UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

CÁLCULO ACTUARIAL DE FUNCIONES DE VIDA MÚLTIPLE Y MODELOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA

MARÍA ELENA GÓMEZ CRUZ

ASESOR: ALBERTO SÁNCHEZ ALDANA

NOVIEMBRE 2007

Cálculo Actuarial de Funciones de Vida Múltiple y Modelos de Decremento Múltiple

ÍNDICE

3. FUNCIONES CONTINGENTES

4. MODELOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del Cálculo Actuarial de Funciones de Vida Múltiple y Modelos de Decremento Múltiple constituyen una herramienta fundamental en la formación del Actuario. El diseño y la evaluación de seguros, anualidades, pensiones, así como creación de tablas de mortalidad, son algunas de las aplicaciones de esta materia.

La tesina titulada "Cálculo Actuarial de Funciones de Vida Múltiple y Modelos de Decremento Múltiple" desarrolla, en sus cuatro capítulos, la teoría fundamental para la valuación de operaciones contingentes de un estatus o grupo.

El objetivo de este trabajo es exponer de manera clara y alcanzable los contenidos de la materia Cálculo Actuarial II de la carrera de Actuaría impartida en la FES Acatlán, así como integrar la bibliografía clásica que se conoce, con algunos textos prácticos, cuya disponibilidad es limitada. El temario de la asignatura y la bibliografía propuesta por el programa, se presentan en los Cuadro I y II en las páginas iii y iv de este trabajo.

Con este trabajo se elabora una propuesta de material de apoyo, para la asignatura Cálculo Actuarial II, en el cual se desarrolla el sustento de la teoría de las operaciones de seguros múltiples, conocidos como estatus múltiples y se presentan ejercicios y ejemplos que refuerzan y muestran la teoría expuesta. Los ejercicios presentados al final de los capítulos 2, 3 y 4 han sido tomados de la bibliografía consultada, en algunos casos son resueltos con las tablas ilustrativas presentadas al final del trabajo.

Para el desarrollo de los contenidos se han considerado los métodos determinista y probabilista. Generalmente se utiliza primero el método probabilista por facilitar la comprensión de los temas. Una vez que se ha comprendido y ejemplificado el concepto por este primer método se exponen los temas con el método probabilista.

El capítulo 1 es el marco de referencia de la tesina. En él se retoman conceptos, definiciones, así como teoremas que son estudiados en materias antecedentes como Probabilidad, Estadística y Cálculo Actuarial de vida individual. No se detallan los desarrollos como tampoco se demuestran los teoremas, hacerlo implicaría extenderse demasiado sobre cada tema. El objetivo de este capítulo es hacer un breviario de conceptos a los que se hará referencia en los siguientes capítulos. Su disposición al inicio de la tesis hace más comprensible el contenido de los capítulos subsecuentes, evitando detenerse a explicar o bien detallar conceptos preliminares durante los siguientes capítulos. Las funciones de vida múltiple son, en general, una extensión de las funciones de vida individual, de ahí la importancia de incluir este capítulo.

El segundo y tercer capítulo desarrollan propiamente las Funciones de Vida Múltiple. Este es el nombre del segundo capítulo, el cual esta dedicado a los estatus de vidas conjuntas y de último sobreviviente. El tercer capítulo titulado Funciones Contingentes, es un caso particular del segundo, ahí se desarrollan los estatus de exactamente *k* vidas y al menos *k* vidas, así como a las funciones contingentes. En ambos capítulos se obtienen expresiones para operaciones de seguros y anualidades.

En el cuarto capítulo se presenta el Modelo de Decremento Múltiple, en donde se analizan las causas de decremento o salida del grupo de una vida. A diferencia de los capítulos 2 y 3, en donde la contingencia es la permanencia o disolución del estatus, en este capítulo las variables aleatorias a considerar son el tiempo y la causa de decremento. Es una forma de ver a una vida como un estatus.

También se expone la construcción de las Tablas de decremento Múltiple, así como su relación con las tablas de decremento único. El desarrollo de este tema es útil en la valuación de planes de pensiones, en donde la salida de un individuo puede ser por vejez, cesantía, muerte o invalidez. Sin embargo, este trabajo no contempla los planes de pensiones, sólo sienta las bases para su desarrollo. En el apartado 4.11 se presenta como un modelo de decremento múltiple puede ser observado como un estatus de vida conjunta. De ahí la inclusión del capítulo Modelo de Decrementos Múltiples.

La elaboración de este manual es importante porque la bibliografía clásica de la materia tiene varios inconvenientes:

-Disponibilidad del material. Resulta difícil encontrar en las universidades, donde se imparte la materia y que se encuentran en el área metropolitana, la bibliografía clásica con los contenidos de la materia. Nuestro plantel es un ejemplo de ello, por lo que el estudiantado recurre a otros planteles para recabar dicha información. Existe bibliografía que ofrece los contenidos de manera práctica, pero es difícil conseguirla.

-La mayoría de los libros están en inglés. No es habitual que los alumnos de cuarto semestre (semestre en el que se toma la materia) consulten bibliografía en inglés como tampoco que se desplacen en busca de ella. Desafortunadamente, el nivel de compresión de la lengua inglesa es bajo, lo que dificulta aún más su asimilación y continuidad. Esto genera que los alumnos estén predispuestos al estudio de los textos, salvo aquellos estudiantes que dominan esta lengua.

Este material incluye Tablas Ilustrativas de Mortalidad utilizando las q_x de la Tabla de Mortalidad Individual CNSF 2000-I(1991-1998) generada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) y suponiendo un radix de 10,000,000.00. La CNSF realizó esta tabla con datos proporcionados por compañías representativas del mercado nacional. Los parámetros $\left(A+Bc^x\right)$ de las funciones Gompertz y Makeham fueron tomados del estudio Modelos Estadísticos de Mortalidad, Análisis de Datos 1991-1998, desarrollados por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. La mayoría de los ejemplos y ejercicios son resueltos con estos datos.

TEMARIO ***CÁLCULO ACTUARIAL II***
1. FUNCIONES DE VIDA CONJUNTA 1.1 Definición y distribución de las variables aleatorias $T(xy)$ y $K(xy)$. 1.2 Características de la distribución de las variables aleatorias $T(xy)$ y $K(xy)$. 1.3 Cálculo de las funciones de vidas conjuntas. **2. FUNCIONES DE ÚLTIMO SUPERVIVIENTE** 2.1 Definición y distribución de las variables aleatorias $T(xy)$ y $K(xy)$. 2.2 Características de la distribución de las variables aleatorias $T(xy)$ y $K(xy)$. 2.3 Determinación y cálculo del costo de la contratación de beneficios para status de último superviviente. **3. FUNCIONES DIVERSAS** 3.1 Modelo general para status de vidas múltiples. 3.2 Funciones contingentes. 3.3 Anualidades testamentarias. **4. MODELOS DE DECREMENTOS MÚLTIPLES** 4.1 Definición y distribución, marginal y conjunta, de las variables aleatorias $T(x)$ y $J(x)$. 4.2 Construcción de tablas de decremento único, a partir de tablas de decrementos múltiples. 4.3 Construcción de tablas de decrementos múltiples, a partir de tablas de decremento único.

Cuadro I. Temario de Cálculo Actuarial II desarrollado por el programa de Actuaría de la FES Acatlán. 1992.

BIBLIOGRAFÍA	
1. BOWERS ET AL.	ACTUARIAL MATHEMATICS THE SOCIETY OF ACTUARIES, 1986.
2. HARRIS B.	THEORY OF PROBABILITY ADDISON-WESLEY, 1974.
3. HOOKER & LONGLEY	LIFE AND OTHER CONTINGENCIES VOL. II CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 195.
4. JORDAN C.W.	LIFE CONTINGENCIES THE SOCIETY OF ACTUARIES, 1975.
5. KELLISON, S.	THE THEORY OF INTEREST 2. ED, EDITORIAL IRWIN, 1991.
6. MEYER, PAUL	INTRODUCTORY PROBABILITY AND STATISTICAL APLICATIONS ADDISON-WESLEY, 1990.

Cuadro II. Bibliografía para la materia Cálculo Actuarial II, propuesta por el programa de Actuaría de la FES Acatlán, 1992.

1. NOCIONES PRELIMINARES

1.1 Introducción

Este capítulo presenta, como su nombre lo indica, nociones preliminares al Cálculo Actuarial de Vidas Múltiples. Está compuesto por tres áreas: álgebra de conjuntos, probabilidad y cálculo actuarial de vida individual. El capítulo no tiene por objetivo profundizar en los contenidos, como tampoco presentar demostraciones. El objetivo es retomar conceptos vistos en materias anteriores, para que el lector los tenga presentes cuando sean mencionados al desarrollar la teoría de vidas múltiples. Evitando detenerse a explicar la procedencia de los conceptos.

El capítulo se desarrolló por las necesidades de los capítulos 2, 3 y 4. Los conceptos de teoría de conjuntos y de probabilidad que se presentan aquí constituyen parte de la base de la teoría de vidas individuales, que se retoma en la teoría de vidas conjuntas. La teoría de vidas múltiples es una extensión de la teoría de vidas individuales, por lo tanto es deseable disponer de los conceptos generales antes de entrar en materia.

Se presenta, al final del trabajo, una sección de cuadros de seguros de vida individual y anualidades. En ellos se presenta notación, nombre, variable aleatoria, valor presente actuarial, así como expresiones en valores conmutados y en algunos casos aproximaciones. Estos cuadros son de utilidad en la valuación de seguros y anualidades de vidas múltiples, una vez que se recurre a métodos de evaluación que los transforman en operaciones de una vida.

1.2 Teoría de conjuntos

Un *fenómeno aleatorio* es un fenómeno empírico, en el cual no siempre se obtiene el mismo resultado, es decir, no existe regularidad determinista. Sin embargo los resultados ocurren con regularidad estadística. Al conjunto de todos sus posibles resultados se le llama *espacio muestral* y se le denota por (Ω). A los elementos que lo componen se les denota por (w).

El espacio muestral está compuesto por subconjuntos llamados *evento*s. A la clase, colección o conjunto de todos los eventos asociados a un fenómeno aleatorio se llama *espacio de eventos*, y se denota $\mathcal{F}$

Si a es un punto o elemento que pertenece al conjunto A se denota como $a \in A$. Cuando el evento no contiene elementos, se denomina el evento imposible o conjunto vacío y se indica con $\varnothing$. Para que dos eventos A_1 y A_2 sea iguales, se requiere que cada elemento o punto de A_1 sea también elemento de A_2, así mismo, cada punto A_2 sea punto de A_1. Es decir, A_1 y A_2 contienen exactamente los mismos puntos. La igualdad se indica por $A_1 = A_2$.

Cuando un elemento de un conjunto, digamos A_1, es también un elemento de A, A_1 es llamado un subconjunto de A y se escribe como $A_1 \subset A$.

En la teoría de conjuntos A^c indica que el evento A no ocurra y consta de todas las descripciones de Ω que no pertenecen a A. Este concepto es utilizado en la teoría de múltiples vidas cuando se busca que el estatus de vida conjunta $\overline{xy}$, no desaparezca en el tiempo *t*.

Cuando dos eventos A y B, ocurren a la vez, se formula el evento intersección, denotado por $A \cap B$. Se define como el conjunto de descripciones que pertenecen tanto a A como a B. Por lo tanto $A \cap B$ sucede si, y sólo si A y B ocurren, es decir, cuando el resultado observado tiene como descripción muestral que pertenece a A y a B simultáneamente.

Si lo que se busca es que ocurra por lo menos uno de los dos eventos, A o B, entonces se habla de la unión que es denotada por $A \cup B$. Se define como el conjunto de descripciones que pertenecen por lo menos a uno de los dos eventos A o B. Es decir, $A \cup B$ ocurre si ocurre A, B o ambos. El resultado observado tiene como descripción muestral un elemento de A o B (o de ambos).

Las operaciones de unión e intersección de eventos, gozan de propiedades algebraicas de adición y multiplicación. Algunas propiedades importantes son:

Ley conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Ley asociativa	$A \cup (B \cup C) = A \cup B(\cup C)$	$A(B \cap C) = (A \cap B)C$
Ley distributiva	$A \cup (B \cup C) = AB \cup AC$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Ley de idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

1.3 Probabilidad

En cálculo actuarial se miden las probabilidades de ocurrencia o no de un determinado evento. De manera que es necesario presentar definiciones de conceptos probabilistas que se utilizarán más adelante.

Considérese un espacio de probabilidad denotado por (Ω, F), donde Ω es el espacio muestral de un fenómeno aleatorio y *F* el espacio de eventos. Una forma matemática de representar un fenómeno aleatorio es (Ω, F, P)**.** Aquí se asigna a (Ω, F) una medida de probabilidad *P*, es decir, una función conjunto que dé a cada evento $\mathcal{F}$ un número real, el cual da idea de qué tan factible es que ocurra o no dicho evento. A dicha medida de probabilidad se le denota mediante

$$P : F \to [0, \infty]$$

El tiempo que se espera que viva una determinada persona es medido por las variables aleatorias *T* y *K*. La primera mide los años completos por tratarse de una variable aleatoria continua, y la segunda mide los años enteros por tratarse de una variable aleatoria discreta. A continuación se presentan las definiciones de cada una.

T es una *variable aleatoria continua* (unidimensional) si existe una función *f* tal que $f(t) \geq 0$ para todo *t* del intervalo $-\infty < t < \infty$ y tal que para cualquier suceso A

$$P(A) = P(t \text{ este en A}) = \int_A f(t)\,dt$$

$f(t)$ se denomina función de densidad de T

K es una *variable aleatoria discreta* (unidimensional) si toma un número finito numerable de valores, es decir existe una sucesión de números reales distintos $\{\alpha_n\}$. $P(A)$ es la probabilidad del suceso A, (probabilidad de que *k* esté en A) y se define como:

$$P(A) = \sum_A f(k)$$

donde $\sum_A f(k)$ representa la suma $f(k)$ para aquellos valores k_i pertenecientes a A.

Una medida de probabilidad debe cumplir con los *Axiomas de Kolmogorov*. De manera que para que P sea una medida de probabilidad del evento aleatorio A, se debe cumplir

1) $P(A) \geq 0 \qquad \forall \qquad A \in F$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si $A_1, A_2, \cdots \in F \qquad \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son mutuamente excluyentes

$$\Rightarrow \qquad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Las probabilidades anteriores se interpretan como frecuencias relativas de ocurrencia de los eventos A_n en un espacio muestral Ω definido. Para cualquier evento A, sea N_A el número de ocurrencias de A en las N repeticiones del fenómeno. De acuerdo con la interpretación frecuencial $P[A] = \frac{N_A}{N}$, donde puede apreciarse que $P(A) \geq 0$. Ahora bien $N_\Omega = N$, por lo tanto $P(\Omega) = 1$. Por último para dos eventos A y B mutuamente excluyentes $P[A \cup B] = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P[A] + P[B]$

Ejemplo 1.3.1: Se lanza un dado una vez, el espacio muestral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{6\}$ eventos disjuntos

$$P(\Omega) = \tfrac{|\Omega|}{6} = \tfrac{6}{6} = 1$$
$$P(A) = \tfrac{|A|}{6} = \tfrac{3}{6} > 0$$
$$P(B) = \tfrac{|B|}{6} = \tfrac{1}{6}$$

$A \cup B = \{1,2,3,6\}$

$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Por otro lado $P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Es decir $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

El teorema 1.1 muestra probabilidades y operaciones entre eventos aleatorios.

Teorema 1.1[1]

Para todo espacio de probabilidad (Ω, F, P)

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $\underset{A\in F}{\forall} \quad P(A^c) = 1 - P(A)$
3) $\underset{A,B\in F}{\forall} \quad Si \quad A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$
6) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

En la teoría de vidas contingentes, se hace referencia al concepto de probabilidad condicional. Por ejemplo cuando se tienen dos vidas (xy) y se busca la probabilidad de que (y) muera a edad *t*, habiendo muerto con anterioridad (x). Si $A = \{T(y) = t\}$, $B = \{T(x) \leq t\}$ y se busca ${}_t p_{\overset{2}{xy}}$, entonces se puede recurrir al concepto de probabilidad condicional $\Pr[B|A] = \Pr[T(x) \leq t | T(y) = t]$. De ahí que se enuncie el concepto de probabilidad condicional.

La medida de probabilidad elegida para un evento determinado puede cambiar a la llegada de información adicional, siendo esta nueva medida P^*. Y puede ocurrir que $P(A) \neq P^*(A)$. Si la nueva información es sobre un evento $B \in F$ que ha ocurrido, entonces el cambio de medida de probabilidad de $P(A)$ por $P^*_B(A)$ se llama medida de probabilidad dado *B* o condicionado en *B*. Generalmente $P_B(A)$ se denota $P(A|B)$.

Sea el espacio de probabilidad (Ω, F, P), $B \in F$ tal que $P(B) \neq 0$ y sea función conjunto $P_B : F \to [0,1]$ tal que para toda $A \in F$

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como se indicó, es posible que la información de que el evento *B* haya ocurrido no modifique $P(A)$, de manera que

$$P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

y además $P(A) \neq 0$

[1] Para una demostración del teorema 1.1 véase Parzen E., *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Limusa, México 1976, 35-38.

entonces $$P_B(A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$
$$\Leftrightarrow P_B(B) = P(B)$$
$\Leftrightarrow$ B es independiente de A

y se dice simplemente que *A* y B son eventos independientes.

A lo largo de este trabajo se consideran eventos independientes para facilitar los cálculos, a continuación se muestra la definición.

Los eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in F$ son eventos independientes $\Leftrightarrow$ para todo $T \subset \{1, 2, \cdots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) = \prod_{t \in T} P(A_t)$$

La obtención de varianzas y covarianzas a través del método probabilista constituye una ventaja de este método.

El valor esperado de una variable aleatoria X se define como:

a) Si X es discreta $E[X] = \sum_{\alpha_n} \alpha_n p_X(\alpha_n)$

b) Si X es continua $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)$

La media $\overline{x}$ nos dice cuál es el centro de los datos, mas no qué tan dispersos se encuentra respecto a su centro.

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] \\ &= E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 \end{aligned}$$

La covarianza es igual al momento producto menos el producto de las medias

$$Cov[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

1.4 Cálculo Actuarial de Vida Individual

En cálculo actuarial de vida individual se desarrolla la función de probabilidad y sobrevivencia para una vida. El siguiente apartado muestra estas funciones, así como expresiones generales para vidas individuales. El objetivo es presentar los conceptos de manera general, pues se hará referencia a ellos cuando se consideren varias vidas.

La variable aleatoria continua X representa la edad al fallecimiento de un recién nacido. La función de distribución $F_X(x)$, es la probabilidad de que la muerte de un individuo sea como máximo x

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] \qquad x \geq 0 \tag{1.4.1}$$

La función de sobrevivencia $s(x)$ es la probabilidad de que el recién nacido alcance la edad x y se define como

$$s(x) = \Pr(X > x) = 1 - F_X(x) \tag{1.4.2}$$

La probabilidad de que un recién nacido muera entre las edades x y $x+t$ es

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \Pr\left[X < x+t \middle| X > x \right] \\ &= \frac{\Pr\left[x < X < x+t\right]}{\Pr\left[X > x\right]} = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Y la función de sobrevivencia condicional se denota por

$$\begin{aligned} s_X(t) &= \Pr\left[X > x+t \middle| X > x \right] \\ &= \frac{\Pr\left[X > x+t\right]}{\Pr\left[X > x\right]} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Una vez que se han desarrollando las probabilidades de sobrevivencia de un recién nacido es momento de considerar vidas con edad x. La variable aleatoria que denota el tiempo futuro de vida de (x) es $T(x) = X - x$. De manera que una vez definida esta variable aleatoria y con las funciones de muerte y sobrevivencia desarrolladas arriba se obtiene

$$\Pr[T(x) \leq t] = F_{T(x)}(t) = {}_t q_x \tag{1.4.5}$$

$$\Pr[T(x) > t] = 1 - F_{T(x)}(t) = 1 - {}_t q_x = {}_t p_x \tag{1.4.6}$$

${}_t p_x$ indica la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva t años

${}_t q_x$ indica la probabilidad de que un individuo de edad x muera durante los siguiente t años, la cual es considerada tasa de mortalidad.

Cuando los periodos son de un año se omite el subíndice dejando p_x y q_x.

${}_{t|n}q_x$ denota la probabilidad de que (x) sobreviva t años y muera entre las edades $x+t$ y $x+t+n$ y se define como

$$\begin{aligned} {}_{t|n}q_x &= \Pr\left[t < T(x) \le t+n\right] \\ &= {}_{t+n}q_x - {}_{t}q_x \\ &= {}_{t}p_x - {}_{t+n}p_x \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

La regla del producto establece

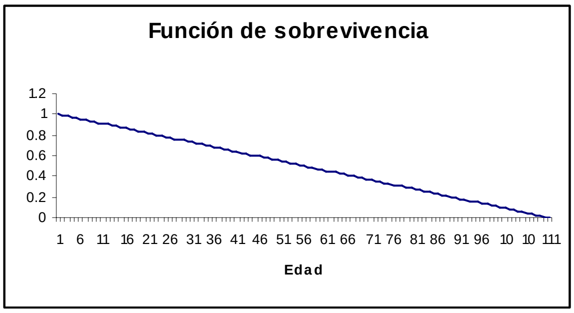
$$ {}_{t+n}p_x = {}_{t}p_x \, {}_{n}p_{x+t} = {}_{n}p_x \, {}_{t}p_{x+n} \tag{1.4.8}$$

La función sobrevivencia tiene las siguientes características:

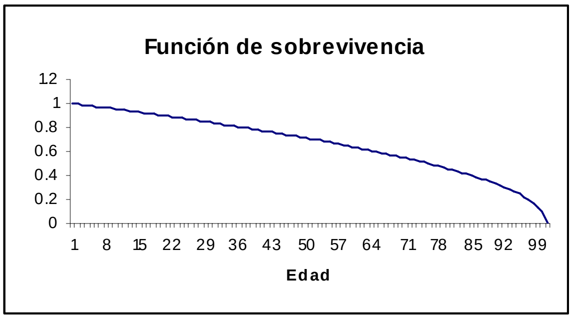
- $s(x)$ es decreciente
- $0 \le s(x) \le 1$
- $s(0)=1$ y $\exists\ \omega$ tal que $s(\omega)=0$

La obtención de una función de sobrevivencia se basa en métodos estadísticos para determinar sus probabilidades. Algunas expresiones que han simulado este comportamiento son:

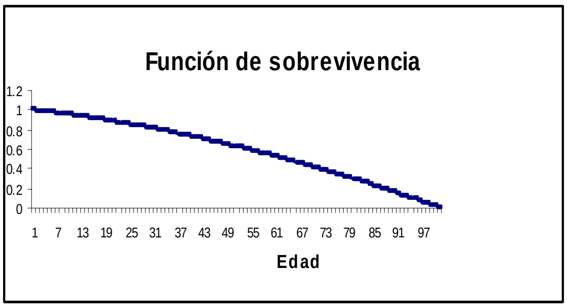
- $s(x) = 1 - \dfrac{x}{110} \qquad 0 \le x \le 110$



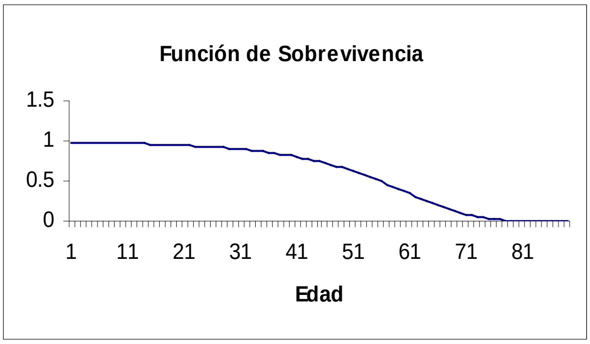
- $s(x) = \dfrac{1}{10}\sqrt{100-x} \qquad 0 \le x \le 100$



- $s(x) = \dfrac{20000 - 100x - x^2}{20000}$ $\qquad\qquad 0 \le x \le 100$



Sin embargo estas gráficas no se asemejan del todo a la siguiente gráfica obtenida de los datos generados en la Tabla 2.1 Ilustrativa de Mortalidad Individual que se encuentra en la parte de Anexos.



Las probabilidades de sobrevivencia y muerte, se pueden definir a través las funciones l_x (número de vivos de edad *x*) y d_x (el número de muertos de edad *x*), que se presentan a continuación.

Sea l_0 un grupo de recién nacidos y $\mathcal{L}_x$ la variable aleatoria que denota el número de recién nacidos que sobreviven de edad *x*. $\mathcal{L}_x$ se define como

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

I_j es el indicador Bernoulli definido por

$$I_j \begin{cases} 1 & \text{si el j-ésimo recién nacido sobrevive a edad } x \\ 0 & \text{si el j-ésimo recién nacido fallece antes de la edad } x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\Pr\left[I_j = 1\right] = s(x) = {}_x p_0$$
$$\Pr\left[I_j = 0\right] = 1 - s(x) = {}_x q_0$$

Y la esperanza del indicador es

$$E\left[I_j\right] = 0 \cdot \Pr\left[I_j = 0\right] + 1 \cdot \Pr\left[I_j = 1\right] = s(x)$$

El número esperado de recién nacido que llegará a edad x del grupo original se denota por $E\left[\mathcal{L}(x)\right]$. De manera que

$$\begin{aligned} l_x = E\left[\mathcal{L}(x)\right] &= E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} E\left[I_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} s(x) \\ &= l_0 s(x) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}_x$ es la suma de indicadores Bernoulli, entonces $\mathcal{L}_x$ se distribuye como una Binomial $Bi(n; p)$, con parámetros $n = l_0$ y $p = s(x)$.

Ahora considérese la variable aleatoria ${}_n\mathcal{D}_x$ que denota el número de muertos entre las edades x y $x+n$ del grupo inicial l_0 de recién nacidos y se define como

$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

I_j es el indicador Bernoulli

$$I_j \begin{cases} 1 & \text{si el j-ésimo recién nacido fallece entre las edades } x \text{ y } x+n \\ 0 & \text{si el j-ésimo recién nacido no fallece entre las edades } x \text{ y } x+n \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Pr\left[I_j = 1\right] &= \Pr\left[x < X < x+n\right] = s(x) - s(x+n) \\ \Pr\left[I_j = 0\right] &= 1 - \left[s(x) - s(x+n)\right] \end{aligned}$$

La esperanza del indicador es

$$E\left[I_j\right] = 0 \cdot \Pr\left[I_j = 0\right] + 1 \cdot \Pr\left[I_j = 1\right] = s(x) - s(x+n)$$

$E\left[\mathcal{D}(x)\right]$ denota el número esperado de recién nacidos que mueren entre la edades (x) y $(x+n)$ del grupo original. Se tiene

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E\left[{}_n\mathcal{D}_x\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} E\left[I_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{l_0} \left[s(x) - s(x+n)\right] \end{aligned}$$

$$= l_0\left[s(x) - s(x+n)\right]$$
$$= l_x - l_{x+n}$$

Finalmente las probabilidades de sobrevivencia y muerte pueden escribirse respectivamente

$${}_n p_x = \frac{s(x+n)}{s(x)} = \frac{l_0 s(x+n)}{l_0 s(x)} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$
$${}_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

Ejemplo 1.4.1: Considérese la función de sobrevivencia $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$ y supóngase un grupo de 10,000 recién nacidos, calcular:

a. el número de recién nacidos que llegarán a la edad 39

$$l_{39} = l_0 s(39) = 10,000\left(1 - \tfrac{39}{110}\right) = 7810.24$$

b. ¿cuántos fallecen entre las edades 39 y 45?

$${}_6 d_{39} = l_{39}\,{}_6 q_{39}$$
$${}_6 q_{39} = 1 - {}_6 p_{39} = 1 - \left[\tfrac{s(39+6)}{s(39)}\right] = 0.08563$$
$$= 7810(0.08563)$$
$$= 668.79$$

c. ¿cuántos se espera que fallezcan con edad 57?

$$d_{57} = l_{57} q_{57}$$
$$= l_0 s(57)\left[1 - \tfrac{s(58)}{s(57)}\right]$$
$$= (10,000)(0.48181818)\left(1 - \tfrac{0.47272727}{0.48181818}\right)$$
$$= 90.90$$

d. la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad 57

$$q_{57} = 1 - p_{57}$$
$$= 1 - \tfrac{s(58)}{s(57)}$$
$$= 1 - \tfrac{0.47272727}{0.48181818}$$
$$= 0.01886792$$

1.5 Fuerza de Mortalidad

Las expresiones que denotan las probabilidades de muerte y sobrevivencia en las líneas anteriores utilizan periodos de tiempo en años. Como estas medidas no son del todo informativas por tratarse de promedios, existe una expresión que maneja periodos instantáneos de tiempo. Esta expresión es la fuerza de mortalidad que se obtiene a partir de dividir un año en subperiodos de igual tamaño. De manera que la probabilidad de que (x) fallezca al llegar a la edad $x+\frac{1}{m}$ es

$$_{\frac{1}{m}}q_x = \frac{l_x - l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} \qquad (1.5.1)$$

donde $l_x - l_{x+\frac{1}{m}}$ representa el número de muertes ocurridas en la m-ésima parte del año. Multiplicando (1.5.1) por *m*

$$m\left(_{\frac{1}{m}}q_x\right) = m\frac{l_x - l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} \qquad (1.5.2)$$

se obtiene la probabilidad en forma anual, bajo el supuesto de que ocurre el mismo número de muertes en cada subperiodo de año. Al hacer que el número de partes en que se divide el año crezca infinitamente, de manera que la longitud de cada parte se reduzca infinitamente, se obtiene la fuerza de mortalidad o la tasa instantánea de mortalidad. Esta es una medición de la mortalidad justo en el instante de alcanzar la edad y se hace en forma anual, aunque para calcularse se utilice un lapso de tiempo mucho menor. La tasa instantánea de mortalidad se denota por la letra griega μ (mu), a la que se le añade un subíndice indicador de la edad, es decir μ_x o bien por $\mu(x)$ [2]. La función $\mu(x+t)$ no incorpora información adicional de (x) y únicamente indica la fuerza de mortalidad a la edad $(x+t)$. Cuando se dispone de información adicional de (x), la fuerza de mortalidad a edad $(x+t)$ es una función de esa información a edad (x) y con duración *t* y se denota por $\mu_x(t)$.

La fuerza de mortalidad es el límite de $_{\frac{1}{m}}q_x$ cuando *m* crece indefinidamente, es decir cuando $\frac{1}{m}$ tiende a hacerse infinitamente pequeño. González Galé sugiere la siguiente definición: la fuerza de mortalidad es la relación entre el número de muertes que debería haber en el año con respecto al número de personas que tienen exactamente edad *x*. Considerando que durante todo el año la intensidad de la mortalidad permanece invariada.

Retomando la expresión (1.5.1)

$$\mu(x) = m\left(_{\frac{1}{m}}q_x\right) = m\frac{l_x - l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}$$

Tomando el límite

---

[2] Bower en la página 53 menciona que el Comité Permanente de Notación de la Asociación Internacional Actuarial establece la notación de las funciones actuariales, las cuales pueden diferir de la notación probabilista. Ejemplifica con una función de una sola variable cuya notación probabilista es $q(x)$ y la notación actuarial es q_x.

$$\lim_{m\to\infty}(m)\left({}_{\frac{1}{m}}q_x\right)=\lim_{m\to\infty} m\frac{l_x-l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} \tag{1.5.3}$$

$$=\lim_{\frac{1}{m}\to 0}-\frac{1}{\frac{1}{m}}\frac{l_{x+\frac{1}{m}}-l_x}{l_x}$$

$$=-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$$

de manera que

$$\mu(x)=-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} \tag{1.5.4}$$

La expresión anterior está integrada por la derivada de la curva l_x, que es la pendiente de la tangente y que representa un incremento (positivo o negativo) de la función $f(x)$ al incrementarse la variable independiente *x*. Debido a que l_x es decreciente, la derivada que se obtiene es negativa y al multiplicarse por $-\frac{1}{l_x}$ se obtiene la tasa anual de decrecimiento en la edad exacta *x*. Como $\mu(x)$ es igual a la derivada de una función, dividida entre la misma función, entonces

$$\mu(x)=-\frac{d\ln l_x}{dx} \tag{1.5.5}$$

Es posible obtener p_x y q_x en función de $\mu(x+t)$. Considérese

$$\mu(x+t)=-\frac{1}{l_{x+t}}\frac{dl_{x+t}}{dt} \tag{1.5.6}$$

multiplicando en ambos lados por l_{x+t} e integrando

$$\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt=-\int_0^1 l_{x+t}\frac{dl_{x+t}}{l_{x+t}dt}dt$$

$$=\int_1^0\frac{dl_{x+t}}{dt}dt$$

por lo tanto

$$\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt=l_x-l_{x+1}=d_x \tag{1.5.7}$$

dividiendo (1.5.7) entre l_x

$$\frac{d_x}{l_x}=\frac{1}{l_x}\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt$$

de donde

$$q_x = \int_0^1 {}_t p_x \mu\left(x+t\right) dt \tag{1.5.8}$$

y

$$p_x = 1 - \int_0^1 {}_t p_x \mu\left(x+t\right) dt \tag{1.5.9}$$

O bien, retomando (1.5.6) e integrando en ambos lados

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu\left(x+t\right) dt &= -\int_0^1 \frac{d \ln l_{x+t}}{dt} dt \\ &= \ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \\ &= \ln p_x \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

despejando p_x

$$p_x = e^{\int_0^1 \mu(x+t) dt}$$

y como $p_x = 1 - q_x$ entonces

$$q_x = 1 - e^{\int_0^1 \mu(x+t) dt}$$

Utilizando la función de densidad y la función de supervivencia de la variable aleatoria X se tiene

$$\Pr\left[x < X \le x + \Delta x \middle| X > x\right] = \frac{F_X\left(x+\Delta x\right) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \tag{1.5.11}$$

$$_{\Delta x} q_x = \frac{F_X\left(x+\Delta x\right) - F_X\left(x\right)}{1 - F_X(x)} \tag{1.5.12}$$

por definición de función diferenciable

$$f\left(x+h\right) = f\left(x\right) + hf'\left(x\right) + hr\left(h\right) \qquad \lim_{h\to 0} r\left(h\right) = 0$$

se tiene

$$f\left(x+h\right) \approx f\left(x\right) + hf'\left(x\right)$$
$$f\left(x+h\right) - f\left(x\right) \approx hf'\left(x\right)$$

Por lo tanto

$$F_X\left(x+\Delta x\right) - F_X\left(x\right) \approx \Delta x F'_X\left(x\right) = \Delta x f_x\left(x\right)$$

$$_{\Delta x} q_x \approx \frac{\Delta x f_X\left(x\right)}{1 - F_X(x)} \tag{1.5.13}$$

Siendo $\frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$ la fuerza de mortalidad

$$\mu(x)=\frac{f_x(x)}{1-F_X(x)}=\frac{F_X'(x)}{s(x)}=\frac{d\left[1-s(x)\right]}{s(x)}=\frac{-s'(x)}{s(x)} \tag{1.5.14}$$

de donde

$$\mu(x)=-\frac{d\ln s(x)}{dx} \tag{1.5.15}$$

A continuación se enuncian las propiedades de la fuerza de mortalidad

1. $\mu(x)$ es una medida de mortalidad en el preciso momento de alcanzar la edad x

2. $\mu(x)\geq 0$

3. El valor de $\mu(x)$ no esta limitado a $0\leq\mu(x)\leq 1$

4. Es posible que $\mu(x)$ exceda la unidad cuando el valor de la pendiente de la curva l_x, $\frac{dl_x}{dx}$, exceda el valor de l_x

5. Para

$$\begin{array}{ll} x<0 & \mu(x)=0 \\ x=0 & \mu(x) \text{ indefinida} \\ x\geq 0 & \mu(x)\geq 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} & \int_0^\infty \mu(x)\,dx=\infty \end{array}$$

Ejemplo 1.5.1: Calcular $s(x)$, l_x, $F(x)$ y $f(x)$ suponiendo que $\mu(x)=\frac{1}{110-x}$ para $0\leq x\leq 110$

De (1.5.15) $\mu(x)=-\frac{d\ln s(x)}{dx}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} -\int_0^x \mu(t)\,dt &= \int_0^x -\tfrac{1}{110-t}\,dt \\ &= \ln\left[110-t\right]\Big|_0^x \\ &= \ln\left[\tfrac{110-x}{110}\right] \end{aligned}$$

de donde

$$s(x)=\left(\tfrac{110-x}{110}\right)$$

Como $l_x=l_0 s(x)$, entonces

$$l_x=l_0\left(\tfrac{110-x}{110}\right)$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 1 - s(x) \\
&= 1 - \left(\tfrac{110-x}{110}\right) \\
&= \tfrac{x}{110}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= F'(x) \\
&= \tfrac{1}{110}
\end{aligned}
$$

Si los valores de l_x fueran generados por una fórmula, sería posible obtener el valor exacto de $\mu(x)$, pero generalmente no se conoce una fórmula. Es posible utilizar los datos proporcionados por las Tablas de Mortalidad y suponer un comportamiento de la función l_x, para obtener el valor de la fuerza de mortalidad para edades enteras o fraccionadas.

Suponiendo que l_x es una función de segundo grado

$$l_x = a + bx + cx^2 \tag{1.5.16}$$

$$\frac{dl_x}{dx} = b + 2cx$$

para $x = 0$

$$\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0} = b$$

para $x = 1$ y $x = -1$

$$
\begin{aligned}
l_1 &= a + b + c \\
l_{-1} &= a - b + c
\end{aligned}
$$

restando

$$l_{-1} - l_1 = -2b$$

$$\frac{l_{-1} - l_1}{2} = -b = -\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0}$$

Para $x+1$ y $x-1$ y dividiendo entre l_x

$$\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} \cong -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = \mu(x) \tag{1.5.17}$$

o bien como

$$l_{x-1} - l_{x+1} = l_{x-1} - l_x + l_x - l_{x+1} = d_{x-1} + d_x$$

entonces

$$\frac{d_{x-1} + d_x}{2l_x} \cong \mu(x) \tag{1.5.18}$$

Suponiendo que l_x es una función de cuarto grado

$$l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

$$\frac{dl_x}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$$

$$\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0} = b$$

para $x = 1$ y $x = -1$

$$l_1 = a + b + c + d + e$$
$$l_{-1} = a - b + c - d + e$$

restando

$$l_{-1} - l_1 = -2b - 2d$$

para $x = 2$ y $x = -2$

$$l_2 = a + 2b + 4c + 8d + 16e$$
$$l_{-2} = a - 2b + 4c - 8d + 16e$$

restando

$$l_{-2} - l_2 = -4b - 16d$$

Con

$$8\left(l_{-1} - l_1\right) = -16b - 16d$$

y

$$8\left(l_{-1} - l_1\right) - \left(l_{-2} - l_2\right) = -12b$$

entonces

$$\frac{8\left(l_{-1}-l_1\right)-\left(l_{-2}-l_2\right)}{12}=-b=-\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0}$$

por lo tanto

$$\frac{8\left(l_{x-1}-l_{x+1}\right)-\left(l_{x-2}-l_{x+2}\right)}{12l_x}\cong-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}=\mu\left(x\right) \tag{1.5.19}$$

Como

$$l_{x-1}-l_{x+1}=l_{x-1}-l_x+l_x-l_{x+1}=d_{x-1}+d_x$$

y

$$\begin{aligned} l_{x-2}-l_{x+2} &= l_{x-2}-l_{x-1}+l_{x-1}-l_x+l_x-l_{x+1}+l_{x+1}-l_{x-2} \\ &= d_{x-2}+d_{x-1}+d_x+d_{x+1} \end{aligned}$$

retomando (1.5.19)

$$\frac{7\left(d_{x-1}+d_x\right)-\left(d_{x-2}+d_{x+1}\right)}{12l_x}\cong\mu\left(x\right) \tag{1.5.20}$$

Un resultado similar se obtiene al suponer que l_x es una función de tercer grado, ya que $\left(\frac{dl_x}{dx}\right)_{x=0}=b$.

Y al evaluar $\frac{8\left(l_{-1}-l\right)_1-\left(l_{-2}-l_2\right)}{12}$ se obtiene $-b=-\frac{dl_x}{dx}$, pudiendo expresarse fácilmente $\mu\left(x\right)$. Este resultado se esperaba, pues la gráfica de una función de tercer grado se asemeja en buena medida a la gráfica generada por los valores l_x de una Tabla de Mortalidad.

Ejemplo 1.5.2: Calcular $\mu\left(35\right)$ usando (1.5.19) con los siguientes datos

$l_{33}=7000$, $l_{34}=6909.09091$, $l_{35}=6818.18182$, $l_{36}=6727.27273$ y $l_{37}=6636.36364$

$$\begin{aligned} \mu_{35} &= \frac{8\left(l_{34}-l_{36}\right)-\left(l_{33}-l_{37}\right)}{12l_{35}} \\ &= \frac{8\left(6909.09091-6727.27273\right)-\left(7000-6636.36364\right)}{12\left(6818.18182\right)} \\ &= 0.013333 \end{aligned}$$

Una función que es preciso presentar por estar definida en función de la fuerza de mortalidad, es la función L_x. L_x representa el número esperado total de años vividos en conjunto y durante un año, del grupo inicial de l_0 vidas. Por lo tanto

$$L_x=\int_0^1 tl_{x+t}\mu\left(x+t\right)dt+l_{x+1} \tag{1.5.21}$$

En esta expresión la integral cuyos límites son 0 y 1, cuenta los años vividos por aquellos que murieron entre las edades x y $x+1$. El término l_{x+1} cuenta los años vividos entre las edades x y $x+1$ de los que sobrevivieron a la edad $x+1$. Integrando por partes

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_0^1 t dl_{x+t} + l_{x+1} \\ &= -t\, l_{x+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t} dt \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

La expresión (1.5.22) se utiliza a continuación para definir la tasa central de mortalidad. La tasa de mortalidad $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$, determina la probabilidad de que una persona de edad x muera dentro de un año. La tasa central de mortalidad denotada por m_x, relaciona el número de los que mueren entre las edades x y $x+1$, con el número de las personas que tienen todas las edades posibles entre x y $x+1$, L_x. De manera que la tasa central de mortalidad se define como

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x} \tag{1.5.23}$$

T_x denota el número total de años que, a partir de la edad x, vivirán los componentes del grupo inicial l_0 y hasta que el grupo se extinga. Se define como

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^\infty t l_{x+t}\mu(x+t)\,dt \\ &= -\int_0^\infty t dl_{x+t} \\ &= \int_0^\infty l_{x+t} dt \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

La última integral puede interpretase como la integral del tiempo total vivido entre las edades $x+t$ y $x+t+dt$ por las l_{x+t} vidas que sobrevivieron a éste intervalo.

Finalmente el número promedio de años del tiempo de vida futuro de los l_x sobrevivientes del grupo en la edad x se define por

$$\frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_0^\infty l_{x+t} dt}{l_x} = \int_0^\infty {}_t p_x dt \tag{1.5.25}$$

1.6 Hipótesis relativas a la Fuerza de Mortalidad

A lo largo de la historia se han dado intentos por encontrar expresiones analíticas para la función l_x. En 1724 el matemático francés De Moivre señaló que l_x decrecía en progresión geométrica con la edad y propuso la expresión $l_x = ar^x$. Esta fue abandonada porque no se anula cuando *x* aumenta y por dar la misma tasa de mortalidad para todas las edades, así como la misma tasa de mortalidad instantánea. Lo anterior se puede observar en las siguientes expresiones

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{ar^x - ar^{x+1}}{ar^x} = 1 - r$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{r}\frac{dr^x}{dx} = \frac{r^x \log r}{r^x} = -\log r$$

En 1729 corrigió su aportación y propuso que l_x decrecía en progresión aritmética, es decir, $l_x = A - nx$. Sin embargo como puede apreciarse, esta expresión conservaba los mismos inconvenientes que la anterior,

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{(w-x) - \left[w - (x+1)\right]}{w-x} = \frac{1}{w-x}$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{w-x}\frac{d(w-x)}{dx} = \frac{1}{w-x}$$

Más adelante surgieron nuevas aportaciones que han perdurado en la actualidad. Estas aportaciones se dieron por Gompertz y Makeham y se presentan a continuación.

1.6.1 Hipótesis de Gompertz

En 1825 Benjamín Gompertz dio una enorme aportación a la ciencia actuarial. Es importante destacar el razonamiento que dio origen a esta relación y por ello se muestra textualmente la comunicación dirigida a la Royal Society de Londres citada por González Galé

> *Es posible que la muerte sea la consecuencia de dos causas generalmente coexistentes: una el azar, sin disposición previa a la muerte o al deterioro; otra, una deterioración o una impotencia creciente para resistir a la destrucción. Si, por ejemplo, existiesen ciertas enfermedades a las que jóvenes y viejos estuvieran igualmente expuestos, y que fuesen igualmente funestas para viejos y para jóvenes, es evidente que las muertes por esta causa, en ambos grupos, guardarían entre sí la misma proporción que los grupos dados, con tal de que los números fueran suficientemente grandes como para que pudiesen operar las leyes del azar. Si no hubiera otras enfermedades, la vida tendría, en todas las edades, el mismo valor y, tanto el número de sobrevivientes como el de muertos, decrecería con la edad en progresión geométrica, mientras las edades crecían en progresión aritmética. Pero si el género humano adquiere, de día en día, gérmenes de indisposición –o dicho en otros términos: está cada vez más expuesto a morir–, lo cual parece ser una hipótesis verosímil –por lo menos, para una gran parte de la vida, y aún cuando lo contrario pueda ocurrir en ciertos periodos–, fuerza es deducir que el número de sobrevivientes a partir de cierto número de personas de igual edad, decrece, en intervalos iguales de tiempo, más rápidamente que la progresión geométrica, y que, así, las probabilidades de oír decir que un determinado hombre ha llegado a un determinado punto de*

vejez, disminuyen en una progresión mucho más rápida, aunque no haya límite alguno con respecto a la edad que pueda alcanzar.

Si el agotamiento del poder del hombre para evitar la muerte fuera tal que, en promedio, y al final de períodos de tiempo infinitamente pequeños, pero de igual duración, perdiera, también, porciones iguales del poder oponerse a la muerte que tenía al principio de dicho intervalo, entonces, a la edad x la intensidad de la mortalidad podría ser representada por a *y* q^x*, siendo* a *y* q *constantes a determinar*[3]

El razonamiento anterior dio origen a la hipótesis de Gompertz, la cual se denota como

$$\mu(x) = Bc^x \qquad B>0,\ c>1 \tag{1.6.1.1}$$

Usando (1.6.1.1) para obtener la función l_x, se tiene

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \frac{d\ln l_y}{dy}dy &= -\int_0^x Bc^y dy \\
&= -\left(\frac{Bc^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c}\right) \\
&= -\left(c^x - 1\right)\ln g \\
&= -\ln g^{c^x - 1}
\end{aligned}$$

donde

$$\ln g = \frac{B}{\ln c}$$

entonces

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = l_0 e^{\ln g^{c^x-1}} = l_0 g^{c^x-1}$$

haciendo

$$k = \frac{l_0}{g}$$

l_x se puede escribir como sigue

$$l_x = kg^{c^x} \tag{1.6.1.2}$$

Considerando ahora la expresión ${}_n p_x$ y rescribiendo en términos de la hipótesis de Gompertz, se obtiene

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{kg^{c^{x+t}}}{kg^{c^x}} = g^{c^x\left(c^t-1\right)} \tag{1.6.1.3}$$

---

[3] González Galé, J. *Elementos de Cálculo Actuarial*, Macchi, Buenos Aires, 1970, 40-41.

1.6.2 Hipótesis de Makeham

En 1860 Guillermo Mateo Makeham adoptó un estudio sobre *La ley de mortalidad*, que se basó en el trabajo de Gompertz. El razonamiento que lo generó fue el siguiente:

> *Al aplicar la fórmula de Gompertz advierte Makeham claramente que no ajusta las tablas con la precisión que fuera de desear, pero reconoce que las mejores prácticas en la construcción de tablas de mortalidad habrán de ser alcanzadas mediante la ley de Gompertz.*
>
> *Ensaya diversos procedimientos y comprueba que los valores ajustados corresponden mejor a la realidad sometiendo la fórmula de Gompertz a una modificación que equivale a tomar*
>
> $$\mu(x) = A + Bc^x$$
>
> *corrección que no hace, en definitiva, más que introducir en la fórmula una constante que representa el azar, ese azar al que el mismo Gompertz se había referido, y al que Makeham recurrió –hay que decirlo todo– no por haber reconocido a priori la omisión en que había incurrido Gompertz sino para superar dificultades materiales surgidas en la práctica.*[4]

Esta hipótesis de Makeham se denota como

$$\mu(x) = A + Bc^x \qquad B > 0, A \geq -B, c > 1 \qquad (1.6.2.1)$$

Integrando en ambos lados

$$\begin{aligned}\int_0^x \mu(y)\,dy &= \int_0^x \left(A + Bc^y\right) dy \\ &= Ax + \frac{Bc^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c} \\ &= -\ln s^x - \ln g^{c^x - 1}\end{aligned}$$

Donde

$$\ln s = -A$$

$$\ln g = -\frac{B}{\ln c}$$

Entonces

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = l_0 e^{\ln s^x + \ln g^{c^{x}-1}} = l_0 s^x g^{c^x - 1}$$

Haciendo $k = \dfrac{l_0}{g}$ se obtiene

$$l_x = ks^x g^{c^x} \qquad (1.6.2.2)$$

Considerando la expresión ${}_n p_x$ y rescribiendo en términos de la hipótesis de Makeham

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{ks^{x+t} g^{c^{x+t}}}{ks^x g^{cx}} = s^t g^{c^x\left(c^t - 1\right)} \qquad (1.6.2.3)$$

[4] González Galé, J.*Elementos de Cálculo Actuarial*, Macchi , Buenos Aires, 1970, 42.

Sustituyendo la fuerza de mortalidad de (1.6.2.1) en $s(x) = e^{-\int_0^x \mu(s)ds}$, se obtiene

$$s(x) = e^{\int_0^x -\left(A+Bc^s\right)ds}$$
$$= e^{\left[-Ax - \frac{B\left(c^x-1\right)}{\log c}\right]}$$

El propósito de ambas hipótesis es generar una expresión matemática que modele el comportamiento de la mortalidad, es decir, que genere la forma de la función. Gompertz y Makeham denotaron con Bc^x, el envejecimiento al que está sometido el ser humano día tras día. A pesar de que fue Gompertz quien propuso que además del envejecimiento existe una causa aleatoria a la que está expuesto el hombre, el azar, no lo modeló en su fórmula. Makeham indicó el azar con la constante A. Lo anterior muestra que la hipótesis de Gompertz es un caso particular de la hipótesis de Makeham, donde $A = 0$.

En (1.6.1.1) y (1.6.2.1) se indicaron las restricciones de los coeficientes. En Makeham $A \geq -B$ y el resto de las restricciones son iguales en las dos hipótesis.

Una vez que se estiman los parámetros a partir de información sobre la mortalidad, para lo cual se requiere el estudio por grupos de edad, se pueden calcular probabilidades de muerte y sobrevivencia, así como de todas las funciones que están relacionadas con la fuerza de mortalidad.

En la teoría de múltiples vidas es de gran utilidad el uso de las hipótesis Gompertz y Makeham, ya que simplifican los cálculos de varias vidas de edades diferentes, a una vida o a varias vidas de la misma edad respectivamente. A pesar de que el uso de estas hipótesis en vidas múltiples subestima o sobrestima, situación que se expone en su momento, el valor de la edad sigue siendo una buena aproximación.

Construir una fórmula que reproduzca la curva de sobrevivencia no es fácil, ya que en los primeros años hay un decremento brusco, además de presentar algunos puntos de inflexión. Las hipótesis de Gompertz y Makeham proporcionan una buena aproximación, aunque para algunos datos el ajuste del rango inicial y final no es bueno. Situación que puede observarse al contrastar la curva ajustada y la curva obtenida con los datos reales. Es posible que para ciertos datos sea un buen ajuste para todo el rango y que para otro conjunto, haya que quitar ciertos rangos. El rango de edades propuesto originalmente por Gompertz es de 10 o 15 a 55 o 60, considerando ciertos cambios en las constantes para la edades entre 50 y 60. En el caso de la hipótesis de Makeham el rango es sobre los 20 años y casi hasta la edad final.

En la parte de anexos de este trabajo se incluyen las Tablas Ilustrativas bajo la ley de Gompertz y Makeham. Los parámetros utilizados se tomaron del trabajo Tablas de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1898, realizado por la Comisión de Seguros y Fianzas. Los parámetros arrojados por ese estudio son

$$A = 0.000905426$$
$$B = 0.0000727187$$
$$C = 1.0909846240$$

1.7 Esperanza de Vida Completa

La esperanza completa de vida denotada por $\overset{0}{e}_x$ se define como el tiempo que se espera viva una persona de edad *x*. Para ello se requiere obtener la esperanza de la variable aleatoria $T(x)$

Por definición

$$\overset{0}{e}_x = E\left[T(x)\right] = \int_0^{\infty} t \; {}_t p_x \mu(x+t) dt \tag{1.7.1}$$

como ${}_t p_x \mu(x+t) = \frac{d}{dt}(-{}_t p_x)$ entonces

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^{\infty} t \frac{d}{dt}(-{}_t p_x)\, dt \tag{1.7.2}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \frac{d}{dt}(-{}_t p_x) \\ du &= dt & v &= -{}_t p_x \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

$$\overset{0}{e} = -t \; {}_t p_x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} {}_t p_x dt \tag{1.7.4}$$

De (1.7.4) $E\left[T(x)\right]$ existe si $\lim_{t\to\infty} t \; {}_t p_x = 0$ dejando

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt \tag{1.7.5}$$

Conociendo la esperanza de vida que tiene una población, se puede saber cómo es su nivel de salud, de manera que esta medida es utilizada para comparar niveles de salud en poblaciones diferentes.

Para calcular la varianza de $T(x)$ hay que obtener el segundo momento

$$E\left[T(x)^2\right] = \int_0^{\infty} t^2 \; {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \tag{1.7.6}$$

$$= \int_0^{\infty} t^2 \frac{d}{dt}(-{}_t p_x) dt \tag{1.7.7}$$

nuevamente integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= \frac{d}{dt}(-{}_t p_x) \\ du &= 2t & v &= -{}_t p_x \end{aligned}$$

$$E\left[T(x)^2\right] = -t^2 \; {}_t p_x \Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} t \; {}_t p_x dt \tag{1.7.8}$$

$$E\left[T(x)^2\right] \quad \text{existe si } \lim_{t\to\infty} t^2\ {}_t p_x = 0$$

Por lo tanto $E\left[T(x)^2\right] = 2\int_0^\infty t\ {}_t p_x dt$ (1.7.9)

$$Var\left[T(x)\right] = 2\int_0^\infty t\ {}_t p_x dt - \left(\overset{0}{e}_x\right)^2 \quad (1.7.10)$$

Finalmente la expresión (1.5.25) puede reescribirse como

$$\frac{T_x}{l_x} = \int_0^\infty {}_t p_x dt$$
$$= \overset{0}{e}_x$$

De donde se puede definir $\overset{0}{e}_x$ como el número de años que le correspondería vivir a (x), si los años que debe vivir el grupo (T_x), se repartieran por igual entre los integrantes del grupo l_x.

Ejemplo 1.7.1: calcular $\overset{0}{e}_{30}$ y $\text{var}\left[T(x)\right]$, considerando que la función de sobrevivencia es $s(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x}$

Sabemos que $\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty \frac{s(x+t)}{s(x)} dt$

de manera que

$$\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{10}\sqrt{100-x-t}}{\frac{1}{10}\sqrt{100-x}} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{100-x}} \int_0^{100-x} (100-x-t)^{\frac{1}{2}} dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{100-x}} \left[-\frac{2}{3}(100-x-t)^{\frac{3}{2}} \right]\Big|_0^{100-x}$$
$$= \frac{2}{3}(100-x)$$

por lo tanto

$$\overset{0}{e}_{30} = \frac{2}{3}(70) = 46.666 \quad \text{años que le quedan por vivir}$$

De (1.7.10) sabemos que $Var\left[T(x)\right] = 2\int_0^\infty t\ {}_t p_x dt - \left(\overset{0}{e}_x\right)^2$

Desarrollando la primera expresión

$$2\int_0^\infty t\ {}_t p_x = 2\int_0^\infty t \frac{\frac{1}{100}\sqrt{100-x-t}}{\frac{1}{100}\sqrt{100-x}} dt$$
$$= \frac{2}{\sqrt{100-x}} \int_0^{100-x} t(100-x-t)^{\frac{1}{2}} dt$$

integrando por partes

$$= \tfrac{2}{\sqrt{100-x}}\left[-t\,\tfrac{2}{3}\left(100-x-t\right)^{3/2}\Big|_0^{100-x} - \int_0^{100-x} -\tfrac{2}{3}\left(100-x-t\right)^{3/2} dt \right]$$

$$= \tfrac{2}{\sqrt{100-x}}\left[\tfrac{4}{15}\left(100-x\right)^{5/2} \right]$$

$$= \tfrac{8}{15}\left(10-x\right)^2$$

por lo tanto

$$Var\left[T\left(x\right)\right] = \tfrac{8}{15}\left(100-x\right)^2 - \tfrac{4}{9}\left(100-x\right)^2$$

1.8 Esperanza de Vida Entera

Al calcular la esperanza de la variable aleatoria discreta $K(x)$, que representa el número de años completos que faltan para el fallecimiento de (x), se obtiene la esperanza de vida entera. Esta esperanza se denota por e_x y se define como el número de años (enteros) que se espera viva (x)

$$e_x = E\left[K\left(x\right)\right] \tag{1.8.1}$$

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr\left[K\left(x\right) = k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\ {}_k p_x q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\ {}_{k|}q_x \tag{1.8.2}$$

recordando

$${}_{k|}q_x = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$$

$$= -\left({}_{k+1} p_x - {}_k p_x \right)$$

$$= -\Delta\, {}_k p_x$$

$$= \Delta\left(-{}_k p_x\right)$$

retomando la expresión

$$e_x = \sum_{k=0}^{\infty} k\Delta\left(-{}_k p_x\right) \tag{1.8.3}$$

sumando por partes y usando $f(k) = -{}_k p_x$, $g(k) = k$ y $\Delta g = k+1-k = 1$

$$\sum_{x=1}^{n} g\left(x\right)\Delta f\left(x\right) = f\left(x\right)g\left(x\right)\Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^{n} f\left(x+1\right)\Delta g\left(x\right) = f\left(x\right)g\left(x\right)\Big|_1^{n+1} - \Delta^{-1}\left[f\left(x+1\right)\Delta g\left(x\right)\right]_1^{n+1}$$

$$e_x = k\left(-{}_k p_x\right)\Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_x \cdot 1$$

Si $\lim_{k\to\infty} k(-{}_x p_x) = 0$ entonces

$$e_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x \tag{1.8.4}$$

Calculando el segundo momento para obtener la varianza

$$E\left[K(x)^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \Delta\left(-{}_k p_x\right) \tag{1.8.5}$$

con $f(k) = -{}_k p_x$ y $g(k) = k^2$

$$= k^2\left(-{}_k \ p_x\right)\Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x \Delta k^2 \tag{1.8.6}$$

considérese

$$\begin{aligned}\Delta k^2 &= (k+1)^2 - k^2 \\ &= k^2 + 2k + 1 - k^2 \\ &= 2k + 1\end{aligned}$$

entonces

$$E\left[K(x)^2\right] = k^2\left(-{}_k p_x\right)\Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)_{k+1} p_x \tag{1.8.7}$$

$E\left[K(x)^2\right]$ existe si $\lim_{t\to\infty} k^2\left(-{}_k p_x\right) = 0$

$$E\left[K(x)^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)_{k+1} p_x = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)_k \ p_x$$

por lo tanto

$$Var\left[K(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\ {}_k p_x - \left(e_x\right)^2 \tag{1.8.8}$$

Ejemplo 1.8.1: calcular e_{90}, considerando que $l_x = 1000\left(\frac{1-x}{100}\right)$ para $0 \le x \le 100$

De (1.8.4) retomamos $e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$. Calculando primero ${}_t p_x$

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1-\frac{x+t}{100}}{1-\frac{x}{100}} = 1 - \frac{t}{100-x}$$

Para $x = 90$ se tiene ${}_t p_{90} = 1 - \frac{t}{10}$

Finalmente

$$e_{90} = \sum_{t=1}^{9} {}_t p_{90} = \sum_{t=1}^{9} \left(1 - \frac{t}{10}\right) = 4.5$$

Considérese nuevamente la variable aleatoria continua $S(x)$, que denota la fracción de año vivido al ocurrir la muerte de (x) con $0 < S(x) < 1$

$T = K + S$ como K y S son independientes

$$E[T] = E[K] + E[S] \tag{1.8.9}$$

$$\overset{0}{e}_x = e_x + E[S] \tag{1.8.10}$$

Bajo DUM $S \sim U(0,1)$

$$E[U] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[U] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Si $S \sim U(0,1)$ entonces

$$E[S] = \frac{1}{2} \qquad Var[S] = \frac{1}{12}$$

por lo tanto

$$\overset{0}{e}_x = e_x + \frac{1}{2} \tag{1.8.11}$$

$$Var[T] = Var[K] + \frac{1}{12} \tag{1.8.12}$$

En las tablas de mortalidad es frecuente agregar una columna para la esperanza de vida. Cuando se posee la función de supervivencia el problema se resume en evaluar la integral $\overset{0}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt$, sin embargo no siempre se conoce la función de supervivencia y sólo se tienen los valores discretos correspondientes a $K(x)$. La esperanza entera de vida es mas laboriosa de evaluar, por ejemplo la esperanza de vida de un recién nacido implica calcular las probabilidades ${}_1 p_0, {}_2 p_0, {}_3 p_0,...$ y luego sumarlas. Para una persona de un año de edad, hay que calcular las probabilidades ${}_1 p_1, {}_2 p_1, {}_3 p_1,...$ y sumarlas sucesivamente para cada edad. Para lograrlo se utilizan fórmulas recursivas y se recomienda comenzar de atrás para adelante, es decir, en lugar de iniciar con las edades 0, 1, 2,... se inicia por $\omega, \omega-1, \ldots, 2, 1, 0$.

En la esperanza completa de vida se usa la aproximación de la regla trapezoidal para la integral $\int_0^1 {}_s p_x ds$, es decir

$$\overset{0}{e}_x \cong \frac{1+p_x}{2} + p_x \overset{0}{e}_{x+1}$$

1.9 Supuestos para edades fraccionarias

En muchas ocasiones sólo se cuenta con los valores de la v.a. $K(x)$, estos valores pueden servir para encontrar la distribución de la v.a. $T(x)$. Para ello es necesario hacer supuestos sobre la distribución entre dos enteros, es decir, interpolar entre los valores conocidos de $K(x)$. A continuación de presentan los supuestos más comunes de interpolación. Se asume que $x \in Z^+$ y $t \in [0,1]$.

1.9.1 Interpolación Lineal

Se conoce como Distribución Uniforme de Muertes (DUM)

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1) \tag{1.9.1.1}$$

Usando este supuesto para calcular q_x

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{s(x)-\left[(1-t)s(x)+ts(x+1)\right]}{s(x)} \\ &= \frac{t\left[s(x)-s(x+1)\right]}{s(x)} \\ &= tq_x \end{aligned}$$

por lo tanto, bajo este supuesto

$${}_t p_x = 1 - tq_x \tag{1.9.1.2}$$

Expresada a través de la fuerza de mortalidad:

$$\mu(x+t) = \frac{-s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{-\frac{d}{dt}\left[(1-t)s(x)+ts(x+1)\right]}{s(x+t)} \tag{1.9.1.3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{s(x)-s(x+1)}{s(x+t)} \cdot \frac{1/s(x)}{1/s(x)} \\ &= \frac{q_x}{{}_t p_x} \\ &= \frac{q_x}{1-tq_x} \end{aligned} \tag{1.9.1.4}$$

por lo tanto

$${}_t p_x \mu(x+t) = (1-tq_x)\frac{q_x}{1-tq_x} = q_x \qquad \text{para } 0 < t < 1 \tag{1.9.1.5}$$

1.9.2 Interpolación Exponencial

$$\log s(x+t) = (1-t)\log s(x) + t\log s(x+1) \tag{1.9.2.1}$$

o bien

$$s(x+t) = s(x)^{1-t}\, s(x+1)^{t} = s(x)\frac{s(x+1)^{t}}{s(x)^{t}}$$

$$= s(x)(p_x)^{t} \tag{1.9.2.2}$$

este supuesto se conoce como Fuerza Constante de Mortalidad.

1.9.3 Interpolación Armónica

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)} \tag{1.9.3.1}$$

o bien

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{(1-t)s(x+1) + ts(x)}{s(x)s(x+1)} \tag{1.9.3.4}$$

$$s(x+t) = \frac{s(x)s(x+1)}{(1-t)s(x+1) + ts(x)} \tag{1.9.3.5}$$

Para ${}_tq_x$ y μ_x se tienen la siguientes expresiones

$${}_tq_x = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x} \tag{1.9.3.6}$$

$$\mu(x+t) = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x} \tag{1.9.3.7}$$

Este supuesto se conoce como curva hiperbólica e históricamente como la Hipótesis de Balducci.

La más utilizada es DUM por ser la más sencilla y práctica, aunque en realidad la elección de alguna interpolación depende del tipo de ajuste deseado. Las probabilidades que requieren supuestos sobre edades fraccionarias son ${}_tq_x$, ${}_tp_x$, $\mu(x+t)$, ${}_{1-t}q_{x+t}$, ${}_sq_{x+t}$ y ${}_tp_x\mu(x+t)$ donde $s \in [0,1]$. El siguiente cuadro tomado del libro de Bowers, muestra las expresiones para cada función al adoptar los supuestos mencionados.

Función	Distribución Uniforme	Fuerza Constante	Balducci
${}_t q_x$	tq_x	$1-e^{-\mu t}$	$\frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_t p_x$	$1-tq_x$	$e^{-\mu t}$	$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
$\mu(x+t)$	$\frac{q_x}{1-tq_x}$	μ	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_y q_{x+t}$	$\frac{yq_x}{1-tq_x}$	$1-e^{-\mu y}$	$\frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
${}_t p_x \mu(x+t)$	q_x	$e^{-\mu t}\mu$	$\frac{q_x(1-q_x)}{\left[1-(1-t)q_x\right]^2}$

Ejemplo 1.9.1: Calcular $\mu(47\ \tfrac{3}{4})$ con $l_{47}=9379691.59$ $l_{48}=9329819.77$ asumiendo

a. Distribución Uniforme de las Muertes

De (1.9.4) $\mu(x+t)=\frac{{}_t q_x}{1-tq_x}$, calculando $q_{47}=1-\frac{9329819.77}{9379691.59}=0.005317$

Por lo tanto $\mu(40\ \tfrac{3}{4})=\dfrac{0.005317}{1-(\tfrac{3}{4})(0.005317)}=0.005338$

b. Hipótesis de Balducci

De (1.9.5) $\mu(x+t)=\dfrac{q_x}{1-(1-t)q_x}$ calculando

Por lo tanto $\mu(40\ \tfrac{3}{4})=\dfrac{0.005317}{1-(1-\tfrac{3}{4})(0.005317)}=0.005324$

1.10 Seguros de Vida Individual

Los seguros de vida individual están diseñados para reducir el impacto de las consecuencias financieras asociadas al evento aleatorio de la muerte. Existen varios planes de seguros. Se diferencian entre ellos por: la temporalidad que cubre el contrato (vitalicios y temporales), momento en que se paga el beneficio (al final del año en que ocurre el fallecimiento o al momento en que fallece el asegurado), periodo en que entra en vigor el contrato (inmediatos o diferidos). La combinación de estas características genera los diferentes tipos de seguros que se presentan al final del trabajo, en los cuadros correspondientes a seguros de vida individual.

En el caso de los seguros de vida entera o vitalicios, la ocurrencia del evento y el tamaño de la reclamación son ciertos, la incertidumbre radica en la fecha de la reclamación.

A continuación se presenta el modelo matemático para los seguros de vida pagaderos al momento en que ocurre el fallecimiento. El modelo depende de la v.a. $T(x)$ que denota el tiempo de vida futuro del asegurado.

t	es el tiempo que transcurre desde la emisión de la póliza hasta el momento en que se paga la suma asegurada (momento en que ocurre el fallecimiento)
b_t	es la función beneficio que es pagada a los beneficiarios
v_t	factor descuento al tiempo t

El valor presente de un seguro de vida se define como sigue:

$$Z_t = b_t v_t \tag{1.10.1}$$

Como el modelo depende de la v.a. $T(x)$

$$Z = Z_{T(x)} = b_{T(x)} v_{T(x)} \tag{1.10.2}$$

donde Z es la v.a. que denota el valor presente de un seguro de vida.
Considerando tasas de interés constantes, suma asegurada de 1 unidad monetaria (u.m.), así como pagos al momento en que ocurre el fallecimiento, la esperanza de Z es

$$E[Z] = \int_0^\infty v^t f_{T(x)}(t)\,dt \tag{1.10.3}$$

$$= \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x \mu(x+t)\,dt \tag{1.10.4}$$

El j-ésimo momento de la distribución de Z con $(1+i) = e^\delta$ es

$$E\left[Z^j\right] = \int_0^\infty \left(v^t\right)^j f_{T(x)}(t)\,dt \tag{1.10.5}$$

$$= \int_0^\infty e^{-j\delta t}\, {}_t p_x \mu(x+t)\,dt \tag{1.10.6}$$

donde la integral es la $E[Z]$ calculada con la fuerza de interés $j\delta$. Lo anterior se conoce como regla de los momentos y se enuncia a continuación

$$E\left[Z^j\right] @ \delta_t = E[Z] @ j\delta_t \tag{1.10.7}$$

Aquí @ se lee calculada a la tasa.

La varianza de Z se obtiene

$$\operatorname{var}[Z] = E\left[Z^2\right] - E[Z]^2 \tag{1.10.8}$$

$$\operatorname{var}[Z] = {}^2\overline{A}_x - \left(\overline{A}_x\right)^2$$

${}^2\overline{A}_x$ denota un seguro continuo de vida entera, calculado a la tasa 2δ como lo refiere la regla de los momentos en (1.10.7).

El modelo presentado arriba es para los seguros que pagan en el momento en que ocurre el fallecimiento. Los seguros que pagan al final del año en que ocurre la muerte dependen de la v.a.

$K(x)$. $K(x)$ representa el número de años completos que faltan para que ocurra el fallecimiento de x. El pago se efectúa en el año $K(x)+1$.

El valor presente de un seguro pagadero al final del año en que ocurre el fallecimiento es

$$Z_{K+1} = b_{K+1} v_{K+1} \tag{1.10.9}$$

El valor presente actuarial del un seguro unitario, pagadero al final del año en que ocurre en fallecimiento es igual a la esperanza de Z

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k}|q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k}p_x q_{x+k} \tag{1.10.10}$$

La regla de los momentos se mantiene para los seguros pagaderos al final del año en que ocurre el fallecimiento.
En el caso de un seguro dotal mixto, pagadero en el momento en que ocurre el fallecimiento, se consideran dos beneficios; uno por fallecimiento y otro por sobrevivencia. La varianza se calcula como sigue:

$$Z_1 \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

$$Z_2 \begin{cases} 0 & T \le n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = \begin{cases} v^T & T \le n \\ V^n & T > n \end{cases} \tag{1.10.11}$$

$$\operatorname{var}[Z] = \operatorname{var}[Z_1] + \operatorname{var}[Z_2] + 2\operatorname{cov}[Z_1 Z_2] \tag{1.10.12}$$

donde

$$\operatorname{cov}[Z_1 Z_2] = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2]$$

por definición de variables aleatorias

$$Z_1 Z_2 = 0$$

por lo tanto

$$\operatorname{cov}[Z_1 Z_2] = -E[Z_1]E[Z_2]$$

De donde

$$\operatorname{var}[Z] = {}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)^2 - {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \left(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\right)^2 - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{1.10.13}$$

Existe relación entre los seguros pagaderos al momento en que ocurre la muerte del asegurado y los seguros que pagan al final de año. Retomando la expresión

$$T = K + S$$

con K y S independientes bajo DUM y con $S \sim U(0,1)$

como $K+1$ y $S-1$ son independientes con $1-S \sim U(0,1)$

entonces $T = (K+1) - (1-S)$

A través de esta relación es posible evaluar $\bar{A}_x$ como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E\left[v^T\right] \\
&= E\left[v^{K+S}\right] = E\left[v^{K+1}v^{-(1-S)}\right] \\
&= E\left[v^{K+1}(1+i)^{1-S}\right] \\
&= E\left[v^{K+1}\right]E\left[(1+i)^{1-S}\right] \\
&= A_x E\left[(1+i)^{1-S}\right]
\end{aligned}$$

como $1-S \sim U(0,1)$

$$\begin{aligned}
E\left[(1+i)^{1-S}\right] &= \int_0^1 (1+i)^t \, 1dt \\
&= \int_0^1 e^{\delta t} dt \\
&= \left.\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right|_0^1 = \frac{e^{\delta}}{\delta} - \frac{1}{\delta} \\
&= \frac{1}{\delta}\left(e^{\delta} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\delta}(1 + i - 1) \\
&= \frac{i}{\delta}
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta} \tag{1.10.14}$$

Ejemplo 1.10.1: Calcular:

a. el valor presente de un seguro de vida, temporal a 5 años, pagadero al final del año en que ocurra la muerte de (38). La tasa promedio durante los cinco años es del 6%. La suma asegurada es por 100,000 pesos.

b. la varianza

El siguiente es un extracto de la tabla ilustrativa de vida presentada en la parte de anexos.

x	q_x
38	0.00273
39	0.00294
40	0.00317
41	0.00341
42	0.00367

a. $E[Z] = 100,000 \sum_{k=0}^{4} v^{k+1} {}_{k|}q_x = 100,000(0.013295267) = 1,329.526728$

b. Calculando la $Var[Z]$

$$E\left[Z_i^2\right] = \sum_{k=0}^{4} \left[100000 v^{k+1}\right]^2 {}_{k|}q_x$$
$$= (100000)^2 \sum_{k=0}^{4} v^{2k+2} {}_{k|}q_x$$
$$= 23,663,895$$

$$Var[Z] = E\left[Z^2\right] - E[Z]^2$$
$$= 23,663,895\text{-}(664.7633642)^2 = 23,221,984.67$$

Ejemplo 1.10.2: Se tienen un grupo de 110 personas, cuya sobrevivencia entre los miembros es independiente una de otra. Suponga que cada persona tiene edad x y que están protegidos por un seguro que paga 1000 u.m. al momento del fallecimiento. El grupo esta sujeto a una mortalidad constante $\mu = 0.04$. El rendimiento del fondo que financia el beneficio es de $\delta = 0.06$. Calcular el monto mínimo al tiempo $t = 0$, tal que la probabilidad de que el fondo sea suficiente para enfrentar las obligaciones sea del 0.95.

Sea S el valor presente de las reclamaciones del grupo de asegurados

$$S = \sum_{j=1}^{110} Z_j$$

Calculando $E\left[Z_j\right]$

$$E\left[Z_j\right] = 1000\bar{A}_x$$
$$= 1000\left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t)\,dt\right]$$

$$=1000\left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt\right]$$

$$=1000\left[\mu \frac{e^{-(\delta+\mu)t}}{-(\delta+\mu)}\Bigg|_0^{\infty}\right]$$

$$=1000\left[\frac{\mu}{\delta+\mu}\right]=1000\left[\frac{0.04}{0.06+0.04}\right]$$

$$=400$$

Por lo tanto $E[S]=\sum_{J=1}^{110}E\left[Z_j\right]=44,000$

Calculando la varianza

$$Var[Z]=E\left[Z^2\right]-E[Z]^2$$

$$E\left[Z^2\right]=(1000)^2\left({}^2\bar{A}_x\right)$$

$$=(1000)^2\left[\mu \frac{e^{-(2\delta+\mu)t}}{-(2\delta+\mu)}\Bigg|_0^{\infty}\right]$$

$$=(1000)^2\left[\frac{\mu}{2\delta+\mu}\right]$$

$$=(1000)^2(0.25)$$

$$=250,000$$

por lo tanto

$$Var[Z]=250,000-(400)^2$$

$$=90,000$$

y

$$Var[S]=\sum_{j=1}^{110}\mathrm{var}\left[Z_j\right]=9,900,000$$

Sea h el monto mínimo tal que

$$\Pr[S\le h]=0.95$$

$$\Pr\left[\frac{S-E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}}\le\frac{h-44,000}{3146.42654}\right]=0.95$$

Suponiendo que $\frac{S-E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}}\sim N(0,1)$ entonces

$\frac{h-44,000}{3146.42654}=1.645$ por lo tanto $h=49,175.87167$

1.11 Anualidades de Vida Individual

Una anualidad contingente, es una sucesión de pagos que se realizan siempre y cuando el beneficiario esté con vida. Las anualidades contingentes, se pueden clasificar por el tipo de pago (anticipado o vencido), tiempo que cubre los beneficios (temporales o vitalicios), momento en que entra en vigor el contrato (diferido o inmediato). Los pagos pueden ser continuos o bien a intervalos iguales de tiempo (anuales o pagaderos *m* veces al año).

Para definir el valor presente actuarial de las anualidades contingentes, se utilizan dos técnicas: la de pago corriente y la de pago acumulado. A continuación se presentan los pasos para cada una de las técnicas.

Técnica de los Pagos Corrientes (TPC)

i. Identificar la función de descuento
ii. Identificar el pago al año *k*
iii. Identificar la probabilidad de realizar el pago en el año *k*
iv. Multiplicar i, ii y iii
v. Sumar sobre los posibles valores de *k*

Esta técnica se refiere al caso de anualidades discretas. Para el caso de anualidades continuas se sigue el mismo procedimiento, solo que en lugar de sumar se integra y los periodos se consideran al tiempo *t*.

Técnica de los Pagos Acumulados (TPA)

i. Identificar el valor presente de los pagos realizados al año *k*
ii. Identificar la probabilidad de realizar los pagos hasta el año *k*
iii. Multiplicar i y ii
iv. Sumar Sobre los posibles valores de *k*

Las Técnicas de Pagos Corriente y de Pagos Acumulados son equivales. Su diferencia radica en la forma como expresan el valor presente de los pagos.

Considérese una anualidad continua, vitalicia, unitaria, denotada por $\bar{a}_x$. Teniendo en cuenta la v.a. $T(x)$, asociada al tiempo de vida futuro de (x), el valor presente de los pagos de la anualidad, hasta el fallecimiento de (x), es $\bar{a}_{\overline{T}|}$. Por lo tanto el valor presente actuarial es

$$\bar{a}_x = E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] \tag{1.11.1}$$

como la función de densidad de probabilidad de T es ${}_t p_x \mu(x+t)$ entonces

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \tag{1.11.2}$$

haciendo

$$u = \bar{a}_{\overline{T|}} \qquad dv = {}_t p_x \mu(x+t)\,dt$$

$$du = d\,\frac{1-v^t}{\delta} = v^t \qquad v = -{}_t p_x$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= -{}_t p_x \bar{a}_{\overline{t|}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty v^t\,{}_t p_x dt \\ &= \int_0^\infty v^t\,{}_t p_x dt \\ &= \int_0^\infty {}_t E_x dt \end{aligned} \qquad (1.11.3)$$

La expresión (1.11.13) exhibe la forma de pagos corrientes. O bien utilizando la expresión

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} \text{ y } \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta}$$

$$\bar{a}_x = E[Y] = \left[\frac{1-v^T}{\delta}\right] \qquad (1.11.4)$$

con $Z = v^T \quad T \geq 0$

$$\begin{aligned} &= E\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] \\ &= \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \end{aligned} \qquad (1.11.5)$$

Por lo que respecta a la varianza

$$Var[Y] = \text{var}\left[\frac{1-v^t}{\delta}\right] \qquad (1.11.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{var}\left[v^t\right]}{\delta^2} \\ &= \frac{{}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2}{\delta^2} \end{aligned} \qquad (1.11.7)$$

La valuación se presenta en la sección (1.12), al considerar el $\lim_{m\to\infty}$ de una anualidad pagadera m veces al año.

Como se indicó en los primeros párrafos de esta sección, existen anualidades contingentes cuyo pago se otorga anualmente. Estos pagos pueden ser vencidos (al final del año) o anticipados (al inicio del año).

La variable aleatoria Y denota el valor presente de una anualidad unitaria, vencida, pagadera mientras (x) esté con vida, es decir

$$Y = a_{\overline{K}|} \qquad K(x) \geq 0 \tag{1.11.8}$$

a través de la teoría de pagos acumulados (TPA)

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|}\, {}_k p_x q_{x+k} \tag{1.11.9}$$

por la teoría de pagos corrientes (TPC)

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\, {}_k p_x \tag{1.11.10}$$

Si Y denota el valor presente actuarial de una anualidad unitaria anticipada, pagadera mientras (x) esté con vida, entonces

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K(x) \geq 0 \tag{1.11.11}$$

La esperanza de la v.a. Y

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_x q_{x+k} \tag{1.11.12}$$

considerando

$$\begin{aligned} {}_k p_x q_{x+k} &= {}_{k|}q_x \\ &= {}_k p_x - {}_{k+1} p_x \\ &= \Delta\left(-{}_k p_x\right) \end{aligned} \tag{1.11.13}$$

$$\Delta \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \frac{1-v^{(k+1)+1}}{d} - \frac{1-v^{k+1}}{d} = \frac{v^{k+1}(1-v)}{d} = v^{k+1}$$

sumando por partes

$$\begin{aligned} &\Delta f(k) = \Delta\left(-{}_k p_x\right) \qquad && g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \\ &f(x) = -{}_k p_x && \Delta g(k) = v^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= -{}_k p_x\, \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\Big|_{k=0}^{k=\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1} p_x \\ &= 1 + \sum_{K=1}^{\infty} v^k\, {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_k p_x \end{aligned} \tag{1.11.14}$$

dejando la expresión de pagos corrientes.

Para obtener la $\operatorname{var}\left[\ddot{a}_x\right]$ hay que considerar la siguiente relación

$$\ddot{a}_x = E\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left[1 - A_x\right] \tag{1.11.15}$$

$$\text{var}\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] = \text{var}\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = \frac{1}{d^2}\text{var}\left[v^{K+1}\right]$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_x - \left(A_x\right)^2\right] \tag{1.11.16}$$

Una anualidad vitalicia cuyo pago se realiza al final del periodo, difiere de una anualidad vitalicia anticipada por el pago inicial. De manera que

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{1.11.17}$$

Los diferentes tipos de anualidades contingentes, mencionados en el párrafo inicial, se muestran al final de este trabajo.

Ejemplos 1.11.1: Una señora desea comprar una anualidad con la suma asegurada que recibió a la muerte de su esposo. La señora tiene ahora 70 años y desea recibir esta anualidad hasta su muerte. Calcular el valor presente de dicha anualidad, considerando una tasa de interés del 7% y un beneficio anual de 180,000 pesos al final de cada año.

Para la evaluación de dicha anualidad se utilizan las tablas ilustrativas que se encuentran en el anexo.

La anualidad que se pide es

$$a_{70} = 180,000\left[\sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_{70}\right] = 180,000\left[7.858630\right] = 1,414,553.51$$

Ejemplo 1.11.2: Una familia desea comprar una anualidad para el pago de universidad de su hija. La niña tiene en este momento 12 años. Sus padres desean recibir la anualidad anticipada de 100,000, cuando su hija cumpla 18 años y durante 5 años. Calcular el valor presente de dicha anualidad, considerando una tasa de interés del 7%.

$${}_{6|5}\ddot{a}_{12} = 100,000\left[\sum_{k=6}^{10} v^k {}_k p_{12}\right] = 100,000\left[2.895762\right] = 289,576.20$$

Ejemplo 1.11.3: Una persona de 60 años de edad quiere saber que le conviene, si recibir una anualidad vencida de 50,000 pesos durante 25 años, o bien un pago en este momento por 500,000.00 pesos. La tasa de interés es de 7%.

$$a_{60:\overline{25}|} = 50,000\left[\sum_{k=1}^{25} v^k {}_k p_{60}\right] = 50,000\left[9.095201\right] = 454,760.0339$$

Le conviene recibir el pago en este momento.

Existen expresiones para evaluar un seguro de vida a través del cálculo de anualidades. Tal es el caso de (1.11.15), la cual se detalla en (1.11.20). Relaciones como esta se presentan a continuación.

Considérese un seguro de vida entera, pagadero al final de año en que ocurre el fallecimiento de (x)

$$A_x = \sum_{n=1}^{\infty} v^n \ {}_{n-1|}q_x \tag{1.11.18}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v^n \left({}_{n-1}p_x - {}_n p_x \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} v^n \ {}_{n-1}p_x - \sum_{n=1}^{\infty} v^n \ {}_n p_x$$

$$= v\sum_{n=1}^{\infty} v^{n-1} \ {}_{n-1}p_x - \sum_{n=1}^{\infty} v^n \ {}_n p_x$$

$$= v\ddot{a}_x - a_x \tag{1.11.19}$$

Aquí $v\ddot{a}_x$ es el valor presente de una anualidad anticipada cuyo beneficio es v unidades monetarias (u.m). La compañía de seguros invierte esta anualidad a la tasa i, para hacer frente a sus obligaciones futuras, de manera que al final del año, tendrá $(1+i)v = 1$ (u.m.) Si el asegurado llega con vida al final del año tiene derecho al beneficio de 1 (u.m), representado por el primer miembro. El segundo miembro indica por su signo negativo que deberá pagar 1 (u.m.) al final del año si está con vida, de manera que el pago es de 0 (u.m), si está con vida. Si fallece, entonces el beneficio es de 1 (u.m.) a sus beneficiarios.

Utilizando el mismo seguro para obtener una segunda relación y considerando que

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \qquad d = 1 - v$$

Se obtiene

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$= (1-d)\ddot{a}_x - (\ddot{a}_x - 1)$$

$$= 1 - d\ddot{a}_x \tag{1.11.20}$$

A_x es el valor actuarial de un pago unitario al final del año en que ocurre el fallecimiento de (x). Si el pago se hace en este momento sería de 1 (u.m.), pero como el pago es diferido, hay que calcular el valor de los intereses que se generan entre este momento y el final del año en que fallece (x). El valor de los intereses de 1 (u.m.) al comienzo del año es d y el valor actuarial de los intereses para cada año que x comience es $d\ddot{a}_x$.

Considérese ahora

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \ {}_t p_x \mu(x+t)\,dt \tag{1.11.21}$$

multiplicando por $\dfrac{v^x}{v^x}\dfrac{l_{x+t}}{l_{x+t}}$ y reescribiendo la expresión en función de l_x, se obtiene

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty \frac{v^{x+t}}{v^x}\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}}\frac{l_{x+t}}{l_x}\mu(x+t)\,dt$$
$$= \frac{1}{v^x l_x}\int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t}\mu(x+t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{v^x l_x}\int_0^\infty v^{x+t}\frac{dl_{x+t}}{dt}dt$$

integrando por partes

$$= -\frac{1}{v^x l_x}\left[v^{x+t} l_{x+t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty l_{x+t} d\frac{v^{x+t}}{dt}dt\right]$$

$$= -\frac{1}{v^x l_x}\left[-v^x l_x - \int_0^\infty l_{x+t} v^{x+t}\ln v dt\right]$$
$$= 1 + \ln v \frac{1}{v^x l_x}\int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t}dt$$

como $\ln v = -\delta$ y $\frac{1}{v_x l_x}\int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t}dt = \bar{a}_x$, entonces

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x \tag{1.11.22}$$

de donde

$$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x \tag{1.11.23}$$

Ejemplos 1.11.4: Con el valor de $a_{70} = 7.858630$ que se obtuvo en el ejemplo anterior, calcular el valor presente A_{70}.

Usando (1.11.20) $\quad A_x = v\ddot{a}_x - a_x$

$$A_{70} = \left(\tfrac{1}{1.07}\right)(8.858630165) - (7.858630165)$$
$$= 0.42046345$$

Ejemplo 1.11.5: Calcular $\bar{A}_{38}$ sabiendo que $\bar{a}_{38} = 26.45359938$ y la tasa es del 7%.

Usando $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x$
$$\bar{A}_{38} = 1 - (0.029383778)(26.45359938)$$
$$= 0.222693317$$

1.12 Anualidades pagaderas *m* veces al año

En la práctica es común encontrar anualidades cuyo pago se realiza mensual, trimestral o semestralmente, es decir, en periodos menores a un año. Para la valuación de estas anualidades es posible recurrir a su relación con seguros y a técnicas de corrección. A continuación se presentan dos métodos que serán retomados al evaluar anualidades de múltiples vidas.

Gráficamente una anualidad pagadera *m* veces al año, con pagos de $1/m$, se representa:

$1/m$	$1/m$	$\cdots$	$1/m$	$1/m$	$1/m$	$1/m$	$\cdots$	$1/m$	$1/m$				
$1/m$	$2/m$	$\cdots$	$m-1/m$	1	$1+1/m$	$1+2/m$	$\cdots$	$1+m-1/m$	2	n	$n+1/m$	$\cdots$	$n+1$

Considérese la v.a. J que denota el número completo de m-ésimos de año que ha vivido (x). Por lo tanto $J=[mS]$ con $S=T-K$

Retomando la v.a. Y de una anualidad anticipada, se tiene

$$Y=\sum_{j=0}^{mK+J}\tfrac{1}{m}v^{j/m}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|}=\frac{1-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}} \tag{1.12.1}$$

donde $d^{(m)}=m\left[1-(1-d)^{1/m}\right]$

Tomando la esperanza

$$\ddot{a}^{(m)}=E[Y]=\frac{1-E\left[v^{K+(J+1)/m}\right]}{d^{(m)}}=\frac{1-A^{(m)}}{d^{(m)}}$$

donde $A_x^{(m)}=\dfrac{i}{i^{(m)}}A_x$ y $i^{(m)}=m\left[(1+i)^{1/m}-1\right]$

O bien

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}=\frac{1-\frac{i}{i^{(m)}}A_x}{d^{(m)}} \tag{1.12.2}$$

por factores de corrección

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}v^{k+(j/m)}\ {}_{k+(j/m)}p_x \tag{1.12.3}$$

considerando la primera suma

$$\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}v^{k+(j/m)}\ {}_{k+(j/m)}p_x \tag{1.12.4}$$

suponiendo que $v^{k+\left(j/m\right)}{}_{k+\left(j/m\right)}p_x$ tiene un comportamiento lineal, es decir, que se puede interpolar entre los valores *k* y *k+1* $\left(f\left(k+t\right)=\left(1-t\right)f\left(k\right)+tf\left(k+1\right)\right)$ para obtener el valor de la fracción de año

$$\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x=\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}\left[\left(1-\tfrac{j}{m}\right)v^k{}_kp_x+\tfrac{j}{m}v^{k+1}{}_{k+1}p_x\right] \tag{1.12.5}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}v^k{}_kp_x+\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{j}{m^2}\left[v^{k+1}{}_{k+1}p_x-v^k{}_kp_x\right]\\&=v^k{}_kp_x+\tfrac{m-1}{2m}\left[v^{k+1}{}_{k+1}p_x-v^k{}_kp_x\right]\end{aligned} \tag{1.12.6}$$

Sustituyendo la expresión (1.12.6) en (1.12.3) se obtiene

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\tfrac{1}{m}v^{k+(j/m)}{}_{k+(j/m)}p_x \tag{1.12.7}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{v^k{}_kp_x+\tfrac{m-1}{2m}\left[v^{k+1}{}_{k+1}p_x-v^x{}_kp_x\right]\right\}$$

$$=\ddot{a}_x+\frac{m-1}{2m}\left(a_x-\ddot{a}_x\right) \tag{1.12.8}$$

$$=\ddot{a}_x-\frac{m-1}{2m}$$

como $\ddot{a}_x=1+a_x$

$$a_x^{(m)}=a_x+\tfrac{m-1}{2m} \tag{1.12.9}$$

A través de la fórmula de Woolhouse[5] se obtiene una mejor aproximación

$$\frac{1}{m}\left(u_{1/m}+u_{2/m}+u_{3/m}+\cdots+u_1+\cdots+u_n\right)=\sum_{x=1}^{n}u_x+\frac{m-1}{2m}\left(u_0-u_n\right)-\frac{m^2-1}{12m^2}\left(u_n'-u_0'\right)\cdots \tag{1.12.10}$$

haciendo $u_t=v^t{}_tp_x$ y tomando como límite superior $n=\omega-x$ por ser ω la edad máxima considerada en una tabla de mortalidad

$$\frac{1}{m}\left(v^{1/m}{}_{\frac{1}{m}}p_x+v^{2/m}{}_{\frac{2}{m}}p_x+\cdots+vp_x+v^n{}_np_x\right)=a_x^{(m)} \tag{1.12.11}$$

Considérese

[5] Ver González Galé, J. *Elementos de Cálculo Actuarial*, Micchi, Buenos Aires 1970, 112. Villalón G. J. *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas*, Pirámide, España 1997, 112.

$$\sum_{x=1}^{n} u_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t \, {}_t p_x = a_x \tag{1.12.12}$$

$$u_0 = 1$$

$$u_n = u_{\omega-n} = 0$$

Obteniendo las derivadas

$$u_t' = d\frac{\left(v^t \, {}_t p_x\right)}{dt} = \frac{1}{l_x} d\frac{\left(v^t l_{x+t}\right)}{dt} = \frac{1}{l_x}\left(v^t d\frac{l_{x+t}}{dt} + l_{x+t}\frac{dv^t}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{l_x}\left(v^t l_{x+t} \cdot d\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}dt} + l_{x+t} v^t \cdot \ln v\right)$$

$$= v^t \, {}_t p_x \left(d\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}dt} + \ln v\right) \tag{1.12.13}$$

Como $\frac{dl_{x+t}}{l_{x+t}dt} = -\mu(x+t)$ y $\ln v = -\ln(1+i) = \delta$ entonces

$$u_t' = v^t \, {}_t p_x \left[-\mu(x+t) - \delta\right] = -u_t\left(\mu(x+t) + \delta\right)$$

sustituyendo $u_n = 0$ y $u_0 = 1$

$$\left(u_n' - u_0'\right) = -u_0' = u_0\left[\mu(x) + \delta\right]$$

finalmente

$$a_x^{(m)} \cong a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu(x) + \delta\right] \tag{1.12.14}$$

Para una anualidad anticipada

$$\ddot{a}_x^{(m)} \cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu(x) + \delta\right] \tag{1.12.15}$$

A continuación se retoma la valuación de anualidades continuas que se dejó pendiente en la sección anterior. Para ello hay que considerar el $\lim_{m\to\infty} m$ de la expresión (1.12.13)

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left[\mu(x) + \delta\right] \tag{1.12.16}$$

Otra técnica de cálculo consiste es considerar los factores $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ en el modelo $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) - \beta(m)$, factores que se obtienen del siguiente análisis.

Considérese

$$1 = A_x + d\ddot{a}_x$$

relación que se verificará en la expresión (1.13.3). Si los periodos son menores a un año, entonces

$$1 = A_x^{(m)} + d^{(m)} a_x^{(m)}$$

por lo tanto

$$A_x + d\ddot{a}_x = A_x^{(m)} + d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} \tag{1.12.17}$$

de donde

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \tfrac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \tfrac{1}{d^{(m)}}\left(A_x^{(m)} - A_x\right) \tag{1.12.18}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - a_{\infty}^{(m)}\left(A_x^{(m)} - A_x\right) \tag{1.12.19}$$

Continuando con esta última expresión

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{1}{d^{(m)}}\left(\tfrac{i}{i^{(m)}}A_x - A_x\right) = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{1}{d^{(m)}}\left(\tfrac{i}{i^{(m)}} - 1\right)A_x \tag{1.12.20}$$

$$= \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{1}{d^{(m)}}\left(s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1\right)A_x = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{s_{\overline{1|}}^{(m)}-1}{d^{(m)}}\left(1 - d\ddot{a}_x\right) \tag{1.12.21}$$

$$= \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{s_{\overline{1|}}^{(m)}}{d^{(m)}}\left(1 - d\ddot{a}_x\right) + \frac{1 - d\ddot{a}_x}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \tfrac{s_{\overline{1|}}^{(m)}}{d^{(m)}}\left(1 - d\ddot{a}_x\right) + \tfrac{1}{d^{(m)}} - \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x \tag{1.12.22}$$

$$= \frac{1 - s_{\overline{1|}}^{(m)}\left(1 - d\ddot{a}_x\right)}{d^{(m)}} = s_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} \tag{1.12.23}$$

sean

$$\alpha(m) = s_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{1.12.24}$$

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{1.12.25}$$

entonces

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{1.12.26}$$

Ejemplo 1.12.1: Comparar el valor presente actuarial de una anualidad anticipada, vitalicia pagadera cuatrimestralmente a una persona de edad (36), evaluada con las tres expresiones mostradas en (1.12.7), (1.12.15) y (1.12.26). Considere que $i = 0.07$ $\ddot{a}_{36} = 13.47957034$ y $\mu(36) = 0.002576966$

con (1.12.7) $\qquad \ddot{a}_{36}^{(3)} = \ddot{a}_{36} - \tfrac{m-1}{2m}$

$$= 13.47957034 - \tfrac{2}{6} = 13.146237$$

con (1.12.15)

$$\ddot{a}_{36}^{(3)} = \ddot{a}_{36} - \tfrac{m-1}{2m} - \tfrac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu(36)-\delta\right]$$

$$= 13.47957034\text{-}\tfrac{2}{6} - (\text{-}0.00198569)$$
$$= 13.14386954$$

con (1.12.26)

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$$

$$\alpha(3) = 1.001361707$$
$$\beta(3) = 0.35901153$$

$$\ddot{a}_{36}^{(3)} = (1.001361707)\,\ddot{a}_{36}\text{-}(0.35901153)$$
$$= 13.13891404$$

1.13 Valores Conmutados

Para facilitar la evaluación de seguros y anualidades, se han construido tablas de conmutación. Los valores conmutados tienen como objeto reducir las expresiones que se obtengan para las fórmulas actuariales, así como simplificar los cálculos.

A continuación se presentan las expresiones de los valores conmutados, así como la formación de cada uno.

Considérese el valor presente actuarial

$${}_nE_x = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x}$$

Multiplicando numerador y denominador por v^x se obtiene

$${}_nE_x = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

en los productos $v^x l_x$ y $v^{x+n} l_{x+n}$ el exponente de *v* es igual al subíndice de *l*. Los valores conmutados que representan estos productos son D_x y D_{x+n} respectivamente. El subíndice de D es el mismo que el de *l*.

Caso Discreto

$D_x = v^x l_x$	$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$	$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) D_{x+t}$
$C_x = v^{x+1} d_x$	$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$	$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) C_{x+t}$

Caso Continuo

$\bar{D}_x = \int_o^1 D_{x+t} dt$	$\bar{N}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{D}_{x+t} = \int_0^{\infty} D_{x+t} dt$	$\bar{S}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{N}_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \bar{D}_{x+t}$
$\bar{C}_x = \int_0^1 v^{x+1} l_{x+t} \mu(x+t) dt$ $= \int_0^1 D_{x+t} \mu(x+t) dt$	$\bar{R}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{M}_{x+t} = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \bar{C}_{x+t}$	$\bar{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \int_0^{\infty} D_{x+t} \mu(x+t) dt$

En la práctica se puede pasar del caso discreto al caso continua a través de aproximaciones. Para calcular los valores $\bar{D}_x$ y $\bar{N}_x$ se supone que $\bar{D}_x$ es lineal para $0 \le t \le 1$ obteniéndose

$$\bar{D}_x = \int_0^1 D_{x+1} dt \cong D_{x+1/2} \cong \frac{1}{2}\left(D_x + D_{x+1}\right)$$

Y

$$\bar{D}_x \cong \frac{1}{2}\left(D_x + D_{x+1}\right)$$

Entonces

$$\bar{N}_x \cong \frac{1}{2}\left(N_x + N_{x+1}\right) = N_x - \frac{1}{2} D_x$$

$$= N_{x+1} + \frac{1}{2} D_x$$

Para los valores $\bar{C}_x$, $\bar{M}_x$ y $\bar{R}_x$ se proponen las siguientes tres tipos de aproximación

$\bar{C}_x \cong \left(\frac{i}{\delta}\right) C_x$	$\bar{C}_x \cong (1+i)^{1/2} C_x$	$\bar{C}_x \cong \left(1+\frac{i}{2}\right) C_x$
$\bar{M}_x \cong \left(\frac{i}{\delta}\right) M_x$	$\bar{M}_x \cong (1+i)^{1/2} M_x$	$\bar{M}_x \cong \left(1+\frac{i}{2}\right) M_x$
$\bar{R}_x \cong \left(\frac{i}{\delta}\right) R_x$	$\bar{R}_x \cong (1+i)^{1/2} R_x$	$\bar{R}_x \cong \left(1+\frac{i}{2}\right) R_x$

2. FUNCIONES DE VIDA CONJUNTA Y FUNCIONES DE ÚLTIMO SOBREVIVIENTE

2.1 Introducción

En el capítulo 1 se presentaron las funciones de muerte y sobrevivencia para una vida. Toca el turno a las funciones que involucran a más de una vida: las funciones de vida conjunta y de último sobreviviente.

Por considerarse más de una vida, se hace referencia a la sobrevivencia y extinción de un grupo o estatus. En el estatus de vida conjunta se requiere que todos los miembros que lo integran vivan para que el estatus exista, la muerte de cualquiera de ellos conduce a la extinción del estatus. En cuanto al estatus de último sobreviviente, el estatus existe si al menos un miembro está con vida y deja de existir al ocurrir la última muerte. Puede ocurrir que el estatus no desaparezca, esto es, en cualquiera de los dos estatus si la temporalidad del beneficio es menor a la ocurrencia de la condición, entonces, el estatus no desaparece y por lo tanto no hay reclamación.

Anualidades y seguros son aplicaciones de esta materia. Tal es el caso de un seguro de vida, cuyo beneficio se da al sobreviviente en un matrimonio y anualidades de sobrevivencia pagaderas durante la existencia de un grupo de socios.

Para facilitar la exposición de los contenidos y favorecer la comprensión de los mismos, primero se presentan a través del método probabilista y después con el enfoque determinista.

A lo largo de este trabajo como en la mayoría de los trabajos consultados se utiliza el supuesto de variables aleatorias independientes. Aunque este supuesto es poco realista, es utilizado por simplificar los cálculos.

2.2 Estatus de Vida Conjunta y Estatus de Último Sobreviviente

Como su nombre lo indica un estatus o grupo de vida conjunta es aquel en que la existencia del estatus depende de la existencia de todos los miembros que la conforman. De manera que el estatus se disuelve al ocurrir la primera muerte. El estatus se denota por $\left(x_1, x_2, \dots x_m\right)$, donde x_i es la edad o tiempo de sobrevivencia del i-ésimo miembro y m es el número de miembros que conforman el estatus.

En la teoría de múltiples vidas la variable aleatoria (v.a) T, denota el tiempo transcurrido a la interrupción del estatus. Como el estatus de vida conjunta deja de existir al ocurrir la primera muerte, entonces $T\left(xy\right)=\min\left[T\left(x\right),T\left(y\right)\right]$. Considérese un estatus de vida conjunta integrado por las vidas $\left(x\right)$ y $\left(y\right)$. Sean los eventos $A=\left\{T\left(x\right)\le t\right\}$ y $B=\left\{T\left(x\right)\le t\right\}$, cuando se habla de la interrupción del estatus de vida conjunta, se habla del evento unión, ya que se requiere que cualquiera de los dos eventos ocurra. De manera que $A \cup B = \left\{ T\left(xy\right) \le t \right\}$.

El estatus de último sobreviviente es la contra parte del estatus de vida conjunta. Mientras que en el segundo la primera muerte ocasiona la desaparición del estatus, en el primero se requiere la última muerte para que el estatus deje de existir. Considérese nuevamente el estatus compuesto por dos vidas $\left(x\right)$ y $\left(y\right)$, así como los eventos $A = \left\{ T\left(x\right) \le t \right\}$ y $B = \left\{ T\left(x\right) \le t \right\}$. La extinción del estatus de último sobreviviente requiere que los dos eventos ocurran, es decir el evento intersección. Por lo tanto $A \cap B = \left\{ T\left(\overline{xy}\right) \le t \right\}$.

Para diferenciar la notación del estatus de último sobreviviente de la del estatus de vida conjunta, a este último se le agrega una barra horizontal. De manera que el estatus de último sobreviviente se denota por $\left(\overline{x_1, x_2, \cdots, x_3}\right)$, donde x_i representa la edad del *i*-ésimo miembro y *m* el número de miembros que conforman el estatus.

En el estatus de último sobreviviente la v.a. T, denota el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del último fallecimiento. Y como el estatus deja de existir al ocurrir la última muerte, entonces $T\left(\overline{xy}\right) = \max\left[T\left(x\right), T\left(y\right)\right]$.

2.3 Probabilidades de Vida Conjunta y Último Sobreviviente

En este apartado se muestran las probabilidades de vida conjunta y de último sobreviviente. Primero se presenta a través del enfoque determinista y posteriormente con el enfoque probabilista. Se ha dispuesto presentar los dos estatus a la vez, para apreciar sus relaciones. Se utiliza el caso más simple, el estatus compuesto por dos vidas $\left(xy\right)$, para facilitar el desarrollo de las expresiones.

Como se comentó en la sección 2.2, para que el estatus de vida conjunta exista se requiere que todos sus miembros estén con vida. De manera que la probabilidad de que el estatus de vida conjunta $\left(xy\right)$ sobreviva *t* años es

$$ {}_t p_x \, {}_t p_y = \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y} $$

O bien rescribiendo $l_x l_y = l_{x:y}$

$$ {}_t p_x \, {}_t p_y = \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{x:y}} \tag{2.3.1} $$

Para que el estatus $\left(xy\right)$ se disuelva es necesario que al menos uno de sus miembros fallezca. Analizando los escenarios, se obtienen que los tres eventos excluyentes que pueden ocurrir son:

1) Que muera $\left(x\right)$ y viva $\left(y\right)$ $\qquad (1 - {}_t p_x)\, {}_t p_y = {}_t p_y - {}_t p_{xy}$

2) Que muera $\left(y\right)$ y viva $\left(x\right)$ $\qquad (1 - {}_t p_y)\, {}_t p_x = {}_t p_x - {}_t p_{xy}$

3) Que mueran $\left(x\right)$ y $\left(y\right)$ $\qquad (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y) = 1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_{xy}$

Sumando los eventos, se obtiene:

$$ {}_{t}q_{xy} = 1 - {}_{t}p_{xy} \qquad (2.3.2) $$

Expresando ${}_{t}p_{xy}$ en función de l_{xy}

$$ q_{xy} = 1 - p_{xy} $$

$$ = 1 - \frac{l_{x+1:y+1}}{l_{xy}} \qquad (2.3.3) $$

$$ = \frac{l_{xy} - l_{x+1:y+1}}{l_{xy}} \qquad (2.3.4) $$

haciendo $\qquad l_{xy} - l_{x+1:y+1} = d_{xy}$

por lo tanto $\qquad q_{xy} = \frac{d_{xy}}{l_{xy}} \qquad (2.3.5)$

Es importante notar en (2.3.5) que $d_{xy} \neq d_x d_y$, ya que

$$ d_x = l_x - l_{x+1} $$

$$ d_x d_y = (l_x - l_{x+1})(l_y - l_{y+1}) $$

$$ = (l_{xy} - l_{x:y+1} - l_{y:x+1} + l_{x+1:y+1}) $$

o directamente

$$ d_{xy} = l_{xy} - l_{x+1:y+1} $$

Ahora bien, (2.3.2) puede expresarse en función de la probabilidad de muerte de cada miembro. Con $t = 1$ y suponiendo independencia

$$ q_{xy} = 1 - p_{xy} $$

$$ = 1 - (1 - q_x)(1 - q_y) $$

$$ = 1 - (1 - q_x - q_y + q_x q_y) $$

$$ = q_x + q_y - q_x q_y $$

$$ = q_x + (1 - q_x) q_y \qquad (2.3.6) $$

Ejemplo 2.3.1: Calcular la probabilidad que tiene una vida de edad 60 de morir antes de cumplir 70 años, sabiendo que la probabilidad de que el estatus $(50:60)$ deje de existir en los siguientes 10 años es de 0.27680291. Además de 9,079,443.18 personas de 50 años de edad 858,571.804 no llegan a cumplir los 60 años. Se asume independencia entre las vidas que componen el estatus.

Por los datos sabemos que

$$ l_{50} = 9,079,443.18 \qquad (1) $$

$$ l_{50} - l_{60} = 858,571.804 \qquad (2) $$

$$ {}_{10}q_{50:60} = 1 - {}_{10}p_{50:60} $$

$$ = 1 - \tfrac{l_{60}}{l_{50}} \tfrac{l_{70}}{l_{60}} $$

$$ = 1 - \tfrac{l_{70}}{l_{50}} = 0.27680291 \qquad (3) $$

La probabilidad a calcular es ${}_{10}q_{60} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{60}}$, por lo que necesitamos encontrar los valores de l_{60} y l_{70}

Sustituyendo l_{50} (1) en (2) obtenemos l_{60}

$$\begin{aligned} l_{60} &= 9,079,443.18 - 858571.804 \\ &= 8220871.37 \end{aligned}$$

Despejando l_{70} de (3)

$$l_{70} = \left[1 - 0.27680291\right] l_{50}$$

Reemplazando l_{50} por su valor y resolviendo

$$\begin{aligned} l_{70} &= \left[1 - 0.34892907\right]\left[9079443.18\right] \\ &= 6566226.87 \end{aligned}$$

Con la obtención de este último dato se acaban las incógnitas. Ahora es posible resolver la probabilidad pedida

$$\begin{aligned} {}_{10}q_{60} &= 1 - \tfrac{l_{70}}{l_{60}} \\ &= 1 - \tfrac{6566226.87}{8220871.37} \\ &= 0.201 \end{aligned}$$

Por lo que respecta al estatus de último sobreviviente, se requiere que por lo menos un miembro esté con vida para que el estatus esté activo. Para un estatus integrado por dos vidas (xy), los eventos que hay que considerar para obtener la probabilidad de que el estatus permanezca durante *t* años son:

1) Que viva (x) y no (y) $\quad {}_t p_x (1 - {}_t p_y)$

2) Que viva (y) y no (x) $\quad {}_t p_y (1 - {}_t p_x)$

3) Que vivan (x) y (y) $\quad {}_t p_x \, {}_t p_y$

Sumando los tres eventos, se obtiene

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}} &= {}_t p_x (1 - {}_t p_y) + {}_t p_y (1 - {}_t p_x) + {}_t p_{xy} \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Como se indicó al inicio, el estatus de último sobreviviente deja de existir al ocurrir la muerte del último miembro. Y como el complemento de que al menos un elemento esté con vida es la probabilidad de que ninguno de los miembros viva, entonces la probabilidad de que el estatus se extinga en el t-ésimo año es

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{xy}} &= 1 - {}_t p_{\overline{xy}} \\ &= 1 - ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy}) \\ &= 1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_{xy} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

En (2.3.7) y (2.3.8), se puede observar que un estatus de último sobreviviente puede ser expresado en función de vidas individuales y vidas conjuntas.

Ejemplo 2.3.2: Analizando los eventos que pueden ocurrir, obtener las probabilidades

a. ${}_{t-1|}q_{xy}$

b. ${}_{t\text{-}1|}q_{\overline{xy}}$

a. Para el estatus (xy), los eventos son:

- Que muera (x) en el año *t* y viva (y) $\quad {}_{t-1|}q_{x\ t}p_{y} = \left({}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x}\right){}_{t}p_{y} = {}_{t-1}p_{x\ t}p_{y} - {}_{t}p_{xy}$
- Que muera (y) en el año *t* y viva (x) $\quad {}_{t-1|}q_{y\ t}p_{x} = \left({}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y}\right){}_{t}p_{x} = {}_{t-1}p_{y\ t}p_{x} - {}_{t}p_{xy}$
- Que mueran (x) y (y) en el año *t* $\quad {}_{t-1|}q_{x\ t-1|}q_{x} = \left({}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x}\right)\left({}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y}\right)$

$$= {}_{t-1}p_{xy} - {}_{t-1}p_{x\ t}p_{y} - {}_{t-1}p_{y\ t}p_{x} + {}_{t}p_{xy}$$

Sumando los eventos excluyentes, se obtiene:

$${}_{t-1|}q_{xy} = {}_{t-1}p_{xy} - {}_{t}p_{xy} \tag{2.3.9}$$

b. Para el estatus $\left(\overline{xy}\right)$, los eventos son:

- Que muera (x) en el año *t* habiendo muerto antes (y)

$$\begin{aligned}{}_{t-1|}q_{x\ t-1}q_{y} &= \left({}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x}\right)\left(1 - {}_{t-1}p_{y}\right)\\ &= {}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x} - {}_{t-1}p_{xy} + {}_{t}p_{x\ t-1}p_{y}\end{aligned}$$

- Que muera (y) en el año *t*, habiendo muerto antes (x)

$$\begin{aligned}{}_{t-1|}q_{y\ t-1}q_{x} &= \left({}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y}\right)\left(1 - {}_{t-1}p_{x}\right)\\ &= {}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y} - {}_{t-1}p_{xy} + {}_{t}p_{y\ t-1}p_{x}\end{aligned}$$

- Que mueran ambos en el año *t*

$$\begin{aligned}{}_{t-1|}q_{x\ t-1|}q_{y} &= \left({}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x}\right)\left({}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y}\right)\\ &= {}_{t-1}p_{xy} - {}_{t-1}p_{x\ t}p_{y} - {}_{t-1}p_{y\ t}p_{x} + {}_{t}p_{xy}\end{aligned}$$

Sumando los tres eventos se obtiene:

$${}_{t-1|}q_{\overline{xy}} = {}_{t-1}p_{x} - {}_{t}p_{x} + {}_{t-1}p_{y} - {}_{t}p_{y} - {}_{t-1}p_{xy} + {}_{t}p_{xy} \tag{2.3.11}$$

agrupando

$${}_{t-1|}q_{\overline{xy}} = {}_{t-1|}q_{x} + {}_{t-1|}q_{y} - {}_{t-1|}q_{xy} \tag{2.3.12}$$

También es posible expresar (2.3.12) como (2.3.7)

$${}_{t-1|}q_{\overline{xy}} = {}_{t-1}p_{x} + {}_{t-1}p_{y} - {}_{t-1}p_{xy} - {}_{t}p_{x} - {}_{t}p_{y} + {}_{t}p_{xy} = {}_{t-1}p_{\overline{xy}} - {}_{t}p_{\overline{xy}} \tag{2.3.13}$$

Hasta el momento, las probabilidades de muerte y sobrevivencia para los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente, se han desarrollado por el método determinista. A continuación se muestran estas mismas probabilidades utilizando el método probabilista.

Continuando con el estatus (xy), $T(xy)$ es la v.a. que denota el tiempo transcurrido antes de la disolución del estatus.

Por el supuesto de independencia decimos que la probabilidad de sobrevivencia conjunta del estatus (xy) al tiempo t es el producto de las probabilidades de sobrevivencia de cada individuo

$$ {}_t p_{xy} = {}_t p_x \, {}_t p_y \tag{2.3.14}$$

Para el caso general (dependiente)

$$ {}_t p_{xy} = s_{T(x)T(y)}(t,t) $$

donde $s_{T(x)T(y)}(t,t)$ es la función de sobrevivencia marginal.

Como el estatus de vida conjunta deja de existir al ocurrir la primera muerte, entonces $T(xy) = \min\left[T(x), T(y)\right]$ y la función de distribución de $T(xy)$ es

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) &= \Pr(T < t) \quad \text{con } t > 0 \\ &= \Pr\left\{\min\left[T(x), T(y)\right] \le t\right\} \\ &= 1 - \Pr\left[T(x) > t, T(y) > t\right] \\ &= 1 - s_{T(x)T(y)}(t,t) \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Si se supone independencia

$$\begin{aligned} {}_t q_{xy} &= 1 - {}_t p_x \, {}_t p_y \\ &= 1 - {}_t p_{xy} \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Para expresar la probabilidad de muerte del estatus de vida conjunta, a través de las probabilidades de muerte de cada miembro, como se hizo en (2.3.6), se recurre al concepto de unión en probabilidad. Se requiere que muera (x), que muera (y) o que mueran los dos, de manera que

$$ \Pr\left\{\min\left[T(x), T(y)\right] \le t\right\} = \left\{T(x) \le t\right\} \cup \left\{T(x) \le t\right\} $$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_{T(xy)}(t) &= \Pr\left[T(x) \le t\right] + \Pr\left[T(y) \le t\right] - \left\{\Pr\left[T(x) \le t\right] \cap \Pr\left[T(y) \le t\right]\right\} \\ &= {}_t q_x + {}_t q_y - F_{T(x)T(y)}(t,t) \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Al suponer independencia se obtiene

$$ F_{T(xy)}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x \, {}_t q_y \tag{2.3.18}$$

La probabilidad de que el estatus de vida conjunta (xy) se disuelva durante el periodo $(t, t+1)$, es

$$\begin{aligned} \Pr(t < T \leq t+1) &= \Pr(T \leq t+1) - \Pr(T \leq t) \\ &= [1 - \Pr(T > t+1)] - [1 - \Pr(T \geq t)] \\ &= (1 - {}_{t+1}p_{xy}) - (1 - {}_t p_{xy}) \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

operando

$$\begin{aligned} \Pr(t < T \leq t+1) &= {}_t p_{xy} - {}_{t+1}p_{xy} \\ &= {}_t p_{xy} - {}_t p_{xy}\, p_{x+t:y+t} \\ &= {}_t p_{xy}(1 - p_{x+t:y+t}) && (2.3.20) \\ &= {}_t p_{xy} q_{x+t:y+t} && (2.3.21) \end{aligned}$$

por lo tanto

$${}_{t|}q_{xy} = {}_t p_{xy} q_{x+t:y+t} \tag{2.3.22}$$

Ejemplo 2.3.3: Asumiendo independencia entre las v.a. $T(75)$ y $\mathrm{T}(80)$, obtener una expresión en función de vidas individuales para la probabilidad de que el primer fallecimiento ocurra después de 3 años y antes de 10.

Para $T(75:80)$

$$\begin{aligned} \Pr(3 < T \leq 10) &= \Pr(T > 3) - \Pr(T > 10) \\ &= {}_3 p_{75:80} - {}_{10} p_{75:80} \\ &= {}_3 p_{75}\, {}_3 p_{80} - {}_{10} p_{75}\, {}_{10} p_{80} \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad de $T(xy)$, $f_{T(xy)}(t)$, se obtiene derivando la función de distribución $F_{T(xy)}(t)$ con respecto a t. De manera que se puede derivar (2.3.15), (2.3.17) o bien (2.3.16). para obtener $f_{T(xy)}(t)$. Utilizando primero (2.3.15)

$$\begin{aligned} f_{T(xy)}(t) = \frac{d}{dt} F_{T(xy)}(t) &= \frac{d}{dt}\left[1 - s_{T(x)T(y)}(t,t)\right] \\ &= -\frac{d}{dt}\int_t^\infty \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Para resolver (2.3.23) hay que recurrir a la regla de derivación de Leibnitz, que dice

Sea

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx \tag{2.3.24}$$

entonces

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,t)\,dx + f(\beta(t),t)\frac{d}{dt}\beta(t) - f(\alpha(t),t)\frac{d}{dt}\alpha(t) \tag{2.3.25}$$

Aplicando la regla de derivación en (2.3.23) y haciendo $\int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du = h(t,v)$

$$\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv = \frac{d}{dt}\int_t^{\infty} h(t,v)\,dv$$

$$= \int_t^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}h(t,v)\,dv + h(t,\infty)\frac{d}{dt}(\infty) - h(t,t)\frac{d}{dt}(t) \qquad (2.3.26)$$

Reemplazando $h(t,v)=\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du$ y como el segundo sumando se hace cero, queda

$$\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv = \int_t^{\infty}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du}_{(1)}dv - h(t,t)$$

Aplicando nuevamente la regla de derivación para (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du = \int_t^{\infty}\frac{\partial}{\partial t} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du + f_{T(x)T(y)}(u,v)\big|_{u=\infty}\frac{d}{dt}(\infty) - f_{T(x)T(y)}(u,v)\big|_{u=t}\frac{d}{dt}t \qquad (2.3.27)$$

la primera parte se anula y la segunda es cero, quedando solo $-f_{T(x)T(y)}(t,v)$.

Sustituyendo en la expresión (2.3.26) el resultado de (2.3.27) y sustituyendo la expresión $h(t,v)=\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,du$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv = -\left[\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du\right]$$

por lo tanto

$$f_{T(xy)}(t) = \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du \qquad (2.3.28)$$

resolviendo las integrales

$$\int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_t^{\infty} f_{T(x)T(y)}(u,t)\,du = \int_t^{\infty} {}_t p_x \mu(x+t)\,{}_v p_y \mu(y+v)\,dv + \int_t^{\infty} {}_u p_x \mu(x+u)\,{}_t p_y \mu(y+t)\,du$$

$$= {}_t p_x\,{}_t p_y \mu(x+t) + {}_t p_x\,{}_t p_y \mu(y+t)$$

$$= {}_t p_x\,{}_t p_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right]$$

dejando

$$f_{T(xy)}(t) = {}_t p_x\,{}_t p_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right] \qquad (2.3.29)$$

Vayamos ahora por el otro camino, derivando (2.3.17) $F_{T(xy)}(t) = {}_t q_x + {}_t q_y - F_{T(x)T(y)}(t,t)$

$$f_{T(xy)}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - \left[\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,u)\,du\right] \qquad (2.3.30)$$

o bien

$$f_{T(xy)}(t) = {}_t p_x \mu(x+t) + {}_t p_y \mu(y+t) - \left[\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv + \int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,u)\,du\right] \qquad (2.3.31)$$

resolviendo las integrales

$$\left[\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,v)\,dv+\int_0^t f_{T(x)T(y)}(t,u)\,du\right]={}_t p_x\mu(x+t)\,{}_t q_y+{}_t p_y\mu(y+t)\,{}_t q_x$$
$$={}_t p_x\mu(x+t)\left(1-{}_t p_y\right)+{}_t p_y\mu(y+t)\left(1-{}_t p_x\right)$$
$$={}_t p_x\mu(x+t)-{}_t p_{xy}\mu(x+t)+{}_t p_y\mu(y+t)-{}_t p_{xy}\mu(y+t)$$

Aplicando el resultado de estas integrales en (2.3.31) y resolviendo

$$f_{T(xy)}(t)={}_t p_x\,{}_t p_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right]$$

Para el estatus de último sobreviviente, primero se muestra la probabilidad de muerte y después la probabilidad de sobrevivencia del mismo. Utilizando nuevamente el supuesto de independencia y recordando que el estatus deja de existir al ocurrir la última muerte y que la función de distribución de probabilidad de $T\left(\overline{xy}\right)=\max\left[T(x),T(y)\right]$

$$F_{T\left(\overline{xy}\right)}(t)=\Pr(T\le t)$$
$$=\Pr\{\max[T(x),T(y)\le t]\}$$
$$=\Pr\left[T(x)\le t \text{ y } T(y)\le t\right] \tag{2.3.32}$$

suponiendo independencia

$$F_{T\left(\overline{xy}\right)}(t)=\Pr\left[T(x)\le t\right]\Pr[T(y)\le t]$$
$$=(1-{}_t p_x)(1-{}_t p_y)$$
$$=1-{}_t p_x-{}_t p_y+{}_t p_{xy} \tag{2.3.33}$$

Como se requiere que por lo menos un miembro viva para que el estatus exista y (2.3.33) expresa la probabilidad de que ningún miembro viva, entonces la probabilidad de sobrevivencia del estatus es el complemento de (2.3.33). Es decir

$${}_t p_{\overline{xy}}=1-{}_t q_{\overline{xy}}$$
$$=1-(1-{}_t p_x-{}_t p_y+{}_t p_{xy})$$
$$={}_t p_x+{}_t p_y-{}_t p_{xy} \tag{2.3.34}$$

Ejemplo 2.3.4: Asumiendo independencia entre las v.a. $T(75)$ y $\mathrm{T}(80)$, obtener una expresión en función de vidas individuales para la probabilidad de que el último fallecimiento ocurra después de 3 años y antes de 10.

Para $T\left(\overline{75:80}\right)$

$$\Pr(3<T\le 10)=\Pr(T>3)-\Pr(T>10)$$
$$={}_3 p_{\overline{75:80}}-{}_{10} p_{\overline{75:80}}$$
$$={}_3 p_{75}+{}_3 p_{80}-{}_3 p_{75:80}-{}_{10} p_{75}-{}_{10} p_{80}+{}_{10} p_{75:80}$$

La función de densidad de probabilidad $T\left(\overline{xy}\right)$ se obtiene derivando la función de distribución de probabilidad con respecto a t

$$\begin{aligned} f_{T(\overline{xy})}(t) &= \frac{d}{dt}F_{T(\overline{xy})}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(1-{}_tp_x)(1-{}_tp_y) \\ &= (1-{}_tp_x)\left[{}_tp_y\mu(y+t)\right]+(1-{}_tp_y)\left[{}_tp_x\mu(x+t)\right] \\ &= {}_tp_x\mu(x+t)+{}_tp_y\mu(y+t)-{}_tp_x\,{}_tp_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right] \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

En el capítulo 1 se presentó la v.a. *K*, que denota el número de años enteros transcurridos antes del fallecimiento de una vida. En este apartado se retoma esta v.a. para determinar la probabilidad de interrupción del estatus de vida conjunta.

La probabilidad de que el estatus de vida conjunta (xy) se extinga durante el periodo *k* y *k+1* es

$$\begin{aligned} \Pr(k < T \le k+1) &= \Pr(T \le k+1)-\Pr(T \le k) \\ &= {}_{k+1}q_{xy} - {}_kq_{xy} \\ &= \left(1-{}_{k+1}p_{xy}\right)-\left(1-{}_kp_{xy}\right) \\ &= {}_kp_{xy} - {}_{k+1}p_{xy} \\ &= {}_kp_{xy} - {}_kp_{xy}\,p_{x+k:y+k} \\ &= {}_kp_{xy}\left(1-p_{x+k:y+k}\right) \\ &= {}_kp_{xy}\,q_{x+k:y+k} \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Se puede escribir (2.3.36) como ${}_{k|}q_{xy}$

Ejemplo 2.3.5: Supóngase que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes y que la distribución de densidad de probabilidad para cada una esta definida por

$$f(t) = \frac{1}{20\sqrt{100-t}} \qquad 0 \le t \le 100$$

a. Determinar la función de distribución y la función de sobrevivencia de la distribución dada.
b. Determinar la función de distribución de probabilidad conjunta, la función de densidad conjunta y la función de sobrevivencia de $T(x)$ y $T(y)$

a. $$F_{T(x)}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{T(x)}(s)\,ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-\frac{\sqrt{100-t}}{10} & 0 \le t < 100 \\ 1 & t \ge 100 \end{cases}$$

$$s_{T(x)}=1-F_{T(x)}(t)$$
$$=\begin{cases}1 & t\le 0\\ \frac{\sqrt{100-t}}{10} & 0<t\le 100\\ 0 & t\ge 100\end{cases}$$

b.
$$f_{T(x)T(y)}(s,t)=f_{T(x)}(s)\,f_{T(y)}(t)$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{20\sqrt{100-s}}\right)\left(\frac{1}{20\sqrt{100-t}}\right) & 0\le s\le 100,\ 0\le t\le 100\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

$$F_{T(x)T(y)}(s,t)=F_{T(x)}(s)F_{T(y)}(t)$$
$$=\left(1-\frac{1}{20\sqrt{100-s}}\right)\left(1-\frac{1}{20\sqrt{100-t}}\right) \qquad 0\le s<100,\ 0\le t<100$$

$$s_{T(x)T(y)}=\left(\frac{\sqrt{100-s}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{100-t}}{10}\right) \qquad 0<s\le 100,\ 0<t\le 100$$

Ejemplo 2.3.6: Con las vidas del ejemplo anterior, calcular

a. Para el estatus de vida conjunta $T(xy)$, $F_{T(xy)}(t)$, ${}_t p_{xy}$ y $f_{T(xy)}(t)$
b. Para el estatus de último sobreviviente $T(\overline{xy})$, $F_{T(\overline{xy})}(t)$, ${}_t p_{\overline{xy}}$ y $f_{T(\overline{xy})}(t)$

a.
$${}_t p_{xy}=s_{T(x)T(y)}(t)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{100-t}}{10}\right)^2=1-\frac{t}{100} \qquad 0<t\le 100$$
$$F_{T(xy)}(t)=1-{}_t p_{xy}$$
$$=1-\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{t}{100} \qquad 0\le t<100$$
$$f_{T(xy)}(t)=\frac{d}{dt}F_{T(xy)}(t)$$
$$=\frac{1}{100}$$

b.
$$F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)-F_{T(xy)}(t)$$
$$=2\left[1-\frac{\sqrt{100-t}}{10}\right]-\frac{t}{100}$$
$$=2-\frac{\sqrt{100-t}}{5}-\frac{t}{100} \qquad 0\le t<100$$

$${}_t p_{\overline{xy}}=1-F_{T(\overline{xy})}(t)$$
$$=\frac{\sqrt{100-t}}{5}+\frac{t}{100}-1 \qquad 0<t\le 100$$

$$
\begin{aligned}
f_{T(\overline{xy})}(t) &= \tfrac{d}{dt} F_{T(\overline{xy})}(t) \\
&= \tfrac{1}{10\sqrt{100-t}} - \tfrac{1}{100}
\end{aligned}
$$

Hasta el momento solo se ha utilizado el estatus integrado por dos miembros. La probabilidad de que un estatus de vida conjunta esta integrado por *m* vidas, deje de existir en un año, en función del número de muertes y las vidas iniciales es

$$
\begin{aligned}
q_{x_1 x_2 \cdots x_m} &= 1 - p_{x_1 x_2 \cdots x_m} \\
&= \frac{l_{x_1 x_2 \cdots x_m} - l_{x_1+1: x_2+1 \ldots\, x_m+1}}{l_{x_1 x_2 \cdots x_m}} \\
&= \frac{d_{x_1 x_2 \cdots x_m}}{l_{x_1 x_1 \cdots x_m}} \qquad (2.3.37)
\end{aligned}
$$

Cuando deseamos desarrollar las probabilidades de muerte y sobrevivencia de un estatus de vida conjunta o de último sobreviviente, integrado por más de dos vida, en función de las vidas individuales y/o vidas conjuntas, nos enfrentamos a largas expresiones. Tal es el caso de la probabilidad de sobrevivencia de un estatus de último sobreviviente, compuesto por *m* miembros ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$

$$
\begin{aligned}
{}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} &= 1 - (1 - {}_t p_{x_1})(1 - {}_t p_{x_2}) \cdots (1 - {}_t p_m) \\
&= ({}_t p_{x_1} + {}_t p_{x_2} + \cdots + {}_t p_m) \\
&\quad - ({}_t p_{x_1 x_2} + {}_t p_{x_1 x_3} + \cdots + {}_t p_{x_{m-1} x_m}) \\
&\quad + ({}_t p_{x_1 x_2 x_3} + {}_t p_{x_1 x_2 x_4} + \cdots + {}_t p_{x_{m-2} x_{xm-2} x_m}) \\
&\quad - ({}_t p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \cdots + {}_t p_{x_{m-3} x_{m-2} x_{m-1} x_m}) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{m+1} {}_t p_{x_1 x_2 \cdots x_m} \qquad (2.3.38)
\end{aligned}
$$

De manera que es deseable tener expresiones que sinteticen esas probabilidades. Para expresar la suma de probabilidades individuales y conjuntas a partir de dos vidas, se utiliza la siguiente notación

$$
{}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = \sum {}_t p_{x_1} - \sum {}_t p_{x_1 x_2} + \sum {}_t p_{x_1 x_2 x_3} - \sum {}_t p_{x_1 x_2 x_3 x_4} + \cdots + (-1)^{m+1} {}_t p_{x_1 x_2 \cdots x_m} \qquad (2.3.39)
$$

Donde las sumas se realizan sobre todas las posibles combinaciones, primero de *m* en uno, después de *m* en dos y así sucesivamente. ${}_t q_x$ no requiere notación especial ya que ${}_t q_x$ puede ser expresada como una combinación lineal de ${}_t p_x$, por ser ${}_t q_x = {}_0 p_x - {}_t p_x$ donde ${}_0 p_x = 1$. De manera que es suficiente con generar una expresión para ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$.

Otra notación de este tipo, se desprende de la fórmula de inclusión-exclusión en teoría de probabilidad, la cual se presenta a continuación.

Sean los eventos $B_1, B_2, \cdots, B_m$, la probabilidad de su unión es

$$\Pr\left(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m\right) = D_1 - D_2 + D_3 - \cdots \left(-1\right)^{m-1} D_m \qquad (2.3.40)$$

donde D_k denota la suma simétrica

$$D_k = \sum \Pr\left(B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}\right) \qquad (2.3.41)$$

El rango de la suma es sobre todas la combinaciones $\binom{m}{k}$ subconjuntos de *k* eventos

Como la probabilidad de sobrevivencia del estatus de último sobreviviente es la probabilidad del evento unión, entonces ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$ se puede expresar como (2.3.40), es decir

$${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = {}_t D_1 - {}_t D_2 + {}_t D_3 - \cdots + \left(-1\right)^{m-1} {}_t D_m \qquad (2.3.42)$$

donde

$${}_t D_k = \sum {}_t p_{x_{j1} x_{j2} \cdots x_{jk}} \qquad (2.3.43)$$

Y como se indicó en (2.3.41) el rango de la suma es sobre todas las combinaciones $\binom{m}{k}$ subconjuntos de *k* eventos.

Ejemplo 2.3.7: Expresar ${}_t p_{\overline{xyz}}$ en función de vidas individuales y vidas conjuntas

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xyz}} &= {}_t D_1 - {}_t D_2 + {}_t D_3 \\ &= \sum {}_t p_{x_1} - \sum {}_t p_{x_1 x_2} + \sum {}_t p_{x_1 x_2 x_3} \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z - {}_t p_{xy} - {}_t p_{xz} - {}_t p_{yz} + {}_t p_{xyz} \end{aligned}$$

2.4 Fuerza de Mortalidad Vida Conjunta y Último Sobreviviente

En el capítulo anterior se expuso que existe una medida instantánea de la mortalidad llamada, fuerza de mortalidad, expresada por $\mu(x)$. Para las funciones de vida conjunta, existe también una medida de mortalidad instantánea, llamada fuerza de mortalidad conjunta. Se denota por $\mu_{x+t:y+t}$ o bien $\mu_{xy}(t)$ en analogía con μ_{x+t}. Un camino para obtener la fuerza mortalidad conjunta es utilizando el concepto de fuerza de mortalidad para una vida, presentado en el capítulo 1. Ahí se definió la fuerza de mortalidad para una vida como la pendiente de la tangente a la curva l_x. Como la curva es decreciente, el valor de la tangente es negativo y dividido entre $-\frac{1}{l_x}$, proporciona la tasa instantánea de decremento a la edad exacta *x*. Es decir

$$\mu\left(x+t\right) = -\frac{d \ln l_{x+t}}{dt} \qquad (2.4.1)$$

Aplicando el mismo concepto a un estatus de vida conjunta $\left(xy\right)$

$$
\begin{aligned}
\mu_{xy}(t) &= -\frac{d\ln l_{xy}(t)}{dt} \\
&= -\frac{d\ln\left(l_{x+t}l_{y+t}\right)}{dt} \\
&= -\frac{d(\ln l_{x+t} + \ln l_{y+t})}{dt} \\
&= -\frac{d\ln l_{x+t}}{dt} - \frac{d\ln l_{y+t}}{dt} \\
&= \mu(x+t) + \mu(y+t)
\end{aligned} \tag{2.4.2}
$$

De donde se observa que la fuerza de mortalidad instantánea de un estatus de vida conjunta, es igual a la suma de las fuerza de mortalidad instantáneas de cada uno de los elementos que lo conforman.

Otro camino es sustituir la vida *x* de (1.5.14), por el estatus de vida conjunta (xy), de manera que

$$
\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T(xy)}(t)}{1 - F_{T(xy)}(t)} \tag{2.4.3}
$$

Utilizando el supuesto de independencia, (2.3.29) y (2.3.16)

$$
\begin{aligned}
\mu_{xy}(t) &= \frac{{}_t p_x \, {}_t p_y \left[\mu(x+t) + \mu(y+t)\right]}{1 - (1 - {}_t p_x \, {}_t p_y)} \\
&= \mu(x+t) + \mu(y+t)
\end{aligned} \tag{2.4.4}
$$

Las expresiones desarrolladas hasta el momento, pueden ser generalizadas para más de dos vidas. El uso del estatus (xy) fue elegido para facilitar su exposición.

Ahora toca el turno a la fuerza de mortalidad del estatus de último sobreviviente. Para obtener la expresión se recurre nuevamente a (1.5.14). Sustituyendo la vida individual *x* por el estatus $(\overline{xy})$

$$
\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)}
$$

de (2.3.33) y (2.3.38)

$$
\begin{aligned}
\mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{{}_t p_x \mu(x+t) + {}_t p_y \mu(y+t) - {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t)}{1 - (1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_{xy})} \\
&= \frac{{}_t p_x \mu(x+t) + {}_t p_y \mu(y+t) - {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t)}{{}_t p_{\overline{xy}}}
\end{aligned} \tag{2.4.5}
$$

Suponiendo independencia es posible reemplazar $\mu_{xy}(t)$ por $\mu(x+t) + \mu(y+t)$, dejando

$$\mu_{\overline{xy}}(t)=\frac{{}_tq_y\,{}_tp_x\mu(x+t)+{}_tq_x\,{}_tp_y\mu(y+t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \tag{2.4.6}$$

Ejemplo 2.4.1: Para la distribución presentada en el ejemplo 2.3.5 determinar la fuerza de mortalidad de

a. esa distribución
b. para el estatus de vida conjunta (xy)
c. para el estatus de último sobreviviente $(\overline{xy})$

a.

$$\mu(x+t)=\frac{f_{T(x)}(t)}{S_{T(x)}(t)}$$

$$=\frac{1}{2(100-t)}$$

b.

$$\mu_{xy}(t)=\frac{f_{T(xy)}(t)}{1-F_{T(xy)}(t)}$$

$$=\frac{1}{100-t}$$

c.

$$\mu_{\overline{xy}}(t)=\frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1-F_{T(\overline{xy})}(t)}$$

$$=\frac{\frac{1}{10\sqrt{100-t}}-\frac{1}{100}}{\frac{\sqrt{100-t}}{5}+\frac{t}{100}-1}$$

2.5 Relación entre estatus de Vida Conjunta y de Último Sobreviviente

Ya se ha adelantado la relación entre los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente. En la introducción del capítulo se dijo que el estatus de vida conjunta representa el evento unión, mientras que el estatus de último sobreviviente representa el evento intersección. A continuación se retoma este hecho para enlistar las relaciones entre las funciones de los estatus. Por el método de inclusión-exclusión de probabilidad se tiene

$$\Pr(A\cup B)+\Pr(A\cap B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)+\Pr(A\cap B)$$

$$=\Pr(A)+\Pr(B) \tag{2.5.1}$$

Ahora bien, considerando las vidas (x) y (y) y aun si $T(x)$ y $T(y)$ no son independientes, para las variables aleatorias continuas $T(xy)$ y $T(\overline{xy})$, se tiene el siguiente razonamiento

Para el estatus de vida conjunta $T(xy)=\min\{T(x),T(y)\}$
Para el estatus de último sobreviviente $T(\overline{xy})=\max\{T(x),T(y)\}$
Dadas las vidas (x) y (y), si $T(x)=\min$ y $T(y)=\max$
entonces

$$T(xy)+T(\overline{xy})=T(x)+T(y)$$

pero si $T(x)=\max$ y $T(y)=\min$

entonces

$$T(xy)+T(\overline{xy})=T(x)+T(y)$$

Del razonamiento anterior, se desprenden las siguientes relaciones

$$T(xy)+T(\overline{xy})=T(x)+T(y) \quad (2.5.2)$$

$$T(xy)T(\overline{xy})=T(x)T(y) \quad (2.5.3)$$

$$a^{T(xy)}+a^{T(\overline{xy})}=a^{T(x)}+a^{T(y)} \quad \text{para } a>0 \quad (2.5.4)$$

Tratando las funciones de distribución de cada estatus

$$\begin{aligned}
F_{T(xy)}(t) &= 1-\Pr[T(x)>t]\Pr[T(y)>t] \\
&= 1-{}_t p_{x\,t} p_y \\
&= 1-{}_t p_{xy} \\
F_{T(\overline{xy})}(t) &= \Pr[T(x)\le t]\Pr[T(y)\le t] \\
&= (1-{}_t p_x)(1-{}_t p_y) \\
&= 1-{}_t p_x-{}_t p_y+{}_t p_{xy}
\end{aligned}$$

Sumando las funciones de distribución

$$\begin{aligned}
F_{T(xy)}(t)+F_{T(\overline{xy})}(t) &= 1-{}_t p_{xy}+1-{}_t p_x-{}_t p_y+{}_t p_{xy} \\
&= 1-{}_t p_x+1-{}_t p_y \\
&= {}_t q_x+{}_t q_y \\
&= F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)
\end{aligned}$$

De donde

$$F_{T(xy)}(t)+F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t) \quad (2.5.5)$$

Haciendo lo mismo con las funciones de densidad de probabilidad de cada estatus y retomando las expresiones (2.3.29) y (2.3.35)

$$f_{T(xy)}(t)={}_t p_{xy}\left[\mu(y+t)+\mu(x+t)\right]$$

$$f_{T(\overline{xy})}(t)={}_t p_x\mu(x+t)+{}_t p_y\mu(y+t)-{}_t p_{xt}p_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right]$$

sumando

$$\begin{aligned}
f_{T(xy)}(t)+f_{T(\overline{xy})}(t) &= {}_t p_{xy}\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right]+ \\
&\quad +{}_t p_x\mu(x+t)+{}_t p_y\mu(y+t)-{}_t p_{x\,t} p_y\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right] \\
&= {}_t p_x\mu(x+t)+{}_t p_y\mu(y+t) \\
&= f_{T(x)}(t)+f_{T(y)}(t)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f_{T(xy)}(t)+f_{T(\overline{xy})}(t)=f_{T(x)}(t)+f_{T(y)}(t) \tag{2.5.6}$$

Retomando la expresión (2.5.5) y despejando la función de distribución para el estatus de último sobreviviente, se tiene

$$F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)-F_{T(xy)}(t)$$

Sustituyendo la función de distribución para el estatus de vida conjunta de la expresión (2.3.17) se desprende que

$$F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)-\left[F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)-F_{T(x)T(y)}(t,t)\right]$$

$$F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)T(y)}(t,t)$$

Relación que puede observarse en el ejemplo 2.3.5.

Para la variable aleatoria K que denota el número de años completos transcurridos antes de la interrupción del estatus, se tienen relaciones análogas a (2.5.2), (2.5.3) y (2.5.4)

$$K(xy)+K(\overline{xy})=K(x)+K(y) \tag{2.5.7}$$

$$K(xy)K(\overline{xy})=K(x)K(y) \tag{2.5.8}$$

$$a^{K(xy)}+a^{K(\overline{xy})}=a^{K(x)}+a^{K(y)} \tag{2.5.9}$$

Y para las funciones de distribución y de densidad se tiene

$$F_{K(xy)}+F_{K(\overline{xy})}=F_{K(x)}+F_{K(y)} \tag{2.5.10}$$

$$f_{K(xy)}+f_{K(\overline{xy})}=f_{K(x)}+f_{K(y)} \tag{2.5.11}$$

Ejemplo 2.5.1: Corroborar las relaciones (2.5.5) con las funciones de distribución de densidad obtenidas en el ejercicio 2.3.5

$$\left[\tfrac{t}{100}\right]+\left[2-\tfrac{\sqrt{100-t}}{5}-\tfrac{t}{100}\right]=\left[1-\tfrac{\sqrt{100-t}}{10}\right]+\left[1-\tfrac{\sqrt{100-t}}{10}\right]$$

$$2-\tfrac{\sqrt{100-t}}{5}=2-\tfrac{\sqrt{100-t}}{5}$$

Ejemplo 2.5.2: Retomar las distribuciones de densidad resultantes en el ejemplo 2.3.5 y comprobar la relación (2.5.6)

$$\left[\tfrac{1}{100}\right]+\left[\tfrac{1}{10\sqrt{100-t}}-\tfrac{1}{100}\right]=\left[\tfrac{1}{20\sqrt{100-t}}\right]+\left[\tfrac{1}{20\sqrt{100-t}}\right]$$

$$\left[\tfrac{1}{10\sqrt{100-t}}\right]=\left[\tfrac{1}{10\sqrt{100-t}}\right]$$

2.6 Esperanza Matemática de Vida Completa y Entera

La esperanza completa y abreviada para los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente, se desprenden de los conceptos de esperanza para una vida, presentados en el capítulo 1. Hay que considerar que los resultados de valor esperado de la distribución de T son válidos si $T = T(u)$, donde (u) es un grupo en general. Por lo tanto (u) puede ser un estatus de vida conjunta o bien un estatus de último sobreviviente.

$$E[T] = E[T(u)]$$

Retomando la expresión para la esperanza de vida completa

$$\begin{aligned} \overset{0}{e}_u &= E[T(u)] \\ &= \int_0^\infty {}_t p_u dt \end{aligned} \qquad (2.6.1)$$

Por los cálculos desarrollados en (1.7.9) y (1.7.10) donde se presentó el segundo momento y la varianza de $T(x)$, la varianza del estatus general *u* es

$$\operatorname{var}\left[T(u)\right] = E\left[T(u)^2\right] - E\left[T(u)\right]^2$$

$$= 2\int_0^\infty t\,{}_t p_u dt - \left(\overset{0}{e}_u\right)^2$$

Si (u) es un estatus de vida conjunta, integrado por (x) y (y), la esperanza completa de vida de (2.6.1) es ahora la esperanza completa del estatus de vida conjunta

$$\overset{0}{e}_{xy} = \int_0^\infty {}_t p_{xy} dt \qquad (2.6.2)$$

y la varianza de $T(xy)$ es

$$\begin{aligned} \operatorname{var}[T(xy)] &= E\left[T(xy)^2\right] - E[T(xy)]^2 \\ &= 2\int_0^\infty t\,{}_t p_{xy} dt - \left(\overset{0}{e}_{xy}\right)^2 \end{aligned} \qquad (2.6.3)$$

Ejemplo 2.6.1: Utilizando la función del ejercicio 2.4, calcular la esperanza completa de vida para el estatus de vida conjunta (xy), así como la varianza

$$\overset{0}{e}_{xy} = \int_0^{100} 1 - \tfrac{t}{100} dt = t - \tfrac{t^2}{200}\Big|_0^{100} = 100 - 50 = 50$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[T(xy)] &= E\left[T(xy)^2\right] - E[T(xy)]^2 \\ &= 2\int_0^{100} t\,{}_t p_{xy}\,dt - \left(\overset{0}{e}_{xy}\right)^2 \\ &= 2\int_0^{100} t\left(1-\tfrac{t}{100}\right)dt - \left(\overset{0}{e}_{xy}\right)^2 \\ &= 2\left[\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{t^3}{300}\right]\Big|_0^{100} - (50)^2 \\ &= 833.83\end{aligned}$$

Para obtener la esperanza de vida entera, hay que considerar la variable aleatoria $K = k(u)$, que denota los años enteros que se espera viva el estatus (u)

$$e_u = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_u \tag{2.6.4}$$

La varianza de la variable aleatoria $K = k(u)$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[K(u)\right] &= E\left[K(u)^2\right] - E\left[K(u)\right]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\,{}_k p_u - (e_u)^2\end{aligned}$$

Si u es el estatus de vida conjunta (xy), entonces

$$e_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{xy} \tag{2.6.5}$$

y la varianza de $K(xy)$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[K(xy)] &= E\left[K(xy)^2\right] - E[K(xy)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\,{}_k p_{xy} - (e_{xy})^2\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Ejemplo 2.6.2: Calcular la esperanza de vida entera para el estatus de vida conjunta (xy) y la varianza de $K(xy)$, usando la función de densidad del ejemplo 2.4

$$\begin{aligned}{}_k p_{xy} &= 1 - \tfrac{k}{100} \\ e_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_{xy} = \sum_{k=0}^{99} 1 - \tfrac{k}{100} = 49.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[K(xy)] &= \sum_{K=0}^{\infty}(2k-1)\,{}_k p_{xy} - \left(e_{xy}\right)^2 \\ &= \sum_{K=0}^{99}(2k-1)\left(1-\tfrac{k}{100}\right)-\left(49.5\right)^2 \\ &= 832.26\end{aligned}$$

Como se comentó (u) es un estatus general, por lo tanto puede representar un estatus de último sobreviviente. De manera que la esperanza completa de vida de $(\overline{xy})$ es

$$\overset{0}{e}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}} dt \tag{2.6.7}$$

Reescribiendo ${}_t p_{\overline{xy}}$ en función de vidas individuales y conjuntas

$$\overset{0}{e}_{\overline{xy}} = \overset{0}{e}_x + \overset{0}{e}_y - \overset{0}{e}_{xy} \tag{2.6.8}$$

La varianza de la variable para el estatus de último sobreviviente $(\overline{xy})$ es

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[T\left(\overline{xy}\right)\right] &= E\left[T\left(\overline{xy}\right)^2\right] - E\left[T\left(\overline{xy}\right)\right]^2 \\ &= 2\int_0^{\infty} t\,{}_t p_{\overline{xy}} dt - \left(\overset{0}{e}_{\overline{xy}}\right)^2\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Ejemplo 2.6.3: Calcular la esperanza completa de vida y la varianza para el estatus de último sobreviviente, utilizando la función del ejemplo 2.4

$$\begin{aligned}\overset{0}{e}_{\overline{xy}} &= \int_0^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}} dt \\ &= \int_0^{100} \tfrac{\sqrt{100-t}}{5} + \tfrac{t}{100} - 1 dt \\ &= -\tfrac{2}{15}\left(100-t\right)^{3/2} + \tfrac{t^2}{200} - t\Big|_0^{100} \\ &= 83.33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left[T\left(\overline{xy}\right)\right] &= 2\int_0^{\infty} t\,{}_t p_{\overline{xy}} dt - \left(\overset{0}{e}_{\overline{xy}}\right)^2 \\ &= 2\int_0^{100} t\left(\tfrac{\sqrt{100-t}}{5} + \tfrac{t}{100} - 1\right) dt - \left(\overset{0}{e}_{\overline{xy}}\right)^2 \\ &= 10056.11\end{aligned}$$

La esperanza completa de vida para el estatus de último sobreviviente $(\overline{xy})$ es

$$\begin{aligned}e_{\overline{xy}} &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{\overline{xy}} \\ &= e_x + e_y - e_{xy}\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Para la v.a. K, la varianza del estatus de último sobreviviente $(\overline{xy})$ es

$$\operatorname{var}\left[K\left(\overline{xy}\right)\right]=E\left[K\left(\overline{xy}\right)^{2}\right]-E\left[K\left(\overline{xy}\right)\right]^{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\,{}_{k}p_{\overline{xy}}-\left(e_{\overline{xy}}\right)^{2} \qquad (2.6.11)$$

Los resultados de las expresiones (2.6.3) a (2.6.11) se obtienen al realizar un procedimiento similar al desarrollado en las secciones 1.7 y 1.8, reemplazando la vida individual x por los estatus (xy) y $\left(\overline{xy}\right)$.

La covarianza de $T(xy)\left(\overline{xy}\right)$ es

$$\operatorname{cov}\left[T(xy),T\left(\overline{xy}\right)\right]=E\left[T(xy)T\left(\overline{xy}\right)\right]-E\left[T(xy)\right]E\left[T\left(\overline{xy}\right)\right] \qquad (2.6.12)$$

como $\qquad T(xy)T\left(\overline{xy}\right)=T(x)T(y)$

por independencia $\qquad E[T(x)T(y)]=E[T(x)]E[T(y)]$

por lo tanto

$$\operatorname{cov}\left[T(xy),T\left(\overline{xy}\right)\right]=E\left[T(x)\right]E[T(y)]-E\left[T(xy)\right]E\left[T\left(\overline{xy}\right)\right]$$
$$=\mathring{e}_{x}\,\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\,\mathring{e}_{\overline{xy}} \qquad (2.6.13)$$

sustituyendo $\mathring{e}_{\overline{xy}}$ por $\mathring{e}_{x}+\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}$ en (2.9.4) se obtiene

$$\operatorname{cov}\left[T(xy),T\left(\overline{xy}\right)\right]=\mathring{e}_{x}\,\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\left(\mathring{e}_{x}+\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\right)$$
$$=\mathring{e}_{x}\,\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\,\mathring{e}_{x}-\mathring{e}_{xy}\,\mathring{e}_{y}+\mathring{e}_{xy}\,\mathring{e}_{xy}$$
$$=\left(\mathring{e}_{x}-\mathring{e}_{xy}\right)\left(\mathring{e}_{y}-\mathring{e}_{xy}\right) \qquad (2.6.14)$$

Lo anterior indica que $T(xy)$ y $T\left(\overline{xy}\right)$ están correlacionados positivamente, ya que ambos factores deben ser positivos, excepto cuando $\mathring{e}_{x}$ o $\mathring{e}_{y}$ son iguales a $\mathring{e}_{xy}$

Ejemplo 2.6.4: Calcular la $\operatorname{cov}\left[T(xy),T\left(\overline{xy}\right)\right]$ para $T(x)$ y $T(y)$ dados en el ejemplo 2.4

Primero calculamos $\mathring{e}_{x}=\mathring{e}_{y}$

$$\mathring{e}_{x}=\int_{0}^{100}\tfrac{\sqrt{100-t}}{10}dt=66.66$$

$$\text{cov}\left[T(xy), T\left(\overline{xy}\right)\right] = (66.66 - 50)(66.66 - 50)$$
$$= 277.77$$

Considerando la variable aleatoria S, que denota la fracción de año y suponiendo DUM, como en (1.5.10), se llega a la siguiente aproximación

$$\overset{0}{e}_{x_1 x_2 \cdots x_m} \approx e_{x_1 x_2 \cdots x_m} + \frac{1}{2} \tag{2.6.15}$$

2.7 Ley de Envejecimiento Uniforme

La evaluación de seguros y anualidades para los estatus de vida conjunta constituyen una difícil tarea. Para facilitar el procedimiento se recurre a los supuestos de Makeham y Gompertz, posibilitando expresar un estatus de vida conjunta, integrado por vidas de diferentes edades, a través de un estatus de vida conjunta de edades iguales, o bien a través de una vida individual cuya edad es equivalente a las edades originales. A continuación se presentan las leyes de envejecimiento uniforme Gompertz y Makeham para las edades x y $x+n$. La ley de Gompertz es un caso particular de la ley de Makeham donde $A = 0$.

2.7.1 Caso Gompertz

En el caso Gompertz, la ley de envejecimiento uniforme, busca reemplazar el estatus de vida conjunta integrado por edades diferentes $(x_1 x_2 \cdots x_m)$ por la vida individual (w). Esta edad es mayor a las edades originales, $w > \max\{x_i\}$, a diferencia del caso Makeham, en donde la edad equivalente esta entre las edades originales. Tomando el caso de dos vidas, el estatus $(x : x+n)$, se reemplaza por la edad individual $(x+t)$, cumpliéndose

$$c^{x+t} = c^x + c^{x+n} \tag{2.7.1.1}$$

como se presentó en el Capítulo 1, c^x representa el deterioro o la impotencia creciente para resistir la destrucción.

Dividiendo (2.7.1.1) entre c^x

$$c^t = 1 + c^n \tag{2.7.1.2}$$

despejando t

$$t = \frac{\log(1 + c^n)}{\log c} \tag{2.7.1.3}$$

Como puede observarse t no depende de ninguna de las dos edades $(x : x+n)$, sino de su diferencia n. El procedimiento para reemplazar el estatus $(x : x+n)$, es obtener la diferencia entre ambas edades, es decir, n. A través de una tabla de envejecimiento uniforme de Gompertz, como la que se encuentra en la parte de Anexos, se busca el valor de *t*. Ese valor se suma a la edad más pequeña. Finalmente el estatus es reemplazado por la vida individual $(x+t)=(w)$.

El valor *t* puede sumarse a la edad mas grande, para ello el valor de *t* se calcula a través del siguiente planteamiento.

Se busca sustituir el estatus $(x:x+n)$ por la vida individual $(x+n+t')$, es decir

$$c^{x}+c^{x+n}=c^{x+n+t'}$$

Por lo tanto

$$t'=\frac{\log\left(1-c^{n}\right)-\log\left(c^{n}\right)}{\log c}$$

Para construir la tabla de envejecimiento uniforme Gompertz que se encuentra en la parte de anexos, se tomó el primer planteamiento. Es decir el estatus $(x:x+n)$ es reemplazado por la vida $(x+t)$.

Es posible utilizar una tabla de envejecimiento uniforme Gompertz para cualquier número de vidas. Las vidas se toman por pares, sin importar el orden, hasta reducir el estatus a una vida. Este proceso no está exento de interpolación.

Remplazar el estatus $(x:x+n)$ por la vida (w) conduce a que los cálculos realizados con la edad equivalente sean una aproximación. Como se comentó al inicio del apartado, este método sobreestima la edad, situación que repercute en el cálculo de seguros y anualidades.

Ejemplo 2.7.1.1: Encontrar la edad equivalente (w) bajo la ley de envejecimiento uniforme de Gompertz que sustituya a la anualidad $a_{38:41:45}$ por a_w

Tomando las dos primeras edades $(38:41)$, donde la diferencia es 3. De la tabla 2.4 para $n=3$ $t=9.55752185$ valor que se suma a la edad menor, surgiendo la edad equivalente 47.5575219. Esta edad opera con la última vida. De manera que ahora se realizará el mismo procedimiento pero para las edades $(45:47.5575219)$.

Para $n=2.5575219$ $t=9.312299168$, valor que se obtuvo al interpolar. Finalmente se suma el valor de *t* a la edad más pequeña de este grupo. Por lo tanto $a_{38:41:45}=a_{54.3122992}$

2.7.2 Caso Makeham

El concepto de envejecimiento uniforme, en la ley Makeham, busca sustituir el estatus de vida conjunta de edades diferentes por un estatus de vida conjunta de edades iguales, es decir, $(x_1x_2\cdots x_m)=(w_1w_2\ldots w_m)$. Para el caso particular de dos vidas se busca encontrar una edad equivalente (w), que reemplace las edades $(x:x+n)$ por dos edades iguales $(x+t:x+t)$, de manera que

$$2c^{x+t}=c^{x}+c^{x+n} \tag{2.7.2.1}$$

dividiendo entre $2c^x$ se obtiene

$$c^t = \frac{1}{2}(1+c^n) \tag{2.7.2.2}$$

de donde

$$t = \frac{\log(1+c^n) - \log 2}{\log c} \tag{2.7.2.3}$$

Al igual que en el caso Gompertz, *t* no depende de *x*, ni de *x*+*n*, sino de la diferencia entre estas edades. En una tabla de envejecimiento uniforme de Makeham se busca el valor de *t* correspondiente a la diferencia de edades. Ese valor se agrega a la edad menor, obteniéndose así las edades equivalentes $(x+t : x+t)$.

Cuando se trata de tres vidas, se toman primero las dos más pequeñas y se obtienen las edades equivalentes, las cuales operaran con la tercera vida para obtener las edades que sustituyen el estatus original. Hay que poner atención en esta parte pues en la primera fase, el estatus que reemplaza al estatus original es un estatus compuesto por dos vidas, las cuales operarán con una tercera, situación por la cual no es posible utilizar la misma tabla para encontrar el valor de *t*. Es decir, si el estatus esta integrado por las vidas (xyw), el primer paso es tomar las dos vidas más pequeñas, en este caso (xy), las cuales serán reemplazadas por (zz). La última edad opera con esta dos, de manera que ahora se tiene

$$2c^z + c^w = 3c^u$$

Y como *w* es la edad mayor

$$w = z + k \qquad \text{y} \qquad u = z + r \qquad \text{con } r < k$$

Por lo tanto

$$2c^z + c^{z+k} = 3c^{z+r}$$

$$c^r = \tfrac{2+c^k}{3}$$

De donde

$$r = \frac{\log\left(2+c^k\right) - \log 3}{\log c}$$

siendo *k* la diferencia entre las vidas equivalentes y el tercer miembro.

El caso de cuatro vidas diferentes $(uvxy)$, se puede reducir a dos vidas, obteniendo primero la edad equivalente para cada par $(uv) = (rr)$ y $(xy) = (ss)$. El estatus $(rrss)$ puede ser operado como (rs). En este último caso las edades equivalentes pueden no ser enteras, por lo que hay que interpolar en la tabla de envejecimiento uniforme.

Los cálculos realizados con la edad equivalente son una aproximación, pues se ha reemplazado el estatus $(x : x+n)$ por el estatus de edades iguales $(x+t : x+t)$. Bajo este supuesto las edades equivalentes se encuentran entre las edades originales, es decir, $\min\{x_i\} < w < \max\{x_i\}$

Ejemplo 2.7.2.1: Encontrar es estatus equivalente por el que ha de sustituirse $(38:41:45)$, utilizando el supuesto de envejecimiento uniforme Makeham
Tomando primero las edades $(38:41)$, para $n=3$ de la tabla 2.3 $t=1.59768837$. Sumando el valor de t a la edad más pequeña se obtiene el estatus $(39.59768837{:}39.59768837)$. Calculando la diferencia entre las edades equivalentes y la última vida, se tiene $r=5.40231163$. Interpolando entre los valores de $r=5$ y $r=6$ de la tabla 2.4, se llega a $t=2.098506805$. Finalmente se suma este valor a la edad menor, arrojando el estatus equivalente $(41.69619518{:}41.69619518{:}41.69619518)$.

2.8 Ley Gompertz

En la sección anterior se presentaron los supuestos de envejecimiento uniforme para Gompertz y Makeham. Estos supuestos buscan sustituir los estatus integrados por más de dos vida por estatus equivalentes. Los ejemplos exhibidos en esa sección muestran el procedimiento a seguir para encontrar el estatus equivalente.

La creación de tablas con probabilidades de mortalidad y sobrevivencia para un estatus de vida conjunta es laborioso y extenso, ya que deben considerarse todas las combinaciones entre dos, tres y más vidas. En este apartado se desarrollan las leyes de Gompertz y Makeham de manera que se obtengan los estatus equivalentes, pero ahora utilizando las expresiones de probabilidad de sobrevivencia, así como la fuerza de mortalidad. Nuevamente se asume independencia.

Retomando la Ley de Gompertz para una vida, presentada en (1.6.1.3) del Capítulo 1

$$ {}_t p_x = g^{c^x(c^t-1)} \tag{2.8.1}$$

Si en lugar de ser la vida individual (x) se tiene el estatus de vida conjunta (xy), la probabilidad de que el estatus exista durante *t* años es

$$\begin{aligned} {}_t p_x \, {}_t p_y &= g^{c^x(c^t-1)+c^y(c^t-1)} \\ &= g^{(c^x+c^y)(c^t-1)} \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Para un estatus de vida conjunta integrado por *m* miembros, la probabilidad de que el estatus exista *t* años es

$$\begin{aligned} {}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_m} &= g^{c^{x_1}(c^t-1)} g^{c^{x_2}(c^t-1)} \cdots g^{c^{x_m}(c^t-1)} \\ &= g^{(c^{x_1}+c^{x_2}+\cdots+c^{x_n})(c^t-1)} \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

sustituyendo c^w por $c^{x_1}+c^{x_2}+\cdots+c^{x_m}$

$$\begin{aligned} {}_t p_{x_1,x_2,\ldots,x_m} &= g^{c^w(c^t-1)} \\ &= {}_t p_w \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

De manera que el estatus de vida conjunta es reemplazado por una edad equivalente *w*, que puede ser evaluada con una tabla de vida individual, la cual debe estar ajustada con la ley de Gompertz.

La fuerza de mortalidad para el estatus de vida conjunta es igual a la suma de la fuerza de mortalidad de los miembros que lo integran, según se vio en (2.4.4). Retomando del Capítulo 1 la fuerza de mortalidad para una vida a través de la ley de Gompertz (1.6.1.1), se obtiene la fuerza de mortalidad para el estatus de vida conjunta (xy)

$$\mu_{xy}(s) = \mu(w+s) \qquad\qquad s \geq 0 \tag{2.8.5}$$

$$Bc^{x+s} + Bc^{y+s} = Bc^{w+s} \tag{2.8.6}$$

(w) es la edad para la cual la fuerza de mortalidad de una vida es igual a la fuerza de mortalidad del estatus de vida conjunta original. Es de esperar que con frecuencia (w) sea no-entero, por lo tanto la evaluación ameritará interpolación.

De (2.8.5)

$$c^{x+s} + c^{y+s} = c^{w+s}$$

con esta última expresión es posible obtener la edad equivalente.

Utilizando (2.8) se confirma que la probabilidad de sobrevivencia de la vida equivalente es igual a la probabilidad de sobrevivencia del estatus

$${}_t p_w = \exp\left[-\int_0^t \mu(w+s)ds\right] \tag{2.8.7}$$

$$= \exp\left[-\int_0^t \mu_{xy}(s)ds\right]$$

$$= {}_t p_{xy} \tag{2.8.8}$$

Un valor que generalmente intervienen en la mayoría de los cálculos de valores actuariales es ${}_t E_x = v^t {}_t p_x$. Para un estatus compuesto por m vidas

$${}_t E_{x_1 x_2 \ldots x_m} = v^t \, {}_t p_{x_1 x_2 \cdots x_m}$$

Suponiendo independencia

$$= v^t \left({}_t p_{x_1}\right)\left({}_t p_{x_2}\right)\ldots\left({}_t p_{x_m}\right)$$

$$= e^{-\int_0^t \delta ds} e^{-\int_0^t \mu(x_1+s)ds} e^{-\int_0^t \mu(x_2+s)ds} \cdots e^{-\int_0^t \mu(x_m+s)ds}$$

$$= e^{-\int_0^t [\delta + \mu(x_1+s) + \mu(x_2+s) + \mu(x_3+s) \cdots \mu(x_m+s)]ds}$$

Para ${}_t E'_{\underbrace{ww\cdots w}_{m}}$

$${}_t E'_{\underbrace{ww\cdots w}_{m}} = e^{-\int_0^t [\delta' + m\mu(w+s)]ds}$$

y para que

$${}_t E_{x_1 x_2 \cdots x_m} = {}_t E'_{ww\cdots w}$$

se debe cumplir

$$\delta+\mu\left(x_1+t\right)+\mu\left(x_2+t\right)+\cdots+\mu\left(x_m+t\right)=\delta'+m\mu\left(w+t\right) \tag{2.8.9}$$

A la ecuación anterior se le conoce como la ecuación general de equivalencia del estatus.

Usando Gompertz en la ecuación (2.8.9)

$$\delta+Bc^{x_1}+Bc^{x_2}+\cdots+Bc^{x_m}=\delta'+mBc^{w} \tag{2.8.10}$$

Sumando

$$\delta+B\sum c^{x_i}=\delta'+mBc^{w} \tag{2.8.11}$$

Si $\delta=\delta'$ y $m=1$

Entonces

$$\sum c^{x_i}=c^{w} \tag{2.8.12}$$

Existe una imprecisión al hacer $a_w=a_{xy}$ para una tabla con edad finita, la cual se analiza a continuación.

$$a_w=a_{xy} \quad \text{dado que } (xy)=(w)$$

Como $w>\max\{x,y\}$, entonces para una ω finita

$$a_w=a_{w:\overline{\omega-w-1|}}$$

Analizando el estatus compuesto por dos vidas

$$a_{xy}=\sum_{k=1}^{\infty}v^k\,{}_kp_{xy}$$

Supóngase que $x>y$ y ω es finita, entonces

$$a_{xy}=\sum_{k=1}^{\omega-x-1}v^k\,{}_kp_{xy}=a_{xy:\overline{\omega-x-1|}}$$

Como $\omega-w-1<\omega-x-1$ entonces la relación correcta es

$$a_w=a_{w:\overline{\omega-w-1|}}=a_{xy:\overline{\omega-w-1|}}<a_{xy}$$

Ejemplo 2.8.1: Siguiendo la ley de Gompertz, obtener las edades equivalentes *w* para los estatus de vida conjunta

a. $(50:60)$
b. $(60:67:71)$

a.

Supuesto de Gompertz

$$c^w=c^{50}+c^{60}$$

Con $c = 1.090984624$ y despejando w

$$w = \frac{\log\left(c^{50} + c^{60}\right)}{\log c} = 64.0155931$$

Por lo tanto el estatus de vida conjunta $(50:60)$ es equivalente a la vida individual (64.0155931)

b.

$$c^w = c^{60} + c^{67} + c^{71}$$

Sustituyendo c y despejando w

$$w = \frac{\log\left(c^{60} + c^{67} + c^{71}\right)}{\log c} = 79.46296607$$

El estatus de vida conjunta $(60:67:71)$ es equivalente a la vida individual (79.46296607)

2.9 Ley Makeham

La ley de Makeham sustituye el estatus de vida conjunta de edades diferentes, por un estatus de vida conjunta de edades iguales. Retomando la expresión (1.6.2.3) del Capítulo 1 que muestra la ley de Makeham para una vida

$${}_t p_x = s^t g^{c^x (c^t - 1)} \qquad (2.9.1)$$

Para el estatus de vida conjunta (xy)

$${}_t p_{xy} = s^t g^{c^x (c^t - 1) + c^y (c^t - 1)} \qquad (2.9.2)$$

$$= s^t g^{(c^x + c^y)(c^t - 1)} \qquad (2.9.3)$$

reemplazando $c^x + c^y$ por dos vidas de edad w, se tiene

$$c^x + c^y = 2c^w \qquad (2.9.4)$$

por lo tanto

$${}_t p_{xy} = s^t g^{2c^w (c^t - 1)} \qquad (2.9.5)$$

para un estatus de vida conjunta integrado por m miembros

$${}_t p_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = s^{mt} g^{(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m})(c^t - 1)} \qquad (2.9.6)$$

sustituyendo $c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = mc^w$

se obtiene

$${}_t p_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = s^{mt} g^{mc^w (c^t - 1)} \qquad (2.9.7)$$

$$= {}_t p_{\underbrace{ww, \cdots, w}_{m}} \qquad (2.9.8)$$

retomando (2.9.4) para expresarla en términos de fuerza de mortalidad

$$2c^{w} = c^{x} + c^{y}$$

multiplicando por B y sumando A en ambos lados

$$2(A+Bc^{w}) = (A+Bc^{x}) + (A+Bc^{y}) \tag{2.9.9}$$

donde A y B son constantes de Makeham

$$2\mu_{w}(s) = \mu\left(x+s\right) + \mu\left(y+s\right) \tag{2.9.10}$$

La edad equivalente $\left(w\right)$ esta definida como la edad para la cual la fuerza de mortalidad para esta vida individual es igual a la media aritmética de las fuerzas de mortalidad de vida individual del estatus. De aquí que la edad equivalente utilizada en el caso Makeham, se encuentre entre las edades del estatus original. En el caso de Gompertz la edad equivalente es mayor que cualquiera de las edades originales.

El uso de las expresiones que involucran fuerza de mortalidad en Gompertz y Makeham, disminuye el número de interpolaciones provenientes del cálculo de más de tres vidas.

Retomando la ecuación (2.8.9) y suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham se obtiene

$$\delta + \left[A + Bc^{x_1}\right] + \left[A + Bc^{x_2}\right] + \cdots + \left[A + Bc^{x_m}\right] = \delta' + m\left[A + Bc^{w}\right] \tag{2.9.11}$$

sumando

$$\delta + mA + B\sum c^{x_i} = \delta' + mA + mBc^{w} \tag{2.9.12}$$

si $\delta = \delta'$ entonces

$$mA + B\sum c^{x_i} = mA + mBc^{w} \tag{2.9.13}$$

como el número de vidas es igual al original

$$B\sum c^{x_i} = mBc^{w} \tag{2.9.14}$$

por lo tanto

$$\sum c^{x_i} = mc^{w}$$

Como se ha indicado, bajo el supuesto de Makeham se pasa un estatus con edades diferentes a un estatus de edades iguales, conservando el mismo número de miembros. Sin embargo es posible que ${}_{t}p_{xy} = {}_{t}E_{w}$, bajo el supuesto de Makeham. Para ello se requiere que $c^{w} = c^{x} + c^{y}$ y la modificación para el cálculo de ${}_{t}E_{w}$ se da en la tasa de interés, con $i = e^{A} - 1$. A continuación se desarrolla este supuesto.

Bajo el supuesto de equivalencia de Makeham se debe cumplir

$$\delta + \left[A + Bc^{x_1}\right] + \left[A + Bc^{x_2}\right] + \cdots + \left[A + Bc^{x_m}\right] = \delta' + m\left[A + Bc^{w}\right]$$

se sabe que

$${}_tE_{xy} = v^t\,{}_tp_{xy}$$

con $i = 0$

$${}_tE_{xy} = {}_tp_{xy}$$

se busca que

$${}_tp_{xy} = {}_tE_w \tag{2.9.15}$$

por el supuesto de equivalencia

$$0 + \left(A + Bc^x\right) + \left(A + Bc^y\right) = \delta' + m\left(A + Bc^x\right) \tag{2.9.16}$$

y para el planteamiento $m = 1$

$$2A + B\left(c^x + c^y\right) = \delta' + A + Bc^w \tag{2.9.17}$$

Como $B\left(c^x + c^y\right) = Bc^w$, entonces $c^x + c^y = c^w$ cumpliéndose el primer requerimiento y dejando $2A = \delta' + A$, de donde

$$\delta' = A \tag{2.9.18}$$

y finalmente

$$i = e^A - 1 \tag{2.9.19}$$

Bajo esta línea, se puede demostrar que el valor de una anualidad para *m* vidas de edades diferentes a la tasa de interés *i*, es equivalente al valor de una anualidad para una vida con edad *w* a la tasa $i' = (1+i)e^{A(m-1)} - 1$, si la tabla de mortalidad esta construida de acuerdo con la ley de Makeham.

Retomando el supuesto de equivalencia

$$\delta + \mu\left(x_1\right) + \mu\left(x_2\right) + \cdots + \mu\left(x_m\right) = \delta' + \mu\left(x_w\right)$$

Sustituyendo la fuerza de mortalidad bajo Makeham

$$\delta + \left(A + Bc^{x_1}\right) + \left(A + Bc^{x_2}\right) + \cdots + \left(A + Bc^{x_m}\right) = \delta' + A + Bc^w \tag{2.9.20}$$

$$\delta + mA + B\left(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m}\right) = \delta' + A + Bc^w \tag{2.9.21}$$

Como $B\left(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m}\right) = Bc^w$, entonces $c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m} = c^w$, cumpliéndose el primer requerimiento y dejando

$$\delta + mA = \delta' + A \tag{2.9.22}$$

de donde

$$\delta + \left(m-1\right)A = \delta'$$

$$\ln\left(1+i\right) + \left(m-1\right)A = \ln\left(1+i'\right)$$

despejando i'

$$i' = \left(1+i\right)e^{(m-1)A} - 1 \tag{2.9.23}$$

Ejemplo 2.9: Siguiendo la ley de Makeham, obtener los estatus equivalentes de:

a. $(50:60)$
b. $(60:67:71)$

a.

Supuesto de Makeham

$$2c^w = c^{50} + c^{60}$$

Con $c = 1.090984624$ y despejando w

$$w = \frac{\log\left(c^{50} + c^{60}\right) - \log(2)}{\log c} = 56.0557596$$

Por lo tanto el estatus de vida conjunta $(50:60)$ es equivalente al estatus de vida conjunta $(56.0557596:56.0557596)$

b.

$$3c^w = c^{60} + c^{67} + c^{71}$$

Sustituyendo c y despejando w

$$w = \frac{\log\left(c^{60} + c^{67} + c^{71}\right) - \log(3)}{\log c} = 66.8469285$$

El estatus de vida conjunta $(60:67:71)$ es equivalente al estatus $(66.8469285:66.8469285:66.8469285)$

2.10 Distribución Uniforme de las Muertes

En el capítulo anterior, se expuso la Distribución Uniforme de Muerte para vidas individuales. Ahora se presenta la Distribución Uniforme de las Muertes para cada año de edad, para cada individuo, de un estatus de vida conjunta. Este supuesto es utilizado para evaluar seguros pagaderos al momento de la disolución del estatus, así como para obtener el valor presente actuarial de anualidades pagaderas con mayor frecuencia que una vez al año.

Retomando

$$_t p_x = 1 - tq_x$$

$$_t p_x \mu(x+t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x)$$

$$= q_x$$

Al aplicar este supuesto a un estatus de vida conjunta (xy) con $T(x)$ y $T(y)$ independientes, para $0 \le t \le 1$, se obtiene

$$_t p_{xy} \mu_{xy}(t) = {}_t p_x \, {}_t p_y \left[\mu(x+t) + \mu(y+t) \right] \tag{2.10.1}$$

$$= {}_t p_y \left[{}_t p_x \mu(x+t) \right] + {}_t p_x \left[{}_t p_y \mu(y+t) \right]$$
$$= (1 - tq_y) q_x + (1 - tq_x) q_y$$
$$= q_x + q_y - q_x q_y + (1-2t) q_x q_y$$
$$= q_{xy} + (1-2t) q_x q_y \qquad (2.10.2)$$

2.11 Valores Conmutados

Los valores conmutados para vidas conjuntas, se definen de forma análoga a los de vida individual. Considerando el valor presente actuarial para *m* vidas

$${}_t E_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = v^t \, {}_t p_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \qquad (2.11.1)$$

$$= v^t \frac{l_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}}{l_{x_1:x_2:\cdots:x_m}} \qquad (2.11.2)$$

Para obtener los valores conmutados se introduce $v^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}}$ en el numerador y denominador, en lugar de v^t de acuerdo con el sistema de Morgan, el cual es aceptado en la Notación Internacional. El exponente $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}$, es la media aritmética de las edades que conforman el estatus. Un incremento de un año en cada edad, produce un incremento de una unidad en el exponente.

Como $$D_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}} l_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \qquad (2.11.3)$$

entonces $${}_t E_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \frac{D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}}{D_{x_1:x_2:\cdots:x_m}} \qquad (2.11.4)$$

de manera similar

$$C_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}} d_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \qquad (2.11.5)$$

Las funciones N, S, M y R se definen, como en el caso de vida individual, sumando sobre los valores de D, N, C y M, respectivamente.

$$N_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \qquad (2.11.6)$$

$$S_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \qquad (2.11.7)$$

$$M_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \qquad (2.11.8)$$

$$R_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \qquad (2.11.9)$$

Caso continuo

$$\overline{D}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}dt \tag{2.11.10}$$

$$\overline{C}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}\mu_{x_1+t:}\mu_{x_2+t:\cdots:}\mu_{x_m+t}dt \tag{2.11.11}$$

$$\overline{N}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty}\overline{D}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}dt \tag{2.11.12}$$

$$\overline{S}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty}\overline{N}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \tag{2.11.13}$$

$$\overline{M}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty}\overline{C}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \int_0^1 D_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}\mu_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}dt \tag{2.11.14}$$

$$\overline{R}_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = \sum_{t=0}^{\infty}\overline{M}_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t} \tag{2.11.15}$$

Existe otro método para obtener los valores conmutados de varias vidas, conocido como sistema Griffith Davies, el cual consiste en introducir el factor v^x en el denominador y numerador como se expresa a continuación

$$\begin{aligned} {}_tE_{x_1:x_2:\cdots:x_m} &= v^t\ {}_tp_{x_1:x_2:\cdots:x_m} \\ &= v^t\,\frac{l_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}}{l_{x_1,x_2:\cdots:x_m}} \end{aligned} \tag{2.11.16}$$

$$\begin{aligned} {}_tE_{x_1:x_2:\cdots:x_m} &= \frac{v^{x_1+t}l_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}}{v^{x_1}l_{x_1:x_2:\cdots:x_m}} \\ &= \frac{D_{x_1+t:}l_{x_2+t:\cdots:x_m+t}}{D_{x_1}l_{x_1:\cdots:x_m}} \end{aligned} \tag{2.11.17}$$

Basado en este método se define

$$D_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = v^x l_{x_1:}l_{x_2:\cdots:}l_{x_m} \tag{2.11.18}$$

$$= D_{x_1}l_{x_2:\cdots:}l_{x_m} \tag{2.11.19}$$

$$C_{x_1:x_2:\cdots:x_m} = v^x d_{x_1:}d_{x_2:\cdots:}d_{x_m} \tag{2.11.20}$$

$$= C_{x_1:}l_{x_2:\cdots:}l_{x_m} \tag{2.11.21}$$

Los valores para N, S, M y R, se obtienen sumando como se indicó en el método anterior. La diferencia radica en la definición de las valores D y C.

Ambos métodos son válidos, la elección de uno u otro depende de aquel que disminuye en mayor medida los cálculos.

2.12 Seguros y Anualidades de Múltiples Vidas

Una vez que se han desarrollado las probabilidades de muerte y sobrevivencia para los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente, es preciso utilizarlas en los modelos de seguros y anualidades para múltiples vidas.

Los tipos de seguros y anualidades que se desarrollan en la teoría de vida individual, se definen también en la teoría de vidas múltiples. Para ello hay que sustituir la vida (x) por el estatus general (u).

2.12.1 Seguros de Múltiples Vidas

En las operaciones de seguros de múltiples vidas hay dos casos que deben considerarse:

- que el seguro se pague al ocurrir la primera muerte
- que el seguro se pague al fallecer el último sobreviviente

En ambos casos el pago puede realizarse al momento en que el estatus se disuelve, o bien al final del año. Para establecer los lineamientos generales se utiliza al estatus general (u). Las siguientes expresiones corresponden al valor presente actuarial y la varianza de un seguro unitario, pagadero al momento de la interrupción del estatus (u). Sea T la v.a. que denota el tiempo de vida futuro hasta la interrupción del estatus general (u)

$$\overline{A}_u = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_u \mu(u+t)\,dt \qquad (2.12.1.1)$$

$$Var[Z] = {}^2\overline{A}_u - (\overline{A}_u)^2 \qquad (2.12.1.2)$$

Y para la variable aleatoria K, que denota el tiempo de vida futuro truncado de (u)

$$A_u = E[Z]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \Pr(K=k) \qquad (2.12.1.3)$$

$$Var[Z] = {}^2A_u - (A_u)^2 \qquad (2.12.1.4)$$

Anteriormente se establecieron algunas relaciones entre funciones de distribución y de densidad de los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente. A continuación se presentan relaciones similares entre los modelos para seguros de vida conjunta y de último sobreviviente, considerando el valor presente.

La expresión (2.5.6) implica

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1} \qquad (2.12.1.5)$$

De la expresión (2.5.2) se obtiene

$$v^{T(\overline{xy})}+v^{T(xy)}=v^{T(x)}+v^{T(y)} \tag{2.12.1.6}$$

De la expresión (2.5.3) se obtiene

$$v^{T(\overline{xy})}v^{T(xy)}=v^{T(x)}v^{T(y)} \tag{2.12.1.7}$$

Al aplicar esperanza en ambos lados de (2.12.1.5) y (2.12.1.6) se obtiene

$$A_{\overline{xy}}+A_{xy}=A_x+A_y \tag{2.12.1.8}$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}}+\bar{A}_{xy}=\bar{A}_x+\bar{A}_y \tag{2.12.1.9}$$

Utilizando estas relaciones para el desarrollo de la covarianza, se tiene

$$\operatorname{cov}\left[v^{T(\overline{xy})},v^{T(xy)}\right]=E\left[v^{T(xy)}v^{T(\overline{xy})}\right]-E\left[v^{T(\overline{xy})}\right]E\left[v^{T(xy)}\right] \tag{2.12.1.10}$$

$$\begin{aligned}
&=E\left[v^{T(x)}v^{T(y)}\right]-E\left[v^{T(\overline{xy})}\right]E\left[v^{T(xy)}\right]\\
&=E\left[v^{T(x)}\right]E\left[v^{T(y)}\right]-E\left[v^{T(\overline{xy})}\right]E\left[v^{T(xy)}\right]\\
&=\bar{A}_x\bar{A}_y-\bar{A}_{\overline{xy}}\bar{A}_{xy}\\
&=\bar{A}_x\bar{A}_y-\left(\bar{A}_x+\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\right)\bar{A}_{xy}\\
&=\bar{A}_x\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\bar{A}_x-\bar{A}_{xy}\bar{A}_y+\left(\bar{A}_{xy}\right)^2\\
&=\left(\bar{A}_x-\bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\right)
\end{aligned} \tag{2.12.1.11}$$

2.12.2 Anualidades de Vidas Múltiples

Las fórmulas de anualidades contingentes de vida individual presentadas en el capítulo anterior, son válidas para las anualidades contingentes de múltiples vidas, cuyo pago depende de la existencia del estatus general (u). Retomando las anualidades contingentes para una vida desarrolladas en el capítulo 1 y reemplazando la vida individual (x) por el estatus general (u) se obtiene:

Para una anualidad unitaria, pagadera continuamente durante la existencia del estatus (u). T es la v.a. que denota la interrupción del estatus

$$Y=\bar{a}_{\overline{T|}} \tag{2.12.2.1}$$

$$\bar{a}_u=E[Y]=\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\,{}_tp_u\mu(u+t)\,dt$$

expresión que exhibe la forma de pagos anticipados (P.A.). Si

$$u = \bar{a}_{\overline{t}|} \qquad dv = {}_t p_x \mu(x+t)$$
$$du = d\,\frac{1-v^t}{\delta} = v^t \qquad v = -{}_t p_x$$

entonces

$$\begin{aligned}\bar{a}_u &= -{}_t p_u\, \bar{a}_{\overline{t}|}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_u dt \\ &= \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_u dt \\ &= \int_0^{\infty} {}_t E_u dt\end{aligned} \tag{2.12.2.2}$$

La expresión anterior exhibe la forma de pagos corrientes (P.C.)

Considerando la varianza obtenida en (1.11.6)

$$\operatorname{var}[Y] = \frac{{}^2\bar{A}_u - \left(\bar{A}_u\right)^2}{\delta^2} \tag{2.12.2.3}$$

Retomando la expresión de seguro pagadero al momento en que ocurra muerte de (u)

$$\bar{A}_u = \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_u \mu(u+t) dt \tag{2.12.2.4}$$
$$= 1 + \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_u dt$$

entonces

$$= 1 + \delta \bar{a}_u \tag{2.12.2.5}$$

obteniéndose la relación

$$\bar{A}_u = 1 + \delta \bar{a}_u \tag{2.12.2.6}$$

o bien

$$v^T = 1 + \delta \bar{a}_u \tag{2.12.2.7}$$

Sea Y la v.a. que denota el valor presente de una anualidad unitaria, pagadera al inicio de cada año, siempre que el estatus (u) exista y sea K v.a. que denota el número de años completos, que faltan para la disolución del estatus general (u). Se tienen

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K(u) \geq 0$$
$$\ddot{a}_u = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_u q_{u+k} \tag{2.12.2.8}$$

aplicando suma por partes

$${}_k p_u \cdot q_{u+k} = {}_{k|}q_u = {}_k p_u - {}_{k+1} p_u = \Delta\left(-{}_k p_u\right)$$
$$\Delta a_{k-1} = \frac{1-v^{(k+1)+1}}{d} - \frac{1-v^{k+1}}{d} = \frac{v^{k+1}(1-v)}{d} = v^{k+1}$$

$$\Delta f(k) = \Delta(-{}_k p_u) \qquad g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$
$$f(k) = -{}_k p_u \qquad \Delta g(k) = v^{k+1}$$

así

$$\begin{aligned}
{}_k p_u q_{u+k} &= -{}_k p_u \, \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\Big|_0^{\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k+1}p_u \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k+1}p_u \\
&= 1 + a_u
\end{aligned} \tag{2.12.2.9}$$

de
$$a_{\overline{T}|} = E[Y] = E\left[\frac{1-v^T}{d}\right] \tag{2.12.2.10}$$
$$= E\left[\frac{1-Z}{d}\right]$$
$$= \frac{1}{d}(1-A_u) \tag{2.12.2.11}$$
$$\operatorname{var}[Y] = \frac{1}{d^2}\operatorname{var}[A_u] \tag{2.12.2.12}$$
$$= \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_u - (A_u)^2\right]$$

Hasta el momento se han desarrollado expresiones para un estatus general (u).

Las relaciones entre los modelos para anualidades de último sobreviviente y anualidades de vida conjunta son

$$\ddot{a}_{\overline{k(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{k(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{k(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{k(y)+1}|} \tag{2.12.2.13}$$
$$\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} = \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|} \tag{2.12.2.14}$$

Aplicando esperanzas en ambos lados

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y \tag{2.12.2.15}$$
$$\bar{a}_{\overline{xy}} + \bar{a}_{xy} = \bar{a}_x + \bar{a}_y \tag{2.12.2.16}$$

Utilizando estas relaciones para desarrollar la covarianza

$$\operatorname{cov}\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] = \operatorname{cov}\left[\frac{1-v^{T(\overline{xy})}}{\delta}, \frac{1-v^{T(xy)}}{\delta}\right] \tag{2.12.2.17}$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\operatorname{cov}\left[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}\right]$$

$$=\frac{\left(\bar{A}_x-\bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\right)}{\delta^2} \tag{2.12.2.18}$$

Y la varianza

$$V\text{ar}\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|},\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right]=Var\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}\right]+V\text{ ar}\left[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right]+\text{cov}\left[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|},\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right]$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_{\overline{xy}}-\left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right)^2\right]+\frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_{xy}-\left(\bar{A}_{xy}\right)^2\right]+\frac{1}{\delta^2}\left[\left(\bar{A}_x-\bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y-\bar{A}_{xy}\right)\right]$$

2.13 Seguros de Vida Conjunta

Ya en la sección anterior se mostraron los modelos de seguros y anualidades para múltiples vidas, sin especificar si las vidas constituyen un estatus de vida conjunta o de último sobreviviente. Este apartado y el siguiente desarrollan las operaciones de seguros estos estatus, cuyo beneficio es otorgado a la disolución de estatus. Este tipo de operaciones responde a la necesidad de proteger económicamente a un grupo integrado por socios, cónyuges, hijos, etc.

A continuación se desarrollan los seguros diseñados para ser pagados a la disolución de un estatus de vida conjunta. Se utiliza el estatus (xy), para los casos discreto y continuo.

2.13.1 Caso Discreto

A_{xy} denota un seguro de vida entera que paga una unidad monetaria (u.m.) al final del año que ocurre el primer fallecimiento del estatus.

$$\begin{aligned}
A_{xy} &= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t|}q_{xy} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t}p_{xy}-\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t+1}p_{xy} \\
&= v\sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\,{}_{t}p_{xy}-\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_{t+1}p_{xy} \\
&= v\ddot{a}_{xy}-a_{xy} \\
&= (1-d)\ddot{a}_{xy}-\left(\ddot{a}_{xy}-1\right) \\
&= 1-d\ddot{a}_{xy}
\end{aligned} \tag{2.13.1.1}$$

Para este seguro, la varianza es

$$Var[Z]={}^2A_{xy}-\left(A_{xy}\right)^2$$

donde

$$^{2}A_{xy} = 1-\left(2d-d^{2}\right)\,^{2}\ddot{a}_{xy}$$

y

$$A_{xy} = 1-d\ddot{a}_{xy}$$

Si los miembros del grupo siguen la ley de Makeham

$$A_{xy} = A_{ww} = 1-d\ddot{a}_{ww} \qquad (2.13.1.2)$$

Con valores conmutados

$$A_{xy} = \frac{vN_{x:y} - N_{x+1:y+1}}{D_{xy}} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}} \qquad (2.13.1.3)$$

Las expresiones para el resto de los seguros según la temporalidad contratada, se muestran en el Cuadro 2.1, en la parte de Anexos.

Ejemplo 2.13.1.1: Evaluar un seguro pagadero al final del año de la disolución de estatus de vida conjunta $(50:60)$ suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham y utilizando las tablas que se encuentran en el Anexo.

Del ejemplo 2.9 recuperamos el estatus equivalente a $(50:60)$ al suponer Makeham

$$A_{50:60} = A_{56.0557596:56.0557596}$$

Utilizando (2.13.1.2) $A_{xy} = A_{ww} = 1-d\ddot{a}_{ww}$

Interpolando en tablas $\ddot{a}_{56.0557596} = 11.04039956$

Por lo tanto $A_{56.0557596:56.0557596} = 1-d\ddot{a}_{56.0557596:56.0557596}$

$$= 1-\left(0.065420561\right)\left(11.0439956\right)$$

$$= 0.277731$$

2.13.2 Caso Continuo

$\bar{A}_{xy}$ representa el valor actuarial de un seguro de vida entero, unitario, pagadero al momento en que se disuelva el estatus

$$\bar{A}_{xy} = \int_{0}^{\infty} v^{t}\,{}_{t}p_{xy}\,\mu_{x+t:y+t}\,dt \qquad (2.13.2.1)$$

Una aproximación se obtiene al suponer distribución uniforme en las muertes (DUM). Expresando la prima neta única de un seguro pagadero en el momento en que el estatus (u) deje de existir como

$$\bar{A}_{u} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k}p_{u} \int_{0}^{1} (1+i)^{1-s}\,{}_{k+s}p_{u}\,\mu_{u}(k+s)\,ds \qquad (2.13.2.2)$$

Sustituyendo el estatus (u) por el estatus de vida conjunta (xy)

$$\bar{A}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_k p_{xy} \left[q_{x+k:y+k} \underbrace{\int_0^1 (1+i)^{1-s}\,ds}_{1} + q_{x+k}\,q_{y+k} \underbrace{\int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)ds}_{2} \right] \qquad (2.13.2.3)$$

Realizando el cambio de variable $1-s=t$ y resolviendo las integrales

$$1.\int_0^1 (1+i)^{1-s}\,ds = \int_0^1 (1+i)^t\,dt = \int_0^1 e^{\delta t}dt = \left.\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right|_0^1 = \frac{1}{\delta}\left[e^{\delta}-1\right] = \frac{1}{\delta}\left[(1+i)-1\right] = \frac{i}{\delta} \qquad (2.13.2.4)$$

$$2.\ \int_0^1 (1+i)^{1-s}(1-2s)ds = \int_0^1 (1+i)^t(-1+2t)dt = \int_0^1 e^{\delta t}(-1+2t)dt \qquad (2.13.2.5)$$

$$= -\int_0^1 e^{\delta t}dt + 2\int_0^1 t e^{\delta t}dt$$

$$= -\left.\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right|_0^1 + 2\left[t\left.\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{\delta t}}{\delta}dt \right] = -\frac{i}{\delta} + 2\left[\frac{e^{\delta t}}{\delta} - \left.\frac{e^{\delta t}}{\delta}\right|_0^1 \right]$$

$$= \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \qquad (2.13.2.6)$$

por lo tanto

$$\bar{A}_{xy} = \frac{i}{\delta}A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_k p_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k} \qquad (2.13.2.7)$$

El segundo término indica, la prima neta única de un seguro pagadero si ambas vidas fallecen en el mismo año, multiplicado por un factor de corrección. Generalmente se ignora el segundo término por ser muy pequeño y se aproxima de la siguiente manera

$$\bar{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta}A_{xy} \qquad (2.13.2.8)$$

Otra aproximación se obtiene al supone que el total de las muertes se concentran a la mitad de cada año de edad, y entonces el pago se hace medio año antes que cuando el pago se realiza a final del año, es decir

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^{\infty} v^t\,{}_t p_{xy}\,\mu_{x+t:y+t}\,dt$$

$$\cong \sum_{t=0}^{\infty} v^{t-\frac{1}{2}}\,{}_{t|}q_{xy}$$

$$\cong (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{xy} \qquad (2.13.2.9)$$

Una vez obtenida la anterior aproximación, la valuación puede realizarse a través de valores conmutados o con tablas, si los miembros siguen la ley de Makeham. O bien valuar por fórmula recursiva como se mostró en la sección 1.8 de este trabajo. Las expresiones para los seguros temporales y diferidos se muestran en el Cuadro 2.2 en la parte de Anexos

Ejemplo 2.13.2.1: Utilizando la edad equivalente bajo el supuesto de Makeham, evaluar $\bar{A}_{50:60}$ al 7%, considerando las siguientes aproximaciones

a. $\bar{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta} A_{xy}$
b. $\bar{A}_{xy} \cong (1+i)^{1/2} A_{xy}$

Antes de evaluar hay que encontrar la edad equivalente. Del ejercicio 2.8.1 sabemos que $(ww) = (56.0557596 : 56.0557596)$ y que $\bar{A}_{50:60} = \bar{A}_{56.0557596:56.0557596} = 0.277731$. Utilizando este resultado para obtener las aproximaciones

a. $\bar{A}_{64.0155931} = 0.287342$
b. $\bar{A}_{64.0155931} = 0.287287$

2.13.3 Seguro pagadero al m-ésimo de año

A continuación se presentan las expresiones para evaluar un seguro de vida conjunta, unitario, pagadero al final del intervalo mensual en el que ocurre la disolución del estatus. Por lo desarrollado en el Capítulo 1 y sustituyendo a la vida individual (x) por el estatus de vida conjunta (xy), el valor presente actuarial de un seguro pagadero al m-ésimo de año en que ocurre la disolución del estatus es

$$A_{xy}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{xy} \sum_{j=1}^{m} v^{j/m} \left({}_{(j-1)|m} p_{x+k:y+k} - {}_{j|m} p_{x+k:y+k} \right) \tag{2.13.3.1}$$

Bajo el supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes y se distribuyen uniformemente sobre cada año, tal como se supuso en (2.13.2.2) se llega a la expresión

$$A_{xy}^{(m)} = \tfrac{i}{i^{(m)}} A_{xy} + \tfrac{i}{i^{(m)}} \left(1 + \tfrac{1}{m} - \tfrac{2}{d^{(m)}} + \tfrac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k} \tag{2.13.3.2}$$

2.14 Seguros de Último Sobreviviente

Al inicio de este capítulo se mencionó que el beneficio de un seguro de vidas múltiples, que se otorga a la disolución del estatus de último sobreviviente, puede expresarse a través de seguros de vida individual y vida conjunta, para ello se recurre a la sección 2.11, en donde se presentaron las relaciones entre los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente.

A continuación se presentan los diferentes tipos de seguros de último sobreviviente. La valuación puede realizarse con el contenido de las secciones anteriores. Se continua utilizando un estatus integrado por dos miembros; el estatus (xy).

2.14.1 Caso Discreto

$A_{\overline{xy}}$ representa el valor actuarial de un seguro unitario, pagadero al final del año en que el deje de existir el estatus $\left(\overline{xy}\right)$, es decir, al ocurrir la última muerte

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy} \tag{2.14.1.1}$$

${}_{n|}A_{\overline{xy}}$ denota el valor actuarial de un seguro unitario, diferido *n* años, pagadero al final de año en que el estatus deje de existir, si esto ocurre después de transcurridos *n* años.

$${}_{n|}A_{\overline{xy}} = {}_{n|}A_x + {}_{n|}A_y - {}_{n|}A_{xy} \tag{2.14.1.2}$$

$A_{\overline{xy}:\overline{n|}}$ representa el valor actuarial de un seguro unitario, temporal *n* años, pagadero al final del año en que el estatus deja de existir, si esto ocurre a lo largo de n años

$$A_{\overline{xy}:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} + A_{y:\overline{n|}} - A_{xy:\overline{n|}} \tag{2.14.1.3}$$

Utilizando un estatus compuesto por *m* miembros

$$A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{2.14.1.4}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{(1)} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{x_1} - \sum_{(2)} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{x_1x_2} + \cdots + (-1)^{k+1}\sum_{(k)} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{x_1x_2\cdots x_k} + \cdots + (-1)^{m+1} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{x_1x_2\cdots}\right]$$

$$= \sum_{(1)} A_{x_1} - \sum_{(2)} A_{x_1x_2} + \cdots + (-1)^{k+1}\sum_{(k)} A_{x_1x_2\cdots x_k} + \cdots + (-1)^{m+1} A_{x_1x_2\cdots x_m} \tag{2.14.1.5}$$

donde la suma $\sum_{(k)} A_{x_1x_2\cdots x_k}$ es la suma de los seguros pagaderos al primer fallecimiento de los posibles grupos de k miembros de entre los *m* que conforman el estatus inicial.

También se verifica la relación

$$A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{2.14.1.6}$$

Al multiplicar la expresión (2.3.39) por v^t y sumando sobre *t*, se obtiene

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = D_1^{\ddot{a}} - D_2^{\ddot{a}} + D_3^{\ddot{a}} - \cdots + (-1)^{m-1} D_m^{\ddot{a}} \tag{2.14.1.7}$$

Donde

$$D_k^{\ddot{a}} = \sum_{(k)} \ddot{a}_{x_1x_2\cdots x_m} \tag{2.14.1.8}$$

representa la suma de anualidades de vida conjunta anticipadas, a favor de todos los posibles grupos formados con *k* miembros, de entre los *m* que conforman el estatus original.

Utilizando la relación (2.14.1.6) y la expresión (2.14.1.7), el valor presente actuarial de un seguro unitario de último sobreviviente es

$$\begin{aligned} A_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} &= 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} \\ &= 1 - d\left(D_1^{\ddot{a}} - D_2^{\ddot{a}} + D_3^{\ddot{a}} - \cdots\right) \end{aligned} \qquad (2.14.1.9)$$

definiendo

$$D_k^A = \sum_{(k)} A_{x_1 x_2 \cdots x_m} \qquad (2.14.1.10)$$

como la suma de seguros unitarios de vida conjunta, a favor de los todos los posibles estatus formados con *k* miembros, de entre los *m* que conforman el estatus original. Se obtiene

$$A_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = D_1^A - D_2^A + D_3^A - \cdots + (-1)^{m-1} D_m^A \qquad (2.14.1.11)$$

Ejemplo 2.14.1.1: Expresar en términos de vidas individuales y estatus de vida conjunta un seguro pagadero a la disolución del estatus de último sobreviviente $\left(\overline{50:54:60:62}\right)$

Por (2.14.1.11)

$$A_{\overline{50:54:60:62}} = D_1^A - D_2^A + D_3^A - \cdots + (-1)^{m-1} D_m^A$$

y como $D_k^A = \sum A_{x_{j1} x_{j2} \cdots x_{jk}}$ entonces

$$\begin{aligned} A_{\overline{50:54:60:62}} &= A_{50} + A_{54} + A_{60} + A_{62} \\ &\quad - \left[A_{50:54} + A_{50:60} + A_{50:62} + A_{54:60} + A_{54:62} + A_{60:62}\right] \\ &\quad + \left[A_{50:54:60} + A_{50:60:62} + A_{54:60:62}\right] \\ &\quad - A_{50:54:60:62} \end{aligned}$$

2.14.2 Caso Continuo

Retomando la expresión (2.14.5)

$$\bar{A}_{\overline{xy}} + \bar{A}_{xy} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$$

y despejando $\bar{A}_{\overline{xy}}$

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy} \qquad (2.14.2.1)$$

Para los seguros diferido y temporal, se tienen expresiones similares a (2.14.2.1)

$$ {}_{n|}\bar{A}_{\overline{xy}} = {}_{n|}\bar{A}_{x} + {}_{n|}\bar{A}_{y} - {}_{n|}\bar{A}_{xy} \tag{2.14.2.2} $$

$$ \bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \bar{A}_{x:\overline{n|}} + \bar{A}_{y:\overline{n|}} - \bar{A}_{xy:\overline{n|}} \tag{2.14.2.3} $$

Una vez que un seguro de último sobreviviente se expresa en función de seguros de vida conjunta y de vida individual su evaluación puede realizarse con cualquiera de las alternativas presentadas en la sección 2.13.2.

2.15 Anualidades de Vida Conjunta

En este apartado se presentan las expresiones para anualidades unitarias, vencidas y anticipadas, pagaderas durante la existencia del estatus de vida conjunta (xy). La valuación, al igual que en los seguros, puede realizarse a través de valores conmutados, por ley de Makeham, por ley Gompertz o por fórmulas recursivas.

2.15.1 Anualidades Vencidas de Vida Conjunta

a_{xy} representa el valor actuarial de una anualidad vencida, pagadera en tanto el estatus (xy) exista

$$ a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy} \tag{2.15.1.1} $$

Bajo la Ley de Makeham

$$ a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{ww} = a_{ww} \tag{2.15.1.2} $$

Por valores conmutados

$$ \begin{aligned} a_{xy} &= \sum_{t=1}^{\infty} {}_t E_{xy} \\ &= \frac{D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \cdots}{D_{xy}} \\ &= \frac{N_{x+1:y+1}}{D_{xy}} \end{aligned} \tag{2.15.1.3} $$

Las expresiones de las anualidades de vida múltiple diferidas y temporales se muestran en el cuadro 2.3 en la parte de Anexos

2.15.2 Anualidades Anticipadas de Vida Conjunta

$\ddot{a}_{xy}$ denota el valor presente actuarial de una anualidad unitaria anticipada, pagadera al inicio de cada año, en tanto el estatus (xy) exista.

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{xy} = 1 + a_{xy} \qquad (2.15.2.1)$$

Si los miembros siguen la ley de Makeham

$$\ddot{a}_{ww} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t {}_t p_{ww} = 1 + a_{ww} \qquad (2.15.2.2)$$

Por valores conmutados

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{xy} &= 1 + a_{xy} \\ &= \frac{D_{xy} + D_{x+1:y+1} + \cdots}{D_{xy}} \\ &= \frac{N_{xy}}{D_{xy}} \qquad (2.15.2.3) \end{aligned}$$

Las expresiones de las anualidades de vida múltiple diferidas y temporales se muestran en el cuadro 2.3 en la parte de Anexos

Ejemplo 2.15.2.1: Evaluar $\ddot{a}_{50:60}$ considerando un interés del 7% y utilizando el estatus equivalente bajo la ley de Makeham, obtenido en el ejemplo 2.9.

El estatus equivalente es $(56.0557596 : 56.0557596)$. Interpolando en la Tabla Ilustrativa 2.5, se obtiene $\ddot{a}_{56.0557596:56.0557596} = 10.9488306$

2.15.3 Anualidades Continuas de Vida Conjunta

Las anualidades pagaderas en forma continua en tanto el estatus existe, se pueden evaluar tomando el límite cuando $m \to \infty$, de una anualidad pagadera m veces al año, (1.12.9) del capítulo 1, para el estatus de vida conjunta (xy)

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xy} &= \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{xy} dt \qquad (2.15.3.1) \\ &\cong a_{xy} + \frac{1}{2} \qquad (2.15.3.2) \\ &\cong \ddot{a}_{xy} - \frac{1}{2} \qquad (2.15.3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_{xy} &= \left({}_n E_{xy} \right) \ddot{a}_{x+n:y+n} \\ &\cong {}_n a_{xy} + \frac{1}{2} {}_n E_{xy} \qquad (2.15.3.4) \end{aligned}$$

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|} + \frac{1}{2}\left(1 - {}_{n}E_{xy}\right) \tag{2.15.3.5}$$

O bien aproximando con la fórmula de Woolhouse

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{xy} dt \tag{2.15.3.6}$$

$$\cong a_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\mu_{xy} + \delta\right) \tag{2.15.3.7}$$

$$\cong \ddot{a}_{xy} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\mu_{xy} + \delta\right) \tag{2.15.3.8}$$

Sin embargo, una mejor aproximación se obtiene al reemplaza (x) por el estatus (xy) en la expresión (1.11.5)

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \bar{A}_{xy}\right) \tag{2.15.3.7}$$

Sustituyendo el resultado obtenido en (2.13.2.7), al suponer distribución uniforme de las muertes

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left\{1 - \frac{i}{\delta}\left[A_{xy} + \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k}\right]\right\} \tag{2.15.3.8}$$

De la expresión (1.11.15), para el estatus (xy), sustituyendo $1 - d\ddot{a}_{xy}$ por A_{xy}

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left\{1 - \frac{i}{\delta}\left[1 - d\ddot{a}_{xy} + \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k}\right]\right\} \tag{2.15.3.9}$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta^2} + \frac{id}{\delta^2}\ddot{a}_{xy} - \frac{i}{\delta^2}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k}$$

$$= \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty) - \frac{i}{\delta^2}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k} \tag{2.15.3.10}$$

donde

$$\alpha(\infty) = \frac{id}{\delta^2} \qquad \beta(\infty) = \frac{i - \delta}{\delta^2}$$

La expresión (2.15.8.10) sigue el supuesto de que $T(x)$ y $\mathrm{T}(\mathrm{y})$ están distribuidos independiente y uniformemente. El tercer término es un pequeño monto, aproximado al valor de $\frac{i}{6\delta}$, el cual multiplica el valor presente actuarial de un seguro otorgado si ambas vidas mueren en el mismo año.

Si se supone que $T(xy)$ en sí misma está uniformemente distribuida para cada año futuro, entonces con $m = \infty$, se obtiene la expresión

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty) \tag{2.15.3.11}$$

2.16 Anualidades de Último Sobreviviente

Las anualidades de último sobreviviente, pagan durante la existencia del estatus, es decir, mientras al menos un miembro este con vida. Al igual que las anualidades de vida individual y de vida conjunta la anualidad puede ser vencida o anticipada. A continuación se presentan las expresiones para anualidades de último sobreviviente, vencidas y anticipadas.

2.16.1 Anualidades Vencidas de Último Sobreviviente

$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ representa el valor actuarial de una anualidad unitaria, vencida, pagadera durante la existencia del estatus $\left(\overline{x_1x_2\cdots x_m}\right)$

$$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{2.16.1.1}$$

$$= \sum_{(1)} a_{x_1} - \sum_{(2)} a_{x_1x_2} + \cdots + (-1)^{t+1}\sum_{(r)} a_{x_1x_2\ldots x_t} + \cdots + (-1)^{m+1} a_{x_1x_2\ldots x_m} \tag{2.16.1.2}$$

donde $\sum_{(t)} a_{x_1x_2\cdots x_m}$ representa la suma de las anualidades unitarias, vencidas, ilimitadas, a favor de todos los grupos distintos al primer fallecimiento de *t* miembros, que pueden formarse con los *m* miembros del estatus inicial.

Para el estatus $\left(\overline{xy}\right)$

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy} \tag{2.16.1.3}$$

$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|}$ representa el valor actuarial de una anualidad unitaria, vencida, temporal a *n* años, pagadera mientras el estatus exista, es decir, mientras al menos un elemento se encuentre con vida.

$$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{2.16.1.4}$$

Para el estatus $\left(\overline{xyz}\right)$

$$a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + a_{y:\overline{n}|} + a_{z:\overline{n}|} - \left(a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} + a_{yz:\overline{n}|}\right) + a_{xyz:\overline{n}|} \tag{2.16.1.5}$$

${}_{n|}a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ representa el valor actuarial de una anualidad unitaria, vencida, diferida *n* años, pagadera durante la existencia del estatus $\left(\overline{x_1x_2\cdots x_m}\right)$

$${}_{n|}a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = \sum_{t=n}^{\infty} v^t \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{2.16.1.6}$$

para el estatus $\left(\overline{xy}\right)$

$$ {}_{n|}a_{\overline{xy}} = {}_{n|}a_{x} + {}_{n|}a_{y} - {}_{n|}a_{xy} \tag{2.16.1.7}$$

2.16.2 Anualidades Anticipadas de Último Sobreviviente

Las siguientes expresiones corresponden a anualidades anticipadas, unitarias y pagaderas durante la existencia de al menos un miembro del estatus $\left(\overline{xy}\right)$:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_{x} + \ddot{a}_{y} - \ddot{a}_{xy} \tag{2.16.2.1}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}} \tag{2.16.2.2}$$

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{yx}} = {}_{n|}\ddot{a}_{x} + {}_{n|}\ddot{a}_{y} - {}_{n|}\ddot{a}_{xy} \tag{2.16.2.3}$$

2.16.3 Anualidades Continuas de Último Sobreviviente

Para evaluar las anualidades pagaderas en forma continua, en tanto el estatus de último sobreviviente exista, se puede utilizar la relación obtenida en (2.14.2.16)

$$\bar{a}_{\overline{xy}} + \bar{a}_{xy} = \bar{a}_{x} + \bar{a}_{y} \tag{2.16.3.1}$$

de donde

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_{x} + \bar{a}_{y} - \bar{a}_{xy} \tag{2.16.3.2}$$

$$\approx a_{x} + a_{y} + a_{xy} + \frac{1}{2} \tag{2.16.3.3}$$

o bien utilizando hasta el tercer término de la fórmula de Woolhouse

$$\bar{a}_{\overline{xy}} \approx a_{x} + a_{y} - a_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left[\mu(x) + \mu(y) - \mu_{xy} + \delta\right] \tag{2.16.3.4}$$

Ejemplo 2.16.3.1: Considérese una anualidad continua que paga 1 (u.m.) mientras ambos (x) y (y) estén con vida y $\frac{2}{3}$ (u.m.) durante la existencia de cualquiera de los miembros (x) o (y). Obtener:

a. El valor presente actuarial de la anualidad
b. La varianza de la variable aleatoria suponiendo independencia entre $T(x)$ y $T(y)$.

a. Se trata de una anualidad que combina una anualidad que paga $\frac{1}{3}$ para el estatus de vida conjunta (xy) y una anualidad que para $\frac{2}{3}$ durante la existencia del estatus de último sobreviviente $\left(\overline{xy}\right)$. Por lo tanto el valor presente de los pagos es

$$Z = \tfrac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}} + \tfrac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)|}}$$

Tomando la esperanza

$$E[Z] = \tfrac{1}{3}\bar{a}_{xy} + \tfrac{2}{3}\bar{a}_{\overline{xy}}$$

Desarrollando las anualidades se obtiene

$$\begin{aligned} E[Z] &= \tfrac{2}{3}\left[\bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}\right] + \tfrac{1}{3}\bar{a}_{xy} \\ &= \tfrac{2}{3}\bar{a}_x + \tfrac{2}{3}\bar{a}_y - \tfrac{1}{3}\bar{a}_{xy} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} Var[Z] &= Var\left[\tfrac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}} + \tfrac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)|}}\right] \\ &= \tfrac{4}{9}\operatorname{var}\left(\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}}\right) + \tfrac{1}{9}\operatorname{var}\left(\bar{a}_{\overline{T(xy)|}}\right) + \operatorname{cov}\left(\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}}, \bar{a}_{\overline{T(xy)|}}\right) \end{aligned}$$

Por (2.12.2.17) y (2.12.2.18)

$$Cov\left(\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})|}}, \bar{a}_{\overline{T(xy)|}}\right) = \frac{C\operatorname{ov}\left(v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}\right)}{\delta^2} = \frac{\left(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}\right)}{\delta^2}$$

Sustituyendo las varianzas según (2.12.2.12)

$$\operatorname{var}[Z] = \frac{\tfrac{4}{9}\left[{}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - \left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right)^2\right] + \tfrac{1}{9}\left[{}^2\bar{A}_{xy} - \left(\bar{A}_{xy}\right)^2\right] + \tfrac{4}{9}\left(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy}\right)\left(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}\right)}{\delta^2}$$

2.17 Anualidades de Vida Conjunta pagaderas m veces al año

Las anualidades pagaderas en subperiodos de año, a favor del estatus (xy), en tanto exista como tal, se pueden calcular utilizando la fórmula de Woolhouse[1], tal como se mostró en el capítulo 1 o bien suponiendo que las muertes se distribuyen uniformemente.

Desarrollando la fórmula de Woolhouse, hasta el tercer término, para obtener una anualidad anticipada, unitaria, pagadera durante la existencia del estatus (xy)

$$\tfrac{1}{m}\left(u_{\frac{1}{m}} + u_{\frac{2}{m}} + \cdots + u_n\right) = \sum_{x=1}^{n} u_x + \frac{m-1}{2m}\left(u_0 - u_n\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(u'_n - u'_0\right)\cdots \qquad (2.17.1)$$

[1] Ver Gonzalez Galé, J. *Elementos de Cálculo Actuarial*, Mucchi , Buenos Aires. 1970. 112.
Villalón G. J. *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas*, Pirámide, España. 1997. 112

Como el límite superior es $\omega - x$, por ser la edad máxima que se considera puede alcanzar una vida de edad *x*, al hacer $u_x = u_t = v^t{}_t p_{xy}$ se obtiene:

$$\tfrac{1}{m}\left(u_{\frac{1}{m}} + u_{\frac{2}{m}} + \cdots + u_n\right) = a_{xy}^{(m)} \tag{2.17.2}$$

$$\sum_{x=1}^{n} u_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t{}_t p_{xy} = a_{xy} \tag{2.17.3}$$

como $u_0 = v^0{}_0 p_{xy} = 1$ y $u_{w-x} = v^{\omega-x}{}_{\omega-x} p_{xy} = 0$ entonces

$$\frac{m-1}{2m}\left(u_0 - u_{\omega-x}\right) = \frac{m-1}{2m} \tag{2.17.4}$$

obteniendo las derivadas

$$\begin{aligned}
u_t' &= \frac{d}{dt}\left(v^t{}_t p_{xy}\right) = \frac{d}{dt}\left(v^t \frac{l_{x+t} l_{y+t}}{l_x l_y}\right) = \frac{1}{l_{xy}} \frac{d}{dt}\left(v^t l_{x+t} l_{y+t}\right) \\
&= \frac{1}{l_x l_y}\left[l_{x+t:y+t} \frac{dv^t}{dt} + l_{x+t} v^t d \frac{l_{y+t}}{dt} + l_{y+t} v^t \frac{dl_{x+t}}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{l_x l_y}\left[l_{x+t} l_{y+t} v^t \ln v + l_{x+t} l_{y+t} v^t \frac{dl_{y+t}}{l_{y+t} dt} + l_{x+t} l_{y+t} v^t \frac{dl_{x+t}}{l_{x+t} dt} \right] \\
&= \frac{l_{x+t} l_{y+t} v^t}{l_x l_y}\left[\ln v + d \frac{l_{y+t}}{l_{y+t} dt} + d \frac{l_{x+t}}{l_{x+t} dt} \right]
\end{aligned} \tag{2.17.5}$$

Cuando $t = \omega - x$ la expresión (2.17.5) se anula, y para $t = 0$ se obtiene

$$-\delta - \mu(y) - \mu(x) = -\left(\delta + \mu(x) + \mu(y)\right) \tag{2.17.6}$$

$$u_{\omega-x}' - u_0' = \delta + \mu(x) + \mu(y) = \mu(xy) + \delta \tag{2.17.7}$$

Por lo tanto

$$a_{xy}^{(m)} \cong a_{xy} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu(xy) + \delta\right] \tag{2.17.8}$$

Y por lo que respecta a la anualidad anticipada, aproximando con la fórmula del Woolhouse

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} \cong \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} \tag{2.17.9}$$

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} \cong \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_{xy} + \delta\right) \tag{2.17.10}$$

En ocasiones la aproximación con la fórmula de Woolhouse, se realiza hasta el segundo término.

Ahora la relación entre una anualidad anticipada pagadera *m* veces al año y una anualidad vencida, pagadera *m* veces al año es

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{m} + a_{xy}^{(m)}$$

Suponiendo distribución uniforme de las muertes y desarrollando como en (1.12.26)

$$a_{xy}^{(m)} = \alpha(m)\, a_{xy} - \beta(m) \tag{2.17.11}$$

con

$$\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)} d^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{m}}$$

Y para la anualidad anticipada

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \alpha(m)\, \ddot{a}_{xy} - \beta(m) \tag{2.17.12}$$

Otra aproximación se obtiene al sustituir la vida individual (x) por el estatus de vida conjunta (xy) en (1.12.17), obteniendo

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{d}\left(1 - A_{xy}^{(m)}\right)$$

2.18 Anualidades de Último Sobreviviente pagaderas *m* veces al año

Las siguientes expresiones muestran aproximaciones para las anualidades pagaderas *m* veces al año, durante la existencia del estatus de último sobreviviente integrado por *m* miembros

$$\begin{aligned} a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}:\overline{n|}}^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{n-m} v^{t/m}\, {}_{t/m}p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} \\ &\cong a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}:\overline{n|}} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_n E_{x_1 x_2 \cdots x_m}\right) \end{aligned} \tag{2.18.1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}:\overline{n|}}^{(m)} &= \frac{1}{m} + a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}:\overline{n|}}^{(m)} - \frac{1}{m}\, {}_n E_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} \\ &\cong a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_n E_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}\right) \end{aligned} \tag{2.18.2}$$

Ejemplo 2.18.1: Evaluar $\ddot{a}_{50:60}^{(4)}$ suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham y utilizando las siguientes aproximaciones

a. Fórmula de Woolhouse segundo término
b. Fórmula de Woolhouse tercer término
c. Suponiendo DUM

a. 10.5677762
b. 10.5738306
c. 10.5683796

1.9 Tablas Ilustrativas

Al final de este trabajo se presenta la Tabla Ilustrativa de Mortalidad. Esta se construyó con las q_x de la Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989 que fue generada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, utilizando información de las aseguradoras que operan en México y suponiendo un radix de 10,000,000.00.

Los parámetros para las funciones de Makeham y Gompertz, $\left(A+Bc^x\right)$ fueron tomados del estudio Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989. Desarrollado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. En ese estudio se obtuvieron los siguientes valores

C = 1.0909846240 A = 0.000905426 B = 0.0000727187

2.20 Ejercicios

1. Expresar en función de ${}_np_x$ y ${}_np_y$ las siguientes probabilidades:

   a) Probabilidad de que (x) y (y) sobrevivan *n* años
   b) Probabilidad de que exactamente uno de los miembros (x) y (y) sobreviva *n* años
   c) Probabilidad de que al menos uno de los miembros (x) y (y) sobreviva *n* años
   d) Probabilidad de que (xy) deje de existir dentro de *n* años
   e) Probabilidad de que al menos uno de los miembros fallezca dentro de *n* años
   f) Probabilidad de que ambos miembros fallezcan dentro de los *n* años

2. Expresar en términos de ${}_{n|}q_{x},\ {}_{n|}q_y$ y ${}_{n|}q_z$

   a) La probabilidad de que las tres vidas (x), (y) y (z) mueren en el $(n+1)$-ésimo año
   b) La probabilidad de que ninguna de las tres vidas muera en el $(n+1)$-ésimo año
   c) La probabilidad de que al menos una de las tres vidas muera en el $(n+1)$-ésimo año.

3. Demostrar que la probabilidad de que (x) sobreviva *n* años y (y) sobreviva $(n-1)$ años, puede como:

$$\frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}} \text{ o bien } p_x\ {}_{n-1}p_{x+1:y}$$

4. Para $m \geq 10$, ¿cómo se definen las siguientes funciones?

   a. $a_{x_1x_2\cdots x_m}$

b. $a_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$

5. Sabiendo que las variables aleatorias $T(x)$ y $T(y)$ son independientes y que se distribuyen uniformemente a lo largo de cada año. Obtener una expresión simplificada de:

$$18\left({}_{1/3}q_{xy}\right)-12\left({}_{1/2}q_{xy}\right)$$

6. Dado que ${}_{25}p_{25:50}=0.2$ y ${}_{15}p_{25}=0.9$, calcule la probabilidad de que una persona de 40 años de edad sobreviva a la edad de 75

7. Demuestre algebraicamente y por razonamiento general

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_{xy} + {}_t p_x\left(1-{}_t p_y\right)+{}_t p_y\left(1-{}_t p_x\right)$$

8. Sabiendo que $l_{xy}=kd_x d_y$ indicar cuáles de las siguientes relaciones son correctas y cuáles no lo son:
   a) $d_{xy}=kd_x d_y$
   b) $\mu_{xy}=k\mu_x\mu_y$
   c) $p_{xy}=p_x p_y$
   d) $q_{xy}=q_x q_y$

9. Expresar la probabilidad de que al menos una de las vidas (x) y (y), mueran en el $(n+1)$-ésimo año. ¿Es lo mismo que ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$?

10. Encontrar para la siguiente función de densidad de probabilidad de $T(x)$ y $T(y)$

$$f_{T(x)T(y)}(s,t)=\frac{(n-1)(n-2)}{(1+s+t)^n} \qquad 0<s,\ 0<t,\ \text{n>2}$$

a. La función de distribución de probabilidad conjunta de $T(x)$ y $T(y)$

b. La función de densidad de probabilidad, la distribución de probabilidad y $\mu(x+s)$ para la distribución marginal de $T(x)$

c. La covarianza de $T(x)$ y $T(y)$, dado que $n>4$

d. La función de sobrevivencia conjunta de $\left[T(x),T(y)\right]$

11. Encontrar para la siguiente función de densidad de probabilidad de $T(x)$ y $T(y)$

$$f_{T(x)T(y)}(s,t)=\frac{(n-1)(n-2)}{(1+s+t)^n} \qquad 0<s,\ 0<t,\ \text{n>2}$$

a. La función de distribución conjunta de $T(x)$ y $T(y)$

b. La función de densidad de probabilidad, la función de distribución y $\mu(x+s)$ para la distribución marginal de $T(x)$

c. La covarianza de $T(x)$ y $T(y)$, dado que $n>4$

d. La función de sobrevivencia conjunta de $\left[T(x),T(y)\right]$

12. Con las distribuciones de $T(x)$ y $T(y)$ proporcionadas en el ejercicio 10, obtener para $T(xy)$ con $n>3$:

a. La función de distribución
b. La función de sobrevivencia
c. $E\left[T(xy)\right]$

13. La función de densidad de probabilidad de la variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es

$$f_{(t)}=\frac{n-2}{(1+t)^{n-1}} \qquad n>3,\ t>0$$

Encontrar

a. La función de densidad de probabilidad conjunta

b. La función de sobrevivencia conjunta

14. Calcular la $\frac{d}{dx}\overset{0}{e}_{xx}$

15. Si $\mu(x)=\dfrac{1}{(100-x)}$ para $0\leq x<100$, calcular

a. ${}_{10}p_{40:50}$
b. ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$
c. $\overset{0}{e}_{40:50}$
d. $\overset{0}{e}_{\overline{40:50}}$
e. $Var\left[T(40:50)\right]$
f. $Var\left[T\left(\overline{40:50}\right)\right]$
g. $Cov\left[T(40:50),T\left(\overline{40:50}\right)\right]$

16. Demostrar que la probabilidad de que dos vidas (30) y (40) mueran en el mismo año puede expresarse como

$$1+e_{30:40}-p_{30}\left(1+e_{31:40}\right)-p_{40}\left(1+e_{30:41}\right)+p_{30:40}\left(1+e_{31:41}\right)$$

17. Demostrar que la probabilidad de dos vidas (30) y (40) que mueren a la misma edad en el último aniversario puede expresarse como

$$ {}_{10}p_{30}\left(1+e_{40:40}\right)-2\,{}_{11}p_{30}\left(1+e_{40:41}\right)+p_{40}\,{}_{11}p_{30}\left(1+e_{41:41}\right) $$

18. De una expresión en términos de anualidades de vida individual y vida conjunta, del valor presente actuarial de una anualidad continua unitaria, pagadera durante la existencia de al menos una de las vidas (25) y (30) y siempre que esté por debajo de los 50 años de edad.

19. De una expresión en términos de anualidades de vida individual y vida conjunta, del valor presente actuarial de una anualidad vencida unitaria diferida, pagadera durante el tiempo que esté con vida alguno de los dos (25) o (30) iniciando los pagos cuando el sobreviviente de $(25)(30)$ tenga 50 años.

20. Calcular el valor presente actuarial de una anualidad vencida, temporal a *n* años, pagadera durante la existencia del estatus $\left(\overline{xy}\right)$. El monto del pago durante la existencia de ambas vidas es de una unidad monetaria, 1/2 a la muerte de (x) y 1/3 a la muerte de (y).

21. Obtener una expresión para el valor presente actuarial de una anualidad continua unitaria, pagadera mientras al menos una de las dos vidas (40) y (55) esté viva y tenga 60 años, pero no si (40) está viva y tiene menos de 55.

22. Dada la tabla de mortalidad que sigue la ley de Makeham y las vidas (x) y (y) para las que (ww) es el estatus de edades equivalentes, demuestre que

    a) ${}_tp_w$ es la media geométrica de ${}_tp_x$ y ${}_tp_y$
    b) ${}_tp_x+{}_tp_y>2\,{}_tp_w$
    c) $a_{\overline{xy}}>a_{\overline{ww}}$ para $x\neq y$

23. Describir el beneficio que representa la siguiente expresión y demostrarla

$$ a_{\overline{\overline{xy}:\overline{n|}}}=a_{\overline{n|}}+{}_{n|}a_{xy} $$

24. Describir el beneficio que representa la siguiente expresión y demostrarla

$$ \bar{A}_{\overline{x:\overline{n|}}}=\bar{A}_x-\bar{A}_{x:\overline{n|}}+v^n $$

25. Obtener la edad equivalente para los siguientes estatus, suponiendo ley de envejecimiento uniforme para el caso Gompertz

    a. $(40:50)$
    b. $(30:40:50)$
    c. $(55:60)$

26. Obtener el estatus equivalente, suponiendo ley de envejecimiento uniforme para el caso Makeham

   a. $(40:50)$
   b. $(30:40:50)$
   c. $(50:60)$

27. Evaluar las siguientes operaciones utilizando la ley de envejecimiento uniforme de Makeham

   a. $a_{40:50}$
   b. $\ddot{a}_{30:40:50}$
   c. $\ddot{a}_{55:60}$

28. Utilizando el valor de la anualidad $a_{40:50}$ del ejercicio 27 obtener el valor de $A_{40:50}$.

29. Demostrar

   a. $D_{xy} = k(1+i)^{\frac{x+y}{2}} D_x D_y$
   b. $C_{xy} = VD_{xy} - D_{x+1:y+1}$
   c. $D_{xy} = \sqrt{D_{xx} D_{yy}}$

30. Evaluar las siguientes probabilidades con la Tabla 2.1 Ilustrativa de Mortalidad Individual

   a. La probabilidad de que $(20),(30)$ y (40) estén con vida después de transcurridos 10 años
   b. La probabilidad de que (45) fallezca en el transcurso de los siguientes 5 años, y que (40) sobreviva después de 5 años
   c. La probabilidad de que $(20)(25)(30)$ y (35) estén con vida después de haber transcurrido 5 años y que (40) no sobreviva los 5 años

30. Con las probabilidades del ejercicio 29 encontrar la probabilidad de que (20) este con vida después de haber transcurrido 25 años

31. Evaluar las siguientes anualidades utilizando la Tabla Ilustrativa bajo la Ley de Makeham al 7%
   a. $a_{\overline{20:25}}$
   b. $a_{\overline{20:25:30}}$

Nota: Los ejercicios presentados en esta sección fueron tomados de la bibliografía consultada. En algunos la diferencia radica en la tabla de valores a utilizar para la solución de los mismos.

Se propone que se utilicen las tablas que se anexan al final del capítulo, y que fueron construidas con base a las tablas realizadas por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

3. FUNCIONES CONTINGENTES

3.1 Introducción

A lo largo de los capítulos anteriores se ha mostrado que para un estatus compuesto por *m* miembros, se puede obtener la probabilidad de que el estatus desaparezca al ocurrir: la primera muerte (vida conjunta) o la última muerte (último sobreviviente). Aún no se ha desarrollando la probabilidad de que sobrevivan al menos *k* de los *m* miembros que componen el estatus, como tampoco la probabilidad de que exactamente *k* miembros sobrevivan. Este capítulo aborda este tipo de probabilidades, así como sus aplicaciones. Los estatus de al menos *k* sobrevivientes y de exactamente *k* sobrevivientes de los *m* que conforman el grupo, constituyen la generalización de los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente.

En la sección 3.5 se presenta el estatus compuesto, el cual esta integrado a su vez por estatus, es decir los miembros que lo integran pueden ser: estatus de vida conjunta, estatus de último sobreviviente, vidas individuales y/o término cierto.

También es posible calcular la probabilidad de que las muertes ocurran en un orden específico, generándose con ello el estatus contingente. Una aplicación del estatus contingente, son los seguros y anualidades contingentes diseñados para familias. Estos instrumentos buscan que la muerte del padre o la madre no afecte drásticamente la economía de quienes sobreviven. Sobre esta misma línea se desarrollan las anualidades testamentarias, que como se indica más adelante, su concepto es próximo al de un seguro, pues el beneficio se otorga a la muerte de una vida o estatus.

Para el desarrollo de las funciones contingentes simples y compuestas se presentan primero las probabilidades contingentes, de manera que el uso de estas en las operaciones de seguros y anualidades no cause confusión.

3.2 Estatus General de Vida Múltiple

Como se mencionó arriba, los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente, son un caso particular del estatus general o estatus de *k*-sobrevivientes. A este estatus se le denota por $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}\right)$ y existe mientras al menos *k* de los *m*-miembros sobrevivan y deja de existir al ocurrir la $m-k+1$ésima muerte. Con $k=m$ se tiene un estatus de vida conjunta y con $k=1$ se tiene un estatus de último sobreviviente. Como es de esperarse, el estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}\right)$ es un estatus de sobrevivencia así como los estatus de vida conjunta y de último sobreviviente.

El beneficio de una anualidad otorgada al estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}\right)$ indica que la anualidad es pagada durante la existencia de al menos *k* vidas de las *m* que componen el estatus. Sin embargo el beneficio de un seguro otorgado al mismo estatus, se paga al ocurrir la $m-k+1$ésima muerte.

Otro estatus que también corresponde al estatus general es el estatus de exactamente k sobrevivientes, el cual se denota por $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}\right)$, este estatus existe mientras exactamente k de las m vidas que lo componen vivan. El estatus comienza a existir a la m-k ésima muerte y deja de existir al ocurrir la $m-k+1$ ésima muerte.

La notación utilizada para las probabilidades de sobrevivencia de este tipo de estatus es:

${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{k}}$ indica la probabilidad de que al menos k vidas de las m que integran el estatus sobrevivan al tiempo t

${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}}$ denota la probabilidad de que exactamente k de las m vidas que componen el estatus estén con vida en el año t

El estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}\right)$ no es un estatus de sobrevivencia ya que no cumple los requerimientos de función de sobrevivencia presentados en la sección 1.4 del capítulo 1

para $t=0$ $\quad {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}} \neq 1 \quad$ con $k<m$

cuando $t \to \infty$ $\quad {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}} = 1 \quad$ con $k=0$

Para encontrar la probabilidad de que el estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{k}\right)$ exista es necesario calcular las probabilidades de que los estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}\right)$, $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k+1]}\right), \cdots, \left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k+m]}\right)$ existan. Por lo tanto es conveniente desarrollar primero la expresión para la probabilidad de que exactamente k vidas sobrevivan al final de t años, es decir ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}}$.

Los siguientes ejemplos analizan los eventos que hay que considerar para obtener probabilidades del tipo ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{[k]}}$.

Ejemplo 3.2.1: Para el estatus (xy), analizar los eventos que pueden ocurrir para obtener la probabilidad de que sólo una vida sobreviva al final de t años

- Probabilidad de que (x) viva y (y) muera $\quad {}_t p_x \, {}_t q_y = {}_t p_x (1 - {}_t p_y) = {}_t p_x - {}_t p_{xy}$
- Probabilidad de que (y) viva y (x) muera $\quad {}_t p_y \, {}_t q_x = {}_t p_y (1 - {}_t p_x) = {}_t p_y - {}_t p_{xy}$

Sumando los eventos

$${}_t p_{\overline{xy}^{[1]}} = {}_t p_x + {}_t p_y - 2\, {}_t p_{xy}$$

retomando del capítulo 2 las probabilidades de vida conjunta y de último sobreviviente

$${}_t p_{\frac{[1]}{xy}} = {}_t p_{\overline{xy}} - {}_t p_{xy}$$

Ejemplo 3.2.2: Para el caso de tres vidas (xyz), obtener la probabilidad de que dentro de t años estén con vida

a. tres vidas
b. dos vidas
c. ninguna vida

a. $\;{}_t p_x \, {}_t p_y \, {}_t p_z = {}_t p_{xyz}$

b. $\;{}_t p_{xy}(1-{}_t p_z) + {}_t p_{xz}(1-{}_t p_y) + {}_t p_{yz}(1-{}_t p_z) = {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} - 3\,{}_t p_{xyz}$

c. $\;(1-{}_t p_x)(1-{}_t p_y)(1-{}_t p_z) = 1-({}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z) + ({}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz}) - {}_t p_{xyz}$

Una vez que se han analizado los estatus integrados para dos y tres vidas, se considera el estatus integrado por *m* vidas. Iniciando el análisis con *m* vidas todas de edad x. La probabilidad de que k vidas, previamente determinadas, sobrevivan dentro de t años es

$$({}_t p_x)^k (1-{}_t q_x)^{m-k} \tag{3.2.1}$$

Pero si las vidas no se determinan, entonces existen $\binom{m}{k}$ combinaciones distintas para seleccionar un grupo de k vidas de entre *m*. De manera que la probabilidad de que exactamente k vidas de la misma edad ${}_t p_{x_1} = {}_t p_{x_2} = \cdots = {}_t p_{x_m} = {}_t p_x$ sobrevivan t años es

$${}_t p_{\frac{[k]}{xx\cdots(m)}} = \frac{m!}{k!(m-k)!}({}_t p_x)^k (1-{}_t p_x)^{m-k} \tag{3.2.2}$$

desarrollando el binomio

$$\begin{aligned} {}_t p_{\frac{[k]}{xx\cdots(m)}} = \frac{m!}{k!(m-k)!}({}_t p_x)^k \Bigg[1-(m-k)\,{}_t p_x + \frac{(m-k)(m-k-1)}{2!}({}_t p_x)^2 \\ -\frac{(m-k)(m-k-1)(m-k-2)}{3!}({}_t p_x)^3 + \cdots \Bigg] \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

realizando el producto

$$\begin{aligned} {}_t p_{\frac{[k]}{xx\cdots(m)}} = \frac{m!}{k!(m-k)!}({}_t p_x)^k - \frac{m!(m-k)}{k!(m-k)!}({}_t p_x)^{k+1} + \frac{m!(m-k)(m-k-1)}{2!k!(m-k)!}({}_t p_x)^{k+2} \\ -\frac{m!(m-k)(m-k-1)}{2!k!(m-k)!}({}_t p_x)^{k+3} + \cdots \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

modificando a partir del segundo término de la siguiente forma

$$\frac{m!(m-k)}{k!(m-k)!}=\frac{m!}{k!(m-k-1)!}=\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}(k+1)=\binom{m}{k+1}(k+1)$$
$$\frac{m!(m-k)(m-k-1)}{2!k!(m-k)!}=\frac{m!}{2!k!(m-k-2)!}=\frac{m!}{(k+2)!(m-k-2)!}\frac{(k+1)(k+2)}{2!}=\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\binom{m}{k+2}$$

se obtiene

$$_t p_{\overline{xx\cdots(m)}}^{[k]}=\binom{m}{k}\left({}_t p_x\right)^k-(k+1)\binom{m}{k+1}\left({}_t p_x\right)^{k+1}+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\binom{m}{k+2}\left({}_t p_x\right)^{k+2}+\cdots \qquad (3.2.5)$$

Si se considera un grupo integrado por 4 vidas de la misma edad y se busca la probabilidad de que exactamente 2 sobrevivan, el primer término obtenido al desarrollar (3.2.5) es

$$\binom{4}{2}\left({}_t p_x\right)^2=6{}_t p_{xx}$$

si por el contrario las cuatro vidas tiene edades diferentes, el primer término es igual a

$${}_t p_{x_1x_2}+{}_t p_{x_1x_3}+{}_t p_{x_1x_4}+{}_t p_{x_2x_3}+{}_t p_{x_2x_4}+{}_t p_{x_3x_4}$$

Por lo tanto, si los miembros que integran el grupo tienen edades diferentes $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, hay que sustituir los valores $\binom{m}{k}\left({}_t p_x\right)^k$; $\binom{m}{k+1}\left({}_t p_x\right)^{k+1}\cdots$ por sumas de probabilidades de supervivencia de las combinaciones de vidas tomadas de m en k, m en $k+1$ etc. Simbolizando la suma de probabilidades por

$$Z^{k+r}=\sum_{(k+r)}{}_{\mathrm{t}}\, p_{x_1x_2\cdots x_m}=\binom{m}{k+r}p^{k+r}\ \text{con } r=0,1,2,\cdots$$

la expresión (3.2.5) se reescribirse como

$${}_t p_{\overline{x_1x_{21}\cdots x_m}}^{[k]}=Z^k-(k+1)Z^{k+1}+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}Z^{k+2}-\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}Z^{k+3}+\cdots \qquad (3.2.6)$$

o bien

$$\begin{aligned}{}_t p_{\overline{x_1x_{21}\cdots x_m}}^{[k]}&=Z^k-\binom{k+1}{1}Z^{k+1}+\binom{k+2}{2}Z^{k+2}+\cdots+(-1)^{m-k}\binom{m}{m-k}Z^m\\&=\sum_{r=0}^{m-k}(-1)^r\binom{k+r}{r}Z^{k+r}\\&=\sum_{r=k}^{m}(-1)^{r-k}\binom{r}{r-k}Z^r \qquad (3.2.7)\end{aligned}$$

retomando (3.2.6)

$$
{}_t p_{\overline{x_1 x_{21} \cdots x_m}}^{[k]} = Z^k \left[1 - (k+1) Z + \frac{(k+1)(k+2)}{2!} Z^2 - \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!} Z^3 + \cdots \right]
$$

$$
= Z^k (1+Z)^{-(k+1)} \tag{3.2.8}
$$

por lo tanto

$$
{}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{[k]} = \frac{Z^k}{(1+Z)^{k+1}} \tag{3.2.9}
$$

Ejemplo 3.2.3: Expresar la probabilidad de que exactamente 2 vidas de un grupo integrado por 4 miembros $(wxyz)$ sobrevivan al t-ésimo año, utilizando (3.2.7)

$$
{}_t p_{\overline{wxyz}}^{[2]} = Z^2 - 3Z^3 + 6Z^4
$$

$$
= \left[{}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} \right] - 3 \left[{}_t p_{wxy} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz} \right] + 6 \left[{}_t p_{wxyz} \right]
$$

Ejemplo 3.2.4: A partir de la expresión obtenida en el ejemplo 3.2.3, evaluar ${}_{10} p_{\overline{68:71:73:76}}^{[2]}$ suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham.

En el capítulo 2 se mostró que bajo la ley de Makeham

$$
{}_t p_{x_1, x_2, \cdots, x_m} = s^{mt} g^{(c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_m})(c^t - 1)}
$$

Siguiendo esta expresión para los valores

$$
c = 1.09098462
$$
$$
s = 0.99909498
$$
$$
g = 0.99807902
$$

se obtiene

	(68:71)=(69.598)	(68:73)=(70.770)	(68:76)=(74.056)	(71:73)=(72.043)	(71:76)=(73.770)	(73:76)=(74.089)
${}_{10} p_{w:w}$	0.09951477	0.077808505	0.04914013	0.057795108	0.036500625	0.028539071

	(68:71:73)=(70.847)	(68:71:76)=(72.149)	(71:73:76)=(73.519)
${}_{10} p_{w:w:w}$	0.021154504	0.013360173	0.007759176

	(68:71:73:76)=(72.368)
${}_{10} p_{w:w:w:w}$	0.002840059

Con estos resultados se evalúa

$$
{}_{10} p_{\overline{68:71:73:76}}^{[2]} = \left[{}_t p_{68:71} + {}_t p_{68:73} + {}_t p_{68:76} + {}_t p_{71:73} + {}_t p_{71:76} + {}_t p_{73:76} \right] - 3 \left[{}_t p_{68:71:73} + {}_t p_{68:71:76} + {}_t p_{71:73:76} \right] + 6 \left[{}_t p_{68:71:73:76} \right]
$$

$$= 0.239517$$

Una vez que se han obtenido las probabilidades de sobrevivencia para exactamente k vidas, es posible calcular la probabilidad de sobrevivencia de al menos k vidas. La probabilidad de que al menos k vidas sobrevivan, es la suma de probabilidades de sobrevivencia de exactamente $k+1,\ k+2,\cdots,\ k+m$. Es decir

$$\begin{aligned}
{}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,k} &= {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,[k]} + {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,[k+1]} + \cdots + {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,[m]} \\
&= \sum_{r=k}^{m} {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,[r]} \qquad (3.2.10) \\
&= \frac{Z^k}{\left(1+Z\right)^{k+1}} + \frac{Z^{k+1}}{\left(1+Z\right)^{k+2}} + \cdots \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Esta suma representa una progresión geométrica decreciente. Sabiendo que si $k+r>m$ se anulan los términos, entonces

$${}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,k} = \frac{\dfrac{Z^k}{\left(1+Z\right)^{k+1}}}{1-\dfrac{Z}{1+Z}} = \frac{Z^k}{\left(1+Z\right)^{k}} \qquad (3.2.12)$$

o bien

$$\begin{aligned}
{}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,k} &= Z^k - kZ^{k+1} + \frac{k\left(k+1\right)}{2!}Z^{k+2} - \cdots \\
&= Z^k - \binom{k}{1}Z^{k+1} + \binom{k+1}{2}Z^{k+2} + \cdots \left(-1\right)^{m-k}\binom{m-1}{m-k}Z^m \\
&= \sum_{r=k}^{m}\left(-1\right)^{r-k}\binom{r-1}{r-k}Z^r \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.5: Utilizar (3.2.13) para expresar las siguientes probabilidades de sobrevivencia

a. Al menos 2 vidas de un estatus compuesto por 3 miembros $\left(xyz\right)$, sobrevivan al t-ésimo año

b. Al menos 4 vidas de un estatus compuesto por 6 integrantes $\left(uvwxyz\right)$, sobrevivan al t-ésimo año

a. $${}_t p_{\overline{xyz}}^{\,2} = Z^2 - 2Z^3$$
$$= \left[{}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz}\right] - 2\left[{}_t p_{xyz}\right]$$

b. $${}_t p_{\overline{uvwxyz}}^{\,4} = Z^4 - 4Z^5 + 10Z^6$$

Ejemplo 3.2.6: A partir de las expresiones obtenidas en el ejercicio 3.3.4, evaluar ${}_5p_{\overline{71:73:76}}^{\,2}$

	(71:73)=(72.043)	(71:76)=(73.770)	(73:76)=(74.089)
${}_5p_{w:w}$	0.325673476	0.271879069	0.246829487

	(71:73:76)=(72.368)
${}_5p_{w:w:w}$	0.147835115

Sustituyendo estos resultados en $\left[{}_tp_{xy}+{}_tp_{xz}+{}_tp_{yz}\right]-2\left[{}_tp_{xyz}\right]$, se obtiene la probabilidad buscada

$$\begin{aligned}{}_5p_{\overline{71:73:76}}^{\,2} &= \left[{}_5p_{71:73}+{}_tp_{71:76}+{}_tp_{73:76}\right]-2\left[{}_tp_{71:73:76}\right] \\ &= 0.548712\end{aligned}$$

El método presentado arriba se conoce como el método de la Z. Utilizando el método probabilista las expresiones pueden ser obtenidas de la fórmula de Schuette-Nesbitt. Este último tiene la variante de considerar números arbitrarios que multiplican a las probabilidades de exactamente *k* y al menos *k* sobrevivientes.

Aplicaciones para la fórmula de Schuette-Nesbitt se encuentran en los seguros y anualidades cuyo beneficio aumenta o disminuye a la ocurrencia de una muerte. Tal es el caso de una anualidad continua unitaria, que paga durante la existencia de sus miembros y cuyo pago se ve reducido en un 50% cada vez que ocurre una muerte.

Antes de introducir la fórmula de Schuette-Nesbitt es conveniente retomar la fórmula de inclusión y exclusión de la teoría de probabilidad mostrada en la sección 2.3 del capítulo 2.

Sean los eventos $B_1,B_2,\cdots,B_m$, la probabilidad de su unión es

$$\Pr\left(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m\right)=D_1-D_2+D_3-\cdots+\left(-1\right)^{m-1}D_m \qquad (3.2.14)$$

Donde D_k es la suma simétrica

$$D_k=\sum\Pr\left(B_{j1}\cap B_{j2}\cap\cdots\cap B_{jk}\right) \qquad (3.2.15)$$

el rango de la suma es sobre todas las combinaciones $\binom{m}{k}$ subconjuntos de *k* eventos.

Denotando por B_k el evento de que el *k*-ésimo miembro este con vida al tiempo *t*, entonces es posible reescribir (3.2.14) como

$${}_tp_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_m}}={}_tD_1-{}_tD_2+{}_tD_3-\cdots\left(-1\right)^{m-1}{}_tD_m \qquad (3.2.16)$$

donde

$${}_tD_k=\sum{}_tp_{x_{j1},x_{j2},\cdots x_{jk}}$$

Ejemplo 3.2.7: Aplicar la fórmula de inclusión y exclusión de la teoría de probabilidad para $m=5$, suponiendo que B_k denota el evento de que *k* vidas estén aún con vida al tiempo *t*

$${}_t p_{\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}} = D_1 - D_2 + D_3 - D_4 + D_5$$

donde

$${}_t D_1 = {}_t p_{x_1} + {}_t p_2 + {}_t p_3 + {}_t p_4 + {}_t p_5$$
$${}_t D_2 = {}_t p_{x_1x_2} + {}_t p_{x_1x_3} + {}_t p_{x_1x_4} + {}_t p_{x_1x_5} + {}_t p_{x_2x_3} + {}_t p_{x_2x_4} + {}_t p_{x_2x_5} + {}_t p_{x_3x_4} + {}_t p_{x_3x_5} + {}_t p_{x_4x_5}$$
$${}_t D_3 = {}_t p_{x_1x_2x_3} + {}_t p_{x_1x_2x_4} + {}_t p_{x_1x_2x_5} + {}_t p_{x_1x_3x_4} + {}_t p_{x_1x_3x_5} + {}_t p_{x_1x_4x_5} + {}_t p_{x_2x_3x_4} + {}_t p_{x_2x_3x_5} + {}_t p_{x_2x_4x_5} + {}_t p_{x_3x_4x_5}$$
$${}_t D_4 = {}_t p_{x_1x_2x_3x_4} + {}_t p_{x_1x_2x_4x_5} + {}_t p_{x_1x_2x_3x_5} + {}_t p_{x_2x_3x_4x_5} + {}_t p_{x_1x_3x_5x_5}$$
$${}_t D_5 = {}_t p_{x_1x_2x_3x_4x_5}$$

Fórmula de Schuette-Nesbitt

Sean $B_1, B_2, \cdots, B_m$ eventos arbitrarios, y sea N una variable aleatoria sobre el rango $\{0,1,\cdots,m\}$ que denota el número de eventos que ocurren. Para coeficientes elegidos arbitrariamente $c_0, c_1, \cdots, c_m$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \Pr\left(N=n\right) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k c_0 D_k \qquad (3.2.17)$$

donde $D_k = \sum \Pr\left(B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}\right)$ como en (3.2.15), con $D_0 = 1$

Para realizar la demostración de (3.2.14) se utiliza el operador de cambio E definido como

$$Ec_k = c_{k+1} \qquad (3.2.18)$$

la relación entre el operador de cambio E y el operador diferencia Δ es $E = 1 + \Delta$.

Si I_{B_j} es la función indicadora de B_j y $1 - I_{B_j}$ la de su complemento, entonces

$$\sum_{n=0}^{m} I_{\{N=n\}} E^n = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - I_{B_j} + I_{B_j} E\right) \qquad (3.2.19)$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(1 + I_{B_j} \Delta\right) \qquad (3.2.20)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum I_{B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}}\right) \Delta^k \qquad (3.2.21)$$

Como $I_{B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}} = 1$ sólo si los puntos pertenecen a $B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}$, entonces la esperanza de $I_{B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}} = 1$ es $\Pr\left(B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}\right)$ y como $D_k = \sum \Pr\left(B_{j1} \cap B_{j2} \cap \cdots \cap B_{jk}\right)$ entonces

$$\sum_{n=0}^{m} \Pr\left(N=n\right) E^n = \sum_{k=0}^{m} D_k \Delta^k$$

(3.2.22)

Aplicando este operador a la secuencia de c_k con $k = 0$, se obtiene (3.2.17)

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \Pr(N=n) = \sum_{k=0}^{m} \Delta^k c_0 D_k$$

Ejercicio 3.2.8: Aplicar la fórmula de Schuette Nesbitt (3.2.17) para $m=5$ considerando $c_0=0,\ c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=4,\ c_4=8,\ c_5=10$

La siguiente tabla muestra las diferencias $\Delta^n c_i$ para $n=1,2,3$

k	c_k	Δc_k	$\Delta^2 c_k$	$\Delta^3 c_k$	$\Delta^4 c_k$	$\Delta^5 c_k$
0	0	1	0	1	0	-5
1	1	1	1	1	-5	-
2	2	2	2	-4	-	-
3	4	4	-2	-	-	-
4	8	2	-	-	-	-
5	10	-	-	-	-	-

Aplicando la fórmula de Schuette Nesbitt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{5} c_n \Pr(N=n) &= \sum_{k=0}^{5} \Delta^k c_0 D_k \\ &= D_1 + D_3 - 5D_5\end{aligned}$$

desarrollando

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{5} c_n \Pr(N=n) = &\left({}_t p_{x_1} + {}_t p_2 + {}_t p_3 + {}_t p_4 + {}_t p_5\right) \\ &+ ({}_t p_{x_1x_2x_3} + {}_t p_{x_1x_2x_4} + {}_t p_{x_1x_2x_5} + {}_t p_{x_1x_3x_4} + {}_t p_{x_1x_3x_5} \\ &+ {}_t p_{x_1x_4x_5} + {}_t p_{x_2x_3x_4} + {}_t p_{x_2x_3x_5} + {}_t p_{x_2x_4x_5} + {}_t p_{x_3x_4x_5}) \\ &-5\left({}_t p_{x_1x_2x_3x_4x_5}\right)\end{aligned}$$

o bien

$$\sum_{n=0}^{5} c_n \Pr(N=n) = \sum_{i=1}^{5} \Pr(B_i) + \sum_{i\neq j\neq k} \Pr(B_iB_jB_k) - \Pr(B_1B_2B_3B_4B_5)$$

El siguiente Teorema 3.1 proviene de la fórmula de Schuette Nesbitt, de manera que su demostración no se realiza.

Teorema 3.1

Para coeficientes $c_0, c_1, \cdots, c_m$ elegidos arbitrariamente se tiene

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} = c_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^j c_0 \, {}_t D_j \tag{3.2.23}$$

donde ${}_t D_j = \sum {}_t p_{x_{j1}x_{j2}\cdots x_{jk}}$ es la suma sobre todas las distintas combinaciones obtenidas, al seleccionar un grupo de k vidas de entre *m*.

Aplicaciones del teorema se presentan en la secciones de seguros y anualidades.

En el siguiente corolario se desarrolla la probabilidad de sobrevivencia para un estatus de exactamente k vidas ${}_t p_{\overset{[k]}{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}}$, siendo este un caso particular de (3.2.23).

Corolario 3.1

$$ {}_t p_{\overset{[k]}{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}} = \sum_{j=k}^{m} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} {}_t D_j \qquad (3.2.24)$$

donde ${}_t D_j = \sum {}_t p_{x_{j1} x_{j2} \cdots x_{jk}}$ es la suma sobre todos las distintas combinaciones que se obtienen al seleccionar un grupo de k vidas de entre *m*.

Demostración

Haciendo en (3.2.23) el conjunto $c_k = 1$ y $c_j = 0$ para $j \neq k$. Para estas c_j´s

$$\Delta^j c_0 = (E-1)^j c_0 = (-1)^{j-k} \binom{j}{k}, \quad j = k, k+1, \cdots, m$$

Puede observarse que el resultado es equivalente al obtenido en (3.2.7) al utilizar el método de la Z.

Ejemplo 3.2.9: Utilizar el corolario 3.1 para obtener la probabilidad de que exactamente 2 vidas del grupo integrado por 4 miembros $(wxyz)$, sobrevivan al *t*-ésimo año

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overset{[2]}{\overline{wxyz}}} &= \sum_{j=2}^{4} (-1)^{j-2} \binom{j}{2} {}_t D_j \\ &= {}_t D_2 - 3 {}_t D_3 + 6 {}_t D_4 \\ &= \sum_{i \neq j} \Pr\left(B_i B_j\right) - (3) \sum_{i \neq j \neq k} + (6) \Pr\left(B_i B_j B_k\right) + \Pr\left(B_1 B_2 B_3 B_4\right) \end{aligned}$$

$$= \left[{}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} \right] - 3\left[{}_t p_{wxy} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz} \right] + 6\left[{}_t p_{wxyz} \right]$$

Al comparar los resultados de los ejemplos 3.2.3 y 3.2.9, se observa el método de la Z y el corolario 3.1 generan los mismos resultados.

Como se mencionó en el desarrollo del método de la Z, para obtener la probabilidad de que al menos *k* vidas de entre *m*, sobrevivan al *t*-ésimo año se requiere calcular la probabilidad de que exactamente $k,\ k+1,\ k+2 \cdots k+m$ vidas sobrevivan. De manera que se tiene la siguiente relación

$$ {}_t p_{\overset{h}{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}} = \sum_{j=h}^{m} {}_t p_{\overset{[j]}{\overline{x_1, x_2, \cdots, x_m}}} \qquad (3.2.25)$$

De (3.2.23) y de (3.2.25) se sigue el siguientes corolario

Corolario 3.2

Para números arbitrarios $d_0, d_1, \cdots, d_m$

$$\sum_{k=0}^{m} d_k \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_j}}^{\;k} = d_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, {}_tD_j \qquad (3.2.26)$$

Demostración

Utilizando (3.2.25)

$$\sum_{h=0}^{m} d_h \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;h} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{j=h}^{m} d_h \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[j]} \qquad (3.2.27)$$

intercambiando las sumas

$$\sum_{j=0}^{m} d_j \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;j} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{h=0}^{j} d_h \right) {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[j]} \qquad (3.2.28)$$

por definición

$$c_j = \sum_{h=0}^{j} d_h \qquad \text{para} \quad j = 0, 1, \cdots, m\text{-}1 \qquad (3.2.29)$$

obteniéndose una expresión de la forma (3.2.19). Para esas $c\acute{}s$

$$c_0 = d_0$$
$$c_k = d_1 + \cdots + d_k$$
$$\Delta c_j = d_{j+1} \qquad \text{para} \;\; j = 0, 1, \cdots, m-1$$

por lo tanto

$$\Delta^j c_0 = \Delta^{j-1}\left(\Delta c_0\right) \qquad (3.2.30)$$
$$= \Delta^{j-1} d_1 \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, m \qquad (3.2.31)$$

entonces se tiene, por el lado derecho de (3.2.23)

$$\sum_{j=0}^{m} d_j \, {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;j} = d_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^{j-1} d_1 \, {}_tD_j \qquad (3.2.32)$$

Ejemplo 3.2.10: Aplicar (3.2.26) para $m = 3$, considerando que $d_0 = 0,\; d_1 = d_2 = d_3 = 1$

La siguiente tabla muestra las $\Delta^{j-1} d_1$

j	d_j	Δd_j	$\Delta^2 d_j$	$\Delta^3 d_j$
0	0	2	1	1
1	2	3	2	-
2	5	5	-	-
3	10	-	-	-

$$\sum_{j=0}^{3} d_j\, {}_t p_{\overline{\overset{j}{xyz}}} = d_0 + \sum_{j=1}^{3} \Delta^{j-1} d_1\, {}_t D_j$$
$$= 2\,{}_t D_1 + 3\,{}_t D_2 + 2\,{}_t D_3$$
$$= 2\left({}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z\right) + 3\left({}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz}\right) + 2\left({}_t p_{xyz}\right)$$

Finalmente se presenta el corolario para la probabilidad de que al menos k vidas de entre m sobrevivan al final del t-ésimo año.

Corolario 3.3

$$ {}_t p_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}}} = \sum_{j=k}^{m} \left[(-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \right] {}_t D_j \tag{3.2.33}$$

Demostración

En el corolario 3.2 el conjunto $d_k = 1$ y $d_j = 0$ para $j \neq k$. Para estas $d´s$

$$\Delta^{j-1} d_1 = (E-1)^{j-1} d_1 \tag{3.2.34}$$
$$= (-1)^{j-1} \binom{j-1}{k-1} \qquad j = k, k+1, \cdots, m \tag{3.2.35}$$

La expresión (3.2.35) obtenida de este corolario es equivalente a (3.2.13).

Ejemplo 3.2.11: Utilizar (3.2.34) para obtener ${}_{10} p_{\overline{\overset{1}{30:33:35}}}$, suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham

$$ {}_{10} p_{\overline{\overset{1}{30:33:35}}} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \binom{j-1}{0} {}_t D_j$$
$$= {}_t D_1 - {}_t D_2 + {}_t D_3$$
$$= \left({}_{10} p_{30} + {}_{10} p_{33} + {}_{10} p_{35}\right) - \left({}_{10} p_{30:33} + {}_{10} p_{30:35} + {}_{10} p_{33:35}\right) + \left({}_{10} p_{30:33:35}\right)$$
$$= 2.914226 - 2.683823 + 0.846111$$
$$= 0.999846$$

La función de densidad de probabilidad del estatus de k sobrevivientes, se puede obtener derivando la función de sobrevivencia (3.2.33) obteniéndose

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_t p_{\overline{\overset{k}{x_1 x_2 \cdots x_m}}}\right) = \sum_{j=k}^{m} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \left(-{}_t D´_j\right) \tag{3.3.36}$$

donde $\left(-{}_t D´_j\right)$ es la suma de las funciones de densidad de probabilidad del tiempo de vida futuro de los $\binom{m}{j}$ estatus de vida conjunta de entre las m vidas originales.

Una vez definidas las probabilidades de sobrevivencia de exactamente *k* y al menos *k* de un grupo de *m* miembros, es posible definir operaciones de seguros y anualidades.

3.3 Anualidades

Para el desarrollo de las anualidades, se utilizan las probabilidades de sobrevivencia para los estatus $\overset{k}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ y $\overset{[k]}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ obtenidas en el apartado 3.2, cuya aplicación es directa. Se utiliza cualquiera de los dos métodos, el de la Z o el obtenido por la fórmula de Schuette Nesbitt.

Utilizando el método de la Z, el valor presente actuarial de una renta unitaria, anticipada, pagadera durante la existencia de por lo menos *k* de las *m* vidas que integran el estatus, es

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overset{k}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}} &= \sum_{t=0}^{\infty} v^t\, {}_t p_{\overset{k}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^t\, \frac{Z^k}{\left(1+Z\right)^k} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^t \left[Z^k - \binom{k}{1} Z^{k+1} + \binom{k+1}{2} Z^{k+2} + \cdots \left(-1\right)^{m-k} \binom{m-1}{m-k} Z^m \right]
\end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

Al desarrollar el producto de (3.3.1) la anualidad $\ddot{a}_{\overset{k}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}}$ se define en función de anualidades de vida conjunta y de vida individual. Una forma de expresar directamente las anualidades para al menos k sobrevivientes en función de anualidades de vida conjunta y vida individual es, considerar a Z^k no como suma de probabilidades, sino como suma de anualidades de todas las combinaciones de *k* en *m*, es decir $Z^k = \sum \ddot{a}_{x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jk}}$. De manera que una vez convenida esta notación

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overset{k}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}} &= \frac{Z^k}{\left(1+Z\right)^k} \\
&= Z^k - kZ^{k+1} + \frac{k\left(k+1\right)}{2!} Z^{k+2} - \cdots
\end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

Ejemplo 3.3.1. Expresar $a_{\overset{1}{\overline{xyz}}}$ en función de anualidades de vida individual y vida conjunta

$$\begin{aligned}
a_{\overset{1}{\overline{xyz}}} &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_t p_{\overset{1}{\overline{xyz}}} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, \frac{Z}{\left(1+Z\right)}
\end{aligned}$$

por la notación convenida

$$\begin{aligned}
a_{\overset{1}{\overline{xyz}}} &= Z - Z^2 + Z^3 \\
&= a_x + a_y + a_z - \left(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}\right) + a_{xyz}
\end{aligned}$$

$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k}$ indica una anualidad anticipada unitaria, pagadera durante la existencia de al menos k de las m vidas que integran el grupo inicial . Recurriendo al corolario 3.3

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k}$$

con

$${}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = \sum_{j=k}^{m} \left[(-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \right] {}_t D_j$$

Ejemplo 3.3.2: Expresar una anualidad anticipada sobre el estatus (xyz), pagadera a la sobrevivencia de al menos 1 vida, utilizando el corolario 3.3

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{xyz}}^{\;1} &= \sum_{t=0}^{\infty} v^t \left[{}_t D_1 - {}_t D_2 + {}_t D_3 \right] \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} v^t \left[{}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z - {}_t p_{xy} - {}_t p_{xz} - {}_t p_{yz} + {}_t p_{xyz} \right] \\
&= \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z - \left(\ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ddot{a}_{yz} \right) + \ddot{a}_{xyz}
\end{aligned}$$

Como puede apreciarse ambos métodos conducen a los mismos resultados. Para los desarrollos subsecuentes, se utiliza el método obtenido por la fórmula de Schuette Nesbitt.

$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]}$ representa una anualidad anticipada unitaria, pagadera durante la existencia de exactamente k de los m miembros que componen el grupo inicial

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^k \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} \tag{3.3.3}$$

donde

$${}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} = \sum_{j=k}^{m} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} {}_t D_j \tag{3.3.4}$$

Las anualidades vencidas pagaderas durante la existencia de exactamente k y al menos k de las m vidas que integran el grupo, son representadas respectivamente por

$$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} = \ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;[k]} - 1 \tag{3.3.5}$$

$$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = \ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} - 1 \tag{3.3.6}$$

Las siguientes expresiones representan anualidades vencidas, unitarias diferidas y temporales, pagaderas durante la existencia de al menos k miembros

$${}_{n|}a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = \sum_{t=n}^{\varpi-x} v^t \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} \tag{3.3.7}$$

$$a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{k}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n-1} v^t \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{k}} \qquad (3.3.8)$$

Las anualidades otorgadas durante la existencia de un estatus de exactamente k vidas, pueden ser vistas como anualidades diferidas. El tiempo de diferimiento es aleatorio, ya que depende del tiempo transcurrido para que se genere la condición del pago.

Una anualidad continua unitaria, pagadera durante la existencia de exactamente k de las m vidas se representa por

$$\bar{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{[k]}} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{[k]}} dt \qquad (3.3.9)$$

Ejemplo 3.3.3: Obtener una expresión para una anualidad unitaria vencida, pagadera al final de cada año si exactamente una de las tres vidas que integran el estatus (xyz), sobrevive.

$$\begin{aligned} a_{\overline{xyz}^{[1]}} &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left[{}_tD_1 - 2\,{}_tD_2 + 3\,{}_tD_3 \right] \\ &= a_x + a_y + a_z - 2\left(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}\right) + 3a_{xyz} \end{aligned}$$

El tiempo de diferimiento es igual al tiempo transcurrido a la ocurrencia de la segunda muerte.

Ejemplo 3.3.4: Para la anualidad $a_{\overline{xyz}^{[1]}}$ del ejemplo 3.3.3, otorgar pagos unitarios durante la existencia de cada miembro y sustituirlos en la expresión

Si los tres miembros están con vida

$$a_{\overline{xyz}^{[1]}} = 1+1+1-2(1+1+1)+3 = 0$$

Si exactamente dos están con vida, el pago se hace para dos de las vidas individuales

$$a_{\overline{xyz}^{[1]}} = 1+1-2(1) = 0$$

Si exactamente un miembro esta con vida, se paga una unidad como se requiere.

El Teorema 3.1 y el corolario 3.2 agregan números arbitrarios a las probabilidades de sobrevivencia para al menos k y exactamente k vidas. El siguiente ejemplo considera un esquema de protección en donde se muestra la aplicación del Teorema 3.1.

Ejemplo 3.3.5: Obtener el valor presente actuarial de una anualidad continua diseñada para el estatus $(wxyz)$. El pago inicial es la unidad y se reduce en un 50% a la ocurrencia de cada fallecimiento.

Este esquema esta compuesto por el pago de las siguientes anualidades

$$\bar{a}_{\overline{wxyz}^{[4]}} + \tfrac{1}{2}\bar{a}_{\overline{wxyz}^{[3]}} + \tfrac{1}{4}\bar{a}_{\overline{wxyz}^{[2]}} + \tfrac{1}{8}\bar{a}_{\overline{wxyz}^{[1]}} \qquad (3.3.10)$$

Retomando el teorema 3.1

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \, {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}^{[k]} = c_0 + \sum_{j=1}^{m} \Delta^j c_0 \, {}_t D_j$$

el valor presente actuarial es

$$\int_0^\infty v^t \left[\sum_{j=1}^{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-j} {}_t p_{\overline{wxyz}}^{[j]} \right] dt \qquad (3.3.11)$$

El siguiente cuadro muestra los coeficientes y sus diferencias

j	c_j	Δc_j	$\Delta^2 c_j$	$\Delta^3 c_j$	$\Delta^4 c_j$
0	0	$1/8$	0	$1/8$	0
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	-
2	$1/4$	$1/4$	$1/4$	-	-
3	$1/2$	$1/2$	-	-	-
4	1	-	-	-	-

Por lo tanto el valor presente actuarial es igual a

$$\int_0^\infty v^t \left(\tfrac{1}{8} \, {}_t D_1 + \tfrac{1}{8} \, {}_t D_3 \right) dt = \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_w + \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z \right) + \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_{wxy} + \bar{a}_{wxz} + \bar{a}_{wyz} + \bar{a}_{xyz} \right) \qquad (3.3.12)$$

Ejemplo 3.3.6: Evaluar la expresión (3.3.12) obtenida en el ejemplo 3.3.5 usando las tablas de anualidades bajo la ley de Makeham mostradas en la parte de Anexos y considerando que se trata de un grupo de socios cuyas edades son $(58:64:67:69)$

Sustituyendo el estatus $(58:64:67:69)$ en la expresión (3.3.12)

$$\int_0^\infty v^t \left(\tfrac{1}{8} \, {}_t D_1 + \tfrac{1}{8} \, {}_t D_3 \right) dt = \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_{58} + \bar{a}_{64} + \bar{a}_{67} + \bar{a}_{69} \right) + \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_{58:64:67} + \bar{a}_{58:64:69} + \bar{a}_{58:67:69} + \bar{a}_{64:67:69} \right)$$

Los resultados de las anualidades para una vida, fueron obtenidos de la tabla de anualidades continuas que se encuentra en el anexo de este trabajo.

$$\bar{a}_{58} = 10.176269 \quad \bar{a}_{64} = 8.970926 \quad \bar{a}_{67} = 8.314541 \quad \bar{a}_{69} = 7.862009$$

Para las anualidades de tres vidas se busca la edad equivalente *w*, bajo la ley de Makeham y se interpola de las tablas de anualidades continuas para tres vidas.

$$\bar{a}_{58:64:67} = \bar{a}_{63.577327:63.577327:63.577327} = 9.000172$$
$$\bar{a}_{58:64:69} = \bar{a}_{64.518768:64.518768:64.518768} = 8.801683$$
$$\bar{a}_{58:67:69} = \bar{a}_{65.562198:65.562198:65.562198} = 8.577927$$

$$\bar{a}_{64:67:69} = \bar{a}_{66.847182:66.847182:66.847182} = 8.297552$$

Evaluando

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v^t\left(\tfrac{1}{8}\,{}_tD_1 + \tfrac{1}{8}\,{}_tD_3\right)dt &= \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_{58} + \bar{a}_{64} + \bar{a}_{67} + \bar{a}_{69}\right) + \tfrac{1}{8}\left(\bar{a}_{58:64:67} + \bar{a}_{58:64:69} + \bar{a}_{58:67:69} + \bar{a}_{64:67:69}\right)\\ &= \tfrac{1}{8}\left(35.323744\right) + \tfrac{1}{8}\left(23.098007\right)\\ &= 8.750135\end{aligned}$$

3.4 Seguros

En la sección 3.3 se desarrollaron las probabilidades de sobrevivencia del estatus general de al menos k vidas. Ahí se comentó que el estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}\right)$ deja de existir al ocurrir la *m-k+1* ésima vida. Como el beneficio de un seguro es otorgado a la disolución del estatus, entonces hay que tener cuidado con la notación $A_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}}$, la cual indica que el seguro es pagado a la disolución del estatus $\left(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}\right)$, es decir al ocurrir la *m-k+1* ésima muerte. Otra lectura que se le puede dar a $A_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}^{\,k}}$ es que el seguro es otorgado al ocurrir la *k*-ésima muerte. En este trabajo el desarrollo de las expresiones se hará considerando la primera lectura.

Para el desarrollo de este tipo de seguros se recurre a (2.13.1.6) $A_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1 x_2 \cdots x_m}}$, expresión que como se había indicado, es un caso particular del estatus de al menos k sobrevivientes donde $k=1$. Es conveniente detenerse para analizar esta expresión. Se trata de seguro que paga a la disolución del estatus de último sobreviviente, el cual deja de existir al ocurrir la última muerte, aquí $k=1$, por lo tanto el estatus se extingue al ocurrir la $m-1+1=m$ é-sima muerte. Este seguro es equivalente a el pago de una unidad menos los intereses generados durante la vida del estatus, es decir durante la existencia de por lo menos una vida.

Las operaciones de seguros sólo refieren estatus de al menos k sobrevivientes, ya que el tiempo en que este estatus deja de existir es igual al tiempo en que un estatus de al menos *k* sobrevivientes desaparece. Por lo tanto los seguros otorgados a estatus de exactamente *k* vidas son esencialmente aplicaciones de los seguros otorgados a los estatus de al menos *k* vidas.

El siguiente ejemplo muestra en que momento un estatus de al menos *k* vidas deja de existir.

Ejemplo 3.4.1: Determinar en que momento desaparece cada uno de los siguientes estatus de al menos k-sobreviviente

$\left(\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}^{\,1}\right)$	Desaparece al ocurrir la 5ª muerte
$\left(\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}^{\,2}\right)$	Desaparece al ocurrir la 4ª muerte

$$\left(\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}^{\,5}\right)$$ Desaparece al ocurrir la 1ª muerte

Para las expresiones de seguros otorgados cuando el estatus $\left(\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}\right)$ deje de existir, se utilizan ambos métodos, el método de la Z y el desarrollado por la fórmula de Schuette Nesbitt.

Para un estatus integrado por *m* vidas, el valor presente actuarial de un seguro unitario, pagadero al final del año en que el estatus de al menos *k* sobrevivientes deje de existir (a la ocurrencia del *m-k+1* ésimo fallecimiento) es

$$A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}^{\,k}} \tag{3.4.1}$$

El beneficio del seguro es otorgado cuando el estatus $\left(\overline{x_1, x_2, \cdots x_m}^{\,k}\right)$ deje de existir, esto es al ocurrir el $(m-k+1)$ fallecimiento. Para obtener el valor presente de este seguro unitario hay que descontar los intereses generados durante la existencia del estatus, es decir durante la existencia de la menos *k* vidas

Ejemplo 3.4.2:

a. Obtener el valor presente actuarial de un seguro unitario, sobre las vidas $(x)(y)$ y (z), pagadero al ocurrir el segundo fallecimiento

b. Para un grupo integrado por cuatro vidas $(x)(y)(z)$ y (w), obtener el valor presente actuarial de un seguro unitario pagadero al ocurrir la segunda muerte

a. Como se pide que el beneficio se otorgue cuando ocurra la segunda muerte, entonces

$m-k+1=2$ para $m=3$ y despejando k $k=2$

$$A_{\overline{xyz}^{\,2}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{xyz}^{\,2}}$$

Usando la notación convenida en (3.3.2)

$$\begin{aligned}
A_{\overline{xyz}^{\,2}} &= 1 - d\,\frac{Z^2}{(1+Z)^2} \\
&= 1 - d\left(Z^2 - 2Z^3\right) \\
&= 1 - d\left[\ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{xz} + \ddot{a}_{yz} - 2\ddot{a}_{xyz}\right] \\
&= A_{xy} + A_{xz} + A_{yz} - 2A_{xyz}
\end{aligned}$$

b. El seguro paga al ocurrir la segunda muerte, por lo tanto

$m-k+1=2$ para $m=4$ y despejando k $k=3$

$$A_{\overline{\overset{3}{xyzw}}}=1-d\ddot{a}_{\overline{\overset{3}{xyzw}}}$$

Por la notación convenida en (3.3.2)

$$A_{\overline{\overset{3}{xyzw}}}=1-d\frac{Z^3}{(1+Z)^3}$$
$$=1-d\left(Z^3-3Z^4\right)$$
$$=1-d\left[\ddot{a}_{xyz}+\ddot{a}_{xyw}+\ddot{a}_{xzw}+\ddot{a}_{yzw}-3\ddot{a}_{xyzw}\right]$$
$$=A_{xyz}+A_{xyw}+A_{xzw}+A_{yzw}-3A_{xyzw}$$

El desarrollo de los ejercicios anteriores dan la pauta para expresar seguros pagaderos a la muerte de la *m-k+1* ésima vida, como la suma de todas las combinaciones de seguros de vida conjunta e individual, que se pueden formar con *k* vidas de entre las *m* que conforman el estatus inicial. Para ello hay que acordar que $Z^k=\sum_{(k)}A_{x_1x_2\cdots x_m}$

$$A_{\overline{\overset{k}{x_1x_2\cdots x_m}}}=\frac{Z^k}{(1+Z)^k}$$
$$=Z^k-\binom{k}{1}Z^{k+1}+\binom{k+1}{2}Z^{k+2}+\cdots(-1)^{m-k}\binom{m-1}{m-k}Z^m \qquad (3.4.2)$$

Para utilizar el método obtenido por la fórmula de Schuette Nesbitt, se recurre a la función de densidad de probabilidad.

El valor presente actuarial de un seguro continuo, pagadero al ocurrir la $m-k+1$ ésima muerte es

$$\bar{A}_{\overline{\overset{k}{x_1x_2\cdots x_m}}}=\int_0^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{\overset{k}{x_1x_2\cdots x_m}}}\,\mu_{\overline{\overset{k}{x_1x_2\cdots x_m}}}(t)\,dt \qquad (3.4.3)$$

haciendo uso de (3.2.36)

$$\bar{A}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}=\int_0^\infty v^t\left[\left(-{}_tD'_1\right)-\left(-{}_tD'_2\right)+\left(-{}_tD'_3\right)-\cdots+(-1)^{m-1}\left(-{}_tD'_m\right)\right]dt$$

donde $\left(-{}_tD'_j\right)$ es la suma de las funciones de densidad de probabilidad.

Ejemplo 3.4.3: Obtener el valor presente actuarial de un seguro continuo unitario, pagadero al ocurrir la última muerte de un estatus compuesto por tres vidas

$$\bar{A}_{\overline{xyz}}=\int_0^\infty v^t\left[\left(-{}_tD'_1\right)-\left(-{}_tD'_2\right)+\left(-{}_tD'_3\right)\right]dt \qquad (3.4.4)$$
$$=\bar{A}_x+\bar{A}_y+\bar{A}_z-\left(\bar{A}_{xy}+\bar{A}_{xz}+\bar{A}_{yz}\right)+\bar{A}_{xyz}$$

Ejemplo 3.4.4: Considérese un seguro de vida sobre las vidas $(x)(y)$ y (z). La suma asegurada es 2 unidades monetarias al ocurrir la primera muerte, 5 al ocurrir la segunda muerte y 10 al ocurrir la tercera muerte. Los pagos se realizan al ocurrir los decesos. Obtener a prima neta única.

El esquema de beneficio es

2 al ocurrir la primera muerte $m-k+1=1$ con $m=3$ y despejando k, $k=3$
5 al ocurrir la segunda muerte $m-k+1=2$ con $m=3$ y despejando k, $k=2$
10 al ocurrir la tercera muerte $m-k+1=3$ con $m=3$ y despejando k, $k=1$

$$2\bar{A}_{\underset{xyz}{\overline{3}}}+5\bar{A}_{\underset{xyz}{\overline{2}}}+10\bar{A}_{\underset{xyz}{\overline{1}}}$$

El valor presente actuarial expresado a través de las funciones de densidad de probabilidad del tiempo de vida futuro para el estatus de k sobrevivientes, $f_k(t)$ es

$$\int_0^\infty v^t\left[10f_3(t)+5f_2(t)+2f_1(t)\right]dt$$

Con $d_1=10,\ d_2=5,\ d_3=2$, se obtiene la siguiente tabla de diferencias

k	d_k	Δd_k	$\Delta^2 d_k$
1	10	-5	2
2	5	-3	-
3	2	-	-

Utilizando el corolario 3.2 para las funciones de densidad de probabilidad, el valor presente actuarial es

$$\int_0^\infty v^t\left[10\left(-{}_tD'_1\right)-5\left(-{}_tD'_2\right)+2\left(-{}_tD'_3\right)\right]dt=10\left(\bar{A}_x+\bar{A}_y+\bar{A}_z\right)-5\left(\bar{A}_{xy}+\bar{A}_{xz}+\bar{A}_{yz}\right)+2\bar{A}_{xyz} \qquad (3.4.5)$$

Ejemplo 3.4.5: Evaluar la prima neta única obtenida en el ejemplo 3.4.4 considerando que se trata de un seguro otorgado a un grupo de investigadores que trabajan en un proyecto determinado. Las edades de los investigadores son $(59:62:65)$. Utilizar las tablas de seguros que se encuentran en el anexo de este trabajo

Retomando (3.4.5)

$$\int_0^\infty v^t\left[10\left(-{}_tD'_1\right)-5\left(-{}_tD'_2\right)+2\left(-{}_tD'_3\right)\right]dt=10\left(\bar{A}_{59}+\bar{A}_{62}+\bar{A}_{65}\right)-5\left(\bar{A}_{59:62}+\bar{A}_{59:65}+\bar{A}_{62:65}\right)+2\bar{A}_{59:62:65}$$

de tablas

$\bar{A}_{59}=0.324745$

$\bar{A}_{62}=0.365104$

$\bar{A}_{65}=0.408030$

Bajo la ley de Makeham e interpolando de tablas

$$\bar{A}_{59:62} = \bar{A}_{60.597688:60.597688} = 0.341758$$
$$\bar{A}_{59:65} = \bar{A}_{62.387485:62.387485} = 0.366323$$
$$\bar{A}_{62:65} = \bar{A}_{63.597688:63.597688} = 0.383458$$
$$\bar{A}_{59:62:65} = \bar{A}_{62.259771:62.259771:62.259771} = 0.364533$$

evaluando

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v^t \left[10\left(-_tD'_1\right)-5\left(-_tD'_2\right)+2\left(-_tD'_3\right)\right]dt &= 10\left(\bar{A}_{59}+\bar{A}_{62}+\bar{A}_{65}\right)-5\left(\bar{A}_{59:62}+\bar{A}_{59:65}+\bar{A}_{62:65}\right)+2\bar{A}_{59:62:65} \\ &= 10(1.097879)-5(1.091540)+2(0.364533) \\ &= 6.250157\end{aligned}$$

A continuación se presentan las expresiones para los seguros temporales y diferidos, pagaderos al ocurrir la *m-k+1* ésima muerte

$$_{n|}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = {}_nE_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;(m+k-1)}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} \tag{3.4.6}$$

$$= {}_nE_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;(m-k+1)} - d\;{}_{n|}\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} \tag{3.4.7}$$

$$_{|m}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} - {}_{n|}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} \tag{3.4.8}$$

$$= 1 - {}_mE_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;m-k+1} - da_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}}^{\;m-k+1} \tag{3.4.9}$$

$$_{n|m}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} = {}_{|m}A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;k} + {}_nE_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\;m-k-1} \tag{3.4.10}$$

$$= 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{m|}}^{\;m-k-1} \tag{3.4.11}$$

Las expresiones anteriores son válidas para seguros pagaderos al momento del fallecimiento realizándose los siguientes cambios: δ en lugar de d y $\bar{a}$ en lugar de $\ddot{a}$.

3.5 Estatus Compuesto

Hasta el momento se han desarrollado los estatus: de vida conjunta, de último sobreviviente, de al menos k y exactamente k sobrevivientes, los cuales están integrados por varias vidas. En este apartado se define el estatus de compuesto, el cual a diferencia de los antes mencionados, se compone de estatus y en ocasiones también el término cierto forma parte de este grupo.

Las siguientes expresiones denotan anualidades y seguros diseñado para estatus compuesto.

$\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}}$ representa una anualidad continua que paga durante la existencia conjunta de los estatus de último sobreviviente $\left(\overline{wx}\right)$ y $\left(\overline{yz}\right)$, es decir paga durante la existencia de tres de las cuatro vidas o durante la existencia de dos vidas, si una es del estatus $\left(wx\right)$ y la otra del estatus $\left(yz\right)$.

$\bar{a}_{\overline{\overline{wx}:(yz)}}$ denota una anualidad continua unitaria, pagadera durante la existencia de al menos dos de las cuatro vidas o durante la sobrevivencia de al menos una, si el sobreviviente es cualquiera de entre (w) o (x).

En el siguiente ejemplo se realiza el desarrollo completo, para expresar una anualidad de estatus compuesto a través de anualidades de vida conjunta.

Ejemplo 3.5.1: Expresar la anualidad $\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}}$ en función de anualidades de vida conjunta

$$\bar{a}_{\overline{wx}:\overline{yz}} = \int_0^\infty v^t {}_t p_{\overline{wx}:\overline{yz}} dt \tag{3.5.1}$$

$$= \int_0^\infty v^t {}_t p_{\overline{wx}} \cdot {}_t p_{\overline{yz}} dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \left({}_t p_w + {}_t p_x - {}_t p_{wx}\right)\left({}_t p_y + {}_t p_z - {}_t p_{yz}\right) dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \left({}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} - {}_t p_{wyz} - {}_t p_{xyz} - {}_t p_{wxy} - {}_t p_{wxz} + {}_t p_{wxyz}\right) dt$$

$$= \bar{a}_{wy} + \bar{a}_{wz} + \bar{a}_{xy} + \bar{a}_{xz} - \bar{a}_{wyz} - \bar{a}_{xyz} - \bar{a}_{wxy} - \bar{a}_{wxz} + \bar{a}_{wxyz} \tag{3.5.2}$$

Desarrollar este tipo de operaciones puede resultar tedioso, sin embargo existen relaciones como las presentadas en (2.14.1) y (2.14.2) que simplifican el desarrollo. Tal es el caso de

$$v^{T(uv)} + v^{T(\overline{uv})} = v^{T(u)} + v^{T(v)} \tag{3.5.3}$$

y

$$v^{T(u:\overline{vw})} + v^{T(uvw)} = v^{T(uv)} + v^{T(uw)} \tag{3.5.4}$$

donde *u* y *v* representan estatus.

En los siguientes ejemplos se muestra la aplicación de estas expresiones.

Ejemplo 3.5.2: Desarrollar las siguientes operaciones en función de seguros y anualidades vidas conjuntas y vida individual

a. $\bar{A}_{\overline{(wx):(yz)}}$
b. $\bar{a}_{\overline{(x:\overline{n|})(yz:\overline{m|})}}$

a. Aplicando (3.5.1) a $\bar{A}_{\overline{(wx):(yz)}}$ con $(u)=(wx)$ y $(v)=(yz)$ se obtiene

$$\bar{A}_{\overline{(wx):(yz)}} = \bar{A}_{wx} + \bar{A}_{yz} - \bar{A}_{wxyz} \tag{3.5.5}$$

$\bar{A}_{(wx):(yz)}$ se expresa como $\bar{A}_{wxyz}$ al considerar

$$\min\left\{\min\left[T(w),T(x)\right],\min\left[T(y),T(z)\right]\right\} = \min\left[T(w),T(x),T(y),T(z)\right] \tag{3.5.6}$$

b. Aplicando (3.5.1) a $\bar{a}_{\overline{(x:\overline{n|})(yz:\overline{m|})}}$, se obtiene

$$\bar{a}_{\overline{(x:\overline{n|})(yz:\overline{m|})}} = \bar{a}_{x:\overline{n|}} + \bar{a}_{yz:\overline{m|}} - \bar{a}_{xyz:\overline{n|}} \tag{3.5.7}$$

donde el último término se obtiene como sigue

$$\min\left[T(x),T(y),T(z),T\left(\overline{n|}\right),T\left(\overline{m|}\right)\right] = \min\left[T(x),T(y),T(z),T\left(\overline{n|}\right)\right] \tag{3.5.8}$$

para el caso $n \le m$.

Como puede apreciarse, las relaciones (3.5.3) y (3.5.4) simplifican el procedimiento para expresar un estatus compuesto a través de estatus de vida conjunta y vidas individuales.

Ejemplo 3.5.3: Considérense los estatus de vida conjunta $(58:65)(60:64)$. Se desea evaluar un seguro de vida cuya suma asegurada sea de 1000 unidades monetarias. Este seguro será otorgado a la disolución de ambos estatus, es decir a la muerte de por lo menos un miembro de cada estatus.

El seguro de vida que se desea evaluar es $1000\,\bar{A}_{\overline{(58:65):(60:64)}}$

Desarrollando

$$1000\bar{A}_{\overline{(58:65):(60:64)}} = 1000\left(\bar{A}_{58:65} + \bar{A}_{60:64} - \bar{A}_{58:60:64:65}\right)$$

suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{58:65} &= \bar{A}_{62.025310:62.025310} = 0.349162 \\
\bar{A}_{60:64} &= \bar{A}_{62.173288:62.173288} = 0.351168 \\
\bar{A}_{68:60:64:65} &= \bar{A}_{67.900891:67900891:67900891:67900891} = 0.432355
\end{aligned}$$

evaluando

$$\begin{aligned}
1000\bar{A}_{\overline{(58:65):(60:64)}} &= 1000\left(\bar{A}_{58:65} + \bar{A}_{60:64} - \bar{A}_{58:60:64:65}\right) \\
&= 1000\left(0.349162 + 0.351168 - 0.432355\right) \\
&= 267.975705
\end{aligned}$$

3.6 Funciones Contingentes Simples

En los apartados anteriores, el orden de los fallecimientos no fue significativo. Sin embargo existen seguros que son otorgados a la esposa si el conyugue muere primero que ella. También encontramos seguros temporales, cuyo beneficio es otorgado a los hijos si ambos padres fallecen. Para este tipo de productos se requiere que los fallecimientos de los integrantes de un determinado grupo, ocurran en el orden indicado y en el tiempo estipulado. Las probabilidades desarrolladas en los capítulos y secciones anteriores no cubren esta necesidad. En el caso de un seguro de último sobreviviente, el beneficio se paga al fallecer el último miembro, sin importar quien sea.

En esta sección se desarrollan funciones en las que el orden de los fallecimientos esta determinado sobre una de las vidas que componen el grupo. Estas funciones son conocidas como funciones contingentes simples. Es posible que el orden en el que ocurran los fallecimientos se determine sobre dos o más vidas, a estas funciones se les conocen como contingentes compuestas y serán abordadas mas adelante.

Como se ha venido haciendo, primero se desarrollan las probabilidades contingente, para posteriormente hacer uso de ellas en los seguros contingentes simples. Se continúa con el supuesto de independencia.

Las probabilidades contingentes pueden expresarse por integrales iteradas donde cada integral representa el fallecimiento o la sobrevivencia de una vida, a través de los límites se indica el orden de ocurrencia. Otro camino es a través de la integral sobre una determinada vida en donde se condiciona la ocurrencia de un evento, de manera que se cumplen los requerimientos solicitados según el orden en el que deben darse los fallecimientos. Estos dos caminos se muestran a continuación.

3.6.1 Probabilidades Contingentes

Considérese la probabilidad de que la vida (x) muera antes que (y) y que esto ocurra antes de *n* años, esta probabilidad es representada por ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$. Aquí el número 1 sobre (x) indica que la probabilidad es para el evento en el que (x) fallezca en primer lugar. Por otro lado, ${}_nq_{x\overset{2}{y}}$ representa la probabilidad de que (y) muera en segundo lugar y que esto ocurra en el plazo de *n* años.

${}_nq_{\overset{1}{x}y}$ se define como

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n {}_tp_{xy}\mu(x+t)dt \qquad \text{con } T(x) \le T(y) \text{ y } T(x) \le n \tag{3.6.1.1} $$

Se sabe que

$$ {}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\mu(x+s)ds = \int_0^t f_{T(x)}(s)ds = F_{T(x)}(t) \tag{3.6.1.2} $$

para las vidas (x) y (y) se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_t q_{xy} &= \int_0^t {}_s p_{xy} \mu_{xy}(s)\, ds \\
&= \int_0^t {}_s p_{xy} \left[\mu(x+s) + \mu(y+s) \right] ds \\
&= \int_0^t {}_s p_{xy} \mu(x+d)\, ds + \int_0^t {}_s p_{xy} \mu(y+s) ds
\end{aligned}
\tag{3.6.1.3}
$$

las integrales obtenidas son de la forma (3.6.1.1), de manera que

$$
{}_t q_{xy} = {}_t q_{\overset{1}{x}y} + {}_t q_{x\overset{1}{y}}
\tag{3.6.1.4}
$$

Es importante resaltar que ${}_n q_{x\overset{2}{y}}$ no es igual a ${}_n q_{\overset{1}{x}y}$, pues el primer caso indica que (x) y (y) deben morir dentro de n años, mientras que en el segundo caso no importa si (y) muere antes de los n años o incluso si continua vivo al final de este periodo.

Cuando las vidas que integran el grupo tienen la misma edad y están sujetas a la misma mortalidad, las probabilidades contingentes pueden ser evaluadas directamente. Esto se debe a que tienen la misma probabilidad de morir en primer lugar o en segundo lugar. Tal es el caso del estatus (xx)

$$
\begin{aligned}
{}_\infty q_{xx} &= \int_0^\infty {}_t p_{xx} \mu_{xx}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty {}_t p_{xx} \left[\mu_x(t) + \mu_x(t) \right] dt \\
&= 2\int_0^\infty {}_t p_x \, {}_t p_x \mu_x(t)\, dt \\
&= -2\int_0^\infty {}_t p_x d\left({}_t p_x\right) dt \\
&= -2 \left. \frac{\left({}_t p_x\right)^2}{2} \right|_0^\infty = 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.6.1: Desarrollar las siguientes probabilidades

a. Dadas tres vidas, todas de edad (x), obtener la probabilidad de que una vida específica muera primero en los siguientes n años

b. Dadas tres vidas, todas de edad (x), obtener la probabilidad de que la primera muerte, no especificada, ocurra dentro de n años

c. Dadas tres vidas, todas de edad (x), obtener la probabilidad de que una vida específica muera dentro de n años, y las otras dos sobrevivan al mismo periodo

d. Para tres vidas, todas de edad (x), representadas por A, B y C. Obtener la probabilidad de que A o B muera antes que C a.

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}xx} = \int_0^n {}_tp_{xxx}\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.1.5} $$

$$ = \int_0^n \left({}_tp_x\right)^2 {}_tp_x\mu(x+t)\,dt $$

$$ = -\int_0^n \left({}_tp_x\right)^2 d\left({}_tp_x\right)dt $$

$$ = \left[-\tfrac{1}{3}\left({}_tp_x\right)^3\right]\Big|_0^n = \tfrac{1}{3}\left[1-\left({}_np_x\right)^3\right] \tag{3.6.1.6} $$

b. la probabilidad solicitada es que el estatus de vida conjunta deje de existir dentro de *n* años

$$ {}_nq_{xxx} = \int_0^n {}_tp_{xxx}\mu_{xxx}(t)\,dt \tag{3.6.1.7} $$

$$ = \int_0^n {}_tp_{xxx}3\mu(x+t)\,dt $$

$$ = 3\,{}_nq_{\overset{1}{x}xx} $$

sustituyendo el resultado obtenido en (3.6.1.6)

$$ {}_nq_{xxx} = 1-\left({}_np_x\right)^3 \tag{3.6.1.8} $$

c.

$$ \int_0^n {}_tp_x\mu(x+t)\,{}_tp_{xx}dt = {}_nq_x{}_np_{xx} = \left(1-{}_np_x\right)\left({}_np_x\right)^2 \tag{3.6.1.9} $$

d.

$$ {}_nq_{\overset{1}{xx}:x} = \int_0^n {}_tp_{xx}\mu_{xx}(t)\,{}_tp_xdt \tag{3.6.1.10} $$

$$ = \int_0^n {}_tp_{xxx}2\mu(x+t)\,dt $$

$$ = 2\,{}_nq_{\overset{1}{x}xx} $$

Sustituyendo el resultado obtenido en (3.6.1.6)

$$ = \tfrac{2}{3}\left[1-\left({}_np_x\right)^3\right] \tag{3.6.1.11} $$

Retomando la probabilidad contingente ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$ que involucra vidas de diferentes edades, es posible definirla con la doble integral de la función de distribución de probabilidad conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ con los requerimientos $T(x)\le T(y)$ y $T(x)\le n$

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n\int_s^\infty f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dtds \tag{3.6.1.12} $$

En esta primera expresión se pide que (x) muera al tiempo *s* y que esto se de en el intervalo $[0,n]$. Por lo que respecta a (y), se requiere que muera en el tiempo *t* y como esta debe ser la segunda muerte, entonces *t* pertenece al intervalo $[s,\infty)$.

Ahora bien, sea A el evento $T(x)=s$ con $0\le s\le n$ y B el evento $T(y)>s$. La ocurrencia de ambos eventos es $A\cap B$ y como $P[B|A]=\dfrac{P[A\cap B]}{P[A]}$, entonces $P[A\cap B]=P[B|A]P[A]$. De manera que es posible escribir (3.2.1.12) como

$$
\begin{aligned}
{}_n q_{\overset{1}{x}y} &= \int_0^n \int_s^\infty f_{T(y)|T(x)}(t|s)\,dt f_{T(x)}(s)\,ds \\
&= \int_0^n \Pr[T(y)>s|T(x)=s] f_{T(x)}(s)ds \\
&= \int_0^n \Pr[T(y)>s|T(x)=s]\,{}_s p_x \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.13)
\end{aligned}
$$

por independencia $\Pr[T(y)\ge s|T(x)=s]={}_s p_y$

por lo tanto

$$
{}_n q_{\overset{1}{x}y} = \int_0^n {}_s p_y\,{}_s p_x \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.14)
$$

Los elementos que integran (3.6.1.14) son: *s* es el tiempo de fallecimiento de (x), la probabilidad ${}_s p_x\,{}_s p_y$ indica que (x) y (y) sobreviven al tiempo *s*. La probabilidad de que (x) ahora con edad $(x+s)$ muera en el intervalo $(s,s+dt)$ es $\mu(x+s)ds$. Finalmente las probabilidades se suman sobre el tiempo *s*, en el intervalo $[0,n]$.

De manera análoga a (3.5.1.3) se puede obtener

$$
{}_\infty q_{\overset{1}{x}y} = \int_0^\infty {}_s p_{xy} \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.15)
$$

$$
{}_{n|} q_{\overset{1}{x}y} = \int_n^{n+1} {}_s p_{xy} \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.16)
$$

La probabilidad de que (y) muera después de (x) y que esto ocurra en los siguientes *n* años, está representada por ${}_n q_{x\overset{2}{y}}$. Integrando la función de distribución de probabilidad conjunta $T(x)$ y $T(y)$ sobre el intervalo $[0\le T(x)\le T(y)\le n]$

$$
{}_n q_{x\overset{2}{y}} = \int_0^n \int_0^t f_{T(x)T(y)}(s,t)\,ds\,dt \qquad (3.6.1.17)
$$

$$= \int_0^n \int_0^t f_{T(x)|T(y)}(s|t)\,ds f_{T(y)}(t)\,dt$$

$$= \int_0^n \Pr\left[T(x) \le t \middle| T(y) = t\right] f_{T(y)}(t)\,dt$$

$$= \int_0^n \Pr\left[T(x) \le t \middle| T(y) = t\right] {}_t p_y \mu(y+t)\,dt \qquad (3.6.1.18)$$

por independencia

$${}_n q_{\underset{x\,y}{}^{2}} = \int_0^n {}_t q_x\, {}_t p_y \mu(y+t)\,dt \qquad (3.6.1.19)$$

$$= \int_0^n \left(1 - {}_t p_x\right) {}_t p_y \mu(y+t)\,dt$$

$$= {}_n q_y - {}_n q_{\underset{x\,y}{}^{1}} \qquad (3.6.1.20)$$

Esta ecuación puede ser obtenida por razonamiento general, pues para un grupo compuesto por las vidas (x) y (y), la probabilidad de que (y) muera en los siguientes *n* años es igual a la probabilidad de que (y) muera en primero o en segundo lugar durante ese periodo, es decir

$${}_n q_y = {}_n q_{\underset{x\,y}{}^{1}} + {}_n q_{\underset{x\,y}{}^{2}} \qquad (3.6.1.21)$$

Si se invierte el orden de integración en (3.6.1.17), se obtiene

$${}_n q_{\underset{x\,y}{}^{2}} = \int_0^n \int_s^n f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dt\,ds \qquad (3.6.1.22)$$

$$= \int_0^n \int_s^n f_{T(y)|T(x)}(t|s)\,dt f_{T(x)}(s)\,ds$$

$$= \int_0^n \Pr\left[s < T(y) \le n \middle| T(x) = s\right] {}_s p_x \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.23)$$

por independencia

$${}_n q_{\underset{x\,y}{}^{2}} = \int_0^n \left({}_s p_y - {}_n p_y\right) {}_s p_x \mu(x+s)\,ds \qquad (3.6.1.24)$$

$$= {}_n q_{\underset{x\,y}{}^{1}} - {}_n p_y\, {}_n q_x \qquad (3.6.1.25)$$

Esta última integral indica la probabilidad de que (x) muera en el tiempo *s*, con $0 < s < n$ y que (y) sobreviva a el tiempo *s* pero no al tiempo *n*.

Análogamente, la probabilidad de que (x) muera en segundo lugar y durante el $(n+1)$-ésimo año es

$${}_{n|} q_{\underset{x\,y}{}^{2}} = {}_{n|} q_y - {}_{n|} q_{\underset{x\,y}{}^{1}}$$

En las expresiones anteriores se indica el orden en el que deben ocurrir los fallecimientos, así como el intervalo de tiempo en el que deben ocurrir. Si tales requerimientos no se cumplen el estatus no desaparece. En el caso de la expresión (3.6.1.1), donde se indica la probabilidad de que (x) muera primero que (y) dentro de *n* años, el estatus no desapareces si (x) fallece primero que (y) pero después de *n* años, o si (y) fallece primero que (x).

Cuando el grupo está integrado por más de dos vidas, es recomendable que se expresen en términos de probabilidad definida sobre la primera muerte, de manera que se puedan utilizar las técnicas de evaluación de la sección (3.6.3). Bowers sugiere utilizar la siguiente integral

$$\Pr(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left(A \middle| T = t\right) f_{T(t)} dt \tag{3.6.1.26}$$

Aquí el evento A, agrupa las condiciones que se deben cumplir para que una determinada vida fallezca en el orden indicado. Considerando que este fallecimiento ocurre en el tiempo *t*, siendo usualmente T el tiempo de fallecimiento de una vida individual.

Considérese el estatus $(wxyz)$. La probabilidad de que (y) muera en segundo lugar y que ocurra dentro de los siguientes *n* años es

$${}_n q_{wx\overset{2}{y}z} = \int_0^n \Pr\left(A \middle| T(y) = t\right) {}_t p_y \mu(y+t) dt \tag{3.6.1.27}$$

donde A es el evento que reúne las condiciones para que (y) sea la segunda muerte en ocurrir dado que (y) muere en el tiempo *t*. Los límites de integración son

$$\begin{aligned} f_{T(y)}(t) &= 0 \qquad & t < 0 \\ \Pr\left[A \middle| T(y) = t\right] &= 0 \qquad & t > n \end{aligned}$$

Para que (y) sea la segunda muerte en ocurrir, es necesario que exactamente dos de las tres vidas $(w),(x)$ y (z) sobrevivan a ese tiempo. Asumiendo independencia entre $T(w)$, $T(x)$, $T(y)$ y $T(z)$ se obtiene

$$\Pr\left[A \middle| T(y) = t\right] = {}_t p_{\overline{wxz}}^{[2]} \tag{3.6.1.28}$$

de manera que

$${}_n q_{wx\overset{2}{y}z} = \int_0^n {}_n p_{\overline{wxz}}^{[2]} \, {}_t p_y \mu(y+t) dt \tag{3.6.1.29}$$

aplicando el corolario 3.1

$$\begin{aligned} &= \int_0^n \left({}_t D_2 - 3{}_t D_3\right)_t p_y \mu(y+t) dt \\ &= {}_n q_{wx\overset{1}{y}} + {}_n q_{w\overset{1}{y}z} + {}_n q_{x\overset{1}{y}z} - 3{}_n q_{wx\overset{1}{y}z} \end{aligned} \tag{3.6.1.30}$$

Ejemplo 3.6.1.2: Considérese un grupo constituido por tres vidas, cuya contingencia es sobre la vida (x) en diferente orden. Obtener las expresiones de

a. ${}_n q_{\overset{1}{x}yz}$

b. ${}_nq_{x\overset{2}{y}z}$

c. ${}_nq_{xy\overset{3}{z}}$

$$\text{a. } {}_nq_{\overset{1}{x}yz} = \int_0^n {}_tp_{yz}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.1.31}$$

$$\text{b. } {}_nq_{\overset{2}{x}yz} = \int_0^n {}_tp_{\overline{yz}}^{\,1}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.1.32}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^n \left[{}_tD_1 - 2\,{}_tD_2\right]{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} - 2\,{}_nq_{\overset{1}{x}yz} \end{aligned} \tag{3.6.1.33}$$

$$\text{c. } {}_nq_{\overset{3}{x}yz} = \int_0^n \left(1-{}_tp_y\right)\left(1-{}_tp_z\right){}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.1.34}$$

$$= {}_nq_x - {}_nq_{\overset{1}{x}y} - {}_nq_{\overset{1}{x}z} + {}_nq_{\overset{1}{x}yz}$$

Es posible que la especificación del orden en el que deben ocurrir los fallecimientos, no sea sobre una vida individual, sino sobre un estatus. Las siguientes expresiones corresponden a este tipo de probabilidades.

La probabilidad de que cualquiera de las vidas (x) o (y) sea la primera muerte en ocurrir del estatus (xyz) y que ocurra en los siguientes *n* años, es

$${}_nq_{\overset{1}{xy}:z} = \int_0^n {}_tp_z\,{}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\,dt \tag{3.6.1.35}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^n {}_tp_z\,{}_tp_{xy}\left[\mu(x+t)+\mu(y+t)\right]dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}yz} + {}_nq_{x\overset{1}{y}z} \end{aligned} \tag{3.6.1.36}$$

$${}_nq_{\overset{1}{xy}:z} = {}_nq_{\overset{1}{x}yz} + {}_nq_{x\overset{1}{y}z} \tag{3.6.1.37}$$

donde $\overset{1}{xy}$ indica que muera (x) o (y) en primer lugar, lo cual es igual a que el estatus de vida conjunta (xy) muera primero.

La probabilidad de que (x) muera dentro de *n* años y antes del último sobreviviente de (yz) es

$${}_nq_{\overset{1}{x}:\overline{yz}} = \int_0^n {}_tp_{x:\overline{yz}}\,\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.1.38}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^n {}_tp_x\left({}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{yz}\right)\mu(x+t)\,dt \\ &= {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} - {}_nq_{\overset{1}{x}yz} \end{aligned} \tag{3.6.1.39}$$

Esta función puede también representarse con ${}_nq_{\overset{1:2}{x}\,yz}$. Aquí 1:2 indica la probabilidad de que (x) sea la primera o la segunda vida en fallecer dentro de *n* años. Como la probabilidad pedida en (3.6.1.38) esta integrada por la vida individual (x) y el estatus de último sobreviviente $(\overline{yz})$, para que (x) muera en primer lugar se requiere que muera antes que el estatus $(\overline{yz})$. De manera que una formulación alternativa es

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{\overset{1:2}{x\,yz}} &= \int_0^n {}_tp_{xyz}\,\mu(x+t)\,dt + \int_0^n {}_tp_{\underset{x:yz}{\underline{[1]}}}\,\mu(x+t)\,dt \\
&= {}_nq_{\overset{1}{x}yz} + {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} - 2\,{}_nq_{\overset{1}{x}yz}
\end{aligned}
$$

obteniéndose la misma expresión que en (3.6.1.39). Por (3.6.1.33)

$$
{}_nq_{\overset{2}{x}yz} = {}_nq_{\overset{1}{x}y} + {}_nq_{\overset{1}{x}z} - 2\,{}_nq_{\overset{1}{x}yz}
$$

entonces

$$
{}_nq_{\overset{1:2}{x\,yz}} = {}_nq_{\overset{1}{x}yz} + {}_nq_{\overset{2}{x}yz} \tag{3.6.1.40}
$$

Ejemplo 3.6.1.3: Las vidas (x) y (y) desean donar sus bienes a una institución de beneficencia si su hijo (z) no les sobrevive en los próximos *n* años. Obtener una expresión para denotar la probabilidad que la herencia sea otorgada a la institución

$$
{}_nq_{\underset{xy:z}{\underline{2}}} = \int_0^n \left(1 - {}_tp_z\right)\left[{}_tp_x\,\mu(x+t) + {}_tp_y\,\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)\right]dt \tag{3.6.1.41}
$$

$$
= \left({}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{xy}\right) - \left({}_nq_{\overset{1}{x}z} + {}_nq_{\overset{1}{y}z} - {}_nq_{\underset{xy:z}{\overline{1}}}\right) \tag{3.6.1.42}
$$

Ejemplo 3.6.1.4: Obtener la probabilidad de que (x) permanezca con vida *n* años después de la muerte de (y)

$$
\int_0^\infty {}_{t+n}p_x\,{}_tp_y\,\mu(y+t)\,dt = {}_np_x \int_0^\infty {}_tp_{x+n:y}\,\mu(y+t)\,dt \tag{3.6.1.43}
$$

$$
= {}_np_x\,{}_\infty q_{\overset{\quad 1}{x+n:y}} \tag{3.6.1.44}
$$

3.6.2 Funciones de Seguros Contingentes

Un seguro contingente es un seguro sobre dos o más vidas, cuya suma asegurada es pagada sólo si las muertes ocurren en el orden indicado. En esta sección se tratan los seguros contingentes simples, en donde el orden se indica con una vida, tal como ocurrió con las probabilidades contingentes simples de la anterior sección. La notación para los seguros contingentes simples es similar a la notación utilizada en las probabilidades contingentes simples. El caso mas sencillo es un seguro temporal, pagadero al momento en que muere (x) si esto ocurre en los siguientes *n* años, y se denota por $A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$. Para el desarrollo de este apartado, se hará uso de las probabilidades contingentes expuestas en la sección 3.6.1.

$A_{\overset{1}{x}y}$ representa la prima neta única de un seguro contingente, unitario, pagadero al final del año en que ocurra la muerte de (x), siempre y cuando esta sea la primera en ocurrir. El valor presente actuarial de este seguro es $E[Z]$ donde

$$Z=\begin{cases} v^{K(x)} & K(x)\le K(y) \\ 0 & K(x)>K(y) \end{cases}$$

$$A_{\overset{1}{x}y}=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\;{}_{k|}q_{\overset{1}{x}y}$$

Para obtener otra expresión sobre este seguro, se recurre al seguro pagadero a la disolución del estatus de vida conjunta (xy), A_{xy}. Pues aunque en él no se establece el orden de los fallecimientos, su desarrollo conduce a obtener seguros contingentes a la primera muerte.

$$A_{xy}=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\;{}_{k|}q_{xy}$$

y por (3.6.28) ${}_{t|}q_{xy}={}_{t|}q_{\overset{1}{x}y}+{}_{t|}q_{x\overset{1}{y}}$, entonces

$$\begin{aligned} A_{xy}&=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\left[{}_{k|}q_{\overset{1}{x}y}+{}_{k|}q_{x\overset{1}{y}}\right] \\ &=A_{\overset{1}{x}y}+A_{x\overset{1}{y}} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_{\overset{1}{x}y}=A_{xy}-A_{x\overset{1}{y}}$$

Para el caso continuo el valor presente actuarial denotado por $\bar{A}_{\overset{1}{x}y}$, es $E[Z]$, donde

$$Z=\begin{cases} v^{T(x)} & T(x)\le T(y) \\ 0 & T(x)>T(y) \end{cases}$$

Usando la distribución de probabilidad conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ y debido a que Z es función de $T(x)$ y $T(y)$

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y}=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} v^s f_{T(x)T(y)}(s,t)\,dt\,ds$$

por (3.6.1.14)

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y}=\int_0^{\infty} v^s\;{}_{s}p_{y}\;{}_{s}p_{x}\,\mu(x+s)\,ds \tag{3.6.2.1}$$

La expresión (3.6.2.1) indica que si (x) muere en algún tiempo futuro *s* y (y) esta aún con vida se paga una unidad monetaria, cuyo valor presente es v^s.

Ejemplo 3.6.1: Obtener una expresión para

a. Un seguro pagadero a la disolución del estatus de vida conjunta (xy), si esto ocurre en primer lugar, es decir $\bar{A}_{\overset{1}{xy}:z}$

b. Un seguro pagadero a la disolución del estatus de último sobreviviente $(\overline{xy})$, siempre que esto ocurra antes de la muerte de (z), es decir $\bar{A}^{\;1}_{\overline{xy}:z}$

$$\text{a. } \bar{A}_{\overset{1}{xy}:z} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{xyz} \mu_{xy}(t)\, dt \tag{3.6.2.2}$$

$$= \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{xyz} \left[\mu(x+t) + \mu(y+t) \right] dt$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x}yz} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}z} \tag{3.6.2.3}$$

$$\text{b. } \bar{A}^{\;1}_{\overline{xy}:z} = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_z \left[{}_t p_x \mu(x+t) + {}_t p_y \mu(y+t) - {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) \right] dt \tag{3.6.2.4}$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x}z} + \bar{A}_{\overset{1}{y}z} - \bar{A}_{\overset{1}{xy}:z}$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x}z} + \bar{A}_{\overset{1}{y}z} - \bar{A}_{\overset{1}{x}yz} - \bar{A}_{x\overset{1}{y}z} \tag{3.6.2.5}$$

o bien utilizando $A_{\overset{1}{x}y} = A_{xy} - A_{x\overset{1}{y}}$ y $\bar{A}_{xyz} = \bar{A}_{\overset{1}{x}yz} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}z} + A_{xy\overset{1}{z}}$, se obtiene

$$\bar{A}^{\;1}_{\overline{xy}:z} = \left(\bar{A}_{xz} - \bar{A}_{x\overset{1}{z}} \right) + \left(\bar{A}_{yz} - \bar{A}_{y\overset{1}{z}} \right) - \left(\bar{A}_{xyz} - \bar{A}_{xy\overset{1}{z}} \right) \tag{3.6.2.6}$$

Al igual que las probabilidades contingentes, los seguros contingentes pueden ser definidos por la ocurrencia de la segunda muerte, como se presenta a continuación:

$\bar{A}_{x\overset{2}{y}}$ denota un seguro unitario, pagadero a la muerte de (y), siempre que esta ocurra después de la muerte de (x). El valor presente actuarial es $E[Z]$, donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y) \end{cases}$$

$$\bar{A}_{x\overset{2}{y}} = \int_0^\infty \int_0^t v^t \, {}_s p_x \mu(x+s) \, {}_t p_y \mu(y+t)\, ds\, dt \tag{3.6.2.7}$$

$$= \int_0^\infty v^t \left(1 - {}_t p_x\right) {}_t p_y \mu(y+t)\, dt \tag{3.6.2.8}$$

$$= \bar{A}_y - \bar{A}_{x\overset{1}{y}} \tag{3.6.2.9}$$

de donde

$$\bar{A}_y = \bar{A}_{x\overset{1}{y}} + \bar{A}_{x\overset{2}{y}} \tag{3.6.2.10}$$

por analogía con (3.6.2.9), se sigue que

$$\bar{A}_{\overset{2}{x}y} = \bar{A}_x - \bar{A}_{\overset{1}{x}y} \tag{3.6.2.11}$$

por lo tanto

$$\bar{A}_{\overset{2}{x}y} + \bar{A}_{x\overset{2}{y}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \left(\bar{A}_{\overset{1}{x}y} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}} \right) \tag{3.6.2.12}$$

Para el caso discreto

$$Z \begin{cases} v^{k(y)} & k(x) \le k(y) \\ 0 & k(x) > k(y) \end{cases}$$

$$A_{\overset{2}{x}y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left({}_{t|}q_x - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \right) \tag{3.6.2.13}$$

$$= A_x - A_{\overset{1}{x}y} \tag{3.6.2.14}$$

Si el estatus esta integrado por más de dos vidas, y la contingencia es sobre la segunda muerte, el valor presente actuarial puede ser analizado como se hizo con las probabilidades contingentes. Basados en

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[Z \middle| T = t \right] f_T(t)\, dt \tag{3.6.2.15}$$

donde Z es la variable aleatoria que denota el valor presente actuarial.

$\bar{A}_{wx\overset{2}{y}}$ representa un seguro pagadero a la muerte de (y), siempre que esta ocurra en segundo lugar. Utilizando $T(y)$ para denotar la esperanza condicional

$$\bar{A}_{wx\overset{2}{y}} = E[Z] = \int_0^{\infty} E\left[Z \middle| T(y) = t \right] {}_t p_y \mu(y+t)\, dt \tag{3.6.2.16}$$

Para que (y) sea la segunda muerte en ocurrir al tiempo *t*, debe sobrevivir exactamente una vida de entre (w) y (x) en ese momento. Entonces

$$E\left[Z \middle| T(y) = t \right] = v^t {}_t p_{\overline{wz}^{[1]}} \tag{3.6.2.17}$$

de manera que

$$\bar{A}_{wx\overset{2}{y}} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{\overline{wxy}^{[1]}} {}_t p_y \mu(y+t)\, dt \tag{3.6.2.18}$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \left({}_t D_1 - 2 {}_t D_2 \right) {}_t p_y \mu(y+t)$$

$$= \bar{A}_{x\overset{1}{y}} + \bar{A}_{w\overset{1}{y}} - 2\bar{A}_{wx\overset{1}{y}} \tag{3.6.2.19}$$

Ejemplo 3.6.2: Obtener una expresión para

a. Un seguro pagadero al momento del fallecimiento de (x) si ésta es la tercera muerte del estatus (xyz) en ocurrir, es decir $\bar{A}_{\overset{3}{x}yz}$

b. Un seguro pagadero a la interrupción del estatus de vida conjunta (xy), siempre que esto ocurra en segundo lugar, es decir $\bar{A}_{\overset{2}{xy}:z}$

$$\text{a. } \bar{A}^{3}_{xyz} = \int_0^\infty v^t\, {}_tq_y\, {}_tq_z\, {}_tp_x \mu(x+t)dt \tag{3.6.2.20}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty v^t (1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_z)\, {}_tp_x \mu(x+t)dt \\ &= \bar{A}_x - \bar{A}^1_{xy} - \bar{A}^1_{xz} + \bar{A}^1_{xyz} \end{aligned} \tag{3.6.2.21}$$

$$\text{b. } \bar{A}_{\overset{2}{xy}:z} = \int_0^\infty v^t (1 - {}_tp_z)\, {}_tp_{xy} \mu_{xy}(t)\, dt \tag{3.6.2.22}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{\overset{1}{xy}:z} \\ &= \bar{A}_{xy} - \bar{A}^1_{xyz} - \bar{A}_{x\overset{1}{y}z} \end{aligned} \tag{3.6.2.23}$$

Además de determinar el orden en el que ocurren los fallecimientos es posible agregar otra condición, el tiempo que transcurre entre un fallecimiento y otro. Las siguientes expresiones son ejemplo de ello.

El valor presente actuarial de un seguro dotal puro, unitario, pagadero si (x) está con vida *n* años después de la muerte de (y)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty {}_tp_y \mu(y+t) v^{n+t}\, {}_{n+t}p_x dt &= v^n\, {}_np_x \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{x+n:y} \mu(y+t)\, dt \\ &= v^n\, {}_np_x \bar{A}_{x+n:\overset{1}{y}} \end{aligned} \tag{3.6.2.24}$$

Una expresión para un seguro continuo, unitario, pagadero a (x) si fallece al menos *n* años después de la muerte de (y) es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty {}_tp_y \mu(y+t) \int_{n+t}^\infty v^s\, {}_sp_x \mu(x+s)\, ds dt &= \int_0^\infty {}_tp_y \mu(y+t)\, {}_{n+t|}\bar{A}_x dt \\ &= \int_0^\infty {}_tp_y \mu(y+t)\, {}_{n+t}E_x \bar{A}_{x+n+t} dt \\ &= {}_nE_x \int_0^\infty {}_tp_y \mu(y+t)\, {}_tE_{x+n} \bar{A}_{x+n+t} dt \end{aligned} \tag{3.6.2.25}$$

3.6.3 Evaluación de Funciones de Seguros Contingentes Simples

Las funciones de seguros contingentes simples, pueden ser evaluadas a través de varios métodos. En este trabajo se muestran los siguientes:

1. Valores Conmutados
2. Ley Makeham
3. Ley Gompertz
4. Distribución Uniforme de Muertes

Valores Conmutados

De acuerdo con la notación actuarial internacional

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \cong \frac{d_{x+t}\, l_{y+t+\frac{1}{2}}}{l_x l_y} \qquad (3.6.3.1)$$

de manera que

$$ A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\, {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \cong \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{x+y}{2}+t+1} d_{x+t}\, l_{y+t+\frac{1}{2}}}{v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y} \qquad (3.6.3.2)$$

$$ = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{\overset{1}{\overline{x+t}}:y+t}}{D_{xy}} = \frac{M_{\overset{1}{x}y}}{D_{xy}} \qquad (3.6.3.3)$$

donde

$$ C_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{x+y}{2}+1} d_x\, l_{y+\frac{1}{2}} \qquad (3.6.3.4)$$

$$ M_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{\overset{1}{\overline{x+t}}:y+t} \qquad (3.6.3.5)$$

En el caso de un seguro temporal a n años, pagadero a la muerte de (x), si esta es la primera muerte en ocurrir, se tiene la siguiente expresión

$$ A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \frac{M_{\overset{1}{x}y} - M_{\overset{1}{\overline{x+n}}:y+n}}{D_{xy}} \qquad (3.6.3.6)$$

Para el caso continuo se tienen las siguientes expresiones

$$ \bar{C}_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{1}{2}(x+y)} \int_0^1 v^t\, l_{x+t:y+t}\, \mu(x+t)\, dt \qquad (3.6.3.7)$$

aproximando

$$ \bar{C}_{\overset{1}{x}y} \cong v^{\frac{1}{2}(x+t)+\frac{1}{2}} d_x\, l_{y+\frac{1}{2}} \qquad (3.6.3.8)$$

$$ \bar{M}_{\overset{1}{x}y} \cong \sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}_{\overset{1}{\overline{x+t}}:y+t} \qquad (3.6.3.9)$$

Asumiendo que los fallecimientos ocurren en la mitad del año

$$ \bar{A} \cong (1+i)^{\frac{1}{2}} A $$

En el capítulo 2 se presentó la opción de obtener

$$ D_{xy} = v^x l_x l_y $$
$$ = D_x l_y $$

siguiendo este razonamiento

$$C_{\underset{xy}{1}} \cong v^{x+1} d_x l_{y+\frac{1}{2}} \tag{3.6.3.10}$$

$$C_{\underset{xy}{1}} \cong C_x l_{y+\frac{1}{2}} \tag{3.6.3.11}$$

Ley de Gompertz

Asumiendo la ley de Gompertz en las fuerzas de mortalidad

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_t p_{xy} \mu(x+t)\, dt \tag{3.6.3.12}$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_t p_{xy} B c^{x+t} dt$$

$$= \frac{c^x}{c^x + c^y} \int_0^n v^t \, {}_t p_{xy} B c^t \left(c^x + c^y\right) dt$$

$$= \frac{c^x}{c^x + c^y} \int_0^n v^t \, {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t)\, dt$$

$$= \frac{c^x}{c^x + c^y} \bar{A}_{xy:\overline{n}|}$$

$$= \frac{c^x}{c^w} \bar{A}^{1}_{w:\overline{n}|} \tag{3.6.3.13}$$

donde

$$c^w = c^x + c^y$$

$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|}$ con $v = 1$ es ${}_n q_{\underset{xy}{1}}$, la cual es calculada bajo la ley de Gompertz como

$${}_n q_{\underset{xy}{1}} = \frac{c^x}{c^w} \, {}_n q_w \tag{3.6.3.14}$$

Ejemplo 3.6.3.1: Calcular ${}_6 q_{\overset{1}{45}:48}$, suponiendo que las vidas siguen la ley de Gompertz

De (3.6.3.14)

$${}_6 q_{\overset{1}{45}:48} = \frac{c^{48}}{c^w} \, {}_6 q_w$$

donde

$$w = \frac{\log\left(c^{45} + c^{48}\right)}{\log c} = 54.557522$$

y como

$${}_n p_w = g^{c^w\left(c^n - 1\right)}$$

entonces

$${}_6 q_{54.557522} = 0.515036$$

Ley Makeham

Asumiendo la ley de Makeham en las fuerzas de mortalidad

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\,\mu(x+t)\,dt \tag{3.6.3.14}$$

$$= \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\left(A + Bc^x c^t\right)dt$$

$$= A\int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\,dt + \frac{c^x}{c^x + c^y}\int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\,Bc^t\left(c^x + c^y\right)dt$$

$$= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x + c^y}\right)\int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\,dt + \frac{c^x}{c^x + c^y}\int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\left[2A + Bc^t\left(c^x + c^y\right)\right]dt$$

$$= A\left(1 - \frac{2c^x}{c^x + c^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n}|} + \frac{c^x}{c^x + c^y}\,\bar{A}^{\,1}_{xy:\overline{n}|} \tag{3.6.3.15}$$

usando $c^x + c^y = 2c^w$ o $\mu_x + \mu_y = 2\mu_w$ y la expresión anterior, se obtiene

$$\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^w}\right)\bar{a}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,\bar{A}^{\,1}_{ww:\overline{n}|} \tag{3.6.3.16}$$

Nuevamente si $v = 1$

$$ {}_nq^{1}_{xy} = A\left(1 - \frac{c^x}{c^w}\right)\mathring{e}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,{}_nq_{ww} \tag{3.6.3.17}$$

Ejemplo 3.6.3.2: Evaluar $A^{1}_{45:48:\overline{10}|}$, suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham y $A = 0.000905426$

De (3.6.3.16) $\quad A^{1}_{45:48:\overline{10}|} = A\left(1 - \frac{c^{45}}{c^w}\right)a_{ww:\overline{10}|} + \frac{c^{45}}{2c^w}A^{\,1}_{ww:\overline{10}|}$

donde $\quad w = \dfrac{\log\left(c^{45} + c^{48}\right) - \log(2)}{\log c} = 46.597688$

y

$$a_{46.597688:46.597688:\overline{10}|} = 6.768096$$

$$A_{46.597688:46.597688:\overline{10}|} = 0.516168$$

entonces

$$A^{1}_{45:48:\overline{10}|} = 0.112282$$

Distribución Uniforme de Muertes

El valor presente actuarial de un seguro unitario, pagadero al final del año en que ocurra la muerte de (x), si esta ocurre primero que (y) es

$$A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_{\overset{1}{x}y}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k}p_{xy}\, q_{\overset{1}{x+k}:y+k}$$

bajo el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos para cada individuo e independencia entre el par de variables aleatorias, se tiene

$$q_{\overset{1}{x+k}:y+k} = \int_0^1 {}_{s}p_{x+k:y+k}\,\mu(x+k+s)ds$$
$$= \int_0^1 q_{x+k}\left(1 - s q_{y+k}\right)ds$$
$$= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2} q_{y+k}\right)$$

de manera que

$$A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k}p_{xy}\, q_{x+k}\left[1 - \tfrac{1}{2} q_{y+k}\right]$$

Si se trata de un seguro que paga en el momento en que ocurre el fallecimiento del asegurado, entonces el valor presente actuarial es

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \int_0^{\infty} v^t\ {}_{t}p_{xy}\,\mu(x+t)\,dt$$

Y como $T = K + S$, entonces

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{s+k}\ {}_{s+k}p_{xy}\,\mu(x+k+s)\,ds$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_{k}p_{xy} \int_0^1 v^s\ {}_{s}p_{x+k:y+k}\,\mu(x+k+s)\,ds$$

Reescribiendo ${}_{s}p_{x+k:y+k}\,\mu(x+k+s)$ en términos de $q_{\overset{1}{x+k}:y+k}$

$${}_{s}p_{x+k:y+k}\,\mu(x+k+s) = q_{x+k}\left(1 - s q_{y+k}\right)$$
$$= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2} q_{y+k}\right) + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k} q_{y+k}$$
$$= q_{\overset{1}{x+k}:y+k} + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k} q_{y+k}$$

por lo tanto

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_{k}p_{xy} \int_0^1 v^s q_{\overset{1}{x+k}:y+k} + \left(\tfrac{1}{2} - s\right) q_{x+k} q_{y+k}\, ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{xy} \left[q_{\overset{1}{x+k}:y+k} \int_0^1 v^s ds + q_{x+k} q_{y+k} \int_0^1 v^s \left(\tfrac{1}{2} - s\right) ds \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{xy} \left[q_{\overset{1}{x+k}:y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds + q_{x+k} q_{y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} \left(\frac{1}{2} - s \right) ds \right]$$

Tomando de (2.13.2.4) y (2.13.2.5) los resultados para estas integrales y sustituyéndolos en la expresión anterior

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y} = \frac{i}{\delta} A_{\overset{1}{x}y} + \frac{1}{2}\frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{xy} q_{x+k} q_{y+k}$$

el segundo término es muy pequeño con respecto al total del monto.

Ejemplo 3.6.3.3: Obtener una expresión para un seguro de vida para $(25:38)$, pagadero al final del año en que muera (25), si esta es la primera muerte en ocurrir. Suponer DUM

$$A_{\overset{1}{25}:38} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{25:38} q_{25+k} \left[1 - \tfrac{1}{2} q_{38+k}\right]$$

3.7 Funciones Contingentes Compuestas

En las funciones contingentes simples se establece el orden de los fallecimientos sobre una vida de las que integran el estatus. En las funciones contingentes compuestas, la secuencia con que deben ocurrir los fallecimientos se especifica a través de dos o más vidas. Tal es el caso de $q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z}$, que representa la probabilidad de que en el estatus (xyz), (y) muera en primer lugar y (x) en segundo. El numeral sobre el subíndice indica la vida sobre la que se otorga el beneficio en el orden indicado. El numeral debajo del subíndice indica únicamente secuencia. De manera que $A_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}}$ representa un seguro contingente compuesto, unitario, pagadero a la muerte de (z) siempre que haya ocurrido en tercer lugar y (x) en primero. No es necesario que todas las vidas que componen el grupo o estatus tengan indicado el orden de fallecimiento, sin embargo estas funciones se llaman contingentes compuestas porque al menos a dos de las vidas se les especifica la secuencia de defunción. Es claro que sólo opera para grupos de tres o más vidas.

3.7.1 Probabilidades Contingentes Compuestas

Las funciones contingentes compuestas se pueden expresar con una o más integrales múltiples de las vidas involucradas. Recordemos que $\int_0^n {}_t p_x \mu_x(t) dt = {}_n q_x$, de manera que es posible expresar una probabilidad contingente compuesta con tantas integrales como el número de vidas que integran el estatus. El orden en que ocurran los fallecimientos se establece en los límites de integración. Otro camino para expresar este tipo de probabilidades es el utilizado en el libro de Bowers y que corresponde al método que se introdujo en la sección 3.6.1. No siempre es completamente posible expresar las funciones contingentes compuestas en términos de funciones contingentes simples. Nuevamente se asumen tiempos de vida futuro mutuamente independientes.

Las primeras expresiones utilizan el método de las integrales iteradas y posteriormente se muestra el desarrollado en el libro de Bowers en donde se considera la probabilidad del evento.

${}_{\infty}q_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}}$ representa la probabilidad de que las vidas $(x)(y)$ y (z) mueran en ese orden, sin restricción en el tiempo. Expresando la muerte de cada vida con una integral

$$
\begin{aligned}
{}_{\infty}q_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} &= \int_0^{\infty}\int_s^{\infty}\int_t^{\infty} {}_s p_x \mu_x(s)\, {}_t p_y \mu_y(t)\, {}_r p_z \mu_z(r)\, dr\,dt\,ds \\
&= \int_0^{\infty}\int_s^{\infty} {}_s p_x \mu_x(s)\, {}_t p_{yz} \mu_y(t)\, dt\,ds
\end{aligned}
$$

cambiando el orden de integración

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty}\int_0^{t} {}_s p_x \mu_x(s)\, {}_t p_{yz} \mu_y(t)\, ds\,dt \\
&= \int_0^{\infty} {}_t q_x\, {}_t p_{yz} \mu_y(t)\, dt \qquad (3.7.1.1)
\end{aligned}
$$

Utilizando el método desarrollado en Bowers se pueden obtener diferentes expresiones, todo depende de cual vida se tome como pivote, es decir, sobre que fallecimiento se describa el evento condicional. Las siguientes probabilidades muestran las diferentes expresiones a la que se llega según la elección de la vida. Se continúa con el supuesto de independencia.

La probabilidad de que las vidas (x), (y) y (z) mueran en ese orden durante los siguientes *n* años y tomando a la vida (x) como pivote es

$$
\begin{aligned}
&A = \{T(x) < T(y) < T(z) < n\} \\
&{}_n q_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^{n} \Pr\left[A \middle| T(x) = t\right] {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \qquad (3.7.1.2)
\end{aligned}
$$

de manera que

$$
\Pr\left[A \middle| T(x) = t\right] = \begin{cases} 0 & t > n \\ {}_t p_{yz}\, {}_{n-t}q_{y+t:\overset{2}{\overline{z+t}}} & t \le n \end{cases} \qquad (3.7.1.3)
$$

entonces

$$
{}_n q_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^{n} {}_t p_{yz}\, {}_{n-t}q_{y+t:\overset{2}{\overline{z+t}}}\, {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \qquad (3.7.1.4)
$$

Esta expresión indica que una vez ocurrida la muerte de (x) en el tiempo *t*, se requiere que de entre las vidas (y) y (z), ahora con edad $(y+t)$ y $(z+t)$ respectivamente, $(z+t)$ sea la segunda en morir. El límite de la integral indica que el periodo para que ocurran estos eventos es durante los siguientes *n* años. Si se considera la vida (y) como pivote, entonces se requiere que (x) ya haya fallecido y que la muerte de (z) sea la última en ocurrir. Por lo tanto

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^n \Pr\left[A \middle| T(y)=t\right] {}_tp_y\mu(y+t)\,dt \tag{3.7.1.5} $$

$$ = \int_0^n {}_tq_x\, {}_tp_z\, {}_{n-t}q_{z+t}\, {}_tp_y\mu(y+t)\,dt \tag{3.7.1.6} $$

Finalmente, si la vida que se toma como pivote es (z), entonces el evento que debe darse es que las vidas (x) y (y) mueran en ese orden en el tiempo *t*

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty \Pr\left[A \middle| T(z)=t\right] {}_tp_z\mu(z+t)\,dt \tag{3.7.1.7} $$

$$ = \int_0^n {}_tq_{x\overset{2}{y}}\, {}_tp_z\mu(z+t)\,dt \tag{3.7.1.8} $$

Retomando (3.7.1.6) y haciendo uso de probabilidades contingentes simples, se obtiene

$$ {}_nq_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^n \left(1-{}_tp_x\right)\left({}_tp_z-{}_np_z\right){}_tp_y\mu(y+t)\,dt \tag{3.7.1.9} $$

$$ = {}_nq_{\overset{1}{y}z} - {}_nq_{x\overset{1}{y}z} - {}_np_z\left({}_nq_y - {}_nq_{x\overset{1}{y}}\right) \tag{3.7.1.10} $$

Sean cuatro vidas $(w),(x),(y)$ y (z) la probabilidad de que las vidas mueran en ese orden, en los siguientes *n* años es

$$ A = \{T(w)<T(x)<T(y)<T(z) \quad y \quad T(y)<n\} $$

$$ {}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}\overset{3}{y}z} = \int_0^n \Pr\left[A \middle| T(w)=t\right] {}_tp_w\mu(w+t)\,dt $$

$$ {}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}\overset{3}{y}z} = \int_0^n {}_tp_{xyz}\, {}_{n-t}q_{\underset{1}{x+t}:\overset{2}{y+t}:z+t}\, {}_tp_w\mu(w+t)\,dt \tag{3.7.1.11} $$

$$ = \int_0^n {}_tq_w\, {}_tp_{yz}\, {}_{n-t}q_{\overset{1}{y+t}:z+t}\, {}_tp_x\mu(x+t)\,dt \tag{3.7.1.12} $$

$$ = \int_0^n \left(1-{}_tp_w\right)\left({}_tp_{yz}-{}_np_{yz}\right){}_tp_x\mu(x+t)\,dt $$

$$ = {}_nq_{x\overset{1}{y}z} - {}_nq_{w\overset{1}{x}yz} - {}_np_{yz}\left({}_nq_x - {}_nq_{w\overset{1}{x}}\right) $$

o bien

$$ {}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}\overset{3}{y}z} = \int_0^n {}_tq_{w\overset{2}{x}}\, {}_tp_z\, {}_tp_y\mu(y+t)\,dt \tag{3.7.1.13} $$

o bien

$$ {}_nq_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}\overset{3}{y}z} = \int_0^n {}_tq_{\underset{1}{w}x\overset{3}{y}}\, {}_tp_z\mu(z+t)\,dt + {}_nq_{\underset{1}{w}x\overset{3}{y}}\, {}_np_z \tag{3.7.1.14} $$

Bajo la Ley de Gompertz, se obtienen expresiones para probabilidades contingentes compuestas en función de probabilidades contingentes simples. Retomando (3.7.1.12)

$$ {}_{\infty}q_{\underset{1\ 2}{wxyz}}^{\ \ 3} = \int_0^{\infty} {}_tq_w\, {}_tp_{yz}\, {}_{\infty}q_{\overset{1}{y+t}:z+t}\, {}_tp_x\mu(x+t)dt \tag{3.7.1.15} $$

Anteriormente se mostró que

$$ {}_nq_{\overset{1}{x}y} = \frac{c^x}{c^w}\, {}_nq_w \tag{3.7.1.16} $$

con $c^w = c^x + c^y$. Adoptando esto y sustituyéndolo por ${}_{\infty}q_{\overset{1}{y+t}:z+t}$ en la integral, se obtiene

$$ {}_{\infty}q_{\underset{1\ 2}{wxyz}}^{\ \ 3} = \int_0^{\infty} \frac{c^{y+t}}{c^{y+t}+c^{z+t}}\, {}_tq_w\, {}_tp_{yz}\, {}_tp_x\mu(x+t)\,dt \tag{3.7.1.17} $$

$$ = \frac{c^y}{c^y+c^z}\left({}_{\infty}q_{\overset{1}{x}yz} - {}_{\infty}q_{w\overset{1}{x}yz} \right) \tag{3.7.1.18} $$

Extendiendo (3.7.1.16) para más de dos vidas y usándolo en esta expresión

$$ {}_{\infty}q_{\underset{1\ 2}{wxyz}}^{\ \ 3} = \frac{c^y}{c^y+c^z}\left(\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z} - \frac{c^x}{c^w+c^x+c^y+c^z} \right) \tag{3.7.1.19} $$

$$ = \left(\frac{c^w}{c^w+c^x+c^y+c^z} \right)\left(\frac{c^x}{c^x+c^y+c^z} \right)\left(\frac{c^y}{c^y+c^z} \right) $$

$$ = {}_{\infty}q_{\overset{1}{w}xyz}\, {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}yz}\, {}_{\infty}q_{\overset{1}{y}z} \tag{3.7.1.20} $$

Ejemplo 3.7.1.1: Evaluar ${}_{\infty}q_{\underset{1\ \ 2}{55:53:22:20}}^{\ \ \ 3}$ suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham

de (3.7.1.19)

$$ {}_{\infty}q_{\underset{1\ \ 2}{55:53\,22\,20}}^{\ \ \ 3} = \left(\frac{c^{55}}{c^{55}+c^{53}+c^{22}+c^{20}} \right)\left(\frac{c^{53}}{c^{53}+c^{22}+c^{20}} \right)\left(\frac{c^{22}}{c^{22}+c^{20}} \right) $$
$$ = 0.248748 $$

Las funciones contingentes compuestas, además de considerar el orden de ocurrencia de los fallecimientos, consideran el tiempo transcurrido entre una y otra muerte.

Considérese la probabilidad de que tres vidas $(x),(y)$ y (z) mueran en ese orden en 20 años, con al menos 5 años de diferencia entre cada una.

Esta condición requiere que (y) muera en el periodo de 5 a 15 años. La probabilidad se expresa

$$ \int_5^{15} \left(1 - {}_{t-5}p_x\right) {}_tp_y\mu(y+t)\left({}_{t+5}p_z - {}_{20}p_z \right)dt \tag{3.7.1.21} $$

Haciendo $s = t-5$ se reduce a probabilidades contingentes simples

$$\int_0^{10}\left(1-{}_s p_x\right)\,{}_{s+5}p_y\,\mu\left(y+s+5\right)\left({}_{s+10}p_z-{}_{20}p_z\right)ds$$
$$={}_5p_y\,{}_{10}p_z\int_0^{10}\left(1-{}_s p_x\right){}_s p_{y+5}\,\mu\left(y+s+5\right){}_s p_{z+10}\,ds-{}_5p_y\,{}_{20}p_z\int_0^{10}\left(1-{}_s p_x\right){}_s p_{y+5}\,\mu\left(y+5+s\right)ds$$
$$={}_5p_y\,{}_{10}p_z\left({}_{10}q_{\overset{1}{\overline{y+5}}:z+10}-{}_{10}q_{x:\overset{1}{\overline{y+5}}:z+10}\right)-{}_5p_y\,{}_{20}p_z\left({}_{10}q_{y+5}-{}_{10}q_{x:\overset{1}{\overline{y+5}}}\right) \tag{3.7.1.22}$$

Ejemplo 3.7.1.2: Obtener la probabilidad de que las vidas $(x),(y)$ y (z) mueran en ese orden. Ocurriendo la muerte de (y) en el transcurso de 5 años después de la muerte de (x) y la muerte de (z) 10 años después de la muerte de (y).

La probabilidad solicitada es

$$\int_0^{\infty}\int_s^{s+5}\int_t^{t+10}{}_s p_x\mu_x(s)\,{}_t p_y\mu_y(t)\,{}_r p_z\mu_z(r)\,drdtds=\int_0^{\infty}\int_s^{s+5}{}_s p_x\mu_x(s)\,{}_t p_y\mu_y(t)\left({}_t p_z-{}_{t+10}p_z\right)dtds$$

cambiando el orden de integración se obtiene

$$\int_0^{\infty}\int_{t-5}^{t}{}_s p_x\mu_x(s)\,{}_t p_y\mu_y(t)\left({}_t p_z-{}_{t+10}p_z\right)dsdt+\int_0^{5}\int_s^{t}{}_s p_x\mu_x(s)\,{}_t p_y\mu_y(t)\left({}_t p_z-{}_{t+10}p_z\right)dsdt$$

resolviendo las integrales correspondientes

$${}_5q_{\overset{1}{y}z}-{}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}z}-{}_{10}p_z\left({}_5q_{\overset{1}{y}:z+10}-{}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}:z+10}\right)+{}_5p_{yz}\left({}_{\infty}q_{x:\overset{1}{\overline{y+5}}:z+5}-{}_{10}p_{z+5}\,{}_{\infty}q_{x:\overset{1}{\overline{y+5}}:z+15}\right)$$

Los seguros que involucran probabilidades contingentes de este tipo son formulados análogamente.

3.7.2 Seguros Contingentes Compuestos

La suma asegurada de los seguros presentados en esta sección es otorgada si los fallecimientos ocurren en el orden establecido y con las condiciones de temporalidad indicadas. A diferencia de los seguros presentados en la sección (3.6.2), en estos seguros el orden de los fallecimientos se indica con más de una vida. Para el desarrollo de este tipo de seguros, se utilizan las probabilidades de funciones contingentes compuestas presentadas en el apartado anterior.

Al igual que las probabilidades contingentes compuestas, para los seguros contingentes compuestos se tienen diferentes expresiones. Un camino es a través de integrales iteradas. El número de integrales múltiples se debe al número de muertes especificadas. Sin embargo, asumiendo tiempo de vida futuro mutuamente independiente, las integrales pueden ser reemplazadas por ${}_t p_x\mu\left(x+t\right)$, como se hizo en el apartado de probabilidades contingentes compuestas. Otro camino es tomar una vida y definir el evento que debe ocurrir para que se cumplan las condiciones.

$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}$ denota un seguro unitario pagadero a la muerte de (y) si ocurre después de la muerte de (x). Para la primera expresión se considera que cuando (y) muera (x) ya haya fallecido y (z) este aún con vida. El valor presente actuarial es $E[Z]$, donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)} & T(x) < T(y) < T(z) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty v^t \, {}_tq_x \, {}_tp_{yz} \mu(y+t)\, dt \qquad (3.7.2.1)$$

Para obtener una expresión en la que se considere que las vidas (y) y (z) sobrevivan a la muerte de (x) y que los fallecimientos de (y) y (z) ocurran más adelante en ese orden, hay que sustituir ${}_tq_x$ por $\int_0^t {}_sp_x \mu(x+s)\, ds$ en (3.7.2.1), obteniéndose

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty \int_0^t v^t \, {}_sp_x \mu(x+s) \, {}_tp_{yz} \mu(y+t)\, ds dt \qquad (3.7.2.2)$$

Invirtiendo el orden de integración

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t \, {}_sp_x \mu(x+s) \, {}_tp_{yz} \mu(y+t)\, dt ds$$

simplificando

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty v^s \, {}_sp_{xyz} \mu(x+s) \, {}_\infty q_{\overset{1}{\overline{y+s}}:z+s} \, ds \qquad (3.7.2.3)$$

Una última expresión basada en el hecho de que los fallecimientos de (x) y (y) hayan ocurrido en ese orden al darse la muerte de (z), se obtiene al sustituir en (3.2.7.1) ${}_tp_z$ por $\int_t^\infty {}_sp_z \mu(z+s)\, ds$

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty \int_t^\infty v^t \, {}_sp_z \mu(z+s) \, {}_tq_x \, {}_tp_y \mu(y+t)\, ds dt \qquad (3.7.2.4)$$

invirtiendo el orden de integración

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty \int_0^s v^t \, {}_sp_z \mu(z+s) \, {}_tq_x \, {}_tp_y \mu(y+t)\, dt ds \qquad (3.7.2.5)$$

simplificando

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty v^s \, {}_sq_{\overset{2}{xy}} \, {}_sp_z \mu(z+s)\, ds \qquad (3.7.2.6)$$

Como se había indicado, es posible expresar un seguro contingente compuesto a través de seguros contingentes simples. Retomando (3.7.2.1)

$$\overline{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^\infty v^t \, {}_tq_x \, {}_tp_{yz} \mu(y+t)\, dt \qquad (3.7.2.7)$$

$$= \int_0^\infty v^t (1 - {}_tp_x) \, {}_tp_{yz} \mu(y+t)\, dt$$

$$= \bar{A}_{y\overset{1}{z}} - \bar{A}_{xy\overset{1}{z}} \tag{3.7.2.8}$$

Ejemplo 3.7.2.1: Una familia contrata un seguro de vida por 1000 u.m., pagadero en el momento en que (44) fallezca, siempre y cuando esto ocurra después de la muerte de (45). El estatus asegurado es $(45:44:10)$. Obtener el valor presente actuarial suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham

El seguro contratado es $1000\bar{A}_{\underset{1}{45}:\overset{2}{44}:10}$

de (3.7.2.8)

$$1000\bar{A}_{\underset{1}{45}:\overset{2}{44}:10} = 1000\left(\bar{A}_{\overset{1}{44}:10} - \bar{A}_{45:\overset{1}{44}:10}\right)$$

suponiendo que las vidas siguen la ley de Makeham, por lo que se retoma (3.6.3.16)

$$\bar{A}_{\overset{1}{44}:10} = A\left(1-\frac{c^{44}}{c^{w}}\right)\bar{a}_{ww} + \frac{c^{44}}{2c^{w}}\bar{A}_{ww}$$

evaluando

$$\bar{a}_{44:10} = \bar{a}_{36:619911:36:619911} = 12.894317$$

$$\bar{A}_{44:10} = \bar{A}_{36:619911:36:619911} = 0.115986$$

y sustituyendo estos valores en la expresión anterior se obtiene $\bar{A}_{\overset{1}{44}:10} = 0.099751$.

Siguiendo el mismo procedimiento para $\bar{A}_{45:\overset{1}{44}:10} = A\left(1-\frac{c^{44}}{c^{w}}\right)\bar{a}_{www} + \frac{c^{44}}{3c^{w}}\bar{A}_{www}$ con

$$\bar{a}_{45:44:10} = \bar{a}_{40:135590:40.135590} = 12.463601$$

$$\bar{A}_{45:44:10} = \bar{a}_{40:135590:40.135590} = 0.134502$$

se obtiene

$$\bar{A}_{45:\overset{1}{44}:10} = 0.058256$$

sustituyendo los valores

$$\begin{aligned} 1000\bar{A}_{\underset{1}{45}:\overset{2}{44}:10} &= 1000\left(\bar{A}_{\overset{1}{44}:10} - \bar{A}_{45:\overset{1}{44}:10}\right) \\ &= 1000(0.099751 - 0.058256) \\ &= 41.494924 \end{aligned}$$

$\bar{A}_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}}$ representa un seguro unitario pagadero a la muerte de (z), si esta ocurre en tercer lugar y (x) en primer lugar. En el aparato 3.6 se mostraron diferentes probabilidades contingentes para este evento. La siguiente expresión es otra forma de indicarlo.

$$A = \{T(x) < T(y) < T(z)\}$$

$$\bar{A}_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty v^t \Pr\left[A \middle| T(z)=t\right]_t p_z \mu_z(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty v^t \,{}_t q_{\underset{xy}{\overset{2}{}}}\, {}_t p_z \mu_z(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty v^t \,{}_t q_x \,{}_t p_y \mu(y+t)\, \bar{A}_{z+t}\,dt \qquad (3.7.2.9)$$

Cuando el orden de los fallecimientos esta indicado por más de tres vidas, es mejor que la última muerte no se incluya como probabilidad contingente en la integral. Tal es el caso de $\bar{A}_{w\underset{2}{x}\underset{1}{y}\overset{3}{z}}$ que denota un seguro unitario, pagadero a la muerte de (w), siempre que los fallecimientos de (x) y (y) ocurran en primero y segundo lugar respectivamente. El valor presente actuarial es $E[Z]$, donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(w)} & T(y) < T(x) < T(w) < T(z) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\bar{A}^{3}_{w\underset{2}{x}\underset{1}{y}z} = \int_0^\infty v^t \left(1 - {}_t p_y\right) {}_t p_{wxz} \mu(x+t)\, \bar{A}_{\underset{w+t:z+t}{\overset{1}{}}}\,dt \qquad (3.7.2.10)$$

A continuación se muestra el desarrollo de un seguro contingente compuesto expresando cada fallecimiento con una integral.

Un seguro unitario pagadero en el momento en que muera (y), si la muerte de (w) es la primera en ocurrir, seguida por la muerte de (x) (y) y (z) (en ese orden).

$$\bar{A}_{w\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_0^\infty v^r \,{}_s p_w \mu_w(s) \int_s^\infty {}_t p_x \mu_x(t) \int_t^\infty {}_r p_y \mu_y(r) \int_r^\infty {}_u p_z \mu_z(u)\,du\,dr\,dt\,ds$$

O bien

$$\bar{A}_{w\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_0^\infty v^t \,{}_t q_{\underset{wx}{\overset{1}{}}}\, {}_t p_y \mu_y(t)\, {}_t p_z \,{}_\infty q_{z+t}\,dt$$
$$= \int_0^\infty v^t \,{}_t q_{\underset{wx}{\overset{1}{}}}\, {}_t p_y \mu_y(t)\, {}_t p_z \bar{A}_{z+t}\,dt \qquad (3.7.2.11)$$

Los siguientes seguros contingentes compuestos, consideran además de la restricción del orden de los fallecimientos, el tiempo entre la ocurrencia de los fallecimientos.

Suponga un seguro unitario pagadero a la muerte de (x), si muere después de (y) y (z) y esta última ocurre en los primeros *n* años

$$\int_0^\infty \int_0^n v^t \,{}_s q_y \,{}_s p_{xz} \mu(z+s)\, {}_t p_{x+s} \mu(x+s+t)\,ds\,dt = \int_0^\infty v^t \,{}_t q_y \,{}_t p_{xz} \mu(z+t)\, {}_{n|}\bar{A}_{x+t}\,dt$$

Un seguro continuo, unitario pagadero a la muerte de (x) si esta ocurre antes que (y) o dentro de n años después de (y), dejando en ambos casos con vida a (z).

Como en los primeros n años no se condiciona la sobrevivencia de (y), puede indicarse por

$$\int_0^n v^t \, {}_t p_{xz} \mu(x+t)\, dt + v^n \, {}_n p_{xz} \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{x+n:y:z+n} \mu(x+n+t)\, dt = \bar{A}^{1}_{xz:\overline{n}|} + v^n \, {}_n p_{xz} \bar{A}_{\overset{1}{\overline{x+n+:y:z+n}}} \qquad (3.7.2.12)$$

3.8 Anualidades Testamentarias

Una anualidad testamentaria es una anualidad pagadera durante la existencia de un estatus, cuyo pago se activa con el fallecimiento de un segundo estatus. Este tipo de anualidades está próximo al concepto de seguro, ya que el beneficio se otorga a la ocurrencia de un fallecimiento. Sin embargo, son incluidas en el estudio de anualidades porque el beneficio es una anualidad y esta se paga si el estatus estipulado sobrevive, una vez que se cumplan las condiciones señaladas. Los pagos se realizan con la temporalidad indicada.

Conceptualmente una anualidad testamentaria es una anualidad diferida. El periodo de diferimiento es aleatorio, ya que se trata del tiempo trascurrido a la ocurrencia de los fallecimientos y condiciones requeridas.

La anualidad diferida n años, denotada por ${}_{n|}a_x$, es un tipo de anualidad testamentaria. Aquí n es el estatus asegurado y (x) es el miembro o estatus beneficiario. La notación para las anualidades testamentarias es $\bar{a}_{x|y}$, la cual se deriva justamente de las anualidades diferidas. Aquí el periodo de diferimiento es el tiempo que transcurre antes del fallecimiento de (x). La anualidad se paga a (y) una vez que se ha cumplido este periodo de diferimiento.

Considérense las vidas (x) y (y), la probabilidad de que al final de t años, (x) haya muerto y (y) esté aún con vida es

$$\left(1 - {}_t p_x\right) {}_t p_y = {}_t p_y - {}_t p_{xy} \qquad (3.8.1)$$

éste razonamiento ilustra la definición de anualidades testamentarias como se verá mas adelante.

Una anualidad vitalicia continua, pagadera a (y) a partir de la muerte de (x) denotada por $\bar{a}_{x|y}$ es la forma más simple de anualidad testamentaria que involucra vidas individuales. El valor presente, denotado por Z, es

$$Z = \bar{a}_{\overline{T(y)}|} - \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}$$

por lo tanto

$$\bar{a}_{x|y} = E[Z] = E\left[\bar{a}_{\overline{T(y)}|}\right] - E\left[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right]$$

$$= \bar{a}_y - \bar{a}_{xy} \qquad (3.8.2)$$

Para el caso discreto se tiene

$$a_{x|y}=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\,{}_tp_y\left(1-{}_t\,p_x\right)=a_y-a_{xy} \tag{3.8.3}$$

Se puede apreciar que una anualidad testamentaria pagadera a (y) después de la muerte de (x) es igual a una anualidad de vida a (y) con la omisión de pagos durante la existencia conjunta de (x) y (y).

Otra expresión, para esta función, se obtiene de (3.8.1)

$$\bar{a}_{x|y}=\int_0^{\infty}v^t\,{}_tp_y\left(1-{}_t\,p_x\right)dt \tag{3.8.4}$$

como $1-{}_t\,p_x=\int_0^t {}_sp_x\mu(x+s)ds$ entonces

$$\bar{a}_{x|y}=\int_0^{\infty}\int_0^t v^t\,{}_tp_y\,{}_sp_x\mu(x+s)dsdt \tag{3.8.5}$$

Invirtiendo el orden de integración

$$\bar{a}_{x|y}=\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}v^t\,{}_tp_y\,{}_sp_x\mu(x+s)dtds \tag{3.8.6}$$

$$=\int_0^{\infty}{}_sp_x\mu(x+s)\,{}_{s|}\bar{a}_yds$$

$$=\int_0^{\infty}v^s\,{}_sp_{xy}\mu(x+s)\bar{a}_{y+s}ds \tag{3.8.7}$$

En las anteriores expresiones de anualidades testamentarias se hace referencia a vidas individuales, sin embargo estas anualidades también consideran estatus y el término cierto. A continuación se muestra una expresión general donde los estatus (v) y (u) pueden representar: una vida individual, un estatus, un término cierto o una combinación de estatus

$$a_{v|u}=a_u-a_{uv} \tag{3.8.8}$$

Suponiendo que en la expresión (3.8.8), (u) represente el estatus de vida conjunta (xy) y (v) la vida individual (z) entonces

$$a_{z|xy}=a_{xy}-a_{xyz} \tag{3.8.9}$$

expresión que denota una anualidad vencida, pagadera durante la existencia de estatus de vida conjunta (xy), una vez que haya ocurrido la muerte de (z).

Ahora bien, si (u) denota una vida individual (x) y (v) representa al estatus de último sobreviviente $\overline{yz}$, una anualidad pagadera durante la existencia de (x), cuyos pagos inician cuando el estatus $\overline{yz}$ deje de existir es

$$a_{\overline{yz}|x}=a_x-a_{x:\overline{yz}} \tag{3.8.10}$$

$$=a_x-a_{xy}-a_{xz}+a_{xyz} \tag{3.8.11}$$

Ejemplo 3.8.1: Expresar en función de anualidades de vida individual y vida conjunta, una anualidad testamentaria, pagadera durante la existencia del estatus $\overline{wx}$, al disolverse el estatus de vida conjunta yz

$$a_{yz|\overline{wx}} = a_{\overline{wx}} - a_{\overline{wx}:yz} \tag{3.8.12}$$

$$= a_w + a_x - a_{wx} - a_{wyz} - a_{xyz} + a_{wxyz} \tag{3.8.13}$$

Los estatus (u) y (v) pueden representar un término cierto, tal como se observa a continuación

$$a_{y|x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|} \tag{3.8.14}$$

aquí, la anualidad vencida es pagada a (x) una vez ocurrida la muerte (y) y cuyos pagos se realizan durante n años. Otra notación que puede ser utilizada es ${}_n a_{y|x}$. Como se observa en los siguientes ejemplos, el término cierto puede estar medido a partir del momento en que fallece el estatus especificado, tal como $a_{x|y:\overline{n}|}$, o bien a partir de la fecha en que se realiza el contrato, tal como $a_{x:\overline{n}||y}$.

Ejemplo 3.8.2: Expresar las siguientes anualidades testamentarias en función de anualidades de vida conjunta y de vida individual:

a. una anualidad pagadera a (x) al extinguirse el estatus de último sobreviviente $\left(\overline{y:\overline{n}|}\right)$

b. una anualidad vencida pagadera a (x), una vez que se haya extinguido $\left(\overline{n}|\right)$

a. $$a_{\overline{y:\overline{n}|}|x} = a_x - a_{x:\overline{y:\overline{n}|}} \tag{3.8.15}$$

$$\begin{aligned} &= a_x - a_{xy} - a_{x:\overline{n}|} + a_{xy:\overline{n}|} \\ &= {}_{n|}a_x - {}_{n|}a_{xy} \end{aligned} \tag{3.8.16}$$

como los pagos no se realizan los primeros n años, puede denotarse como una anualidad testamentaria diferida n años, es decir, ${}_{n|}a_{y|x}$.

b. $$a_{\overline{n}||x} = a_x - a_{x:\overline{n}|} \tag{3.8.17}$$

resultado que puede verse como una anualidad de vida individual diferida n años y que en la teoría de vidas individuales se denota por ${}_{n|}a_x$.

Ejemplo 3.8.3: Calcular el valor presente de una anualidad testamentaria anticipada vitalicia, pagadera a (12) si el estatus de vida conjunta $(45:40)$ fallece. El monto del beneficio es de 500 u.m. Suponer que las vidas siguen la ley de Makeham y evaluar con las tablas del Anexo.

La anualidad solicitada es $500\left(\ddot{a}_{(45:40)|12}\right)$

Desarrollando la anualidad testamentaria

$$500\left(\ddot{a}_{(45:40)|12}\right) = 500\left(\ddot{a}_{12} - \ddot{a}_{45:40}\right)$$

bajo Makeham

$$\ddot{a}_{45:40} = \ddot{a}_{42.770004:42.770004} = 12.815911$$

$$\ddot{a}_{12} = 14.714439$$

evaluando

$$500\left(\ddot{a}_{(45:40)|12}\right) = 500(14.714439 - 12.815911)$$

$$= 949.264311$$

En las algunas anualidades testamentarias (3.8.15) y (3.8.17), el término cierto se mide a partir de la fecha en que se emite el contrato, esto porque el término cierto es parte de las condiciones a cumplir para que se otorgue el beneficio. En (3.8.14), el término cierto se mide a partir de que la vida (y) fallece. Ahí el término cierto indica la temporalidad del pago.

Veamos ahora una anualidad testamentaria planteada a través del enfoque probabilista en donde el tiempo se mide a partir del momento en que ocurre el fallecimiento. Para tal efecto se retoma la variable aleatoria $T(x)$ y se acuerda que $T(x) = t$. Los pagos se otorgan a (y) durante *n* años al ocurrir la muerte de (x). El término cierto es un estatus diferido y el valor presente de esta anualidad, denotado por Z es

$$Z = \begin{cases} 0 & T(y) \le T(x) \\ v^{T(x)}\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)|}} & T(x) < T(y) \le T(x) + n \\ v^{T(x)}\bar{a}_{\overline{n|}} & T(x) + n \le T(y) \end{cases}$$

La $E[Z]$ es

$$E[Z] = \int_0^\infty E\left[Z \middle| T(x) = t\right] {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \tag{3.8.18}$$

$$= \int_0^\infty v^t {}_t p_y \bar{a}_{y+t:\overline{n|}} \, {}_t p_x \mu(x+t)\, dt \tag{3.8.19}$$

como

$$\bar{a}_{y+t:\overline{n|}} = \int_t^{t+n} v^{s-t} {}_{s-t} p_{y+t}\, ds \tag{3.8.20}$$

entonces

$$E[Z] = \int_0^\infty \int_t^{t+n} v^s {}_s p_y \, {}_t p_x \mu(x+t)\, ds dt \tag{3.8.21}$$

cambiando el orden de la integración

$$E[Z] = \int_0^n \int_0^s v^s {}_s p_y \, {}_t p_x \mu(x+t)\, dt ds + \int_n^\infty \int_{s-n}^s v^s {}_s p_y \, {}_t p_x \mu(x+t)\, dt ds \tag{3.8.22}$$

$$= \int_0^n v^s {}_s p_y \left(1 - {}_s p_x\right) ds + \int_n^\infty v^s {}_s p_y \left({}_{s-n} p_x - {}_s p_x\right) ds$$

$$=\bar{a}_{y:\overline{n}|}-\bar{a}_{xy}+v^{n}{}_{n}p_{y}\bar{a}_{x:y+n} \tag{3.8.23}$$

La siguiente anualidad a (y) se activa n años después de la muerte de (x) y los pagos continúan durante la sobrevivencia de esta vida. El valor presente de esta anualidad es

$$Z\begin{cases}0 & T(y)\le T(x)+n\\ \left(v^{T(x)+n}\right)\bar{a}_{\overline{T(y)-T(x)-n}|} & T(x)+n<T(y)\end{cases}$$

usando la condición $T(x)=t$

$$E[Z]=\int_0^{\infty}E\left[Z\,|T(x)=t\right]{}_{t}p_{x}\mu(x+t)\,dt \tag{3.8.24}$$

$$=\int_0^{\infty}{}_{t+n}p_{y}v^{t+n}\bar{a}_{y+t+n}\,{}_{t}p_{x}\mu(x+t)\,dt \tag{3.8.25}$$

como

$${}_{t+n}p_{y}v^{t+n}\bar{a}_{y+t+n}=\int_{t+n}^{\infty}v^{s}\,{}_{s}p_{y}ds$$

entonces

$$E[Z]=\int_0^{\infty}\int_{t+n}^{\infty}v^{s}\,{}_{s}p_{y}\,{}_{t}p_{x}\mu(x+t)\,dsdt \tag{3.8.26}$$

cambiando el orden de integración

$$E[Z]=\int_n^{\infty}\int_0^{s-n}v^{s}\,{}_{s}p_{y}\,{}_{t}p_{x}\mu(x+t)\,dtds \tag{3.8.27}$$

$$=\int_n^{\infty}v^{s}{}_{s}p_{y}\left(1-{}_{s-n}p_{x}\right)ds$$

$$=v^{n}{}_{n}p_{y}\left(\bar{a}_{y+n}-\bar{a}_{x:y+n}\right)$$

$$=v^{n}{}_{n}p_{y}\bar{a}_{x|y+n} \tag{3.8.28}$$

Ejemplo 3.8.3: Calcular el valor presente de una anualidad testamentaria pagadera a (50). Los pagos se realizan (5) años después de ocurrida la muerte de (68) y la tasa es del 7%. Utilizar las tablas del anexo para su evaluación.

El valor presente de la anualidad es

$$Z\begin{cases}0 & T(50)\le T(68)+5\\ \left(v^{T(68)+5}\right)\bar{a}_{\overline{T(50)-T(68)-5}|} & T(68)+5<T(50)\end{cases}$$

De (3.8.28)

$$E[Z]=v^{5}{}_{5}p_{50}\bar{a}_{68|50+5}$$

donde

$$\bar{a}_{68|50+5}=\bar{a}_{60}-\bar{a}_{68}$$

de tablas

$$\bar{a}_{60} = 9.792374$$
$$\bar{a}_{68} = 8.089549$$
$${}_5 p_{50} = 0.96080$$

sustituyendo los valores y resolviendo

$$E[Z] = v^5 {}_5 p_{50} \bar{a}_{68|50+5} = 1.166495$$

Tal como ocurre con las anualidades de vida individual, generalmente los pagos se realizan con una periodicidad menor a un año, es decir *m* veces al año. Las anualidades testamentarias expuestas hasta el momento consideran pagos anuales y pagos continuos. A continuación se muestran algunos ejemplos de anualidades testamentarias pagaderas *m* veces al año.

Sea $a_{y|x}^{(m)}$ una anualidad testamentaria pagadera a (x) *m* veces al año, a partir de la *m*-ésima parte del año en que muere (y), el valor presente actuarial es

$$a_{y|x}^{(m)} = a_x^{(m)} - a_{xy}^{(m)} \tag{3.8.29}$$

Aproximando las anualidades de vida individual y de vida conjunta pagaderas *m* veces al año a través de la fórmula de Woolhouse presentada en la sección 2.20 se obtiene

$$a_{y|x}^{(m)} \cong a_x + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu(x)+\delta\right) - a_{xy} - \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\mu(x)+\mu(y)+\delta\right]$$
$$\cong a_x - a_{xy} + \frac{m^2-1}{12m^2}\mu(y) \tag{3.8.30}$$

si *m* tiende a infinito

$$\bar{a}_{y|x} = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy} \cong a_x - a_y + \tfrac{1}{12}\mu(y) \tag{3.8.31}$$

Ejemplo 3.8.4: Obtener el valor presente actuarial de una anualidad testamentaria que paga a la muerte de (52) la cantidad de 70 u.m por semestre, durante la existencia de (47). Los pagos se realizan al final del periodo y la tasa de interés considerada es del 7%.

Por (3.8.30) se tiene

$$a_{52\,|47}^{(2)} \cong a_{47} - a_{52:47} + \frac{m^2-1}{12m^2}\mu(52)$$

de tablas

$$a_{52} = 11.425802$$
$$a_{52:47} = 10.942832$$
$$\mu(52) = 0.07639$$

evaluando

$$a_{52\,|47}^{(2)} \cong 70\left(\left(11.425803 - 10.942832\right) + \frac{2^2-1}{12\left(2\right)^2}\left(0.007639\right) \right)$$

$$\cong 33.841360$$

El símbolo $\hat{a}$ es utilizado para denotar ana anualidad testamentaria en la que los pagos se realizan en forma periódica y el periodo de pago se mide a partir de la muerte. Tal es el caso de una anualidad pagadera m veces al año a $\left(x\right)$, cuyo primer pago de $1/m$ se realiza al final del $1/m$-ésimo de año, momento en que ocurre la muerte de $\left(y\right)$

$$\hat{a}_{y|x}^{(m)} = \int_0^{\infty} v^t\ {}_t p_{xy} \mu\left(y+t\right) a_{x+t}^{(m)} dt \tag{3.8.32}$$

Despejando a_x de la expresión $\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2}$

y sustituyendo en

$$a_x^{(m)} = a_x + \tfrac{m-1}{2m}$$

se obtiene

$$a_x^{(m)} = \bar{a}_x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{m-1}{2m} = \bar{a}_x - \tfrac{1}{2m}$$

por lo tanto

$$\hat{a}_{y|x}^{(m)} \cong \int_0^{\infty} v^t\ {}_t p_{xy} \mu\left(y+t\right)\left[\bar{a}_{x+t} - \tfrac{1}{2m}\right] dt$$

$$= \bar{a}_{y|x} - \tfrac{1}{2m} \bar{A}_{\overset{1}{x}y}$$

Usando (3.8.31)

$$\cong a_x - a_{xy} + \tfrac{1}{12}\mu\left(y\right) - \tfrac{1}{2m}\bar{A}_{\overset{1}{x}y} \tag{3.8.33}$$

En los ejemplos anteriores se puede observar que las anualidades testamentarias pagaderas m veces se definen como $a_x - a_{xy}$ más un término de corrección. En la práctica ese término es ignorado por ser muy pequeño, obteniéndose la siguiente relación

$$a_{v|u}^{(m)} \cong \bar{a}_{v|u} \cong \hat{a}_{v|u}^{(m)} \cong a_{v|u} = a_u - a_{uv} \tag{3.8.34}$$

La expresión (3.8.34) puede ser utiliza cuando ninguno de los estatus contenga un término cierto. Cuando existe término cierto la corrección es importante y no debe ser eliminada.

3.9 Anualidades Testamentarias Compuestas

Una anualidad testamentaria compuesta, es aquella en donde determinados eventos contingentes deben ocurrir en el orden indicado para iniciar el pago de la misma. Estas anualidades constituyen la contraparte de los seguros contingentes compuestos.

$\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x}$ denota el valor presente de una anualidad continua, unitaria, pagadera a (x) al ocurrir la muerte de (y), si (y) muere primero que (z). Este beneficio puede ser visto como un seguro contingente sobre (y), cuyo monto del seguro es igual a valor presente de una anualidad continua para (x). Es decir

$$\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x} = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_{xyz}\, \mu(y+t)\, \bar{a}_{x+t}\, dt \tag{3.9.1}$$

También puede ser considerada como una anualidad cuyos pagos se realizan en el tiempo t dado que (x) esta con vida y (y) ha muerto antes que (z)

$$\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x} = \int_0^\infty {}_t p_y\, \mu(y+t)\, {}_t p_z \left(\int_0^\infty v^s\, {}_s p_x\, ds \right) dt \tag{3.9.2}$$

$$= \int_0^\infty v^s\, {}_s p_x \left[\int_0^\infty {}_t p_y\, \mu(y+t)\, {}_t p_z\, dt \right] ds$$

$$= \int_0^\infty v^s\, {}_s p_x\, {}_s q_{\overset{1}{y}z}\, ds \tag{3.9.3}$$

El valor de $\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x}$ puede ser obtenido de la relación

$$\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x} + \bar{a}_{y\overset{1}{z}|x} = \bar{a}_{yz|x} \tag{3.9.4}$$

$\bar{a}_{\overset{2}{y}z|x}$ denota el valor presente de una anualidad para (x) comenzando los pagos a la muerte de (y), siempre que (y) muera después que (z)

$$\bar{a}_{\overset{2}{y}z|x} = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_{xy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu(y+t)\, \bar{a}_{x+t}\, dt \tag{3.9.5}$$

$$= \bar{a}_{y|x} - \bar{a}_{\overset{1}{y}z|x} \tag{3.9.6}$$

de donde

$$\bar{a}_{\overset{1}{y}z|x} + \bar{a}_{\overset{2}{y}z|x} = \bar{a}_{y|z} \tag{3.9.7}$$

$\bar{a}_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z|w}$ representa el valor presente de una anualidad pagadera a (w) si las vidas (y), (x) y (z) fallecen en ese orden

$$\bar{a}_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z|w} = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_{wxz} \left[1 - {}_t p_y\right] \mu(x+t)\, \bar{a}_{w+t}\, dt \tag{3.9.8}$$

$$= \bar{a}^{\ 1}_{xz|w} - \bar{a}^{\ 1}_{xyz|w} \tag{3.9.9}$$

$\bar{a}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}|y}$ representa una anualidad testamentaria pagadera a (y) a la muerte de (x), si esto ocurre antes de transcurridos *n* años.

$$\bar{a}_{\overset{1}{x:\overline{n}|}|y} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_y \, {}_t q_{\overset{1}{x:\overline{n}|}} dt \tag{3.9.10}$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_t p_y \left[\int_0^t {}_s p_x \mu(x+s) ds \right] dt + \int_n^{\infty} v^t \, {}_t p_y \left[\int_0^n {}_s p_x \mu(x+s) ds \right] dt$$

$$= \int_0^n v^t \, {}_t p_y \left(1 - {}_t p_x\right) dt + \left(1 - {}_n p_x\right) \int_n^{\infty} v^t \, {}_t p_y dt$$

$$= \bar{a}_y - \bar{a}_{xy:\overline{n}|} - v^n {}_n p_{xy} \bar{a}_{y+n} \tag{3.9.11}$$

Ejemplo 3.9.1: Obtener una expresión para las siguientes anualidades:

a. Una anualidad testamentaria continua, pagadera a (w) al ocurrir la muerte de (x) en segundo o tercer lugar y (y) en primero

b. Una anualidad testamentaria continua, pagadera a (v) si (x) muere en tercer lugar y (y) en primero

c. Una anualidad testamentaria continua, pagadera a (v) al ocurrir los fallecimientos de $(z)(y)(x)(w)$, en ese orden

a. $$\bar{a}_{\overset{2:3}{x}\underset{1}{y}z|w} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{wxyz} \mu(y+t) \bar{a}_{x+t|w+t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{wxyz} \mu(y+t) \left[\bar{a}_{w+t} - \bar{a}_{x+t:w+t}\right] dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{wxyz} \mu(y+t) \bar{a}_{w+t} dt - \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{wxyz} \mu(y+t) \bar{a}_{x+t:w+t} dt$$

$$= \bar{a}_{x\overset{1}{y}z|w} - \bar{a}_{\overset{1}{y}z|xw}$$

b. $$\bar{a}_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}z|v} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{vxy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu(y+t) \bar{a}_{x+t|v+t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{vxy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu(y+t) \left[\bar{a}_{v+t} - \bar{a}_{x+t:v+t}\right] dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{vxy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu(y+t) \bar{a}_{v+t} dt - \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{vxy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu(y+t) \bar{a}_{x+t:v+t} dt$$

$$= \bar{a}_{x\underset{1}{y}\overset{2}{z}|v} - \bar{a}_{y\overset{2}{z}|xv}$$

$$= \bar{a}_{x\overset{1}{y}|v} - \bar{a}_{x\overset{1}{y}z|v} - \left[\bar{a}_{y|xv} - \bar{a}_{\overset{1}{y}z|xv}\right]$$

c. $$\bar{a}_{\overset{4}{w\,x}\underset{21}{yz}|v} = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{vwxy} \left(1 - {}_t p_z\right) \mu\left(y+t\right) \bar{a}_{\overline{\overset{2}{w+t:x+t}}|v+t}\, dt$$

No es necesario dar especial atención a las anualidades testamentarias compuestas para el caso discreto, ya que son aproximadamente los mismos valores que los obtenidos en el caso continuo.

3.10 Ejercicios

1. Expresar en términos de ${}_t D_j \quad j = 1,2,3,4$
   a. ${}_t p_{\overline{\overset{2}{wxyz}}}$
   b. ${}_t p_{\overline{\overset{[2]}{wxyz}}}$
2. Expresar ${}_t p_{\overline{\overset{2}{wxyz}}} - {}_t p_{\overline{\overset{[2]}{wxyz}}}$ en términos de ${}_t D_j$
3. Describir el evento indicado por las siguientes expresiones
   a. $${}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} - 3\left({}_t p_{wxy} + {}_t p_{wxz} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz}\right) + 6\,{}_t p_{wxyz}$$
   b. $${}_t p_w + {}_t p_x + {}_t p_y + {}_t p_z - 2\left({}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz}\right)$$
   $$+4\left({}_t p_{wxy} + {}_t p_{wxz} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz}\right) - 8\,{}_t p_{wxyz}$$

4. Expresar el valor presente actuarial de una anualidad unitaria, pagadera al final del año, durante la existencia de (w) y al menos una de las vidas $(x),(y)$ y (z) .

5. Expresar en términos de anualidades conjuntas, el valor presente actuarial de una anualidad unitaria, pagadera al final del año si exactamente 3 de las 4 vidas $(w),(x),(y)$ y (z) están con vida.

6. Expresar el valor presente actuarial de

   a. Una anualidad unitaria, pagadera al final de cada año, mientras al menos dos de las tres vidas $(30),(40)$ y (50) estén con vida.

   b. Un seguro de 10,000 unidades monetarias, pagadero al final del año del segundo fallecimiento de entre $(30),(40)$ y (50).

7. Una anualidad inmediata de último sobreviviente, paga 10 unidades monetarias por año, durante la existencia de las tres vidas $(x),(y)$ y (z), 8 mientras dos vivan y 6 unidades mientras sólo una sobreviva. Calcular el valor presente actuarial de

a. Todos los pagos hechos
b. Todos los pagos hechos a (x)

8. Expresar $A_{\overline{\overline{wx:yz}}}$ a través de anualidades de vida conjunta
9. Describir el beneficio del valor presente actuarial denotado por $A_{\overline{x:\overline{n|}}}$
10. Desarrollar una expresión en términos de anualidades de vida conjunta e individual, para el valor presente actuarial de una anualidad inmediata que paga mensualmente 1000 unidades monetarias si
    a. Exactamente una de las vidas (40) y (35) sobrevive durante los siguientes 25 años
    b. Mientras al menos una de las vidas (40) y (35) sobreviva a una edad menor de los 65 años

11. Expresar en términos de anualidades ciertas, individuales y de vida conjunta las siguientes expresiones

    a. $\bar{a}_{\overline{\overline{x:y:\overline{n|}}}}$
    b. $\bar{a}_{\overline{\overline{(25:\overline{40|}):\overline{30|}}}}$

12. Demostrar por razonamiento general que ${}_nq_{\overset{1}{x}y} = {}_nq_{x\overset{2}{y}} + {}_nq_x\,{}_np_y$ ¿cuando $n \to \infty$, en qué se transforma la ecuación?

13. Mostrar que ${}_\infty q_{\overline{xx}:\overset{2}{x}} = \int_0^\infty \left({}_tp_x + {}_tp_x - {}_tp_{xx} \right) {}_tp_x \mu(x+t)\,dt$

14. Dadas tres vidas A, B y C, todas de edad (x). Escribir en términos de ${}_np_x$, la probabilidad de que A y B mueran dentro de *n* años. A precedida por B y que C sobreviva *n* años

15. Expresar ${}_\infty q_{wx\overset{2}{y}z}$ en términos de probabilidades contingentes sobre una vida

16. Demostrar que el valor presente actuarial de un seguro unitario, pagadero al final del año en que muere (x), considerando que (y) sobrevive al tiempo de pago, puede ser expresado como

$$vp_y\ddot{a}_{x:y+a} - a_{xy}$$

17. Demostrar que $A_{\overset{1}{x}y} - A_{x\overset{2}{y}} = A_{xy} - A_y$
18. Expresar en términos de un seguro dotal puro y un seguro contingente a la primera muerte, el valor presente actuarial de un seguro unitario, pagadero a la muerte de (x), si esta ocurre *n* años después de la muerte de (y).
19. Expresar en términos de valor presente actuarial de seguros contingentes a la primera muerte y de vida individual, la Prima Neta Única de un seguro unitario, pagadero al momento en

que muera (50), considerando que (20) ha muerto en ese momento o ha alcanzado la edad (40)

20. Demostrar que $\int_0^\infty v^t\, {}_t p_{xy}\mu(y+t)\, {}_nE_{x+t}dt = \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{\overset{1}{x+n}:y}$
21. Cuales de las siguientes son correctas. Corregir si es necesario

    a. $\bar{A}_{\overline{wxyz}}^{1} = \bar{A}^1_{wxyz} + \bar{A}^{1}_{wxyz} + A^{1}_{wxyz} + \bar{A}^{1}_{wxyz}$
    b. $\bar{A}_{\overline{wxyz}}^{3} = \bar{A}^2_{wxyz} + \bar{A}^{2}_{wxyz} + A^{2}_{wxyz} + \bar{A}^{2}_{wxyz}$
    c. $\bar{A}^{3}_{wxyz} = \bar{A}^{1}_{wz} + \bar{A}^{1}_{xz} + A^{1}_{yz} - \left(\bar{A}^{1}_{wxz} + \bar{A}^{1}_{wyz} + \bar{A}^{1}_{wyz}\right) + \bar{A}^{1}_{wxyz}$

22. Obtener la probabilidad de que tres vidas $(x)(y)$ y (z) mueran en ese orden, (y) con 5 años de diferencia de (x) y (z) con 10 años de diferencia de (y).

23. Escribir como integral definida. El valor presente actuarial de un seguro pagadero al fallecimiento de (x), si (x) sobrevive a (y). El monto del beneficio es igual al tiempo transcurrido entre la firma de la póliza y la fecha en que muere (y).

24. En una tabla de mortalidad que sigue la ley de Makeham con $A = 0.003$ y $C^{10} = 3$

    a. Si $\overset{0}{e}_{40:50} = 17$ calcular ${}_\infty q^{\,1}_{40:50}$
    b. Expresar $\bar{A}^{1}_{40:50}$ en términos de $\bar{A}_{40:50}$ y $\bar{a}_{40:50}$

25. Expresar $\bar{A}^3_{xyzw}$ en función de seguros contingentes a la primera muerte
26. Demostrar que ${}_nq^{1}_{wxy} = {}_nq^{1}_{wxyz} + {}_nq^{2}_{wxy\overset{}{\underset{1}{z}}}$
27. Expresar ${}_\infty q^{2}_{wxyz}$
    a. Como una integral definida
    b. En términos de probabilidades contingentes

28. Cuales de los siguientes resultados son correctos. Corregir los necesarios

    a. $\bar{A}^{3}_{\underset{1\ 2}{wxyz}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tq_w\, {}_tp_{yxz}\mu(x+t)\bar{A}_{y+t}dt$

    b. $\int_0^{10}\left(1-{}_{t+10}P_{50}\right){}_tp_{60}\mu(60+t)dt + \int_{10}^\infty\left({}_{t-10}p_{50} - {}_{t+10}p_{50}\right){}_tp_{60}\mu(60+t)dt$

    $$= \int_0^{10}\left(1-{}_{t-10}p_{60}\right)_t p_{50}\mu(50+t)dt + \int_{10}^\infty\left({}_{t-10}p_{60} - {}_{t+10}p_{60}\right){}_tp_{50}\mu(50+t)dt$$

    c. ${}_{30}q^{1}_{40:50:60} + {}_{30}q^{2}_{40:50:60} = {}_{30}q^{1}_{\overline{40:50:60}}$

29. Muestre que

a. $\bar{A}_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \bar{A}_{y\overset{2}{z}} + \bar{A}_{x\underset{1}{y}\overset{2:3}{z}}$

b. $\bar{A}_{\underset{1}{w}\overset{2}{x}yz} = \bar{A}_{\overset{1}{x}yz} - \bar{A}_{w\overset{1}{x}yz}$

30. Expresar en términos de anualidades de vida individual

a. $a_{z|\overline{xy}}$

b. $a_{\overline{yz}|wx}$

31. Encontrar la probabilidad de que al menos una de entre (x) y (y) fallezcan en el transcurso del $n+1$-ésimo año. ¿La expresión encontrada es igual a ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$?

32. Expresar el valor presente actuarial de una anualidad unitaria, pagadera al final de cada año hasta que el sobreviviente de (25) o de (30) alcance la edad (50), o hasta su muerte si ambos fallecen antes de alcanzar esa edad.

33. Simplificar e interpretar $\bar{A}_{x:\overset{2}{\overline{n}|}}$

34. Dada la probabilidad de ${}_{25}p_{25:50} = 0.5108$ y ${}_{15}p_{25} = 0.9727$, calcular la probabilidad de que una persona de edad (40) sobreviva a edad (75)

35. a. Encontrar la PNU de un seguro de 1000 u.m. pagaderas al final del año en que ocurra la segunda muerte de $(20),(26),(28),(29)$ considerando la tabla de anualidades de vidas conjuntas que se presenta a continuación, calculada al 7%.

b. Calcular el valor presente actuarial de una anualidad pagadera la final de cada año mientras exactamente tres de las vidas $(20),(26),(28)$ y (29) estén con vida, calculada al 7%

Edad de los componentes	**PNU de Anualidad vencida**
26:20:28	11.8265
29:26:20	11.7793
28:29:26	11.5328
20:28:29	11.6981
29:26:28:20	11.5259

36. Obtener una expresión de vidas conjuntas para las siguientes anualidades y evaluarlas

a. $\ddot{a}_{\overline{40:47:52:55}}^{[4]}$

b. $\ddot{a}_{\overline{40:47:52:55}}^{3}$

c. $\ddot{a}_{\overline{40:47:52:55}}^{[3]}$

37. Calcular la PNU de $A_{\overline{(40:47)(52:55)}}$ un seguro de último sobreviviente para los estatus de vida conjunta $(40:47)$ y $(52:55)$

4. MODELOS DE DECREMENTO MÚLTIPLE

4.1. Introducción

En los anteriores capítulos se desarrollaron modelos matemáticos en donde, la única causa considerada como salida del estatus es la muerte. En el capítulo 1 se retomó la incidencia de la muerte sobre una vida. En el capítulo 2 y 3 se analizó la disolución de estatus, integrados por *m* vidas donde la causa de disolución es la muerte. Sin embargo, en un grupo no todas las salidas se dan por fallecimiento.

Un seguro puede cancelarse por muerte, por interrupción del pago de las primas, por fin del periodo de cobertura o por cancelación del contrato. Existen pólizas que contemplan beneficios superiores si la muerte fue accidental, o si un accidente deriva en invalidez. La incidencia de más de un decremento es el precedente para el estudio de los planes de pensiones, en donde la salida de un miembro puede darse por muerte, invalidez, jubilación o salida.

Los modelos que consideran más de un decremento, son estudiados por la teoría de decrementos múltiples y su desarrollo se plantea en términos de una vida. Las variables aleatorias (v.a) que se utilizan son $T(x)=T$ y $J(x)=J$. *T*, al igual que en los capítulos anteriores, es una v.a. continua que denota el tiempo de permanencia en un estatus específico. J es una (v.a) discreta que denota las causas de decremento, por conveniencia las causas de decremento son numeradas de 1 a *m*.

En este capítulo se presenta la teoría para estudiar la distribución de las variables aleatorias T y J con respecto a una sola vida. También se presentan los elementos que integran una tabla de decremento múltiple, así como su construcción, ya sea a partir de probabilidades de decremento o bien a través de las tasas absolutas de decremento.

A diferencia de los capítulos anteriores, los temas se desarrollan primero con el enfoque probabilista para obtener las expresiones generales con mayor claridad. Una vez definidos los conceptos por este método se presentan con el enfoque determinista.

4.2 Probabilidades de Decremento Múltiple

El modelo de decremento múltiple es un modelo matemático que considera un grupo de vidas suficientemente grande sujeto a diversas causas de salida que operan continuamente. El grupo de miembros considerado constituye un grupo cerrado, no hay nuevas entradas. La notación utilizada en este capítulo en muy similar a la utilizada en los capítulos anteriores. La diferencia radica en el uso de supraíndices, que denotan la causa de decremento. A continuación se muestra esta notación.

$l_x^{(\tau)}$ indica el número total de miembros de edad (x) en un grupo, sujetos a la influencia de *m* causas de salida.
${}_n d_x^{(j)}$ indica el número de salidas por la causa *j*, entre las edades x y $x+n$
${}_n d_x^{(\tau)}$ representa el número total de salidas por todas las causas, entre las edades x y $x+n$
${}_n q_x^{(j)}$ denota la probabilidad de que (x) deje el grupo por la causa *j* entre las edades *x* y *x*+*n*

${}_nq_x^{(\tau)}$ indica la probabilidad de que (x) deje el grupo, por cualquier causa, a lo largo de *n* años
${}_np_x^{(\tau)}$ representa la probabilidad de que (x) permanezca en el grupo durante *n* años

Como es habitual, cuando $n=1$ no se escribe el subíndice.

Las v.a. que intervienen en un modelo de múltiples decrementos son: $T(x)$ o T que denota el tiempo de salida de (x) de estatus o estado específico y $J(x)$ o J que denota la causa del decremento. J es una v.a. discreta. $J(x)=1,2,\cdots,m$, donde m es el número total de decrementos considerados.

Con la función de densidad de probabilidad conjunta de T y J, $f_{T,J}(t,j)$, se obtienen las probabilidades de decremento por una casa determinada, en un periodo de tiempo específico. Tal es el caso de la probabilidad de que la vida (x) muera antes del tiempo *t*, debido a la causa *j*. Como se requiere que ambos eventos ocurran, se denota con el evento intersección

$$\Pr\{(0<T\le t)\cap(J=j)\}=\int_0^t f_{T,J}(t,j)\,ds={}_tq_x^{(j)} \qquad t\ge 0 \quad j=1,2,\ldots,m \tag{4.2.1}$$

La función de densidad de probabilidad marginal de *J*, $f_J(j)$, denota la probabilidad de que una vida (x), salga del grupo por la causa *j*, en cualquier momento. Es decir

$$\begin{aligned}\Pr\{(0<T\le\infty)\cap(J=j)\}&=\int_0^\infty f_{T,J}(s,j)\,ds\\&={}_\infty q_x^{(j)}\\&=f_J(j) \qquad j=1,2,\ldots,m\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Y se cumple que $\sum_{j=1}^{m} f_J(j)=1$

Por otro lado la función de densidad de probabilidad marginal de *T*, $f_T(t)$, denota la probabilidad de decremento para todas las causas

$$f_T(t)=\sum_{j=1}^{m} f_{T,J}(t,j) \tag{4.2.3}$$

Y se cumple que

$$\int_0^\infty f_T(t)\,dt=1$$

La función de distribución de T con $t\ge 0$ se denota por $F_T(t)$

$$\begin{aligned}\Pr[T\le t]&=\int_0^t f_T(s)\,ds\\&=F_T(t)\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

La notación para esta función, es similar a la utilizada para vidas individuales en función de la v.a. T. La probabilidad de que una vida (x) salga del grupo antes del tiempo *t*, se denota por ${}_tq_x^{(\tau)}$. El supraíndice (τ) se refiere a todas las causas de decremento. De manera que

$$\Pr\{T \le t\} = F_T(t) = \int_0^t f_T(s)\,ds = {}_tq_x^{(\tau)} \qquad (4.2.5)$$

La probabilidad de que (x) salga de grupo involucra a las *m* causas a las que esta expuesto. Retomando (4.2.5)

$${}_tq_x^{(\tau)} = \int_0^t f_T(s)ds$$

por (4.2.3)

$$= \int_0^t \sum_{j=1}^m f_{T,J}(s,j)ds$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds$$

utilizando (4.2.2)

$$= \sum_{j=1}^m {}_tq_x^{(j)} \qquad (4.2.6)$$

resultado que se obtiene al suponer que las causas de decremento son mutuamente excluyentes.

Análogamente, ${}_tp_x^{(\tau)}$ representa la probabilidad de que (x) permanezca en el grupo de sobrevivientes durante *t* años

$$\Pr\{T > t\} = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \qquad (4.2.7)$$

Finalmente, la probabilidad de decremento en el periodo (a,b), debido a todas las causas es

$$\Pr\{a < T \le b\} = \sum_{j=1}^m \int_a^b f_{T,J}(t,j)\,dt \qquad (4.2.8)$$

Los ejercicios para este apartado se desarrollan en la siguiente sección, ya que se requiere hacer uso de las fuerzas de decremento para la obtención de las funciones presentadas arriba.

4.3 Fuerza de Decremento

En los modelos donde la única causa de decremento es la muerte, se considera la fuerza de mortalidad. En las funciones de decrementos múltiples se consideran tantas fuerzas de decremento como causas existentes, así como la fuerza de decremento total, denotada por $\mu_x^{(\tau)}(t)$. La fuerza de decremento debido a la causa *j*, se denotada por $\mu_x^{(j)}(t)$. Para su desarrollo, se recurre al concepto de fuerza de mortalidad para una vida y se hace uso de las funciones de densidad y distribución obtenidas arriba.

La fuerza de decremento total a edad $(x+t)$, representada por $\mu_x^{(\tau)}(t)$ se define como

$$\mu_x^{(\tau)}(t)=\frac{f_T(t)}{1-F_T(t)} \tag{4.3.1}$$

$$=\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_t q_x^{(\tau)} \tag{4.3.2}$$

$$=-\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_t p_x^{(\tau)}$$

$$=-\frac{d}{dt}\log_t p_x^{(\tau)} \tag{4.3.3}$$

De donde

$${}_t p_x^{(\tau)}=e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds} \tag{4.3.4}$$

La fuerza de decremento debido a la causa *j*, $\mu_x^{(j)}(t)$, se define a diferencia de (4.3.1) en función de la densidad de probabilidad conjunta $f_{T,J}(t,j)$, y la función de sobrevivencia al tiempo T, $1-F_T(t)$. Por lo tanto para una vida (x) la fuerza de decremento a la edad $(x+t)$ debido a la causa *j*, es

$$\mu_x^{(j)}(t)=\frac{f_{T,J}(t,j)}{1-F_T(t)} \tag{4.3.5}$$

$$=\frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

de (4.2.1)

$$\mu_x^{(i)}(t)=\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_t q_x^{(j)} \tag{4.3.6}$$

Ya se han obtenido las expresiones de la fuerza de decremento total $\mu_x^{(\tau)}(t)$ y de la fuerza de decremento por la causa *j*, $\mu_x^{(j)}(t)$. Desarrollando (4.3.2), se observa la relación entre ambas.

Retomando (4.3.2)

$$\mu_x^{(\tau)}(t)=\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_t q_x^{(\tau)}$$

por (4.2.6)

$$=\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{m}{}_t q_x^{(j)}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_t q_x^{(j)}$$

de (4.3.6)

$$=\sum_{j=1}^{m}\mu_x^{(j)}(t) \tag{4.3.7}$$

Es decir, la fuerza total de decrementos es la suma de las fuerzas de decremento debido a las m causas.

Despejando la probabilidad de decremento por la causa j en el periodo t y dt de (4.3.5), se obtiene

$$f_{T,J}(t,j)dt = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad t \geq 0 \tag{4.3.8}$$

donde se puede ver que, la probabilidad de decremento entre t y $t+dt$, debido a la causa j, es igual a la probabilidad de que (x) permanezca en el estatus dado hasta el tiempo t, $\left({}_t p_x^{(\tau)}\right)$, por la probabilidad condicional, $\mu_x^{(j)}(t)$, de que el decremento de (x) ocurra entre t y dt debido a la causa j, dado que este no ha ocurrido antes del tiempo t.

Integrando (4.3.8) en ambos lados, se obtiene la probabilidad de que (x) salga del grupo al alcanzar la edad $(x+t)$ debido a la causa j

$$\begin{aligned} \int_0^t f_{T,J}(s,j)\,ds &= \int_0^t {}_s p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s)\,ds \\ &= {}_t q_x^{(j)} \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Finalmente la función de probabilidad condicional de J, dado el decremento al tiempo t, es

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} = \frac{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)}{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)} = \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)} \tag{4.3.10}$$

Al igual que en capítulo 1, la v.a. K denota los años completos antes del decremento de (x), y se define como el entero más grande menor que T. La función de distribución conjunta de K y J es

$$\begin{aligned} \Pr\{(K=k)\cap(J=j)\} &= \Pr\{(k<T<k+1)\cap(J=j)\} \\ &= \int_k^{k+1} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt \qquad (4.3.11) \\ &= {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k}^{(j)}(s)\,ds \\ &= {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \qquad (4.3.12) \end{aligned}$$

donde
$$q_{x+k}^{(j)} = \int_0^1 {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k}^{(j)}(s)\,ds \tag{4.3.13}$$

$q_{x+k}^{(\tau)}$ denota la probabilidad de decremento entre las edades $x+k$ y $x+k+1$, dada la sobrevivencia a la edad $x+k$, sin importar la causa de salida

$$q_{x+k}^{(\tau)} = \int_0^1 {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k}^{(\tau)}(s)\,ds$$

$$= \int_0^1 {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+k}^{(j)}(s) ds$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 {}_s p_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+k}^{(j)}(s) ds$$

por (4.3.9)

$$= \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)} \tag{4.3.14}$$

La teoría de decrementos múltiples, también es conocida como teoría de competencia entre riesgos. De (4.3.13) se puede observar que la probabilidad de decremento entre las edades $(x+k)$ y $(x+k+1)$, debido a la causa *j*, depende de ${}_s p_{x+k}^{(\tau)}$ con $0 \le s \le 1$ y por lo tanto de todas las fuerzas componentes. Cuando se incrementan las fuerzas para otros decrementos ${}_s p_{x+k}^{(\tau)}$ se reduce y $q_{x+k}^{(j)}$ también disminuye.

Resumiendo

f.d.p. conjunta de T y J	$f_{T,J}(t,j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)$
f.d.p. marginal de J	$f_J(j) = {}_\infty q_x^{(j)}$
f.d.p. marginal de T	$f_T(t) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)$

Ejemplo 4.2.1: Calcular las funciones de densidad de probabilidad conjunta, marginal y condicional, para un modelo de doble decremento. Considere que las fuerzas de decremento $\mu_x^{(1)}$ y $\mu_x^{(2)}$ están dadas por

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{3}{11j(100-x)}$$

Iniciemos por calcular la fuerza de decremento total

$$\mu_x^{(\tau)}(s) = \mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s)$$
$$= \frac{9}{22(100-x)}$$

la función se sobrevivencia para todas las causas es

$${}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \tfrac{9}{22(100-x)} ds\right)$$

como $\mu_x^{(\tau)}(s)$ es una constante, entonces

$${}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left(-t\mu_x^{(\tau)}(s)\right) = \exp\left(-t\frac{9}{22(100-x)}\right)$$

una vez que contamos con las $\mu_x^{(\tau)}(s)$ y ${}_t p_x^{(\tau)}$ es posible calcular las funciones solicitadas

La función de densidad de probabilidad conjunta de T y J es

$$f_{T,J}(t,j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{3}{11(100-x)} \exp\left(-t\dfrac{9}{22(100-x)}\right) & t \geq 0,\ j=1 \\[2ex] \dfrac{3}{22(100-x)} \exp\left(-t\dfrac{9}{22(100-x)}\right) & t \geq 0,\ j=2 \end{cases}$$

La función de densidad de probabilidad marginal de T es

$$f_T(t) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)$$
$$= \left(\frac{9}{22(100-x)}\right) \exp\left(-t\frac{9}{22(100-x)}\right)$$

La función de densidad de probabilidad condicional de J, dado que el decremento ocurre en el tiempo *t*, esta dado por (4.3.10)

$$f_{J|T}(j|t) = \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)}$$

de manera que

$$f_{J|T}(1|t) = \frac{\frac{3}{11(100-x)}}{\frac{9}{22(100-x)}} = \frac{22}{33}$$

$$f_{J|T}(2|t) = \frac{\frac{3}{22(100-x)}}{\frac{9}{22(100-x)}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 4.3.2.: Obtener la función de densidad de probabilidad conjunta, así como las funciones de densidad de probabilidad marginal de T y K. El modelo es de doble salida y las fuerzas de decremento instantánea para cada salida están dadas por:

$$\mu_{x+t}^{(1)}(t) = \frac{t}{200} \qquad t \geq 0$$

$$\mu_x^{(2)}(t) = \frac{1}{200} \qquad t \geq 0$$

Por lo señalado en (4.3.8) $f_{T,J}(t,j)dt = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt \quad j = 1,2,\ldots,m$ para $t \geq 0$, de manera que comencemos por calcular la fuerza de decremento instantánea total

$$\mu_x^{\tau}(s) = \mu_x^1(s) + \mu_x^2(s) = \frac{s+1}{200}$$

Una vez que se ha obtenido $\mu_x^{(\tau)}(s)$, se calcula la probabilidad de sobrevivencia

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x^{(\tau)} &= \exp\left[-\int_0^t \tfrac{s+1}{200}\, ds\right] \\
&= \exp\left[-\tfrac{r^2+r}{400}\right] \qquad r \geq 0
\end{aligned}
$$

La función de densidad de probabilidad conjunta de T y J es

$$
f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} \dfrac{t}{200}\exp\left[-\tfrac{t^2+t}{400}\right] & \text{para } t \geq 0 \text{ y } j = 1 \\ \dfrac{1}{200}\exp\left[-\tfrac{t^2+t}{400}\right] & \text{para } t \geq 0 \text{ y } j = 2 \end{cases}
$$

Por (4.2.3), la función de densidad de probabilidad marginal de T es

$$
f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \frac{t+1}{200}\exp\left[-\tfrac{r^2+2r}{400}\right] \quad \text{para } r \geq 0
$$

Por (4.2.2), tenemos que la función de densidad de probabilidad de J es

$$
f_J(j) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{T,J}(t,1)\,dt & \text{para } j = 1 \\ \int_0^\infty f_{T,J}(t,2)\,dt & \text{para } j = 2 \end{cases}
$$

4.4 Tabla de Decremento Múltiple

En las secciones anteriores se introdujeron algunas de las expresiones utilizadas para la construcción de una Tabla de Decremento Múltiple, las restantes se obtienen a continuación. Una tabla de decrementos múltiples se genera, a partir de un grupo inicial cerrado, tal como una tabla mortalidad para vidas individuales. Para definir las probabilidades de decremento múltiple, se considera un grupo de vidas de edad (a) denotado por $l_a^{(\tau)}$. La función de densidad conjunta de T y J para este grupo es

$$
f_{T,J}(t,j) = {}_t p_a^{(\tau)} \mu_a^{(j)}(t) \qquad t \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,m \tag{4.4.1}
$$

Considérese la v.a $L^{(\tau)}(x)$ que denota el número de sobrevivientes de edad *x* de entre las $l_a^{(\tau)}$ vidas originales de edad a. Análogo a la teoría de vida individual

$$
\begin{aligned}
l_x^{(\tau)} &= E\left[L^{(\tau)}(x)\right] \\
&= l_a^{(\tau)}\, {}_{x-a} p_a^{(\tau)} && (4.4.2) \\
&= l_a^{(\tau)} \exp\left[-\int_a^x \mu_a^{(\tau)}(y-a)\,dy\right] && (4.4.3)
\end{aligned}
$$

Es decir, el número de sobrevivientes a la edad *x* es igual al grupo inicial $l_a^{(\tau)}$, sujeto a las fuerzas de decremento $\mu_a^{(\tau)}(y-a)$ $y \geq a$.

Para obtener el número de decrementos registrados en n años por la causa j, ${}_n d_x^{(j)}$, hay que considerar la v.a. ${}_n D_x^{(j)}$. Esta denota el número de vidas que salen del grupo entre las edades x y $x+n$ con $x \geq a$ por la causa j. De manera que

$$
\begin{aligned}
{}_n d_x^{(j)} &= E\left[{}_n D_x^{(j)}\right] \\
&= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_t\, p_a^{(\tau)} \mu_a^{(j)}(t)dt
\end{aligned} \tag{4.4.4}
$$

Para $n = 1,\;\; x = a\;$ y $\;s = t - (x-a)$ y por (4.4.1) y (4.4.2)

$$
\begin{aligned}
d_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_{s+x-a}\, p_a^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s)\,ds \\
&= l_a^{(\tau)}\; {}_{x-a} p_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_s\, p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s)\,ds \\
&= l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}
\end{aligned}
$$

Al despejar $q_x^{(j)}$ se observa que es la proporción de los $l_x^{(\tau)}$ que sobreviven a la edad x y que salen del grupo debido a la causa j antes de cumplir la edad $x+1$.

Como el total de decrementos registrados durante n años debe ser igual al número de decrementos ocurridos durante ese periodo, considerando todas las causas, entonces

$$
{}_n D_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n D_x^{(j)} \tag{4.4.5}
$$

y

$$
{}_n d_x^{(\tau)} = E\left[{}_n D_x^{(\tau)}\right] = \sum_{j=1}^{m} {}_n d_x^{(j)} \tag{4.4.6}
$$

por (4.4.4)

$$
\begin{aligned}
{}_n d_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_t\, p_a^{(\tau)} \mu_a^{(j)}(t)dt \\
&= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_t\, p_a^{(\tau)} \mu_a^{(\tau)}(t)dt
\end{aligned} \tag{4.4.7}
$$

Otro camino para obtener los decrementos totales ocurridos en un periodo de tiempo, es a través de la diferencia entre las vidas que llegan a la edad x y las que llegan a la edad $x+1$. Es decir

$$
d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \tag{4.4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&= l_x^{(\tau)} \left(1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \right) \\
&= l_x^{(\tau)} \left\{ 1 - \exp\left[- \int_x^{x+1} \mu_y^{(\tau)} dy \right] \right\} \\
&= l_x^{(\tau)} \left[1 - p_x^{(\tau)} \right] \\
&= l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}
\end{aligned} \tag{4.4.9}
$$

Hay que hacer la distinción entre las fuerzas instantáneas de decremento y las probabilidades de decremento. Las funciones de probabilidad implican un intervalo de tiempo, en el cual el grupo se reduce por las causas de decremento. Por lo tanto el número de miembros que dejan el grupo por la causa (j), no es independiente de la magnitud de las salidas por las otras causas. Si el efecto de estas fuerzas es mayor, menor es el número de salidas por la causa (j), y menor será la probabilidad de salida por la causa (j).

En las siguientes expresiones se observar que la probabilidad de salida por la causa individual (j) depende de la fuerza instantánea de decremento de todas las demás causas

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(s)\, ds \tag{4.4.10}$$

sustituyendo ${}_sp_x^{(\tau)}$ de (4.3.4)

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds} \mu_x^{(j)}(s)\, ds \tag{4.4.11}$$

Como $\mu_x^{(j)}$ no se refiere a ningún intervalo de tiempo, no se ve afectado por la influencia de las demás causas. Por lo tanto las fuerzas instantáneas de decremento son funciones independientes, a diferencia de la probabilidad de decremento, las cuales dependen entre si.

Si se requieren los valores de $\mu_x^{(j)}$, se pueden estimar de la tabla de salidas múltiples a través de fórmulas de aproximación en función de los $d_x^{(j)}$ que se encuentran comúnmente en la tablas de salidas múltiples. Las siguientes aproximaciones se obtienen al suponer que l_x es una función de segundo y cuarto grado respectivamente, tal como se hizo en (1.5.18) y (1.5.20).

$$\mu_x^{(j)} \approx \frac{d_{x-1}^{(j)} + d_x^{(j)}}{2l_x^{(\tau)}} \tag{4.4.12}$$

$$\mu_x^{(j)} \approx \frac{7\left(d_{x-1}^{(j)} + d_x^{(j)}\right) - \left(d_{x-2}^{(j)} + d_{x+1}^{(j)}\right)}{12l_x^{(\tau)}} \tag{4.4.13}$$

El siguiente cuadro muestra las expresiones obtenidas hasta el momento, a partir de las cuales es posible construir una tabla de decrementos múltiple.

Cuadro 4.4.1

$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m d_x^{(j)}$	$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)}$	$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$	$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$
$l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)} = l_{x+1}^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m l_x^{(j)}$	$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{k=1}^m q_x^{(j)}$	$\mu_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_x^{(j)}$

Ejemplo 4.4.1: Obtener los valores correspondientes de $l_x^{(\tau)}$ y $d_x^{(j)}$ suponiendo el valor arbitrario $l_{65}^{(\tau)} = 1000$ a partir de las siguientes probabilidades de decremento

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.01	0.02
66	0.02	0.04
67	0.03	0.06
68	0.04	0.08
69	0.05	0.09
70	0.00	1.00

Para la realización de esta tabla de decremento se recurre al Cuadro 4.4.1. En el encabezado de cada columna de la Tabla de Decremento se muestra que expresión se utilizó para la obtención de la misma.

Tabla de Decremento

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)} = \sum_{k=1}^{m} q_x^{(j)}$	$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)} p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(2)}$
65	0.01	0.02	0.03	0.97	10000.00	2000.00	2000.00
66	0.02	0.04	0.06	0.94	9700.00	3880.00	3880.00
67	0.03	0.06	0.09	0.91	91180.00	5470.80	5470.80
68	0.04	0.08	0.12	0.88	82973.8	6637.90	6637.90
69	0.05	0.09	0.14	0.86	73016.94	6571.52	6571.52
70	0.00	1.00	1.00	0.00	62794.57	0.00	62794.57

Como verificación de los cálculos nótese que $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$

Ejemplo 4.4.2: Obtener las columnas para la fuerza de decremento por cada causa a partir de las aproximaciones (4.4.12) y (4.4.13)

Edad	Aproximación Con (4.4.12)	Aproximación con (4.4.12)	Aproximación con (4.4.13)	Aproximación con (4.4.13)
x	$\mu_x^{(1)}$	$\mu_x^{(2)}$	$\mu_x^{(1)}$	$\mu_x^{(4)}$
65	0.005000	0.010000	0.004217	0.008433
66	0.015155	0.030309	0.015330	0.030661
67	0.025638	0.051277	0.025964	0.051928
68	0.036484	0.072967	0.036949	0.074631
69	0.047727	0.090455	0.052560	0.027620
70	0.029070	0.552326	0.029510	0.635571

4.5 Tasas de Decremento Asociadas

De un modelo de decremento múltiple se pueden obtener tantos modelos individuales como causas de decremento lo conformen. Se pretende que cada causa muestre sus propiedades de forma independiente. En un modelo de doble salida, en donde los decrementos son: muerte y fin del periodo de cobertura, se pueden obtener un modelo de salida por muerte y otro por fin del periodo de cobertura. Cada modelo se basa en su propia fuerza de decremento que es independiente de la influencia de otra causa. Esta es justamente la base para la construcción de una tabla de decremento individual a partir de una tabla de decremento múltiple.

Al modelo obtenido a partir de considerar sólo un decremento se le llama modelo de decremento simple asociado. La notación se diferencia de las anteriores con un apóstrofe. Al igual que en el modelo de vida individual, para la construcción de una tabla por decremento, se supone un radix, en este caso $l'^{(j)}_0$. Las funciones asociadas del modelo de decremento simple son:

$$l'^{(j)}_x = l'^{(j)}_0 e^{-\int_0^1 \mu_y^{(j)} dy} \quad (4.5.1)$$

$$_t p'^{(j)}_x = \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s)\, ds\right] \quad (4.5.2)$$

$$_t q'^{(j)}_x = 1 - {}_t p'^{(j)}_x \quad (4.5.3)$$

En un modelo de una salida, estas son las relaciones típicas que se verifican. Si la única causa es la muerte, las funciones $l'^{(j)}_x$, $_t p'^{(\tau)}_x$ y $_t q'^{(j)}_x$ son simplemente l_x, $_t p_x$ y $_t q_x$. Es importante resaltar que $q'^{(j)}_x$ no es una probabilidad de salida, tal como ocurre con $q^{(j)}_x$. En el contexto de salidas múltiples $q'^{(j)}_x$ es llamada tasa absoluta de decremento. $_t p'^{(j)}_x$ no es necesariamente una función de sobrevivencia, tal como ocurre con $_t p^{(\tau)}_x$, pues no se requiere que $\lim_{t\to\infty} {}_t p'^{(j)}_x = 0$. Por lo que respecta a las fuerzas de decremento total y para una causa determinada, respectivamente, se tiene

$$\int_0^\infty \mu_x^{(\tau)}(t)\, dt = \infty \quad (4.5.4)$$

$$\int_0^\infty \mu_x^{(j)}(t)\, dt = \infty \quad (4.5.5)$$

Pueden existir causas de decremento para los que la integral (4.5.5) sea finita.

Como (4.5.2) y (4.5.3) normalmente no pueden ser aplicadas directamente, los valores $q'^{(j)}_x$ son usualmente determinados por métodos de aproximación, a partir de los datos de la tabla de decrementos múltiple. Los métodos de aproximación presentados son: Aproximación Media, Supuesto de Distribución Uniforme y Supuesto de Fuerza de Decremento Múltiple Constante.

4.5.1 Aproximación Media

En una tabla de un solo decremento, el número de decesos ocurridos en un año se obtienen: multiplicando la probabilidad de decremento para una edad determinada por el número de vidas que ha alcanzado esa edad, es decir $q_x l_x = d_x$. En el caso de una tabla de decremento múltiple si la tasa de decremento $q'^{(j)}_x$ se multiplica por $l^{(\tau)}_x$, el valor de $d^{(j)}_x$ que se obtiene es mayor al mostrado en la tabla. Esto se debe a que algunas de las $l^{(\tau)}_x$ no están expuestas a la causa *j* durante todo el año, debido a su salida por alguna otra causa.

El número de vidas que se elimina durante el año por otras causas es $d^{(\tau)}_x - d^{(j)}_x$, y se denota por $d^{(-j)}_x$. Si se supone que estas vidas estén expuestas a la causa *j* durante la mitad del año, entonces el número de miembros que salen del grupo por exposición es aproximadamente $\frac{1}{2} d^{(-j)}_x$. Utilizando este supuesto, los decrementos por la causa *j*, $d^{(j)}_x$, del modelo de decremento múltiple se obtienen como sigue

$$q'^{(j)}_x \left[l^{(\tau)}_x - \tfrac{1}{2} d^{(-j)}_x \right] \cong d^{(j)}_x \tag{4.5.1.1}$$

de donde

$$\begin{aligned} q'^{(j)}_x &\cong \frac{d^{(j)}_x}{l^{(\tau)}_x - \tfrac{1}{2} d^{(-j)}_x} \\ &= \frac{q^{(j)}_x}{1 - \tfrac{1}{2} q^{(-j)}_x} \end{aligned} \tag{4.5.1.2}$$

expresión que puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} q'^{(j)}_x &\cong q^{(j)}_x \left[1 - \tfrac{1}{2} q^{(-j)}_x \right]^{-1} \\ &= q^{(j)}_x \left(1 + \tfrac{1}{2} q^{(-j)}_x + \cdots \right) \end{aligned} \tag{4.5.1.3}$$

Para el caso de dos decrementos las tasas de decremento absoluto para cada decremento son

$$q'^{(1)}_x = \frac{q^{(1)}_x}{1 - \tfrac{1}{2} q^{(2)}_x} \quad \text{y} \quad q'^{(2)}_x = \frac{q^{(2)}_x}{1 - \tfrac{1}{2} q^{(1)}_x} \tag{4.5.1.4}$$

Ejemplo 4.5.1: Obtener las tasas de decremento absoluto para cada causa, a partir de la tabla de decremento múltiple generada en el ejemplo 4.4.1, utilizando aproximación media

Edad	$q^{(1)}_x$	$q^{(2)}_x$	$q'^{(1)}_x = \frac{q^{(1)}_x}{1 - \frac{1}{2} q^{(2)}_x}$	$q'^{(2)}_x = \frac{q^{(2)}_x}{1 - \frac{1}{2} q^{(1)}_x}$
65	0.01	0.02	0.01010101	0.0201005
66	0.02	0.04	0.02040816	0.04040404
67	0.03	0.06	0.03092784	0.06091371
68	0.04	0.08	0.04166667	0.08163265
69	0.05	0.09	0.05235602	0.09230769
70	0.00	1.00	0	1

4.5.2 Supuesto de Distribución Uniforme de Decrementos Múltiples

En el siguiente método de aproximación, se supone distribución uniforme en el contexto de decrementos múltiples, sobre el intervalo $(x, x+1)$ para obtener (4.5.2) y (4.5.3). Se asume

$$ {}_t q_x^{(j)} = t q_x^{(j)} \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad 0 \le t \le 1 \tag{4.5.2.1}$$

y

$$ {}_t q_x^{(\tau)} = t q_x^{(\tau)} \tag{4.5.2.2}$$

Bajo el supuesto dado, se observa de (4.3.9)

$$ {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) = q_x^{(j)}$$

y

$$ \mu_x^{(j)}(t) = \frac{q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.2.3}$$

entonces

$$ {}_t p'^{(j)}_x = \exp\left[-\int_0^s \mu_x^{(j)}(t)\,dt\right] \tag{4.5.2.4}$$

$$ = \exp\left[-\int_0^s \frac{q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}}\,dt\right]$$

$$ = \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \log\left(1 - s q_x^{(\tau)}\right)\right]$$

$$ = \left({}_s p_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.2.5}$$

y también

$$ {}_t q'^{(j)}_x = 1 - \exp\left[-\int_0^s \mu_x^{(j)}(t)\,dt\right] \tag{4.5.2.6}$$

$$ = 1 - \exp\left[-\int_0^s \frac{q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}}\,dt\right]$$

$$ = 1 - \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \log\left(1 - s q_x^{(\tau)}\right)\right]$$

$$ = 1 - \left({}_s p_x^{(\tau)}\right)^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.2.7}$$

o bien

$$ = 1 - \left(1 - q_x^{\tau}\right)^{\frac{d_x^{(j)}}{d_x^{(\tau)}}} \tag{4.5.2.8}$$

Las expresiones (4.5.2.5) y (4.5.2.8) se pueden aplicar directamente para el cálculo de ${}_{t}q'^{(j)}_{x}$ y para obtener ${}_{t}q^{(j)}_{x}$ al despejar. Otro camino que se sugiere consiste en desarrollar el binomio indicado en (4.5.2.8), de donde se obtiene

$$1-\left\{1-\frac{d_x^{(j)}}{d_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)}+\frac{1}{2}\frac{d_x^{(j)}}{d_x^{(\tau)}}\left(\frac{d_x^{(j)}}{d_x^{(\tau)}}-1\right)\left(q_x^{(\tau)}\right)^2-\cdots\right\} \tag{4.5.2.9}$$

dejando solo los términos indicados y simplificando

$$\begin{aligned} q'^{(j)}_{x} &\cong q_x^{(j)}\left[1+\frac{1}{2}\left(q_x^{(\tau)}-q_x^{(j)}\right)\right] \\ &= q_x^{(j)}\left(1+\frac{1}{2}q_x^{(-j)}\right) \end{aligned} \tag{4.5.2.10}$$

donde $q_x^{(-j)}$ indica la probabilidad de que la vida *x* salga del grupo durante el año por una causa diferente a la causa *j*, es decir $q_x^{(-j)}=q_x^{(\tau)}-q_x^{(j)}$. La expresión (4.5.2.10) se obtiene por truncamiento del desarrollo binomial.

Ejemplo 4.5.2: Obtener las tasas de decremento absoluto para cada causa, a partir de la tabla de decremento múltiple generada en el ejemplo 4.4.1. Utilizar el supuesto de distribución uniforme.

Edad	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q'^{(1)}_{x}=q_x^{1}\left[1+\frac{1}{2}\left(q_x^{(2)}\right)\right]$	$q'^{(2)}_{x}=q_x^{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(q_x^{(1)}\right)\right]$
65	0.01	0.02	0.0101	0.03015
66	0.02	0.04	0.0204	0.0606
67	0.03	0.06	0.0309	0.09135
68	0.04	0.08	0.0416	0.1224
69	0.05	0.09	0.05225	0.1435
70	0.00	1.00	0	1

4.5.3 Supuesto de Fuerza de Decremento Constante

El tercer método mostrado para obtener (4.5.2) y (4.5.3) es utilizando el supuesto de fuerza constante para cada decremento sobre el intervalo $(x,x+1)$, el cual consiste en suponer

$$\mu_x^{(j)}(t)=\mu_x^{(j)}(0) \tag{4.5.3.1}$$

y

$$\mu_x^{(\tau)}(t)=\mu_x^{(\tau)}(0) \qquad 0\le t\le 1 \tag{4.5.3.2}$$

Aplicando este supuesto a la probabilidad de decremento por la causa *j*, con $0 \leq s \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} {}_s q_x^{(j)} &= \int_0^s {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)} \int_0^s {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t) dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)} q_x^{(\tau)} \end{aligned} \tag{4.5.3.3}$$

Bajo el mismo supuesto, para cualquier *r* entre $(0,1)$

$$r\mu_x^{(\tau)}(0) = -\log_r p_x^{(\tau)} \tag{4.5.3.4}$$

y

$$r\mu_x^{(j)}(0) = -\log_r p'^{(j)}_x \tag{4.5.3.5}$$

sustituyendo en (4.5.3.3)

$${}_s q_x^{(j)} = \frac{\log_r p'^{(j)}_x}{\log_r p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} \tag{4.5.3.6}$$

a partir de esta expresión es posible despejar ${}_r p'^{(j)}_x$

$${}_r p'^{(j)}_x = \left({}_r p_x^{(\tau)} \right)^{{}_s q_x^{(j)} / {}_s q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.3.7}$$

y como en el límite *r* va a 1, se obtiene $q'^{(j)}_x$ dejando

$$q'^{(j)}_x = 1 - \left(p_x^{(\tau)} \right)^{{}_s q_x^{(j)} / {}_s q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.3.8}$$

o bien

$$q'^{(j)}_x = 1 - \left[1 - q_x^{(\tau)} \right]^{{}_s q_x^{(j)} / {}_s q_x^{(\tau)}} \tag{4.5.3.9}$$

Como puede observarse las aproximaciones obtenidas de los supuestos de distribución uniforme y fuerza de decremento constante, conducen a las mismas expresiones para el cálculo de $q_x'^{(j)}$, utilizando las probabilidades $q_x^{(j)}$ y $q_x^{(\tau)}$ con s y $r = 1$. También es posible obtener $q_x^{(j)}$ para valores dados de $q_x'^{(j)}$, a través de la expresión (4.5.3.6) con *r* y *s* próximos a 1. Esta última expresión y (4.5.3.8) requieren un tratamiento especial si $p'^{(j)}_x$ o $p_x^{(\tau)}$ es igual a cero. Por lo que corresponde a las expresiones (4.5.1.3) y (4.5.2.10) son equivalentes.

Ejemplo 4.5.3.: En un modelo de doble decremento, donde las causas consideradas son muerte (1) y retiro (2), los decrementos están distribuidos en el año de edad de manera que sus tasas de decremento están dadas por las siguientes expresiones

$$q'^{(1)}_x = \frac{d^{(1)}_x}{l^{(\tau)}_x - 0.8d^{(2)}_x} \qquad\qquad q'^{(2)}_x = \frac{d^{(2)}_x}{l^{(\tau)}_x - 0.5d^{(1)}_x}$$

Para cierta edad *x*, se tienen los siguientes datos $l^{(\tau)}_x = 1000$ $\quad l^{(\tau)}_{x+1} = 900$ y $q'^{(2)}_x = 0.080$. Obtener el valor de $q'^{(1)}_x$.

Sabemos que el número de salidas registradas entre las edades x y $x+1$ se obtiene con $l^{(\tau)}_x - l^{(\tau)}_{x+1}$, de manera que $d^{(\tau)}_x = 100$. De aquí se extrae la ecuación

$$d^{(1)}_x + d^{(2)}_x = 100 \qquad\qquad (1)$$

Es decir el número de descensos totales generados en ese intervalo es igual, a la suma de las salidas por muerte y por retiro. Si despejamos $d^{(1)}_x$ de (1) y la sustituimos en la expresión de $q'^{(2)}_x$ junto con los datos que se proporcionan entonces nos queda que

$$d^{(1)}_x = 20.8333$$

sustituyendo este valor en (a) obtenemos $d^{(2)}_x = 79.1666$. Finalmente sustituimos los valores en la expresión para $q^{(1)}_x$ de donde $q^{(1)}_x = 0.0222$

4.6 Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple a partir de modelos asociados de una sola salida

Ya se ha mostrado el desarrollo para obtener una tabla por cada decremento que interviene en un modelo de decremento múltiple. El siguiente apartado muestra el procedimiento inverso, es decir, construir una tabla de decremento múltiple a partir de un conjunto de tablas de salidas individuales. Para ello es necesario mostrar las relaciones entre el modelo de decremento múltiple y el modelo de decremento individual, generado a partir de tasas absolutas de decremento.

Supóngase que se disponen de *m* modelos de una sola salida, mismas que constituyen las causas de decremento del modelo. Como se señaló en (4.3.7)

$$\mu^{(\tau)}_x = \mu^{(1)}_x + \mu^{(2)}_x + \cdots + \mu^{(m)}_x \qquad (4.6.1)$$

y retomando (4.3.2)

$${}_t p^{(\tau)}_x = e^{\int_0^t \mu^{(\tau)}_x(t)dt}$$

entonces

$$\begin{aligned}
{}_t p^{(\tau)}_x &= \exp\left[-\int_0^t \left(\mu^{(1)}_x(s) + \mu^{(2)}_x(s) + \cdots + \mu^{(m)}_x s\right) ds\right] \\
&= \exp\left[-\int_0^t \mu^{(1)}_x(s)ds\right]\exp\left[-\int_0^t \mu^{(2)}_x(s)ds\right]\cdots\cdots\left[-\int_0^s \mu^{(m)}_x(s)ds\right] \qquad (4.6.2) \\
&= {}_t p'^{(1)}_x \cdot {}_t p'^{(2)}_x \cdots\cdots {}_t p'^{(m)}_x
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p'^{(i)}_x \tag{4.6.3} $$

Resultado que no involucra aproximación y se basa en la definición de tabla de decremento simple asociada, donde la única fuerza de decremento es igual a la fuerza para ese decremento en el modelo de decremento múltiple. Se requiere que este resultado sea válido para cualquier método utilizado al construir una tabla de decremento múltiple de un conjunto de tasas absolutas de decremento.

De (4.6.3) se puede observar el tamaño de la tasa de decremento absoluta y la probabilidad de decremento total, cuya relación es

$$ {}_t p'^{(j)}_x \geq {}_t p_x^{(\tau)} \tag{4.6.4} $$

La magnitud de las fuerzas de decremento puede causar que ${}_t p'^{(j)}_x$ sea considerablemente mayor que ${}_t p_x^{(\tau)}$ de manera que el modelo de decremento simple asociado tendrá las diferencias correspondientes.

La relación (4.6.4) se mantiene al multiplicar en ambos lados por $\mu_x^{(j)}(t)$. Es decir

$$ {}_t p'^{(j)}_x \mu_x^{(j)}(t) \geq {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) \tag{4.6.5} $$

integrando (4.6.5) con respecto a *t* sobre el intervalo $(0,1)$, se obtiene

$$ q'^{(j)}_x = \int_0^1 {}_t p'^{(j)}_x \mu_x^{(j)}(t)\, dt \geq \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt = q_x^{(j)} \tag{4.6.6} $$

de donde se concluye que cuando varias tasas de decremento operan simultáneamente, la tasa de decremento para una causa dada es mayor que su correspondiente probabilidad de decremento. Resultado que se observa en los ejemplos presentados adelante.

Una vez que se han mostrado estas relaciones, se obtienen las expresiones para la construcción de una tabla de decremento múltiple, a partir de tablas de decremento simple.

Retomando (4.6.3)

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p'^{(i)}_x $$

Es decir, $p_x^{(\tau)}$ se obtiene a través del conjunto dado de $p'^{(j)}_x$ para $j = 1, 2, \ldots, m$. Y $q_x^{(\tau)}$ se construye mediante $q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)}$.

Para generar las $q_x^{(j)}$ que componen $q_x^{(\tau)}$, se utilizan los supuestos de la sección 4.5, así como las expresiones generadas.

4.6.1 Aproximación Media

Para obtener las probabilidades de decremento a partir de las tasas de decremento asociadas, suponiendo aproximación media, se requiere despejar la expresión (4.5.1.3). Para el caso de dos vida se despejar (4.5.1.4) obteniéndose

$$q_x^{(1)} + \tfrac{1}{2} q'^{(1)}_x q_x^{(2)} \cong q'^{(1)}_x$$

$$\tfrac{1}{2} q'^{(2)}_x q_x^{(1)} + q_x^{(2)} \cong q'^{(2)}_x$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para encontrar $q_x^{(1)}$ y $q_x^{(2)}$

$$q_x^{(1)} \cong \frac{q'^{(1)}_x\left(1-\tfrac{1}{2} q'^{(2)}_x\right)}{1-\tfrac{1}{4} q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x} \qquad (4.6.1.1)$$

$$q_x^{(2)} \cong \frac{q'^{(2)}_x\left(1-\tfrac{1}{2} q'^{(1)}_x\right)}{1-\tfrac{1}{4} q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x} \qquad (4.6.1.2)$$

Para el cálculo de $d_x^{(1)}$ y $d_x^{(2)}$ bajo este supuesto, se sugiere que sea con la expresión

$$d_x^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(1)} + q_x^{(2)}} d_x^{(\tau)} \qquad (4.6.1.3)$$

en donde la obtención de los decrementos para cada causa se hace distribuyendo el valor exacto de de $d_x^{(\tau)}$ en proporción con los valores aproximados de $q_x^{(1)}$ y $q_x^{(2)}$.

Aplicar esta metodología a tres o más decrementos, tiene como inconveniente requerir la solución de largos sistemas de ecuaciones lineales.

4.6.2 Fuerza Constante

En el supuesto de fuerza constante, la expresión para obtener la probabilidad de decremento de una causa determinada, según se vio en (4.4.3.6), es

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p'^{(j)}_x}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)} \qquad (4.6.2.1)$$

Ejemplo 4.6.2.1: Construir una tabla de decremento múltiple a partir de tasas absolutas de decremento que se dan. La causa 3 es el retiro que puede ocurrir entre las edades 65-70 y es obligatorio a los 70.

Edad	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
65	0.015	0.018	0.01
66	0.035	0.025	0.03
67	0.04	0.04	0.035
68	0.055	0.06	0.048
69	0.065	0.075	0.05
70	0.07	0.09	0.06

El primer paso es obtener la probabilidad de decremento total a partir de las tasas absolutas que se dan. Para ello conviene reescribiendo (4.6.3) para tres causas

$$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q'^{(j)}_x\right)$$

de esta manera se genera la primera columna. No hay que olvidar que para la edad 70 la tercera causa es obligatoria.

Las probabilidades de decremento para cada causa, se obtienen a partir de la expresión (4.6.2.1). Para la columna $l_x^{(\tau)}$ a edad 65 se supone un radix de 100,000, este se usa para obtener la primera línea de las primeras tres columnas. Para el resto de las columnas se utilizan las siguientes expresiones

$$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)}\left(1 - q_x^{(\tau)}\right)$$

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$$

Edad	$q_x^{(\tau)} = 1 - \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q'^{(j)}_x\right)$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
65	0.042403	0.014791	0.017776	0.009836	100000	1500	1800.00	1000.00
66	0.087351	0.034046	0.024196	0.029109	95759.7	3351.59	2393.99	2872.79
67	0.110656	0.038519	0.038519	0.033619	87395	3495.8	3495.80	3058.82
68	0.154338	0.052083	0.056963	0.045293	77724.2	4274.83	4663.45	3730.76
69	0.178369	0.061019	0.070769	0.046581	65728.4	4272.35	4929.63	3286.42
70	1.000000	0	0	1.000000	54004.5	0.00	0.00	54004.5

Ejemplo 4.6.2.2.: A partir de las siguientes tasas de decremento absoluto $q'^{(1)}_{25} = 0.3607$, $q'^{(2)}_{25} = 0.0100$ $q'^{(3)}_{25} = 0.0149$ $q'^{(4)}_{25} = 0.0344$, obtener el número de decrementos a edad 25 para cada causa.

Iniciemos por obtener la probabilidad de decremento total

$$\begin{aligned} q_x^{(\tau)} &= 1 - \prod_{j=1}^{3}\left(1 - q'^{(j)}_x\right) \\ &= 1 - \left[(1-0.3607)(1-0.0100)(1-0.0149)(1-0.0344)\right] \\ &= 0.3979 \end{aligned}$$

Con (4.6.2.1), $q_x^{(j)} = \dfrac{\log p'^{(j)}_x}{\log p_x^{(\tau)}} q_x^{(\tau)}$, y los datos proporcionados se obtienen las probabilidades de decremento para cada causa.

$$q_{25}^{(1)} = 0.3508,\ q'^{(2)}_{25} = 0.0078\ q_{25}^{(3)} = 0.0118\ q_{25}^{(4)} = 0.0275$$

Finalmente se obtiene el número de decrementos por cada causa, a partir de la expresión $d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$

$$d_{25}^{(1)} = 3508.29\ d_{25}^{(2)} = 78.43\ d_{25}^{(3)} = 117.65\ d_{25}^{(4)} = 274.53$$

4.6.3 Distribución Uniforme

Anteriormente se indicó que (4.5.3.6) y (4.5.3.9) no se utilizarán si $p'^{(j)}_x$ o $p_x^{(\tau)}$ son iguales a cero. Un supuesto para manejar esta indeterminación y que por si mismo conduce a ajustes especiales, se basa en asumir distribución uniforme de los decrementos, tal como se hizo con las probabilidades de decremento múltiple. Se muestra el desarrollo para 3 decrementos, aunque el método y las fórmulas pueden extenderse. Examinando este supuesto para cada una de las tablas

$${}_t p'^{(j)}_x = 1 - t q'^{(j)}_x \qquad j = 1,2,3; \quad 0 \le t \le 1$$

y

$${}_t p'^{(j)}_x \mu_x^{(j)}(t) = \frac{d}{dt}\left(-{}_t p'^{(j)}_x\right) = q'^{(j)}_x$$

retomando (4.4.10)

$$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt$$

por lo definido en (4.6.3), ${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p'^{(i)}_x$, de manera que

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_t p'^{(1)}_x \mu_x^{(1)}(t)\, {}_t p'^{(2)}_x\, {}_t p'^{(3)}_x\, dt \\ &= q'^{(1)}_x \int_0^1 \left(1 - t q'^{(2)}_x\right)\left(1 - t q'^{(3)}_x\right) dt \\ &= q'^{(1)}_x \left[1 - \tfrac{1}{2}\left(q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x\right) + \tfrac{1}{3} q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x\right] \end{aligned} \qquad (4.6.3.1)$$

de manera similar obtienen $q_x^{(2)}$, $q_x^{(3)}$ y puede verificarse que

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} &= q'^{(1)}_x + q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x - \left(q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(3)}_x + q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x\right) + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x \\ &= 1 - \left(1 - q'^{(1)}_x\right)\left(1 - q'^{(2)}_x\right)\left(1 - q'^{(3)}_x\right) = q_x^{(\tau)} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.2: Obtener las probabilidades de decremento para cada causa, a partir de las tasas de decremento absoluto obtenidas en el ejercicio 4.5.1. Suponer Distribución Uniforme.

En (4.6.3.1) se obtuvo la probabilidad de decremento para la causa 1, a partir de las tasas de decremento absoluto. Para la solución de este ejemplo se recurre a esta expresión con $m = 2$.

Edad	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q_x^{(1)} = \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_x\right]$	$q_x^{(2)} = \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_x\right]$
65	0.010101	0.020101	0.009999	0.019085
66	0.020408	0.040404	0.019996	0.036281
67	0.030928	0.060914	0.029986	0.051494
68	0.041667	0.081633	0.039966	0.064626
69	0.052356	0.092308	0.049940	0.068143
70	0	1	0	1

La obtención de ${}_t p_x^{(\tau)}$ a través de (4.6.3), es posible bajo el supuesto de independencia entre las v.a $T_j(x)$. De manera que para la construcción de una tabla de decremento múltiple a partir de un tabla de decremento simple asociadas, se requiere asumir este mismo supuesto para obtener la distribución de (T, J). En Bowers esto se ilustra considerando dos causas de decremento.

Sean $T_1(x)$ y $T_2(x)$ las v.a. del tiempo en que ocurre el decremento de cada causa respectivamente, así como $s_1(t)$ y $s_2(t)$ la función de sobrevivencia de cada causa. Aquí la función de sobrevivencia conjunta esta dado por

$$s_{T_1T_2}(t_1, t_2) = \Pr\left\{\left(T_1(x) > t_1\right) \cap \left(T_2(x) > t_2\right)\right\}$$

La variable aleatoria del tiempo en que ocurre el decremento T es igual al mínimo entre $T_1(x)$ y $T_2(x)$ y de acuerdo con (2.3.1), la función de sobrevivencia es

$$s_T(t) = s_{T_1T_2}(t, t)$$

si $T_1(x)$ y $T_2(x)$ son independientes, entonces

$$\begin{aligned} s_{T_1T_2}(t,t) &= 1 - F_{T(xy)}(t) \\ &= 1 - \left({}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x\, {}_t q_y\right) \\ &= 1 - {}_t q_x - {}_t q_y + {}_t q_x\, {}_t q_y \\ &= \left(1 - {}_t q_x\right)\left(1 - {}_t q_y\right) \\ &= s_{T(x)}(t)\, s_{T(y)}(t) \end{aligned} \tag{4.6.3.2}$$

por lo tanto

$$s_T(t) = s_{T_1}(t)\, s_{T_2}(t) \tag{4.6.3.3}$$

Por lo que se refiere a la fuerza de mortalidad por cualquier causa se verifica, bajo el supuesto de independencia

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt}\log S_{T_1}(t)S_{T_2}(t) \tag{4.6.3.4}$$

$$= \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t) \tag{4.6.3.5}$$

de manera que las fuerzas marginales asociadas de decremento pueden ser utilizadas con (4.6.1) para determinar la probabilidad de decremento total ${}_t p^{(\tau)}$.

Si $T_1(x)$ y $T_2(x)$ son dependientes

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = -\frac{d}{dt}\log S_{T_1T_2}(t,t) \tag{4.6.3.6}$$

$$\neq -\frac{d}{dt}\log S_{T_1T_2}(t,0) - \frac{d}{dt}\log S_{T_1T_2}(0,t) \tag{4.6.3.7}$$

la dependencia entre $T_1(x)$ y $T_2(x)$ no asegura que al asumir (4.6.3) se obtenga la función de sobrevivencia decrementos múltiples.

El siguiente ejemplo dado en Bowers muestra como obtener probabilidades de decremento múltiple a partir de tasas de decremento cuando uno de los decrementos es discreto. Es decir, que la tabla de decremento toma valores discretos al inicio o al final del intervalo de tiempo.

Ejemplo 4.6.3: Supóngase que existen tres causas de decremento: mortalidad, discapacidad y retiro. Las dos primeras causas se distribuyen uniformemente cada año y sus tasas de decremento absoluto son $q'^{(1)}_x$ y $q'^{(2)}_x$ respectivamente. La tercera causa de decremento, retiro, ocurre al final del año y su tasa de decremento absoluto se denota por $q'^{(3)}_x$. Obtener:

a. $q_x^{(1)}$, $q_x^{(2)}$ y $q_x^{(3)}$ bajos los supuestos dados
b. $q_x^{(1)}$, $q_x^{(2)}$ y $q_x^{(3)}$ suponiendo que los retiros se dan a la mitad y al final del año

a. Par obtener las probabilidades de decremento se calcula primero la probabilidad de decremento total a partir de las tasas de decremento dadas

$${}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p'^{(1)}_x \, {}_t p'^{(2)}_x \, {}_t p'^{(3)}_x$$

y

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)}$$

pero como existe una discontinuidad para la tercera causa de decremento, entonces

$$\lim_{t\to 1-} {}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p'^{(1)}_x \, {}_t p'^{(2)}_x 1$$

y

$$\lim_{t\to 1+} {}_t p_x^{(\tau)} = {}_t p'^{(1)}_x \, {}_t p'^{(2)}_x \left(1 - q'^{(3)}_x\right)$$

bajo estas consideraciones se tiene

$$
\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt \\
&= \int_0^1 {}_t p'^{(1)}_x \, {}_t p'^{(2)}_x (1) \, \mu_x^{(1)}(t)\, dt \\
&= q'^{(1)}_x \int_0^1 \left(1 - t q'^{(2)}_x\right) dt \\
&= q'^{(1)}_x \left(1 - \tfrac{1}{2} q'^{(2)}_x\right)
\end{aligned}
$$

y como el segundo decremento tienen las mismas características, entonces

$$q_x^{(1)} = q'^{(2)}_x \left(1 - \tfrac{1}{2} q'^{(1)}_x\right)$$

Por lo que respecta a $q_x^{(3)}$

$$q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)} - \left(q_x^{(1)} + q_x^{(2)}\right)$$

considerando el límite por la derecha y sustituyendo $q_x^{(1)}$ y $q_x^{(2)}$ que se obtuvieron

$$q_x^{(3)} = 1 - p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x \left(1 - q'^{(3)}_x\right) - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x$$

y como

$$1 - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x = p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x$$

entonces

$$q_x^{(3)} = p'^{(1)}_x \, p'^{(2)}_x \, q'^{(3)}_x$$

b. Las probabilidades de decremento para las dos primeras causas se obtienen como en el inciso anterior, solo que ahora hay que considerar los intervalos $\left(0, \tfrac{1}{2}\right]$ y $\left[\tfrac{1}{2}, 1\right)$. De manera que

$$
\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= q'^{(1)}_x \int_0^{1/2} \left(1 - t q'^{(2)}_x\right) dt + q'^{(1)}_x \left(1 - \tfrac{1}{2} q'^{(3)}_x\right) \int_{1/2}^1 \left(1 - t q'^{(2)}_x\right) dt \\
&= q'^{(1)}_x \left(1 - \tfrac{1}{2} q'^{(2)}_x - \tfrac{1}{4} q'^{(3)}_x + \tfrac{3}{16} q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x\right)
\end{aligned}
$$

y

$$q_x^{(2)} = q'^{(2)}_x \left(1 - \tfrac{1}{2} q'^{(1)}_x - \tfrac{1}{4} q'^{(3)}_x + \tfrac{3}{16} q'^{(1)}_x q'^{(3)}_x\right)$$

nuevamente para obtener la probabilidad de decremento para la tercera causa se utiliza la expresión

$$q_x^{(3)} = q_x^{(\tau)} - \left(q_x^{(1)} + q_x^{(2)}\right)$$

sustituyendo los valores de $q_x^{(1)}$ y $q_x^{(2)}$ obtenidos arriba y operando se obtiene

$$q_x^{(3)} = q'^{(3)}_x \left(1 - \tfrac{3}{4} q'^{(1)}_x - \tfrac{3}{4} q'^{(2)}_x + \tfrac{5}{8} q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x\right)$$

4.7 Tasa Central de Decrementos Múltiples

En las secciones anteriores de este capítulo se desarrollaron: probabilidades de decremento múltiple, tasas de decremento múltiple, así como fuerzas de decremento múltiple. En esta sección se presenta la tasa central de decremento múltiple y la tasa central de decremento asociada. La importancia de obtener esta medida se debe a que a menudo, la experiencia obtenida de un grupo de vidas sujetas a varias causas de decremento se resume en tasas centrales. De manera que es conveniente tener la relación que estas medidas guardan con las ya mostradas y poder construir tablas de decremento múltiple a partir de tasas centrales de decremento para cada causa.

Recurriendo a la expresión (1.5.23) del capítulo 1

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \mu_x(t)\,dt}{\int_0^1 {}_t p_x\,dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_x(t)\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\,dt} = \frac{d_x}{L_x} \tag{4.7.1}$$

donde m_x representa la tasa central de mortalidad a edad *x*. Este nombre se justifica por ser un promedio ponderado de las fuerzas de mortalidad entre las edades x y $x+1$. En el modelo de decrementos múltiples, la tasa central de decremento total a la edad *x*, se define como:

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)}\,dt} \tag{4.7.2}$$

siendo esta un promedio ponderado de $\mu_x^{(\tau)}(t)$ con $0 \le t < 1$. Análogamente, la tasa central de decremento por la causa *j*, es

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)}\,dt} \tag{4.7.3}$$

y se cumple la relación

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)} \tag{4.7.4}$$

Para la tabla de decremento simple asociada, la tasa central está dada por

$$m\acute{}_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p\acute{}_x^{(j)} \mu_x^{(j)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_t p\acute{}_x^{(j)}\,dt} \tag{4.7.5}$$

$m\acute{}_x^{(j)}$ es también un promedio ponderado de $\mu_x^{(j)}(t)$ $0 \le t < 1$ con ponderaciones ${}_t p\acute{}_x^{(j)}$ en lugar de ${}_t p_x^{(\tau)}$. Si la fuerza $\mu_x^{(j)}(t)$ es constante para $0 \le t < 1$, entonces

$$m_x^{(j)} = m\acute{}_x^{(j)} = \mu_x^{(j)}(0)$$

Suponiendo que se verifica la distribución uniforme de las salidas para cada edad, se tiene

$$\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt = \int_0^1 \left(1 - q_x^{(\tau)}\right) dt = \int_0^1 \left(1 - t q_x^{(\tau)}\right) dt = 1 - \tfrac{1}{2} q_x^{(\tau)} \qquad 0 < t < 1 \qquad (4.7.6)$$

como

$$m_x^{(\tau)} = \frac{q_x^{(\tau)}}{\int_0^1 1 - t q_x^{(\tau)} dt}$$

por lo tanto

$$m_x^{(\tau)} = \frac{q_x^{(\tau)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}} \qquad (4.7.7)$$

y

$$m_x^{(\tau)} \left[1 - \tfrac{1}{2} q_x^{(\tau)}\right] = q_x^{(\tau)}$$

(4.7.7) puede expresarse como

$$m_x^{(\tau)} = q_x^{(\tau)} \left[1 + \tfrac{1}{2} m_x^{(\tau)}\right] \qquad (4.7.8)$$

Obtengamos ahora las expresiones para calcular $q_x^{(\tau)}$ y $p_x^{(\tau)}$, a partir de $m_x^{(\tau)}$. De (4.7.8)

$$q_x^{(\tau)} = \frac{m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}} \qquad (4.7.9)$$

y como $q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)}$, entonces

$$p_x^{(\tau)} \cong \frac{1 - \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}}{1 + \frac{1}{2} m_x^{(\tau)}} \qquad (4.7.10)$$

retomando (4.7.3) y bajo el supuesto de distribución uniforme se obtiene la tasa central para una causa determinada

$$m_x^{(j)} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}} \qquad (4.7.11)$$

Para calcular $q_x^{(j)}$, en función las tasas centrales, se recurre nuevamente al supuesto de distribución uniforme en los decrementos. Usando la aproximación

$$l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - t d_x^{(\tau)} \text{ con } 0 < t < 1 \qquad (4.7.12)$$

de manera que

$$L_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt = \int_0^1 \left(l_x^{(\tau)} - t d_x^{(\tau)}\right) dt = l_x^{(\tau)} - \tfrac{1}{2} d_x^{(\tau)} \qquad (4.7.13)$$

retomando $q_x^{(j)}$ se tiene

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{d_x^{(j)}}{L_x^{(\tau)} + \frac{1}{2} d_x^{(\tau)}} \qquad (4.7.14)$$

o bien, dividiendo entre $L_x^{(\tau)} \big/ L_x^{(\tau)}$

$$q_x^{(j)} = \frac{m_x^{(j)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}} \tag{4.7.15}$$

Para la tasa central de decremento simple asociado, suponiendo distribución uniforme y retomando (4.7.5), se obtiene

$$m'^{(j)}_x = \frac{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x \mu_x^{(j)}(t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x\,dt} = \frac{q'^{(j)}_x}{1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x} \tag{4.7.16}$$

de donde

$$q'^{(j)}_x = \frac{m'^{(j)}_x}{1+\frac{1}{2}m'^{(j)}_x} \tag{4.7.17}$$

Como se mencionó, los tantos centrales pueden resumir la información de un grupo de miembros sujeto a salidas por diversas causas de decremento. Esto proporciona un método para la construcción de tablas de decremento múltiple, cuando la tasa central de decremento está dada para cada causa. La expresión (4.7.13) da muestra de ello.

Mediante (4.7.10) se pueden obtener las $l_x^{(\tau)}$ de una tabla de decrementos múltiples. Las salidas totales para cada edad, $d_x^{(\tau)}$, pueden estar distribuidas en proporción a las diversas tasas centrales $m_x^{(j)}$, como sigue

$$d_x^{(j)} = d_x^{(\tau)}\frac{m_x^{(j)}}{m_x^{(\tau)}} \tag{4.7.18}$$

Ejemplo 4.7.3.: Obtener la probabilidad total $q_x^{(\tau)}$ suponiendo distribución uniforme si $q'^{(1)}_x = 0.080$ y $m'^{(2)}_x = 3m'^{(1)}_x$ en una tabla asociada de decremento múltiple.

Iniciemos por encontrar los valores de las tasas centrales para cada causa. Como se conoce la tasa de decremento absoluta para la primera causa, entonces usamos la expresión (4.7.16)

$$m'^{(1)}_x = \frac{q'^{(1)}_x}{1-\frac{1}{2}q'^{(1)}_x} = \frac{0.080}{1-\frac{1}{2}(0.080)} = 0.0833$$

como $m'^{(2)}_x = 3m'^{(1)}_x$, entonces

$$m'^{(2)}_x = 3(0.0833) = 0.25$$

calculando $q'^{(2)}_x$

$$q'^{(2)}_x = \frac{m'^{(2)}_x}{1+\frac{1}{2}m'^{(2)}_x} = \frac{0.25}{1+\frac{1}{2}(0.25)} = 0.2222$$

y por (4.2.6) sabemos $q_x^{(\tau)} = 1-\prod_{j=1}^{2}\left(1-q'^{(j)}_x\right) = 1-\left[(1-0.080)(1-0.2222)\right] = 0.2844$

Ejemplo 4.7.2.: Una compañía en donde laboran una gran cantidad de mujeres muestra en una tabla el número de mujeres que llegan a la edad *x*. Las causas de salida de la compañía son: matrimonio, muerte y otras causas. Se desea conocer el número de mujeres de 35 y 36 que dejan de laborar ahí y la causa por la que salen. Los datos que se tienen son $l_{35}^{(\tau)}=10{,}000$ $l_{36}^{(\tau)}=8600$ $l_{37}^{(\tau)}=7400$. La tasa de matrimonio para cada una de estas edades se estima en 0.01 y la tasa central de mortalidad en 0.1.

Identificaremos las causas de salida como sigue

1 = matrimonio
2 = muerte
3 = otras

Los datos proporcionados se muestran en la siguiente tabla

$l_{35}^{(\tau)}=10000$	$d_{35}^{(\tau)}=l_{35}^{(\tau)}-l_{36}^{(\tau)}=1400$	$q'^{(1)}_{35}=0.1$	$m'^{(2)}_{35}=0.01$
$l_{36}^{(\tau)}=8600$	$d_{36}^{(\tau)}=l_{36}^{(\tau)}-l_{37}^{(\tau)}=1200$	$q'^{(1)}_{36}=0.1$	$m'^{(2)}_{36}=0.01$
$l_{37}^{(\tau)}=7400$		$q'^{(1)}_{37}=0.1$	$m'^{(2)}_{37}=0.01$

Para obtener la tasa de decremento por la causa 2 (muerte), recurrimos a la expresión (1.7.19), $q'^{(j)}_{x}=\dfrac{m'^{(j)}_{x}}{1+\frac{1}{2}m'^{(j)}_{x}}$, ya que la tasa central absoluta para este decremento esta dada en la tabla anterior.

$q'^{(2)}_{35}=0.0100$
$q'^{(2)}_{36}=0.0100$
$q'^{(2)}_{37}=0.0100$

De la expresión (4.4.9), $d_x^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}q_x^{(\tau)}$, obtenemos la probabilidad de decremento total para cada edad

$q_{35}^{(\tau)}=0.14$
$q_{36}^{(\tau)}=0.1395$

Una vez que se tienen las probabilidades de decremento total para las edades 35 y 36, es posible generar las probabilidades de decremento para cada causa a partir de la expresión (4.6.2.1), $q_x^{(j)}=\dfrac{\log p'^{(j)}_{x}}{\log p_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)}$, suponiendo distribución uniforme.

$q_{35}^{(1)}=0.0978$	$q_{35}^{(2)}=0.14$
$q_{36}^{(1)}=0.0978$	$q_{36}^{(2)}=0.0093$

Las probabilidades de decremento para las causas 1 y 2 se utilizan en la expresión $d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(j)}$ para obtener el número de decrementos por causa. El número de decrementos por la causa 3 se obtiene despejando de $d_{35}^{(1)} + d_{35}^{(2)} + d_{35}^{(3)} = d_{35}^{(\tau)}$

$d_{35}^{(1)} = 977.9$	$d_{35}^{(2)} = 99.5025$	$d_{35}^{(3)} = 322.4979$
$d_{36}^{(1)} = 841$	$d_{36}^{(2)} = 79.8504$	$d_{36}^{(3)} = 1278.8482$

4.8 Analogía entre las Funciones de Decremento Múltiple y las Funciones de Vida Conjunta

Como puede apreciarse el modelo matemático para las funciones de decrementos múltiples es del mismo tipo que el desarrollado para las funciones de vida conjunta, cuando se suponen variables aleatorias independientes.

Para que un estatus de vida conjunta deje de existir se requiere la muerte de cualquiera de sus miembros. Por lo que podemos decir que el grupo esta expuesto a *m* causas de decremento. De aquí se desprende la analogía entre las funciones de decremento múltiple y las funciones de vida conjunta. A continuación se retoman las expresiones para las funciones de vida conjunta y se muestra su equivalente en el contexto de funciones de decremento múltiple.

Para las funciones de decremento múltiple, $l_x^{(\tau)}$ representa el número de vidas sujetas a *m* causas de decremento. En el contexto de vidas conjuntas $l_{x_1,x_2,\cdots,x_m}$ denota un grupo de vidas con *m* miembros, donde la muerte de cualquiera, es suficiente para que el estatus o grupo deje de existir. A través del enfoque de decrementos múltiples, puede decirse que la función está sujeta a *m* causas de decremento, es decir, a la muerte de (x_1), a la muerte de (x_2), . . . , a la muerte de (x_m).

Para vidas conjuntas se cumple la relación

$$\mu_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \cdots + \mu_{x_m} \tag{4.8.1}$$

para decrementos múltiples

$$\mu_x^{(\tau)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} + \cdots + \mu_x^{(m)} \tag{4.8.2}$$

El número de muertes durante el año denotado por $d_{x_1,x_2,\cdots,x_m}$ corresponde al total de decrementos por todas las causas $d_x^{(\tau)}$, bajo la hipótesis de independencia.

Si se considera una expresión para denotar el número de grupos que dejan de existir en un año, debido al fallecimiento de una vida específica (lo cual no se hace), se tendría una expresión de la forma

$$d_{x_1 x_2 \ldots x_m}^{1} = \int_0^1 l_{x_1+t:x_2+t:\cdots:x_m+t}\, \mu_{x_1+t}\, dt \tag{4.8.3}$$

tal como el número de decrementos debido a la causa (1), denotado por

$$d_x^{(1)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt \tag{4.8.4}$$

La probabilidad contingente

$$q_{x_1 x_2 \cdots x_m}^{1} = \int_0^1 {}_t p_{x_1 x_2 \cdots x_m} \mu_{x_1}(t) dt \tag{4.8.5}$$

es análoga a la probabilidad de decremento múltiple por la causa uno, denotada por

$$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t) dt \tag{4.8.6}$$

Las relaciones enunciadas hasta este momento siguen el supuesto de independencia. Si las variables son dependientes, entonces como se indicó en (4.8.2) no hay seguridad de que al asumir ${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_t p_x'^{(i)}$ se obtenga la función de sobrevivencia, en el contexto de decremento múltiple.

4.9 Aplicación de las Funciones de Decremento Múltiple

Como se indicó al inicio de este capítulo, una de las aplicaciones de los modelos de decremento múltiple se encuentra en seguros, en donde se consideran beneficios deferentes según la causa de la muerte. También se mencionó como aplicación los planes de pensiones, donde un trabajador deja de pertenecer al grupo por: llegar a la edad de retiro, por incapacidad, por salida o por jubilación. En esta sección se muestran aplicaciones correspondientes a los seguros de vida y los supuestos bajo los cuales se realiza la evaluación de los mismos.

A diferencia de los seguros de vida individual, cuya única causa de decremento considerada es la muerte, en los seguros de decremento múltiple el valor de la indemnización se denota por $B_{x+t}^{(j)}$. En esta notación se especifica: el valor de la indemnización, la edad y la causa. La prima neta única, $\bar{A}$, que se define como

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt \tag{4.9.1}$$

Si $m = 1$ y $B_{x+t}^{(j)} = 1$ entonces $\bar{A} = \bar{A}_x$, que denota la prima neta única para un seguro de vida entera con pago inmediato.

Siguiendo la definición de varianza, tenemos que

$$Var(\bar{A}) = {}^{2\delta}\bar{A} - (\bar{A})^2 \tag{4.9.2}$$

de manera que la varianza de (4.9.1) es

$$Var(\bar{A}) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} \left(B_{x+t}^{(j)}\right)^2 v^{2t} \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt - \left[\sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt \right]^2 \tag{4.9.3}$$

La función $B_{x+t}^{(j)}$ requiere aproximación por ser una función complicada. Aplicando el supuesto de Distribución Uniforme en (4.9.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+k+s}^{(j)} (1+i)^{1-s} \, ds \tag{4.9.4}$$

integral que se aproxima con la regla de integración del punto medio, dejando

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} B_{x+k+1/2}^{(j)} \tag{4.9.5}$$

Bajo la notación dada en (4.9.1), la prima neta única de un seguro temporal a *n* años, que paga doble indemnización si el fallecimiento se debe a un accidente, esta dada por

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt + \int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(2)}(t)\, dt \tag{4.9.6}$$

donde

$j = 1$ muerte accidental

$j = 2$ muerte por otra causa

Para evaluar las integrales se sugiere expresar cada integral como la suma de los años involucrados, es decir

$$\int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 v^s {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt \tag{4.9.7}$$

suponiendo que cada decremento tiene una distribución uniforme, para cada año de edad

$$\int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, dt \tag{4.9.8}$$

$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \tag{4.9.9}$$

aplicando el mismo procedimiento para la segunda integral

$$\int_0^n v^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(2)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)} \int_0^1 (1+i)^{1-s} ds \tag{4.9.10}$$

$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)} \tag{4.9.11}$$

sumando las integrales

$$\bar{A} = \frac{i}{\delta} \left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} \left(2q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(2)} \right) \right] \tag{4.9.12}$$

$$= \frac{i}{\delta} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} \left(q_{x+k}^{(1)} + q_{x+k}^{(\tau)} \right) \tag{4.9.13}$$

$$= \bar{A}_{\substack{1\ (1) \\ x:\overline{n}|}} + \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \tag{4.9.14}$$

donde $\bar{A}_{\substack{1\ (1) \\ x:\overline{n}|}}$ es el valor presente actuarial de un seguro temporal unitario inmediato, pagadero a la muerte de (x) por la causa (1), es decir, muerte accidental. $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ es la p.n.u. para un seguro temporal unitario pagadero a la muerte de (x) por cualquier otra causa.

Para un seguro de vida de doble decremento, en donde la suma asegurada se entrega sólo si la muerte se debe a la causa 1 y el monto del beneficio esta en función de la edad, se tiene

$$B_{x+t}^{(1)} = t \ \text{ y } \ B_{x+t}^{(2)} = 0 \ \text{ para } \ t > 0$$

De manera que el valor presente actuarial del plan es

$$\bar{A} = \int_0^\infty t v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(1)}(t)\, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s) v^s \, {}_s p_{x+k}^{(\tau)} \mu_{x+k}^{(1)}(s)\, ds$$

usando nuevamente el supuesto de distribución uniforme para cada año de edad, se obtiene

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s} ds \tag{4.9.15}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta} \left(k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i} \right) \tag{4.9.16}$$

esta expresión puede verse como la cantidad de indemnización efectiva promedio para el año $k+1$, mientras que el término $\frac{i}{\delta}$ es la corrección necesaria para proporcionar el pago inmediato de las reclamaciones. La integral (4.9.11) puede aproximarse con la regla del punto medio, dando como resultado

$$k + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{i} \cong k + \frac{1}{2} \tag{4.9.17}$$

Ejemplo 4.9.1: Unos empleados toman un plan de indemnización a la edad de 30 años. Si un empleado permanece en servicio hasta la edad de retiro obligatorio, 70 años, el miembro recibe una pensión anual equivalente a 300 veces los años de servicio. Si el empleado muere en servicio antes del retiro obligatorio, se le paga al beneficiario 20,000 inmediatamente. Si el empleado se sale antes del retiro por cualquier razón excepto por muerte, el miembro recibe una anualidad vitalicia diferida que empieza a la edad de 70 años y cuyo beneficio es equivalente a 300 veces los años de servicio. Establecer una expresión en términos de integrales y anualidades continuas, para el valor presente actuarial de estas indemnizaciones.

$j = 1$ salida por fallecimiento
$j = 2$ retiro por cualquier razón

$$20,000\int_0^{40} v^t\,{}_tp_{30}^{(\tau)}\mu_{30}^{(1)}(t)\,dt + 300\int_0^{40} v^t\,{}_tp_{30}^{(\tau)}\mu_x^{(2)}(t)\cdot t\ {}_{40-t}|\bar{a}_{30+t}\,dt + 12,000v^{40}\,{}_{40}p_{30}^{(\tau)}\bar{a}_{70}$$

Ejemplo 4.9.2: Encontrar el valor presente actuarial y la varianza de un seguro temporal a 20 años, el cual paga 2 unidades monetarias se la muerte del asegurado es ocasionada por un accidente y una unidad monetaria si la muerte se debe a otra causa. Los datos de los que se dispone son: $\delta = 0.05$, la fuerza de decremento por muerta accidental $\mu_x^{(1)}(t) = 0.005$ y la fuerza de decremento por otra causa $\mu_x^{(2)}(t) = 0.020$, ambas con $t \geq 0$.

Se trata de un seguro como el introducido en (4.9.2)

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(1)}(t)\,dt + \int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(2)}(t)\,dt$$

donde

$j = 1$ muerte accidental
$j = 2$ muerte por otra causa

Se requiere obtener ${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds}$ y como $\mu_x^{(\tau)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} = 0.005 + 0.020 = 0.075$ es una constante, entonces ${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-t\mu_x^{(\tau)}(t)}$. De manera que

$$\bar{A} = 2\int_0^n e^{-\delta t}e^{-t\mu_x^{(\tau)}(t)}\mu_x^{(1)}(t)\,dt + \int_0^n e^{-\delta t}e^{-t\mu_x^{(\tau)}(t)}\mu_x^{(2)}(t)\,dt$$

sustituyendo los valores

$$\begin{aligned}\bar{A} &= 2(0.005)\int_0^{20} e^{-0.05t}e^{-0.025\cdot t}dt + 0.020\int_0^{20} e^{-0.05t}e^{-0.025\cdot t}dt \\ &= 2(0.005)\int_0^{20} e^{-0.075t}dt + 0.020\int_0^{20} e^{-0.075t}dt \\ &= 0.010\left[\frac{e^{-1.5}}{-0.075} + \frac{1}{0.075}\right] + 0.020\left[\frac{e^{-1.5}}{-0.075} + \frac{1}{0.075}\right] \\ &= 0.31075\end{aligned}$$

La varianza esta dada por $Var\left(\bar{A}\right) = {}^{2\delta}\bar{A} - \left(\bar{A}\right)^2$

$$\begin{aligned}{}^{2\delta}\bar{A} &= 4\int_0^n e^{-2\delta t}e^{-t\mu_x^{(\tau)}(t)}\mu_x^{(1)}(t)\,dt + \int_0^n e^{-2\delta t}e^{-t\mu_x^{(\tau)}(t)}\mu_x^{(2)}(t)\,dt \\ &= 0.02\int_0^{20} e^{-0.10t}e^{-0.025\cdot t}dt + 0.020\int_0^{20} e^{-0.10t}e^{-0.025\cdot t}dt \\ &= 0.02\left[\frac{e^{-2.5}}{-0.125} + \frac{1}{0.125}\right] + 0.020\left[\frac{e^{-2.5}}{-0.125} + \frac{1}{0.125}\right] \\ &= 0.2937\end{aligned}$$

de manera que $Var\left(\bar{A}\right) = 0.2937 - (0.31075)^2 = 0.1971$

4.10 Valores Conmutados para las Funciones de Decremento Múltiple

A continuación se presentan las expresiones de valores conmutados para funciones de decremento múltiple.

$$D_x^{(\tau)} = v^x l_x^{(\tau)}$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}^{(\tau)} = N_x^{(\tau)}$$
$$C_x^{(k)} = v^{x+1} d_x^{(k)}$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}^{(k)} = M_x^{(k)}$$

por lo tanto el valor presente de una anualidad anticipada unitaria, pagadera durante la permanencia de (x) en el grupo de sobrevivientes, definido por el modelo de salidas múltiples, se expresa por

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}}$$

El valor presente actuarial de una prestación a favor de (x), pagadera al final del año en que abandone el grupo de sobrevivientes, por la causa (j), se denota por

$$A_x^{(j)} = \frac{M_x^{(j)}}{D_x^{(\tau)}}$$

Si el beneficio es pagadero al momento en que ocurre el fallecimiento, se denota por

$$\bar{A}_x^{(j)} = \frac{\bar{M}_x^{(j)}}{D_x^{(\tau)}}$$

donde $\bar{M}_x^{(\tau)} = \frac{i}{\delta} M_x^{(j)}$

4.11 Ejercicios Capítulo 4

1. Sea $\mu_x^{(j)}(t) = \mu_x^{(j)}(0) \quad j = 1,2,\cdots,m \quad t \geq 0$. Obtener expresiones para

   a. $f_{T,J}(t, j)$
   b. $f_J(j)$
   c. $f_T(t)$

   Demuestre que T y J son v.a. independientes

2. En un modelo de doble decremento, se tienen las siguientes fuerzas de decremento

$$\mu_x^{(1)}(t) = \frac{1}{100-(x+t)}$$

y

$$\mu_x^{(2)}(t) = \frac{2}{100-(x+t)} \qquad t < 100 - x$$

si $x = 50$, obtener las expresiones para

a. $f_{T,J}(t, j)$
b. $f_J(j)$
c. $f_T(t)$
d. $f_{J|T}(j|t)$

3. Usando la siguiente tabla de probabilidades de decremento múltiple

X	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08
69	0.06	0.09
70	0.00	1.00

Evaluar las siguientes probabilidades

a. ${}_3 p_{65}^{(\tau)}$
b. ${}_{3|} q_{65}^{(1)}$

4. Para un modelo de tres posibles decrementos, se sabe que

a. Cada decremento tiene un tanto instantáneo de salida, constante para cada año
b. Se dispone de los siguientes valores

j	$\mu_x^{(k)}$
1	0.2
2	0.4
3	0.6

Determinar $q_x^{(3)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(3)}(t)\,dt$

5. Considérese un modelo con tres causas de decremento, los tantos instantáneos de decremento están dados por las siguientes relaciones:

$$\mu_x^{(1)}(t)=\frac{1}{50};\qquad \mu_x^{(2)}(t)=\frac{t}{50}\quad \text{y}\quad \mu_x^{(3)}(t)=\frac{t^2}{50}$$

Se pide determinar la probabilidad ${}_2p_x^{(\tau)}$ del modelo.

6. Disponiendo de la siguiente información respecto a $q_x^{(j)}$

$$q_x^{(\tau)}=\frac{x}{100}\qquad q_x^{(1)}=\frac{1}{2}q_x^{(2)}\qquad l_{18}=1000$$

k = 1 si la causa del fallecimiento es cáncer
k = 2 si la causa de fallecimiento no es cáncer

Calcular la probabilidad de que una persona de 20 años fallezca de cáncer dentro de tres años

7. Las siguientes probabilidades de decremento múltiple aplican a estudiantes que ingresan a cuarto año de preparatoria

Duración Truncada Al inicio del año Académico	Pr. De Fracaso académico	Pr. De salida por Todas las demás Causa	Pr. De sobrevivencia Durante el año académico
0	0.15	0.25	0.60
1	0.10	0.20	0.70
2	0.05	0.15	0.80
3	0.00	0.10	0.90

La generación que ingresa tiene 1000 alumnos

a.¿Cuál es la esperanza del número de graduados?¿Cuál es la varianza?
b.¿Cuál es el número esperado de los que fracasarán en algún momento durante el programa del cuarto año? ¿Cuál es la varianza del número de alumnos que fracasarán?

8. Dado que $\mu_x^{(1)}=\frac{1}{(a-x)}$, $0\le x<a$, y $\mu_x^{(2)}=1$, derivar la expresión para

a. $l_x^{(\tau)}$
b. $d_x^{(1)}$
c. $d_x^{(2)}$

suponer que $l_0^{(\tau)}=a$

9. Dado que $\mu_x^{(1)}=\frac{2x}{(a-x^2)}$ $0\le x<\sqrt{a}$, y $\mu_x^{(2)}=c$ $c>0$, y $l_0^{(\tau)}=1000$, derivar la expresión para $l_x^{(\tau)}$

10. Obtener las siguientes expresiones:

a. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(\tau)}$

b. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(j)}$

c. $\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)}$

11. Si $\mu_x^{(1)}(t)$ es una constante c para $0 \le t \le 1$, dar expresiones en términos de c y ${}_tp_x^{(\tau)}$ para

a. $q'^{(1)}_x$

b. $m_x^{(1)}$

c. $q_x^{(1)}$

12. Ordenar $q'^{(j)}_x$, $q_x^{(j)}$ y $m'^{(j)}_x$ en términos de magnitud y dar razones

13. Calcular $q_{40}^{(\tau)}$, sabiendo que $q'^{(1)}_{40} = 0.02$ y $q'^{(2)}_{40} = 0.4$

14. Para una tabla de decremento doble, con $m_{40}^{(\tau)} = 0.2$ y $q'^{(1)}_{40} = 0.1$. Calcular $q'^{(2)}_{40}$ suponiendo

a. distribución uniforme de los decrementos en el modelo de decremento múltiple
b. distribución uniforme de los decrementos en las tablas asociadas de decremento simple

15. Considerar que un decremento puede deberse a muerte (1), incapacidad (2) o retiro (3). Utilizar (4.6.6) para construir una tabla de decremento con base en las siguientes tasas absolutas

Edad x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
62	0.020	0.030	0.200
63	0.022	0.034	0.100
64	0.028	0.040	0.120

16. Señalar argumentos para las siguientes relaciones

a. $m'^{(j)}_x \cong m_x^{(j)}$

b. $\frac{q'^{(j)}_x}{1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q'^{(\tau)}_x}$

Demostrar que las expresiones anteriores conducen a

c. $q_x^{(j)} \cong \frac{q'^{(j)}_x\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)q_x^{(\tau)}\right]}{1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x}$

d. $q'^{(j)}_x \cong \frac{q_x^{(j)}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(q_x^{(\tau)}-q_x^{(j)}\right)}$

17. De las siguientes proposiciones cuales son aceptables

a. $q_x^{(j)} \cong \frac{m_x^{(j)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(j)}}$

b. $\int_0^1 l_x^{(j)} dx \cong \dfrac{l_x^{(\tau)}}{1+\left(\frac{1}{2}\right) m_x^{(\tau)}}$

c. $q_x^{(1)} = q'^{(1)}_x \left[1-\left(\frac{1}{2} q'^{(2)}_x\right)\right]$ en una tabla de decremento doble en donde existen una distribución uniforme del decremento para la edad *x* y *x+1* para cada una de las tablas asociadas de decremento simple.

18. Demuestre que $\mu_x^{(j)}\left(1/2\right) = m_x^{(j)}$, bajo el supuesto de distribución uniforme de cada decremento para cada año de edad, en un contexto de decremento múltiple.

19. ¿Cómo procedería para construir una tabla de decremento múltiple si las tasas dadas fueran

a. $q'^{(1)}_x$, $q'^{(2)}_x$ y $q_x^{(3)}$

b. $q'^{(1)}_x$, $q_x^{(2)}$ y $q_x^{(3)}$

20. En una tabla de doble decremento, en donde la causa 1 es la muerte y la causa 2 es el retiro, se supone que

a. los fallecimientos en el año h a h+1 están distribuidos uniformemente.

b. las salidas en el año h a h+1 ocurren inmediatamente después de alcanzar la edad h.

En la tabla se tiene que a edad 50, $l_{50}^{(\tau)} = 1000$, $q_{50}^{(2)} = 0.2$ y $d_{50}^{(1)} = 0.06 d_{50}^{(2)}$. Determinar $q'^{(1)}_{50}$

21. Suponiendo que la prima neta única de 400 u.m. corresponde a un seguro de vida entera afectado por una sólo fuerza instantánea de muerte constante. El beneficio es de 1000 u.m. y el tanto instantáneo de capitalización es del 6%. Si se cambia la hipótesis a un modelo de doble salida con $\mu_x^{(1)}(t) = \mu_x(t)$ y $\mu_x^{(2)} = 2\mu_x^{(1)}$. Asimismo se supone que la prestación y el tanto instantáneo permanecen invariables y que el beneficio es pagadero al ocurrir cualquiera de las salidas. Determinar la Prima neta única mediante el modelo de doble decremento.

5. CONCLUSIONES

Al inicio del trabajo se indicó que el objetivo es exponer de manera clara y alcanzable los contenidos de la materia Cálculo Actuarial II. Para ello se consultó la bibliografía registrada al final. Esta puede agruparse en:

- Textos cuyo desarrollo se da con el método determinista (los más antiguos)
- Textos cuyo desarrollo que se da con el método probabilista (los de reciente publicación)

El primer grupo contribuye a presentar los conceptos de forma intuitiva, obteniendo un primer acercamiento de fácil comprensión. Sin embargo los alcances de ese método son limitados, basta con desear obtener una varianza para comprobarlo. El método determinista, utilizado por el segundo grupo, es más completo, además de ser la base del método estocástico. Método que se espera predomine en los futuros años.

El libro de Bowers conocido en el ambiente actuarial es de gran actualidad, elaborado por expertos en la materia. El libro de Booth P., Chadbum es otro trabajo actual, que introduce a los procesos estocásticos, sin embargo no se detiene a desarrollar procedimientos. Aunque en general, el resto de la bibliografía no se ha actualizado, es de gran utilidad para la comprensión de los temas.

La unificación de notación, la disposición y el desarrollo de los procedimientos que he hecho en esta tesina, esperan que el estudiante que se enfrenta a ellos por primera vez, tenga una mejor comprensión de ellos.

El desarrollo y la exposición de los temas se da de la siguiente forma: método determinista, método probabilista, ejemplos y finalmente ejercicios.

Se consideraron los valores conmutados por ser parte del método determinista y por ser la forma de evaluación utilizada anteriormente. Puede carecer de eficiencia pero en su momento fue considerado el método de evaluación, de ahí la importancia de su inclusión en esta tesina.

En el desarrollo del trabajo se supusieron, variables aleatorias independientes como en casi toda la bibliografía consultada. Esto facilita el desarrollo de los cálculos, además de coincidir con los resultados obtenidos por el método determinista.

En el primer capítulo se presentaron conceptos de álgebra de conjuntos, probabilidad y cálculo actuarial de vidas individuales. Los cuadros 1.1 a 1.6 del anexo, corresponden también al desarrollo de este primer capítulo. Su inclusión en conjunto, es de gran importancia y utilidad para el resto del trabajo, pues constituye la base de los estatus de vidas múltiples.

En el capítulo 2 se desarrolló el estatus de vida conjunta y el estatus de último sobreviviente. En este se hace referencia al capítulo 1, debido a que un estatus de último sobreviviente comprende vidas individuales y estatus de vida conjunta.

En el capítulo 3 se presentaron los estatus para exactamente *k* y al menos *k* vidas. Para estos temas se desarrollaron el método de la Z y los teoremas y corolarios presentados en *Bowers* (fórmula de Schuette-Nesbitt). También se incluyeron en este capítulo anualidades testamentarias y funciones contingentes, de donde tomó nombre el capítulo. Estos temas tienen mucha similitud por indicarse el orden en el que deben ocurrir los fallecimientos.

Los modelos de decremento múltiple se desarrollaron en el capítulo 4 bajo los mismos lineamientos que los anteriores capítulos. A través de su desarrollo se observó que un modelo de decremento múltiple puede verse como un estatus de vida conjunta. Este último capítulo sienta las bases para el desarrollo de la metodología utilizada en los planes de pensiones.

Para la elaboración de esta tesina se revisó con detenimiento cada texto y se hizo uso de la claridad, didáctica, profundidad y actualidad de cada uno de ellos. Para lograr un trabajo homogéneo se unificó la notación, se dispuso de los métodos probabilista y determinista, en ese orden, aumentando gradualmente la dificultad. En ocasiones se desarrollaron con detalle los procedimientos, evitando dejar dudas en el lector. Se retomaron los ejercicios propuestos por esta bibliografía y se propuso resolverlos con las Tablas Ilustrativas que se encuentran en el Anexo, las cuales fueron elaboradas con datos de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Este material no pretendió desarrollar nuevos métodos, como los realizados por los expertos de la materia. Se trata de un manual para la materia Cálculo Actuarial II, que puede ayudar a comprender con mejor claridad los libros especializados de la materia, que dejan de lado las cuestiones elementales y el desarrollo de los procedimientos, por tratarse de libros dirigidos a toda la comunidad actuarial. La bibliografía menos reciente, tiene el gran valor de contener las bases y fundamentos de la materia aunque carece de actualidad. Existen libros que solo presentan los resultados de los procedimientos, generando confusión en quienes los desconocen. Utilicé la bibliografía básica cuyos métodos y ejemplos contribuyen a una clara comprensión de los desarrollos presentados por la bibliografía actual, pues estoy convencida de que conocer las bases ayuda a asimilar y mejorar actuales procedimientos.

6. RESPUESTA A LOS EJERCICIOS

Capítulo 2

1. De
   a) $\Pr(T > n) = {}_n p_{xy} = {}_n p_x \, {}_n p_y$
   b) $\Pr[T(x) > n \text{ y } T(y) \le n \text{ o } T(y) > n \text{ y } T(x) \le n]$
   $$= {}_n p_x \left(1 - {}_n p_y\right) + {}_n p_y \left(1 - {}_n p_x\right)$$
   $$= {}_n p_x + {}_n p_y - 2 \, {}_n p_x \, {}_n p_y$$
   c) Pr [al menos una sobreviva] =1-Pr[ninguna sobreviva]
   $$= 1 - \Pr\{\max\left[T(x), T(y)\right] \le n\}$$
   $$= 1 - {}_n q_{\overline{xy}} = {}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}$$
   d) $\Pr\left[T(x) \le n\right] = {}_n q_{xy} = 1 - {}_n p_{xy} = 1 - {}_n p_x \, {}_n p_y$
   e) Pr [al menos una muera] =1-Pr [ambos sobrevivan] $= 1 - {}_n p_x \, {}_n p_y$
   f) $\Pr\left[T(x) \le n \quad y \quad T(y) \le n\right] = {}_n q_x \, {}_n q_y = \left(1 - {}_n p_x\right)\left(1 - {}_n p_y\right) = 1 - {}_n p_x - {}_n p_y + {}_n p_{xy}$

2.
   a) ${}_{n|}q_x \, {}_{n|}q_y \, {}_{n|}q_z$
   b) $\left(1 - {}_{n|}q_x\right)\left(1 - {}_{n|}q_y\right)\left(1 - {}_{n|}q_z\right)$
   c) 1-$\left[\left(1 - {}_{n|}q_x\right)\left(1 - {}_{n|}q_y\right)\left(1 - {}_{n|}q_z\right)\right]$

3. La Probabilidad buscada es

$${}_n p_x \, {}_{n-1} p_y = p_x \, {}_{n-1} p_{x+1} \, {}_{n-1} p_y = p_x \, {}_{n-1} p_{x+1:y}$$

Por otro lado

$${}_n p_{y-1} = p_{y-1} \, {}_{n-1} p_y$$

Entonces

$${}_{n-1} p_y = \frac{{}_n p_{y-1}}{p_{y-1}}$$

Obteniendo

$$\frac{{}_n p_{x:y-1}}{p_{y-1}}$$

4.
   a) Se paga la anualidad si se encuentran con vida todos los miembros que componen el estatus
   b) Se paga la anualidad en tanto al menos un miembro sobreviva

5. $18\left({}_{1/3}q_{xy}\right)-12\left({}_{1/2}q_{xy}\right)=18\left(1-{}_{1/3}p_{xy}\right)-12\left(1-{}_{1/2}p_{xy}\right)$

$$=18\left(1-{}_{1/3}p_{x}\,{}_{1/3}p_{y}\right)-12\left(1-{}_{1/2}p_{x}\,{}_{1/2}p_{y}\right)$$
$$=18\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_x\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_y\right)\right]-12\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_y\right)\right]$$
$$=18\left(1-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}p_x-\frac{2}{9}p_y-\frac{1}{9}p_{xy}\right)-12\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}p_x-\frac{1}{4}p_y-\frac{1}{4}p_{xy}\right)$$
$$=\left(10-4p_x-4p_y-2p_xp_y\right)-\left(9-3p_x-3p_y-3p_{xy}\right)$$
$$=1-p_x-p_y+p_{xy}=1-\left(p_x+p_y-p_{xy}\right)$$
$$=1-p_{\overline{xy}}=q_{\overline{xy}}$$

6. Se pide encontrar ${}_{35}p_{40}$.

Obsérvese que ${}_{25}p_{25:50}={}_{25}P_{25:25}P_{50}={}_{50}P_{25}$, además ${}_{15}p_{25}\,{}_{35}p_{40}={}_{50}p_{25}$

de donde ${}_{35}p_{40}=\dfrac{{}_{50}p_{25}}{{}_{15}p_{25}}=\dfrac{0.2}{0.9}=\dfrac{2}{9}$

7.

$$\begin{aligned}{}_tp_{\overline{xy}}&=1-q_{\overline{xy}}\\&=1-{}_tq_{x\,t}q_y\\&=1-\left(1-{}_tp_x\right)\left(1-{}_tp_y\right)\\&=1-\left(1-{}_tp_x-{}_tp_y+{}_tp_{x\,t}p_y\right)\\&={}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{x\,t}p_y\\&={}_tp_x+{}_tp_y-2{}_tp_{x\,t}p_y+{}_tp_{xy}\\&={}_tp_x\left(1-{}_tp_y\right)+{}_tp_y\left(1-{}_tp_x\right)+{}_tp_{xy}\end{aligned}$$

${}_tp_{\overline{xy}}$ indica la probabilidad de que al menos un miembro sobreviva *t* años, es decir, que sobreviva *x* y muera *y* o que sobreviva *y* y muera *x*, o bien, que sobrevivan los dos.

8.

a) $d_{xy}=kd_xd_y$ Incorrecta

$$\begin{aligned}d_{xy}&=l_{xy}-l_{x+1:y+1}\\&=kl_xl_y-kl_{x+1}l_{y+1}\\&=k\left(l_xl_y-l_{x+1}l_{y+1}\right)\end{aligned}$$

Por otra parte

$$kd_xd_y=k\left(l_x-l_{x+1}\right)\left(l_y-l_{y+1}\right)$$

b) $\mu_{xy} = k\mu_x\mu_y$ Incorrecta

$$
\begin{aligned}
\mu_{xy} &= -D\ln\left[l_{xy}\right] \\
&= -D\ln\left[kl_xl_y\right] \\
&= -D\left\{\ln(k)+\ln(l_x)+(l_y)\right\} \\
&= 0+\mu_x+\mu_y \\
&= \mu_x+\mu_y
\end{aligned}
$$

c) $p_{xy} = p_x p_y$ Correcta

$$
\begin{aligned}
p_{xy} &= \frac{l_{x+1:y+1}}{l_{xy}} \\
&= \frac{l_{x+1}l_{y+1}}{l_xl_y} \\
&= \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{y+1}}{l_y} \\
&= p_xp_y
\end{aligned}
$$

d) $q_{xy} = q_xq_y$ Incorrecta

$$
\begin{aligned}
q_{xy} &= \frac{d_{xy}}{l_{xy}} \\
&= \frac{l_{xy}-l_{x+1:y+1}}{l_{xy}} \\
&= 1-p_{xy}
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
q_xq_y &= (1-p_x)(1-p_y) \\
&= 1-p_x-p_y+p_{xy}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$q_{xy} \neq q_xq_y$$

9. Pr[al menos uno muera en el año (n+1)] =1-Pr[ninguno muera en el años (n+1)]

=1-{1-Pr[x muera en (n+1)]}{1-Pr[y muera (n+1)}

$$=1-\left(1-{}_n p_x+{}_{n+1} p_x\right)\left(1-{}_n p_y+{}_{n+1} p_y\right)$$
$$=1-\left(1-{}_{n|}q_x-{}_{n|}q_y+{}_{n|}q_x\,{}_{n|}q_y\right)$$
$$={}_{n|}q_x+{}_{n|}q_y-{}_{n|}q_x\,{}_{n|}q_y$$

${}_{n|}q_{xy}$ es la probabilidad de que la segunda muerte, ya sea x o y, ocurra en el (n+1)-ésimo año, que es diferente a la probabilidad pedida.

$${}_{n|}q_{\overline{xy}}={}_{n|}q_x+{}_{n|}q_y-{}_{n|}q_{xy}\neq{}_{n|}q_x+{}_{n|}q_y-{}_{n|}q_x\,{}_{n|}q_y$$

10.

a. $1-\dfrac{1}{(1+s)^{n-2}}-\dfrac{1}{(1+t)^{n-2}}+\dfrac{1}{(1+s+t)^{n-2}} \quad s>0,\ t>0$

b. $f_{T(x)}(s)=\dfrac{n-2}{(1+s)^{n-1}} \qquad s>0$

$F_{T(x)}(s)=1-\dfrac{1}{(1+s)^{n-2}} \qquad s>0$

$\mu(x+s)=\dfrac{n-2}{1+s} \qquad s>0$

c. $\operatorname{cov}\left[T(x)T(y)\right]=\dfrac{1}{(n-4)(n-3)^2}$

d. $s_{T(x)T(y)}(s,t)=\dfrac{1}{(1+s+t)^{n-2}} \qquad s\geq 0,\ t\geq 0$

11.

$$F_{T(x)T(y)}(s,t)=\left[1-\frac{1}{(1+s)^{n-2}}\right]\left[1-\frac{1}{(1+t)^{n-2}}\right] \quad s>0, t>0$$

$$s_{T(x)T(y)}(s,t)=\frac{1}{(1+s)^{n-2}}\frac{1}{(1+t)^{n-2}} \qquad s>0, t\geq 0$$

12.

$$\frac{d}{dx}\overset{0}{e}_{xx}=\frac{d}{dx}\int_0^\infty {}_t p_{xx}dt=\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left({}_t p_x\right)^2$$
$$=\int_0^\infty 2\,{}_t p_x\left\{{}_t p_x\left[\mu(x)-\mu(x+t)\right]\right\}dt$$
$$=2\mu(x)\int_0^\infty {}_t p_{xx}dt-2\int_0^\infty {}_t p_x\mu(x+t)dt$$
$$=2\mu(x)\overset{0}{e}_{xx}-1$$

13. Hay que obtener ${}_t p_x=e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}=\exp\left[-\int_0^t(100-x-s)^{-1}ds\right]$

$$=\exp\left[\ln(100-x-s)\Big|_0^t\right]=1-\frac{t}{100-x}$$

También se usará ${}_t p_x \mu_{x+t} = \dfrac{1}{100-x}$

Entonces ${}_t p_{40} = 1 - \dfrac{t}{60}$ y ${}_t p_{50} = 1 - \dfrac{t}{50}$

${}_t p_{40}\mu_{40+t} = \dfrac{1}{60}$ y ${}_t p_{50}\mu_{50+t} = \dfrac{1}{50}$

a. ${}_{10} p_{40:50} = {}_{10} p_{40}\, {}_{10} p_{50} = \left(1 - \dfrac{10}{60}\right)\left(1 - \dfrac{10}{50}\right) = \dfrac{50}{60}\dfrac{40}{50} = \dfrac{2}{3}$

b. ${}_{10} p_{\overline{40:50}} = {}_{10} p_{40} + {}_{10} p_{50} - {}_{10} p_{40:50} = \dfrac{50}{60} + \dfrac{40}{50} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{29}{30}$

La función de distribución de probabilidad de T = T(40:50) es

$${}_t p_{40:50}\mu_{40+t:50+t} = {}_t p_{40}\, {}_t p_{50}\left(\mu_{40+t} + \mu_{50+t}\right)$$

$$= \frac{60-t}{60}\frac{50-t}{50}\left(\frac{1}{60-t} + \frac{1}{50-t}\right) = \frac{55-t}{1500}, 0 \le t \le 500$$

Entonces

c. $\overset{0}{e}_{40:50} = E[T] = \dfrac{1}{1500}\displaystyle\int_0^{50} t(55-t)\,dt = \dfrac{1}{1500}\left[\dfrac{55}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}t^3\Big|_0^{50}\right] = 18.06$

d. $\overset{0}{e}_{\overline{40:50}} = \overset{0}{e}_{40} + \overset{0}{e}_{50} - \overset{0}{e}_{40:50} = \displaystyle\int_0^{60}\left(1 - \frac{1}{60}\right)dt + \int_0^{50}\left(1 - \frac{t}{50}\right)dt - 18.06$

$$= \left(60 - \frac{(60)^2}{120}\right) + \left(50 - \frac{(50)^2}{100}\right) - 18.06 = 36.94$$

e. $E\left[T^2\right] = \dfrac{1}{500}\displaystyle\int_0^{50} t^2(55-t)\,dt = \dfrac{1}{500}\left[\dfrac{55}{3}t^3 - \dfrac{1}{4}t^4\Big|_0^{50}\right] = 486.111$

Entonces $Var(T) = E\left[T^2\right] - \{E[T]\}^2 = (486.11) - (18.06)^2 = 160.11$

f. $E[T]^2 = \displaystyle\int_0^{60}\frac{t^2}{60}dt + \int_0^{50}\frac{t^2}{50}dt - 486.111 = \frac{(60)^2}{180} + \frac{(50)^2}{150} - 486.11 = 1547.222$

Entonces $Var(T) = 1547.222 - (36.94)^2 = 182.66$

g. $Cov\left[T(40:50), T\left(\overline{40:50}\right)\right] = \overset{0}{e}_{40}\, \overset{0}{e}_{50} - \overset{0}{e}_{40:50}\, \overset{0}{e}_{\overline{40:50}}$

$$= \int_0^{60}\left(1 - \frac{t}{60}\right)dt \int_0^{60}\left(1 - \frac{t}{50}\right)dt - (18.06)(36.94)$$

$$= (30)(25) - (18.06)(36.94) = 82.86$$

14. La probabilidad de que ambas vidas mueran en el *t*-ésimo año es

$$ {}_{t-1|}q_{30}\ {}_{t-1|}q_{40} = \left({}_{t-1}p_{30} - {}_{t}p_{30}\right)\left({}_{t-1}p_{40} - {}_{t}p_{40}\right) $$

sobre todos los valores de *t*

$$ \sum_{t=1}^{\infty}\left({}_{t-1}p_{30:40} - {}_{t}p_{30}\ {}_{t-1}p_{40} - {}_{t}p_{40}\ {}_{t-1}p_{30} + {}_{t}p_{30:40}\right) $$

$$ \sum_{t=1}^{\infty}\left({}_{t-1}p_{30:40} - p_{30}\ {}_{t-1}p_{31:40} - p_{40}\ {}_{t-1}p_{30:41} + p_{30:40}\ {}_{t-1}p_{31:41}\right) $$

$$ \sum_{t=1}^{\infty}{}_{t-1}p_{xy} = 1 + \sum_{t=1}^{\infty}{}_{t}p_{xy} = 1 + e_{xy} $$

entonces

$$ 1 + e_{30:40} - p_{30}\left(1 + e_{31:40}\right) - p_{40}\left(1 + e_{30:41}\right) + p_{30:40}\left(1 + e_{31:41}\right) $$

15. La probabilidad de que ambos mueran a la edad 40+t en el último cumpleaños es

$$ \left({}_{10+t}p_{30} - {}_{11+t}\ p_{30}\right)\left({}_{t}p_{40} - {}_{t-1}\ p_{40}\right) $$

sobre todos los valores de *t*

$$ \sum_{t=1}^{\infty}\left({}_{10+t}p_{30} - {}_{11+t}\ p_{30}\right)\left({}_{t}p_{40} - {}_{t-1}\ p_{40}\right) $$

$$ = \sum_{t=0}^{\infty}\left({}_{10}p_{30}\ {}_{t}p_{40:40} - {}_{11}\ p_{30}\ {}_{t}p_{41:40} - {}_{10}\ p_{30}p_{40}\ {}_{t}p_{40:41} + {}_{11}\ p_{30}p_{40}\ {}_{t}p_{41:41}\right) $$

$$ = {}_{10}\ p_{30}\left(1 + e_{40:40}\right) - 2\,{}_{11}p_{30}\left(1 + e_{40:41}\right) + {}_{11}\ p_{30}p_{40}\left(1 + e_{41:41}\right) $$

16. Para $0 < t < 20$ la anualidad paga si cualquiera esta con vida, ya qua ambos están bajo 50. Para $20 < t < 25$, la anualidad paga sólo si (25) esta con vida.

$$ \int_0^{20} v^t\,{}_{t}p_{\overline{25:30}}dt + \int_{20}^{25} v^t\,{}_{t}p_{25}dt = \int_0^{20} v^t\,{}_{t}p_{25}dt + \int_0^{20} v^t\,{}_{t}p_{30}dt - \int_0^{20} v^t\,{}_{t}p_{25:30}dt + \int_{20}^{25} v^t\,{}_{t}p_{25}dt $$

$$ = \bar{a}_{25:\overline{25}|} + \bar{a}_{30:\overline{20}|} - \bar{a}_{25:30:\overline{20}|} $$

17. La anualidad paga para k=21,...,25 sólo si (30) está con vida, y para k=26,... si cualquiera de los dos vive

$$ vpa = \sum_{k=21}^{25} v^k\,{}_{k}p_{30} + \sum_{k=26}^{\infty} v^k\,{}_{k}p_{\overline{25:30}} $$

$$ = \sum_{k=21}^{\infty} v^k\,{}_{k}p_{30} + \sum_{k=26}^{\infty} v^k\,{}_{k}p_{25} - \sum_{k=26}^{\infty} v^k\,{}_{k}p_{25:30} $$

$$ = {}_{20|}a_{30} + {}_{25|}a_{25} - {}_{25|}a_{25:30} $$

18.

$$vpa=\sum_{n=0}^{n-1} v^k\left[{}_k p_{xy}+\tfrac{1}{2}\,{}_k p_y\left(1-{}_k p_x\right)+\tfrac{1}{3}\,{}_k p_x\left(1-{}_k p_y\right)\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1} v^k\left(\tfrac{1}{2}\,{}_k p_y+\tfrac{1}{3}\,{}_k p_x+\tfrac{1}{6}\,{}_k p_{xy}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\,\overline{a}_{y:\overline{n}|}+\tfrac{1}{3}\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}+\tfrac{1}{5}\,\overline{a}_{xy:\overline{n}|}$$

19. Para $t<5$ no paga, ya que ninguno tiene mas de 60. Para $5<t<15$ paga si (55) esta viva y (40) esta muerta; $15<t<20$ si (55) esta viva; $t>20$ si cualquiera de los dos esta con vida.

Por lo tanto

$$vpa=\int_5^{15} v^t\,{}_t p_{55}\left(1-{}_t\, p_{40}\right)dt+\int_{15}^{20} v^t\,{}_t p_{55}dt\int_{20}^{\infty} v^t\,{}_t p_{\overline{55:40}}dt$$
$$=\int_5^{\infty} v^t\,{}_t p_{55}dt+\int_{20}^{\infty} v^t\,{}_t p_{40}dt-\int_5^{15} v^t\,{}_t p_{40:50}dt-\int_{20}^{\infty} v^t\,{}_t p_{40:55}dt$$
$$={}_5|\overline{a}_{55}+{}_{20}|\overline{a}_{40}-{}_5|_{10}\,\overline{a}_{40:55}-{}_{20}|\overline{a}_{40:55}$$

20.

a. Como $(ww)\equiv(xy)$, entonces ${}_t p_{ww}=\left({}_t p_w\right)^2={}_t\, p_{xy}={}_t\, p_x\,{}_t p_y$, de donde

$${}_t p_{ww}=\left({}_t p_x\,{}_t p_y\right)^{1/2}\text{ que es la media geométrica}$$

b. Considérese $\left[{}_t p_x^{1/2}-{}_t\, p_y^{1/2}\right]^2>0$ que es positiva por estar elevada al cuadrado, entonces $\left[{}_t p_x-2\left({}_t p_x\,{}_t p_y\right)^{1/2}+{}_t\, p_y\right]$, de donde

$$p_x+{}_t\, p_y>2\left({}_t p_{xy}\right)^{1/2}=2\left({}_t p_{ww}\right)^{1/2}=2{}_t\, p_w$$

c.Como $p_x+{}_t\, p_y>2{}_t\, p_w$ y ${}_t p_{xy}={}_t p_{ww}$,

entonces ${}_t p_x+{}_t\, p_y-{}_t\, p_{xy}>{}_t\, p_w+{}_t\, p_w-{}_t\, p_{ww}$

de donde ${}_t p_{\overline{xy}}>{}_t\, p_{\overline{ww}}$ y $a_{\overline{xy}}>a_{\overline{ww}}$

21. De la expresión general $a_{\overline{uv}}=a_u+a_v-a_{uv}$ se tiene $a_{xy}+a_{\overline{n}|}-a_{xy:\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}+{}_n|a_{xy}$

El beneficio que indica es una anualidad vencida pagadera a la primera muerte de entre x y y o al cumplimiento de n años, cualquiera que sea el último evento en ocurrir.

22. $\overline{A}_{\overline{x:\overline{n}|}}=\overline{A}_x+\overline{A}_{\overline{n}|}-\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ donde $\overline{A}_{\overline{n}|}=v^n$

a. bien considerando $z=\begin{cases} v^n & T<n \\ v^T & T>n\end{cases}$

$$\overline{A}_{\overline{x:\overline{n}|}}=E[Z]=v^n\,{}_n q_x+{}_n|\overline{A}_x$$
$$=\overline{A}_x-\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}+v^n\left(1-{}_n\, p_x\right)$$
$$=\overline{A}_x-\left(\overline{A}_{x:\overline{n}|}-v^n\,{}_n\, p_x\right)+v^n-v^n\,{}_n\, p_x$$
$$=\overline{A}_x-\overline{A}_{x:\overline{n}|}+v^n$$

El beneficio representado por esta expresión es un seguro continuo pagadero a la muerte de x o al tiempo n cualquiera que sea el último evento en ocurrir.

23.

a. $a_{40:50} = a_{54.0155931} = 8.62304606$

b. $\ddot{a}_{30:40:50} = \ddot{a}_{55.3532831} = 9.33223234$

c. $\ddot{a}_{50:60} = \ddot{a}_{64.0155931} = 7.33801231$

d. $a_{50:55:65} = a_{71.0241692} = 4.704389$

24.

a. $a_{40:50} = a_{46.05575959:46.05575959} = 8.50186049$

b. $\ddot{a}_{30:40:50} = \ddot{a}_{45.0262781:45.0262781} = 9.7185696$

c. $\ddot{a}_{50:60} = \ddot{a}_{56.05575959:56.05575959} = 7.27003121$

d. $a_{50:55:65} = a_{58.3955925:58.3955925:58.3955925} = 4.6478439$

25.

a. $a_{40:50} = a_{54.0149344} = 8.62318864$

b. $\ddot{a}_{30:40:50} = \ddot{a}_{55.3432242} = 9.33444545$

c. $\ddot{a}_{50:60} = \ddot{a}_{64.0149344} = 7.33816792$

d. $a_{50:55:65} = a_{71.02117333} = 4.70506221$

26.

a. $a_{40:50} = a_{46.0534968:46.0534968} = 8.50233682$

b. $\ddot{a}_{30:40:50} = \ddot{a}_{42.7285934:42.7285934:42.7285934} = 9.16496372$

c. $\ddot{a}_{50:60} = \ddot{a}_{56.0534968:56.0534968} = 7.27055549$

d. $a_{50:55:60} = a_{58.3955918:58.3955918:58.3955918} = 4.64784405$

27. $A_{40:50} = A_{54.0155931} = 0.37045493$

28.

a.

$$D_{xy} = V^{\frac{x+y}{2}} l_{xy} = V^{\frac{x+y}{2}} (k) l_x l_y$$

Ahora

$$\begin{aligned} k(1+i)^{\frac{x+y}{2}} D_x D_y &= k(1+i)^{\frac{x+y}{2}} V^x l_x V^y l_y \\ &= k(1+i)^{\frac{x+y}{2}} V^{x+y} l_{xy} \\ &= kV^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y \end{aligned}$$

b.

$$
\begin{aligned}
C_{xy} &= V^{\frac{x+y}{2}+1} d_{xy} \\
&= V^{\frac{x+y}{2}+1}\left(l_{xy} - l_{x+1:y+1}\right) \\
&= VV^{\frac{x+y}{2}} l_{xy} - V^{\frac{x+1:y+1}{2}} l_{x+1:y+1} \\
&= VD_x - D_{x+1:y+1}
\end{aligned}
$$

c.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{D_{xx}D_{yy}} &= \sqrt{V^x l_{xx} V^y l_{yy}} \\
&= \sqrt{V^{x+y} k l_x l_x k l_y l_y} \\
&= \sqrt{V^{x+y} k^2 \left(l_x\right)^2 \left(l_y\right)^2} \\
&= V^{\frac{x+y}{2}} k l_x l_y \\
&= V^{\frac{x+y}{2}} l_{xy} \\
&= D_{xy}
\end{aligned}
$$

29. a. $\left({}_{10}p_{20}\right)\left({}_{10}p_{30}\right)\left({}_{10}p_{40}\right) = 0.9257$

b. $\left({}_{5}q_{45}\right)\left({}_{5}p_{40}\right) = 0.0259$

c. $\left({}_{5}p_{20}\right)\left({}_{5}p_{25}\right)\left({}_{5}p_{30}\right)\left({}_{5}p_{35}\right)\left({}_{5}q_{40}\right) = 0.0177$

30.

a. $0.9257 = \left({}_{10}p_{20}\right)\left({}_{10}p_{30}\right)\left({}_{10}p_{40}\right)$

b. $0.0259 = \left({}_{5}q_{45}\right)\left({}_{5}p_{40}\right) = {}_{5}p_{40} - {}_{10}p_{40}$

c.

$$
\begin{aligned}
0.0177 &= \left({}_{5}p_{20}\right)\left({}_{5}p_{25}\right)\left({}_{5}p_{30}\right)\left({}_{5}p_{35}\right)\left({}_{5}q_{40}\right) \\
&= {}_{20}p_{20}\left(1 - {}_{5}p_{40}\right) \\
&= {}_{20}p_{20} - {}_{25}p_{20}
\end{aligned}
$$

De 1. $0.9257 = \left({}_{20}p_{20}\right)\left({}_{10}p_{40}\right)$ A

De 2. $0.0259 = {}_{5}p_{40} - {}_{10}p_{40}$ B

De 3.

$${}_{20}p_{20} - 0.0177 = {}_{25}p_{20} \qquad \text{C}$$

Sustituyendo ${}_{10}p_{40}$ de B. en A.

$$
\begin{aligned}
&{}_{20}p_{20}\left({}_{5}p_{40} - 0.0259\right) = 0.9257 \\
&{}_{25}P_{20} - 0.0259\,{}_{20}P_{20} = 0.9257 \qquad \text{D}
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por C y D

$${}_{25}p_{20} = 0.95095$$

31.

a. $a_{\overline{20:25}} = 13.69876984$

b. $a_{\overline{20:25:30}} = 26.6697136$

Capítulo 3

1.

a. $${}_t p_{\overset{2}{\overline{wxyz}}} = \sum_{j=2}^{m} \left[(-1)^{j-2} \binom{j-1}{2-1} \right] {}_t D_j$$

$$= {}_t D_2 - \binom{2}{1} {}_t D_3 + \binom{3}{1} {}_t D_4$$
$$= {}_t D_2 - 2\,{}_t D_3 + 3\,{}_t D_4$$
$$= {}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} - 2\left({}_t p_{wxy} + {}_t p_{wxz} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz} \right) + 3\,{}_t p_{wxyz}$$

b. $${}_t p_{\overset{[2]}{\overline{wxyz}}} = \sum_{j=2}^{m} \left[(-1)^{j-2} \binom{j}{2} \right] {}_t D_j$$

$$= {}_t D_2 - \binom{3}{2} {}_t D_3 + \binom{4}{2} {}_t D_4$$
$$= {}_t D_2 - 3\,{}_t D_3 + 6\,{}_t D_4$$
$$= {}_t p_{wx} + {}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{xy} + {}_t p_{xz} + {}_t p_{yz} - 3\left({}_t p_{wxy} + {}_t p_{wxz} + {}_t p_{wyz} + {}_t p_{xyz} \right) + 6\,{}_t p_{wxyz}$$

2. ${}_t D_3 - 2\,{}_t D_4$

3.

a. ${}_t D_2 - 3\,{}_t D_3 + 6\,{}_t D_4 = {}_t p_{\overset{[2]}{\overline{wxyz}}}$

probabilidad de que exactamente 2 de 4 vidas sobrevivan al año t

b. ${}_t D_1 - 2\,{}_t D_2 + 4\,{}_t D_3 - 8\,{}_t D_4 = {}_t p_{\overset{[1]}{\overline{wxyz}}}$

probabilidad de que al menos 1 de las 4 vidas sobrevivan al año t

4. $a_{\overset{1}{w}:xyz} = a_w - \left(a_{wxy} + a_{wxz} + a_{wyz} \right) + 2a_{wxyz}$

5. $$a_{\overset{[3]}{\overline{wxyz}}} = \sum_{t=1}^{w-x} v^t\, {}_t p_{\overset{[3]}{\overline{wxyz}}} = \sum_{t=1}^{w-x} v^t \left[\sum_{j=3}^{4} (-1)^{j-3} \binom{j}{3} {}_t D_3 \right]$$
$$= \sum_{t=1}^{w-x} v^t \left[{}_t D_3 - \binom{4}{3} {}_t D_4 \right]$$
$$= \sum_{t=1}^{w-x} v^t \left[{}_t D_3 - \binom{4}{3} {}_t D_4 \right]$$
$$= a_{wxy} + a_{wyz} + a_{xyz} - 4a_{wxyz}$$

6.

a. $a_{\overset{2}{\overline{30:40:50}}} = \sum_{t=0}^{w-1} v^t \, {}_t p_{\overset{2}{\overline{30:40:50}}} = \sum_{t=0}^{w-1} v^t \left[{}_t D_2 - 2 {}_t D_3 \right]$

$$= a_{30:40} + a_{30:50} + a_{40:50} - 2a_{30:40:50}$$

b. $10,000 A_{\overset{3}{\overline{30:40:50}}} = 10,000 \left[1 - d\ddot{a}_{\overset{3}{\overline{30:40:50}}} \right]$

7.

a.

$$10a_{xyz} + 8a_{\underset{xyz}{\overline{[2]}}} + 6a_{\underset{xyz}{\overline{[1]}}}$$

$$= 10a_{wxy} + 8\left[a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} - 3a_{xyz} \right] + 6\left[a_x + a_y + a_z - 2\left(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} \right) + 3a_{xyz} \right]$$

$$= 6\left(a_x + a_y + a_z \right) - 4\left(a_{xy} + a_{xz} + a_{yz} \right) + 4a_{xyz}$$

b.

$$6a_x - 4\left(a_{xy} + a_{xz} \right) + 4a_{xyz}$$

8.

$$A_{\overline{wx:\overline{yz}}} = A_{wx} + A_{\overline{yz}} - A_{wx:\overline{yz}}$$

$$= A_{wx} + \left(A_y + A_z - A_{yz} \right) - \left(A_{wxy} + A_{wxz} - A_{wxyz} \right)$$

$$= A_y + A_z + A_{wx} - A_{yz} - A_{wxy} - A_{wxz} + A_{wxyz}$$

9.

$$A_{\overline{x:\overline{n}|}} = A_x + A_{\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}$$

$$= A_x - A_{x:\overline{n}|} + v^n$$

10.

$$12,000 a^{(m)}_{\overset{[1]}{\overline{40:35:\overline{25}|}}} = 12,000\left(a^{(12)}_{40:\overline{25}|} + a^{(12)}_{35:\overline{25}|} - 2a^{(12)}_{40:35:\overline{25}|} \right)$$

$$12,000 a_{\overset{1}{\overline{(40:\overline{25}|):(35:\overline{30}|)}}} = 12,000\left(a_{40:\overline{25}|} + a_{35:\overline{30}|} - a_{40:35:\overline{25}|} \right)$$

11.

a. $\bar{a}_{\overline{x:y:\overline{n}|}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{x:y:\overline{n}|}}$

$$= \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_{\overline{n}|} - \left(\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|} \right)$$

b. $\bar{a}_{\overline{(25:\overline{40}|):\overline{30}|}} = \bar{a}_{25:\overline{40}|} + \bar{a}_{\overline{30}|} - \bar{a}_{25:\overline{30}|}$

12. ${}_n q_{\overset{2}{x}y}$ es la probabilidad de que ambas vidas mueran dentro de *n* años, muriendo primero (x). ${}_n q_x \, {}_n p_y$ es la probabilidad de que (x) muera dentro de *n* años y que (y) muera después de n años. La suma de estas probabilidades es la probabilidad de que (x) muera primero durante *n* años y que (y) muera después de (x), durante o después de *n* años.

13.

$$\begin{aligned}{}_{\infty}q_{\overset{2}{xx}:x} &= \int_0^\infty \left({}_t p_x + {}_t p_x - {}_t p_{xx} \right) {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty \left[2_t p_x - \left({}_t p_x \right)^2 \right] {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= -2\int_0^\infty {}_t p_x d\left({}_t p_x \right) + \int_0^\infty \left({}_t p_x \right)^2 d\left({}_t p_x \right) \\ &= -2\left[\tfrac{1}{2}\left({}_t p_x \right)^2 \right]\Big|_0^\infty + \tfrac{1}{3}\left({}_t p_x \right)^3 \Big|_0^\infty \\ &= 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

14.

$${}_n q_{\overset{2}{x}x} \, {}_n p_x$$

15.

$$\begin{aligned}{}_{\infty}q_{\overset{2}{w}xyz} &= \int_0^\infty {}_t p_{\overline{wxyz}}^{[2]} \, {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left({}_t D_2 - 3_t D_3 \right) {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left({}_t p_{wy} + {}_t p_{wz} + {}_t p_{yz} - 3_t p_{wxz} \right) {}_t p_x \mu_x(t) dt \\ &= {}_{\infty}q_{\overset{1}{w}xy} + {}_{\infty}q_{\overset{1}{w}xz} + {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}yz} - 3_{\infty}q_{\overset{1}{w}xyz}\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_x \, {}_{k+1}p_y &= \sum_{k=0}^{\infty} \left({}_k p_x - {}_{k+1} p_x \right) {}_{k+1} p_y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v p_y \left(v^k {}_k p_x \, {}_k p_{y+1} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k+1} p_{xy} \\ &= v p_y \ddot{a}_{x:y+1} - a_{xy}\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}A_{\overset{1}{x}y} - A_{x\overset{2}{y}} &= A_{\overset{1}{x}y} - \left(A_y - A_{x\overset{1}{y}} \right) \\ &= A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}} - A_y \\ &= A_{xy} - A_y\end{aligned}$$

18. (x) debe morir durante n años después de la muerte de (y). Entonces (y) debe estar con vida n años precedentes a la muerte de (x), pero no al fallecimiento de (x)

$$\text{VPA} = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} \left({}_{t-n} p_y - {}_t p_y \right) \qquad \text{como } {}_{t-n} p_y = 1 \text{ para } 0 \le t \le n \text{ se tiene}$$

$$\begin{aligned}\text{VPA} &= \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} \left(1 - {}_t p_y \right) dt + \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} \left({}_{t-n} p_y - {}_t p_y \right) dt \\ &= \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} + \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} \left({}_{t-n} p_y - {}_t p_y \right) dt \\ &= \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} + {}_n E_x \int_0^\infty v^t {}_t p_{x+n} \mu_{x+n+t} \left({}_t p_y - {}_n p_y + p_{y+n} \right) dt \\ &= \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} + {}_n E_x \left[\bar{A}_{\overset{1}{x+n}:y} - {}_n p_y A_{\overset{1}{x+1}:y+n} \right] \\ &= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_n E_x A_{\overset{1}{x+n}:y} - \bar{A}_{xy}\end{aligned}$$

19.

$$\text{PNU} = \int_0^{20} v^t {}_t p_{50} \mu_{50+t} \left(1 - {}_t\, p_{20}\right) dt + \int_{20}^{\infty} v^t {}_t p_{50} \mu_{50+t} dt$$

$$= \bar{A}^{\,1}_{50:\overline{20}|} - \bar{A}^{\,1}_{50:20:\overline{20}|} + {}_{20|}\bar{A}_{50}$$

$$= \bar{A}_{50} - \bar{A}^{\,1}_{50:20:\overline{20}|}$$

20. $$\int_0^{\infty} v^t {}_t p_{xy} \mu_{y+t}\, {}_n E_{x+t} dt = \int_0^{\infty} \frac{v^{x+n}}{v^x} v^t {}_t p_{x+n:y} dt$$

$$= \frac{v^{x+n}}{v^x} \int_0^{\infty} v^t {}_n p_x\, {}_t p_{x+t}\, {}_t p_y \mu_{y+t} dt$$

$$= \frac{v^{x+n}}{v^x} \frac{l_{x+n}}{l_x} \int_0^{\infty} v^t {}_t p_{x+n}\, {}_t p_y \mu_{y+t} dt$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_x} \bar{A}_{x+n:\overset{1}{y}}$$

21.

a. Incorrecta

$$\bar{A}^{\,4}_{wxyz} = \bar{A}^{\,4}_{wxyz} + \bar{A}_{wx\overset{4}{y}z} + \bar{A}_{wx\overset{4}{y}z} + A_{wxy\overset{4}{z}}$$

b. Correcta

c. Incorrecta

$$\bar{A}_{wxy\overset{3}{z}} = \bar{A}_{w\overset{1}{z}} + \bar{A}_{x\overset{1}{z}} + \bar{A}_{y\overset{1}{z}} - 2\left(\bar{A}_{wx\overset{1}{z}} + \bar{A}_{wy\overset{1}{z}} + \bar{A}_{xy\overset{1}{z}} \right) + 3\bar{A}_{wxy\overset{1}{z}}$$

22.

$$\int_0^5 \left(1 - {}_t\, p_x\right) {}_t\, p_y \mu_{y+t} \left({}_t\, p_z - {}_{t+10}\, p_z \right) dt + \int_5^{\infty} \left({}_{t-5}\, p_x - {}_t\, p_x \right) {}_t\, p_y \mu_{y+t} \left({}_t\, p_z - {}_{t+10}\, p_z \right) dt$$

$$= {}_5 q_{\overset{1}{y}z} - {}_{\infty} q_{x\overset{1}{y}z} - {}_{10}\, p_z \left({}_5 q_{y:z+10} - {}_{\infty} q_{x\,\overset{1}{y}:z+10} \right) + {}_5\, p_{yz} \left({}_{\infty} q_{\overline{\overset{1}{x:y+5}}:z+5} - {}_{10}\, p_{z+5} \cdot {}_{\infty} q_{\overline{\overset{1}{x:y+5}}:z+15} \right)$$

23.

$$\int_0^{\infty} v^t {}_t\, p_{xy} \mu_x (t) \bar{A}_{x+t} dt$$

24.

a. Si $n \to \infty$

$${}_{\infty} q_{\overset{1}{40}:50} = A \left(1 - \frac{2c^{40}}{c^{40} + c^{50}} \right) {}^0 e_{40:50} + \frac{c^{40}}{c^{40} + c^{50}}\, {}_{\infty} q_{40:50}$$

$$= A \left(1 - \frac{2}{1 + c^{10}} \right) {}^0 e_{40:50} + \frac{1}{1 + c^{10}}$$

$$= (0.003)\left(1 - \tfrac{2}{4}\right)(17) = \tfrac{1}{4}$$

$$= (0.003)\left(\tfrac{1}{2}\right)(17) + \tfrac{1}{4}$$

$$= 0.2755$$

b.

$$\bar{A}_{\overset{1}{40}:50} = A \left(1 - \frac{2c^{40}}{c^{40} + c^{50}} \right) \bar{a}_{40:50} + \frac{c^{40}}{c^{40} + c^{50}} \bar{A}_{40:50}$$

$$= (0.003)(\tfrac{1}{2})\bar{a}_{40:50} + \tfrac{1}{4}\bar{A}_{40:50}$$
$$= \tfrac{1}{4}\bar{A}_{40:50} + 0.0015\bar{a}_{40:50}$$

25.

$$\bar{A}^{3}_{y\,xzw} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,{}_tp^{[1]}_{\overline{yzw}}\,\mu_{x+t}dt$$
$$= \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\left({}_tp_y + {}_tp_z + {}_tp_w - 2\,{}_tp_{yz} - 2\,{}_tp_{yw} - 2\,{}_tp_{zw} + 3\,{}_tp_{yzw}\right)\mu_{x+t}dt$$
$$= \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}^{1}_{xz} + \bar{A}^{1}_{xw} - 2\bar{A}^{1}_{xyz} - 2\bar{A}^{1}_{xyw} - 2\bar{A}^{1}_{xzw} + 3\bar{A}^{1}_{xyzw}$$

26.

$${}_nq_{wx\overset{2}{y}\underset{1}{z}} = \int_0^n \left(1 - {}_tp_z\right){}_tp_{wxy}\,\mu_{y+t}dt$$
$$= \int_0^n {}_tp_{wxy}\,\mu_{x+t}dt - \int_0^n {}_tp_{wxyz}\,\mu_{y+t}dt$$
$$= {}_nq_{wx\overset{1}{y}} - {}_nq_{wx\overset{1}{y}z}$$

27.

a. $\int_0^\infty \left(1 - {}_tp_w\right){}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty {}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t}dt - \int_0^\infty {}_tp_{wxyz}\,\mu_{x+t}dt$

c. ${}_\infty q^{1}_{xyz} - {}_\infty q_{w\overset{1}{x}yz}$

28.

a. Incorrecta

$$\bar{A}_{\underset{1}{w}\underset{2}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tq_w\,{}_tp_{yxz}\,\mu_{x+t}\,\bar{A}^{1}_{\overline{z+t:y+t}}\,dt$$

b. Correcta

c. Correcta

29.

a. $\bar{A}_{\underset{1}{x}y\overset{3}{z}} = \int_0^\infty {}_tq_x\,{}_tp_{yz}\,\mu_{y+t}\,\bar{A}_{z+t}dt$

$$= \int_0^\infty \left(1 - {}_tp_x\right){}_tp_{yz}\,\mu_{y+t}\,\bar{A}_{z+t}dt$$
$$= \bar{A}_{y\overset{2}{z}} + \bar{A}_{x\underset{1}{y}\overset{2:3}{z}}$$

b. $\bar{A}_{\underset{1}{w}\overset{2}{x}yz} = \int_0^\infty {}_tq_w\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t}dt$

30.

a. $a_{z|\overline{xy}} = a_{\overline{xy}} - a_{\overline{xy}:z}$

$$= a_x + a_y - a_{xy} - \left(a_{xz} + a_{yz} - a_{xyz}\right)$$

b. $a_{\overline{yz}|wx} = a_{wx} - a_{\overline{yz}:wx}$

$$= a_{wx} - \left(a_{ywx} + a_{zwx} - a_{yzwx}\right)$$
$$= a_{wx} - a_{ywx} - a_{zwx} + a_{yzwx}$$

31. Denotando por q la probabilidad buscada

$$q = 1 - \left[\left(1 - {}_{n|}q_x\right)\left(1 - {}_{n|}q_y\right)\right]$$
$$= 1 - \left[1 - {}_{n|}q_x - {}_{n|}q_y + {}_{n|}q_x\, {}_{n|}q_y\right]$$
$$= {}_{n|}q_x + {}_{n|}q_y - {}_{n|}q_x\, {}_{n|}q_y$$

Desarrollando ${}_{n|}q_{\overline{xy}} = {}_{n|}q_x - {}_{n|}q_y + {}_{n|}q_{xy}$

Por lo tanto $q \neq {}_{n|}q_{\overline{xy}}$ por que ${}_{n|}q_{xy} \neq \left({}_{n|}q_x\right)\left({}_{n|}q_y\right)$

Para el estaus de último sobreviviente no es necesario que los dos fallezcan durante el $n, n+1$ año

32.

$$a_{\overline{(25:\overline{25|}):(30:\overline{20|})}} = a_{25:\overline{25|}} + a_{\overline{30:\overline{20|}}} - a_{25:\overline{25|}:30:\overline{20|}}$$
$$= a_{25:\overline{25|}} + a_{\overline{30:\overline{20|}}} - a_{25::30:\overline{20|}}$$

33. Este seguro paga despues de n años habiendo muerto con anterioridad (x)

$$\bar{A}_{x:\overset{2}{\overline{n|}}} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \bar{A}_{\overline{n|}} = v^n$$

Por lo tanto

$$\bar{A}_{x:\overset{2}{\overline{n|}}} = v^n - \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n - v^n\, {}_n p_x = v^n\, {}_n q_x$$

34. 0.525164

35. a.132.5825
b.0.73314721

36.
a.7.4402
b.4.7614
c.1.1335

37. 0.4374

Capítulo 4

1.

a. $f(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}$

como ${}_t p_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(\tau)} ds\right]$

$= e^{-t\mu_x^{(\tau)}}$ ya que $\mu_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}$ es constante

Por lo tanto $f(t, j) = \mu_x^{(j)} e^{-t\mu_x^{(\tau)}}$

b. $f_J(j) = \int_0^{\infty} f_{T,J}(t,j)ds$

$$= \int_0^{\infty} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} ds$$

$$= \mu_x^{(j)} \int_0^{\infty} e^{-s\mu_x^{(\tau)}} ds$$

$$= -\frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} e^{-s\mu_x^{(\tau)}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}$$

c. $f_T(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{J,T}(j,t)$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)} e^{-t\mu_x^{(\tau)}}$$

$$= e^{-t\mu_x^{(\tau)}} \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}$$

$$= \mu_x^{(\tau)} e^{-t\mu_x^{(\tau)}}$$

T y J son independientes debido a que la distribución conjunta es el producto de las marginales, es decir

$$f_{T,J}(t,j) = f_T(t) f_J(j)$$

2. Es necesario obtener primero ${}_t p_{50}^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \frac{3}{50-s} ds\right] = \left(\frac{50-t}{50}\right)^3$

a. $f_{T,J}(t,j) = {}_t p_{50}^{(\tau)} \mu_{50+t}^{(j)}$

$$= \left(\frac{50-t}{50}\right)^3 \left(\frac{j}{50-t}\right) = \frac{j(50-t)^2}{(50)^3}$$

b. $f_T(t) = \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) = \frac{3(50-t)^2}{(50)^3}$

c. $f_J(j) = \int_0^{50} f_{T,J}(s,j)ds$

$$= \frac{j}{(50)^3} \int_0^{50} (50-s)^2 ds$$

$$= \frac{j}{(50)^3} \left[-\frac{1}{3}(50-s)^3 \Big|_0^{50}\right] = \frac{1}{3} j$$

d. $f_{J|T}(j|t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)}$

$$= \frac{1}{3} j$$

3.

a. ${}_3p_{65}^{(\tau)} = p_{65}^{(\tau)}p_{66}^{(\tau)}p_{67}^{(\tau)}$

$$= \left[1-q_{65}^{(\tau)}\right]\left[1-q_{66}^{(\tau)}\right]\left[1-q_{67}^{(\tau)}\right]$$

$$= [1-(.02+.05)][1-(.03+.06)][1-(.04+.07)]$$

$$= (.93)(.91)(.89) = .75320$$

b. ${}_{3|}q_{65}^{(1)} = {}_3p_{65}^{(\tau)}q_{68}^{(1)} = (.75320)(.05) = .03766035$

4. Debido a que los tantos instantáneos de salida son constantes se sabe que

$${}_tp'^{(i)}_x = e^{-t\mu^{(i)}} \qquad \text{para } i = 1,2,3$$

además

$${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp'^{(1)}_x \cdot {}_tp'^{(2)}_x \cdot {}_tp'^{(3)}_x$$

$$= e^{-t(0.2+0.4+0.6)}$$

$$= e^{-1.2t}$$

por lo tanto

$$q_x^{(3)} = 0.06\int_0^1 e^{-1.2t} = \frac{0.6}{-1.2t}e^{-1.2t}\Big|_0^1 = \frac{0.6}{1.2}\left(1-e^{-1.2}\right) = 0.3494$$

5. Se requieren los valores ${}_2p_x^{(\tau)}$ para $k = 1,2,3$

$${}_2p_x^{(1)} = \exp\left[-\int_0^2 \frac{1}{50}dt\right] = \exp\left[-\frac{2}{50}\right] = \exp\left[-\frac{6}{150}\right]$$

$${}_2p_x^{(2)} = \exp\left[-\int_0^2 \frac{t}{50}dt\right] = \exp\left[-\frac{4}{100}\right] = \exp\left[-\frac{6}{150}\right]$$

$${}_2p_x^{(3)} = \exp\left[-\int_0^2 \frac{t^2}{50}dt\right] = \exp\left[-\frac{8}{150}\right]$$

por lo tanto

$${}_2p_x^{(\tau)} = {}_2p_x^{(1)}\,{}_2p_x^{(2)}\,{}_2p_x^{(3)} = e^{-20/150} = 0.87517$$

6. La probabilidad pedida es ${}_3q_{20}^{(1)} = \dfrac{d_{20}^{(1)}+d_{21}^{(1)}+d_{22}^{(1)}}{l_{20}^{(\tau)}}$

Para obtener las probabilidades requeridas es preciso obtener la siguiente tabla

x	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(\tau)}$
18	0,18	0,82	1000	180
19	0,19	0,81	820	155,8
20	0,2	0,8	664,2	132,84
21	0,21	0,79	531,36	111,5856
22	0,22	0,78	419,77	92,350368
23	0,23	0,77	327,42	75,307527

Como $q_x^{(1)} = \frac{1}{2} q_x^{(2)}$, entonces $d_x^{(1)} = \frac{1}{2} d_x^{(2)}$

Además $d_x^{(1)} + d_x^{(2)} = d_x^{(\tau)}$, y por lo tanto $d_x^{(1)} = \frac{1}{3} d_x^{(\tau)}$

Por lo tanto $d_{20}^{(1)} = \frac{132.84}{3}$, $d_{21}^{(1)} = \frac{111.5856}{3}$, $d_{22}^{(1)} = \frac{92.350368}{3}$,

Finalmente

$$ {}_3q_{20}^{(1)} = \frac{\frac{1}{3}\left(132.84 + 111.5856 + 92.350368\right)}{664.2} = 0.1690647$$

7. La probabilidad de graduación es ${}_4p_0^{(\tau)} = 0.3024$

a. El número de graduados, denotado por G, es una binomial con parámetros $n = 1000$ y $p = 0.3024$, por lo tanto

$$E[G] = np = (1000)(0.3024) = 302.4$$
$$Var[G] = np(1-p) = (1000)(0.3024)(1-0.3024) = 210.95424$$

b. El número de fracasos, denotado por F, es también una binomial con $n = 1000$ y

$$\begin{aligned} p &= {}_4q_0^{(1)} \\ &= q_0^{(1)} + p_0^{(\tau)} q_1^{(1)} + p_0^{(\tau)} p_1^{(\tau)} q_2^{(1)} \\ &= 0.15 + (0.60)(0.10) + (0.60)(0.70)(0.05) = 0.231 \end{aligned}$$

Entonces $E[F] = np = 231$ y $Var[F] = np(1-p) = (1000)(0.231)(1-0.231) = 177.639$

8.

a. $$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= a \cdot \exp\left[-\int_0^x \mu_y^{(1)} + \mu_x^{(2)} dy\right] \\ &= a \cdot \exp\left[-\int_0^x \left(1 + \frac{1}{a-y}\right) dy\right] \\ &= a \cdot \exp\left[-x + \ln\frac{a-x}{a}\right] \\ &= (a-x)e^{-x} \end{aligned}$$

b. $d_x^{(1)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \int_0^1 e^{-x-t} dt = e^{-x} - e^{-x-1}$

c. $d_x^{(2)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(2)} dt = \int_0^1 (a-x-t)e^{-x-t} dt$

$$= -(a-x-t)e^{-x-t}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x-t} dt$$
$$= (a-x)e^{-x} - (a-x-1)e^{-x-1} - e^{-x} + e^{-x-1}$$
$$= (a-x-1)e^{-x} - (a-x-2)e^{-x-1}$$

9. $l_x^{(\tau)} = 1000 \exp\left[-\int_0^x c + \frac{2y}{a-y^2} dy\right]$

$$= 1000 \exp\left[-cx + \ln\left(a-x^2\right) - \ln a\right]$$
$$= 1000 e^{-cx} \frac{a-x^2}{a}$$

10.

a. $\frac{d}{dx} {}_t q_x^{(\tau)} = -\frac{d}{dt} \frac{l_{x+t}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = -\frac{l_x^{(\tau)}\left(-l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)}\right) - l_{x+t}^{(\tau)}\left(-l_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}\right)}{\left(l_x^{(\tau)}\right)^2}$

$$= \frac{l_{x+t}^{(\tau)}\left[\mu_{x+t}^{(\tau)} - \mu_x^{(\tau)}\right]}{l_x^{(\tau)}}$$
$$= {}_t p_x^{(\tau)}\left[\mu_{x+t}^{(\tau)} - \mu_x^{(\tau)}\right]$$

b. $\frac{d}{dx} {}_t q_x^{(j)} = \frac{d}{dx} \frac{l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$

$$= \frac{l_x^{(\tau)}\left[-l_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} + l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}\right] - \left[l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}\right]\left[-l_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}\right]}{\left[l_x^{(\tau)}\right]^2}$$
$$= \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\left[-l_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)} + l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} + \left(l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}\right)\mu_x^{(\tau)}\right]$$
$$= {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} + {}_t q_x^{(j)} \mu_x^{(\tau)} - \mu_x^{(j)}$$

c. $\frac{d}{dt} {}_t q_x^{(j)} = \frac{d}{dt} \frac{l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{1}{l_x^{(\tau)}}\left[l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}\right] = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}$

11.

a. $q'^{(1)}_x = 1 - p'^{(1)}_x$

$$= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \mu_{x+t}^{(1)} dt\right]$$
$$= 1 - e$$

b. $m_x^{(1)} = \frac{\int_0^1 p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = \frac{c\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = c$

c. $q_x^{(1)} = \int_0^1 p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = c\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt$

12. Se sabe por (4.6.4) que $q'^{(j)}_x \geq q^{(j)}_x$. Como $m'^{(j)}_x = \dfrac{d_x}{L_x}$ y $q'^{(j)}_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ con $\mu^{(j)}_{x+t} \geq 0$, $L_x \leq l_x$ entonces $m'^{(j)}_x \geq q'^{(j)}_x$, por lo tanto $m'^{(j)}_x \geq q'^{(j)}_x \geq q^{(j)}_x$

13. $p'^{(1)}_{40} = 1 - q'^{(1)}_{40} = 0.98$ y $p'^{(2)}_{40} = 1 - q'^{(2)}_{40} = 0.96$

$$\begin{aligned} q^{(\tau)}_{40} &= 1 - p^{(\tau)}_{40} \\ &= 1 - p'^{(1)}_{40}\, p'^{(2)}_{40} \\ &= 1 - (0.98)(0.96) \\ &= 0.0592 \end{aligned}$$

14. a. $q^{(\tau)}_{40} = \dfrac{m^{(\tau)}_{40}}{1 + \frac{1}{2} m^{(\tau)}_{40}} = \dfrac{0.2}{1.1} = \dfrac{2}{11}$

Como $p^{(\tau)}_{40} = 1 - q^{(\tau)}_{40} = \dfrac{9}{11}$

y $p^{(\tau)}_{40} = p'^{(1)}_{40} \cdot p'^{(2)}_{40}$

entonces

$p'^{(2)}_{40} = \dfrac{p^{(\tau)}_{40}}{p'^{(1)}_{40}} = \dfrac{9/11}{9/10} = \dfrac{10}{11}$, por lo tanto $q'^{(2)}_{40} = 1 - p'^{(2)}_{40} = 1 - \dfrac{10}{11} = 0.09091$

b. $\mu^{(1)}_{40+t} = \dfrac{q'^{(1)}_{40}}{1 - tq'^{(1)}_{40}} = \dfrac{0.1}{1 - 0.1t}$ y $\mu^{(2)}_{40+t} = \dfrac{q'^{(2)}_{40}}{1 - t'q^{(2)}_{40}}$.

Entonces $\mu^{(\tau)}_{40+t} = \mu^{(1)}_{40+t} + \mu^{(2)}_{40+t} = \dfrac{q'^{(1)}_{40}}{1 - tq'^{(1)}_{40}} + \dfrac{0.1}{1 - 0.1t}$

c. ${}_t p^{(\tau)}_x = \exp\left[-\int_0^t \dfrac{q'^{(2)}_{40}}{1 - rq'^{(2)}_{40}} + \dfrac{0.1}{1 - 0.1t} dr \right] = \left[1 - tq'^{(2)}_{40}\right]\left[1 - 0.1t\right]$

d.
$$\begin{aligned} m^{(\tau)}_x = 0.20 &= \frac{\int_0^1 {}_t p^{(\tau)}_{40} \mu^{(\tau)}_{40} dt}{\int_0^1 {}_t p^{(\tau)}_{40} dt} \\ &= \frac{\int_0^1 \left[.0.1 + q'^{(2)}_{40} - 0.2q'^{(2)}_{40} t\right] dt}{\int_0^1 \left[1 - \left(0.1 + q'^{(2)}_{40}\right)t + 0.1q'^{(2)}_{40} t^2\right] dt} \\ &= \frac{0.1 + 0.9q'^{(2)}_{40}}{0.95 - \frac{7}{15} q'^{(2)}_{40}} \end{aligned}$$

e. Por lo tanto $q'^{(2)}_{40} = \dfrac{27}{298} = 0.0906$

15. Con $p_x^{(\tau)} = \left[1-q'^{(1)}_x\right]\left[1-q'^{(2)}_x\right]\left[1-q'^{(3)}_x\right]$ y $q_x^{(j)} = \frac{q_x^{(\tau)}}{\ln p_x^{(\tau)}} \ln p'^{(j)}_x$ se obtienen la siguiente tabla

$p'^{(\tau)}_{62}$	0.76048	$q_{62}^{(\tau)}$	0.23952		
$p'^{(\tau)}_{63}$	0.8502732	$q_{63}^{(\tau)}$	0.1497268		
$p'^{(\tau)}_{64}$	0.8211456	$q_{64}^{(\tau)}$	0.1788544		
$q_{62}^{(1)}$	0.017672958	$q_{62}^{(2)}$	0.02664516	$q_{62}^{(3)}$	0.19520189
$q_{63}^{(1)}$	0.020535227	$q_{63}^{(2)}$	0.03193184	$q_{63}^{(3)}$	0.09725974
$q_{64}^{(1)}$	0.025776433	$q_{64}^{(2)}$	0.03705158	$q_{64}^{(3)}$	0.11602639

16.

a. Este resultado se obtiene al suponer fuerza constante

b. Aceptando $m'^{(j)}_x \cong m_x^{(j)}$, entonces $\frac{q'^{(j)}_x}{1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x} \cong \frac{q_x^{(j)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}$ si los decrementos están uniformemente distribuidos en las tabla de decrementos múltiples y en la tabla de decrementos simples.

c. Del inciso anterior se desprende que $q'^{(j)}_x \cong \frac{q_x^{(j)}\left[1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x\right]}{1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}}$

d. De b también se obtiene $q'^{(j)}_x\left[1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}\right] = q_x^{(j)}\left[1-\frac{1}{2}q'^{(j)}_x\right]$. Despejando $q'^{(j)}_x$ se obtiene $q'^{(j)}_x\left[1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}+\frac{1}{2}q_x^{(j)}\right] = q_x^{(j)}$, o bien $q'^{(j)}_x = \frac{q_x^{(j)}}{\left[1-\frac{1}{2}q_x^{(\tau)}+\frac{1}{2}q_x^{(j)}\right]}$

17.

a. No hay justificación para la relación $q_x^{(j)} \cong \frac{m_x^{(j)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(j)}}$, asumiendo distribución uniforme en el modelo de decrementos múltiples

b. $\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt = L_x^{(\tau)}$

$$L_x^{(\tau)} \approx l_x^{(\tau)} - \tfrac{1}{2}d_x^{(\tau)}$$
$$= l_x^{(\tau)} - \tfrac{1}{2}L_x^{(\tau)} m_x^{(\tau)}$$

de donde $L_x^{(\tau)}\left[1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}\right] \approx l_x^{(\tau)}$

por lo tanto $L_x^{(\tau)} \approx \frac{l_x^{(\tau)}}{1+\frac{1}{2}m_x^{(\tau)}}$, de manera que la proposición es aceptable

c. Se sabe que $q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(1)} dt = \int_0^1 {}_t p'^{(1)}_x \, {}_t p'^{(2)}_x \, \mu_{x+t}^{(1)} dt$

$$= q'^{(1)}_x \int_0^1 \left[1 - t q'^{(2)}_x\right] dt$$
$$= q'^{(1)}_x \left[1 - \tfrac{1}{2} q'^{(2)}_x\right]$$

por lo tanto la proposición es aceptable.

18. Si cada decremento esta distribuido uniformemente entonces,

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\frac{d}{dt}\, {}_t q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)}} = \frac{\frac{d}{dt} t q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - t q_x^{(\tau)}}$$

Y

$$\mu_{x+½}^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - \frac{1}{2} q_x^{(\tau)}} = m_x^{(j)}$$

19.

a. A través de la expresión

$$\begin{aligned} q_x^{(3)} &= q_x^{(\tau)} - \left[q_x^{(1)} + q_x^{(2)}\right] \\ &= 1 - p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x \left[1 - q'^{(3)}_x\right] - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x \end{aligned}$$

Es posible obtener $q'^{(3)}_x$. Una vez que se tienen todas las tasas de decremento asociadas, se construye la tabla usando las relaciones expuestas en el capítulo.

b. Es posible obtener $q_x^{(1)}$ usando $q'^{(1)}_x = \frac{q_x^{(1)}}{1 - \frac{1}{2}\left[q_x^{(\tau)} - q_x^{(1)}\right]} = \frac{q_x^{(1)}}{1 - \frac{1}{2}\left[q_x^{(2)} + q_x^{(3)}\right]}$, una vez obtenidas todas las tasas de decremento múltiple, la tabla puede ser construida.

20. Como $d_{50}^{(2)} = q_{50}^{(2)} l_{50}^{(\tau)} = 200$ salida inmediatamente después de la edad 50, sólo 800 personas inician el intervalo $(50, 51]$. Como $d_{50}^{(1)} = 0.6 d_{50}^{(2)} = 12$ mueren y $q'^{(1)}_{50} = \frac{12}{800} = 0.15$. Como no puede haber salida durante el año, en realidad se tiene un modelo de decremento simple.

21. El decremento por la causa 1 es la salida por fallecimiento. El valor presente actuarial para el decremento por esta causa es

$$20{,}000 \int_0^{40} v^t\, {}_t p_{30}^{(\tau)} \mu_{30+t}^{(1)}\, dt$$

El decremento por la causa 2 es la salida por otra razón. El valor presente actuarial para este beneficio es

$$\int_0^{40} v^t\, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{30+t}^{(2)} (300t)\, {}_{40-t|}\bar{a}_{30+t}\, dt$$

22. La p.n.u. para el modelo de una salida es

$$400 = (1000) \int_0^{\infty} v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt = (1000) \int_0^{\infty} e^{-0.06t} \cdot e^{-\mu t}\, dt$$

$$= (1000)\int_0^\infty e^{-(u+0.06)t}\,dt = \frac{1000\mu}{\mu + 0.06}$$

de donde $\mu = 0.04$

Para el modelo de doble salida, el tanto instantáneo total es

$$\mu_x^{(\tau)} = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} = 3\mu_x^{(1)} = 3\mu_x$$

de donde la probabilidad de sobrevivencia es

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-3\mu t}$$

22. La p.n.u. del beneficio debido a que es pagadero al momento del acaecimiento por cualquier salida, es

$$\begin{aligned}
\text{PNU} = (1000)\int_0^\infty v^t\,{}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt &= 3000\int_0^\infty e^{-0.06t} \cdot e^{-3\mu t}\,dt \\
&= (3000)(0.04)\int_0^\infty e^{-0.06t} \cdot e^{-3(0.04)t}\,dt \\
&= (120)\int_0^\infty e^{-0.18t}\,dt \\
&= \frac{120}{0.18} \\
&= 666.66
\end{aligned}$$

TABLA 1.1
Seguros de Vida Individual pagaderos al final del año en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
A_x	Seguro de Vida Entera	Valor actuarial de un seguro de vida entero, inmediato, pagadero al final del año que muere (x)	$\left\{ v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x \right. \qquad t = 0,1,\cdots,w-x-1$	$A_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x$	$A_x = \dfrac{\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}}{D_x} = \dfrac{M_x}{D_x}$
$A^{1}_{x:\overline{n}\|}$	Seguro Temporal n años	Valor actuarial de un seguro unitario, temporal a n años. Pagadero al final del año en que muera (x) si ésta ocurre durante los n años.	$\begin{cases} 0 & {}_{t}p_x \\ v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x & t = 0,1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$	$A^{1}_{x:\overline{n}\|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x$ $= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \; {}_{t}p_x q_{x+t}$	$A^{1}_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}}{D_x} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
$A_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1}$	Seguro Dotal Puro	Valor actuarial de un seguro unitario, pagadero al final n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & {}_{t}q_x \\ v^{t} & {}_{t}p_x \end{cases}$	$A_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = v^{t} \; {}_{t}p_x$	$A_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$
$A_{x:\overline{n}\|}$	Seguro Dotal Mixto	Valor actuarial de un seguro que paga una unidad, al final de año si (x) sobrevive a n años o bien si muere en ese periodo	$\begin{cases} v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x & t = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ v^{n} & {}_{n}p_x \end{cases}$	$A_{x:\overline{n}\|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x + v^{n} \; {}_{n}$ $= A^{1}_{x:\overline{n}\|} + A_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1}$ $= A^{1}_{x:\overline{n}\|} + {}_{n}E_x$	$A_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$
${}_{n\|m}A_x$	Seguro temporal m años, diferido n años	Valor actuarial de un seguro temporal a m años, diferido n años, unitario, pagadero si x fallece en el periodo (x+n) y (x+n+m)	$\begin{cases} 0 & {}_{n}q_x \\ v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x & t = n, n+1,\cdots,n+m+1 \\ 0 & {}_{n+m}p_x \end{cases}$	${}_{n\|m}A_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1} \; {}_{t}\|q_x$	${}_{n\|m}A_x = \dfrac{\sum_{t=n}^{n+m-1} C_{x+t}}{C_x} = \dfrac{M_{x+m} - M_{x+n+m}}{D_x}$

TABLA 1.1 Para la elaboración de esta tabla se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.3.1 de Bowers pag.118, haciendo algunas modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

CONTINUACIÓN TABLA 1.1

Seguros de Vida Individual pagaderos al final del año en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
${}_{n\|}A_x$	Seguro de vida entera diferido n años	Valor actuarial de un seguro unitario, ilimitado, diferido n años, pagadero al final del año en que muera (x) si ésta ocurre después del periodo (x+n)	$\begin{cases} 0 & {}_nq_x \\ v^{t+1} & {}_{t\|}q_x \quad t = n, n+1, \cdots w-x-1 \end{cases}$	${}_{n\|}A_x = \sum_{t=n}^{w-x-1} v^{t+1}\,{}_{t\|}q_x$	${}_{n\|}A_x = \dfrac{\sum_{t=m}^{w-x-1} C_{x+t}}{D_x} = \dfrac{M_{x+m}}{D_X}$

TABLA 1.1 Para la elaboración de esta tabla se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.3.1 de Bowers pag.118, haciendo algunas modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

TABLA 1.2
Seguros de Vida Individual pagaderos al momento en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a. del valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Aproximación
$\bar{A}_x$	Seguro de vida entera	Valor Actuarial de un seguro de vida entero, unitario, ilimitado.	$v^t \quad t\|q_x \quad t \geq 0$	$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) A_x$
$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	Seguro de vida, temporal n años	Valor actuarial de un seguro temporal a n años, unitario. Pagadero al fallecimiento de (x) si este ocurre dentro de n años.	$\begin{cases} v^t & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil} = \int_0^{n} v^t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil} = \left(\frac{i}{\delta}\right) A^1_{x:\overline{n}\rceil}$
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	Seguro dotal mixto temporal a n años	Valor actuarial de un seguro dotal mixto, unitario. Paga si (x) fallece durante el periodo n años o si (x) continua con vida después de éste periodo	$\begin{cases} v^t & {}_t\|q_x \quad t \leq n \\ v^n & {}_n p_x \end{cases}$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil} + A_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}$ $= \bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil} + {}_n E_x$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil} = \left(\frac{i}{\delta}\right) A^1_{x:\overline{n}\rceil} + {}_n E_x$
${}_n\|\bar{A}_x$	Seguro de Vida Entero diferido n años	Valor actuarial de un seguro de vida entera diferido n años. Paga 1 unidad monetaria al fallecimiento de (x), si este ocurre después de n años	$\begin{cases} 0 & {}_t\|q_x \quad t \leq n \\ v^t & {}_t\|q_x \quad t > n \end{cases}$	${}_n\|\bar{A}_x = \int_n^{\infty} v^t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$	${}_n\|\bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) {}_n\|A_x$
${}_n\|_m \bar{A}_x$	Seguro de vida temporal m años diferido n años	Valor actuarial de un seguro temporal n años . Paga una unidad monetaria si el fallecimiento de (x) ocurre en el periodo (x+n) y (x+n+m)	$\begin{cases} v^t & {}_t\|q_x \quad m \leq t < m+n \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$	${}_n\|_m \bar{A}_x = \int_n^{n+m} v^t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$	${}_n\|_m \bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) {}_n\|_m A_x$

TABLA 1.2 Para la elaboración de esta tabla se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.2.1 de Bowers pag. 109, haciendo algunas modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

La última columna de este cuadro contiene las relaciones entre los seguros de vida que paga al momento del fallecimiento y aquellos que pagan al final del años en que ocurre la muerte de (x). La relación surge al suponer distribución uniforme de los fallecimientos a lo largo del tiempo, como se expuso en (2.13.9). También pueden utilizarse otros factores de aproximación con $(1+i)^{1/2}$ y $(1+i/2)$, los cuales obedecen al supuesto de que los fallecimientos se concentran a la mitad de cada año de edad.

TABLA 1.3
Anualidades discretas anticipadas de vida individual

Notación	Nombre	Descripción	v.a. del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial	Valores Conmutados
$\ddot{a}_x$	Anualidad contingente vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$Y\left\{\ddot{a}_{\overline{t}\rceil} \quad {}_{t-1}q_x \quad t=1,2,\cdots\omega-x\right.$	$\ddot{a}_x=\sum_{t=0}^{\infty}{}_tE_x=\sum_{t=0}^{\infty}v^t\,{}_tp_x$	$\ddot{a}_x\,\frac{\sum_{t=0}^{\infty}D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_x}{D_x}$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	Anualidad contingente temporal a años	Valor actuarial de una anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) se encuentra con vida	$Y\begin{cases}\ddot{a}_{\overline{t}\rceil} & {}_{t-1}\|q_x \quad t=1,2,\cdots,n-1\\ \ddot{a}_{\overline{n}\rceil} & {}_{n-1}\|p_x\end{cases}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}=\sum_{t=0}^{n-1}{}_tE_x=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\,{}_tp_x$	$\ddot{a}_x\,\frac{\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$
${}_{n\|m}\ddot{a}_x$	Anualidad contingente diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida al vencimiento de cada pago	$Y\begin{cases}0 & {}_nq_x\\ {}_n\|\ddot{a}_{\overline{t-n}\rceil} & {}_{t-1}\|q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,n+m-1\\ {}_n\|\ddot{a}_{\overline{m}\rceil} & {}_{n+m-1}p_x\end{cases}$	${}_n\|_m\ddot{a}_x=\sum_{t=n}^{n+m-1}{}_tE_x=\sum_{t=n}^{n+m-1}v^t\,{}_tp_x$	${}_n\|_m\ddot{a}_x=\frac{\sum_{t=n}^{n+m-1}D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+n}-N_{x+n+m}}{D_x}$
${}_n\|\ddot{a}_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$Y\begin{cases}0 & {}_nq_x\\ \ddot{a}_{\overline{t-n}\rceil} & {}_{t-1}\|q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,w-x\end{cases}$	${}_n\|\ddot{a}_x=\sum_{t=n}^{\infty}{}_tE_x=\sum_{t=n}^{\infty}v^t\,{}_tp_x$	${}_n\|\ddot{a}_x\,\frac{\sum_{t=n}^{\infty}D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+n}}{D_x}$

TABLA 1.3 Para la elaboración de esta tabla se tomó la tabla 5.2 de Bowers pag.168, haciendo algunas modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

TABLA 1.4
Anualidades Discretas Vencidas de Vida Individual

Notación	Nombre	Descripción	v.a. del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial	Valores Conmutados
a_x	Anualidad contingente vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$Y\begin{cases} a_{\overline{t}\rceil} & {}_{t-1}q_x \quad t=1,2,\cdots w-x \end{cases}$	$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\, {}_tp_x$	$a_x = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$
$a_{x:\overline{n}\rceil}$	Anualidad contingente temporal a años	Valor actuarial de una anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) esta con vida	$Y\begin{cases} a_{\overline{t}\rceil} & {}_{t\|}q_x \quad t=1,2,\cdots,n-1 \\ a_{\overline{n}\rceil} & {}_{n\|}p_x \end{cases}$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tp_x$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{\sum_{t=1}^{n} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}$
${}_{n\|m}a_x$	Anualidad contingente diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida durante el periodo (x+n) y (x+n+m)	$Y\begin{cases} 0 & {}_{n+1}q_x \\ {}_{n\|}a_{\overline{t-n}\rceil} & {}_{t\|}q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,n+m-1 \\ {}_{n\|}a_{\overline{m}\rceil} & {}_{n+m}p_x \end{cases}$	${}_{n\|m}a_x = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tE_x = \sum_{t=n+1}^{n+m} v^t\, {}_tp_x$	${}_{n\|m}a_x = \frac{\sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n-1}-N_{x+n+m+1}}{D_x}$
${}_{n\|}a_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$Y\begin{cases} 0 & {}_{n+1}q_x \\ {}_{n\|}a_{\overline{t-n}\rceil} & {}_{t\|}q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,w-x \end{cases}$	${}_{n\|}a_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} v^t\, {}_tp_x$	${}_{n\|}a_x = \frac{\sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ $= a_x - a_{x:\overline{n}\rceil} = {}_nE_x a_{x+n}$

TABLA 1.4 Para la elaboración de esta tabla se tomó la tabla 5.3.1 de Bowers pag. 148, haciendo algunas modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

Como se expuso en el Capítulo 1, las relaciones entre anualidades anticipada y vencidas son:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x = {}_{n-1|}a_x$$

$$_{n|m}\ddot{a}_x = {}_{n-1|m}\ddot{a}_x$$

TABLA 1.5
Anualidades Continuas de Vida Individual

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial Y	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
$\bar{a}_x$	Anualidad contingente continua vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} \quad T \geq 0$	$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \, {}_t p_x dt$	$\bar{a}_x = \dfrac{\bar{N}_x}{D_x}$
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	Anualidad contingente continua temporal a años	Valor actuarial de una Anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) se encuentra con vida	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} \quad 0 \leq T < n$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \int_0^{n} v^t \, {}_t p_x dt$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$
${}_{n\|m}\bar{a}_x$	Anualidad contingente continua, diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida durante el periodo (x+n) y (x+n+m)	$\begin{cases} 0 & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil} & m \leq T < m+n \\ \bar{a}_{\overline{m+n}\rceil} - \bar{a}_{\overline{m}\rceil} & T \geq m+n \end{cases}$	${}_{n}\|_{m}\, \bar{a}_x = \int_m^{m+n} v^t \, {}_t p_x dt$	${}_{n}\|_{m}\, \bar{a}_x == \dfrac{\bar{N}_{x+n} - \bar{N}_{x+n+m}}{D_x}$
${}_{n\|}\bar{a}_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}\rceil} - \bar{a}_{\overline{n}\rceil} & T \geq n \end{cases}$	${}_{n\|}\bar{a}_x = \int_n^{\infty} v^t \, {}_t p_x dt$	${}_{n\|}\bar{a}_x = \dfrac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}$ $= n\|a_x + \frac{1}{2}\, {}_nE_x$

TABLA 1.5 Para la elaboración de esta tabla se tomó la tabla 5.2.1 de Bowers pag. 142, haciendo algunas modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

TABLA 1.6
Anualidades Fraccionarias Vencidas y Anticipadas

Notación	Nombre	Descripción	Valor Actuarial	Valor Conmutado	Aproximaciones
$a_x^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, unitaria, vitalicia, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\, {}_{t/m}p_x$	$a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m}D_x}{D_x}$	$a_x^{(m)} = a_x + \dfrac{m-1}{2m}$
$\ddot{a}_x^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, vitalicia, unitaria pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m}\, {}_{t/m}p_x$	$\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_x - \frac{m-1}{2m}D_x}{D_x}$	$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m}$
${}_{n\|}a_x^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, diferida n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Diferido n años Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	${}_{n\|}a_x^{(m)} = {}_nE_x a_{x+n}^{(m)}$	${}_{n\|}a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{D_x}$	${}_{n\|}a_m^{(m)} = {}_{n\|}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$
${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, diferida n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Diferido n años Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$	${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{D_x}$	${}_{n\|}\ddot{a}_m^{(m)} = {}_{n\|}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$

TABLA 1.6 Para la elaboración de esta tabla de tomó como base el trabajo realizado en las anteriores, con información obtenida de la bibliografía consultada.

CONTINUACIÓN DE LA TABLA 1.6
Anualidades Fraccionarias Vencidas y Anticipadas

Notación	Nombre	Descripción	Valor Actuarial	Valor Conmutado	Aproximaciones
$a_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, temporal n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Temporal n años, que paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$a_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} \approx a_x^{(m)} - {}_{n}\vert a_x^{(m)}$	$a_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\left(D_x - D_{x+n}\right)}{D_x}$	$a_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} \approx a_{x:\overline{n}\rceil} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_x\right)$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, temporal n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Temporal n años, que paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} \approx \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n}\vert \ddot{a}_x^{(m)}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} = \dfrac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_x - D_{x+n}\right)}{D_x}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_x\right)$

TABLA 1.6 Para la elaboración de esta tabla de tomó como base el trabajo realizado en las anteriores, con información obtenida de la bibliografía consultada.

Tabla 2.1 Ilustrativa de Mortalidad Individual

Edad	l_x	d_x	q_x	p_x	$s(x)$	e_x	$\overset{0}{e}_x$	$\mu(x)$
12	10000000	11200.00	0.001120	0.998880	0.985694	82.721400	83.221400	0.001112
13	9988800	11387.23	0.001140	0.998860	0.984312	81.722520	82.222520	0.001131
14	9977412.8	11573.80	0.001160	0.998840	0.982888	80.723660	81.223660	0.001152
15	9965839	11859.35	0.001190	0.998810	0.981417	79.724820	80.224820	0.001174
16	9953979.6	12044.32	0.001210	0.998790	0.979896	78.726010	79.226010	0.001198
17	9941935.3	12328.00	0.001240	0.998760	0.978319	77.727220	78.227220	0.001225
18	9929607.3	12610.60	0.001270	0.998730	0.976682	76.728460	77.228460	0.001254
19	9916996.7	12892.10	0.001300	0.998700	0.974980	75.729730	76.229730	0.001286
20	9904104.6	13271.50	0.001340	0.998660	0.973207	74.731030	75.231030	0.001320
21	9890833.1	13649.35	0.001380	0.998620	0.971356	73.732370	74.232370	0.001358
22	9877183.8	14025.60	0.001420	0.998580	0.969421	72.733750	73.233750	0.001399
23	9863158.2	14498.84	0.001470	0.998530	0.967393	71.735170	72.235170	0.001444
24	9848659.3	14969.96	0.001520	0.998480	0.965265	70.736640	71.236640	0.001493
25	9833689.4	15438.89	0.001570	0.998430	0.963029	69.738160	70.238160	0.001547
26	9818250.5	16101.93	0.001640	0.998360	0.960674	68.739730	69.239730	0.001605
27	9802148.5	16663.65	0.001700	0.998300	0.958190	67.741370	68.241370	0.001669
28	9785484.9	17320.31	0.001770	0.998230	0.955566	66.743070	67.243070	0.001738
29	9768164.6	18071.10	0.001850	0.998150	0.952790	65.744840	66.244840	0.001814
30	9750093.5	18915.18	0.001940	0.998060	0.949849	64.746690	65.246690	0.001897
31	9731178.3	19754.29	0.002030	0.997970	0.946729	63.748630	64.248630	0.001987
32	9711424	20782.45	0.002140	0.997860	0.943415	62.750660	63.250660	0.002085
33	9690641.5	21803.94	0.002250	0.997750	0.939889	61.752800	62.252800	0.002193
34	9668837.6	22915.15	0.002370	0.997630	0.936135	60.755050	61.255050	0.002310
35	9645922.5	24114.81	0.002500	0.997500	0.932133	59.757420	60.257420	0.002438
36	9621807.6	25497.79	0.002650	0.997350	0.927863	58.759920	59.259920	0.002577
37	9596309.9	26965.63	0.002810	0.997190	0.923303	57.762570	58.262570	0.002729
38	9569344.2	28516.65	0.002980	0.997020	0.918429	56.765380	57.265380	0.002895
39	9540827.6	30244.42	0.003170	0.996830	0.913216	55.768360	56.268360	0.003076
40	9510583.2	32145.77	0.003380	0.996620	0.907637	54.771530	55.271530	0.003273
41	9478437.4	34122.37	0.003600	0.996400	0.901665	53.774910	54.274910	0.003489
42	9444315	31921.78	0.003380	0.996620	0.895267	52.778510	53.278510	0.003724
43	9412393.2	38684.94	0.004110	0.995890	0.888412	51.781890	52.281890	0.003980
44	9373708.3	41244.32	0.004400	0.995600	0.881065	50.786000	51.286000	0.004260
45	9332464	44049.23	0.004720	0.995280	0.873192	49.790400	50.290400	0.004565
46	9288414.7	47092.26	0.005070	0.994930	0.864754	48.795120	49.295120	0.004898
47	9241322.5	50365.21	0.005450	0.994550	0.855711	47.800190	48.300190	0.005262
48	9190957.3	53859.01	0.005860	0.994140	0.846023	46.805640	47.305640	0.005658
49	9137098.3	57655.09	0.006310	0.993690	0.835648	45.811500	46.311500	0.006091
50	9079443.2	61740.21	0.006800	0.993200	0.824541	44.817810	45.317810	0.006562
51	9017703	66099.76	0.007330	0.992670	0.812660	43.824610	44.324610	0.007077
52	8951603.2	70807.18	0.007910	0.992090	0.799958	42.831940	43.331940	0.007639
53	8880796	75930.81	0.008550	0.991450	0.786392	41.839850	42.339850	0.008251
54	8804865.2	81356.95	0.009240	0.990760	0.771917	40.848400	41.348400	0.008919
55	8723508.3	87235.08	0.010000	0.990000	0.756492	39.857640	40.357640	0.009649

Tabla elaborada con un Radix = 10,000,000.00 y las q_x de la Tabla Tasas Modificadas del documento Tablas de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989 elaborada por la CNSF .

Continuación Tabla 2.1 Ilustrativa de Mortalidad Individual

Edad	l_x	d_x	q_x	p_x	$s(x)$	e_x	$\overset{0}{e}_x$	$\mu(x)$
56	8636273.2	93444.48	0.010820	0.989180	0.740075	38.867640	39.367640	0.010444
57	8542828.7	100121.95	0.011720	0.988280	0.722631	37.878460	38.378460	0.011312
58	8442706.7	107137.95	0.012690	0.987310	0.704125	36.890180	37.390180	0.012259
59	8335568.8	114697.43	0.013760	0.986240	0.684533	35.902870	36.402870	0.013292
60	8220871.4	122655.40	0.014920	0.985080	0.663834	34.916630	35.416630	0.014419
61	8098216	131110.12	0.016190	0.983810	0.642018	33.931550	34.431550	0.015648
62	7967105.9	139982.05	0.017570	0.982430	0.619084	32.947740	33.447740	0.016990
63	7827123.8	149263.25	0.019070	0.980930	0.595047	31.965310	32.465310	0.018453
64	7677860.6	158931.71	0.020700	0.979300	0.569933	30.984380	31.484380	0.020050
65	7518928.8	169100.71	0.022490	0.977510	0.543786	30.005080	30.505080	0.021792
66	7349828.1	179556.30	0.024430	0.975570	0.516669	29.027570	29.527570	0.023692
67	7170271.8	190299.01	0.026540	0.973460	0.488665	28.052000	28.552000	0.025765
68	6979972.8	201302.42	0.028840	0.971160	0.459879	27.078540	27.578540	0.028027
69	6778670.4	212443.53	0.031340	0.968660	0.430441	26.107380	26.607380	0.030495
70	6566226.9	223645.69	0.034060	0.965940	0.400502	25.138720	25.638720	0.033187
71	6342581.2	234802.36	0.037020	0.962980	0.370239	24.172780	24.672780	0.036124
72	6107778.8	245777.02	0.040240	0.959760	0.339854	23.209800	23.709800	0.039328
73	5862001.8	256462.58	0.043750	0.956250	0.309566	22.250040	22.750040	0.042824
74	5605539.2	266543.39	0.047550	0.952450	0.279616	21.293790	21.793790	0.046638
75	5338995.8	275972.69	0.051690	0.948310	0.250257	20.341340	20.841340	0.050799
76	5063023.1	284440.64	0.056180	0.943820	0.221750	19.393030	19.893030	0.055338
77	4778582.5	291732.46	0.061050	0.938950	0.194355	18.449210	18.949210	0.060291
78	4486850	297657.63	0.066340	0.933660	0.168328	17.510260	18.010260	0.065694
79	4189192.4	301956.99	0.072080	0.927920	0.143903	16.576600	17.076600	0.071589
80	3887235.4	304331.66	0.078290	0.921710	0.121290	15.648680	16.148680	0.078020
81	3582903.8	304654.31	0.085030	0.914970	0.100660	14.726970	15.226970	0.085036
82	3278249.5	302647.99	0.092320	0.907680	0.082141	13.812000	14.312000	0.092691
83	2975601.5	298185.02	0.100210	0.899790	0.065807	12.904320	13.404320	0.101042
84	2677416.4	291142.26	0.108740	0.891260	0.051671	12.004530	12.504530	0.110153
85	2386274.2	281484.90	0.117960	0.882040	0.039693	11.113270	11.613270	0.120093
86	2104789.3	269202.55	0.127900	0.872100	0.029771	10.231230	10.731230	0.130937
87	1835586.7	254449.03	0.138620	0.861380	0.021754	9.359130	9.859130	0.142768
88	1581137.7	237439.45	0.150170	0.849830	0.015450	8.497750	8.997750	0.155675
89	1343698.2	218471.90	0.162590	0.837410	0.010637	7.647920	8.147920	0.169757
90	1125226.3	197961.07	0.175930	0.824070	0.007079	6.810510	7.310510	0.185119
91	927265.28	176412.22	0.190250	0.809750	0.004541	5.986440	6.486440	0.201880
92	750853.06	154360.37	0.205580	0.794420	0.002797	5.176690	5.676690	0.220166
93	596492.69	132409.45	0.221980	0.778020	0.001649	4.382270	4.882270	0.240115
94	464083.24	111138.65	0.239480	0.760520	0.000927	3.604250	4.104250	0.261879
95	352944.59	91105.59	0.258130	0.741870	0.000494	2.843730	3.343730	0.285624
96	261839	72778.15	0.277950	0.722050	0.000249	2.101860	2.601860	0.311529
97	189060.85	56525.41	0.298980	0.701020	0.000118	1.379810	1.879810	0.339791
98	132535.44	42571.71	0.321210	0.678790	0.000052	0.678790	1.178790	0.370624
99	89963.729	89963.73	1.000000	0.000000	0.000021	0.000000	0.500000	0.404263

Tabla elaborada con un Radix = 10,000,000.00 y las q_x de la Tabla Tasas Modificadas del documento Tablas de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989 elaborada por la CNSF .

Tabla 2.2 Ilustrativa de Valores Conmutados al 7%

Edad	Dx	Nx	Sx	Cx	Mx	Rx
12	4440119.592	65333870.311	916634989.819	4647.602	165941.161	5367095.276
13	4144996.877	60893750.718	851301119.508	4416.165	161293.559	5201154.115
14	3869412.692	56748753.841	790407368.789	4194.877	156877.394	5039860.556
15	3612078.667	52879341.149	733658614.948	4017.172	152682.517	4882983.162
16	3371757.283	49267262.482	680779273.799	3812.922	148665.345	4730300.645
17	3147362.109	45895505.199	631512011.316	3647.410	144852.423	4581635.300
18	2937812.505	42748143.090	585616506.117	3486.936	141205.013	4436782.876
19	2742132.227	39810330.585	542868363.027	3331.563	137718.077	4295577.863
20	2559408.837	37068198.358	503058032.443	3205.241	134386.514	4157859.787
21	2388765.634	34508789.521	465989834.085	3080.838	131181.273	4023473.272
22	2229410.409	32120023.886	431481044.564	2958.657	128100.435	3892291.999
23	2080602.473	29890613.477	399361020.678	2858.398	125141.779	3764191.564
24	1941629.895	27810011.004	369470407.201	2758.203	122283.381	3639049.785
25	1811849.175	25868381.109	341660396.197	2658.508	119525.178	3516766.404
26	1690658.479	24056531.933	315792015.089	2591.290	116866.670	3397241.227
27	1577463.363	22365873.455	291735483.155	2506.250	114275.380	3280374.557
28	1471758.575	20788410.091	269369609.701	2434.591	111769.130	3166099.176
29	1373040.713	19316651.516	248581199.609	2373.949	109334.539	3054330.046
30	1280841.670	17943610.803	229264548.093	2322.274	106960.590	2944995.507
31	1194726.016	16662769.133	211320937.290	2266.630	104638.316	2838034.918
32	1114299.741	15468043.116	194658168.157	2228.599	102371.686	2733396.601
33	1039173.027	14353743.376	179190125.041	2185.177	100143.087	2631024.915
34	969004.568	13314570.348	164836381.665	2146.300	97957.910	2530881.828
35	903465.446	12345565.780	151521811.317	2110.901	95811.610	2432923.918
36	842249.330	11442100.333	139176245.538	2085.945	93700.710	2337112.308
37	785062.962	10599851.004	127734145.204	2061.707	91614.765	2243411.598
38	731641.995	9814788.042	117134294.200	2037.657	89553.058	2151796.833
39	681739.908	9083146.047	107319506.158	2019.734	87515.401	2062243.775
40	635120.367	8401406.139	98236360.111	2006.268	85495.666	1974728.375
41	591564.168	7766285.772	89834953.972	1990.309	83489.398	1889232.708
42	550873.399	7174721.603	82068668.200	1740.142	81499.089	1805743.310
43	513094.811	6623848.204	74893946.597	1970.860	79758.947	1724244.221
44	477557.001	6110753.393	68270098.393	1963.786	77788.087	1644485.274
45	444351.168	5633196.392	62159344.999	1960.129	75824.302	1566697.187
46	413321.337	5188845.224	56526148.607	1958.448	73864.173	1490872.885
47	384323.176	4775523.887	51337303.383	1957.534	71905.725	1417008.712
48	357223.004	4391200.711	46561779.496	1956.380	69948.191	1345102.987
49	331896.895	4033977.707	42170578.784	1957.261	67991.811	1275154.796
50	308226.753	3702080.812	38136601.077	1958.824	66034.550	1207162.985
51	286103.561	3393854.060	34434520.265	1959.943	64075.726	1141128.435
52	265426.563	3107750.498	31040666.205	1962.172	62115.783	1077052.709
53	246100.036	2842323.936	27932915.707	1966.500	60153.611	1014936.927
54	228033.534	2596223.899	25090591.771	1969.187	58187.110	954783.316
55	211146.265	2368190.366	22494367.872	1973.330	56217.923	896596.206

Tabla elaborada tomando los valores de l_x y d_x de la tabla 2.1 de este trabajo y considerando un interés del 7%.

Continuación Tabla 2.2 Ilustrativa de Valores Conmutados al 7%

Edad	Dx	Nx	Sx	Cx	Mx	Rx
56	195359.629	2157044.101	20126177.506	1975.506	54244.594	840378.282
57	180603.586	1961684.472	17969133.405	1978.200	52269.088	786133.689
58	166810.198	1781080.886	16007448.933	1978.338	50290.888	733864.600
59	153919.044	1614270.687	14226368.048	1979.370	48312.550	683573.712
60	141870.204	1460351.644	12612097.360	1978.228	46333.180	635261.162
61	130610.748	1318481.440	11151745.717	1976.250	44354.953	588927.982
62	120089.869	1187870.692	9833264.277	1971.943	42378.702	544573.029
63	110261.579	1067780.823	8645393.584	1965.129	40406.759	502194.327
64	101083.076	957519.244	7577612.761	1955.532	38441.630	461787.568
65	92514.632	856436.168	6620093.517	1944.537	36486.098	423345.938
66	84517.736	763921.536	5763657.350	1929.690	34541.561	386859.840
67	77058.849	679403.800	4999735.813	1911.348	32611.871	352318.279
68	70106.268	602344.951	4320332.014	1889.593	30700.524	319706.408
69	63630.283	532238.683	3717987.062	1863.713	28810.930	289005.885
70	57603.841	468608.400	3185748.379	1833.633	26947.217	260194.955
71	52001.733	411004.558	2717139.979	1799.163	25113.585	233247.737
72	46800.588	359002.825	2306135.421	1760.052	23314.422	208134.153
73	41978.815	312202.237	1947132.596	1716.424	21554.370	184819.731
74	37516.114	270223.422	1634930.358	1667.188	19837.946	163265.361
75	33394.601	232707.308	1364706.936	1613.240	18170.758	143427.415
76	29596.667	199312.707	1131999.628	1553.963	16557.518	125256.657
77	26106.473	169716.040	932686.921	1489.533	15003.555	108699.139
78	22909.040	143609.567	762970.880	1420.360	13514.022	93695.584
79	19989.957	120700.527	619361.314	1346.613	12093.661	80181.562
80	17335.590	100710.569	498660.787	1268.414	10747.048	68087.901
81	14933.072	83374.979	397950.218	1186.691	9478.634	57340.853
82	12769.451	68441.907	314575.239	1101.753	8291.943	47862.219
83	10832.313	55672.456	246133.331	1014.492	7190.190	39570.276
84	9109.166	44840.143	190460.875	925.730	6175.698	32380.086
85	7587.509	35730.977	145620.732	836.470	5249.969	26204.387
86	6254.660	28143.468	109889.755	747.637	4413.499	20954.419
87	5097.841	21888.808	81746.287	660.432	3665.863	16540.920
88	4103.905	16790.967	59857.479	575.966	3005.430	12875.057
89	3259.459	12687.062	43066.512	495.285	2429.464	9869.627
90	2550.938	9427.603	30379	419.427	1934.179	7440.163
91	1964.628	6876.665	20951.847	349.318	1514.752	5505.984
92	1486.782	4912.038	14075.181	285.657	1165.434	3991.231
93	1103.859	3425.255	9163.144	229.004	879.777	2825.797
94	802.640	2321.396	5737.888	179.641	650.773	1946.020
95	570.489	1518.756	3416.493	137.627	471.132	1295.247
96	395.541	948.266	1897.737	102.748	333.505	824.115
97	266.916	552.725	949.470	74.582	230.757	490.610
98	174.873	285.809	396.745	52.496	156.175	259.854
99	110.936	110.936	110.936	103.679	103.679	103.679

Tabla elaborada tomando los valores de l_x y d_x de la tabla 2.1 de este trabajo y considerando un interés del 7%.

Tabla 2.3 Ilustrativa de Distribución Uniforme bajo la Ley Makeham

$$C = 1.0909846240$$

Diferencia de edad N	Sumar al de menor edad T	Diferencia de edad R	Sumar al de menor edad T
1	0.51088164	1	0.34310048
2	1.04348539	2	0.70608363
3	1.59768837	3	1.0894292
4	2.17328784	4	1.49355474
5	2.77000417	5	1.91880981
6	3.38748497	6	2.36547101
7	4.02531008	7	2.83373793
8	4.68299738	8	3.3237302
9	5.36000928	9	3.83548569
10	6.05575959	10	4.36895991
11	6.76962074	11	4.92402675
12	7.50093108	12	5.5004803
13	8.24900214	13	6.09803793
14	9.0131257	14	6.71634443
15	9.79258055	15	7.35497702
16	10.5866388	16	8.01345123
17	11.3945719	17	8.69122739
18	12.2156558	18	9.3877175
19	13.0491755	19	10.1022925
20	13.8944297	20	10.8342895
21	14.750734	21	11.5830191
22	15.6174237	22	12.3477724
23	16.4938566	23	13.1278279
24	17.3794147	24	13.9224575
25	18.2735055	25	14.7309327

Tabla elaborada con los parámetros arrojados en el estudio Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989 elaborada por la CNSF.

Tabla 2.4 Ilustrativa de Distribución Uniforme bajo la Ley Gompertz

$$C = 1.0909846240$$

Diferencia de edad N	Sumar al de menor edad T
0	7.95983348
1	8.47071512
2	9.00331887
3	9.55752185
4	10.1331213
5	10.7298376
6	11.3473184
7	11.9851436
8	12.6428309
9	13.3198428
10	14.0155931
11	14.7294542
12	15.4607646
13	16.2088356
14	16.9729592
15	17.752414
16	18.5464723
17	19.3544054
18	20.1754892
19	21.009009
20	21.8542632
21	22.7105674
22	23.5772571
23	24.45369
24	25.3392481
25	26.233339

Tabla elaborada con los parámetros arrojados en el estudio Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana 1982-1989 elaborada por la CNSF.

Tabla 2.5 Ilustrativa bajo la Ley Makeham al 7%

$C = 1.0909846240$ A=0.000905426 $B = 0.0000727187$

Edad	c^x	$\ddot{a}_{xx}$	$\ddot{a}_{xxx}$
12	2.843305714	14.54279108	14.374960
13	3.102002815	14.52017533	14.353222
14	3.384237375	14.49621765	14.330181
15	3.69215094	14.47082017	14.305740
16	4.028079905	14.44402249	14.279940
17	4.394573241	14.41557746	14.252536
18	4.794411835	14.38550888	14.223552
19	5.230629593	14.35369753	14.192871
20	5.70653646	14.32001538	14.160367
21	6.225743534	14.284468	14.126044
22	6.792190469	14.2469174	14.089767
23	7.410175365	14.20721537	14.051390
24	8.084387384	14.16534452	14.010894
25	8.81994233	14.12114321	13.968122
26	9.622421467	14.0744377	13.922899
27	10.49791387	14.02532219	13.875320
28	11.45306261	13.97347438	13.825065
29	12.49511521	13.91882838	13.772068
30	13.63197857	13.86131129	13.716258
31	14.87227901	13.80084248	13.657553
32	16.22542772	13.7371951	13.595729
33	17.70169217	13.67039887	13.530813
34	19.31227397	13.60020797	13.462563
35	21.06939396	13.526493	13.390848
36	22.98638484	13.44911153	13.315527
37	25.07779243	13.36804087	13.236575
38	27.35948594	13.28311695	13.153828
39	29.84877848	13.19415908	13.067107
40	32.56455837	13.10109982	12.976342
41	35.52743247	13.00385877	12.881452
42	38.75988255	12.90221152	12.782212
43	42.28643589	12.79013313	12.672650
44	46.13385136	12.67898059	12.564012
45	50.33132248	12.56310669	12.450702
46	54.91069893	12.44246004	12.332669
47	59.90672823	12.31696982	12.209838
48	65.35731937	12.18654328	12.082114
49	71.3038305	12.05106304	11.949378
50	77.79138271	11.91050391	11.811600
51	84.86920242	11.76481488	11.668727
52	92.59099489	11.61391566	11.520675
53	101.0153517	11.4578085	11.367442
54	110.2061955	11.296577	11.209107
55	120.2332648	11.13015997	11.045606

Tabla elaborada con los parámetros arrojados en el documento Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana (1982-1989) , elaborada por la CNSF

Continuación Tabla 2.5 Ilustrativa bajo la Ley de Makeham al 7%

$C = 1.0909846240$ A=0.000905426 $B = 0.0000727187$

Edad	c^x	$\ddot{a}_{xx}$	$\ddot{a}_{xxx}$
56	131.1726432	10.95867654	10.877051
57	143.1073368	10.78209859	10.703410
58	156.127904	10.60056537	10.524818
59	170.3331427	10.41406472	10.341258
60	185.8308396	10.22284006	10.152967
61	202.7385887	10.0269806	9.960030
62	221.184683	9.826713079	9.762666
63	241.3090882	9.622200298	9.561034
64	263.2645048	9.413629249	9.355315
65	287.2175268	9.201203064	9.145707
66	313.3499055	8.985316007	8.932599
67	341.8599288	8.76618577	8.716202
68	372.9639259	8.544106698	8.496805
69	406.8979085	8.319438869	8.274765
70	443.9193617	8.092513282	8.050407
71	484.3091979	7.863701256	7.824097
72	528.3738882	7.633401472	7.596231
73	576.4477877	7.402026509	7.367217
74	628.895673	7.170063785	7.137537
75	686.1155093	6.937842985	6.907520
76	748.5414709	6.705873834	6.677673
77	816.6472352	6.474555942	6.448391
78	890.9495769	6.244295268	6.220081
79	972.0122891	6.015550565	5.993199
80	1060.450462	5.788753772	5.768177
81	1156.935148	5.56423171	5.545342
82	1262.198458	5.342417551	5.325126
83	1377.03911	5.123607046	5.107828
84	1502.328495	4.908096693	4.893744
85	1639.017289	4.69610592	4.683098
86	1788.142661	4.487796206	4.476053
87	1950.836148	4.283135498	4.272581
88	2128.332242	4.081981406	4.072545
89	2321.97775	3.883961849	3.875577
90	2533.242023	3.688318079	3.680926
91	2763.728096	3.493763858	3.487313
92	3015.184857	3.298233276	3.292681
93	3289.520318	3.09828196	3.093597
94	3588.816087	2.888351772	2.884513
95	3915.34317	2.659189332	2.656188
96	4271.579196	2.395218496	2.393051
97	4660.227223	2.069435772	2.068093
98	5084.236244	1.633809051	1.633235
99	5546.823567	1	1.000000

Tabla elaborada con los parámetros arrojados en el documento Tabla de Mortalidad Experiencia Mexicana (1982-1989) , elaborada por la CNSF

Tabla 2.6 Ilustrativa de Anualidades y Seguros al 7%

Edad	a_x	$\ddot{a}_x$	$\overline{a}_x$	A_x	$\overline{A}_x$
12	14.374960	13.374960	13.869230	0.035276	0.036497
13	14.353222	13.353222	13.769870	0.036735	0.038006
14	14.330181	13.330181	13.580085	0.038281	0.039606
15	14.305740	13.305740	13.805643	0.039922	0.041303
16	14.279940	13.279940	13.779840	0.041653	0.043094
17	14.252536	13.252536	13.752434	0.043492	0.044997
18	14.223552	13.223552	13.723448	0.045437	0.047010
19	14.192871	13.192871	13.661752	0.047496	0.049140
20	14.160367	13.160367	13.628072	0.049678	0.051397
21	14.126044	13.126044	13.594900	0.051981	0.053780
22	14.089767	13.089767	13.557546	0.054416	0.056299
23	14.051390	13.051390	13.519142	0.056991	0.058964
24	14.010894	13.010894	13.510770	0.059709	0.061775
25	13.968122	12.968122	13.467993	0.062580	0.064745
26	13.922899	12.922899	13.422765	0.065615	0.067885
27	13.875320	12.875320	13.375181	0.068808	0.071189
28	13.825065	12.825065	13.324920	0.072180	0.074678
29	13.772068	12.772068	13.271917	0.075737	0.078358
30	13.716258	12.716258	13.216100	0.079483	0.082233
31	13.657553	12.657553	13.157387	0.083422	0.086309
32	13.595729	12.595729	13.095555	0.087571	0.090602
33	13.530813	12.530813	13.030631	0.091928	0.095109
34	13.462563	12.462563	12.962370	0.096508	0.099848
35	13.390848	12.390848	12.890645	0.101321	0.104828
36	13.315527	12.315527	12.815312	0.106376	0.110057
37	13.236575	12.236575	12.736347	0.111675	0.115539
38	13.153828	12.153828	12.653587	0.117228	0.121285
39	13.067107	12.067107	12.566851	0.123048	0.127306
40	12.976342	11.976342	12.476069	0.129139	0.133608
41	12.881452	11.881452	12.381161	0.135508	0.140197
42	12.782212	11.782212	12.281902	0.142168	0.147087
43	12.672650	11.672650	12.172319	0.149521	0.154695
44	12.564012	11.564012	12.063657	0.156811	0.162238
45	12.450702	11.450702	11.950322	0.164416	0.170105
46	12.332669	11.332669	11.832261	0.172337	0.178301
47	12.209838	11.209838	11.709399	0.180581	0.186830
48	12.082114	11.082114	11.581642	0.189152	0.195698
49	11.949378	10.949378	11.448870	0.198060	0.204914
50	11.811600	10.811600	11.311053	0.207307	0.214481
51	11.668727	10.668727	11.168137	0.216895	0.224401
52	11.520675	10.520675	11.020039	0.226831	0.234681
53	11.367442	10.367442	10.866755	0.237115	0.245320
54	11.209107	10.209107	10.708364	0.247741	0.256314
55	11.045606	10.045606	10.544801	0.258714	0.267667

Tabla elaborada con los Valores Conmutados tomados de la tablal 2.2 de este trabajo

Continuación Tabla 2.6 Ilustrativa de Anualidades y Seguros al 7%

56	a_x	$\ddot{a}_x$	$\bar{a}_x$	A_x	$\bar{A}_x$
57	10.877051	9.877051	10.376180	0.270026	0.279370
58	10.703410	9.703410	10.202468	0.281679	0.291427
59	10.524818	9.524818	10.023797	0.293665	0.303827
60	10.341258	9.341258	9.840151	0.305984	0.316572
61	10.152967	9.152967	9.651766	0.318620	0.329646
62	9.960030	8.960030	9.458726	0.331568	0.343042
63	9.762666	8.762666	9.261250	0.344814	0.356746
64	9.561034	8.561034	9.059496	0.358345	0.370746
65	9.355315	8.355315	8.853644	0.372152	0.385030
66	9.145707	8.145707	8.643891	0.386219	0.399584
67	8.932599	7.932599	8.430624	0.400521	0.414381
68	8.716202	7.716202	8.214054	0.415043	0.429406
69	8.496805	7.496805	7.994470	0.429767	0.444640
70	8.274765	7.274765	7.772224	0.444669	0.460057
71	8.050407	7.050407	7.547641	0.459726	0.475635
72	7.824097	6.824097	7.321087	0.474914	0.491348
73	7.596231	6.596231	7.092954	0.490206	0.507170
74	7.367217	6.367217	6.863648	0.505576	0.523071
75	7.137537	6.137537	6.633651	0.520990	0.539019
76	6.907520	5.907520	6.403287	0.536427	0.554990
77	6.677673	5.677673	6.173061	0.551852	0.570949
78	6.448391	5.448391	5.943367	0.567239	0.586869
79	6.220081	5.220081	5.714607	0.582562	0.602721
80	5.993199	4.993199	5.487234	0.597788	0.618475
81	5.768177	4.768177	5.261676	0.612889	0.634099
82	5.545342	4.545342	5.038255	0.627844	0.649571
83	5.325126	4.325126	4.817402	0.642623	0.664861
84	5.107828	4.107828	4.599408	0.657206	0.679949
85	4.893744	3.893744	4.384565	0.671574	0.694814
86	4.683098	3.683098	4.173090	0.685711	0.709440
87	4.476053	3.476053	3.965142	0.699606	0.723816
88	4.272581	3.272581	3.760684	0.713261	0.737944
89	4.072545	3.072545	3.559572	0.726686	0.751833
90	3.875577	2.875577	3.361431	0.739905	0.765509
91	3.680926	2.680926	3.165499	0.752968	0.779025
92	3.487313	2.487313	2.970490	0.765961	0.792468
93	3.292681	2.292681	2.774334	0.779024	0.805982
94	3.093597	2.093597	2.573587	0.792384	0.819805
95	2.884513	1.884513	2.362690	0.806416	0.834323
96	2.656188	1.656188	2.132386	0.821739	0.850176
97	2.393051	1.393051	1.867090	0.839399	0.868447
98	2.068093	1.068093	1.539777	0.861207	0.891010
99	1.633235	0.633235	1.102350	0.890391	0.921204

Tabla elaborada con los Valores Conmutados tomados de la tabla 2.2 de este trabajo

CUADRO 1.1
Seguros de Vida Individual pagaderos al final del año en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
A_x	Seguro de Vida Entera	Valor actuarial de un seguro de vida entero. pagadero al final del año que muere (x)	$\left\{ v^{t+1} \quad {}_{t}\|q_x \qquad t = 0,1,\cdots,\omega - x \right.$	$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_{t}\|q_x$	$A_x = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$
$A^1_{x:\overline{n}\|}$	Seguro Temporal n años	Valor actuarial de un seguro unitario. Pagadero al final del año en que muera (x) si ésta ocurre durante los n años.	$\begin{cases} 0 & {}_{t}p_x \\ v^{t+1} & {}_{t}\|q_x \quad t = 0,1,2,\cdots,n-1 \end{cases}$	$A^1_{x:\overline{n}\|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t}\|q_x$ $= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t}p_x q_{x+t}$	$A^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$
$A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}$	Seguro Dotal Puro	Valor actuarial de un seguro unitario, pagadero al final n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & {}_{t}q_x \\ v^t & {}_{t}p_x \end{cases}$	$A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = v^t\ {}_{t}p_x$	$A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$
$A_{x:\overline{n}\|}$	Seguro Dotal Mixto	Valor actuarial de un seguro unitario. Pagadero al final de año si (x) sobrevive n años o bien si muere en ese periodo	$\begin{cases} v^{t+1} & {}_{t}\|q_x \quad t = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ v^n & {}_{n}p_x \end{cases}$	$A_{x:\overline{n}\|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t}\|q_x + v^n\ {}_{n}p_x$ $= A^1_{x:\overline{n}\|} + A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}$ $= A^1_{x:\overline{n}\|} +_{n} E_x$	$A_{x:\overline{n}\|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$
${}_{n}\|_{m} A_x$	Seguro temporal m años, diferido n años	Valor actuarial de un seguro unitario. Pagadero si (x) fallece en el periodo $(x+n)$ y $(x+n+m)$	$\begin{cases} 0 & {}_{n}q_x \\ v^{t+1} & {}_{t}\|q_x \quad t = n, n+1,\cdots,n+m+1 \\ 0 & {}_{n+m}p_x \end{cases}$	${}_{n}\|_{m} A_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\ {}_{t}\|q_x$	${}_{n}\|_{m} A_x = \frac{\sum_{t=n}^{n+m-1} C_{x+t}}{C_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+}}{D_x}$

CUADRO 1.1 Para la elaboración de este cuadro se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.3.1 de Bowers pag.118, haciendo modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

CONTINUACIÓN CUADRO 1.1
Seguros de Vida Individual pagaderos al final del año en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
${}_{n\|}A_x$	Seguro de vida entera diferido n años	Valor actuarial de un seguro unitario, ilimitado, diferido n años, pagadero al final del año en que muera (x) si ésta ocurre después del periodo $(x+n)$	$\begin{cases} 0 & {}_nq_x \\ v^{t+1} & {}_{t\|}q_x \quad t=n,n+1,\cdots\omega-x \end{cases}$	${}_{n\|}A_x=\sum_{t=n}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_{t\|}q_x$	${}_{n\|}A_x=\dfrac{\sum_{t=n}^{\omega-x} C_{x+t}}{D_x}=\dfrac{M_{x+n}}{D_x}$

CUADRO 1.1 Para la elaboración de este cuadro se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.3.1 de Bowers pag.118, haciendo modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

CUADRO 1.2
Seguros de Vida Individual pagaderos al momento en que muere (x)

Notación	Nombre	Descripción	v.a. del valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial E[Y]	Aproximación
$\bar{A}_x$	Seguro de vida entera	Valor Actuarial de un seguro de vida entero, unitario	$v^t \quad {}_{t}\vert q_x \quad t \geq 0$	$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t\, {}_tp_x \mu(x+t)\,dt$	$\bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) A_x$
$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert}$	Seguro de vida, temporal n años	Valor actuarial de un seguro unitario. Pagadero al fallecimiento de (x) si este ocurre dentro de n años.	$\begin{cases} v^t & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert} = \int_0^{n} v^t\, {}_tp_x \mu(x+t)\,dt$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert} = \left(\frac{i}{\delta}\right) A^1_{x:\overline{n}\vert}$
$\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}$	Seguro dotal mixto temporal a n años	Valor actuarial de un seguro dotal mixto, unitario. Paga si (x) fallece en los siguientes n años o si (x) continua con vida después de éste periodo	$\begin{cases} v^t & {}_{t}\vert q_x \quad t \leq n \\ v^n & {}_np_x \end{cases}$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\vert} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert} + A_{x:\overline{n}\vert}^{\ \ 1}$ $= \bar{A}^1_{x:\overline{n}\vert} + {}_nE_x$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\vert} = \left(\frac{i}{\delta}\right) A^1_{x:\overline{n}\vert} + {}_nE_x$
${}_{n}\vert\bar{A}_x$	Seguro de Vida Entero diferido n años	Valor actuarial de un seguro de vida entera diferido n años. Paga 1 unidad monetaria al fallecimiento de (x), si este ocurre después de transcurridos n años	$\begin{cases} 0 & {}_{t}\vert q_x \quad t \leq n \\ v^t & {}_{t}\vert q_x \quad t > n \end{cases}$	${}_{n}\vert\bar{A}_x = \int_n^{\infty} v^t\, {}_tp_x \mu(x+t)\,dt$	${}_{n}\vert\bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) {}_{n}\vert A_x$
${}_{n}\vert_{m}\bar{A}_x$	Seguro de vida temporal m años diferido n años	Valor actuarial de un seguro temporal n años. Paga una unidad monetaria si el fallecimiento de (x) ocurre en el periodo $(x+n)$ y $(x+n+m)$	$\begin{cases} v^t & {}_{t}\vert q_x \quad m \leq t < m+n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$	${}_{n}\vert_{m}\bar{A}_x = \int_n^{n+m} v^t\, {}_tp_x \mu(x+t)\,dt$	${}_{n}\vert_{m}\bar{A}_x = \left(\frac{i}{\delta}\right) {}_{n}\vert_{m} A_x$

CUADRO 1.2 Para la elaboración de esta tabla se tomaron las columnas 1,2, 3 y 4 de la tabla 4.2.1 de Bowers pag. 109, haciendo modificaciones. El resto de las columnas se elaboraron con apoyo de la bibliografía consultada.

La última columna de este cuadro contiene las relaciones entre los seguros de vida que paga al momento del fallecimiento y aquellos que pagan al final del años en que ocurre la muerte de (x). La relación surge al suponer distribución uniforme de los fallecimientos a lo largo del tiempo, como se expuso en (2.13.9). También pueden utilizarse otros factores de aproximación con $(1+i)^{1/2}$ y $(1+i/2)$, los cuales obedecen al supuesto de que los fallecimientos se concentran a la mitad de cada año de edad

CUADRO 1.3
Anualidades Discretas Anticipadas de Vida Individual

Notaci	Nombre	Descripción	v.a. del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial	Valores Conmutados
$\ddot{a}_x$	Anualidad contingente vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t}\rceil} & _{t-1\rvert}q_x \quad t=1,2,\cdots\omega-x \end{cases}$	$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x$	$\ddot{a}_x = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	Anualidad contingente temporal a n años	Valor actuarial de una anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{t}\rceil} & _{t-1\rvert}q_x \quad t=1,2,\cdots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}\rceil} & _{n-1}p_x \end{cases}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\, {}_tp_x$	$\ddot{a}_x = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$
$_{n\rvert m}\ddot{a}_x$	Anualidad contingente diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida al encimiento de cada pago	$\begin{cases} 0 & _nq_x \\ _{n\rvert}\ddot{a}_{\overline{t-n}\rceil} & _{t-1\rvert}q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,n+m-1 \\ _{n\rvert}\ddot{a}_{\overline{m}\rceil} & _{n+m-1}p_x \end{cases}$	$_{n\rvert m}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} {}_tE_x = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^t\, {}_tp_x$	$_{n\rvert m}\ddot{a}_x = \frac{\sum_{t=n}^{n+m-1} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$
$_{n\rvert}\ddot{a}_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & _nq_x \\ \ddot{a}_{\overline{t-n}\rceil} & _{t-1\rvert}q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,\omega-x \end{cases}$	$_{n\rvert}\ddot{a}_x = \sum_{t=n}^{\omega-x} {}_tE_x = \sum_{t=n}^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x$	$_{n\rvert}\ddot{a}_x = \frac{\sum_{t=n}^{\omega-x} D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$

CUADRO 1.3 Para la elaboración de este cuadro se tomó la tabla 5.2 de Bowers pag.168, haciendo modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

CUADRO 1.4
Anualidades Discretas Vencidas de Vida Individual

Notación	Nombre	Descripción	v.a. del Valor Presente Actuarial	Valor Presente Actuarial	Valores Conmutados
a_x	Anualidad contingente vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$\begin{cases} a_{\overline{t\rceil}} & {}_{t-1\|}q_x \quad t=1,2,\cdots\omega-x \end{cases}$	$a_x=\sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tE_x=\sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x$	$a_x=\frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+1}}{D_x}$
$a_{x:\overline{n\rceil}}$	Anualidad contingente temporal a n años	Valor actuarial de una anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) esta con vida	$\begin{cases} a_{\overline{t\rceil}} & {}_{t-1\|}q_x \quad t=1,2,\ldots,n \\ a_{\overline{n\rceil}} & {}_np_x \end{cases}$	$a_{x:\overline{n\rceil}}=\sum_{t=1}^{n} {}_tE_x=\sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tp_x$	$a_{x:\overline{n\rceil}}=\frac{\sum_{t=1}^{n} D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}$
${}_{n\|m}a_x$	Anualidad contingente diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida durante el periodo	$\begin{cases} 0 & {}_nq_x \\ {}_{n\|}a_{\overline{t-n\rceil}} & {}_{t-1\|}q_x \quad t=n+1,n+2,\cdots,n+m \\ {}_{n\|}a_{\overline{m\rceil}} & {}_{n+m}p_x \end{cases}$	${}_{n\|m}a_x=\sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tE_x=\sum_{t=n+1}^{n+m} v^t\, {}_tp_x$	${}_{n\|m}a_x=\frac{\sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+n-1}-N_{x+n+m+1}}{D_x}$
${}_{n\|}a_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & {}_{n+1}q_x \\ {}_{n\|}a_{\overline{t-n\rceil}} & {}_{t\|}q_x \quad t=n+1,n+2,\ldots,\omega-x \end{cases}$	${}_{n\|}a_x=\sum_{t=n+1}^{\omega-x} {}_tE_x=\sum_{t=n+1}^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x$	${}_{n\|}a_x=\frac{\sum_{t=n+1}^{\omega-x} D_{x+t}}{D_x}=\frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ $=a_x-a_{x:\overline{n\rceil}}={}_nE_xa_{x+n}$

CUADRO 1.4 Para la elaboración de este cuadro se tomó la tabla 5.3.1 de Bowers pag. 148, haciendo modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

Como se expuso en el Capítulo 1, las relaciones entre anualidades anticipada y anualidades vencidas son:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$${}_{n|}\ddot{a}_x = {}_{n-1|}a_x$$

$${}_{n|m}\ddot{a}_x = {}_{n-1|m}\ddot{a}_x$$

CUADRO 1.5
Anualidades Continuas de Vida Individual

Notación	Nombre	Descripción	v.a del Valor Presente Actuarial Y	Valor Presente Actuarial E[Y]	Valores Conmutados
$\bar{a}_x$	Anualidad contingente continua vitalicia	Valor actuarial de una anualidad contingente, unitaria, vitalicia e inmediata	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} \quad T \geq 0$	$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x dt$	$\bar{a}_x = \dfrac{\bar{N}_x}{D_x}$
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	Anualidad contingente continua temporal a n años	Valor actuarial de una anualidad contingente unitaria, inmediata, temporal a n años si (x) se encuentra con vida	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} \quad 0 \leq T < n$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x dt$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$
${}_{n\|m}\bar{a}_x$	Anualidad contingente continua, diferida n años, temporal m años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, diferida n años, temporal m años si (x) esta con vida durante el periodo $(x+n)$ y $(x+n+m)$	$\begin{cases} 0 & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil} & m \leq T < m+n \\ \bar{a}_{\overline{m+n}\rceil} - \bar{a}_{\overline{m}\rceil} & T \geq m+n \end{cases}$	${}_{n\|m}\bar{a}_x = \int_m^{m+n} v^t \, {}_tp_x dt$	${}_{n\|m}\bar{a}_x = \dfrac{\bar{N}_{x+n} - \bar{N}_{x+n+m}}{D_x}$
${}_{n\|}\bar{a}_x$	Anualidad contingente de vida entera, diferida n años	Valor actuarial de una anualidad unitaria, de vida entera, diferida n años si (x) se encuentra con vida	$\begin{cases} 0 & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}\rceil} - \bar{a}_{\overline{n}\rceil} & T \geq n \end{cases}$	${}_{n\|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \, {}_tp_x dt$	${}_{n\|}\bar{a}_x = \dfrac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}$ $= {}_{n\|}a_x + \frac{1}{2} \, {}_nE_x$

CUADRO 1.5 Para la elaboración de este cuadro se tomó la tabla 5.2.1 de Bowers pag. 142, haciendo algunas modificaciones con apoyo de la bibliografía consultada.

CUADRO 1.6
Anualidades Fraccionarias Vencidas y Anticipadas

Notación	Nombre	Descripción	Valor Actuarial	Valor Conmutado	Aproximaciones
$a_x^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, unitaria, vitalicia, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m}\,{}_{t/m}p_x$	$a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m}D_x}{D_x}$	$a_x^{(m)} = a_x + \dfrac{m-1}{2m}$
$\ddot{a}_x^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, vitalicia, unitaria pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m- ésimo de año durante la existencia de (x)	$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m}\,{}_{t/m}p_x$	$\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_x - \frac{m-1}{2m}D_x}{D_x}$	$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m}$
${}_{n\|}a_x^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, diferida n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Diferido n años Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	${}_{n\|}a_x^{(m)} = {}_nE_x a_{x+n}^{(m)}$	${}_{n\|}a_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{D_x}$	${}_{n\|}a_m^{(m)} = {}_{n\|}a_x + \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$
${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, diferida n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Diferido n años Paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$	${}_{n\|}\ddot{a}_x^{(m)} = \dfrac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{D_x}$	${}_{n\|}\ddot{a}_m^{(m)} = {}_{n\|}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$

CUADRO 1.6 Para la elaboración de este cuadro se tomó como base el trabajo realizado en las anteriores, con información obtenida de la bibliografía consultada.

CONTINUACIÓN DEL CUADRO 1.6
Anualidades Fraccionarias Vencidas y Anticipadas

Notación	Nombre	Descripción	Valor Actuarial	Valor Conmutado	Aproximaciones
$a_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}$	Anualidad contingente vencida, temporal n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Temporal n años, que paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al final de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	$a_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} \approx a_x^{(m)} - {}_{n}\lvert a_x^{(m)}$	$a_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\left(D_x - D_{x+n}\right)}{D_x}$	$a_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} \approx a_{x:\overline{n}\rvert} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_x\right)$
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}$	Anualidad contingente anticipada, temporal n años, pagadera m veces al año	Valor actuarial de una anualidad contingente. Temporal n años, que paga $\left(\frac{1}{m}\right)$ al inicio de cada m-ésimo de año durante la existencia de (x)	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} \approx \ddot{a}_x^{(m)} - {}_{n}\lvert \ddot{a}_x^{(m)}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} = \dfrac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_x - D_{x+n}\right)}{D_x}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_x\right)$

CUADRO 1.6 Para la elaboración de este cuadro se tomó como base el trabajo realizado en las anteriores, con información obtenida de la bibliografía consultada.

CUADRO 2.1
Seguros de Vida Múltiple pagaderos al final del año en que se disuelve el estatus (xy)

Notación	Descripción	Valor Presente Actuarial	Suponiendo que las vidas siguen la Ley de Makeham	Valores Conmutados
$A_{xy:\overline{n}\rceil}$	Seguro unitario temporal a *n* años, pagadero al final del año en que se disuelve el estatus (xy), si este ocurre durante los siguientes *n* años.	$A_{xy:\overline{n}\rceil} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t\|}q_{xy}$ $= v\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rceil} - a_{xy:\overline{n}\rceil}$ $= 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rceil}$	$A_{ww:\overline{n}\rceil} = v\ddot{a}_{ww:\overline{n}\rceil} - a_{ww:\overline{n}\rceil}$	$A_{xy:\overline{n}\rceil} = \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$ $= \dfrac{M_{xy} - M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$
${}_{n\|}A_{xy}$	Seguro unitario, diferido *n* años, pagadero a final del año en que se disuelve el estatus (xy).	${}_{n\|}A_{xy} = {}_{n}E_{xy}A_{x+m:y+m}$ $= {}_{n}E_{xy}(1 - d\ddot{a}_{x+n:y+n})$ $= {}_{n}E_{xy} - d\,{}_{n}E_{xy}\ddot{a}_{x+n:y+n}$ $= {}_{n}E_{xy} - d\ {}_{n\|}\ddot{a}_{xy}$	${}_{n\|}A_{xy} = {}_{n}E_{ww} - d\ {}_{n\|}\ddot{a}_{ww}$	${}_{n\|}A_{xy} = \dfrac{\sum_{t=n}^{\infty} C_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$ $= \dfrac{M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$
${}_{n\|m}A_{xy}$	Valor actuarial de un seguro unitario, diferido *n* años, temporal *m* años, pagadero al final del año en que ocurre la primera muerte del estatus, en el periodo *m*+*n*.	${}_{n\|m}A_{xy} = \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\ {}_{t\|}q_{xy}$ $= \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\ {}_{t}p_{xy} - \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_{xy}$ $= v\sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t}\ {}_{t}p_{xy} - \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_{xy}$ $= v\ {}_{n\|m}\ddot{a}_{xy} - {}_{n\|m}a_{xy}$ $= 1 - d\ {}_{n\|m}\ddot{a}_{xy}$	${}_{n\|m}A_{ww} = 1 - d\ {}_{n\|m}\ddot{a}_{ww}$	${}_{n\|m}A_{xy} = \sum_{t=n}^{n+m-1} \dfrac{C_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$ $= \dfrac{M_{x+n:y+n} - M_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$

CUADRO 2.2
Seguros de Vida Múltiple pagaderos en el momento en que se disuelve el estatus (xy)

Notación	**Descripción**	**Valor Presente Actuarial**	**Aproximación suponiendo DUM**	**Aproximación suponiendo que los fallecimientos ocurren a la mitad del año**
$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil}$	Representa el valor actuarial de un seguro unitario, temporal a n años, pagadero al ocurrir la primera muerte, si esta ocurre durante los n años	$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil} = {}_nE_{xy} + \left(1 - \delta \bar{a}_{xy:\overline{n}\rceil}\right)$	$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil} \cong \frac{i}{\delta} A_{xy:\overline{n}\rceil}$	$\bar{A}_{xy:\overline{n}\rceil} \cong (1+i)^{1/2} A_{xy:\overline{n}\rceil}$
${}_{n\|}\bar{A}_{xy}$	Indica valor actuarial de un seguro unitario, diferido n años, pagadero al momento en que el estatus de vida conjunta se disuelve	${}_{n\|}\bar{A}_{xy} = \int_n^{\infty} v^t {}_tp_{xy} \mu_{x+t:y+t} dt$ $= {}_nE_{xy} \bar{A}_{x+n:y+n}$	${}_{n\|}\bar{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta} {}_{n\|}A_{xy}$	${}_{n\|}\bar{A}_{xy} \cong (1+i)^{1/2} {}_{n\|}A_{xy}$

CUADRO 2.3
Anualidades Vencidas y Anticipadas de Vida Múltiple

Notación	Descripción	Valor Presente Actuarial	Bajo la ley de Makeham	Valores Conmutados
$a_{xy:\overline{n}\rvert}$	Es el valor actuarial de una anualidad unitaria vencida, temporal a n años, pagadera al final de cada año, durante n años, si el estatus permanece.	$a_{xy:\overline{n}\rvert} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy}$	$a_{xy:\overline{n}\rvert} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{ww} = a_{ww:\overline{n}\rvert}$	$a_{xy:\overline{n}\rvert} = a_{xy} - {}_{n}\lvert a_{xy}$ $= \dfrac{N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}$
${}_{n}\lvert a_{xy}$	Representa el valor actuarial de una anualidad unitaria vencida, diferida n años, pagadera a partir del $(n+1)$-ésimo año, durante la existencia del estatus.	${}_{n}\lvert a_{xy} = \sum_{t=n+1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy}$ $= v^n \, {}_n p_{xy} \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_t p_{x+n:y+n}$ $= {}_n E_{xy} a_{x+n:y+n}$	${}_{n}\lvert a_{xy} = {}_n E_{ww} a_{w+n:w+n}$ $= {}_{n}\lvert a_{ww}$	${}_{n}\lvert a_{xy} = {}_n E_{xy} a_{x+n:y+n}$ $= \dfrac{N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}$
$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rvert}$	Indica el valor actuarial de una anualidad unitaria anticipada, temporal a n años, pagadera al inicio de cada año, durante n años si el estatus permanece.	$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rvert} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \, {}_t p_{xy}$ $= 1 + a_{xy:\overline{n-1}\rvert}$	$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rvert} = 1 + a_{ww:\overline{n-1}\rvert}$	$\ddot{a}_{xy:\overline{n}\rvert} = \ddot{a}_{xy} - {}_{n}\lvert \ddot{a}_{xy}$ $= \dfrac{N_{xy} - N_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$
${}_{n}\lvert \ddot{a}_{xy}$	Representa el valor actuarial de una anualidad unitaria anticipada, diferida n años, pagadera a partir del n-ésimo año, y durante la existencia del estatus.	${}_{n}\lvert \ddot{a}_{xy} = {}_n E_{xy} \ddot{a}_{x+n:y+n}$ $= {}_n E_{xy} \left(1 + a_{x+n:y+n}\right)$ $= {}_n E_{xy} + {}_{n}\lvert a_{x+n:y+n}$	${}_{n}\lvert \ddot{a}_{xy} = {}_n E_{ww} \ddot{a}_{w+n:w+n}$ $= {}_{n}\lvert \ddot{a}_{ww}$	${}_{n}\lvert \ddot{a}_{xy} = {}_n E_{xy} \ddot{a}_{x+n:y+n}$ $= \dfrac{N_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$

CUADRO 2.4
Anualidades Vencidas y Anticipadas de Vida Múltiple pagaderas m veces al año

Notación	Descripción	Valor Presente Actuarial	Aproximación por la Fórmula de Woolhouse	Aproximación suponiendo DUM
$a_{xy:\overline{n\|}}^{(m)}$	Indica el valor actuarial de una anualidad unitaria vencida, temporal a *n* años, pagadera *m* veces al año durante la existencia del estatus (xy).	$a_{xy:\overline{n\|}}^{(m)} = a_{xy}^{(m)} - {}_{n\|}a_{xy}^{(m)}$	$a_{xy:\overline{n\|}}^{(m)} = a_{xy:\overline{n\|}} + \left[1 - {}_nE_{xy}\right]\left[\frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_{xy}+\delta\right)\right]$	$a_{x:\overline{n\|}}^{(m)} = \alpha(m)\, a_{x:\overline{n\|}} - \beta(m)$ $\alpha(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$ $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{i^{(m)}d^{m}}$
$\ddot{a}_{xy:\overline{n\|}}^{(m)}$	Denota el valor actuarial de una anualidad unitaria anticipada, temporal a *n* años, pagadera *m* veces al año durante la existencia del estatus (xy).	$\ddot{a}_{xy:\overline{n\|}}^{(m)} = \ddot{a}_{xy}^{(m)} - {}_{n\|}\ddot{a}_{xy}^{(m)}$	$\ddot{a}_{xy:\overline{n\|}}^{(m)} = \ddot{a}_{xy} + \left[1 - {}_nE_{xy}\right]\left[-\frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_{xy}+\delta\right)\right]$	$\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}^{(m)} = \alpha(m)\, \ddot{a}_{x:\overline{n\|}} - \beta(m)$
${}_{n\|}\ddot{a}_{xy}^{(m)}$	Representa el valor actuarial de una anualidad unitaria anticipada, diferida *n* años, pagadera *m* veces al año durante la existencia del estatus (xy).	${}_{n\|}\ddot{a}_{xy}^{(m)} = {}_nE_{xy}\,\ddot{a}_{x+n:y+n}^{(m)}$	${}_{n\|}\ddot{a}_{xy}^{(m)} \cong {}_{n\|}\ddot{a}_{xy} + {}_nE_{xy}\left[-\frac{m-1}{2} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_{xy}+\delta\right)\right]$	${}_{n\|}\ddot{a}_{x}^{(m)} = \alpha(m)\, {}_{n\|}\ddot{a}_{x} - \beta(m)$
${}_{n\|}a_{xy}^{(m)}$	Denota el valor actuarial de una anualidad unitaria vencida, diferida *n* años, pagadera *m* veces al año durante la existencia del estatus.	${}_{n\|}a_{xy}^{(m)} = {}_nE_{xy}\,a_{x+n:y+n}^{(m)}$	${}_{n\|}a_{xy}^{(m)} \cong {}_{n\|}a_{xy} + {}_nE_{xy}\left[\frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\mu_{xy}+\delta\right)\right]$	${}_{n\|}a_{x}^{(m)} = \alpha(m)\, {}_{n\|}a_{x} - \beta(m)$

BIBLIOGRAFÍA

- Adam Joseph, *Elementos de la Teoría Matemática de los Seguros*, Mapfre, Madrid 1976.

- Alistar Neill, *Life Contingencies*, Butterworth Heinemann, Oxford 1977.

- Arriaga Parra, Sánchez Chibras, *Elementos de Cálculo Actuarial*, UNAM, México 1981.

- Booth P., Chadbum, et al, *Modern Actuarial Theory and Practice*, Champman and Hall, Boca Raton, Flo. 1999.

- Bowers et al, *Actuarial Mathematics,* The Society of Actuaries, Cambridge University Press 1997.

- González Gále, *Elementos de Cálculo Actuarial*, Mucchi, Buenos Aires 1970.

- Hans U. Gerber, *Life Insurance Matematics,* Swiss Association of Actuaries, Zürich 1995.

- Hooker & Longley, L*ife and Other Contingencies vol II*, Cambridge University Press, Great Britain 1957.

- I. B. Hossack, *Introductory Statistics with Applications in General Insurance,* Cambridge University Press 1999.

- Jordan C. W., *Life Contingencies*, Society of Actuaries, Chicago 1975.

- Mendoza Ramírez M., Madrigal Gómez, Martínez Torres, *Modelos Estadísticos de Mortalidad Análisis de Datos 1991-1998,* Comisión Nacional de Seguros *Fianzas, México 2001.*

- Mendoza Ramírez M., Madrigal Gómez, Martínez Torres, *Tablas de Mortalidad CNSF 2000-I*, Comisión Nacional de Seguros *Fianzas, México 2000.*

- Nieto de Alba, *Matemática Actuarial,* Colección Universitaria, Mapfre, España 1993.

- Parzen Emmanuel, *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Limusa, México 1982.

- Trowbridge Charles L. *Fundamental Concepts of Actuarial Science,* AERF 1989

- Villalón G. Julio, *Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas,* Pirámide, España 1997.