



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTROL ELÉCTRICO DE LA REFLEXIÓN INTERNA
TOTAL EN UNA CELDA HÍBRIDA NEMÁTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

RODRIGO DE LA TEJA SANTA CRUZ

TUTOR:

DR. CARLOS IGNACIO MENDOZA RUIZ

2007





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

| | |
|--|--|
| <p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad Carrera Número de cuenta</p> | <p>de la Teja Santa Cruz Rodrigo 56 09 10 54 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 09532438-8</p> |
| <p>2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p> | <p>Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz</p> |
| <p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p> | <p>Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes</p> |
| <p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p> | <p>Dr. Marcos Ley Koo</p> |
| <p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p> | <p>Dr. Jorge Alejandro Reyes Esqueda</p> |
| <p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p> | <p>Dra. María del Pilar Constanza Ortega Bernal</p> |
| <p>7. Datos del trabajo escrito Título Subtítulo Número de páginas Año</p> | <p>Control eléctrico de la reflexión interna total en una celda híbrida nemática 56 2007</p> |

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz por su paciencia, invaluable cariño e inquebrantable amistad; así como por su fe en mí y en la conclusión de éste trabajo.

Al Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes por su confianza y el otorgamiento de la beca para tesis dentro del proyecto CONACYT 41035-F. Muchas gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo brindado a través de los proyectos DGAPA-PAPIIT IN-107607 e IN-117606-3.

Al Instituto de Física y muy especialmente al Instituto de Investigaciones en Materiales por abrirme sus puertas permitiéndome desarrollar mis actividades dentro de sus instalaciones.

A todos los miembros del jurado, mi más profundo agradecimiento por sus comentarios y críticas; así como por la celeridad en la revisión del presente trabajo.

Índice General

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 2 |
| Introducción | 3 |
| 1. Los Cristales Líquidos | 6 |
| 1.1 Descripción..... | 6 |
| 1.2 Clasificación General..... | 7 |
| 1.3 Deformaciones Elásticas..... | 10 |
| 1.4 Propiedades Eléctricas..... | 11 |
| 1.5 Tipos de Celdas Nemáticas..... | 13 |
| 2. Celda Híbrida Nemática bajo la Acción de un Campo Eléctrico | 15 |
| 2.1 Descripción del Sistema..... | 15 |
| 2.2 Configuración de Equilibrio..... | 16 |
| 3. Propagación de la Luz en una Celda Híbrida Nemática | 21 |
| 3.1 Ecuaciones de Maxwell..... | 21 |
| 3.2 Modos de Representación TE y TM..... | 22 |
| 3.3 Incidencia de un Haz Luminoso..... | 24 |
| 3.4 Trayectoria del Haz..... | 26 |
| 4. Reflectancia de la Celda | 39 |
| 4.1 Ecuaciones de Fresnel..... | 39 |
| 4.2 Curvas de Reflectancia..... | 44 |
| Conclusiones | 52 |
| Bibliografía | 54 |

Resumen

En el presente trabajo, se determinó teóricamente la trayectoria de un haz de luz monocromático, que se propaga en el interior de una celda híbrida planar-homeotrópica de cristal líquido nemático. Dicha celda, se encuentra bajo la influencia de un campo eléctrico de baja frecuencia perpendicular a la misma; asimismo, se considera que el haz luminoso, posee polarización P y perfil gaussiano y que se propaga en el régimen de reflexión interna total.

Se calculó la reflectancia de la celda, y se aplicó el modelo desarrollado al cristal líquido nemático 5CB.

En el análisis del sistema, se toma en cuenta que la celda posee condiciones de frontera fuertes y que la intensidad del haz incidente no produce reorientación en el vector director del nemático (régimen de respuesta lineal).

Los resultados muestran que, tanto la reflectancia como el alcance y la penetración del rayo en la celda, exhiben una fuerte dependencia no trivial con la intensidad del campo eléctrico. Este fenómeno puede ser empleado en el diseño de diversos dispositivos electro-ópticos.

Introducción

El auge y desarrollo que han tenido las pantallas de cristal líquido (CL) en los últimos años han despertado un renovado interés, en particular en las propiedades ópticas de estos materiales, debido al gran potencial de aplicación tecnológica que poseen.

Desde el punto de vista físico, la óptica de los cristales líquidos no es un problema fácil de resolver ya que la propagación de luz en medios anisotrópicos e inhomogéneos, como lo son estos materiales, queda descrita por ecuaciones con coeficientes dependientes de las coordenadas, lo cual hace que estén acopladas a través del tensor dieléctrico del medio[1].

Por otra parte, se pueden inducir cambios en la orientación de las moléculas de un cristal líquido mediante la aplicación de campos externos[2]; lo cual permite variar la trayectoria de un haz luminoso al interior de una celda de dicho material[3]. Además, al confinar el CL entre dos superficies sólidas, es posible manipular el ángulo de sus moléculas respecto a la normal a dichas fronteras, mediante tratamientos químicos que modifican la interacción entre el cristal líquido y el sustrato[4].

Asimismo, se ha encontrado que para una celda híbrida planar-homeotrópica (celda en la que las moléculas del CL se encuentran orientadas con su eje largo de manera paralela a una de las superficies de confinamiento y de forma perpendicular en la otra superficie. Véase sección 1.5), se tiene una dependencia no trivial del alcance y la longitud de penetración de un rayo luminoso que se propaga en su interior, cuando le es aplicado un campo eléctrico de baja frecuencia perpendicular a la celda; este efecto, junto con la dispersión espacial de la luz, permite dilucidar fuertes posibilidades de aplicación en el desarrollo de interruptores ópticos y multiplexores[3].

Aunque si bien, no se tienen noticias de experimentos de propagación de luz en el régimen de reflexión interna total en celdas híbridas bajo la acción de campos eléctricos; es relevante mencionar, que existe el antecedente de los trabajos experimentales del Dr. José Alberto Olivares[4, 5], en los cuales se hacen mediciones de reflectancia para una celda híbrida pero sin la influencia de campos externos.

En este sentido, el propósito del presente trabajo, se centra en desarrollar un modelo teórico que permita determinar la reflectancia de una celda híbrida, sujeta a un campo eléctrico de baja frecuencia, por la cual se propaga un haz de luz monocromático en el régimen de reflexión interna total.

Para ello, en primer lugar se determinó la configuración de equilibrio del vector director al interior de la celda bajo la acción del campo eléctrico externo. A continuación, partiendo del formalismo electromagnético de las ecuaciones de *Maxwell*, se deduce la ecuación *eikonal* usando la aproximación del límite óptico y se encuentra la trayectoria del haz de luz al interior de la celda. Posteriormente, se obtienen las relaciones de *Fresnel* para medios anisotrópicos y se calcula la reflectancia de dicho sistema. La tesis está organizada de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 se presenta una breve descripción de las generalidades de los cristales líquidos; así como de las propiedades físicas que son de interés para el desarrollo de la presente investigación.

El Capítulo 2 muestra una descripción del sistema físico de interés, celda híbrida nemática bajo campo eléctrico; y se establecen y resuelven numéricamente las ecuaciones de la configuración de equilibrio del vector director.

Posteriormente, en el Capítulo 3 se desarrollan las ecuaciones para la propagación del haz al interior de la celda, encontrando una expresión analítica para la trayectoria; asimismo se

presentan algunas gráficas del alcance y penetración del haz a distintos valores de campo eléctrico, tomando en consideración un cristal líquido 5CB.

En el Capítulo 4, se deducen las ecuaciones de *Fresnel* para medios anisotrópicos y se calcula la reflectancia de la celda producida por un haz incidente con perfil gaussiano que se propaga en el régimen de reflexión interna total.

Finalmente, en el último apartado se hace una discusión de la validez y restricciones del modelo aquí planteado; se presentan las conclusiones y se plantean posibles aplicaciones tecnológicas para el desarrollo de dispositivos electro-ópticos basados en los resultados del presente trabajo.

Capítulo 1

Los Cristales Líquidos

1.1 Descripción

Los cristales líquidos (CL) son sustancias comúnmente de origen orgánico, que presentan fases termodinámicas intermedias entre el sólido y el líquido; estos estados de equilibrio presentan algunas características de ambas etapas de agregación material, ya que pueden, por ejemplo, presentar birrefringencia como los cristales sólidos y, al mismo tiempo, fluir como lo hace un líquido isotrópico[6, 7].

La transición al estado de cristal líquido se puede dar mediante cambios en la temperatura (CL termotrópico) o bien, por cambios en la concentración de moléculas en algún solvente (CL liotrópico)[8, 9].

Generalmente, estos materiales están formados por moléculas altamente anisotrópicas de forma regularmente alargada del orden de 20 Å de largo por 5 Å de ancho (Fig. 1.1) y se clasifican de distinta manera según el grado de orden que posean las mismas[10].

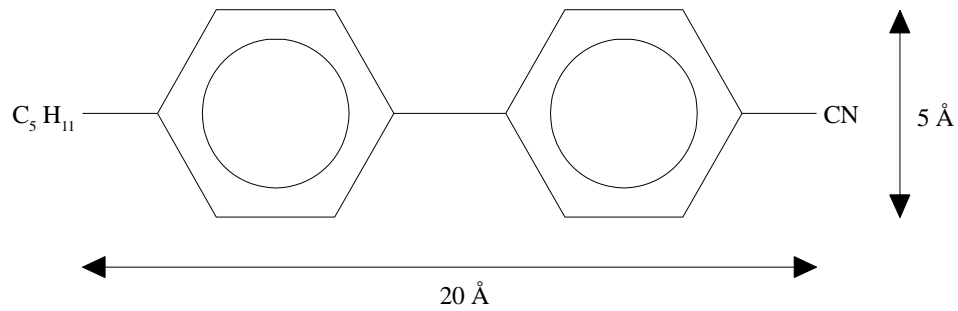


Figura 1.1: Estructura química para el cristal líquido nemático 5CB (pentil-cianobifenilo)

1.2 Clasificación General

Cristales Líquidos Nemáticos

Los CL nemáticos son aquellos que sólo presentan orden orientacional pero no posicional; en este caso, las moléculas se mantienen apuntando en promedio alrededor de una dirección \hat{n} , la cual se llama vector director, pero tienen la libertad de vibrar térmicamente en torno del mismo (Fig. 1.2).

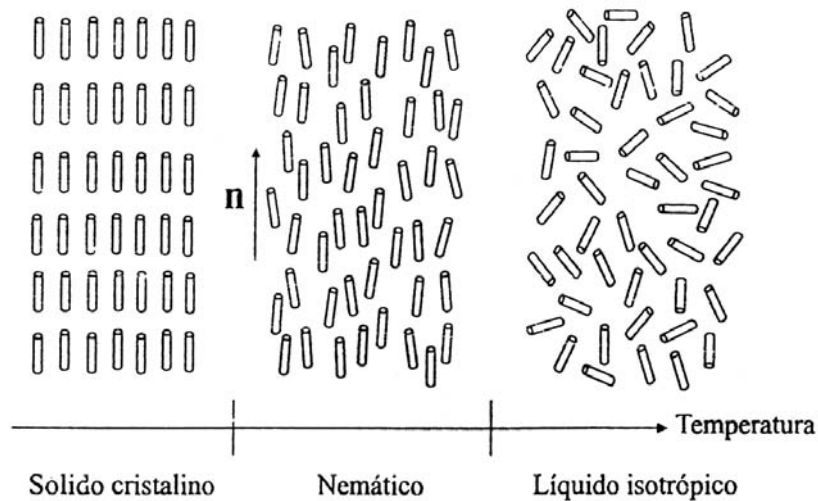


Figura 1.2: Configuración de las moléculas en las fases cristalina, nemática e isotrópica

Además, como los CL nemáticos no presentan orden posicional, los centros de masa de las moléculas componentes pueden desplazarse arbitrariamente, por lo que pueden fluir como si fueran líquidos isotrópicos.

Al preservar el orden orientacional, esta fase se convierte en un medio uniaxial, debido a que tiene su eje óptico a lo largo de la dirección del vector director; y en virtud de la simetría molecular y el hecho de que sus moléculas son no polares, las direcciones del director \hat{n} y $-\hat{n}$ son indistinguibles, por lo que se le considera centrosimétrico.

Cristales Líquidos Colestéricos

Esta es una fase cuya estructura es localmente muy parecida a la de un nemático, ya que sus moléculas tienden a alinearse en una dirección común; pero el vector director gira espontáneamente alrededor de otro eje perpendicular describiendo una hélice (Fig. 1.3).

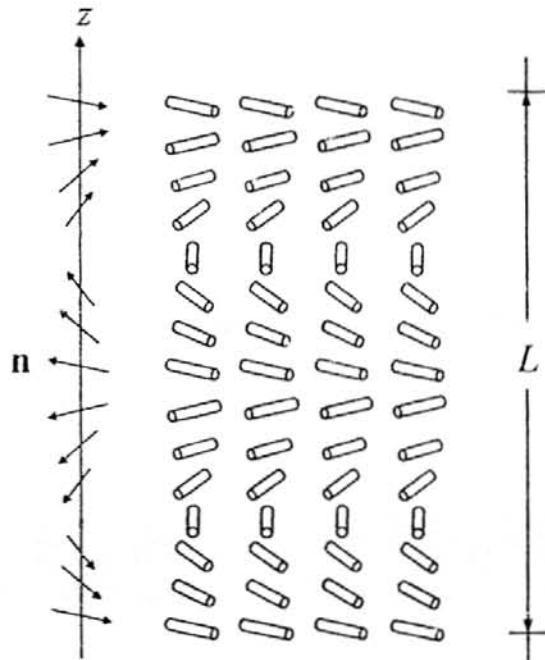


Figura 1.3: Estructura de la fase colestérica

Cristales Líquidos Esmécticos

Este tipo de CL poseen no sólo un ordenamiento orientacional, sino que sus moléculas además se organizan en capas (Fig. 1.4), por las que pueden fluir de manera paralela, pero no tienen la capacidad de cambiar de capa; a diferencia de lo que sucede en un nemático. Aunque a semejanza de este último, también es un medio uniaxial.

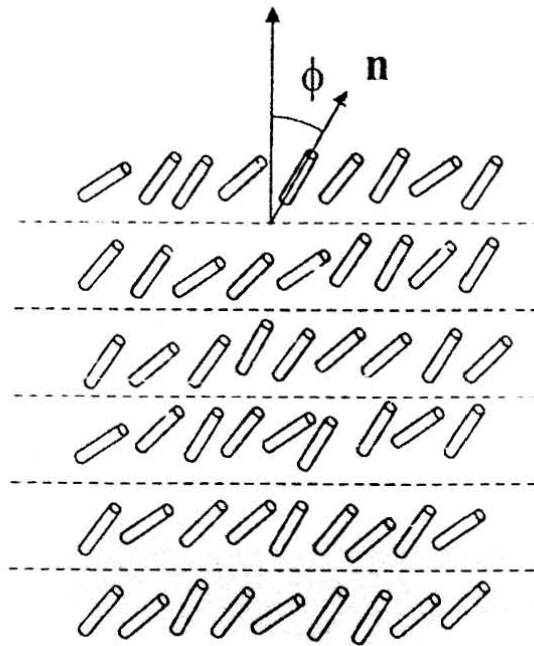


Figura 1.4: Estructura de la fase esméctica

Cristales Líquidos Columnares

Los CL también pueden estar formados por moléculas en forma de disco; éstas se suelen organizar apilándose unas encima de otras dando lugar a fases columnares[8] (Fig1.5).



Figura 1.5: Acomodo de las moléculas discóticas en fases columnares

1.3 Deformaciones Elásticas

La orientación colectiva de las moléculas en un CL es de manera natural arbitraria; pero es posible deformar su alineamiento mediante la acción de campos externos o bien, por medio de la imposición de condiciones de frontera al confinarlos al interior de una celda.

Dichas distorsiones son representadas mediante la teoría del continuo despreciando los detalles de la estructura molecular, debido a que las dimensiones típicas de un CL son mucho menores que las dimensiones de las escalas espaciales de las deformaciones que se suelen dar en las celdas nemáticas ($\geq 1\mu m$).

Entonces, dadas las distorsiones elásticas inducidas en el vector director a temperatura constante, existirá asociada una energía libre de Hemholtz; la cual se puede representar mediante la densidad de energía libre de Frank f_d ; la cual, a su vez, a segundo orden en las derivadas espaciales, puede escribirse como[11]:

$$f_d = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} K_3 \|\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}}\|^2, \quad (1.1)$$

donde K_1 , K_2 y K_3 , son las constantes elásticas isotérmicas asociadas a los tres tipos principales de deformaciones elásticas, esparcimiento (splay), torsión (twist) y pandeamiento (bend) (Fig1.6); cuyos valores típicos son del orden de $\sim 10^{-11}$ N[6].

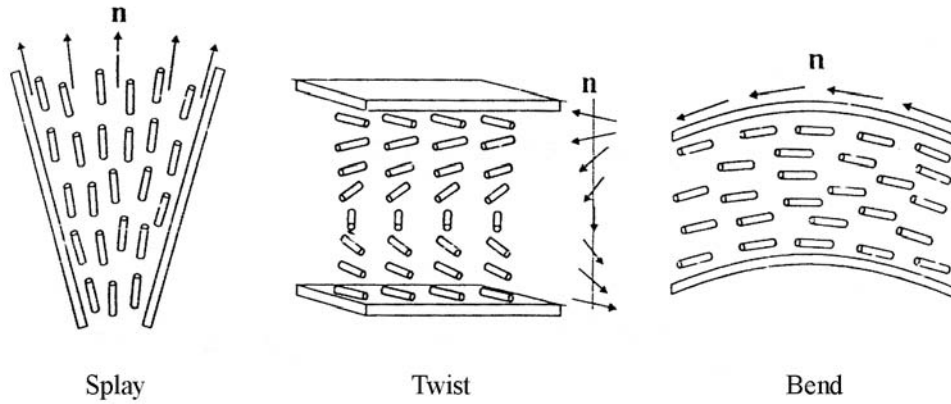


Figura 1.6: Deformaciones elásticas principales en un nemático

En virtud de que las constantes elásticas son del mismo orden de magnitud, se suele considerar a $K_1=K_2=K_3=K$, lo que lleva a la simplificación de la ecuación (1.1); quedando la energía libre de Frank como[2]:

$$f_d = \frac{1}{2} K \left[(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \|\nabla \times \hat{\mathbf{n}}\|^2 \right]. \quad (1.2)$$

1.4 Propiedades Eléctricas

Dada la naturaleza anisotrópica de las moléculas de los CL, los nemáticos poseen una constante dieléctrica ϵ_{\parallel} a lo largo del vector director $\hat{\mathbf{n}}$ y ϵ_{\perp} en la dirección ortogonal. Al

aplicarse un campo eléctrico externo \mathbf{E} a un nemático, el vector de desplazamiento estará dado por[2, 12]:

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

en donde $\tilde{\epsilon}$ es el tensor dieléctrico; cuyos elementos están dados por[13]:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a \hat{n}_i \hat{n}_j. \quad (1.4)$$

Aquí δ_{ij} es la delta de Kronecker, \hat{n}_i y \hat{n}_j son las componentes i-ésima y j-ésima del vector director, $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ es la anisotropía dieléctrica; la cual puede ser positiva o negativa dependiendo de la estructura molecular de los constituyentes del CL; aunque en general, lo más común es que posean anisotropía positiva, es decir; $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$.

La ecuación (1.3) es la relación constitutiva del nemático y muestra que es un medio uniaxial cuyo eje óptico se encuentra a lo largo del director $\hat{\mathbf{n}}$.

Es importante decir que en general, tanto las constantes dieléctricas como los índices de refracción, son parámetros físicos que dependen de la frecuencia del campo externo aplicado, por lo cual; distinguiremos dos regímenes distintos: Uno para los campos de corriente directa y baja frecuencia y otro para los campos a frecuencias ópticas[2].

La densidad de energía libre de Hemholtz f_e asociada a la interacción del nemático con el campo eléctrico \mathbf{E} , tiene la siguiente forma[10]:

$$f_e = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

la cual puede reescribirse en términos del vector director como:

$$f_e = -\frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_{\perp} \mathbf{E}^2 + \varepsilon_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})^2 \right]. \quad (1.6)$$

Nótese que cuando el CL tiene una anisotropía dieléctrica positiva ($\varepsilon_a > 0$), el director tiende a alinearse paralelo al campo eléctrico; mientras que cuando la anisotropía es negativa ($\varepsilon_a < 0$), el campo \mathbf{E} favorecerá una alineación perpendicular al mismo.

Entonces, bajo la influencia de un campo eléctrico, la densidad de energía libre total de Hemholtz por unidad de volumen en el nemático estará dada por:

$$f = f_e + f_d. \quad (1.7)$$

Y así, la energía libre de Hemholtz total queda como:

$$F = \int [f_e + f_d] dV. \quad (1.8)$$

En las ecuaciones (1.7) y (1.8) se toman en cuenta los efectos, tanto del campo eléctrico externo, como los cambios en la energía libre de distorsión elástica, los cuales en conjunto dan lugar a la configuración orientacional del CL.

1.5 Tipos de Celdas Nemáticas

Usualmente el CL está confinado entre dos placas, las cuales imponen una dirección preferencial al vector director en la frontera; dicha orientación puede ser inducida por frotamiento o por algún tipo de tratamiento químico. Si las moléculas se alinean paralelamente a las placas se dice que está en configuración planar; si la orientación es perpendicular a la superficie se llama homeotrópica.

En general, es posible inducir casi cualquier tipo de orientación de manera arbitraria. Al combinar dos placas en las cuales las moléculas se encuentran ancladas con condiciones de frontera distintas, se obtienen las celdas híbridas (Fig. 1.7)[14].

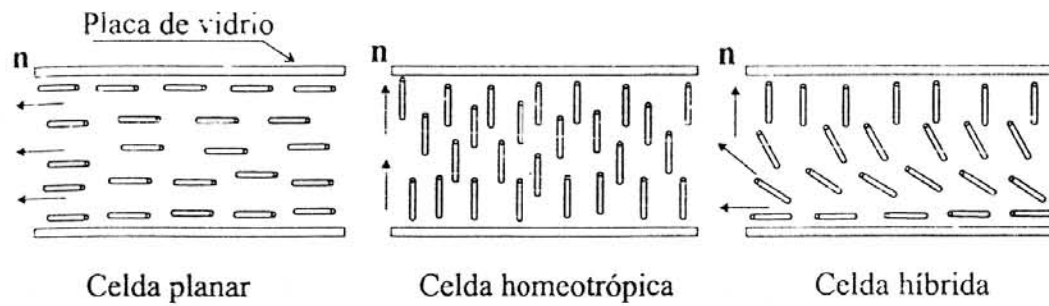


Figura 1.7: Configuraciones de celda más comúnmente empleadas

Capítulo 2

Celda Híbrida Nemática bajo la Acción de un Campo Eléctrico

2.1 Descripción del Sistema

El sistema físico de interés está conformado por una celda híbrida de cristal líquido nemático termotrópico con condiciones a la frontera fuertes; en la parte superior se considera un anclaje planar y en la parte inferior una configuración homeotrópica. Dicha celda posee largo L y espesor l ; donde consideramos que $L \gg l$ por lo que se desprecian los efectos de borde. Además, el CL se encuentra confinado entre dos placas de vidrio con índices de refracción constantes N_t y N_b (Fig. 2.1).

Se eligen los ejes cartesianos de coordenadas como se indica en la figura 2.1. Consideramos que la configuración inicial del vector director es espacialmente homogénea a lo largo del plano transversal (XY) y que sus componentes solo varían en el plano (XZ); por lo que el director $\hat{\mathbf{n}}$ tiene la forma:

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta(z), 0, \cos\theta(z)), \quad (2.1)$$

donde $\theta(z)$, es el ángulo de orientación de las moléculas del CL respecto de la dirección Z.

El nemático cumple las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\theta(z=0) &= 0, \\ \theta(z=l) &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

El CL es sometido a un campo eléctrico de baja frecuencia \mathbf{E}_0 paralelo al eje Z; lo cual induce una reorientación en las moléculas al interior de la celda.

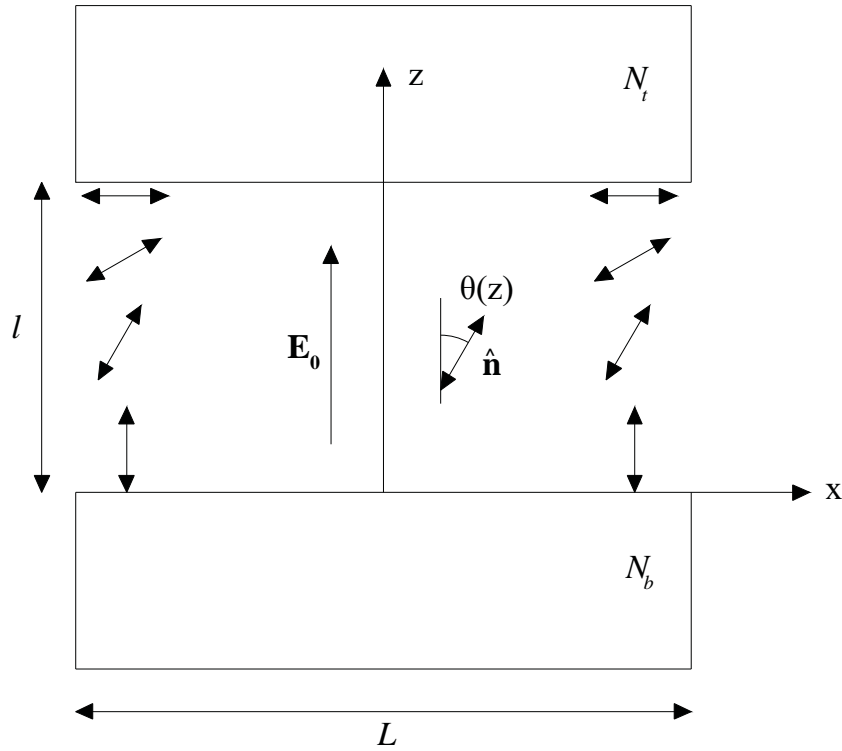


Figura 2.1: Esquema de la celda híbrida nemática considerada en el presente trabajo

2.2 Configuración de Equilibrio

La configuración de equilibrio del vector director queda determinada mediante la minimización de la energía libre de Hemholtz total, dada por la ecuación (1.8).

Así, usando la aproximación de constantes elásticas iguales y sustituyendo el vector director dado por la relación (2.1) en la ecuación (1.2), tenemos que la densidad de energía libre elástica toma la forma:

$$f_d = \frac{1}{2} K \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2. \quad (2.3)$$

Ahora bien, sustituyendo igualmente la forma del director y del campo eléctrico en la ecuación de la densidad de energía libre eléctrica (1.6), ésta asume la forma:

$$f_e = -\frac{E_0^2}{8\pi} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta(z)); \quad (2.4)$$

por lo que la energía libre de Hemholtz total del sistema está dada por:

$$F = \int \left[\frac{1}{2} K \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{E_0^2}{8\pi} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2 \theta(z)) \right] dV. \quad (2.5)$$

Para encontrar la configuración de equilibrio del director al interior de la celda, es necesario minimizar la energía libre total dada por la relación (2.5). Esto se logra de acuerdo con los principios del cálculo variacional mediante la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange[15], la cual en este caso queda como:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (2.6)$$

donde f es el integrando de la ecuación (2.5) y $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dz}$.

Así, minimizando la energía libre total obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - q \sin(2\theta(\xi)) = 0. \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7) se usó la variable adimensional $\xi = z/l$, además del parámetro q , el cual está definido como $q = \frac{V^2 \tilde{\varepsilon}_a}{8\pi K}$ y denota la razón entre las densidades de energía eléctrica y elástica en el sistema, $\tilde{\varepsilon}_a$ es la anisotropía dieléctrica del cristal líquido asociada al campo eléctrico externo de baja frecuencia \mathbf{E}_0 y $V = E_0 l$ es el voltaje aplicado a la celda para generar dicho campo. Para un nemático típico, $\tilde{\varepsilon}_a = 13$ y $K = 10^{-11} \text{ N}$, por lo que para un valor de $q = 10$, el voltaje aplicado a la celda es de $V \simeq 1.2 \text{ V}$ [3].

En estas nuevas variables, tenemos que $0 \leq \xi \leq 1$ y además, la ecuación (2.7) debe cumplir con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \theta(\xi = 0) &= 0, \\ \theta(\xi = 1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La relación que determina la configuración orientacional de equilibrio (2.7), es una ecuación diferencial de segundo orden no-lineal con condiciones en la frontera; para poder resolverla, se recurrió al método numérico conocido como “shooting”. Este procedimiento consiste en cambiar el problema de resolver la ecuación diferencial de segundo orden con condiciones a la frontera de la forma:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (2.9)$$

por el de buscar la solución a la misma ecuación diferencial, pero que cumple ahora con condiciones de valores iniciales. Esto es:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t. \quad (2.10)$$

Este nuevo problema, contiene un parámetro t el cual, se hace variar; y mediante, aproximaciones sucesivas, e integrando numéricamente en el intervalo deseado, se busca la solución $y(x)$ cuyo valor inicial $t = t_k$ sea tal, que cumpla con la condición de frontera $y(b) = \beta$, dada por el problema inicialmente planteado[16, 17].

Aunque si bien, se decidió usar el software de cálculo numérico *Mathematica*[18] para resolver la ecuación (2.7), es también posible hacer uso de la programación computacional o de cualquier otro tipo de programa especializado para resolver dicha ecuación diferencial.

Así, la solución $\theta(\xi)$ a la ecuación diferencial (2.7), la cual determina el ángulo de orientación del vector director en el CL, se encontró numéricamente mediante el método antes descrito[19].

En la siguiente gráfica (Fig. 2.2), se muestra la forma del ángulo de orientación del vector director, θ , en función de ξ para distintos valores del parámetro q .

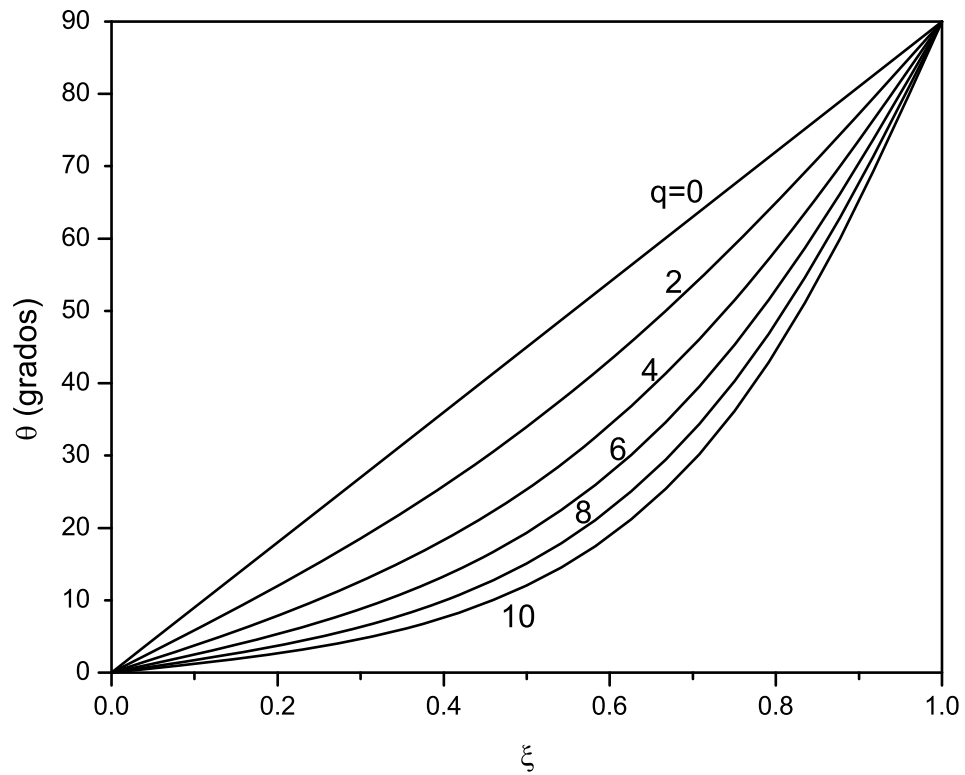


Figura 2.2: Ángulo de orientación del director del CL para distintos valores de q

Como se puede observar en la figura 2.2, a medida que se incrementa la intensidad del campo eléctrico, el vector director tiende a alinearse con el eje Z; sin embargo, el ángulo de orientación θ no crece de manera lineal con ξ como en el caso de $q = 0$.

Capítulo 3

Propagación de la Luz en una Celda Híbrida Nemática

3.1 Ecuaciones de Maxwell

Desde el punto de vista de la física, a escalas macroscópicas, la luz es una onda electromagnética, (a escalas microscópicas se considera que ésta posee un comportamiento dual, de onda-partícula) y en consecuencia, su comportamiento queda enteramente descrito por las leyes fundamentales del electromagnetismo, las cuales se pueden resumir, matemáticamente, mediante las llamadas ecuaciones de Maxwell[20]. Éstas se pueden escribir en el sistema de unidades CGS como [21, 22]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3.4)$$

donde se tienen las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{H} = \tilde{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.7)$$

En las ecuaciones (3.1) a (3.7), ρ representa la densidad de carga eléctrica, c es la velocidad de la luz en el vacío, $\tilde{\sigma}$ es el tensor de conductividad eléctrica del medio; $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\epsilon}$ son los tensores de permeabilidad magnética y eléctrica en el medio, respectivamente. \mathbf{J} es el vector densidad de corriente, \mathbf{E} es la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético, \mathbf{D} es la inducción eléctrica y \mathbf{B} es la inducción magnética[23].

3.2 Modos de Representación TE y TM

La luz natural, está conformada por ondas que varían rápida y desordenadamente las direcciones de las intensidades del campo electromagnético[23], por esto; no es posible distinguir un estado de polarización específico. Sin embargo, es posible representarla matemáticamente mediante dos ondas arbitrarias de igual amplitud, linealmente polarizadas, ortogonales e incoherentes; es decir, ondas para las cuales su diferencia relativa de fase varía rápidamente y al azar[24] (Fig. 3.1).

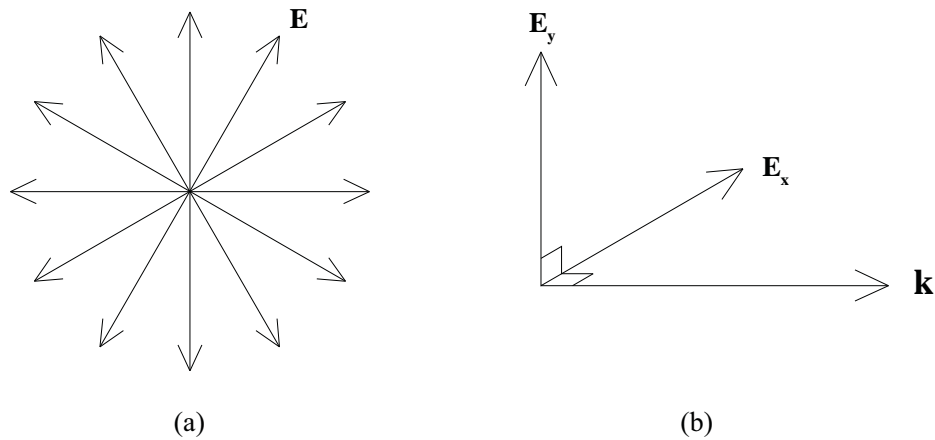


Figura 3.1: (a) Representación de la variación del campo eléctrico \mathbf{E} para la luz natural.
 (b) Esquema de la descomposición del campo eléctrico de la luz en dos componentes ortogonales \mathbf{E}_x y \mathbf{E}_y que son asimismo perpendiculares al vector de onda \mathbf{k} .

Ahora bien, al pasar la luz de un medio a otro, es posible tomar ventaja de la representación matemática antes descrita para definir dos modos ortogonales de polarización luminosa, en términos de la dirección de oscilación de los campos electromagnéticos de la onda y el plano de incidencia (determinado por el vector de onda \mathbf{k} de la luz incidente y el vector normal \mathbf{n} a la frontera entre los medios).

Se define entonces como modo transverso eléctrico (Modo TE) o polarización S, a aquel en el cual el vector de campo eléctrico \mathbf{E} , es perpendicular al plano de incidencia; y modo transverso magnético (Modo TM) o polarización P, a aquel en el cual el vector de campo eléctrico \mathbf{E} , es paralelo al plano de incidencia[25, 26] (Fig. 3.2).

Así, el modo de polarización TE es ortogonal al modo TM y juntos dan una representación completa para cualquier onda electromagnética que incide sobre un medio.

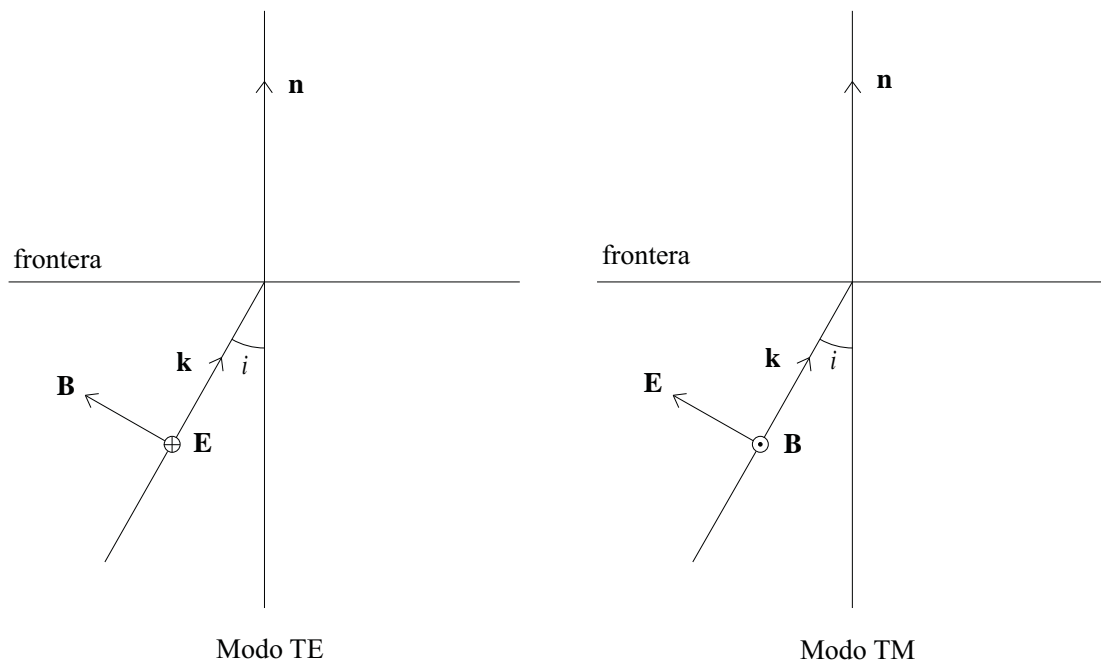


Figura 3.2: Dirección de los campos electromagnéticos de una onda luminosa incidiendo en la frontera entre dos medios no-magnéticos; es decir, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ para modos TE y TM

Este tipo de representación será de gran utilidad a lo largo del presente trabajo para el desarrollo de la ecuación eikonal, para el cálculo de la trayectoria de la luz al interior de la celda de CL y para la determinación de las ecuaciones de Fresnel para el sistema bajo estudio. Estos temas se tratarán con más detalle en los siguientes apartados.

3.3 Incidencia de un Haz Luminoso

Como se mencionó en la sección 1.4, un cristal líquido nemático es un medio anisotrópico uniaxial, cuyo eje óptico se encuentra a lo largo del vector director; por lo mismo, posee dos constantes dieléctricas distintas, ε_{\parallel} y ε_{\perp} en las direcciones paralela y perpendicular al vector director del CL, respectivamente.

Este hecho hace del nemático un material birrefringente; por lo cual, al incidir una onda luminosa no polarizada sobre él, ésta se separará en dos polarizaciones lineales y ortogonales entre sí; en una de ellas, el vector de campo eléctrico será perpendicular al plano principal (definido por el vector de onda \mathbf{k} y el eje óptico del medio); y en la otra, dicho vector será paralelo al plano principal. A la primera polarización se le conoce como rayo ordinario y a la segunda como rayo extraordinario[23, 27].

En consecuencia, se asigna un índice de refracción ordinario, $n_o^2 = \varepsilon_{\perp}$ y otro extraordinario, $n_e^2 = \varepsilon_{\parallel}$ a cada una de las direcciones, perpendicular y paralela al eje óptico del material; que en este caso coincide con la orientación del vector director del nemático[13, 28].

En virtud de que en la configuración de celda aquí analizada, el vector director sólo varía en el plano (XZ), el rayo ordinario se propagará a través del CL, como si éste tuviera un índice de refracción constante; en cambio, para el rayo extraordinario, la velocidad de propagación dependerá de la dirección del haz incidente[23]. Por esta razón, en el presente trabajo se estudiará únicamente el comportamiento del haz extraordinario.

En el caso del sistema bajo estudio, la polarización que define al rayo extraordinario coincide con el modo transverso magnético para una onda incidente por el substrato inferior de la celda ($Z = 0$); allí, la orientación del vector director del nemático y por ende el eje óptico del material, es paralelo a la normal a la frontera entre el substrato y el CL.

Por consiguiente, se hace incidir una onda luminosa monocromática con polarización lineal P (modo TM) con un ángulo i respecto del eje Z al interior de la celda; el vector de campo eléctrico \mathbf{E} de la onda incidente está totalmente contenido en el plano (XZ) (Fig. 3.3).

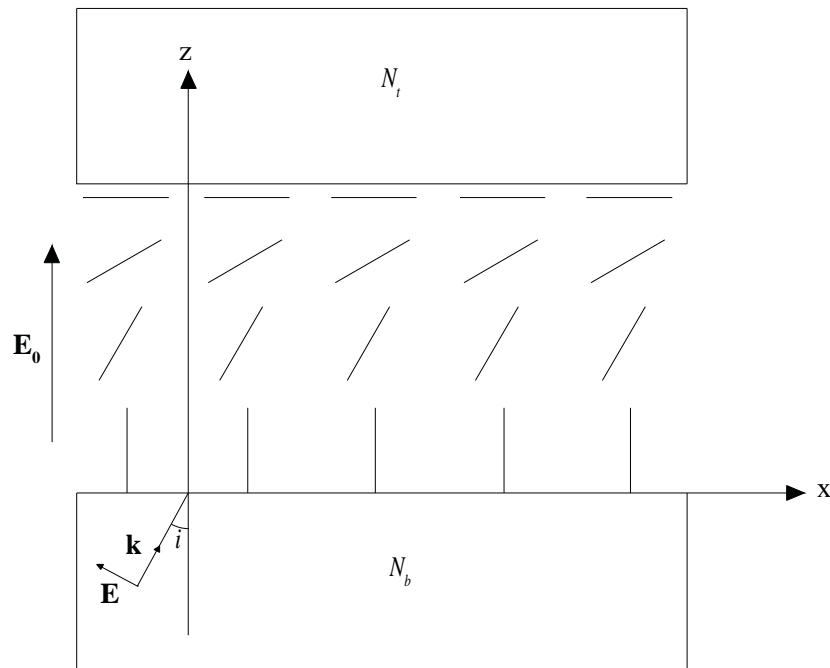


Figura 3.3: Incidencia del haz en la celda, modo TM

Se hace la consideración de que el cristal líquido es un medio dieléctrico y no-magnético; también de que la intensidad del haz luminoso incidente no es suficiente para producir cambios en la orientación del vector director del nemático al interior de la celda, es decir, se está dentro del régimen de respuesta lineal.

En general, los cristales líquidos poseen una susceptibilidad magnética pequeña, del orden de 10^{-5} en el SI de unidades[2], y en consecuencia la magnetización inducida es despreciable en comparación con la influencia de los campos eléctricos. Por ello, en buena aproximación, un nemático se puede considerar como un medio no-magnético[29].

La magnitud a la cual el campo eléctrico de la luz incidente produce cambios en la orientación del vector director del CL, y por ende se rompe el régimen de respuesta lineal, está determinado por el valor del campo óptico de Freedericksz, E_F ; el cual, para una celda híbrida nemática con condiciones a la frontera fuertes se encuentra definido por[2]:

$$|E_F|^2 = \frac{8\pi^3 K_3}{\epsilon_a} \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} \frac{1}{l^2}, \quad (3.8)$$

donde K_3 es la constante elástica asociada a la deformación de pandeamiento (bend) y, l es el ancho de la celda.

Entonces sólo para valores tales que $|E_x| > |E_F|$ habrá una reorientación del vector director producida por el haz incidente; para valores menores a E_F , el efecto será nulo. E_x , es la componente en el eje X del campo eléctrico de la luz.

3.4 Trayectoria del Haz

Hasta ahora, se ha hablado de la luz en términos de su naturaleza ondulatoria; sin embargo, para calcular la trayectoria que ésta sigue al interior de la celda, es necesario usar la aproximación de la óptica geométrica; es decir, considerar que la longitud de onda de la luz incidente λ es mucho menor que las escalas típicas del sistema en el cual se propaga. En este caso, se supone que $\lambda \ll l$, donde l es el ancho de la celda.

Así pues, para determinar la trayectoria de la luz en el CL con polarización P (modo TM), partimos de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales no-magnéticos y sin fuentes; es decir, con las condiciones:

$$\begin{aligned}\mu &= 1, \\ \rho &= 0, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Por lo que las ecuaciones (3.1) a (3.7) se reducen a:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,\tag{3.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\tag{3.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\tag{3.12}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\tag{3.13}$$

con las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{E},\tag{3.14}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}.\tag{3.15}$$

Consideremos una onda electromagnética cuyos campos varían monocromáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t},\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 son funciones vectoriales complejas, $j = \sqrt{-1}$, ω es la frecuencia angular y \mathbf{r} es el vector de posición de un punto en el espacio. Sustituyendo estas expresiones (3.16) en las ecuaciones (3.10) a (3.13) obtenemos:

$$\nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_0) = 0, \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 - jk_0 \mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 + jk_0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_0) = 0, \quad (3.20)$$

donde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda, c es la velocidad de la luz en el vacío.

Por otra parte, es bien conocido que la solución a las ecuaciones de Maxwell, en el vacío y sin fuentes, se puede escribir en términos de ondas planas monocromáticas de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e} e^{jk_0 r}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h} e^{jk_0 r}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde \mathbf{h} y \mathbf{e} son vectores constantes. Por esta razón, supondremos que la propagación de una onda electromagnética a través de un medio inhomogéneo se puede representar como una onda cuasi-plana a una distancia suficientemente grande de las fuentes de origen del campo; es decir, una perturbación cuyo frente de onda puede considerarse plano para un área finita del espacio. Por lo que supondremos una onda cuya fase puede depender de la posición [20, 30]. Esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

en donde $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ son vectores dependientes de la posición y $lS(\mathbf{r})$ es la función característica de Hamilton, la cual es igual a la diferencia en caminos ópticos de un rayo que se propaga entre dos puntos fijos en el CL y es una función escalar de la posición. En este caso $S(\mathbf{r})$ es adimensional y está normalizada por l , el ancho de la celda.

Si sustituimos las ecuaciones (3.22) en (3.17) a (3.20) obtenemos:

$$\nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}) = 0, \quad (3.23)$$

$$\nabla \times (\mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}) - jk_0 \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})} = 0, \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}) = 0, \quad (3.25)$$

$$\nabla \times (\mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})}) + jk_0 (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{jk_0 l S(\mathbf{r})})) = 0. \quad (3.26)$$

Desarrollando la divergencia y el rotacional, es posible expresar las relaciones (3.23) a (3.26) de la siguiente manera:

$$jk_0 l \nabla S(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r})) = 0, \quad (3.27)$$

$$jk_0 l \nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) + jk_0 \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.28)$$

$$jk_0 l \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.29)$$

$$jk_0 l \nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + jk_0 l \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.30)$$

Ahora, si dividimos (3.27) a (3.30) entre $jk_0 l$ y tomamos el límite óptico ($k_0 l \gg 1$), obtenemos después de simplificar:

$$\nabla S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.31)$$

$$\nabla S(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.32)$$

$$\nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.33)$$

$$\nabla S(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.34)$$

A continuación, resolvemos la ecuación (3.34) para $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ obteniendo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \varepsilon^{-1} \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{r}) \times \nabla S(\mathbf{r})), \quad (3.35)$$

donde ε^{-1} es el tensor dieléctrico inverso; es decir, $\tilde{\varepsilon} \cdot \varepsilon^{-1} = I$.

Sustituyendo la ecuación (3.35) en la (3.33) y aplicando las propiedades del triple producto escalar para vectores[31], tenemos después de simplificar[32]:

$$(\nabla S(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{h}}) \cdot \varepsilon^{-1} \cdot (\nabla S(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{h}}) = 1, \quad (3.36)$$

donde $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}(\mathbf{r}) / \|\mathbf{h}(\mathbf{r})\|$.

Desarrollando en (3.36) el gradiente, el producto cruz y empleando la representación TM, que es la polarización que nos ocupa en este trabajo, (el vector de campo magnético \mathbf{h} sólo tiene componente a lo largo del eje Y) obtenemos la siguiente relación:

$$\varepsilon_{11}^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 - 2\varepsilon_{13}^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right) + \varepsilon_{33}^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 = 1, \quad (3.37)$$

donde ε_{ij}^{-1} representa a los elementos i-ésimo y j-ésimo del tensor dieléctrico inverso. En la ecuación se han utilizado las coordenadas normalizadas $\chi = x/l$ y $\xi = z/l$.

De acuerdo con la teoría de Hamilton - Jacobi[33], la solución a la ecuación (3.37) se puede escribir como:

$$S(\chi, \xi) = p\chi + g(\xi), \quad (3.38)$$

donde $S(\chi, \xi)$ satisface las siguientes identidades:

$$\gamma = \frac{\partial S(\chi, \xi)}{\partial p}, \quad (3.39)$$

$$P_x = \frac{\partial S(\chi, \xi)}{\partial \chi}, \quad (3.40)$$

$$P_z = \frac{\partial S(\chi, \xi)}{\partial \xi}, \quad (3.41)$$

γ es la coordenada invariante generalizada conjugada de p que da la trayectoria, P_x y P_z son las componentes del haz luminoso a lo largo del eje χ y ξ , respectivamente. De las ecuaciones (3.38) y (3.40) se desprende inmediatamente que[34]:

$$P_x = p = N_b \text{sen}(i). \quad (3.42)$$

Las relaciones (3.39) a (3.41) son establecidas bajo las bases de las transformaciones empleadas en la teoría de Hamilton - Jacobi, de acuerdo con la cual, todas las nuevas variables son invariantes del tiempo; esto es, son condiciones iniciales o bien, constantes de movimiento[33, 35].

Ahora, al sustituir la ecuación (3.38) en (3.37) obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $g(\xi)$:

$$\varepsilon_{11}^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right)^2 - 2p\varepsilon_{13}^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right) + \varepsilon_{33}^{-1} p^2 - 1 = 0, \quad (3.43)$$

resolviendo (3.43) para $g(\xi)$, tenemos después de simplificar:

$$g(\xi) = - \int_0^\xi \frac{p\varepsilon_{13} \pm \sqrt{(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp})(\varepsilon_{33} - p^2)}}{\varepsilon_{33}} d\eta, \quad (3.44)$$

por lo que finalmente $S(\chi, \xi)$ queda expresado como:

$$S(\chi, \xi) = p\chi - \int_0^\xi \frac{p\varepsilon_{13} \pm \sqrt{(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp})(\varepsilon_{33} - p^2)}}{\varepsilon_{33}} d\eta. \quad (3.45)$$

Como se mencionó anteriormente, γ definida mediante la relación (3.39), es la invariante de p que da la trayectoria y su valor queda completamente determinado por el punto de incidencia del haz luminoso en la celda[3].

Así, la ecuación que determina la trayectoria del rayo de luz al interior de la celda de CL es:

$$\gamma = \chi - \int_0^\eta \left(\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}}}{\varepsilon_{33}\sqrt{\varepsilon_{33} - p^2}} \right) d\eta, \quad (3.46)$$

el signo \pm corresponde al haz viajando en la dirección $+\xi$ y $-\xi$; los elementos del tensor dieléctrico son explícitamente para el sistema físico que nos ocupa: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2(\theta)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \cos^2(\theta)$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_a \sin(\theta) \cos(\theta)$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$; y se encuentran definidos por la relación (1.4).

En la siguiente figura (Fig. 3.4) se muestra de manera esquemática la propagación del haz al interior de la celda, así como algunos parámetros importantes de la trayectoria como son el alcance χ_{\max} y la altura máxima ξ_c .

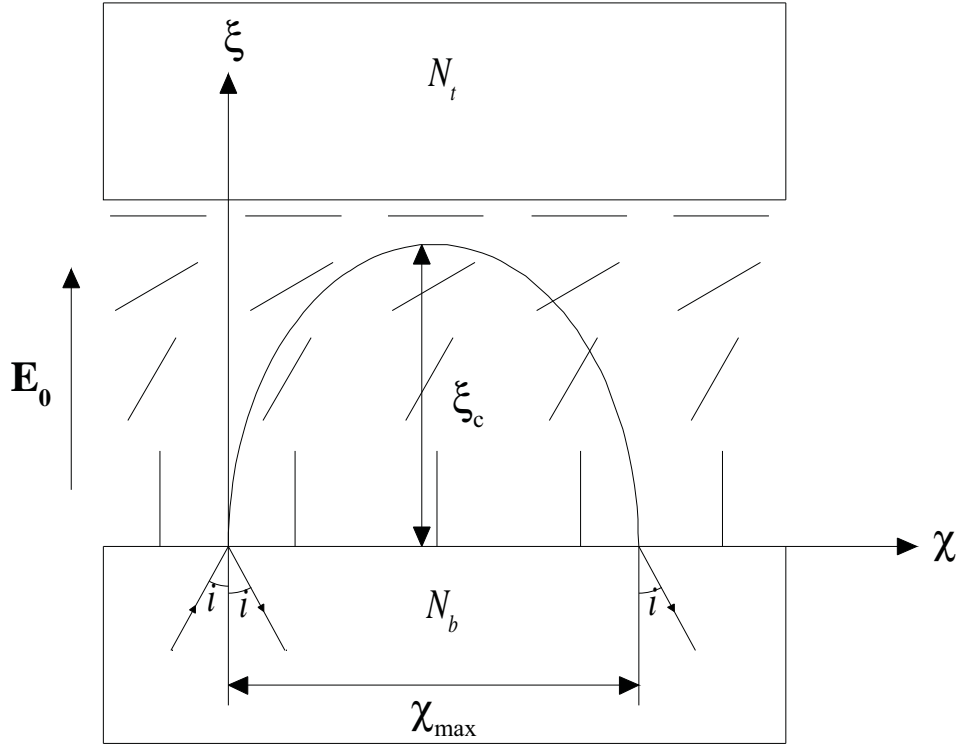


Figura 3.4: Trayectoria del haz luminoso en la celda en el régimen de reflexión interna total

Ahora bien, la ecuación (3.46) posee una divergencia del tipo $1/x$ cuando el argumento del radical en el denominador del integrando es igual a cero; esto es:

$$\varepsilon_{33} - p^2 = 0. \quad (3.47)$$

Al sustituir los valores de p y ε_{33} , dados respectivamente por las relaciones (3.42) y (1.4), en la ecuación (3.47) y despejar para θ , encontramos la siguiente igualdad:

$$\theta_c = \arccos \left(\sqrt{\frac{N_b^2 \sin^2(i) - \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_a}} \right). \quad (3.48)$$

Esta última ecuación (3.48), define el valor de una θ_c , la cual es justamente el ángulo de orientación del vector director en el punto de retorno del haz; es decir, donde éste alcanza su máxima penetración en la celda antes de regresar al substrato inferior[36].

Por otra parte, recordemos que el ángulo de orientación θ del vector director, se encuentra dentro del rango determinado por las condiciones de frontera establecidas en (2.8) (véase Fig. 2.2). Este hecho nos lleva al establecimiento de un intervalo para el ángulo de incidencia i , en el que el punto de retorno del haz luminoso se halla completamente dentro de la celda de CL, es decir, nos encontramos en el régimen de reflexión interna total.

Dicho intervalo lo hallamos al sustituir en la ecuación (3.48) los valores de θ en la frontera dados en (2.8) y despejar para i , obteniéndose finalmente que:

$$i_c = \arcsen \left(\frac{n_o}{N_b} \right) < i < \arcsen \left(\frac{n_e}{N_b} \right) = i_{c_2}, \quad (3.49)$$

aquí, se han empleado las igualdades para los índices de refracción, $n_o^2 = \varepsilon_{\perp}$ y $n_e^2 = \varepsilon_{\parallel}$, definidos en la sección 3.3 del presente trabajo.

Vale la pena hacer énfasis en que el régimen de reflexión interna total se da únicamente dentro del intervalo angular de incidencia definido por (3.49), ya que, por debajo de i_c , el haz alcanza el substrato superior y parte del rayo es transmitido a éste, mientras que por encima de i_{c_2} el rayo no penetra en la celda y es totalmente reflejado por el substrato inferior.

De manera ilustrativa, a continuación se presentan algunas gráficas de la trayectoria y sus parámetros bajo distintas condiciones de intensidad de campo eléctrico q ; para ello, se considera un cristal líquido 5CB y los siguientes valores[5, 37]:

$$\begin{aligned}
 n_o &= 1.5058, \\
 n_e &= 1.735, \\
 N_b &= N_r = 1.81, \\
 l &= 1 \times 10^{-4} \text{ m}, \\
 \lambda &= 632.28 \times 10^{-9} \text{ m}.
 \end{aligned}
 \tag{3.50}$$

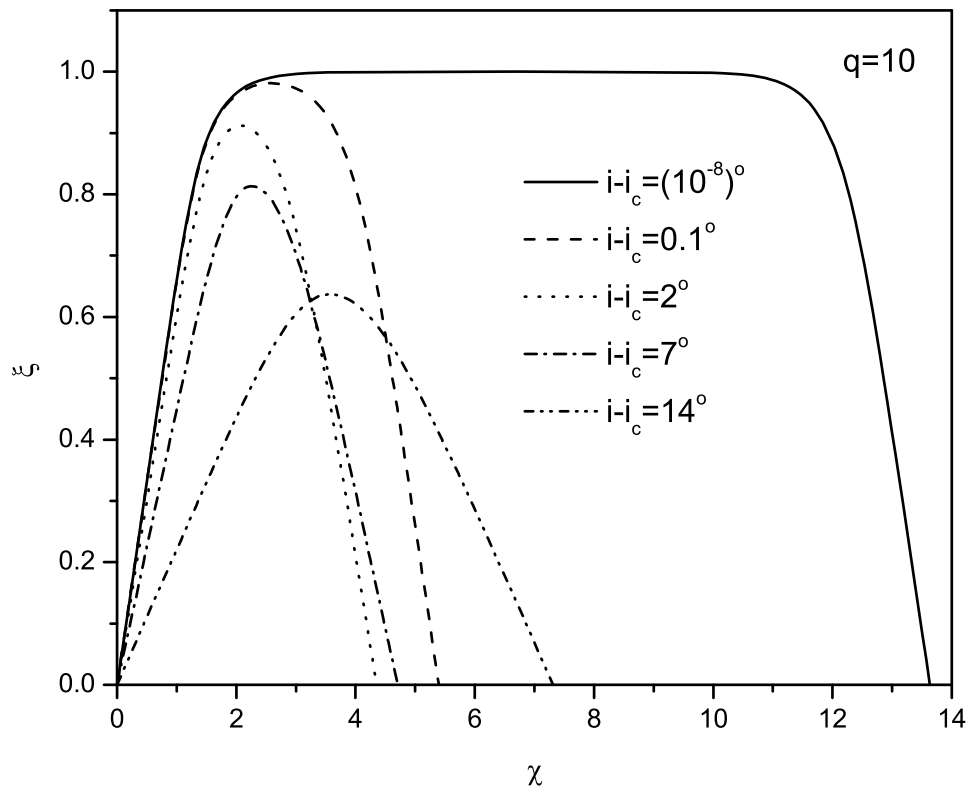


Figura 3.5: Trayectorias del haz luminoso al interior de la celda de cristal líquido para distintos ángulos de incidencia, $q = 10$ e $i_c = 56.3^\circ$

Como se puede ver en la figura 3.5, el alcance del rayo aumenta sensiblemente a medida que el ángulo de incidencia es más cercano a i_c ; sin embargo, éste no crece necesariamente de manera monótona con el incremento del ángulo de incidencia. Obsérvense los casos de $i - i_c = 2^\circ$ y $i - i_c = 14^\circ$, para los cuales el alcance del primero es menor que el del segundo.

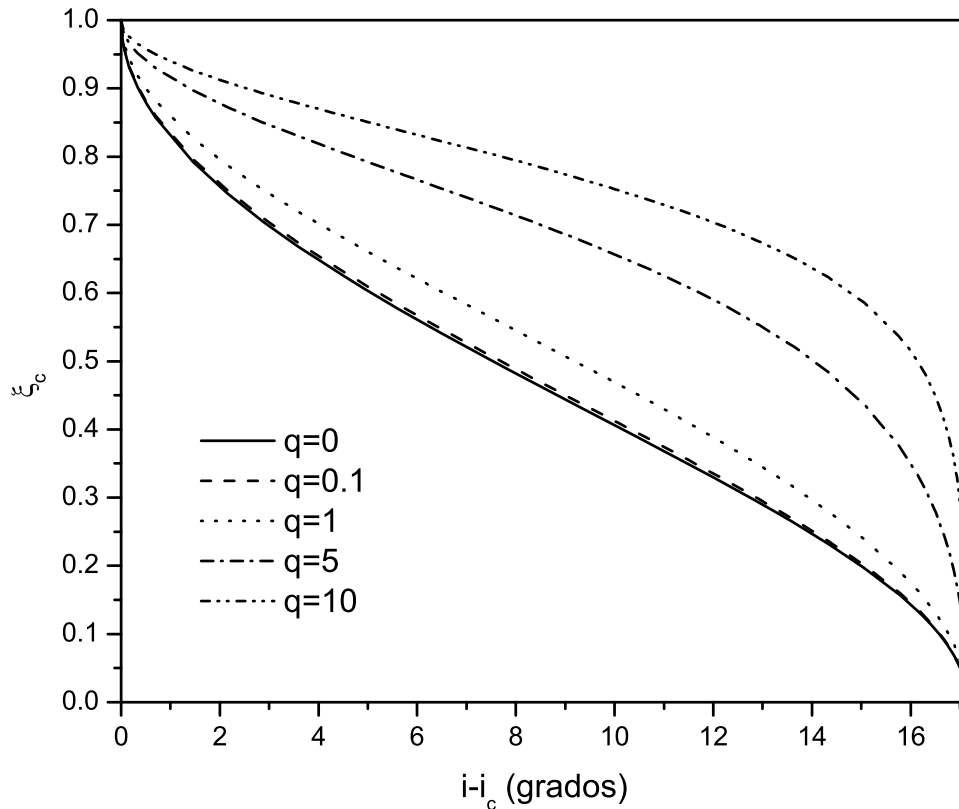


Figura 3.6: Penetración máxima del haz en la celda ξ_c como función del ángulo de incidencia para distintos valores de campo eléctrico q

En la figura 3.6, se puede observar que la penetración del rayo en el interior de la celda, altura máxima que alcanza la trayectoria del haz en el régimen de reflexión interna total; siempre disminuye a medida que aumenta $i - i_c$ para todos los valores de q . El ángulo i_c para el cual el haz no penetra en la celda es de 73.45° .

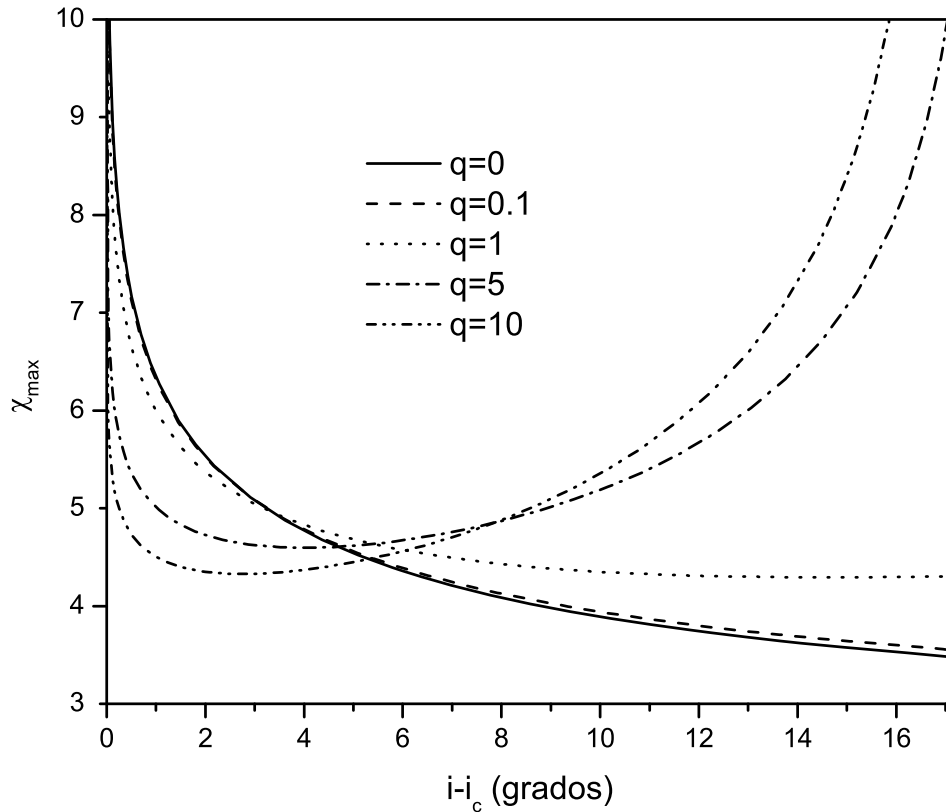


Figura 3.7: Alcance del haz luminoso incidente χ_{max} en función del ángulo de incidencia para diferentes valores de campo eléctrico q

En la figura 3.7, se pueden apreciar dos clases distintas de comportamiento: Para valores de q cercanos a cero, el alcance decrece de manera monótona con $i - i_c$, pero para valores grandes del campo eléctrico q , el alcance primero decrece y luego aumenta con $i - i_c$. En ambos casos, a medida que nos acercamos a i_c , el alcance diverge a infinito; lo cual significa físicamente que el haz se propaga de manera rasante al substrato superior.

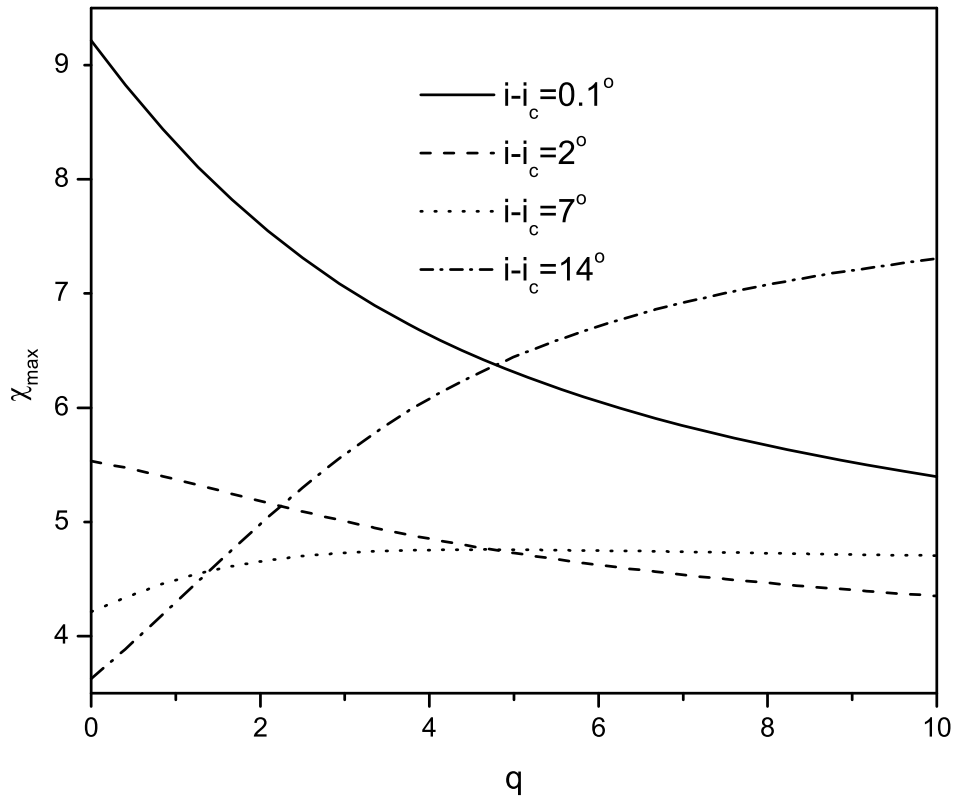


Figura 3.8: Alcance χ_{\max} del rayo incidente como función de la intensidad de campo eléctrico (a través del parámetro q), para distintos ángulos de incidencia

En la figura 3.8, se puede observar que el alcance muestra un comportamiento complejo: Para ángulos de incidencia cercanos a i_c , el alcance disminuye a medida que aumenta q ; pero a medida que se aumenta el ángulo de incidencia, el alcance puede aumentar y luego disminuir (véase caso $i-i_c = 7^\circ$); en cambio para valores grandes de $i-i_c$, el alcance aumenta con la intensidad del campo eléctrico.

Capítulo 4

Reflectancia de la Celda

4.1 Ecuaciones de Fresnel

Por lo general, en un experimento de óptica, uno de los parámetros que se pueden medir directamente de la luz es su intensidad; es decir, el flujo de energía que ésta transporta y que es proporcional al cuadrado de su amplitud. Así, al pasar la luz de un medio a otro con propiedades ópticas distintas, las relaciones de los flujos de energía promediados en un periodo, en las ondas reflejada y transmitida respecto al flujo medio en la onda incidente, son precisamente los coeficientes de reflectancia y transmitancia de la luz entre los dos medios en que ésta se propaga[24].

Por otra parte, las ecuaciones de Fresnel son las expresiones matemáticas que permiten relacionar la amplitud, fase y estado de polarización de las ondas luminosas reflejada y transmitida, que resultan cuando la luz pasa a través de la superficie de separación entre dos medios dieléctricos, respecto de las características de la onda incidente; éstas se desprenden directamente del formalismo electromagnético de las ecuaciones de Maxwell[23].

Entonces, con el fin de calcular la reflectancia producida por la celda en el régimen de reflexión interna total, es necesario derivar primero las relaciones de Fresnel adecuadas para el sistema físico bajo estudio. Para ello, consideremos los vectores de onda \mathbf{k} y de campo electromagnético \mathbf{E} y \mathbf{B} para la luz incidente, reflejada y transmitida (modo TM) en la frontera entre el substrato inferior y el CL (Fig. 4.1).

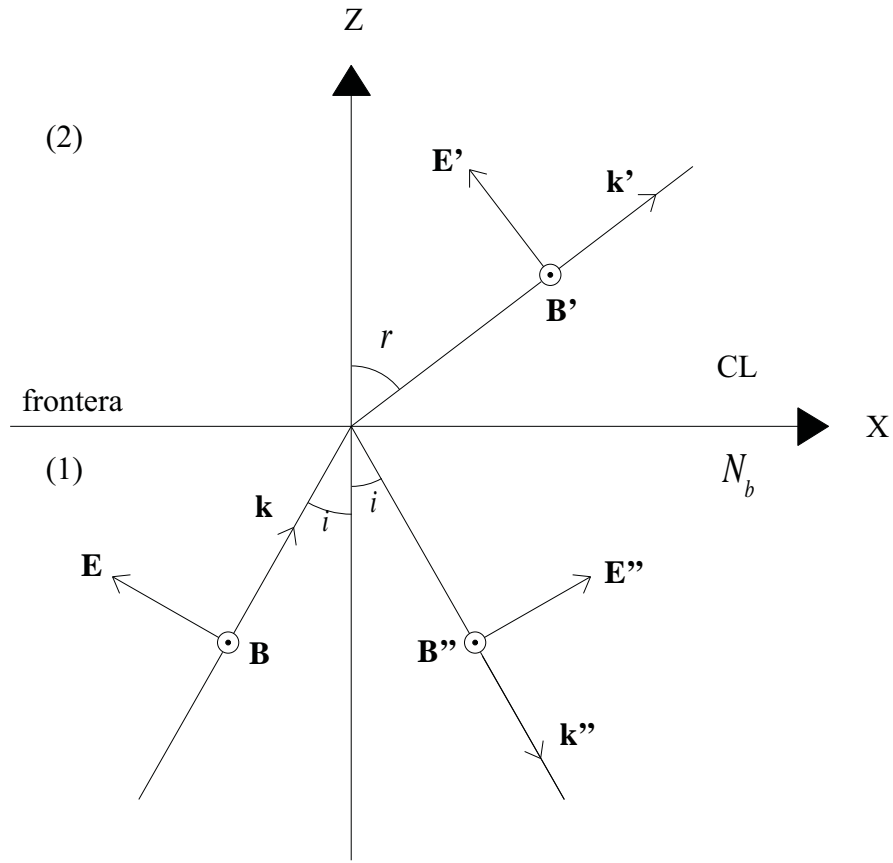


Figura 4.1: Representación de los vectores de campo eléctrico, magnético y de onda para los haces luminosos incidente (\mathbf{X}), reflejado (\mathbf{X}'') y transmitido (\mathbf{X}') en la frontera entre el cristal líquido (2) y el sustrato inferior (1), modo transversal magnético

Por continuidad en la frontera entre el CL y el sustrato inferior ($Z = 0$), de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, se deben de satisfacer las siguientes relaciones[21, 25]:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{D}'' - \mathbf{D}') \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (4.1)$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{B}'' - \mathbf{B}') \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}'' - \mathbf{E}') \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}'' - \mathbf{H}') \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

es decir, las componentes normales de \mathbf{D} y \mathbf{B} y las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} , deben ser continuas en la frontera entre los materiales. Aquí, $\hat{\mathbf{n}}$ representa el vector unitario normal a la interfase entre los dos medios.

Al usar las relaciones constitutivas (3.14) y (3.15), para el cristal líquido y el substrato inferior, es posible reescribir las ecuaciones (4.1) a (4.4) como sigue:

$$\left(\varepsilon_b(\mathbf{E} + \mathbf{E}'') - \tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}'\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (4.5)$$

$$\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}'' - \mathbf{B}'\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (4.6)$$

$$\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}'' - \mathbf{E}'\right) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

$$\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}'' - \mathbf{B}'\right) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

donde $\tilde{\varepsilon}$ es el tensor dieléctrico del CL y ε_b es la constante dieléctrica correspondiente al substrato inferior; ésta cumple con la relación $\varepsilon_b = N_b^2$ [20, 26].

Ahora bien, si suponemos que la luz conserva su carácter transversal en la frontera entre ambos medios materiales, podemos escribir los campos eléctrico y magnético de la misma en la siguiente forma[21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{B} &= \sqrt{\tilde{\varepsilon}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En general, en un medio anisotrópico como lo son los cristales líquidos, los vectores \mathbf{k} , \mathbf{D} y \mathbf{H} , son perpendiculares entre sí; además \mathbf{H} es ortogonal a \mathbf{E} . Respecto de la dirección del vector de onda, son transversales \mathbf{D} y \mathbf{H} pero no \mathbf{E} , por lo que dentro del CL, la luz no conserva su carácter transversal[38].

Debido a la necesidad de que las condiciones de frontera sean satisfechas en todos los puntos del plano ($Z = 0$) para todo tiempo, la variación temporal y espacial de los campos electromagnéticos debe ser la misma para todos ellos en dicho plano, es decir:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})_{z=0}; \quad (4.10)$$

la cual puede ser escrita en términos de los ángulos r e i (Fig. 4.1) como sigue[21]:

$$k \sin(i) = k' \sin(r) = k'' \sin(i). \quad (4.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.9) en las condiciones de frontera dadas por (4.7) y (4.8), y tomando en cuenta además que la propagación de las ondas luminosas se da en modo TM, encontramos las siguientes relaciones:

$$-E_0 \cos(i) + E_0'' \cos(i) + E_0' \cos(r) = 0, \quad (4.12)$$

$$\sqrt{\varepsilon_b} (E_0 + E_0'') - \sqrt{\varepsilon_{\perp}} E_0' = 0. \quad (4.13)$$

Al despejar E_0' de (4.13) y sustituir en (4.12) se tiene que:

$$(E_0 - E_0'') \cos(i) - \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{\frac{1}{2}} (E_0 + E_0'') \cos(r) = 0, \quad (4.14)$$

la cual se puede llevar a la forma:

$$r_{12} = \frac{\cos(i) - \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(r)}{\cos(i) + \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{\perp}} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(r)}, \quad (4.15)$$

donde $r_{12} = \frac{E_0''}{E_0}$, es precisamente el coeficiente de Fresnel de reflexión al ir del medio 1 al 2.

Empleando la relación (4.11), y tomando en consideración que $k/k' = N_b/n_e$ [26] para el caso del sistema de interés, es posible reescribir la ecuación (4.15) en términos, únicamente, del ángulo de incidencia del haz luminoso y de los índices de refracción, tanto del CL como del substrato inferior, quedando como sigue:

$$r_{12} = \frac{n_o n_e \cos(i) - N_b \sqrt{n_e^2 - N_b^2 \sin^2(i)}}{n_o n_e \cos(i) + N_b \sqrt{n_e^2 - N_b^2 \sin^2(i)}}. \quad (4.16)$$

Ahora bien, de acuerdo con las relaciones de Stokes, se satisface que[24]:

$$r_{12} = -r_{21}. \quad (4.17)$$

Por principio de conservación de la energía, la suma del coeficiente de reflexión más el de transmisión, al pasar la luz de un medio a otro, debe ser igual a 1; es decir[20, 25]:

$$\begin{aligned} r_{12} + t_{12} &= 1, \\ r_{21} + t_{21} &= 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

recuérdese que se está considerando al CL como un medio dieléctrico transparente, por lo que no hay absorción de energía luminosa por parte del material, es decir; $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}$ [38].

En general, los cristales líquidos son muy absorbentes en la región ultravioleta y el infrarrojo ($\lambda \geq 9 \mu\text{m}$). Sin embargo, en el espectro visible y en el infrarrojo cercano, es decir; de los $0.4 \mu\text{m}$ a los $5 \mu\text{m}$, existen relativamente pocas bandas de absorción por lo que son bastante transparentes en ésta zona[2].

En las ecuaciones (4.17) y (4.18), r_{ij} y t_{ij} representan los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión de la luz cuando ésta va del medio i al j , respectivamente.

Finalmente, es importante mencionar que la relación de Fresnel aquí derivada, sólo es aplicable cuando el índice de refracción del medio es independiente de la amplitud de la onda luminosa incidente, es decir, cuando se cumple el régimen de respuesta lineal.

4.2 Curvas de Reflectancia

Hasta ahora, se ha considerado que el haz incidente está conformado por una onda plana. Si bien, ésta es una adecuada descripción para el rayo luminoso, dados los objetivos y alcances del presente trabajo, es posible ampliar aún más el modelo desarrollado al considerar ahora que la luz incidente posee un perfil gaussiano cuya dependencia transversal es:

$$e^{-(r'/\omega_0)^2}, \quad (4.19)$$

donde r' representa a la coordenada radial y ω_0 es el ancho del haz[5].

Siguiendo los métodos de la óptica geométrica, asumimos que el conjunto de rayos que conforman al haz gaussiano incidente son paralelos entre sí, y por lo tanto siguen las trayectorias calculadas anteriormente[2, 36].

Para determinar la reflectancia, consideraremos un plano Σ perpendicular al primer rayo reflejado y con origen en el mismo. Sobre él tomaremos la coordenada radial normalizada por el ancho de la celda $r = r'/l$ (Fig. 4.2).

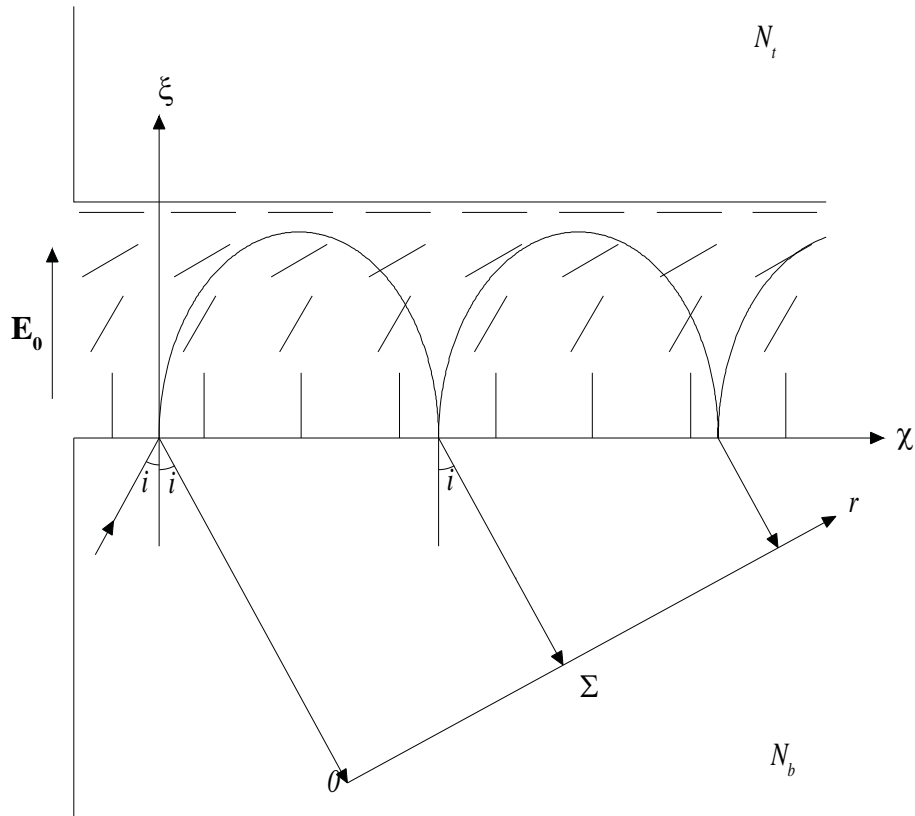


Figura 4.2: Representación esquemática del plano de medición de la reflectancia Σ y de las trayectorias seguidas por el haz luminoso en el régimen de reflexión interna total (RIT)

Así, en coordenadas normalizadas, podemos expresar la ecuación (4.19) como:

$$e^{-t^2 r^2}, \quad (4.20)$$

donde $t = l/\omega_0$.

El campo reflejado total en el plano Σ estará conformado por la suma de todas las contribuciones de cada uno de los rayos que regresan de nuevo hacia el substrato inferior de la celda de cristal líquido.

La intensidad de cada haz estará modificada por la proporción de luz determinada por los coeficientes de Fresnel de reflexión o transmisión, definidos en la sección anterior, según sea la trayectoria que siga para alcanzar el plano Σ (Fig. 4.3)[24].

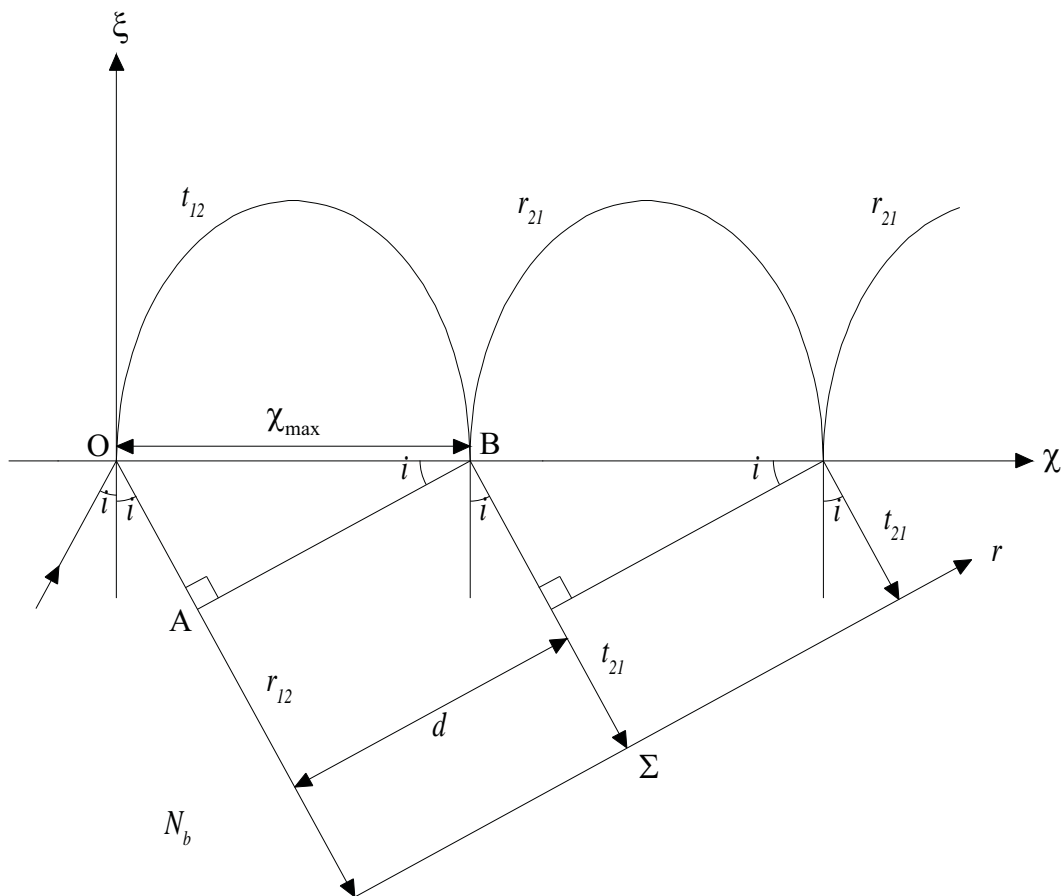


Figura 4.3: Coeficientes de Fresnel que actúan en las diferentes etapas de las trayectorias seguidas por los haces luminosos en el régimen de reflexión interna total

Observemos en la figura 4.3, que la fracción de la amplitud del primer haz reflejado al plano Σ , está dada por el coeficiente de Fresnel r_{12} ; además éste llega justo a la coordenada $r = 0$. Por lo que el primer haz reflejado tendrá un campo óptico de la forma:

$$r_{12}e^{-r^2}. \quad (4.21)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, observamos que el segundo rayo reflejado pasa a través del CL y luego se propaga por el substrato inferior, por lo que la fracción de amplitud que éste transporta, está determinado por el producto de los coeficientes de Fresnel t_{12} y t_{21} ; que corresponden, respectivamente, a la proporción de luz que es transmitida por el haz incidente hacia el cristal líquido y luego la fracción que pasa nuevamente hacia el substrato inferior desde el CL.

Además este segundo rayo, llega a Σ , a una distancia d del primer haz reflejado; es decir a la coordenada $r = d$ y habiendo recorrido un camino óptico más largo que la primera reflexión, sin entrar en detalles por el momento, denotemos a ésta diferencia de recorridos como Γ ; más adelante comentaremos con mayor amplitud a que se refiere éste parámetro. Así, el segundo rayo luminoso será de la forma:

$$t_{12}t_{21}e^{-t^2(r-d)^2}e^{j\Gamma}. \quad (4.22)$$

Análogamente, podemos ver en la figura 4.3 que la fracción de amplitud transmitida al plano Σ por el tercer rayo está dada por el producto de los coeficientes de Fresnel t_{12} , r_{21} y t_{21} . Además éste haz llega a una distancia $2d$ de la primera reflexión, es decir; a la coordenada $r = 2d$ y habiendo recorrido 2 veces más la distancia que hubo transitado el segundo haz en comparación con el primero y cuya diferencia denotamos como Γ ; por lo que a su vez el tercer rayo poseerá un campo de la forma:

$$t_{12}r_{21}t_{21}e^{-t^2(r-2d)^2}e^{j2\Gamma}. \quad (4.23)$$

Y así, siguiendo éste mismo procedimiento determinamos la forma del campo óptico para cada uno de los subsecuentes rayos.

El campo total reflejado en Σ estará definido por:

$$E_R = r_{12}e^{-t^2r^2} + t_{12}t_{21}e^{-t^2(r-d)^2}e^{j\Gamma} + t_{12}r_{21}t_{21}e^{-t^2(r-2d)^2}e^{j2\Gamma} + \dots \quad (4.24)$$

En las ecuaciones (4.22) a (4.24) $j = \sqrt{-1}$, $d = \chi_{\max} \cos(i)$ es la distancia entre dos rayos sucesivos medida sobre el plano Σ (véase Fig. 4.4) y Γ representa la diferencia de fase entre dos reflexiones consecutivas.

Ahora bien, la relación (4.24) puede reescribirse en términos únicamente del coeficiente de Fresnel r_{12} , mediante el uso de las ecuaciones (4.17) y (4.18) quedando como sigue:

$$E_R = r_{12}e^{-t^2r^2} + (1 - r_{12}^2) \sum_{n=1}^{N_R} (-r_{12})^{n-1} e^{jn\Gamma} e^{-t^2(r-nd)^2}, \quad (4.25)$$

donde N_R es el número máximo de reflexiones que caben a lo largo de la celda de cristal líquido, estando determinado por:

$$N_R = \text{Entero} \left[L/l\chi_{\max} \right]. \quad (4.26)$$

La diferencia de fase, Γ , estará determinada precisamente por la desigualdad en las distancias recorridas por dos haces luminosos consecutivos al llegar al plano Σ . Como se puede observar en la figura 4.3, entre el primer y segundo haz reflejado, existe una diferencia de caminos ópticos dados por las distancias del punto **O** al **A** para el primer rayo y del punto **O** al **B** para el segundo; esto en virtud de que en el resto del recorrido ambos haces transitan distancias iguales.

La distancia del punto **O** al **B** se encontrará dada por la ecuación (3.45), la cual define a la función característica de Hamilton normalizada por el ancho de la celda l y que determina

precisamente la diferencia en caminos ópticos de un rayo que se propaga entre dos puntos fijos en el CL, tal y como se menciona en la sección 3.4 del presente trabajo. Esto es:

$$d_{OB} = S(B) - S(O) = S(\chi_{\max}, 0) - S(0, 0). \quad (4.27)$$

Mientras que la distancia del punto **O** al **A** está dado por:

$$d_{OA} = \chi_{\max} \text{sen}(i), \quad (4.28)$$

por lo que la diferencia de fase Γ queda como:

$$\Gamma = k_0 l (d_{OB} - d_{OA}); \quad (4.29)$$

esto es, explícitamente:

$$\Gamma = -2k_0 l \int_0^{\xi_0} \frac{\sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (\epsilon_{33} - p^2)}}{\epsilon_{33}} d\eta. \quad (4.30)$$

En (4.29) y (4.30), k_0 representa al número de onda del haz incidente en el vacío.

Y así, finalmente, la reflectancia total de la celda en el plano Σ estará dada por[20, 24]:

$$R = |E_R|^2, \quad (4.31)$$

donde E_R es el campo total reflejado definido por la ecuación (4.25).

A continuación, de manera ilustrativa, se presenta una gráfica de reflectancia en función del ángulo de incidencia del haz luminoso para distintas intensidades de campo eléctrico q (Fig. 4.4). Se considera $t = 0.1$, $r = 0$, $L = 0.025$ m y los valores presentados en (3.50) para un cristal líquido 5CB.

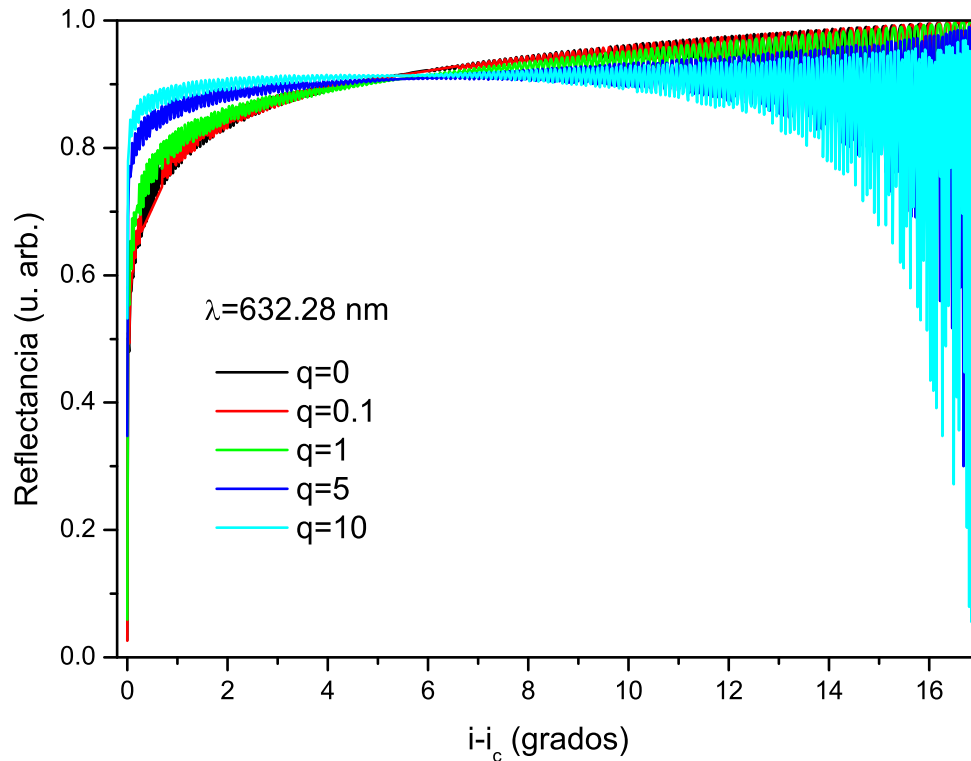


Figura 4.4: Curvas de reflectancia para distintas intensidades de campo eléctrico q

Como puede observarse en la gráfica anterior, en los primeros valores de $i - i_c$ la reflectancia crece rápidamente; aunque dicho incremento, se hace mayor a medida que aumenta también la intensidad de campo eléctrico q . Asimismo, se puede ver que conforme el valor de q se incrementa, la reflectancia disminuye para valores angulares grandes.

Por otra parte, las oscilaciones en la gráfica se deben fundamentalmente a la manera en que los diversos campos ópticos de los haces luminosos se combinan en el plano Σ , dando lugar a regiones de distintas intensidades de luz y sombra. Es peculiar el comportamiento, casi sin oscilaciones, para ángulos alrededor de $i - i_c = 5^\circ$, región en la que además todas las gráficas, sin importar la intensidad de campo eléctrico, parecen coincidir; éste inusual hecho lo podemos entender debido a que, en esa región angular, el alcance del haz es casi el mismo para todos los valores de q y por tanto, no hay diferencias de fase (véase Fig. 3.7).

También podemos ver en la figura 4.5 que, para ángulos de incidencia grandes, las oscilaciones son asimismo muy grandes, incrementándose estas últimas a medida que aumenta el campo eléctrico. De nueva cuenta, esto se puede explicar debido a que, para valores angulares grandes, el alcance crece rápidamente para los casos en que q también es grande; en cambio, para valores pequeños de q , el alcance tiene un comportamiento decreciente (véase Fig. 3.7).

La dependencia que la reflectancia exhibe en términos del alcance del haz; es posible entenderla, en virtud de que de este último parámetro, depende el número de reflexiones que caben a lo largo de la celda, la distancia que hay entre dos haces consecutivos y, por supuesto, la diferencia de fase que hay entre ellos; todas estas son variables que modifican la forma en que las distintas contribuciones de los rayos luminosos que llegan al plano Σ se van combinando; y en consecuencia cambian sensiblemente el comportamiento de la reflectancia de la celda.

Conclusiones

En el presente trabajo, se analizó teóricamente la trayectoria de un haz luminoso con polarización P y perfil gaussiano, el cual incide en una celda híbrida de cristal líquido nemático bajo la acción de un campo eléctrico de baja frecuencia en el régimen de reflexión interna total. Asimismo, se calculó la reflectancia producida por dicha celda.

Los cálculos desarrollados en este modelo fueron llevados a cabo dentro del límite óptico; por lo que el CL no fue considerado como un medio estratificado, sino como un material inhomogéneo, continuo, con un índice de refracción variable. Además, se asume que el nemático posee condiciones a la frontera fuertes y que la intensidad del haz incidente no produce reorientación en el vector director (régimen de respuesta lineal).

Los resultados muestran que tanto el alcance, como la penetración del haz en la celda, dependen de forma no-trivial de la intensidad del campo eléctrico aplicado.

Asimismo, las curvas de reflectancia para un haz incidente con perfil gaussiano también exhiben una dependencia con el campo eléctrico. A medida que se aumenta éste último, la reflectancia se incrementa para ángulos de incidencia cercanos al crítico y disminuye para ángulos mayores.

La fuerte dependencia que presentan los distintos parámetros de la trayectoria con la intensidad del campo eléctrico a la que se somete el CL, permite pensar en la posibilidad de emplear este fenómeno como principio para el desarrollo y construcción de diversos dispositivos electro-ópticos, controlados mediante el voltaje aplicado a la celda.

Por ejemplo, se podrían diseñar multiplexores al acoplar fibras ópticas en el substrato inferior de la celda y seleccionando el dispositivo al cual se le envía la señal por medio de la modificación del alcance del haz, cambiando el campo eléctrico. Análogamente, es posible crear compuertas digitales al colocar solamente una fibra óptica para el haz luminoso de salida.

También sería posible el construir sintonizadores de fase, ya que al poder variar la longitud de la trayectoria del haz con el campo eléctrico, es posible elegir arbitrariamente el desplazamiento de fase que se desee respecto a un haz control. Incluso, este mismo principio puede usarse en el ámbito de las telecomunicaciones, en particular en los sistemas digitales que usan modulado de fase, ya que en un dispositivo basado en la configuración de celda propuesta en este trabajo, la señal de control podría ser llevada por la primera reflexión, que no penetra en el CL, y la comunicación propiamente dicha, por el segundo haz, el primero que sale después de atravesar el nemático, teniendo la ventaja de que ambos rayos a la salida son paralelos entre sí.

Uno de los elementos distintivos del diseño de celda aquí propuesto es que, al existir en la trayectorias puntos de retorno, tanto las señales de entrada como de salida, se encuentran en el mismo lado, lo que podría ayudar al diseño de dispositivos mucho más compactos.

En fin, dado el fuerte impulso y desarrollo que han venido teniendo los sistemas de transporte de datos y comunicaciones basados en luz, el planteamiento de crear dispositivos electro-ópticos basados en CL puede ser de gran interés para esta industria.

Aunque si bien el alcance de este trabajo es sólo de carácter teórico, sería importante el realizar la verificación experimental del modelo y los planteamientos desarrollados, ya que sólo así se puede estar cierto acerca de la validez y limitaciones de lo que aquí se ha expuesto.

Bibliografía

1. Jiménez Ortega, L., *Trazado de rayos en gotas de cristal líquido nemático*, [Tesis de Licenciatura en Física] en *Facultad de Ciencias*. 2005, UNAM: México. p. 88.
2. Khoo, I.-C., *Liquid crystals: Physical properties and nonlinear optical phenomena*. 1995, Nueva York: John Wiley.
3. Mendoza, C.I., J.A. Olivares, y J.A. Reyes, *Electrically controlled total internal reflection in nematic hybrid cells*. *Physical Review E*, 2004. **70**(062701).
4. Olivares Lecona, J.A., *Estudio teórico experimental de procesos ópticos lineales y no lineales en cristales líquidos*, [Tesis de Doctorado en Ciencias Físicas] en *Instituto de Física*. 2004, UNAM: México. p. 153.
5. Olivares, J.A., R.F. Rodríguez, y J.A. Reyes, *Ray tracing and reflectivity measurements in nematic hybrid cells*. *Optics Communications*, 2003. **221**: p. 223 - 239.
6. Daoud, M. y C.E. Williams, *Soft matter physics*. 1999, Nueva York: Springer.
7. Pikin, S.A. y L.M. Blinov, *Cristales líquidos*. 1985, Moscú: Mir.
8. Jones, R.A.L., *Soft condensed matter*. 2002, Nueva York: Oxford University Press.
9. Chandrasekhar, S., *Liquid crystals*. 1977, Cambridge: Cambridge university press.
10. Simoni, F., *Nonlinear optical properties of liquid crystals and polymer dispersed liquid crystals*. 1997, Singapur: World Scientific.
11. Stephen, M.J. y J.P. Straley, *Physics of liquid crystals*. *Reviews of Modern Physics*, 1974. **46**(4): p. 617-704.
12. de Gennes, P.G., *The physics of liquid crystals*. 1975, Oxford: Clarendon Press.
13. Jánossy, I., *Optical effects in liquid crystals*. *Perspectives in condensed matter physics*. 1991, Boston: Klumer.

14. Hjar Juárez, H.J., *Dispersión de luz y efecto flexoeléctrico en un cristal líquido fuera de equilibrio*, [Tesis de Licenciatura en Física] en *Facultad de Ciencias*. 2002, UNAM: México. p. 112.
15. Arfken, G.B. y H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*. 4 ed. 1995, San Diego, California: Academic Press.
16. Burden, R.L. y J.D. Faires, *Análisis numérico*. 6 ed. 1998, México: International Thomson.
17. Bahder, T.B., *Mathematica for scientists and engineers*. 1995, Reading, Massachusetts: Addison Wesley.
18. Wolfram, S., *Mathematica*. [Software] 2003, Wolfram Research: Champaign, Illinois.
19. Cheung, C.-K., et al., *Getting started with Mathematica*. 1998, Nueva York: John Wiley & Sons.
20. Born, M. y E. Wolf, *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 7 ed. 1999, Cambridge: Cambridge University Press.
21. Jackson, J.D., *Classical electrodynamics*. 2 ed. 1975, Nueva York: John Wiley & Sons.
22. Weisstein, E.W. *World of science*. [Página Web] 1999 [citada 2005, 27 Abril]; Disponible en: <http://scienceworld.wolfram.com/>.
23. Prógorov, A.M., *Diccionario enciclopédico de física*. 1 ed. 1996, Madrid: Mir, Rubiños 1860.
24. Hecht, E., *Óptica*. 3 ed. 1998, Madrid: Addison Wesley.
25. Guenther, R.D., *Modern optics*. 1990, Nueva York: John Wiley.
26. Fowles, G.R., *Introduction to modern optics*. 2 ed. 1989, Nueva York: Dover.
27. Collings, P.J., *Liquid crystals: Nature's delicate phase of matter*. 1990, Princeton: Princeton University.
28. Kumar, S., *Liquid crystals: Experimental study of physical properties and phase transitions*. 2001, Cambridge: Cambridge University Press.

29. Rodríguez, R.F. y J.A. Reyes, *Electrohidrodinámica de cristales líquidos nemáticos*. Ciencia Ergo Sum, 2002. **8**(3): p. 275-284.
30. Jones, R.V. *On classical electromagnetic fields. Rays: The eikonal treatment of geometric optics* [Libro Electrónico] 2000 [citado 2005, 22 Julio]; Disponible en: <http://people.deas.harvard.edu/%7Ejones/ap216/lectures/lectures.html>.
31. Spiegel, M.R. y L. Abellanas, *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. 1 ed. Serie Schaum. 1998, México: McGraw-Hill.
32. Reyes, J.A., *Ray propagation in anisotropic inhomogeneous media*. J. Phys. A, 1999. **32**: p. 3409-3418.
33. Goldstein, H., *Mecánica clásica*. 2 ed. 2000, Barcelona: Reverté.
34. Reyes, J.A. y R.F. Rodríguez, *Waveguiding effect in a cell with a liquid crystalline core*. Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials, 1995. **4**(4): p. 943-958.
35. Reyes, J.A. y R.F. Rodríguez, *Waveguiding in a nematic hybrid slab*. Molecular Crystals and Liquid Crystals, 1998. **317**: p. 135-151.
36. Mendoza, C.I., et al., *Dispersion effects on the ray tracing and reflectivity in a hybrid nematic cell under an electric field*. Revista Mexicana de Física, 2006. **52**(5): p. 41 - 44.
37. Bahadur, B., *Liquid crystals: Applications and uses*. 1990, Singapur: World Scientific.
38. Landau, L.D. y E.M. Lifshitz, *Electrodinámica de los medios continuos*. Curso de física teórica. Vol. 8. 1981, Barcelona: Reverté.