriales vienen dados por las siguientes expresiones.

$$\phi_1 = (A_1 e^{imz} + A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} \quad (2.36.1)$$

$$\phi_2 = (A_1 e^{imz} - A_2 e^{-imz}) e^{-ilx} \quad (2.36.2)$$

$$\Psi_1 = (B_1 e^{ikz} + B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} \quad (2.37.1)$$

$$\Psi_2 = (B_1 e^{ikz} - B_2 e^{-ikz}) e^{-ilx} \quad (2.37.2)$$

A_1 y B_1 corresponden a la amplitud de las ondas P y SV incidentes respectivamente, mientras A_2 y B_2 son los coeficientes de reflexión.

Haciendo uso de la expresión 2.23 con los desplazamientos dados por las expresiones 2.33 y 2.34, se tiene

$$r_2^{(0)} = -\frac{1}{2}(k^2 + l^2)\Psi_1 \quad (2.38)$$

En el caso de las ondas de Rayleigh, estas están compuestas por ondas P y SV, que viajan acopladas con velocidad $c_R < \beta$, y se atenúan con la profundidad. Para el cálculo de las rotaciones de campo libre generadas por estas ondas, es válida también la expresión 2.38.

El desarrollo de las expresiones para calcular el aporte a la rotación generado por el campo difractado se realiza a partir de las funciones de Green y no empleando la teoría de potenciales. Las funciones de Green para incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh son las siguientes

$$G_{11} = -\frac{i}{8\rho} [(A + B) - 2B\gamma_1^2] \quad (2.39)$$

$$G_{33} = -\frac{i}{8\rho} [(A + B) - 2B\gamma_3^2] \quad (2.40)$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{i}{4\rho} B\gamma_1\gamma_3 \quad (2.41)$$

Reemplazando en la expresión 2.23, se obtiene lo siguiente.

$$r_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{31}}{\partial x_1} \right) \quad (2.42)$$

$$r_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial G_{33}}{\partial x_1} \right) \quad (2.43)$$

En este caso el segundo subíndice indica la dirección de la fuerza.

La derivada general de la función de Green, para $i, j = 1, 3$ viene dada por la expresión

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} = \frac{i}{4\rho r} \left[\left(\frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2} \right) \gamma_i \gamma_j \gamma_k + \frac{D(kr)}{\beta^2} \delta_{ij} \gamma_k - 4B \gamma_i \gamma_j \gamma_k + B(\delta_{ij} \gamma_k + \delta_{ik} \gamma_j + \delta_{jk} \gamma_i) \right] \quad (2.44)$$

Donde $D(z) = zH_1^{(2)}(z)$. Realizando las derivadas correspondientes y simplificando se llega a

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_3} = \frac{i}{4\rho r} \left[\left(\frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2} \right) \gamma_1^2 \gamma_3 + \frac{D(kr)}{\beta^2} \gamma_3 - 4B \gamma_1^2 \gamma_3 + B \gamma_3 \right] \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial G_{31}}{\partial x_1} = \frac{i}{4\rho r} \left[\left(\frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2} \right) \gamma_1^2 \gamma_3 - 4B \gamma_1^2 \gamma_3 + B \gamma_3 \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial G_{13}}{\partial x_3} = \frac{i}{4\rho r} \left[\left(\frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2} \right) \gamma_1 \gamma_3^2 - 4B \gamma_1 \gamma_3^2 + B \gamma_1 \right] \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial G_{33}}{\partial x_1} = \frac{i}{4\rho r} \left[\left(\frac{D(qr)}{\alpha^2} - \frac{D(kr)}{\beta^2} \right) \gamma_1 \gamma_3^2 + \frac{D(kr)}{\beta^2} \gamma_1 - 4B \gamma_1 \gamma_3^2 + B \gamma_1 \right] \quad (2.48)$$

Reemplazando en las expresiones 2.36 y 2.37 es posible ver que el único término que no se cancela es $\frac{D(kr)}{\beta^2} \gamma_k$, de donde se tiene que

$$r_{21} = \frac{i}{8\mu} k H_1^{(2)}(kr) \gamma_3 \quad (2.49)$$

$$r_{23} = -\frac{i}{8\mu} k H_1^{(2)}(kr) \gamma_1 \quad (2.50)$$

Es conveniente notar que, de acuerdo con las expresiones, las rotaciones son generadas solamente por las ondas S ya que ambas funciones dependen solo de k . La rotación total se obtiene sumando el producto de las funciones de rotación anteriores por las densidades de fuerza en ambas direcciones.

$$r_2 = \frac{i}{8\mu} k H_1^{(2)}(kr) (\gamma_3 \phi_1 - \gamma_1 \phi_3) \quad (2.51)$$

En cuanto al segundo término de la expresión 2.26, de forma similar a como sucede en el caso de las tracciones, la expresión obtenida para el cálculo de la rotación es singular cuando el punto de evaluación coincide con el punto de aplicación de la fuerza ($\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$),

sin embargo esta singularidad es débil y puede ser evaluada integrando en la vecindad del punto.

Considérese el punto $\mathbf{x} = \xi$, con normal para el segmento que lo contiene \mathbf{n} . El valor medio de la integración de la función de Green a lo largo del segmento es cero, por lo cual se considera la vecindad del punto. Considérese una semicircunferencia centrada en punto $\mathbf{x} = \xi$, dentro del material elástico, de radio Δr , como se ilustra en la figura 2.5.

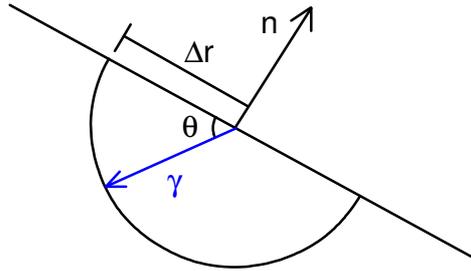


Figura 2.5 Vecindad del punto $\mathbf{x} = \xi$

Para evaluar la contribución del punto a la rotación, se hace que $\Delta r \rightarrow 0$. De esta forma el argumento de la función de Hankel $H_1^{(2)}(k\Delta r)$ tiende a cero y puede aproximarse por $\frac{2i}{\pi k \Delta r}$ (Abramowitz y Stegun, 1972).

El vector γ puede descomponerse en dos componentes que coinciden con los cosenos directores γ_1 y γ_3 , los cuales pueden expresarse en términos de las componentes del vector normal \mathbf{n} mediante las siguientes expresiones

$$\gamma_1 = -n_1 \cos \theta - n_3 \text{sen} \theta \quad (2.52.1)$$

$$\gamma_3 = n_3 \cos \theta - n_1 \text{sen} \theta \quad (2.52.2)$$

Reemplazando en 2.51 se obtiene

$$r_2 = -\frac{1}{4\mu\pi \cdot \Delta r} \left[(-n_1 \cos \theta - n_3 \text{sen} \theta) \phi_1 + (n_3 \cos \theta - n_1 \text{sen} \theta) \phi_3 \right] \quad (2.53)$$

Considerando diferenciales de longitud $\Delta r \cdot d\theta$ en la semicircunferencia, se realiza la integración. El ángulo θ varía entre 0 y π . Realizada la integración y simplificando se llega a la siguiente expresión

$$r_2 = \frac{1}{2\mu\pi} (n_3 \phi_1 - n_1 \phi_3) \quad (2.54)$$

2.3.1.2 Incidencia de Ondas Planas SH

Los desplazamientos generados por las ondas SH, en el caso 2D, son únicamente en la dirección del eje x_2 , con lo cual se tiene un campo de desplazamiento escalar. La rotación tienen componentes en las direcciones x_1 y x_3 .

El campo de desplazamiento de campo libre viene dado por la siguiente expresión [4], obviando el término dependiente del tiempo $e^{-i\omega t}$

$$v^{(0)} = 2 \cos(kz \cos \gamma) e^{-ilx} \quad (2.55)$$

Siendo γ el ángulo de incidencia de la onda con respecto al eje x_3 y $l = \omega/c$ donde c es la velocidad de onda aparente.

Las componentes de la rotación en la dirección de los ejes x_1 y x_3 vienen dadas por

$$r_1^{(0)} = k \cos \gamma \operatorname{sen}(kz \cos \gamma) e^{-ilx} \quad (2.56)$$

$$r_3^{(0)} = -il \cos(kz \cos \gamma) e^{-ilx} \quad (2.57)$$

El aporte de la singularidad se obtuvo de forma similar al caso de las ondas P y SV, realizando la integración sobre el semicírculo que constituye la vecindad del punto $x = \xi$. Las expresiones obtenidas son las siguientes

$$r_1 = -\frac{1}{2\mu \cdot \pi} n_3 \phi_2 \quad (2.58)$$

$$r_3 = \frac{1}{2\mu \cdot \pi} n_1 \phi_2 \quad (2.59)$$

Para determinar el tercer término de la expresión 2.26 en el caso de las ondas SH, se tiene que la función de Green del espacio completo viene dada por la expresión

$$G_{22} = -\frac{i}{4\mu} H_0^{(2)}(kr) \quad (2.60)$$

La componente de rotación en cada dirección se calcula mediante las siguientes expresiones

$$r_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_3} \right) \quad (2.61)$$

$$r_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial x_1} \right) \quad (2.62)$$

Realizando las derivadas correspondientes y simplificando, se llega a

$$r_{12} = -\frac{i}{8\mu} kH_1^{(2)}(kr) \gamma_3 \quad (2.63)$$

$$r_{32} = \frac{i}{8\mu} kH_1^{(2)}(kr) \gamma_1 \quad (2.64)$$

Al multiplicar las expresiones anteriores por las densidades de fuerza en la dirección de x_2 se obtienen las rotaciones en las direcciones x_1 y x_3 .

$$r_1 = -\frac{i}{8\mu} kH_1^{(2)}(kr) \gamma_3 \phi_2 \quad (2.65)$$

$$r_3 = \frac{i}{8\mu} kH_1^{(2)}(kr) \gamma_1 \phi_2 \quad (2.66)$$

2.3.2 Caso 3D

Ante incidencia de ondas planas el espacio, el caso 2D es un estado de deformación plana, simplificación del caso 3D. Considérese que las ondas planas inciden con un ángulo φ con respecto al eje \mathbf{x}_1 , ante incidencia de ondas planas

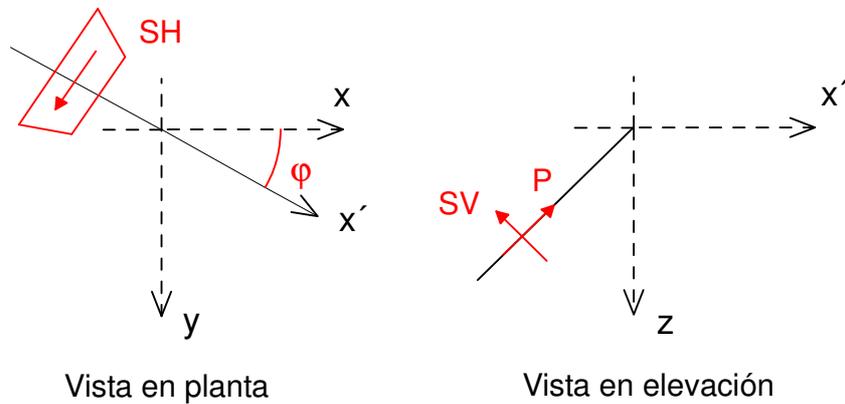


Figura 2.6 Sistemas coordenados para el caso 3D

Las funciones de Green del espacio infinito, elástico e isótropo con dependencia en el tiempo de la forma $e^{i\omega t}$ pueden ser expresadas de forma compacta (Luzón, 1995) como:

$$G_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_2 \delta_{ij} + (f_1 - f_2) \gamma_i \gamma_j] \quad (2.67)$$

$$f_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[1 - \frac{2i}{qr} - \frac{2}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} + \left[\frac{2i}{kr} + \frac{2}{(kr)^2} \right] e^{-ikr} \quad (2.68)$$

$$f_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[\frac{i}{qr} + \frac{2}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} + \left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-ikr} \quad (2.69)$$

La derivada general de la función de Green se puede calcular mediante la siguiente expresión

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi\mu r} \left[f_1 (\gamma_i \delta_{jk} + \gamma_j \delta_{ik}) - f_2 (\gamma_i \delta_{jk} + \gamma_j \delta_{ik} + \gamma_k \delta_{ij}) - 3(f_1 - f_2) \gamma_i \gamma_j \gamma_k \right. \\ \left. + (f_1' - f_2') \gamma_i \gamma_j \gamma_k + f_2' r \gamma_k \delta_{ij} \right] \quad (2.70)$$

La rotación generada por el campo difractado ante incidencia de ondas P, SV y SH, viene dada por la expresión general

$$r_{lj} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{G})_{lj} = \frac{1}{2} e_{lki} \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} \quad (2.71)$$

Donde el subíndice j indica la dirección de aplicación de la fuerza mientras el subíndice l indica la dirección de la rotación.

La expresión obtenida, en forma matricial, donde el subíndice l corresponde a los renglones y el j a las columnas, es la siguiente.

$$[r_{lj}] = \frac{1}{8\mu\pi r^2} (f_1 - r f_2') \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Es posible ver en esta estructura una matriz antisimétrica, el cual corresponde con la lógica del problema y que se ilustra en la figura 2.7. La aplicación de una fuerza en cualquier dirección genera rotaciones en su entorno contenidas en el plano perpendicular a la aplicación de la fuerza (de allí que la diagonal de la matriz sea nula).

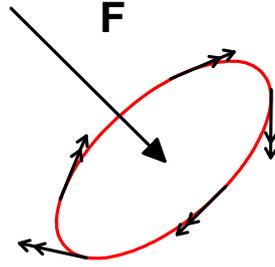


Figura 2.7 Rotaciones en el caso 3D

2.3.2.1 Incidencia de Ondas Planas P, SV y de Rayleigh

El aporte del campo libre a la rotación en el caso 3D viene dado por las siguientes expresiones

$$r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \Psi_1 (k^2 + l^2) \text{sen}(\varphi) \quad (2.73.1)$$

$$r_2^{(0)} = -\frac{1}{2} \Psi_1 (k^2 + l^2) \text{cos}(\varphi) \quad (2.73.2)$$

$$r_3^{(0)} = 0 \quad (2.73.3)$$

El aporte de la singularidad puede calcularse de acuerdo con la siguiente expresión

$$r_i = \frac{\pi}{16\mu} e_{ijk} \phi_j n_k \quad (2.74)$$

2.3.2.2 Incidencia de Ondas Planas SH

De forma similar al caso P y SV, se obtuvieron expresiones para las rotaciones generadas por el campo libre

$$r_1^{(0)} = \frac{\omega}{\beta} \text{cos}(\gamma) \text{cos}(\varphi) \text{sen} \left(\frac{\omega}{\beta} z \text{cos}(\gamma) \right) e^{-il (x \text{cos}(\varphi) + y \text{sen}(\varphi))} \quad (2.75.1)$$

$$r_2^{(0)} = -\frac{\omega}{\beta} \text{cos}(\gamma) \text{sen}(\varphi) \text{sen} \left(\frac{\omega}{\beta} z \text{cos}(\gamma) \right) e^{-il (x \text{cos}(\varphi) + y \text{sen}(\varphi))} \quad (2.75.2)$$

$$r_3^{(0)} = -il \text{cos} \left(\frac{\omega}{\beta} z \text{cos}(\gamma) \right) e^{-il (x \text{cos}(\varphi) + y \text{sen}(\varphi))} \quad (2.75.3)$$

3. VALIDACIÓN

Con objeto de estimar la confiabilidad y la estabilidad del Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM) en el cálculo de las rotaciones generadas por la incidencia de ondas planas, en diferentes configuraciones geométricas superficiales, se realizó una validación a partir de soluciones analíticas exactas. Dichas soluciones son las de dos topografías triangulares con ángulos internos de 90° y 120° (figura 3.1), para los cuales se tienen soluciones analíticas exactas de los campos de desplazamiento ante la incidencia vertical de ondas planas SV y SH (Sánchez-Sesma, 1990).

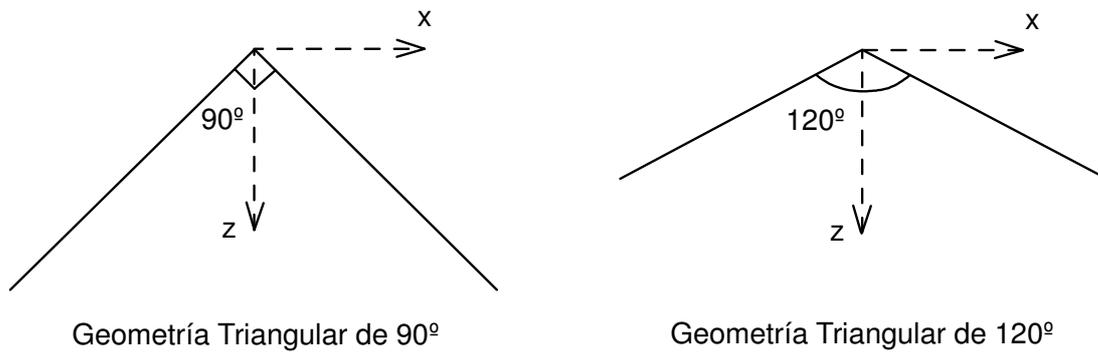


Figura 3.1 Geometrías con soluciones analíticas exactas de los campos de desplazamientos ante incidencia vertical de ondas SV y SH

3.1 Cambio de Coordenadas

Para la validación se trabajó con cuñas triangulares finitas, cuyas fronteras fueron discretizadas siguiendo el procedimiento estándar del método IBEM. Las soluciones analíticas exactas del campo de desplazamientos, fueron modificadas haciendo un cambio de coordenadas, de tal forma que el eje x coincidiera con la base de la cuña (figura 3.2) (aquí se emplea el subíndice 1 para indicar las coordenadas originales). Haciendo uso de estas expresiones modificadas, se calcularon los desplazamientos en el centro de cada segmento de la base, los cuales se emplearon como condiciones en esta frontera. Se impusieron además tracciones nulas en la superficie libre.

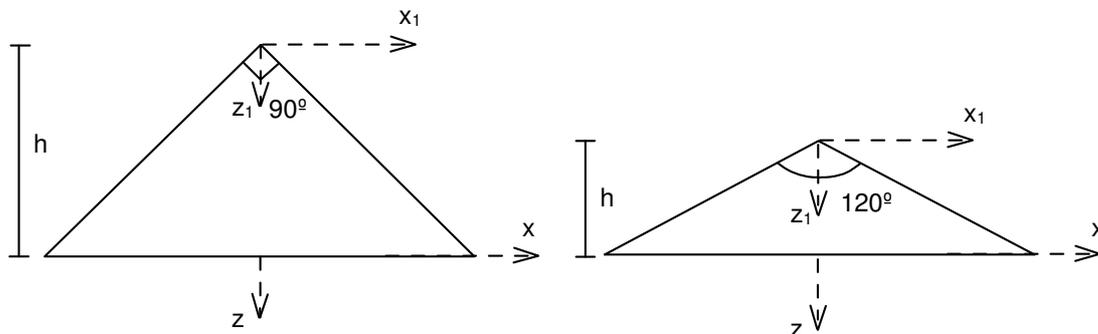


Figura 3.2 Geometrías empleadas en la validación del IBEM para el cálculo de rotaciones

El cambio de coordenadas implica.

$$x_1 = x \quad (3.1.1)$$

$$z_1 = z + h \quad (3.1.2)$$

3.2 Soluciones Analíticas Exactas

A continuación se presentan las expresiones para el cálculo de los desplazamientos realizando el cambio de coordenadas. Se incluyen además las ecuaciones obtenidas para el cálculo de las rotaciones al aplicar el operador rotacional sobre el campo de desplazamientos.

3.2.1 Geometría Triangular de 90°

En esta geometría se hace uso del hecho de que la incidencia de ondas de corte a 45° sobre una superficie libre, produce reflexión total de ondas de corte con ángulo igual al de incidencia. Esto es independiente del módulo de Poisson del medio.

3.2.1.1 Incidencia de Ondas SH

Para una cuña infinita con un ángulo interno de 90°, ante incidencia vertical de ondas SH se presenta reflexión total a 90° de la onda incidente al chocar con la superficie libre (figura 3.3). Se tiene que el desplazamiento horizontal en dirección x_2 , en cualquier punto, viene dado por la expresión

$$v = 2v_0 [\cos(kz_1) + \cos(kx_1)] \quad (3.2)$$

Donde v_0 es la amplitud de la onda incidente, $k = \frac{\omega}{\beta}$ es el número de onda de las ondas S, ω es la frecuencia angular en rad/s y β la velocidad de propagación de las ondas S.

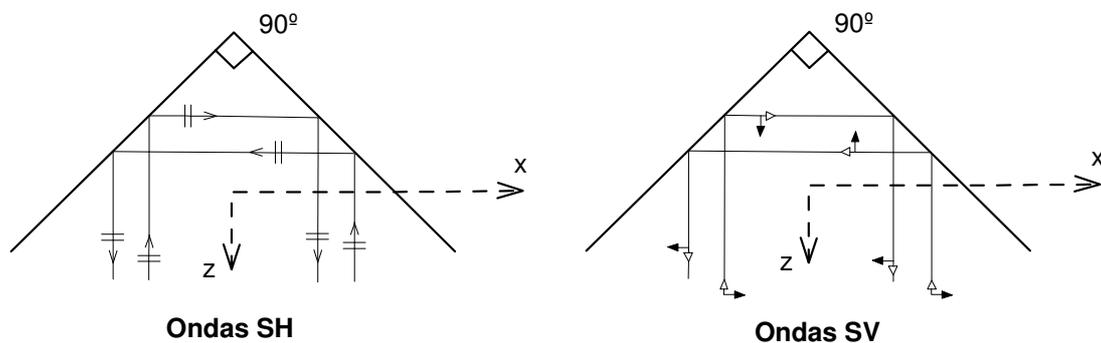


Figura 3.3 Esquema de reflexión ante incidencia vertical de ondas SH y SV en una cuña triangular infinita con ángulo interno de 90°

Realizando el cambio de coordenadas ilustrado en la figura 3.2, el campo de desplazamientos viene dado por la expresión

$$v = 2v_0 e^{-ikh} [\cos(k(z+h)) + \cos(kx)] \quad (3.3)$$

Al aplicar el operador rotacional y siendo consistentes con la notación empleada en el capítulo anterior, se obtiene

$$r_1 = v_0 k e^{-ikh} \text{sen}(k(z+h)) \quad (3.4)$$

$$r_3 = -v_0 k e^{-ikh} \text{sen}(kx) \quad (3.5)$$

3.2.1.2 Incidencia de Ondas SV

En el caso de la incidencia de ondas SV se tiene que al incidir la onda sobre la superficie libre se presenta reflexión total y las ondas SV se propagan horizontalmente. Al chocar de nuevo contra el otro flanco de la cuña se presenta de nuevo reflexión total y las ondas se propagan verticalmente (figura 3.3).

Los desplazamientos en cualquier punto de la cuña infinita vienen dados por las siguientes expresiones.

$$u = 2iu_0 (\text{sen}(kz_1)) \quad (3.6)$$

$$w = -2iu_0 (\text{sen}(kx_1)) \quad (3.7)$$

Realizando el cambio de coordenadas se tiene

$$u = u_0 2 i e^{-ikh} \text{sen}(k(z+h)) \quad (3.8)$$

$$w = -u_0 2 i e^{-ikh} \text{sen}(kx) \quad (3.9)$$

Aplicando el operador rotacional se obtiene

$$r_2 = u_0 i k e^{-ikh} [\cos(k(z+h)) + \cos(kx)] \quad (3.10)$$

3.2.2 Geometría Triangular de 120°

Para esta geometría, considerando un módulo de Poisson $\nu = 0.25$, se tienen dos casos particulares para la incidencia vertical de ondas SV y SH.

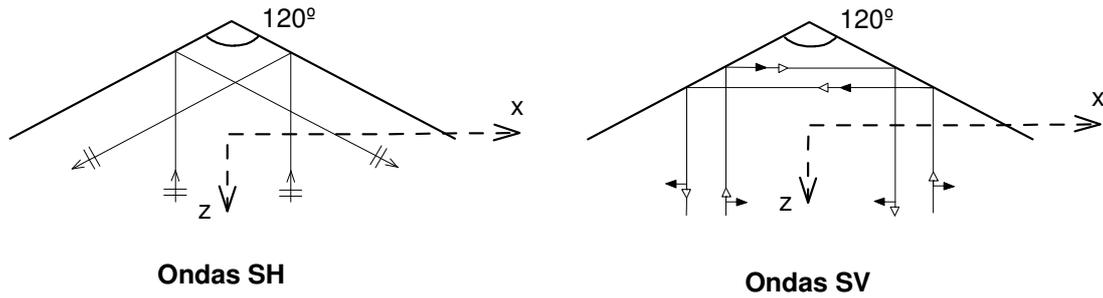


Figura 3.5 Esquema de reflexión ante incidencia vertical de ondas SH y SV de una cuña triangular infinita con ángulo interno de 120°

3.2.2.1 Incidencia de ondas SH

Cuando inciden ondas SH de forma vertical sobre esta geometría, estas se reflejan paralelas a las superficies libres como se ilustra en la figura 3.5. Los desplazamientos horizontales en dirección Y para la cuña infinita vienen dados por la expresión

$$v = v_0 \left[e^{ikz_1} + 2e^{-i\frac{kz_1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \right] \quad (3.11)$$

Realizando el cambio de coordenadas la expresión anterior se modifica y se tiene que

$$v = v_0 e^{-ikh} \left[e^{ik(z+h)} + 2e^{-i\frac{k}{2}(z+h)} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \right] \quad (3.12)$$

Las rotaciones estarán comprendidas en el plano x_1 - x_3 y de acuerdo con la notación establecida serán

$$R_1 = -\frac{v_0 k}{2} e^{-ikh} \left[e^{ik(z+h)} - e^{-i\frac{k}{2}(z+h)} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \right] \quad (3.13)$$

$$R_3 = -v_0 \frac{\sqrt{3}k}{4} e^{-ikh} \left[e^{-i\frac{k}{2}(z+h)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} kx\right) \right] \quad (3.14)$$

3.2.2.2 Incidencia de ondas SV

En el caso de incidencia vertical de ondas SV, al alcanzar estas las superficies libres, se presenta una conversión total en ondas P que se propagan horizontalmente. Estas ondas P se convierten nuevamente en ondas SV, que viajan verticalmente, al chocar con la superficie libre (figura 3.5). Con el módulo de Poisson considerado, la relación de

velocidades entre las ondas P y SV es $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$.

Los desplazamientos son únicamente horizontales en la dirección x_1 y pueden calcularse en cualquier punto de la cuña infinita, mediante la expresión siguiente

$$u = 2u_0 [\cos(kz_1) + \cos(qx_1)] \quad (3.15.1)$$

$$w = 0 \quad (3.15.2)$$

Realizando el cambio de coordenadas, se llega a lo siguiente

$$u = 2u_0 e^{-ikh} [\cos(k(z+h)) + \cos(qx)] \quad (3.16.1)$$

$$w = 0 \quad (3.16.2)$$

La rotación viene dada entonces por la siguiente expresión

$$R_2 = -u_0 k e^{-ikh} \text{sen}(k(z+h)) \quad (3.17)$$

En todas las expresiones para el cálculo de las rotaciones es clara la dependencia lineal de las mismas con la frecuencia y con el inverso de la velocidad de propagación de las ondas de corte.

3.3 Validación

Se presentan en esta parte algunas comparaciones entre los valores obtenidos para rotaciones calculadas a partir de las soluciones analíticas exactas y aquellas obtenidas empleando el IBEM con las expresiones presentadas en el capítulo anterior de este trabajo.

Considérese la frecuencia normalizada η , la cual viene dada por la expresión

$$\eta = \frac{\omega a}{\beta \pi} \quad (3.18)$$

Donde a es la dimensión característica de la irregularidad superficial.

Los resultados fueron calculados para diferentes frecuencias η y se presentan en módulo tanto los desplazamientos como las rotaciones.

3.3.1 Geometría Triangular de 90°

3.3.1.1 Incidencia de Ondas SH

Se presenta a continuación una comparación de los desplazamientos analíticos contra los obtenidos empleando el IBEM. Esto para mostrar que el método es confiable en el cálculo de desplazamientos.

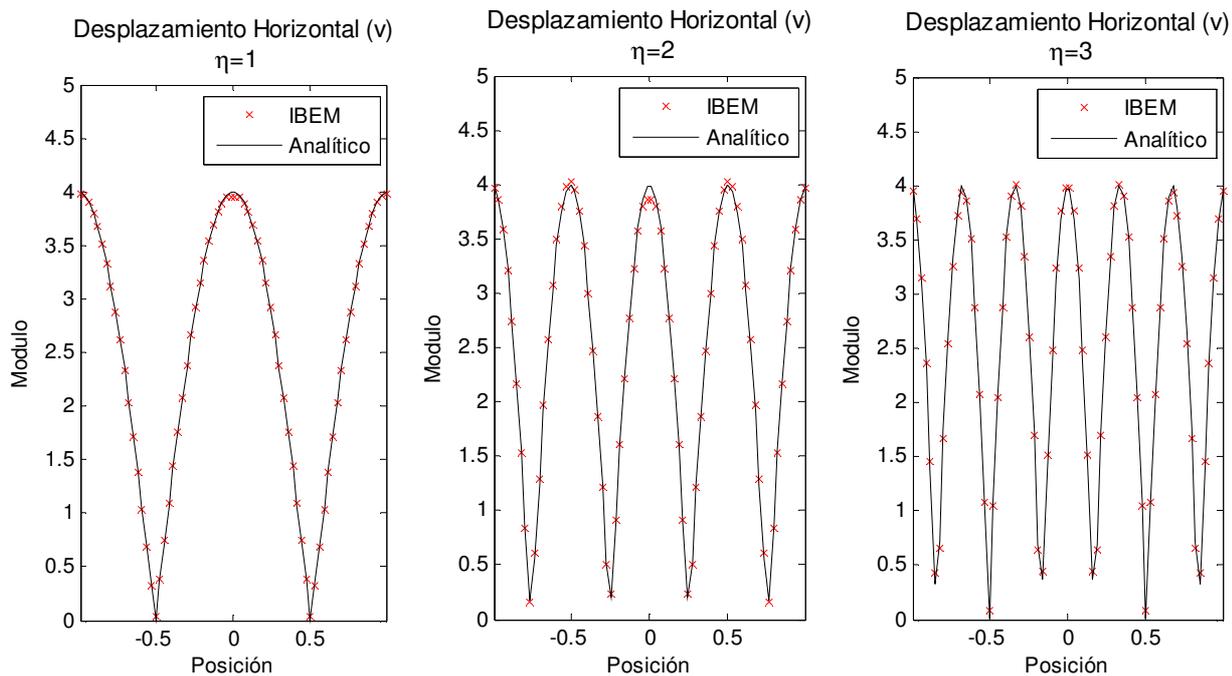


Figura 3.6 Desplazamientos horizontales geometría de 90°. Incidencia de ondas SH

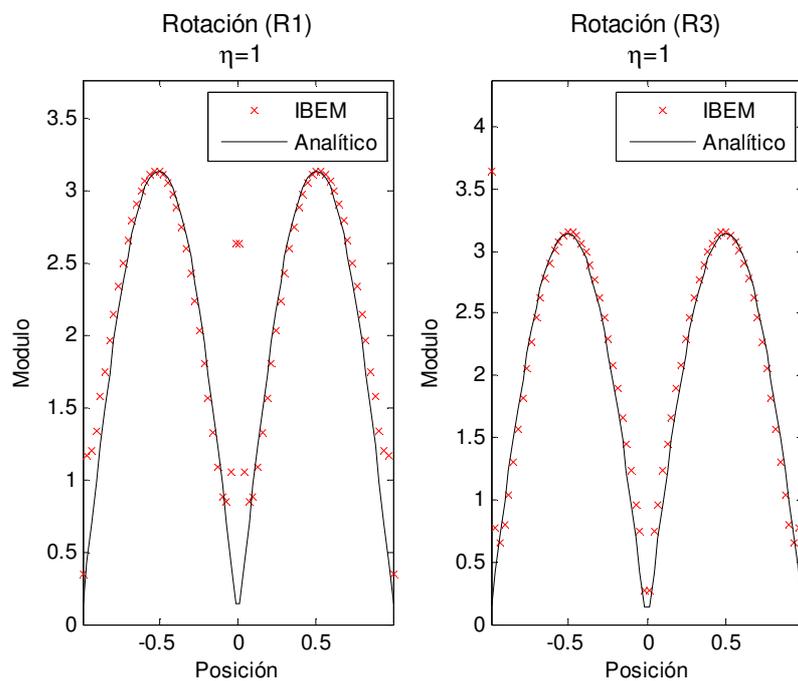


Figura 3.7.1 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 1$

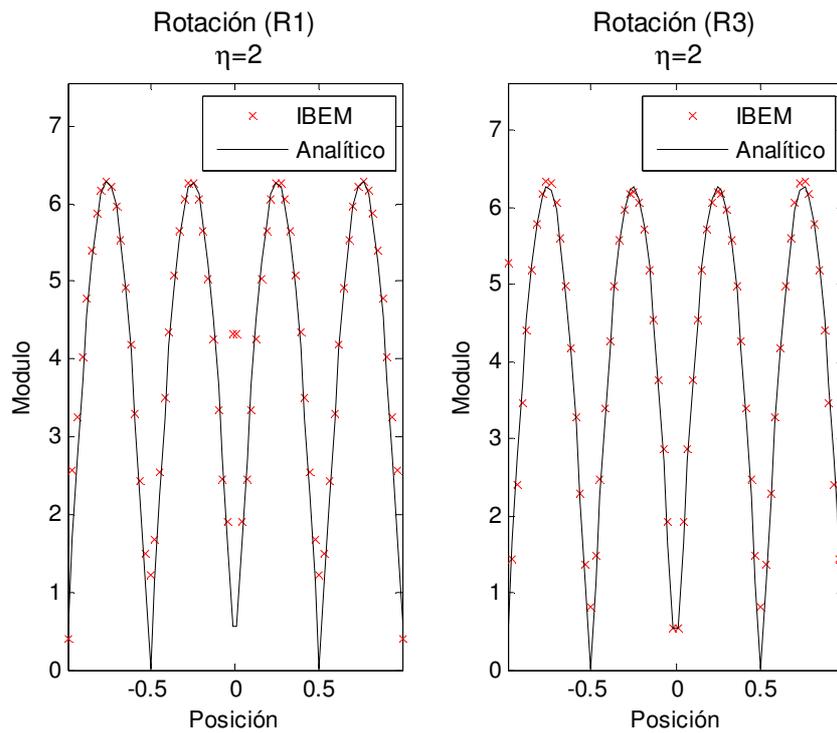


Figura 3.7.2 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 2$

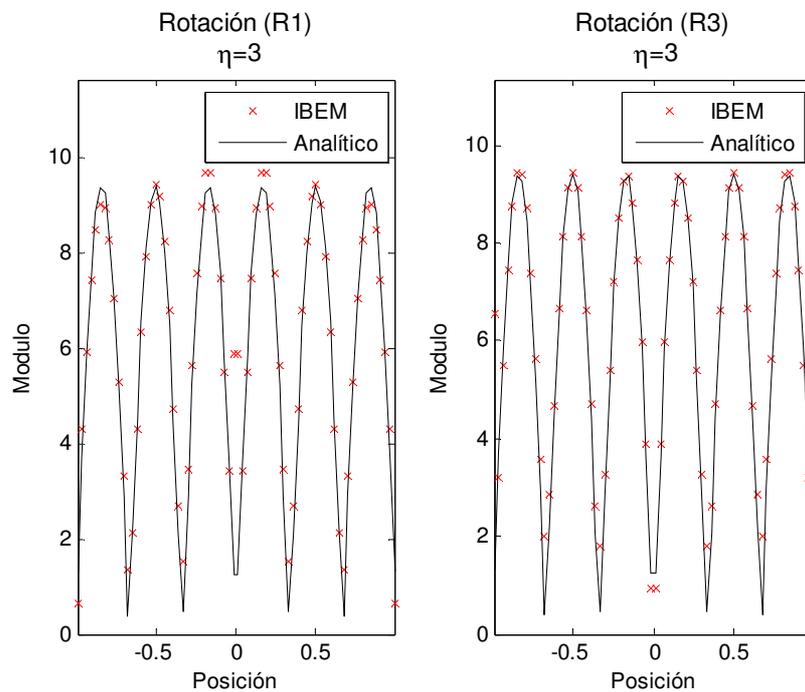


Figura 3.7.3 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 3$

De acuerdo con las expresiones 3.4 y 3.5, los módulos de la rotación con respecto a los ejes x_1 y x_3 son iguales, sin embargo se presentan ambas para observar que el método genera algunas diferencias.

Se aprecia que los desplazamientos calculados con el IBEM se ajustan muy bien en todos los puntos con los desplazamientos calculados a partir de la solución analítica, sin embargo en el caso de las rotaciones se presentan diferencias en los vértices de la geometría considerada. Lo anterior se observó en todas las frecuencias y (como se verá más adelante) en todas las configuraciones geométricas.

Se ve que la rotación calculada con el IBEM, con respecto al eje x_1 , presenta diferencias considerables en la parte central de la superficie, no tanto así en los extremos, mientras que en la rotación con respecto a x_3 sucede lo contrario.

Hay que tener presente que el cálculo de rotaciones implica realizar derivadas, las cuales generan discontinuidades incluso si la función que se diferencia es continua.

Al observar las diferencias en las rotaciones cerca de los vértices de la geometría, se analizó lo que sucedía con las densidades de fuerza, empleadas por el método, en estos puntos y se encontró que se presentaban grandes discontinuidades en los valores de estas como se ilustra en la figuras 3.8.1 y 3.8.2

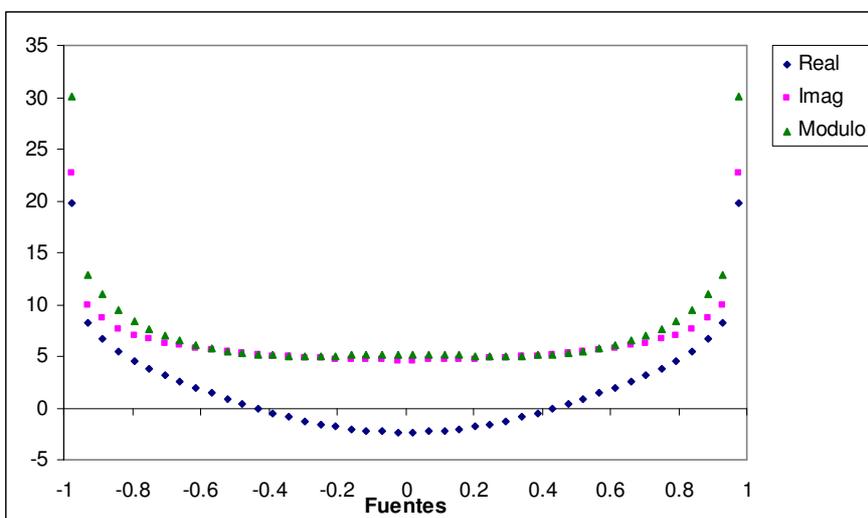


Figura 3.8.1 Variación de las densidades de fuerza (ϕ) en la base de la geometría triangular de 90°

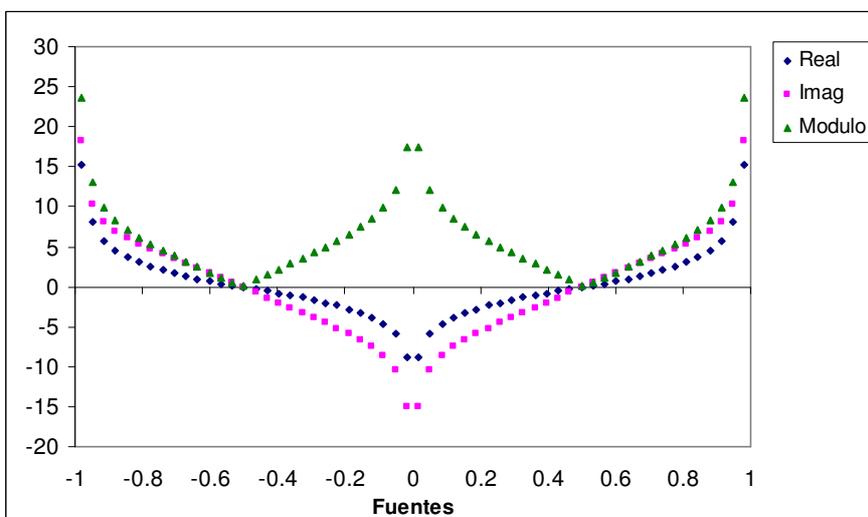


Figura 3.8.2 Variación de las densidades de fuerza (ϕ) en la superficie de la geometría triangular 90°

Buscando disminuir el efecto de esta discontinuidad sobre las rotaciones se realizó una discretización más fina en los segmentos extremos de la base y en los extremos y centrales de la superficie. Los resultados obtenidos se ilustran a continuación.

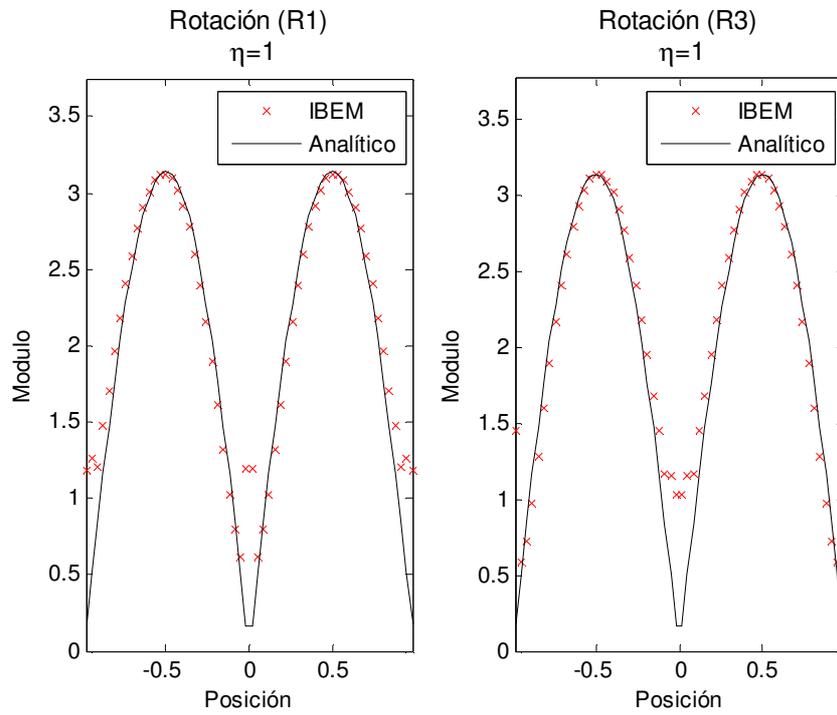


Figura 3.9.1 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH modificando la discretización, $\eta = 1$

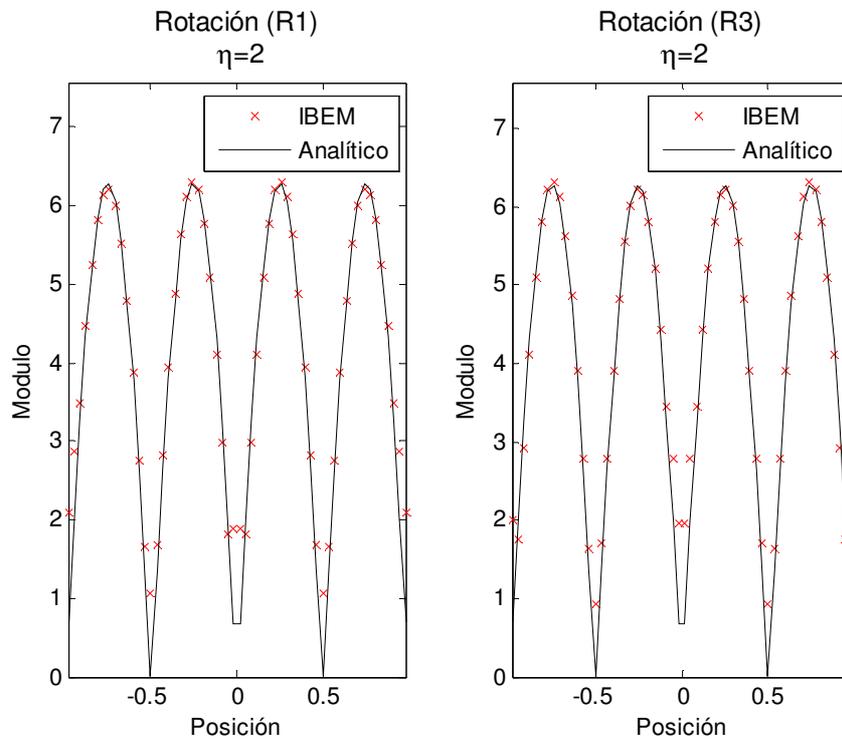


Figura 3.9.2 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH modificando la discretización, $\eta = 2$

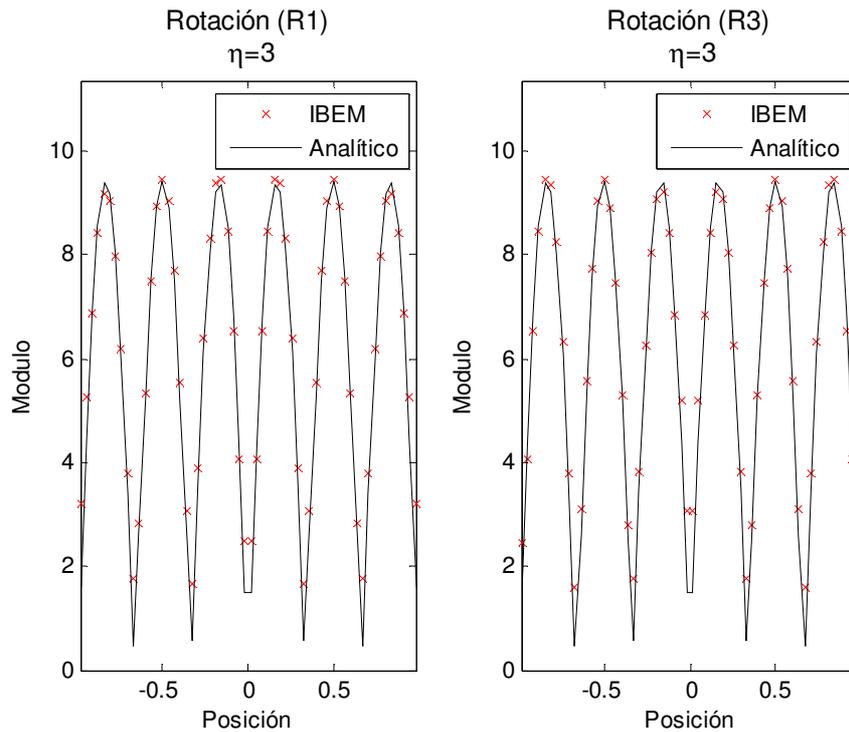


Figura 3.9.3 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SH modificando la discretización, $\eta = 3$

Se aprecia que los valores estimados con el IBEM, aumentando la discretización cerca de los vértices, mejora la estimación de las rotaciones en estos puntos aproximándose mejor a los valores dados por la solución analítica, sobretodo para las frecuencias mayores. Por lo anterior se empleó una mayor discretización cerca de los vértices de la geometría para el resto de la validación.

Dada la dependencia lineal de las rotaciones con la frecuencia y considerando que solo se están presentando las rotaciones en módulo, es posible considerar una normalización de la forma

$$\frac{Ra}{v_0 \eta} \tag{3.19}$$

Esta normalización permite establecer valores máximos de rotación, independientes de la frecuencia y de la amplitud de las ondas incidentes y podría emplearse de forma practica en aplicaciones ingenieríles.

En este caso particular se tendría que el módulo máximo de las rotaciones sería π con respecto a los ejes x_1 y x_3 .

3.3.1.2 Incidencia de Ondas SV

En el caso de incidencia vertical de ondas SV sobre esta topografía, de acuerdo con la solución analítica (Sánchez-Sesma, 1990) se sabe que en la punta de la superficie el desplazamiento es nulo y la rotación máxima como se ilustra en la figura 3.10.

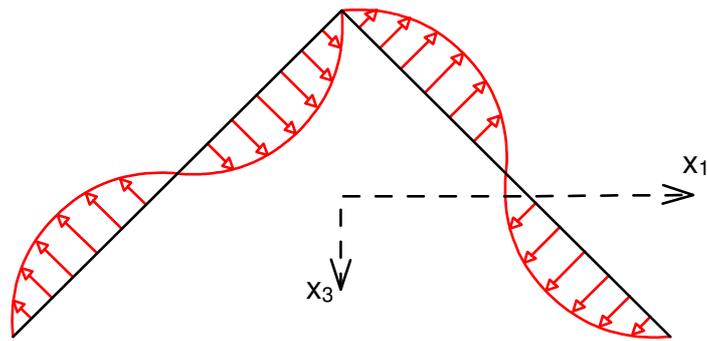


Figura 3.10 Esquema del movimiento en la superficie de la geometría de 90°. Incidencia de ondas SV.

A continuación se ilustra la comparación de las rotaciones obtenidas con el IBEM y las de la solución analítica para tres frecuencias diferentes.

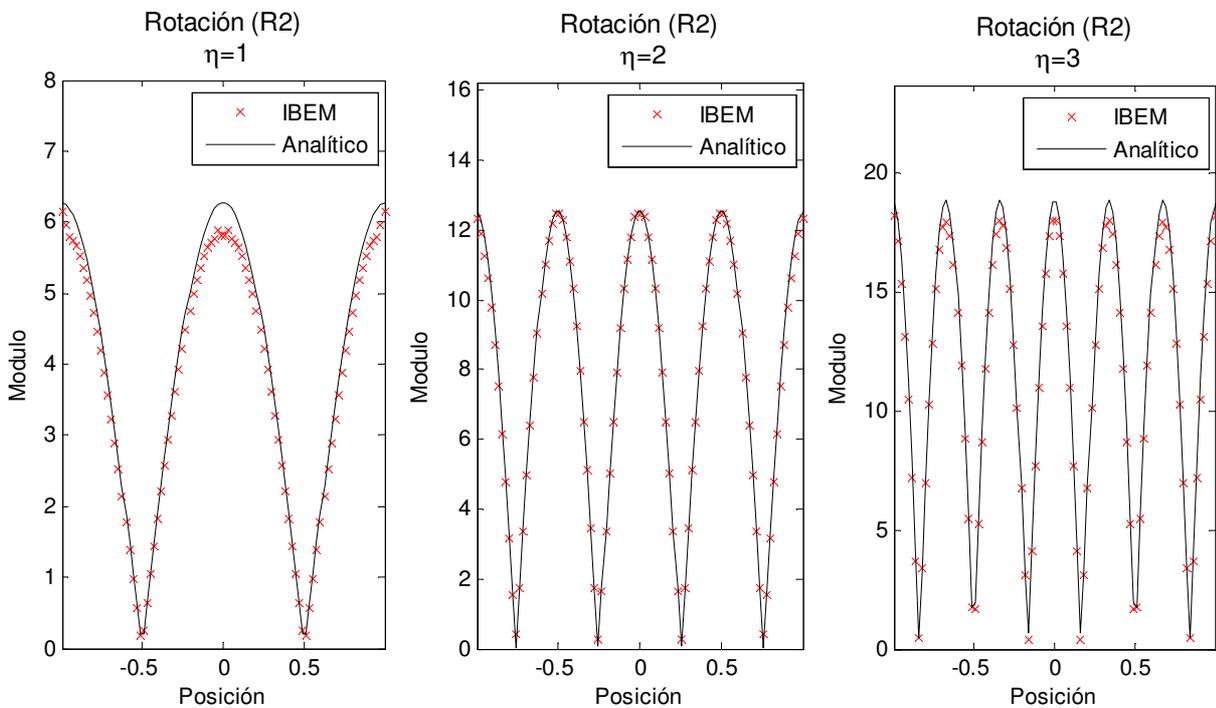


Figura 3.11 Rotación geometría de 90°. Incidencia de ondas SV

En este caso como en el anterior, el incremento en el número de segmentos cerca de los vértices de la geometría mejoró la estimación de las rotaciones. Se aprecia aquí una muy buena relación entre los valores calculados con el IBEM y los analíticos, incluso mejor que en el caso SH, sobre todo para las frecuencias mayores. En baja frecuencia se presentan pequeñas diferencias en los extremos y el centro de la superficie.

Si se realiza la normalización dada por la expresión 3.19 en este caso, se tendrían valores máximos de rotación de 2π .

3.3.2 Geometría Triangular de 120°

3.3.2.1 Incidencia de Ondas SH

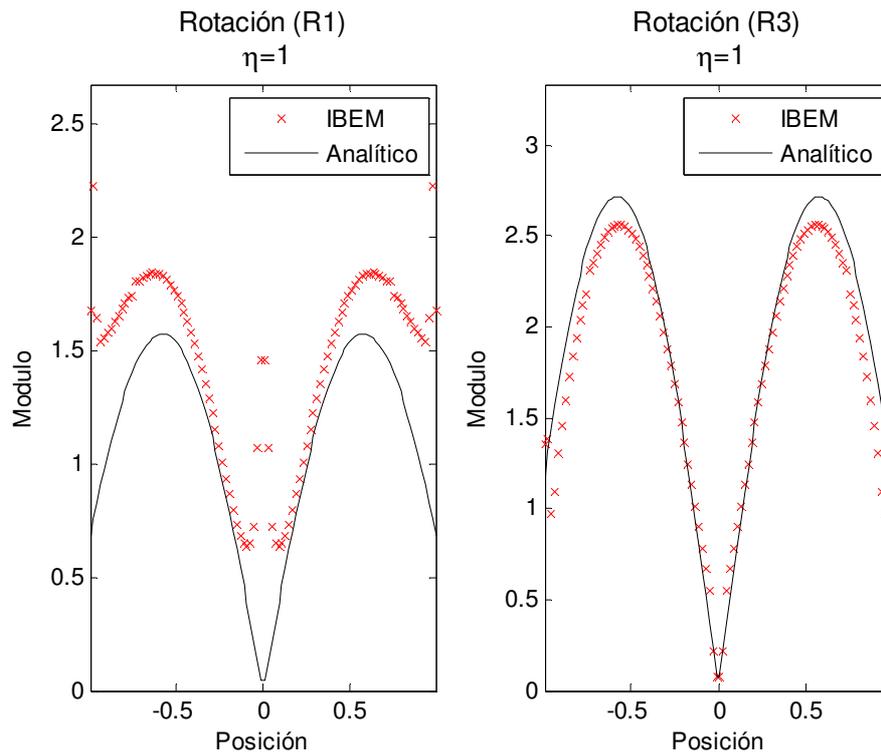


Figura 3.12.1 Rotación geometría de 120°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 1$

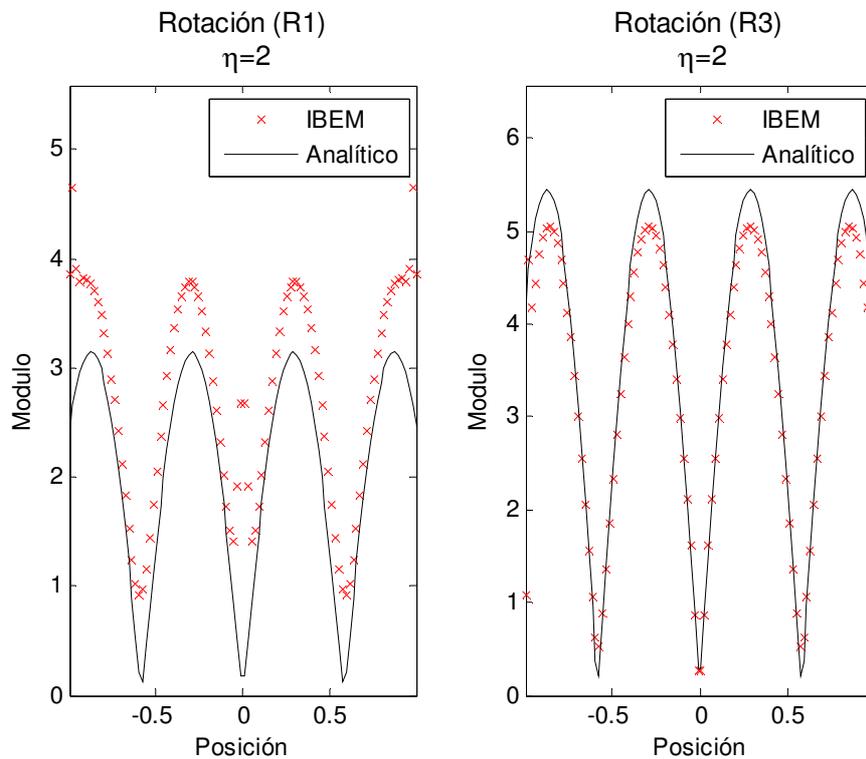


Figura 3.12.2 Rotación geometría de 120°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 2$

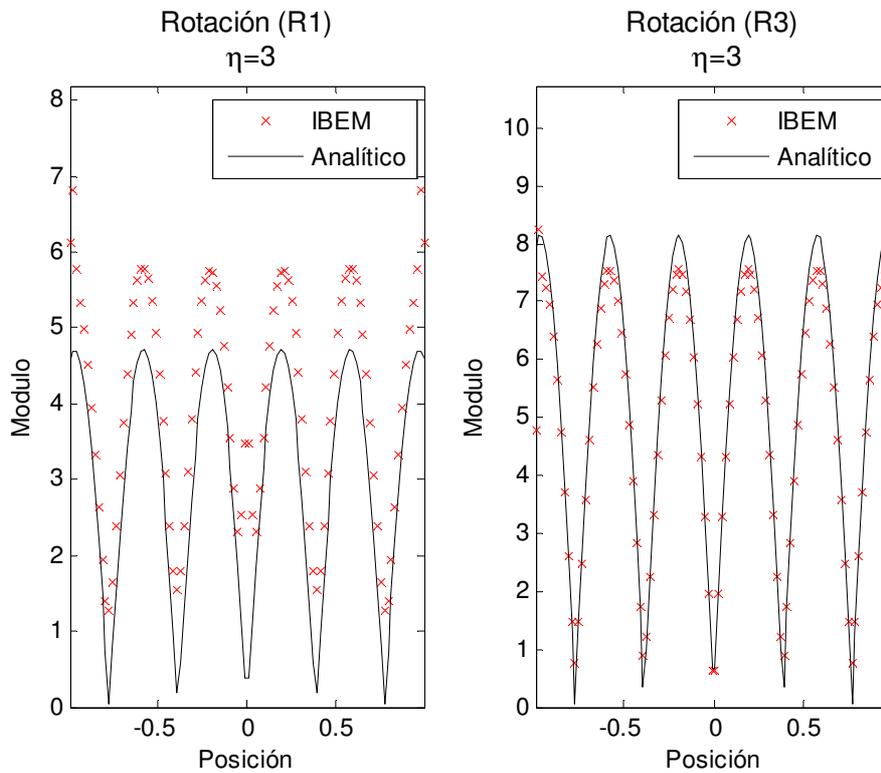


Figura 3.12.3 Rotación geométrica de 120°. Incidencia de ondas SH, $\eta = 3$

En este caso la rotación con respecto al eje x_1 está sobreestimada por el IBEM en un factor de aproximadamente 1.2 con respecto a los valores analíticos.

De acuerdo con la normalización propuesta en la expresión 3.19, las rotaciones máximas con respecto a los ejes x_1 y x_3 serían de $\pi/2$ y $\sqrt{3}\pi/2$ respectivamente.

3.3.2.2 Incidencia de Ondas SV

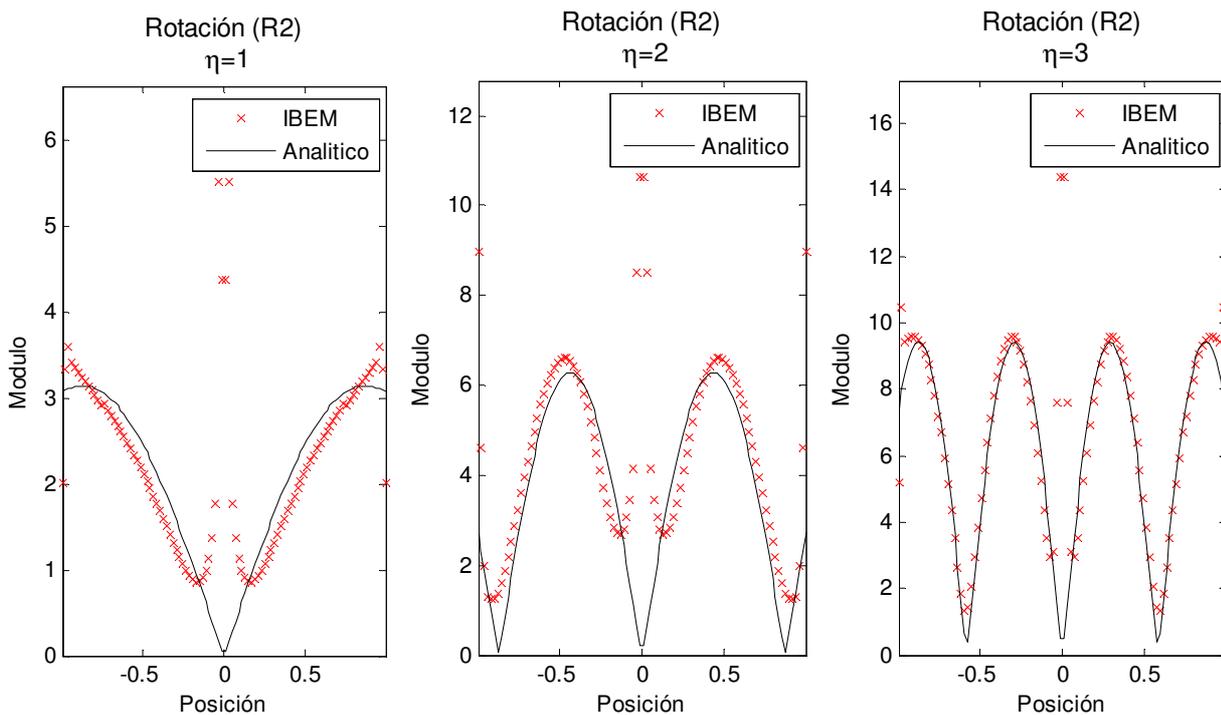


Figura 3.11 Rotación geométrica de 120°. Incidencia de ondas SV

En este caso es claro que el método predice mejor las rotaciones para altas frecuencias. En bajas frecuencias la tendencia de los valores obtenidos con el IBEM no sigue muy bien aquella de los valores esperados (analíticos) especialmente en los extremos de la geometría. Adicionalmente se observa que en baja frecuencia existen más puntos cerca del vértice central que están alejados de los valores analíticos.

Con la normalización de la expresión 3.19 se tiene un valor máximo de rotación de π .

En todos los casos ilustrados se observa una diferencia entre los resultados analíticos y los obtenidos por el IBEM en los extremos y centro de las geometrías, los cuales podrían deberse a la discontinuidad en las densidades de fuerza generadas por el cambio de pendiente de la geometría. Además en algunos casos el tiempo de cómputo extra requerido al aumentar la discretización de los segmentos extremos no redituó en una mejor estimación de las rotaciones.

Los resultados obtenidos en las geometrías estudiadas no son del todo satisfactorios, por lo que se decidió realizar una validación adicional considerando la incidencia vertical de ondas P sobre una geometría triangular de 60° , buscando comprender un poco mejor lo que sucede con el método.

3.3.3 Geometría Triangular de 60°

Para una cuña triangular infinita de 60° , con un coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$ (figura 3.12), es posible, de forma geométrica obtener una expresión analítica exacta para los desplazamientos ante la incidencia vertical de ondas P. Estos desplazamientos son únicamente verticales y en la punta de la geometría se presenta una amplificación de 4 veces la amplitud de la onda incidente. Las expresiones analíticas se dedujeron al saber que las ondas P incidentes sufren una reflexión total en ondas SV que se propagan horizontalmente que al chocar con la otra cara de la geometría se reflejan totalmente de nuevo en ondas P que se propagan verticalmente (figura 3.12).

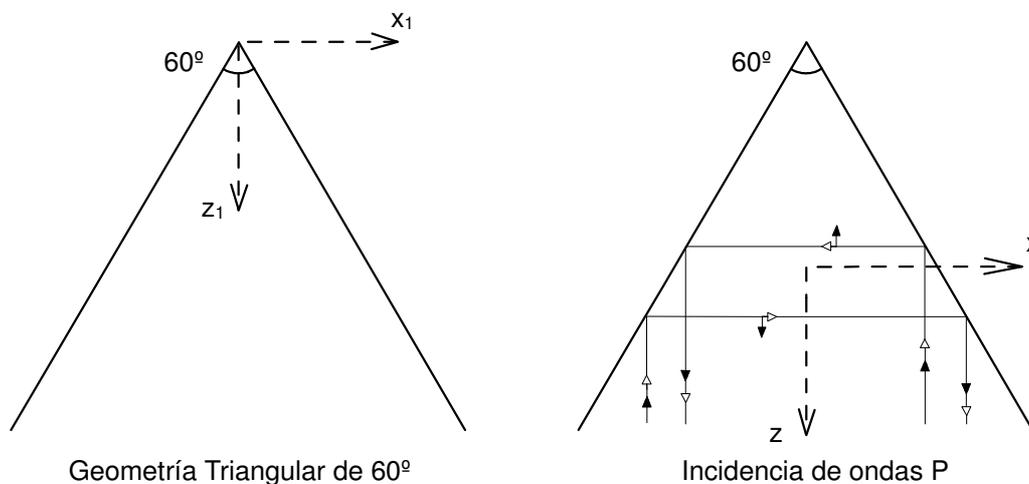


Figura 3.12 Cuña triangular infinita con ángulo interno de 60° y esquema de reflexión ante incidencia vertical de ondas P

Las expresiones para desplazamiento horizontal y vertical referidas al sistema de coordenadas modificado, son las siguientes

$$u = 0 \quad (3.20.1)$$

$$w = w_0 2e^{-iqh} [\cos(q(z+h)) + \cos(kx)] \quad (3.20.2)$$

De forma similar al caso de incidencia de ondas SV, la rotación se presenta con respecto al eje x_2 y viene dada por la siguiente expresión

$$R_2 = -w_0 k e^{-iqh} \text{sen}(kx) \quad (3.21)$$

La rotación máxima normalizada de acuerdo con la expresión 3.19 para esta geometría y la incidencia vertical de ondas P sería igual a π .

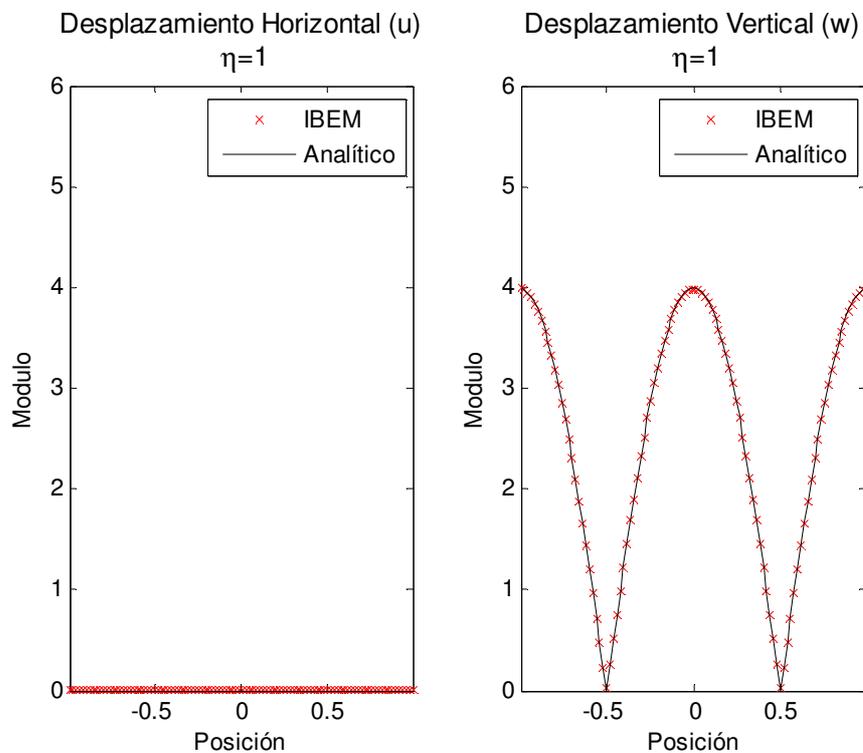


Figura 3.13.1 Desplazamientos geometría de 60°. Incidencia de ondas P, $\eta = 1$

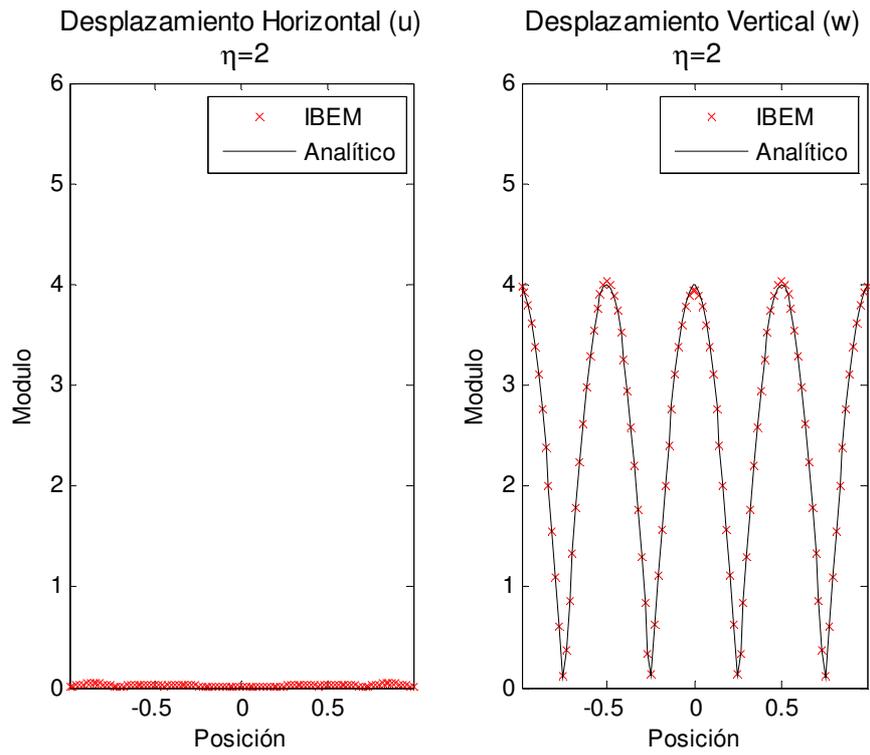


Figura 3.13.2 Desplazamientos geometría de 60° . Incidencia de ondas P, $\eta = 2$

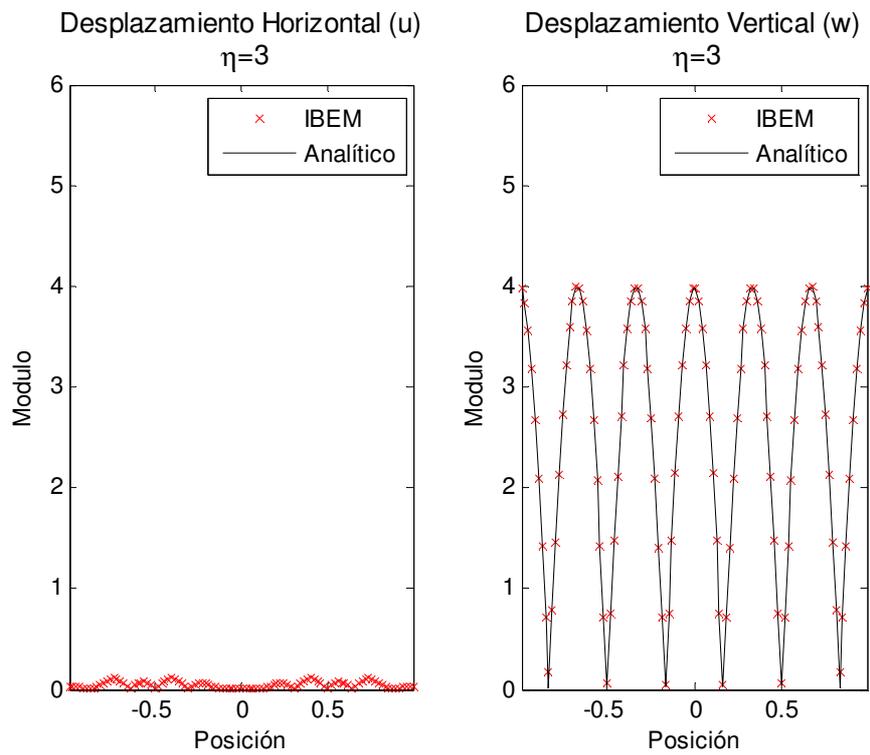


Figura 3.13.3 Desplazamientos geometría de 60° . Incidencia de ondas P, $\eta = 3$

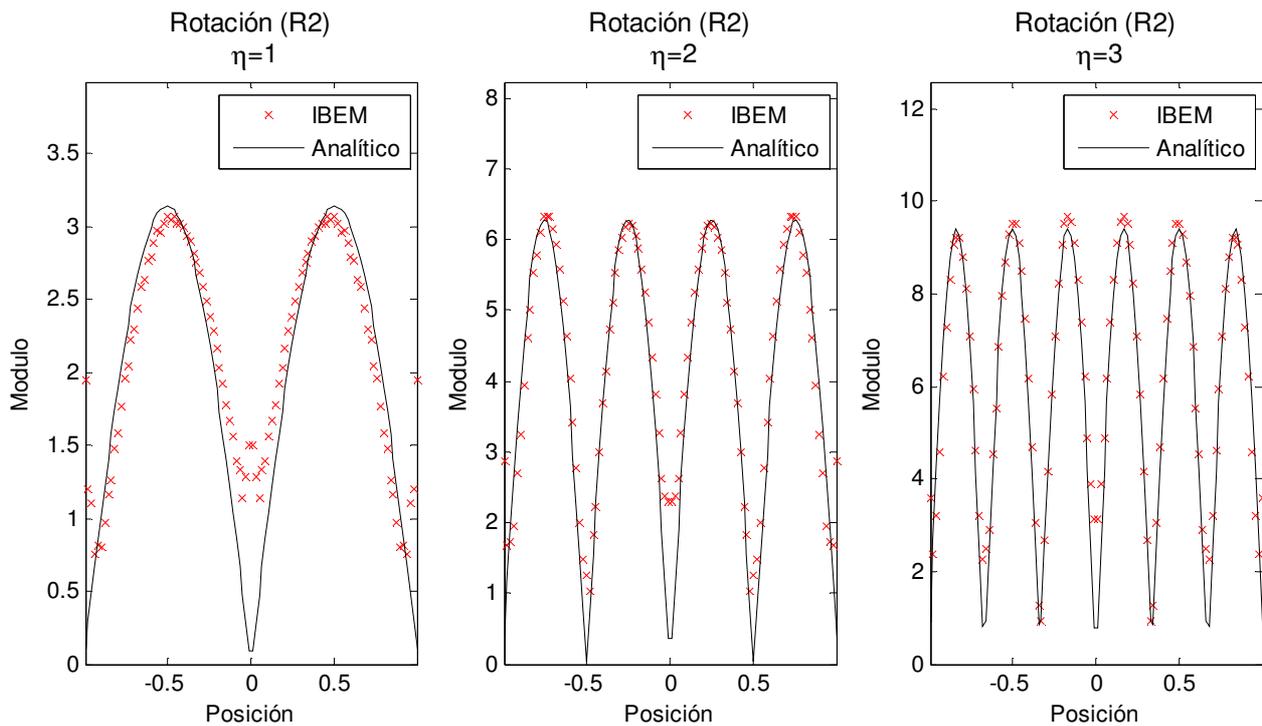


Figura 3.14 Rotación geometría de 60° . Incidencia de ondas P

De forma similar a como se observó en las dos geometrías triangulares previas, para el caso de las ondas SV, se logran buenos ajustes para las frecuencias mayores. En bajas frecuencias se presentan diferencias considerables entre las rotaciones analíticas y las calculadas con el IBEM, cerca de los vértices de la geometría.

Es posible concluir que exceptuando zonas cerca de los vértices de las geometrías, las rotaciones son bien predichas por el IBEM para frecuencias normalizadas $\eta = 2$ o superiores. Se debe evitar con la formulación actual del método, calcular rotaciones en los puntos donde se presentan cambios de pendiente en la geometría.

También se observó que en general son mejores los resultados para las geometrías de 60° y 90° que para la de 120° , en la cual, ante la incidencia tanto de ondas SV como SH, se presentan incluso diferencias en la tendencia de las gráficas, en particular en bajas frecuencias.

3.4 Rotaciones Calculadas Numéricamente a Partir de Desplazamientos

Como se observó que los desplazamientos son bien estimados por el IBEM en todas las geometrías triangulares presentadas en casi todos los casos, se decidió calcular las rotaciones a partir de derivadas numéricas de los desplazamientos para comparar con los resultados ya presentados. En el caso de de una frontera lisa (en la que el ángulo interno tiende a 180 grados) con tracciones nulas, la derivada del desplazamiento normal con respecto a la tangente es la rotación de interés. Esta aproximación fue empleada también por Castellani y Boffi (1986).

A continuación se presentan los resultados obtenidos para las rotaciones en los casos en que el IBEM no arrojó resultados satisfactorios.

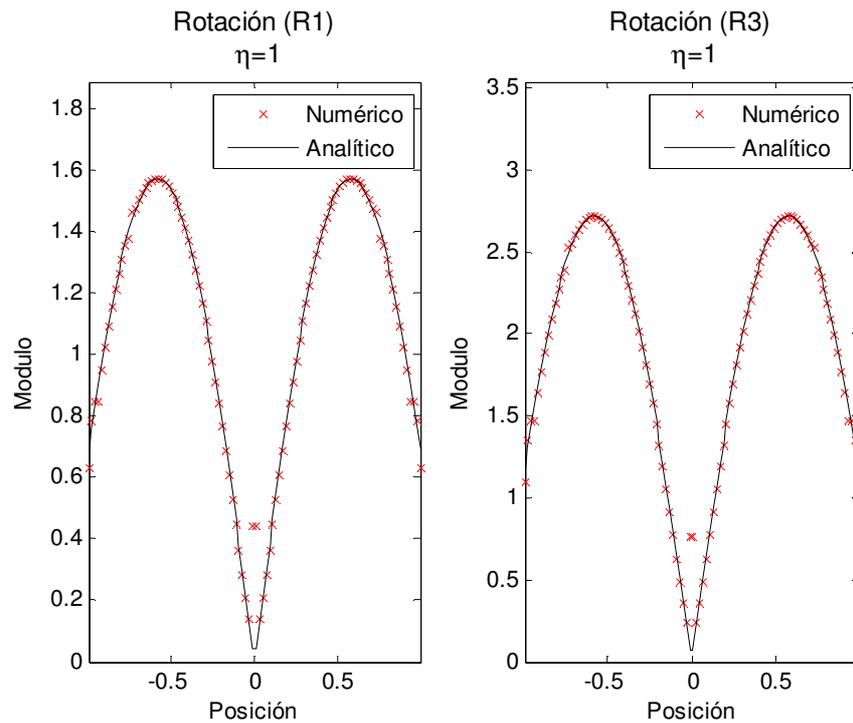


Figura 3.15.1 Rotación calculada numéricamente a partir de desplazamientos para la geometría de 120° . Incidencia de ondas SH, $\eta = 1$

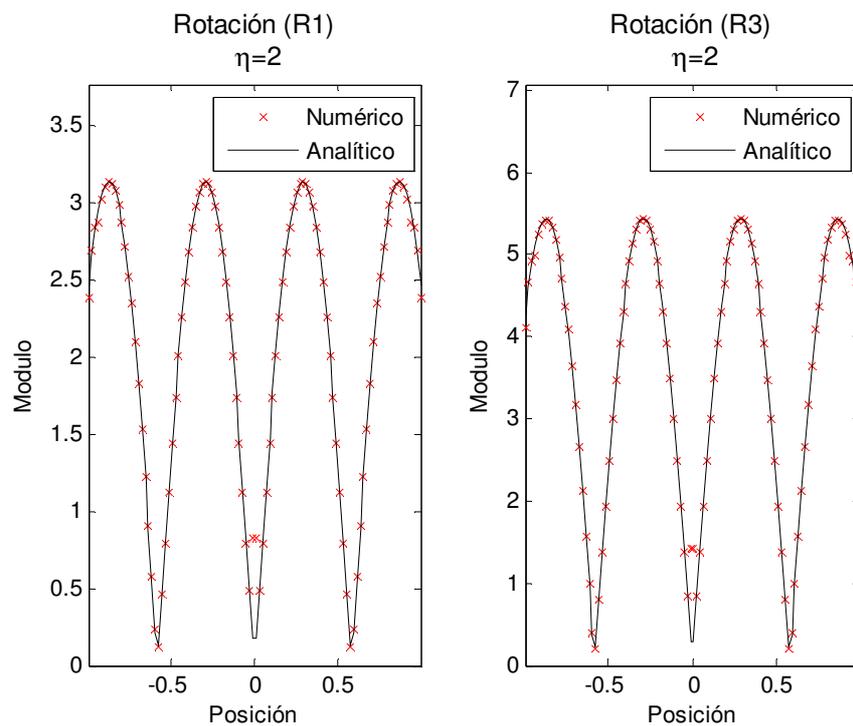


Figura 3.15.2 Rotación calculada numéricamente a partir de desplazamientos para la geometría de 120° . Incidencia de ondas SH, $\eta = 2$

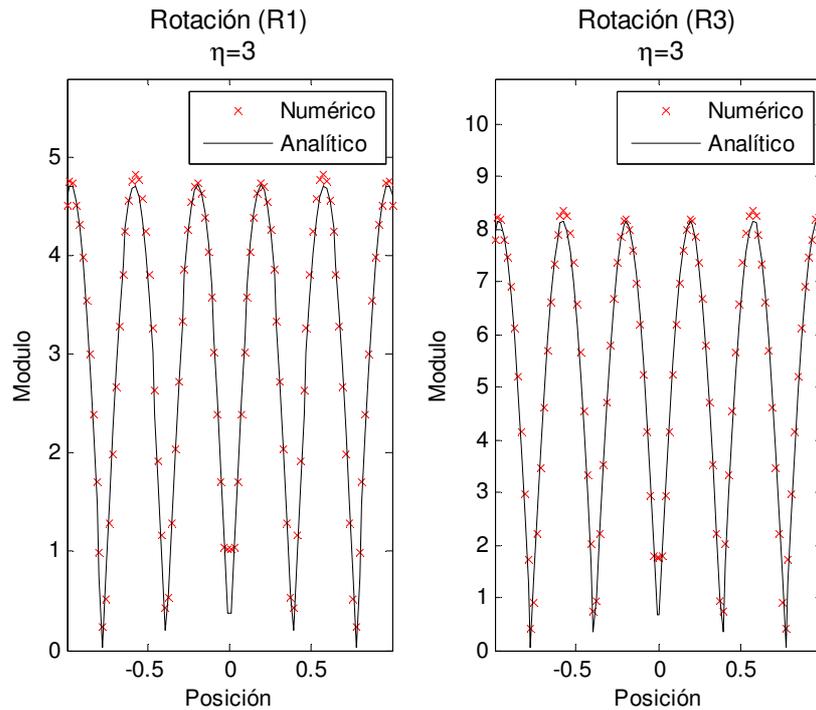


Figura 3.15.3 Rotación calculada numéricamente a partir de desplazamientos para la geometría de 120° . Incidencia de ondas SH, $\eta = 3$

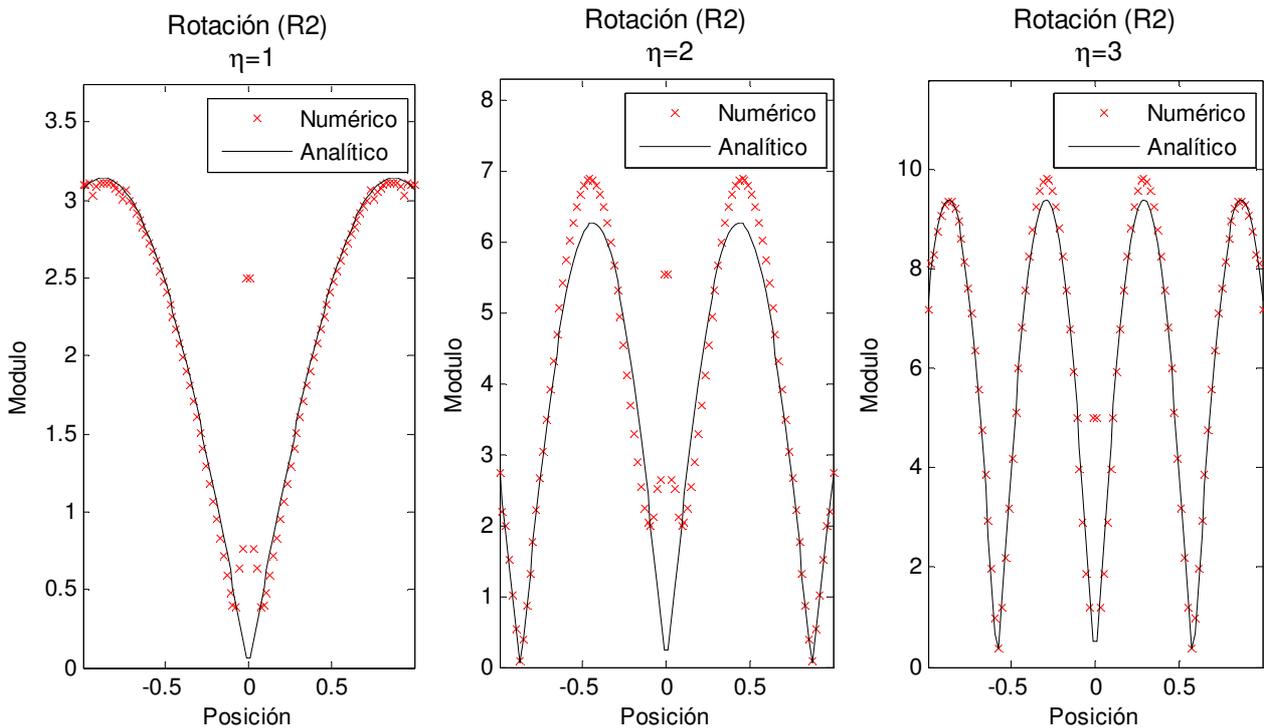


Figura 3.16 Rotación calculada numéricamente a partir de desplazamientos para la geometría de 120° . Incidencia de ondas SV.

3.5 Discusión sobre la validación del IBEM

Los resultados son generalmente satisfactorios. Sin embargo presentan ciertas inestabilidades en la vecindad de los vértices que podrían deberse al esquema de discretización adoptado en el IBEM. Si bien en el cálculo de los desplazamientos las

discontinuidades de las densidades de fuerza no afectan considerablemente los valores. Sin embargo, tratándose de gradientes las variaciones aumentan. Se probaron diversas discretizaciones cerca de los vértices con mejoras marginales. Otras manera de clarificar completamente el asunto serían utilizar (1) la formulación directa del BEM en la que tanto desplazamientos como tracciones se representan con polinomios, (2) el método de soluciones fundamentales en el que las densidades se discretizan y se alejan de la frontera (no obstante el cálculo de derivadas requerirá precauciones especiales) y (3) los métodos de diferencias finitas o elementos finitos y espectrales calculando los gradientes apropiados. Esas opciones siendo de interés están, por ahora, más allá del alcance de este trabajo, pero se continúa la investigación.

Se han adelantado contactos con el Dr. Luís Godinho de la Universidad de Coimbra en Portugal y con el Dr. Dimitri Komatitsch de la Universidad de Pau en Francia, para realizar comparaciones con el Método de Soluciones Fundamentales y el Método de Elementos Espectrales respectivamente.

El problema afortunadamente se restringe a los vértices y las estimaciones de rotaciones son estables en las partes suaves de las geometrías alejadas de aquellos. Las soluciones analíticas de que se dispone sugieren que los vértices dan lugar a rotaciones normalizadas que generalmente son menores de un orden de magnitud del valor asociado a la solución de referencia. Esto parece ser satisfactorio para fines prácticos. Sin embargo la naturaleza detallada de las rotaciones debe esclarecerse.

Existe actualmente una propuesta para emplear el IBEM en la estimación de las rotaciones en un caso real para el cual se cuenta con datos experimentales. Este caso corresponde al anillo láser ubicado en Wetzell, Alemania, donde hay aspectos de los resultados observados que no han podido ser entendidos claramente. En estos casos los métodos y modelos matemáticos pueden ayudar a dar claridad sobre estos aspectos. Sin embargo para poder realizar esta clase de estudios es indispensable asegurar que el IBEM genera resultados confiables, por lo cual se considera de gran interés mejorar la validación realizada.

4. CÁLCULO DE ROTACIONES EN LA SUPERFICIE DE IRREGULARIDADES TOPOGRÁFICAS

En este capítulo se presentan algunos de los resultados de rotaciones calculadas empleando el IBEM en la superficie de diferentes configuraciones topográficas superficiales tanto en el dominio de la frecuencia como del tiempo. Se busca identificar la variación de las rotaciones con el ángulo de incidencia de las ondas y con la presencia de la irregularidad.

Los resultados presentados en este capítulo corresponden solamente al caso 2D y todos fueron calculados asumiendo un módulo de Poisson $\nu = 0.25$.

4.1 Rotaciones de Campo Libre

Las rotaciones de campo libre corresponden a aquellas generadas en ausencia de irregularidades superficiales. Con base en las ecuaciones del primer capítulo se calcularon los desplazamientos y rotaciones generados en la superficie del semiespacio ante incidencia de ondas P y SV con una variación del ángulo de incidencia entre 0 y 90°. En la figura 4.1 se ilustran los resultados. Las amplitudes de desplazamiento son relativas a la amplitud del desplazamiento incidente y las rotaciones están normalizados entre $\pi\eta$.

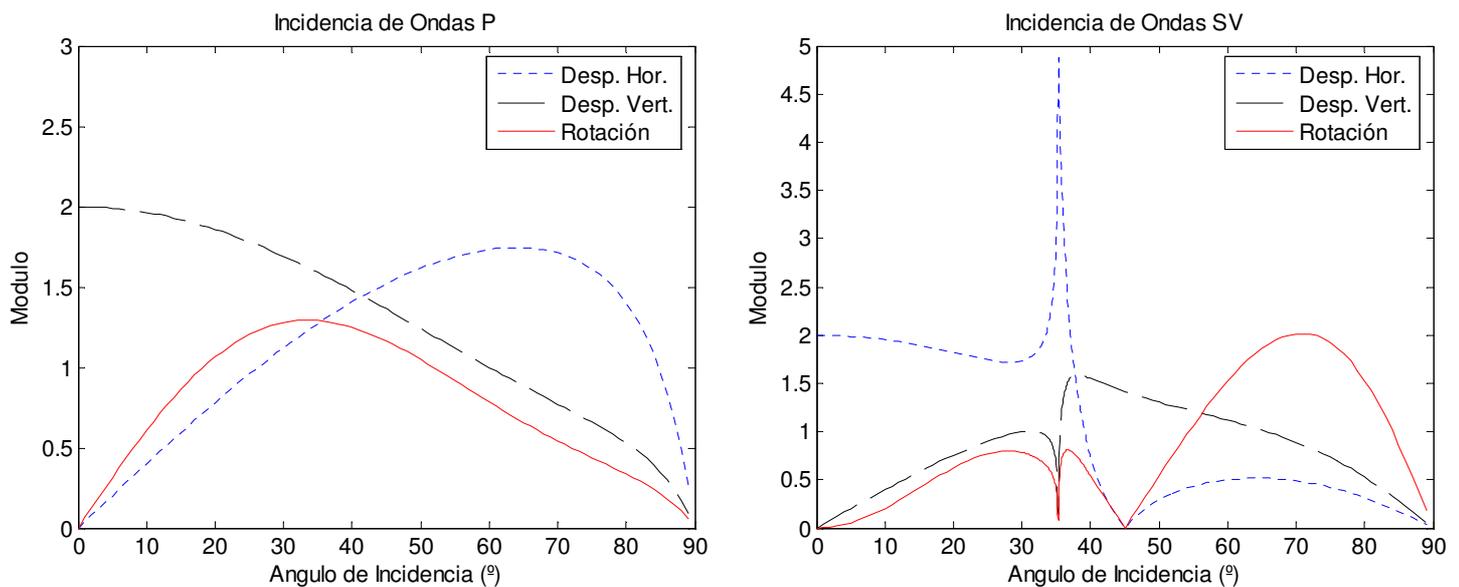


Figura 4.1 Respuesta en la superficie del semiespacio

Los valores de desplazamiento obtenidos en este caso particular, son consistentes con los presentados por Trifunac (1982) para diferentes módulos de Poisson.

El ángulo en que se presenta la máxima amplitud de las rotaciones generadas por las ondas P, coincide aproximadamente con el ángulo para el cual el coeficiente de reflexión de las ondas SV es máximo, para el coeficiente de Poisson considerado.

La implementación actual el IBEM no permitió estimar adecuadamente las rotaciones en los puntos de la geometría donde se presentan cambios considerables en la pendiente de la geometría. Afortunadamente, fuera de estos puntos se obtuvieron

valores consistentes con los analíticos, por lo cual es posible establecer algunas características del movimiento rotacional en la vecindad de irregularidades topográficas.

En la figura 4.2 se presenta un esquema de la geometría para la cual se calcula la respuesta con el IBEM. Esta está conformada por la irregularidad propiamente dicha, que por sencillez se considera comprendida entre las coordenadas horizontales normalizadas -1 y 1, y por superficies horizontales a ambos lados de la irregularidad. Se ilustra también el ángulo de incidencia de las ondas planas (θ) con respecto al eje vertical z .

Dado que se pretende observar el efecto de la topografía en la respuesta, principalmente rotacional, de la superficie, los valores de rotación y desplazamiento fueron normalizados con respecto a los de la superficie libre para los ángulos de incidencia (15° , 30° , 60°) y el tipo de onda asumido. Se calcularon también para incidencia vertical (0°) y a 45° , pero como la respuesta de la superficie libre es nula, estos casos no fueron normalizados.

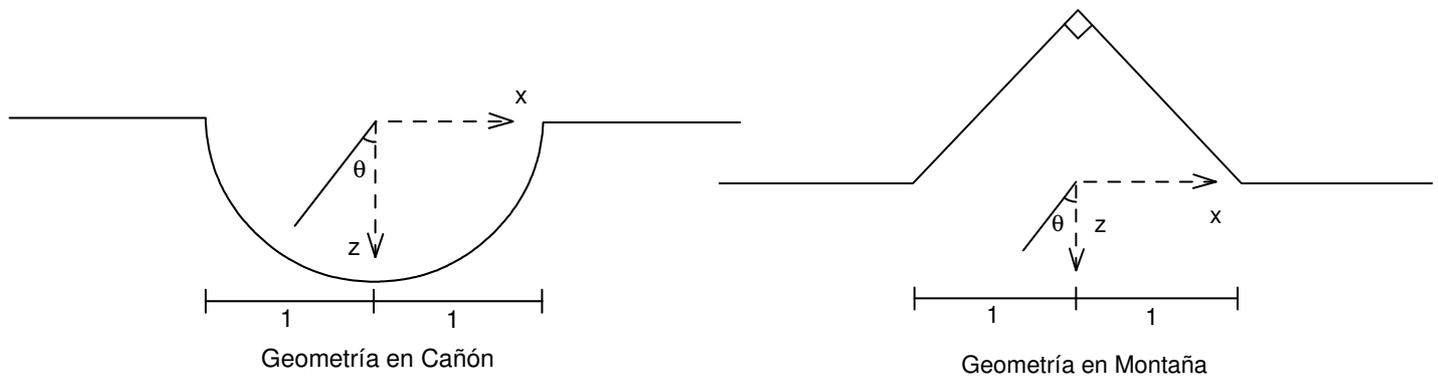


Figura 4.2 Esquema de la geometría empleada en el IBEM

En el capítulo 2 se estableció la dependencia lineal de las rotaciones con la frecuencia normalizada. Por ello, solo se calcularon las respuestas para $\eta = 1$. Para frecuencias mayores la variabilidad espacial será más importante sin que necesariamente las amplificaciones sean mayores. Otros aspectos que fueron considerados son los de amplitud unitaria de la onda incidente, la velocidad unitaria de las ondas de corte y amortiguamiento despreciable.

4.2 Rotaciones en la Superficie de Irregularidades Topográficas

4.2.1 Rotaciones en el Dominio de la frecuencia

Los gráficos y discusiones presentadas a continuación corresponden únicamente al cañón semicircular. Los resultados obtenidos en otras geometrías se incluyen en el apéndice.

Se ilustra a continuación la respuesta del cañón semicircular ante incidencia de ondas P y SV con diferentes ángulos. Se escogió esta geometría ya que su estudio se facilita a nivel rotacional por no haber cambios abruptos de pendiente al interior de toda la irregularidad sino que se tienen sólo en los bordes del cañón.

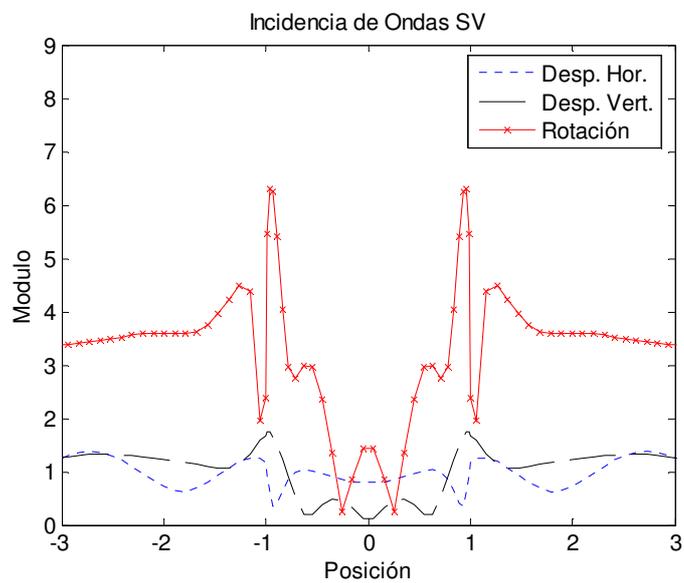
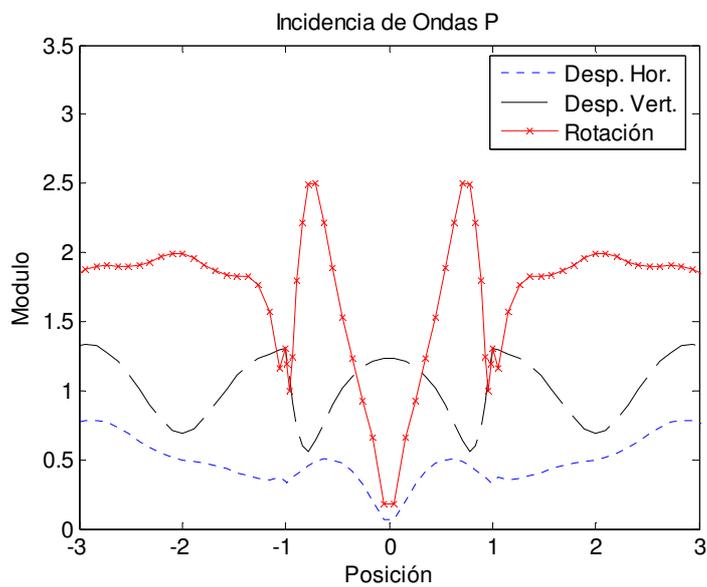


Figura 4.3.1 Respuesta de un cañón semicircular, ($\theta = 0^\circ$).

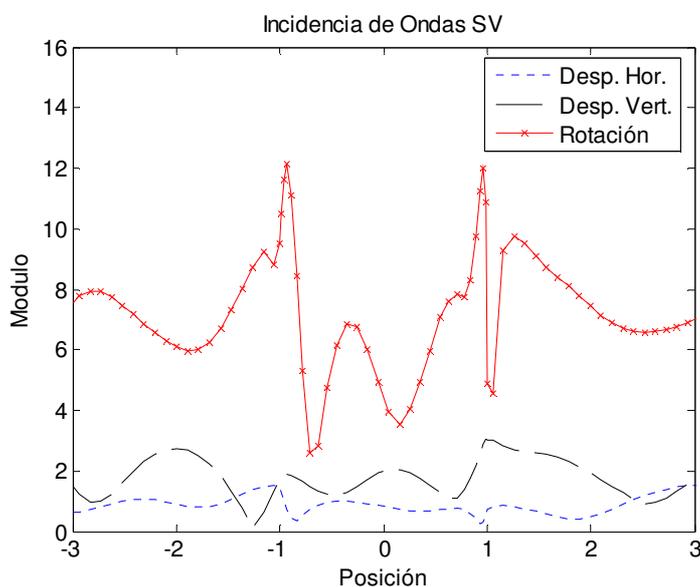
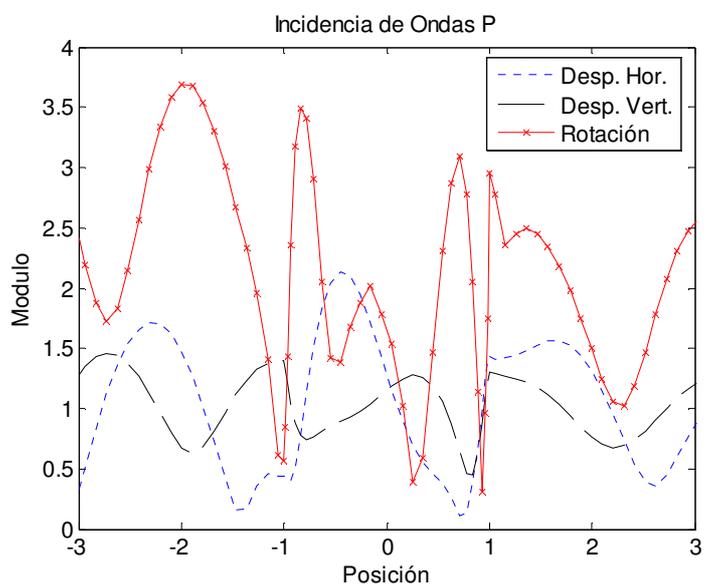


Figura 4.3.2 Respuesta de un cañón semicircular, ($\theta = 15^\circ$).

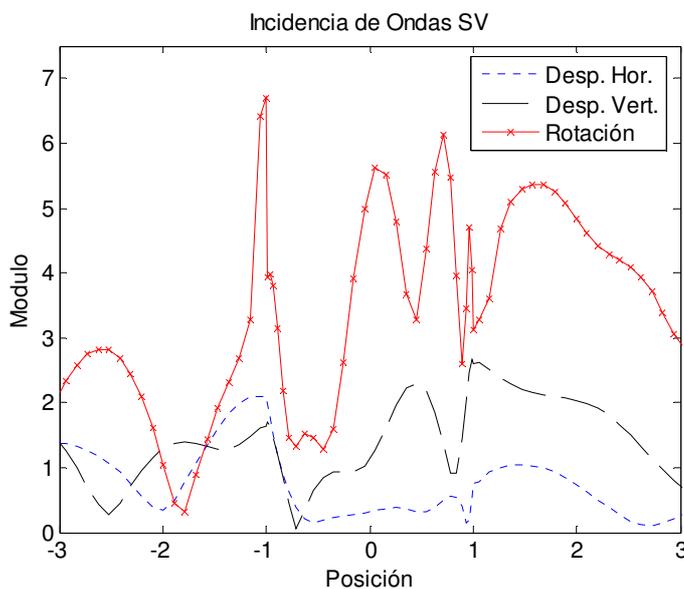
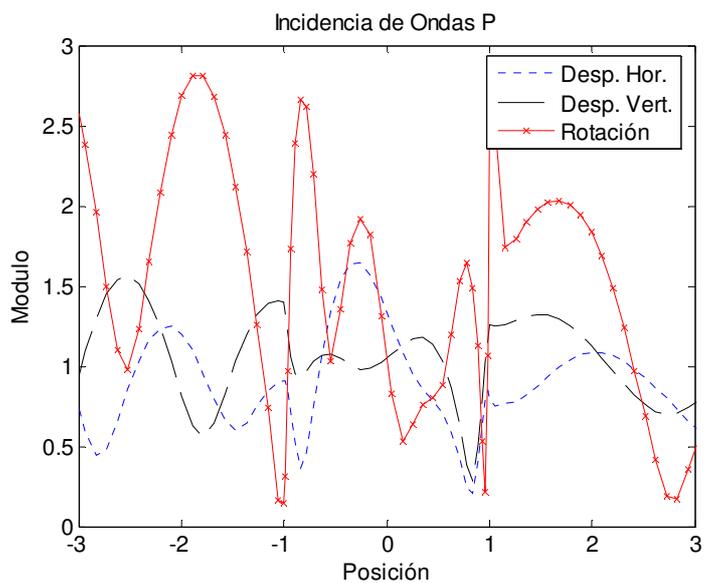


Figura 4.3.3 Respuesta de un cañón semicircular, ($\theta = 30^\circ$).

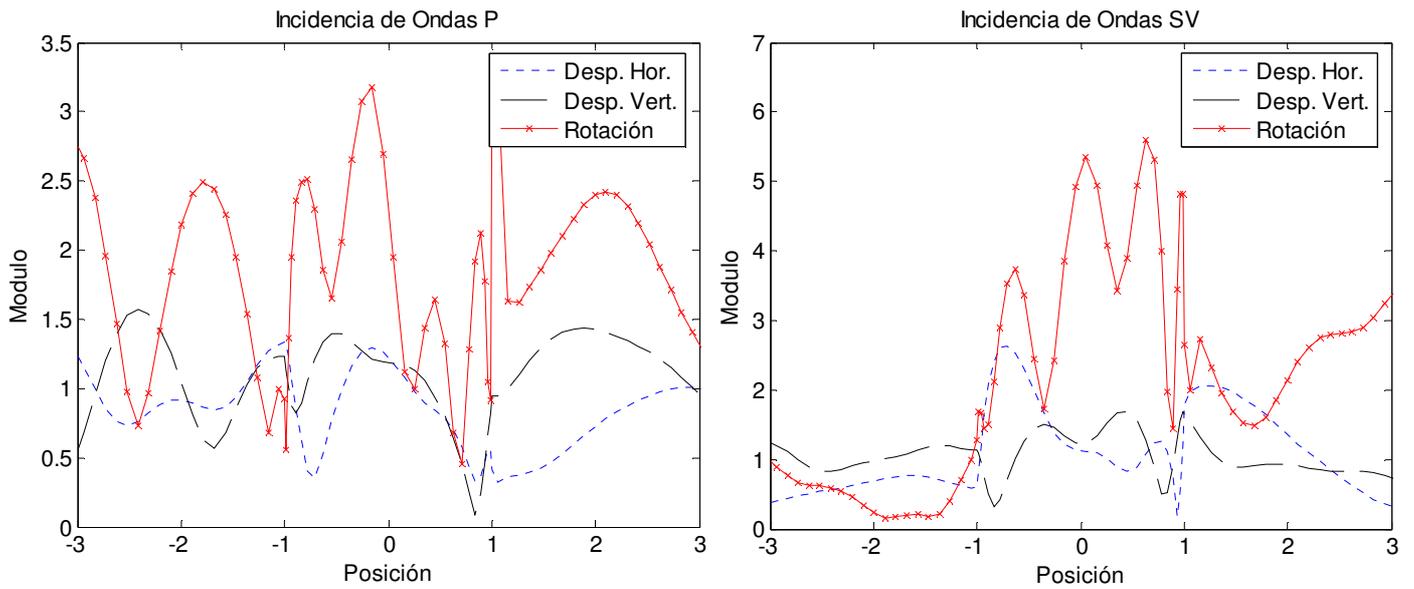


Figura 4.3.4 Respuesta de un cañon semicircular, ($\theta = 45^\circ$).

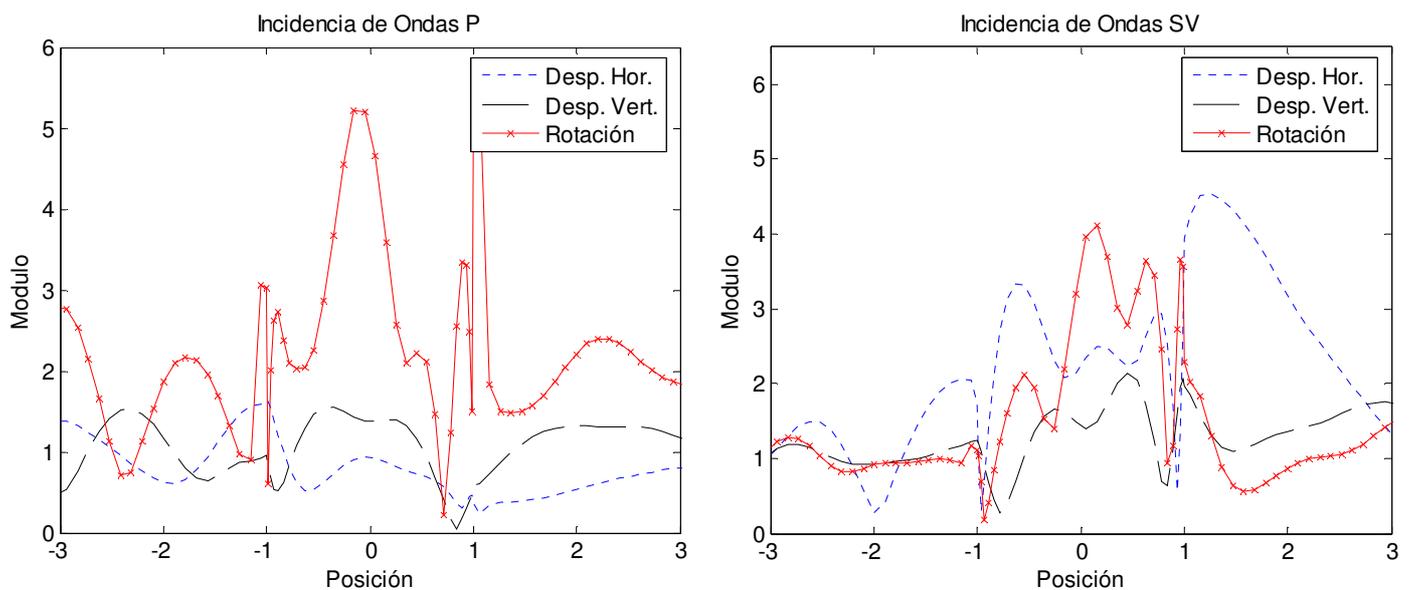


Figura 4.3.5 Respuesta de un cañon semicircular, ($\theta = 60^\circ$).

Las gráficas anteriores y las incluidas en el apéndice muestran claramente que la presencia de una irregularidad topográfica superficial genera amplificación de las rotaciones en la superficie. Estas son mayores, en general, al interior de la irregularidad que en los segmentos planos adyacente. Estas amplificaciones pueden ser hasta de un orden de magnitud con respecto a la rotación en superficie libre.

Se aprecia en las gráficas anteriores saltos de las rotaciones en los bordes del cañon. En algunos casos se observan también variaciones grandes en los desplazamientos en estos puntos, lo cual podría explicar estos saltos en las rotaciones sin embargo en otros casos lo anterior no es cierto y estos podrían deberse a la deficiencia de la actual formulación del IBEM para calcular rotaciones en puntos donde cambia la pendiente de la geometría. A pesar de lo anterior, los valores pico en estas discontinuidades no

superan los valores máximos normalizados, los cuales se presentan en otros puntos de la irregularidad o de los segmentos planos adyacentes a la misma.

Para las ondas SV incidentes a 30, 45 y 60°, se presenta una amplificación en las rotaciones en el flanco opuesto a la incidencia de las ondas.

Los gráficos presentados son coherentes con el hecho de que las rotaciones generadas por las ondas P en todos los ángulos de incidencia, no son tan grandes como los generados por las ondas SV, que son las que generan las rotaciones, de acuerdo con las expresiones vistas en los capítulos 2 y 3 del presente trabajo.

Algo que se observó en casi todos los casos (incluyendo los presentados en el apéndice) es que las mayores amplificaciones de las rotaciones, ante incidencia de ondas SV, se presentó para $\theta = 15^\circ$ (sin tener en cuenta la incidencia vertical y a 45° que no fueron normalizados). Lo anterior es válido tanto al interior de la irregularidad como en la longitud considerada de los flancos horizontales. También es posible apreciar una amplificación de 2 en los desplazamientos verticales la cual

Sería conveniente realizar un estudio paramétrico, empleando la normalización de las rotaciones dada por la expresión 3.19, para montañas y cañones triangulares con ángulos internos entre 60 y 179°, además para ángulos de incidencia entre 0 y 90°. Esto permitiría obtener los valores máximos esperados de rotación ya sea para todas las geometrías triangulares o dependiendo de las variaciones, para diferentes intervalos.

Dado que las ondas de Rayleigh presentan una componente rotacional importante por su misma naturaleza, se calcularon las rotaciones generadas por este tipo de ondas al incidir sobre diferentes configuraciones topográficas en forma de cañón. Los resultados obtenidos se presentan a continuación

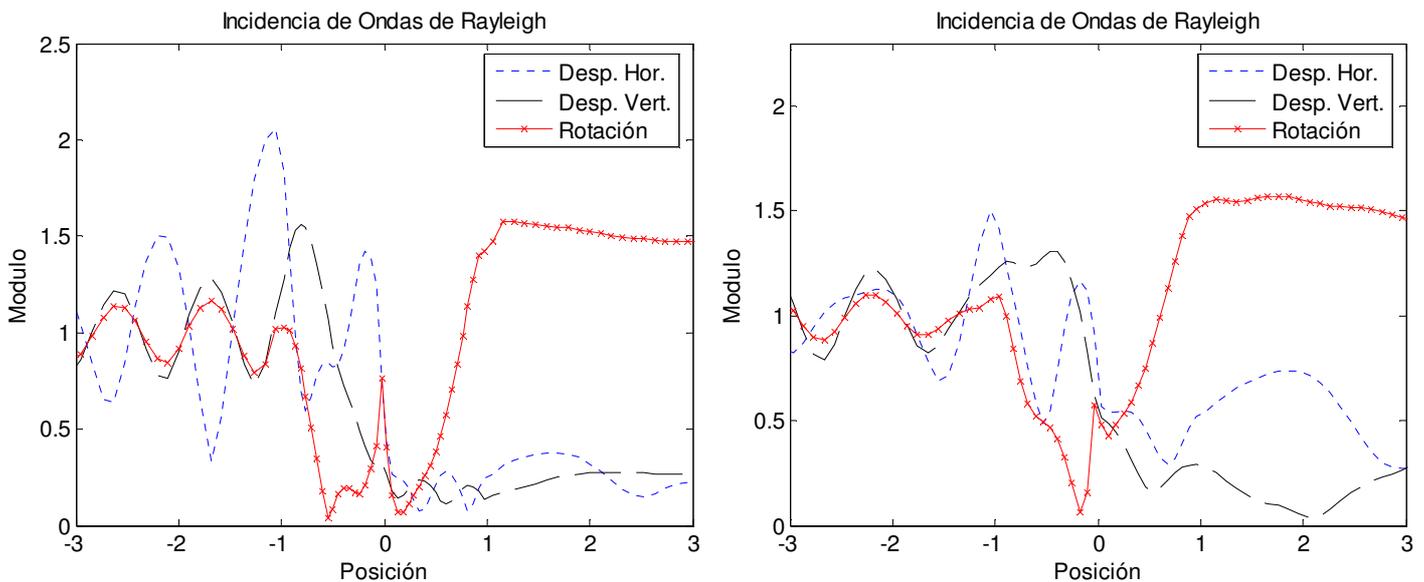


Figura 4.4.1 Respuesta de cañones triangulares de 60° y 90°

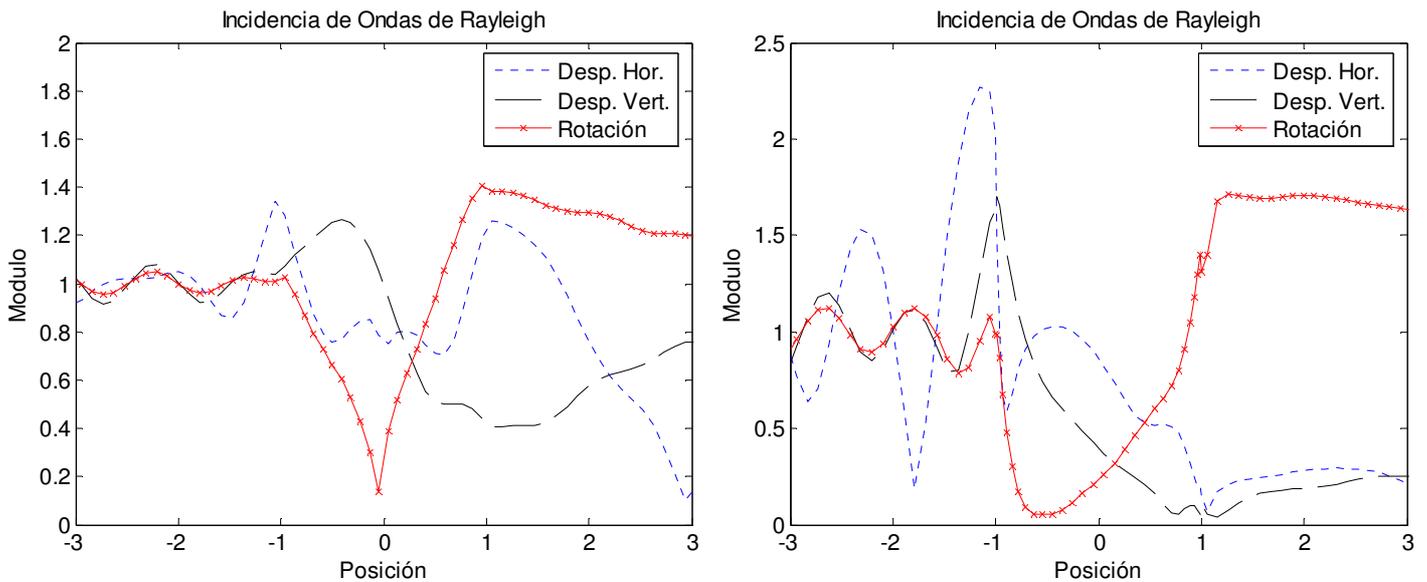


Figura 4.4.2 Respuesta de un cañón triangular de 120° y uno semicircular

En las figuras 4.4.1 y 4.4.2 se aprecia que sin importar la forma de la irregularidad, la amplificación de las rotaciones, para el módulo de Poisson y velocidad de las ondas consideradas, es prácticamente la misma en el lado plano opuesto al flanco de incidencia de las ondas con un valor promedio de 1.5. Estas amplificaciones en las rotaciones van acompañados de desplazamientos pequeños. Esto sugiere que la normalización de las rotaciones tome en cuenta los otros componentes del movimiento. Al interior de la irregularidad se observa un decrecimiento hasta llegar a valores prácticamente nulos.

Las rotaciones ante incidencia de ondas de Rayleigh son igualmente proporcionales a la frecuencia.

Sería de interés realizar un estudio paramétrico de las rotaciones en las geometrías presentadas, ya que estos resultados sumados a las soluciones analíticas exactas podrían presentarse como resultados del tipo “clásico”, los cuales servirían para validar otros métodos. En esta clase de estudios deberían obtenerse gráficas como la 4.1 para ángulos de incidencia entre 0° y 90° . También sería interesante observar el efecto del módulo de Poisson en la respuesta rotacional de las geometrías.

Otro aspecto que podría ser de interés sería el de observar que tan lejos de la irregularidad se generan amplificaciones de las rotaciones, ya que en este trabajo solamente se presentaron resultados hasta distancias horizontales normalizadas de 3 a lado y lado del centro de la irregularidad.

4.2.2 Rotaciones en el Dominio del Tiempo

Se presentan a continuación algunos resultados obtenidos en el dominio del tiempo. Para generarlos se empleó un pulso de Ricker. Se obtuvieron además polarigramas como otra forma de representar al movimiento e inferir las rotaciones. Los polarigramas despliegan el desplazamiento en forma vectorial con el componente horizontal u a lo largo del eje del tiempo y el desplazamiento vertical $-w$ perpendicular a este. Las rotaciones calculadas son consistentes con los polarigramas.

Para los polarigramas se realizó una modificación en la escala vertical para poder apreciar mejor los resultados.

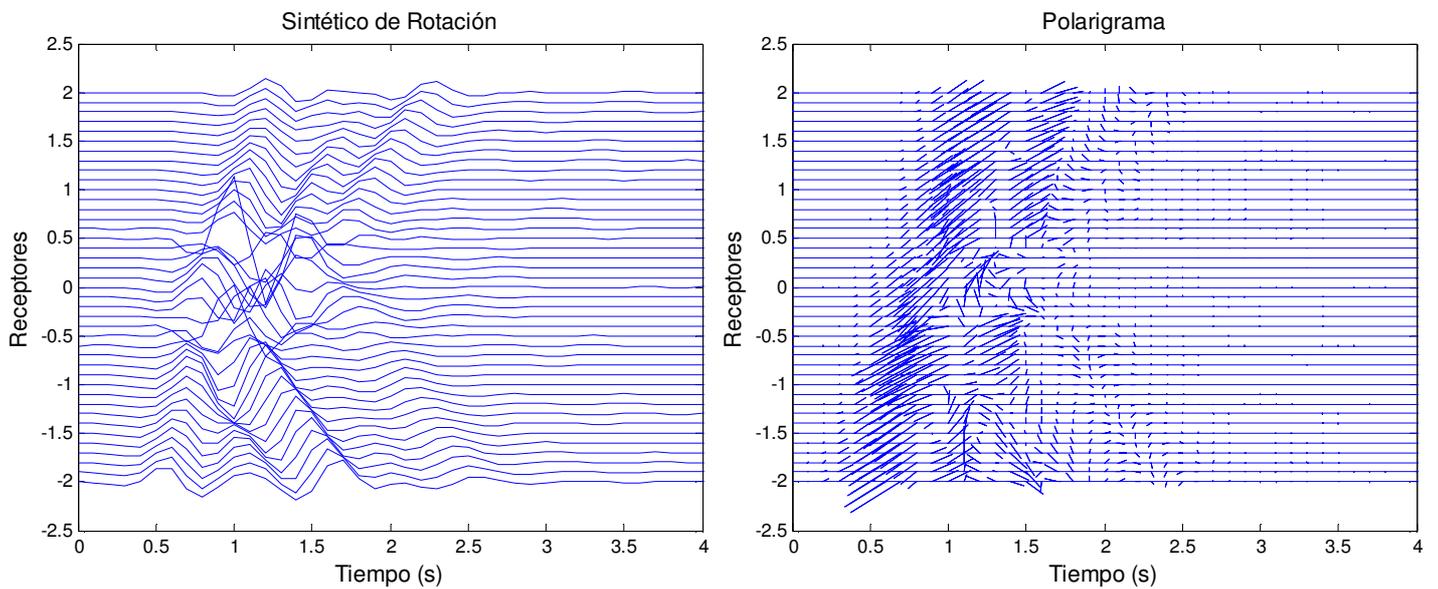


Figura 4.5 Incidencia de ondas P sobre un cañón semicircular, ($\theta = 45^\circ$)

Se observa que al interior de la irregularidad las rotaciones se amplifican con respecto a aquellas que se presentan en los lados adyacentes a la misma, sin embargo el nivel de desplazamientos es similar, como se observa en el polarigrama. En el flanco sobre el cual inciden las ondas se presentan trenes de ondas reflejados con una amplitud mayor que las rotaciones que en el flanco opuesto.

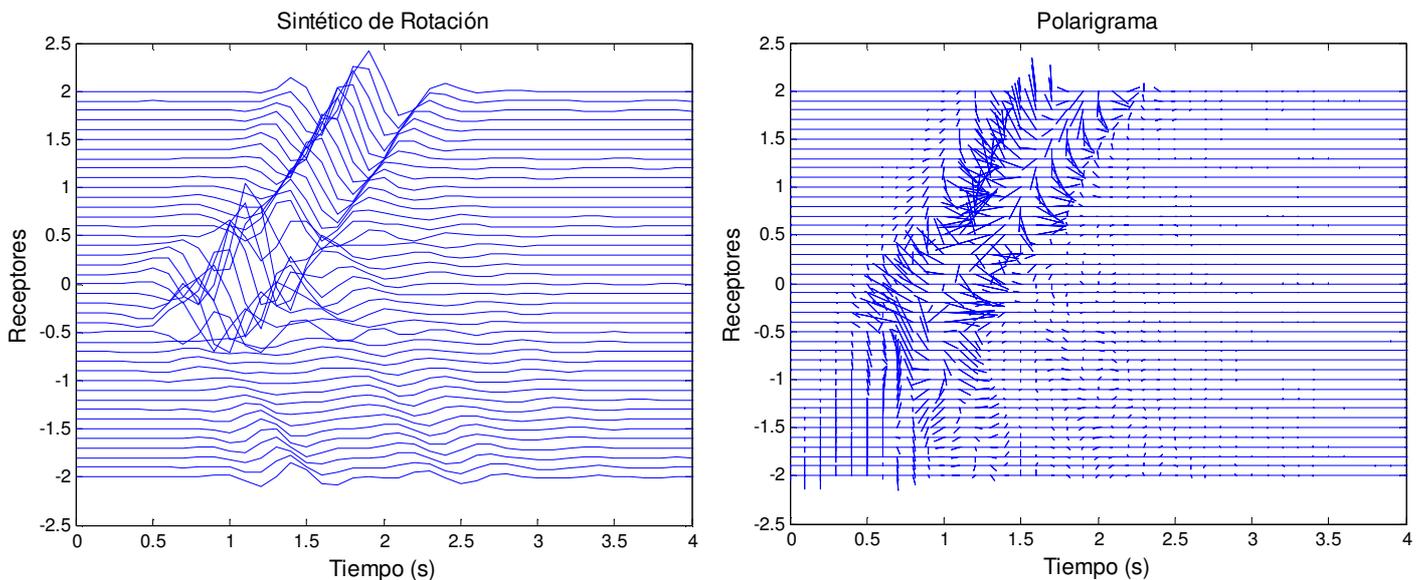


Figura 4.6 Incidencia de ondas SV sobre un cañón semicircular, ($\theta = 45^\circ$)

Se aprecia en la figura 4.6 que al incidir las ondas SV a 45° sobre el lado plano del flanco de incidencia, no se generan rotaciones como era de esperarse, ya que aquí se da una reflexión total de las ondas que únicamente genera desplazamiento vertical.

Posteriormente se observan algunas rotaciones de pequeña magnitud en este lado, pero estas son debidas a la reflexión y difracción de ondas por la irregularidad.

En el dominio de la frecuencia se observó una amplificación de las rotaciones para las ondas SV incidentes a 45° en el flanco opuesto a la incidencia de las ondas, el cual se puede observar claramente en esta grafica. Esta amplificación se genera por difracción y posiblemente por la generación de ondas de Rayleigh.

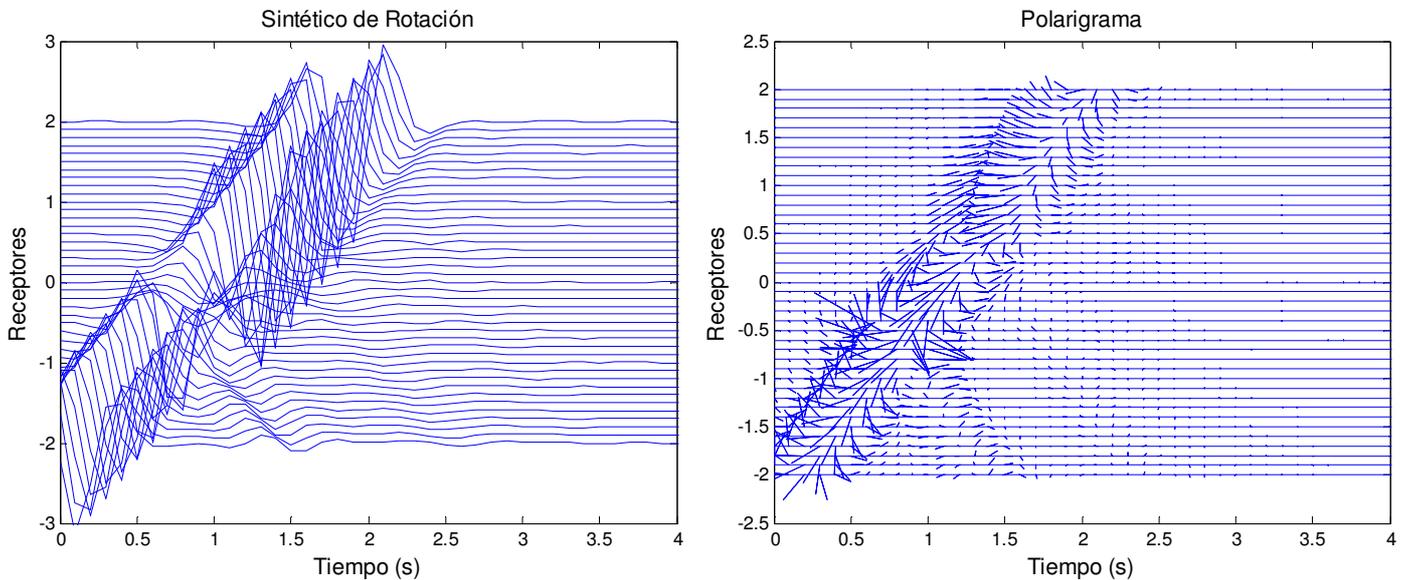


Figura 4.7 Incidencia de ondas de Rayleigh sobre un cañón semicircular

En esta gráfica es posible apreciar que, en comparación con la incidencia de ondas P o S, las rotaciones generadas por las ondas de Rayleigh son de mayor amplitud, lo cual era de esperarse dado el movimiento elíptico retrógrado que inducen estas ondas sobre las partículas en la superficie, el cual es un movimiento que implica directamente una componente rotacional. También se observa el decrecimiento de las rotaciones en la irregularidad observado en los resultados presentados en la frecuencia.

En términos generales se observa que los polarigramas son coherentes con los respectivos sintéticos de rotación.

La formulación actual del IBEM para el cálculo de rotaciones en los vértices de las geometrías permite realizar análisis globales sobre el comportamiento de las mismas. Esto permite estimar niveles máximos de rotación, así como calcular historias de rotación en tiempo, las cuales podrían emplearse como datos de entrada en modelos de sistemas que consideren la rotación.

Los estudios paramétricos propuestos en el caso de la frecuencia se pueden complementar fácilmente con resultados y análisis en el dominio del tiempo.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las rotaciones del terreno pueden influir de manera importante la respuesta sísmica de las estructuras. Esto es particularmente cierto en sitios cercanos a la fuente de ondas sísmicas. Por ahora, excepto por las disposiciones del Eurocode 8, las rotaciones son ignoradas. Los espectros de respuesta deberán incorporar, junto con disposiciones sobre interacción suelo-estructura, los efectos de las rotaciones.

En este trabajo se estudió el cálculo del movimiento rotacional del terreno en la superficie de un semiespacio considerando los efectos de la irregularidad topográfica. Se demostró que es posible emplear una representación integral, como la del método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM por sus siglas en inglés), para realizar el cálculo directo de la rotación.

A partir del cálculo de las derivadas de la función de Green de desplazamiento se calculó el tensor de Rotaciones de Green y se obtuvo el aporte de la singularidad cuando el punto de evaluación está en la frontera misma. Esto evitando la evaluación directa de la integral sobre el segmento de la discretización y realizándola en la vecindad del punto, de forma similar a como se hace para el cálculo de tracciones empleando este método.

El aporte de la singularidad a la rotación está fuertemente condicionado por la densidad de fuerza empleada por el método, la cual al variar de un segmento a otro de la discretización, según la formulación empleada del método, puede inducir variaciones importantes en las rotaciones en los puntos donde haya grandes variaciones de la densidad de fuerza.

La formulación actual del IBEM, para el cálculo de rotaciones, presenta problemas en los vértices de las geometrías. Al parecer estos problemas están relacionados con las discontinuidades de las densidades de fuerza en los puntos mencionados.

La superposición matricial del campo difractado de rotaciones para ondas P, SV y SH en el caso 2D, presenta una estructura muy similar a la respuesta rotacional difractada en el caso 3D. Lo anterior permitiría la estimación de rotaciones en topografías tridimensionales con ciertas simetrías, a partir del cálculo de las rotaciones en modelos bidimensionales.

Las expresiones desarrolladas para el cálculo de rotaciones empleando el IBEM, al igual que las demás expresiones del método, permiten una interpretación directa de las cantidades involucradas. Además dada su generalidad permite su implementación casi directa en otros códigos escritos para el método. Esto permitiría obtener como resultado adicional, las rotaciones en problemas 2 y 3D de por ejemplo medios estratificados, valles aluviales, y medios con discontinuidades (grietas) entre otros.

Se propuso una normalización para las rotaciones la cual tiene en cuenta la frecuencia, la amplitud de la onda incidente y una dimensión característica de la irregularidad. Esta normalización permitió estimar la rotación máxima que se puede esperar en algunas geometrías superficiales para las cuales se contaba con soluciones analíticas exactas del campo de desplazamientos y ahora de las rotaciones.

La rotación en la superficie del semiespacio depende linealmente del número de onda y consecuentemente de la frecuencia. Dicho número de onda corresponde al de las ondas de corte, por lo cual se puede concluir que son estas las que generan la rotación, junto con las ondas de Rayleigh. En el caso de las ondas P, la conversión de parte de éstas en ondas de corte es la que genera las rotaciones.

En los casos analizados de irregularidades geométricas superficiales, se apreció en todos que la irregularidad genera amplificación de las rotaciones ante la incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh, llegándose a incrementos hasta de un orden de magnitud en algunos de los casos.

Para evitar los saltos observados en las rotaciones de las zonas cercanas a los vértices de la geometría, se recomienda realizar una modificación a la formulación actual del IBEM, en la cual la densidad de fuerza, empleada por el método, al interior de cada segmento presente una cierta variación (lineal o cuadrática) que permita la continuidad de la densidad a lo largo de toda la superficie. También podría considerarse el suavizar un poco las geometrías en dichas zonas.

Se propone realizar comparaciones de los resultados obtenidos con el IBEM con aquellos obtenidos a partir de otros métodos. Lo anterior con el fin de lograr una validación más adecuada del IBEM y tener la posibilidad de determinar si en algunos casos los resultados obtenidos son reales o son producto de las inconsistencias en la formulación del método para el cálculo de rotaciones.

Una vez que se tenga confianza en que el cálculo de las rotaciones empleando el IBEM es correcto en geometrías sencillas, existe la posibilidad de emplearlo para realizar cálculos de casos donde se tienen ya algunos datos experimentales y que no han podido ser interpretados en su totalidad. Esto permitiría en alguna medida determinar si las incoherencias provienen de los aparatos de medición o en realidad se deben a aspectos que no han sido tenidos en cuenta. Adicionalmente permitiría estimar historias de rotación para casos donde no se cuenta con datos experimentales. Esto serviría como parámetro de entrada en los modelos por ejemplo de interacción suelo estructura o en aquellos que consideran la rotación en la base del sistema como un parámetro de entrada (como lo plantean Kalkan y Graizer, 2007) a su vez permitiría explicar el comportamiento de algunas estructuras, sensibles a cabeceo o torsión, durante algunos eventos sísmicos. Además permitiría corregir registros traslacionales de aceleración contaminados por rotación con el fin de obtener datos de desplazamiento a partir de doble integración (Boroschek y Legrand 2006).

Es importante continuar con la investigación en este campo ya que es un tema de actualidad, en el cual existe un gran interés a nivel mundial. Se podrían realizar contribuciones significativas.

RECONOCIMIENTOS

Agradezco los valiosos comentarios y sugerencias del Dr. Juan José Pérez Gavilán y del Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos en la revisión de este trabajo.

Este trabajo fue apoyado parcialmente por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM mediante el proyecto PAPIIT IN114706, del CONACYT y del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Durante la realización del presente trabajo el Dr. Francisco Sánchez Sesma y el Ing. Alejandro Cadena Isaza, ingresaron al "International Working Group on Rotational Seismology", dentro del campo de estudio teórico de los movimientos rotacionales. Como integrantes de este grupo parte del presente trabajo fue presentado en el "First International Workshop on Rotational Seismology and Engineering Applications" llevado a cabo en Menlo Park, California, entre el 17 y el 19 de septiembre del año 2007.

REFERENCIAS

Abramowitz, M y Stegun, IA (1972), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, 9a ed, Dover Publications Inc., New York

Boroschek, RL y Legrand, D (2006), Tilt Motion Effects on the Double-Time Integration of Linear Accelerometers: an Experimental Approach, *Bulletin of Seismological Society of America* **96**(6), 2072-2089.

Castellani, A y Boffi, G (1986), Rotational Components of the Surface Ground Motion During Earthquake, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **14**, 751-767.

Kalkan, E y Graizer, V (2007), Multi-Component Ground Motion Response Spectra for Coupled Horizontal, Vertical, Angular Acceleration and Tilt, *ISET Journal of Earthquake Technology – Special Issue on “Response Spectra”* **44** (22), 1-33.

Luzón Martínez, F (1995), Determinación de la respuesta sísmica de estructuras geológicas superficiales mediante el método indirecto de elementos de frontera, tesis de doctorado, *Departamento de Física Aplicada, Universidad de Almería*. España, 216 pp

Pérez Rocha, LE (1987), Difracción de ondas sísmicas por depósitos tridimensionales de suelos blandos, tesis de licenciatura, *Facultad de Ingeniería, UNAM*. México, DF, 62 pp

Richter, CF (1958), *Elementary Seismology*, W. H. Freeman and Company Inc., California,

Sánchez-Sesma, FJ y Campillo, M (1991), Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bulletin of Seismological Society of America* **81**, 2234-2253.

Takeo, M y Ito, HM (1997), What can be learned from rotational motions excited by earthquakes?, *Geophysical Journal International* **129**, 319-329

Trifunac, MD (1982), A note on rotational components of earthquake motions on ground surface for incident body waves, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **1**(1), 11-19.

APÉNDICE

En este apéndice se incluyen algunos resultados adicionales a los presentados en el capítulo 4 para otras geometrías consideradas.

En la mayoría de las gráficas presentadas aquí, se observan saltos en los puntos de cambio de pendiente en la geometría, por esta razón, en algunos casos se suprimieron los valores que de acuerdo con la tendencia en la vecindad de los puntos, no eran correctos.

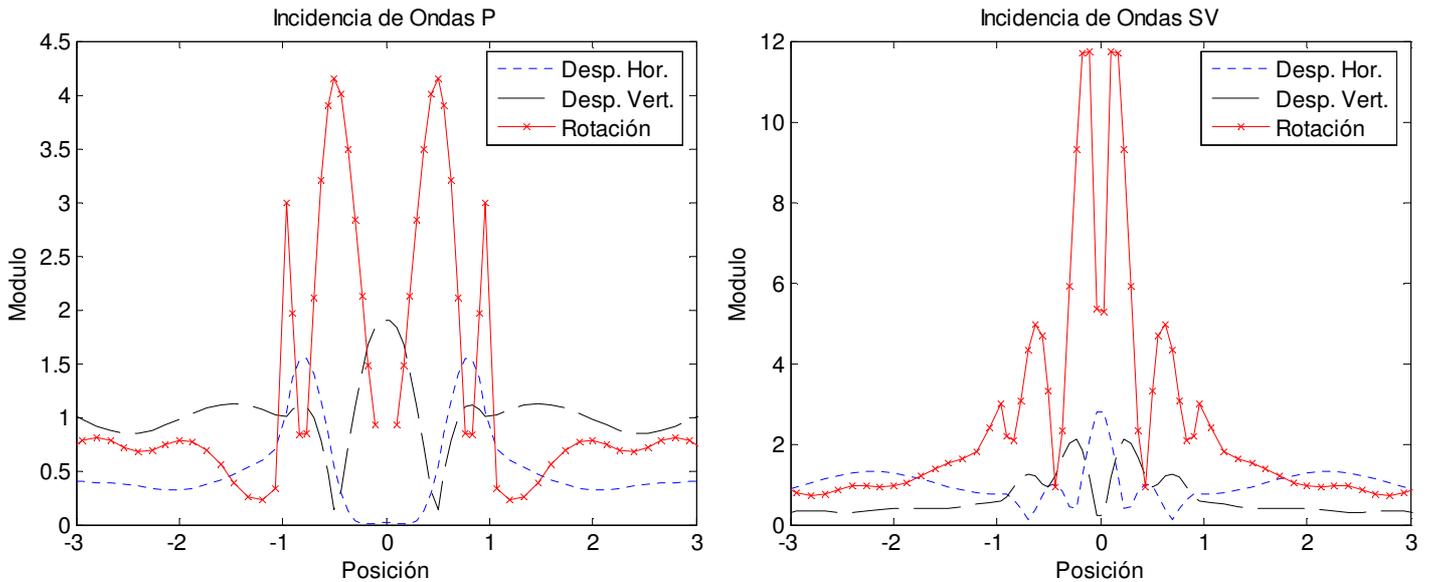


Figura A.1.1 Respuesta de una montaña triangular de 60° , ($\theta = 0^\circ$)

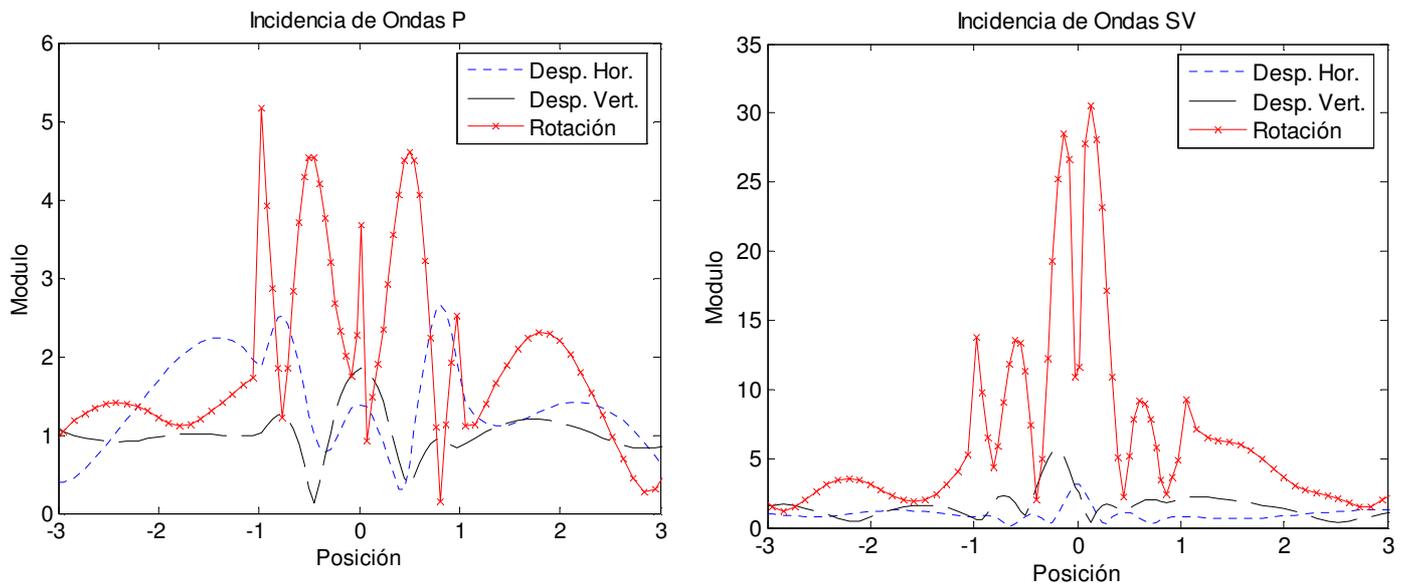


Figura A.1.2 Respuesta de un montaña triangular de 60° , ($\theta = 15^\circ$).

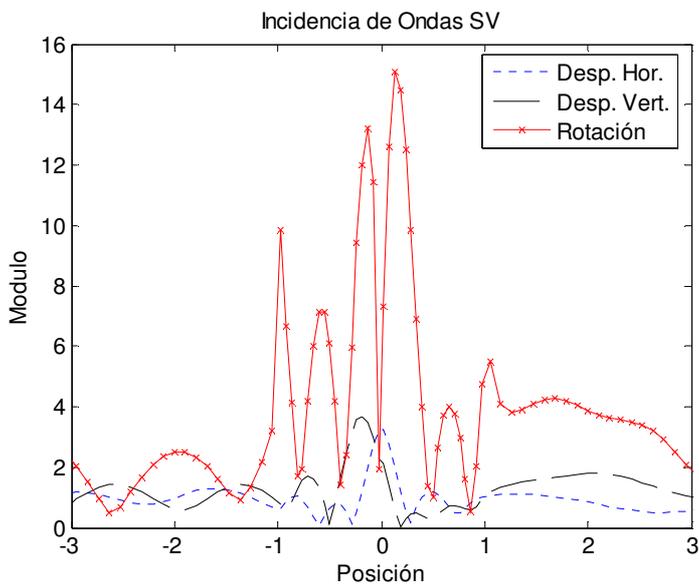
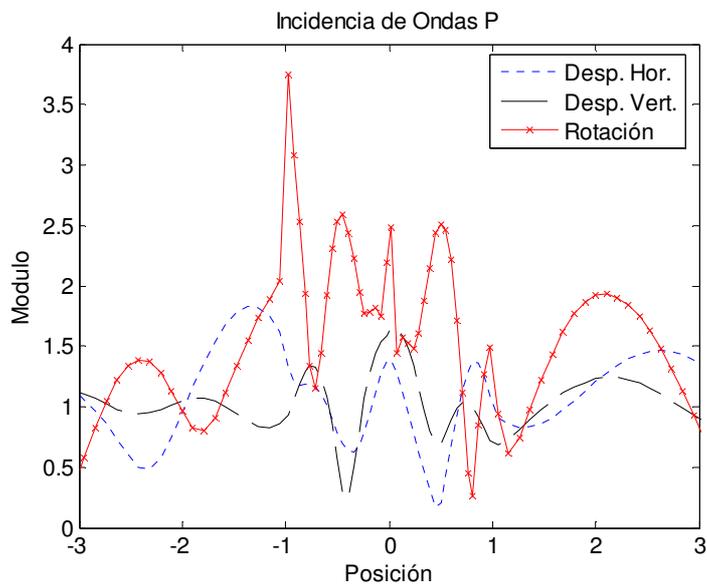


Figura A.1.3 Respuesta de un montaña triangular de 60°, ($\theta = 30^\circ$).

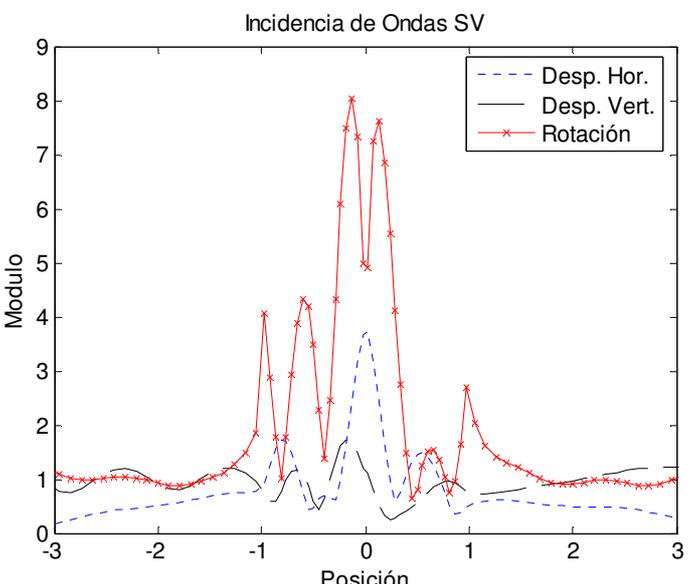
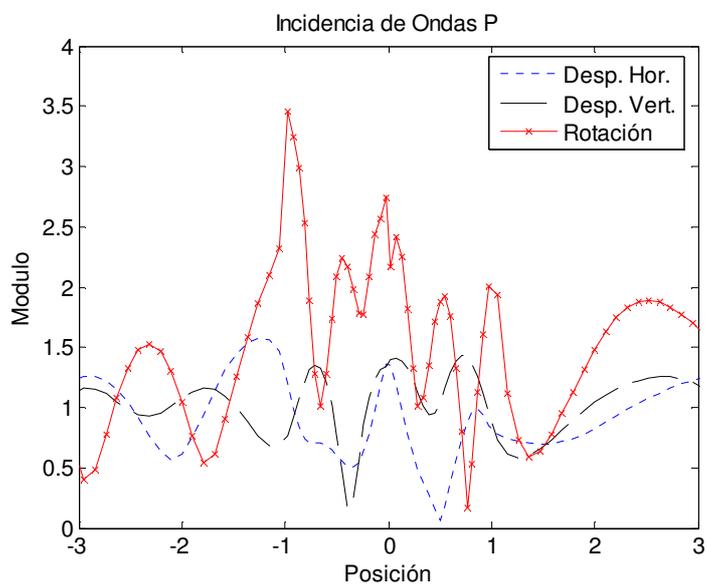


Figura A.1.4 Respuesta de un montaña triangular de 60°, ($\theta = 45^\circ$).

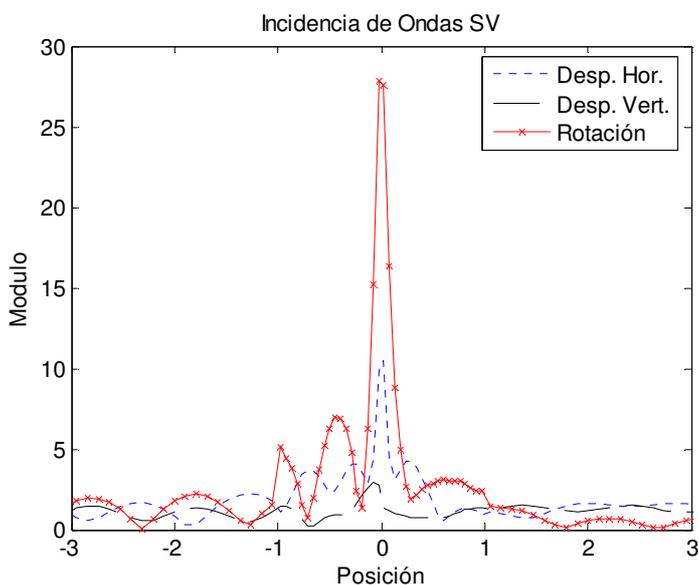
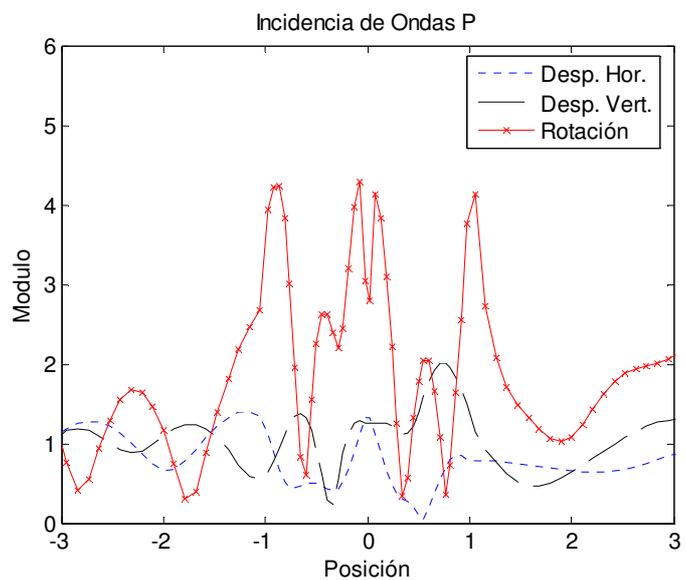


Figura A.1.5 Respuesta de un montaña triangular de 60° , ($\theta = 60^\circ$).

En general, para los ángulos de incidencia considerados en esta geometría, no se presenta una gran amplificación de las rotaciones en los segmentos planos laterales, a diferencia de lo que sucede al interior de la irregularidad superficial. Se observa también que las mayores amplificaciones se presentan con la incidencia de las ondas SV, lo cual era de esperarse debido a que son estas ondas las que realmente inducen rotaciones en el terreno.

En esta cuña los ángulos de 15° y 60° de incidencia generan las mayores amplificaciones de las rotaciones, tanto en el caso de las ondas P y SV. Son sorprendentes las amplificaciones del caso SV para estos dos ángulos las cuales son de 20 veces con respecto a la de la superficie libre. En el caso de la gráfica 4.3.5, el pico central para las ondas SV es posible que no sea tan alto y que se deba a un efecto del cambio en la pendiente de la geometría.

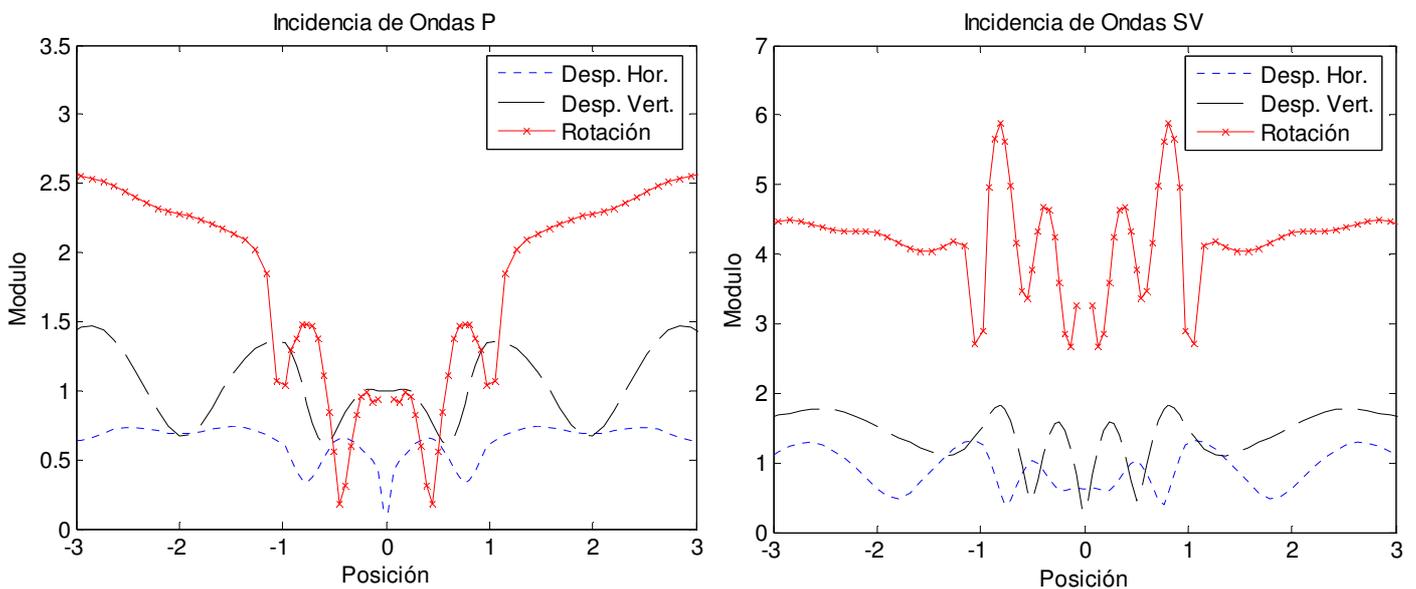


Figura A.2.1 Respuesta de un cañón triangular de 60° , ($\theta = 0^\circ$).

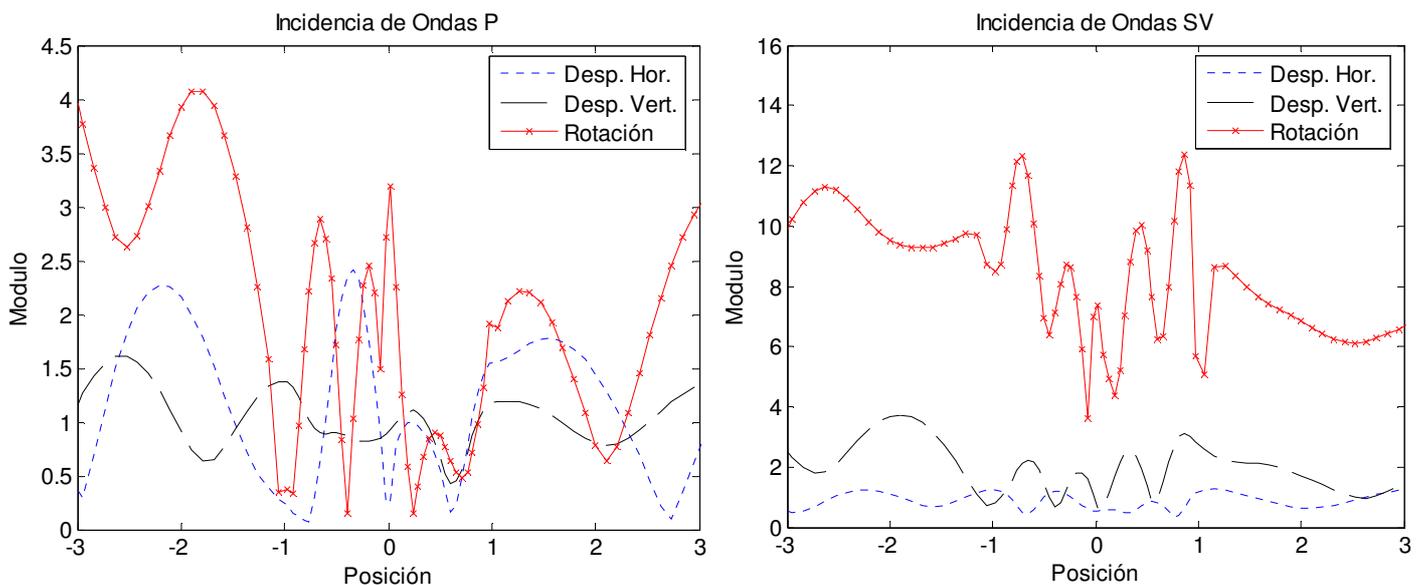


Figura A.2.2 Respuesta de un cañón triangular de 60° , ($\theta = 15^\circ$).

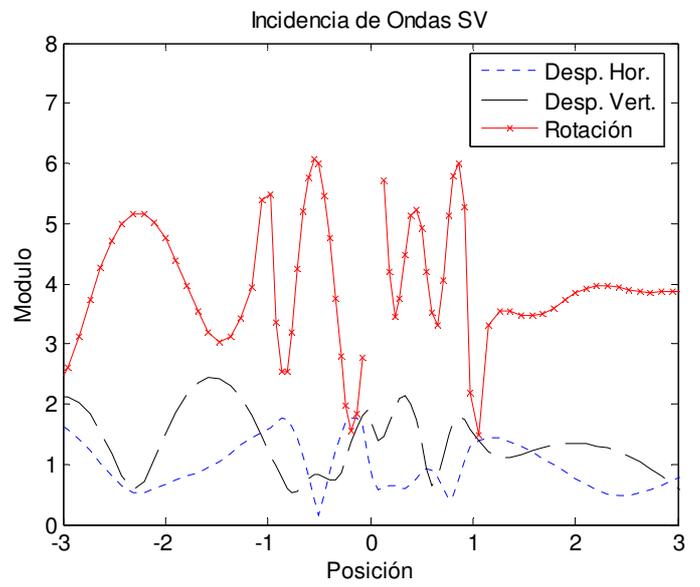
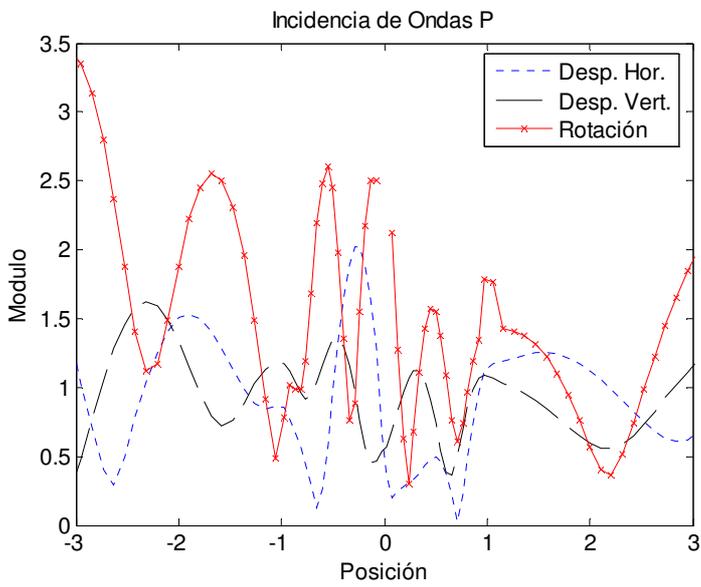


Figura A.2.3 Respuesta de un cañon triangular de 60°, ($\theta = 30^\circ$).

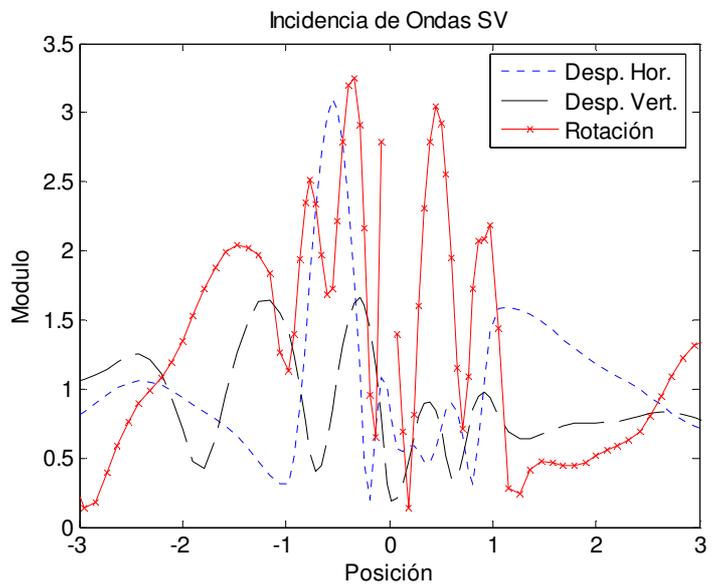
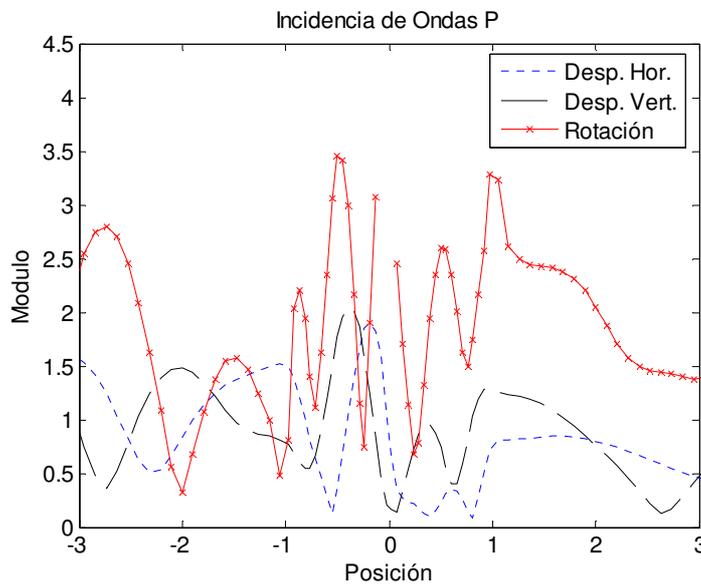


Figura A.2.4 Respuesta de un cañon triangular de 60°, ($\theta = 45^\circ$).

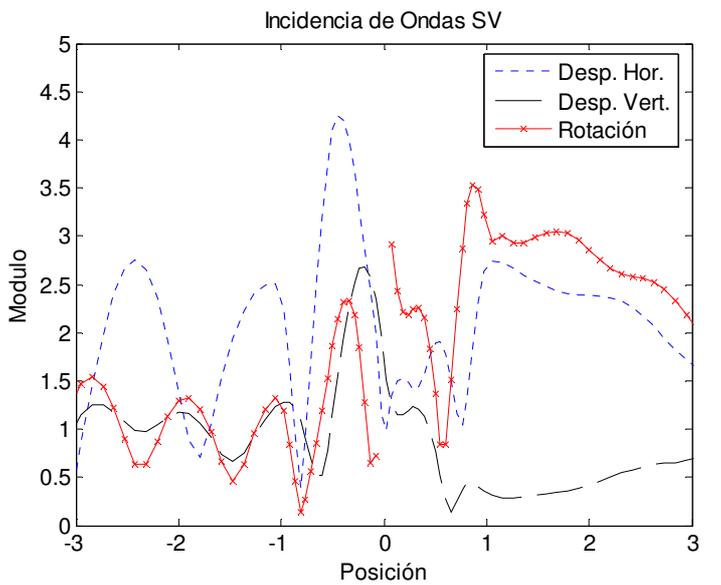
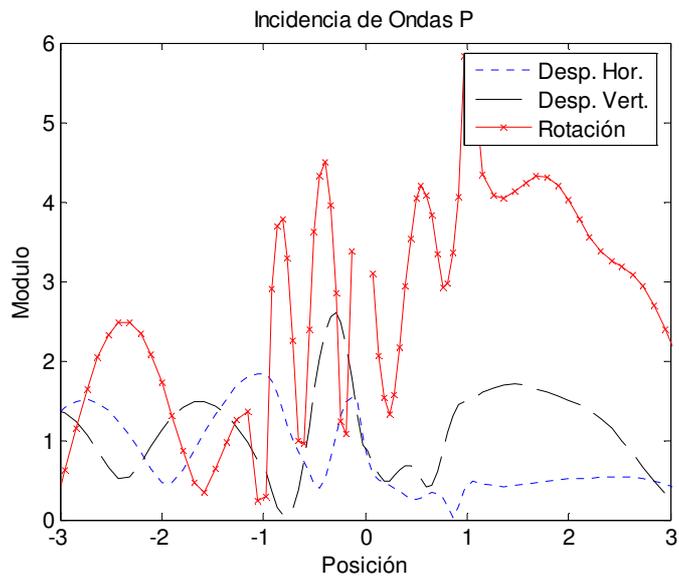


Figura A.2.5 Respuesta de un cañon triangular de 60°, ($\theta = 60^\circ$).

Comparando esta geometría con la anterior, la única diferencia es que una se encuentra sobre el nivel de la superficie y la otra está bajo este nivel. En el segundo caso la amplificación de la rotación generada por las ondas P en los lados planos adyacentes a la irregularidad, es más importante que la generada al interior de la irregularidad misma para los ángulos menores (15 y 30°).

En esta geometría, para los ángulos de incidencia mayores (45 y 60°) la amplificación de las rotaciones es menor, mientras la mayor amplificación se presenta ante la incidencia a 15°, con un promedio en la irregularidad y los lados planos de 8

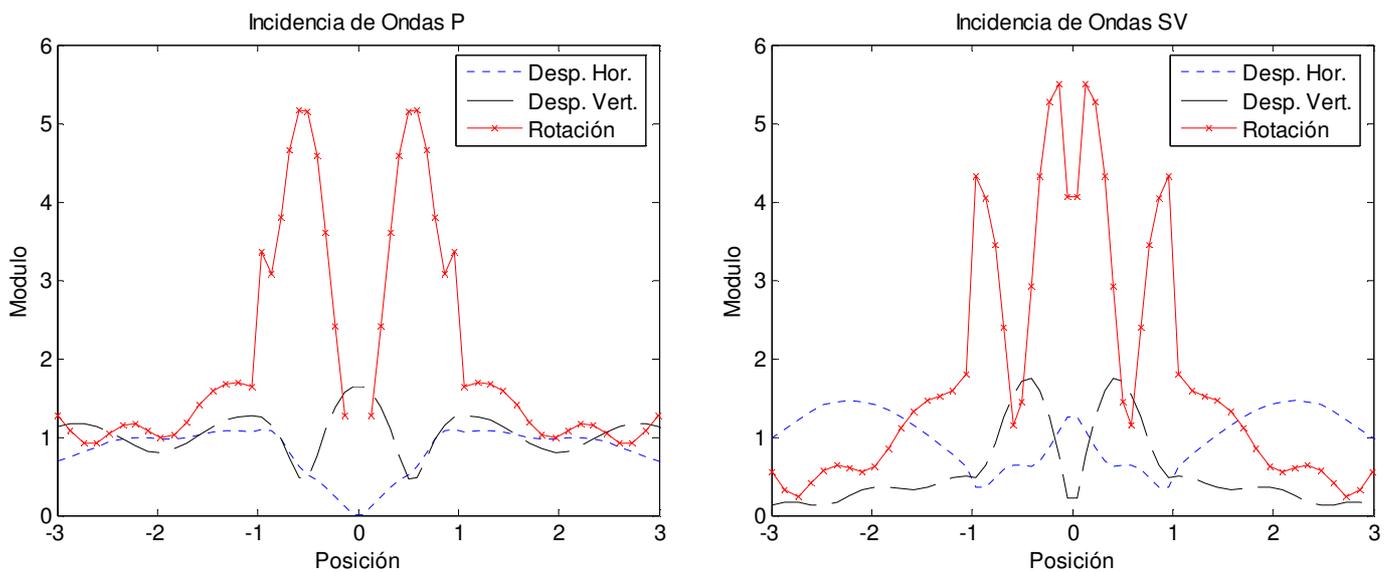


Figura A.3.1 Respuesta de una montaña triangular de 90°, ($\theta = 0^\circ$)

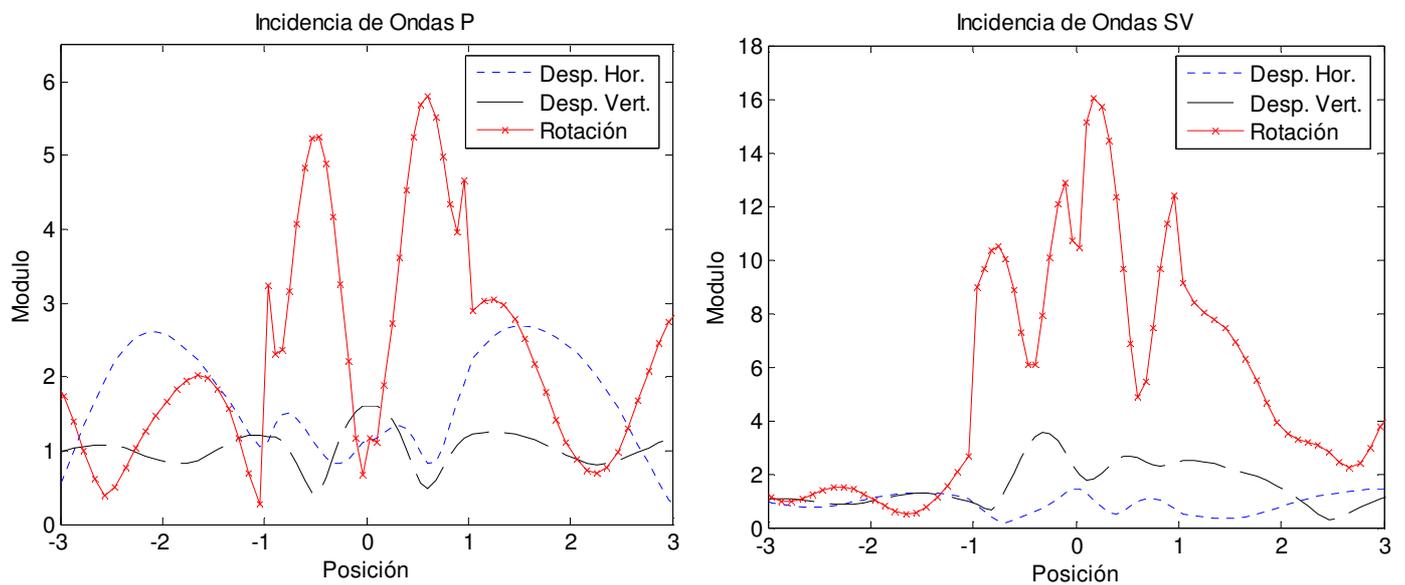


Figura A.3.2 Respuesta de una montaña triangular de 90°, ($\theta = 15^\circ$).

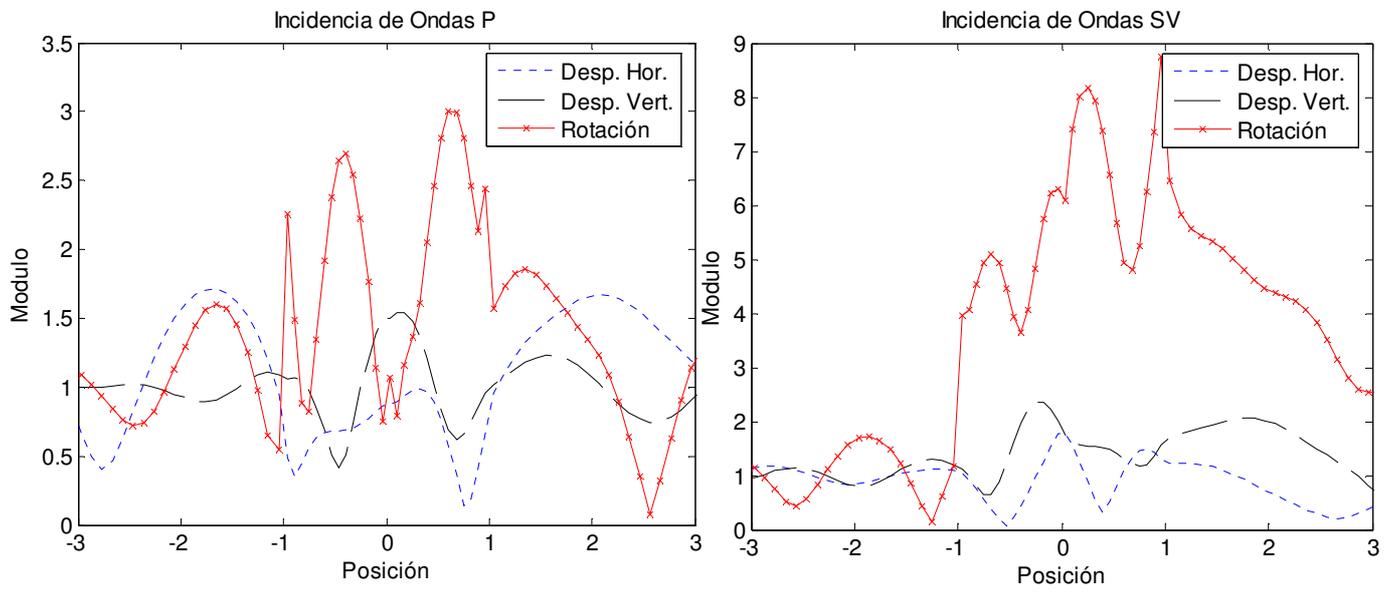


Figura A.3.3 Respuesta de una montaña triangular de 90° , ($\theta = 30^\circ$).

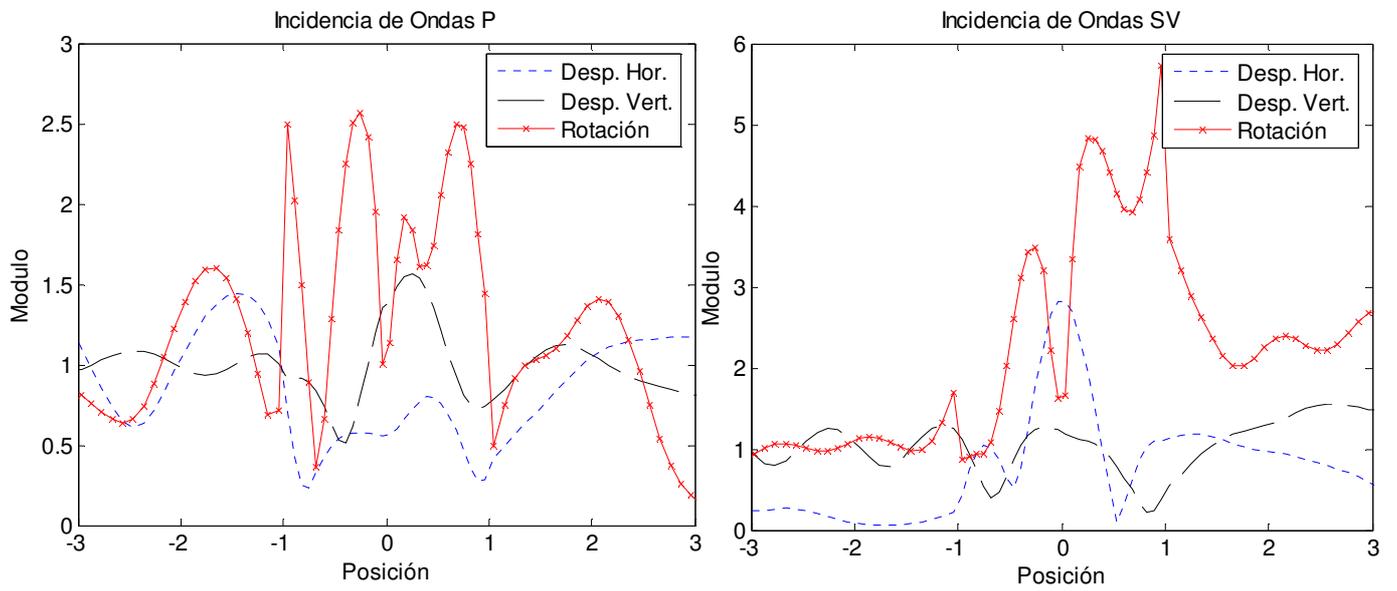


Figura A.3.4 Respuesta de una montaña triangular de 90° , ($\theta = 45^\circ$).

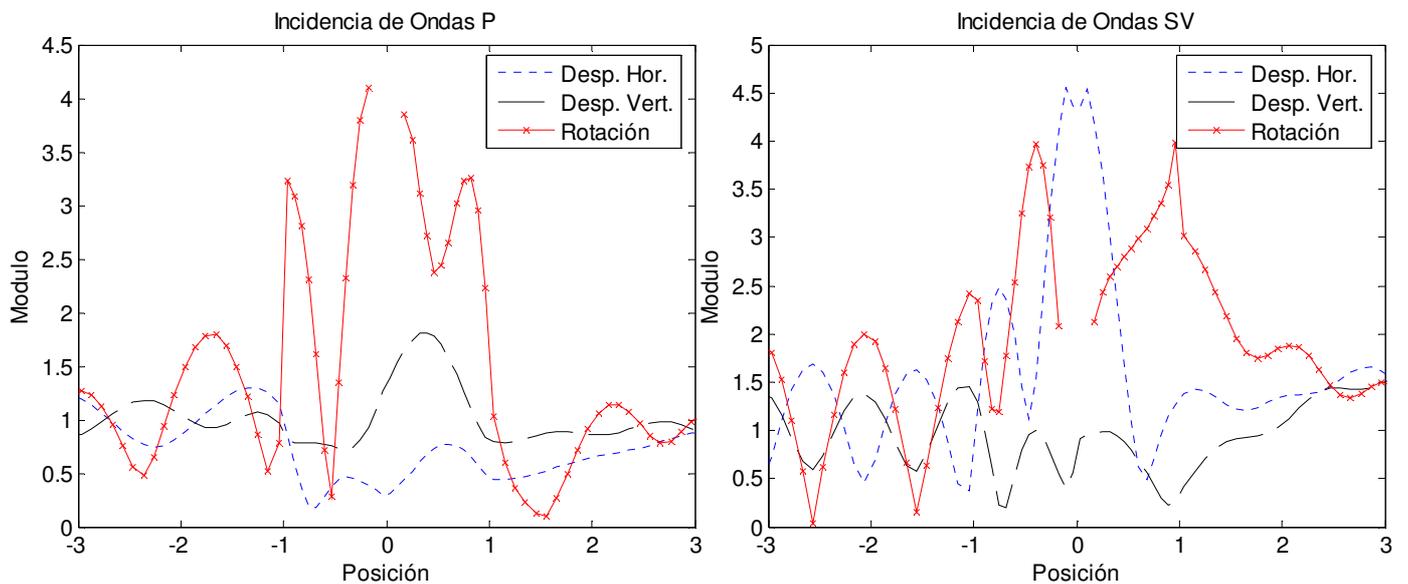


Figura A.3.5 Respuesta de una montaña triangular de 90° , ($\theta = 60^\circ$).

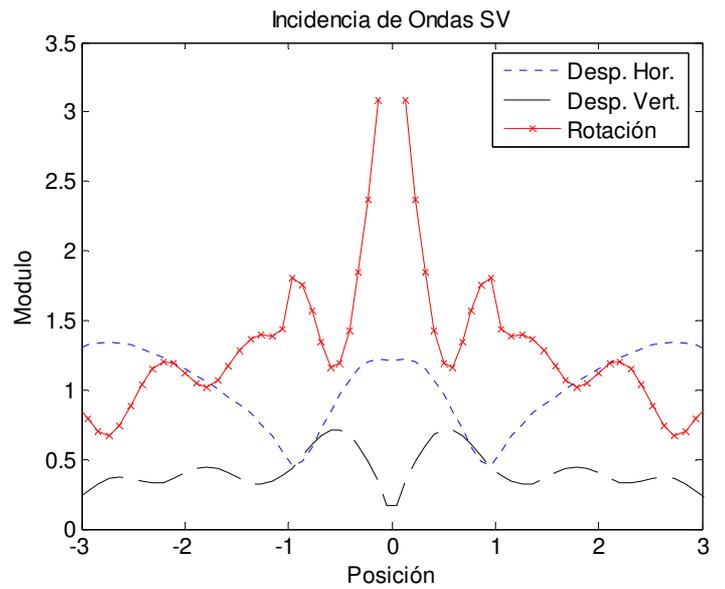
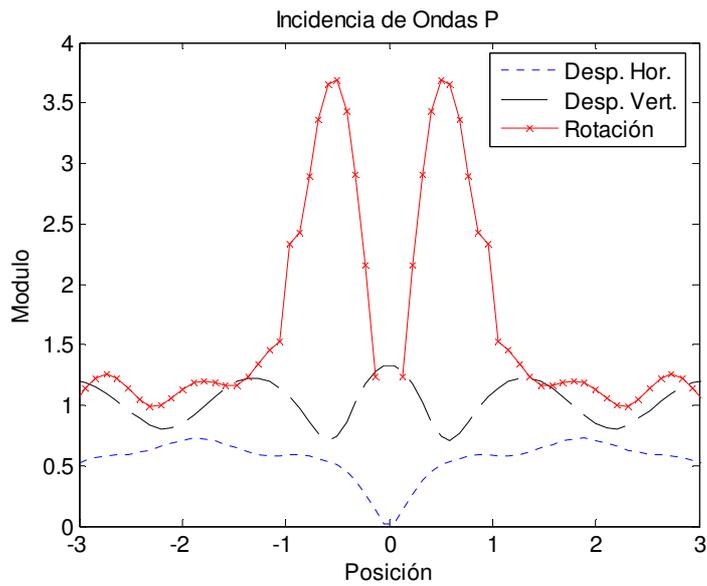


Figura A.4.1 Respuesta de una montaña triangular de 120° , ($\theta = 0^\circ$)

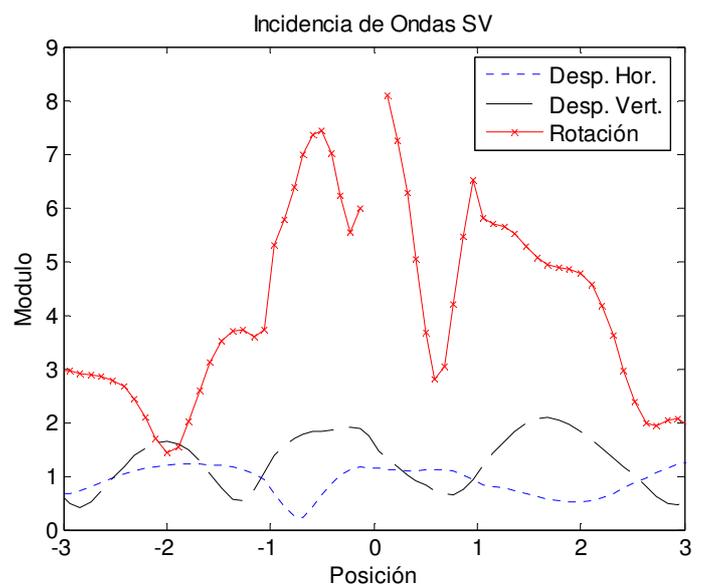
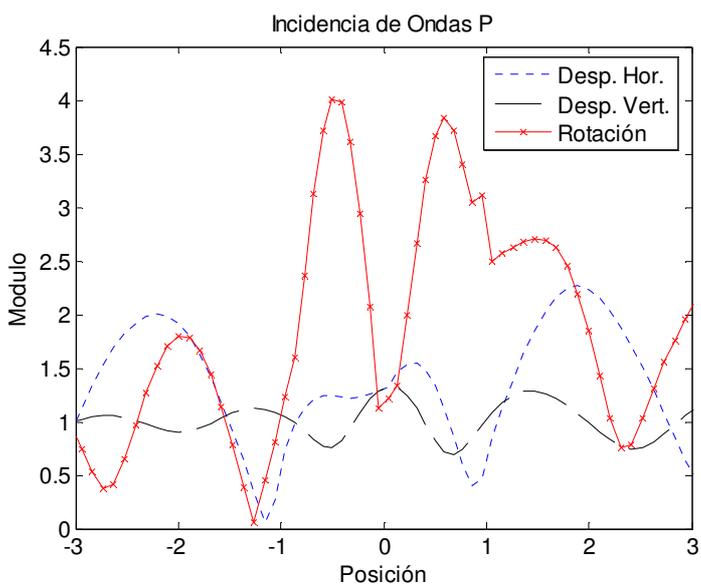


Figura A.4.2 Respuesta de una montaña triangular de 120° , ($\theta = 15^\circ$)

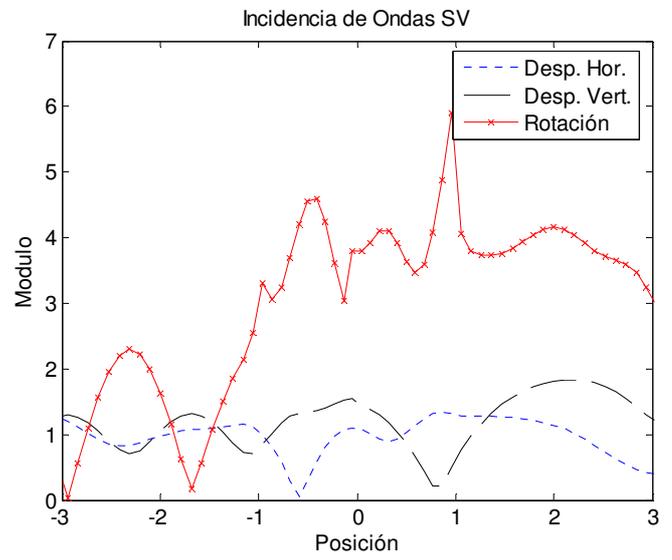
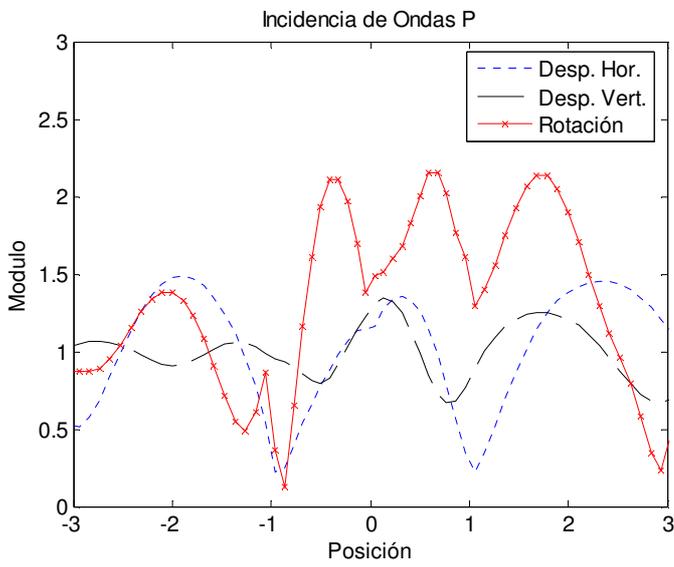


Figura A.4.3 Respuesta de una montaña triangular de 120° , ($\theta = 30^\circ$)

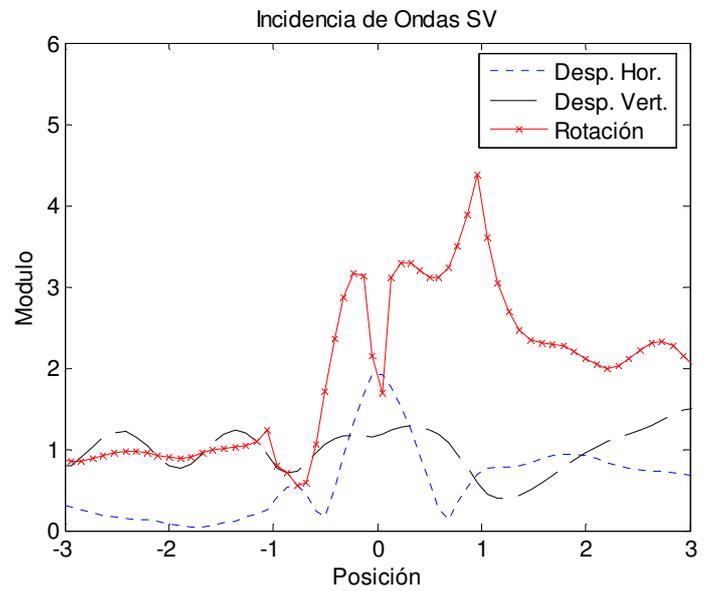
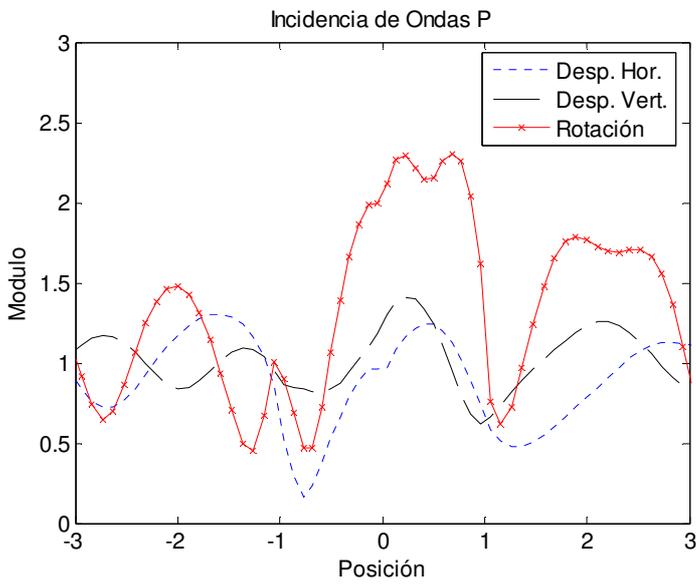


Figura A.4.4 Respuesta de una montaña triangular de 120° , ($\theta = 45^\circ$)

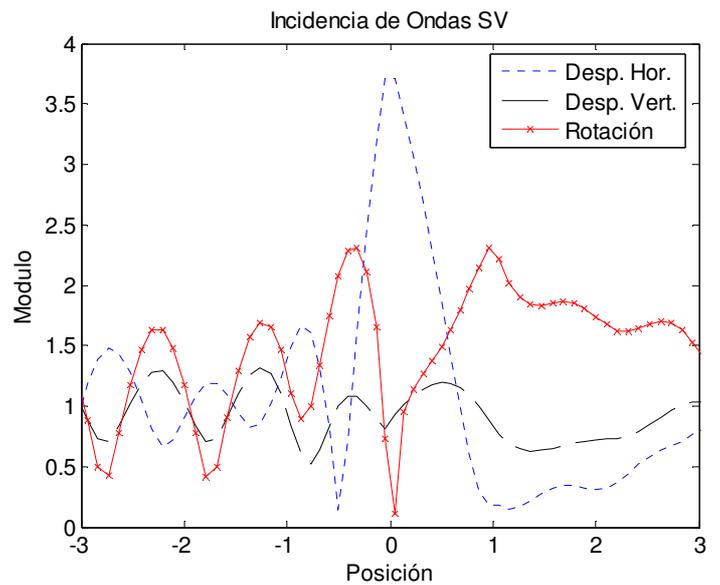
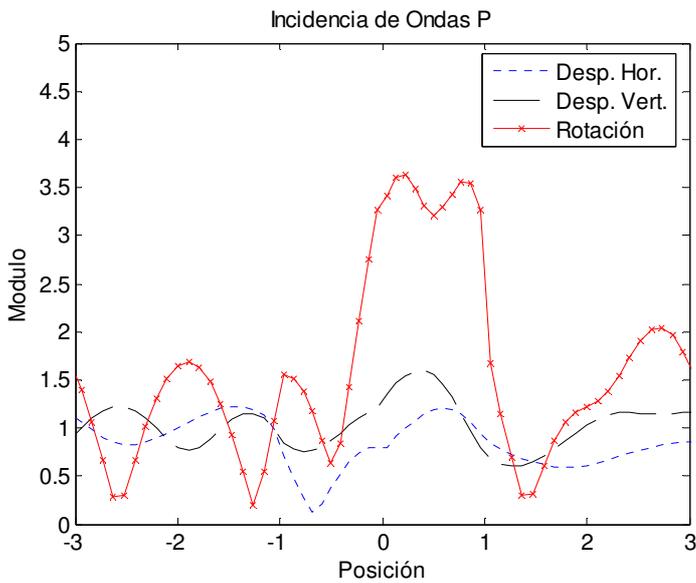


Figura A.4.5 Respuesta de una montaña triangular de 120° , ($\theta = 60^\circ$)

Se presentan además en este apéndice algunos sintéticos de rotación y polarigramas complementarios a los mostrados en el capítulo 4, generados para otros ángulos de incidencia.

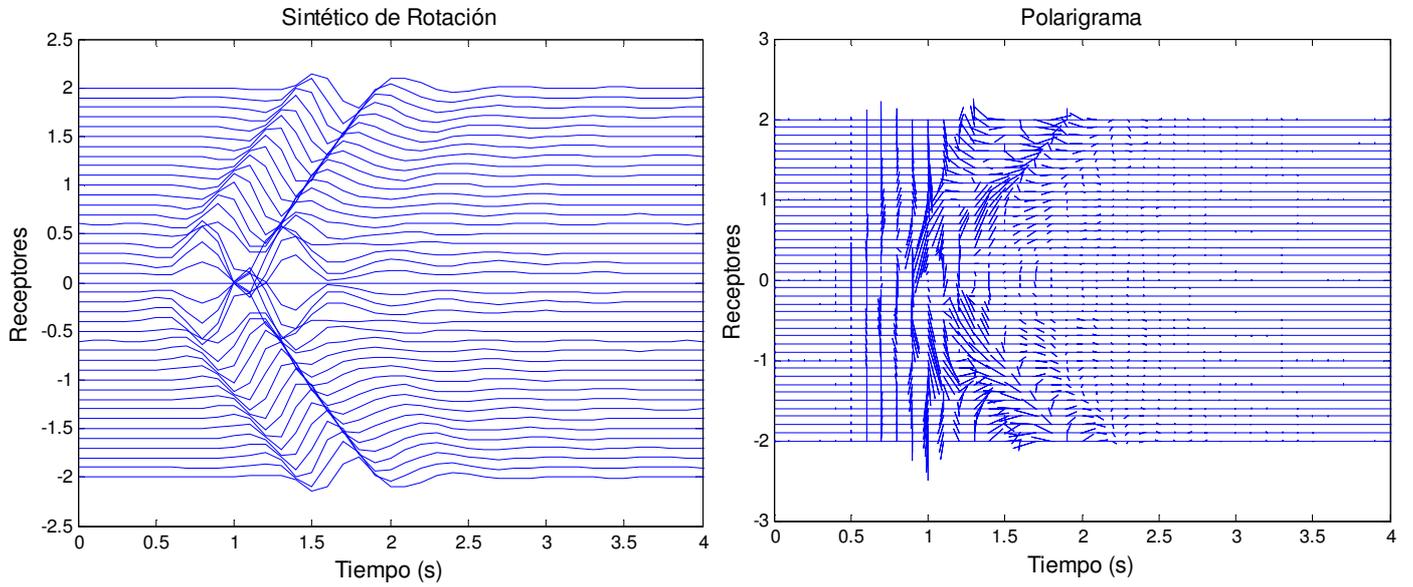


Figura 4.9.1 Incidencia de ondas P sobre un cañón semicircular, ($\theta = 0^\circ$)

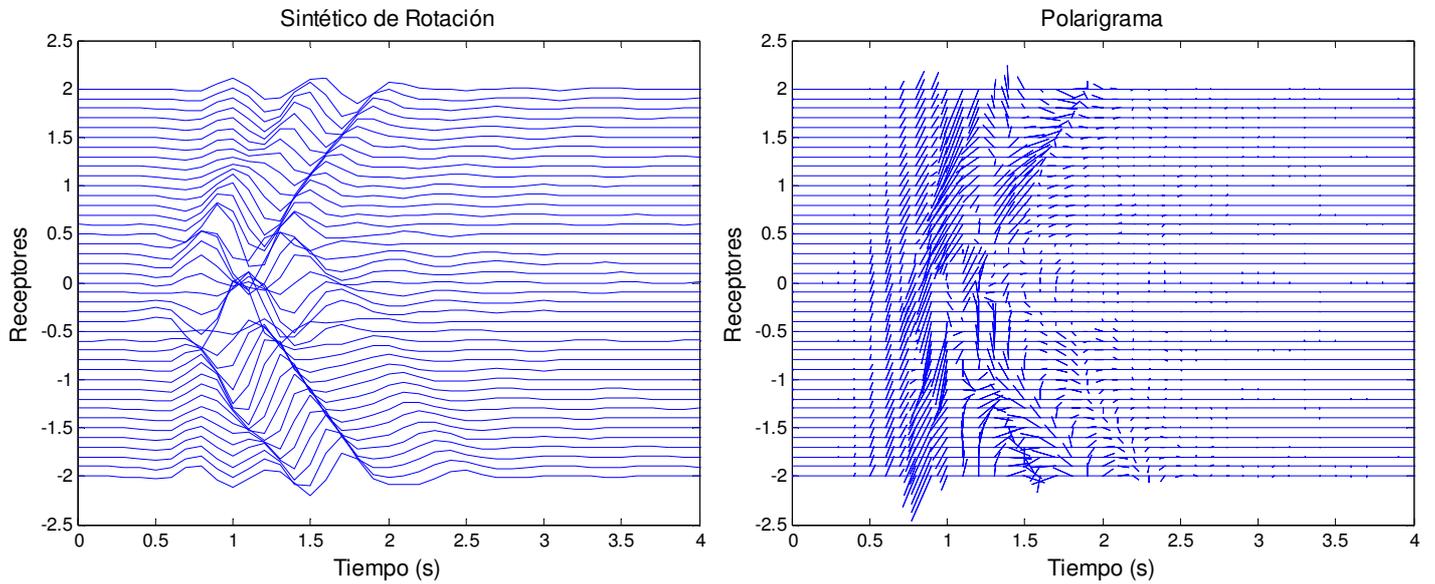


Figura 4.9.2 Incidencia de ondas P sobre un cañón semicircular, ($\theta = 15^\circ$)

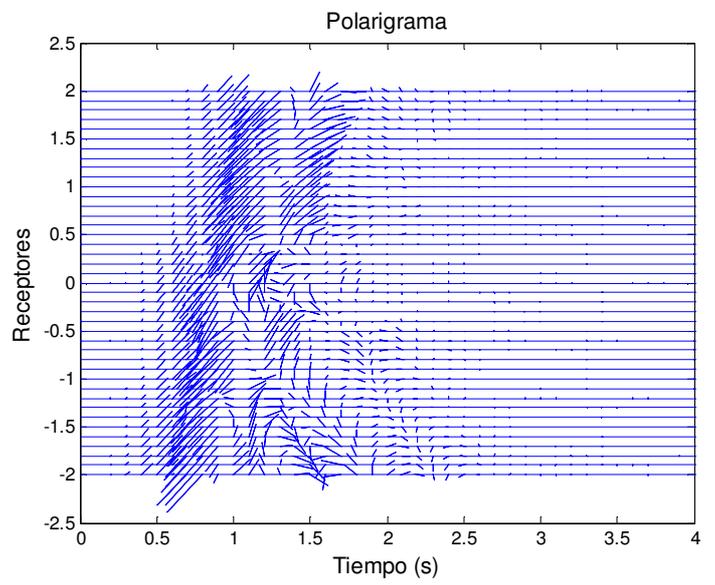
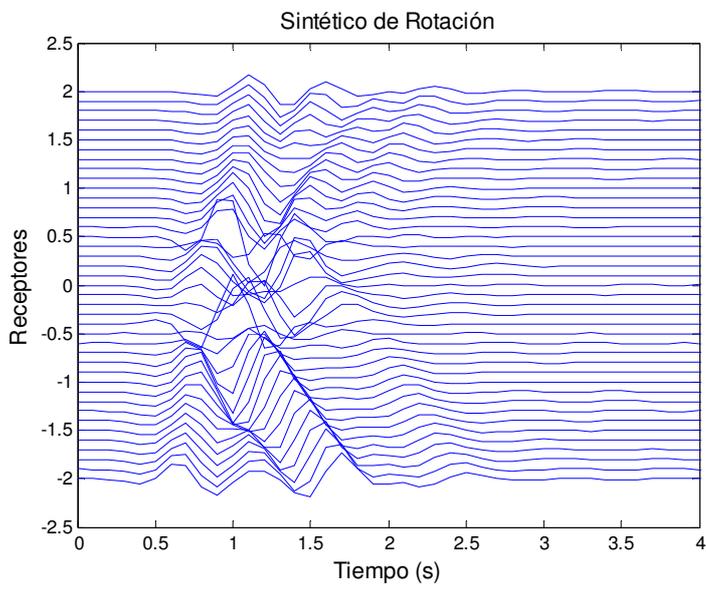


Figura 4.9.3 Incidencia de ondas P sobre un cañón semicircular, ($\theta = 30^\circ$)

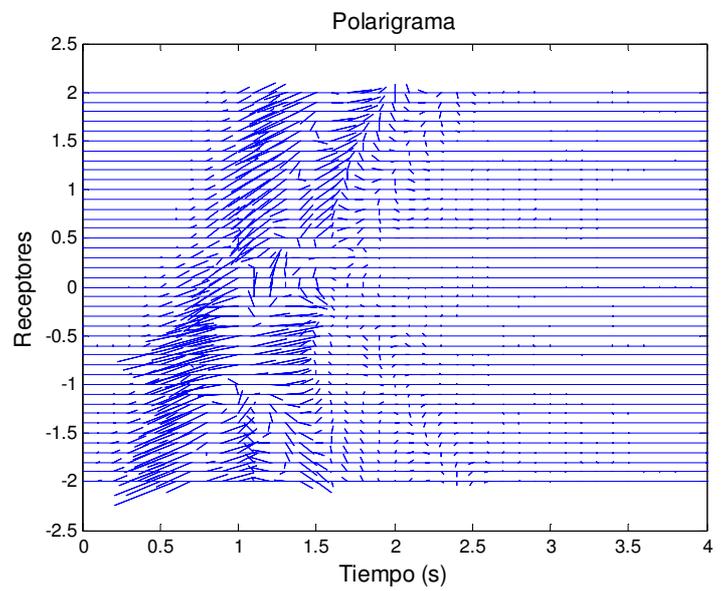
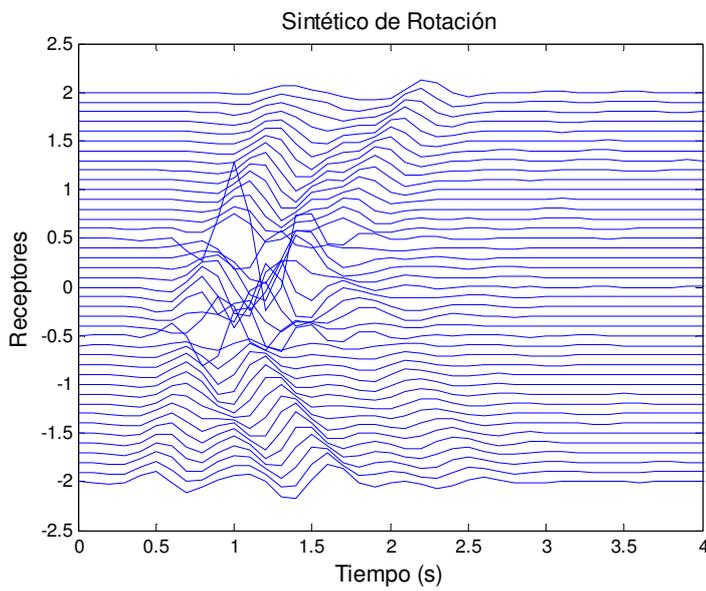


Figura 4.9.5 Incidencia de ondas P sobre un cañón semicircular, ($\theta = 60^\circ$)

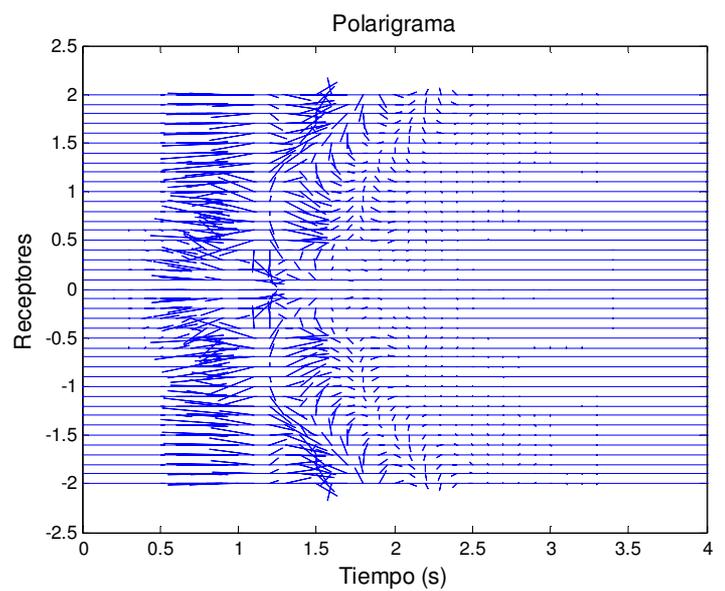
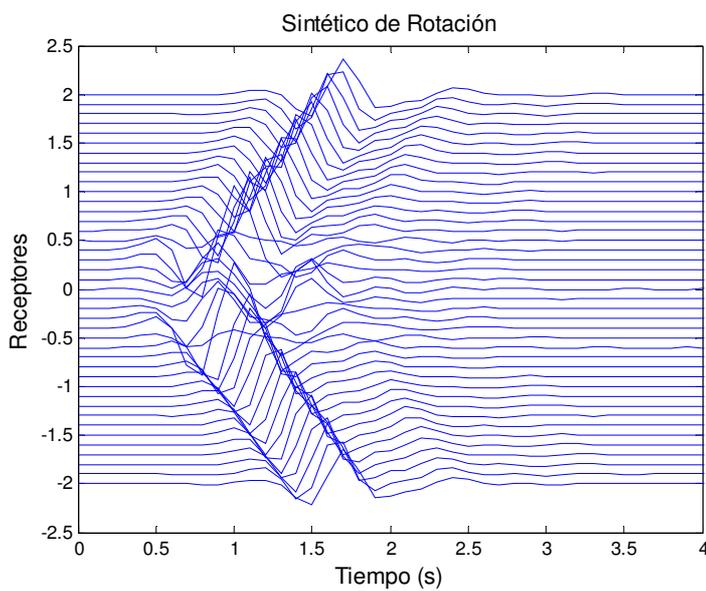


Figura 4.10.1 Incidencia de ondas SV sobre un cañón semicircular, ($\theta = 0^\circ$)

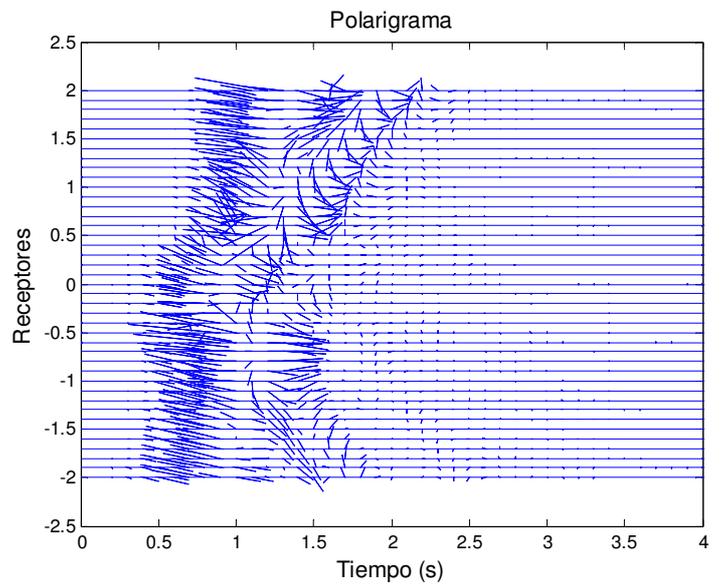
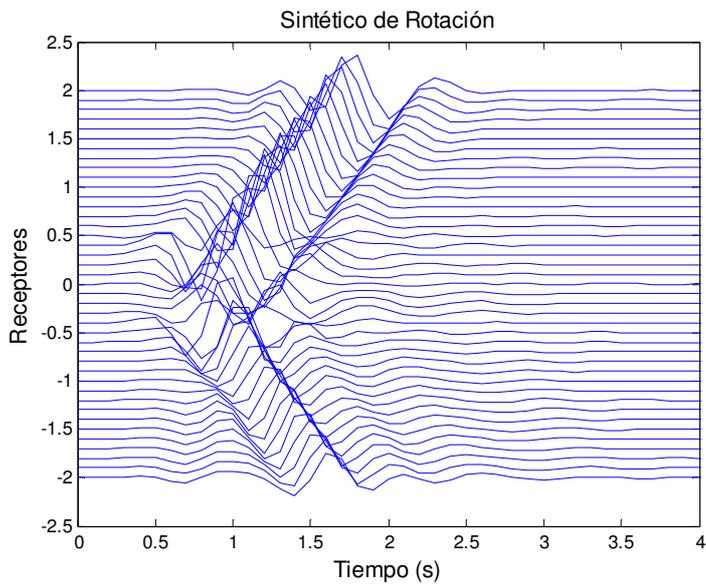


Figura 4.10.2 Incidencia de ondas SV sobre un cañón semicircular, ($\theta = 15^\circ$)

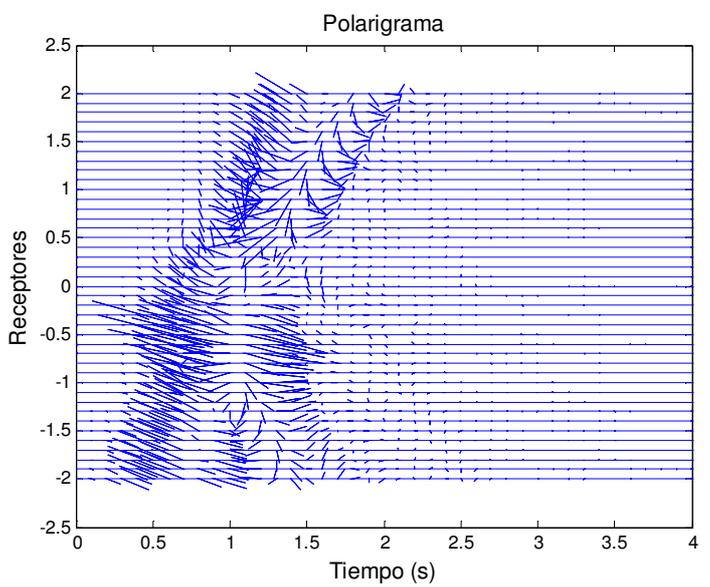
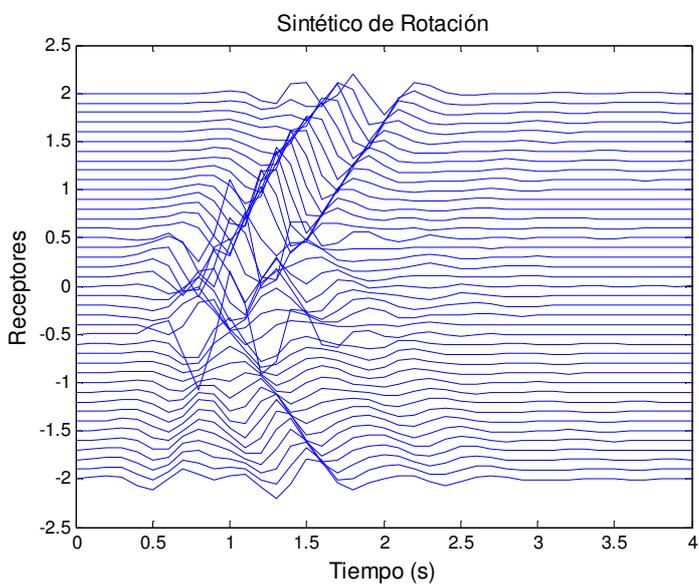


Figura 4.10.3 Incidencia de ondas SV sobre un cañón semicircular, ($\theta = 30^\circ$)

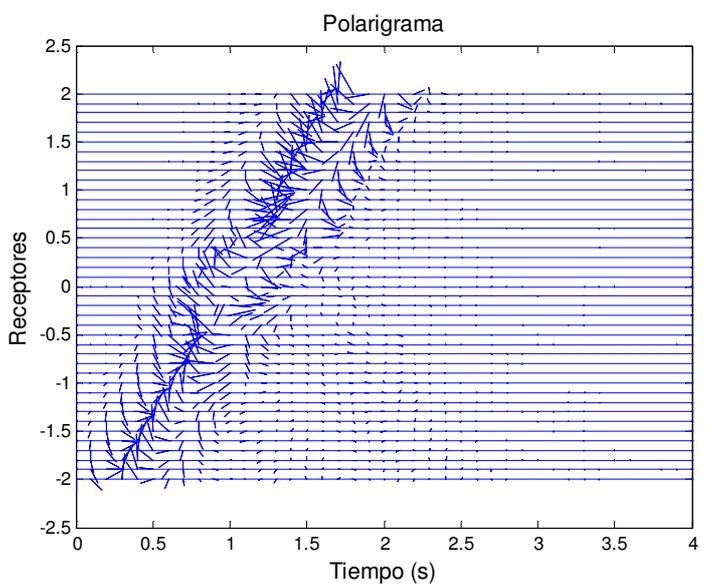
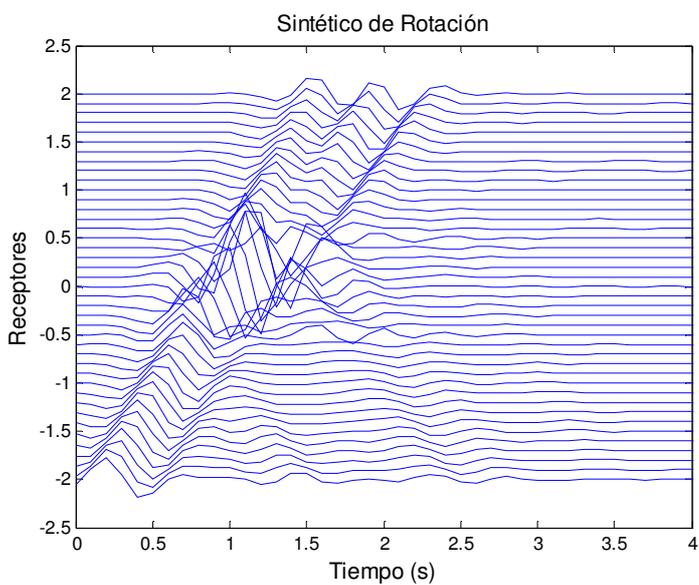


Figura 4.10.5 Incidencia de ondas SV sobre un cañón semicircular, ($\theta = 60^\circ$)

