UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR), más allá de una alternativa para la medición de Riesgo de Mercado

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

ROCÍO LACAYO LINARES

TUTOR

ACT. GERMÁN VALLE TRUJILO

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Datos del Jurado

1.- Datos del Alumno Lacayo Linares Rocío 56 98 54 89 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 300759769
2.- Datos del Director de Tesis Act. Germán Valle Trujillo
3.- Datos del Sinodal 1 Act. Gloria Roa Béjar
4.- Datos del Sinodal 2 Act. Roberto Cánovas Theriot
5.- Datos del Sinodal 3 Act. Sergio Ortiz Rosas
6.- Datos del Sinodal 4 Act. Claudia Orquídea López Soto
7.- Datos del Trabajo Escrito *Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR), más allá de una alternativa para la medición de Riesgo de Mercado.* 146 p 2007

Agradecimientos

A Dios:
Gracias por darme la vida, por acompañarme y cuidarme en todos los momentos de mi vida; por ser mi mejor amigo y guía, mostrándome a cada instante el camino que he de seguir. Gracias por la hermosa oportunidad de permitirme despertar todos los días acompañada de las personas que más quiero.

A mi mamá:
Por ser la persona más especial e importante en mi vida, te agradezco de todo corazón el haberme dado la vida; gracias por cada una de tus palabras de aliento que me has dado en todo momento, por se mi mejor ejemplo de esfuerzo y perseverancia; por nunca darte por vencida enseñándome cada día que lo más valioso de la vida es vivirla y disfrutarla, luchando para salir adelante, sin importar los obstáculos. Gracias por haberme impulsado y apoyado, por ti he logrado todo lo que soy, gracias por guiarme y ayudarme a llegar hasta aquí, habiendo cumplido uno de los más grandes sueños de mi vida. A ti, mamá, por tu inmenso amor, tu entrega diaria y tu lucha incansable, por sacarnos adelante. Gracias por ser mi mamá y mi mejor amiga. Todo mi amor, admiración y respeto.

A mi papá:
Aún cuando muchas veces no he entendido tú forma de ser, te agradezco el haberme dado la vida y deseo que Dios bendiga tu vida y el camino que has de recorrer.

A mi querida hermana Edith:
Desde que nací has estado a mi lado y cuidado de mí, me has guiado, has sido mi compañera incansable de juegos. Agradezco a Dios por haberme dado una hermana como tú. Eres un gran ejemplo de fortaleza y dedicación, me siento muy orgullosa de ti y de todo lo que has logrado día con día. Gracias no sólo por ser mi hermana sino mi amiga.

A mi querida hermana Lupita:
Gracias por ser la chispa de alegría de mi vida, por enseñarme a reír...aún cuando eres más pequeña que yo, me has demostrado que siempre se puede ser valiente y fuerte. Nunca voy a olvidar la primera vez que te vi, tus ojitos tan llenos de ternura e inocencia, eras tan pequeñita y frágil; sin importar los años que pasen, para mí siempre seguirás siendo mi bebé, mi niña hermosa que siempre voy a cuidar. Gracias por escucharme y por ser mi amiga.

A Elvirita:
Abuelita gracias por ser la mejor abuelita del mundo, por hacer que mi mundo y el de mis hermanitas sea mágico y lleno de felicidad. Gracias por cuidar siempre de nosotras y por hacernos sonreír.

Al Act. Andres Barajas Paz:
Gracias AMOR DE MI VIDA por devolverme la ilusión, por llenar mi vida de luz, por hacerme la mujer más feliz del mundo. Te admiro profundamente y me siento muy orgullosa de ti, eres el hombre con quien he compartido grandes alegrías, sueños y planes; TE AMO con todas las fuerzas de mi corazón y deseo con toda el alma estar por siempre a tú lado, eres el hombre con quien deseo compartir mi vida. Gracias por enseñarme a descubrir lo maravilloso de cada instante.

A mi Director de Tesis Act. Germán Valle Trujillo:
Te agradezco el que hayas sido un gran profesor y no sólo eso sino también tu orientación, enseñanzas, por todo tu tiempo y apoyo, por los consejos que me has dado en todo momento para la realización de esta Tesis. Gracias por brindarme tu amistad.

A mi Sinodal Act. Gloria Roa Béjar:
Gracias por su apoyo y consejos; gracias por el tiempo que dedicó a la revisión de mi Tesis.

A mi Sinodal Act. Roberto Cánovas Theriot:
Gracias por todas sus enseñanzas, por ser un gran profesor, comprometido y siempre dispuesto a transmitir sus conocimientos. Para mi es un honor que un Actuario como usted haya sido parte de mi formación académica y ahora este presente en mi proceso de titulación. Gracias por los consejos que en algún momento me dio, han sido fundamentales para mi formación académica y personal.

A mi Sinodal Act. Sergio Ortiz Rosas:
Te agradezco todo tu tiempo y apoyo para la revisión de mi Tesis. Gracias por darme consejos no sólo para mi vida profesional sino también para mi superación personal.

A mi Sinodal Act. Claudia Orquídea Soto López:
Muchísimas gracias Clau por todas tus enseñanzas y tu paciencia, eres una gran persona y te admiro mucho por siempre estar comprometida con tu trabajo. Estoy agradecida porque tu has sido una parte fundamental en mi preparación y ahora estas presente en esta etapa tan importante en mi vida. Gracias por todos tus consejos y por tu valiosa amistad.

A Ing. Rosa María Vargas:
Estoy agradecida infinitamente con usted, especialmente por todo el apoyo, consejos y cariño que he recibido. Gracias por su amistad, la cual es correspondida incondicionalmente.

Dr. Federico Nagano:
Gracias por todo su apoyo y consejos que en cada momento me ha dado.

A mi amiga I. Mariana Ruíz R.:
Gracias por enseñarme el verdadero valor de la amistad, por acompañarme y escucharme en los momentos más importantes de mi vida, por enseñarme a ser fuerte y a levantarme. Nunca me has dejado sola, sin importar las circunstancias siempre has estado a mi lado, dándome todo tu apoyo incondicional y cariño. Gracias a tus papás y hermana por todo su apoyo y cariño, por los consejos que en algún momento me han dado. Recuerda siempre que tú y tu

familia tienen un lugar muy especial en mi corazón.

A mi amiga Ma. Isabel Velasco S.:
Gracias por regalarme tu sincera amistad, que siempre será correspondida. Eres una persona muy importante en mi vida, desde que te conozco has estado siempre a mi lado, hemos pasado momentos muy especiales y me has enseñado a descubrir la verdadera amistad. Tú has formado parte muy especial de mi crecimiento personal y quiero que siempre tengas presente que estás en mi corazón. Agradezco especialmente a tu mamá y abuelita por ser parte también de mi crecimiento personal.

A mi amiga Violeta Saavedra Ramos (q.d.e.p.):
Gracias por haberme dado la mejor lección de mi vida...sin importar las circunstancias tú siempre sonreías y tenías la fortaleza para alcanzar tus metas, gracias por todos los consejos que en algún momento me diste, por todas las veces que me escuchaste y me apoyaste. Siempre te voy a recordar con muchísimo cariño y admiración.

Act. Álvaro Galindo Blanco:
Gracias por brindarme todo su apoyo y la oportunidad para la realización de mi Servicio Social y especialmente quiero agradecer los consejos que en algún momento me dio para mi superación personal y profesional.

Ing. José Francisco Chávez:
Agradezco de todo corazón su confianza que depositó en mí, los consejos que me dio y cada una de las veces que platicó conmigo, siendo un gran apoyo y enseñanza para mi desarrollo profesional y para mi vida. Gracias por su amistad.

A mis amigos Isaac, Carlitos, Nancy y Mauricio:
Gracias por su amistad, por todos los momentos que hemos pasado juntos, agradezco de todo corazón sus consejos y cariño. Sin importar el camino que hemos de seguir quiero que recuerden que tienen un lugar muy especial en mi corazón y una amistad sincera e incondicional.

A Ángeles Arellano:
Gracias por ser una persona tan especial, porque aún sin conocerme me brindaste tu sincera amistad. Te agradezco de todo corazón todos tus consejos, apoyo y cariño.

A mis amigas:
Dulce Ma. Souto, Liliana Flores, Pamela Martínez, Andrea Hernández, Daniela Piña, Corinthia Hernández...a ustedes les agradezco por todos los momentos tan geniales que pasamos juntas. Gracias por estar presentes en mi vida, siempre tendrán un lugar muy especial en mi corazón.

A todos mis profesores:
Gracias por abrirme las puertas de su corazón compartiendo sus experiencias de vida e invaluables conocimientos que han dejado huella en mi formación académica, gracias por cada instante de su tiempo y esfuerzo. En especial quiero agradecer a: Celia Osorno G., Paty García, Erika G. Rodríguez, Miguel Ángel, Pedro, Jorge H. Del Castillo y Agustín Cano

A la Facultad de Ciencias de la UNAM, mi segunda casa:
Gracias por haberme abierto las puertas dándome una formación excepcional como profesionista y como ser humano, pero sobretodo por haberme permitido vivir los mejores días de mi vida; ahí he conocido personas que sin importar la distancia nunca voy a olvidar, se que cada quien debe tomar el camino de sus vidas pero cada recuerdo lo llevaré en mi alma y lo recordaré con inmensa alegría. Gracias mi querida Universidad por permitirme ser parte de ti.

Contenido

Introducción

La actividad en las instituciones financieras, se desarrolla en torno al riesgo, siendo éste un componente inevitable en el proceso de la toma de decisiones. Administrar estos riesgos de manera eficiente es fundamental, ya que al lograr una correcta identificación, medición y control de los mismos es posible para las instituciones maximizar sus utilidades, convertir la incertidumbre (como sinónimo de riesgo) en oportunidades y prevenir pérdidas asegurándose que las actividades de operación e inversión, no se encuentren expuestas a pérdidas que puedan amenazar la viabilidad futura de las mismas.

Los mercados financieros están continuamente sujetos a fluctuaciones en sus precios, tipos de interés y tipos de cambio que en muchos casos se traducen en pérdidas inesperadas en las posiciones de los diferentes activos.

La globalización de los mercados, el aumento del volumen de transacciones y volatilidad de las mismas han hecho evidente la necesidad de que las instituciones cuenten con estrategias y herramientas que les permitan la identificación y medición de los riesgos a los que están expuestas. Los sistemas y procedimientos deben reconocer que la medición en varias ocasiones es una aproximación sujeta a variaciones por factores económicos y de mercado.

En los últimos años, se han experimentado avances considerables en el desarrollo de sofisticados modelos de medición de riesgos; sin embargo, estos modelos tienen limitaciones, especialmente cuando tienen que tratar el riesgo de productos financieros complejos. En este contexto, mención especial merecen los activos derivados, los cuales cuentan con la peculiaridad de que su riesgo se ve afectado por una gran cantidad de variables o factores de riesgo y sobre todo en la mayoría de los casos las respuestas de su valor a los movimientos de estos factores no son lineales, además de experimentar repentinos cambios.

En el campo de la evaluación y control del riesgo de mercado fue pionero el modelo *Riskmetrics* desarrollado por JP Morgan, que tomando como referencia la Teoría de Portafolios de Markowitz, se apoya en la estimación de volatilidades y correlaciones de un gran conjunto de activos financieros. Una vez realizadas estas estimaciones y considerando el supuesto de normalidad en la tasa de variación de los precios de los activos financieros, se estiman intervalos de confianza para un determinado nivel de probabilidad, de las pérdidas máximas que se pueden sufrir como consecuencia de la incertidumbre de mercado, propio de una determinada posición de activos financieros; estas pérdidas máximas estimadas son las que se conocen como Valor en Riesgo (VaR).

No existe una metodología única para el cálculo del VaR, las entidades financieras pueden medir el riesgo de mercado utilizando el método más apropiado; sin embargo la adopción de métodos más exactos ofrece ventajas tanto para las entidades financieras como para la estabilidad del sistema financiero en general. Debido a que la estimación del VaR se concentra en las colas de la distribución, una mala estimación o supuesto sobre la forma de la misma puede arrojar cálculos incorrectos del Valor en Riesgo. Una herramienta fundamental dentro del análisis de riesgo es la simulación de escenarios que permitan medir el efecto que tienen los cambios de los factores de riesgo sobre el valor de los activos, es así que el resultado de las simulaciones permite conocer a qué tipo de cambios es más sensible el valor de un portafolio de inversión, permitiendo prevenir anticipadamente cambios adversos en las posiciones de riesgo.

Entre más compleja sea la actividad que se desarrolle dentro de los mercados más complejo será el sistema de medición que se deba utilizar. En la actualidad la medida más utilizada es la de Valor en Riesgo, con sus diversos métodos: Modelos de Portafolio, Simulación Histórica y Simulación Montecarlo; siendo esta una manera resumida del riesgo de mercado.

Ya que los modelos de Valor en Riesgo sólo operan en condiciones normales, es necesario enfrentar al modelo a diferentes condiciones adversas (extrema volatilidad) en los mercados, esto es de vital importancia ya que estas posibles situaciones, son las que pueden llevar a una gran perdida o incluso a la quiebra, a este tipo de pruebas se les conoce como Stress Testing. Por otro lado, es importante llevar a cabo pruebas que permitan el control integral de riesgos; para validar el VaR del portafolio se deben realizar de manera frecuente diferentes pruebas al modelo, comparando las pérdidas y ganancias reales con la estimación del VaR, a esta prueba se le conoce como Backtesting.

El VaR contribuye a la administración del riesgo de tal manera que: permite integrar los riesgos para diferentes mercados y distintos instrumentos, considerando las principales características de cada uno de ellos; entrega una medida estándar para las distintas clases de riesgo; expresa la estimación del VaR en unidades monetarias, permitiendo comparar los riesgos para diferentes posiciones y existe la posibilidad de establecer los límites con base en el nivel de riesgo deseado.

Las Entidades Financieras y los Organismos Reguladores están cada vez más preocupados buscando mecanismos de medición y control de riesgos que sean capaces de dar cobertura a la mayoría de situaciones con las que hay que enfrentarse en la práctica, es así que a través del trabajo desarrollado por Artzner (1999) sobre medidas coherentes de riesgo se han provocado transformaciones importantes en la forma de cuantificar los riesgos. Se ha mostrado que el VaR no satisface las propiedades requeridas de coherencia, de tal manera que subestima las pérdidas potenciales; es así que ha sido propuesto el VaR Condicional (CVaR), como una alternativa que cuantifica la exposición al riesgo, indicando el valor esperado de la pérdida de un portafolio dado que ésta es mayor al VaR (pérdidas extremas).

Muchas medidas de riesgo pueden ser utilizadas; esta investigación revisa conceptualmente las diversas formas que existen para la evaluación del riesgo de mercado, a través de la metodología conocida como Valor en Riesgo (VaR) y otras medidas alternativas, sus principales supuestos, ventajas y desventajas, así como algunas técnicas para evaluar su desempeño. La difusión de este concepto en conjunto con la globalización de los mercados requiere de una actualización de las metodologías de evaluación de riesgo, sobre todo considerando la existencia de activos financieros complicados de evaluar como son los derivados. Una vez mencionado lo anterior se prosigue a la descripción de cada parte, de este trabajo de tesis:

Capítulo 1. Regulación y Supervisión: En esta primera parte se establecen los principales antecedentes (teoría de la probabilidad) en los que se basa el desarrollo de la medición del riesgo financiero, el marco teórico y la regulación financiera sobre los modelos de medición de riesgos. Aún cuando esta parte es una materia compleja, cuyo análisis rebasa los alcances de esta investigación, se mencionan los elementos necesarios para comprender los aspectos que involucra la metodología de evaluación de los riesgos.

Capítulo 2. Valor en Riesgo: En la segunda parte se plantean los principales conceptos preliminares al Valor en Riesgo; se analiza la metodología del VaR, revisando las diversas metodologías, los principales usos y ventajas de cada uno de ellos.

Capítulo 3. Valuación de Instrumentos Financieros: En esta sección se presenta la forma para la valuación del riesgo de mercado (medido por el VaR), para instrumentos tradicionales (bonos) y de mayor complejidad (futuros, forwards, swaps y opciones); se muestra una amplia visión sobre las principales características de algunos de los instrumentos financieros, desarrollando las respectivas aplicaciones del VaR para cada uno de estos.

Capítulo 4. Análisis complementarios: En este capítulo se examinan detenidamente aspectos relacionados con las variaciones la metodología del VaR, también se centra la modelización de la volatilidad, comparando distintos modelos. Para el caso en el que se presentan eventos extremos (aquellos que no se tienen contemplados dentro de los límites establecidos por las instituciones financieras), se muestran ciertas pruebas para el control integral de riesgos y la verificación del desempeño de los modelos de VaR.

Capítulo 5. Medidas coherentes de riesgo: Finalmente se muestra el VaR Condicional, siendo esta una herramienta de gran utilidad para la optimización eficiente de portafolios de inversión, además de ofrecer ventajas significativas respecto al VaR, por ser una medida coherente de riesgo.

Al finalizar el capítulo cinco, se presentan las conclusiones obtenidas de este trabajo de investigación, posteriormente se presenta un Glosario con los términos más importantes y como última parte la Bibliografía.

1

Regulación y Supervisión

La preocupación de las autoridades por el riesgo de mercado, se originó principalmente por la falta de adecuación de los sistemas tradicionales de reservas para hacer frente a la frecuencia de las grandes fluctuaciones instantáneas de precios y a los contagios masivos de tendencias a través de los diferentes mercados financieros. El lugar donde estas preocupaciones fueron objeto de análisis y evaluación para la propuesta de medidas reguladoras, fue el Comité de Supervisión Bancaria del Banco de Pagos Internacionales (BIS)[1] de Basilea, conocido de forma abreviada como Comité de Basilea.

La contribución de las normas[2] a una mayor estabilidad financiera dependen en gran medida de que se incorporen a las pautas por las que se rigen las empresas.

A lo largo de la última década las autoridades nacionales e internacionales de supervisión financiera han negociado una serie de acuerdos sobre estándares que pudieran servir para validar técnica y administrativamente los modelos internos de medición y control de riesgos. La regulación es considerada necesaria cuando el libre mercado es incapaz de distribuir eficientemente los recursos.

Para evitar la insolvencia en el sector financiero, proteger a los ahorradores y controlar el riesgo de que los inversionistas tomen determinadas posiciones, es necesario regular y supervisar al sector financiero; para ello existen dos alternativas: regular de manera independiente cada uno de los mercados, instrumentos y participantes o bien en el proceso de intermediación financiera siendo responsables tanto las autoridades como las entidades financieras. [34] La regulación es necesaria para que existan entornos más competitivos y a su vez el bienestar social. Los principales objetivos que persigue la regulación son:

- La existencia de un marco legal para la determinación de posibilidades y limitaciones, dentro de los mercados financieros.

- El cumplimiento de las normas establecidas, para que las instituciones tengan transparencia hacia el mercado y a su vez exista una protección para los clientes.

- Que las instituciones tengan la suficiente capacidad de solvencia,[3] incluyendo de manera paralela la disminución de crisis y riesgo en sus procesos de operación.

- La definición de límites, para la interacción con otros supervisores y entidades.

---

[1]Glosario.

[2]Normas Básicas de los Sistemas Financieros (NBSF).

[3]Fortaleza financiera de una empresa, al tener la capacidad de pagar las deudas contraídas antes de su vencimiento.

Las propuestas del Comité de Basilea sobre un nuevo marco de capital tendrán importantes repercusiones para los países desarrollados y en desarrollo. Aún cuando falta elaborar varios procesos para la mejora de muchos detalles, no sería precipitado que los países comenzaran a prepararse para la aplicación de dichas propuestas.

1.1 Administración integral de riesgos

El riesgo es parte inevitable en los procesos de toma de decisiones en general, siendo las instituciones financieras tomadoras de riesgo por naturaleza.

El beneficio que dichas instituciones pueden obtener al tomar decisiones, necesariamente deben asociarlo con el riesgo inherente a esas decisiones. En finanzas, el concepto de riesgo está relacionado con el grado de incertidumbre de rendimientos esperados en el futuro.

La administración del riesgo es un proceso mediante el cual se identifica, mide y controla la exposición al riesgo. Es un elemento esencial para la solvencia de cualquier institución o negocio; de tal manera que se asegura el cumplimiento de las políticas definidas por los comités de riesgo, refuerza la capacidad de análisis, define metodologías de valoración, mide los riesgos y establece procedimientos para el control de los mismos.

Dentro de cualquier institución, la dirección así como el consejo de administración deben tener información continua que les permita estar pendientes de los niveles de riesgo que están asumiendo, adicionalmente se debe llevar a cabo la valuación periódica del grado de exposición aceptable para la institución con relación al manejo y medición de riesgos, así como el cumplimiento a los límites establecidos, la existencia de controles internos y un proceso extensivo de reportes y análisis de riesgos.

En la actualidad el desarrollo de las instituciones y de las economías se distingue por una actitud distinta hacia los acontecimientos futuros, reconociendo que lo que puede ocurrir en el futuro puede anticiparse, simularse y cuantificarse, considerando herramientas que permitan identificar la exposición al riesgo y cuantificar sus posibles consecuencias en términos monetarios; esto con el propósito de proteger el capital de las instituciones y fortalecer su solvencia financiera.

1.1.1 Antecedentes de la administración de riesgos

Las primeras reflexiones sobre la idea de riesgo se remontan a la antigua Roma, donde existen testimonios de operaciones de cobertura en transacciones mercantiles. Desde entonces y hasta nuestros días, han sucedido numerosos e importantes cambios en el contexto económico mundial. Los mercados han evolucionado hacia una dimensión global, internacional y de libre competencia, al tiempo que han incorporado las innovaciones tecnológicas. En este entorno cambiante y turbulento, el resultado de cualquier actividad económica se encuentra expuesto a factores de riesgo.

La medición efectiva y cuantitativa del riesgo se asocia con la probabilidad de una pérdida en el futuro. Los seres humanos deben reconocer y responder a las probabilidades que confrontan en cada decisión. La esencia de la administración de riesgos consiste en medir esas probabilidades en contextos de incertidumbre.

Los primeros estudios formales sobre la probabilidad se desarrollaron durante el siglo XVI en la época del Renacimiento. Girolamo Cardano (1500 - 1571) fue la primera persona que cuantificó el riesgo mediante la probabilidad, haciendo referencia a ella como medida de frecuencia relativa de eventos aleatorios; así mismo realizó múltiples análisis de álgebra, propuso la solución a polinomios de segundo y tercer grado. Cardano fue el primero que introdujo el concepto de probabilidad, el cual ha ido evolucionando con el tiempo, de tal manera que un término más reciente de este se encuentra relacionado con eventos futuros que involucran incertidumbre.

Posteriormente Galileo (1564 - 1642), analizó y escribió sobre de la teoría de probabilidad, analizó la frecuencia de diferentes combinaciones y posibles resultados al tirar los dados.[12]

Durante el siglo XVII los avances en álgebra, geometría y cálculo diferencial e integral permitieron que los franceses Blaise Pascal, Pierre Fermat y Chevalier de Mere, encontraran aplicaciones en la teoría de la probabilidad, tales como medición de riegos en seguros e inversiones. Pascal aplicó conceptos geométricos a la teoría de probabilidad (mediante el triángulo de Pascal es posible analizar las probabilidades de un evento).

En 1730 Abraham de Moivre propuso la estructura de la distribución de probabilidad normal (distribución de campana) y el concepto de desviación estándar. Ocho años más tarde Daniel Bernoulli definió un proceso sistemático para la toma de decisiones, basado en probabilidades.[4]

Cien años después de la notable contribución de Pascal y Fermat, el inglés Thomas Bayes aportó una nueva teoría de probabilidad, demostrando cómo tomar mejores decisiones incorporando nueva información a información anterior.

En 1875, Francis Galton descubrió el concepto de reversión a la media y también transformó el concepto de probabilidad estático en uno dinámico.[12]

Hacia 1952, Harry Markowitz, premio Nobel de economía, desarrolló la Teoría de Portafolios y los conceptos de diversificación del riesgo,[5] covarianza y correlación, así mismo propuso usar la variabilidad de los rendimientos de los activos financieros, como medida de riesgo; de esta manera la varianza de los rendimientos de los activos se mantuvo como la medida de riesgo universalmente aceptada hasta finales de la década de los 80's y principios de los 90's. Coincidente con las grandes crisis financieras ocurridas precisamente durante este periodo, se vio la necesidad de que la medida de riesgo tenía que expresarse en términos de pérdidas potenciales, con una cierta probabilidad de ocurrencia.

Durante los últimos 30 años la proliferación de nuevos instrumentos financieros ha sido notable, así como el incremento en la volatilidad de las variables que afectan el precio de esos instrumentos, tales como tipos de cambio, tasas de interés, etc. En particular, destaca el desarrollo de productos derivados (futuros, opciones y swaps) en este período. El desarrollo más importante se dio en 1973, con la contribución que hicieron Fisher Black y Myron Scholes al proponer la fórmula para valuar el precio de las opciones financieras.

La medición de los riesgos logra un gran avance, con la publicación durante la segunda mitad de la década de los 90's de un sistema llamado *Riskmetrics* del banco estadounidense JP Morgan, el cual mostraba un método con el que era posible cuantificar el riesgo de mercado en instrumentos financieros con sólo un dato, de esta forma es como se dio la aparición del Valor en Riesgo (VaR); siendo este un concepto muy útil, principalmente para carteras complejas ya que por medio de un solo número es posible tener una estimación de las pérdidas potenciales de los portafolios sin importar las posiciones que se tomen. El sistema Riskmetrics tenía como propósito:

- Promover una mayor transparencia del riesgo de mercado.
- Hacer posible para otros usuarios, el uso de herramientas de administración del riesgo, especialmente para aquellos que no tengan los recursos para el desarrollo de dichos

[4]Esto dio origen a lo que hoy se conoce como teoría de juegos e investigación de operaciones.

[5]En la medida en que se añaden activos a una cartera de inversión, el riesgo disminuye.

sistemas.

- Establecer dicha metodología como un estándar.

En adición al enfoque organizacional en las instituciones para realizar una efectiva administración de riesgos, vale la pena señalar que los avances en la tecnología han facilitado el proceso de identificación, evaluación y control de riesgos.

1.1.2 Desastres financieros

En la actualidad prácticamente ninguna empresa o proyecto con enfoque de negocios escapa a los fuertes impactos que provocan las fluctuaciones de los tipos de cambio, tasas de interés, entre otras variables. Es así que a medida que aumenta la complejidad de los mercados financieros las empresas se ven obligadas a implementar sistemas para el manejo de los riesgos y procesos para poder competir con eficiencia en el mercado.

La ausencia de técnicas que midan el riesgo, las deficiencias del sector financiero y una inadecuada supervisión de las entidades, han propiciado grandes desastres financieros, algunos de los más conocidos son:

- En diciembre de 1994, la devaluación del peso mexicano ocasionó que en todas las instituciones financieras se provocaran fuertes pérdidas por riesgos de mercado y de crédito.

- Bob Citron, tesorero del condado de Orange en EU, invirtió en posiciones altamente riesgosas, produciendo grandes pérdidas debido a la alza de las tasas de interés registradas en 1994.

- Nick Leeson, un operador del mercado de derivados del Banco inglés Barings en Singapur, sufrió pérdidas que rebasan el capital del banco y llevó a la quiebra a la institución en febrero de 1995 con pérdidas de más de 1,300 millones de dólares.

- Toshihide Iguchi, un operador que manejaba posiciones en mercado de dinero en Daiwa Bank, perdió 1,100 millones de dólares en 1995.

- Yasuo Hamanaka, un operador de contratos de cobre en Sumitomo Corp., perdió 1,800 millones de dólares en junio de 1996.

La principal característica de estos desastres fue la ausencia de políticas y sistemas de administración de riesgos en las instituciones, que permitieran medir y cuantificar las pérdidas potenciales de las posiciones en las que se encontraban involucradas estas corporaciones.

Una de las principales consecuencias de estos desastres fue la creación de una asociación internacional de carácter privado llamada Grupo de los Treinta (G-30),[6] dicha agrupación ha hecho ciertas recomendaciones prudenciales para instituciones financieras; una de las más sobresalientes es la de valuar las posiciones y evaluar sus riesgos financieros utilizando un sistema basado en el VaR. Posteriormente otras recomendaciones similares fueron hechas por agencias valuadoras como Moody's y Standard and Poor's, así como por la International Swaps and Derivatives Association (ISDA).[7]

[6] Grupo consultivo formado por los principales banqueros, financieros y académicos de las naciones industriales.

[7] ISDA representa a más de 150 instituciones financieras que operan derivados OTC negociados en forma privada.

1.1.3 El proceso de la administración de riesgos

Existe una gran variedad de riesgos que enfrentan las instituciones y reguladores, tanto en los niveles micro y macrofinanciero; esto hace que el estudio del riesgo y sus efectos sea de mayor interés dentro de las instituciones financieras.

El proceso de administración de riesgos considera en primer lugar, la identificación de riesgos, posteriormente su cuantificación y control mediante el establecimiento de límites de tolerancia al riesgo y finalmente, la modificación o nulificación de dichos riesgos a través de la disminución de la exposición a éstos.

Para lograr una efectiva identificación de riesgo, es necesario considerar las diferentes naturalezas de los riesgos que se presentan en una sola transacción. Los riesgos de mercado están asociados a la volatilidad, estructura de correlaciones y liquidez, pero éstos no pueden estar separados de otros, tales como riesgos operativos o riesgos de crédito.

La función primordial de la administración de riesgos, es la definición de políticas, el desarrollo de modelos y estructuras de límites, así como la generación de reportes a la alta dirección que permitan observar el cumplimiento de límites, las pérdidas y ganancias realizadas y no realizadas.

En este contexto, aquellas instituciones que tienen una cultura de riesgos, crean una ventaja competitiva frente a las demás, asumiendo riesgos más conscientemente y anticipándose a los cambios adversos, así mismo se protegen o cubren sus posiciones de eventos inesperados y logran experiencia en el manejo de riesgos. Por el contrario, las instituciones que no tienen cultura de riesgos, posiblemente ganen más dinero en el corto plazo pero en el largo plazo convertirán sus riesgos en pérdidas importantes que pueden significar inclusive, la bancarrota.

1.2 Marco regulatorio

En la búsqueda de un sistema financiero seguro y confiable, los reguladores han mostrado una preocupación creciente por el efecto desestabilizador de las actividades operativas de las instituciones financieras. La constante innovación en los instrumentos, el crecimiento de los volúmenes negociados y los cambios en la volatilidad han motivado a los reguladores a mejorar la normatividad ya existente, la cual se encuentra en el Acuerdo de Capitales para la Banca de Basilea (1988).

1.2.1 Visión general del Acuerdo de Basilea

En 1975, los miembros del Grupo de los Diez (G-10)[8] crearon en la Ciudad de Basilea, un Comité integrado por los gobernadores de los bancos centrales, con el fin de homogeneizar los criterios que se utilizan en la supervisión de las instituciones financieras de carácter internacional en sus respectivos países. Posteriormente, se integraron al Comité los bancos centrales de España y Luxemburgo.

En la búsqueda de estabilidad financiera el llamado Comité de Basilea emitió, en 1988, los Acuerdos de Basilea I; en estos se establecen los requerimientos mínimos de capital que debe tener una institución financiera para realizar coberturas contra el riesgo crediticio, conduciendo de esta manera a un proceso de evolución para imponer requerimientos de capital contra riesgos de mercado.[2]

[8]Se llama Grupo de los Diez (G-10) a los diez países más industrializados: Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Gran Bretaña, Holanda, Italia, Japón y Suecia.

Desde que comenzó a aplicarse el Acuerdo de Basilea (1988) sobre capital, se convirtió en la norma mundial para evaluar la solidez financiera de los bancos. El Acuerdo originalmente debía aplicarse sólo a los bancos que eran miembros del Grupo de los Diez, que operaban a escala internacional, sin embargo posteriormente se aplicaría en la mayoría de los países y de los bancos, incluidos muchos que sólo operan en el ámbito nacional. A través de este Acuerdo se logró una gran contribución a la estabilidad financiera, ya que por medio de una estructura simple fue posible la igualdad competitiva (homogeneización internacional).

En enero de 1996, a raíz de las crisis experimentadas (Barings, Daiwa, Orange Country) por el impacto de los precios de mercado sobre los balances o portafolios de determinadas empresas, el Comité de Basilea, adiciona al Acuerdo de Capital (1988) la Enmienda, para incorporar requerimientos patrimoniales para cubrir las exposiciones a riesgos de mercado de las carteras de inversión, que podría extenderse al balance financiero en el de los riesgos de mercado globales.[2]

El documento de la Enmienda al Acuerdo de Basilea (1996) codifica un conjunto estándar de principios teóricos de base y criterios estadísticos, por los que se habrán de guiar en lo sucesivo las instituciones para construir sus modelos internos de Valor en Riesgo de tal modo que puedan ser inspeccionados de forma periódica por los supervisores nacionales. Se fijó el año 2000 como fecha límite para que los bancos internacionales implementaran estas medidas.

Debido a los constantes cambios que se presentaban, en los procesos de gestión de riesgos y a la clasificación inadecuada de los riesgos, el 25 de junio de 1999, el gobernador del Banco Central de España y presidente del Comité de Basilea (Jaime Caruana) y el presidente del Banco Central Europeo (Jean Claude Trichet), presentaron a la opinión pública los Acuerdos de Basilea II, que buscaban definir nuevos niveles de capital para respaldar mejor los riesgos bancarios. Estas medidas comenzaron a funcionar tomando en cuenta, por primera vez, el riesgo operativo. Cabe señalar que un nuevo acuerdo de capital (Basilea II) había sido planteado para reemplazar al de 1988 (Basilea I). En este documento consultivo se establecen varias alternativas de reforma y contempla tres pilares: mejoramiento del marco de cálculo de la suficiencia de capital; determinación de un proceso de análisis con fines de supervisión y fortalecimiento de la disciplina del mercado. El principal objetivo consistía en elaborar una norma de suficiencia de capital en la que se tomaran en cuenta algunos de los procedimientos más avanzados de las modernas prácticas de gestión de riesgos y se mantuviera el concepto de un capital mínimo reglamentario.

Una de las principales metas del Comité es perfeccionar el actual sistema de ponderación de riesgos, vinculando mejor las categorías a los riesgos económicos con los que se ven confrontadas las instituciones. Aunque evidentemente conviene alcanzar esta meta, esto ha resultado mucho más difícil de lo previsto.

El Comité de Basilea se ha ocupado, hasta ahora, de tres tipos de riesgo al que están expuestos las instituciones financieras: el de mercado (asociado a las fluctuaciones en el precio de los activos), el de crédito (asociado a la incertidumbre en el pago de las obligaciones de los deudores) y el operativo (asociado a la posibilidad de error humano, fallas tecnológicas, fraudes y desastres naturales).

Indudablemente las propuestas del Comité de Basilea ha tenido importantes consecuencias e influencias en muchos países, no sólo sobre las corrientes de capital, sino también sobre las características de los regímenes de supervisión que los países tendrán que aplicar.

Por la dificultad para adaptar las normas de inspección tradicionales, al vertiginoso ritmo de evolución y sofisticación de la tecnología y las operaciones de la industria financiera; las autoridades junto con el Comité de Supervisión Bancaria del Banco de Pagos Internacionales de Basilea, han dado un importante giro al modelo regulador. Enfrentados al fracaso continuo de los estándares en los mercados financieros, los supervisores ahora incorporan el mecanismo descentralizado de competencia tecnológica, permitiendo así mejorar continuamente los sistemas de gestión interna de riesgos empleados por las instituciones. La fijación de estándares de modelación estadística del riesgo financiero se ha convertido en el principal método de vigilancia y control de los mercados internacionales de instrumentos financieros.

Durante las dos últimas décadas el Comité de Basilea ha adquirido el papel como principal foro de debate y negociación multilateral para la adopción de acuerdos internacionales en materia de estándares de supervisión de riesgos.

1.2.2 Acuerdo de Basilea II

El nuevo acuerdo no sólo perfecciona los aspectos considerados en Basilea I, sino que también incorpora nuevos elementos que deben ser considerados, basándose en tres pilares que se refuerzan mutuamente: requerimientos de capital, acción de los organismos supervisores y disciplina del mercado. En lo que respecta al riesgo de mercado (exigencias de capital),[9] Basilea II no presenta innovaciones, con respecto a lo propuesto en Basilea I. Entre los objetivos más importantes de este nuevo acuerdo se encuentran:

- Continuar promoviendo la solvencia del sistema financiero, a través de un nuevo esquema para establecer los niveles de capital, de acuerdo a los niveles de riesgo.
- Fomentar la igualdad para competir, involucrando un enfoque global del riesgo.
- Otorgar mayor importancia a los mercados, así como a los supervisores.
- Reducir los costos potenciales, para la sociedad, de la solvencia del sistema financiero.

Primer Pilar (Requerimientos Mínimos de Capital)

Este primer pilar tiene como objetivo establecer los mecanismos para determinar los requerimientos mínimos de capital de una institución dados los riesgos a los cuales esta expuesta,[10] con base en mejoras del proceso de medición y sensibilidad del riesgo. De acuerdo con Basilea II, el capital mínimo de cada institución, debe determinarse sobre la base de tres tipos de riesgo (riesgo de crédito, riesgo de mercado y riesgo operativo), de tal forma que su capital efectivo sea siempre igual o superior a la suma de:

- 8 % del valor de los activos de la institución ponderado cada uno por su nivel de riesgo (riesgo de crédito) y
- capital mínimo asociado a los riesgos de mercado y riesgo operativo.

Para verificar el cumplimiento de las exigencias mínimas se ha establecido un indicador denominado *Coeficiente de Capital*, el cual no puede ser inferior a 8 % y se define de la siguiente forma:

$$\frac{Capital\ \ de\ \ la\ \ Institucion}{R.\ de\ \ Credito + 12.5(R.\ de\ \ Mercado + R.\ Operativo)} \geq 8\,\%$$

[9] En particular las exigencias de capital están asociadas a las exposiciones ante variaciones en la tasa de interés, tipo de cambio y cotización de acciones.

[10] Esta medición ya se incorporaba en el acuerdo de Basilea I, pero en esta ocasión se complementa y perfecciona con el objetivo de que cada institución establezca un nivel de capital más acorde con los tipos de riesgo asumidos.

El riesgo de mercado y el riesgo operacional se ponderan por 12,5 (inverso de 8 %) con el objeto de crear un vínculo mínimo entre el cálculo de capital por riesgo crediticio, que es efectivamente 8 % de los activos ponderados por riesgo y los requisitos de capital por riesgo operativo y de mercado, que son equivalentes a la cuantificación de este tipo de riesgos.

La medición del riesgo de mercado, tiene como propósito la constitución de reservas patrimoniales producto de los cambios que se pudieran producir en las variables de mercado que afectan el precio de los activos de las instituciones financieras. En particular para estos efectos, el Comité propuso dos métodos alternativos:

- Un método estándar aplicado a todas las instituciones, el cual contempla la determinación de requerimientos de capital para cada uno de los elementos que componen el riesgo del mercado, esto sobre la base de las características de plazo y de vencimiento de los activos y pasivos de las instituciones.
- La segunda alternativa consiste en la aplicación de modelos internos que incorporen en forma integral los elementos de riesgos. Ningún modelo en particular está prescrito, teniendo la posibilidad de usarse modelos basados en matrices de varianza-covarianza, simulaciones históricas, o simulaciones Montecarlo. La aplicación de modelos internos tiene que contar con la aprobación de los supervisores, los cuales deben exigir que las estimaciones sean razonablemente precisas.

Segundo Pilar (Responsabilidades de los Organismos Reguladores)

El segundo pilar se centra en las atribuciones y responsabilidades de los organismos reguladores para efecto de fiscalizar la correcta aplicación de los métodos de determinación del capital, en especial cuando ésta se base en mediciones internas de las instituciones financieras y cuantificar sus necesidades en relación con los riesgos globales asumidos, así como de intervenir si fuese necesario. Su función no consiste sólo de garantizar la existencia de los capitales mínimos requeridos, sino también de fomentar el perfeccionamiento de las técnicas de gestión y de control de riesgo aplicadas por las instituciones. La supervisión busca generar una relación activa entre la institución y el regulador, para actuar de manera oportuna y reducir los riesgos o restaurar el capital si se detectan deficiencias en los procesos internos de evaluación.

Para efectos del desarrollo de este Segundo Pilar, se han establecido normas, responsabilidades y atribuciones tanto para las instituciones financieras como para los órganos supervisores:

1. Las instituciones deberán contar con procesos para evaluar la suficiencia de capital en función de su perfil de riesgo y con una estrategia de mantenimiento de sus niveles de capital. El Comité establece que las instituciones deberán ser capaces de demostrar que los requerimientos de capital que han determinado son coherentes con su perfil global de riesgo y con su entorno operativo. Así mismo los procesos de evaluación deben reconocer el ciclo económico en que están siendo aplicados e incorporar etapas que recojan los cambios futuros que se pudieren presentar en el mercado y afectar negativamente. De acuerdo con el Comité un proceso riguroso debe considerar al menos cinco características:
   - ***Vigilancia por parte del consejo de administración y de la alta dirección***: la alta dirección debe estar comprometida con los procesos internos de la organización y tener la capacidad para entender los riesgos asumidos por esta;

comprender la forma en que éstos se relacionan con los niveles de capital exigidos; definir los niveles de riesgos que la institución está dispuesta a asumir; finalmente, los requerimientos de capital que se determinen deben ser consistentes con los objetivos estratégicos de la institución.

- ***Evaluación rigurosa del capital***: las políticas y procedimientos aplicados deben garantizar que son capaces de identificar y medir los riesgos que asume la institución, que la determinación del capital se basa efectivamente en los niveles de riesgos detectados y que los modelos utilizados incorporan el enfoque estratégico del negocio. También, se requiere de instancias de auditorías que verifiquen la correcta ejecución de los procesos.
- ***Evaluación integral de los riesgos***: el proceso de evaluación debe incorporar todos los riesgos de importancia que afectan a la institución, incluso aquéllos que no puedan ser medidos con exactitud, en cuyo caso deberá desarrollarse un proceso de estimación de los mismos.
- ***Seguimiento e información***: los procesos formales, además de determinar los niveles de capital requerido, deben considerar sistemas de seguimiento de las exposiciones de la institución y de los eventuales cambios del perfil de riesgo de la misma. Además, es necesario que la dirección sea periódicamente informada, para tener la posibilidad de evaluar los riesgos relevantes, los efectos de éstos sobre los requerimientos de capital, la racionalidad de los supuestos en que se basan los modelos y los planes estratégicos de la institución.
- ***Examen del control interno***: las instituciones deberán contar con una estructura formal de control interno y por su parte la dirección deberá garantizar, la existencia de un plan para el seguimiento de las de las políticas internas; que la base de datos es exacta, que los escenarios supuestos son razonables y que los capitales efectivamente se relacionan con los niveles de riesgo. La organización deberá ser capaz de verificar periódicamente la efectividad de sus sistemas internos de control.

2. Las autoridades supervisoras deberán examinar las estrategias y evaluaciones internas de la suficiencia de capital de las instituciones, así como la capacidad de éstos para vigilar y garantizar su propio cumplimiento de los coeficientes de capital regulador. Las autoridades supervisoras deberán intervenir cuando no queden convencidas con el resultado de este proceso. El organismo supervisor tiene la responsabilidad de examinar periódicamente, tanto los procesos de evaluación utilizados por las instituciones como los mecanismos internos de control que aplican. En la práctica, el supervisor deberá examinar la manera en que se ha implementado cada uno de los aspectos que involucran el proceso de identificación de riesgo y determinación de capital.

3. Los supervisores deberán esperar que las instituciones operen por encima de los coeficientes mínimos de capital regulador y tendrán la capacidad de exigirles que lo mantengan. El Comité estima que los requerimientos determinados en el Primer Pilar deben incluir un margen que considere incertidumbres.

4. Los supervisores deberán intervenir, a fin de evitar que el capital descienda por debajo de los niveles mínimos requeridos para cubrir las características de riesgo de una institución en particular; deberán exigir la inmediata adopción de medidas correctoras si el capital no se mantiene en el nivel requerido o no se restaura a ese nivel.

Tercer Pilar (Disciplina de Mercado)

Es un complemento de los dos anteriores y tiene como objetivo normar y promover mejores estándares para la forma en que las instituciones financieras publican la información relativa a los mecanismos de medición de los riesgos y de determinación de las exigencias mínimas de capital. Estas normas tienen como propósito fomentar la disciplina del mercado, evaluar la información y facilitar la comparación entre diferentes entidades. Entre los elementos más sobresalientes se tienen:

- ***Lograr una adecuada divulgación***: los mecanismos para ello dependerán del supervisor.

- ***Pertinencia de la información***: una información se considera como pertinente cuando su omisión o declaración errónea pudieren modificar o influenciar la evaluación o decisión de un usuario que dependa de esa información.

- ***Frecuencia***: como regla general se establece generar información semestral; sin embargo para cierto tipo de información la periodicidad es anual o trimestral.

- ***Información en propiedad y confidencial***: las normas de divulgación deben proteger la información en propiedad y confidencialidad.[11]

- ***Política de divulgación***: las instituciones deben contar con una política formal de divulgación aprobada por la administración superior, en donde se establezca el tipo de información a divulgar, la validación de los antecedentes entregados al mercado y la periodicidad de los reportes.

Aunque fue un proceso complejo la creación de los acuerdos de Basilea II, se logró principalmente la transparencia, así como también:

- La medición del riesgo de aquellos instrumentos financieros con gran complejidad.

- Ajustes continuos de las estructuras en los procesos de medición, para el logro de la consistencia.

- Nuevas alternativas de medición del riesgo, recopilando con ello las diferentes realidades que se pueden apreciar en los distintos mercados, en especial respecto a su capacidad para generar información (mayor grado de flexibilidad).

- Compromiso por parte de la alta dirección en la administración del riesgo de las instituciones, así como también un refuezo de las labores de supervisión.

De esta manera la efectividad de Basilea II dependerá de la habilidad de los organismos reguladores y de las atribuciones legales que estos dispongan para ejercer. Independientemente de que algunos de los aspectos no puedan ser aún implementados en todos los mercados, el Acuerdo de Basilea II constituye un importante aporte en orden a fortalecer los sistemas financieros.

[11] Se entiende por información en propiedad aquella que si se comparte reduce el valor de la inversión de la institución, un ejemplo es el uso de sistemas.

1.3 Regulación financiera sobre la aplicación del VaR

Idealmente se desearía que el sistema de medición de riesgos expresara la exposición al riesgo de manera resumida; sin embargo entre más compleja sea la actividad en los mercados más complejo será el sistema de medición que se deba de utilizar.

Al introducir la disciplina que se impone a través de los estándares, se tiene como propósito mejorar el proceso de fortalecimiento de los mercados financieros y con ello alcanzar mejoras en las técnicas de administración de riesgos.

La Enmienda al Acuerdo de Capital (1996), establece la regulación financiera sobre los parámetros y forma de cálculo del VaR. Aunque las instituciones tendrán flexibilidad para diseñar las características precisas de sus modelos, deberán aplicar los siguientes estándares mínimos a efectos de calcular su requerimiento de capital:

- El Valor en Riesgo (VaR) deberá calcularse con periodicidad diaria y utilizando un intervalo de confianza del 99 %.
- Al calcular el VaR, se aplicará una oscilación de precios de 10 días hábiles.[12]
- La muestra de datos para estimar el VaR debe contener al menos un año,[13] salvo que el supervisor considere lo contrario. El supervisor local deberá evaluar la adopción por parte de las instituciones de las distintas formas de calcular o proyectar la volatilidad, aunque el BIS tolera el uso del método de media móvil simple de los retornos para la estimación de la volatilidad futura.[14]
- Las instituciones deberán actualizar sus datos al menos una vez cada tres meses y cada vez que los precios de mercado hayan sufrido cambios considerables. La autoridad supervisora también podrá exigir que se calcule el VaR utilizando un periodo de observación más corto si estuviera justificado, a juicio del supervisor, por un incremento en la volatilidad de los precios.
- La metodología usada para el cálculo del VaR es decisión de la institución, sin embargo los modelos utilizados deben captar todos los riesgos materiales a los que la institución está expuesta; podrán utilizar modelos basados en matrices de varianza y covarianza (si las carteras de inversión están conformadas por instrumentos pocos sofisticados), simulaciones históricas o simulaciones Montecarlo.
- Los modelos de las instituciones deben recoger con precisión los riesgos específicos asociados a las *opciones* dentro de cada categoría de riesgos. Los siguientes criterios son aplicables para el cálculo del riesgo de las opciones:
    - Los modelos de las instituciones deben captar las características de precios no lineales de las posiciones con opciones.
    - Se espera que con el tiempo, las instituciones apliquen una muestra de precios completa de 10 días para sus posiciones con opciones o similares. Mientras esto no ocurra, las autoridades nacionales pueden exigir a las mismas que ajusten su cálculo de capital para el riesgo por opciones con otros métodos (simulaciones periódicas o pruebas de estrés).

[12]El BIS propone que las predicciones para el horizonte temporal se efectúen aplicando la regla de la raíz cuadrada del tiempo.

[13]Últimos 252 datos diarios.

[14]Capítulo 4.

- El sistema de medición de riesgos de cada institución deberá utilizar un conjunto de factores de riesgo que capte las volatilidades de las tasas y precios que subyacen a las posiciones con opciones. Aquellas que manejen carteras de opciones relativamente grandes y/o complejas deberán contar con especificaciones detalladas de las volatilidades pertinentes.

- Basado en un nivel de confianza del 99 %, el Comité de Basilea establece que el Requerimiento Mímimo de Capital (RMC), que diariamente debe asignar cada empresa para riesgos de mercado, será equivalente al máximo entre el VaR del día anterior y el VaR promedio de los últimos 60 días multiplicado por un factor que fluctúa entre 3 o 4, dependiendo del número de veces en el que la pérdidas son mayores al VaR:[15]

$$RMC_{t+1} = Max\left[VaR_t; (factor)\frac{1}{60}\sum_{t=1}^{60} VaR_{t-1}\right]$$

No. de excepciones	Factor multiplicativo
0 - 4	3
5	3.4
6	3.5
7	3.65
8	3.75
9	3.85
10 ó más	4

este procedimiento constituye para las autoridades supervisoras una herramienta para premiar a las entidades financieras en función de la evaluación del modelo interno de riesgo de mercado y de ese modo, genera incentivos para que los administradores de riesgo procuren mantener modelos del VaR bien calibrados.[2]

Las instituciones deberán contar con un proceso para analizar las excepciones identificadas durante las comprobaciones de los modelos para el riesgo. Este proceso será esencial para corregir dichos modelos en caso de que resulten imprecisos.

1.3.1 Pruebas de Estrés

Cuando una institución esté expuesta al riesgo de eventos imprevistos, que no esté contemplado en el VaR por sobrepasar el periodo de mantenimiento de 10 días y el intervalo de confianza del 99 % (acontecimientos de escasa probabilidad y graves consecuencias), ésta deberá cerciorarse de que el impacto de tales eventos quede incorporado en su evaluación interna del capital, esto se podrá realizar a través de Pruebas de Estrés:[16]

- Las instituciones que utilicen modelos internos para calcular sus requerimientos de capital por riesgo de mercado, deben contar con un riguroso programa de pruebas de estrés que les permita identificar circunstancias o factores que pudieran afectarles seriamente. Estas pruebas son un componente clave para la evaluación que realiza cada institución con respecto a su posición de capital.

[15] Número de excepciones.
[16] Capítulo 4.

- Los escenarios que se contemplan, deben de cubrir aquellos factores que pudieran originar pérdidas o ganancias extraordinarias en las carteras de inversión o que pudieran complicar en gran medida el control del riesgo en dicha cartera. Estos factores incluyen acontecimientos de escasa probabilidad en los principales tipos de riesgo, incluyendo los diversos componentes de riesgo de mercado, de crédito y operativo. Los escenarios utilizados deben aclarar el impacto que tendrían dichos eventos en posiciones con características de precios tanto lineales como no lineales (opciones e instrumentos con características similares).

- Estas pruebas deberán ser cualitativas y cuantitativas, incorporando los aspectos de las alteraciones del mercado relacionados con el riesgo de mercado y la liquidez. Los criterios cuantitativos deben identificar escenarios a los que puedan estar expuestos las instituciones. Por su parte, los criterios cualitativos deben enfatizar los dos principales objetivos de la prueba: evaluar la capacidad de los fondos para absorber grandes pérdidas potenciales e identificar las medidas que se puede adoptar para reducir el riesgo y conservar el capital. Este ejercicio es crucial para el establecimiento y evaluación de la estrategia de gestión de cada institución, por lo que los resultados deberán comunicarse de manera periódica.[2]

- Las instituciones deberán combinar el uso de determinados escenarios con pruebas de estrés desarrolladas por ellos mismos, a fin de reflejar sus características de riesgo específicas. Por su parte, las autoridades de supervisión podrán solicitar a las mismas que proporcionen información sobre sus pruebas, de tal manea que:

    - Las instituciones deberán poner a disposición de las autoridades supervisoras información acerca de sus mayores pérdidas durante el periodo declarado; estos datos pueden compararse con el nivel de capital que recomienda el sistema interno de medición la institución.
    - Las instituciones deberán someter sus carteras a una serie de simulaciones e informar de los resultados a las autoridades supervisoras; estas simulaciones podrían consistir en someter la cartera actual a periodos anteriores de tensión significativa, incorporando en cada caso tanto las oscilaciones de precios como la reducción de liquidez asociadas con estos eventos. Un segundo tipo de escenario consistiría en estimar la sensibilidad de la exposición de la institución al riesgo del mercado ante cambios en la volatilidad; para ello, habría que estimar el margen histórico de variación de las volatilidades y evaluar después las posiciones actuales con respecto a los valores extremos del margen histórico.
    - Además de los escenarios prescritos por las autoridades supervisoras, las instituciones deberán desarrollar sus propias pruebas en las que analicen los acontecimientos más adversos para su cartera; además deberán proporcionar a las autoridades supervisoras una descripción de la metodología utilizada para identificar y probar otros escenarios, así como una descripción de los resultados obtenidos. Estos resultados deberán ser revisados periódicamente por la alta gerencia de cada institución y deberán quedar reflejados en las políticas y límites establecidos por la dirección y el Consejo de Administración. Si las pruebas revelan cierta vulnerabilidad a una serie de circunstancias, las autoridades nacionales entenderán que las instituciones adoptarán todas las medidas necesarias para gestionar dichos riesgos adecuadamente, cubriéndose frente a tal eventualidad o reduciendo el tamaño de su exposición.

1.3.2 Validación externa

Al validar la exactitud de los modelos, las autoridades supervisoras deberán incluir como mínimo las siguientes etapas:

- Verificar que los procesos de validación interna funcionan de manera satisfactoria.
- Garantizar que las fórmulas utilizadas para el cálculo de capital y para la valoración de opciones y otros instrumentos complejos son validadas por una unidad calificada, que deberá ser siempre independiente de la unidad de negociación.
- Comprobar que la estructura de los modelos internos resulta adecuada a las actividades de la institución.
- Verificar los resultados obtenidos por la institución, al comprobar su sistema de medición interna, para garantizar que el modelo proporciona una medida confiable de las pérdidas potenciales a lo largo del tiempo. Esto supone que las instituciones deberán poner a disposición de las autoridades supervisoras, que lo soliciten, tanto sus resultados como los datos utilizados en los cálculos de Valor en Riesgo.
- Asegurarse de que los flujos de datos y los procesos asociados al sistema de medición de riesgo sean transparentes y accesibles, es decir, los supervisores deben poder acceder fácilmente, siempre que lo consideren necesario, a las especificaciones y parámetros de los modelos, siguiendo siempre los procedimientos pertinentes.

1.3.3 Modelos internos y Metodología estándar

A menos que la exposición de una institución a un determinado factor de riesgo sea insignificante, el método de los modelos internos exigirá en principio que las instituciones cuenten con un sistema integrado de medición de riesgo que abarque las principales categorías de factores de riesgo (tipos de interés, tipos de cambio y precios de los productos básicos), incluyendo en cada categoría las volatilidades correspondientes. De esta manera, las instituciones que empiecen a utilizar modelos para una o más categorías de factores de riesgo deberán, con el tiempo, ampliar sus modelos a todos los riesgos de mercado. Las condiciones a las cuales estarán sujetas las instituciones son:

- Cada categoría de factores de riesgo deberá evaluarse utilizando un único método (modelos internos o bien el método estándar), es decir, no se permitirá en principio ninguna combinación de los dos sistemas dentro de una misma categoría de riesgo o entre distintas entidades.
- Las instituciones no podrán modificar su combinación de ambos métodos sin justificar una razón de peso para ello, ante su autoridad supervisora.
- Ningún elemento del riesgo de mercado podrá escapar a la medición, es decir, habrá que abarcar la exposición a todos los factores de riesgo, ya sea utilizando el método estándar o los modelos internos.
- Los requerimientos de capital calculados según el método estándar y según los modelos internos deberán agregarse mediante una suma.

1.3.4 Estándares para la validación de modelos

Es importante que las instituciones cuenten con procesos para asegurar que sus modelos internos han sido adecuadamente validados, para así garantizar que los modelos son conceptualmente sólidos y reflejan con precisión todos los riesgos significativos. Esta validación deberá realizarse durante la fase inicial de desarrollo del modelo y también cuando se produzca cualquier cambio significativo para el mismo; también deberá llevarse a cabo de forma periódica, especialmente cuando se haya producido algún cambio estructural sustancial en el mercado o en la composición de la cartera que pueda alterar la precisión del modelo. A medida que evolucionen las técnicas las instituciones deberán adaptarse a ellas; la validación de modelos no deberá limitarse a una simple comprobación, sino que deberá incluir como mínimo los siguientes aspectos:

- Pruebas que demuestren que cualquier supuesto utilizado en el modelo interno resulta adecuado y no subestima el riesgo. Esto podría incluir los supuestos de la distribución normal, el uso de la raíz cuadrada del tiempo para escalar el periodo o los modelos para la fijación de precios.
- Además de los programas reguladores de comprobación, las pruebas para la validación de modelos deberán realizarse mediante pruebas adicionales, en las cuales se podrá incluir:
    - El uso de cambios hipotéticos, que podrían ocurrir en el valor de la cartera si las posiciones al cierre de la jornada permanecieran intactas.
    - La realización de pruebas durante periodos de tiempo superiores a los exigidos en los programas de comprobación, para mejorar así la eficacia de las pruebas. Sin embargo, un periodo de tiempo más amplio puede no ser recomendable si el modelo VaR o las condiciones de mercado han cambiado hasta el punto de que los datos históricos dejan de ser relevantes.
    - Uso de intervalos de confianza distintos del 99 %, exigido en los estándares cuantitativos.
- El uso de carteras hipotéticas para asegurar que el modelo es capaz de recoger circunstancias estructurales concretas que puedan surgir, como por ejemplo:
    - Cuando las series de datos utilizadas para un instrumento concreto no cumplen los estándares cuantitativos y la institución debe calcular estas posiciones con parámetros de aproximación, esta deberá asegurarse de que los valores de aproximación utilizados ofrecen resultados conservadores en los escenarios de mercado.
    - La institución deberá asegurarse de que los principales riesgos de base quedan contemplados adecuadamente, incluyendo desajustes entre posiciones largas y cortas por vencimiento.
    - También debe asegurarse de que el modelo refleja el riesgo de concentración que puede surgir en una cartera no diversificada.

1.4 Sistema Financiero Mexicano (SFM)

El funcionamiento de los sistemas financieros afecta de manera significativa sobre prácticamente todas las actividades económicas y constituye uno de los elementos clave en la determinación de la prosperidad de los países.

La regulación que se aplica a los intermediarios financieros y el entorno macroeconómico son factores clave en el desempeño de los sistemas financieros y en la contribución de éstos al desarrollo económico.

Dado que el sistema financiero no requiere de reglas específicas para preservar condiciones competitivas, el reto en el diseño de la reglamentación de las instituciones financieras radica en mantener ciertas garantías de solvencia y corregir las deficiencias que se originen, procurando que las medidas orientadas a estos fines interfieran lo menos posible con el desarrollo de un ambiente competitivo. Una regulación muy estricta puede desalentar la competencia y resultar ineficiente, mientras que una regulación débil puede igualmente desalentar por la inseguridad en el ahorro o hacerla ineficiente.

1.4.1 Antecedentes

El inicio de la historia moderna del Sistema Financiero Mexicano (el cual ha jugado un papel importante en la evolución de la economía mexicana), se sitúa en 1925 con la creación del Banco de México. Los primeros años de operación del Banco de México (1925-1931), fueron extremadamente difíciles para que éste cumpliera sus funciones como banco central.

En 1941 se dio un paso definitivo para la consolidación del Sistema Financiero Mexicano mediante dos reformas de gran importancia. La primera fue la nueva Ley Orgánica del Banco de México y la segunda la Ley de Instituciones de Crédito y Organizaciones Auxiliares. La formulación de la Ley General de Instituciones de Crédito y Organizaciones Auxiliares dejó establecido que el sistema bancario sería el corazón del SFM, siendo el resto de las instituciones financieras, participantes secundarios en el proceso del financiamiento del desarrollo económico.

El Sistema Financiero Mexicano, teniendo como máximo órgano administrativo a la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP), está constituido por un conjunto de instituciones (sociedades de inversión, casas de bolsa, aseguradoras y afianzadoras, instituciones de crédito e intermediarios financieros) que captan, administran y canalizan a la inversión, el ahorro tanto de nacionales como de extranjeros.

El SFM ha experimentado una profunda transformación en los últimos años, lo que se manifiesta en el crecimiento del ahorro financiero, mayor disponibilidad de crédito y una mejora en los índices de productividad.

1.4.2 Aspectos de la regulación en México

En México, las prácticas de regulación y administración de riesgos se diferencian de acuerdo con las actividades de intermediación financiera, esto es con la finalidad de que los intermediarios financieros desempeñen sus funciones de manera especializada a fin de garantizar una adecuada estabilidad y funcionamiento.

La administración de las instituciones en México depende de las prácticas internacionales en cuanto a su definición y desarrollo. Así mismo la globalización del Sistema Financiero Mexicano, en un nivel regulatorio, comenzó con la adopción en 1994 de las recomendaciones del Comité de Basilea de 1988; aunque esto fijó un estándar para medir la solvencia y desempeño de las instituciones mexicanas, esto no fue suficiente para dimensionar y reducir los problemas del sistema que se manifestaron en 1994.

Durante los últimos años el marco regulatorio del SFM ha sufrido importantes cambios:

- En la década de los 80's la operación de los bancos mexicanos estaba muy regulada.

- A partir de 1989 se inició un proceso de desregulación y liberación del sistema financiero; se autorizó la presencia de los grupos financieros con el propósito de orientar a las instituciones hacia el concepto de banca universal.
- En 1991 se inició el proceso de privatización de los bancos, se otorgaron concesiones a bancos nuevos y en el marco del Tratado de Libre Comercio se permitió la presencia de bancos extranjeros. Se autorizó la operación de nuevos instrumentos (productos derivados).

La privatización de los bancos trajo consigo posiciones de riesgo elevadas, en este periodo ocurrió la devaluación del peso en diciembre de 1994, el incremento de la inflación y de las tasas de interés.

La internacionalización del sector financiero mexicano es relativamente reciente, ya que se manifestó tras la crisis financiera de 1994 como parte de una estrategia para reorganizar al sistema financiero; en el sector bancario se logró el aseguramiento de los depósitos de los clientes, así mismo fue posible el rescate de los bancos y el cambio y retiro de las concesiones de propiedad de los intermediarios.

La nueva normatividad mexicana busca resolver los problemas de información y mejorar el manejo de riesgos, mediante la adopción de Sistemas de Acciones Correctivas Tempranas (Early Warning Systems) y el fomento a la disciplina de mercado (buscan homogeneizar la información y requisitos que debería utilizar las instituciones para facilitar el análisis de solvencia y la situación financiera). Esta normatividad mexicana en materia de riesgos, está de acuerdo a los lineamientos de Basilea II.[17]

En México existe un consenso de que la valuación de las carteras de inversión debe hacerse a precios de mercado, debido a que el valor de mercado es el mejor parámetro de referencia para la valuación del riesgo de las carteras de inversión de las instituciones.

Por otro lado las autoridades regulatorias mexicanas estiman el VaR con diferente periodicidad, así mismo un gran número de instituciones financieras (bancos, afores y casas de bolsa) realizan las estimaciones en diferentes grados de automatización y cobertura.

El principal reto para los responsables de la administración de riesgos en México, consistirá en hallar el equilibrio entre las especificaciones nacionales y el ámbito de aplicación de las prácticas internacionales.

Actualmente se busca que el marco regulatorio genere mejores prácticas y que estas se traduzcan en mayores oportunidades para el sector financiero. Entre las tareas pendientes destaca el mejoramiento de las instituciones legales y de manejo de información para que sustenten un sistema financiero moderno acorde con las necesidades del país.

Las prácticas de administración y regulación de riesgos financieros, en la actualidad son influidas por los lineamientos de Basilea II, los cuales son reconocidos por más de 130 países, además del FMI y el Banco Mundial como buenas prácticas.

[17]Indica que se realizarán procesos formales de identificación y recopilación de eventos de pérdida, con el fin de contar con series de tiempo que sirvan para analizar la importancia y recurrencia de dichos eventos mediante modelos financieros.

2

Valor en Riesgo

El Valor en Riesgo (VaR) es un método para cuantificar la exposición al riesgo de mercado por medio de técnicas estadísticas, de tal manera que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio en un intervalo de tiempo, dado cierto nivel de confianza. Esta medida es válida únicamente en condiciones estables de mercado, ya que cuando existen tiempos de crisis la pérdida máxima esperada se define por medio de Pruebas de Estrés o Valores Extremos.

La verdadera importancia de la estimación del VaR, va más allá de encontrar un valor único, ya que está involucrado un proceso de identificación y cuantificación del riesgo, siendo un componente de gran importancia para el análisis, medición y manejo del mismo. El Valor en Riesgo no otorga certidumbre con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir, sino una expectativa de resultados basada en algunos supuestos de los modelos o parámetros que se utilizan para su cálculo.

Para la estimación del VaR se han desarrollado diversas metodologías, entre las más importantes y utilizadas se encuentran: método paramétrico, simulación histórica y simulación Montecarlo. El método paramétrico permite calcular el VaR a través de una fórmula explícita, se usa principalmente para instrumentos financieros lineales; el método de simulación histórica estima el VaR por medio de información y datos históricos evaluando las posiciones para cada cambio en el mercado; por otro lado en la simulación Montecarlo se calcula el VaR a través de escenarios aleatorios y de la valuación de las posiciones del portafolio, los últimos dos métodos son apropiados para todo tipo de instrumentos tanto lineales como no-lineales. Las tres aproximaciones para el cálculo del VaR tienen algo que ofrecer y pueden ser usadas en conjunto para obtener una estimación más exacta de la exposición al riesgo de un determinado portafolio.

2.1 Elementos preliminares al concepto de VaR

2.1.1 Teoría de Portafolios

El desarrollo de los mercados nacionales e internacionales, en los últimos años, ha traído consigo productos más complejos que han incrementado el riesgo para los inversionistas, haciendo fundamental la implementación de medidas que permitan cubrirse de éste así como tomar decisiones acertadas oportunamente. Actualmente las instituciones están más conscientes de los riesgos asociados con las inversiones; por ello durante las últimas décadas se han desarrollado modelos y técnicas cuantitativas para la administración de inversiones. El enfoque de la Teoría de Portafolios, presentada por Harry Markowitz (1952) simplificó notablemente el problema de selección de inversiones, al considerar los rendimientos de los activos como un proceso estocástico y centrarse exclusivamente en tres parámetros básicos: media, varianza y covarianza de las tasas de rendimiento de los activos.

Antes de que se aplicara el enfoque de Markowitz, la selección de inversiones involucraba un costoso proceso de recopilación y procesamiento de información (estados financieros y balances).

Si no existiera incertidumbre todos los inversionistas invertirían en el activo que ofreciera la más alta tasa de rendimiento, sin embargo esto no es sencillo de lograr, ya que en el mercado para obtener mayor rentabilidad el inversionista estará expuesto a un mayor riesgo. Intuitivamente cualquier inversionista trata de diversificar su portafolio o reducir el riesgo al repartir su capital entre diferentes alternativas y seleccionar un portafolio óptimo de inversión.

El resultado más importante del enfoque de Markowitz, permite encontrar combinaciones de activos (portafolios) que simultáneamente cumplen con dos condiciones: tienen la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles y al mismo tiempo el rendimiento esperado máximo; de acuerdo a la teoría de Markowitz aquellas combinaciones que reúnen estos dos atributos se llaman *portafolios eficientes* y el conjunto de portafolios eficientes es conocido como la *frontera de portafolios eficientes*. Los portafolios eficientes dominan a todos los que no lo son y por ello este resultado reduce drásticamente el número de posibilidades de inversión a escoger por un inversionista.[18]

Como toda teoría, el enfoque de Markowitz tiene una serie de supuestos, los más importantes son:

- Existen en el mercado n activos con los cuales se puede formar un portafolio.
- Los activos son perfectamente divisibles, es decir, están disponibles en el mercado en fracciones.
- Para cada uno de estos activos se puede calcular el valor esperado del rendimiento, la varianza, la desviación estándar y las covarianzas de cada uno de los activos con respecto a los demás.
- La selección de inversiones se refiere estrictamente para un periodo.
- Las preferencias entre riesgo y rendimiento del inversionista pueden expresarse matemática o gráficamente en un espacio definido por la varianza o desviación estándar y la expectativa de rendimiento.
- Se ignoran todo tipo de costos de transacción, en particular, no se consideran impuestos ni comisiones.

De esta manera, en el contexto de un portafolio de inversión, los parámetros que se emplean para estructurarlo son:

1. Rendimiento esperado para cada instrumento:

$$\overline{R} = \mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^{n} p_i R_i$$

donde p_i es la probabilidad del rendimiento esperado de dicho instrumento, asociada con el escenario i y R_i el rendimiento correspondiente al periodo i. Para el cálculo del rendimiento esperado de un instrumento, a través de su rendimiento histórico, se calcula con un promedio aritmético (suma de los rendimientos históricos, entre el número de observaciones o periodos):

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{n}$$

2. Rendimiento esperado de un portafolio de inversión, para un cierto periodo de tiempo específico:

$$\overline{R}_p = \mathbb{E}(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(R_i)$$

donde $\overline{R}_i = \mathbb{E}(R_i)$ es el rendimiento esperado del instrumento i y w_i la proporción que el instrumento i tienen en el portafolio; es así que $\overline{R}_p$ el rendimiento esperado del portafolio compuesto por n activos, es un promedio ponderado de los rendimientos de todos sus componentes. Existe la restricción de que la suma de las proporciones debe ser igual a la unidad es decir, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.[18]

3. Riesgo para el instrumento i: medido a través de la desviación estándar de los rendimientos:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{i,t} - \overline{R}_i)^2}{n}}$$

4. La covarianza entre los diferentes activos (tomados por parejas): representa una medida de relación lineal entre dos variables (rendimientos), describiendo el movimiento conjunto de éstas, se determina mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} Cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{i,t} - \overline{R}_i)(R_{j,t} - \overline{R}_j)}{n} \\ &= \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \end{aligned}$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación de los rendimientos de ambos activos. El coeficiente de correlación tiene un rango de fluctuación claramente acotado $-1 \leq \rho \leq 1$; es una medida de como se comportan los rendimientos de dos activos ante diversas circunstancias que los afectan; cuando $\rho_{ij} = 1$, los rendimientos se mueven en el mismo sentido y de manera proporcional (correlación positiva perfecta); si $\rho_{ij} = -1$ los rendimientos se mueven en sentidos opuestos, es así que el movimiento ascendente de uno se compensa exactamente con el movimiento descendente del otro (correlación negativa perfecta); finalmente si $\rho_{ij} = 0$ los rendimientos de los dos activos no tienen relación lineal, ya que se mueven de manera independiente.[1]

5. Riesgo de un portafolio de inversión: en este caso no es el promedio ponderado de las desviaciones estándar de los activos individuales, ya que depende de la relación entre los diversos rendimientos de activos (covarianza), que ayuda al inversionista a diversificar o

[1] Glosario.

reducir el riesgo del portafolio de inversión; si bien existen beneficios de la diversificación, el riesgo de un portafolio no se puede eliminar totalmente sino minimizar. Es así que el riesgo de la cartera diversificada, medido a través de la desviación estándar es:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{[w_1, w_2, ..., w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}}$$

en donde se considera la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los n activos; σ_{ij} es la covarianza de los rendimientos de los activos si $i \neq j$, cuando $i = j$ se tiene la covarianza del activo consigo mismo, es decir, la varianza del rendimiento del activo correspondiente; puesto que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ entonces la matriz de varianzas y covarianzas es una matriz simétrica.

Por lo tanto, el riesgo de un portafolio conformado por n activos es:

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + ... + w_n^2\sigma_n^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + ... + 2w_{n-1}w_n\sigma_{(n-1)n}}$$

como puede observarse, a medida que el número de los activos se incrementa, las covarianzas tienen mayor peso dentro de la desviación estándar de un portafolio, de esta manera ayudan a diversificar el riesgo.

Una vez que se conoce la rentabilidad y el riesgo de los diversos activos; el siguiente paso es combinarlos, para la construcción de infinidad de portafolios, de los cuales serán de gran interés aquellos que permitan optimizar el riesgo o el rendimiento, de manera que para cada nivel de rendimiento se tenga el menor riesgo posible.

Posteriormente y basados en la teoría de Markowitz, Sharpe (1964) y Lintner (1965) desarrollaron el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) o modelo de valuación de activos de capital, a través del cual se obtiene la *cartera óptima*, que es la que permite la mejor combinación de rentabilidad-riesgo dentro de los activos disponibles en el mercado. De esta manera, los administradores de portafolios disponen cada vez más de mayor información y de mejores técnicas de optimización para la toma de decisiones.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente portafolio que está compuesto por dos activos, se muestra una tabla con la fluctuación mensual de los precios de los activos, así como la proporción de cada uno en el portafolio:

Fecha	P_1	P_2
Dic	21.71	26.72
Ene	19.18	31.18
Feb	23.16	41.69
Mar	27.46	38.89
Abr	33.34	40.84
May	30.64	38.27
Jun	24.78	31.03
Jul	20.09	35.64
Ago	23.58	37.27
Sep	32.36	35.15
Oct	31.27	46.72
Nov	33.45	31.80
Dic	28.32	52.25
w_i	40 %	60 %

de esta manera con la información anterior se tiene:[2]

$$\overline{R}_1 = \frac{ln(19.18/21.71) + ... + ln(28.32/33.45)}{12} = 0.02215$$

$$\overline{R}_2 = \frac{ln(31.18/26.72) + ... + ln(52.25/31.80)}{12} = 0.055886$$

$$\Rightarrow \quad \overline{R}_p = (0.40)(0.02215) + (0.60)(0.055886) = 0.042391$$

es así que la tasa de rendimiento del portafolio es de 4.2391 %.

Ahora deseamos conocer la volatilidad del portafolio, entonces calcularemos primero la volatilidad de cada instrumento y posteriormente la covarianza:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{((ln(19.18/21.71)) - \overline{R}_1)^2 + ... + ((ln(28.32/33.45)) - \overline{R}_1)^2}{12}} = 0.174919$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{((ln(31.18/26.72)) - \overline{R}_2)^2 + ... + ((ln(52.25/31.80)) - \overline{R}_2)^2}{12}} = 0.228460$$

$$\sigma_{12} = \frac{((ln(19.18/21.71)) - \overline{R}_1)((ln(31.18/26.72)) - \overline{R}_2) + ...}{12} = -0.007528$$

$$\sigma_p = \sqrt{((0.4^2)(\sigma_1^2)) + ((0.6^2)(\sigma_2^2)) + (2(0.4)(0.6)(\sigma_{12}))} = 0.141676$$

de esta manera hemos encontrado la volatilidad de nuestro portafolio, 14.1676 %.

Estos parámetros que hemos encontrado serán de gran utilidad, ya que a partir de esta información podremos obtener, posteriormente, otros datos relacionados con un portafolio de inversión y con ello tomar decisiones relacionadas con la postura de un inversionista o institución financiera.

[2]En la literatura existen varias formas para el cálculo de los rendimientos, sin embargo lo más apropiado es usar la variación logarítmica. Para más información revisar el glosario.

2.2 Concepto de Valor en Riesgo

En la práctica los precios de los activos pueden cambiar en cualquier instante, sin embargo por bruscos que puedan ser, es razonable suponer que tienen un comportamiento continuo.

2.2.1 Valor en Riesgo paramétrico

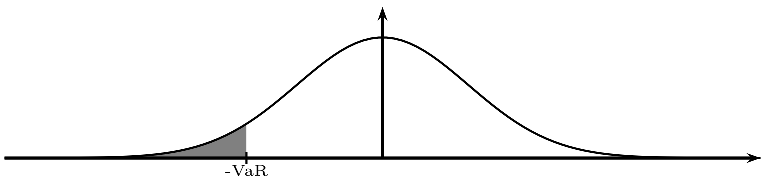
Para la definición del VaR consideraremos un proceso X con una evolución aleatoria el cual describe el comportamiento de los rendimientos de un portafolio en un intervalo de tiempo $[t, T]$. Suponemos que dicho proceso tiene una dinámica, determinada por una función de densidad cualquiera, así como un nivel de confianza de $1 - q$.

A partir de lo anterior se tiene que el Valor en Riesgo de X al nivel de confianza $1 - q$, en un periodo de tiempo, $[t, T]$, está dado por:

$$\begin{aligned} VaR_{1-q}^{X} &= -inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\{X \leq x\} \geq q\} \\ &= -sup\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\{X \leq x\} \leq q\} \end{aligned}$$

el cual es una estimación estadística del peor valor de X con cierto grado de confianza en un intervalo de tiempo dado.

La siguiente gráfica ilustra el concepto del Valor en Riesgo, el cual puede ser aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas.



Gráfica 2.1: *Valor en Riesgo de X al nivel* $1 - q$.

2.3 Parámetros para estimar el Valor en Riesgo

Aspectos fundamentales que se deben definir, dentro de las instituciones financieras, para el cálculo del VaR.

Antes de describir los parámetros necesarios para un adecuado cálculo del VaR, se debe mencionar que una adecuada estimación de la volatilidad, permite obtener estimaciones del VaR confiables.[3]

2.3.1 Distribución de probabilidad

Uno de los principales requerimientos para la estimación del VaR es conocer la distribución de probabilidad de los cambios futuros del valor de mercado del portafolio así como de cada posición durante el periodo de vigencia del mismo, para lo cual es necesario:[4]

[3] En el Capítulo 4 se mencionan las metodologías más usadas para la estimación de la volatilidad.

[4] Distribución de probabilidad: Indica la relación entre los posibles resultados y su probabilidad de ocurrencia.

- Identificar los factores de riesgo que pueden influir en el valor de mercado del portafolio de inversión.
- Estimar la distribución de probabilidad de los cambios de los factores de riesgo, con el objetivo de predecir un rango de posibilidades.
- Construir la distribución de probabilidad de los cambios en el valor de mercado del portafolio, a partir de la distribución de probabilidad estimada.[34]

2.3.2 Horizonte temporal

Es el periodo sobre el cual se mide la posible pérdida producida por movimientos adversos en los precios, este plazo va a depender de las características del inversionista, del grado de liquidez del mercado, costos de transacción, así como de la posición que se tenga. Los plazos de tiempo utilizados con más frecuencia son:[3]

- 1 día. Recomendado por Riskmetrics^{TM}, también conocido como DEaR (Daily Earning at Risk). Debido a rápidos cambios en las posiciones y a la elevada liquidez de las carteras, es el que se usa con más frecuencia en bancos, sociedades de valores, cámaras de compensación, operadores, etc.
- 10 días. Recomendado por el Banco de Pagos Internacionales de Basilea para determinar las necesidades de capital de cada banco.
- 25 días. Utilizado por varios fondos de inversión y pensiones.
- 65 días. Es usado por varias instituciones, sin embargo lo complementan con periodos menores.

Para la elección del periodo de tiempo es necesario conocer la liquidez de los mercados en los cuales operan las instituciones, ya que el periodo que se considere debe garantizar la liquidación de las posiciones. Si una posición puede ser liquidada de forma rápida entonces se puede elegir un periodo de tiempo corto; por otro lado si toma mayor tiempo la liquidez de las posiciones es preferible un periodo más largo.[14]

Actualmente los bancos comerciales reportan su VaR sobre un horizonte diario a causa del gran volumen de transacciones en sus portafolios. Los portafolios de inversión, especialmente los fondos de pensiones, generalmente ajustan sus exposiciones al riesgo de manera más lenta eligiendo periodos más amplios.[25]

2.3.3 Nivel de confianza

Este parámetro se refiere al grado de protección que se considera adecuado frente a posibles cambios adversos de los precios, la elección del nivel de confianza para el cálculo del VaR depende de lo que se quiera realizar, así como de las características de la institución y de los inversionistas; los niveles más recomendados se encuentran entre 95 y 99 %. El Banco Internacional de Liquidaciones (BIS) recomienda definir un nivel de confianza del 99 % para los intermediarios financieros, mientras tanto JP Morgan recomienda 95 % para operaciones en mercados líquidos.

Es importante elegir un nivel de confianza que permita a los usuarios verificar las estimaciones regularmente.

Si el VaR se utiliza sólo para proporcionar un criterio interno aplicable a toda la empresa para comparar los riegos entre diferentes mercados, entonces la elección del nivel de confianza no debe ser con tanta rigurosidad.

2.4 Valor en Riesgo bajo el supuesto de normalidad

En la práctica se supone la mayor parte de tiempo que la función de densidad de los rendimientos es una distribución normal, es así que:[5]

$$X \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t))$$

Existe la posibilidad de considerar otras funciones de distribución, sin embargo asumir normalidad tiene una gran ventaja ya que permite que las estimaciones del VaR sean más simples. La justificación de utilizar el supuesto de normalidad se basa en el principio de que conforme se incrementa el número de observaciones, las diferentes distribuciones de probabilidad convergen a una normal.

Al tener como principal supuesto que el rendimiento de un portafolio tiene un comportamiento muy aproximado al de una curva de densidad de probabilidad normal, es posible expresar el nivel de confianza en términos de un sólo parámetro z_q, el cual nos indica que tan lejos nos encontramos de la media en términos de la desviación estándar.[14] Consideremos el caso en el que deseamos tener un nivel de confianza del 95 %, para poder conocer el valor de z_q primeramente debemos observar que:

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq -z_q\right\} = 0.05$$

Lo cual implica que:

$$\mathbb{P}\{X \leq \mu(T-t) - z_q\sigma\sqrt{T-t}\} = 0.05$$

Es así que el valor de z_q se obtendrá de las tablas de cuantiles de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, los valores más utilizados son:

$1-q$	z_q
0.841	1
0.90	1.282
0.95	1.645
0.975	1.96
0.977	2
0.99	2.326
0.999	3.09

Si se considera el cambio de valor en un portafolio durante $[t, T]$ como una variable aleatoria continua y F como su función de distribución, entonces VaR_{1-q}^X es el cuantil q de F. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} VaR_{1-q}^X &= z_q\sigma\sqrt{T-t} + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-X] \\ &= z_q\sigma\sqrt{T-t} - \mu(T-t) \end{aligned}$$

La estimación del VaR se puede expresar de dos formas: en términos de pérdidas absolutas o en términos de pérdidas relativas:

[5] Revisar el glosario para conocer más sobre las características de la distribución normal.

$$VaR_{1-q}^{X}(absoluto) = \xi(z_q\sigma\sqrt{T-t} - \mu(T-t))$$

$$VaR_{1-q}^{X}(relativo) = \xi(z_q\sigma\sqrt{T-t})$$

donde ξ representa el monto total de la inversión o la exposición total en riesgo.

En la práctica cuando se está realizando una aproximación paramétrica, es más común usar el VaR relativo, ya que resulta más sencillo al no tener que calcular μ. Si se está manejando un periodo de tiempo corto la diferencia entre el VaR relativo y el VaR absoluto es muy pequeña.[14]

2.5 Intervalo de confianza para el VaR

La forma más natural para medir la precisión del VaR, es la construcción de un intervalo de confianza, que bajo condiciones de normalidad resulta sencillo. Consideraremos que el VaR está dado por $\xi z_q \sigma$, de esta manera se presenta uno de los principales problemas en la precisión, ya que σ (desviación estándar de los rendimientos) es un parámetro que se estima y por tanto el Valor en Riesgo también será una estimación.

El punto de partida se dará al considerar una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal, entonces:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

donde S^2 es la varianza muestral,[6] σ^2 la varianza y $\chi^2_{(n-1)}$ es una distribución Ji-cuadrada con $(n-1)$ grados de libertad. De esta manera para un nivel de confianza del 95 %, el intervalo para σ^2 será:

$$(n-1)S^2/\chi^2_{0.975} < \sigma^2 < (n-1)S^2/\chi^2_{0.025}$$

$$\Rightarrow S\sqrt{(n-1)/\chi^2_{0.975}} < \sigma < S\sqrt{(n-1)/\chi^2_{0.025}}$$

Por consiguiente el intervalo para el VaR al 95 % de confianza estará dado por:

$$S\xi z_q\sqrt{(n-1)/\chi^2_{0.975}} < VaR = \xi z_q\sigma < S\xi z_q\sqrt{(n-1)/\chi^2_{0.025}}$$

En general este intervalo estará expresado de la siguiente forma:

$$S\xi z_q\sqrt{(n-1)/\chi^2_{(1-\frac{q}{2})}} < VaR = \xi z_q\sigma < S\xi z_q\sqrt{(n-1)/\chi^2_{(\frac{q}{2})}}$$

Esta aproximación se puede usar cada vez que se tengan estimaciones de VaR, asumiendo que la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio es normal.

[6] Glosario.

2.6 Modelos de Portafolio (Varianza-Covarianza)

Modelos que realizan la valuación de portafolios mediante aproximaciones analíticas partiendo de una serie de hipótesis iniciales relativas a la distribución de las rentabilidades esperadas del portafolio, basándose en el análisis de los factores de riesgo seleccionados, para representar el riesgo global.

2.6.1 Método Delta-Normal

Como ya se mencionó anteriormente, al tomar el supuesto de normalidad se facilita en gran medida el cálculo del VaR y de igual manera ocurre al combinar portafolios.

Tomaremos el caso más sencillo en el que se considera un portafolio conformado por dos activos riesgosos; el valor inicial de un portafolio está formado de w_1 unidades del activo 1 y w_2 unidades del activo 2, de tal manera que $w_1 + w_2 = 1$. Si el activo i tiene un rendimiento con varianza σ_i^2, entonces la varianza del portafolio está dada por:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

donde $\rho_{1,2}$ es el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los dos activos.

El VaR del portafolio es:[14]

$$\begin{aligned} VaR &= \xi z_q\sigma_p\sqrt{T-t} = \xi z_q[w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}\sqrt{T-t} \\ &= [VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{1,2}VaR_1VaR_2]^{1/2} \end{aligned}$$

A este VaR se le conoce también como VaR diversificado porque toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos entre los instrumentos financieros.[12] La clave de esta estimación se encuentra en el coeficiente de correlación $\rho_{1,2}$, existiendo tres casos especiales:[14]

- Si $\rho_{1,2} = 1$ el VaR del portafolio alcanza su valor máximo, siendo la suma de los VaR individuales $[VaR_1 + VaR_2]$, ya que existe una correlación perfecta entre los rendimientos.
- Si $\rho_{1,2} = 0$ el VaR del portafolio se reduce a $[VaR_1^2 + VaR_2^2]^{1/2}$, el cual es menor a la suma de los VaR individuales. Este resultado refleja la idea de que si los rendimientos son independientes el portafolio puede ser menos riesgoso.
- Si $\rho_{1,2} = -1$ el VaR del portafolio se reduce a $|VaR_1 - VaR_2|$. Si los rendimientos están negativamente correlacionados, los VaR individuales compensan el impacto de cada posición.

Estas características se extienden también para el caso en que se tienen más de dos instrumentos financieros. Consideremos el caso en el que tiene un portafolio con n activos, conformado por w_i unidades del i-ésimo activo y así respectivamente para cada uno, el activo i tiene un rendimiento con varianza σ_i^2 y la varianza del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = [w_1, w_2, ..., w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

donde $\rho_{i,j}$ es el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los activos i y j, además $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$. Sean $\mathbf{w}$ un vector de posiciones individuales de dimensión $(1 \times n)$, σ la matriz diagonal de desviación estándar de dimensión $(n \times n)$, $\mathbf{C}$ matriz de correlación de $(n \times n)$ y $\mathbf{w}^T$ el vector transpuesto de $\mathbf{w}$; esta notación permite que la varianza del portafolio se maneje de una manera más sencilla:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}\sigma\mathbf{C}\sigma\mathbf{w}^T = \mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T$$

Usando la ecuación anterior se tiene que el VaR del portafolio es:

$$\begin{aligned} VaR_p &= \xi z_q \sigma_p \sqrt{T-t} \\ &= \xi z_q [\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T]^{1/2}\sqrt{T-t} \\ &= [\mathbf{VaRCVaR}^T]^{1/2} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{VaR}$ es un vector de $(n \times 1)$ correspondiente a los VaR individuales, $[VaR_1, ..., VaR_n]$ y el vector $\mathbf{VaR}^T$ el transpuesto de este. Este portafolio conserva exactamente las mismas propiedades que en el caso en el que se tienen sólo dos activos.

La estimación del VaR es una consecuencia del uso de la matriz de varianza-covarianza y de los volúmenes de las posiciones individuales que determinan la desviación estándar (volatilidad) del portafolio.[14]

Ejemplo:
Valor en Riesgo de un activo individual: Consideremos un inversionista que compra 20000 acciones en el mercado accionario cuyo precio es de \$32 por acción y su volatilidad es de 18 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza. A partir de la información anterior se tiene:[7]

$$\begin{aligned} VaR_{diario} &= \xi z_q \sigma \sqrt{T-t} \\ &= (20000)(32)(1.645)(0.18)(\sqrt{1/252}) \\ &= 11937.63 \end{aligned}$$

Esto significa que se espera con un 95 % de confianza, que el inversionista sufra una pérdida igual o mayor a \$11937.63.

2.6.2 VaR Incremental

Después de conocer el VaR el siguiente paso es descomponer el portafolio y examinar el impacto de cada una de las posiciones sobre todo el VaR; quizá se desea conocer la contribución de cada instrumento en forma individual o la contribución de algunos de ellos en conjunto. Esta información es de gran utilidad para identificar la procedencia de la exposición al riesgo y así poder conocer el impacto del portafolio sobre el VaR que se ha estimado; también es esencial si queremos hacer asignaciones apropiadas de riesgo, asociadas con las decisiones de los instrumentos individuales y la determinación del capital requerido.[14][15] Quizá la aproximación más clara para la determinación de los efectos al momento de agregar ciertos instrumentos a un portafolio, es calcular el VaR del portafolio incluyendo el instrumento en cuestión, después calcular el VaR de un portafolio con la misma composición pero

[7]Como deseamos conocer el Valor en Riesgo diario debemos considerar un periodo de 252 días, ya que dentro de un año, estos son los días de operación en el mercado.

sin incluir dicho instrumento. De esta forma el VaR Incremental asociado al instrumento A será por consiguiente:

$$VaR^{A}_{Inc} = VaR_X - VaR_Y$$

donde VaR_X corresponde al portafolio en el que se considera el instrumento A y VaR_Y en el que no se considera al instrumento A.

- Si la diferencia es positiva nos indicará que el instrumento A contribuye significativamente a que el portafolio sea más riesgoso.

- Si la diferencia es negativa nos indicará que el instrumento A funciona como cobertura ante el riesgo del portafolio.

- Si la diferencia es cero nos indicará que al agregar el instrumento A no se afectará el riesgo generado por el portafolio.

2.6.3 Ventajas de los Modelos de Varianza-Covarianza

- Estos modelos al basarse en la teoría del portafolio se tornan fáciles de entender y usar para evaluar las medidas de riesgo, siendo los más utilizados en la industria bancaria.

- El supuesto de normalidad e independencia facilita en gran medida los cálculos para la estimación del VaR, permitiendo que con sólo dos parámetros (media y desviación estándar), sea posible la construcción de la distribución de probabilidad de los cambios en el valor del portafolio. Así mismo en este contexto, es posible tener un conocimiento del VaR para distintos niveles de confianza.[14]

- Existe la posibilidad de realizar análisis de sensibilidad al modificar los valores en la matriz de varianza-covarianza.

- Aún cuando los modelos no registran los eventos extremos, es posible realizar un análisis de riesgo-rendimiento.

2.6.4 Desventajas de los Modelos de Varianza-Covarianza

- Debido a que en términos generales las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros muestran colas más anchas que las de una distribución normal, existe una subestimación en el cálculo del VaR.

- En los modelos se realizan estimaciones locales de riesgo, considerando sólo los niveles vigentes de las posiciones; de tal manera que si se presentan eventos extremos no hay posibilidad de que las pérdidas sean observadas.

- Existe el supuesto de que los cambios en los factores de riesgo así como en el valor del portafolio son lineales, sin embargo esto sólo ocurre cuando se manejan acciones y divisas, ya que en el momento que se incluyen opciones (instrumentos no lineales), entre otros, este modelo resulta inexacto al momento de calcular el VaR.

2.6.5 Descomposición de posiciones o Mapeo

Usualmente para la actualización y estimación del VaR de un determinado portafolio es necesario la realización de un gran número de cálculos, principalmente cuando este está conformado por instrumentos derivados (forwards, opciones o swaps). De esta manera, cuando los cambios del portafolio y de los instrumentos se pueden expresar en función de cambios (absolutos o porcentuales) de instrumentos financieros *simples* (acciones, bonos, divisas, etc.), entonces se obtiene una reducción importante de cálculos. Es importante que la dependencia de dichos activos financieros simples (vértices) sea lineal.

Así mismo, cuando se tiene un portafolio con varias posiciones, las dimensiones de la matriz de varianza-covarianza pueden crecer, de manera que la estimación de los riesgos puede volverse muy complicada; por otro lado en la práctica no se cuenta con volatilidades y correlaciones para todos los plazos, por estas razones es de gran utilidad el mapeo de posiciones para reducir la dimensión de la matriz de varianza-covarianza.

El mapeo es el proceso mediante el cual se puede descomponer un instrumento en una combinación de al menos dos instrumentos más simples que el original; dicho de otra forma es la descripción de un portafolio en sus partes más elementales.[12]

JP Morgan en su documento Riskmetrics propone una metodología basada en la separación de flujos de efectivo de un instrumento, con la posibilidad de aplicar a cualquier instrumento. Las características que se deben de cumplir son:

- El valor de mercado de dos flujos de efectivo deben ser igual al valor de mercado del flujo de efectivo original.
- El riesgo de mercado del portafolio compuesto por dos flujos de efectivo, debe ser igual al riesgo de mercado del flujo de efectivo original.
- El signo de dos flujos de efectivo debe ser igual al signo del flujo de efectivo original.

La manera más usada de descomponer el flujo de efectivo original en dos flujos de efectivo es la siguiente: sea un flujo de efectivo que vence en P años y que se desea descomponer en uno que se coloque el periodo A y otro en el periodo B. El mapeo del instrumento de P años será una combinación expresada de la siguiente manera:

$$I_P^{mapeo} = \alpha I_A + (1-\alpha) I_B$$

El problema consiste en encontrar el valor de α, es decir, el peso específico que se necesita aplicar al flujo de efectivo para descomponerlo en dos. Por otra parte la varianza del instrumento original es:

$$\sigma_P^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2 + 2\rho_{AB}\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_B$$

La expresión anterior se puede reducir a una ecuación de segundo grado:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

cuya solución está dada por:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
a &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \\
b &= 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B - 2\sigma_B^2 \\
c &= \sigma_B^2 - \sigma_P^2
\end{aligned}
$$

Para determinar la volatilidad del instrumento original se puede interpolar linealmente, de tal manera que:

$$
\frac{x}{\sigma_B - \sigma_A} = \frac{P - A}{B - A}
$$

despejando para encontrar el valor de x se obtiene:

$$
x = (\sigma_B - \sigma_A)\frac{P - A}{B - A}
$$

Por consiguiente la volatilidad interpolada al plazo de P será la suma de la volatilidad del plazo A más el valor de x calculado: $\sigma_P = \sigma_A + x$.

Ejemplo:
Se tiene un bono con vencimiento de 6.25 años y volatilidad de 0.655; se desea mapear la posición entre los vértices de la curva de los años 5 y 7, la información disponible es la siguiente:

Volatilidad del precio en el vértice del año 5 = σ_5= 0.533
Volatilidad del precio en el vértice del año 7 = σ_7= 0.696
Correlación entre las tasas del vértice 5 con el vértice 7 = $\rho_{5,7}$= 0.963

A partir de lo anterior se tiene:

$$
0.655^2 = 0.533^2\alpha^2 + 0.696^2(1-\alpha)^2 + 2(0.963)(0.533)(0.696)\alpha(1-\alpha)
$$

$$
\Rightarrow 0.0545\alpha^2 - 0.254\alpha + 0.055 = 0
$$

La solución para la ecuación anterior está dada por:

$$
\alpha = \frac{-(-0.254) \pm \sqrt{(-0.254)^2 - 4(0.0545)(0.055)}}{2(0.0545)}
$$

$$
\alpha_1 = 4.44 \qquad \alpha_2 = 0.2349
$$

En la práctica se utiliza el valor de alfa que se encuentra entre cero y uno, entonces para este ejemplo el valor que se utiliza es $\alpha_2 = 0.2349$; a partir de este valor es posible realizar el mapeo del bono de 6.25 años, el cual será una combinación dada por:

$$
I_{6.25} = 0.2349 I_5 + (1 - 0.2349) I_7
$$

Una vez que la posición ha sido mapeada, ya es posible calcular el VaR del instrumento o portafolio de inversión.

2.7 Modelos de Simulación

Una forma alternativa de estudiar el riesgo de un portafolio, es a través de los métodos de simulación. Con estas técnicas es posible modelar la rentabilidad y el riesgo esperado del portafolio, basando el análisis en información que se aproxime al posible comportamiento de dicho portafolio en el futuro.

Entre los métodos más usados, basados en la simulación para poder encontrar el VaR, se encuentran el método de Simulación Histórica y el método de Montecarlo; ambos contemplan una valoración completa del portafolio para distintos escenarios dentro de la simulación. A partir del comportamiento del portafolio en cada escenario se llega a la distribución esperada de pérdidas y ganancias lo cual nos permite identificar el VaR para cualquier nivel de confianza deseado.

Si se tuviera conocimiento de todos los posibles riesgos y se pudiera asignar una probabilidad de ocurrencia a cada uno de ellos, entonces sería posible estimar de forma exacta el riesgo que se está tomando. Debido a que el número de posibles escenarios es ilimitado, es necesario delimitar los factores de riesgo que se van a considerar, así como el proceso mediante el cual se generarán diversos escenarios que reflejen la información sobre el comportamiento de dichos factores de riesgo.

Entre las principales ventajas de los métodos de simulación se tienen:

- La simulación proporciona una gran cantidad de alternativas posibles de explorar, así como métodos más simples de solución cuando los procedimientos matemáticos son complejos y difíciles.
- Es posible tener un control total sobre el tiempo que se ocupa para los procedimientos.
- Es de gran utilidad para el proceso de innovación teniendo la posibilidad de analizar y experimentar con diferentes sistemas.
- Los métodos analíticos son aquellos que se desarrollan casi siempre de manera sencilla, haciendo un gran número de suposiciones, mientras que en los métodos de simulación es posible analizar sistemas de mayor complejidad.
- En algunos casos, la simulación es el único medio para lograr una solución.

Aunque la simulación es un planteamiento muy valioso y útil para resolver problemas presenta algunas desventajas como:

- En algunos casos la simulación es imprecisa y no se tiene la posibilidad de medir el grado de imprecisión.
- Estos modelos son muy costosos y requieren mucho tiempo para desarrollarse y validarse, por requerir una gran cantidad de corridas computacionales para encontrar soluciones.

2.7.1 Modelo de Simulación Histórica

La Simulación Histórica nos permite analizar cuales habrían sido los rendimientos hipotéticos del portafolio en el pasado, si se hubiera tenido el portafolio actual. Si es contemplado el pasado reciente como un buen indicador del riesgo futuro, entonces a partir de las pérdidas generadas es posible llegar a ciertas conclusiones sobre el riesgo esperado.

En este método la medición del riesgo se realiza de forma retrospectiva, ya que al realizar el análisis de algún activo o portafolio se considera el comportamiento que haya presentado en el pasado, valorando para cada escenario generado a partir de observaciones históricas.[14]

A través de este método se estudian las pérdidas y ganancias que habría experimentado un portafolio actual durante un periodo de tiempo determinado. Una vez obtenidas las pérdidas y ganancias hipotéticas para cada día del periodo de observación, se puede generar la distribución de rendimientos esperados y tomar los percentiles de la distribución como medida directa del VaR para dicho portafolio.

Es importante puntualizar que los resultados del análisis pueden variar considerablemente dependiendo de la elección de la muestra así como de la frecuencia de observaciones utilizada, siendo necesario volver a calcular los cuantiles de la distribución de rendimientos para diferentes plazos, así como realizar nuevamente el análisis.

Para la obtención del VaR a través de este método es necesario realizar los siguientes pasos:

1. Crear una serie histórica de los factores de riesgo.

2. Calcular el valor de mercado de cada instrumento del portafolio para cada periodo de la muestra a partir de las series históricas de los factores de riesgo.

3. Establecer el valor de mercado del portafolio para cada periodo de la muestra. A partir de los precios históricos hipotéticos, se calcularán las pérdidas y ganancias que habría experimentado el portafolio en la actualidad.

4. Con la serie de pérdidas y ganancias históricas hipotéticas del portafolio, se crea un histograma de frecuencias con los rendimientos históricos que habría experimentado el portafolio, ordenándolos de menor a mayor.

5. Al conocer el histograma de frecuencias es posible calcular el VaR considerando el cuantil deseado de la distribución.

En términos estadísticos, la distribución de rendimientos hipotéticos con la Simulación Histórica suele ser más densa alrededor de la media, pero debido a las escasas ocurrencias de movimientos extremos en las rentabilidades, la distribución es prácticamente discreta conforme nos aproximamos a los extremos de las colas, de modo que las estimaciones del VaR basadas en la simulación histórica tienen varianzas mayores que para el método analítico. Además este método tiene la limitación añadida de atribuir una probabilidad cero a las pérdidas superiores al nivel máximo experimentado por la cartera durante el periodo de observación, pudiendo subestimar el verdadero riesgo potencial.

Ventajas del Modelo de Simulación Histórica

- No es necesario asumir que los cambios en el valor del portafolio siguen una distribución normal y es por ello que es posible reflejar la distribución de rendimientos tal y como se produjo, capturando los eventos extremos.

- El modelo permite captar la no linealidad de la opciones, así como el análisis a través de los diferentes mercados (mercado de divisas, mercado accionario, etc.).

- Es posible ajustar los factores de riesgo para cada escenario, ya que en periodos de fuertes caídas en las cotizaciones, los movimientos son independientes de los que se presentan en condiciones normales, permitiendo así realizar el análisis con los movimientos exactos de los factores de riesgo y no sólo con un promedio como ocurre en los otros métodos.

- El estudio de los escenarios históricos puede ser muy útil para la elaboración de estrategias para el manejo de riesgos ante acontecimientos extremos, partiendo de que en el futuro existan comportamientos semejantes; es por ello que es recomendable que dentro del periodo muestral, se incluyan épocas de inestabilidad en los mercados financieros.
- Existe la posibilidad de analizar periodos concretos de tiempo (mercados a la baja, crisis económicas, etc.) analizando las pérdidas y ganancias acumuladas que habrían ocurrido.

Desventajas del Modelo de Simulación Histórica

- Es necesario tener series históricas de precios, tasas de interés y factores de riesgo para el análisis.
- Es difícil realizar un análisis de todos los posibles escenarios, ya que no siempre se tiene información sobre la volatilidad y la correlación de los factores de riesgo del portafolio.
- Al incluir portafolios con estructuras muy complicadas, el modelo se vuelve computacionalmente muy caro.
- No existen indicadores estadísticos que permitan determinar cuantas observaciones se deben incluir en la estimación del VaR. Mientras mayor es el intervalo elegido, mayor podría ser la calidad de la estimación, sin embargo existe el riesgo de incorporar datos que impidan capturar los cambios en los mercados.
- Si el intervalo elegido es muy amplio, se pueden incluir muchos eventos extremos, de tal manera que la estimación del VaR durante varios días sea el mismo y eventualmente cambiar al eliminar un evento extremo de la muestra.

2.7.2 Modelo Montecarlo

Método propuesto por Boyle, el cual consiste en generar escenarios aleatorios basados en ciertos procesos y supuestos iniciales sobre las volatilidades y correlaciones de los factores de riesgo, para obtener una aproximación del comportamiento de la rentabilidad esperada de un portafolio.

Este método es una de las herramientas más poderosas para la estimación del VaR ya que permite manipular cualquier tipo de portafolio sin importar lo complejo que este pueda ser; además de poder tratar con los riesgos de precios asociados con posiciones no lineales (opciones), variaciones de parámetros en el tiempo (volatilidades o correlaciones), distribuciones con colas pesadas así como algunos instrumentos financieros derivados que no tienen soluciones analíticas.

Por su flexibilidad, el análisis por Montecarlo es el método más poderoso para cuantificar el Valor en Riesgo; tiene el potencial para considerar un amplio rango de riesgos así como también para problemas en los que se involucran más de una variable de riesgo. Uno de los principales puntos que se deben contemplar es que la simulación Montecarlo es usada cuando algunas aproximaciones directas son inadecuadas, sin embargo no es un método sencillo de usar, ya que requiere de inversiones costosas en recursos intelectuales y de sistemas.

La idea principal de este método, es la simulación de procesos aleatorios que determinan los precios de los instrumentos financieros (en los cuales se está interesado), cubriendo un amplio rango de situaciones posibles. Cada simulación proporciona un posible valor para el portafolio; si se considera la suficiente cantidad de estas simulaciones, la distribución simulada del valor del portafolio se aproximará a la distribución real y de esta manera será posible la estimación del VaR.

Para la estimación del VaR mediante este modelo de simulación es necesario:[34]

1. Definir el modelo estocástico que permita simular la distribución de frecuencia de los cambios en los factores de riesgo, principalmente de los precios y de las tasas de interés.

2. Construir una secuencia ficticia de precios para las variables aleatorias involucradas, lo cual se realizará usando números aleatorios o pseudo-aleatorios. Cada conjunto de números aleatorios produce un término hipotético para el precio de un instrumento.

3. Determinar el modelo de valuación de los instrumentos. El portafolio debe revaluarse con cada uno de los escenarios que se generen con el modelo estocástico de precios.

4. Construir la distribución de probabilidad de pérdidas y ganancias del portafolio. Estimar el VaR.

Movimiento Browniano

En 1828 el botánico inglés Robert Brown observó a través del microscopio que pequeñas partículas, de los granos de polen en suspensión en el agua, realizaban un movimiento de forma irregular y aleatoria.

En 1900, Louis Bachelier introduce un modelo y comienza a comparar las fluctuaciones de los precios de los activos, de la bolsa de valores de París, con un proceso continuo particular, el Movimiento Browniano; este tiene un comportamiento de tipo zig-zag muy marcado y abrupto que sin importar los cambios de escala tienen la misma similitud. Una de las imperfecciones de este modelo es que puede tomar valores negativos, además de que las trayectorias son funciones muy irregulares.

Posteriormente Albert Einstein en 1905, realiza la primera explicación científica de este fenómeno, sentando las bases teóricas y experimentales, influyendo en el desarrollo de la teoría de los *procesos estocásticos*, así mismo obtuvo la ecuación para el Movimiento Browniano.

Durante los años 1920 y 1923 Norbert Wiener logra dar un modelo preciso y riguroso para las trayectorias de las partículas presentando un modelo matemático para este movimiento basado en la teoría de los procesos estocásticos.

Después de algunos años, en 1960, el economista Samuelson mostró la forma exponencial del Movimiento Browniano (Movimiento Browniano Geométrico) para modelar los precios que están sujetos a incertidumbre.

La mayor parte de los procesos estocásticos aplicados en los modelos dinámicos usados en finanzas para la determinación de precios se basan en una clase particular, denominado proceso de Wiener o Movimiento Browniano estándar (proceso que forma parte de los procesos markovianos cuya principal característica es que únicamente el valor actual de la variable, en el proceso, es relevante para predecir su valor futuro). Si consideramos un proceso basado en el Movimiento Browniano, por cerca que nos encontremos de un punto, el aspecto que encontraremos nuevamente será el de un Movimiento Browniano, de tal manera que sería posible construir un Movimiento Browniano de forma global a partir de varios Movimientos Brownianos locales; así mismo con un escalamiento adecuado, podríamos construir procesos aleatorios generales.

A nivel global el precio de un activo se vuelve más volátil con el tiempo, además de que nunca toma valores negativos, sin embargo el Movimiento Browniano es una herramienta muy útil para la construcción de procesos.

El proceso estocástico $W = (W_t : t \geq 0)$ es un Movimiento Browniano si y sólo si:[30]

1. W_t es continua y $W_0 = 0$
2. $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
3. Los incrementos $(W_{s+t} - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t)$ y son independientes.

Algunas de las características más sobresalientes de este proceso son:

- Las trayectorias de W son continuas sin embargo no son diferenciables.
- Sin importar la escala que se considere, las trayectorias del Movimiento Browniano tienen el mismo comportamiento, además de que pueden tomar eventualmente cualquier valor.

De manera general el Movimiento Browniano no es un buen modelo para el precio del activo, ya que este tiene media cero, mientras que el precio de un activo regularmente crece a alguna tasa, esto se puede lograr añadiendo una tendencia lineal (drift) de manera artificial, a este proceso le llamaremos Movimiento Browniano con tendencia:

$$S_t = W_t + \mu t$$

donde μ es una constante que refleja el cambio esperado en el proceso por unidad de tiempo. Si este proceso es muy volátil podemos escalarlo con alguna constante y para esto podemos usar σ, la cual refleja la incertidumbre acerca de los valores futuros del proceso, de esta forma se tiene que:

$$S_t = \sigma W_t + \mu t$$

a partir de las propiedades ya mencionadas del Movimiento Browniano se tiene que:

$$S_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$$

Si se desea conocer de que manera se comportaría el proceso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ ante ciertos cambios, a lo largo de un intervalo infinitesimal $(t, t + \Delta t)$, con Δt lo suficientemente pequeño, se tiene:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu \Delta t + \sigma(W_{t-\Delta t} - W_t)$$

El proceso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ se denomina proceso de Wiener generalizado; el parámetro μ refleja el cambio esperado en el proceso por unidad de tiempo y σ refleja la incertidumbre acerca de los valores futuros del proceso (volatilidad del proceso).

Si ahora se tiene que los parámetros μ y σ varían en el tiempo en forma determinística, $\{S_t\}_{t \geq 0}$ será un proceso de Wiener generalizado respecto al tiempo y puede ser expresado como:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu_t \Delta t + \sigma_t(W_{t-\Delta t} - W_t)$$

Aunque ya se han hecho algunas modificaciones al proceso de Wiener para poder encontrar un proceso que modele los precios, sigue existiendo el problema de que puede tomar valores negativos en cualquier momento, es así que se tomará la forma exponencial del proceso S_t, al cual llamaremos Movimiento Browniano Geométrico; de esta manera se tiene que un proceso estocástico $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano Geométrico si constituye una solución a la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \Rightarrow \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde μ y σ son constantes; si consideramos que S_t es el precio de un instrumento financiero, entonces dS_t/S_t será la tasa de rendimiento instanténea de dicho instrumento, la constante μ será la tasa de rendimiento esperada por periodo y σ la volatilidad.

Una de las tareas más importantes es obtener la distribución del cambio relativo en el precio de un instrumento financiero, así como resolver ecuaciones diferenciales estocásticas y para esto será necesario utilizar un importante resultado del cálculo estocástico: el Lema de Ito. De esta manera aplicando el Lema mencionado se obtiene:

$$S_t = S_0 exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$$

al cual se le conoce como Movimiento Browniano Geométrico, cabe señalar que en este proceso se basa el modelo propuesto por Black, Scholes y Merton para la determinación del precio de las opciones.[35]

Al encontrar la mejor estimación para μ y σ será posible modelar el comportamiento de los precios de los activos que se presentan en los mercados.

Simulación Montecarlo

Es necesario mencionar que este método se utiliza cuando las aproximaciones sencillas son inadecuadas (esto ocurre generalmente en el caso en que se tienen problemas multidimensionales), sin embargo este mecanismo no es sencillo de usar.

Este método es propenso al riesgo del modelo, es por ello que si el proceso estocástico elegido para el precio no es realista, tampoco lo será la estimación del VaR.

Vamos a suponer que estamos interesados en pronosticar el VaR de una posición de algún activo en particular. El primer paso y el más crucial, consiste en la elección de un modelo estocástico particular que describa el comportamiento del precio de dicho activo, un modelo comúnmente utilizado es el de Movimiento Browniano Geométrico, el cual asume que las innovaciones o movimientos en el precio del activo no están correlacionadas en el tiempo y que el cambio a lo largo de un intervalo infinitesimal $(t, t+\Delta t)$, en este caso se considerará $\Delta t = 1$, está dado por:[14]

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t (W_{t+\Delta t} - W_t)$$

donde $W_{t+\Delta t} - W_t = Z_t\sqrt{\Delta t}$ puede ser interpretado como una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0, dt)$, siendo Z_t una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$. Los parámetros μ y σ representan la tendencia instantánea y la volatilidad, los cuales pueden evolucionar en el tiempo, sin embargo por simplicidad se consideran constantes en el tiempo.

Al simular el comportamiento de los factores de riesgo (en este caso de los precios), por conveniencia se asume que el precio de cierto activo está descrito por el siguiente proceso:

$$S_t = S_{t-1} + \sigma Z_t \sqrt{\Delta t} = S_{t-1} + \sigma Z_t$$

el cual nos da el precio actual S_t en términos del precio para un periodo anterior S_{t-1}, así como de σ y Z_t. Si ahora se desea simular el precio de un activo durante el intervalo (t, T), se tiene que el precio para S_{t+1} en términos de S_t y Z_{t+1}, estará dado por:

$$S_{t+1} = S_t + \sigma Z_{t+1} = S_{t-1} + \sigma[Z_t + Z_{t+1}]$$

Este proceso se repite para encontrar la expresión de S_{t+2}, después para S_{t+3} y así sucesivamente hasta encontrar la expresión para S_T:

$$S_T = S_{t-1} + \sigma \sum_{i=t}^{T} Z_i$$

Si ahora suponemos que se tiene un portafolio de inversión compuesto por más de un activo, entonces el rendimiento del portafolio dependerá de los precios de dichos activos. Si consideramos el caso en el que los precios de los activos son independientes, con dos activos se tiene:

$$S_{1,t} = S_{1,t-1} + \sigma_1 Z_{1,t} \quad ; \quad S_{2,t} = S_{2,t-1} + \sigma_2 Z_{2,t}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} S_{1,t} \\ S_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,t-1} \\ S_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

El valor del portafolio (PV_t) en el tiempo t, se puede encontrar multiplicando las ecuaciones anteriores por $[w_{1,t}, w_{2,t}]$, el vector de posiciones de los dos activos:

$$\begin{aligned} PV_t &= \begin{bmatrix} w_{1,t} & w_{2,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,t} \\ S_{2,t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_{1,t} & w_{2,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,t-1} \\ S_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1,t} & w_{2,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera podemos obtener el valor del portafolio para el instante T:

$$PV_T = \sum_{i=1}^{T} PV_i$$

el cual depende del comportamiento de las variables Z_i durante el periodo (t, T).

Otro de los casos que debemos considerar, es cuando los precios están perfectamente correlacionados, en este caso:

$$S_{1,t} = S_{1,t-1} + \sigma_1 Z_{1,t} \quad ; \quad S_{2,t} = S_{2,t-1} \pm \sigma_2 Z_{1,t}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} S_{1,t} \\ S_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,t-1} \\ S_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \pm\sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

Enseguida debemos considerar el vector de posiciones $[w_{1,t}, w_{2,t}]$, para obtener el valor del portafolio PV_t, si se desea encontrar el valor al tiempo T se procederá de manera semejante al caso anterior.

Una de las principales dificultades que se presenta, es el caso en el que los precios están imperfectamente correlacionados, en esta situación se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_{1,t} \\ S_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,t-1} \\ S_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

donde $a_{i,j}$, es decir, la volatilidad es una función de la matriz de varianza-covarianza de los activos considerados. Para resolver este detalle es necesario hacer uso de la factorización de Cholesky, para lo cual será necesario reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \Delta S_{1,t} \\ \Delta S_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}$$

Si ahora se denota por ΔS_t al vector del lado izquierdo de la ecuación anterior y por A y Z_t a la matriz y al vector del lado derecho respectivamente, al multiplicar dicha ecuación por sus correspondientes transpuestos, se tiene:

$$\Delta S_t^T \Delta S_t = A^T Z_t Z_t^T A$$

donde $A^T Z_t Z_t^T A$ es la matriz de varianza-covarianza Σ, ya que al ser $Z_{i,t}$ variables independientes normales estándar, la matriz $Z_t Z_t^T$ será la matriz identidad.

Factorización de Cholesky

La descomposición de la matriz de varianza-covarianza a través del método de Cholesky tienen como finalidad transformar N variables aleatorias independientes en n cambios correlacionados de los factores de riesgo. La factorización de Cholesky consiste en definir una matriz A que multiplicada por su transpuesta, sea igual a la matriz de varianza-covarianza, es decir: $A^T A = \Sigma$. Cabe mencionar que la matriz A puede ser cualquier matriz que capture la información de la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos.[34] Consideremos la matriz de varianza-covarianza dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$. Además sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad y \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

De lo anterior se desprende que:

$$\sigma_1^2 = a_{11}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{11} = \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$$

$$\sigma_{12} = a_{11}a_{12} \qquad \Rightarrow \qquad a_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} = \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1} = \rho_{12}\sigma_2$$

$$\sigma_2^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{22} = \sqrt{\sigma_2^2 - a_{12}^2} = \sqrt{\sigma_2^2 - \rho_{12}^2\sigma_2^2} = \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}$$

Una vez que se cuenta con los elementos de la matriz A es posible verificar que la matriz de varianza-covarianza se descompone de la siguiente manera:

$$\Sigma = A^T A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho_{12}\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \rho_{12}\sigma_2 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha mostrado el procedimiento para obtener los elementos de la matriz A en una matriz de 2×2, se establecerá un resultado más general para una matriz de $n \times n$. Sean i y j los índices que denotan los renglones y columnas de la matriz, los elementos de la matriz A estarán dados por:[12]

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{11}} \left[\sigma_1^2 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right]^{1/2}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{11}} \left[\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} \right] \qquad j = i+1, i+2, ..., n$$

Es importante señalar que para aplicar la factorización de Cholesky, la matriz de varianza-covarianza debe ser definida positiva.[8] Si la matriz de varianza-covarianza no es definida positiva, puede ser que la matriz incluye dos factores que están perfectamente correlacionados, o bien puede ser que las volatilidades y correlaciones se obtuvieron con series de tiempo de diferente longitud.

Métodos para generar números aleatorios

Para incrementar la exactitud en la estimación de los parámetros de la distribución sin tener costos muy elevados, se han desarrollado varios procedimientos.[34]

Para mejorar la calidad estadística de las estimaciones, el modelo de generación de números aleatorios debe ser eficiente.[9] El primer componente para un generador de números aleatorios es una distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$,[10] la cual produce una variable

[8]Glosario.

[9]Un generador de números aleatorios es un código con el cual se encontrará una aproximación a un número aleatorio.

[10]Glosario.

aleatoria X. El siguiente paso es transformar el número aleatorio uniforme x en la distribución deseada. Mientras mayor número de simulaciones se incluyan en el modelo Montecarlo la eficiencia estadística de los parámetros que se desean estimar aumentará.

Estrictamente hablando estos números aleatorios no son del todo aleatorios, son números pseudoaleatorios los cuales se generan por una regla determinística, es decir, una regla que no posee elementos aleatorios. Una de las aproximaciones más comunes para generar números pseudoaleatorios, llamada *Método Congruencial Multiplicativo*, considera un valor inicial x_0, llamado semilla y a partir de este se calculan valores sucesivos x_n para $n \geq 1$, esta secuencia se obtiene a partir de:

$$x_n = ax_{n-1} \quad modulo \;\; m$$

donde $0 \leq a < m$ (multiplicador) y m (módulo) son números positivos dados y la expresión anterior significa que ax_{n-1} es dividido entre m y el resultado es considerado como el valor de x_n; entonces x_n es cualquiera de los comprendidos entre 0 y $m-1$, la cantidad x_n/m, llamado número pseudoaleatorio, será una aproximación del valor de una distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 1]$.[33] Ya que cada número x_n es uno de los valores entre 0 y $m-1$, entonces después de algún número finito (a lo más m) la secuencia de números se repetirá, es por ello que lo más recomendable es el uso de un ciclo largo el cual garantizará que durante miles de simulaciones no habrá repeticiones, si el ciclo es demasiado corto se presentarán dependencias en el proceso y el rango de posibles valores estará incompleto.

Otro generador de números pseudoaleatorios, conocido como *Método Congruencial Mixto* utiliza la expresión recursiva del tipo:

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \quad modulo \;\; m$$

donde el incremento c está comprendido entre 0 y m, si $c = 0$ la generación de números es más rápida pero la secuencia más corta.

Así mismo, el número de cálculos requeridos también depende del número de extracciones aleatorias que se consideren para cada iteración; una posición lineal con N activos que no estén correlacionados va a depender de N variables aleatorias, si ahora se tienen posiciones no lineales entonces se necesitará de al menos N variables aleatorias.

Un método para generar variables aleatorias conocido como *Método de la Transformación Inversa* está basado en la siguiente proposición:

Sea U una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Si F es una función de distribución, la variable aleatoria X definida por:

$$X = F^{-1}(U)$$

tiene distribución F; donde $F^{-1}(U) = inf\{y \in \mathbb{R} \mid U \leq F(y)\}$. La prueba de este resultado se da como consecuencia de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Para que el argumento sea claro se debe demostrar que $\{U \leq F(x)\} = \{F^{-1}(U) \leq x\}$. Es así que se tiene que si $U \leq F(x)$ entonces $x \in \{y \in \mathbb{R} \mid U \leq F(y)\}$ por lo tanto $F^{-1}(U) \leq x$ ya que $F^{-1}(U) = inf\{y \in \mathbb{R} \mid U \leq F(y)\}$ por lo tanto $\{U \leq F(x)\} \subset \{F^{-1}(U) \leq x\}$.

Si $F^{-1}(U) \leq x$ entonces existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq z$ y $F(z) \geq U$, por monotonía de F se concluye que $F(x) \geq F(z) \geq U$ por lo tanto $\{F^{-1}(U) \leq x\} \subset \{U \leq F(x)\}$; a partir de aquí se tiene la igualdad que se buscaba.

La proposición anterior muestra que es posible generar una variable aleatoria X a partir de la función de distribución continua F, generando un número aleatorio U y considerando $X = F^{-1}(U)$.

Este método de la transformación inversa, es de gran utilidad para generar variables aleatorias exponenciales.[11] Si X es una variable aleatoria exponencial con parámetro 1, entonces su función de distribución está dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

Si ahora se considera $x = F^{-1}(u)$, entonces:

$$u = F(x) = 1 - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - u = e^{-x} \qquad\qquad \therefore \quad x = -log(1-u)$$

Es así que es posible generar una exponencial con parámetro 1, generando un número aleatorio U y considerando:

$$X = F^{-1}(U) = -log(1-U)$$

Nótese que si X es una exponencial con media 1, entonces para cualquier constante positiva c, cX es una exponencial con media c. Es así que una variable aleatoria exponencial con parámetro λ (media $1/\lambda$) puede ser generada, considerando un número aleatorio U y que:

$$X = -\frac{1}{\lambda} log(1-U)$$

Debe destacarse que los modelos generalmente empleados, utilizan variables aleatorias uniformes sobre el intervalo $[0, 1]$; sin embargo para generar los escenarios de los factores de riesgo con los cuales se estima el VaR, es necesario transformar estas variables aleatorias uniformes en variables aleatorias distribuidas normalmente; entre los modelos que destacan se encuentra:

- ***Modelo de Box-Muller***

  Sean X y Y variables aleatorias normales estándar independientes y sean R y θ las coordenadas polares del vector (X, Y), es decir:

  $$R^2 = X^2 + Y^2 \quad ; \quad tan\theta = \left(\frac{Y}{X}\right)$$

  como X y Y son independientes, su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad individuales y por consiguiente esta dada por:

  $$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} \end{aligned}$$

[11] Glosario.

Para determinar la función de densidad conjunta de R^2 y θ, a la cual llamaremos $f(d, \theta)$, se realizará el cambio de variables:

$$d = x^2 + y^2 \quad ; \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

El cambio de variable para ambas funciones, fue expresado en términos de x y y. Se calculan las derivadas parciales de d y θ con respecto de x y y y al calcular el jacobiano[12] de esta transformación se tiene que es igual a 2. A partir de la ecuación $f(x, y)$ se tiene que la función de densidad conjunta de R^2 y θ está dada por:

$$f(d, \theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-d/2} \quad ; \quad 0 < d < \infty \ , \ 0 < \theta < 2\pi$$

Debido a que lo anterior es igual al producto de una densidad exponencial con media 2 ($\frac{1}{2}e^{-d/2}$) y la densidad uniforme en $(0, 2\pi)$ $(1/2\pi)$, entonces se tiene que: *R^2 y θ son independientes, R^2 es exponencial con media 2 y θ se distribuye uniformemente en* $(0, 2\pi)$.

Ahora es posible generar un par de variables aleatorias normales estándar independientes X y Y, utilizando R^2 y θ, generando primero sus coordenadas polares ($X = Rcos\theta$; $Y = Rsen\theta$) y después transformarlas nuevamente en coordenadas rectangulares.

De esta manera para generar variables aleatorias normales se hace uso del siguiente algoritmo:[33]

- **Paso 1**: generar números aleatorios U_1 y U_2.
- **Paso 2**: $R^2 = -2logU_1 \Rightarrow R^2$ es exponencial con media 2
  $\theta = 2\pi U_2 \Rightarrow \theta$ es uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$
- **Paso 3**: Sean

$$X = Rcos\theta = \sqrt{-2logU_1}cos(2\pi U_2)$$

$$Y = Rsen\theta = \sqrt{-2logU_1}sen(2\pi U_2)$$

Las transformaciones dadas por las ecuaciones en el paso 3, se les conoce como transformaciones de Box-Muller.[33] A pesar de que este método logra resultados más eficientes que los que resultan de generar directamente los números aleatorios normales, el método tiene el riesgo de que no hay garantía de que X y Y sean efectivamente independientes.

Durante la última década los procedimientos para la simulación Montecarlo han sido desarrollados usando nuevas técnicas, las cuales permiten que los parámetros sean estimados por simulaciones sencillas; dichas técnicas pueden reducir drásticamente la cantidad de cálculos necesarios para la estimación de parámetros.

[12] Jacobiano: determinante de las primeras derivadas parciales de d y θ con respecto de x y y.

Simulación de escenarios

Otra alternativa al método de Simulación Montecarlo es la metodología de Simulación de escenarios propuesto por Jamshidian y Zhu (1996 y 1997). La idea principal es el uso de los factores de riesgo, aproximando la distribución de los precios o las tasas de interés que determinan el valor del portafolio y por consiguiente el VaR. Al trabajar con los principales factores de riesgo se logra eficiencia, no sólo porque reduce la dimensión del problema, sino también porque estos son construidos de manera independiente entre ellos.[14]

Para conocer la forma en que funciona esta metodología, vamos a suponer que se tiene un portafolio compuesto por instrumentos de renta fija y que se desea trabajar sólo con tres factores. Primeramente es necesario decidir la cantidad de trayectorias para cada componente elegido; si el primer componente es más importante que el segundo y el segundo más importante que el tercero, entonces será necesario considerar más alternativas para el primero, algunas para el segundo y unas cuantas para el tercero. Jamshidian y Zhu dieron un ejemplo en el cual elegían siete trayectorias para el primer componente, cinco para el segundo y tres para el tercero; de esta manera la curva de rendimiento será una combinación de dichas trayectorias para cada componente, es así que se tendrán 105 escenarios en total teniendo cada uno su probabilidad de ocurrencia.[14]

Al usar el método de Simulación Montecarlo para este mismo portafolio sería necesario una gran cantidad de cálculos, primeramente se necesita trabajar con al menos entre seis y doce tasas a lo largo de nuestra curva de rendimiento y a su vez cada curva requiere de la simulación de trayectorias para cada una de estas tasas; por otro lado se deben llevar a cabo una gran cantidad de corridas para obtener resultados con la suficiente exactitud. Esto nos permite darnos cuenta que la Simulación Montecarlo en comparación con la Simulación de escenarios requiere de una amplia cantidad de cálculos computacionales, además de contar con una menor eficiencia y exactitud conforme incrementa la cantidad de activos que necesitemos valuar.

Estas conclusiones han sido corroboradas a través de la valuación de los portafolios, con diferentes instrumentos, realizada por Jamshidian y Zhu. Además de ser computacionalmente más eficiente el método de Simulación de escenarios, otras ventajas que presenta son:

- Permite el manejo de probabilidades para los eventos, además de diseñar la Simulación de escenarios para obtener una mayor precisión y rapidez al momento de estimar el VaR.

- Tiene la facilidad de que es posible tratar con los eventos que se encuentran en las colas de la distribución.

- Esta metodología también permite el cálculo del VaR Incremental de manera más sencilla.

Modelos para simular tasas de interés

Contar con una estimación precisa de la estructura temporal de las tasas de interés permite determinar los precios de instrumentos financieros dependientes de tasas de interés tales como bonos, obligaciones negociables, certificados de depósitos, o incluso los precios de instrumentos más complejos (swaps de tasas de interés, futuros, opciones y otros derivados).

La finalidad de estos modelos consiste en simular el comportamiento de la curva de rendimiento. El modelo general se puede representar mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:[35]

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

donde $\mu(r_t, t)$ es la esperanza condicional instantánea de la variación del tipo de interés, durante un periodo de tiempo y $\sigma(r_t, t)$ la volatilidad instantánea, cuyo cuadrado representa la varianza condicional del tipo de interés por un periodo de tiempo.

A partir de esta expresión se han desarrollado varios procesos, los cuales se pueden clasificar en función del número de factores que se utilizan para modelar el comportamiento de las tasas de interés. Uno de los modelos más conocidos es el de Vasicek, el cual supone que la volatilidad de las tasas de interés es constante; que la curva de rendimiento se explica por una sola fuente de riesgo (tasa de interés de corto plazo), la cual tiene un comportamiento estocástico y que los rendimientos a diferentes plazos están correlacionados. El modelo está definido de la siguiente manera:[35]

$$dr_t = a(b - r_r)dt + \sigma dW_t$$

donde a, b y σ son constantes positivas y conocidas y W_t es un Movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad determinado.[13] Este modelo tiene la característica de ser un proceso con reversión a la media, es decir r_t revierte hacia el tipo de interés medio a largo plazo; a mide la velocidad de reversión a la media. Esta característica de reversión a la media implica la existencia de un valor medio alrededor del cual fluctúan las tasas de interés, de no ser así la varianza de la distribución incrementaría sin límite con el paso del tiempo. Si el proceso de reversión es lineal, la velocidad hacia la media es constante para todos los niveles del tipo de interés; la reversión es mucho más débil para valores medios que para valores extremos, comportándose estos últimos como un proceso aleatorio y que por tanto una especificación lineal de la media no recoge la distinta fuerza con la que tienden a su media a largo plazo los tipos de tasas de interés.

Otro de los enfoques para modelar la dinámica de las tasas de interés fue utilizada por Cox, Ingersoll y Ross, definido como:[35]

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Este proceso es importante porque proporciona una descripción simple de la naturaleza estocástica de las tasas de interés. El parámetro $a < 1$ define la velocidad de la reversión a la media hacia el valor b de largo plazo; las situaciones donde las tasas de interés vigentes son altas, tal como $r_t > b$, implican una tendencia negativa $a(b - r_t)$ hasta que las tasas se revierten a b, recíprocamente las tasas bajas están asociadas con una tendencia esperada positiva; también debe notarse que la varianza de este proceso es proporcional al nivel de las tasas de interés, a medida que la tasa de interés se mueve hacia 0, la varianza cae, de tal forma que r_t nunca puede caer por abajo de 0.

La principal diferencia entre ambos modelos es que mientras Vasicek supone que la volatilidad de las tasas de interés es constante, Cox-Ingersoll-Ross consideran que la volatilidad de los cambios en las tasas de interés es proporcional al nivel de las tasas.[34]

Ventajas del Modelo Montecarlo

- Es sencillo de usar, una vez que han sido establecidas las rutinas que se deberán seguir, así mismo se tiene la posibilidad de incrementar la precisión (elaborando mayor número de pruebas) y reducir el tiempo para los cálculos.[15]

[13] Glosario.

- Es de gran precisión para todos los instrumentos financieros.
- No requiere de una gran cantidad de datos históricos.
- Proporciona la distribución completa para los valores de un determinado portafolio.
- Permite el uso de varios supuestos para la distribución que se usará y por consiguiente es posible considerar la presencia de colas pesadas.

Desventajas del Modelo Montecarlo

- Es necesario el uso de métodos computacionales que pueden resultar muy complejos y costosos, ya que involucra la valuación de un determinado portafolio para cada escenario.
- Puede ser lento ya que involucra una gran cantidad de cálculos, particularmente cuando se deben considerar varios factores de riesgo.
- Cuantifica el riesgo de distribuciones, que presentan colas pesadas, pero sólo si los escenarios del mercado son generados por distribuciones apropiadas.

De esta manera es que este método es muy intenso computacionalmente, principalmente si se requiere de un alto nivel de precisión. Más repeticiones conducen a estimaciones más precisas, pero requieren más tiempo; en mercados con movimiento rápido o con instrumentos complejos, la velocidad puede ser más importante que la precisión.[14]

2.8 Ventajas de usar un sistema basado en el VaR

La sencillez para estimar el riesgo de capital mediante el VaR es uno de los principales factores que ha permitido su aceptación entre los intermediarios financieros y los reguladores, sin embargo también existen otras ventajas entre las cuales sobresalen:

- Es una medida de riesgo universal ya que permite integrar los riesgos para diferentes mercados y distintos instrumentos, tomando en cuenta las características específicas de cada uno de ellos.
- Es posible introducir dinamismo en el análisis lo cual permite actualizar las condiciones de mercado.
- Toma en cuenta los factores asociados con el comportamiento de los precios de los activos.
- Los límites pueden ser establecidos con base en el nivel de riesgo deseado.
- Entrega una medida estándar para las distintas clases de riesgo.
- La estimación del VaR está expresada en unidades monetarias, lo cual permite comparar los riesgos de las diferentes posiciones de las instituciones financieras, así como construir portafolios de referencia.
- La metodología del VaR se puede aplicar a todas las posiciones de riesgo y a todos los niveles de una institución financiera, actualmente también se aplica en aseguradoras, fondos de pensiones, entre otras instituciones financieras.[34]

En la práctica, el uso adecuado de modelos de administración de riesgos permite incrementar la eficiencia y competitividad empresarial, así como contribuir al desarrollo del mercado de capitales.

3

Estimación del VaR de Instrumentos Financieros

Debido a la evolución de los instrumentos financieros y al enorme crecimiento de los mercados financieros, cada vez es más difícil la medición de riesgos, no obstante, durante los últimos años se han experimentado avances considerables en el desarrollo de sofisticados modelos matemáticos y procesos de análisis.

La valuación independiente de las posiciones, constituye un importante aspecto del control interno en cualquier área de negociación; sin embargo, ningún modelo matemático por sí solo podrá ser adecuado para todas las posibles aplicaciones a los mercados financieros.

Los mercados financieros de una gran mayoría de países se han visto en la necesidad de desarrollar productos financieros más flexibles, que ofrezcan mejores mecanismos de protección ante los diversos niveles de riesgo. Tal es el caso de los instrumentos derivados, los cuales son útiles para la administración de riesgos, permitiendo: reducir los costos, manejar los riesgos con mayor certidumbre y precisión así como mejorar los rendimientos.

3.1 Instrumentos de Deuda - Bonos

Son aquellos instrumentos financieros que representan una deuda para quien los emite (gobierno o entidad particular) y un derecho para quien presta el dinero, el emisor está obligado a realizar ciertos pagos al que posee el bono durante un periodo de tiempo específico.

En los bonos se especifica el monto a reembolsar en un determinado plazo, las amortizaciones totales o parciales y los intereses periódicos. Un bono cuponado obliga al emisor a realizar pagos de intereses, denominados pagos de cupones, durante la vida del bono y a pagar el valor nominal del bono en su fecha de vencimiento. Un bono cupón cero es el resultado de transformar un bono con varios cupones y expresarlo como un bono de un sólo cupón; este bono paga una tasa de rendimiento que equivale a promediar las tasas de los cupones que lo componían originalmente.

El principal objetivo de las entidades al emitir este tipo de instrumentos, es conseguir fondos para realizar inversiones o compensar deudas.

3.1.1 Duración

Este concepto es de gran utilidad en el mercado de dinero, principalmente como un indicador de riesgo. Es una medición más precisa del vencimiento, porque refleja el momento en que se producen los flujos de fondos por pagos periódicos de interés y/o capital además de los flujos de fondos representados por los fondos transferidos al vencimiento. En este sentido, la duración representa el tiempo promedio que ha de transcurrir para recuperar la inversión; por tanto, la duración de un bono coincide con su período de amortización sólo si se trata de un bono cupón cero, o bien con pago periódico de cupones con un único vencimiento pendiente y en otro caso, la duración de dicho título será inferior a su plazo de amortización, ya que parte de los flujos generados se reciben antes del vencimiento de la misma. Debido a lo anterior, el riesgo de mercado de un bono cupón cero es superior al de un bono con pago periódico de cupones con el mismo plazo de amortización.

La duración se define como el cambio en el valor de un bono o instrumento de mercado de dinero (ΔP) cuando se registra un cambio en las tasas de interés de mercado (Δr); midiendo la relación lineal entre el rendimiento del bono y cambios en la tasa de rendimiento. Matemáticamente es la primera derivada del precio con respecto a la tasa de interés. La duración fue definida por primera vez por Macaulay en 1938.

El precio de un bono está determinado por la siguiente expresión:

$$P = \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \frac{c_3}{(1+r)^3} + ... + \frac{c_n}{(1+r)^n} + \frac{VN}{(1+r)^n}$$

donde c_i son los cupones del bono, r la tasa de interés del rendimiento y VN el valor nominal.

La primera derivada del precio respecto a la tasa de interés es:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{c_1}{(1+r)^2} - \frac{2c_2}{(1+r)^3} - \frac{3c_3}{(1+r)^4} - ... - \frac{nc_n}{(1+r)^{n+1}} - \frac{n(VN)}{(1+r)^{n+1}}$$

dividiendo la ecuación anterior, de ambos lados, entre el precio se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P}\frac{dP}{dr} &= -\frac{1}{1+r}\left[\frac{c_1}{1+r} + \frac{2c_2}{(1+r)^2} + \frac{3c_3}{(1+r)^3} + ... + \frac{nc_n}{(1+r)^n} + \frac{n(VN)}{(1+r)^n}\right]\frac{1}{P} \\ &= -\frac{1}{1+r}\left[1w_1 + 2w_2 + ... + nw_n + nw_N\right] \end{aligned}$$

donde:

$$w_i = \frac{c_i/(1+r)^i}{P} \quad , \quad w_N = \frac{VN/(1+r)^n}{P} \quad y \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

A la expresión anterior se le conoce con el nombre de Duración Modificada, y a la expresión que se encuentra dentro del corchete multiplicada por $(1/P)$ se le llama Duración de Macaulay.[12]

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} = -Dur.modificada \quad ; \quad Dur.modificada = -\frac{Dur.Macaulay}{1+r}$$

Otra expresión de la Duración de Macaulay es:

$$Dur.Macaulay = \frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{tc_t}{(1+r)^t} + \frac{n(VN)}{(1+r)^n}\right]$$

De la expresión de la Duración Modificada se puede despejar dP de la siguiente manera:

$$\frac{dP}{P} = -Dur.modificada * (dr)$$

Es así que la Duración Modificada se define como el cambio porcentual en el precio del bono, cuando las tasas cambian 1 % (100 puntos base). Ejemplo: Si un bono tiene una duración de 3.5 años y las tasas suben 1 %, dicho bono sufrirá una pérdida de 3.5 %. De esta manera, conociendo la Duración Modificada del bono, es posible de forma inmediata conocer la pérdida potencial de este instrumento por cada punto porcentual. La duración siempre se mide en unidades de tiempo y para fines de uso se expresa generalmente en años.

Dado que la duración es una medición de la exposición lineal, entonces la duración de un portafolio de instrumentos de deuda es un promedio simple ponderado de las duraciones individuales.

Los factores que influyen en el valor de la duración son:

- A mayor plazo mayor duración; sin embargo la duración aumenta a tasa decreciente.
- La duración cae a tasas aceleradas conforme pasa el tiempo.
- Existe una relación inversa entre la duración de un bono y la cantidad de intereses devengados. El efecto de los intereses devengados sobre la duración es mayor en el caso de los bonos de largo plazo que de corto plazo.[34]

3.1.2 Convexidad

La convexidad es una propiedad de los instrumentos de deuda, que describe la forma en que la duración cambia, a medida que cambia el rendimiento. Cuando los cambios en las tasas de interés son muy pronunciados (alta volatilidad), la duración del bono no es suficiente para cuantificar la pérdida potencial derivada de dicha posición; en estos casos es necesario sumar el efecto de la convexidad a dicha pérdida. Matemáticamente la medida de convexidad se puede obtener como la segunda derivada del precio de un bono con respecto a la tasa de interés y dividiendo este resultado entre el precio, de tal manera que:

$$C = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2}$$

Una vez que se aplica la segunda derivada en la fórmula de la valuación de un bono y simplificando algebraicamente, se obtiene la siguiente expresión para calcular la convexidad:

$$C = \frac{\left[2c(1+r)^2\left[(1+r)^n - \frac{1+r+rn}{1+r}\right]\right] + \left[n(n+1)r^2(r-c)\right]}{r^2(1+r)^2\left[c\left((1+r)^n - 1\right) + r\right]}$$

En el caso de un bono cupón cero ($c = 0$), la expresión de la convexidad se reduce y se tiene:

$$C = \frac{n(n+1)}{(1+r)^2}$$

Los factores que influyen en la convexidad son:

- Bonos de largo plazo tienen mayor convexidad por periodo de duración que los bonos de corto plazo, especialmente en los bonos cupón cero.

- De dos bonos con igual duración, el que tenga flujos más dispersos tendrá mayor convexidad.
- La convexidad aumenta más cuando las tasas de interés disminuyen que cuando las tasas de interés aumentan.
- A mayor volatilidad mayor convexidad.
- A mayor diferencial de compraventa mayor convexidad.[34]

Ejemplo:
Considérese un bono que expira dentro de 26 años, que paga un cupón semestral y cuya tasa cupón es de 8 % anual y tiene un rendimiento del 6 % anual. A través de una manera abreviada es posible obtener la Duración Modificada, es así que para el cálculo con periodos semestrales se tiene:

$$\begin{aligned} DM &= \frac{1+r}{r} - \frac{(1+r)+[n(C-r)]}{[C((1+r)^n-1)]+r} \\ &= \frac{1.03}{0.03} - \frac{1+0.03+[52(0.04-0.03)]}{[0.04((1.03)^{52}-1)]+0.03} \\ &= 25.528 \end{aligned}$$

de esta manera al dividirse entre 2 se obtiene el valor para la duración anual:

$$DM_{anual} = \frac{25.528}{2} = 12.76$$

Calculando la convexidad con periodos semestrales se obtiene:

$$C = \frac{2(.04)(1.03)^2\left[(1.03)^{52} - \frac{1.03+(.03(52))}{1.03}\right] + \left[52(53)(.03)^2(.03-.04)\right]}{(.03)^2(1.03)^2\left[(.04((1.03)^{52}-1)+.03)\right]} = 931.16$$

Para obtener la convexidad anual se divide entre el cuadrado de los periodos semestrales, en este caso será entre 4:

$$C_{anual} = \frac{931.16}{4} = 232.79$$

3.1.3 VaR para un instrumento de deuda

Tenemos que:

$$\frac{dP}{dr} = -D^m P$$

donde D^m es la Duración Modificada. Por otro lado el cambio porcentual en el precio es:

$$\frac{dP}{P} \approx -D^m r \frac{dr}{r}$$

Además la volatilidad de los rendimientos del precio del bono es:

$$\sigma_p \approx D^m r \sigma_r$$

donde σ_r es la volatilidad de los rendimientos de las tasas de interés y r la última tasa de interés conocida. De acuerdo con la definición de Valor en Riesgo que se describió en el capítulo anterior y asumiendo normalidad en el comportamiento de los rendimientos, el VaR de un bono queda determinado por:

$$VaR = z_q P D^m r \sigma_r \sqrt{T-t}$$

donde P es el precio del bono a valor presente.

Por consiguiente, la información que se requiere para determinar el VaR de un bono es la Duración Modificada, el rendimiento del bono y su precio.[12]

Ejemplo:
Se tiene un bono con duración modificada de 12.76, un precio de \$101.50, la tasa de interés vigente de 8 % anual y la volatilidad de rendimientos de tasas del 2 % anual; es así que el Valor en Riesgo anual con un nivel de confianza de 95 % será:

$$VaR_{anual} = 1.65(101.5)(0.08)(12.76)(0.02) = 3.42$$

El valor anterior significa que el Valor en Riesgo del bono con una probabilidad de 95 % es de \$3.42, que representa el 3.3 % del valor del instrumento.

3.1.4 VaR para un portafolio de instrumentos de deuda

Para calcular el VaR de un portafolio compuesto por instrumentos de deuda (bonos), es necesario:

1. Calcular el valor presente del bono, mediante la siguiente expresión:

$$B = \frac{VN}{1 + r\frac{t}{360}}$$

donde VN es el valor nominal del bono, r la tasa de interés del rendimiento y t el periodo del bono.

2. Determinar el peso específico de cada instrumento en el portafolio, de la siguiente manera:

$$w_i = \frac{x_i}{x_T}$$

donde w_i es el peso específico de cada instrumento en el portafolio, x_i el valor presente de cada instrumento de forma individual y x_T la suma de todos los valores presentes de los instrumentos de portafolio.

3. Calcular los rendimientos diarios de cada instrumento así como su volatilidad.

4. Construir la matriz de correlaciones de rendimientos de tasas de interés.

5. Calcular la Duración Modificada para cada instrumento del portafolio:

$$D^m = \frac{Plazo}{1 + r\frac{t}{360}}$$

6. Obtener la desviación estándar (volatilidad) de rendimientos de precios para cada instrumento de deuda. A este arreglo se le conoce como matriz de volatilidades de precios. La expresión es:

$$\sigma_{precios} = D^m \sigma_r r$$

7. Calcular la volatilidad del portafolio utilizando la matriz de volatilidad de precios de la siguiente manera:

$$\sigma_{portafolio} = \sqrt{\mathbf{w}\sigma\mathbf{C}\sigma\mathbf{w}^T}$$

8. El Valor en Riesgo del portafolio es:

$$VaR_{portafolio} = z_q B_T \sigma_p \sqrt{T-t}$$

donde B_T es el monto total de la inversión, es decir, la suma del valor presente de cada uno de los instrumentos de deuda que conforman el portafolio.[12]

3.2 Futuros y Forwards

Los contratos de futuros y contratos forwards son acuerdos entre dos partes para negociar (comprar-vender) un bien subyacente en una fecha futura específica y a un precio previamente establecido; la operación de compra-venta se pacta en el presente pero la liquidación ocurre en el futuro, si el contrato se mantiene al vencimiento se debe ejercer de manera obligatoria. Mientras la esencia de ambos contratos es la misma, existen diferencias importantes en su instrumentación que pueden provocar que los precios difieran.

En el mercado se pueden negociar diferentes contratos de futuros y de forwards, algunos son: Futuros sobre tasas de interés, acciones, índices bursátiles, opciones; Forwards sobre tipo de cambio, tasas de interés, entre otros.

3.2.1 Futuros

Un futuro consiste en un contrato estandarizado que se cotiza en una bolsa organizada y en el que se especifican: la calidad, la cantidad, la entrega del producto, así como la vigencia del acuerdo, sin embargo el precio del contrato se determina en función de las fuerzas del mercado.[1] En el mercado mexicano los contratos de futuros más negociados son: futuros sobre tasas de interés (Cetes y TIIE), futuros sobre el Índice Nacional de Precios al Consumidor, futuros sobre índices bursátiles y canastas de acciones y futuros sobre opciones.

En los contratos de futuros, las operaciones se liquidan a través de una Cámara de Compensación,[2] por lo que el participante debe realizar un depósito (margen o aportación inicial mínima) para garantizar que la transacción se cumpla y en caso de que los movimientos de los precios en el mercado sean adversos al participante y el margen depositado no sea suficiente, la Cámara de Compensación emitirá una solicitud (llamada de margen), al poseedor del futuro, de un depósito adicional que cubra los montos mínimos establecidos. Si algún cliente

[1] Los principales mercados de futuros en los que las instituciones mexicanas participan son el Mercado Mexicano de Derivados (Mexder) y el Chicago Mercantil Exchange (CME).

[2] En el Mercado Mexicano de Derivados (Mexder), la Cámara de Compensación es Asigna.

no cumple con la llamada de margen, la Cámara ordena que en el mercado se cierren todas las posiciones pertenecientes a este.

En los mercados de futuros en ningún momento desaparece el riesgo de la fluctuación de precios, sin embargo este se transfiere de los agentes económicos que buscan la cobertura a los inversionistas o especuladores que buscan ganancias extraordinarias en función del riesgo que estén asumiendo.

Para la valuación de un contrato de futuros que dura n días, se considera que al principio del día i se tiene una posición larga de e^{ir}, el beneficio (positivo o negativo) de dicha posición en el día i es:

$$(F_i - F_{i-1})e^{ir}$$

donde F_i es el precio de futuros al final del día i y r la tasa de interés libre de riesgo por día. Cada día este beneficio se invierte a la tasa de interés libre de riesgo hasta el final del día n, entonces el valor al final del día n es:

$$(F_i - F_{i-1})e^{ir}e^{(n-i)r} = (F_i - F_{i-1})e^{nr}$$

En consecuencia, el valor de toda la inversión al final del día n es:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{nr} = (F_n - F_0)e^{nr}$$

3.2.2 Forwards

Un contrato forward es un acuerdo bilateral para comprar o vender un activo (subyacente), en una fecha futura pactada (fecha de maduración) y a un precio pactado (precio de entrega), el cual se escoge de tal manera que el valor del forward sea cero al inicio del contrato (no cuesta nada tomar una posición larga o una corta [3]). El poseedor del forward está obligado a comprar el subyacente (posición larga), la correspondiente posición corta (el emisor del forward) acuerda vender el subyacente.

Este tipo de contratos se realizan fuera de un mercado establecido [4] (entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos), es por ello que las características de la operación se determinan únicamente entre ambas partes, estos contratos se adaptan a las necesidades de las contrapartes y normalmente requieren garantías para reducir el riesgo de incumplimiento. Los contratos forwards que se negocian con más frecuencia en el mercado mexicano son: forwards sobre la TIIE y forwards sobre el tipo de cambio.

El precio forward es aquel que se debe especificar al inicio del contrato, de tal manera que el valor del contrato sea cero: [22]

$$F = S_0e^{r(T-t)}$$

donde S_0 es el precio del subyacente al inicio del contrato, r la tasa de interés libre de riesgo y $(T-t)$ el periodo de vigencia del contrato; como el precio forward se determina al inicio del contrato entonces $t = 0$.

Cuando se elabora un contrato forward el valor de éste es cero, pero tendrá un valor positivo o negativo en el futuro; si el precio del activo aumenta, el valor de una posición larga en

[3] Para conocer más sobre los términos de posición larga y corta, revisar Glosario.

[4] Aquel mercado que no está establecido se le conoce como Mercado OTC - Glosario.

el contrato se volverá positivo mientras que el valor de una posición corta se volverá negativo, es así que el valor del contrato forward está dado por:

$$V = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

donde S_t es el precio del subyacente al tiempo t y K el precio de ejercicio.[5]

La principal diferencia entre forwards y futuros es la fecha en que se realizan los pagos entre el poseedor y el emisor del contrato: diario en el caso de futuros, mientras que para los forwards es sólo un pago en la fecha de maduración.[22]

Los precios forwards y de futuros son iguales en la presencia de tasas de interés constantes (misma fecha de entrega).

3.2.3 VaR para futuros y forwards

Aunque la manera de operar de los contratos de futuros y forwards son diferentes, para el cálculo del VaR no existe diferencia, ya que es posible la medición del riesgo de mercado de forma semejante:

$$VaR = xFz_q\sigma_F\sqrt{T-t}$$

donde x es el número de contratos, F el precio del contrato en el mercado y σ_F la volatilidad del contrato; en caso de tener un plazo para el cual no se cuenta con información de la volatilidad entonces dicha posición deberá descomponerse en dos posiciones equivalentes (mapeo).

Ejemplo:
Se desea calcular el VaR para una posición de futuros de un subyacente, que está conformado por 10 contratos, el precio de mercado de dicho futuro por cada contrato es de \$10.50, el plazo de vencimiento es de 4 meses. La volatilidad diaria de futuros de 3 y 6 meses, así como la correlación entre los rendimientos de los futuros de 3 y 6 meses, es la siguiente:

$\sigma_3 = 1\,\%$
$\sigma_6 = 1.5\,\%$
$\rho_{3,6} = 0.80$

Debido a que es necesario conocer la volatilidad de 4 meses y esta no se tiene, entonces se aplica el procedimiento de interpolación lineal:

$$\frac{\sigma_4 - 0.01}{0.015 - 0.01} = \frac{4-3}{6-3} \qquad \Rightarrow \sigma_4 = 1.166\,\%$$

A partir de lo anterior, ya es posible calcular el VaR del portafolio para el nivel de confianza y periodo que sea necesario; si se quiere conocer el VaR a 10 días para un nivel de confianza del 99 %, entonces:

$$\begin{aligned} VaR &= (10)(10.50)(2.326)(0.01166)(\sqrt{10/252}) \\ &= 0.5672 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que existe la probabilidad del 1 % de que el inversionista pueda sufrir una pérdida superior a \$0.5672 en un periodo de 10 días.

[5]También es conocido como strike price y es el precio fijado al que se va a vender o comprar el activo subyacente.

3.3 Swaps

Un swap es un contrato privado entre dos partes que acuerdan de manera simultánea, comprar o vender el derecho de intercambiar flujos de efectivo (definidos en términos de algún subyacente) en fechas posteriores, aprovechando la existencia de ventajas comparativas entre ellas. Es un instrumento utilizado para reducir el costo y el riesgo del financiamiento o para superar las barreras de los mercados financieros; también se denomina permuta financiera. Los participantes son generalmente bancos o empresas de elevada calificación crediticia comparable a la bancaria.[12][34]

El mercado de swaps ha surgido en gran medida, como consecuencia de las grandes limitaciones que presentan los contratos de futuros y opciones negociados dentro de los mercados formales; estos contratos pueden ser realizados, de tal manera que cubran todas las necesidades de las contrapartes, permitiendo realizar acuerdos por horizontes de tiempo mucho más largos que los negociados en mercados organizados. Aunque el mercado de swaps se desarrolló con la finalidad de evitar limitaciones, éste también las presenta; algunas de ellas son: el swap no puede ser alterado o cancelado de manera anticipada sin el conocimiento de los que intervienen; las contrapartes deben estar seguros de la calidad crediticia de otros, ya que el mercado de swaps no cuenta con garantías institucionales.

De acuerdo al tipo de subyacente al que este haciendo referencia los swaps pueden ser clasificados en: swaps de tasas de interés (interest rate swap), de divisas (currency swap), de indices (equity swap), de materias primas (commodity swap) y swaps de crédito. Este tipo de contratos también pueden clasificarse en *plain vanilla* y *flavored*; un swap plain vanilla es aquel con las características más simples, algunos de este tipo están altamente estandarizados aunque se negocien únicamente en mercados no organizados; por otro lado los swaps del tipo flavored pueden contener numerosas características no estandarizadas, teniendo como principal objetivo cubrir las necesidades particulares de las contrapartes.

Las principales características de un contrato swap son:[22]

- ***Fecha de negociación***: fecha en la cual se firma el acuerdo que da origen al contrato swap.
- ***Fecha de determinación***: fecha en la cual se determina el valor de los pagos a realizar.
- ***Fecha de pago***: fecha establecida en el contrato, en la cual tendrá lugar el intercambio de fondos.
- ***Vida del swap***: duración que tendrá el swap, determina hasta que fecha se harán los intercambios de fondos.
- ***Maturity date***: fecha de vencimiento del swap.

3.3.1 Entidades que intervienen en la comercialización

Los intermediarios que pueden participar en la negociación de un swap son dos y la principal diferencia entre ellos deriva del grado de compromiso que asumen en la operación:

- ***Brokers***: su función es unir las necesidades de dos empresas y brindarles asesoramiento; por este trabajo cobra una comisión, quedando hasta ahí su participación en el negocio.
- ***Swap dealers***: este intermediario (bancos generalmente), toma una participación más activa en la operación de swaps, ya que se transforma en la contraparte de cada una

de las empresas que desean un contrato; toda empresa se relaciona primeramente con el swap dealer, de tal manera que este asume el riesgo de incumplimiento de alguna de las partes. El dealer no requiere de la existencia de dos empresas con necesidades complementarias, sino que el mismo ingresa como contraparte de un swap y cubre ese riesgo con algún otro instrumento hasta que haya una empresa que desee realizar un swap con características complementarias.

3.3.2 Motivos que justifican el uso de swaps

Los principales motivos por los cuales es importante la existencia de un mercado de swaps son:

- ***Ventajas comparativas***: cada individuo debería producir un bien para el cual es más eficiente y poder intercambiarlo por los productos que necesita, permitiendo así mayores beneficios para todos los participantes del mercado. De manera semejante ocurre en el mercado de swaps, donde las dos partes involucradas obtienen el bien para el cual cada uno tiene ventajas comparativas respecto del otro, para después intercambiarlo obteniendo de esta manera un beneficio por dicha operación.

- ***Necesidades comerciales***: los swaps, al igual que los demás derivados financieros, son una herramienta efectiva al momento de disminuir e incluso eliminar el riego inherente a una actividad específica. Por ejemplo, si se tiene un swap de tasas de interés una empresa podría asegurarse un costo de financiamiento fijo ante un mercado inestable; mediante un swap de divisas una determinada empresa podría cubrirse de las variaciones en el tipo de cambio entre dos monedas.

3.3.3 Factores que afectan el valor de un swap

- ***Calidad crediticia***: el swap dealer debe ser muy cuidadoso con respecto a la calidad crediticia de los participantes, ya que como estos instrumentos no se negocian en mercados formales, entonces el swap dealer deberá absorber todas las pérdidas o imponer acciones legales con el objeto de cobrar la obligación incumplida. Una manera de limitar este riesgo es mediante el establecimiento de límites en la calificación de riesgo de los participantes, o bien estableciendo límites al nocional que se negociará.

- ***Riesgo de no coincidencia de necesidades***: un swap dealer podría asumir las obligaciones de un contrato con el objeto de brindar soluciones a sus clientes, posteriormente éste buscará una empresa que necesite realizar un swap con características opuestas al que ya tiene pactado y de esta manera compensará su exposición al riesgo, sin embargo puede no encontrar a otra empresa con necesidades opuestas al contrato que ya tiene.

- ***Tasas de interés***: los términos de la estructura de las tasas de interés es una de las características más importantes al momento de valuar, es así que si el mercado de swaps no refleja lo que sucede se pueden presentar oportunidades de arbitraje.

- ***Riesgo país***: los swaps se encuentran expuestos al riesgo de que un cambio en la normatividad de un país dificulte o imposibilite a una de las partes cumplir con las condiciones del contrato.

3.3.4 Swaps de tasas de interés

Los swaps de tasas de interés, son los más negociados hasta el momento, siendo este un contrato que representa una transacción en la que dos partes acuerdan intercambiar periódicamente flujos de intereses calculados con respecto a un monto (nocional o principal), pagaderos a una moneda única y referenciados a alguna tasa líder de mercado; se clasifican conforme al esquema de pago que las contrapartes hayan pactado; no hay ningún intercambio nocional, sin embargo éste sólo se utiliza como referencia.

Dependiendo de las tasas a intercambiar, los swaps de tasas de interés pueden ser de varios tipos:

- ***De tasas fija por fija***: Si ambas contrapartes acuerdan pagar y recibir tasas fijas.
- ***De tasas fija por flotante***: Si la contraparte que compra el swap recibe tasa fija a cambio de pagar flujos en tasa flotante. La contraparte que paga la tasa flotante y recibe la tasa fija se le denomina el comprador del swap o la contraparte larga; por consiguiente, la contraparte corta en un swap es la que vende el contrato aceptando pagar una tasa fija a cambio de recibir tasas flotantes.
- ***De tasas flotante por flotante***: Cuando ambas partes intercambian tasas flotantes, lo más representativo en otros países es utilizar una tasa de interés interbancaria frente a otra tasa calculada con respecto a algún papel bancario comercial.

En el mercado mexicano se negocian diferentes tipos de swaps, donde los flujos de estos instrumentos están relacionados con las siguientes tasas de interés:[34]

- Tasa a 28 días. Generalmente se utiliza la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) como referencia *vs* la tasa fija, expresada en términos nominales o reales. La liquidación se realiza cada 28 días.
- Tasa flotante a un día. Esta corresponde a la tasa que publica el Banco de México. La liquidación de estos títulos es diaria.
- Tasa flotante en pesos (TIIE) *vs* tasa flotante en dólares (Libor). El plazo de liquidación es cada 28 días.

En México, las estructuras de pago más comunes son mensuales, aunque también se celebran contratos con otras periodicidades de pago: trimestral, semestral o anual.

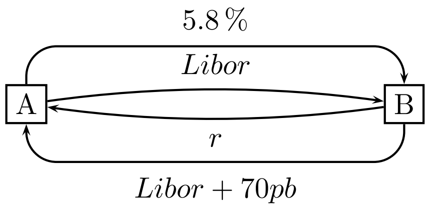
Ejemplo:
Se desea encontrar una tasa r para la cual el intercambio de pagos, dentro de un contrato swap, sea de tal manera que ambas partes salgan beneficiadas.

Se tienen los siguientes datos:[6]

Empresa	Fija	Flotante
A	5.8 %	Libor + 20pb
B	6.6 %	Libor + 70pb
Diferencial de crédito	0.8 %	50pb

[6] 1pb (punto base) es equivalente a 0.01 %.

La información anterior refleja las tasas de interés a las cuales, tanto A como B, pueden obtener préstamos; de esta manera se puede observar que B es menos confiable que A, así mismo B tiene ventaja comparativa en tasa flotante (el exceso que paga B es menor en tasa flotante en comparación con la tasa fija). El diagrama en el que se representa el comportamiento del swap es el siguiente:



De esta manera lo anterior queda determinado por:

Empresa	Paga	Recibe
A	Libor + 5.8 %	r
B	Libor + 70pb + r	Libor

Por consiguiente se tiene:

$$Libor + 5.8 - r \leq Libor + .2$$

$$\Rightarrow \quad 5.8 - .2 \leq r$$

además

$$Libor + .7 + r - Libor \leq 6.6$$

$$\Rightarrow \quad r \leq 6.6 - .7 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 5.6 \leq r \leq 5.9$$

$$\therefore \quad r \in [5.6\,\%, 5.9\,\%]$$

De esta manera se tiene que la tasa r para la cual el contrato swap es justo y ambas partes se benefician puede oscilar entre 5.6 % y 5.9 %, la tasa que se fije dependerá de las necesidades de las contrapartes. La existencia de esta tasa (condición inicial de equilibrio) garantiza que ninguna de las contrapartes iniciará en posición de desventaja; a la única tasa que logra dicho equilibrio en las condiciones de intercambio se le conoce como *tasa swap*.

Todo swap se compone de dos partes correspondientes a cada contraparte; a su vez, cada una de ellas se integra por una serie de flujos de pago multi-periódicos cuya estructura puede ser la misma o puede variar según los requerimientos de los contratantes.

En la gran mayoría de las transacciones con swaps de tasas de interés las liquidaciones periódicas se hacen por diferencias entre la parte fija y flotante, es decir, los flujos que las contrapartes deberían pagarse entre sí se modifican debido a la presencia de tasas flotantes; debido a eso, es necesario recalcular el flujo neto periódicamente y dependiendo del valor resultante, determinar la contraparte que queda con una posición deudora y la que termina con una posición acreedora. Sólo la contraparte deudora será la que tendrá que pagar el monto resultante de dicha diferencia, permitiendo así evitar movimientos de fondos innecesarios.

Cabe mencionar que gracias a la liquidación por diferencias, el monto por entregar se reduce considerablemente, lo que tiene ciertas ventajas sobre las probabilidades de incumplimiento de pago involucradas en las transacciones con swaps, en comparación con otras formas de financiamiento.

Otra de las ventajas de los swaps de tasas de interés es que permiten diseñar esquemas de financiamiento para los contratantes, transformando los esquemas originales de pago en otros similares con distintas características de plazo y/o tasa, de forma tal que hace posible el diseño de esquemas adecuados a las necesidades.

El procedimiento de valuación de un swap se compone de tres etapas:

1. ***Identificar una estructura de pagos equivalente para las contrapartes***: las partes de un mismo swap generalmente están referenciadas a tasas de interés fijas y/o flotantes mostrando diferentes esquemas de flujos periódicos de pago. Por lo cual, es indispensable convertirlas primero en estructuras comparables para después poder valuarlas.

2. ***Expresar todos los pagos periódicos en un pago único equivalente***: esto se realiza estimando los flujos futuros, descontándolos y trayéndolos a valor presente para transformarlos en un pago único equivalente. Una vez definida la estructura de pagos de cada parte, se estima el valor presente de todos los flujos futuros. Al efectuar este proceso se encuentra una tasa fija única comparable a las flotantes para un punto dado en el tiempo.

3. ***Determinar el valor del swap***: el valor del swap se expresa como la diferencia entre los valores presentes de las partes fija y flotante:

$$V_{t_i}(s) = B^x_{t_i} - B^y_{t_i}$$

donde $V_{t_i}(s)$ es valor del swap[7] calculado en el periodo i; $B^x_{t_i}$ es el valor presente del flujo total de pagos por recibir, expresados en el período i (representa la posición activa de la contraparte); $B^y_{t_i}$ es el valor presente del flujo total de pagos por entregar, expresados en el período i (representa la posición pasiva de la contraparte) y t_i es el periodo de valuación del swap ($i = 0, 1, ..., T$). Los flujos $B^x_{t_i}$ y $B^y_{t_i}$ por las similitudes en su estructura pueden compararse con bonos cuponados independientes, uno que pague siempre en tasa fija y otro que pase tasa flotante, por consiguiente bajo este criterio se tiene:

$$B^x_{t_i} = Bono\ \ en\ \ tasa\ \ fija = \sum_{i=1}^{T} Ke^{-rt_i} + Qe^{-rt_i}$$

$$B^y_{t_i} = Bono\ \ en\ \ tasa\ \ flotante = K^* e^{-rt_{vig}} + Qe^{-rt_{vig}}$$

[7]Aunque el valor del swap cambia con el tiempo, debido a cambios en las expectativas de mercado, es indispensable que su valor inicial siempre sea igual a cero, ya que es la única garantía de que el intercambio será justo y de que ambas partes están negociando bajo condiciones equivalentes.

donde Q es el nocional (valor del monto total a intercambiar entre las contrapartes), K es la función de los T pagos periódicos del bono en tasa fija, r_{t_i} es la tasa de descuento correspondiente al periodo i y K^* es el pago efectuado en el periodo vigente por el bono a tasa flotante vigente. De esta manera cuando una contraparte compre un swap de tasas fija por flotante, equivaldrá a que está asegurándose de recibir tasas fijas, financiándose con la venta de tasas variables.

Para swaps que involucran múltiples pagos, el valor de mercado es el valor presente neto de los pagos a ser intercambiados entre ambas contrapartes entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento del contrato, donde el factor de descuento a ser utilizado refleja la tasa de interés de mercado para el plazo de madurez del contrato.

3.3.5 VaR para swaps

Para el análisis del cálculo del Valor en Riesgo, se considerará un contrato swap sobre tasas de interés. Se tiene un contrato sobre tasas de interés de $100 millones a 5 años; este paga una tasa anual de 6.195 % durante la vigencia, a cambio de pagos a tasa flotante *Libor*; se desea conocer el VaR para un nivel de confianza del 95 %. Existen dos enfoques posibles para analizar el riesgo de este contrato: se puede considerar como un contrato combinado de un bono a tasa fija y en un bono a tasa flotante o bien como un portafolio de contratos forward;[25] para este ejemplo se considera la primera alternativa.

En la siguiente tabla se muestran los pagos tanto fijos como flotantes involucrados en el swap, las tasas spot para vencimientos de 1 a 5 años y se detallan los resultados obtenidos del valor presente de cada uno de los flujos de efectivo efectuados a lo largo del swap.

Año	Flujo fijo	Flujo flot	Tasa anual	VP de flujos
1	6.195	–	5.813 %	5.854668
2	6.195	–	5.929 %	5.520921
3	6.195	–	6.034 %	5.196440
4	6.195	–	6.130 %	4.883022
5	106.195	–	6.217 %	78.547780

A partir de los flujos obtenidos en la tabla anterior se obtienen los valores del VaR por año al 95 % de confianza, se utiliza la volatilidad correspondiente para cada periodo. Finalmente se obtiene el VaR no diversificado del contrato swap, mediante la suma del VaR correspondiente a cada posición.

Año	VP de flujos	$z_q\sigma$	VaR de flujos
1	5.854668	0.0047	0.027517
2	5.520921	0.00987	0.054491
3	5.196440	0.01484	0.077115
4	4.883022	0.01971	0.096244
5	78.547780	0.02426	1.905569
VaR ($)			2.160937

Para el cálculo del VaR diversificado, es necesario la matriz de los coeficientes de correlación, la cual está dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.89 & 0.87 & 0.86 \\ 0.9 & 1 & 0.99 & 0.98 & 0.97 \\ 0.89 & 0.99 & 1 & 0.99 & 0.99 \\ 0.87 & 0.98 & 0.99 & 1 & 1 \\ 0.86 & 0.97 & 0.99 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible calcular el VaR diversificado, multiplicando el VaR de los flujos por la matriz de coeficientes de correlación:

Año	VaR diversificado	VaR incremental
1	0.051394	0.023849
2	0.114341	0.053059
3	0.164822	0.076484
4	0.207455	0.096268
5	4.105889	1.905311
VaR diversificado		2.154971

De esta manera el Valor en Riesgo diversificado para el contrato swap al 95 % de confianza es de $2.15 millones.

3.4 Opciones

Una opción es un contrato entre dos partes que le otorgan a su propietario el derecho, pero no la obligación, de comprar o de vender un activo a un precio que se determina al inicio del contrato a cambio de una prima. Existen dos tipos de opciones:

- ***Opción de compra (call)***: Es el derecho de comprar una cantidad determinada de un activo (subyacente), a un precio previamente determinado (precio de ejercicio o strike) y durante la vigencia del contrato o en la fecha de vencimiento. El valor de la opción es:[22]

$$C = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

  o bien: $C = Max\{0, (S_T - K)\}$

- ***Opción de venta (put)***: Es el derecho de vender una cantidad determinada de un activo (subyacente), a un precio previamente determinado (precio de ejercicio o strike) y durante la vigencia del contrato o en la fecha de vencimiento.El valor de la opción es:[22]

$$P = \begin{cases} K - S_T & \text{si } K > S_T \\ 0 & \text{si } K \leq S_T \end{cases}$$

  o bien: $P = Max\{0, (K - S_T)\}$

Dependiendo del precio de ejercicio y de la cotización del bien subyacente en cada momento, es posible clasificar a las opciones en: *dentro del dinero* (in the money), *en el dinero* (at the money) o *fuera del dinero* (out of the money). Se dice que una opción está dentro del dinero si ejerciéndola inmediatamente se obtiene un beneficio; si al ejercer inmediatamente el derecho no se obtiene un beneficio entonces la opción está fuera del dinero y finalmente si la opción se encuentra en la frontera del beneficio y la pérdida se dice que está en el dinero.

Los tipos de participantes en los mercados de opciones son:

- ***Compradores de opciones de compra***: aquellos que tienen una posición larga dentro de un contrato de compra.

- ***Compradores de opciones de venta***: aquellos que tienen una posición larga dentro de un contrato de venta.

- ***Vendedores (emisores) de opciones de compra***: aquellos que tienen una posición corta dentro de un contrato de compra.

- ***Vendedores (emisores) de opciones de venta***: aquellos que tienen una posición corta dentro de un contrato de venta.

La decisión del poseedor de la opción de comprar o vender el activo, así como el valor de la opción, dependen del precio de ejercicio de la opción (K), es decir, del precio de compra o de venta acordado y del precio del activo (subyacente) vigente en la fecha de expiración del contrato (S_T).

La pérdida potencial para un comprador de opciones se limita a la prima pagada; pero la pérdida potencial para el vendedor puede ser mayor (aunque limitada al precio del activo subyacente).

3.4.1 Paridad put-call

Es una relación que permite calcular el valor de la opción de venta, conociendo el valor de la opción de compra:[34]

$$C + Ke^{-r(T-t)} = P + S_0$$

Una opción Europea sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento, mientras que una opción Americana puede ser ejercida en cualquier momento o hasta la fecha de vencimiento.

Para adquirir una opción es necesario pagar una prima la cual estará en función del periodo de expiración del contrato, la volatilidad de los rendimientos del subyacente, el precio de ejercicio y la tasa de interés libre de riesgo.

Uno de los problemas más complejos en la negociación de las opciones se refiere a la valuación. Mientras en la fecha de vencimiento el valor de la opción se obtiene a través de: $C = Max\{0, (S_T - K)\}$ (call) o $P = Max\{0, (K - S_T)\}$ (put), puesto que el precio del subyacente y el precio de ejercicio son conocidos; en una fecha previa a la del vencimiento (t) es necesario estimar el precio del subyacente, el cual es desconocido. Para la estimación de este precio se considera como supuesto que sigue el comportamiento de una variable aleatoria. De esta manera el valor de la opción (call) en (t) es:

$$C_t = \mathbb{E}[Max\{0, (S_T - K)\}]$$

utilizando las propiedades del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}[(S_T - K)I_{S_T>K}] - \mathbb{E}[(0)I_{S_T\leq K}] \\ &= \mathbb{E}[(S_T)I_{S_T>K}] - \mathbb{E}[(K)I_{S_T>K}] \\ &= \mathbb{E}[(S_T)I_{S_T>K}] - K\mathbb{P}[S_T > K] \end{aligned}$$

Para estimar el valor esperado del precio del subyacente y por consiguiente el valor de la opción, se han desarrollado diferentes modelos. Algunos de ellos suponen una distribución de probabilidad específica para determinar, mediante fórmulas cerradas, el precio del subyacente; otros generan escenarios aleatorios y utilizan métodos numéricos para calcular el valor esperado del precio del subyacente.[34]

3.4.2 Modelo Black-Scholes

Los modelos de valuación de opciones constituyen uno de los aspectos más importantes dentro de la teoría financiera, siendo así el modelo de Black-Scholes (1973) el más conocido y utilizado, ya que al ser valorado adecuadamente el instrumento derivado, es posible cubrirse de riesgos futuros ocasionados por la incertidumbre de los movimientos de los precios. A través de esta metodología es posible calcular el precio de las opciones con una fórmula cerrada.

Los supuestos que se consideran en el modelo Black-Scholes para determinar el precio de una opción son:

1. No existen costos de transacción.
2. Todos los activos son perfectamente divisibles.
3. No hay restricciones a las ventas en corto.[8]
4. La opción sólo puede ser ejercida al vencimiento del contrato, es decir, únicamente se aplica para opciones europeas.
5. El activo subyacente no paga dividendos durante la vigencia del contrato.
6. La tasa de interés libre de riesgo es conocida y constante durante la vida de la opción.
7. Los rendimientos entre la fecha de valuación (t) y la fecha de vencimiento de la opción (T) se capitalizan continuamente, esto significa:

   $$r_{t,T} = ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$$

   Por consiguiente el precio del subyacente en T es igual al precio en la fecha de valuación más el rendimiento capitalizado entre ambas fechas:

   $$S_T = S_t e^{r_{t,T}}$$

[8]Existe una venta en corto cuando un inversionista vende un activo financiero que ha conseguido prestado de otro inversionista.

8. La secuencia aleatoria de los rendimientos entre la fecha de valuación y de vencimiento sigue un proceso lognormal, esto es:

$$ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t))$$

9. El comportamiento de precios de los activos siguen un Movimiento Browniano Geométrico.[9] Por consiguiente si S_t es el precio del subyacente al tiempo t, este quedará determinado por:

$$S_t = S_0 exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$$

Utilizando los argumentos anteriores Fischer Black y Myron Scholes obtuvieron una ecuación diferencial, cuya solución es la fórmula de Black-Scholes para una opción europea que no paga dividendos. Es así que las expresiones para estimar el precio de una opción call y put europeas son:[22]

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

donde:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(d_i)$ es la función de densidad de una distribución normal.

Un gran número de instituciones financieras y entidades reguladoras utilizan el modelo de Black-Scholes para valuar todas las opciones, independientemente de sus características y del subyacente, lo que origina estimaciones erróneas de los precios. Para reducir los riesgos en la valuación de las opciones es recomendable:[34]

- Utilizar los modelos adecuados para la valuación de opciones americanas y exóticas.
- No usar el modelo de Black-Scholes para valuar opciones de tasas de interés, ya que dicho modelo supone que el precio del subyacente sigue un proceso Browniano lo cual no garantiza el proceso de no arbitraje en la estructura de las tasas de interés.
- Evitar el uso de volatilidades históricas ya que la mayoría de las veces no tienen una relación directa con los precios de las opciones.[10]

Limitaciones del Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes tiene una gran cantidad de inconvenientes, sin embargo en la práctica se sigue usando a pesar de que ya existen modelos alternativos. Las limitaciones más importantes son:

[9] Capítulo 2.

[10] En el mercado se recomienda el uso de la volatilidad implícita. Capítulo 4.

- Al suponer que el precio del subyacente sigue un comportamiento lognormal y que la volatilidad es constante y conocida, se subestima el precio ya que la volatilidad es variable en el tiempo y está correlacionada con el precio del subyacente.[34]
- El modelo de Black-Scholes se cumple sólo si los costos de transacción son cero.
- Se considera que el rebalanceo del portafolio es continuo y permanente, sin embargo cuando no se cumple este supuesto se viola el principio de no arbitraje, ya que al no poder rebalancear de manera continua se presentan errores en las estrategias de cobertura.
- Conforme más espaciado sea el rebalanceo, las fluctuaciones de las pérdidas y ganancias del potafolio serán mayores. Por otro lado si el rebalanceo es menor entonces el riesgo del portafolio es mayor y el precio de las opciones es mayor al precio de mercado.

En la actualidad gran parte de las investigaciones se centran en modificar el modelo de Black-Scholes, permitiendo que la volatilidad no sea constante, sino que dependa del precio de ejercicio, así como del tiempo que falta para el vencimiento.

3.4.3 Medidas de sensibilidad (Griegas)

Para mejorar la eficiencia de las estimaciones, algunos modelos consideran que el precio de las opciones dependen de otros factores de riesgo, además de el precio del subyacente; es así que se habla de medidas de sensibilidad al referirse al efecto de alguno de los factores de riesgo (volatilidad, tasas de interés, tiempo que resta hasta el vencimiento y precio del activo subyacente) sobre el valor de la opción; de esta manera es posible conocer que tan sensible es una opción en concreto a ciertas variaciones (no todas tienen la misma sensibilidad a los mismos factores de riesgo).

Ciertas letras griegas son usadas, a fin de indicar el riesgo de cambios en los precios subyacentes o en las condiciones de mercado, las más utilizadas son:

Delta

Sensibilidad del precio de la opción a los movimientos en el precio del bien subyacente. La delta es muy útil para la cobertura en opciones, este indicador significa el equivalente en subyacentes que se necesita comprar o vender para cubrir una opción:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Gamma

Sensibilidad de la delta a los movimientos en el precio del bien subyacente. También se le conoce como la segunda derivada del precio de la opción respecto al precio del bien subyacente. La gamma decrece a medida que la certidumbre se incrementa e indica que tan frecuentemente debe rebalancearse un portafolio para lograr una adecuada cobertura:[35]

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

Theta

Sensibilidad del precio de la opción al periodo de tiempo que le falta a la opción para expirar. Aumenta en la medida que se acerca la fecha de expiración de la opción, ya que es mayor el tiempo de que dispone el precio del subyacente para cambiar en dirección favorable para el poseedor del contrato:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Rho

Sensibilidad del precio de la opción a movimientos en las tasas de interés libres de riesgo:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad ; \quad \rho = \frac{\partial P}{\partial r} = -(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

Vega

Sensibilidad del precio de la opción a movimientos en la volatilidad del bien subyacente:[35]

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

Ejemplo:

Valuación de una opción europea call: Se considera una opción cuyo valor de mercado del bien subyacente es de \$45, con precio de ejercicio de \$43, el contrato tiene un plazo de vigencia de 3 meses, la volatilidad de los rendimientos del subyacente es del 12 % anual y la tasa de interés libre de riesgo de 15 % anual. Se desea conocer el valor de la opción, así como las medidas de sensibilidad al precio de la opción. Primeramente se tiene que calcular los valores de d_1 y d_2:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{45}{43}\right) + \left(0.15 + \frac{0.12^2}{2}\right)(0.25)}{0.12\sqrt{0.25}} = 1.4127$$

$$d_2 = 1.4127 - 0.12\sqrt{0.25} = 1.3527$$

A través de las tablas de una distribución normal estandarizada, podemos determinar que:

$$N(d_1) = 0.9211 \quad ; \quad N(d_2) = 0.9119$$

Por consiguiente se tiene que el valor de la opción call es:

$$C = (45)(0.9211) - (43)e^{-0.15(0.25)}(0.9119) = 3.6799$$

Si ahora se calculan las medidas de sensibilidad se tiene:

$$\Delta = 0.9211 \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{(45)(0.12)\sqrt{2\pi(0.25)}}e^{-\frac{1.4127^2}{2}} = 0.0545$$

Esto significa que la delta podría incrementarse en 0.0545 para alcanzar 0.9756, si el valor del subyacente sube de 45 a 46.

$$\Theta = -\frac{(45)(0.12)}{2\sqrt{2\pi(0.25)}}e^{-\frac{1.4127^2}{2}} - (0.15)(43)e^{-0.15(0.25)}(0.9119) = -6.4597$$

$$\rho = (0.25)(43)e^{-0.15(0.25)}(0.9119) = 9.4425 \quad ; \quad \nu = \frac{(45)\sqrt{0.25}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1.4127^2}{2}} = 3.3092$$

3.4.4 VaR para opciones

El proceso de valuación de las opciones es un proceso complicado que requiere de grandes cuidados, ya que estimaciones incorrectas de los precios provocarán estimaciones inadecuadas del Valor en Riesgo.

Debido a que existe una relación no lineal entre el cambio en el precio del subyacente y el cambio en el valor de las opciones, así como la presencia de colas pesadas en el comportamiento de los rendimientos del subyacente, los modelos más apropiados para estimar el VaR de las opciones son el modelo de Simulación Histórica y el modelo Montecarlo. Dado que ambos modelos requieren de la evaluación completa del portafolio y de la generación de una gran cantidad de escenarios de los factores de riesgo, el proceso para la estimación del VaR puede ser muy costoso y principalmente cuando se tiene una gran cantidad de instrumentos.

Por la necesidad de tener procedimientos menos costosos se han desarrollado algunas aproximaciones para estimar el VaR de estos instrumentos financieros. La principal característica de estos modelos consiste en transformar la relación no lineal en la fórmula de valuación de las opciones, en una relación lineal. Algunos de los principales detalles que se deben analizar de este modelo son:

- Debido a que la estimación de la Δ supone que el cambio en el precio del subyacente es infinitesimal, entonces esta es una medida local alrededor del precio actual del subyacente. De esta manera si el precio del subyacente presenta cambios importantes el modelo delta subestima en gran medida las pérdidas del portafolio.

- El modelo supone que la distribución de las pérdidas y ganancias del portafolio es normal, permitiendo de esta forma relacionar los cambios en el precio del subyacente con los cambios en el valor del portafolio y la varianza de los rendimientos del portafolio con el VaR de la cartera. Ejemplo: El VaR al 95 % de probabilidad será equivalente a 1.645 veces la desviación estándar de los rendimientos: $VaR_{95\,\%} = 1.645\sigma$.

  En el caso de que la distribución de los rendimientos no sea normal, la volatilidad no tendría que estar relacionada con el VaR.

- Una alternativa que aparentemente es más simple, consiste en estimar el VaR de una opción como el VaR del activo subyacente multiplicado por la Δ del derivado.[34]

Dado que no siempre se conocen de manera explícita las medidas de sensibilidad (griegas), especialmente en las opciones exóticas, es necesario considerar ciertas especificaciones:

- La incorporación de los términos de un orden elevado puede provocar sesgos en la estimación.

- Es recomendable incluir las medidas que se puedan observar en el mercado y sean posibles de interpretar, ya que la inclusión de las griegas no es tan sencillo.
- Es de gran importancia comprender la influencia de cada griega sobre el valor de la opción.

Para estimar el VaR de las opciones existen varias alternativas, uno de los modelos más utilizados considera la Δ y la γ, de tal manera que la fórmula para la estimación del VaR es:

$$VaR = z_q\sqrt{\Delta^2 S^2\sigma^2 + (1/2)(\gamma S^2\sigma^2)^2}$$

donde S es el precio del subyacente. En otros modelos se sugiere utilizar las demás medidas de sensibilidad (JP Morgan incluye la delta, la gamma y la theta; otros autores sugieren utilizar la delta y la vega); sin embargo la estimación del VaR sigue siendo incapaz de capturar las colas pesadas y los brincos que se puedan originar en el precio del subyacente.[34]

Ejemplo:
Tomando los datos del ejemplo anterior, donde el precio del bien operado es de \$45, con precio de ejercicio de \$43, la tasa de interés libre de riesgo es de 15 % anual, con una vigencia de 3 meses y una volatilidad del 12 % anual; se calculará el Valor en Riesgo al 95 % de confianza. Con la información anterior se tiene:

$z_q = 1.645$
$\Delta = 0.9211$
$\gamma = 0.0545$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ VaR &= 1.645\sqrt{(0.9211^2)(45^2)(0.12\sqrt{1/4})^2 + (1/2)((0.0545)(45^2)(0.12\sqrt{1/4})^2)^2}\\ &= 4.1171\end{aligned}$$

Por consiguiente el VaR al 95 % de confianza, para una opción de compra europea, durante un horizonte de tiempo de tres meses es de \$4.12.

4

Análisis complementarios

4.1 Otras aproximaciones a los Modelos de Portafolio

Debido a los constantes cambios en los instrumentos financieros así como las necesidades que se presentan día con día en los mercados, es necesario que existan métodos eficientes para medir el riesgo.

Aún cuando el Valor en Riesgo (VaR) es una medida para la gestión de riesgos y ha sido utilizada como base para la industria de la regulación, ésta ha sido seriamente criticada, principalmente cuando los rendimientos no son una función lineal de las variables de riesgo, como ocurre en la mayoría de los casos, o cuando las distribuciones de las pérdidas y ganancias no tienen un comportamiento normal.

Una primera respuesta es tomar una aproximación lineal a los rendimientos de estos instrumentos (método delta-normal). Sin embargo si se desea una estimación del VaR más exacta es necesario saber si el enfoque será a la no-normalidad o a la no-linealidad; si se tiene el caso de la no-normalidad será necesario considerar ciertos parámetros adicionales para el manejo de colas pesadas (característica que presentan este tipo de distribuciones que representan gran cantidad de instrumentos financieros);[14] por otro lado si nos referimos a la no-linealidad entonces es posible tomar una aproximación más refinada (segundo orden o delta-gamma) para las posiciones.

Debido a las limitaciones de los modelos de portafolio, se han desarrollado algunos en particular con la finalidad de corregir las deficiencias, las metodologías orientadas a resolver el problema de la no-normalidad son:

- ***Distribución t-Student***: es una primera alternativa, ya que comparte algunas de las características de la distribución normal, a demás de que permite el manejo de colas pesadas (principal característica en las distribuciones de los factores de riesgo).
- ***Mezcla de Normales***: pretenden capturar la presencia de los eventos extremos.
- ***Teoría de Valores Extremos (EVT)***: a través de esta Teoría es posible calcular la probabilidad de sucesos con umbrales de ocurrencia muy bajos.

Así mismo existen modelos que resuelven el problema de la no-linealidad, los más utilizados son:

- ***Modelos Delta-Gamma***: incorporan indicadores de sensibilidad no lineales, o de segundo orden.

- ***Modelos DeltaVaR***: tienen como objetivo analizar la contribución marginal de un instrumento o factor de riesgo, al riesgo total del portafolio.

4.1.1 Distribución t-Student

Una distribución t proporciona una sencilla e intuitiva forma de capturar la incertidumbre de la desviación estándar del portafolio; con la característica de que sus propiedades son sencillas de entender, además de que sus valores pueden ser localizados en tablas estándar.

Algunos estudios han reportado que esta distribución adecua los rendimientos esperados de mejor manera que una distribución normal. Un ejemplo de esto se encuentra en la comparación hecha por Wilson (1993) al examinar para ambos casos, que tan frecuentemente las pérdidas reales excedían la estimación del VaR aún cuando se encontraba basado en un nivel de confianza del 99 %. Si la distribución de probabilidad es elegida adecuadamente, entonces las pérdidas esperadas sólo excederán en el 1 % de acuerdo con la estimación del VaR; Wilson encontró que al utilizar una distribución normal, las pérdidas reales eran superiores a la estimación del VaR en un 2.7 %, mientras que cuando la distibución usada era una t sólo ocurría el 0.7 % de las veces. Estos resultados, por tanto sugieren que una distribución t es más adecuada que una distribución normal.[14]

Esta distribución tiene colas más pesadas que las de un distribución normal, lo cual permite tener la posibilidad de captar las mayores pérdidas durante eventos extremos; así mismo para cualquier nivel de confianza dado, la estimación del VaR es más confiable al usar la distribución t.

Si una distribución t tiene una mejor representación de los rendimientos, que cualquier distribución normal, entonces una estimación del VaR basada en normalidad subestimará el verdadero valor del VaR, así como también las pérdidas esperadas durante eventos extremos.

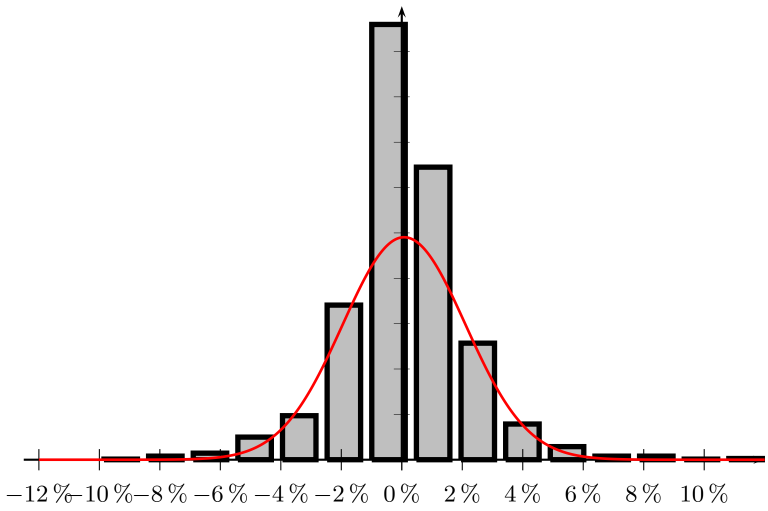
Ejemplo:

A continuación se muestra un ejemplo, en el cual se desea mostrar la importancia que se debe dar al momento de elegir o establecer la distribución de probabilidad, la cual servirá para la estimación del VaR.

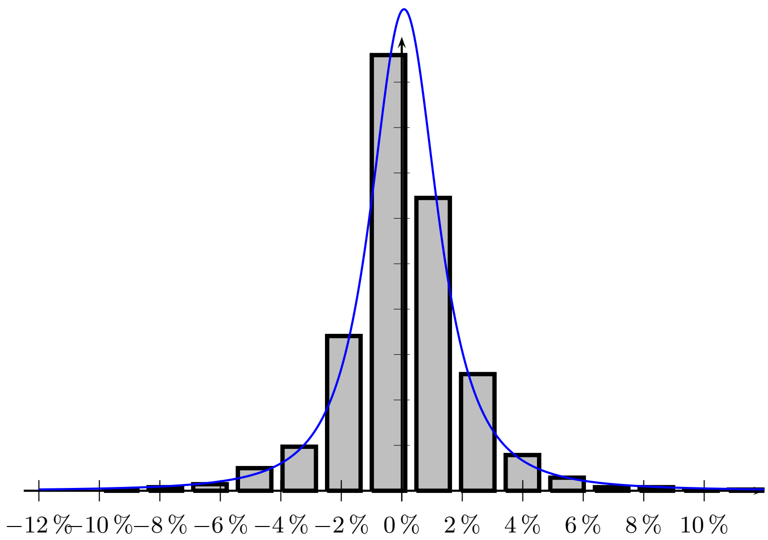
Para este análisis se consideraron observaciones diarias de precios desde 03/01/2000 hasta 15/05/2007 de la acción *Walmex V.*

Se presentan dos gráficas que muestran el histograma de frecuencias de los rendimientos, calculados a partir de los precios históricos. En la ***Gráfica 4.1*** se sobrepone la curva de una distribución normal con la misma media y desviación estándar que muestran los datos ($\mu = 0.000757$ y $\sigma = 0.020332$).[1] La ***Gráfica 4.2*** es comparada con la curva de una distribución t-Student.

[1]Estos datos se obtuvieron una vez que se realizó el análisis de *Estadísticos Descriptivos* en SPSS (Programa para análisis estadístico).



Gráfica 4.1: *Histograma de frecuencias ajustado por una distribución normal.*



Gráfica 4.2: *Histograma de frecuencias ajustado por una distribución t-Student.*

Como puede observarse, aún cuando en la mayoría de las veces se establece que la mejor distribución de probabilidad que se asemeja al comportamiento de los rendimientos de precios de los instrumentos financieros, es una distribución normal, esto no siempre ocurre; a través de las gráficas anteriores es posible verificar que una de las alternativas que se tiene es la de usar la distribución t-Student, ya que permite modelar el comportamiento de tal manera que se ajusta mejor a la realidad.

Otra forma de verificar que es lo que ocurre con el comportamiento de los rendimientos es a través de la *Prueba no paramétrica de Kolmogorov-Smirnov para una muestra* definida en SPSS; esta prueba proporciona un dato que mide el *grado de significancia*, si este valor es mayor a 0.05 se asume normalidad, en este caso para los datos que se analizan el grado de significancia es de 0, es por ello que nuevamente se prueba que el comportamiento de los rendimientos de precios no se comportan de acuerdo a una distribución normal.

A través de este ejemplo se ha mostrado la importancia de elegir adecuadamente la distribución de probabilidad, de lo contrario al momento de calcular el VaR la estimación será poco confiable, generando resultados erróneos.

4.1.2 Modelo de Mezcla de Normales

Es un modelo que supone que en condiciones de estabilidad los rendimientos se generan a partir de una distribución normal unitaria, sin embargo al presentarse una situación extrema los rendimientos se generan con otra distribución normal la cual contempla una mayor desviación estándar. Los aspectos más relevantes de este modelo son:

- La distribución de mezcla de normales es asimétrica.
- Las colas de la distribución al mezclar normales son más anchas que las de una distribución normal unitaria.
- La asimetría de la distribución se acentúa cuando es mayor la frecuencia de eventos extremos.
- Al tener presencia de colas más anchas, los errores en la estimación del VaR son menores, a pesar de que el nivel de confianza en una distribución normal sea superior al 95 %.
- La estimación del VaR no es directa ya que es necesario la estimación de la media, desviación estándar, así como de el valor de la probabilidad de ocurrencia.

4.1.3 Teoría de Valores Extremos (EVT)

Teoría estadística relacionada con el análisis de las consecuencias que originan en las instituciones financieras, los comportamientos o evoluciones extremas de los rendimientos de mercado de un portafolio de inversión. Es una herramienta que ha sido implementada en los últimos años para la medición de riesgos, ya que permite analizar de mejor manera el VaR. Esta teoría sirve como análisis complementario del VaR y no como un sustituto.

La mayor discrepancia entre la distribución Normal y la real de las series financieras reside en que en éstas se presenta el fenómeno de colas pesadas, este hecho es bastante relevante al momento de evaluar el riesgo, ya que lo que se desea es cubrir la posibilidad de grandes pérdidas, las cuales se encuentran ubicadas en las colas. Así mismo para la medición del riesgo es de gran importancia tener la mayor cantidad de información disponible; sin embargo, cuando se está interesado en las pérdidas máximas de un activo, pueden existir inconvenientes por la poca disponibilidad de este tipo de datos.

Esta Teoría parte de la distribución de probabilidad de los rendimientos extremos (distribución de las colas de los rendimientos), la cual es perfectamente conocida e independiente de la distribución de probabilidad de los rendimientos; de esta manera es posible estimar valores extremos con mayor precisión. La distribución paramétrica que se usa para el desarrollo de este modelo es la *Distribución Generalizada de Pareto.*

Estas aportaciones tienen como objetivo evitar el problema de la mala modelización de las colas de los rendimientos y en consecuencia una mala estimación del VaR. De esta manera la Teoría de Valores Extremos puede resultar muy útil para mejorar los métodos ya existentes de estimación del VaR.

El método general basado en la Teoría de Valores Extremos consta de los siguientes pasos:

1. Elección del periodo de análisis y de la frecuencia de los rendimientos.
2. Construcción del histograma de los rendimientos.

3. Elección de la longitud del período de los rendimientos extremos (es muy importante que el periodo de selección sea lo suficientemente largo, para que al momento de utilizar la distribución no haya problemas).

4. Selección de los rendimientos extremos y estimación de la distribución de dichos datos.

5. Una vez que se tiene la distribución estimada se procede a realizar una prueba para comprobar que efectivamente es una buena estimación; si es así se continua con el siguiente paso, de lo contrario se elegirá nuevamente un periodo de eventos extremos (paso 3).

6. Elección del nivel de confianza.

7. Cálculo del VaR.

4.1.4 Modelo Delta-Gamma

En los modelos de portafolio se tiene el supuesto de que la relación entre el cambio en los factores de riesgo y el cambio en el valor de la cartera es lineal, sin embargo cuando se consideran instrumentos derivados o de renta fija ya no existe linealidad, provocando de esta forma un error en la estimación del VaR; es así que al hacer uso de los Modelos Delta-Gamma se incluye la no linealidad de los instrumentos financieros.

Una manera de estimar las variaciones de los factores de riesgo en el valor del portafolio, consiste en aproximar los cambios mediante las derivadas de primero y segundo orden de los factores de riesgo. Los términos que deben ser incluidos en el cálculo del VaR son:

- Aquellos que tengan sentido financiero.
- Los términos cuyas covarianzas y correlaciones sean estables.
- En el caso de las opciones las medidas de sensibilidad que se utilizan son: delta (primera derivada con respecto al subyacente), rho (primera derivada con respecto a la tasa de interés), theta (primera derivada con respecto al tiempo), vega (primera derivada con respecto a la volatilidad) y gamma (segunda derivada con respecto al subyacente).[2]
- Para los bonos los términos que se usan son: duración y convexidad, los cuales se desprenden de las dos primeras derivadas.

Cuando las variaciones en las tasas de interés son poco significativas, la aproximación delta puede ser insuficiente para la estimación del VaR.

Debido a la gran cantidad de errores que se generan en la estimación del VaR, para portafolios compuestos de opciones, el Comité de Basilea exige que los modelos usados en las instituciones financieras incluyan los términos gamma.

La estimación del VaR por medio de este método proporciona una solución analítica, a problemas en los que se requiere generar escenarios, es por ello que se presentan ciertas limitaciones:

- En un portafolio conformado por opciones, se tendrá error en la estimación del VaR a menos que el precio de ejercicio sea muy diferente al precio vigente del subyacente involucrado.

[2] Capítulo 3 (Opciones).

- Entre menor estabilidad presenten los parámetros que miden los cambios en el precio de la opción, los errores que se presenten en la estimación del VaR serán mayores.
- A través de este modelo se genera una medida de riesgo local, lo cual significa que en el caso que se presenten eventos extremos queden fuera de la distribución, generando subestimaciones del VaR; es por ello que lo más conveniente es tomar aproximaciones no-lineales.

4.1.5 Modelo DeltaVaR

Aunque el modelo de portafolio (varianza-covarianza) proporciona cierta información al momento de estimar el VaR, no es tan completa, las razones más importantes son:

- En el momento que se tiene un portafolio de inversión, si la suma del valor en riesgo de cada instrumento no coincide con el valor en riesgo del portafolio, es imposible identificar que instrumentos o combinación de ellos contribuye al incremento del riesgo.
- Es necesario recalcular la estimación del VaR cada vez que cambia la estructura del portafolio.

Debido a la funcionalidad reducida del modelo de varianza-covarianza, se hacen ciertas modificaciones obteniendo el modelo DeltaVaR, así como aquellos conceptos que de este modelo se desprenden (VaR Incremental, Componentes del VaR y VaR), los cuales tienen el propósito de corregir dichas limitaciones.

Las características más importantes de este modelo son:

- Supone que los cambios en la estructura del portafolio muy pequeños, permitiendo así que las estimaciones sean más precisas.
- Si todas las posiciones del portafolio se modifican de manera homogénea, el DeltaVaR no cambia.[3]
- Es posible escalar las estimaciones de riesgo con diferentes niveles de confianza.
- Depende sólo del valor del portafolio actual y no de las posiciones que se consideren como candidatos, lo cual permite calcular el VaR Incremental (efecto proporcional al DeltaVaR).
- La suma de los valores en riesgo de cada posición del portafolio, es equivalente al VaR Diversificado.[4] Cada uno de los elementos de esta suma son los Componentes del VaR los cuales tienen las siguientes características:
  - Se pueden clasificar y así calcular los Componentes del VaR por grupos que tengan características en común (bonos cupón cero, bonos flotantes, etc.).
  - Si uno de los Componentes del VaR se elimina, es posible estimar la variación del VaR del portafolio.
  - Es posible identificar que posición mantiene cada uno del los Componentes del VaR en el portafolio.

[3]Esto significa que mientras el VaR es homogéneo de grado uno, con respecto a las posiciones, el DeltaVar es homogéneo de grado cero.

[4]Esta característica tiene grandes ventajas, permitiendo que el portafolio se pueda ordenar por tipo de activos, factores de riesgo, etc.

4.2 Volatilidad

El análisis de la volatilidad, así como el diseño de modelos para la estimación es sin lugar a dudas una de las ramas más estudiadas. Dentro del análisis de riesgo la volatilidad juega un papel importante ya que ésta puede proporcionar información acerca del comportamiento futuro del valor de los portafolios de inversión.[34]

La volatilidad es un indicador fundamental para la cuantificación de los riesgos de mercado; representa el grado de incertidumbre asociado al rendimiento de un instrumento financiero, medida a través de la dispersión promedio de las variaciones de los precios.

Estimar la volatilidad es un proceso complicado, debido al gran número de factores que intervienen en la misma. El principal problema es la inestabilidad de la volatilidad en periodos cortos de tiempo, ya que se observa que los precios pueden tener movimientos muy bruscos, cuando el mercado reacciona abruptamente.

Para estimar y pronosticar la volatilidad de manera eficiente, el modelo debe de cumplir con las principales características que presenta la volatilidad:

- Volatilidades elevadas persisten por periodos prolongados antes de disminuir a sus niveles de largo plazo (clustering).[34]
- La volatilidad varía más rápidamente cuando los rendimientos aumentan, que cuando disminuyen (apalancamiento).
- La volatilidad varía a través del tiempo sin embargo bajo ciertos supuestos es posible de pronosticar, de tal forma que si se tiene una estimación confiable es posible realizar el cálculo del VaR de forma más segura.

A través de los análisis que se han realizado, se ha encontrado que la distribución de los rendimientos difiere de una normal, debido a que la volatilidad es estocástica.

Para comprender la volatilidad, es de gran importancia entender primero las diferentes formas de estimarla. Existen diversas metodologías para determinar esta variable, dentro de las más importantes se encuentran:

4.2.1 Estimación paramétrica

El modelo más sencillo y común para estimar la volatilidad utiliza la fórmula de la varianza muestral de los rendimientos:

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_t - \mu)^2}{n-1}$$

donde σ^2 es la varianza de los rendimientos (R), μ el promedio de los rendimientos y n el número de observaciones.[12]

Por otro lado, si se está manejando información diaria, la tasa promedio de los rendimientos será muy pequeña y por ello se podrá considerar como si esta fuera cero ($\mu = 0$), haciendo esta consideración, la diferencia en la estimación será insignificante, así mismo será adecuado considerar n en lugar de $n-1$, por consiguiente se podrá realizar el cálculo con la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t^2}{n}$$

Las principales limitaciones de esta metodología son:

- El valor de la volatilidad depende de la elección de n.
- La volatilidad permanece constante a lo largo del tiempo, esto significa que sólo habrá un dato para todo el periodo muestral.
- El pronóstico de la volatilidad para los periodos $t+1, ..., t+k$ es igual al valor actual de la estimación ignorando los efectos de clustering y apalancamiento.

Ejemplo:
A continuación se muestra una tabla, para el cálculo de la volatilidad, considerando 12 observaciones:

t	Rendimiento
1	5.35 %
2	2.27 %
3	−2.43 %
4	−3.41 %
5	−3.30 %
6	−1.20 %
7	3.26 %
8	4.50 %
9	4.72 %
10	1.70 %
11	−1.48 %
12	−2.01 %
σ	3.1827 %

4.2.2 Promedios móviles

Debido a que en la mayoría de las series financieras, es usual que la volatilidad no sea constante en el tiempo, se usan métodos alternativos; consiste en calcular la volatilidad mediante una ventana móvil. Un promedio móvil es un promedio aritmético de una muestra de n datos, en el cual cada vez que se calcula el promedio se añade un nuevo dato al final de la serie y se elimina la primera observación de la muestra. El promedio móvil de R de orden n en el periodo t es:[34]

$$R_t = \frac{R_1 + ... + R_n}{n}$$

Por consiguiente el promedio móvil en el periodo $t+1$ es:

$$R_{t+1} = \frac{R_2 + ... + R_n + R_{n+1}}{n}$$

Para el cálculo de la volatilidad histórica se utiliza la fórmula mencionada en la estimación paramétrica, sólo que en este caso el periodo muestral es móvil, es decir el modelo supone que la volatilidad no es un parámetro sino un proceso, que permita ser calculada en cualquier punto del tiempo:

$$\sigma_t^2 = \sum_i^t \frac{R_i^2}{n-1} \qquad i = T - n \quad ; \quad t = T - 1$$

Aunque ya se han hecho con este modelo ciertas modificaciones, siguen existiendo ciertas deficiencias:

- La estimación de la volatilidad es muy sensible al número de observaciones (orden del promedio móvil), de tal manera que si son reducidas los estimadores son poco eficientes; por el contrario conforme aumenta el orden del promedio móvil, la posibilidad de incorporar los cambios estructurales en la estimación de la volatilidad es cada vez menor.[34]
- A través de este modelo no es posible determinar si la volatilidad cambio porque se modificaron las condiciones de mercado o sólo por haber utilizado un promedio móvil con diferente orden, siendo así que la estimación se vuelve sensible a errores muestrales.
- No existe ponderación entre las observaciones, ni distinción alguna entre si una observación es reciente o no, de tal manera que la estimación es realizada con un orden elevado puede provocar que la volatilidad sea alta, a pesar de que esto se pudo haber provocado por algún dato que ya no se tiene.
- El modelo no considera en la estimación de la volatilidad las características del proceso estocástico de la serie.
- El pronóstico de la volatilidad es igual a la volatilidad vigente, es decir, ignora el nivel de equilibrio a largo plazo.

4.2.3 Modelos de regresión - ARMA

El modelo ARMA (Autorregresivo (AR) y Promedios Móviles (PM)) consiste en estimar mediante un modelo de regresión lineal, la siguiente ecuación:

$$R_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_2 R_{t-2}^2 + ... + \alpha_p R_{t-p}^2 + \epsilon$$

donde ϵ es un término aleatorio que se distribuye $\mathcal{N}(0,1)$. La ecuación anterior indica que el cuadrado del rendimiento al tiempo t depende del cuadrado de los rendimientos rezagados; si calculamos el valor esperado de la expresión anterior condicionada al conjunto de información disponible, se obtendrá el modelo para estimar la volatilidad:[34]

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \alpha_2 R_{t-2}^2 + ... + \alpha_p R_{t-p}^2 + \epsilon$$

De esta manera podemos observar que el modelo ARMA es una generalización de los modelos de volatilidad histórica en donde $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_j = 1/(n-1)$.[5] Mientras en el modelo de volatilidad histórica las ponderaciones son fijas, en el modelo de regresión las ponderaciones están determinadas por los datos mediante un mecanismo estadístico. De esta manera disminuye en gran medida la sobreestimación del efecto clustering en el modelo de volatilidad histórica.

El número de datos que se deben incluir en la muestra para estimar la volatilidad mediante el modelo ARMA, se puede determinar a través de un procedimiento estadístico.

Una de las principales ventajas de estos modelos es la capacidad que poseen para realizar pronósticos de la volatilidad para diferentes periodos a través de una forma recursiva:

$$\sigma_{t+k}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t+k-1}^2 + ... + \alpha_p \sigma_{t+k-p}^2$$

El pronóstico depende del valor de las ponderaciones estimadas mediante el modelo de regresión.

[5] Para que la volatilidad estimada sea positiva, se requiere que α_j se mayor o igual a cero.

4.2.4 Modelos GARCH

Son modelos que tienen como propósito estimar la varianza no condicional de los rendimientos de los activos financieros. Los modelos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) son procesos autorregresivos generalizados con heterocedasticidad condicional, es decir, modelos que suponen que la varianza cambia a través del tiempo.

Para estimar la volatilidad del rendimiento de los activos financieros existen diferentes especificaciones de los modelos GARCH. El modelo más común para la estimación de la volatilidad es el GARCH (1,1).

GARCH (1,1): modelo que estima la volatilidad en función del cuadrado de los errores rezagados un periodo y de la volatilidad del periodo anterior (término autorregresivo):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

para que el modelo tenga un nivel de equilibrio es necesario que: $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$; $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 > 0$.

Cabe mencionar que a diferencia de los modelos ARMA, donde la varianza se estima con base en los rendimientos observados, los modelos GARCH utilizan los rendimientos esperados medidos con base en la ecuación $R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \epsilon_t$. Sin embargo como los rendimientos esperados no son observables, la estimación de la volatilidad requiere de métodos de optimización (máxima verosimilitud), por tanto los modelos GARCH requieren de paquetes estadísticos especializados.[34]

Otra de las ventajas de los modelos GARCH es que permiten pronosticar la volatilidad para cualquier periodo en el futuro, obteniendo el pronóstico de la volatilidad a través de la siguiente fórmula:

$$\sigma_{t+k}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{k+1}(\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

Al sustituir los valores estimados en la ecuación anterior se obtienen los pronósticos para periodos adelante.

Adicionalmente al modelo GARCH (1,1) existen otros modelos GARCH que pretenden incorporar la asimetría en la estimación de la volatilidad (apalancamiento) y los posibles cambios en el nivel de equilibrio de la varianza. Las principales características de los modelos GARCH son:

- ***ARCH***: la volatilidad se explica por los residuales rezagados. Supone que la distribución de los rendimientos es normal.

- ***GARCH (p,q)***: la volatilidad se explica por p residuales rezagados y por q valores de volatilidad pasada. El modelo es equivalente a un modelo ARCH infinito, supone que la distribución de los rendimientos es normal.

- ***GARCH (1,1)***: es un caso particular del modelo GARCH (p,q), esto significa que la volatilidad se explica sólo por un valor rezagado de la volatilidad y por un valor rezagado de los residuales. La suma de los parámetros correspondientes a estos factores debe ser menor a uno. La distribución de los rendimientos es normal.

- ***IGARCH***: es un caso particular del modelo anterior ya que la suma de los coeficientes debe ser uno. Se supone que la distribución es normal. Bajo ciertas condiciones, este modelo es parecido al de promedios móviles ponderados exponencialmente.

- ***AGARCH***: modelo conocido como GARCH asimétrico. Supone que la distribución de los errores es una t de Student, pues se considera un mayor sesgo que la distribución normal; incluye como variables explicativas de la volatilidad un parámetro adicional que hace referencia al sesgo. Con estas modificaciones se puede modelar el efecto de apalancamiento, es decir, el aumento de la volatilidad cuando el mercado presenta condiciones adversas. Todos los parámetros de este modelo deben ser positivos.

- ***EGARCH***: su finalidad es modelar el efecto de apalancamiento. La volatilidad se estima mediante un modelo logarítmico de tal forma que no se requiere que el valor de los coeficientes estimados sea positivo. El modelo supone que la distribución de los errores es normal.

4.2.5 Promedios móviles ponderados exponencialmente

Un caso particular de los modelos GARCH es el modelo de promedios móviles ponderados exponencialmente (PMPE). La fórmula del promedio móvil que se utiliza para estimar la volatilidad a partir de PMPE se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{R_{t-1} + \lambda R_{t-2} + \lambda^2 R_{t-3} + ... + \lambda^{n-1} R_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^{n-1}}$$

donde λ es una constante que determina el grado de suavidad de la serie; cuanto mayor es λ mayor ponderación tienen las observaciones recientes. El valor de λ depende de que tan rápido cambia la media muestral a través del tiempo, si este cambio es muy rápido entonces el valor de este parámetro será muy pequeño.[34]

Observación:
Cuando el orden del promedio móvil tiende a infinito, $(1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^{n-1})$ es equivalente a $1/(1 - \lambda)$ es así que se tiene:

$$1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i = \frac{1}{(1 - \lambda)}$$

Para demostrar la igualdad anterior, se considera que el promedio móvil se estima suponiendo que n (número de datos) tiende a infinito y que es igual a un número arbitrario k, de tal manera que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = k$$

si ahora se multiplica la expresión anterior por λ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \lambda k$$

restando las dos expresiones anteriores se obtiene: $1 = k - \lambda k = k(1 - \lambda)$

Si se despeja k, se cumple con la demostración, de tal manera que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i = \frac{1}{(1-\lambda)} = k$$

es así que el PMPE puede reescribirse como:

$$R_t = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}$$

Esta aproximación es la que JP Morgan utiliza en el sistema de medición de riegos conocido como RiskMetrics. De acuerdo con este modelo, el pronóstico de la volatilidad se realiza con la siguiente fórmula:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)R_{t-1}^2$$

De esta manera, a partir de las dos ecuaciones anteriores, la estimación de la varianza de los factores de riesgo, utilizando PMPE es:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2$$

Realizando algunas manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2 \\
&= (1-\lambda)[R_{t-1}^2 + \lambda R_{t-2}^2 + \lambda^2 R_{t-3}^2 + ...] \\
&= (1-\lambda)R_{t-1}^2 + \lambda[(1-\lambda)[R_{t-2}^2 + \lambda R_{t-3}^2 + ...]] \\
&= (1-\lambda)R_{t-1}^2 + \lambda\left[(1-\lambda)\sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2\right] \\
&= (1-\lambda)R_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}$$

Inicialmente se debe definir el valor del factor de decaimiento (λ), el cual va a determinar el valor inicial de la volatilidad. Aunque con la expresión anterior se puede calcular la volatilidad de manera recursiva, para el periodo t va a depender de la memoria del mercado contenida en la de un periodo anterior, así como de aquellos acontecimientos que pudieran modificar la dinámica del mercado (término aleatorio); en este contexto:

- Si $\lambda = 0$ el mercado no tiene memoria y el pronóstico de la volatilidad dependerá completamente de la nueva información.
- Por el contrario si $\lambda = 1$ sólo la historia influirá en el pronóstico de la volatilidad.

Para determinar el valor de λ que captura de manera óptima la dinámica particular de cada factor de riesgo JP Morgan supone que el pronóstico de la varianza de los rendimientos de cada factor de riesgo que se realiza en un periodo previo es igual al valor esperado del rendimiento al cuadrado de un periodo anterior, es decir:

$$\mathbb{E}_t[R_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$$

Y que la varianza del error de pronóstico es:

$$\mathcal{E}_{t+1} = R_{t+1}^2 - \sigma_{t+1}^2$$

Para determinar el valor óptimo de λ, se minimiza el error cuadrado medio del error de pronóstico (MECM). Donde a cada error de pronóstico le corresponde un valor de λ:

$$MECM = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{t+1}^2 - \sigma_{t+1}^2(\lambda))}$$

Una vez que se calcula el valor óptimo de λ, es posible determinar el número de datos (n) que se requieren para estimar para el valor inicial de la volatilidad, para esto se utiliza:[34]

$$n = \frac{ln(nivel \quad de \quad tolerancia)}{ln(\lambda)}$$

Si $\lambda = 0.94$ y el nivel de tolerancia es de 0.01 (esto significa que se tiene un nivel de confianza de 99 %), el valor óptimo es de 74 observaciones; cuando $\lambda = 0.99$ se requieren 458 observaciones, es decir, un poco más de dos años de observaciones diarias, sin embargo no siempre es posible tener esa cantidad de datos. Para estimar el VaR con un horizonte de un día JP Morgan utiliza $\lambda = 0.94$, mientras que para un periodo mensual $\lambda = 0.97$.

Algunas de las ventajas y desventajas de esta metodología son:

- El valor de la volatilidad puede modificarse rápidamente ante cambios en las condiciones de mercado, capturando de esta manera la propiedad de que la volatilidad es variable en el tiempo.[12]

- Si existe un cambio brusco y la volatilidad permanece en niveles altos, paulatinamente disminuirá al nivel de largo plazo.

- Supone que los rendimientos se distribuyen normalmente, sin embargo esto no siempre ocurre con los activos de los rendimientos financieros.

- Si la volatilidad observada está por arriba (abajo) de su nivel de equilibrio de largo plazo, permanecerá por arriba (abajo) de ese valor.

- Cuando se estima el VaR se considera que el valor de λ es igual para todos los activos, lo cual ignora las diferencias entre mercados, además de que no incorpora los cambios en las condiciones del mercado.

Ejemplo:
Para el cálculo de la volatilidad por el método de promedios móviles ponderados exponencialmente, se usará una muestra con sólo 12 observaciones, esto es para ejemplificar el procedimiento de manera más sencilla, se usará $\lambda = 0.94$:

t	Rendimiento	$\lambda^{t-1}R_t^2$
1	5.35 %	0.0029
2	2.27 %	0.0005
3	−2.43 %	0.0005
4	−3.41 %	0.0010
5	−3.30 %	0.0009
6	−1.20 %	0.0001
7	3.26 %	0.0007
8	4.50 %	0.0013
9	4.72 %	0.0014
10	1.70 %	0.0002
11	−1.48 %	0.0001
12	−2.01 %	0.0002

A partir de esta información se calcula la volatilidad es así que se tiene:

$$\sigma = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{12}\lambda^{i-1}R_i^2} = \sqrt{(0.06)(0.0097)} = 0.024125$$

La volatilidad para esta muestra con $\lambda = 0.94$ es de 2.4125 %.

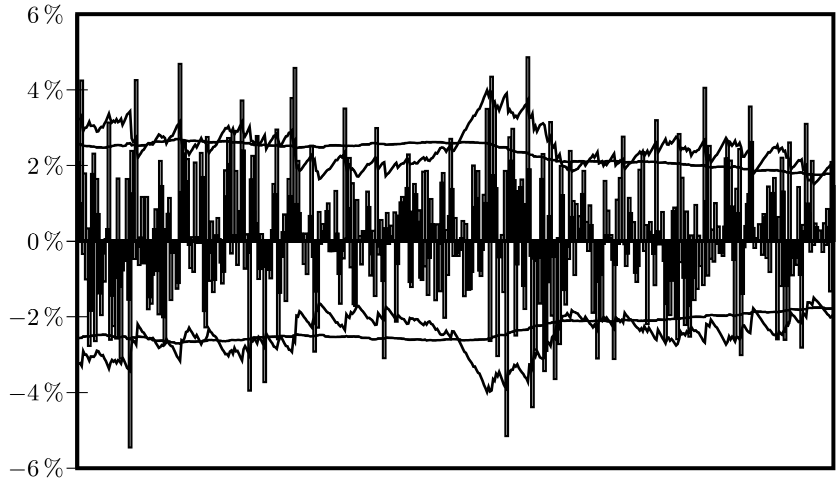
Como se puede apreciar, el pronóstico de la volatilidad mediante modelos GARCH es complejo y a su vez muy tardado; por este motivo se considera que la manera más apropiada para el cálculo de la volatilidad es mediante el método de promedios móviles ponderados exponencialmente, finalmente este método es un caso particular de un modelo GARCH(1,1).

Ejemplo:

Una vez que se ha desarrollado la explicación de los modelos para el cálculo del VaR y la volatilidad, se muestra un ejemplo numérico; para esto se considera una muestra de 500 datos correspondientes a observaciones diarias de precios de la acción *Telmex L* desde 06/09/05 hasta 24/08/07.

Primeramente se calcularon los rendimientos diarios y a partir de estos se calcula la volatilidad diaria, a través de los métodos: *Estimación paramétrica y Promedios móviles ponderados exponencialmente* con $\lambda = 0.94$. Posteriormente se calcula el VaR tomando el valor de la volatilidad de ambos métodos.

En la siguiente gráfica se puede observar el comportamiento diario de los rendimientos; se puede apreciar el fenómeno de heteroscedasticidad, es decir, que la volatilidad no es constante en el tiempo.



Gráfica 4.3: *Rendimientos y cálculo del Valor en Riesgo.*

Como se puede observar en la gráfica, el VaR calculado usando la volatilidad del modelo de *Promedios móviles ponderados exponencialmente* en comparación con el de *Estimación paramétrica*, se ajusta mejor al dinamismo de los rendimientos en el tiempo, siendo un buen pronóstico (especialmente cuando existe alta volatilidad en los mercados financieros).

4.2.6 Volatilidad Implícita

Volatilidad asociada con el precio de las opciones, siendo está un conjunto de expectativas de los operadores del mercado sobre la volatilidad futura. Puede considerarse como la volatilidad determinada entre todos los participantes del mercado, considerando las posibles fluctuaciones del precio del subyacente con respecto al tiempo de vida de la opción.[15] Al considerarse el mercado como un todo, entonces la volatilidad implícita cambiará en respuesta al cambio de la volatilidad histórica; cuando el mercado se vuelve más volátil, la volatilidad implícita puede subir, en caso contrario es muy probable que caiga.

Si se utiliza el modelo de Black-Scholes para calcular el precio teórico de una opción y se toma el precio de ésta en el mercado, seguramente se encontrarán diferencias; esta variación se debe principalmente a que el dato de la volatilidad del precio del subyacente es una estimación. La volatilidad implícita será aquella que permita que el precio teórico sea igual al precio de la opción en el mercado.

La exactitud de la volatilidad implícita depende principalmente de la precisión de los datos que se utilicen en el modelo; los problemas se presentan cuando la opción no ha sido negociada por un tiempo o cuando cambian las condiciones del mercado significativamente. La volatilidad implícita en el mercado está en continuo cambio ya que los precios de las opciones como las condiciones del mercado están en continuo movimiento; mientras la demanda y la oferta se realizan, el precio de mercado de una opción representará el equilibrio entre estas dos posiciones.

Las volatilidades implícitas pueden utilizarse para verificar la opinión del mercado sobre la volatilidad de determinados instrumentos, esta varía a lo largo del tiempo, también pueden utilizarse para estimar el precio de una opción a partir del precio de otra opción.

Para realizar el cálculo de la volatilidad implícita generalmente se utiliza el modelo de Black-Scholes, así como también mediante aproximaciones analíticas (método numérico de Newton-Raphson).[34]

Algunas de las ventajas que se presentan al contar con la información de la volatilidad implícita son:

- Es posible verificar si la estimación de la volatilidad histórica, es consistente con las expectativas del mercado.
- Ayuda a identificar si los precios de las opciones son correctos o bien a detectar información que no se incorporó.

La volatilidad implícita es muy confiable cuando el mercado de opciones del subyacente tiene suficiente liquidez; sin embargo, en la práctica no todos los subyacentes tienen contratos de opciones, es por ello que en muy pocos casos se puede calcular la volatilidad implícita.

4.3 Control integral de riesgos

Un sistema integral de riesgos reconoce las limitaciones de los modelos de Valor en Riesgo, en especial con la presencia de eventos extremos; sin embargo estos modelos representan la parte más importante del sistema de control de riesgos, en especial cuando los límites de las áreas de negocio se definen en función del VaR. Por este motivo, la estimación del VaR debe ser la mejor posible. Sin embargo la tarea de verificar que los cálculos sean eficientes no es un problema sencillo, ya que el VaR no es más que una estimación de las pérdidas potenciales basadas en un conjunto específico de supuestos, sujetos a múltiples errores (riesgo del modelo, error sistemático, error de muestreo, entre otros), por lo que los cálculos se tienen que calibrar permanentemente.

Debido a los inconvenientes que presentan los métodos para el cálculo del VaR es necesario utilizar ciertos análisis complementarios a dichas metodologías, precisamente para calibrar la bondad de tales estimaciones.

Tradicionalmente los eventos extremos se han relacionado con circunstancias catastróficas, sin embargo esta definición es poco precisa, ya que ignora muchos eventos en los que los factores de riesgo no cambian drásticamente, pero que implican pérdidas mayores al VaR. Una definición más acertada define a los eventos extremos como aquellos eventos que ocurren con mayor frecuencia que la esperada estadísticamente, sin mencionar la magnitud de los cambios de los factores de riesgo; en el caso en que se presenten eventos que muestran mayor volatilidad y tienen un patrón sistemático de ocurrencia se les conoce como eventos frecuentes.

4.4 Stress Testing (Pruebas de Estrés)

Ante la necesidad de los administradores de riesgos a predecir pérdidas en condiciones de desastres financieros o de crisis provocadas por desequilibrios económicos, es necesario una prueba que complemente al Valor en Riesgo, ya que si bien este indica cuál es la pérdida máxima probable durante un periodo de tiempo y con un determinado nivel de confianza (95 % o 99 % en la mayor parte de los casos), el Stress Testing ofrece una idea clara de lo que se podría perder en situaciones de crisis o turbulencia en los mercados.

Las Pruebas de Estrés ofrecen una forma de medición y monitoreo de las consecuencias de movimientos extremos de precios, en un portafolio de activos, a través de la estimación de las pérdidas potenciales, permitiendo a las instituciones seguir la pista a la exposición o efectos de cambios de precios de sus activos, durante eventos o condiciones de mercado excepcionales, pero factibles, sin necesidad de desarrollar un modelo estadístico para tales eventos; por otro lado también permiten determinar si la exposición a los riesgos es consistente con el nivel de aceptación de riesgos estimado o planificado inicialmente.

Esta denominación ha sido adoptada como un término genérico para describir varias técnicas aplicadas en las instituciones financieras, para valorar el grado de potencial vulnerabilidad económica y financiera. Las más comunes de estas técnicas, pueden definirse como:

- ***Prueba simple de sensibilidad***: determina el impacto potencial en un portafolio de inversión de la institución financiera, por movimientos o variaciones de los factores de riesgo en el mercado.

- ***Análisis de escenarios***: cuantifica el efecto potencial que tiene en la institución financiera, la variación simultánea en varios de los factores de riesgo que pueden ocurrir en un futuro cercano. Los escenarios definidos o desarrollados para estas mediciones, pueden estar basados en eventos significativos de mercados originados en el pasado (escenarios históricos); o por estimación de las consecuencias de un evento o variación posible en las condiciones de mercado que aún no haya ocurrido (escenarios hipotéticos):

  - ***Escenarios históricos***: se emplean fundamentalmente los *cambios* reales de mercado ocurridos en períodos anteriores. La forma más simple de hacerlo es identificar períodos específicos de tiempo que fueron particularmente extremos en términos variabilidad de los factores de riesgo de mercado y observar los efectos que ocasionaron. De esta manera, una vez valorados todos los efectos producidos por el *cambio* de mercado en el pasado, se traslada al presente y se aplica a la situación actual de las instituciones financieras, midiendo o cuantificando el efecto y las consecuencias. Una de las principales características de este método, es que los cambios valorados en los factores de riesgo, son históricos y no arbitrarios, lo cual le proporciona cierto grado de confiabilidad a las pruebas que se realicen; sin embargo, el método de escenarios históricos presenta la desventaja de asumir que en el futuro ocurrirá lo mismo que en el pasado, es decir, que los factores que definen el riesgo del mercado tendrán siempre la misma evolución, lo que no es necesariamente cierto.
  - ***Escenarios hipotéticos***: las desventajas del método anterior, son cubiertas al aplicar escenarios hipotéticos; con este se estiman movimientos de mercado que no poseen antecedentes históricos y se cuantifican los efectos que tendrán los factores de riesgo bajo tal escenario. La utilidad de este tipo de metodología radica en que estructura situaciones de riesgo de mercado que, aunque no han ocurrido, son factibles de originarse, esto permite estimar sus efectos y así las instituciones financieras afrontar exitosamente tales circunstancias.

- ***Estimación de pérdidas máximas***: se determina el efecto que en la institución financiera tendría la combinación de varios cambios en las condiciones del mercado.

Estas pruebas permiten a las instituciones seguir la pista a la exposición o efectos de cambios de precios de sus activos, durante eventos o condiciones de mercado de importancia, sin necesidad de desarrollar un modelo estadístico para tales eventos; por otro lado también permiten determinar si la exposición a los riesgos es consistente con el nivel de aceptación de riesgos estimado o planificado inicialmente.

Este tipo de evaluaciones financieras estima la exposición que tendrá la posición de una institución financiera ante un evento específico de mercado, pero en ningún caso, mide la probabilidad de que tal evento ocurra. Debido a que la validez y consistencia de estas pruebas, estarán directamente relacionadas con la calidad de las unidades de control de riesgo de las instituciones financieras, las numerosas decisiones acerca de las variables o condiciones incluidas en una Prueba de Estrés deben ser realizadas con la experiencia de los expertos en riesgos; algunas de las variables que se incluyen en este tipo de pruebas son:

- Devaluaciones de tipo de cambio.
- Liquidez.
- Incumplimiento de contrapartes.
- Afectación de todas las posiciones de los portafolios por movimientos adversos en las variables de mercado.

Las *Pruebas agregadas de Stress* consisten en medir la exposición al riesgo de un grupo de instituciones financieras en un escenario específico. La metodología se enfoca en estimar los efectos en cada entidad financiera de la variación de los factores de mercado seleccionados y posteriormente estructurar el comportamiento o exposición de riesgo del grupo. La utilidad fundamental de este tipo de valoraciones, es que permite estimar el efecto en diferentes entidades financieras, de los factores de riesgo cuando éstos son sometidos a procesos de alteración; permitiendo además, verificar la capacidad comparativa de absorción de riesgo de cada entidad y por consiguiente, valorar sus sistemas de administración de riesgos.

4.5 Backtesting (Contraste Histórico)

A partir de las recomendaciones hechas por el Comité de Basilea, el VaR se convirtió en una medida de riesgo ampliamente utilizada, existiendo diversas maneras de calcularlo, es por ello que es importante cuantificar el desempeño de estas metodologías con fines de control.

El Backtesting es un procedimiento estadístico utilizado para validar la calidad y precisión de un modelo VaR, mediante la comparación de los resultados reales de las posiciones y las medidas de riesgo generadas por los modelos. Esta prueba permite tanto a las instituciones como a las autoridades regulatorias verificar periódicamente que el modelo utilizado sea el adecuado y en consecuencia, decidir sobre la conveniencia de realizar ajustes y calibrarlo.

Los pasos a seguir para la elaboración de un Backtesting son los siguientes:

1. Cálculo de pérdidas y ganancias a través de cambios en la valuación.
2. Comparación periódica del VaR observado ajustado a un día con las pérdidas y ganancias diarias.[6]
3. Cálculo de los errores o excepciones detectados, contando el número de veces que las pérdidas y ganancias exceden el Valor en Riesgo observado.
4. El nivel de eficiencia del modelo será: número de errores / número de observaciones.

El Backtesting establece dentro de un horizonte temporal determinado, un análisis comparativo entre dos magnitudes: por un lado, la pérdida realmente experimentada en una cartera y por otro, la estimación previa realizada en términos de Valor en Riesgo. Por consiguiente, se

[6] El BIS recomienda que esta prueba se realice trimestralmente.

pretende contrastar el grado de exactitud de la metodología de medición empleada, contando el número de observaciones en las cuales las pérdidas de la cartera superan la cifra del VaR. La situación ideal se daría cuando dicho número estuviera próximo al nivel de confianza establecido en la medición, es decir, si se utiliza un nivel de confianza de 95 %, lo deseable sería que el número de excepciones (se considera una excepción cuando el valor del VaR sea menor que la perdida real en el lapso de un día) representen el 5 % en el período de análisis; si este porcentaje fuese superior o inferior, entonces el modelo de VaR utilizado estaría valuando erroneamente el riesgo realmente soportado.

Es importante mencionar que existen ciertas dificultades al momento de llevar a cabo un análisis de Backtesting. Uno de los principales problemas se origina al momento de comparar el riesgo obtenido para un portafolio estático (al asumir que el portafolio no sufrirá cambios desde cierto instante hasta el próximo cálculo del VaR), contra uno dinámico como resultado de la función de pérdidas y ganancias. En la práctica, los portafolios de las instituciones son raramente estáticos, así mismo en ocasiones el cálculo de la función de pérdidas y ganancias se realiza en varias ocasiones durante el mismo tiempo. Considerando que los resultados de las pruebas son afectados por el dinamismo del portafolio, entre mayor sea el periodo para el cual se llevan a cabo las comparaciones, mayor será la variación en la composición del portafolio; por esta razón el Comité de Basilea recomienda que la prueba de Backtesting sea realizada para un periodo de un día, aún cuando la medición de riesgo de mercado está basada para un periodo de diez días.

4.5.1 Test de proporción de fallas

Uno de los métodos más utilizados para evaluar el desempeño el VaR, es la prueba desarrollada por Kupiec en 1995. Este método mide si el nivel de significancia propuesto para el VaR es consistente con la proporción de fallas que presenta el modelo.

En términos prácticos lo que hace el test, es modelar diferencias entre los resultados reales y las medidas de riesgo generadas por el modelo VaR, mediante una distribución Binomial. Si el VaR es inferior a los resultados reales, se define el evento como *fracaso* con probabilidad (q); en el caso opuesto, cuando las pérdidas reales son inferiores al VaR, entonces se define ese evento como un *éxito* con probabilidad $(1 - q)$. La probabilidad de que el número de excepciones o fracasos sea igual a x en una muestra de tamaño n y para un nivel de confianza dado se determina a partir de la distribución Binomial:

$$\mathbb{P}(X = x \mid n, q) = \tbinom{n}{x}\, q^x (1 - q)^{n-x}$$

La probabilidad de fracaso de los modelos VaR se estima a través del método de máxima verosimilitud (ML), cuya estimación consiste en tomar logaritmo natural a la distribución Binomial y maximizar dicha función con respecto a la probabilidad (q). De este modo se debe maximizar la siguiente expresión:

$$ln(\mathbb{P}) = ln\,\tbinom{n}{x} + xln(q) + (n - x)ln(1 - q)$$

La condición de primer orden de la maximización es la siguiente:

$$\frac{\partial ln(\mathbb{P})}{\partial q} = x\frac{1}{q} + (n - x)\frac{1}{1 - q} = 0$$

Al simplificar la condición de primer orden, se obtiene que la probabilidad de fracaso del modelo VaR equivalente a la proporción de fallas del modelo (frecuencia en la que las pérdidas exceden el VaR):

$$\hat{q} = \frac{x}{n}$$

Una vez obtenida la estimación por máxima verosimilitud se debe establecer una comparación estadística entre la probabilidad teórica (q) y la probabilidad estimada ($\hat{q}$). Para esto se emplea una prueba de razón verosimilitud de la siguiente forma:

$$L = -2ln\left[\frac{q^x(1-q)^{n-x}}{\hat{q}^x(1-\hat{q})^{n-x}}\right]$$

Kupiec desarrollo unas regiones de confianza con base en una distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad, considerando la hipótesis nula de que q es estadísticamente igual a la probabilidad utilizada para el VaR contra la hipótesis alternativa de que q sea diferente a dicha probabilidad.[26]

q	n=255 días	n=510 días	n=1000 días
0.01	x < 7	1 < x < 11	4 < x < 17
0.025	2 < x < 12	6 < x < 21	15 < x < 36
0.05	6 < x < 21	16 < x < 36	37 < x < 65
0.075	11 < x < 28	27 < x < 51	59 < x < 92
0.10	16 < x < 36	38 < x < 65	81 < x < 120

4.5.2 Backtesting regulatorio

Considerando las limitaciones estadísticas de los métodos de Backtesting, el Comité de Basilea introdujo una estructura simple para interpretar los resultados; propuso criterios estadísticos para determinar los rangos, en términos del número de excepciones (número de veces en el que las pérdidas son mayores al VaR) que delimitan cada zona de la *Tabla de Permanencia*[7], considerando que se tiene la suficiente información para llevar acabo las observaciones del periodo seleccionado.

En materia de regulación el Comité de Basilea (basado en un nivel de confianza de 99 %) establece que el requerimiento mínimo de capital (RMC) para riesgos de mercado, será equivalente al máximo entre el VaR del día anterior y el VaR promedio de los últimos 60 días multiplicado por un factor que fluctúa entre 3 y 4, dependiendo del número de veces en el que las pérdidas son mayores al VaR:

$$RMC_{t+1} = Max\left[VaR_t; (factor)\frac{1}{60}\sum_{t=1}^{60} VaR_{t-1}\right]$$

El factor mínimo es 3 y tiene como objetivo compensar los errores en la medición de riesgos originados por problemas en la implementación del modelo (muestras pequeñas, supuestos del modelo, errores numéricos). El incremento en este factor está diseñado para aumentar el nivel de confianza.

La Tabla de Permanencia se divide en tres zonas, distinguidas por colores que representan el atributo o jerarquía de cada situación. La zona verde significa que el modelo no tiene

[7] Tabla que define los factores multiplicativos que deben ser aplicados al VaR, para el requerimiento mínimo de capital.

problemas de calidad y no se requiere modificación alguna. La zona amarilla indica que no se puede concluir algo acerca del modelo, por lo que podría o no calibrarse. La zona roja precisa que es necesario modificar el modelo, ya que presenta problemas de calidad y precisión.

En la zona verde, los resultados de la prueba son consistentes con un modelo preciso y la probabilidad de aceptar erróneamente un modelo impreciso es baja. En la zona roja, los resultados de la prueba son sumamente improbables de haber sido generados por un modelo exacto y la probabilidad de rechazar erróneamente un modelo preciso es casi nula. Sin embargo, entre esos dos extremos hay una zona donde los resultados del Backtesting pueden ser consistentes con modelos precisos o imprecisos (zona amarilla).

Zona	No. de excepciones	Factor multiplicativo
Verde	0	3
	1	
	2	
	3	
	4	
Amarilla	5	3.4
	6	3.5
	7	3.65
	8	3.75
	9	3.85
Roja	10 o más	4

Existen por lo menos dos otros aspectos que deben ser evaluados con la debida atención:

- La ocurrencia sistemática de excepciones consecutivas (lo que colocaría en duda el supuesto de independencia de las excepciones y por tanto, el propio Backtesting).
- La magnitud de las mismas (que sistemáticamente ocurran muy pocas pero grandes excepciones, puede ser más preocupante que ocurran más excepciones, pero de baja magnitud).

5

Medidas coherentes de riesgo: CVaR

La necesidad de cuantificar el riesgo asumido por parte de las instituciones, ha fomentado la gestión del riesgo en años recientes, sin embargo existen muchas medidas de riesgo y no existe un consenso sobre cual de ellas es la más adecuada.

Durante los últimos años el desarrollo de medidas de riesgo ha mostrado un incremento, sin embargo la mayoría de las medidas no cumplen con propiedades básicas, ni deseables. Un ejemplo ocurre cuando algunas de ellas no reflejan la reducción del riesgo de mercado cuando se diversifica, mientras que otras subestiman las pérdidas potenciales. En este contexto la optimización de carteras de inversión que minimizan el riesgo de mercado, es una de las principales finalidades de las instituciones financieras.

Las medidas de riesgo permiten ordenar y comparar inversiones de acuerdo a su respectivo Valor en Riesgo; a estas correspondencias es necesario imponerles ciertas restricciones, con la finalidad de obtener definiciones con significado; cualquier medida de riesgo que carezca de tales propiedades puede conducir a inconsistencias.

5.1 Propiedades de una medida coherente de riesgo

El trabajo de Artzner *et al* (1999), sobre medidas coherentes de riesgo, ha provocado cambios y transformaciones profundas en la forma de cuantificar los riegos; mostraron formalmente un conjunto de condiciones que debe cumplir cualquier medida de riesgo, de tal manera que si una medida cumple con estas es llamada *medida coherente*.

Sea $\rho : A \to \mathbb{R}$ una medida de riesgo sobre un horizonte dado, donde A es un conjunto de variables aleatorias en el cual se encuentran todos los factores de riesgo, se dice que ρ es una medida coherente de riesgo si satisface las siguientes condiciones:[4]

5.1.1 Monotonía no creciente

Sean $X, Y \in A$ con $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$. Esto quiere decir, que si se parte de un mismo portafolio y el cambio en el portafolio X es menor que el de Y, entonces, por la pérdida de valor de X, el riesgo de X deberá ser mayor que el de Y. Si una posición es mejor que otra, el riesgo en esta será menor.

El Valor en Riesgo satisface la propiedad de monotonía no creciente. Si X y Y son variables aleatorias con $X \leq Y$, se tiene que:

$$F_Y(z) = \mathbb{P}(Y \leq z) \leq \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z)$$

para toda $z \in \mathbb{R}$, ya que si $w \in \Omega$ es tal que $Y(w) \leq z$, entonces $X(w) \leq Y(w) \leq z$, es decir, $X(w) \leq z$. Por consiguiente, si z es tal que $q \leq F_Y(z)$ y $q \leq F_Y(z) \leq F_X(z)$, se tiene que $q \leq F_X(z)$; es así que:

$$\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}$$

$$\Rightarrow \quad inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \geq inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}$$

$$\Rightarrow \quad VaR_{1-q}^Y = -inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \leq -inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} = VaR_{1-q}^X$$

$$\therefore \quad \rho(Y) \leq \rho(X)$$

5.1.2 Subaditividad

Para todo $X, Y \in A$, $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Esta propiedad expresa que una fusión de portafolios no crea riesgo adicional; en el contexto de portafolios de inversión nos indica que la diversificación reduce el riesgo. El cumplimiento de esta propiedad permite que la administración del riesgo sea más eficiente. Desde el punto de vista regulatorio, si el riesgo se reduce, es posible la reducción en el requerimiento de capital.

A partir de un ejemplo se muestra que el Valor en Riesgo no satisface la propiedad de subaditividad, siendo esta propiedad esencial en la optimización de portafolios, ya que de ella se desprende la convexidad en la superficie de riesgo, lo cual asegura un único portafolio óptimo. Para este ejemplo se consideran dos variables aleatorias X y Y, independientes e idénticamente distribuidas con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x \in (0,1] \\ 0.05 & \text{si } x \in [-2,0] \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de distribución evaluada en 0, satisface:

$$F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \int_{-2}^{0} 0.05dx = 0.1$$

De esta manera el Valor en Riesgo de X y Y, respectivamente, con un nivel de confianza del 90 %, satisfacen:

$$VaR_{0.9}^X = VaR_{0.9}^Y = 0$$

Se tiene que:

$$\mathbb{P}(X+Y \geq 0) = \int\int_{X+Y \geq 0} f_{XY}(x,y)dxdy$$

Para calcular la integral anterior, se debe considerar que debido a la independencia estocástica de X y Y, la función de densidad conjunta está dada por el producto de la densidad de cada variable, entonces:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (0.05)^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \ ; \ -2 \leq y \leq 0 \\ (0.05)(0.9) & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \ ; \ 0 < y \leq 1 \\ (0.9)(0.05) & \text{si } 0 < x \leq 1 \ ; \ -2 \leq y \leq 0 \\ (0.9)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \ ; \ 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Es así que en base a lo anterior:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y \geq 0) &= 2\int_0^1 \int_{-y}^0 (0.9)(0.05)dxdy + (0.9)^2 \\
&= 2(0.9)(0.05)(1/2) + (0.9)^2 \\
&= 0.855
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \mathbb{P}(X+Y \leq 0) = 1 - 0.855 = 0.145$$

A partir de esto se tiene que:

$$-VaR_{0.9}^{X+Y} = inf\{z \mid F_{X+Y}(z) \geq 0.1\} < 0$$

$$\Rightarrow \ VaR_{0.9}^{X} = VaR_{0.9}^{Y} = 0 < VaR_{0.9}^{X+Y}$$

De esta manera se tiene que el Valor en Riesgo no cumple con la propiedad de subaditividad.

5.1.3 Homogeneidad positiva

Sean $X \in A$ y $\alpha \geq 0$, entonces $\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X)$. Esta propiedad establece que el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo; no es lo mismo invertir una unidad monetaria en activos financieros que invertir cien unidades monetarias en los mismos activos, el segundo caso es cien veces más riesgoso.

La subaditividad implica también que $\rho(\alpha X) \leq \alpha\rho(X)$.

El Valor en Riesgo cumple con la propiedad de homogeneidad positiva. Sean $\alpha > 0$ y $Y = \alpha X$, entonces:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

a partir de lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
VaR_{1-q}^{Y} &= -inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\
&= -inf\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_Y(\alpha x) \geq q\} \\
&= -inf\left\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) \geq q\right\} \\
&= -inf\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\
&= -\alpha \ inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\
&= \alpha VaR_{1-q}^{X}
\end{aligned}$$

$$\therefore \ \rho(\alpha X) = \alpha\rho(X)$$

5.1.4 Invarianza bajo traslaciones

Para todo $X \in A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$. La propiedad de invarianza indica que el riesgo disminuye en una tasa α; si α es negativa, se interpreta como un adeudo, lo cual incrementa el riesgo del portafolio. Si se tiene que $\alpha = \rho(X)$, entonces $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$, es así que α puede ser la cantidad que se requiere para eliminar el riesgo de X.

El Valor en Riesgo es invariante bajo traslaciones. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $Y = X + \alpha$, entonces:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X + \alpha \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y - \alpha) = F_X(y-\alpha)$$

de lo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} VaR_{1-q}^{Y} &= -inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -inf\{x+\alpha \in \mathbb{R} \mid F_Y(x+\alpha) \geq q\} \\ &= -inf\{x+\alpha \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= -[inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} + \alpha] \\ &= -inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} - \alpha \\ &= VaR_{1-q}^{X} - \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \ \rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$$

5.1.5 Propiedades adicionales

1. A partir de las propiedades de subaditividad y homogeneidad positiva se desprende la propiedad de convexidad. ρ es convexa en A, es decir, si X y $Y \in A$ y $\alpha \in [0,1]$, entonces:

   $$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y)$$

   Esta propiedad es esencial en los problemas de optimización de portafolios, ya que garantiza la existencia de soluciones.

2. La función ρ es continua en A, de esta manera se tiene que cambios pequeños en X conducen a cambios pequeños en $\rho(X)$; esto se da como resultado de la convexidad de ρ.

3. Las propiedades de homogeneidad positiva e invarianza bajo traslaciones conducen a que $0 = \rho(0) = \rho(\alpha - \alpha) = \rho(\alpha) + \alpha$, lo cual implica que $\rho(\alpha) = -\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Gracias a esta propiedad es posible concluir que en una inversión libre de riesgo, el riesgo es reducido justamente en el rendimiento de la inversión, lo cual hace que el rendimiento de la inversión y el riesgo se eliminen entre sí.

4. $\rho(X + \rho(X + \rho(X))) = \rho(X)$. Efectivamente:

   $$\begin{aligned} \rho(X + \rho(X + \rho(X))) &= \rho(X) - \rho(X + \rho(X)) \\ &= \rho(X) - \rho(X) + \rho(X) \\ &= \rho(X) \end{aligned}$$

   Es así, que si se toman al mismo tiempo una cobertura $\rho(X)$ de X y la posición contraria a dicha cobertura, el efecto total se anula.

5. Si $\alpha > 0$, entonces $\rho(X+\alpha) \leq \rho(X) \leq \rho(X-\alpha)$, es así que un depósito reduce el riesgo y un adeudo lo incrementa.

6. Si $X \leq 0$, entonces $\rho(X) \geq 0$; esto se deduce de la propiedad de monotonía no creciente, lo cual significa que una reducción en el cambio de valor en el portafolio siempre implica un riesgo.

7. Si $a \leq X \leq b$, entonces $a \leq -\rho(X) \leq b$. Obsérvese que $X - b \leq 0$ y que $X - a \geq 0$, entonces:

$$\rho(X) + b = \rho(X-b) \geq \rho(0) = 0 \quad y \quad \rho(X) + a = \rho(X-a) \leq \rho(0) = 0$$

$$\Rightarrow \; \rho(X) \geq -b \quad y \quad \rho(X) \leq -a$$

$$\therefore \; -b \leq \rho(X) \leq -a$$

A pesar de que la varianza representa una de las formas más utilizadas para la medición de riesgos, esta no satisface todas las propiedades de coherencia. La varianza no satisface la propiedad de homogeneidad positiva ya que en ésta las constantes salen al cuadrado, por otro lado tampoco es invariante bajo traslaciones pues la varianza de una variable aleatoria más una constante es igual a la varianza de la variable; así mismo se tiene que si X y Y son variables aleatorias, entonces:

$$Var = (X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

es así que el cumplimiento o no de la subaditividad depende del signo de $Cov(X,Y)$.

La única ventaja que presenta la desviación estándar $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$, es que satisface la propiedad de homogeneidad positiva, $\sigma(\alpha X) = \alpha\sigma(X)$.

En general el Valor en Riesgo (VaR) no es una medida de riesgo coherente ya que presenta falta de subaditividad y de convexidad, por consiguiente no satisface las propiedades requeridas de coherencia. Por ejemplo, el VaR de una combinación de dos carteras de inversión puede ser más grande que la suma de los riesgos de las carteras medidas individualmente.

El VaR únicamente es coherente cuando está basado en distribuciones continuas normalizadas, ya que para una distribución normal el VaR es proporcional a la desviación estándar; en este caso trabajar con mínima varianza, el VaR o con el CVaR es equivalente.

Afortunadamente es posible construir una medida coherente de riesgo, a esta medida se le conoce como *Esperanza Condicional de la cola del Valor en Riesgo* o *VaR Condicional*.

5.2 CVaR (VaR Condicional)

El VaR Condicional[1] ha sido propuesto recientemente (Artzner, Delbaen Ebert y Heath - 2001) como una alternativa que supera al VaR; es una excelente medida para analizar y cuantificar riesgos, además de ser una medida coherente. El CVaR es consistente con el enfoque media-varianza (para distribuciones de pérdida normales, portafolios óptimos en media-varianza también son CVaR óptimos).Gracias a este tipo de medidas las instituciones

[1]Algunos autores llaman al CVaR como Expected Shortfall, refiriéndose en todo momento a la misma medida de riesgo.

financieras pueden cuantificar su exposición al riesgo y el volumen de reservas que deben tener para realizar a sus operaciones de una forma segura.

El VaR estima la pérdida que puede tener una cartera dentro de un determinado horizonte de tiempo y con un nivel de confianza dado; por su parte, el CVaR indica cual es el valor esperado de la pérdida de una cartera, en un horizonte de tiempo, dado que ésta es mayor que el VaR, es así que la esperanza condicional de la cola del VaR estará determinada como:

$$\begin{aligned} CVaR_{1-q}^{X} &= -\mathbb{E}[X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\ &= \mathbb{E}[X \mid X \geq VaR_{1-q}^{X}] \end{aligned}$$

El CVaR puede ser optimizado mediante técnicas de programación lineal; en la técnica empleada se calcula el VaR y se minimiza el CVaR simultáneamente. Sea $f(x,y)$ la función de densidad que representa las pérdidas, esta depende de un vector de decisión x (pertenece al conjunto de portafolios factibles) y de un vector aleatorio y, el cual representa la incertidumbre (parámetros de mercado que pueden afectar la pérdida).

Para cada x, la pérdida $f(x,y)$ es una variable aleatoria con una distribución inducida por la de y. Por conveniencia se asume que la distribución de probabilidad de y tiene una función de densidad denotada por $p(y)$. La función de distribución acumulada de la pérdida asociada con el vector x está dada por:[2]

$$\phi(x,\varphi) = \int_{f(x,y)<\varphi} p(y)dy$$

la función $\phi(x,\varphi)$ determina completamente el comportamiento de la pérdida y es fundamental en la definición del VaR y el CVaR; la función $\phi(x,\varphi)$ es no decreciente con respecto a φ y por simplicidad se asume que es continua con respecto a φ.

A partir de lo anterior es posible definir nuevamente el VaR, es así que el VaR para un nivel de confianza $1-q$ asociado con el portafolio X, está dado por:

$$VaR_{1-q}^{X} = min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \phi(x,\varphi) \geq 1-q\}$$

Así mismo el CVaR queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} CVaR_{1-q}^{X} &= \frac{1}{q}\int_{f(x,y)\geq VaR_{1-q}^{X}} f(x,y)p(y)dy \\ &\geq \frac{1}{q}\int_{f(x,y)\geq VaR_{1-q}^{X}} VaR_{1-q}^{X}p(y)dy \\ &= \frac{VaR_{1-q}^{X}}{q}\int_{f(x,y)\geq VaR_{1-q}^{X}} p(y)dy \\ &\geq VaR_{1-q}^{X} \end{aligned}$$

$$\therefore\ CVaR_{1-q}^{X} \geq VaR_{1-q}^{X}$$

Cuando no hay continuidad y se presentan distribuciones discontinuas es necesario hablar de otras medidas como la llamada *mean shortfall* que sería el $CVaR^{+}$ y la *mean excess loss*

[2]Probabilidad de que la pérdida $f(x,y)$ no exceda el valor de φ.

representada por $CVaR^-$,[3] de tal forma que $CVaR^- \leq CVaR \leq CVaR^+$. La principal diferencia de estas medidas con respecto al CVaR es la falta de coherencia a consecuencia de la discontinuidad de las distribuciones.

Como medida de riesgo, el CVaR ofrece ventajas significativas respecto al VaR, principalmente cuando las distribuciones de los rendimientos no son continuas y se alejan del supuesto de normalidad.[4] Una solución al problema de la falta de continuidad de precios es usar modelos que asumen que las distribuciones de las perdidas son continuas; sin embargo, en la mayoría de los casos este es un supuesto que se aleja drásticamente de la realidad.

Se ha encontrado que cuando el VaR es utilizado, la sensibilidad de la cartera óptima respecto al nivel de confianza es muy alta, mientras que cuando el CVaR es utilizado, la cartera óptima permanece estable respecto al nivel de confianza.

El CVaR presenta ventajas importantes como herramienta en el problema de optimización eficiente de carteras de inversión. Es así que a través de técnicas de programación adecuadas, es posible calcular la cartera óptima de inversión que minimiza el riesgo medido por el CVaR. Otra de las ventajas asociadas al CVaR es que puede cuantificar eficazmente situaciones que estén más allá del VaR (pérdidas extremas). Es una medida más interesante que el VaR ya que:

- Permite plantear problemas de carteras óptimas con un VaR condicional dado.
- Es la medida correcta para definir la magnitud del capital económico necesario en un determinado nivel de confianza.
- Muestra una gran estabilidad, la cual aumenta a medida que el intervalo de confianza disminuye, algo coherente ya que a medida que disminuye el intervalo de confianza el número de observaciones elegidas que exceden al VaR es mayor, lo que hace que el promedio de dichas observaciones (para el cálculo del CVaR) proporciona mayor consistencia y estabilidad a las proporciones de la cartera óptima.

5.2.1 CVaR como medida coherente de riesgo

Consideremos que:

$$\begin{aligned}
CVaR_{1-q}^X &= -\mathbb{E}[X \mid X < -VaR_{1-q}^X] \\
&= \mathbb{E}[-X \mid X < -VaR_{1-q}^X] \\
&= \mathbb{E}[-X - VaR_{1-q}^X + VaR_{1-q}^X \mid X < -VaR_{1-q}^X] \\
&= VaR_{1-q}^X + \mathbb{E}[-X - VaR_{1-q}^X \mid -VaR_q^X - X > 0] \\
&= VaR_{1-q}^X - \mathbb{E}[X + VaR_{1-q}^X \mid VaR_q^X + X < 0]
\end{aligned}$$

Si se denota $VaR_{1-q}^X = -u$ y $e(u) = \mathbb{E}[X - u \mid X < u]$, entonces:

$$CVaR_{1-q}^X = -u - e(u)$$

[3]$CVaR^-$ es la pérdida esperada que estrictamente supera al VaR.

[4]Esto es muy común cuando se utilizan métodos de simulación histórica o bien cuando no se tienen cotizaciones completas.

Por definición se tiene que:

$$
\begin{aligned}
e(u) &= \frac{\int_{-\infty}^{u}(x-u)dF_X(x)}{F_X(u)} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{u} x dF_X(x) - uF_X(u)}{F_X(u)} \\
&= \frac{1}{F_X(u)}\int_{-\infty}^{u} x dF_X(x) - u \\
&= \frac{1}{F_X(u)}\left[uF_X(u) - \int_{-\infty}^{u} F_X(x)dx\right] - u \\
&= -\frac{1}{F_X(u)}\int_{-\infty}^{u} F_X(x)dx
\end{aligned}
$$

El CVaR es homogéneo positivo

La esperanza condicional de la cola del VaR satisface la propiedad de homogeneidad positiva. Sean $\alpha > 0$ y $X \in A$, se define $Y = \alpha X$, entonces se cumple que:

$$
\begin{aligned}
CVaR_{1-q}^{Y} &= \mathbb{E}[-Y \mid Y < -VaR_{1-q}^{Y}] \\
&= \mathbb{E}[-\alpha X \mid \alpha X < -VaR_{1-q}^{\alpha X}] \\
&= \mathbb{E}[-\alpha X \mid \alpha X < -\alpha VaR_{1-q}^{X}] \\
&= \mathbb{E}[-\alpha X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= \alpha\mathbb{E}[-X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= \alpha CVaR_{1-q}^{X}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \rho(\alpha X) = \alpha\rho(X)$$

El CVaR es invariante bajo traslaciones

La esperanza condicional de la cola del VaR es invariante bajo traslaciones. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in A$, se define $Y = X + \alpha$, entonces:

$$
\begin{aligned}
CVaR_{1-q}^{Y} &= \mathbb{E}[-Y \mid Y < -VaR_{1-q}^{Y}] \\
&= \mathbb{E}[-X - \alpha \mid X + \alpha < -VaR_{1-q}^{X+\alpha}] \\
&= \mathbb{E}[-X - \alpha \mid X + \alpha < -(VaR_{1-q}^{X} - \alpha)] \\
&= \mathbb{E}[-X - \alpha \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= \mathbb{E}[-X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] - \mathbb{E}[-\alpha \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= \mathbb{E}[-X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] - \alpha \\
&= CVaR_{1-q}^{X} - \alpha
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$$

El CVaR es monótono no creciente

La esperanza condicional de la cola del VaR satisface la propiedad de monotonía no creciente. Se considera que $X \geq Y$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y \mid Y < -VaR^Y_{1-q}] &= -VaR^Y_{1-q} + \mathbb{E}[Y + VaR^Y_{1-q} \mid Y < -VaR^Y_{1-q}] \\
&= -VaR^Y_{1-q} + \frac{\mathbb{E}\left[(Y + VaR^Y_{1-q}) I_{\{Y < -VaR^Y_{1-q}\}}\right]}{\mathbb{P}[Y < -VaR^Y_{1-q}]} \\
&= -VaR^Y_{1-q} + \frac{\mathbb{E}\left[(Y + VaR^Y_{1-q}) I_{\{Y < -VaR^Y_{1-q}\}} I_{\{X < -VaR^X_{1-q}\}}\right]}{q} \\
&+ \frac{\mathbb{E}\left[(Y + VaR^Y_{1-q}) I_{\{Y + VaR^Y_{1-q} < 0\}} I_{\{X \geq -VaR^X_{1-q}\}}\right]}{q} \\
&\leq -VaR^Y_{1-q} + \frac{\mathbb{E}\left[(Y + VaR^Y_{1-q}) I_{\{Y < -VaR^Y_{1-q}\}} I_{\{X < -VaR^X_{1-q}\}}\right]}{q} \\
&\leq -VaR^Y_{1-q} + \frac{\mathbb{E}\left[(Y + VaR^Y_{1-q}) I_{\{X < -VaR^X_{1-q}\}}\right]}{\mathbb{P}[X < -VaR^X_{1-q}]} \\
&= -VaR^Y_{1-q} + \mathbb{E}[Y + VaR^Y_{1-q} \mid X < VaR^X_{1-q}] \\
&= \mathbb{E}[Y \mid X < -VaR^X_{1-q}] \\
&\leq \mathbb{E}[X \mid X < -VaR^X_{1-q}]
\end{aligned}$$

La primer desigualdad se debe a que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. La segunda desigualdad es debido a que la intersección de dos eventos está contenida en cada uno de los eventos. Por consiguiente:

$$-\mathbb{E}[X \mid X < -VaR^X_{1-q}] \leq -\mathbb{E}[Y \mid -Y > VaR^Y_{1-q}]$$

$$\Rightarrow \quad CVaR^X_{1-q} \leq CVaR^Y_{1-q}$$

$$\therefore \quad \rho(X) \leq \rho(Y)$$

El CVaR es subaditivo

La esperanza condicional de la cola del VaR satisface la propiedad de subaditividad. Si $X, Y \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] &= -VaR_{1-q}^{X} + \mathbb{E}[X + VaR_{1-q}^{X} \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= -VaR_{1-q}^{X} + \frac{\mathbb{E}\left[(X + VaR_{1-q}^{X}) I_{\{X < -VaR_{1-q}^{X}\}}\right]}{\mathbb{P}[X < -VaR_{1-q}^{X}]} \\
&= -VaR_{1-q}^{X} + \frac{\mathbb{E}\left[(X + VaR_{1-q}^{X}) I_{\{X < -VaR_{1-q}^{X}\}} I_{\{X+Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}\}}\right]}{\mathbb{P}[X < -VaR_{1-q}^{X}]} \\
&+ \frac{\mathbb{E}\left[(X + VaR_{1-q}^{X}) I_{\{X + VaR_{1-q}^{X} < 0\}} I_{\{X+Y \geq -VaR_{1-q}^{X+Y}\}}\right]}{\mathbb{P}[X < -VaR_{1-q}^{X}]} \\
&\leq -VaR_{1-q}^{X} + \frac{\mathbb{E}\left[(X + VaR_{1-q}^{X}) I_{\{X < -VaR_{1-q}^{X}\}} I_{\{X+Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}\}}\right]}{q} \\
&\leq -VaR_{1-q}^{X} + \frac{\mathbb{E}\left[(X + VaR_{1-q}^{X}) I_{\{X+Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}\}}\right]}{\mathbb{P}[X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}]} \\
&= -VaR_{1-q}^{X} + \mathbb{E}[X + VaR_{1-q}^{X} \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}] \\
&= \mathbb{E}[X \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}]
\end{aligned}$$

Por simetría en los cálculos, se tiene que:

$$\mathbb{E}[Y \mid Y < -VaR_{1-q}^{Y}] \leq \mathbb{E}[Y \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}]$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
CVaR_{1-q}^{X+Y} &= -\mathbb{E}[X + Y \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}] \\
&= -\mathbb{E}[X \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}] - \mathbb{E}[Y \mid X + Y < -VaR_{1-q}^{X+Y}] \\
&\leq -\mathbb{E}[Y \mid Y < -VaR_{1-q}^{Y}] - \mathbb{E}[X \mid X < -VaR_{1-q}^{X}] \\
&= CVaR_{1-q}^{X} + CVaR_{1-q}^{Y}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

5.3 Portafolios óptimos

Existen diversos modelos y tipos de análisis para definir un portafolio de inversión, así como para estudiar y saber en que invertir, cuando y cuanto comprar o vender. A través de estas metodologías se busca disminuir el nivel de incertidumbre asociado a los instrumentos financieros.

El objetivo de la optimización es obtener aquellas proporciones sobre los instrumentos que componen una cartera de inversión que minimice el VaR o CVaR, para un nivel de confianza específico $(1 - q)$.

Para la selección de un portafolio óptimo (el mejor portafolio de inversión) se deben considerar los siguientes aspectos:

- Primeramente se debe tener claridad sobre la relación riesgo-rendimiento del inversionista, para así orientar el proceso de selección a encontrar el portafolio que más se ajuste a los criterios deseados.
- El siguiente paso estará enfocado a la selección de los instrumentos que integrarán el portafolio; esto dependerá de las preferencias de cada inversionista (requerimientos de liquidez, horizonte de inversión, tolerancia al riesgo).
- Una vez que se tienen seleccionados los instrumentos, se recopila la información necesaria.

5.3.1 Frontera eficiente y diversificación

La principal meta de una inversión puede quedar definida de dos maneras:

1. Para un determinado nivel de riesgo, asegurar el rendimiento esperado más alto posible.
2. Para un determinado rendimiento esperado, asegurar el menor riesgo posible.

Dependiendo del perfil del inversionista, existe un nivel de tolerancia al riesgo (estar dispuesto a aceptar una gran cantidad de riesgo a cambio de un aumento relativamente pequeño en el rendimiento esperado) o de aversión al riesgo (se requiere un mayor rendimiento esperado, como compensación por aceptar un aumento en el riesgo.

Harry Markowitz revolucionó la teoría de las inversiones al establecer que en la medida que se suman activos a un portafolio de inversión, el riesgo total disminuye, sin afectar el rendimiento esperado de cada uno de los activos; [5] esto se logra siempre y cuando cada par de activos no estén perfectamente correlacionados en forma positiva ($\rho_{ij} = 1$), ya que en ese caso la comparación entre riesgo-rendimiento tiene un comportamiento lineal, de tal forma que la proporción del incremento en el riesgo será igual a la proporción del incremento del rendimiento. Esto significa que al invertir en un portafolio, en lugar de sólo en instrumentos aislados, es posible disminuir el riesgo sin necesidad de sacrificar rendimientos.

Para tomar la mejor elección acerca de que instrumentos deben conformar el portafolio o cartera de inversión, es conveniente introducir el concepto de *dominio de un valor o activo*. De esta manera, se tiene que un valor domina a otro si cumple con cualquiera de las siguientes condiciones:

- Si $\mathbb{E}(R_A) > \mathbb{E}(R_B)$ y $\sigma_A = \sigma_B$ entonces A domina a B.
- Si $\mathbb{E}(R_A) = \mathbb{E}(R_B)$ y $\sigma_A < \sigma_B$ entonces A domina a B.
- Si $\mathbb{E}(R_A) > \mathbb{E}(R_B)$ y $\sigma_A < \sigma_B$ entonces A domina a B.

Es así que si el activo A domina al activo B, entonces este último activo no formará parte del portafolio de inversión.

Para determinar el portafolio óptimo, las etapas intermedias que se deben considerar son:

1. Encontrar el conjunto factible de carteras.
2. Determinar el conjunto eficiente a partir del conjunto factible.

[5] La diversificación en condiciones de incertidumbre es una condición necesaria de eficiencia económica, ya que permite disminuir el riesgo, manteniendo el mismo nivel de ganancia esperada. El riesgo puede variar según la incertidumbre que exista respecto al rendimiento esperado de una inversión.

3. Seleccionar la mejor cartera de inversión a partir del conjunto eficiente.

Todos aquellos inversionistas que desean rendimientos esperados más altos y que desean evitar el riesgo, invertirán en carteras que pertenezcan al conjunto eficiente. Tanto el inversionista conservador como el arriesgado seleccionarán carteras que se encuentren sobre la frontera eficiente, pero sus portafolios tendrán diferentes características de riesgo y rendimiento.

Una cartera eficiente es la que proporciona el rendimiento esperado más alto posible en base a cualquier grado de riesgo, o bien el más bajo grado posible de riesgo en base a cualquier rendimiento esperado.

Un portafolio eficiente es una combinación factible de alternativas de inversión que maximiza la esperanza de los rendimientos para un nivel dado de riesgo. El modelo básico del portafolio eficiente hace uso de: rendimiento del portafolio, varianza y desviación estándar del portafolio, la covarianza y el coeficiente de correlación entre dos variables.[6] El riesgo de un portafolio no sólo depende del riesgo de las variables que lo conforman, sino también de la relación entre las mismas (covarianza).

En el proceso para estructurar carteras de inversión, se encuentran activos con correlación positiva, negativa o muy cercana a cero. Cuando los activos están relacionados en forma positiva es imposible la diversificación (encontrar portafolios con riesgo menor al menor riesgo individual presente en la cartera); si por el contrario los activos están correlacionados en forma negativa, es posible encontrar el portafolio óptimo. En el caso que el coeficiente de correlación es muy cercano a cero, es posible encontrar un portafolio con un riesgo inferior al menor riesgo individual presente en la cartera. Cualquiera que sea el valor del coeficiente de correlación, es posible representar las numerosas posibilidades de combinaciones entre los activos de cualquier portafolio de inversión.

El problema para la selección de carteras se identifica con el conjunto eficiente definido por las restricciones que limitan la elección del inversionista.

5.3.2 Modelo de Harry Markowitz

Markowitz desarrolló un modelo, en el cual establece que el rendimiento de un portafolio de inversión está definido, por la ponderación de los rendimientos esperados de los n instrumentos que lo componen, en tanto el riesgo está en función de tres factores:

1. La ponderación o proporción de cada instrumento en el portafolio.

2. La desviación estándar (riesgo o volatilidad) del rendimiento de cada instrumento.

3. La covarianza o el coeficiente de correlación entre los rendimientos de cada pareja de instrumentos. De este modo se necesitarán calcular $[n(n-1)/2]$ covarianzas diferentes.

Cuanto menor sea la correlación entre los instrumentos que componen una cartera de inversión, se reduce más el riesgo de esta. Esto se debe principalmente a que la varianza de una cartera está en función del valor de ρ_{ij} para cada par de instrumentos.

Dado que se conocen el rendimiento esperado y el riesgo de cada instrumento, así como los coeficientes de correlación entre cada pareja de instrumentos, las variables de decisión son las proporciones que se deben invertir en cada instrumento, estas variables están bajo el control del inversionista y son las que proporcionan la composición de cada cartera de inversión.

El planteamiento de este modelo se basa en que para una determinada tasa de rendimiento, el objetivo es minimizar el riesgo de la cartera. Es así que una cartera con rendimiento

[6] Capítulo 2.

esperado $\overline{R}_p$ es *eficiente* si su varianza es la mínima entre todas las posibles carteras que proporcionan el mismo rendimiento esperado. De manera alternativa, una cartera con varianza σ_p^2 es *eficiente* si el rendimiento esperado $\overline{R}_p$ es el máximo entre todas las posibles carteras que proporcionan la misma varianza. Si el objetivo del inversionista es minimizar el riesgo, partiendo de una tasa de rendimiento requerida para el portafolio, se tiene que:[7]

$$Min \quad \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$sujeto \ a \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{R}_i = \overline{R}_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \forall \ w_i \geq 0$$

En el planteamiento anterior se pretende minimizar la varianza de una cartera de inversión, sujeta a tres condiciones: el rendimiento esperado debe ser igual a una tasa dada por el inversionista, la suma de las proporciones invertidas en cada instrumento financiero deben ser iguales a uno y finalmente las inversiones que se realicen deben ser positivas.

El problema de optimización (minimización del riesgo) se logra fácilmente mediante el proceso de multiplicadores de Lagrange. De esta manera se tiene que el Lagrangeano del problema es:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{R}_i - \overline{R}_p\right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$$

donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones necesarias o de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = w_1\sigma_{i1} + w_2\sigma_{i2} + ... + w_n\sigma_{in} - \lambda_1\overline{R}_i - \lambda_2 = 0 \quad \forall \ i = 1, 2, ..., n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1\overline{R}_1 + w_2\overline{R}_2 + ... + w_n\overline{R}_n - \overline{R}_p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1 + w_2 + ... + w_n - 1 = 0$$

o bien:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\sigma_{ij} - \lambda_1\overline{R}_i - \lambda_2 = 0 \quad \forall \ i = 1, 2, ..., n$$

[7]El parámetro de 1/2 enfrente de la función objetivo (varianza) es sólo por conveniencia, ya que facilita la expresión y la resolución matemática, produciendo el mismo resultado. Se puede observar que es un problema de *Programación Cuadrática*, ya que la función objetivo es una función cuadrática y se tienen restricciones lineales, en donde las variables de decisión son la proporción de cada uno de los instrumentos (w_i) que conforman el portafolio.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\overline{R}_i - \overline{R}_p = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0$$

Las ecuaciones anteriores representan un conjunto de $n+2$ ecuaciones con igual número de incógnitas (n valores de w, λ_1 y λ_2); al ser un sistema de ecuaciones lineales, se tiene una solución única,[8] la cual se puede encontrar mediante métodos de álgebra lineal.

Mediante álgebra de matrices, este sistema puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & -\overline{R}_1 & -1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & -\overline{R}_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & -\overline{R}_n & -1 \\ \overline{R}_1 & \overline{R}_2 & \cdots & \overline{R}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{R}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

De forma compacta se puede expresar mediante la siguiente notación:

$$\mathbf{MX} = \mathbf{N}$$

Para obtener la solución, se multiplica de ambos lados por la inversa de la matriz $\mathbf{M}$ (matriz no singular) y es así que se tiene:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MX} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$$

De manera que el vector solución es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$$

Al encontrar la solución del sistema se obtienen además de los multiplicadores de Lagrange, las proporciones que se deben invertir en cada uno de los n activos financieros para obtener la tasa de rendimiento $\overline{R}_p$ y con la varianza mínima dentro de todos los portafolios de inversión que tienen esa tasa esperada de rendimiento. Si el procedimiento anterior se repite para un conjunto de valores distintos de $\overline{R}_p$, es posible tener un número suficientemente grande de portafolios que forman parte de la frontera eficiente; puesto que entre dos números siempre hay otro, el número de pruebas posibles es infinito, la cantidad de pruebas que se deban hacer dependerá del interés y objetivos del inversionista.

La aplicación del modelo de Markowitz proporciona herramientas para el análisis del riesgo y la toma de decisiones, condicionada al grado de aversión al riesgo del inversionista.

Al ser la mayoría de los instrumentos financieros riesgosos, tienen rendimientos inciertos; es así que uno de los principales problemas que enfrentan los inversionistas en la toma de decisiones, la creación de un portafolio.

[8] Las w que satisfacen las ecuaciones, minimizan la varianza del portafolio (σ_p^2).

Para el caso en el que $n = 2$, se tiene:

$$Min \quad \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$sujeto \ \ a \qquad \sum_{i=1}^{2} w_i \overline{R}_i = \overline{R}_p$$

$$\sum_{i=1}^{2} w_i = 1 \qquad \forall \ w_i \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad L &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{2} w_i \overline{R}_i - \overline{R}_p\right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{2} w_i - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}(w_1^2\sigma_1^2 + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_1 \sigma_{21} + w_2^2 \sigma_2^2) \\
&- \lambda_1(w_1\overline{R}_1 + w_2\overline{R}_2 - \overline{R}_p) - \lambda_2(w_1 + w_2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = \frac{1}{2}(2w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} + w_2\sigma_{21}) - \lambda_1\overline{R}_1 - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = \frac{1}{2}(2w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{12} + w_1\sigma_{21}) - \lambda_1\overline{R}_2 - \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -w_1\overline{R}_1 - w_2\overline{R}_2 + \overline{R}_p \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -w_1 - w_2 + 1$$

Usando el hecho de que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ e igualando a cero se tiene que las condiciones de primer orden son:

$$w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} - \lambda_1\overline{R}_1 - \lambda_2 = 0$$

$$w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{12} - \lambda_1\overline{R}_2 - \lambda_2 = 0$$

$$w_1\overline{R}_1 + w_2\overline{R}_2 = \overline{R}_p$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:[9]

$$w_1 = 1 - w_2 \quad \Rightarrow \quad (1 - w_2)\overline{R}_1 + w_2\overline{R}_2 = \overline{R}_p$$

$$\Rightarrow \quad \overline{R}_1 - w_2\overline{R}_1 + w_2\overline{R}_2 = \overline{R}_p \quad \Rightarrow \quad w_2(\overline{R}_2 - \overline{R}_1) = \overline{R}_p - \overline{R}_1$$

$$\therefore \quad \boxed{w_2 = \frac{\overline{R}_p - \overline{R}_1}{\overline{R}_2 - \overline{R}_1}} \quad y \quad \boxed{w_1 = \frac{\overline{R}_2 - \overline{R}_p}{\overline{R}_2 - \overline{R}_1}}$$

[9]Para cuando se tienen sólo 2 activos es un caso degenerado, ya que los valores tanto w_1 y w_2 quedan determinados por dos restricciones.

5.3.3 Optimización del VaR

El problema de minimización del Valor en Riesgo queda expresado de la siguiente manera:

$$Min \quad \frac{1}{2}VaR_{1-q}^2 = \frac{1}{2}\left[\xi z_q\sqrt{T-t}\right]^2\left[\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T\right] = \frac{\varphi^2}{2}\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a \quad \mathbf{wR} &= \overline{R}_p \\ \mathbf{w1} &= 1 \end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, ..., w_n] \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \overline{R}_1 \\ \overline{R}_2 \\ \vdots \\ \overline{R}_n \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

El Lagrangeano del problema es:

$$L = \frac{\varphi^2}{2}\mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^T - \lambda_1(\mathbf{wR} - \overline{R}_p) - \lambda_2(\mathbf{w1} - 1)$$

Las condiciones de primer orden quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \varphi^2\Sigma\mathbf{w}^T - \lambda_1\mathbf{R} - \lambda_2\mathbf{1} = 0 \quad ... \ (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mathbf{wR} - \overline{R}_p = 0 \quad ... \ (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \mathbf{w1} - 1 = 0 \quad ... \ (3)$$

Considerando la ecuación (1) se tiene:

$$\varphi^2\Sigma\mathbf{w}^T = \lambda_1\mathbf{R} + \lambda_2\mathbf{1}$$

a partir de lo anterior y por ser Σ una matriz definida positiva:

$$\mathbf{w}^T = \frac{1}{\varphi^2}\left[\lambda_1\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \lambda_2\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right]$$

Utilizando las ecuaciones (2) y (3):

$$\overline{R}_p = \mathbf{wR} = \frac{1}{\varphi^2}\left[\lambda_1\mathbf{R}^T\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \lambda_2\mathbf{R}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right]$$

$$1 = \mathbf{w1} = \lambda_1\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \lambda_2\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

Si $a = \mathbf{R}^T\Sigma^{-1}\mathbf{R}$, $b = \mathbf{R}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$ y $c = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$, entonces:

$$\overline{R}_p = \mathbf{wR} = \frac{1}{\varphi^2}[a\lambda_1 + b\lambda_2]$$

$$1 = \mathbf{w1} = b\lambda_1 + c\lambda_2$$

A partir del sistema de ecuaciones anterior es posible obtener las expresiones para λ_1 y λ_2:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\varphi^2 c}{b^2 - ac}\left[\frac{b\mathbf{w1}}{\varphi^2 c} - \mathbf{wR}\right]} \quad y \quad \boxed{\lambda_2 = \frac{\varphi^2 b}{b^2 - ac}\left[\mathbf{wR} - \frac{a\mathbf{w1}}{\varphi^2 b}\right]}$$

Sustituyendo λ_1 y λ_2 en $\mathbf{w}^T$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^T &= \frac{1}{\varphi^2}\left[\lambda_1 \Sigma^{-1}\mathbf{R} + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbf{1}\right] \\
&= \frac{1}{\varphi^2}\left[\left[\frac{\varphi^2 c}{b^2 - ac}\left[\frac{b\mathbf{w1}}{\varphi^2 c} - \mathbf{wR}\right]\right]\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \left[\frac{\varphi^2 b}{b^2 - ac}\left[\mathbf{wR} - \frac{a\mathbf{w1}}{\varphi^2 b}\right]\right]\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right] \\
&= \frac{c}{b^2 - ac}\left[\frac{b}{\varphi^2 c} - \overline{R}_p\right]\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \frac{b}{b^2 - ac}\left[\overline{R}_p - \frac{a}{\varphi^2 b}\right]\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{b^2 - ac}\left[\left[\frac{b - \varphi^2 c\overline{R}_p}{\varphi^2}\right]\Sigma^{-1}\mathbf{R} + \left[\frac{\varphi^2 b\overline{R}_p - a}{\varphi^2}\right]\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{w}^T = \frac{(b - \varphi^2 c\overline{R}_p)\Sigma^{-1}\mathbf{R} + (\varphi^2 b\overline{R}_p - a)\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\varphi^2(b^2 - ac)}}$$

Para el caso en que $\varphi^2 = 1$ el problema de la optimización del VaR coincide con el resultado obtenido para la minimización de la Varianza (problema de optimización de Markowitz).

5.4 Programación Estocástica

Un problema de programación lineal en forma canónica, es un problema de optimización de la forma:

$$\begin{aligned}
min \;\; &\mathbf{cx} \\
\mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$. Usualmente se considera que cada parámetro y cada variable en este problema es un valor determinístico; sin embargo muchos problemas prácticos obligan a introducir elementos estocásticos en el modelo.

El vector $\mathbf{x}$ es el vector de variables de decisión y por tanto, se encuentra por completo bajo control. Es así que la aleatoriedad se introduce en alguno de los parámetros del problema, ya sea en la función objetivo o en las restricciones. Si se incluye aleatoriedad en las restricciones (conservando linealidad) se obtiene un problema del estilo:

$$\begin{aligned}
min \;\; &\mathbf{cx} \\
\mathbf{Gx} &\geq \mathbf{h} \\
\mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $\mathbf{G}$ es una matriz de $s \times n$. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ siguen siendo determinísticas, a diferencia de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{h}$ que se consideran estocásticas. Una forma alternativa de escribir (5.2) es la siguiente:

$$\begin{aligned} min \;\; & \mathbf{cx} \\ \mathbf{Gx} &\geq \mathbf{h} \\ \mathbf{x} &\in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.3}$$

en este caso, $\mathbf{B}$ es un conjunto poliédrico. A un problema de este tipo se le conoce como *Problema de Programación Lineal Estocástica* (PPLE).

En este tipo de problemas el supuesto esencial es que se conoce la distribución conjunta de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{h}$, de hecho se considera que:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\zeta}) &= \mathbf{G}_1\zeta_1 + \mathbf{G}_2\zeta_2 + \cdots + \mathbf{G}_r\zeta_r \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\zeta}) &= \mathbf{h}_1\zeta_1 + \mathbf{h}_2\zeta_2 + \cdots + \mathbf{h}_r\zeta_r \end{aligned} \tag{5.4}$$

y que cada $\mathbf{G}_i$ y $\mathbf{h}_i$, $i = 1, \ldots, r$ es determinística. La aleatoriedad proviene del vector $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)'$ que se supone estocástico aún cuando se conoce su distribución.

Esta *"pequeña"* variación del problema complica considerablemente el hallazgo de una solución óptima, a decir verdad, se complica mucho inclusive el hallazgo de una solución factible. La forma usual de atacar estos problemas consiste en sustituir $\mathbf{G}$ y $\mathbf{h}$ por sus valores esperados, $\overline{\mathbf{G}}$ y $\overline{\mathbf{h}}$, lo cual conduce al problema:

$$\begin{aligned} min \;\; & \mathbf{cx} \\ \overline{\mathbf{G}}\mathbf{x} &\geq \overline{\mathbf{h}} \\ \mathbf{x} &\in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Este es un problema lineal convencional y por tanto es posible usar los métodos de solución tradicionales. En algunos casos esta sustitución es apropiada; sin embargo por lo general esta estrategia resulta demasiado restrictiva, de hecho se está condensando en un solo número, toda la información contenida en una distribución. Es por ello que esta forma de atacar el problema, por lo general no es la más adecuada. Otra posibilidad consiste en forzar el cumplimiento de las restricciones estocásticas, al menos con cierto nivel de confianza. Es decir, reemplazando el problema (5.3) con:

$$\begin{aligned} min \;\; & \mathbf{cx} \\ \mathbb{P}\left(\mathbf{Gx} \geq \mathbf{h}\right) &\geq \alpha \\ \mathbf{x} &\in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Evidentemente α debe ser un número predeterminado y cercano a uno, 0.95 por ejemplo.

El problema aquí es claro, se pierde linealidad a menos de que la medida de probabilidad sea discreta. De cualquier modo este modelo es mucho más aceptable pues no se elimina la información que la distribución aporta. De hecho, si las restricciones probabilísticas conservan convexidad aún es posible encontrar un algoritmo razonable para resolver el problema.

Ahora bien, no se debe perder de vista el objetivo, encontrar un vector $\mathbf{x}$ que optimice el problema (5.3). Con este objetivo en mente, quizá sea posible encontrar una solución $\mathbf{x}$ que cumpla con todas las restricciones de (5.2) para alguna o algunas realizaciones de $\boldsymbol{\zeta}$; sin embargo es muy poco probable encontrar una solución que cumpla todas las restricciones independientemente de la realización de $\boldsymbol{\zeta}$.[10] Por esta razón, en (5.5) y (5.6) se proponen dos alternativas que buscan resolver el problema de manera más o menos satisfactoria. En este contexto, nótese que la selección de (5.5) o de (5.6) depende mucho del problema que se desea resolver, en algunos casos es más conveniente seleccionar (5.5) en lugar de (5.6) y viceversa. Más aún, la intuición indica que (5.5) y (5.6) no son las únicas alternativas que se tienen para replantear (5.3), el hecho es que existen una infinidad de posibilidades, nuevamente; la más adecuada depende del problema específico que se desea resolver.

Para estudiar más de cerca las opciones que se tienen conviene introducir una nueva variable en (5.3). Sea $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{Gx} - \mathbf{h}$ ($\boldsymbol{\eta}$ es un vector en $\mathbb{R}^s$) esto permite reescribir el problema como sigue:

$$\begin{aligned} min \ \ & \mathbf{cx} \\ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}) & \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Evidentemente $\boldsymbol{\eta}$ es una holgura que depende de $\boldsymbol{\zeta}$ y por lo tanto es estocástica. Por definición $\boldsymbol{\eta}$ depende de $\mathbf{G}$ y de $\mathbf{h}$ de las cuales por hipótesis se conoce su distribución conjunta; sin embargo, la distribución de $\boldsymbol{\eta}$ es desconocida, $\boldsymbol{\eta}$ depende de $\mathbf{x}$ y por tanto su distribución también depende de $\mathbf{x}$; es decir, la distribución de $\boldsymbol{\eta}$ depende de la decisión que se tome. Si esto es así, entonces resulta natural tratar de seleccionar una $\mathbf{x}$ que de lugar a una distribución *"ventajosa"* para $\boldsymbol{\eta}$. Aquí viene la pregunta obvia: ¿qué significa "ventajosa"? Responder esta pregunta no es fácil, pero una posible respuesta se fundamenta en un concepto que a continuación se introduce.

Sea la función $\rho : \mathbb{R}^s \supset \Theta \to \mathbb{R}$. Con esta función se van a *evaluar* vectores aleatorios. Θ es un espacio lineal de vectores aleatorios definidos en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$. Este espacio lineal puede ser el espacio de vectores aleatorios con primer momento finito, puede ser el espacio de vectores aleatorios con segundo momento finito o bien algún otro espacio lineal donde los vectores aleatorios cumplan alguna propiedad deseable de acuerdo con las necesidades del modelo.

Así pues, si $\boldsymbol{\gamma} \in \Theta$, entonces $\rho(\boldsymbol{\gamma})$ "evalúa" al vector $\boldsymbol{\gamma}$. ¿Cómo evalúa ρ a $\boldsymbol{\gamma}$?, depende del contexto. Si ρ representa riesgo, entonces es conveniente considerar los valores más pequeños de ρ, de hecho la forma de interpretar a ρ depende mucho de la forma en que se modela el problema. Cuando ρ mide riesgo, se dice que ρ es una *función de riesgo.*

Una vez seleccionada la función ρ, se definirá una *función de evaluación.* El vector de variables de decisión $\mathbf{x}$ será "evaluado" usando ρ. Considerando que $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})$, se define la función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sustituyendo:

$$V(\mathbf{x}) := \rho(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta})) \tag{5.8}$$

Definida de esta forma, V siempre depende del valor del vector $\boldsymbol{\eta}$; sin embargo en muchas ocasiones conviene trabajar cada restricción por separado. Esto es, si $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ entonces se obtendrá una función de riesgo para cada η_i de modo que se obtiene una función de evaluación por cada entrada del vector $\boldsymbol{\eta}$, de esta forma se define $V_i(\mathbf{x}) := \rho(\eta_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}))$ para $i = 1, \ldots, s$.

Con esta nueva herramienta a la mano, es posible replantear el problema (5.7) tomando en cuenta la función de evaluación. De acuerdo con la naturaleza del problema, es posible

[10] Si fuera posible encontrar una $\mathbf{x}$ que cumpliera todas las restricciones, sin importar el valor de $\boldsymbol{\zeta}$ entonces se debe dudar seriamente de la genuina aleatoriedad del problema o de la exactitud del modelo.

reescribir (5.7) en alguna de las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} &max\ \mathbf{cx} \\ &V(\mathbf{x}) \geq \kappa \\ &\mathbf{x} \in B \end{aligned} \tag{5.9a}$$

o bien:

$$\begin{aligned} &max\ \mathbf{cx} \\ &V_i(\mathbf{x}) \geq \kappa_i \quad i = 1, \ldots, s \\ &\mathbf{x} \in B \end{aligned} \tag{5.9b}$$

los valores de κ en (5.9a) y de κ_i, $i = 1, \ldots, s$ en (5.9b) son determinados a conveniencia.

El problema de seleccionar una función de evaluación adecuada no es una tarea fácil, ya que existe la posibilidad de seleccionar una infinidad de funciones para un mismo problema y cada una tendrá sus ventajas y desventajas.

Hasta el momento se ha trabajado con dos tipos de funciones de evaluación. La más simple de ellas se define usando la función de riesgo:

$$\rho_{\mathbb{E}}(\gamma) = \mathbb{E}[\gamma]$$

La función de evaluación que se obtiene es $V(x) = \rho_{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})]$. O bien, trabajando con cada entrada de $\boldsymbol{\eta}$, se tiene $V_i(x) = \rho_{\mathbb{E}}(\eta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{E}[\eta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})]$.

En este contexto, nótese que el problema (5.5) es equivalente al problema (5.9b), basta con hacer $\kappa_i = 0$ y $V_i(\mathbf{x}) = \rho_{\mathbb{E}}(\eta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}))$. En efecto:

$$\rho_{\mathbb{E}}(\eta_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{E}[\eta_i] = \mathbb{E}[\mathbf{g}_{i\cdot}\mathbf{x} - h_i] = \overline{\mathbf{g}}_{i\cdot}\mathbf{x} - \overline{h}_i \quad i = 1, \ldots, s,$$

donde $\mathbf{g}_{i\cdot}$ es el i-ésimo renglón de la matriz $\mathbf{G}$ y h_i es la i-ésima entrada del vector $\mathbf{h}$. Evidentemente, si $\kappa_i = 0$ entonces $V_i(x) \geq 0$ es otra forma de decir que $\overline{\mathbf{g}}_{i\cdot}\mathbf{x} \geq \overline{h}_i$. Al final se obtiene el problema:

$$\begin{aligned} &min\ \ \mathbf{cx} \\ &\overline{\mathbf{g}}_{i\cdot}\mathbf{x} \geq \overline{h}_i \quad i = 1, \ldots, s. \\ &\mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.10}$$

que como se anticipó, es equivalente a (5.5).

Considérese ahora la función de riesgo:

$$\rho_{\mathbb{P}}(\gamma) = \mathbb{P}(\gamma \geq 0)$$

Dada esta función de riesgo, la función de evaluación toma la forma $V(\mathbf{x}) = \rho_{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0) = \mathbb{P}(\mathbf{Gx} \geq \mathbf{h})$. Esta función de evaluación da lugar al siguiente problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} &min\ \ \mathbf{cx} \\ &\mathbb{P}(\mathbf{Gx} \geq \mathbf{h}) \geq \kappa \\ &\mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Obsérvese que los problemas (5.11) y (5.6) son exactamente iguales.

Como es de esperarse, las funciones de evaluación no terminan aquí, tal como se mencionó anteriormente, las posibilidades son infinitas, de hecho la función de evaluación que se utiliza está muy ligada al problema específico que desea resolver.

En lo sucesivo se estudiarán algunas funciones de evaluación que son útiles en finanzas. Como se verá, todas ellas tienen elementos valiosos que aportar.

Para empezar considérese que X es una variable aleatoria; los valores negativos de X representan pérdidas en un portafolio y los valores positivos representan ganancias. Si lo que se necesita es medir las pérdidas potenciales, resulta conveniente trabajar con la variable aleatoria:

$$X^{-}(\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{g}\boldsymbol{\omega} - h)^{-} \tag{5.12}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{w}^T$,[11] a partir de este momento el vector $\mathbf{x}$ será considerado como $\boldsymbol{\omega}$ (vector de dimensión $n \times 1$), ya que lo que se desea es encontrar el vector de posiciones individuales $\boldsymbol{\omega}$ que optimice el portafolio de inversión; $y^{-} = max\,(0, -y)$, es decir y^{-} es la parte negativa de y, nótese que y^{-} es siempre *no* negativa.

Ahora bien, considérese la siguiente función de riesgo:

$$\rho(\gamma) = Var(\gamma) = \mathbb{E}\left[(\gamma - \mathbb{E}(\gamma))^2\right]$$

a partir de lo anterior y dado un vector de decisión $\boldsymbol{\omega}$, la función de evaluación que se obtiene es la Varianza:

$$V(\boldsymbol{\omega}) = Var(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) - \mathbb{E}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})))^2\right]$$

Aún cuando la varianza se ha utilizado para la medición de riesgos, el uso de esta medida conlleva a limitaciones al ser incapaz de detectar las diferencias entre las probabilidades de ocurrencia de valores extremos de las distribuciones. El desarrollo para optimización de este problema (*Minimización de la Varianza*), ha sido desarrollado en la parte del Modelo de Harry Markowitz (5.3.2.).

Por otro lado si se usa a la función de evaluación $V(\boldsymbol{\omega})$ definida por la función de riesgo $\rho_{\mathbb{P}}(\gamma) = \mathbb{P}(\gamma > 0)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\omega}) &= \mathbb{P}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \leq 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X^{-}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0) \\ &= 1 - \mathbb{E}\left[1_{\{X^{-}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0\}}\right] \end{aligned}$$

es decir:

$$V(\boldsymbol{\omega}) \geq \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[1_{\{X^{-}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0\}}\right] \leq 1 - \kappa \tag{5.13}$$

Esta equivalencia se puede usar para replantear el problema (5.11) en términos de las pérdidas potenciales del portafolio y como un problema de maximización:

$$\begin{aligned} &max \;\; \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ &\mathbb{E}\left[1_{\{X^{-}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq 0\}}\right] \leq 1 - \kappa \\ &\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.14}$$

[11] Capítulo 2, Método Delta-Normal.

En problemas financieros es más natural tratar de maximizar la función objetivo, es decir, lo lógico es que la función objetivo represente la ganancia promedio de un portafolio y por lo tanto lo deseable es buscar maximizar esta función. Por otro lado se puede interpretar a la variable de decisión ω_i como el porcentaje total de la riqueza, invertido en el activo i-ésimo de un portafolio constituido por n activos. Como ya se mencionó, X^- representa las pérdidas potenciales de un portafolio, en este sentido, la primera restricción del problema busca limitar tales pérdidas. La esperanza que aparece en la restricción calcula la probabilidad de pérdida y dicha probabilidad esta acotada por $1-\kappa$. En estas condiciones es evidente que se debe fijar κ en niveles elevados, cercanos a uno. Finalmente la restricción $\boldsymbol{\omega} \in B$ puede ser una restricción tan simple como $\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega} = 1$, con esta restricción se garantiza que se invertirá la totalidad de los recursos.

Ahora bien, este problema tiene una falla importante y es que sus restricciones solamente buscan limitar la probabilidad de pérdida. El problema es que si en verdad ocurre una pérdida, no se tendrá control alguno sobre la magnitud de la misma, es decir, el modelo no distingue entre pérdidas pequeñas y pérdidas catastróficas.

La primera variante que busca resolver este problema se da a continuación:

$$\begin{gathered} max \;\; \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ \mathbb{E}\left[X^-(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})\right] \leq \psi \\ \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{gathered} \tag{5.15}$$

en este nuevo modelo la pérdida esperada $\mathbb{E}\left[X^-(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})\right]$ se acota con ψ, siendo un límite preestablecido.

Un problema prácticamente equivalente a (5.15) se obtiene usando la función de riesgo:

$$\rho = \mathbb{E}\left[-\gamma \mid \gamma < 0\right]$$

es decir:

$$\begin{gathered} max \;\; \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ \mathbb{E}\left[-X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) \mid X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) < 0\right] \leq \psi \\ \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{gathered} \tag{5.16}$$

En este problema, se calcula la pérdida esperada, dado que efectivamente hubo pérdida.

Aunque este último modelo de algún modo ya incorpora la magnitud de la pérdida, no es lo último que se puede hacer.

Antes de continuar nótese que en la medida de riesgo anterior se expresan las pérdidas de forma positiva. Esta es una costumbre muy popular en el medio financiero, por esta razón en lo subsecuente se considerará que los valores positivos de X representan pérdidas y los valores negativos representan ganancias, este es un pequeño cambio de enfoque que facilitará un poco el análisis.

La siguiente medida de riesgo es quizá la más conocida del medio financiero:

$$\rho_{\mathrm{VaR}}^{1-q}(\gamma) = inf \;\; \{y \mid F_\gamma(y) \geq 1-q\} \tag{5.17}$$

donde $1-q$ es el nivel de confianza.[12] La función de evaluación que se obtiene a partir de esta función de riesgo es muy evidente. Dado un vector de decisión $\boldsymbol{\omega}$, la función de evaluación que se obtiene es el VaR:

$$V(\boldsymbol{\omega}) = VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})) = \rho_{\mathrm{VaR}}^{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})) = inf \;\; \left\{y \mid F_{X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})}(y) \geq 1-q\right\}$$

[12] Capítulo 2.

efectivamente, el VaR es una medida bastante apropiada para el problema en estudio; es capaz de controlar simultáneamente el monto de la pérdida y la probabilidad de pérdida. Esto es, en el problema:

$$\begin{aligned} max \quad & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ VaR_{1-q}\left((X\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})\right) & \leq \psi \\ \boldsymbol{\omega} & \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.18}$$

se tiene la libertad de seleccionar la probabilidad de pérdida a través de $1-q$ y limitar el monto de la pérdida a través de ψ.

5.4.1 Optimización del CVaR

El VaR es sin duda la medida de riesgo más popular entre los administradores de riesgo; sin embargo no es la panacea. El último modelo que se estudiará es una mezcla de (5.16) y (5.18). El modelo tomará al VaR como parte constituyente.

Considérese la función de riesgo definida como sigue:

$$\rho_{CVaR}^{1-q}(\gamma) = \mathbb{E}\left[\gamma \middle| \gamma \geq VaR_{1-q}(\gamma)\right]$$

La medida de evaluación que se deriva de esta función de riesgo es el *Valor en Riesgo Condicional* o $CVaR$:

$$V(\boldsymbol{\omega}) = CVaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbb{E}\left[X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \middle| X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) \geq VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}))\right]$$

Con esta medida, se obtiene el siguiente problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} max \quad & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ CVaR_{1-q}\left(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})\right) & \leq \psi \\ \boldsymbol{\omega} & \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.19}$$

El CVaR es una función de evaluación aún más ambiciosa que el VaR, ya que ejerce un mayor control sobre el monto de la pérdida. De hecho según la axiomática de Artzner y Delbaen esta medida es una medida "‘coherente”. El CVaR busca evaluar las pérdidas esperadas que están más allá del VaR. Más aún, como se verá más adelante, al momento de buscar las soluciones óptimas del problema (5.19), se encontrará que el CVaR cumple condiciones muy deseables en todo problema de optimización.

Antes de continuar conviene trabajar un poco con el CVaR a fin de obtener una expresión más manejable. Sea entonces, ν una variable aleatoria y sea F_ν su función de distribución. Además, dado $0 < 1-q < 1$ se denota como z_q al cuantil de la distribución de ν. Se tiene entonces que $1 - q = \mathbb{P}(\nu < z_q) < 1$ y por tanto $q = \mathbb{P}(\nu \geq z_q) > 0$. De aquí se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\nu | \, \nu \geq z_q\right] &= \frac{1}{\mathbb{P}(\nu \geq z_q)} \int_{z_q}^{\infty} t dF_\nu(t) \\
&= \frac{1}{q} \int_{z_q}^{\infty} (t - z_q + z_q) dF_\nu(t) \\
&= \frac{1}{q} \left\{ \int_{z_q}^{\infty} (t - z_q) dF_\nu(t) + z_q \int_{z_q}^{\infty} dF_\nu(t) \right\} \\
&= \frac{1}{q} \left\{ \int_{z_q}^{\infty} (t - z_q) dF_\nu(t) + z_q q \right\} \\
&= z_q + \frac{1}{q} \int_{z_q}^{\infty} (t - z_q) dF_\nu(t) \\
&= z_q + \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} (t - z_q)^+ \, dF_\nu(t) \\
&= z_q + \frac{1}{q} \mathbb{E}\left[(t - z_q)^+\right]
\end{aligned}$$

Utilizando este hecho se reescribirá el CVaR de una variable aleatoria γ como se muestra a continuación:

$$CVaR_{1-q}(\gamma) = VaR_{1-q}(\gamma) + \frac{1}{\mathbb{P}(\gamma \geq VaR_{1-q}(\gamma))} \mathbb{E}\left[(\gamma - VaR_{1-q}(\gamma))^+\right] \tag{5.20}$$

Obsérvese que esta igualdad resulta bastante natural después de reacomodar un poco los términos:

$$\left(CVaR_{1-q}(\gamma) - VaR_{1-q}(\gamma)\right) \mathbb{P}(\gamma \geq VaR_{1-q}(\gamma)) = \mathbb{E}\left[(\gamma - VaR_{1-q}(\gamma))^+\right]$$

el término de la derecha no es más que un término correctivo, si se interpreta en el contexto de la ecuación (5.20) se tiene que éste no es más que el excedente esperado después del VaR.

Por razones que más adelante serán obvias se cambiará la función objetivo y en lugar de maximizar $\mathbf{c}\boldsymbol{\omega}$ se minimizará $\mathbf{c}\boldsymbol{\omega}$. Este no es un cambio significativo si se considera que el problema maximizar f es equivalente al problema minimizar $-f$.

Dada la nueva expresión obtenida para el CVaR en (5.20) se replantea el problema (5.19):

$$\begin{array}{ll}
min \;\; \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} & \\
VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) - VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})))^+\right] & \leq \psi \\
 & \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B}
\end{array} \tag{5.21}$$

A primera vista, este problema no luce muy fácil de resolver; sin embargo cumple algunas propiedades que facilitan considerablemente su solución. Para explotar estas propiedades es necesario un poco de trabajo previo.

Dada un variable aleatoria ν considérese la función:

$$f(y) = y + \frac{1}{q} \mathbb{E}\left[(\nu - y)^+\right]$$

Obsérvese que la función $(\nu - y)^+$ es una función convexa de y y al encontrar su esperanza no se pierde la convexidad. Tampoco se pierde convexidad al multiplicar por $1/q$ y sumar y. Es decir la función $f(y)$ es convexa. Por lo tanto, el problema de optimización:

$$\min_y \left(y + \frac{1}{q} \mathbb{E}\left[(\nu - y)^+\right] \right) \tag{5.22}$$

tiene solución y de hecho esta solución es global.

Por otro lado, usando integración por partes se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_y^s (t-y)dF_\nu(t) &= (t-y)F_\nu(t)|_y^s - \int_y^s F_\nu(t)dt \\ &= -(s-y)(1-F_\nu(s)) + \int_s^y (1-F_\nu(t))dt \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\nu - y)^+] &= \int_y^\infty (t-y)dF_\nu(t) \\ &= \lim_{s\to\infty} \int_y^s (t-y)dF_\nu(t) \\ &= \lim_{y\to\infty} \left\{ -(s-y)(1-F_\nu(s)) + \int_s^y (1-F_\nu(t))dt \right\} \\ &= \int_y^\infty (1-F_\nu(t))dt \end{aligned}$$

es necesario que $\mathbb{E}[X]$ exista,[13] de otro modo la última igualdad no necesariamente es cierta.

Tomando este resultado se reescribe f de la siguiente manera:

$$f(y) = y + \frac{1}{q}\int_y^\infty (1-F_\nu(t))dt \tag{5.23}$$

Dada esta nueva expresión para f, el problema (5.22) se traduce a:

$$\min_y \left\{ y + \frac{1}{q}\int_y^\infty (1-F_\nu(t))dt \right\} \tag{5.24}$$

Las buenas noticias vienen ahora, debido a la forma que f exhibe en (5.23) se deduce que f es diferenciable y como es convexa, basta encontrar un punto crítico de (5.23) para hallar el mínimo. Derivando f se obtiene que:

$$1 + \frac{1}{q}(1 - F_\nu(y)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_\nu(y) = 1 - q$$

Es decir, el óptimo de (5.24) se alcanza justamente en el cuantil z_q de F_ν. Para $\boldsymbol{\omega}$ fijo se tiene que:

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) - y)^+\right] \geq VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})) + \\ \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) - VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})))^+\right] \end{aligned} \tag{5.25}$$

[13]Que sea integrable.

por lo tanto:

$$VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) - VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta})))^{+}\right] \leq \psi$$

si y sólo si existe $y \in \mathbb{R}$ tal que:

$$y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) - y)^{+}\right] \leq \psi$$

usando este resultado para replantear el problema (5.21) de forma más conveniente:

$$\begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{\omega},y} & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) - y)^{+}\right] & \leq \psi \\ & \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{array} \tag{5.26}$$

Ahora bien, se sabe que f en (5.23) es convexa, de aquí se sigue que la primera restricción de este problema es convexa, el conjunto $\mathbf{B}$ es un conjunto poliédrico y por tanto es convexo con lo que concluimos que el problema (5.26) ¡es convexo!. Esta es una excelente noticia pues la teoría necesaria para resolver problemas convexos es la más completa y desarrollada.

Aunque es posible encontrar algoritmos eficientes para resolver el problema (5.26), aquí sólo se considerará una simplificación del problema. Supóngase que $\boldsymbol{\zeta}$ puede tomar sólo un número N finito de valores y que $\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta} = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) = p_k$. En tal caso el problema (5.26) toma la forma:

$$\begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{\omega},y} & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} \\ y + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{N} p_k \left(X(\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) - y\right)^{+} & \leq \psi \\ & \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{array} \tag{5.27}$$

este problema se pude linealizar introduciendo la variable $s_k = (X(\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) - y)^{+}$ y un par de restricciones adicionales. El problema:

$$\begin{array}{llllll} \min_{\boldsymbol{\omega},y} & \mathbf{c} & \boldsymbol{\omega} & & & \\ & & y + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{N} p_k s_k & \leq \psi & & \\ & X(\boldsymbol{\omega},\zeta_k) - y - & s_k & \leq 0 & k = 1,\ldots,N & \\ & & s_k & \geq 0 & k = 1,\ldots,N & \\ & \boldsymbol{\omega} & & \in \mathbf{B} & & \end{array} \tag{5.28}$$

es equivalente al problema (5.27). Finalmente sustituyendo el valor de $X(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{g}\boldsymbol{\omega} - h$ y reescribiendo el problema anterior en la forma equivalente:[14]

$$\begin{array}{lllll} \min_{\boldsymbol{\omega},y} & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} & & & \\ & y + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{N} p_k s_k & \leq \psi & & \\ \mathbf{g}_k\boldsymbol{\omega} - y - & s_k & \leq h_k & k = 1,\ldots,N & \\ & s_k & \geq 0 & k = 1,\ldots,N & \\ \boldsymbol{\omega} & & \in \mathbf{B} & & \end{array} \tag{5.29}$$

[14] Recordar los supuestos hechos en (5.4).

Este último es un problema lineal que puede ser resuelto a través de los métodos tradicionales de programación lineal.

Por último, también es razonable incluir el CVaR en la función objetivo. En este caso el problema que se desea resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} + CVaR(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) \\ \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.30}$$

Pero por (5.25) se sabe que:

$$\begin{aligned} CVaR(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) &= VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) - VaR_{1-q}(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta})))^+\right] \\ &= \min_y \left\{ y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) - y)^+\right] \right\} \end{aligned} \tag{5.31}$$

por lo tanto (5.30) es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} + \min_y \left\{ y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) - y)^+\right] \right\} \\ &\quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.32}$$

o bien:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\omega}, y} \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} + y + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left[(X(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) - y)^+\right] \\ &\quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Este problema también es un problema convexo, que se puede resolver con las técnicas de la programación convexa.

Si $\boldsymbol{\zeta}$ sigue la misma distribución que en el problema (5.29) es posible simplificar significativamente el problema. Aprovechando la distribución discreta para escribir el problema se tiene:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\omega}, y} \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} + y + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{N} p_k \left(X(\boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k) - y \right)^+ \\ &\quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Para linealizar el problema, nuevamente se utilizarán las variables s_k y las restricciones adicionales que fueron incluidas en (5.29) lo cual permite replantear el problema:

$$\begin{array}{lllll} \min_{\boldsymbol{\omega}, y} & \mathbf{c}\boldsymbol{\omega} & y + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{N} p_k s_k & & \\ & \mathbf{g}_k\boldsymbol{\omega} - y - & & s_k \leq h_k & k = 1, \ldots, N \\ & & & y_k \geq 0 & k = 1, \ldots, N \\ & \boldsymbol{\omega} & & \in \mathbf{B} & \end{array} \tag{5.35}$$

Este problema también puede ser resuelto a través de la técnicas tradicionales de la programación lineal.

Conclusiones

Las instituciones financieras necesitan medir los niveles de reservas para cubrir los riesgos de solvencia y de sus operaciones, por esta razón durante años numerosas instituciones han realizado investigaciones para gestionar los riesgos a los que se ven sometidos.

A lo largo de este trabajo de tesis se han mencionado varios métodos para el cálculo del VaR, cada uno de estos tienen ciertas ventajas y desventajas que se pueden aprovechar para ampliar, mejorar o adecuar alguno de estos a las necesidades particulares de cada institución.

Como se ha observado, el VaR es una herramienta útil si se usa adecuadamente, es decir, tiene una valiosa aplicación siempre y cuando se tenga claro los alcances y limitaciones de este modelo. El VaR puede ser visto como una herramienta novedosa, versátil y muy flexible para el adecuado control de los riesgos de mercado; complementa oportunamente a un sistema adecuado de supervisión financiera para cualquier institución, permitiendo tomar medidas correctivas de forma adecuada en caso de movimientos adversos en las variables financieras.

Esta metodología ha revolucionado la medición y aceptación de los riesgos; sin embargo aquí no termina todo, es sólo el comienzo ya que la naturaleza de los riesgos y el de las empresas es cambiante, son fenómenos dinámicos. Al realizar la medición de riesgo no se tiene la eliminación de este, sino la prevención y las medidas a tomar para que los eventos no sean catastróficos; el hecho se saber que se está expuesto al riesgo hace que sea más fácil de medir.

Al representar los Acuerdos de Basilea II un gran reto para las instituciones financieras, los departamentos de riesgo tendrán nuevas responsabilidades y demandarán personal con mayor formación académica, que enfatice los aspectos de modelado y valuación matemática del riesgo; así mismo se beneficiarán a los investigadores y a los productores de software financiero, quienes deberán responder con nuevas metodologías, susceptibles de implementarse en forma eficiente y flexible, para el tratamiento de cada uno de los riesgos.

El interés que despiertan en el Comité de Basilea no es más que el comienzo de un largo proceso de desarrollo y perfeccionamiento. La posibilidad de la adopción de un sistema de regulación orientado en mayor medida a los procesos plantea importantes consideraciones a las autoridades reguladoras.

El Comité de Basilea reconoce que las técnicas de Backtesting aún están evolucionando, de tal manera que se ha comprometido a incorporar nuevos desarrollos en ésta área y en el sistema.

Debido a la incertidumbre y el riesgo que existe en los mercados financieros, las instituciones financieras se han visto en la necesidad de ser más exigentes en sus procesos de administración de riesgos, es por ello que lo más conveniente es que se considere como base una *Medida Coherente de Riesgo*, tal como el Valor en Riesgo Condicional.

Hasta ahora sólo unas pocas instituciones del mundo poseen sistemas internos de gestión de riesgos suficientemente avanzados como para satisfacer los requisitos que demandan los mercados financieros. Si bien las prácticas de administración internacional pueden contribuir a que las instituciones sean bien gestionadas y ofrezcan mayor seguridad a los clientes y a la economía en general, también es importante reconocer que estas prácticas se deben adaptar a las circunstancias de cada país.

Cabe señalar que el presente trabajo de tesis abre la posibilidad para el inicio de nuevas investigaciones sobre procesos y métodos para el análisis y la valuación del riesgo de mercado, permitiendo así que cada vez los resultados sean más apegados a los procesos reales de los mercados financieros. Aún cuando pudiera parecer difícil la manipulación del modelo para la optimización del Valor en Riesgo Condicional, esto puede facilitarse al utilizar mecanismos adecuados, así como la aplicación de variables discretas.

Finalmente, es importante aclarar que este trabajo de investigación no pretende abarcar la totalidad de las metodologías relacionadas con el riesgo de mercado, sólo intenta generar un marco general acerca de las aplicaciones de estos temas; sin embargo, existen extensiones de los modelos mencionados, las cuales permiten integrar el comportamiento de otras variables en el análisis.

Glosario

Activo
Cualquier bien tangible o intangible de valor que posee una institución o empresa.

Arbitraje
Operación que tiene por objeto asegurar una ganancia sin riesgo al realizar transacciones simultáneas de compra-venta en dos o más mercados, aprovechando el diferencial de precios. Este tipo de oportunidades no duran por mucho tiempo debido a las fuerzas de oferta y demanda.

Benchmark
Portafolio de referencia.

BIS (Bank for International Settlements)
Organización internacional que fomenta la cooperación monetaria y financiera a escala internacional, también realiza la función de banco para los bancos centrales. El BIS empezó a funcionar el 17 de mayo de 1930 en Basilea, de manera que es la organización financiera internacional más antigua del mundo. Esta organización actúa como:

- Centro de investigación económica y monetaria.
- Entidad de contrapartida para las transacciones financieras de los bancos centrales.
- Foro para promover y facilitar los procesos de adopción de decisiones entre bancos centrales y la comunidad financiera internacional.

El Departamento Monetario y Económico del BIS lleva a cabo tareas de investigación, especialmente sobre cuestiones monetarias y financieras, como refuerzo a las actividades de los grupos. Por otro lado, el BIS ofrece un conjunto de servicios bancarios, creados específicamente para apoyar a los bancos centrales en la gestión de sus reservas en divisas y en oro; al mismo tiempo, realiza actividades bancarias y gestión de fondos para instituciones financieras internacionales.

Cobertura
Un método para reducir el riesgo financiero, mediante la adquisición de una posición en un instrumento que compensa, ya sea parcial o enteramente, el riesgo en otra posición que se tiene o se anticipa se tendrá.

Correlación
Grado de relación lineal que existe entre los diferentes factores de riesgo en un periodo de

tiempo. La correlación se encuentre entre -1 y 1 y se determina de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre los activos i y j, $Cov(R_i, R_j)$ la covarianza entre los activos i y j, σ_i la volatilidad del activo i y σ_j la volatilidad del activo j.

El signo positivo en el coeficiente de correlación significa que las dos variables se mueven en la misma dirección, mientras más cercano esté de la unidad, mayor será el grado de dependencia mutua. El signo negativo indica que las dos variables se mueven en sentidos opuestos. Así mismo mientras más cercano a cero sea el coeficiente de correlación, mayor será el grado de independencia de las variables.[12]

Covarianza
Es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias describiendo el movimiento conjunto entre éstas. Dichas variables para el caso de finanzas pueden ser los rendimientos de un portafolio. La covarianza se determina de acuerdo a la siguiente expresión:[12]

$$Cov(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^{n} \frac{(R_{i,t} - \overline{R}_i)(R_{j,t} - \overline{R}_j)}{n}$$

Curtosis
Mide el grado de suavidad de una distribución, en el caso que se tenga una distribución leptocurtósica se caracteriza por tener colas más anchas que las de una distribución normal y con gran concentración de observaciones (transacciones) alrededor de la media.

Distribución exponencial
Una variable aleatoria X se dice que se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda > 0$, si tiene función de densidad de probabilidad:[33]

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

La media, la varianza, así como la función de distribución de una exponencial están dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad ; \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Distribución normal o de campana
Una distribución normal está definida por una curva simétrica en forma de campana. Esta curva fue propuesta por De Moire, así como también está relacionada con los estudios realizados por Pierre Laplace y Carl Gauss.

Esta distribución tiene un papel muy importante en cualquier campo de la estadística y en particular en la medición de riesgos en finanzas, ya que con sólo dos parámetros: la media (μ) y la desviación estándar(σ), se pueden explicar las características de la distribución de los cambios en los factores de riesgo; en un portafolio de inversión la media es el rendimiento promedio y la desviación estándar la volatilidad; otros indicadores importantes que la definen son el sesgo y la curtosis. La curva normal está centrada alrededor de la media y la variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar. La ecuación de la distribución, así como la manera en que se representa son:[12]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Un caso particular de la distribución normal supone que la media es cero y la varianza 1, a esta distribución se le denomina distribución normal unitaria o estándar.

Distribución uniforme
Una variable aleatoria X se dice que está uniformemente distribuida sobre el intervalo (a, b), si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Esta distribución es de gran utilidad en la modelación de eventos equiprobables sobre un intervalo de medida finita de $\mathbb{R}$.[33] La media, la varianza, así como la función de distribución de una uniforme están dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad ; \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Espacio de probabilidad
Sea Ω un espacio muestral y $\Im \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio $(\Omega, \Im)$ si:

$$\mathbb{P} : \Im \to [0, 1]$$

Si ahora se tiene el espacio conformado por $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ entonces se le denominará espacio de probabilidad. $\mathbb{P}(\cdot)$ al ser una medida de probabilidad cumple:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbb{P}(\oslash) = 0$
2. Para todo evento A se tiene que $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ además $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Si A y B son eventos tales que $A \subseteq B$ entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ ajenos, es decir, $A_i \cap A_j = \oslash$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Especular
La especulación, implica comprar o vender en el mercado sin tener una posición en algún subyacente; la especulación es lo contrario a una cobertura, ya que se incrementa el riesgo, sin embargo permite que aparezca un incremento en los beneficios. El especulador es la persona física o moral (institución) que no desea cubrir sus riesgos, pero compra y vende contratos con la finalidad de obtener una utilidad anticipando el movimiento del mercado o realizando arbitrajes; es el receptor del riesgo, que no desea cubrirse, generando gran liquidez en el mercado.

Factor de Riesgo
Parámetro cuyos cambios en los mercados financieros causarán un cambio en el valor de mercado de un portafolio de inversión; los factores de riesgo más comunes son: precios de las

acciones, tasas de interés, sobretasas en instrumentos de mercado de dinero, tipos de cambio, precios de materias primas, etc.[12]

Fluctuación
Rango de variación de un determinado valor, diferencia en el precio de un título respecto a un promedio o a un precio base.

Histograma
Tabla o gráfica de barras que muestra una distribución de probabilidades; todas las probabilidades del histograma totalizan un 100 %.

Instrumento financiero derivado
Instrumento financiero cuyo precio depende del valor de un activo, comúnmente denominado bien o activo subyacente. Su finalidad es reducir el riesgo que resulta de movimientos inesperados en el precio del bien subyacente entre los participantes que quieren disminuirlo y aquellos que desean asumirlo. Los productos derivados internacionales son: opciones, futuros, forwards, swaps y las combinaciones entre estos. Las posiciones de riego en productos derivados en las instituciones constituyen una de las máximas preocupaciones, ya que son instrumentos con alto grado de apalancamiento financiero, lo cual puede provocar importantes pérdidas inesperadas. La idea básica de un derivado financiero es comprar un seguro que cubra los activos arriesgados en el mercado, es decir, encontrar participantes en el mercado que traten de compartir los riesgos y los beneficios de los desarrollos futuros en el mercado en el que están sometidos a la incertidumbre.[12]

Matriz definida positiva
Una matriz cuadrada simétrica A es definida positiva sí y sólo si para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq 0$, $x^tAx > 0$; además todas las entradas de su diagonal deben ser positivas y el mayor elemento de la matriz debe estar en la diagonal.

Media poblacional
Sea una muestra aleatoria de n observaciones $X_1, X_2, ..., X_n$ de una población normal con media μ y desviación estándar σ, entonces la media poblacional está dada por:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Mercado spot
Mercado en el que la entrega y pago del bien negociado se efectúan al momento de la concentración. El precio al cual se negocian los bienes se conoce como precio spot o de contado.

Mercado OTC
El mercado over-the-counter es una alternativa a los mercados organizados, las operaciones se realizan por teléfono entre instituciones financieras o clientes corporativos, de tal forma que las transacciones entre los participantes se establecen de acuerdo a sus necesidades.

Números aleatorios independientes
Cada número es obtenido por casualidad y no tiene ninguna relación con otros números de

la serie.

Plain Vanilla
Forma de denominar a los instrumentos financieros que presentan las estructuras más comunes.

Portafolio de inversión
Combinación particular de diferentes instrumentos financieros (Cetes, bonos, productos derivados, etc.). Para formar un portafolio, es necesario conocer las posiciones tomadas en cada activo bajo consideración; la posición tomada en el activo i será representada por w_i, de tal manera que si w_i es positivo implica una posición larga en el instrumento y un w_i negativo una posición corta, si un activo no está incluido en el portafolio el correspondiente w_i es cero.

Posición corta
Dentro de un contrato, se considera que alguien tiene una posición corta cuando funciona como la parte vendedora.

Posición larga
Dentro de un contrato, se considera que alguien tiene una posición larga cuando funciona como la parte compradora.

Precio de mercado
Precio que el mercado estaría dispuesto a pagar por un instrumento financiero en un momento determinado; este valor dependerá de las condiciones del mercado.

Precio justo
El precio de un instrumento financiero es justo, o el instrumento está correctamente valuado cuando no existen oportunidades de arbitraje.

Proceso estocástico
Un proceso estocástico en tiempo continuo, $\{X_t\}_{t\geq 0}$, es una colección de variables aleatorias reales definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, donde x_t representa el valor del objeto descrito por el proceso en el momento t. Estos procesos son fundamentales en la teoría financiera ya que describen fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, tale como el precio de las acciones, el valor de un portafolio, etc.

Proceso de simulación
Ejecución del modelo a través del tiempo en un ordenador para generar muestras representativas del comportamiento.

Rendimiento
El rendimiento de un instrumento financiero o de un portafolio es el beneficio que produce una inversión, es el cambio de valor que registra en un periodo de tiempo con respecto a su valor inicial:[12]

$$R = \frac{\Delta Valor}{Valor_{pasado}} = \frac{Valor_{actual} - Valor_{pasado}}{Valor_{pasado}}$$

El rendimiento anualizado y expresado porcentualmente respecto a la inversión se denomina tasa de rendimiento.

Los rendimientos pueden ser expresados ya sea de manera aritmética o geométrica, tal es así que el más directo es el rendimiento aritmético, definido como:

$$R_t^A = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

donde P_t es el precio del activo al momento t, P_{t-1} es el precio del activo en un periodo anterior y D_t es cualquier pago provisional (dividendo) al tiempo t. Esta expresión tiene sentido, sin embargo tiene la desventaja de que frecuentemente existe la posibilidad de que los rendimientos sean menores al $-100\,\%$, cuando se modelan ajustando la función de densidad de probabilidad. De esta manera se tiene una alternativa al usar el modelo geométrico:

$$R_t^G = ln\left[\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right]$$

La forma geométrica tiene ciertas ventajas sobre el modelo aritmético: cuando los rendimientos son ajustados con cualquier función de probabilidad de densidad este modelo respeta la restricción de que los rendimientos no pueden ser menores al $-100\,\%$, así como también es posible realizar los cálculos de manera más sencilla.

En la práctica la diferencia entre estas dos medidas es frecuentemente muy pequeña, notemos que:

$$R_t^G = ln\left[\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right] = ln(1 + R_t^A)$$

Si R_t^G es pequeño, entonces se puede tomar una aproximación con la serie de Taylor de R_t^G:

$$R_t^G = R_t^A + \frac{(R_t^A)^2}{2} + ...$$

el cual es aproximadamente R_t^A si el último término es lo suficientemente pequeño, lo cual ocurre usualmente cuando se están manejando periodos de tiempo tan cortos como un día; siendo de esta manera ambos rendimientos bastante semejantes.[14]

Reversión a la media

Concepto relacionado con las fluctuaciones de los precios, que se observa en los mercados organizados, en donde sin importar si los instrumentos (que cotizan en dichos mercados) están sobrevaluados o subvaluados, siempre habrá una fuerza natural que presione a los precios a retomar un valor justo.

Riesgo

La palabra riesgo proviene del latín *risicare* que significa *atreverse*. En finanzas, el concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes (inversionistas, deudores o entidades financieras) en los mercados financieros. El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros, ante movimientos adversos de los factores que determinan su precio; a mayor incertidumbre mayor riesgo.

Riesgo accionario

Los riesgos de precio relacionados con las acciones normalmente se clasifican en dos categorías:

el riesgo de mercado o sistemático y el riesgo único o no sistemático. El riesgo sistemático afecta a todas las acciones simultáneamente y por tanto no se puede reducir por diversificación con valores dentro del mismo mercado. El riesgo no sistemático es aquel que afecta a las acciones de una emisora particular y es posible reducirlo mediante la diversificación. La valuación del riesgo del precio de los bienes se debe llevar a cabo tomando en cuenta las características del mercado donde se operan y deben incluir tanto la información de precios históricos como un análisis de la demanda y oferta en dichos mercados con objeto de determinar el efecto de las fluctuaciones en los precios, sobre el valor de los activos de una institución.

Riesgo de crédito
El riesgo de crédito se refiere a la pérdida potencial que puede sufrir el poseedor de un portafolio de préstamos, instrumentos financieros o derivados, como consecuencia de que la contraparte no pueda cumplir con sus obligaciones financieras en las condiciones definidas en el contrato.[34]

Riesgo de liquidez
El riesgo de liquidez está relacionado con las pérdidas que puede sufrir una institución al requerir una mayor cantidad de recursos para financiar sus activos y cubrir los gastos de operación. Este tipo de riesgo se presenta generalmente en épocas de crisis financieras.[34]

Riesgo de mercado o de capital
El riesgo de mercado es la incertidumbre acerca de los rendimientos futuros de una inversión, como resultado de movimientos adversos en las condiciones de los mercados financieros. Posibilidad de que el valor presente neto de un portafolio se mueva adversamente ante cambios en las variables macroeconómicas que determinan el precio de los instrumentos.

Riesgo de tasas de interés
El riesgo de tasas de interés de un instrumento financiero es el potencial de cambio que existe en el valor presente de los flujos de efectivo futuros que resulta de las variaciones de las tasas de interés. La magnitud de este riesgo depende de la sensibilidad que tenga el valor del instrumento ante cambios en las tasas; en términos generales, los instrumentos de largo plazo son más sensibles a cambios en la estructura de tasas de interés que los de corto plazo.

Riesgo de tipo de cambio
El riesgo de tipo de cambio se puede definir como la incertidumbre ante cambios adversos en los tipos de cambio; la valuación de instrumentos denominados en moneda extranjera, requiere del conocimiento del comportamiento de los tipos de cambio spot y de las tasas de interés extranjeras. Una característica importante del riesgo de tipo de cambio en México es que existe una alta probabilidad de variaciones muy fuertes y rápidas. Otro factor importante es que cuando existen varias monedas en una cartera, el valor de estas no está perfectamente correlacionado, por lo cual es difícil tener una cobertura perfecta.

Riesgo operativo
Este tipo de riesgo es la incertidumbre relacionada con las pérdidas que resultan de sistemas y procedimientos inadecuados, falta de controles, anomalías en la infraestructura tecnológica, errores humanos o de administración, relaciones de negocios, así como factores externos y regulatorios.[34]

Sesgo
El sesgo es un indicador que mide la simetría en una determinada curva. En el caso de una curva correspondiente a una distribución normal perfecta, el sesgo será igual a cero, indicando que la distribución está centrada en la media. Si este es distinto de cero, la distribución estará sesgada hacia la derecha o hacia la izquierda, según el signo. La fórmula para el cálculo de este indicador es:[12]

$$Sesgo = \sum_{i=1}^{n} \frac{(R_i - \mu)^3}{(n-1)\sigma^{3/2}}$$

Simulación
Proceso de diseño y desarrollo de un modelo de determinado sistema con el propósito de conocer el comportamiento y evaluar ciertas estrategias.

Trayectoria muestral
Una trayectoria muestral es una posible realización de la evolución del proceso en el tiempo; el espacio muestral Ω es el conjunto de todas las trayectorias muestrales.

Variable aleatoria (estocástica)
Variable que sigue un comportamiento incierto a lo largo del tiempo; a dicho comportamiento se le denomina proceso estocástico clasificándose estos en: discretos (cambian sólo en fechas determinadas) y continuos (cambian en cualquier momento dentro de cierto rango). Una variable aleatoria X es una función definida sobre un espacio muestral Ω que asigna a cada $\omega \in \Omega$ un único número real $X(\omega)$, por consiguiente se tiene:

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad ; \quad w \mapsto X(w)$$

Una variable aleatoria X tiene *densidad de probabilidad* $f_X(x)$, si para todo $a < b$ es una función positiva, tal que:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

La distribución de una variable aleatoria X puede caracterizarse mediante su *función de distribución* definida como la probabilidad acumulada:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$$

Varianza muestral
Sea una muestra aleatoria de n observaciones $X_1, X_2, ..., X_n$ de una población normal con media μ y desviación estándar σ, entonces la varianza muestral es:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Bibliografía

[1] Alexander, C. *Volatility and correlation forecasting.* Wiley, 1996.

[2] Alexander, C. *Risk Management and Analysis. Volume 1: Measuring and modelling financial risk.*, first ed. John Wiley & Sons, Ltd., England, 1998.

[3] Aragonés, J. R., and Blanco, C. *Valor en Riesgo. Aplicación a la gestión empresarial.*, primera ed. Pirámide, España, 2000.

[4] Artzner, P., and Delbaen, F. Thinking coherently. *Risk Magazine 10*, 11 (Noviembre 1997).

[5] Artzner, P., Delbaen, F., and Heath, D. *A characterization of measures of risk.* Cornell University, New York, 1996.

[6] Best, P. *Value at Risk: a practical guide.* John Wiley and Sons, 1998.

[7] Bicksler, J., and Chen, A. An economic analysis of interest rate swaps. *Finance XLI*, 3 (Julio 1986).

[8] Cox, J., Ingersoll, J., and Ross, S. The relation between forward prices and future prices. *Financial Economics*, 9 (Diciembre 1981).

[9] Cox, J., and Rubinstein, M. *Options markets.* Prentice Hall, 1985.

[10] Cárdenas, J. Monte carlo within a day. *Risk Magazine 12* (Febrero 1999).

[11] Damodaran, A. *Corporate Finance. Theory and Practice.* John Wiley & Sons, Inc., US, 1997.

[12] de Lara Haro, A. *Medición y control de riesgos financieros.*, segunda ed. Limusa, México, 2002.

[13] Douglas, L. *Bond Risk Analysis. A guide to duration and convexity.* Institute of Finance, New York, 1990.

[14] Dowd, K. *Beyond Value at Risk.*, first ed. John Wiley & Sons, Ltd., England, 1998.

[15] Dowd, K. *Measuring Market Risk.*, second ed. John Wiley & Sons, Ltd., England, 2005.

[16] Dubofsky, D. A., and Miller, T. W. *Derivatives. Valuation and Risk Management.* Oxford University Press, US, 2003.

[17] Elton, E., and Gruber, M. *Modern portfolio theory and investment analysis.* John Wiley & Sons, Inc., 1991.

[18] Fabozzi, F. *Bond markets, analysis and strategies.*, second ed. Prentice Hall, 1993.

[19] Fabozzi, F. J. *Investment Management.*, second ed. Prentice Hall, US, 1998.

[20] Fong, G., and Lin, K. A new analytical approach to value at risk. *Portafolio Management* (Mayo 1999).

[21] Garman, M. Vardelta: understanding and using vardelta for risk management. *Risk Publications* (Octubre 1996).

[22] Hull, J. *Options, futures and other derivatives.*, third ed. Prentice Hall, 1997.

[23] Ingersoll, J. *Theory of financial decision making.* Studies in Financial Economics, 1987.

[24] Jarrow, R., and Oldfield, G. Forward contracs and futures contracs. *Financial Economics*, 9 (1981).

[25] Jorion, P. *Value at Risk. The new benchmark for managing financial risk.*, second ed. Mc Graw-Hill, US, 2001.

[26] Kupiec, P. Techniques for verifying the accuracy of risk management models. *Derivatives 3* (1995).

[27] Luenberger, D. G. *Investment Science.* Oxford University Press, US, 1998.

[28] Mina, J., and Xiao, J. Y. *Return to RiskMetrics:The Evolution of a Standard.* RiskMetrics, U.S., April 2001.

[29] Morgan, J. *Technical Document*, fourth ed. RiskMetrics, U.S., December 1996.

[30] Neftci, S. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.*, second ed. Academic Press, US, 2002.

[31] RiskMetrics. Risk management. a practical guide. *RiskMetrics Group* (August 1999), 156.

[32] RiskMetrics. Technical document. *RiskMetrics Group* (April 1999), 135.

[33] Ross, S. M. *Simulation.*, third ed. Academic Press, US, 2002.

[34] Sánchez, C. *Valor en Riesgo y otras aproximaciones.*, primera ed. Valuación Análisis y Riesgo, S.C., México, 2001.

[35] Wilmott, P., Howison, S., and Dewynne, J. *The Mathematics of Financial Derivatives. A student introduction.*, first ed. Cambridge University, US, 1999.